UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Matemática Aplicada

Trabajo final del Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

ESTUDIO PARA HACER UNA PROGRAMACIÓN EN ORDEN A IMPARTIR MATEMÁTICAS EN BACHILLERATO APLICANDO DIVERSAS METODOLOGÍAS DEPENDIENDO DE LOS CONTENIDOS

Alumna: LAURA BARBADO GALLEGO

Tutores: Dr. CESÁREO J. GONZÁLEZ FERNÁNDEZ

Dr. IGNACIO MIGUEL CANTERO

Valladolid, junio 2025

RESUMEN

La programación didáctica que se recoge en el presente documento ha sido elaborada para la materia de Matemáticas I, para el primer curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología dentro de la Comunidad de Castilla y León. Está adaptada y contextualizada al I.E.S. Las Salinas, ubicado en la localidad vallisoletana de Laguna de Duero. Se basa en varias metodologías para impartir las clases: el método inductivo para la introducción de conceptos; la clase magistral participativa para la exposición de contenidos; la resolución guiada de problemas para el fomento de la comprensión y aplicación de los conocimientos ya vistos y, por último, el estudio de casos para afianzar todo lo aprendido. Se busca pues una combinación de metodologías que, haciendo uso de los recursos adecuados, garanticen el aprendizaje significativo por parte del alumnado. Se incluirá al final una unidad didáctica elaborada de acuerdo con los fundamentos pedagógicos de estas metodologías, que ilustre fielmente lo planteado en esta memoria.

Palabras clave: *Matemáticas, Bachillerato, programación didáctica, método inductivo, resolución guiada de problemas, clase magistral participativa, estudio de casos*

ABSTRACT

The programming included in this document has been elaborated for the subject of Mathematics I, for non-compulsory secondary education in the modality of Science and Technology in the Community of Castilla y León. It is adapted and contextualised to I.E.S. Las Salinas, located in the town of Laguna de Duero, Valladolid. It is based on several methodologies for teaching classes: the inductive method for the introduction of concepts; the participatory master class for the presentation of content; guided problem solving to promote understanding and application of the knowledge already seen and finally, the case study to consolidate all that has been learned. A combination of methodologies is therefore sought which, making use of the appropriate resources, guarantee significant learning on the part of the students. A didactic unit will be included at the end, elaborated in accordance with the pedagogical foundations of these methodologies, which faithfully illustrate what has been proposed in this report.

Keywords*: Mathematics, non-compulsory secondary education, programming, inductive method, guided problem solving, participatory master class, case studies.*

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El Trabajo de Fin de Máster permite poner en práctica en contextos educativos reales, los conocimientos y habilidades adquiridos en cada asignatura del Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, estableciendo así una estrecha relación con cada una de ellas. El Trabajo de Fin de Máster forma parte, junto con las prácticas externas, del módulo de especialización "Prácticum y Fin de Máster".

En el contexto educativo actual, es imprescindible que los docentes dispongan de un amplio abanico de recursos metodológicos que les permita atender de forma eficaz a la diversidad del alumnado, especialmente en materias como las Matemáticas, donde el nivel de abstracción y la complejidad de los contenidos pueden suponer una barrera para muchos estudiantes. Una enseñanza eficaz debe apoyarse en metodologías flexibles, activas e inclusivas, capaces de adaptarse al ritmo, los intereses y las necesidades específicas de cada estudiante. En la etapa de Bachillerato, donde se consolida gran parte de la formación académica y personal del alumnado antes de su incorporación a la universidad o al mundo laboral, esta necesidad se vuelve aún más evidente.

El presente documento recoge una programación didáctica de Matemáticas propia y original dirigida al alumnado de 1º de Bachillerato en el itinerario científico-tecnológico. Para su elaboración, se ha tomado como referencia un grupo real de 16 estudiantes con un perfil heterogéneo, pertenecientes a un aula de un instituto ubicado en la localidad de Laguna de Duero. Esta diversidad exige una planificación metodológica que facilite el aprendizaje de contenidos y fomente la motivación y la participación activa de cada integrante del grupo.

Para dar respuesta a esta realidad, la programación presentada incorpora principios del Constructivismo, la Teoría de las Inteligencias Múltiples y la Zona de Desarrollo Próximo. Así, se emplean metodologías diversas como la resolución guiada de problemas, el estudio de casos, la enseñanza expositiva participativa y el enfoque inductivo, que permiten ajustar el nivel de apoyo docente al progreso individual de cada alumno. Estas estrategias buscan la adquisición de conocimientos matemáticos y el desarrollo de habilidades como el pensamiento crítico y el autoaprendizaje.

Durante un corto periodo de tiempo, ha sido posible poner en práctica la metodología diseñada en el instituto de referencia, permitiendo observar su aplicación directa en el aula. El resultado de esta implementación se recoge en el apartado 5. "Conclusiones".

En resumen, el presente documento pone de manifiesto que una planificación didáctica basada en metodologías activas, inclusivas y ajustadas a las necesidades reales del alumnado resulta fundamental para garantizar un aprendizaje significativo.

2. PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA

2.1. MARCO LEGAL

La programación didáctica que se recoge en el presente documento ha sido elaborada para la materia de Matemáticas I, para el primer curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología dentro de la Comunidad de Castilla y León.

Los documentos legislativos sobre los que se fundamenta esta programación didáctica se citan a continuación:

- Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.
- DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León
- Orden EDU/425/2024, de 9 de mayo, por la que se desarrolla la evaluación, la promoción y la titulación en el Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.
- Orden EDU/1152/2010, de 3 de agosto, por la que se regula la respuesta educativa al alumnado con necesidad específica de apoyo educativo escolarizado en el segundo ciclo de Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Enseñanzas de Educación Especial, en los centros docentes de la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*, núm. 152
- Documentos propios del Instituto de Educación Secundaria Las Salinas: PEC, PGA, RRI, Plan de Atención a la Diversidad.

2.2. CONTEXTUALIZACIÓN Y CARACTERÍSTICAS DE LA MATERIA

La programación didáctica está adaptada al I.E.S Las Salinas, por ser el centro donde se llevaron a cabo las prácticas enmarcadas en el módulo de especialización “Prácticum y Fin de Máster”. Se describen a continuación algunas de las características más distintivas del centro y de su entorno.

El I.E.S. Las Salinas es un centro público dependiente de la Consejería de la Junta de Castilla y León, ubicado en la localidad de Laguna de Duero, a 7 km al sur de Valladolid. Según los datos de censo de 2024 (INE, n.d.), Laguna de Duero es el municipio más poblado de la provincia, con un porcentaje de habitantes en edad escolar superior a la media provincial lo que respalda la presencia de una amplia oferta educativa. El municipio ha experimentado un crecimiento demográfico notable en las últimas tres décadas, en parte gracias a la inmigración, lo que ha provocado la expansión del entorno residencial.

El alumnado del I.E.S Las Salinas presenta características diversas: alumnos sin necesidades educativas especiales conviven con otros que enfrentan serias dificultades de aprendizaje. En los cursos iniciales hay mayor afluencia de inmigrantes y minorías étnicas, pero progresivamente los grupos se vuelven más homogéneos hasta llegar a Bachillerato. El nivel socioeconómico de las familias es en general intermedio y la mayoría de los alumnos dispone de acceso a recursos digitales básicos para la realización de actividades académicas en línea.

Si hay algo que distingue al I.E.S Las Salinas de otros, es la vasta oferta en actividades extracurriculares en el ámbito académico, cultural, deportivo o social. Cualquier estudiante puede cultivar sus intereses, sus pasiones o simplemente reforzar una materia mediante la participación en las actividades propias del centro. Es destacable además el alto nivel de participación y la buena acogida de estas actividades por parte del alumnado.

En este contexto se encuentra la clase de 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias para la que se ha preparado la programación didáctica. A esta clase asisten 16 alumnos entre los cuales hay uno con altas capacidades y tres cuyos rendimientos académicos en Matemáticas han ido empeorando debido, en parte, a la dificultad para comprender los nuevos conceptos abordados este curso. El resto de los alumnos presenta en general interés por la asignatura, con distintos niveles de comprensión y autonomía en la resolución de problemas.

Si bien la programación está preparada y adaptada a este grupo en concreto, se podría implementar en grupos diferentes para el mismo nivel puesto que, los contenidos y las metodologías están pensadas para abarcar a todo el alumnado. Además, se han tenido en cuenta las directrices del DUA (CAST, 2018) para aportar un enfoque más inclusivo.

Las características de la materia de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología se establecen en el apartado denominado “Matemáticas” del Anexo III, del DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre.

2.3 COMPETENCIAS CLAVE Y PERFIL COMPETENCIAL

Preparar al alumnado para enfrentarse a los desafíos de la sociedad actual se ha convertido en uno de los principales objetivos del sistema educativo actual. Durante la enseñanza básica se ha procurado que el alumnado adquiera un grado de desarrollo adecuado de las competencias clave, de acuerdo con el perfil de salida. En consecuencia, el Bachillerato, representa la continuidad en ese proceso de adquisición de las competencias clave para el aprendizaje permanente.

Las competencias clave en el Bachillerato aparecen descritas en el Anexo I del DECRETO 40/2022 de 29 de septiembre. Son un total de 8 competencias que se enumeran a continuación:

- Competencia en Comunicación Lingüística (CLL).
- Competencia Plurilingüe (CP).
- Competencia Matemáticas y Ciencia y Tecnología (STEM).
- Competencia Digital (CD).
- Competencia Personal, Social y de Aprender a Aprender (CPSAA).
- Competencia Ciudadana (CC).
- Competencia Emprendedora (CE).

- Competencia en Conciencia y Expresión Culturales (CEC).

Cada competencia clave integra tres dimensiones, la cognitiva, la instrumental y la actitudinal. La dimensión cognitiva alude a conocimientos en forma de hechos, cifras, datos o conceptos ya establecidos y que se identifica con el "*saber*". La dimensión instrumental supone la habilidad para aplicar esos conocimientos y por tanto se identifica con el "*hacer*". Por último, la dimensión actitudinal, que integra valores, emociones, hábitos y principios, es aquella que se identifica con el "*querer*". Existe una fuerte interrelación entre estas tres dimensiones de manera que los conocimientos no se aprenden al margen de su aplicación, ni determinadas destrezas se adquieren de no existir un conocimiento base. Tanto unos como otros aprendizajes estarán siempre condicionados por la influencia social y cultural, que determinarán el tercer componente, las creencias y valores del alumno.

Las competencias clave permiten vincular los aprendizajes formales de las áreas curriculares con las experiencias personales y los saberes adquiridos en distintos ámbitos de la vida. Esta conexión favorece tanto el desarrollo personal como la inclusión social, integrando de forma efectiva dichos aprendizajes en contextos cotidianos. Por ello, se apuesta por un enfoque de aprendizaje integrador que va más allá de los contenidos estrictamente curriculares.

El nuevo currículo se articula en torno al desarrollo competencial del alumnado, priorizando la adquisición de habilidades que impulsen su crecimiento personal, su participación activa en la sociedad y su progreso académico.

Las competencias clave se articulan de manera coherente con las competencias específicas de cada área, actuando como referentes generales del perfil competencial que se espera al finalizar la etapa. Esta conexión se concreta a través de los descriptores operativos, que traducen dichas competencias en actuaciones observables y medibles. A su vez, estos elementos se alinean con los objetivos de etapa, garantizando una continuidad en el proceso educativo y favoreciendo un desarrollo integral del alumnado. Esta relación se recoge en la matriz de correspondencia que aparece en la Tabla 1. del apartado 2.10.1 Competencias específicas y criterios de evaluación.

2.4 COMPETENCIAS ESPECÍFICAS Y VINCULACIONES CON LOS DESCRIPTORES OPERATIVOS: MAPA DE RELACIONES COMPETENCIALES

Las competencias específicas de la materia de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología son las establecidas en el apartado denominado "Matemáticas" del Anexo III del DECRETO 40/2022 de 29 de septiembre.

El mapa de relaciones competenciales de dicha materia se establece en el Anexo IV del DECRETO 40/2022 de 29 de septiembre.

2.5 CONTENIDOS DE CARÁCTER TRANSVERSAL QUE SE TRABAJARÁN DESDE LA MATERIA

Tal y como se determina en los apartados 1 y 2 del artículo 9 del DECRETO 40/2022 de 29 de septiembre, en todas las materias se trabajarán:

- CT.1: Las Tecnologías de la Información y la Comunicación y su uso responsable.
- CT.2: La educación para la convivencia escolar proactiva, orientada al respeto de la diversidad como fuente de riqueza.
- CT.3: Las técnicas y estrategias propias de la oratoria que proporcionen al alumnado confianza en sí mismo, gestión de sus emociones y mejora de sus habilidades sociales.

Y se desarrollarán:

- CT.4: Actividades que fomenten el interés y el hábito de lectura.
- CT.5: Actividades que fomenten destrezas para una correcta expresión escrita.

Las pautas generales sobre la incorporación de los contenidos transversales que figuran en la Propuesta Curricular para Bachillerato del I.E.S Las Salinas (2024), coinciden con las que corresponden al citado Decreto, sin especificaciones sobre aspectos a trabajar, temporalización o secuenciación. Es por ello por lo que se incorpora en esta programación didáctica la secuencia más adecuada de los contenidos transversales que se trabajarán en las diferentes unidades didácticas. Será el docente de la materia el que detalle en su programación de aula las actividades correspondientes a los contenidos transversales a trabajar.

Por último, hay que indicar que se otorga un especial tratamiento a los contenidos relacionados con la mejora de la convivencia escolar por lo que se trabajarán en todas las unidades impartidas a lo largo del curso.

2.6 METODOLOGÍA DIDÁCTICA

2.6.1 Fundamentos teóricos

La etapa de Bachillerato supone una fase más en la formación de la persona tras la culminación de la educación secundaria obligatoria, que aporta al estudiante una formación que le acompañará en su tránsito a la vida adulta. Para el lograr esta finalidad y los objetivos de la etapa de Bachillerato, se requiere una metodología didáctica que deberá estar fundamentada en principios básicos del aprendizaje por competencias. Dicho modelo de educación por competencias tiene como fuentes últimas las recomendaciones de la Unión Europea. Las propias competencias clave, a su vez, se asientan en tres principios comunes para desarrollar en el alumnado: la actuación autónoma, la interacción con grupos heterogéneos y el uso interactivo de herramientas. Se requiere además una perspectiva inclusiva, que tenga en cuenta la diversidad del alumnado, facilitando el acceso al aprendizaje a través de estrategias, actividades, materiales y agrupamientos que favorezcan la implicación del alumnado.

Los procesos de enseñanza-aprendizaje deben facilitar la construcción de aprendizajes significativos y funcionales. En este sentido, la Teoría de las Inteligencias Múltiples (Gardner, H. 1983) ofrece un enfoque que permite diversificar la enseñanza y atender la diversidad de estilos de aprendizaje en el aula. Al reconocer que los estudiantes poseen diferentes tipos de inteligencia, los docentes deben diseñar estrategias que potencien sus habilidades individuales, donde cada inteligencia sea valorada, estimulada y desarrollada. Cada estudiante tendrá un patrón único de fortalezas y debilidades que influirá en su capacidad para asimilar la información que se le presente de una manera particular. Aplicar esta teoría en el aula implica emplear una variedad de metodologías que promuevan un aprendizaje más efectivo.

Es importante además que cualquiera de las metodologías seleccionadas por los docentes se ajuste al nivel inicial del alumnado y se planifique la enseñanza de nuevos aprendizajes a partir de lo que el alumno sabe y es capaz de hacer. Esto se fundamenta en los estudios llevados a cabo por Vygotsky, que identificó esta brecha entre conocimiento inicial y conocimiento potencial y formuló la idea de la “Zona de Desarrollo Próximo” (Vygotsky, L. 1978). De forma casi paralela, Wood, Bruner y Ross (1976) explican que, para acortar esta brecha, es necesario que el docente proporcione al alumno un “andamiaje” o un apoyo adaptado a su nivel para que logre los objetivos planteados en cada tarea. Este apoyo se retira progresivamente para conseguir una autonomía en la resolución de las tareas por parte del alumno. Así, se consigue que el alumno cree las condiciones necesarias para incorporar los conocimientos a su estructura mental de manera progresiva, lo que favorece la consolidación de los aprendizajes, evitando que sean meramente memorísticos.

Siguiendo las teorías anteriores, el proceso de resolución de problemas en matemáticas debe adaptarse al nivel de cada alumno, proporcionando apoyos que les ayuden a avanzar dentro de su Zona de Desarrollo Próximo. En este sentido, la Taxonomía de Bloom en su versión revisada (Anderson & Krathwohl, 2001) ofrece un marco para estructurar el aprendizaje de manera progresiva. Inicialmente, los alumnos necesitan apoyo en niveles básicos, como recordar y comprender conceptos matemáticos. A medida que desarrollan habilidades, los problemas pueden enfocarse en la aplicación y el análisis, promoviendo la autonomía en la resolución. Finalmente, al reducir los apoyos, los estudiantes enfrentan desafíos que requieren evaluar y crear soluciones propias, demostrando un pensamiento crítico avanzado. Así, la planificación de problemas matemáticos no solo facilita el aprendizaje gradual, sino que también guía a los alumnos desde la dependencia del docente hacia la independencia cognitiva, en línea con las teorías del aprendizaje y el desarrollo.

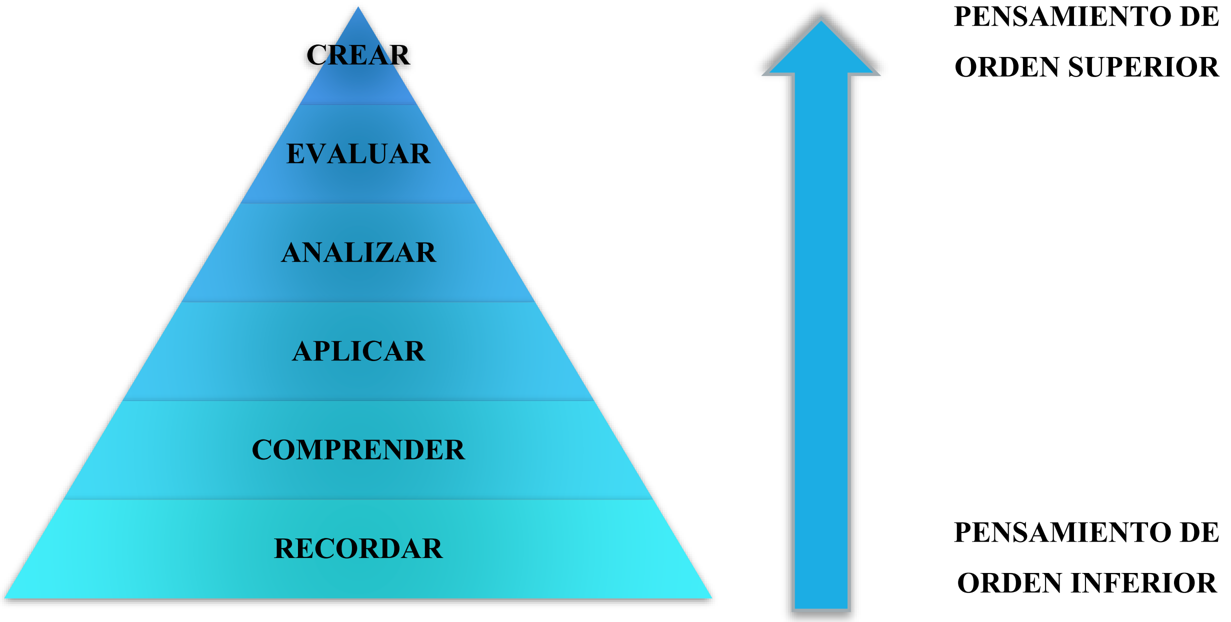


Figura 1. Niveles de la taxonomía revisada de Bloom. Elaboración propia.

Para guiar la resolución de problemas, de acuerdo con el enfoque de Pólya (1945), es necesario establecer una secuencia de pasos que conduzcan a la resolución del problema: desde la comprensión del enunciado, seguido de la configuración y ejecución de un plan de resolución para finalmente examinar la solución obtenida. Será necesario plantear en cada paso una serie de cuestiones para avanzar de forma óptima en la resolución.

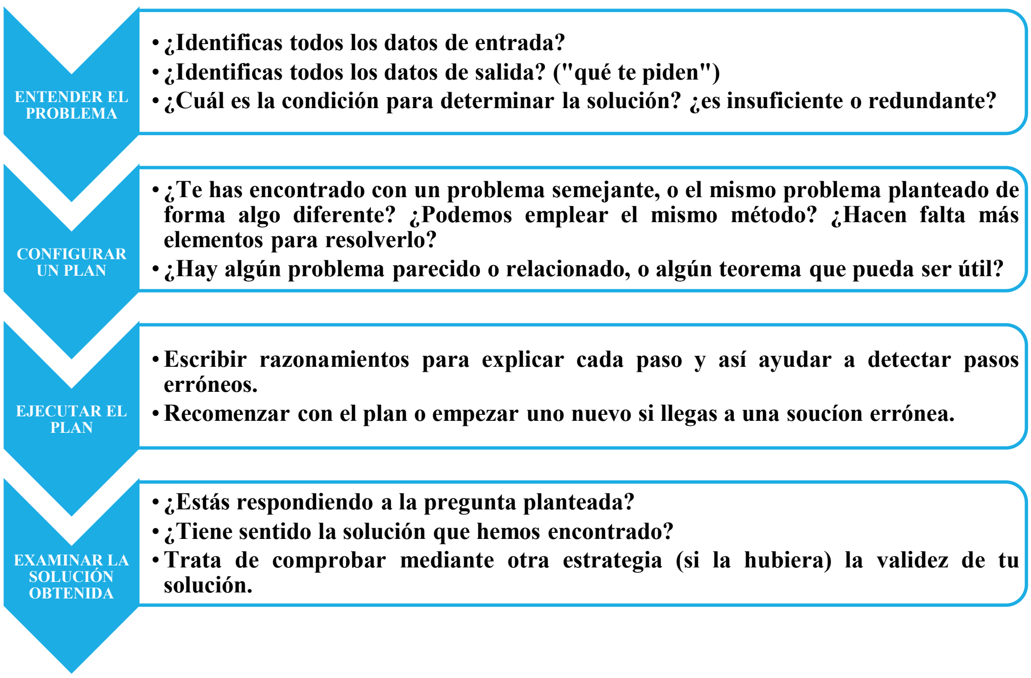


Figura 2. Preguntas dirigidas en cada etapa del proceso de resolución de problemas matemáticos según Pólya. Elaboración propia.

Como síntesis, el aprendizaje significativo requiere de estrategias metodologías que sitúen al alumno como protagonista de su propio aprendizaje, permitiéndole construir conocimientos desde sus experiencias previas. Se privilegiarán operaciones mentales de tipo inductivo partiendo del análisis de casos particulares para, a través de la búsqueda de relaciones y regularidades, llegar a generalizaciones significativas. Este enfoque según Arce Sánchez, Conejo Garrote y Muñoz-Escolano (2019), favorece la argumentación matemática, estimula operaciones mentales complejas y fortalece la conexión entre saberes previos y nuevos conocimientos, facilitando un aprendizaje profundo y contextualizado. Otro ejemplo de metodología activa alineada con el Constructivismo es el estudio de casos, que busca desarrollar el sentido práctico de los estudiantes respecto una área concreta enfrentándolos a situaciones problemáticas; un relato o una descripción que suscita una serie de preguntas a las que se pretende dar respuesta. Los estudiantes ejercitan el pensamiento abstracto, plantean diversas hipótesis, ponderan las más adecuadas y luego comprueban los resultados, fomentando así la creatividad y la innovación.

2.6.2 Metodologías y estilos de enseñanza

Se combinan dentro del aula diversas estrategias metodológicas adaptadas a las diferentes capacidades del alumnado. Se potencia además la interacción entre estudiantes a través de la resolución conjunta de tareas, el intercambio de ideas y el debate. Las estrategias adoptadas contribuirán a la transferibilidad del aprendizaje mediante la elaboración de hipótesis o la capacidad de síntesis para transmitir conclusiones.

De entre la variedad de técnicas susceptibles de ser empleadas se han escogido las que se describen a continuación. Estas metodologías se articularán en función del momento específico y las necesidades que surjan durante el desarrollo de la explicación en el aula :

- <u>Metodología inductiva</u>: se presentan uno o varios casos particulares para los cuales se cumple una afirmación y a partir de los que se establece la validez de dicha afirmación de forma general. La secuencia será siempre la misma: exposición de los hechos, análisis, búsqueda de relaciones y factores implicados y finalmente generalización y definición o demostración.
  - ✓ Se hará uso de esta metodología para *introducir* nuevos conceptos, al inicio de los bloques y para que la conexión entre conocimientos previos y nuevos se realice de forma más natural.
  - ✓ Se escoge esta metodología porque permite al alumnado construir el conocimiento a partir de la observación, el análisis y la detección de patrones, favoreciendo la comprensión profunda y duradera. Se adapta bien a la diversidad de estilos de aprendizaje, permitiendo que cada alumno avance a su ritmo en la construcción de conceptos abstractos. Por último, estimula la curiosidad y fomenta el pensamiento crítico desde los niveles inferiores hasta los superiores de acuerdo con la taxonomía revisada de Bloom.
- <u>Enseñanza expositiva participativa</u>: se organiza la lección de forma lógica, utilizando ilustraciones, analogías y mapas conceptuales. Se promueve periódicamente la actividad cognitiva del alumno mediante preguntas y tareas que exijan la codificación de lo expuesto con sus propias palabras. Las enseñanzas expositivas finalizan con un resumen de las ideas principales.

- ✓ Se hará uso de esta metodología para *explicar* conceptos, principios, definiciones, afirmaciones, etc.
- ✓ Se escoge esta metodología porque se considera necesaria para transmitir de manera ordenada y rigurosa las teorías y conceptos complejos. Adicionalmente, para el docente es más sencillo organizar la información de forma lógica para transmitir los contenidos siguiendo una estructura ordenada. Cuando en la enseñanza expositiva participa el alumnado, el aula se convierte en un espacio de debate que permite la resolución de las dudas inmediatas y la adaptación del discurso a las necesidades del aula. Por lo tanto, la enseñanza expositiva bien gestionada constituye una metodología imprescindible para garantizar un proceso de enseñanza – aprendizaje de calidad.

- Resolución guiada de problemas: se apoyará la resolución guiada siguiendo la Taxonomía de Bloom, adaptando el nivel de intervención del docente al nivel del alumnado, comenzando con recordatorios de hechos o fórmulas y progresando hacia la evaluación y creación de estrategias más complejas. Se utilizará un esquema común a todos los problemas siguiendo la secuencia de Pólya de tal manera que se irá marcando cada etapa del proceso de resolución con preguntas dirigidas.
  - ✓ Se hará uso de esta metodología para *fomentar la comprensión y aplicación* de los conceptos vistos. Se realizarán ejercicios y problemas guiados al finalizar las explicaciones teóricas de un determinado bloque.
  - ✓ Se escoge esta metodología porque el acompañamiento docente en la resolución de problemas en Matemáticas resulta fundamental para guiar progresivamente al alumno desde su zona de desarrollo actual hasta niveles más complejos de acuerdo con la teoría del andamiaje de Bruner. Además, la atención a la diversidad se ve satisfecha pues cada alumno puede enfrentarse a los problemas con el apoyo adaptado a su nivel
- Estudio de casos: se presentará un caso real y contextualizado sobre una situación, un incidente o suceso que envuelva la toma de decisiones relacionado con la unidad didáctica que se esté tratando en ese momento. Los alumnos analizarán el problema, determinarán un método de análisis y trabajarán la toma de decisiones. El docente por su parte proporcionará las herramientas necesarias para analizar y discutir el caso, orientará el debate en el aula y se encargará de mantener el interés de los participantes en el tema de discusión. Esta tarea será evaluable.
  - ✓ Se presentará un estudio de casos al finalizar cada unidad didáctica o bloque correspondiente para *afianzar* los conocimientos adquiridos.
  - ✓ Aunque inicialmente se valoró emplear la técnica del aprendizaje basado en proyectos (ABP) para el cierre de las unidades, se consideró que el estudio de casos era más oportuno por su mayor concreción, aplicabilidad directa en sesiones más breves y su eficacia para consolidar contenidos en contextos reales sin requerir una planificación tan extensa. La preparación previa en contextos reales que suscitan el interés del alumnado contribuye a una mayor motivación a la hora de implicarse en la resolución de los casos y como consecuencia, se adquiere una comprensión más profunda y funcional de los conceptos trabajados a lo largo de la unidad.

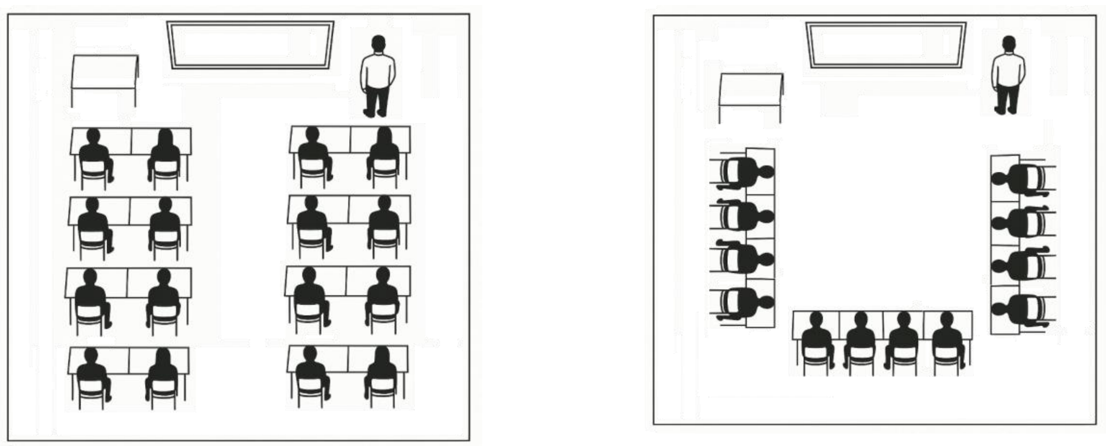
Figura 3. Metodologías empleadas en cada unidad didáctica/bloque. Elaboración propia.

2.6.3 Agrupamientos y organización de espacios

Los espacios son flexibles, ya que el mobiliario disponible permite ser colocado de manera que puedan realizarse tareas en grupo y/o individuales, según la actividad lo requiera. Además, la puesta en común de ideas, la reflexión y las explicaciones del docente se llevan a cabo en gran grupo.

El alumnado se agrupa por parejas en las sesiones en las que el docente conjuga los métodos inductivos, la lección expositiva y la resolución de problemas. De esta manera, se favorece la interacción entre pares de alumnos. Se colocan de manera que los alumnos con bajo rendimiento y menor interés por la materia no formen pares entre ellos para evitar que caigan en la desidia por copiar el comportamiento del otro.

El agrupamiento será en forma de asamblea o disposición de mesas en "U" en las sesiones en las que se trate el estudio de casos. De esta forma, los alumnos podrán debatir en gran grupo en los momentos en que se requiera y realizar las reflexiones individuales o en pequeños agrupamientos cuando sea necesario.



Agrupamiento en pares | **Agrupamiento en U**

Figura 4. Agrupamientos en el aula. Elaboración propia.

2.7 MATERIALES Y RECURSOS DE DESARROLLO CURRICULAR

Los materiales y recursos de desarrollo curricular para poder atender a las necesidades educativas del alumnado son flexibles. La selección y el uso de dichos recursos y materiales didácticos, realizados con criterios precisos de coordinación docente, buscan enriquecer el proceso educativo, para lo cual se tiene en cuenta el objetivo de aprendizaje, su contextualización, el grado de adaptabilidad a la diversidad y al ritmo de trabajo del alumnado, la facilidad de uso y disponibilidad, su capacidad para generar motivación, así como su potencial para estimular habilidades metacognitivas y de pensamiento crítico.

Todas las aulas del centro están dotadas de ordenador y proyector y/o pantalla digital y el centro dispone de aulas de informática, o en su defecto de dispositivos para llevar al aula (tabletas u ordenadores portátiles) para realizar tareas digitales de forma individual o grupal fomentando así la alfabetización digital integrándola y utilizándola de manera creativa en el proceso de aprendizaje. El departamento dispone además de material manipulativo que permite al alumnado trabajar de forma individual, ajustándose a su ritmo de aprendizaje, o en pequeños grupos colaborativos.

Se presentan a continuación los materiales y recursos de desarrollo curricular adaptados al nivel de etapa y al curso de Matemáticas de 1º de Bachillerato para el módulo de Ciencias y Tecnología:

- <u>Materiales de desarrollo curricular</u>
  - Impresos
    - A. Libro de texto: MATEMÁTICAS I. 1º Bachillerato. Editorial: Tu Libro. ISBN 2022: 978-84-16812-74-5. Edición 2022.
    - B. Cuaderno del alumno. Sin requerimientos especiales.
  - Digitales e informáticos
    - A. Calculadora científica
    - B. Medios que permiten la comunicación online entre el alumnado y el profesorado: Aula Moodle, Teams y correo corporativo.
- <u>Recursos de desarrollo curricular</u>
  - Manipulativos
    - A. Material para la construcción de cuerpos geométricos
    - B. Geoplanos
    - C. Secciones: cónicas
  - Digitales e informáticos
    - A. Ordenadores y tabletas
    - B. Aplicaciones o software para trabajar la geometría dinámica, el cálculo simbólico, la representación y el análisis de funciones como Geogebra, GeogebraCAS, Mathway, Symbolab, etc.
    - C. Aplicaciones o software para trabajar las simulaciones y el tratamiento de datos estadísticos como las hojas de cálculo Excel, Mathigon, etc.

- Medios audiovisuales y multimedia
  - A. Recursos en red en forma de animaciones y vídeos educativos: canal “Derivando”, canal “Veritaserum”, Historia de las Matemáticas en la BBC, etc.
  - B. Páginas o blogs de matemáticas: ejercicios interactivos Thatquiz
  - C. Herramientas de gamificación como las que proporciona Genially, Kahoot o Quizzit.

2.8 CONCRECIÓN DE PLANES, PROGRAMAS Y PROYECTOS DEL CENTRO VINCULADOS CON EL DESARROLLO DEL CURRÍCULO DE LA MATERIA

A continuación, se concreta la implicación desde la materia en los diferentes planes, programas y proyectos del centro:

- El espacio expositivo “REVER”, donde se muestran distintas exposiciones temporales del alumnado, contará este curso con un mes dedicado a la divulgación matemática, donde los alumnos de primer curso de Bachillerato de todas las modalidades que se imparten en el centro elegirán una temática y desarrollarán los contenidos a mostrar. Posteriormente el material elaborado se expondrá en el espacio destinado a tal efecto.

- El Plan TIC se promueve desde el departamento de Matemáticas fomentando el uso de herramientas digitales y software para trabajar la materia.

- En el Día de la Ciencia -acontecimiento anual en el que participa todo el centro- juega un papel muy activo el Departamento de Matemáticas y su alumnado. Los alumnos de primer curso de Bachillerato se encargarán este año de preparar el estand dedicado a las cónicas: se trabajará con material reciclado y se formarán focos y luces láser dirigidas a distintas formas cónicas para ver cómo se comporta su proyección. Igualmente prepararán una maqueta del cono de Apolonio para su exposición. Por último, se encargarán de enriquecer el puesto con una línea temporal de los hitos históricos y los diferentes sucesos matemáticos que conformaron la teoría de las cónicas tal y como la conocemos.

Teniendo en cuenta las particularidades de la asignatura, las dificultades que suelen presentar los estudiantes en su comprensión y el escaso interés que a menudo despierta, se plantean dos proyectos complementarios que podrían resultar motivadores y enriquecedores para desarrollar en el centro:

- “Matemáticas en la vida real”: se organizarían charlas mensuales con profesionales (ingenieros, economistas, científicos, arquitectos, etc.) donde podrían explicar cómo usan las Matemáticas en sus profesiones.

- “Escape room matemático”: consistiría en ambientar un aula para que los alumnos, organizados por grupos, resolvieran retos matemáticos en el menor tiempo posible. Se harían grupos por nivel y se otorgaría un premio al grupo más rápido.

2.9 ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS Y EXTRAESCOLARES

Las actividades que se llevan a cabo en el seno de la materia de Matemáticas, en las que participa el alumnado de primer curso de Bachillerato, que a su vez son objeto de desarrollo por parte del centro educativo bajo un tratamiento interdisciplinar y global se detallan a continuación:

TÍTULO	**NIVEL**	**TEMPORALIZACIÓN**
Viaje a Bélgica	1º de Bachillerato	1ª semana de Abril
DESCRIPCIÓN		
Actividad interdisciplinar organizada por el Departamento de Idiomas. Consistente en una semana de visita a Bruselas, Gante, Brujas y Amberes. Desde el Departamento de Matemáticas se propone la actividad de media jornada de duración que consiste en visitar Technopolis en Malines (Bruselas) y realización del taller matemático que se organice en el momento de la visita.		

TÍTULO	**NIVEL**	**TEMPORALIZACIÓN**
El tour de las mates	1º de Bachillerato	Pendiente de definición por parte de los organizadores
DESCRIPCIÓN		
Competición de cálculo mental ambientada en una carrera ciclista como forma motivante de trabajar el cálculo mental con el alumnado. Se explica a los alumnos en qué consiste y se organizan las diferentes pruebas en el calendario entregado por la organización que constituirá cada una de las etapas que conforman la carrera.		

TÍTULO	**NIVEL**	**TEMPORALIZACIÓN**
Olimpiada Matemática	1º de Bachillerato	Pendiente de definición por parte de los organizadores
DESCRIPCIÓN		

Competición académica anual promovida por el Departamento de Matemáticas para fomentar el interés por la materia. Se realiza la prueba inicial al alumnado que desee participar y aquellos que obtengan las mejores calificaciones de acuerdo con el reglamento del año escolar en curso, participan en la prueba a nivel provincial.

2.10 EVALUACIÓN DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DEL ALUMNADO

Existen cuatro elementos que forman parte del proceso de evaluación del alumnado: los criterios de evaluación, los instrumentos de evaluación, los momentos de la evaluación y los agentes evaluadores. Estos, responden a las cuestiones: ¿qué evaluar?; ¿cómo evaluar?; ¿cuándo evaluar? y ¿quién evalúa? Será fundamental que estos elementos sean coherentes y estén interrelacionados, de modo que en función del momento de la evaluación y del agente evaluador, se seleccionará una técnica concreta de evaluación y unos instrumentos específicos para la misma. Existe un quinto elemento que hace referencia a la calificación de los aprendizajes del alumnado.

2.10.1 Competencias específicas y criterios de evaluación

La adquisición de las competencias específicas constituye la base para la evaluación competencial del alumnado. El nivel de desarrollo de cada competencia específica vendrá determinado por el grado de consecución de los criterios de evaluación con los que ese vincula, por lo que estos han de entenderse como herramientas de diagnóstico en relación con el desarrollo de las propias competencias específicas. Estos criterios se han formulado vinculados a los descriptores de las competencias clave en la etapa, a través de las competencias específicas, de tal forma que no se produzca una evaluación de la materia independiente de las competencias clave.

Las competencias específicas plasman la concreción de los descriptores operativos de las competencias clave. En Matemáticas I, las competencias específicas se relacionan entre sí y han sido agrupadas en torno a cinco bloques competenciales, según su naturaleza: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación y desarrollo socioafectivo.

	COMPETENCIAS CLAVE		CCL			CP		STEM					CD				CPSAA						CC			CE		CCEC			
BLOQUES COMPETENCIALES	COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CCL1	CCL2	CCL3	CP1	CP3	STEM1	STEM2	STEM3	STEM4	STEM5	CD1	CD2	CD3	CD5	CPSAA1.1	CPSAA1.2	CPSAA3.1	CPSAA3.2	CPSAA4	CPSAA5	CC2	CC3	CC4	CE2	CE3	CCEC1	CCEC3.2	CCEC4.1	CCEC4.2
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	**1.** Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones.	**1.1** Manejar algunas estrategias y herramientas, incluidas las digitales, en la modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología, evaluando su eficiencia en cada caso.		X				X		X				X							X						X				
		1.2 Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología, describiendo el procedimiento utilizado.		X					X							X					X	X					X				
	2. Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.	**2.1** Comprobar la validez matemática de las posibles soluciones de un problema utilizando el razonamiento y la argumentación.						X	X																		X				
		2.2 Seleccionar la solución más adecuada de un problema en función del contexto (de sostenibilidad, de consumo responsable, equidad...) usando el razonamiento y la argumentación.						X	X						X						X			X			X				
RAZONAMIENTO Y PRUEBA	**3.** Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.	**3.1** Adquirir nuevo conocimiento matemático a partir de la formulación de conjeturas y problemas de forma guiada.	X					X	X																						
		3.2 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la formulación o investigación de conjeturas o problemas.						X	X				X	X	X																
	4. Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de la ciencia y la tecnología.	**4.1** Interpretar, modelizar y resolver situaciones problematizadas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología, utilizando el pensamiento computacional, modificando y creando algoritmos.						X	X	X				X	X	X											X				
CONEXIONES	**5.** Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.	**5.1** Manifestar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas.						X		X				X	X													X			
		5.2 Resolver problemas en contextos matemáticos estableciendo y aplicando conexiones entre las diferentes ideas matemáticas.						X		X				X	X																
	6. Descubrir los vínculos de las Matemáticas con otras áreas de conocimiento y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.	**6.1** Resolver problemas en situaciones diversas, utilizando procesos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real, otras áreas de conocimiento y las matemáticas.						X	X					X								X					X				
		6.2 Analizar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad, reflexionando sobre su contribución en la propuesta de soluciones a situaciones complejas y a los retos científicos y tecnológicos que se plantean en la sociedad.																							X	X		X			
COMUNICACIÓN Y REPRESENTACIÓN	**7.** Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.	**7.1** Representar ideas matemáticas, estructurando diferentes razonamientos matemáticos y seleccionando las tecnologías más adecuadas.	X							X			X	X		X															
		7.2 Seleccionar y utilizar diversas formas de representación, valorando su utilidad para compartir información.								X				X		X											X			X	
	8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.	**8.1** Mostrar organización al comunicar las ideas matemáticas empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados.	X		X	X			X		X				X														X		
		8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor.																													
DESARROLLO SOCIOAFECTIVO	**9.** Utilizar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de los demás y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas.	**9.1** Afrontar las situaciones de incertidumbre, identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas.										X					X	X	X	X			X	X		X					
		9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando y aprendiendo de la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.										X					X	X	X							X					
		9.3 Participar en tareas matemáticas de forma activa en equipos heterogéneos, respetando las emociones y experiencias de los demás, escuchando su razonamiento, identificando las habilidades sociales más propicias y fomentando el bienestar grupal y las relaciones saludables.					X					X							X	X			X	X		X					

Tabla 1. Matriz de correspondencia entre competencias clave, competencias específicas, criterios de evaluación, bloques competenciales y descriptores operativos para primer curso de Bachillerato. Extracto del Anexo III del DECRETO 40/2022 de 29 de septiembre. Elaboración propia.

2.10.2 Instrumentos de evaluación

Los instrumentos empleados son variados con el fin de facilitar y asegurar la evaluación integral y admiten la adaptación a la diversidad del alumnado; en especial, al alumnado con necesidad específica de apoyo. Los instrumentos de evaluación se seleccionan considerando su capacidad diagnóstica, su adecuación a las unidades programadas, su idoneidad para realizar una evaluación competencial y el grado de fiabilidad para asegurar la objetividad en el proceso de evaluación.

Se presentan a continuación los instrumentos y técnicas de evaluación a emplear:

- Pruebas escritas. Se usarán como instrumento para verificar de manera numérica el grado del aprendizaje logrado por el alumnado. Serán cuidadosamente elaborados para recoger todos los contenidos que se pretenden evaluar.
- Resolución de problemas. Consiste en plantear un problema como tarea para casa, que cada alumno deberá resolver de forma individual. El contenido del ejercicio estará relacionado con lo trabajado en las sesiones anteriores dentro de la unidad didáctica en curso. En la siguiente clase, el alumno asignado expondrá y defenderá su resolución en la pizarra, desarrollando el ejercicio paso a paso y reflexionando en voz alta sobre cada una de las decisiones tomadas durante el proceso. Además, analizará la solución obtenida, valorando su corrección y justificando su razonamiento. El docente dispondrá de una rúbrica de evaluación donde anotará la puntuación obtenida de acuerdo con cada ítem de evaluación para obtener así una calificación de la tarea. Además, se entregará esta misma rúbrica al alumno para que realice una autoevaluación.

CRITERIO	**1. MUY BAJO**	**2. BAJO**	**3. MEDIO**	**4. ALTO**	**5. EXCELENTE**	**AUTOEVAL. (marca X)**
Preparación previa del problema	No ha realizado la tarea.	Tarea incompleta o incorrecta.	Intento con errores importantes.	Correcto con fallos menores.	Completa, clara y correcta.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
Identifica los datos de entrada	No identifica los datos relevantes.	Identifica pocos datos o los confunde.	Reconoce algunos datos, aunque con omisiones.	Identifica casi todos los datos correctamente.	Identifica y organiza todos los datos con claridad.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
Identifica los datos de salida (lo que se pide)	No reconoce qué se debe resolver.	Tiene una idea equivocada o muy general.	Reconoce parcialmente el objetivo.	Identifica correctamente lo que se debe obtener.	Define con claridad y precisión los resultados esperados.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
Lenguaje matemático adecuado	Incorrecto o inapropiado.	Poco preciso, con errores.	Aceptable, con fallos menores.	Adecuado y claro.	Preciso, técnico y correcto.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Justificación del razonamiento	No justifica decisiones ni estrategias	Justifica de forma superficial o confusa	Justifica parcialmente algunas decisiones	Justifica la mayoría de los pasos con razonamiento lógico.	Justifica todas sus decisiones con rigor y lógica matemática	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
Estrategia de resolución empleada	Sin estrategia o inválida	Poco eficaz.	Parcialmente válida.	Adecuada, aunque mejorable.	Eficaz, bien elegida y aplicada.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
Comprueba que la solución es coherente y correcta	No comprueba	Incorrecta o superficial.	Intenta comprobar, pero con errores.	Verifica la solución de forma razonable.	Verifica rigurosamente y justifica su validez.	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Tabla 2. Rúbrica de heteroevaluación / autoevaluación de la tarea de resolución de problemas. Elaboración propia

- <u>Estudio de caso</u>. Se analizará en profundidad un tema o suceso escrito cuyo contenido estará relacionado con lo trabajado en las sesiones anteriores dentro de la unidad didáctica en curso. El docente comunicará de forma clara tanto los criterios que se tendrán en cuenta en la evaluación como el informe que el alumnado deberá realizar y entregar para su calificación. Esta tarea pondrá a prueba las habilidades del alumnado relativas a la identificación de los hechos, identificación del problema y solución de este. El informe se ajustará a las características específicas de cada estudio de caso.
  La participación del alumnado en la discusión (intervenciones, planteamiento de dudas, aporte de información, motivación a los compañeros para participar, etc.) es fundamental en estas dinámicas. Por ello, también se evaluará y se registrará en las listas de cotejo derivadas de la observación realizada por el docente
- <u>Observación. Listas de cotejo</u>. El docente se encuentra de manera permanente observando el comportamiento del alumnado: su actitud, su predisposición, su cooperación con el resto de los compañeros, las relaciones sociales e interpersonales que se establecen entre el alumnado, e incluso sus expresiones gestuales y corporales que normalmente pasan desapercibidas. La observación permitirá valorar la actitud del alumno en lo relativo al bloque de destrezas socioafectivas y el instrumento de observación del que hará uso el docente será una lista de cotejo como la que se muestra en la siguiente figura.

Criterio	**Sí**	**No**
Participación activa en discusiones grupales	☐	☐
Plantea dudas o preguntas relevantes para el desarrollo del tema.	☐	☐

Escucha y respeto hacia las opiniones de los compañeros	☐	☐
Estudio de caso: aporte de soluciones razonadas y claras.	☐	☐
Estudio de caso: actitud colaborativa y disposición para trabajar en equipo.	☐	☐

Tabla 3. Lista de cotejo.

2.10.3 Momentos de evaluación

Si bien la ley no contempla la obligatoriedad de realizar una evaluación inicial al alumnado de primer curso de Bachillerato, sí se realiza en este caso una evaluación diagnóstica informativa los primeros días del curso. El objetivo es ofrecer información sobre el nivel de partida del alumnado, tanto individual como grupalmente, en lo que respecta a sus conocimientos previos, además de conocer sus intereses y expectativas. Además, permite detectar quiénes son aquellos alumnos que requieren de necesidades educativas especiales o apoyos personalizados. Se llevará a cabo un intercambio de expectativas entre profesorado y alumnado de manera que cada parte exponga lo que espera de la otra en el nuevo curso. Los alumnos explicarán además en un informe personal su nivel de conocimientos sobre los conceptos que se van a explicar a lo largo del curso. Por último, el docente recogerá de una forma sistematizada, la variedad de ideas expuestas por los alumnos que será la base y servirá como punto de partida del curso.

Por otro lado, se proponen una serie de pruebas escritas que no necesariamente se realizarán al finalizar cada unidad didáctica. Su planificación dependerá de factores como la duración de la unidad —en caso de ser breve, la evaluación podrá unificarse con la de la siguiente unidad— o la relación temática entre dos unidades didácticas, lo que también justificaría una evaluación conjunta. Se presenta a continuación la agrupación de pruebas escritas por unidades didácticas.

Primera evaluación:

- PRUEBA ESCRITA: UD1. Números reales
- PRUEBA ESCRITA: UD2. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones
- PRUEBA ESCRITA: UD3. Trigonometría I

Segunda evaluación:

- PRUEBA ESCRITA: UD4. Trigonometría II + UD5. Números complejos
- PRUEBA ESCRITA: UD6. Vectores + UD7. Geometría analítica
- PRUEBA ESCRITA: UD8. Lugares geométricos. Cónicas

Tercera evaluación:

- PRUEBA ESCRITA: UD9. Funciones + UD10. Límites y continuidad
- PRUEBA ESCRITA: UD11. Derivadas
- PRUEBA ESCRITA: UD12: Distribuciones bidimensionales + UD13. Cálculo de probabilidad

Evaluación final:

- PRUEBA ESCRITA: Examen final global de recuperación

Antes de las pruebas escritas, se trabajará en una o dos sesiones (según la situación lo requiera) el estudio de un caso contextualizado y relacionado con los contenidos de las unidades didácticas que se estén trabajando en ese momento.

Por otro lado, a lo largo del curso se asignarán tareas para casa de forma regular. Éstas consistirán en la resolución de problemas por parte un alumno seleccionado por el profesor en la siguiente sesión. Se propondrán varias tareas evaluables a lo largo del trimestre, asegurando que cada alumno tenga la oportunidad de salir a la pizarra y defender la resolución de al menos un problema antes de finalizar el trimestre.

Por último, la evaluación de las destrezas socioafectivas se lleva a cabo de forma continua a lo largo del curso, de acuerdo con los estándares especificados en el punto anterior a través de la observación. Remarcar que habrá una parte de esa observación calendarizada pues corresponde a las situaciones de aprendizaje que constituyen los estudios de casos.

Con el fin de aclarar los momentos en los que se llevará a cabo la evaluación, se ilustra un ejemplo ficticio a continuación. Consiste en una unidad didáctica cuya impartición transcurre a lo largo de 6 sesiones. Los contenidos teórico-prácticos siguen una metodología cíclica ya explicada, donde se alterna el método inductivo con la enseñanza expositiva participativa y la resolución guiada de problemas. Al finalizar la sesión, el profesor manda uno o varios problemas para resolver en casa. La sesión siguiente comienza con la resolución de esa tarea por parte del alumnado. Esta secuencia se repetirá hasta que se den todos los contenidos relativos a esa unidad didáctica. Al finalizar la unidad didáctica se dedica una sesión a la presentación y discusión del estudio de caso. El alumno de forma autónoma completará en casa el informe relativo a esa situación de aprendizaje y lo entregará al profesor en el plazo máximo de una semana. La penúltima sesión está dedicada a la prueba escrita, mientras que la última sesión el profesor la dedica a la corrección de la prueba escrita.

Esta planificación será naturalmente flexible y podrá adaptarse a eventuales contratiempos externos o al ritmo marcado por los otros grupos de Matemáticas I del mismo nivel.

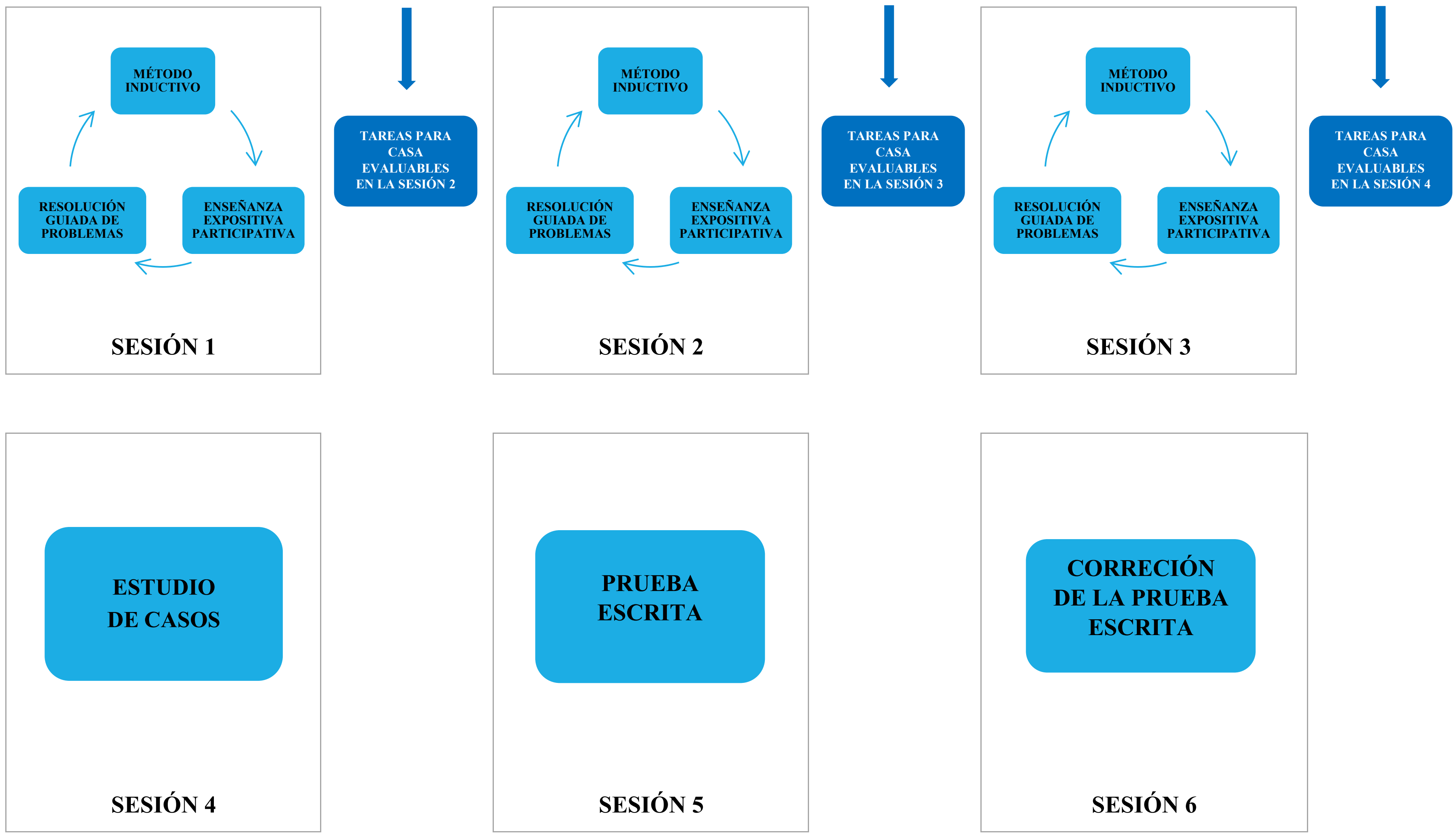


Figura 5. Ejemplo de secuenciación de sesiones de una hipotética unidad didáctica impartida en 6 sesiones.

2.10.4 Agentes evaluadores

El profesor llevará a cabo la evaluación de sus alumnos, pero también buscará la participación del alumnado en este proceso a través de la autoevaluación. La autoevaluación tiene por objeto que el alumnado sea consciente de sus errores y favorece la superación de estos. En este caso, en esta programación didáctica no se contempla para este curso la evaluación entre iguales o coevaluación.

2.10.5 Criterios de calificación de la materia asociados a los criterios de evaluación

La calificación de la materia de Matemáticas I será decidida por el profesor correspondiente, a partir de la valoración y calificación de los criterios de evaluación establecidos en la presente programación didáctica, teniendo en cuenta, en su caso, las medidas adoptadas en materia de atención a la diversidad.

Cada uno de los bloques competenciales va a ser evaluado con los diferentes instrumentos de evaluación seleccionados en función de la naturaleza del criterio a evaluar. Así:

- Los criterios asociados a los bloques “resolución de problemas”, “razonamiento y prueba” y “conexiones” se evaluarán mediante las pruebas escritas y la resolución de problemas.
    - ➢ *El peso otorgado a este bloque será de un 80% sobre el total de la nota: 75% al resultado de las pruebas escritas y 5% a la calificación de la resolución de problemas.*
- Los criterios asociados al bloque “comunicación y representación” se evaluará mediante el informe solicitado en el estudio de caso.
    - ➢ *El peso otorgado a este bloque será de un 10% sobre el total de la nota.*
- Los criterios asociados al bloque “destrezas socioafectivas” se evaluará mediante la observación en el aula.
    - ➢ *El peso otorgado a este bloque será de un 10% sobre el total de la nota.*

Para el cálculo final de la nota de la materia se tendrán en cuenta los pesos asociados a cada uno de los criterios de evaluación. A contemplar los siguientes aspectos:

- A cada criterio de evaluación se le otorga un peso idéntico, a partir del peso del bloque competencial al que haga referencia. Es decir, se ha aplicado una media aritmética dentro de un mismo bloque.
- Los pesos de las pruebas escritas serán diferentes. La nota media de un trimestre se obtendrá como media ponderada de las pruebas escritas realizadas ese trimestre, en función de la carga lectiva de cada prueba. Por ejemplo, en el segundo trimestre se realizan tres pruebas escritas que evalúan los contenidos impartidos en una temporalización de 22, 22 y 8 sesiones respectivamente. Por lo tanto, el peso de dichas pruebas escritas será de 42,3%, 42,3% y 15,4% respectivamente.
- La nota media de la resolución de problemas se obtendrá a partir de la valoración de los siete ítems contenidos en la escala de valoración. El peso de cada ítem es el mismo. A su vez, el peso de la heteroevaluación será el mismo que el de la autoevaluación.

- La nota media de la lista de cotejo se obtiene con una media aritmética de cada ítem a evaluar.

La siguiente tabla recoge los criterios de evaluación y los contenidos por bloques competenciales con su correspondiente peso, instrumento de evaluación y agente evaluador.

BLOQUES COMPETENCIALES	PESO	CRITERIO DE EVALUACIÓ	PESO	CONTENIDOS	CONTENIDOS TRANSVERSALES	INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	AGENTE EVALUADOR
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	80%	CE 1.1	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
		CE 1.2	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
		CE 2.1	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
		CE 2.2	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
RAZONAMIENTO Y PRUEBA		CE 3.1	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
		CE 3.2	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
		CE 4.1	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
CONEXIONES		CE 5.1	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
		CE 5.2	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
		CE 6.1	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
		CE 6.2	6,82%	UD1. a UD13.	---	Prueba escrita	Heteroevaluación
			0,45%		CT.3	Resolución de problemas	Heteroevaluación / autoevaluación
COMUNICACIÓN Y REPRESENTACIÓN	10%	CE 7.1	2,5%	UD1. a UD13.	CT.1 / CT.3 / CT.4 / CT.5	Estudio de caso	Heteroevaluación
		CE 7.2	2,5%	UD1. a UD13.	CT.1 / CT.3 / CT.4 / CT.5	Estudio de caso	Heteroevaluación
		CE 8.1	2,5%	UD1. a UD13.	CT.1 / CT.3 / CT.4 / CT.5	Estudio de caso	Heteroevaluación
		CE 8.2	2,5%	UD1. a UD13.	CT.1 / CT.3 / CT.4 / CT.5	Estudio de caso	Heteroevaluación
DESARROLLO SOCIOAFECTIVO	10%	CE 9.1	3,33%	UNIDAD	CT.2	Lista de cotejo	Heteroevaluación
		CE 9.2	3,33%	UNIDAD	CT.2	Lista de cotejo	Heteroevaluación
		CE 9.3	3,33%	UNIDAD	CT.2	Lista de cotejo	Heteroevaluación

Tabla 4. Tabla resumen de pesos, criterios, contenidos, instrumentos y agentes de evaluación. Elaboración propia.

2.11 ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES DEL ALUMNADO

Las aulas y los centros educativos son espacios diversos por la gran variedad de diferencias individuales que presenta el alumnado. Factores como la capacidad, el ritmo y estilo de aprendizaje, la motivación, los intereses, el contexto social, la situación cultural, las particularidades lingüísticas o el estado de salud, conforman esa diversidad que está presente en cualquier grupo escolar. No obstante, todo el alumnado, con independencia de sus especificidades, tiene derecho a una educación inclusiva y de calidad, adecuada a sus características y necesidades.

En relación con la diversidad en el aula, los profesores del Departamento de Matemáticas siguen en todo momento las directrices y orientaciones marcadas desde el Departamento de Orientación Pedagógica del Centro, realizando las adaptaciones curriculares que se precisen siguiendo las pautas marcadas por el Plan de Atención a la Diversidad propio del centro y la ORDEN EDU/1152/2010 de 3 de agosto.

La atención a la diversidad en la etapa de Bachillerato se basa en adaptaciones curriculares de acceso y adaptaciones no significativas que se describen a continuación, que responden a un grupo de alumnado tipo.

- Adaptaciones de acceso: modificación o provisión de recursos espaciales, materiales, personales o de comunicación para facilitar que algunos alumnos con necesidades educativas espaciales puedan desarrollar su currículo ordinario, o en su caso, el currículo adaptado:
    - Eliminación de barreras arquitectónicas
    - Adecuada iluminación y sonoridad
    - Mobiliario adaptado
    - Profesorado de apoyo especializado
    - Materiales específicos de enseñanza: ayudas técnicas y tecnológicas, sistemas de comunicación complementarios, ordenadores, etc.
- Adaptaciones no significativas: modificaciones realizadas en distintos puntos de la propuesta educativa del alumno que lo requiera para responder a sus necesidades educativas especiales y que no pueden ser compartidas por sus compañeros:
    - Tiempos
    - Actividades
    - Metodologías
    - Técnicas o instrumentos de evaluación

Al existir en el aula un alumno que manifiesta necesidades educativas especiales por presentar altas capacidades intelectuales, será preciso realizar un examen dirigido por el Departamento de Orientación Pedagógica, siguiendo en todo momento el correspondiente protocolo de identificación, detección, valoración y ejecución de medidas. La atención educativa adaptada se concretará tras el resultado de este examen y se aplicará un plan de enriquecimiento curricular adaptado a sus necesidades que pueden incluir contenidos de mayor nivel, impartidos en menor tiempo o de forma más transversal o abstracta, así como el fomento del aprendizaje por descubrimiento por parte del alumnado.

2.12 SECUENCIA DE UNIDADES TEMPORALES DE PROGRAMACIÓN

Para realizar una temporalización precisa de los contenidos a impartir a lo largo del curso, se parte del calendario escolar del curso 2024-2025 que pone a disposición el Portal de Educación de la Junta de Castilla y León, s.f.

A partir de éste, se ajustan los periodos lectivos de acuerdo con el calendario de evaluaciones publicado en la Programación General Anual (PGA) del I.E.S Las Salinas (2024).

EVALUACIÓN INICIAL	23,24,25 de septiembre
1ª EVALUACIÓN	25, 26, 27 de noviembre
2ª EVALUACIÓN	17, 18, 19 de marzo
EVALUACIÓN FINAL	16,17,18 de junio

Figura 6. Calendario de evaluaciones 2024-2025. Elaboración propia

Es necesario además considerar las actividades complementarias y extraescolares organizadas desde el centro, publicadas en la Propuesta Curricular para Bachillerato del I.E.S Las Salinas (2024) que restarán horas lectivas a disposición de la materia. En este caso, se descuenta la primera semana de abril por un viaje de los alumnos de primer curso de Bachillerato.

Por último, se ha considerado el hecho de que el primer curso de Bachillerato en su modalidad de Ciencias y Tecnología, oferta la materia de Matemáticas I con una carga lectiva de 4 horas semanales (la asignatura de Matemáticas I no se imparte los martes). Con todos estos factores tomados en consideración, en el curso 2024-2025 hay un total de 131 sesiones lectivas. Se muestra a continuación el calendario en detalle con la distribución temporal de las evaluaciones.

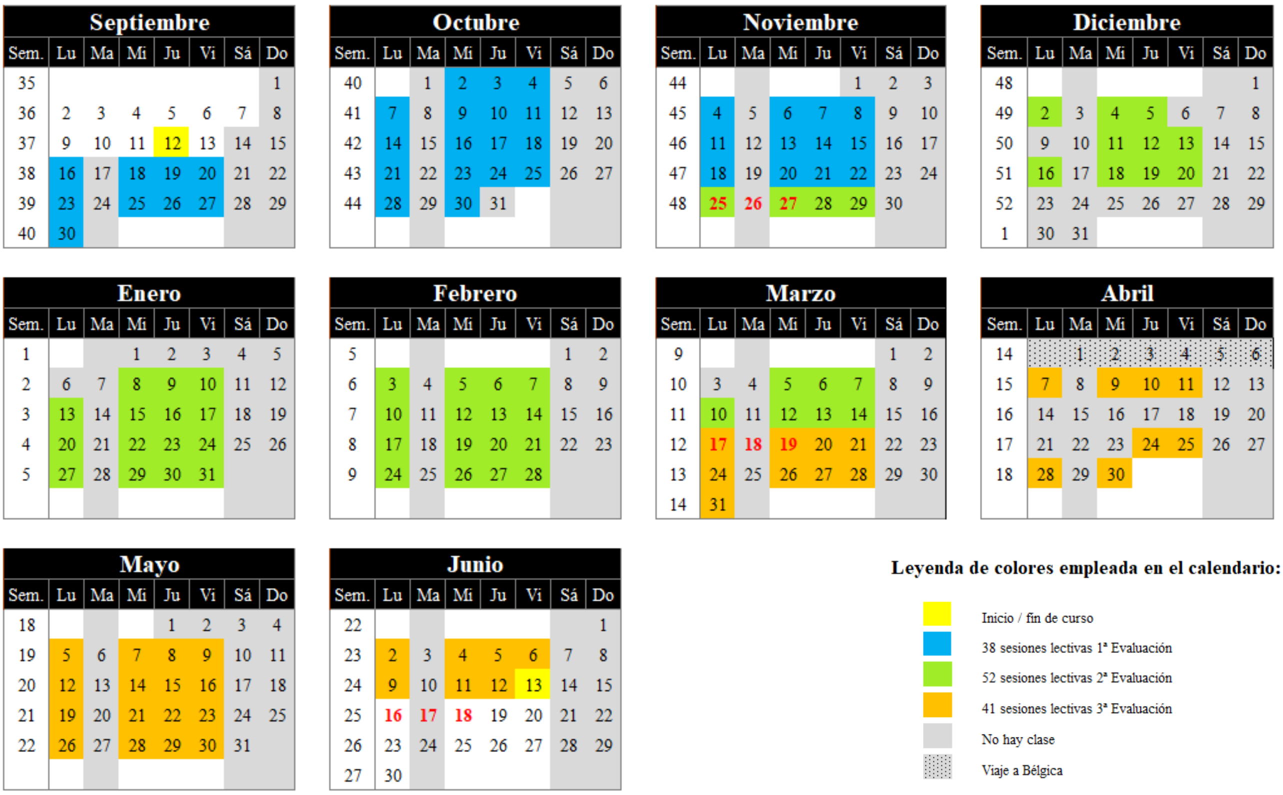


Figura 7. Calendario escolar 2024 - 2025

Con todo esto, se compone la secuencia de unidades temporales de programación:

	SESIONES	**FECHAS**
BLOQUE I. ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA		
UD1. Números reales	10	16/09 al 02/10
UD2. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones	12	03/10 al 23/10
BLOQUE II. TRIGONOMETRÍA Y NÚMEROS COMPLEJOS		
UD3. Trigonometría I	10	24/10 al 13/11
UD4. Trigonometría II	12	14/11 al 04/12
UD5. Números complejos	10	05/12 al 09/01
BLOQUE III. GEOMETRÍA		
UD6. Vectores	12	10/01 al 30/01
UD7. Geometría analítica	10	31/01 al 17/02

UD8. Lugares geométricos. Cónicas	8	19/02 al 05/03
BLOQUE IV. ANÁLISIS		
UD9. Funciones	8	06/03 al 19/03
UD10. Límites y continuidad	12	20/03 al 11/04
UD11. Derivadas	14	24/04 al 21/05
BLOQUE V. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD		
UD12. Distribuciones bidimensionales	6	22/05 al 30/05
UD13. Cálculo de probabilidad	6	02/06 al 11/06
EXAMEN GLOBAL DE RECUPERACIÓN	1	13/06

Tabla. 5. Secuencia de unidades temporales de programación. Elaboración propia.

Esta secuenciación no tiene por qué ser rígida. Se puede llegar a acuerdos con el departamento en caso de requerirlo, para realizar pequeños ajustes.

No en todas las unidades didácticas es necesario realizar una prueba escrita al finalizarla. (ver apartado 2.10 Evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado). En aquellas unidades en las que sí se realicen pruebas escritas, se dedicarán una o dos sesiones para el estudio de casos relativo a la unidad didáctica tratada; una sesión para la realización de la prueba escrita y una sesión posterior para la corrección de la prueba escrita. Estas sesiones están incluidas en la temporalización anterior.

En el Apéndice 1 se muestra la relación entre las unidades didácticas y los contenidos de la materia para el primer curso de la etapa que especifica el Anexo III del DECRETO 40/2022 de 29 de septiembre.

2.13 ORIENTACIONES PARA LA EVALUACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN DE AULA Y DE LA PRÁCTICA DOCENTE

Tal y como se establece en el artículo 23 del Orden EDU/425/2024, de 9 de mayo, el profesorado que imparte bachillerato debe evaluar su propio proceso de enseñanza como punto de partida para su mejora. Se tendrán en cuenta dos ámbitos de evaluación: la programación de aula y la práctica docente.

Las técnicas e instrumentos que se utilizarán para llevar a cabo esta evaluación se ajustan a las directrices establecidas en el Proyecto Educativo del Centro (PCE) del I.E.S Las Salinas (2024):

- Cuestionarios, con escala de tipo Likert de 5 puntos, que recoja la autoevaluación del profesor sobre su práctica docente y su programación de aula. La autoevaluación de la práctica docente debe servir para que el profesorado reflexione sobre su práctica educativa y proponga mejoras para establecer unos criterios que deben de tenerse en cuenta a la hora de elaborar y revisar trimestralmente las programaciones, con la finalidad de que en las memorias anuales se refleje el grado de cumplimiento y de reflexión de la práctica docente y poder incluir las propuestas en el plan de mejora del centro para el curso siguiente. Esta evaluación debe estar ligada al proceso educativo de forma continua, quedando recogida anualmente en la memoria final del departamento. La siguiente figura recoge un ejemplo de encuesta docente para realizar la autoevaluación del profesorado.
- Cuestionarios, con escala de tipo Likert de 5 puntos, que recoja la valoración del alumnado sobre la práctica docente y la programación de aula. Estos cuestionarios se entregarán a los alumnos al finalizar cada trimestre para la revisión de la programación didáctica que marca el PCE.

FORMULARIO DE AUTOEVALUACIÓN

Profesor :
Asignatura :
Periodo :
Curso :

Por favor, valora en qué medida estás de acuerdo con las siguientes afirmaciones:

1. ***Evaluación de la programación de aula***

	NUNCA	RARA VEZ	A VECES	CASI SIEMPRE	SIEMPRE
He realizado una **planificación** exhaustiva de mi programación del aula					
Me he asegurado de que el **contenido** de mi programación de aula sea riguroso, actualizado y pertinente					
He respetado la **distribución temporal** de los contenidos de mi programación de aula					
He **revisado y actualizado** mi programación para adaptarla a las necesidades del alumnado.					
He aplicado la **metodología didáctica** programada					
He utilizado los **materiales y recursos didácticos** programados					
He aplicado los **procedimientos de evaluación** programados y me he ajustado a los **criterios de calificación.**					
He aplicado **medidas de atención a la diversidad** al alumnado que lo ha requerido.					

2. ***Evaluación de la práctica docente***

	NUNCA	RARA VEZ	A VECES	CASI SIEMPRE	SIEMPRE
He **contextualizado** el proceso de enseñanza incorporando ejemplos y aplicaciones prácticas relevantes.					
He proporcionado información y **retroalimentación clara y oportuna** al alumnado.					
He utilizado los **resultados de las evaluaciones** para mejorar mis prácticas docentes.					
He **organizado el aula** (espacios, agrupaciones, etc.) de acuerdo con el momento para generar un ambiente óptimo de aprendizaje.					
He mantenido el **interés y la motivación** de mi alumnado durante el desarrollo de las clases					
He fomentado el **debate en el aula**					
He mantenido un **clima de aula** positivo y respetuoso.					
He escuchado y valorado las **opiniones de mis alumnos.**					
He manejado adecuadamente los **conflictos en el aula**.					
Busco actualizarme constantemente sobre nuevas metodologías y tecnologías educativas.					
Reflexiono sobre mis prácticas para identificar áreas de mejora.					
Comparto experiencias y aprendizajes **con otros docentes** para enriquecer mi práctica.					

Figura 8. Cuestionario de autoevaluación docente. Elaboración propia.

CUESTIONARIO ALUMNADO

Profesor :
Asignatura :
Periodo :
Curso :

Por favor, valora en qué medida estás de acuerdo con las siguientes afirmaciones:

1. *Metodología*

	NUNCA	RARA VEZ	A VECES	CASI SIEMPRE	SIEMPRE
El profesor **explica claramente** los temas antes de pedir que trabajemos	○	○	○	○	○
El profesor utiliza **suficientes ejemplos** para facilitar la comprensión	○	○	○	○	○
Las clases tienen una **estructura organizada** y los contenidos se presentan de forma coherente.	○	○	○	○	○
El profesor utiliza **diferentes recursos o materiales** para enseñar: libros, presentaciones, vídeos, etc.	○	○	○	○	○
El profesor **fomenta el debate** en el aula	○	○	○	○	○

2. *Actitud del profesor*

	NUNCA	RARA VEZ	A VECES	CASI SIEMPRE	SIEMPRE
El profesor trata a los alumnos con **respeto y empatía**	○	○	○	○	○
El profesor mantiene un **ambiente de clase** positivo	○	○	○	○	○
El profesor es **justo y equitativo** en el trato a los alumnos	○	○	○	○	○
El profesor **muestra interés** por el aprendizaje de los alumnos.	○	○	○	○	○

3. *Actitud del alumno*

	NUNCA	RARA VEZ	A VECES	CASI SIEMPRE	SIEMPRE
Estás dispuesto a **esforzarte y aprender** cosas nuevas en Matemáticas, incluso cuando resultan difíciles.	○	○	○	○	○
Te sientes capaz de entender y resolver los ejercicios y problemas que se trabajan en clase.	○	○	○	○	○

4. *Materia*

	NUNCA	RARA VEZ	A VECES	CASI SIEMPRE	SIEMPRE
¿Te resulta **interesante**?	○	○	○	○	○
¿Crees que está **conectada con otras asignaturas**?	○	○	○	○	○
¿Crees que es o será **útil para ti**, para tu vida personal o para tu futuro profesional?	○	○	○	○	○

5. *Evaluación*

	NUNCA	RARA VEZ	A VECES	CASI SIEMPRE	SIEMPRE
¿Tienes claros los **criterios de evaluación** antes de las pruebas o exámenes?	○	○	○	○	○
¿El profesor **es justo** calificando?	○	○	○	○	○
¿El profesor tiene **suficientes datos** para evaluarte?	○	○	○	○	○

6. *Observaciones*

Figura 9. Cuestionario para el alumnado. Elaboración propia.

Se tendrán en cuenta igualmente las aportaciones verbales que hayan hecho los diferentes miembros de la Comunidad Educativa a través de entrevistas con el profesor o a través del Equipo Directivo. Estas aportaciones quedarán recogidas en el diario del profesor para después implementar mejoras en su práctica docente y en su programación didáctica.

2.14 PROCEDIMIENTO PARA LA EVALUACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA

La programación didáctica será evaluada según el procedimiento establecido en este apartado. Las conclusiones más importantes se incorporarán al final del curso, junto a la evaluación de la Propuesta Curricular y a la memoria de la Programación General Anual, siendo la base para la elaboración de las programaciones didácticas del curso siguiente.

La evaluación y seguimiento de la programación será permanente y permitirá la introducción de correcciones o modificaciones para lograr los objetivos propuestos. Se podrían realizar ajustes en la programación debidos a diversos factores: la evolución del grupo y su forma particular de afrontar los distintos aprendizajes, la incorporación de nuevo alumnado, las circunstancias o acontecimientos de carácter global que afecten al centro o a las familias y que tengan repercusión en el grupo de clase, etc. Por todo ello, la programación didáctica será un documento flexible, sobre el que se apliquen reajustes en la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje.

La Propuesta Curricular para Bachillerato del I.E.S Las Salinas (2024) establece como agentes evaluadores a los jefes de departamento, que realizarán una evaluación sobre las programaciones didácticas de su departamento y al Equipo Directivo, que realizará una evaluación sobre las programaciones y sobre el funcionamiento de los departamentos didácticos. La siguiente tabla recoge los elementos que forman parte de la evaluación:

INDICADORES DE LOGRO	INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN	MOMENTOS EN QUE SE REALIZARÁ LA EVALUACIÓN	PERSONAS QUE LLEVARÁN A CABO LA EVALUACIÓN
Resultados académicos	Procedimiento de evaluación del alumnado	Reuniones mensuales de departamento	Profesores del departamento
Respeto de la temporalización y de los procedimientos didácticos y metodológicos	Observación	Reuniones mensuales de departamento	Profesores del departamento

Adecuación de materiales y recursos didácticos	Observación	Reuniones mensuales de departamento	Profesores del departamento
Cuestionario a profesores	Test de autoevaluación de la programación de aula y de la práctica docente.	Trimestral	Profesores que imparten la materia en la etapa
Cuestionario a alumnado	Test de evaluación de la programación de aula y de la práctica docente.	Trimestral	Alumnos

Tabla 6. Elementos para la evaluación de las programaciones didácticas

3. UNIDAD DIDÁCTICA

Con objeto de ilustrar de forma gráfica, visual y detallada tanto las metodologías descritas, como los procedimientos para impartir los contenidos en la materia de Matemáticas I, se detalla en este apartado la Unidad Didáctica 9 "Funciones" pertenecientes al bloque de Análisis. Se ha escogido esta unidad, que se evalúa en prueba escrita y en estudio de casos de forma conjunta con la Unidad Didáctica 10 "Límites y continuidad". Los contenidos que se imparten corresponden con lo establecido en el DECRETO 40/2022 de 29 de septiembre.

Todos los apartados y subapartados se estructuran de la misma forma. La programación didáctica correspondiente a este curso seguiría igualmente esta distribución. La siguiente tabla recoge la simbología que se utilizará para separar cada subsección.

	**Metodología inductiva**: introducción de nuevos conceptos
	**Enseñanza expositiva participativa:** explicación de conceptos, principios, definiciones, etc.
	**Ejercicios / resolución guiada de problemas**: fomento de la comprensión y aplicación de contenidos vistos.
	**Tareas para casa**

Tabla 7. Leyenda de contenidos.

Adicionalmente se incluirán explicaciones sobre cómo debería proceder el docente en el aula en el trascurso de la sesión. Estas indicaciones se mostrarán en cursiva y aparecerán intercaladas con los contenidos.

3.1 ÍNDICE

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN
2. DOMINIO Y RECORRIDO
3. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES
   - MONOTONÍA
   - ASÍNTOTAS
   - CURVATURA
   - SIMETRÍA
   - PERIODICIDAD
4. REPRESENTACIÓN Y ESTUDIO DE FUNCIONES
   - FUNCIONES POLINÓMICAS
   - FUNCIONES RACIONALES
   - FUNCIONES IRRACIONALES
   - FUNCIONES EXPONENCIALES
   - FUNCIONES LOGARÍTMICAS
   - FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
5. OPERACIONES CON FUNCIONES
   - SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE
   - COMPOSICIÓN
   - INVERSA

3.2 TEMPORALIZACIÓN

Tal y como se ha establecido en la presente programación didáctica, se dedican 8 sesiones a esta unidad.

TEMPORALIZACIÓN	**CONTENIDOS**
Sesión 1	1. CONCEPTO DE FUNCIÓN / 2. DOMINIO Y RECORRIDO
Sesión 2	2. DOMINIO Y RECORRIDO
Sesión 3	3. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES
Sesión 4	4. REPRESENTACIÓN Y ESTUDIO DE FUNCIONES
Sesión 5	4. REPRESENTACIÓN Y ESTUDIO DE FUNCIONES
Sesión 6	4. REPRESENTACIÓN Y ESTUDIO DE FUNCIONES
Sesión 7	5. OPERACIONES CON FUNCIONES

Sesión 8	5. OPERACIONES CON FUNCIONES

Observaciones:

- Las sesiones 4, 5 y 6 se llevarán a cabo con soporte del software GeoGebra. El docente acompaña sus explicaciones con la pizarra digital mostrando representaciones gráficas de cada función.
- Las funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas, se definen en el apartado 2 “Domino y recorrido” con el fin de poder trabajar su dominio y recorrido. Un estudio más profundo de todas ellas se realiza en el apartado 4.
- Las funciones trigonométricas no se definen hasta llegar al apartado 4 “Representación y estudio de funciones” ya que es la primera vez que los alumnos se enfrenta a este tipo de funciones y requieren de más tiempo para explicarlas con más detalle.

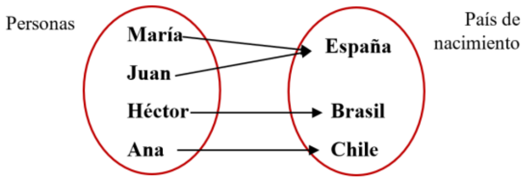
3.3 CONTENIDOS

SESIÓN 1

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

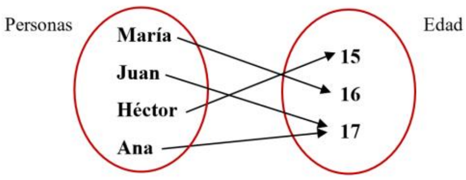
Se presentan varios casos particulares.

Ejemplo 1. Tengo varias personas con distintos países de origen. Podríamos formar dos conjuntos donde uno contendría a las personas y el otro a sus países de origen. ¿Cómo se relacionan?:



- ¿Puede una persona haber nacido en dos países distintos?
- ¿Puede un país tener varias personas que hayan nacido en él?

Ejemplo 2. Tengo varias personas con distintas edades. Podríamos formar dos conjuntos donde uno contendría a las personas y el otro sus edades. ¿Cómo se relacionan?



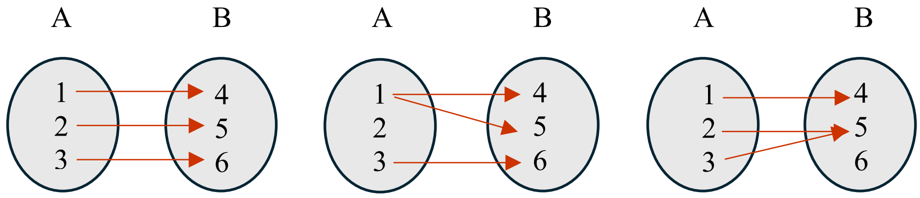
- ¿Puede una persona tener dos edades distintas?
- ¿Pueden varias personas tener la misma edad?

Patrón. En ambos ejemplos se da que a un determinado elemento del conjunto inicial le corresponde –o se relaciona- con un único elemento del conjunto final.

Una **función** f es una relación entre dos conjuntos que asocia a cada elemento “x” del conjunto inicial **un único** elemento “y” del conjunto final.

Para iniciar el trabajo con la unidad didáctica y el concepto de función, el docente presentará varios ejemplos que los alumnos deberán observar y analizar para identificar las características comunes y, a partir de ellas, formular una regla que las explique. En este caso: la unicidad del conjunto de llegada que define el concepto de función. Se podría haber optado por una metodología deductiva en lugar de ésta, en la cual se proporcionaría directamente a los alumnos la definición de función, sin embargo, con el método inductivo se fomenta el aprendizaje por descubrimiento, en el que son los alumnos quienes piensan e investigan sobre los ejemplos para tratar de buscar la definición. De esta manera su participación es más activa y el aprendizaje es significativo.

<u>Enunciado</u>. Dos conjuntos A y B están relacionados por f, g, h. ¿Son funciones?



SÍ es función	g NO es función	h SÍ es función
$f(1) = 4$	$g(1) = 4$	$h(1) = 4$
$f(2) = 5$	$g(1) = 5$	$h(2) = 5$
$f(3) = 6$		$h(3) = 5$

Se representa: $\boldsymbol{f: A \longrightarrow B}$

$$\boldsymbol{x \mapsto y = f(x)}$$

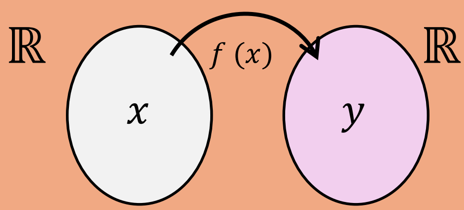
Donde x es la **variable independiente** e y es la **variable dependiente** del valor que tome x.

El conjunto inicial y final puede estar constituido por números naturales, enteros, reales, etc..

Cuando tanto el conjunto inicial como el conjunto final son el conjunto $\mathbb{R}$ o cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, decimos que se trata de una **función real de variable real.** Se representa:

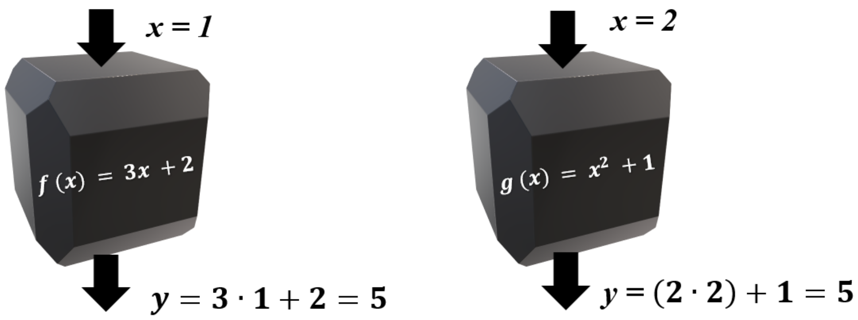
$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x \mapsto y = f(x)}$



A partir de ahora, salvo que se especifique lo contrario, hablaremos únicamente de funciones reales de variable real.

En este punto, para activar los conocimientos previos de los alumnos, recordamos cómo introdujeron el concepto de función en 4º de ESO, utilizando el concepto de "máquina de funciones", donde cada máquina es una función.

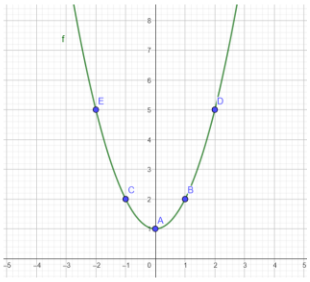


Vamos dando valores de entrada "x" y vamos obteniendo valores de salida "y". Construimos la tabla de valores. Lanzamos la pregunta: ¿De cuántas formas se os ocurre que podemos definir una función? Abrimos debate.

Tabla de valores

x	*y*
0	*1*
1	*2*
-1	*2*
2	*5*
-2	*5*

Gráfica



Expresión analítica

$$g(x) = x^2 + 1$$
$$y = x^2 + 1$$

Una función se puede definir mediante:

- Una **tabla**: se escogen varios valores x del conjunto de partida y se obtienen sus valores $f(x)$ del conjunto de llegada.
- Una **gráfica**: es el conjunto de puntos del plano que se representa en el sistema de ejes cartesianos. Un punto (a, b) estará en la gráfica de $f(x)$ si y solo si $f(a) = b$.
- Una **expresión analítica**: una fórmula que relaciona cada valor de entrada con su valor de salida.

Presentar la tabla de datos, la expresión analítica y la gráfica para una función específica permite al alumnado ver las múltiples representaciones de un mismo concepto, lo cual refuerza la comprensión visual, numérica y algebraica de las funciones, ayuda a construir el concepto de función de forma gradual en lugar de memorizar una definición abstracta y facilita la transición de lo concreto (la máquina, los datos) a lo abstracto (la definición) haciendo así el aprendizaje más duradero. El alumnado puede así entender las funciones desde diferentes perspectivas, algo que una simple definición o explicación teórica no lograría.

1. Escribe la expresión analítica de las funciones definidas por los siguientes enunciados:

a) A cada número real se le asigna el doble de su cubo menos la mitad de su cuadrado

b) A cada número entero se le asigna la cuarta parte de su valor

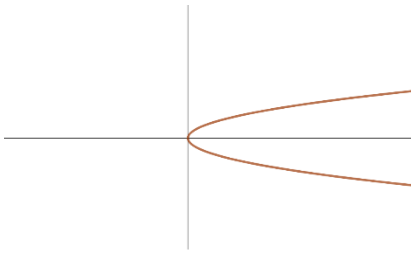
c) El coste total de una excursión del instituto es directamente proporcional al número de estudiantes que participan, más una cantidad fija que cubre el alquiler del autobús. Plantea la función que relacione el coste total con el número de alumnos.

d) Una empresa de alquiler de coches cobra una tarifa fija de 500 € al mes por el uso del vehículo, más un 2% del valor total de los kilómetros recorridos, calculados a razón de 1 € por kilómetro. Escribe la función que da el coste total mensual en función de los kilómetros recorridos en ese mes.

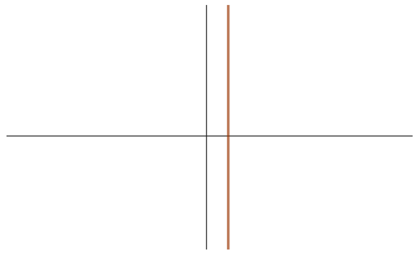
e) En una empresa comparten una flota de vehículos: disponen de un coche para cada 3 empleados, un camión para cada 5 empleados y una furgoneta para cada 4 empleados. Escribe la función que da el número total de vehículos de la flota en función del número de empleados.

2. Determina si las siguientes gráficas representan funciones:

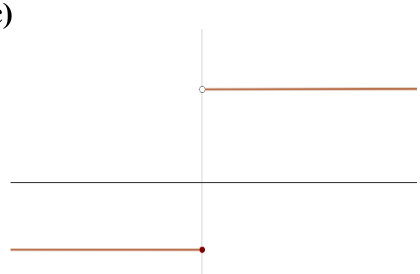
a)



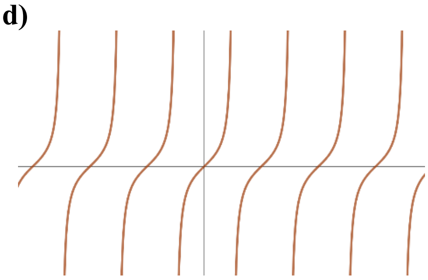
b)



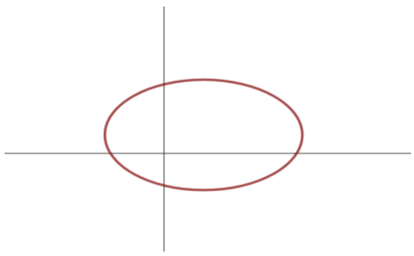
c)



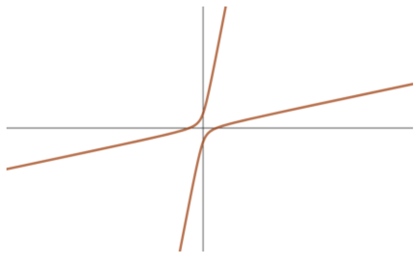
d)



e)



f)



2. DOMINIO Y RECORRIDO

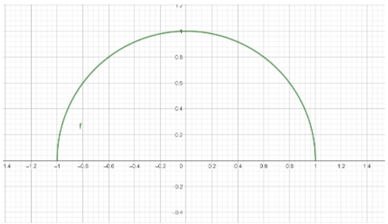
Se presentan dos funciones distintas:

Ejemplo 1. $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Vamos dando valores aleatorios para formar la tabla de valores y comprobamos que hay valores de x para los cuales $f(x)$ toma un valor complejo. Lanzamos preguntas y analizamos la función en conjunto:

- ¿Qué creéis que ocurre con la función cuando $x = -2$?
- ¿Habrá otros valores de x para los cuales la función no tome valores reales?
- ¿Qué ocurre con la función en esos casos?

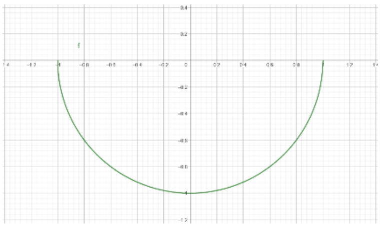
x	y
0	1
1	0
-1	0
-2	No definida
2	No definida



Ejemplo 2. . $y = f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Procedemos igual que en el ejemplo anterior y llegamos a lo siguiente:

x	y
0	-1
1	0
-1	0
-2	No definida
2	No definida



Patrón. En ambos ejemplos se da que las funciones reales de variable real están definidas en el intervalo x $\in [-1,1]$. Además, la función toma valores en el intervalo y $\in [-1,1]$. Concluimos que, dada una función real de variable real, podemos encontrar valores para los cuales la función no esté definida.

En este punto es importante hacer notar a los alumnos que, en realidad, estas dos últimas funciones elevadas al cuadrado se convierten en $y^2 = 1 - x^2$ o lo que es lo mismo: $x^2 + y^2 = 1$. Lo cual han visto en la unidad didáctica anterior "Cónicas". Se trata de la ecuación de la circunferencia goniométrica. Y remarcamos que se trata de una ecuación y no de una función. Este bloque de Análisis se centra en las funciones porque son más sencillas de manejar y estudiar. Las otras "pertenecen más" a Geometría. Y recalcamos que las Matemáticas no están separadas, pero esta idea puede ayudar.

.

Dada una función f(x):

- Se define el **dominio de $f(x)$, $Dom\ (f)$,** como el conjunto de valores que puede tomar la variable x para los que $f(x)$ está definida. $Dom\ (f) = \{x \in \mathbb{R} / f\ (x)\ existe\}$
- Se define el **recorrido o imagen de $f(x)$, $Rec(f)$ o $Im(f)$,** como el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable. $Im\ (f) = \{y \in \mathbb{R} / \exists\ x \in \mathbb{R}\ con\ y = f(x)\}$

Enunciado.

Para las dos ecuaciones que conforman la circunferencia goniométrica, ¿cuál sería el dominio y el recorrido? Lanzamos preguntas para guiar el razonamiento de los alumnos: ¿qué nos piden?¿qué datos tenemos?¿qué conocemos?, etc. Determinamos:

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \; Dom\,(f) = [-1,1] \qquad Im\,(f) = [0,1]$$

$$y = f(x) = -\sqrt{1-x^2} \; Dom\,(f) = [-1,1] \qquad Im\,(f) = [0,1]$$

Concluimos que, verlo en una gráfica es muy sencillo en comparación con verlo en la expresión analítica. Por esto, vamos a centrarnos en repasar esto último que ya trabajamos el año anterior.

SESIÓN 2

Comenzamos la clase con la defensa y corrección de las tareas para casa por parte de un alumno para su evaluación. En este caso, no debería llevar más de 10 minutos. Una vez terminado, continúa la sesión. Veremos cada tipo de función elemental para trabajar sus dominios y recorridos, aunque después las estudiaremos de forma más amplia.

Se presentan distintas funciones. Se discute sobre su dominio: ¿qué valores puede tomar x? o ¿existe algún valor de x para el cual la función no esté definida? Se discute sobre su recorrido: ¿qué valores toma y? Los polinomios van aumentando en grado.

Ejemplo 1. $f(x) = -2$

Ejemplo 2. $f(x) = x + 3$

Ejemplo 3. $f(x) = x^2 + 9x - 1$

Ejemplo 4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

Ejemplo 5. $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \sqrt{3}x^2 + 5$

Patrón. Son funciones cuya expresión son polinomios y cuyos coeficientes son números reales. Claramente, independientemente del valor de x, podemos calcular el valor de y. Además, los valores que tome y dependerán de cada caso concreto. En ocasiones tendremos rectas, otras parábolas, líneas curvas con cambios de curvatura, etc.

Funciones polinómicas: aquellas cuya expresión analítica es un polinomio. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. $\boxed{\boldsymbol{Dom\,(f) = \mathbb{R}}}$ ya que $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists\, f(x_0)$ y se puede calcular.

Se presentan distintas funciones. Se discute sobre su dominio: ¿qué valores puede tomar x? o ¿existe algún valor de x para el cual la función no esté definida?

Ejemplo 1. $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{x}$

Ejemplo 2. $f(x) = \frac{x+3}{6x-7}$

Ejemplo 3. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x-2}{x^2+x+2}}$

Patrón. Son funciones cuya expresión es un cociente de polinomios. Si nos fijamos, el único problema lo encontramos en los valores de x que anulan al denominador, ya que no podemos dividir entre cero.

Funciones racionales: aquellas que se expresan como cociente entre polinomios $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Si x_0 es raíz de Q(x), $\Rightarrow f(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{P(x_0)}{0} = \nexists$. $\boxed{\boldsymbol{Dom\ (f) = \mathbb{R} - \text{raíces de } Q(x)}}$

Se presentan distintas funciones. Se discute sobre su dominio: ¿qué valores puede tomar x? o ¿existe algún valor de x para el cual la función no esté definida?

Ejemplo 1. $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$

Ejemplo 2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$

Patrón. Son funciones cuya expresión involucra raíces de cualquier orden. Dado que elevar a potencia par siempre devuelve un valor positivo, vemos que hay que separar cada caso. Observamos que no habrá problemas cuando el radicando sea impar, no así cuando sea par.

Funciones irracionales: aquellas de la forma $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$.

- Si n es impar, $\boxed{\boldsymbol{Dom\ (f) = \mathbb{R}}}$
- Si n es par, $\boxed{\boldsymbol{Dom\ (f) = \{\text{valores de x tales que } P(x) \geq 0\}}}$

Aquí, señalamos que para calcular el domino de este tipo de ecuaciones, tendremos que recordar cómo se resuelven inecuaciones, que vimos en la unidad 2.

Se presentan distintas funciones. Se discute sobre su dominio: ¿qué valores puede tomar x? o ¿existe algún valor de x para el cual la función no esté definida?

Ejemplo 1. $f(x) = 2 \cdot 5^x$

Ejemplo 2. $f(x) = e^{9x-1}$

Ejemplo 3. $f(x) = 3 \cdot \frac{5}{7}^{x\sqrt{2}}$

Patrón. Son funciones con potencias, cuyo exponente contiene a la variable independiente. Observamos que no presenta problemas ya que la x puede tomar cualquier valor.

Funciones exponenciales: aquellas de la forma $f(x) = ka^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, $k \neq 0$. $\boxed{\boldsymbol{Dom\ (f) = \mathbb{R}}}$ ya que $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists\ f(x_0)$ y se puede calcular.

En este punto, señalamos que también se puede elevar a un número irracional, algo que suele costarles ver. Por ejemplo, también existe 2^{π}.

	Se presentan distintas funciones. Se discute sobre su dominio: ¿qué valores puede tomar x? o ¿existe algún valor de x para el cual la función no esté definida? Ejemplo 1. $f(x) = \log x$ Ejemplo 2. $f(x) = \ln x$ Ejemplo 3. $f(x) = \log_2(x^3 + 2)$ Patrón. Son funciones con logaritmos de distintas bases. Recordamos que el logaritmo de valores negativos no existe ni cuando $x = 0$.
	Funciones logarítmicas: aquellas de la forma $f(x) = log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$. $\boxed{\boldsymbol{Dom(f) = (0, +\infty)}}$ ya que no existe el logaritmo de números negativos ni del cero.

En este punto, señalamos que, para poder resolver ejercicios con logaritmos, en muchos casos tendremos que hacer uso de las propiedades de los logaritmos que vimos en la unidad 1.

Una vez vistas las funciones elementales anteriores, indicamos que podemos trabajar con funciones que combinen varios tipos. A pesar de que las operaciones con funciones se estudian al final de la unidad, van a ir descubriendo de forma intuitiva que podemos sumar, restar, incluso componer. Lo que sí que dejamos claro aquí es que, para cualquier función que "se salga" de todo lo anterior, debemos estudiar todas sus restricciones.

?	Enunciado. Estudiar el dominio de las siguientes funciones: a) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-3}{x-2}} + \log_2 x + 3^x$ *Se plantea directamente una función que contenga todos los tipos de funciones vistos para que los alumnos vean que es fácil llegar a la solución siguiendo un procedimiento estructurado y razonado.* Vamos planteando las cuestiones oportunas en cada paso de la resolución: 1. ¿Qué nos pide el enunciado? ¿Qué tipos de funciones tenemos? ¿Para qué valores no están definidas estas funciones?¿qué condiciones deben cumplir? o Dominio: valores para los que existe la función y está definida o Nos dan la suma de varias funciones elementales o Hemos visto que tenemos que estudiar todas las restricciones 2. ¿Hay similitud con los ejemplos que acabamos de ver?¿Podemos estudiar cada término por separado para simplificar el problema? o Sí, podemos hacer el estudio por separado

3. Vamos escribiendo cada paso de forma razonada.
   - El primer sumando es una función irracional, donde el radical a su vez es un cociente de polinomios. Sólo tiene problemas cuando x=2 (la raíz cúbica no influye).
   - El segundo sumando es una función logarítmica idéntica a las que ya hemos visto. Sólo existe si x es mayor que 0.
   - El tercero es una función exponencial y existe siempre.
   - Nos quedamos con el conjunto más restrictivo y "sacamos" del dominio el 2. Podemos concluir que $Dom(f) = (0,2) \cup (2, +\infty)$
4. ¿La solución obtenida es coherente?¿Tiene sentido?¿Hay alguna otra forma de comprobar que es correcta?
   - Comprobar la solución obtenida. Algunas formas: revisar la definición formal para cada tipo de función, sustituir valores "sospechosos" o si se tiene a mano alguna herramienta gráfica, se puede obtener la representación gráfica de la función.

Todos los ejercicios que se planteen a continuación se irán resolviendo de la misma forma. A medida que los alumnos adquieran habilidades para llegar a la solución, se irán quitando los apoyos, en este caso, las cuestiones dirigidas.

La complejidad aumenta progresivamente y se procura que cada ejercicio aporte algo diferente.

a) $f(x) = 3x^7 - 2x + 5$

b) $f(x) = \frac{7}{2x^2+3}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{(2x+3)(x+1)}$

d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+3x^2-4x}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x+3}}$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{5x-2}{x-1}}$

g) $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$

h) $f(x) = e^{4x-1}$

<u>Enunciado</u>.

Estudia el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \frac{\ln(x-2)}{(x-1)^3}$
2. $f(x) = \log\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-2}\right)$

	3. $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+3}\right) + \sqrt[7]{\frac{x+3}{x-3}}$ 4. $f(x) = \frac{\log[(\sqrt[3]{x})]}{\sqrt{x}}$ 5. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^3 - 2x^2 + 1}$

SESIÓN 3

Comenzamos la clase con la defensa y corrección de las tareas para casa por parte de un alumno para su evaluación. Una vez terminado, continúa la sesión.

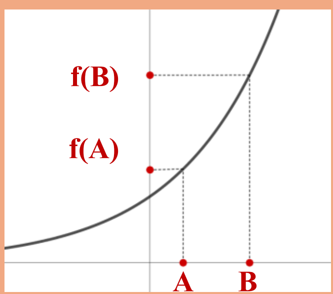
3. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

Dos características de las funciones que los alumnos ya conocen de cursos anteriores son la curvatura y la monotonía por lo que no será preciso profundizar demasiado en la introducción de estos conceptos. Simplemente daremos las definición matemática y seguiremos con las propiedades que no han visto aún: tendencia, simetría y periodicidad.

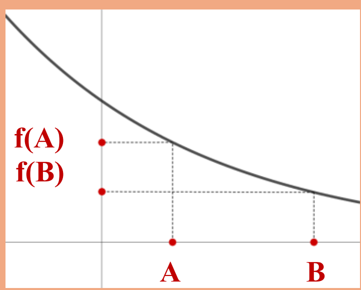
Se define **monotonía** como el comportamiento de crecimiento / decrecimiento de una función.

Las funciones pueden ser crecientes, decrecientes o constantes:

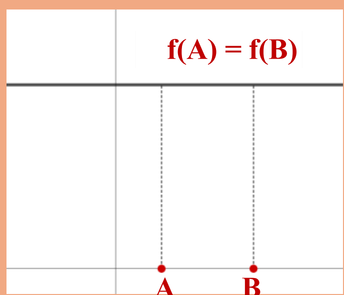
- Una función es **creciente** si verifica que: $f(B) \geq f(A)\ si\ B \geq A$
- Una función es **decreciente** si verifica que: $f(B) \leq f(A)\ si\ B \geq A$
- En caso contrario, es **constante**. Ni crece ni decrece.



Función creciente

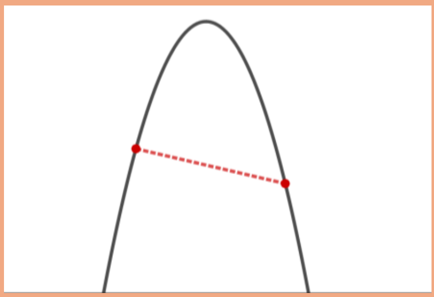


Función decreciente

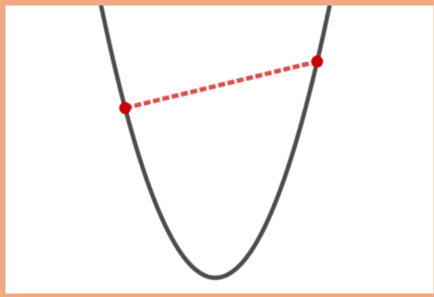


Función constante

Estudiar la **curvatura** de una función consiste en determinar los intervalos en los que la función es cóncava o convexa.



Concavidad: si trazo una recta que una dos puntos de la función, la recta queda por debajo de $f(x)$



Convexidad: si trazo una recta que una dos puntos de la función, la recta queda por encima de $f(x)$

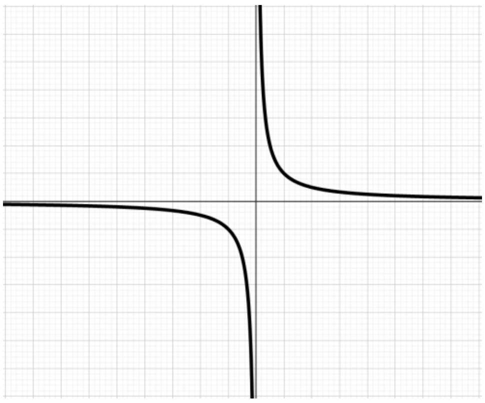
Vamos a analizar la siguiente función: $f(x) = \frac{1}{x}$

Sabemos que el $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ pero ¿qué ocurre cuando x es igual a cero o se acerca a cero?

Damos a x valores positivos y negativos cada vez más próximos a cero para ver qué ocurre:

x	0,1	0,01	0,001
y	10	100	1000

x	-0,1	-0,01	-0,001
y	-10	-100	-1000



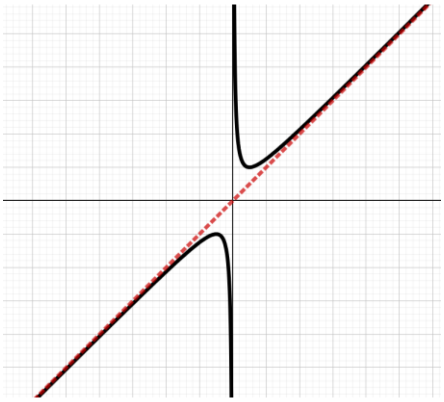
Con esto, podemos "intuir" cómo sería la representación gráfica de la función cerca de $x = 0$.

Vemos que nunca toca el eje de ordenadas y que los valores que toma la función tienden a $+\infty$ por la derecha y a $-\infty$ por la izquierda. En este caso, diremos que en $x = 0$ la función presenta una "asíntota vertical".

Ahora queremos saber cómo se comporta la función cuando x toma valores positivos y negativos infinitamente grandes. Hacemos el mismo análisis, vamos dando valores y comprobamos que en ambos casos el valor que toma la función tiende a 0 con valores positivos y negativos respectivamente. En este caso diremos que la función presenta una "asíntota horizontal" en $y = 0$.

Analizamos ahora esta otra función: $f(x) = x + \frac{1}{x}$

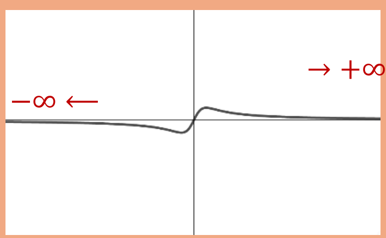
¿Cómo se comporta ahora la función en valores de x cercanos al cero? ¿Y cuándo x se acerca a ∞?



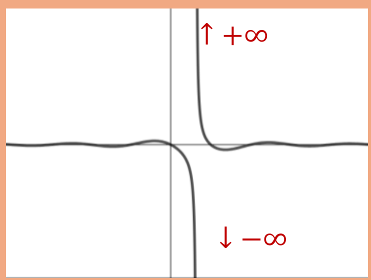
Es sencillo comprobar que la función se comporta igual que la anterior para valores de x muy pequeños.
Para valores muy altos, podemos ir dando valores cada vez mayores a x para comprobar que el segundo sumando va siendo cada vez más pequeño. En el infinito, ese sumando es cero y por lo tanto y toma un valor muy cercano a x. Es decir, y tiende a x cuando x toma valores muy altos. O lo que es lo mismo, y tiende a una recta ($y = x$); la función presenta una "asíntota oblicua" en $y = x$.

Se denomina **asíntota** a toda recta a la cual una función se aproxima infinitamente sin llegar a alcanzarla

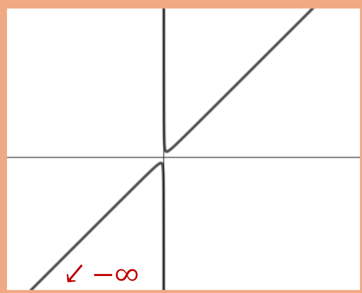
- Una función $f(x)$ presenta una **asíntota horizontal** en $y = A$ si para valores de x positivos o negativos infinitamente grandes, $f(x)$ tiende al valor A, sin llegar a alcanzarlo.
- Una función $f(x)$ presenta una **asíntota vertical** en $x = B$ si para valores de x infinitamente próximos a B, $f(x)$ tiende a $\pm\infty$, sin llegar a alcanzarlo.
- Una función $f(x)$ presenta una **asíntota oblicua** cuando, si para valores de x positivos o negativos infinitamente grandes, $f(x)$ tiende a una recta sin llegar a tocarla.



Asíntota horizontal



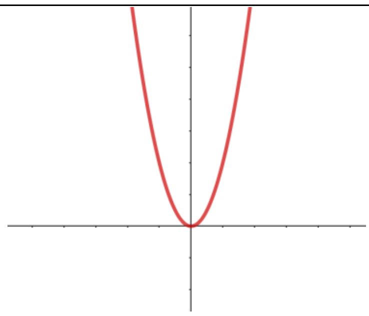
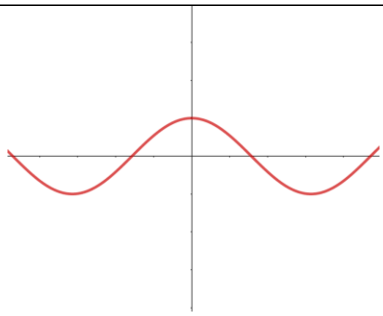
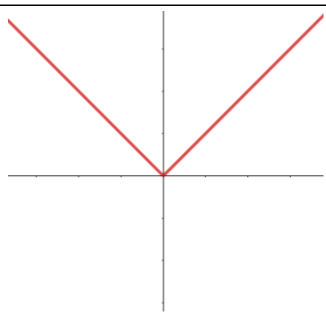
Asíntota vertical



Asíntota oblicua

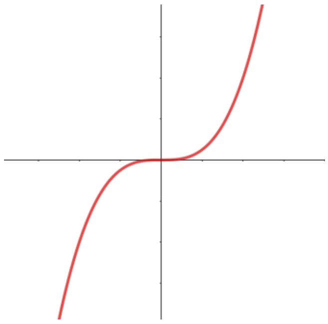
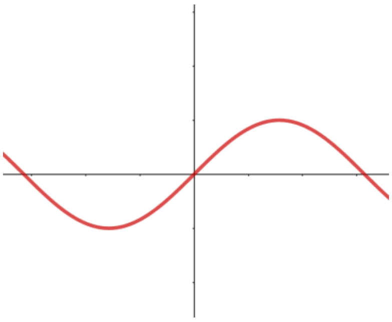
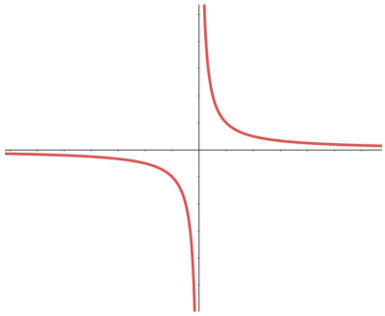
Aquí hacemos un inciso y explicamos que las asíntotas de las funciones son muy sencillas de determinar con los límites, concepto que se verá en la siguiente unidad.

Se presentan representaciones gráficas de varias funciones y preguntamos al alumnado qué característica común tienen.

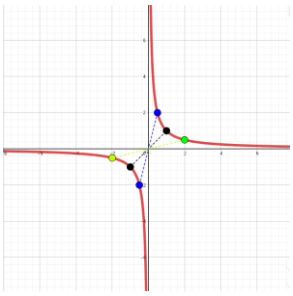




Vamos comentando una a una, creando debate hasta que lleguen a la conclusión de que la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Presentamos ahora las siguientes funciones:

Quizás en este caso sea más complicado de ver. Dirigimos el razonamiento con preguntas: ¿hay algún tipo de simetría aquí? Podemos llegar a ver que hay una doble simetría respecto a ambos ejes, aunque para formularlo con mayor rigor matemático, vamos a centrarnos en la última función: $f(x) = \frac{1}{x}$.



Si identificamos un punto de la gráfica (x_0, y_0) y buscamos el valor que toma la función en $-x_0$, vemos que toma un valor exactamente el valor $-y_0$. Esto se cumple siempre y sobre la gráfica equivale a que si uno los pares de puntos que conforman la gráfica, la recta resultante pasa por el origen y la distancia de cada punto al origen es la misma. La función en este caso es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Una función $f(x)$ presenta **simetría par** o **simetría respecto al eje de ordenadas** si

$\boxed{f(-x) = f(x) \ ; \ \forall x \in Dom(f)}$

Una función $f(x)$ presenta **simetría impar** o **simetría respecto del origen de coordenadas** si

$\boxed{f(-x) = -f(x) \ ; \ \forall x \in Dom(f)}$

<u>Enunciado</u>.

Estudiar si las siguientes funciones presentan algún tipo de simetría.

Hacemos notar en primer lugar que únicamente conocemos las expresiones analíticas y que dibujar las gráficas sería muy complicado y nos llevaría mucho tiempo. Por lo tanto, lanzamos las preguntas: ¿cómo podemos averiguarlo? Evaluamos la función en $-x$ para ver si cumple con alguna de las condiciones de simetría vistas.

- $f(x) = (x^2 - 3)^3$

  $f(-x) = ((-x)^2 - 3)^3 = (x^2 - 3)^3 = f(x)$

  Simetría par.

- $f(x) = x^5 - 6x^3$

  $f(-x) = (-x)^5 - 6(-x)^3 = -x^5 + 6x^3 = -1 \cdot (x^5 - 6x^3) = -f(x)$

  Simetría impar.

- $f(x) = \frac{x-2}{x^2+3x}$

  $f(-x) = \frac{-x-2}{(-x)^2+3\cdot(-x)} = \frac{-x-2}{x^2-3x}$

  $\neq f(x)$

  $\neq -f(x)$

  No presenta simetría par ni impar.

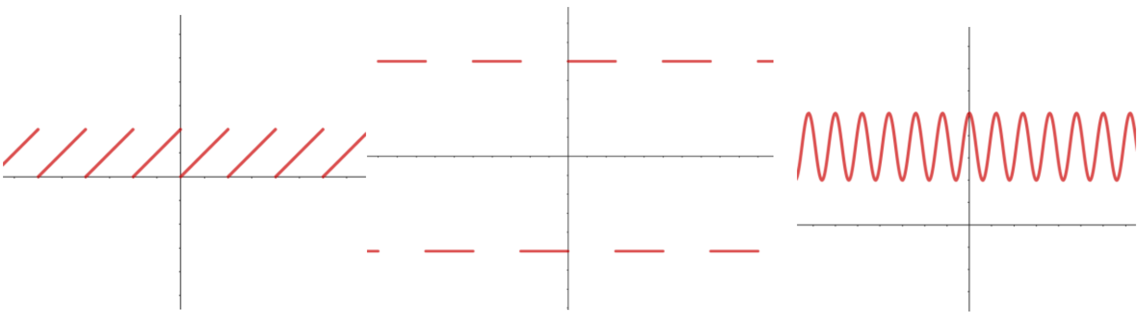
- $f(x) = \frac{x^3}{x^4+5x^2+3}$

  $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^4 + 5(-x)^2 + 3} = \frac{-x^3}{x^4 + 5x^2 + 3} = -1 \cdot \frac{x^3}{x^4 + 5x^2 + 3} = -f(x)$$

  Simetría impar.

Concluimos que con ejercicios de este tipo será necesario buscar siempre $f(x)$ o $f(-x)$ y esto no tiene por qué ser inmediato al evaluar la función en $-x$. En ocasiones habrá que simplificar, sacar factor común, etc.

Se presentan representaciones gráficas de varias funciones y preguntamos al alumnado qué característica común tienen.



Vamos comentando una a una, creando debate hasta que lleguen a la conclusión de que la función se repite de forma cíclica.

Una función $f(x)$ es **periódica de periodo T**, si su gráfica se repite a intervalos de longitud T, con T>0. $\boxed{f(x) = f(x \pm T) = f(x \pm 2T) = \cdots = f(x \pm nT)}$

En particular, la expresión $f(x) = f(x + T)$ nos permite plantear una ecuación para hallar el dominio de una función. Profundizaremos sobre ellos cuando veamos funciones trigonométricas.

Al igual que con la simetría, conocer si una función es periódica, va a ser muy útil porque con estudiar un intervalo de longitud T será suficiente para después extrapolar al resto de la función.

Hacemos una observación sobre funciones que podemos encontrar típicamente y que presentarán periodicidad: una onda que se emite de forma constante, las ventas de un producto estacional a lo largo del año (por ejemplo, la ropa de baño), el gasto energético de una vivienda (porque los hábitos de las personas son cíclicos), etc.

<u>Enunciado</u>.

Un sistema de riego automático se activa y desactiva siguiendo un patrón lineal de tiempo que se repite cada 4 horas. Desde las 00h hasta las 04h, la cantidad de agua que se libera por hora sigue una función del tipo $f(x) = 2x + 1$ litros de agua, donde x es el número de horas transcurridas desde la medianoche. El sistema de riego comienza a liberar agua a las 0:00 horas (incluido) y deja de liberar agua antes de las 4:00 horas (sin incluir 4:00). Calcula cuántos litros de agua se liberan:

- A las 08h de ese mismo día
- A las 23h de ese mismo día
- A las 10h45 de ese mismo día
- A las 21h del día anterior
- A las 02h del día posterior

Planteamos las cuestiones oportunas para su resolución paso a paso:

1. ¿Identificáis los datos de entrada?: tipo de función, cómo se define el intervalo, etc. ¿Identificáis lo que os piden? Tomad unos segundos para entender a qué significa "ese mismo día", "del día anterior", "del día posterior", etc.
2. ¿Qué conocemos para resolverlo? En este caso, partimos de la definición de función periódica.
3. Vamos escribiendo cada paso de forma clara y razonada. Buscamos en qué periodo estamos y vamos sacando valores de la función.

	4. ¿Las soluciones obtenidas tienen sentido? ¿por qué sí/no? ¿cómo podemos comprobar que son correctas? Dejamos que vayan sacando las soluciones de cada apartado.

En esta sesión no se mandan tareas para casa pues los alumnos tendrán la oportunidad de trabajar y aplicar estas propiedades de forma práctica a lo largo de esta unidad y la siguiente.

SESIÓN 4

Las sesiones 4 y 5 serán muy similares pues se profundizará en el estudio de las funciones elementales ya conocidas, pero con ayuda del software de Geogebra. Serán sesiones enfocadas en compartir y debatir con los alumnos, facilitando que el razonamiento inductivo surja por sí mismo.

En la sesión 6, seguiremos haciendo uso de Geogebra pero será una clase dedicada exclusivamente a las funciones trigonométricas, por tratarse de su primer acercamiento a ellas.

4. REPRESENTACIÓN Y ESTUDIO DE FUNCIONES

No se trata de definir cada tipo de función puesto que esto ya lo hicimos en el apartado relativo a dominio y recorrido. En este apartado se amplía la información sobre cada tipo de función.
Para ilustrar cómo es la representación gráfica para las funciones polinómicas de distinto grado se hará uso del recurso interactivo de GeoGebra "Graficador de funciones polinómicas de grado menor o igual que 5" (Hely, s.f). En él se utilizan deslizadores para cada uno de los coeficientes de los monomios para grado menor o igual a 5.

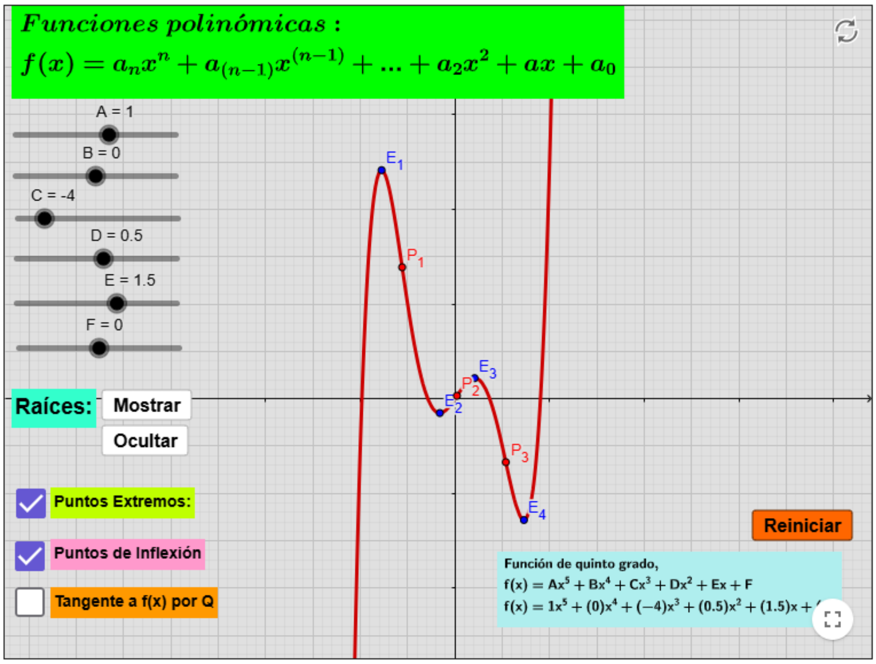


Figura 10. *Graficador de funciones polinómicas de grado menor o igual que 5* (Hely, s.f.). https://www.geogebra.org/m/zgx47f28

	Partimos de los polinomios de menor grado y vamos aumentando. Observaciones y preguntas guiadas. Los alumnos debaten sobre lo siguiente: • Grado 0: ¿qué forma tiene esta gráfica?¿cuál es la imagen de este tipo de funciones? • Grado 1: ¿qué forma tiene esta gráfica?¿recordáis qué representa el coeficiente que acompaña a la x?¿y el término independiente?¿cómo afecta a la recta el signo de pendiente? • Grado 2: ¿qué forma tiene esta gráfica?¿qué observáis al cambiar el signo del coeficiente que acompaña a x^2?¿cómo se modifica la gráfica en función de los valores que toman los otros coeficientes?¿qué podemos decir sobre el recorrido de esta función? • Grado 3, 4, 5: ¿qué podemos observar por ejemplo en lo relativo a los puntos extremos para funciones de grado 3, 4 o 5?¿qué podemos observar sobre los puntos de corte con el eje de abscisas?¿y sobre el recorrido?
	Funciones polinómicas. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ Casos particulares: • Una función polinómica de grado 0 o **función constante**: $f(x) = a_0$. Es una constante. $Im\ (f)\ =\ a_0$ • Una función polinómica de grado 1 o **función lineal**: $f(x) = a_0 + a_1x$ Es una recta donde a_0 es la ordenada en el origen y a_1 es la pendiente de la recta. El valor de a_0 determina el punto de corte con el eje de ordenadas y el valor de a_1 me da la inclinación y la monotonía de la recta. • Una función polinómica de grado 2 o **función cuadrática**: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ con $a_2 \neq 0$ Es una parábola donde las coordenadas del vértice son $x_v = \frac{-a_1}{2a_2}\ y_v = f(\frac{-a_1}{2a_2})$ El valor de a_2 determina la curvatura de la parábola. Cóncava: $Im\ (f)\ = (-\infty, y_v]$ Convexa: $Im\ (f) = [y_v, +\infty)$ • Una función polinómica de grado n>2 puede presentar distintas formas y merece un estudio individual de cada caso concreto. El número máximo de extremos que presenta la gráfica es igual a n-1.

Para ilustrar cómo es la representación gráfica para las funciones racionales, se hará uso del recurso interactivo de GeoGebra "Funciones racionales con deslizadores" (Coiro, s.f.). En él se parte de un cociente de polinomios de grado uno, donde se pueden ir variando los valores de los distintos coeficientes de manera que las raíces se van modificando, y con ello, las distintas asíntotas.

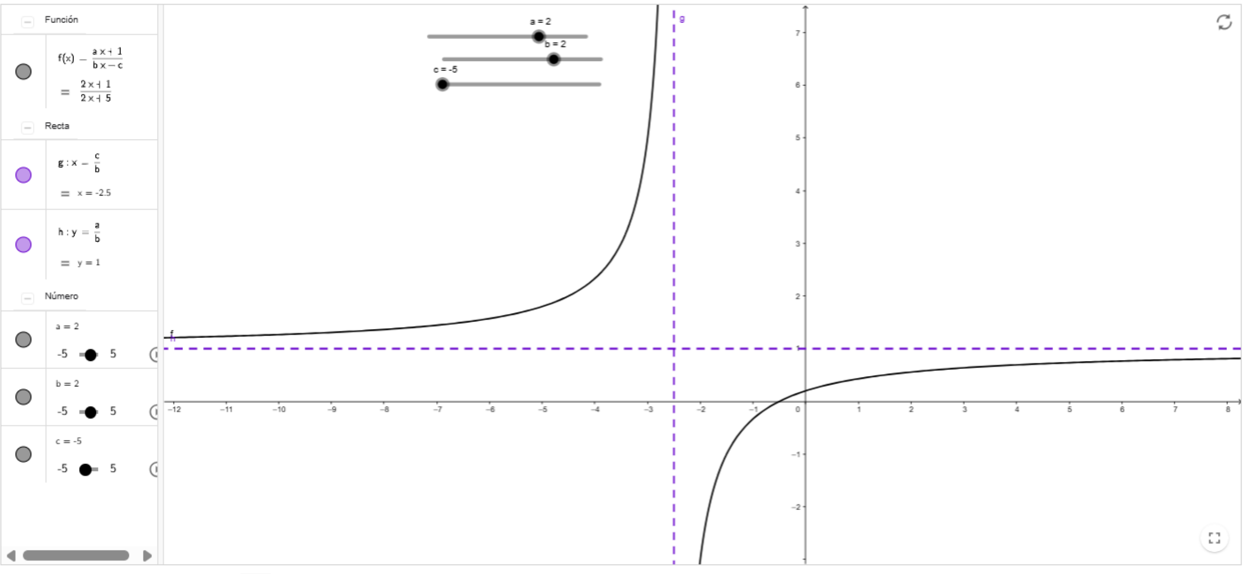


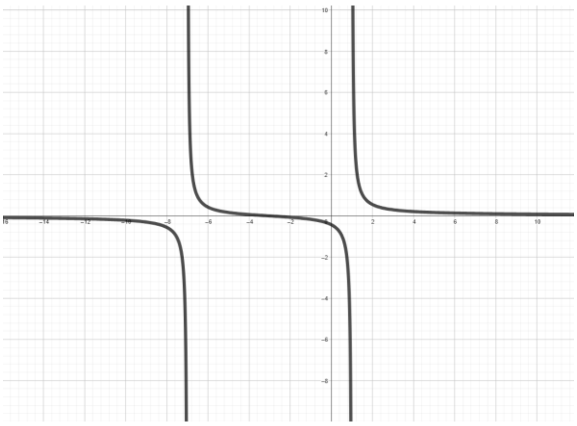
Figura 11. *Funciones racionales con deslizadores* (Coiro, s.f.). https://www.geogebra.org/m/zgx47f28

Utilizar el recurso interactivo de GeoGebra permite a los alumnos visualizar de forma dinámica cómo varían la gráfica, las raíces y las asíntotas de una función racional a partir de los distintos valores de sus coeficientes. Esta actividad fomenta el aprendizaje por descubrimiento ya que los alumnos pueden experimentar y observar patrones por sí mismos, lo que lleva a una comprensión más profunda y significativa de conceptos clave como las asíntotas verticales y horizontales, que a menudo resultan abstractos. Fortalece además la conexión entre la expresión analítica y su representación gráfica y trabajan la competencia digital.

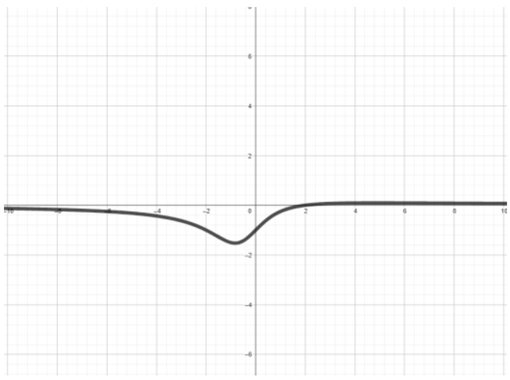
Observamos y comentamos:

- ¿Habrá valores para los cuales el denominador no se anule?¿qué ocurre en esos casos?
- ¿Cuál es la imagen de una función de este tipo?
- ¿Qué ocurre en los valores en los que el denominador se hace cero?

Pasamos a funciones con mayor grado en el denominador y representamos en GeoGebra las siguientes funciones:



$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x-7}$$



$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+x+2}$$

Observamos lo que ocurre en estos casos y calculamos las raíces para discutir sobre su significado.

Funciones racionales. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Presentan asíntotas verticales en los valores de x que anulan el denominador.

Caso particular:

- Una función racional de la forma: $f(x) = \frac{k}{x}$ es una **función de proporcionalidad inversa** donde k es una constante.

Enunciado.

Una tubería con un caudal de 80 m³/h llena un depósito en 30 minutos. Encuentra la función que relaciona el caudal vertido con el tiempo que tarda en llenarse el depósito.

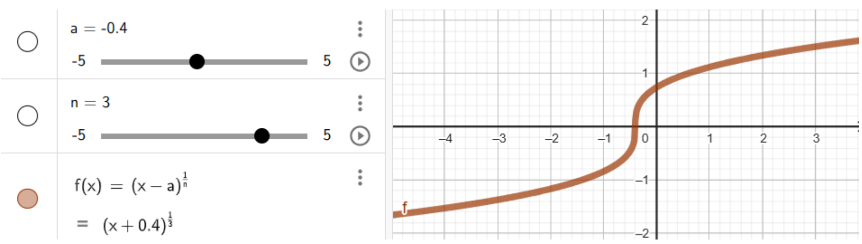
Lanzamos las preguntas: ¿Qué tipo de relación existe entre ambas variables?¿cuánto mayor sea el caudal vertido por la tubería, tardará más o menos en llenarse el depósito?¿cómo modelizamos esa relación? Los alumnos deben ser capaces de llegar a la relación de proporcionalidad inversa a través de la relación

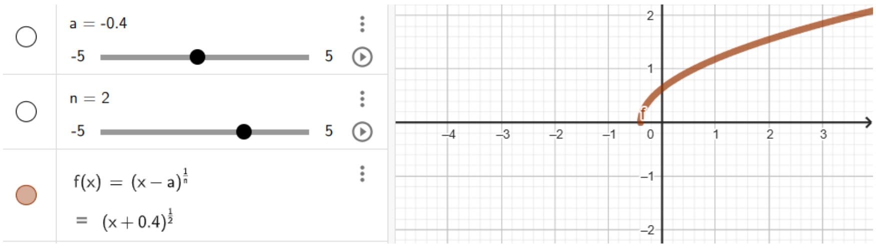
$80\frac{m^3}{h} \rightarrow 0{,}5\ h : 80 \cdot 0{,}5 = 40\ m^3\ vol. depósito: cte\ de\ proporcionalidad\ inversa = Q_1 \cdot t_1 = Q_2 \cdot t_2 = \cdots$

$40 = Q \cdot t \rightarrow Q = \frac{40}{t}$

Para estudiar las funciones irracionales, se utilizará directamente GeoGebra a partir de una función del tipo: $f(x) = \sqrt[n]{x-a}$ donde a y n serán controlados mediante deslizadores. Esta configuración permitirá observar de manera visual y sencilla cómo varía el comportamiento de la función cuando el índice corresponde a un número par o impar, destacando las diferencias entre ambos casos.

Presentamos las funciones más comunes, cuando la raíz es cuadrada y cuando se trata de una raíz cúbica:





¿Qué diferencia fundamental hay entre uno y otro caso? ¿Cuál será el recorrido para un caso y otro? ¿Cómo afecta el signo del radical a la representación de la función?

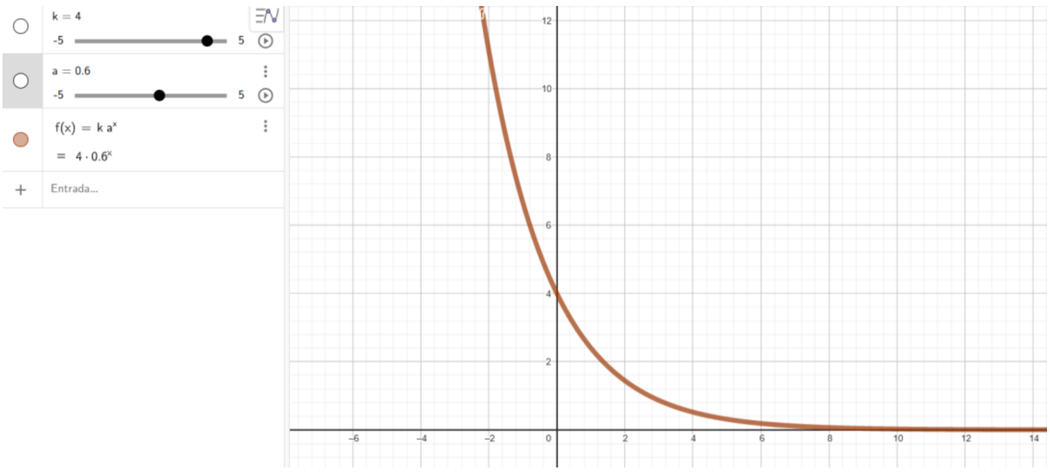
Funciones irracionales. $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$.

La velocidad a la que crecen o decrecen decae a medida que aumenta el valor de la variable independiente. No obstante, nunca llegan a presentar una asíntota horizontal o lo que es lo mismo, su recorrido no está acotado.

SESIÓN 5

Para estudiar las funciones exponenciales, se utilizará directamente GeoGebra a partir de una función del tipo: $f(x) = ka^x$ *donde k y a serán controlados mediante deslizadores para estudiar su comportamiento.*

Observaciones sobre los distintos valores que toman k y a. Cuestiones para generar el debate:



- ¿Qué determina que la función sea creciente o decreciente?
- ¿Qué determina que la función crezca o decrezca más o menos rápido?
- ¿En qué punto corta la función al eje de ordenadas?
- ¿Cuál va a ser el recorrido?¿Presenta en algún caso la función asíntotas?¿cuáles?

Patrones: asíntotas horizontales, monotonía, punto de corte con el eje de ordenadas, recorrido.

Funciones exponenciales. $f(x) = ka^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, $k \neq 0$

Las funciones exponenciales crecen o decrecen más rápido cuanto mayor sea el valor de a, pasan siempre por el punto $(0, k)$, su signo es constante y coincide con el del coeficiente k.

Nunca cortan al eje de abscisas y presentan siempre una asíntota horizontal en $+\infty$ si $0 < a < 1$ o en $-\infty$ si $a > 1$

<u>Enunciado</u>.

Adrián sale de fiesta y 1 hora después de su última bebida, tiene una concentración de alcohol en sangre de 0.8 g/L. A partir de ese momento, deja de beber y su cuerpo comienza a eliminar el alcohol. Si la cantidad de alcohol en la sangre después de haber dejado de consumir bebidas alcohólicas se modela mediante una función exponencial negativa $C(t) = k \cdot a^{-bt}$ en g/L donde b es una constante de eliminación, en este caso $b = 0{,}15$.

Determina:

a) La función $C(t)$ que describe la cantidad de alcohol en su sangre

b) Tiempo necesario para que la cantidad de alcohol baje hasta el límite legal para conducir (0,5 g/L)

c) Cómo influye el valor de la constante de eliminación en la concentración de alcohol en sangre.

d) ¿Se llega a eliminar todo el alcohol consumido?

Se van planteando como se ha indicado en apartados anteriores las cuestiones dirigidas oportunas para ir guiando la resolución del problema.

<u>Enunciado 1.</u>

Una batería de teléfono móvil se carga siguiendo un modelo exponencial, donde la cantidad de carga almacenada en función del tiempo se describe mediante la fórmula:

$Q(t) = Q_{max} \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$

Donde $Q(t)$ es el porcentaje de carga después de t horas; Q_{max} es la carga máxima (100%) y k es una constante que depende del cargador y de la batería y que en este caso vale 0,8.

Determina:

a) Tiempo que tarda en cargarse al 90% si se conecta cuando la batería está completamente vacía (0%)

b) Tiempo que tarda en subir la batería del 30% al 80% de carga.

<u>Enunciado 2.</u>

El estroncio-90 es un isótopo radiactivo que se utiliza en aplicaciones médicas y nucleares. Su período de semidesintegración es de 28 años lo que significa que el elemento se reduce a la mitad

en este tiempo siguiendo una función del tipo $M(t) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ donde M_0 es la masa inicial, T es el periodo de semidesintegración y t es el tiempo en años.
Un laboratorio comienza con una muestra de 15 mg de estroncio-90.

Determina:

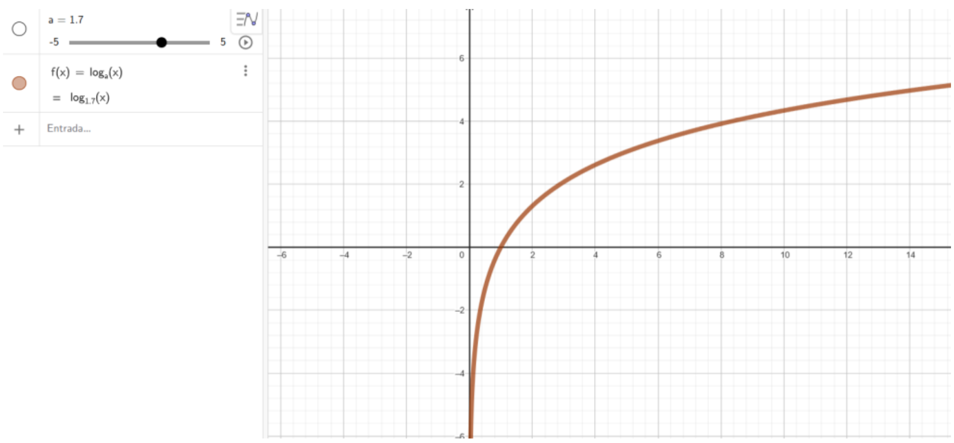
a) La función $M(t)$ que representa la masa de estroncio-90 (en miligramos) que quedará después de t años.

b) ¿Cuánta cantidad quedará exactamente al cabo de 84 años?

c) ¿En qué año la muestra se reducirá a menos de 1 mg?

Para estudiar las funciones logarítmicas, se utilizará directamente GeoGebra a partir de una función del tipo: $f(x) = log_a x$, donde a será controlado mediante un deslizador para estudiar su comportamiento.

Observaciones sobre los distintos valores que toma a. Cuestiones para debatir:



- ¿Qué determina que la función sea creciente o decreciente? ¿Qué determina que crezca o decrezca más o menos rápido?
- ¿En qué punto corta la función al eje de abscisas?
- ¿Cuál va a ser el recorrido? ¿Presenta en algún caso la función asíntotas? ¿cuáles?
- ¿Qué relación guarda esta función con la función exponencial?

Patrones: asíntotas verticales, monotonía, punto de corte con el eje de abscisas, recorrido.

Funciones logarítmicas. $f(x) = log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.
Todas las funciones logarítmicas pasan por el punto (1,0) y tienen por imagen todo $\mathbb{R}$.
Tienen una asíntota vertical en $x = 0$.
Por definición, el logaritmo en base a de x es equivalente a resolver: $a^y = x$ por lo que las funciones logarítmicas y las exponenciales son funciones inversas entre sí. Esto significa que si el punto (x, y) pertenece a la gráfica de $log_a x$, entonces el punto (y, x) pertenece a la de a^x. Ambas gráficas son simétricas respecto de la recta $x = y$.

?	Enunciado. El nivel sonoro L de un sonido medido en decibelios se calcula a través de una función logarítmica del tipo $L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ donde I es la intensidad del sonido en W/m^2 e I_0 es la intensidad mínima audible que tiene un valor de $10^{-12} W/m^2$. Determina: **a)** La intensidad I de un sonido cuyo nivel sonoro es de 70 dB. **b)** Si la intensidad se multiplica por 100, ¿cuántos decibelios más tendrá el nuevo sonido? **c)** Si otro sonido tiene una intensidad que es 1000 veces mayor que I_0¿cuál será su nivel sonoro? Se van planteando como se ha indicado en apartados anteriores las cuestiones dirigidas oportunas para ir guiando la resolución del problema.

	Enunciado. El crecimiento de una colonia de bacterias sigue una función logarítmica del tipo $P(t) = P_0 + a \cdot \ln(b \cdot t + 1)$ donde $P(t)$ es el tamaño de la población de microorganismos en el tiempo t (en días), P_0 es la población inicial de microorganismos, a y b son constantes y t es el tiempo en días. Determina: **a)** Los valores de las constantes a y b sabiendo que la población inicial es de 100 microorganismos y la población al día 10 es de 150. **b)** La población de microorganismos después de 20 días. **c)** En qué momento la población alcanzará los 200 microorganismos

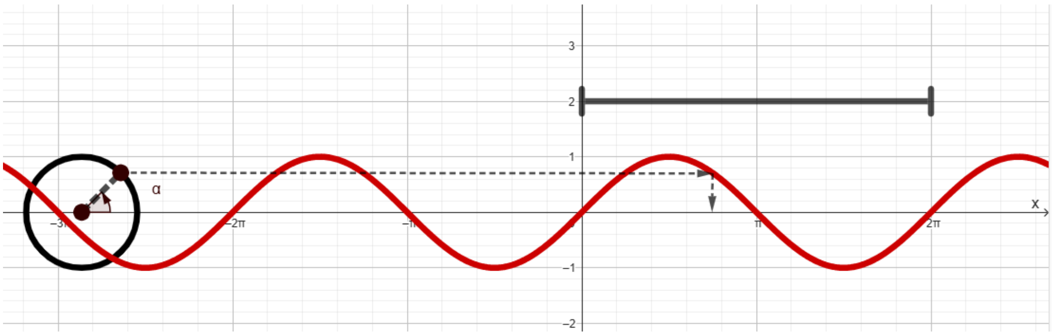
SESIÓN 6

Comenzamos la clase con la defensa y corrección de las tareas para casa por parte de un alumno para su evaluación. Una vez terminado, continúa la sesión.

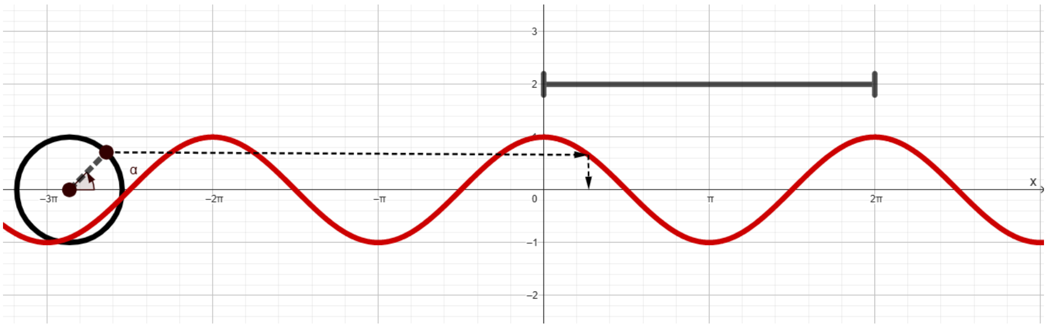
Recordemos que los alumnos ya han visto las razones trigonométricas este curso y han trabajado sobre la circunferencia goniométrica. Vamos a utilizar esta circunstancia como hilo conductor para conectar con el nuevo conocimiento.

	Presentamos la circunferencia goniométrica y un ángulo sobre ella que empieza en 0 radiantes y va girando en sentido contrario a las agujas del reloj. Vamos representando sobre una gráfica los valores que va tomando el seno de cada ángulo en el eje de ordenadas mientras que en el eje de abscisas registramos el ángulo en radianes. El resultado es una curva. Obtenemos la función seno. Preguntamos y generamos el debate:

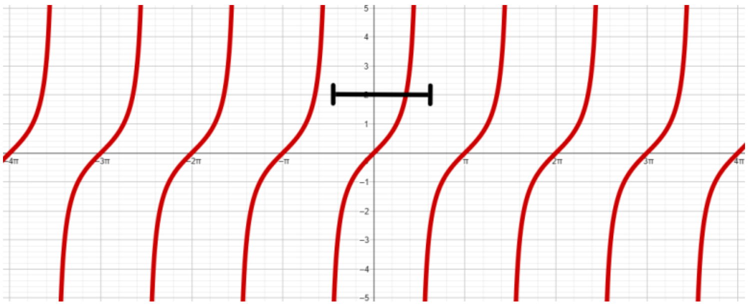
- ¿Qué características de las ya estudiadas presenta esta función?
- ¿Cuál va a ser el dominio? ¿y el recorrido?
- ¿Por qué no representamos la función en grados, en lugar de hacerlo en radianes?
- Si ya tuviéramos el valor de la razón seno ¿cómo sabríamos el ángulo que le corresponde? ¿cómo sería la gráfica de esa función?



Hacemos el mismo análisis para el coseno:



A partir de las gráficas de las funciones seno y coseno y de las observaciones y conclusiones obtenidas, debemos llegar a una aproximación de la gráfica de la función tangente.



Conclusiones: simetrías, periodicidad, dominio, recorrido, asíntotas, funciones inversas.

Funciones trigonométricas: son aquellas cuyo argumento, o variable independiente, es un ángulo.

- Funciones seno y coseno:
  - $f(x) = sen(x), \ g(x) = cos(x)$
  - En ambos casos, su **dominio es** ℝ y su **imagen** está en el intervalo $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$
  - Son funciones **periódicas de periodo** $\mathbf{2\pi}$
  - La **función seno es impar** o simétrica respecto del origen de coordenadas mientras que la **función coseno es par** o simétrica respecto del eje de ordenadas. En realidad, la gráfica de ambas funciones es la misma pero desplazada horizontalmente.

- Función tangente:
  - $h(x) = tg(x)$
  - Su **dominio es** ℝ - $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \;/\; \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}$. En estos puntos, se anula el coseno de x y la gráfica presenta asíntotas verticales. Su **imagen es ℝ.**
  - Es una función **periódica de periodo** $\boldsymbol{\pi}$
  - Es una función **impar** o simétrica respecto del eje de ordenadas
- Funciones arco seno, arco coseno, arco tangente:
  - $f(x)^{-1} = arcsen(x),\; g(x)^{-1} = \; arccos(x),\; h(x)^{-1} = arctg(x)$
  - Son **funciones inversas** de las anteriores, lo que significa que devuelven el valor del ángulo en radianes cuyo seno, coseno o tangente es igual al valor de la variable independiente.
  - El dominio de las funciones arco seno y arco coseno está acotado al intervalo $[-1,1]$ mientras que la imagen de la función arco tangente lo está al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De este modo, la función cumple con la condición de asignar un solo resultado a cada valor de x.

?

Enunciado.

Estudiar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{1 - \cos(x)}$

b) $f(x) = \frac{1}{sen(x)}$

c) $f(x) = \; sen^2(x) + \frac{1}{\sqrt{1 - cos^2(x)}}$

d) $f(x) = e^{tg(x)} - \frac{3 \cdot x^2 - x}{x}$

e) $f(x) = arctg\sqrt{x}$

f) $f(x) = \frac{1}{arcsen(x)}$

g) $f(x) = \; \log(\cos(x)) + \frac{2x-3}{\arccos(x-\pi)}$

Se van planteando como se ha indicado en apartados anteriores las cuestiones dirigidas oportunas para ir guiando la resolución del problema.

Se aprovecha que la sesión se lleva a cabo con GeoGebra para mostrar las gráficas en cada caso.

SESIÓN 7

Dado que a lo largo de las sesiones los alumnos han trabajado de manera práctica con funciones, realizando operaciones sin definición explícita, comenzará esta séptima sesión directamente con la exposición formal de las operaciones con funciones, con objeto de formalizar lo que ya han aplicado de manera intuitiva durante la unidad.

5. OPERACIONES CON FUNCIONES

- La **suma de dos funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$** es otra función que denotamos $f+g$ que cumple que: $(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
- La **resta de dos funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$** es otra función que denotamos $f-g$ que cumple que: $(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
- El **producto de dos funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$** es otra función que denotamos $f\cdot g$ que cumple que: $(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
- El **cociente de dos funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$** es otra función que denotamos $\frac{f}{g}$ que cumple que: $\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}$

Los dominios de las funciones suma, resta y producto están formados por la intersección de los dominios de las funciones f y g por separado, es decir, por los números que pertenecen a la vez a los dominios de f y de g. Para el docente sucede lo mismo, pero además hay que excluir de su dominio los valores que anulan el denominador, $g(x)=0$.

Enunciado.

Dadas las funciones: $f(x)=2-\sqrt{x+3}$ y $\mathrm{g}(x)=\sqrt{(1-x)\cdot(x-4)}$, calcula el dominio de $f+g$, de $f\cdot g$ y de $\frac{f}{g}$.

Se van planteando como se ha indicado en apartados anteriores las cuestiones dirigidas oportunas para ir guiando la resolución del problema.

Se presentan las siguientes situaciones:

Ejemplo 1. Supongamos que la producción de coches en una fábrica viene dada por la función $f(t)=2t+3$ donde la variable independiente t es el tiempo en horas y la variable dependiente es la cantidad de coches fabricados (producción mínima inicial de 3 unidades y después, un coche cada hora).

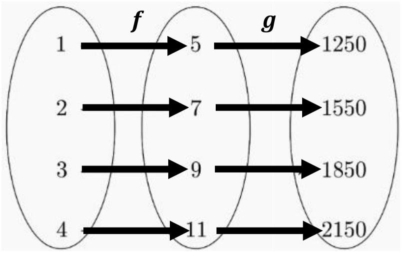
Supongamos además que una empresa de logística calcula el costo de transportar esos coches al concesionario mediante la función: $g(x)=150y+500$

Planteamos las siguientes cuestiones:

- ¿Podríamos calcular una tabla de valores para la producción en 1, 2, 3, 4 horas? ¿Y el coste logístico de esa producción?:

Tiempo (H)	Producción (unidades)	Coste (€)
1	5	1.250
2	7	1.550
3	9	1.850
4	11	2.150

- ¿Podríamos calcular el coste horario de la empresa logística en un solo paso? ¿Cómo podríamos pasar del conjunto "Tiempo" al conjunto "Coste" directamente con una función?



Tiempo (H) **Producción** (ud.) **Coste** (€)

- ¿Qué función actuaría primero?¿Tendría sentido que actuasen en sentido contrario?¿El resultado sería el mismo?

Observaciones:

Los alumnos deben llegar a la función compuesta directa donde una función actúa en primer lugar y después actúa otra: $g\big(f(t)\big) = 150 \cdot (2t + 3) + 500 = 300t + 950$. Además, deben ser capaces de ver que la composición inversa arroja resultados distintos (además, en este ejemplo, carece de sentido).

Ejemplo 2. Supongamos que tenemos dos funciones

- La función $f(x)$, que hace corresponder a cada número x su cuadrado, tal que $f(x) = x^2$
- La función $g(x)$, que hace corresponder a cada número x el siguiente, tal que $g(x) = x + 1$

  Vamos a aplicar ambas funciones sobre $x = 2$, una detrás de la otra, pero en distinto orden para ver cómo influye en el resultado:

$x = 2$	$f(2) = 4$	$g(f(2)) = g(4) = 5$
$x = 2$	$g(2) = 3$	$f\big(g(2)\big) = f(3) = 9$

Vamos a realizar esta misma operación, pero con las expresiones analíticas:

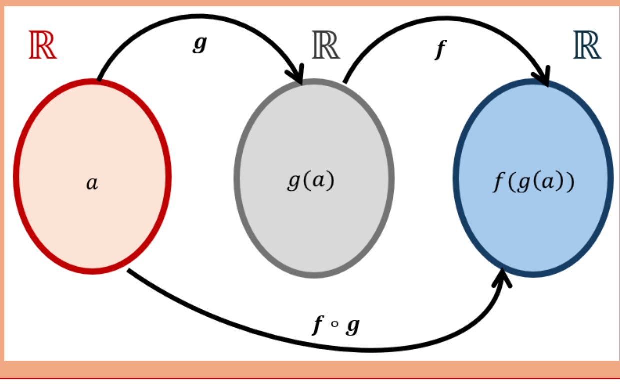
Aplicando primero $f(x)$	$g\big(f(x)\big) = x^2 + 1$
Aplicando primero $g(x)$	$f\big(g(x)\big) = (x + 1)^2$

Observaciones:

Los alumnos ven claramente que la composición de funciones no tiene la propiedad conmutativa.

La **composición de funciones :**

- Se define como $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$.
- Se lee "***g* compuesta con *f***" ya que es la función g la que se aplica primero sobre un valor x y la f la que se aplica en segundo lugar.
- En general, la composición de funciones **no es conmutativa**.
- **Para que un número $\boldsymbol{a}$ pertenezca al dominio de $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$** debe cumplirse que exista $g(a)$, es decir, que $a \in dom(g)$ y que $g(a) \in dom(f)$



Enunciado 1.

Dadas las funciones

$$f(x) = x^2 \qquad j(x) = 1 - \ln(x)$$

$$g(x) = \frac{1}{x-5} \qquad k(x) = x - 7$$

$$h(x) = \sqrt{3-x} \qquad m(x) = \frac{x^2+4}{x-1}$$

Realiza las siguientes operaciones y halla el dominio de la función resultante:

a) $(f \circ g)\,(x)$

b) $(f \circ h)\,(x)$

c) $(h \circ f)\,(x)$

d) $(j \circ h)(x)$

e) $(m \circ f)(x)$

f) $(f \circ m)(x)$

g) $(f \circ g \circ k)(x)$

Enunciado 2.

Definidas las funciones $g(x) = 3x + 2$ y $h(x) = 9x^2 + 12x + 2$, encuentra una función f tal que $(f \circ g)(x) = h(x)$

Se van planteando como se ha indicado en apartados anteriores las cuestiones dirigidas oportunas para ir guiando la resolución del problema.

Enunciado 1.

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = 2x + m$, ¿para qué valores de m se cumple que la imagen de $x = 2$ es 5 en la composición $(f \circ g)(x)$?

Enunciado 2.

Definidas dos funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x-2}$ Demuestra que $(f \circ g)(x) = x - 2$ y justifica que el dominio de esta función no sea $\mathbb{R}$

Enunciado 3.

Definidas las funciones

$f(x) = x^2 - x - 2$

$g(x) = \sqrt{x - 4}$

$h(x) = \frac{1}{x^2-2}$

$j(x) = 1 - x^2$

Realiza las siguientes operaciones y halla el dominio de la función resultante:

a) $(h \circ g)\ (x)$

b) $(g \circ j)\ (x)$

c) $(j \circ f)\ (x)$

d) $(h \circ g \circ j)\ (x)$

e) $(j \circ j \circ g)\ (x)$

SESIÓN 8

Comenzamos la clase con la defensa y corrección de las tareas para casa por parte de un alumno para su evaluación. Una vez terminado, continúa la sesión.

Presentamos los siguientes casos:

Ejemplo 1.

Supongamos que la relación que existe entre el tiempo de llenado de un depósito y el volumen que alcanza viene dado por la siguiente función: $V(t) = 50 \cdot t$ donde t viene dado en minutos y V en litros. Podríamos construir la siguiente tabla para conocer el volumen en función del tiempo:

$t\ (min)$	$V\ (l)$
1	50
5	250
10	500
15	750
20	1000

Se plantea a los alumnos cambiar el punto de vista y preguntarse por los litros de llenado al cabo de un determinado tiempo. Cuestiones a debatir:

- ¿Existe una función que ligue el tiempo con el volumen de manera que pueda obtener el tiempo dado un determinado volumen de llenado?
- ¿Qué relación existe entre esa función y $V(t)$?
- ¿Ambas funciones expresan la misma información?

Ejemplo 2.

Supongamos ahora que lanzamos verticalmente un objeto desde el suelo hacia arriba. Al subir, su altura aumenta; al bajar, la altura disminuye. Si solo observas la altura, no puedes saber si la pelota está subiendo o bajando. La función que modela este movimiento viene dada por la expresión: $h(t) = -5t^2 + 20t$ donde t es el tiempo en segundos y h es la altura en metros. Supongamos que a los 2 segundos alcanza el punto más alto y después comienza a bajar:

$t\ (s)$	$h\ (m)$
0	0
1	15
2	20
3	15
4	0

Cuestiones para generar el debate:

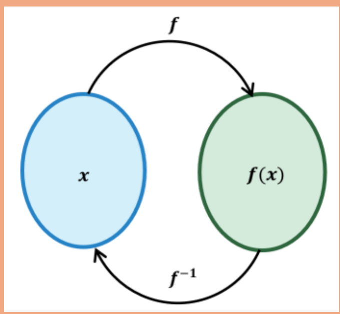
- Si se sabe el tiempo que hace que se lanzó el objeto, ¿se puede saber la altura a la que está?
- Si se sabe la altura a la que está, ¿se puede saber el tiempo que hace que se lanzó el objeto?
- ¿Se podría, al igual que en el ejemplo anterior, obtener una función que ligue el tiempo con la altura que alcanza el objeto?
- Gráficamente, ¿qué representa la función $h(t) = -5t^2 + 20t$?

Llegados a este punto, se lanza una cuestión más general: ¿se ocurren ejemplos de funciones inversas entre sí? De tal forma que se vayan nombrando las funciones ya vistas: logaritmo y exponencial; inversas trigonométricas, etc. y representen gráficamente cada función con su inversa para comprobar la simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante. Se pueden tomar varias de estas funciones y representarlas con GeoGebra.

Conclusiones: concepto, condiciones de existencia de la función inversa, relación gráfica entre la función y su inversa.

Dada una función $f(x) = y$

- Se define la **función inversa** como $\boldsymbol{f^{-1}(y) = x}$ **.**
- Se cumple que $\boldsymbol{(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x}$ donde $I(x) = x$ es la función identidad.



- **Existe la función inversa** sólo cuando $f(x) = y$ es **inyectiva**, es decir, si a cada valor de y le corresponde un único valor de x.
- Para **hallar la función inversa** - si existe - basta con despejar la variable x e intercambiar la variable x por la y. La expresión resultante se corresponde con la función inversa.
- **Las gráficas de la función y su inversa** son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Enunciado 1.

Calcula la inversa de $f(x) = \frac{2x+1}{3}$, dibuja las gráficas de f y de f^{-1} y comprueba que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

Enunciado 2.

Determina las funciones inversas de las siguientes funciones:

a) $f\,(x) = \frac{1}{x+2}$ **b)** $l(x) = sen(x+3)$

c) $g\,(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ **d)** $m(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

e) $h(x) = 2^{x+1}$ **f)** $n(x) = tg(x)$

g) $j(x) = e^{x}$ **h)** $p(x) = tg(7x-2)$

i) $k(x) = \sqrt[3]{x}$ **j)** $q(x) = 3x^{2}$

Se van planteando como se ha indicado en apartados anteriores las cuestiones dirigidas oportunas para ir guiando la resolución del problema.

Concluye en este punto la unidad didáctica relativa a funciones.

4 ESTUDIO DE CASOS

Se presenta a continuación el estudio de caso preparado para presentar al alumnado al finalizar la Unidad Didáctica 10 y donde se evalúan conjuntamente los contenidos de la Unidades Didácticas 9 y 10: Funciones, Límites y Continuidad.

El 28 de abril de 2025, un apagón masivo afectó a toda la Península Ibérica, dejando sin suministro eléctrico a más de 50 millones de personas durante varias horas. Diversas investigaciones han señalado múltiples factores que, combinados, llevaron al colapso del sistema eléctrico. Vamos a analizar las dos hipótesis principales planteadas sobre las causas del apagón, así como la recuperación posterior.

Se entregarán las conclusiones y respuestas a las cuestiones planteadas en un informe individual que se evaluará de acuerdo con los criterios de evaluación comunicados al inicio del curso. El plazo de presentación del informe es de una semana a contar desde la sesión de presentación y discusión del caso.

HIPÓTESIS:

1. Exceso de producción solar y desconexión automática de los centros de generación eléctrica

La excesiva producción solar y de otras fuentes de generación eléctrica en un día de baja demanda provoca un desequilibrio por sobrecarga del sistema y como consecuencia, la bajada brusca y momentánea del voltaje. La caída del voltaje provoca a su vez la desconexión automática por autoprotección de las plantas solares y demás centros de producción, lo que conduce a una desconexión en serie y finalmente al apagón.

Vamos a modelizar lo ocurrido mediante funciones matemáticas.

Dispones de los siguientes modelos matemáticos, válidos desde las 5h hasta las 16h del día 28 de abril, momento en que comienzan a reestablecerse los centros de producción.

Producción solar:

$$P(t) = \begin{cases} -0.32 \cdot (t - 12.55)^2 + 35, & 5 \leq t < 12{,}55 \\ 0, & 12{,}55 \leq t \end{cases}$$

Demanda eléctrica:

$$D(t) = \begin{cases} 20 + 3 \cdot ln(t + 1), & 5 \leq t < 12{,}55 \\ [20 + 3 \cdot \ln(13{,}55)] \cdot e^{-0{,}3(t-12{,}55)}, & 12{,}55 \leq t \end{cases}$$

Donde t es la hora del día (en formato decimal), y $P(t)$ y $D(t)$ se miden en GW

Cuestiones:

1. Representa gráficamente las curvas de producción y demanda desde las 5h00 hasta las 16h00 utilizando GeoGebra. ¿Existen saltos o comportamientos inusuales en la gráfica? Justifica la respuesta usando razonamientos matemáticos adecuados.
2. Determina en qué intervalo de tiempo la producción solar supera a la demanda. Interpreta este hecho en el contexto real.
3. ¿A qué hora exacta se produjo el apagón y cuántos GW se estaban produciendo y consumiendo en ese momento? ¿Por qué ese punto es crítico para el sistema?
4. Imagina que eres un operador del sistema eléctrico. ¿Por qué es importante saber si la producción cambia bruscamente o de forma continua tras el apagón? ¿Qué ocurre con la red eléctrica si no se toman medidas?

2. Oscilaciones de frecuencia y desconexión de la red europea

La presencia de oscilaciones de baja frecuencia debido a la falta de sincronización de los centros de generación eléctrica puede provocar problemas en la red. Recordamos que la frecuencia eléctrica debe mantenerse muy cerca de los 50 Hz para que el sistema eléctrico sea estable. Si existen oscilaciones, es precisa la desconexión de la red para evitar un colapso mayor.

Durante la jornada del apagón se registraron oscilaciones en la frecuencia eléctrica de la red española que provocaron la desconexión del resto de Europa. Estas oscilaciones se pueden modelar con la siguiente función, donde t representa el tiempo en minutos desde el inicio de la perturbación:

$$f(t) = \frac{sen\,(t)}{t} + 50$$

Cuestiones:

1. ¿Qué puede deducirse sobre el comportamiento de la frecuencia? ¿Es esperable que la red se estabilice por sí sola con el paso del tiempo? Justifica tu razonamiento utilizando ideas relacionadas con el comportamiento de la función.
2. ¿Existe continuidad de la función $f(t)$ para $t = 0$? Justifica tu respuesta cuidadosamente. Si no lo es, ¿cómo se podría redefinir para hacerla continua en ese punto? ¿Qué implicaciones tendría eso desde el punto de vista físico?
3. Supón que el sistema eléctrico se desconecta automáticamente si la frecuencia baja de 49.8 Hz. ¿Existen valores de t para los cuales el sistema se habría desconectado según este modelo? Explica cómo podrías estimarlo sin resolver la ecuación exacta.

<u>RECUPERACIÓN TRAS EL APAGÓN</u>:

Cuando se estabilizó la situación, el sistema eléctrico comenzó una recuperación gradual. La demanda de electricidad también fue volviendo a la normalidad, pero de forma desigual: en zonas urbanas se recuperó rápido, y en zonas rurales, más lentamente.

Se modela la recuperación de la demanda (en GW) en dos regiones mediante estas funciones:

$D_1(t) = \sqrt{t} + 2$ (zona urbana)

$D_2(t) = \sqrt[3]{t} + 2$ (zona rural)

Donde t es el tiempo en horas desde el final del apagón.

Cuestiones:

1. ¿Cuál crees que representa una recuperación más rápida en los primeros instantes?¿y al cabo de unas horas? Justifica con cálculos tu respuesta.
2. ¿Crees que son realistas estas funciones de recuperación de la demanda? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.
3. En una rueda de prensa poco después del apagón, Red Eléctrica estimó el restablecimiento del suministro eléctrico en un plazo máximo de 6 a 10 horas, aunque en la práctica, hubo regiones que tardaron mucho más en recuperarse. Si una zona se considera recuperada cuando su demanda alcanza los 4 GW, ¿consideras acertada la afirmación de Red Eléctrica?

<u>LECTURA RELACIONADA</u>:

En un contexto donde la fiabilidad de los sistemas eléctricos y digitales es crucial, este texto ilustra cómo la falta de actualización tecnológica puede provocar fallos críticos, subrayando la importancia del correcto dimensionamiento y puesta al día de las infraestructuras que dependen de la electricidad.

El día en el que el tiempo se detendrá

A las 3.14 h del martes 19 de enero de 2038, una gran parte de nuestros modernos microprocesadores y ordenadores dejará de funcionar. Y eso será debido al modo en el que almacenan el tiempo y la fecha. Los ordenadores personales ya tienen bastantes problemas haciendo un seguimiento de cuántos segundos han pasado mientras están encendidos; las cosas empeoran cuando también necesitan mantenerse al día con la fecha. El control del tiempo les ha supuesto a los ordenadores los mismos problemas que suponía mantener sincronizado un calendario con el planeta, con el añadido de las limitaciones modernas de la codificación binaria. Cuando los primeros precursores del internet moderno empezaron a estar disponibles a principios de la década de 1970, era necesario disponer de un sistema de control del tiempo que fuera consistente. El Instituto de Ingeniería Eléctrica y Electrónica creó un comité de especialistas y, en 1971, sugirieron que todos *los sistemas informáticos podrían contar las fracciones sexagesimales de un segundo a partir del inicio de 1971. La energía eléctrica que alimentaba a los ordenadores ya llegaba a una frecuencia de 60 hercios, por lo que se simplificaban las cosas al utilizar esta frecuencia dentro del sistema. Muy astutos. Excepto que un sistema basado en 60 hercios sobrepasaría el espacio disponible en un número binario de 32 dígitos en poco más de dos años y tres meses. Ya no parece una medida tan inteligente.*

Por lo que el sistema se recalibró para contar el número de segundos enteros desde el inicio de 1970. Este número se almacenó como número binario signado de 32 dígitos, lo que permitía un máximo de 2.147.483.647 segundos: un total de más de sesenta y ocho años contando desde 1970. Y esto lo decidieron así miembros de la generación que en esos sesenta y ocho años previos a 1970 habían visto a la humanidad avanzar desde la invención de la primera aeronave propulsada de los hermanos Wright a humanos bailando sobre la superficie de la Luna. Estaban convencidos de que en el año 2038 los ordenadores no se parecerían en nada a los de su época y ya no utilizarían el tiempo Unix. Y, sin embargo, aquí estamos. Hemos recorrido más de la mitad de ese camino y seguimos con el mismo sistema. El reloj está haciendo tictac (literalmente). Sin duda, los ordenadores han cambiado tanto que no se parecen en nada a los de esa época, pero en sus entrañas se sigue utilizando el tiempo Unix.

[…]

Después de 2.147.483.647 segundos, todo se detendrá. Microsoft Windows tiene su propio sistema para controlar el tiempo, pero MacOS está desarrollado directamente sobre Unix. Y más importante aún, muchos procesadores informáticos importantes que se utilizan en un montón de dispositivos, desde servidores de internet hasta lavadoras, están funcionando, utilizando algún descendiente de Unix. Son vulnerables al efecto 2038.

Ya se han dado algunos pasos para encontrar una solución. Todos los procesadores que utilizan números binarios de 32 dígitos son conocidos por defecto como sistemas de 32 bits. Cuando alguien se compra un portátil, puede que se pare a comprobar cuál es su arquitectura, pero los Mac llevan utilizando un sistema de 64 bits desde hace casi una década y la mayoría de los servidores informáticos también se han pasado a 64 bits.

[…]

Una vez que vivamos en un mundo que sea completamente de 64 bits, podremos decir que estamos a salvo. La pregunta es: ¿actualizaremos la infinidad de microprocesadores presentes en nuestras vidas antes del 2038?

(Parker, 2020, pp. 25–27)

Piensa y responde a las siguientes cuestiones. Argumenta bien tus razonamientos:

1. ¿Qué relación hay entre el efecto 2038 y el apagón masivo de 2025?

2. ¿Crees que la sociedad está preparada para identificar y actualizar todos los sistemas vulnerables al efecto 2038? Razona tu respuesta con ejemplos actuales. ¿Qué consecuencias podría tener que no se actualicen ciertos dispositivos o infraestructuras?

3. Investiga sobre el "Efecto 2000". ¿En qué se parecen y en qué se diferencian el Efecto 2038 con el Efecto 2000? ¿Qué aprendizajes de entonces podrían aplicarse hoy para evitar problemas en 2038?

<u>LECTURAS RECOMENDADAS</u>:

Con objeto de fomentar el interés y el hábito de lectura, mejorar la comprensión lectora y ampliar conocimientos, se proponen a continuación dos lecturas entretenidas y relacionadas con los contenidos vistos en clase.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Esta guía explica cómo se genera y distribuye la electricidad, las diferentes fuentes de energía (convencionales y renovables) y la importancia de la sostenibilidad energética. Muy interesante para entender el funcionamiento de la generación eléctrica, con un lenguaje cercano y con ilustraciones sencillas de entender.

Se puede descargar de la página web de UNICEF:

https://www.unicef.org/lac/informes/la-energia-sostenible-una-guia-para-jovenes</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Lectura ágil y amena que muestra cómo los errores numéricos pueden tener consecuencias reales en distintos contextos, incluido el campo de la ingeniería, la tecnología y la informática.

Para conocer la importancia del rigor matemático aplicado a la vida real y las consecuencias que puede llegar a tener un mal cálculo o una mala interpretación.

Disponible en versión pdf en línea en múltiples plataformas (dominio público).</td>
</tr>
</table>

5 CONCLUSIONES

La presente programación didáctica se concibe como una herramienta para planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje en la materia de Matemáticas. Su objetivo principal es facilitar que el alumnado alcance los objetivos educativos establecidos, a través de metodologías activas, variadas y adaptadas a sus características.

Las estrategias metodológicas han sido seleccionadas según los contenidos, criterios de evaluación y competencias clave, así como en función del perfil del grupo. Esta planificación no es rígida; se contempla su revisión y adaptación según la evolución del grupo y la eficacia observada.

La metodológica empleada sigue un patrón cíclico que se repite a lo largo de las distintas unidades didácticas y combina estrategias variadas y adaptadas a las necesidades del alumnado, favoreciendo un aprendizaje significativo y colaborativo. La alternancia entre enfoques inductivos, expositivos y aplicados permite conectar conocimientos previos con nuevos contenidos, fomentar la reflexión y desarrollar competencias clave. La resolución de problemas y el estudio de casos refuerzan la transferencia del aprendizaje y la toma de decisiones en contextos reales. El alumno, conocedor de la dinámica de las clases, participa en mayor o menor medida de acuerdo con sus capacidades y recibe el apoyo necesario en caso de requerirlo. Así mismo, aumenta su confianza en un entorno donde todos pueden participar y aportar, reforzando su desarrollo competencial y consolidando contenidos. Finalmente, se subraya la importancia de evaluar con todo el proceso didáctico para extraer conclusiones útiles que guíen la mejora continua.

La respuesta del alumnado ante esta metodología ha sido muy positiva, mostrando una mayor implicación e interés de los contenidos trabajados y evidenciando su utilidad para atender a la diversidad del grupo. Los alumnos en general manifestaron haberse sentido muy cómodos debatiendo y participando activamente en las clases. Se observó que todos los alumnos participaron en mayor o menor medida, tanto en el debate previo a la presentación de conceptos como en las exposiciones diarias de tareas y ejercicios para casa. Algunos manifestaron haberse sentido más confiados con esta dinámica, donde el error es visto como una oportunidad de aprendizaje y se normaliza cuando surge de las hipótesis ante las cuestiones previas a la presentación de un concepto. La resolución guiada de problemas aportó apoyos de distinto grado en función de las necesidades individuales lo que resultó muy efectivo para adaptar la enseñanza y facilitar la comprensión de los contenidos. El resultado global es pues satisfactorio para el alumnado. Por parte del docente, este conjunto de estrategias metodológicas requiere una preparación previa minuciosa y tiempo para redactar cada cuestión, seleccionar ejemplos adecuados y diseñar preguntas guiadas pertinentes para el grupo. La preparación del estudio de casos también ha implicado una inversión de tiempo, tanto en la búsqueda de un tema de actualidad como en su vinculación con los contenidos trabajados en clase. Aunque no se dispone de un feedback sobre los resultados académicos, la buena acogida del alumnado parece motivo suficiente para continuar aplicándolas.

Por lo tanto, en suma, se puede afirmar que esta programación contribuye, a una enseñanza coordinada y bien estructura, centrada en promover un aprendizaje dinámico, eficaz y adaptado a las características del grupo.

6 REFERENCIAS

Instituto Nacional de Estadística (INE). (n.d.). *Estadística de población*. https://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/categoria.htm?c=Estadistica_P&cid=1254734710984

REAL DECRETO 243/2022, de 5 de abril, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. (2022, 5 de abril). *Boletín Oficial del Estado*, nº 81.

DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. (2022, 30 de septiembre). *Boletín Oficial de Castilla y León*, nº 190.

Orden EDU/425/2024, de 9 de mayo, por la que se desarrolla la evaluación, la promoción y la titulación en el Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. (2024, 17 de mayo). *Boletín Oficial de Castilla y León*, nº 92.

Orden EDU/1152/2010, de 3 de agosto, por la que se regula la respuesta educativa al alumnado con necesidad específica de apoyo educativo escolarizado en el segundo ciclo de Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Enseñanzas de Educación Especial, en los centros docentes de la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*, núm. 152

IES Las Salinas. (2024, 28 de octubre). *Proyecto Educativo de Centro 2024-2025*. http://ieslassalinas.centros.educa.jcyl.es/sitio/upload/47007461_IES_Las_Salinas_Proyecto_Educativo_24_25.pdf

IES Las Salinas. (2024, 28 de octubre). *Programación General Anual (PGA) 2024-2025*. Documento interno no publicado.

IES Las Salinas (2024). *Propuesta Curricular para Bachillerato 2024-2025*. http://ieslassalinas.centros.educa.jcyl.es/sitio/upload/2024-25_PCurricular_BACH_47007461-IES-LAS_SALINAS_2.pdf

Junta de Castilla y León. (s.f.). *Portal de Educación*. https://www.educa.jcyl.es/es/

CAST. (2018). *Universal design for learning guidelines version 2.2*. https://udlguidelines.cast.org/

Gardner, H. (1983). Frames of mind: The theory of multiple intelligences. *Basic Book*.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of child psychology and psychiatry*, *17*(2), 89-100.

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives: complete edition*. Addison Wesley Longman, Inc.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Arce Sánchez, M., Conejo Garrote, L. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Ed. Síntesis.

Marqués Moreno, F., & Iglesias Roger, M. (2022). *Matemáticas I: 1º Bachillerato* (Ed. 2022). Editorial Tu libro.

Hely, D. (s.f.). *Graficador de funciones polinómicas de grado menor o igual que 5*. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/zgx47f28

Coiro, P. (s.f.). *Función racional con deslizadores*. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/eYCFDt7G

UNICEF. (2017). *La energía sostenible: Una guía para jóvenes*. https://www.unicef.org/lac/media/40746/file/La-energia-sostenible-una-guia-para-jovenes.pdf

Parker, M. (2020). *Pifias matemáticas: equivocarse nunca ha sido tan divertido*. Editorial Crítica.

GeoGebra. (2025). *GeoGebra* [Software en línea]. https://www.geogebra.org/

7 APÉNDICE. RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS Y LOS CONTENIDOS DE LA MATERIA

UNIDAD DIDÁCTICA	CONTENIDOS
UD1. Números reales	**A. Sentido numérico.** 1. Sentido de las operaciones - Estrategias para operar con números reales: cálculo mental o escrito en los casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados. - Logaritmos: comprensión y utilización para simplificar y resolver problemas
UD2. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones	**D. Sentido algebraico.** 2. Modelo matemático. - Relaciones cuantitativas en situaciones sencillas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas. - Ecuaciones, inecuaciones y sistemas: modelización de situaciones en diversos contextos. 3. Igualdad y desigualdad. - Resolución de ecuaciones (incluyendo polinómicas, con radicales, racionales sencillas, exponenciales y logarítmicas), inecuaciones (polinómicas y racionales sencillas), sistemas de ecuaciones no lineales y sistemas de inecuaciones lineales en diferentes contextos. - Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas mediante el método de Gauss. 5. Pensamiento computacional - Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología utilizando herramientas o programas adecuados. - Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema mediante el razonamiento lógico.
UD3. Trigonometría I	**B. Sentido de la medida.** 1. Medición - Trigonometría: Relación entre razones trigonométricas. Resolución de triángulos. Teoremas del seno, coseno.
UD4. Trigonometría II	**C. Sentido espacial.** 3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica

	- Representación de objetos geométricos en el plano mediante herramientas digitales o manuales - Modelos matemáticos en la resolución de problemas en el plano. Conexiones con otras disciplinas y áreas de interés. - Conjeturas geométricas en el plano: validación por medio de la deducción y la demostración de teoremas **D. Sentido algebraico.** 5. <u>Pensamiento computacional</u> - Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología utilizando herramientas o programas adecuados. - Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema mediante el razonamiento lógico.
UD5. Números complejos	**A. Sentido numérico.** 1. <u>Sentido de las operaciones</u>. - Estrategias para operar con números complejos: cálculo mental o escrito en los casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados. 3. <u>Relaciones</u> - Los números complejos como soluciones de ecuaciones polinómicas que carecen de raíces reales. - Historia de la incorporación de los diferentes conjuntos numéricos hasta llegar a los complejos.
UD6. Vectores	**A. Sentido numérico.** 1. <u>Sentido de las operaciones</u> - Adición y producto escalar de vectores: propiedades y representaciones. - Estrategias para operar con vectores: cálculo mental o escrito en los casos sencillos y con herramientas tecnológicas en los casos más complicados. 2. <u>Relaciones</u>. - Conjunto de vectores: estructura, comprensión y propiedades. **B. Sentido de la medida.** 1. <u>Medición</u>. - Cálculo de longitudes y medidas angulares en el plano euclídeo. **C. Sentido espacial.** 2. <u>Formas geométricas de dos dimensiones</u>. - Objetos geométricos de dos dimensiones (vectores): análisis de las propiedades y determinación de sus atributos. 3. <u>Visualización, razonamiento y modelización geométrica</u>

	- Modelización de la posición y el movimiento de un objeto en el plano mediante vectores. **E. Sentido algebraico.** 6. Pensamiento computacional - Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología utilizando herramientas o programas adecuados. - Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema mediante el razonamiento lógico.
UD7. Geometría analítica	**D. Sentido espacial.** 4. Formas geométricas de dos dimensiones. - Objetos geométricos de dos dimensiones (rectas): análisis de las propiedades y determinación de sus atributos. - Resolución de problemas relativos a objetos geométricos en el plano representados con coordenadas cartesianas. 5. Localización y sistemas de representación. - Expresiones algebraicas de objetos geométricos: selección de la más adecuada en función de la situación a resolver. - Relaciones de objetos geométricos en el plano: representación y exploración con ayuda de herramientas digitales y manuales. 6. Visualización, razonamiento y modelización geométrica - Representación de objetos geométricos en el plano mediante herramientas digitales o manuales - Modelos matemáticos en la resolución de problemas en el plano. Conexiones con otras disciplinas y áreas de interés. - Conjeturas geométricas en el plano: validación por medio de la deducción y la demostración de teoremas - Modelización de la posición y el movimiento de un objeto en el plano mediante vectores. **D. Sentido algebraico.** 5. Pensamiento computacional - Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología utilizando herramientas o programas adecuados. - Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema mediante el razonamiento lógico.
UD8.	**C. Sentido espacial.** 1. Formas geométricas de dos dimensiones.

Lugares geométricos. Cónicas	- Objetos geométricos de dos dimensiones (lugares geométricos): análisis de las propiedades y determinación de sus atributos. 2. Localización y sistemas de representación. - Relaciones de objetos geométricos en el plano: representación y exploración con ayuda de herramientas digitales y manuales. 3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica - Representación de objetos geométricos en el plano mediante herramientas digitales o manuales - Modelos matemáticos en la resolución de problemas en el plano. Conexiones con otras disciplinas y áreas de interés. - Conjeturas geométricas en el plano: validación por medio de la deducción y la demostración de teoremas
UD9. Funciones	**E. Sentido algebraico.** 4. Relaciones y funciones. - Análisis, representación gráfica e interpretación de relaciones mediante herramientas tecnológicas. - Propiedades de las distintas clases de funciones, incluyendo, polinómicas, exponenciales, racionales sencillas, irracionales sencillas, logarítmicas, trigonométricas y a trozos: comprensión y comparación. - Operaciones con funciones. Composición de funciones. Función inversa. Relación entre la gráfica de una función y la de su inversa. - Álgebra simbólica en la representación y explicación de relaciones matemáticas de la ciencia y la tecnología. 5. Pensamiento computacional - Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología utilizando herramientas o programas adecuados. - Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema mediante el razonamiento lógico.
UD10. Límites y continuidad	**B. Sentido de la medida.** 2. Cambio. - Límites: estimación y cálculo a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica. - Continuidad de funciones: aplicación de límites en el estudio de la continuidad. **D. Sentido algebraico.** 1. Patrones. - Generalización de patrones en situaciones sencillas.

UD11. Derivadas	**B. Sentido de la medida.** 2. <u>Cambio</u>. - Derivada de una función: definición a partir del estudio del cambio en diferentes contextos. Interpretación geométrica. - Cálculo de derivadas elementales. - Resolución de problemas de optimización en situaciones sencillas: aplicación de la derivada.
UD12. Distribuciones bidimensionales	**F. Sentido estocástico** 1. <u>Organización y análisis de datos</u> - Organización de los datos procedentes de variables bidimensionales: distribución conjunta y distribuciones marginales y condicionadas. Análisis de la dependencia estadística. - Estudio de la relación entre dos variables mediante la regresión lineal y cuadrática: valoración gráfica de la pertinencia del ajuste. Diferencia entre correlación y causalidad. - Coeficientes de correlación lineal y de determinación: cuantificación de la relación lineal, predicción y valoración de su fiabilidad en contextos científicos y tecnológicos. - Calculadora, hoja de cálculo o software específico en el análisis de datos estadísticos. 3. <u>Inferencia</u> - Análisis de muestras unidimensionales y bidimensionales con herramientas tecnológicas y manuales con el fin de emitir juicios y tomar decisiones. **D. Sentido algebraico.** 5. <u>Pensamiento computacional</u> - Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología utilizando herramientas o programas adecuados. - Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema mediante el razonamiento lógico.
UD13. Cálculo de probabilidad	**A. Sentido numérico.** 1. <u>Sentido de las operaciones</u>. - Desarrollo de la comprensión de la combinatoria como técnica de conteo. **B. Sentido de la medida.** 1. <u>Medición</u>. - La probabilidad como medida de la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios.

	E. Sentido estocástico 2. Incertidumbre - Estimación de la probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa. - Cálculo de probabilidades en experimentos simples: la regla de Laplace en situaciones de equiprobabilidad y en combinación con diferentes técnicas de recuento. - Probabilidad condicionada e independencia entre sucesos aleatorios. Diagramas de árbol y tablas de contingencia. Teorema de la probabilidad total. **D. Sentido algebraico.** 5. Pensamiento computacional - Formulación, resolución y análisis de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología utilizando herramientas o programas adecuados. - Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema mediante el razonamiento lógico.
UNIDAD COMÚN A lo largo de todo el curso	**G. Sentido socioafectivo.** 1. Creencias, actitudes y emociones. - Destrezas de autoconciencia encaminadas a reconocer emociones propias, afrontando eventuales situaciones de estrés y ansiedad en el aprendizaje de las matemáticas. - Tratamiento del error, individual y colectivo como elemento movilizador de saberes previos adquiridos y generador de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas. 2. Trabajo en equipo y toma de decisiones. - Reconocimiento y aceptación de diversos planteamientos en la resolución de problemas y tareas matemáticas, transformando los enfoques de los demás en nuevas y mejoradas estrategias propias, mostrando empatía y respeto en el proceso. - Técnicas y estrategias de trabajo en equipo para la resolución de problemas y tareas matemáticas, en equipos heterogéneos. 3. Inclusión, respeto y diversidad. - Destrezas para desarrollar una comunicación efectiva: la escucha activa, la formulación de preguntas o solicitud y prestación de ayuda cuando sea necesario. - Valoración de la contribución de las matemáticas y el papel de matemáticos a lo largo de la historia en el avance de la ciencia y la tecnología.