Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Razonamiento matemático y sentido socioafectivo desde un enfoque basado en Aulas de Pensamiento. Una implementación en 3º de la ESO

Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Autora: Natalia Becoechea Baños

Tutor: José María Marbán Prieto

Curso 2024-2025

Quisiera agradecer al centro que me acogió en prácticas, y en especial a mi tutor, por haberme permitido trabajar durante dos semanas con sus estudiantes para poder llevar a cabo este proyecto. Muchas gracias por haberme hecho sentir una profesora más.

Finalmente me gustaría dar las gracias a todos los alumnos que han hecho posible este Trabajo de Fin de Máster: nunca dejéis de aprender, de cambiar y de intentar ser mejores. Os deseo lo mejor, con todo mi cariño.

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica innovadora que consta de 6 actividades, y que está diseñada desde un enfoque dirigido a la generación de aulas de pensamiento. Se incluye también la implementación de la misma en un aula de 3º de la ESO de un centro educativo público de la provincia de Valladolid durante el período de prácticas del Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, en concreto en las dos primeras semanas del mes de abril.

Para poder introducir correctamente la propuesta se presenta previamente un marco teórico, con algunos de los conceptos clave entorno a los que gira este trabajo, y una contextualización de las actividades, del centro educativo y del aula en el que se llevaron a cabo. Se presentan después las actividades, incluyendo los objetivos que se pretendían lograr con cada una de ellas y las adaptaciones a las aulas de pensamiento que tuvimos que tomar para poder trabajar con este enfoque en un centro público de nuestra comunidad. Finalmente se incluye una descripción de la implementación de la propuesta día a día, así como una evaluación final de la misma por parte de los estudiantes, una autoevaluación del trabajo realizado y una breve reflexión.

Abstract

This paper presents an innovative teaching proposal consisting of six activities, designed according to the thinking classroom methodology. It also includes its implementation in a third-year ESO classroom at a public school in the province of Valladolid during the internship period for the Master's in Education program, specifically during the first two weeks of April.

To properly introduce the proposal, a theoretical framework is first presented, with some of the key concepts around which this work revolves, and a contextualization of the activities, the school, and the classroom in which they were carried out.

The activities are then presented, including the objectives each one sought to achieve and the adaptations to the thinking classrooms we had to make in order to implement this methodology in a public school in our community.

Finally a description of the day-to-day implementation of the proposal is included, as well

as a final evaluation by the students, a self-assessment of the work completed, and a brief reflection.

Índice

Índice de figuras

0. Introducción

La educación formal es en la actualidad una experiencia universal con unas estructuras muy definidas que todos conocemos. Cualquiera puede imaginarse de qué manera se desarrolla, por ejemplo, una clase de matemáticas en un instituto: podemos visualizar los pupitres y la pizarra, los estudiantes sentados en sus sillas y con sus cuadernos encima de la mesa, algunos más atentos y otros menos, y al profesor al frente del aula explicando cualquier unidad del libro. Estas estructuras, dinámicas o reglas que todos conocemos y que rigen el funcionamiento habitual de las clases han permanecido prácticamente invariables durante más de 100 años, no sin una razón. Lo más probable es que este modelo obedeciera a las necesidades del momento: permitía compartir el conocimiento con muchas personas a la vez utilizando la menor cantidad de recursos posibles. Sin embargo resulta claramente cuestionable que este modelo atendiese a las necesidades educativas de aquellos que iban a recibir el conocimiento: los estudiantes.
En la actualidad es cada vez más común que autores y profesionales de la educación se cuestionen el funcionamiento y la eficacia de estos modelos para la enseñanza: los tiempos cambian y la educación con ellos. Así surgen nuevos modelos y teorías que cuestionan estas estructuras y plantean otras nuevas, diseñadas con la intención de favorecer, en algún aspecto, el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para la implementación de las actividades que se presentan a lo largo de este trabajo hemos decidido utilizar la metodología de aulas de pensamiento diseñada por el profesor de matemáticas e investigador canadiense Peter Liljedhal; esta metodología, de la que hablaremos con detalle más adelante, plantea un nuevo modelo de aula cuyo objetivo principal es maximizar el tiempo en el que los alumnos se mantienen pensando de forma activa. Es decir, el aspecto que pretende mejorar con respecto de las aulas tradicionales es la presencia de alumnos pasivos en las clases de matemáticas. Veremos, sin embargo, que aunque fueron diseñadas con ese objetivo en mente existen más ventajas que vienen con la aplicación de esta metodología.
En lo que a las matemáticas respecta hay dos aspectos fundamentales que preocupan a docentes e investigadores y que se encuentran en el centro de las discusiones actuales en educación: el razonamiento matemático y el sentido socioafectivo.

Ambos constructos han ido cobrando importancia en el discurso de la enseñanza matemática a medida que se han ido investigando; preocupa no sólo cómo y en qué medida afectan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sino hasta qué punto es posible trabajarlos en un ambiente de aula tradicional. El alcance es tal que estudios a gran escala, como son las evaluaciones que emanan del programa PISA, han hecho referencia y han incluido el razonamiento matemático y el sentido socioafectivo en sus pruebas del año 2022. Más aún, la nueva ley educativa en España (LOMLOE), aprobada en el año 2020, incluye el sentido socioafectivo como uno de los sentidos que conforman la asignatura de matemáticas en cualquier curso de la ESO y Bachillerato.
En consecuencia podemos afirmar que los temas que se abordarán a lo largo de este trabajo son de interés en la actualidad, a pesar de que las primeras investigaciones que se hicieron al respecto datan de la segunda mitad del siglo XX.

En este documento se presenta una propuesta didáctica innovadora que ha sido implementada durante el período de prácticas del máster universitario en formación del profesorado en un instituto público de la ciudad de Valladolid, y cuyo objetivo ha sido el de trabajar el razonamiento matemático y el sentido socioafectivo en matemáticas. A lo largo del trabajo se presentará el centro, el contexto de los estudiantes, las actividades y su implementación y el resultado de las mismas, así como una evaluación de cada una de ellas.
Sin embargo, antes de comenzar a describir la propuesta en sí, resulta necesario identificar ciertos conceptos que aparecerán más adelante, como son aquellos que se pretende trabajar. Como se ha comentado antes, ambos constructos han sido ampliamente estudiados y es muy variada la bibliografía que existe al respecto, por lo que resulta necesario esclarecer algunas ideas.
Es por ello que a continuación presentamos un marco teórico en el que incluimos las definiciones no sólo de sentido socioafectivo y razonamiento matemático, sino también de los distintos constructos con los que trabajaremos a lo largo del documento.

1. Marco teórico

Esta sección del trabajo la dedicaremos a describir e identificar conceptos importantes para este trabajo, así como a presentar brevemente teorías relevantes para dar contexto al mismo.
Los principales conceptos que describiremos son el sentido socioafectivo, el autoconcepto matemático, la ansiedad matemática, el razonamiento matemático y la metodología de aulas de pensamiento o *thinking classrooms*.

1.1. Sentido socioafectivo

El papel que las emociones y las creencias juegan sobre el aprendizaje está siendo cada vez más destacado, ganando importancia a medida que se estudia; autores como Goñí (2007) afirman que el proceso de enseñanza-aprendizaje es un proceso complejo en el cual no podemos desvincular lo emocional del resto de ámbitos que intervienen. A lo largo de este trabajo nos centraremos en el papel fundamental que juega el ámbito socioafectivo en la enseñanza de las matemáticas.

Tanto matemáticos como profesores de matemáticas han sido siempre conscientes del importante rol que tomaban los afectos en los procesos cognitivos que tenían lugar al estudiar matemáticas (Di Martino et al., 2011, p) pero no es fácil dotar de un marco de estudio concreto al mundo de las emociones y son muchas las propuestas que existen a este respecto. En la ley educativa española vigente actualmente (LOMLOE) las distintas asignaturas se conforman por "sentidos" o "destrezas", y en ella se define sentido socio-afectivo como el sentido que "integra conocimientos, destrezas y actitudes para entender y manejar las emociones, establecer y alcanzar metas y aumentar la capacidad de tomar decisiones responsables e informadas."
En el presente trabajo se abordará el sentido socioafectivo no sólo desde el enfoque de la LOMLOE, sino también apoyándonos en el marco teórico que propone McLeod (1992). Este define el dominio afectivo como un amplio rango de *creencias*, *emociones* y *estados de ánimo* o *actitudes* que van más allá del dominio cognitivo, y que considera elementos del propio sentido socioafectivo. Estos elementos describen un amplio rango de respuestas afectivas a las matemáticas, y se distinguen entre sí por la estabilidad de la respuesta

afectiva que generan o por la intensidad de la misma. McLeod afirma que, aunque el dominio afectivo vaya más allá del ámbito cognitivo, cualquier reconceptualización del mismo debe ser compatible con los modelos de procesamiento cognitivo del individuo que aprende. Otros autores incluyen como elemento los *valores* (Goldin y Bellis, 1999), pero nosotros no trabajaremos con esa estructura.

Respecto al aprendizaje, la forma en la que entra en contacto con el dominio afectivo es cíclica (Caballero et al.,2010) pues cuando un estudiante estudia o aprende matemáticas lo hace generando unas reacciones emocionales que influyen en su aprendizaje, afectando así a su experiencia y contribuyendo a la creación de nuevas emociones y actitudes.

Presentamos a continuación una definición y contextualización de cada uno de los elementos que presenta la estructura planteada por McLeod.

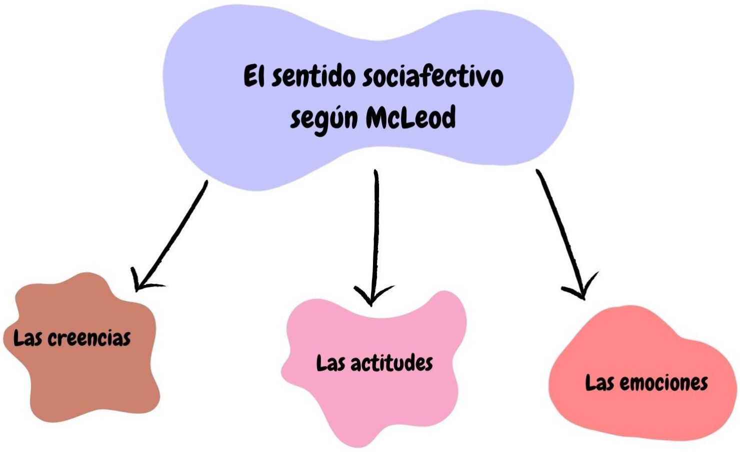


Figura 1: El sentido socioafectivo según McLeod

1.1.1. Las creencias

Cuando hablamos de creencias en el aprendizaje de las matemáticas podemos estar refiriéndonos a cuatro tipos de creencias: aquellas que están dirigidas a las propias matemáticas como disciplina, aquellas que se refieren a nosotros como estudiantes de matemáticas, aquellas que giran entorno a la enseñanza de las matemáticas y finalmente las creencias relativas al entorno social en el que se desarrolla la educación matemática (McLeod, 1992, p.579).

Autores como Di Martino (2011) y Pajares (1992) destacan la complejidad de otorgar una definición formal a las creencias, pues su significado suele darse por hecho y esto puede

llevar a confusión. Schoenfeld (1992) define las creencias de la siguiente manera: "Son una de las componentes del conocimiento subjetivo implícito del individuo sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y sobre sí mismo en relación con la disciplina que está basada en la experiencia. Permiten al individuo organizar y filtrar las informaciones recibidas y construir su noción de realidad".
La creencias están estrechamente relacionadas con el ámbito cognitivo por naturaleza y se desarrollan a lo largo de amplios períodos de tiempo, pero juegan un papel central en el desarrollo de actitudes y emociones hacia las matemáticas que puede condicionar su aprendizaje.

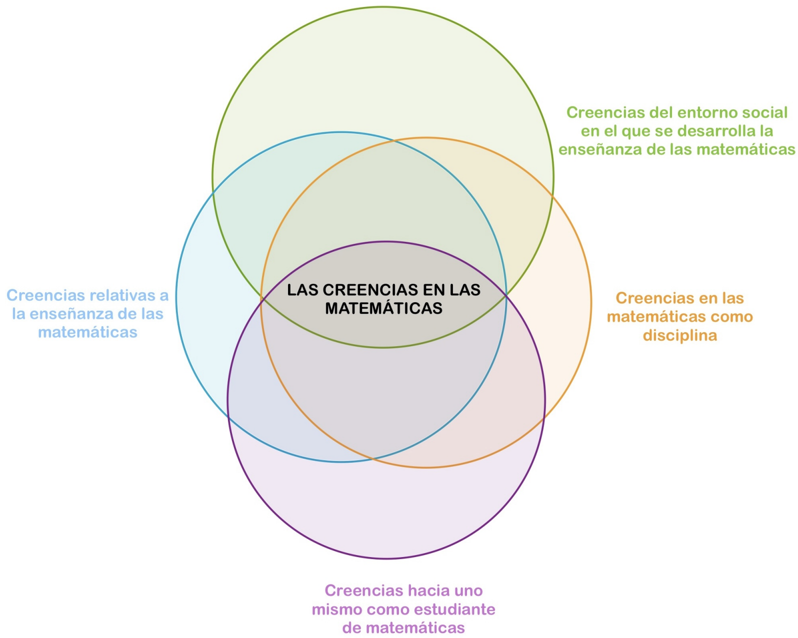


Figura 2: Las creencias en matemáticas según McLeod

- **Creencias sobre las matemáticas como disciplina:** Son aquellas relacionadas con la utilidad y la consistencia de las propias matemáticas. Caballero (2010) establece como ejemplo que muchos estudiantes creen que todos los problemas de matemáticas pueden resolverse aplicando una fórmula, y como consecuencia que las matemáticas consisten en memorizar fórmulas y saber realizar un procedimiento mecánico. Esto, a parte de encontrarse lejos de la realidad, puede producir sensaciones y actitudes negativas hacia las matemáticas (González-Pienda y Álvarez, 1998) como recelo o desconfianza.

- **Creencias hacia uno mismo como estudiante de matemáticas:** Estas creencias incluyen aquellas relacionadas con el autoconcepto y la confianza en uno mismo, y han sido ampliamente estudiadas. Un ejemplo son las investigaciones relativas al género y las diferencias que existen, concluyendo que los hombres tienden a tener más confianza en sus habilidades que las mujeres, incluso si no existen diferencias notables en cuanto a resultados (Reyes, 1984, Meyer y Fennema, 1988). Las creencias que tiene uno mismo sobre su habilidad matemática pueden ser determinantes en la propia disposición para las matemáticas, lo cual a su vez puede tener un efecto en los resultados y logros matemáticos del individuo.
- **Creencias relativas a la enseñanza de las matemáticas:** Es en estas creencias donde convergen las de estudiantes y profesores de matemáticas; las creencias de la educación matemática. Aunque se han realizado importantes estudios al respecto la mayoría giraban entorno a las creencias de los propios profesores, y no es mucha la información existente relativa a las creencias de los estudiantes sobre la enseñanza de las matemáticas. Estas creencias condicionan la forma en la que los estudiantes abordan las tareas de esta disciplina (Caballero et al., 2010) y serán de particular interés en este trabajo.
- **Creencias del entorno social en el que se desarrolla la enseñanza matemática:** Las creencias que tienen los estudiantes respecto al contexto social educativo parecen tener una estrecha relación con el ámbito afectivo. En el presente trabajo este aspecto de las creencias resulta especialmente interesante al desarrollarse en un entorno de aulas de pensamiento que veremos con detalle más adelante. Autores como Liljedhal (2020) han investigado el comportamiento y la actitud hacia las matemáticas que tienen los estudiantes en función de las distintas normas sociales que existan en el aula y cómo este cambia al verse alteradas dichas normas.

1.1.2. Las actitudes

Las actitudes conforman el segundo de los elementos del sentido socioafectivo que McLeod (1992) establece y es aquel con un ámbito teórico más ambiguo, pues en los primeros artículos donde se menciona solía hacer referencia también a las creencias sobre las matemáticas y sobre uno mismo. En el presente trabajo utilizaremos la definición de actitudes que propone McLeod (1992) : "La actitud hace referencia a una respuesta afectiva que involucra sentimientos negativos o positivos de intensidad moderada y estabilidad razonable".

Son muchos los autores que han categorizado las actitudes: Rajecki (1982) establecía tres componentes; la respuesta emocional, el comportamiento y las creencias hacia ese "objeto" respecto del cual tenemos unas actitudes. Martínez (2005) por su parte distingue cuatro componentes: el cognoscitivo (el saber), el afectivo (el sentir), el intencional (las intenciones) y el comportamental (el comportamiento). Sin embargo las más recientes hacen referencia a un *modelo tripartito* de las actitudes (Di Martino P., Zan R., 2011) según el cual las actitudes tienen un componente cognitivo, uno afectivo y uno conductual; este modelo tripartito será el que consideraremos a lo largo del trabajo.

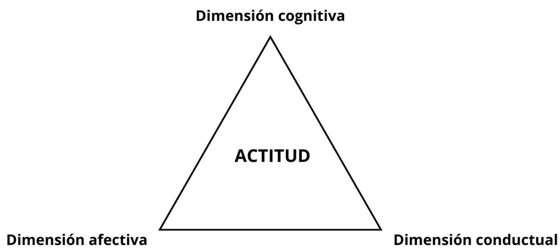


Figura 3: Modelo tripartito de las actitudes

Este tipo de modelos multidimensionales dificultan la toma de datos a través de cuestionarios o escalas de Likert, pues recopilan información de las dimensiones de manera individual de forma que no es posible observar la forma en la que interactúan las distintas componentes.

Las actitudes hacia las matemáticas suponen un interesante objeto de estudio, pues influyen en la predisposición de los individuos hacia las matemáticas, manifestándose en forma de ideas, gustos, preferencias o comportamientos (Martínez, 2005). Sin embargo, a pesar de que existen múltiples estudios al respecto, frecuentemente resulta difícil separar la investigación relativa a las actitudes de la relativa a las creencias.

1.1.3. Las emociones

Aunque existen estudios cuyos objetos de estudio involucraban las emociones en el aprendizaje de las matemáticas, la mayoría de los estudios realizados en el ámbito socioafectivo giraban entorno a factores más estables y que se podían medir a través de cuestionarios (McLeod, 1992) como son las actitudes y las creencias.

Por otro lado, muchas de las investigaciones que tratan el tema de las emociones en matemáticas lo hacen desde el interés por su relación con los procesos cognitivos, relegando a las emociones a un segundo plano.

Mandler (1984) establece un importante marco teórico para el estudio de las emociones y teoriza que el origen de las emociones es tanto físico como mental, pero afirma que establecer una definición de "emoción" resulta muy complejo; existen múltiples acepciones a lo que a las emociones en matemáticas se refiere, y aunque no hay un consenso común respecto a la definición sí existen aspectos en los que los autores coinciden (Evans y Zan, 2006), como que las emociones involucran reacciones fisiológicas y que afectan a los procesos cognitivos de múltiples maneras. Las emociones toman, por lo tanto, un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues las respuestas fisiológicas y psicológicas que producen afectan directamente a la capacidad de concentración, pudiendo producir bloqueos en el proceso de pensamiento.

Cabe destacar la dificultad que existe para medir a gran escala las emociones, pues los instrumentos más comúnmente utilizados en este tipo de estudios son los cuestionarios, cuya capacidad para medir las reacciones emocionales inconscientes es muy limitada. Varias teorías sugieren (McLeod, 1992) que la mejor manera de medir las emociones en el proceso de aprendizaje de las matemáticas es a través de la observación detallada de los estudiantes y de entrevistas preparadas con ellos.

En la actualidad cada vez son más los autores que se interesan por el ámbito socioafectivo y su relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje, hasta el punto de que en la ley de educación actual LOMLOE se incluye el sentido socioafectivo como un sentido más de la asignatura de matemáticas en todos los cursos educativos de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.

A pesar de que, por sí sólo, el ámbito socioafectivo resulta de interés en las investigaciones, debido al marco teórico que proporciona, son las relaciones que se producen entre los distintos elementos del ámbito lo que está ganando cada vez más importancia: autores como Di Martino (2011) sitúan las interacciones entre los distintos elementos del ámbito socioafectivo en el centro de sus investigaciones.

Introducimos a continuación el autoconcepto matemático, que podría incluirse dentro de las creencias en la estructura que propone McLeod, pero debido a su importancia y al creciente interés que despierta lo presentamos de forma independiente.

1.2. Autoconcepto matemático

Como comentamos anteriormente, las creencias que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, sobre la enseñanza de las matemáticas, sobre el entorno social en el que se desempeña la labor educativa o las creencias que tienen sobre sí mismos como estudiantes de matemáticas pueden determinar y condicionar su aprendizaje. El autoconcepto matemático se incluiría en este último grupo; en particular vamos a considerar el autoconcepto como la imagen que tiene de sí misma una persona con respecto a cómo se percibe y se valora al aprender matemáticas. Lo entenderemos como un aspecto del aprendizaje vinculado a las creencias personales relativas al mundo de las matemáticas, esto es: a las ideas, juicios, creencias y atribuciones de la persona que ha ido conformando durante su proceso de escolarización en el entorno de aprendizaje. (Gómez-Chacón, 1997)
Podemos entender el autoconcepto como un modelo teórico multidimensional de carácter jerárquico en el que podemos distinguir dos grandes categorías dentro de un autoconcepto general: el autoconcepto académico y el autoconcepto no académico (Shavelson et al., 1976); el autoconcepto matemático sería una subcategoría del autoconcepto académico.
Existe una relación directamente proporcional entre un autoconcepto matemático positivo y el logro académico en matemáticas (McLeod, 1992), por lo que podría resultar interesante investigar las causas o factores que contribuyen a formar un autoconcepto negativo y tratar de evitarlas.

El siguiente es uno de los constructos más interesantes y estudiados en el ámbito socioafectivo en la actualidad, y mantiene una estrecha relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: el constructo de la “ansiedad matemática”, que presentamos a continuación.

1.3. Ansiedad matemática

La ansiedad matemática, inicialmente incluida dentro del marco de las emociones, ha sido históricamente el área más estudiada dentro del ámbito socioafectivo (McLeod, 1992). De hecho los primeros estudios relativos a las emociones en matemáticas hacen referencia casi de manera exclusiva a la ansiedad, sin embargo existen autores que prefieren separar la ansiedad matemática de las emociones para considerarla como un "estado emocional desagradable o condición caracterizada por la activación del sistema nerviosos autónomo, que se propicia en situaciones que implican las matemáticas" (Carrasco, 2014) y que puede manifestarse a través de una preocupación excesiva, pensamientos perturbadores y tensión (Márquez, 2004).
Hart (1989) señala estas diferencias en las definiciones de ansiedad matemática indicando que mientras algunos autores consideran la ansiedad como un "miedo" o una emoción intensa otros incluyen la ansiedad dentro del marco de las actitudes, pues consideran la ansiedad como "disgusto" o "rechazo" que permanece en el tiempo; esto supondría entender la ansiedad como una respuesta más "fría",lógica y menos intensa.
Debemos señalar que, como destaca McLeod (1992), resulta muy sencillo confundir la ansiedad matemática con la ansiedad que se produce ante los exámenes, en particular los de matemáticas, y lo difícil que resulta poder medir la ansiedad matemática de forma independiente.

A continuación presentamos el siguiente de los constructos principales alrededor de los cuales gira este trabajo: el del razonamiento matemático. Nuestro objetivo es que los estudiantes piensen y razonen por sí mismos, por lo que debemos tener claro qué significa "razonar" para saber qué es lo que estamos buscando.

1.4. Razonamiento matemático

La habilidad de razonar matemáticamente y presentar argumentos convincentes, así como de deducir conclusiones a partir de ciertas afirmaciones conocidas es cada vez más importante en el mundo moderno.

El razonamiento es una secuencia argumental que permite establecer nuevas relaciones entre las unidades de información que constituyen un concepto o varios conceptos, (Rico, 1997) y es nuestra forma usual de procesarlos.
El Programa para la evaluación internacional de los estudiantes (PISA) considera que el razonamiento matemático "involucra sopesar situaciones, elegir estrategias, sacar conclusiones lógicas, desarrollar y describir soluciones, y reconocer cómo esas soluciones pueden ser aplicadas". Establece además tres dimensiones que conforman el razonamiento matemático:formular, emplear e interpretar y evaluar.

- Formular hace referencia a la habilidad de reconocer e identificar situaciones y oportunidades en las que utilizar matemáticas, para después otorgar al problema situado en un contexto real una estructura matemática.
- Emplear indica la habilidad del individuo para aplicar conceptos matemáticos, procedimientos y razonamientos para resolver problemas formulados matemáticamente.
- Finalmente interpretar y evaluar hace referencia a la capacidad de reflexionar acerca de soluciones, resultados o conclusiones matemáticas, para interpretarlos en el contexto real en el que fueron planteados. Es decir, la habilidad para "traducir" el problema desde el lenguaje matemático en el que está formulada la solución.

Según PISA existen además dos aspectos diferenciados dentro del razonamiento matemático: el razonamiento deductivo, que incluye la capacidad de deducción a partir de unos supuestos dados, y el razonamiento inductivo o estadístico, a través del cual obtenemos conclusiones generales a partir de observaciones específicas. Rico (1997) declara que de manera tradicional se ha considerado el razonamiento deductivo como el propiamente matemático, lo cual considera una simplificación de la realidad, pues al hacer matemáticas se emplean el razonamiento deductivo, el inductivo y el analógico: el razonamiento a través del cual se buscan similitudes o patrones para llegar a una conclusión.

La ley de educación LOMLOE también hace referencia al razonamiento matemático, agrupando las competencias específicas 3 y 4 de la asignatura de matemáticas bajo un único bloque competencial denominado *Razonamiento y prueba.*

- **Competencia 3:** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para

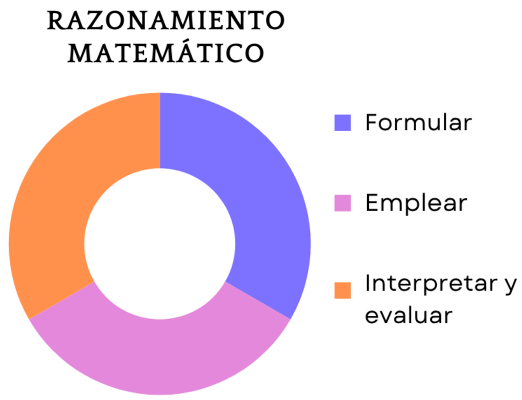


Figura 4: El razonamiento matemático según PISA

generar nuevo conocimiento.

- **Competencia 4:** Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.

Finalmente, el último de los términos que presentamos en este marco teórico: las aulas de pensamiento. Como he adelantado anteriormente esta será la metodología utilizada a lo largo de la implementación, por lo que resulta fundamental conocer en qué consiste.

1.5. Aulas de pensamiento

Las aulas de pensamiento o *Thinking classrooms* son una metodología innovadora diseñada por el profesor de matemáticas e investigador en educación matemática canadiense Peter Liljedhal.

Liljedhal observó que en su clase de matemáticas había muchos alumnos que mantenían una actitud pasiva; se conformaban con estar en clase, de vez en cuando fingir estar pensando y copiar los resultados o soluciones propuestos de la pizarra. Esto suponía un aprendizaje parcial de las matemáticas, pues son una disciplina que obliga a la mente a estar pensando constantemente, ya que la mayoría de estudiantes se limitaban a memorizar procedimientos y repetirlos sin cuestionarse su origen ni su validez.

Entonces Liljedhal decide comenzar a jugar con distintas variables dentro del aula, buscando la combinación de las mismas que maximizaran el tiempo que los alumnos están pensando en clase. A base de prueba y error, y colaborando con más de 40 institutos,

Liljedhal establece las 14 prácticas que definen un aula de pensamiento.
Esta propuesta educativa sitúa el pensamiento en el eje del aprendizaje en matemáticas, pues el autor considera que para aprender matemáticas es necesario "hacer" matemáticas, lo cual requiere pensar y razonar de forma activa.
Las aulas de pensamiento no son sólo una metodología, sino que proponen un entorno educativo que contrasta con la imagen que tenemos de aula tradicional, pues sugieren cambios en la distribución del aula, las tareas, la evaluación, etc...
Presentamos a continuación las 14 prácticas educativas que propone Liljedhal en su libro *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*:

1. **Tareas:** En las aulas de pensamiento las tareas son la base sobre la que se construyen las clases. Es por eso que no cualquier tarea vale: las tareas que se utilizan en las aulas de pensamiento son aquellas tareas que obligan al estudiante a pensar, pero que además son atractivas para ellos.
   Si queremos tareas que pongan a pensar a los alumnos debemos buscar en la resolución de problemas; resolver un problema es aquello que hacemos cuando no sabemos que hacer (Liljedhal, 2020), ya que no hay un único método ni una fórmula para aplicar. Entonces sólo nos queda utilizar el pensamiento.
   La resolución de problemas son tareas no rutinarias porque requieren que los alumnos utilicen su conocimiento de formas que aún no han sido convertidas en rutina, ya que una vez se han vuelto rutinarias los alumnos se dedican a imitar en lugar de pensar. Por ello las tareas que se utilizan en las aulas de pensamiento deben ser desafiantes pero asequibles, suponer un reto pero que no parezca imposible.
   Liljedhal establece 3 tipos de lecciones según las tareas utilizadas:

   - *Tareas no curriculares:* Son aquellas tareas que resultan muy atractivas para los alumnos, que les mantienen pensando porque son entretenidas, pero que no tienen relación directa con el currículum del curso.
   - *Tareas curriculares programadas:* Son aquellas tareas que introducen contenido curricular, pero que son presentadas sin mostrar previamente cómo se resuelven.
   - *Curriculares:* Aquellas con relación directa con el currículum y que se presentan acompañadas de instrucciones y la solución. Promueven la imitación.

En el modelo que plantea Liljedhal se propone comenzar con tareas no curriculares con aquellos alumnos que nunca han trabajado aulas de pensamiento, para posteriormente introducir poco a poco tareas curriculares programadas.

2. **Formación de grupos:** La forma de trabajar en las aulas de pensamiento es en grupos, pero Liljedhal plantea una estructura muy concreta: que los grupos estén formados por 3 alumnos y se formen de manera visiblemente aleatoria.

   Existen varias razones para justificar esta forma de construir los grupos: Liljedhal comprobó a través de sus investigaciones que 3 estudiantes era el tamaño que mejor mantenía un equilibrio en el nivel de los grupos. Además, a través de entrevistas y observaciones concluyó que la formación de grupos de manera visiblemente aleatoria maximizaba la participación activa de todos los estudiantes: cuando los grupos estaban premeditados los alumnos asumían un rol preestablecido (como puede ser el de "el que no sabe nada"), que desaparecían si los alumnos percibían que habían sido agrupados aleatoriamente.

   Liljedhal plantea varias formas de aleatorizar la formación de los grupos, pero sólo como opciones: no restringe el método que se utilice mientras sea aleatorio y los estudiantes lo perciban como tal.

   En la siguiente tabla se muestran las ventajas que encontró Liljedhal en esta forma de trabajar:

3. **Área de trabajo:** Uno de los aspectos más innovadores de las aulas de pensamiento es el área y la forma en la que trabajan los estudiantes. En sus observaciones Liljedhal descubrió que, incluso trabajando en grupo, si cada estudiante tenía su propio cuaderno terminaba habiendo alumnos menos implicados en la actividad.

   No sólo eso; al estar cada uno sentado sobre su silla y con su propio pupitre se dificultaba mucho la movilidad del conocimiento, dentro del propio grupo y entre grupos distintos. Para tratar de solucionar estos problemas Liljedhal fue alterando la manera en la que se distribuían y trabajaban los grupos, hasta dar con la distribución que presentamos aquí. Para ello Liljedhal midió las siguientes variables en una escala del 0 al 3:

   - Cuánta discusión había dentro del grupo
   - Cuántas ganas tenían los estudiantes de comenzar

Figura 5: Ventajas de grupos aleatorios

- En qué grado participaron todos los miembros del grupo en la actividad
- Cómo de persistentes fueron para resolver la actividad
- La cantidad de conocimiento que se movió
- En qué grado el trabajo que escribían era no lineal

Además midió las siguientes tres variables:

- Cuánto tiempo (en segundos) tardaban los alumnos en comenzar a hablar del problema
- Cuánto tiempo (en segundos) les llevaba escribir la primera notación matemática en cualesquiera superficie con la que estaban trabajando
- Cuánto tiempo (en minutos) estuvieron dispuestos a trabajar en el problema sin que el profesor tuviera que animarles a seguir.

Gracias a estas observaciones Liljedhal descubrió que la mejor manera para trabajar en grupos era con Superficies verticales borrables (*Vertical Non-Permanent Surfaces*) distribuidas por toda la clase, de forma que los alumnos se agrupen a su alrededor manteniéndose de pie y con un único rotulador por grupo.

4. **Disposición del aula:**La disposición del aula es otra de las grandes innovaciones de las aulas de pensamiento, y su importancia está relacionada con las creencias sociales que tienen los estudiantes acerca de cómo se aprenden matemáticas. La forma en la que se distribuye el aula determina el aprendizaje que podrá tener lugar en la misma, además de influir directamente en el tipo de aprendizaje que los alumnos creen que tendrá lugar en la clase.

   Liljedha propone una *des-frontalización* del aula, es decir: eliminar la idea de que la clase tiene un frente, una zona a la que mirar, que es donde se encuentran de forma tradicional la pizarra y la del profesor. Esta idea además pierde sentido si consideramos el uso de las SVB (Superficies verticales borrables), que están distribuidas por toda la clase. Para ello se plantea una distribución del mobiliario de la clase de forma que esté igualmente distribuido por toda la clase, sin necesidad de apuntar a ningún sitio.

5. **Respuestas a las preguntas formuladas:** Cuando el objetivo de la clase de matemáticas pasa de ser el de avanzar con el temario a conseguir que los alumnos piensen el mayor tiempo posible otra de las cosas que deben cambiar es la forma en la que los profesores responden a las preguntas de sus alumnos. Liljedhal clasifica las preguntas que formulan los alumnos en tres categorías, de la siguiente manera:

Figura 6: Clasificación de las preguntas

En las aulas de pensamiento las únicas preguntas que se deben responder serían las del tercer tipo, pues son aquellas cuya respuesta favorece que los alumnos sigan pensando. Los otros dos tipos de pregunta deben quedarse sin responder o deben responderse con otra pregunta; al principio los estudiantes no comprenderán este comportamiento, pero con el tiempo entenderán que las preguntas que no se responden no deben formularse.

6. **Cuándo, dónde y cómo se dan las tareas:** Uno de los primeros resultados que descubrió Liljedhal en sus investigaciones fue que las tareas resultan mucho más efectivas cuando se presentan al principio de la clase. Los alumnos se muestran más motivados y con más energía para frontar el problema que en cualquier otro momento de la clase.

   En cuanto al dónde, la tarea debe presentarse a los estudiantes cuando estos estén reunidos y de pie alrededor del profesor, disminuyendo así significativamente los niveles de pasividad en los alumnos.

   Finalmente, de nuevo buscando la forma de maximizar el pensamiento en sus estudiantes, Liljedhal descubrió que la manera óptima de presentar las tareas para lograr su objetivo era de manera oral y, a ser posible, en los primeros 5 minutos. Sin embargo indica que no basta con leer en voz alta el enunciado de la tarea; esta debe presentarse de forma que resulte atractiva a los estudiantes, tratando de lo que los estudiantes interactúen con el problema.

7. **Los deberes:** Uno de los problemas que plantea Liljedhal y que trata de resolver en las aulas de pensamiento es la concepción negativa y errónea que los estudiantes tienen de los deberes. Estos se ven como algo que deben hacer y completar para el profesor, casi como un castigo, más que algo que puede ayudarles a comprender mejor la materia.

   Comenta que en la actualidad los deberes en la clase de matemáticas se han convertido en tareas repetitivas que consisten en repetir un proceso que el profesor ya ha presentado en clase y que además, el término "deberes" tiene una connotación muy negativa de la que resulta demasiado difícil desprenderse.

   Liljedhal clasificó a los estudiantes en cuatro categorías en relación a su actitud ante los deberes:

   - Los alumnos que no hacían los deberes. Esto en general era debido a cuatro razones: los alumnos no tenían tiempo o preferían dedicarlo a otras actividades, habían olvidado que había deberes, sabían hacerlo o porque no habían querido hacerlos.

- Los alumnos que traían los deberes copiados de algún compañero o hacían trampas cuando el profesor revisaba los deberes. La mayoría de estos estudiantes se justificaba diciendo que no sabían como hacerlos
- Los estudiantes que habían hecho los deberes con ayuda de sus padres. Lo curioso de estos casos es que la ayuda iba dirigida únicamente a completar la tarea, no a aprender a hacerla.
- Los estudiantes que realizaban los deberes por sí mismos. Aunque eran capaces de hacerlos de manera independiente, en la mayoría de los casos los hacían imitando lo que el profesor había hecho en clase.

Es por eso que en las aulas de pensamiento no hay deberes, sino "preguntas para comprobar si lo has entendido": estas no deben ser corregidas ni evaluadas, pues deben ser tareas que los alumnos hagan para sí mismos, sin que haya una motivación externa más allá de su propio aprendizaje.

8. **Fomento de la autonomía:** Para Liljedhal una falta de autonomía significa una falta de elección, lo cual influye directamente en la capacidad de pensamiento de los estudiantes. En las aulas de pensamiento esta autonomía se convierte en un requerimiento; en un aula pueden estar trabajando de 8 a 10 grupos a la vez y el profesor puede atender tan sólo a uno a la vez.
   Para fomentar la autonomía de los estudiantes, que en este ambiente de aprendizaje resulta fundamental, en las aulas de pensamiento se propone que la figura del profesor se transforme: el profesor deja de ser quien da la información para pasar a ser quien contribuye a movilizar la información. Pequeños gestos que guíen a los estudiantes a través del trabajo de sus compañeros resultaron en un cambio en la actitud de los estudiantes, que dejaron de depender tanto del profesor.

9. **Pistas y extensiones:** Cuando en un aula estamos dispuestos a trabajar con grupos que han sido creados de forma aleatoria debemos dar por supuesto que habrá variedad en los niveles de los grupos. Habrá grupos que puedan avanzar mucho más

rápido que otros, y debemos ser capaces de gestionar esas diferencias.

Para lograr que los estudiantes se mantengan pensando deben estar concentrados en la actividad que estén realizando, y para ello debe haber un equilibrio entre la dificultad del problema y la habilidad del estudiante para resolverlo. Por eso Liljedhal propone un sistema de pistas y extensiones en las tareas: cada ejercicio viene acompañado de un número de extensiones y un número de pistas. Las extensiones se irán dando a los alumnos que vayan terminando la tarea original, y las pistas se otorgarán a los estudiantes que se han quedado atascados.

Debemos tener en cuenta que las pistas no son parte de la respuesta al problema, sino que sirven para conseguir que los alumnos sigan pensando.

Para Liljedhal existen además distintos niveles en los que un estudiantes puede interactuar con una misma tarea, a cada cual más complicado: otra opción para "extender" el problema es permitir a los estudiantes interactuar con la tarea siguiendo estos niveles.

Adaptado de Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning (p. 159), por P.Liljedahl, 2020, Corwin press.

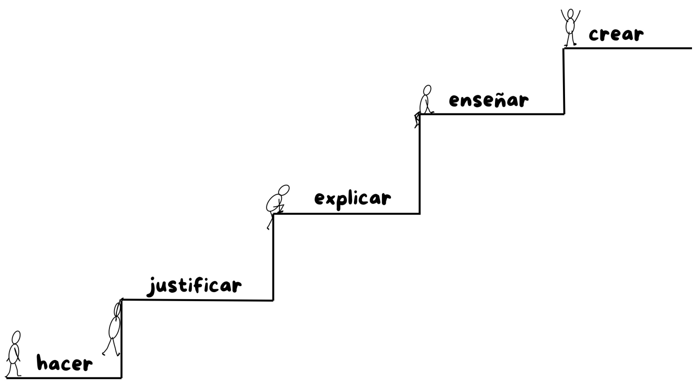


Figura 7: Formas de interactuar con una tarea

10. **Consolidación de las lecciones:** En las aulas de pensamiento las lecciones se consolidan a partir del trabajo de los estudiantes, tomando de punto de partida el nivel que han alcanzado todos y construyendo hacia arriba a partir de ahí. De esta manera los estudiantes se mantienen activos, pues se relaciona lo que el profesor quiera explicar con lo que los estudiantes ya han conseguido entender: el salto cognitivo que deben dar es menor.

Al trabajar con SVB el profesor puede partir de lo que los alumnos han escrito o incluso pedir a un grupo que trate de descifrar lo que otro grupo ha apuntado, trabajando así con distintas maneras de representación.

11. **Toma de apuntes:** Si pretendemos convertir la clase de matemáticas en una un aula de pensamiento la toma de apuntes deberá en consecuencia ser una actividad que requiera pensar. Para ello deben ser los propios estudiantes quienes decidan qué y cómo apuntar.
    Para ello Liljedhal propone:
    - Enfatizar que las notas deben ser para ellos mismos, para que en un futuro puedan recordar lo que aprendieron.
    - Permitir la toma de notas colaborativa: que los estudiantes puedan poner en común lo que consideran que deberían apuntar
    - Enfatizar la importancia de los ejemplos, facilitarles ejemplos corregidos.
    - Plantearles una tarea 3 semanas después que requiera el uso de sus apuntes.
12. **Cómo evaluamos:** A medida que se implementan las pautas que hemos ido presentando se hace más evidente que en un aula de pensamiento intervienen muchas más cosas a parte del pensamiento como tal: el estar dispuesto a escuchar, a trabajar con tus compañeros, a equivocarte, a tener iniciativa...
    Si queremos que nuestra clase funcione y que nuestros estudiantes sepan qué es lo que valoramos debemos evaluar aquello que valoramos, pero ¿cómo?. La herramienta que propone Liljedhal es la de las rúbricas: aunque existen rúbricas que pueden ofrecernos un punto de partida Liljedhal recomienda crear una rúbrica en común con los estudiantes de manera que esta sea comprensible, que sean capaces de utilizarla y que tengan las ganas para ello. Por otro lado, Liljedhal habla de "competencias", las cuales aparecen también en la ley educativa española LOMLOE, por lo que en España contamos con un marco desde el que partir.
13. **La evaluación formativa:** La evaluación debe ser de utilidad tanto para el profesor, que deberá saber qué puede y no puede hacer su alumno para trabajar sobre ello, como para el alumno, que aprenderá qué es lo que no sabe y deberá trabajar.

El problema es que la información que puedan sacar de una misma evaluación el profesor y el estudiante varía enormemente, pues ambos están en situaciones y contextos muy diferentes. Para que la evaluación sera realmente formativa el estudiante debe saber dónde está y a dónde quiere ir: en qué punto de su aprendizaje se encuentra y que es lo que quiere aprender. En una evaluación tradicional lo más común es que el estudiante no sepa sacar esta esta información.

Por eso en las aulas de pensamiento se propone trabajar con *Instrumentos de navegación*, una herramienta que permite a los estudiantes saber dónde están y a dónde quieren ir. Estas herramientas tienen forma de tabla y pueden ser utilizadas tras un examen, al terminar una clase, etc...

Subtópico	**Básico**	**Avanzado**	**Intermedio**
Subtópico 1			
Subtópico 2			
...			

Figura 8: Instrumento de navegación

En ellas los estudiantes indican el subtópico al que hacen referencia y el nivel que han alcanzado:

- Con ✓ las preguntas que se intentaron y se respondieron correctamente.
- Con S las que se intentaron pero tuvieron algún fallo tonto.
- Con H aquellas que se intentaron y respondieron correctamente con ayuda del profesor u otro compañero.
- Con C aquellas que se respondieron correctamente dentro de un grupo colaborativo.
- Con X aquellas preguntas que se intentaron pero la respuesta era incorrecta.
- Con N las preguntas que no se intentaron.

14. **Las calificaciones:** Llegamos a la última de las pautas que estableció Liljedhal para las aulas de pensamiento: las calificaciones. Liljedhal establece que la objetividad es

un mito y propone un cambio de paradigma a la hora de calificar a los estudiantes: reconocer nuestra no-objetividad y buscar una herramienta que nos permita saber en qué punto de su aprendizaje se encuentran nuestros alumnos.

Esta pregunta es similar a la que nos planteábamos en el punto anterior, y la respuesta es también parecida: a través de rúbricas. Siguiendo una estructura similar a la presentada anteriormente (Ver Figura 4) y otorgando valores numéricos a los distintos niveles (Básico, Intermedio y Avanzado) se establece un sistema de calificación coherente con las filosofía de las aulas de pensamiento.

Así el examen puede pasar a un segundo plano y convertirse en una segunda oportunidad para que aquellos estudiantes que no lograron alcanzar el nivel que deseaban en clase puedan demostrar lo que han aprendido.

La implementación de la metodología de aulas de pensamiento no es inmediata y debe hacerse de manera gradual, incorporando poco a poco las distintas pautas que hemos presentado. Es importante también tener en cuenta el contexto en el que nos encontramos y, como con cualquier otra metodología, tratar de adaptarnos. Una de las grandes ventajas que ofrecen las aulas de pensamiento es que sus pautas pueden implementarse de manera independiente, no es necesario implementarlas todas para apreciar un cambio en la clase de matemáticas.

Una vez presentado el marco teórico podemos proceder a presentar la propuesta didáctica entorno a la que gira este trabajo.

2. La propuesta didáctica

La propuesta didáctica que voy a presentar a lo largo de esta sección fue implementada durante mi período de prácticas del Máster de enseñanza Universitario en un centro educativo público de la ciudad de Valladolid.

2.1. Contextualización

Para poder presentar adecuadamente la propuesta debemos contextualizar por y para qué, dónde, cuándo y con quién se realizó.
La propuesta didáctica fue diseñada para ser llevada a cabo con un grupo de alumnos de 3º de la ESO a lo largo de dos semanas de clase (8 sesiones) y se enmarca, dentro del modelo de saberes básicos que propone la LOMLOE, en el Sentido Algebraico y en el Sentido Sociafectivo. En ella se trabajaron:

· Los patrones (Sentido Algebraico, Punto 1): Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la regla de formación en casos sencillos.

· La Modelización matemática (Sentido Algebraico, Punto 2): Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico, y posterior deducción de conclusiones razonables a partir del modelo matemático.

· Las relaciones y funciones (Sentido Algebraico, Punto 5): Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.

· Creencias, actitudes y emociones (Sentido Sociafectivo, Punto 1): Se trabajó la gestión emocional de las emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas, así como la autoconciencia y la autorregulación.

· Trabajo en equipo y toma de decisiones. (Sentido Sociafectivo, Punto 2).

· Inclusión, respeto y diversidad. (Sentido Sociafectivo, Punto 3): Se fomentaron actitudes inclusivas y de aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.

Además desde la implementación de esta propuesta se pretendía contribuir a la consecución de los objetivos de la etapa, favoreciendo entre otros:

- El desarrollo de las habilidades que les permitan seguir aprendiendo a lo largo de la vida, desde la confianza en el conocimiento como motor del desarrollo.
- Aceptar la incertidumbre como una oportunidad para articular respuestas más creativas, aprendiendo a manejar la ansiedad que puede llevar aparejada.
- Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con las demás personas.
- Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

Finalmente, mediante la práctica didáctica que se presenta en este documento se pretendía trabajar las siguientes competencias específicas:

- *Competencia específica 1:* Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. Esta competencia se relaciona con los descriptores del Perfil de Salida STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.
- *Competencia específica 3:* Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento. Esta competencia se relaciona con los descriptores del Perfil de Salida CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3.
- *Competencia específica 5:* Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado. Esta competencia se relaciona con los descriptores del Perfil de Salida STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.
- *Competencia específica 8:* Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas. Esta competencia se relaciona con los descriptores del Perfil de Salida CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.

· *Competencia específica 9:* Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia se relaciona con los descriptores del Perfil de Salida STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.

· *Competencia específica 10:* Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia se relaciona con los descriptores del Perfil de Salida CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.

Contextualización del centro

El centro en el que implementé la práctica que se presenta en este TFM era un centro público situado al suroeste de Valladolid. El barrio en el que se encuentra se divide en tres anillos socioeconómicos diferenciados: uno exterior de clase media-alta, un segundo anillo de clase media y el anillo más interior, formado por familias de clase trabajadora. El centro educativo se encuentra inmerso en un ámbito multicultural, pues en el barrio conviven personas de diversos orígenes entre ellos hispanoamericanos, búlgaros, rumanos y de etnia gitana. El alumnado no sólo proviene del barrio en el que está el centro y barrios adjuntos, sino que muchos vienen también de pueblos de la zona de alrededor de Valladolid; la variedad en el nivel socioeconómico y sociocultural de las familias es notable y aporta diversidad a la convivencia del centro, pues tiene estudiantes provenientes de familias trabajadoras y de nivel socioeconómico medio y medio-alto.

Este centro educativo oferta enseñanza de ESO con sección bilingüe y Bachillerato con modalidades de letras, ciencias y ciencias sociales. Cuenta con un gimnasio, un jardín, un aula exterior y un huerto, así como con las instalaciones correspondientes a un centro educativo como son un laboratorio, un aula de informática y el aula de música. En la actualidad cuenta con entre 60 y 70 profesores, de los cuales la mayoría tienen destino

definitivo en el mismo.
Forma parte de los centros BITS de la comunidad (Bilingüe, Inclusivo, Tecnológico y Seguro) y participa en diversas iniciativas y proyectos educativos como son el Proyecto de Innovación Educativa (FILMA), el Tour de las Mates y el Plan de refuerzo y apoyo educativo PROA+. Cuenta también con múltiples iniciativas propias con las que tratan de fomentar un estilo de vida saludable y mantener informada a la comunidad educativa.
En el proyecto educativo del centro se destaca el carácter pluricultural y su intención integradora, así como su afán por fomentar valores universales como la igualdad, la justicia y la solidaridad. También destacan su interés por educar en la preservación y conservación del medio ambiente y en la importancia de seguir una dieta saludable.

El departamento de matemáticas del centro contaba con entre 5 y 10 profesores que impartían la asignatura de matemáticas a lo largo de la E.S.O, así como Matemáticas Aplicadas y Matemáticas I y II en Bachillerato y la asignatura de Complementos de matemáticas, que atienden los alumnos de la E.S.O que presentan dificultades en la materia. También impartían horas de Matemáticas dos profesores de orientación a los alumnos que más dificultades tenían no sólo en matemáticas sino en general. La coordinación entre todos los profesores del departamento era muy buena, tanto dentro del mismo curso como en todos los cursos a lo largo de toda la oferta educativa.
Dentro de los objetivos generales del departamento para la Educación Secundaria Obligatoria se encuentra el de proporcionar al alumnado las herramientas para la resolución de problemas y los instrumentos de análisis e interpretación de datos que le permitan desenvolverse en distintos contextos personales, académicos, laborales y sociales. Por lo tanto se consideran las matemáticas no sólo como una herramienta científica, sino también un elemento imprescindible para un desarrollo completo del individuo.
Respecto a la metodología, la utilizada por todos los miembros del departamento de forma general era la lección magistral participativa, pues es necesaria para aprender las técnicas de estudio dirigido. Como metodología secundaria se utilizaba también la resolución de problemas, aunque en menor medida, para fomentar el pensamiento matemático y establecer conexiones en el propio conocimiento.
El departamento del centro participaba en diversos programas, proyectos y actividades

extraescolares entre los que destacan el Plan de acción tutorial, el Plan de absentismo, el Día de Pi, el Canguro Matemático, el Tour de Mates, ETSALMAT y el Día de la niña y la mujer en la ciencia y STEM Talent Girl.

Contextualización del aula

La implementación de la propuesta didáctica se realizó en un grupo de 3º de la ESO, al cargo del cual se encontraba mi tutor de prácticas. Su horario era lunes a 6ª hora, martes a 1ª hora, jueves a 3ª hora y viernes a 5ª hora, y estaba formado por 20 estudiantes; 11 alumnos y 9 alumnas. Dentro del grupo había variedad respecto al nivel socioeconómico de los alumnos: algunos venían de pueblos cercanos a Valladolid y otros de algunos barrios de alrededor.
En este grupo los alumnos presentaban una ausencia de herramientas para las estrategias de resolución de conflictos, bastante habituales en el aula, y tampoco parecían manejar conductas empáticas hacia sus compañeros. Por otro lado los grupos de amigos estaban muy establecidos, lo cual dificultaba el trabajo en grupo y el trabajo colaborativo.
Los estudiantes no tenían además las herramientas necesarias para manejar y gestionar sus emociones en el aula y tendían a dejarse llevar por las mismas.

El nivel educativo del grupo era medio/bajo, especialmente en matemáticas, con notas medias muy bajas y un alto índice de suspensos. Algo que me llamó mucho la atención, aunque no era exclusivo a la asignatura de matemáticas, era el comportamiento y la actitud de los estudiantes: aunque no era generalizado, muchos no presentaban ninguna iniciativa por el aprendizaje, especialmente en matemáticas, lo cual se reflejaba en una actitud muy negativa hacia la asignatura.
Resultaba especialmente llamativo el caso de algunas alumnas del grupo que presentaban signos de un alto nivel de ansiedad matemática: se ponían muy nerviosas en los exámenes y durante las explicaciones, no querían salir a la pizarra por miedo a equivocarse y cuando no entendían algo muchas veces se obcecaban en que no lo entendían y dejaban de escuchar. Tenían además un bajo autoconcepto matemático: consideraban que las matemáticas se les daban muy mal y que no importaba lo mucho que estudiaran, que volverían a suspender. En especial las alumnas tenían dificultades para percibir el error

como una oportunidad de aprendizaje y eran más perfeccionistas que sus compañeros, lo cual derivaba en un mayor miedo a equivocarse.
De hecho en las clases a las que asistí con este grupo observé el siguiente fenómeno: parecía haber una clara diferencia en la capacidad de autorregulación del conocimiento en alumnos y en alumnas de la clase.
Por lo general los resultados acompañaban más a las expectativas de ellas que de ellos, quienes se mostraban más confiados y con mayores posibilidades para aprobar la asignatura. Más aún, durante las clases la actitud era muy distinta: mientras que algunas de las alumnas trataban de sacar algo en claro de las clases, la proporción en sus compañeros era mucho menor.

En el ámbito de las creencias, consideraban las matemáticas muy difíciles y poco útiles: creían que para aprobarlas hacía falta estudiar muchísimo y algunos no se veían capaces de aprobar la asignatura. Habían asumido que en la clase de matemáticas no iban a entender nada aunque prestaran atención y se mantuvieran callados, lo cual dificultaba enormemente el manejo de la clase.
En cuanto a experiencias pasadas, algunas de las alumnas me comentaron que llevaban años sin aprobar matemáticas, por lo que este año tampoco sería diferente. Otros se mostraban muy pesimistas porque consideraban que en los años anteriores no habían aprendido nada, por lo que no se sentían preparados para afrontar este curso.

La dinámica de trabajo del grupo estaba ya muy establecida: los alumnos ya se habían acostumbrado a la forma en la que transcurrían las clases de matemáticas y asumían su papel sin cuestionarse demasiado. Esta fue una de las razones por las que consideré este grupo para la puesta en práctica de la propuesta: necesitaban un cambio en la forma de trabajar, encontrarse con algo que no conocían, que les exigiese pensar y concentrarse en clase, que les permitiese mejorar su flexibilidad cognitiva, renovar el ambiente de aula y cambiar sus creencias respecto a las matemáticas.
En este grupo en particular eran muchas las sanciones que se les habían ido imponiendo debido a su comportamiento en clase, sin efectos notables a largo plazo, como partes y expulsiones. Al principio este comportamiento me sorprendía y enfadaba, muchas veces

salía decepcionada del aula y llegué a plantearme si realizar la práctica en este grupo sería buena idea.
A medida que fue pasando el tiempo sin embargo empecé a conocerles mejor y comprendí que no eran malos chicos, pero que estaban muy desmotivados con la asignatura y los estudios en general.

2.2. Materiales y recursos didácticos

Los materiales utilizados para llevar a cabo la intervención fueron cedidos por el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Valladolid.
Para poder aplicar la metodología de aulas de pensamiento, la utilizada en el desarrollo de las actividades que veremos más adelante, era necesario poder disponer de material específico que hiciera las veces de SVB (Superficies Verticales Borrables), dado que los centros educativos carecen por lo general de este tipo de pizarras.
Para ello el Departamento puso a disposición del centro varias pizarras blancas flexibles que se podían pegar a la pared y una serie de rotuladores borrables de colores. Debido a las características del centro no pudimos colocar las pizarras en la pared, de modo que trabajamos con ellas sobre las mesas como se muestra en la Figura 8.

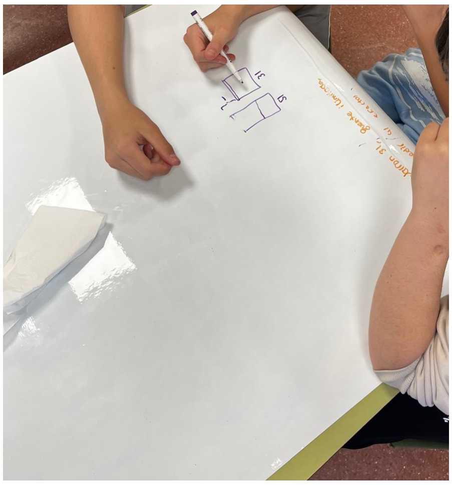


Figura 9: Ejemplo de SVB adaptado

2.3. Descripción de la propuesta

La propuesta didáctica alrededor de la cual gira este trabajo consta de seis actividades o tareas que siguen el modelo propuesto por Peter Liljedhal en las aulas de pensamiento. De estas seis actividades cinco pudieron ser implementadas en el centro con los estudiantes y todas pueden ser clasificadas en curriculares y no curriculares.
Puesto que han sido diseñadas para ser implementadas según la metodología *Thinking classrooms* todas están divididas en distintos niveles de dificultad y están acompañadas de una serie de pistas pensadas para ayudar a los alumnos que se han quedado atascados. A su vez las pistas están ordenadas, de manera que las primeras pistas suponen una ayuda menor que las últimas, y por ello deben ser dadas siguiendo el orden en el que están.
Más aún, siguiendo lo que establece la LOMLOE respecto del sentido socioafectivo, las actividades fueron diseñadas para fomentar la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia. Gracias a la metodología de las aulas de pensamiento se fomentó también el trabajo en grupo y la toma de decisiones,se contribuyó a modificar las creencias de los estudiantes y se inculcaron valores de respeto e inclusión.
Presentamos a continuación las seis actividades que componen esta propuesta didáctica en el orden en el que fueron implementadas:

ACTIVIDAD I: Saltos de rana

Esta primera actividad fue sacada de *BCAMT weekly Math Tasks* de Michael Pruner a través de la página web *https://www.peterliljedahl.com/*. Se encuentra en la categoría de actividades no curriculares pero altamente atractivas.

Enunciado: En un estanque hay 6 ranas; 3 ranas verdes y 3 ranas naranjas, colocadas sobre las hojas de un nenúfar de la siguiente manera:

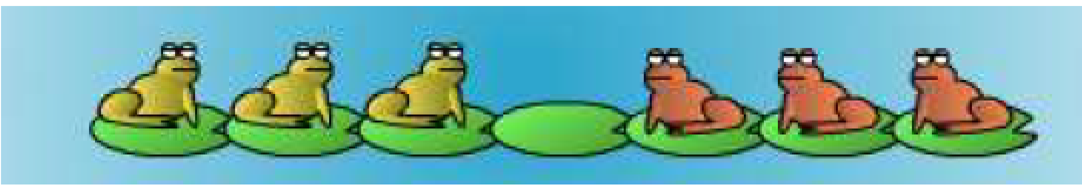


Figura 10: Actividad: Saltos de rana

Las ranas verdes y naranjas quieren intercambiar posiciones, pero sólo pueden moverse desplazándose al nenúfar de al lado o saltando una rana. Además sólo cabe una rana en cada nenúfar y estas no pueden retroceder.

- **Nivel 1:** ¿Cuántos movimientos son necesarios para intercambiar posiciones?
- **Nivel 2:** Y si en vez de 3 ranas de cada color hubiera 4 ranas de cada color ¿Cuántos saltos serían necesarios?
- **Nivel 3:** Y si en vez de 4 fueran 15 ranas de cada color ¿Cuántos saltos son necesarios?

Para responder a la primera pregunta los estudiantes deberán ir probando hasta encontrar una solución, y después comprobar si su solución es correcta y si han realizado el menor número posible de saltos.
Para responder a la segunda pregunta deberán resolverlo igualmente, probando hasta dar con la solución adecuada. Esto será más sencillo una vez se ha resuelto el caso para 3 ranas, puesto que probablemente de manera subconsciente perciban un patrón.
Para responder a la última pregunta es evidente que no podrán resolverla probando: tendrán que buscar un patrón a partir de las dos respuestas anteriores.
Para esta actividad se han ideado 5 pistas:

1. ¿Cómo podemos representar las ranas, los nenúfares y sus cambios de posición?
2. Intenta dejar constancia de cada movimiento que haces.
3. Diferencia entre "Salto" (S) y "Deslizamiento" (D) y mantén un registro del orden en el que haces cada movimiento.
4. Resuelve el problema para 2 ranas y busca un patrón que después sigas para 3 y 4 ranas
5. ¿Ves algún patrón en n=3 y n=4?

Objetivos de la actividad: El objetivo principal de esta actividad, tal y como yo la he implementado, ha sido introducir a los estudiantes en la metodología de las aulas de pensamiento. Al ser una actividad altamente atractiva para los alumnos me pareció la opción ideal para explicarles el funcionamiento de las aulas de pensamiento y poder a la vez mantener la clase bajo control.

Matemáticamente esta actividad desarrolla la habilidad de reconocer patrones y de buscar y seleccionar la manera más adecuada para representar los datos de un problema.

ACTIVIDAD II: Los jarrones de agua y los relojes de arena

Esta actividad son en realidad 2 actividades separadas, pero las incluyo como una actividad puesto que fueron implementadas en una única sesión. Ambas han sido obtenidas de *BCAMT weekly Math Tasks* de Michael Pruner a través de la página web *https://www.peterliljedahl.com/* y se clasifican como actividades no curriculares.

Enunciado 1: Tenemos un jarrón de 5 litros y un jarrón de 3 litros, con una fuente inagotable de agua.

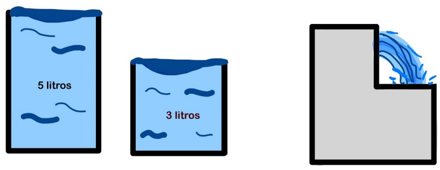


Figura 11: Actividad: Los jarrones de agua

- **Nivel 1:** ¿Cómo podemos obtener exactamente 4 litros de agua?
- **Nivel 2:** ¿Y si quisiéramos medir 7 litros?
- **Nivel 3:** Si tuviéramos jarrones de 3 litros y 7 litros ¿Cómo podríamos medir 5 litros?

Una vez que se ha superado el primer nivel responder las preguntas de los niveles 2 y 3 resulta muy sencillo, pues el procedimiento es muy similar a través de la manipulación de los jarrones.
Se idearon 4 pistas para apoyar a los estudiantes a lo largo de esta actividad:

1. ¿Qué medida en litros necesitamos pero no tenemos?
2. ¿Cómo podemos obtener 1 litro a partir de un jarrón de 3 litros y uno de 5 litros?
3. Para tener 7 litros de agua necesitaré usar los dos jarrones

4. En el nivel 1 necesitábamos obtener la medida de 1 litro. ¿Qué medida necesitamos ahora?

La segunda actividad es muy similar y consiste en un único nivel.

Enunciado II: Tengo 2 relojes de arena: uno de 4 minutos y otro de 7 minutos. Los relojes de arena se tienen que acabar y tengo una cazuela con agua hirviendo. ¿Puedo hervir un huevo durante 7 minutos? ¿Cómo?
Para esta actividad tengo una única pista: Puedo meter el huevo en el agua cuando quiera.

El utilizar un jarrón para llenar otro jarrón y así obtener distintas cantidades de agua se asemeja en este problema a poner relojes a la vez y dejar que se acabe uno antes que otro. Por eso esta actividad tiene un único nivel y una sola pista; se considera en realidad el último nivel del problema anterior.

Objetivos de la actividad: Al encontrarse fuera del ámbito curricular no podemos asociar esta actividad con una única sección del temario. Al implementar esta actividad con los estudiantes mi objetivo fue afianzar la metodología de aulas de pensamiento: que vieran que seguiríamos trabajando de esta manera durante la siguiente semana. Es una actividad también altamente atractiva que puede enganchar a los alumnos para que asocien las aulas de pensamiento con emociones positivas, facilitando la posterior implementación de actividades curriculares, como la siguiente que presentamos.

ACTIVIDAD III: El edificio sin ascensor

Esta actividad es la primera de las actividades curriculares que se implementaron en el aula y fue diseñada por mí; puesto que era la primera actividad de tipo curricular que trabajábamos no quería que fuera muy "evidentemente" curricular. Por ello traté de englobarla en un contexto real que los estudiantes pudieran imaginarse, utilizando elementos que pudieran ayudarles a percibir la actividad como algo cercano.
Además la forma en la que está enunciada la actividad hace que recuerde a un acertijo, por lo que los alumnos se sentirán más atraídos y dispuestos a resolverlo.

Enunciado: En el edificio de María se ha estropeado el ascensor y sólo se pueden utilizar las escaleras, por las que se tarda 1 minuto en subir o bajar un piso.
María, Laura y Andrea han quedado a las 17:05 en la puerta de la calle del edificio de María: Laura vive en el 1º, María en el 2º y Andrea en el edificio de al lado desde el que se tardan 4 minutos andando. Al salir de su edificio Andrea avisa por el grupo de Whatsapp y a las 17:02 está en la puerta de la casa de María.
María se prepara en 2 minutos y sube 1 minuto al 3º a por unas cosas, pero después va a buscar a Laura a su casa.
Por su parte Laura tarda un minuto más en prepararse que María, y en el último momento se acuerda de que ella también tiene que subir 1 minuto al 3º a por unas cosas.
A las 17:05 están todas en la puerta del edificio.

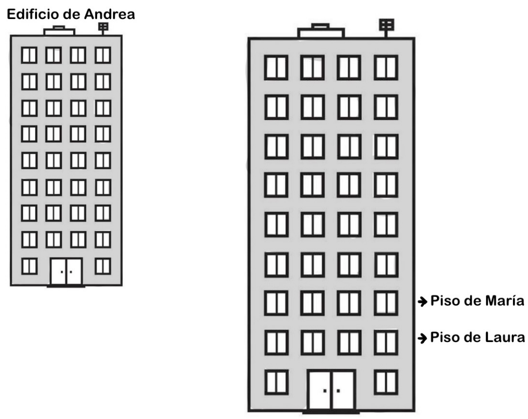


Figura 12: Actividad: Edificio sin ascensor

La actividad consta de tres niveles de dificultad:

- **Nivel 1:** ¿A qué hora se encuentran todas las amigas?
- **Nivel 2:** ¿Cuántas veces y quiénes se han encontrado por las escaleras?
- **Nivel 3:** Calcula los momentos exactos en los que se han encontrado las amigas

Para poder dar respuesta a las preguntas los alumnos deben haber comprendido el problema: esto requiere haber tomado adecuadamente los datos, además de poder trabajar con ellos. Para la primera pregunta el nivel cognitivo exigido es medio, pues se puede obtener la respuesta si se organizan adecuadamente los datos y se realizan una serie de

operaciones sencillas para ver a dónde está cada amiga en cada minuto.
Sin embargo para poder responder a la segunda y tercera pregunta el alumno debe poner en marcha un proceso de razonamiento para adecuar su representación de los datos a la pregunta planteada, además de representarlos adecuadamente. Finalmente debe conectar los conocimientos que ya posee de la asignatura y relacionarlos para poder llegar a calcular el momento exacto en el que se encuentran las amigas.
La actividad consta de 3 pistas:

1. ¿A qué hora ha tenido que salir Andrea de su casa?
2. Utiliza una gráfica en la que los ejes sean Minutos-Piso
3. Busca las ecuaciones del movimiento que realizan las chicas cuando se encuentran por las escaleras.

Objetivos de la actividad: A nivel curricular esta actividad se engloba dentro del sentido algebraico, en el apartado de funciones, y ha sido diseñada con el objetivo de repasar la representación de funciones y la ecuación general de la recta, así como el punto de corte de dos rectas. También trata de trabajar la toma de datos de un problema; recordemos que en las aulas de pensamiento las actividades se dan de forma oral, por lo que los estudiantes no sólo deben estar atentos, sino que deben esforzarse para procesar la información y seleccionar los datos relevantes.

ACTIVIDAD IV: El banco TMD

Esta actividad entraría dentro de las actividades no curriculares y fue diseñada por mí para ser trabajada en el aula cuando volvieran los estudiantes que se habían ido de viaje. Por ello, aunque ya habíamos trabajado todos juntos el primer día con las aulas de pensamiento, sólo había sido una vez, así que quería que recordaran cómo funcionaba y retomar las clases poco a poco.
Traté de nuevo de hacer la actividad lo más atractiva posible, incorporando un tema que pudiera interesarles; en este caso el del dinero.
El problema incluye una tabla que se proyectó en la pizarra digital para que los estudiantes pudieran recurrir a ella cuando necesitaran.

Enunciado: En el banco *TMD* (Tengo Mucho Dinero) se han filtrado sin querer algunos datos de sus millonarios clientes. La siguiente tabla representa el nombre de 10 clientes y sus respectivos números de tarjeta:

Cliente	Número de tarjeta
Lucas González	9020750240904
Marta Pérez	1068040604
Inés Sánchez	0207702204
Laura Martín	90060106812
Alberto Soto	09106807080
Damián Fernández	301002406202304
Hernando Jaspón	60620230707402
Víctor Wellington	9028061099025802
Mireya Alonso	106030090270

Figura 13: Datos del TMD

- **Nivel 1:** Sabemos que existe una relación entre los nombres de los clientes y las cifras de su número de tarjeta, pero no sabemos cuál. Sabemos que el CEO de la empresa TECLA, un hombre muy millonario, guarda sus cuentas en el TMD y que su nombre es Eleonardo Mus. ¿Cuál será su número de tarjeta?

- **Nivel 2:** Ahora ya tenemos el número de tarjeta de Eleonardo Mus, pero necesitamos el PIN de la tarjeta para poder acceder al dinero. Los pines tienen cuatro cifras y siguen la siguiente estructura:

  - Primera cifra: Es la suma de las dos primeras cifras de la tarjeta
  - Segunda cifra: Número de vocales del nombre
  - Tercera cifra: La parte entera por debajo de la suma de la primera y la segunda cifras dividida a la mitad.
  - Cuarta cifra: *Desconocido*

  Aunque no conocemos el patrón que sigue la cuarta cifra sabemos que Lucas, Alberto y Víctor tienen el mismo PIN, que el de Marta e Inés acaba en 3 y que el de Hernando es capicúa. ¿Puedes robarle a Eleonardo todo su dinero?

- **Nivel 3** La forma en la que asociamos nombres con números ¿Es una función? ¿Y si el número de tarjeta de Lucas González fuera 9020750241904?

Para poder responder a la pregunta los estudiantes deben darse cuenta de que cada letra del nombre corresponde a una cifra (los números de tarjeta tienen tantas cifras como letras los nombres) y que existe un patrón que se repite: las vocales son el 0, la b, m y w son el 1, etc. . .
En la segunda pregunta deben utilizar los datos que se les dan y buscar las relaciones que existen entre los números de tarjeta y los pines, de nuevo buscando patrones que se repitan.
Para esta actividad se diseñaron 4 pistas:

1. Cada letra se asocia con un único número.
2. Calcula los pines de Marta e Inés. ¿Existe alguna relación entre los pines?
3. Calcula el PIN de Hernando. ¿Es capicúa?
4. El PIN de Laura es 9467 y el de Alberto es 9577.

Objetivos de la actividad: El objetivo principal de esta actividad era el de acostumbrar a los alumnos que habían estado ausentes durante la primera semana al método de trabajo de las aulas de pensamiento. Sin embargo, al tratarse de una actividad diseñada para favorecer el pensamiento en los alumnos se trabajan también, e inevitablemente, aspectos más puramente matemáticos.
El más evidente de estos aspectos es el de reconocer patrones, que se repite en el primer y segundo nivel.

ACTIVIDAD V: La ecuación punto-pendiente

Esta actividad fue la última que se llegó a implementar en el aula y es la más curricular de todas las que utilizamos. Carece de un enunciado como el que tenían las actividades anteriores sino que, como lo plantea Liljedhal, es una actividad secuencial y narrativa en la que participan los alumnos y el profesor.
Con perspectiva, una vez terminado el período de implementación, me di cuenta de que quizás los estudiantes no estaban preparados para este tipo de actividad aún, pero hablaremos más profundamente de ello en el desarrollo y evaluación de la actividad.

Enunciado:

- *El profesor comienza lanzando la siguiente pregunta a la clase:* ¿Cuántos puntos son necesarios para describir una recta?

- *Los alumnos quizás se tomen un tiempo para pensarlo, pero responderán:* 2.

- *El profesor plantea entonces la primera pregunta correspondiente al* **Nivel 1:** Imaginemos que nos dan dos puntos, (1,2) y (5,6). ¿Cómo podemos sacar la ecuación de la recta *y=mx+n*? Os recuerdo que m, la pendiente, es $m = \frac{\text{lo que subo}}{\text{lo que avanzo}}$ y que $n =$ altura de corte con OY.

- *Los alumnos comenzarán a trabajar con sus grupos. A medida que los grupos vayan sacando la recta se les plantea, grupo a grupo, el* **Nivel 2:** Tenemos la recta r dada $y = -2x + 3$. Busca algún valor de a y b para los cuales la ecuación $y = b - 2(x - a)$ también representa a r.

- *De nuevo, según vayan resolviendo el segundo nivel se les planteará el* **Nivel 3:** Supongamos que mi recta tiene pendiente $m = 2$ y que pasa por el punto (a, b). ¿Qué forma tiene mi ecuación ahora? *Los alumnos tratarán de encontrar la forma de la recta hasta llegar a la ecuación y=b+2(x-a).*

- **Nivel 4:** Bien, habéis llegado a la ecuación $y = b + 2(x - a)$: a esta forma de la ecuación de una recta se le conoce como **ecuación punto-pendiente**: $y = y_0 + m(x - x_0)$. ¿Podríais sacar la ecuación punto-pendiente de la recta $y = 3x - 1$? ¿Y de la recta $4y + 3x = 2$?

- *Finalmente, a aquellos grupos que hayan logrado resolver el nivel 5 se les planteará la última pregunta que corresponder con el* **Nivel 5:** Razona si existe una única ecuación punto-pendiente para cada recta o no.

Los distintos niveles de esta actividad han sido diseñados para ir progresivamente comprendiendo el funcionamiento y significado de la ecuación de una recta: Para el primer nivel es suficiente con despejar m y n a partir de los puntos dados sabiendo que cada punto de la recta cumple la ecuación.

Para superar el segundo nivel deben darse cuenta de que cualquier punto de la recta es un par (a,b) que cumple la condición, y en el nivel 3 deben comprender profundamente que (x,y) en la ecuación son las coordenadas de cualquier punto que esté en la recta.

Para los niveles 4 y 5 deben haber entendido de dónde viene la ecuación punto-pendiente y cómo obtenerla.
En esta actividad existe una pista por cada nivel:

1. La ecuación de una recta es la condición que deben cumplir las coordenadas de un punto para que este esté en la recta.
2. En particular, las coordenadas de un punto que esté en la recta satisfacen ambas ecuaciones.
3. Para que dos ecuaciones sean iguales deberán ser iguales los coeficientes de las incógnitas: $ax + b = cx + d \Leftrightarrow a = c, b = d$.
4. ¿Qué elementos hemos necesitado para la construcción de la ecuación punto-pendiente? ¿De dónde podemos sacar un punto de la recta?
5. ¿Cuántos puntos tiene una recta?

Objetivos de la actividad: Con esta actividad se pretendía trabajar con la ecuación general de la recta, introducir la ecuación punto-pendiente y trabajar el manejo del lenguaje algebraico, así como incidir en la comprensión de conceptos como el de *pendiente* o *ecuación de la recta*. También se trataba de incidir brevemente en el concepto de función desde un punto de vista algebraico para facilitar la presentación más formal que se hace en el cuarto curso de la ESO.
Finalmente se trataba de comprobar de qué manera funcionarían los estudiantes con una actividad menos atractiva, ver si habían aceptado esta nueva forma de trabajar y si se habían adaptado a ella.

ACTIVIDAD VI: Villaeste y Villaoeste

Esta actividad es la última incluida en esta propuesta innovadora, pero no pudo ser implementa en clase con los estudiantes debido a imposibilidades del calendario.
Se incluye dentro de las actividades curriculares pero altamente atractivas, pues está pensada para introducir algo novedoso para los estudiantes, por lo que según las pautas de Liljedhal es recomendable que estas actividades resulten más atractivas que las actividades secuenciales.

Enunciado: Villaeste y Villaoeste son dos pueblos de una llanura que se encuentran separados por un río perfectamente recto que llega a una pequeña fuente. En este río se han construido dos puentes que conectan ambos pueblos: a 1 Km y 4 Km río arriba de la fuente respectivamente.
Los alcaldes de estos pueblos, ambos matemáticos, se tienen mucha envidia y querían construirse una casa lo más cerca posible del primer puente y cerquita de la fuente. Sin embargo las leyes de urbanismo prohíben construir a menos de 1 Km del puente y en el cuadrado cuyo centro es la fuente y que tiene 2 Km de lado.

- **Nivel 1:** Dibuja un mapa y sitúa las casas de los alcaldes.
- **Nivel 2:** La siguientes casas de cada pueblo se encuentran a la altura del siguiente puente, pero 2 Km al este y al oeste de la fuente respectivamente. ¿Dónde se encuentran estas casas? Sitúalas en tu mapa.
- **Nivel 3:** Si fuéramos a colocar un tercer puente lo situaríamos a la altura de las siguientes casas de cada pueblo, que se encuentran a 3 Km al este y el oeste de la fuente respectivamente.

  A los alcaldes les encanta el orden y las matemáticas, por lo que las casas de sus pueblos siguen todas un patrón. ¿Puedes encontrarlo? ¿Dónde colocarías entonces el siguiente puente?
- **Nivel 4:** Si denotamos con y=“Km río arriba”, x=“Km al este y al oeste de la fuente”. ¿Existe una fórmula para la posición de los puentes?
- **Nivel 5:** Hasta ahora hemos considerado la fuente nuestro punto de origen (0,0). Si situásemos la fuente en el punto (0,3) ¿Cómo quedaría nuestro mapa? ¿Y nuestra ecuación?
- **Nivel 6:** ¿Y si nuestra fuente fuera el punto (3,0)?
- **Nivel 7:** ¿Cómo quedaría la ecuación si la fuente fuese el punto (1,3)?

En esta actividad hay un gran número de niveles en comparación con las actividades anteriores debido a que son niveles mas sencillos de superar: para los dos primeros niveles es suficiente con haber comprendido el problema y dibujar correctamente el mapa. Los niveles 3 y 4 son también sencillos: sólo hay que darse cuenta de que los Km río arriba

son el cuadrado de los Km al este/oeste y saber expresarlo algebraicamente. Los niveles 5, 6 y 7 son los que requieren un mayor manejo del lenguaje algebraico y por ello los de más dificultad.
Esta actividad cuenta con 6 pistas:

1. Las casas serán simétricas respecto del río.
2. ¿Qué relación hay entre los Km río arriba del puente y los Km al este/oeste de las casas a su altura?
3. Si la fuente se sitúa en el (0,3) entonces todos mis puntos estarán 3 Km más arriba.
4. Si y' denota los Km río arriba en mi nuevo mapa entonces $y' = y + 3$.
5. Si la fuente es el punto (3,0) todos mis puntos se mueven 3 Km al este.
6. Si x' denota los Km al este/oeste en mi nuevo mapa entonces $x' = x + 3$.

Objetivos de la actividad: Al encontrarse dentro de las actividades clasificadas como "curriculares" los objetivos de esta actividad son mayoritariamente matemáticos.
Por un lado se pretendía trabajar el lenguaje algebraico (al trabajar con incógnitas), trabajar con funciones y sus gráficas, así como ver los cambios que se producen en las mismas en función de su expresión algebraica y la identificación de patrones.
Por otro lado, y como objetivo principal de esta actividad, se encuentra la introducción de las funciones polinómicas de segundo grado y la representación de sus gráficas, las parábolas.
En cursos anteriores se trabaja con expresiones polinómicas de segundo grado pero únicamente desde un punto de vista de "ecuación" a resolver, sin considerar su representación gráfica.

2.4. Implementación y desarrollo de la propuesta

A continuación presentaremos la forma en la que se llevó a cabo la propuesta y cómo se desarrolló; para ello debimos adaptar las pautas que enumera Liljedhal para trabajar en un aula de pensamiento.

Adaptación de las aulas de pensamiento

El primero de los problemas que nos encontramos al querer trabajar con aulas de pensamiento en un centro público de nuestra comunidad fue la distribución del aula. Liljedhal, educador canadiense, realizó sus investigaciones en institutos de Canadá y Estados Unidos donde, por lo general, cada profesor tiene su propio aula. En consecuencia allí se puede plantar un modelo de aula con una distribución concreta, pues será utilizada para una asignatura en particular.

En España esto no es así y es el profesor quien se mueve de aula en aula, por lo que plantear un diseño que se utilice únicamente para una asignatura puede ser una misión imposible. Incluso si los cambios planteados fuesen viables surge la duda de si merece la pena utilizar el tiempo de una clase que apenas dura 55 minutos para invertirlo en colocar y recolocar el mobiliario.

Por esta razón surge la primera adaptación que tuvimos que tomar de las pautas de Liljedhal: no *des-frontalizaríamos* el aula. Mover todas las mesas, incluida la del profesor, sería una medida que requeriría demasiado tiempo y no sería lo suficientemente eficaz.

Figura 14: Aula del centro *frontalizada*

La segunda, ya mencionada en la sección de Materiales y recursos, fue la adaptación de las SVB, que no podíamos pegar a la pared puesto que eran material prestado de la universidad, y tuvimos que utilizar horizontalmente. Aún así el cambio que supuso el

pasar de trabajar en el cuaderno a trabajar en las pizarras fue positivo y notable.
Las tareas sí se implementaron según diseñó Liljedhal, con sus niveles, pistas y objetivos, además de que se trabajaron primero las no curriculares, tal y como él recomienda en su publicación *Liljedahl, P. (2020). Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning. Corwin press.* Se trató de implementar también la pauta 5: Respuesta a las preguntas formuladas, aunque con menos éxito, pues esta pauta requiere del profesor un cambio de costumbres que puede llevar tiempo.

Otra de las adaptaciones que tuvimos que hacer para poder aprovechar al máximo el tiempo fue la formación de los grupos de manera aleatoria: puesto que sólo disponía de un par de semanas para llevar a cabo la propuesta y trabajar con los estudiantes mi principal prioridad en cuanto a las pautas fue poder aprovechar todo el tiempo disponible. Liljedhal deja muy claro en sus publicaciones que es fundamental que los estudiantes perciban que los grupos son verdaderamente aleatorios, por lo que haberlos hecho aleatoriamente antes de la clase no habría servido de nada, y utilizar los primeros 10 minutos de cada clase para formar los grupos me parecía un precio demasiado alto a pagar. Por lo tanto los grupos los formaba yo: o bien los traía preparados o bien los formaba en clase según el número de estudiantes.

Similar a lo relativo a la pauta 5, la pauta 8: Fomento de la autonomía, suponía un cambio de costumbres para el profesor, quien debía adquirir un papel diferente al que normalmente tenía en el aula. Esta pauta, al igual que la anterior, se trató de implementar con mayor o menor éxito, no atendido inmediatamente a los estudiantes y permitiéndoles preguntar a sus compañeros, haciendo uso del movimiento del conocimiento.
Respecto al resto de pautas, debido a lo breve de la implementación, ni se pudo ni se trató de implementarlas: la consolidación de las lecciones, los deberes, la toma de apuntes y la evaluación son pautas que se aplicarían a lo largo de un curso escolar, un período mucho más largo del que nosotros disponíamos.

Desarrollo de las actividades

A lo largo de esta sección describiremos, en forma de diario, cómo se desarrollaron las actividades en cada sesión, incluyendo descripciones de los grupos y su forma de trabajo, así como una breve evaluación de la implementación de cada una de las actividades.
La implementación tuvo lugar a lo largo de dos semanas: desde el viernes 28 de marzo hasta el jueves 10 de abril. Sin embargo en el grupo de 3º de la ESO con el que iba a implementar las actividades 7 alumnos se iban de viaje a Irlanda durante la semana del lunes 31 al viernes 4 de abril, por lo que durante esa semana estuvieron sólo parte de los estudiantes.

- **Viernes 28 de marzo**: Los viernes el grupo tenía clase a 5ª hora y los alumnos se encontraban cansados y deseando terminar con las clases.
  Según entré en clase comencé a mover las mesas para juntarlas en grupos de dos y así poder utilizar las SVB: pedí a algunos alumnos que estaban por allí durante el cambio de clase que me ayudaran, y aunque estaban un poco sorprendidos, me ayudaron a colocar las mesas.
  Después de pitar el timbre que daba comienzo a la clase y cuando todos los alumnos estaban dentro comencé a explicarles la dinámica que seguiríamos ese día: les dividiría en grupos de tres y les plantearía una actividad que tenían que resolver en grupos utilizando las pizarras que tenían.
  Los grupos los traía formados desde casa, por lo que les fui distribuyendo y asignando las pizarras; este día faltaba sólo un alumno, por lo que hice 5 grupos de 3 y dos grupos de 2. Como era de esperar se quejaron de los grupos y al principio algunos se negaban a colaborar, sin embargo conseguí que mantuvieran silencio el tiempo suficiente para leer el enunciado.
  Al leer el enunciado en la pizarra hice una aproximación de la Figura 10 en la pizarra, y una vez leído el enunciado de la actividad comenzaron las preguntas:
  -*¿Una rana no puede saltar a un nenúfar ocupado?*
  -*¿Puedes repetir el enunciado?*

  Hubo 4 de los 19 estudiantes que no trabajaron al principio, se levantaban y no colaboraban. Sin embargo de los 7 grupos 5 se pusieron a trabajar casi inmediatamente.

En cada grupo había un sólo rotulador, y aunque les insistí en que todos debían usar el rotulador en muchos grupos, 3 de 7, tan sólo lo utilizaban uno o dos estudiantes. En la mayoría de grupos los estudiantes que escribían eran también los que más pensaban y más ideas aportaban en cada momento. Aun así hubo un grupo en el que el trabajo fue realmente colaborativo: los 3 escribían y aportaban ideas por igual.

El primer problema que les surgió fue la representación del problema, la búsqueda de una ayuda visual que pudiera serles de utilidad. Utilicé entonces la primera pista con todos los grupos: *Cómo podemos representar los nenúfares, las ranas y sus cambios de posición?*. Un grupo decidió enumerar los nenúfares y nombrar las ranas:

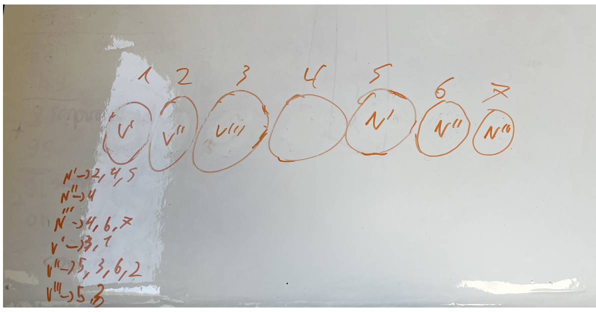
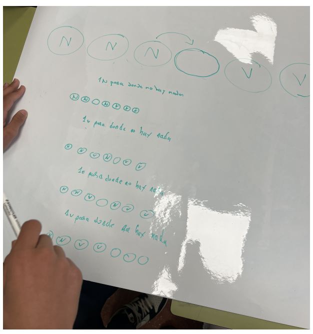
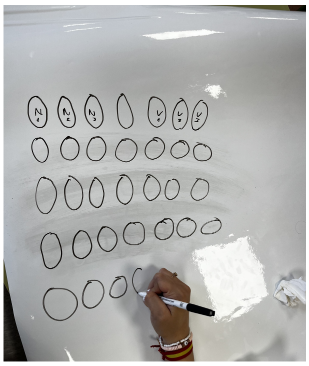


Figura 15: Saltos de rana. Ejemplo de representación 1

Otros por otro lado utilizaron el esquema inicial y lo fueron repitiendo con los cambios que iban incorporando:

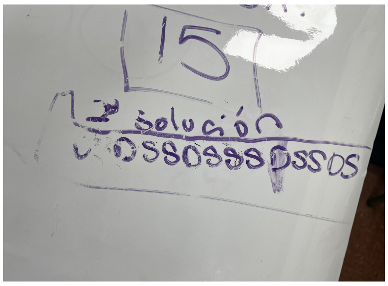


(a) Saltos de rana.
Ejemplo de representación 2

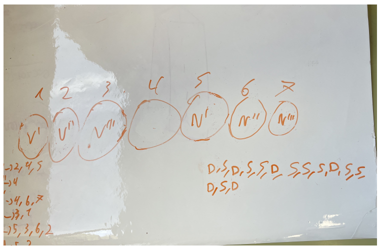


(b) Saltos de rana.
Ejemplo de representación 3

De los 7 grupos que había ese día en clase tan sólo 3 superaron el primer nivel, pero una vez pasados los primeros 20 minutos casi todos los estudiantes de la clase, exceptuando 3 de ellos, estaban pensando e intentando resolver el primer nivel.
La pista número dos no fue necesaria para ningún grupo, pues enseguida se dieron cuenta de que debían dejar registrados los movimientos. Así, en caso de confundirse, podían encontrar el movimiento erróneo y empezar desde ahí sin tener que empezar desde el principio.
A los grupos que superaron el primer nivel les planteé el siguiente nivel: *¿Y si hubiera 4 ranas de cada color?*. De forma casi inmediata todos dedujeron que para 4 ranas tenía que haber algún truco:
- *¿Cuál es la regla?*
Entonces les di la segunda pista: *Diferenciad entre "Salto" y "Deslizamiento"*. Una vez seguían esta pista todos los grupos que pasaron el primer nivel descubrieron el patrón:



(a) Saltos de rana.
Solución 1



(b) Saltos de rana.
Solución 2

Llegados a este punto el tiempo apremiaba, apenas quedaban unos minutos de clase y muchos de ellos se desentendieron del problema, sobretodo aquellos que se habían atascado con el primer nivel. Tan sólo un grupo se mantuvo pensando hasta el final, logrando terminar todos los niveles: con el patrón a la vista probaron a sacar la fórmula para $n = 4$ y, con los métodos de representación anteriores, comprobaron que funcionaba.
La movilización del conocimiento tuvo lugar durante toda la actividad: los grupos que superaron el primer nivel les recomendaban a los compañeros que apuntaran los saltos y desplazamientos, y algunos de ellos abandonaron su grupo para ir a ayudar a otros grupos y comunicarles el número de movimientos necesarios. Esto tuvo un

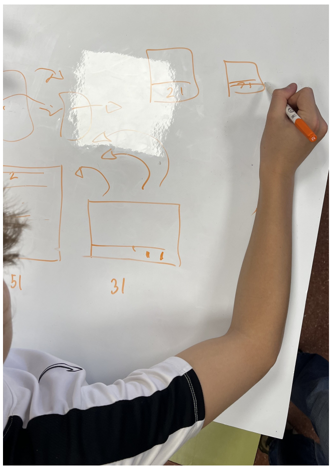
factor positivo, y es que los grupos que se habían quedado atascados estuvieron pensando durante más tiempo gracias a que los compañeros les motivaban, ya que veían que sí era posible y que existía una solución. Sin embargo también tuvo un factor negativo, y es que al moverse entre los grupos se entretenían de camino y se ponían a hablar con los compañeros de temas ajenos a la actividad.

Algo que sucedió este primer día fue que uno de los grupos creía haber llegado a la solución correcta a la primera cuestión y preguntó a otro de los grupos que sí había superado el primer nivel si les daba el mismo resultado: los resultados coincidían, así que pasaron al siguiente nivel. Sin embargo al buscar un patrón en su sucesión de saltos y desplazamientos no lo encontraban: cuando fui a revisar lo que tenían escrito observé que uno de los movimientos era erróneo (iba en contra de las reglas) por lo que su conclusión, aunque correcta (15 saltos), no había sido obtenida adecuadamente.

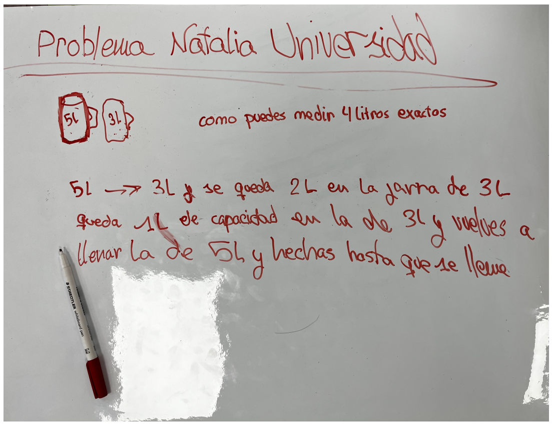
Evaluación de la implementación: Este primer día se consiguió un alto nivel de concentración y de interés por parte de los alumnos. Sin embargo fueron 4 de 7 los grupos que no lograron superar el primer nivel, lo cual pasada la media hora los había desmotivado mucho. Por eso considero que debería haber diseñado alguna pista más para este primer nivel. Un ejemplo podría ser:
- Si dejas una rana de un color en el extremo, con dos ranas del otro color a su lado la pobre no podrá salir. Evita esta situación.
Por otro lado la sensación al terminar esta primera actividad, tanto para mi tutor de prácticas como para mí, fue positiva: el ambiente en la clase había sido positivo y los estudiantes habían estado pensando. Parecía que la actividad les había gustado y enganchado, y al acabar me preguntaron si la semana siguiente seguiríamos con ello.

- **Lunes 31 de marzo:** La sesión comenzaba a última hora, pero los alumnos se mostraban mucho más tranquilos que en la primera sesión. Asistieron los 13 alumnos que no se habían marchado de excursión y la actividad comenzó mucho antes que en la clase anterior porque los estudiantes ya sabían qué esperar. Colocamos el mobiliario y las SVB, se repartieron los rotuladores y formé los grupos: 3 grupos de 3 y 2 grupos de 2.

Una vez leí el enunciado enseguida se pusieron a trabajar; todos excepto 4 alumnos que no quisieron participar, aunque hacia la mitad de la hora dos de ellos se unieron a un par de grupos y participaron un poco. Al ser menos estudiantes este día el funcionamiento del grupo en general fue muy bueno y estuvieron muy concentrados: antes de la media hora 4 de los 5 grupos habían superado la prueba de los jarrones de agua. La distribución que hice de los grupos se modificó levemente a lo largo del transcurso de la clase, pero como estos cambios eran positivos, pues facilitaron que algunos de los estudiantes que al principio no habían querido participar terminaran por animarse, les dejé hacer. Todos los grupos excepto uno de ellos optaron por el uso de representaciones gráficas de los jarrones como apoyo para resolver el problema:



(a) Jarrones de agua.
Ejemplo de representación 1



(b) Jarrones de agua.
Ejemplo de representación 2

Dentro de los grupos el establecimiento de roles fue menos claro que en la sesión anterior: excepto en uno de los grupos, en el resto todos los miembros participaron y aportaron ideas por igual, tomando de vez en cuando el rotulador para escribir. Aunque el reagrupamiento de los grupos favoreció que participaran la mayoría, hubo un grupo que terminó con un sólo integrante quien, aunque trabajó con ganas y concentrado, lo hizo de forma individual.

Respecto a la distribución de pistas; tan sólo uno de los grupos necesitó todas las

pistas para superar la actividad de Los jarrones de agua, el resto pudieron superarla utilizando sólo la primera de las pistas. La segunda actividad sin embargo requería una mayor exigencia cognitiva y sólo un grupo pudo resolverla.
El movimiento del conocimiento sin embargo fue más escaso que en la primera sesión, quizás debido a las características del problema; de hecho los estudiantes compitieron entre ellos para ver quien superaba primero los distintos niveles y me hacían apuntar los tiempos.

Evaluación de la implementación: Aunque, como he comentado, dos de los alumnos que al principio no querían participar terminaron por unirse, hubo dos que se mantuvieron al margen durante toda la sesión, sin interactuar prácticamente con sus compañeros. Desde un punto de vista positivo podemos considerar que no participaron pero tampoco impidieron que sus compañeros trabajaran. Sin embargo debo destacar que intenté incorporarlos en varias ocasiones, diciéndoles que en algún grupo los necesitaban para solucionar el problema y que les gustaría participar, pero no lo conseguí.
Esto me hizo percibir la actividad como un fracaso parcial porque no había conseguido hacer funcionar los grupos, pero al acabar me acerqué a preguntar a dos de los alumnos que mejor habían trabajado que qué les había parecido la actividad:
- *Es de pensar, está chula*
- *Es interesante, bastante entretenida.*

La distribución de las pistas en esta actividad funcionó adecuadamente y cumplió con su objetivo: mantener a los estudiantes pensando el mayor tiempo posible. En este aspecto considero esta actividad un éxito, pues todos los alumnos que quisieron participar se mantuvieron concentrados hasta el final.
Finalmente el movimiento del conocimiento fue escaso, aunque creo que la principal causa de esto fueron las características de la actividad y que tan sólo un grupo tuvo problemas para avanzar.

- **Martes 1 de abril:** Este día la clase era a primera hora y los estudiantes estaban mucho más tranquilos. Comenzamos inmediatamente después de preparar los materiales; eran 11 alumnos, por lo que hice los grupos en el momento en función de quienes habían ido, 3 grupos de 3 y un grupo de 2, leí el enunciado, tomaron apuntes y enseguida se pusieron a trabajar, aunque haciendo muchas preguntas: *¿Pero no se encuentran todas a las 17.05? No entiendo la pregunta.* Tuve que aclararles que, aunque todas estuvieran a las 17.05 en la puerta del edificio, podían haberse encontrado antes.

Todos los grupos superaron el primer nivel sin grandes dificultades, algunos necesitando la primera pista, utilizando operaciones sencillas y razonando a partir de los datos del problema.

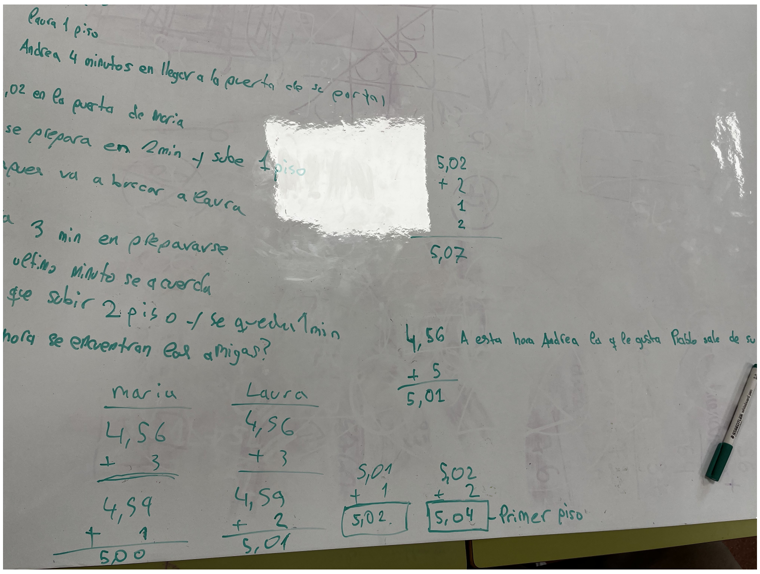


Figura 19: El edificio sin ascensor.
Resolución del nivel 1

A medida que llegaban al resultado les planteaba el siguiente nivel: *¿Cuántas veces, y quiénes, se han encontrado por las escaleras?*. Ninguno de los grupos pudo resolverlo sin la segunda pista, en la cual les ayudé a dibujar los ejes de la gráfica y el recorrido que realizaba Andrea a modo de ejemplo.

Los 4 grupos terminaron por dibujar la gráfica y superar el nivel 2, pero sólo 2 de ellos llegaron a escribir las ecuaciones de movimiento de María, Laura y Andrea para calcular los momentos exactos en los que se encontraban.

Un fenómeno que observé es que los alumnos, todos en general, se mostraban reticentes a utilizar las matemáticas: preferían intentar sacar toda la información a partir de la gráfica y varias veces tuve que decirles que las gráficas dibujadas en la pizarra eran tan sólo una aproximación y no nos darían la información que necesitábamos. Cuando ha llegado el momento de recordar la ecuación de la recta con algunos grupos muchos me decían: *¿Otra pegunta? Estoy cansado de pensar, ya no queda tiempo* etc...

Los dos grupos que lograron terminar la actividad terminaron superando el rechazo inicial, pero los otros dos grupos tuvieron más problemas con el manejo del lenguaje algebraico y no lograron dar el último paso.

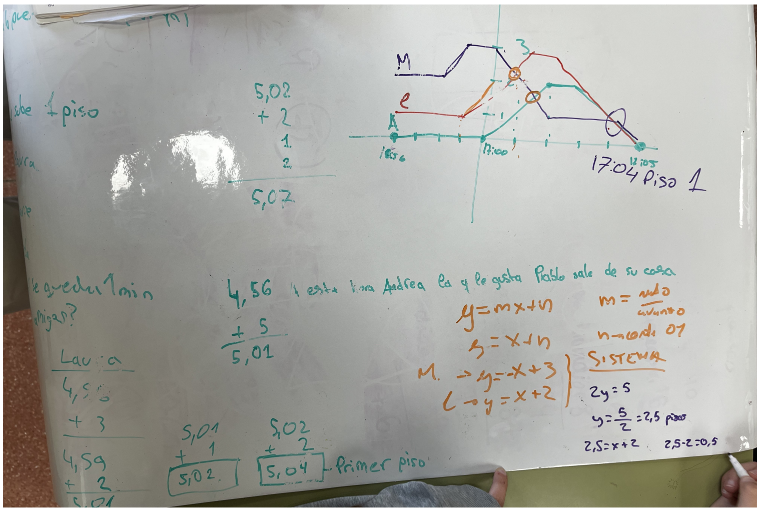


Figura 20: El edificio sin ascensor.

Resolución del nivel 3

Este día me sorprendió muy positivamente la actitud de uno de los estudiantes: en las actividades anteriores se mostraba desinteresado y rechazaba las actividades, negándose a participar y a colaborar con su grupo. Además este era uno de los estudiantes más disruptivos de la clase, o al menos lo había sido en las sesiones de clase magistral que yo había presenciado con este grupo. Sin embargo este día se mostró participativo y dispuesto, colaboró con su grupo y no sólo aportó ideas, sino que incluso escribió varias veces en la pizarra.

Durante esta actividad, al haber menos grupos, el comportamiento y la participación en general de todos los alumnos fue muy positiva: los grupos trabajaron muy organizadamente y con interés, todos los miembros participaron y aportaron ideas. Se mostraron dispuestos desde el principio de la clase a responder a las preguntas y, al estar planteadas en forma de “acertijo”, les motivaba encontrar las respuestas.

Evaluación de la implementación: Para esta actividad las pistas fueron bien diseñadas y se distribuyeron adecuadamente a los grupos; fueron una importante ayuda para los estudiantes que se quedaban atascados y fomentaron que siguieran pensando.
Aunque individualmente los grupos trabajaron en las actividades de manera colaborativa, el movimiento del conocimiento entre grupos fue bastante escaso; quizá para mejorar este aspecto hubiera sido necesario animar a los estudiantes a preguntar a sus compañeros por alguna de las pistas, especialmente en lo que a dibujar la gráfica se refería. En este aspecto añadir que los estudiantes aún percibían los grupos como “equipos”, lo cual les inclinaba a percibir la actividad como una competición para ver quién terminaba primero.

Como ya he comentado, dentro de los grupos se trabajó de forma colaborativa y con interés en la actividad, mucho mejor que en las sesiones anteriores, lo cual me inclinó a pensar que la nueva dinámica ya estaba bien establecida y los estudiantes disfrutaban más de las clases.

- **Lunes 7 de abril:** Debido a cuestiones de organización y horarios de los estudiantes, la siguiente actividad presentada en este trabajo se llevó a cabo 6 días después.
  Aunque no trabajamos ninguna de las actividades planteadas, la siguiente clase (jueves 3 de abril) se trabajó con metodología de aulas de pensamiento, a pesar de que sólo asistieron 6 alumnos, y trabajaron de manera excepcional en una actividad que se basaba en sacar la ecuación de una recta a partir de dos puntos dados.

  Este lunes la clase fue a 6ª hora y fue el día en el que se reincorporaron los estudiantes que habían marchado de viaje la semana anterior. Una vez que colocamos el material los dividimos en 7 grupos y comenzamos con la lectura del enunciado, sin embargo estaban muy habladores y alborotados, y tuvimos que repetir el enunciado hasta 3 veces. Aún así hubo varios grupos que aún preguntaban en qué consistía la actividad pasados 5 minutos; tardaron mucho en ponerse a trabajar.

Este día se juntaron varios factores: era 6ª hora, por lo que estaban muy cansados, hacía una semana que no se juntaban todos los alumnos en clase y era el primer día después del viaje de los alumnos que habían marchado de excursión.
Todos los grupos superaron el primer nivel más o menos a la vez y pasaron al siguiente de forma coordinada, pero el segundo nivel se les complicó mas; tan sólo 2 de los 7 grupos formados lograron superar la actividad. El tardío comienzo de la actividad resultó en que para cuando superaron el primer nivel, el más sencillo, ya había pasado la mitad de a clase, por lo que tenían menos ganas de enfrentarse al siguiente nivel: sólo 3 de los 7 grupos intentaron de verdad el segundo nivel.

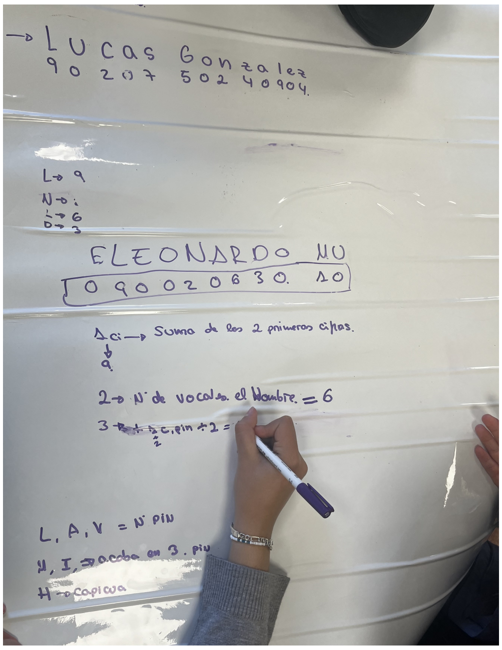


Figura 21: El banco TMD.
Nivel 2

Puesto que las pistas eran principalmente para el segundo nivel sólo estos 2 grupos hicieron uso de ellas: únicamente necesitaron la primera y la segunda pista. Ninguno de los grupos llegó al tercer nivel.
Este día pareció haber una regresión general de los estudiantes al período previo a la implementación de la propuesta: hubo escasa colaboración entre los grupos, algunos estudiantes se negaron a participar en la actividad (incluso algunos de los alumnos que habían trabajado y colaborado la semana anterior) y sólo se involucraron de verdad algunos alumnos. La división de roles fue muy clara en aquellos grupos que se

involucraron menos con la actividad: como mucho había un miembro que participaba realmente en la actividad mientras que los otros dos fingían participar y aprovechaban cualquier momento para hablar con los compañeros.
Me sorprendió ver que estudiantes que habían participado y colaborado la semana anterior, y además mucho y muy bien, se mostraron poco interesados esta vez.

Evaluación de la implementación: Respecto a la forma en la que se implementó la actividad se pudo haber mejorado la distribución de las pistas en el segundo nivel; estas se dieron juntas, prácticamente a la vez. Considero que esto se debió principalmente a que el ambiente en el aula era muy complicado y tuvimos que dedicarnos gran parte de la sesión a tratar de mantener a los estudiantes en sus grupos e intentando que se pusieran a trabajar en la actividad. Esto dificultaba enormemente mantener la concentración en el desarrollo de la actividad y la toma de apuntes de lo que estaba sucediendo en el aula.

Este día tanto mi profesor de prácticas como yo salimos decepcionados de la clase: no logramos el objetivo de que los estudiantes se mantuvieran pensando el mayor tiempo posible.
Debido especialmente al comportamiento que exhibieron los alumnos que tan bien habían trabajado la semana anterior, que me di cuenta de que las dinámicas que estaban establecidas en el grupo eran demasiado fuertes.

- **Martes 8 de abril:** Esta sesión, que tuvo lugar a primera hora, fue la última vez que trabajamos utilizando las aulas de pensamiento con este grupo. Debido al "fracaso" de la sesión anterior decidí plantearles lo siguiente al inicio de la clase: si les dejaba hacer a ellos los grupos trabajarían como se esperaba de ellos.
  Esto funcionó pero sólo a medias: al principio trabajaron en sus actividades y colaboraron adecuadamente, estaban contentos de estar por fin con sus amigos en un mismo grupo. Sin embargo la actividad formaba parte de las actividades curriculares, y era la más directamente curricular que habíamos visto hasta el momento: a los 10 minutos aproximadamente empezaron a juntar grupos.
  Esto podría haber sido algo bueno si los grupos se hubiesen unido para seguir tra-

bajando, pero no fue así en general. De los 7 grupos que se formaron aquel día funcionaron bien 3, pero trabajaron muy poco. La mayoría de grupos fingieron trabajar cuando me acercaba a la mesa a comprobar cómo iban, y cuando les decía que apenas habían avanzado me contestaban que *no sabían hacerlo*.
Puesto que los grupos los habían formado ellos no se dio una toma de roles en ningún grupo excepto en uno formado por dos estudiantes: uno de ellos trabajó el sólo con la pizarra, mientras que su compañero se negó a participar.

En aquellos grupos con los que traté de trabajar observé que había muchos problemas aún con el manejo de las incógnitas: no estaba claro cómo se debe despejar en una ecuación, y en muchas ocasiones no se entendía el razonamiento que acompaña a encontrar el valor de una incógnita.
Cuando formulé la pregunta *¿Cuántos puntos son necesarios para definir una recta?* los estudiantes dudaron: sin pensarlo mucho al principio contestaron al azar: *¡3! ¡infinitos!*. Finalmente, uno de los estudiantes que había trabajado con sus compañeros adecuadamente la semana anterior contestó:
-*¡Son 2!*
- *¿Por qué?* pregunté yo.
- *mmmm...* dijo el alumno pensativo, *porque cuando vas de un punto a otro haces una recta.*
A continuación expliqué brevemente, a partir de la respuesta del compañero, que efectivamente la manera más corta para ir de un sitio a otro es en línea recta, y que sólo son necesarios dos puntos para definir una recta.

Para resolver la primera pregunta debían recordar el concepto de “pendiente”, trabajado en clase, y 5 grupos consiguieron superar el primer nivel, aunque tuvimos que explicar nuevamente y grupo a grupo qué era la pendiente y cómo se obtenía. La primera y la segunda pista se entrearon a todos los grupos y fueron de mucha utilidad para que los estudiantes comenzaran a trabajar.
Para el segundo nivel fue necesario el uso de la tercera pista, pero sólo para aquellos grupos que decidieron seguir trabajando: de los 7 grupos 4 no se involucraron más

allá del primer nivel. En algunos casos esto fue por “falta de tiempo” (realmente sólo habían trabajado cuando yo o mi tutor nos acercábamos, por lo que invirtieron prácticamente toda la sesión en resolver el primer nivel), pero en otros casos fue porque una vez resuelto el primer nivel consideraron suficiente su esfuerzo por el día.
Ningún grupo pasó del tercer nivel.

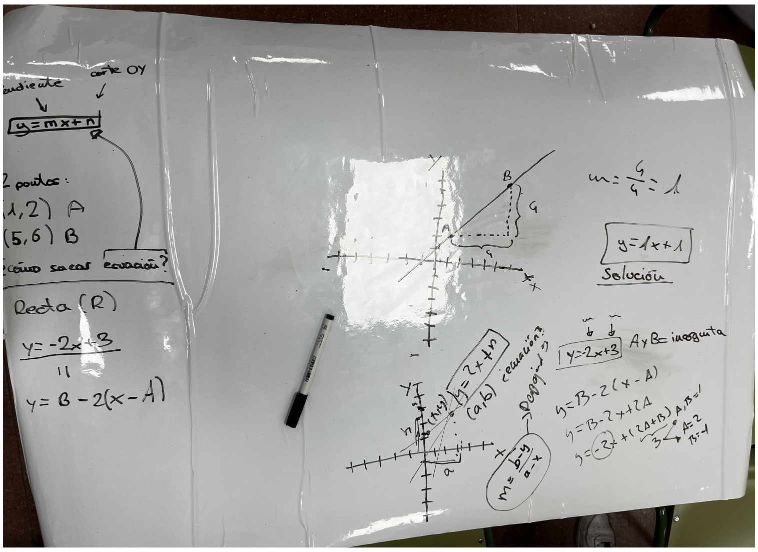


Figura 22: La ecuación Punto-Pendiente.

Niveles 1 y 2

Evaluación de la implementación: Con esta implementación quedaron claras dos cosas: que aún no estaban preparados para llevar a cabo este tipo de actividades (curriculares, directamente matemáticas y menos atractivas) y que la actividad requería un nivel de comprensión de conceptos y manejo de las matemáticas, en especial del lenguaje algebraico, que los alumnos no habían adquirido aún.
Reconozco que, a parte de reconocer que la actividad estaba aún por encima de lo que los estudiantes eran capaces de llevar a cabo, me cuesta ver aspectos de la implementación que se pudieran haber mejorado. La actividad estaba bien planteada y las pistas se distribuyeron lo mejor que se pudo dadas las condiciones de la clase: tratamos de mantener a los estudiantes motivados, intentando encontrar el equilibrio entre ayudarles de más y ayudarles de menos.

Aún así, plantear una actividad que se encontraba por un encima de sus capacidades en aquel momento fue un error. Quizás mi interés por ver cómo reaccionarían

los estudiantes ante una actividad de este tipo pudo haberme llevado a no considerar lo suficiente si los estudiantes estaban preparados para ella.
En retrospectiva, observando cómo se desarrolló la sesión anterior, veo claro que aún no era el momento de implementar esta actividad y, teniendo en cuenta que tenía una actividad altamente atractiva aunque no curricular preparada, debería haber cambiado mi planificación.

2.5. Evaluación de la propuesta

A continuación se presenta una evaluación general de la propuesta. En el apartado anterior hemos evaluado individualmente la implementación de cada una de las actividades que la conforman, pero no hemos considerado la opinión de los estudiantes ni una visión global de la misma.
Sin embargo, para poder evaluar realmente este proyecto, es fundamental conocer la opinión de aquellos que participaron en él y que fueron los principales protagonistas del mismo: los estudiantes.

Evaluación de los estudiantes

A continuación se presentan algunas de las respuestas que los estudiantes del grupo con el que se desarrolló la implementación dieron a las preguntas del cuestionario, incluido en los anexos.
Este cuestionario se les entregó el penúltimo día de clase, el jueves 10 de abril a 3ª hora, justo antes del recreo, en los últimos 10 minutos de la clase. Aquel día mi tutor trató de llevar a cabo una actividad, pero los alumnos se mostraron muy poco dispuestos a participar: hacía un día muy bueno y su mayor interés era salir al patio.
Antes de hacerles entrega de los cuestionarios les dejé muy claro que podían no responder si no querían y que únicamente yo iba a leer su respuesta. A demás eran cuestionarios anónimos, por lo que no debían poner su nombre.
Aviso: *Todas las respuestas se han convertido a género masculino.*

- **Pregunta 1:** ¿Qué te ha parecido trabajar con las pizarras? ¿Consideras que has aprendido más, igual o menos que en una clase normal? Aprovecha este espacio para expresar tu opinión sobre esta forma de trabajar:

- Sí he aprendido más, porque al hacer las cosas en la pizarra es más divertido y se te quedan en la cabeza

- Me ha parecido muy divertido y original. Sí porque al pasármelo bien me concentraba más

- Me ha parecido bien porque es una manera de aprender divertida y piensas bastante, también la gente participa más que en una clase normal.

- Me ha parecido original, hemos hecho más que en una clase normal

- Muy divertido y he aprendido más la verdad, me he concentrado, lo que no suelo hacer en una clase normal

- Al ser como un "juego" es más interesante y divertido

- A mi me ha encantado lo de las pizarras, me ha parecido una forma muy buena y distinta de aprender y enseñar. Esto hace que no sean tan aburridas las mates

- Buena idea, pero me parecía que los problemas no tenían que ver con lo que estábamos dando

- **Pregunta 2:** Cuando formábamos los grupos ¿Qué rol consideras que tenías en tu grupo?

  - Pues depende del grupo, prefería estar más con mis amigas.

  - El que hacía todo.

  - Depende. En un grupo no aporté casi nada porque no sabía hacerlo pero en

los demás ayudé bastante.

- *El de escribir*

- *Ayudar al grupo y dar mi opinión*

- *Aportar ideas*

- *Decía lo que había que poner*

- *Depende del acertijo. si no lo entendía intentaba dar ideas, aunque fueran incorrectas*

- *Ayudante igual que todos, ya que somos un grupo*

- *Yo creo que he trabajado bien con todos los grupos en los que he estado y hacía un poco de todo*

- **Pregunta 3:** A la hora de responder las preguntas ¿Cómo te sentías? Interesado/a, aburrido/a, intrigado/a, molesto/a... ¿Por qué?

- *Me sentía listo, me sentía inteligente*

- *Bastante interesado*

- *Interesado, porque eran entretenidos entonces nos enganchaba más*

- *Interesado e intrigado porque me gustaba responder*

- *Me sentía interesado porque quería saber si los tenía bien o no*

- *Interesado porque era como un tema de pensar*

- Interesado y desesperado

- Intrigado, me ayudaban a pensar mucho más

- Decepcionado ya que son muy difíciles y no sabía responder

- Me sentía bien, tenía curiosidad

- Interesado porque lo entendía

- **Pregunta 4:** ¿Qué te han parecido los problemas propuestos en las clases? Interesantes, largos, difíciles ··· ¿Crees que has usado las matemáticas para resolverlos?

- Se han usado las mates de una mejor manera, menos teórica.

- Uno de ellos era largo y para mí eran un poco difíciles

- Algunas eran difíciles pero las acababa resolviendo

- Me encantaron. No las utilicé mucho

- Muy interesantes, usamos las mates de forma más divertida

- Interesantes la verdad, no eran nada aburridos. En algunos he usado las mates y en otros no

De las respuestas que ofrecieron los estudiantes podemos deducir que, en general, la propuesta les gustó: la consideraron innovadora, original, entretenida y más divertida. Son varios los que hacen referencia a cómo el encontrar más entretenida la clase, el estar más "enganchados" a las actividades, hacía que recordasen con más facilidad las ideas.
Un par de estudiantes también resaltaban cómo gracias al uso de las pizarras y las activi-

dades pensaban más y se concentraban mejor, algo que según ellos mismos no suele pasar en una clase tradicional.
A esta primera pregunta la única respuesta que podría tener una interpretación negativa es la última que he incluido: quizá este estudiante es de los que marcharon de excursión y tan sólo estuvieron en las actividades no curriculares.

Respecto a los roles dentro del grupo las respuestas fueron muy variadas: algunos reconocieron haber adoptado algún rol, como el de "escribir" o el de quien "lo hacía todo", pero la mayoría afirmaban haber colaborado con el grupo dentro de lo que podían.
Otros reconocían no haber ayudado porque no conocían la respuesta: esto denota que la filosofía de las aulas de pensamiento (todo el mundo aporta algo) aún no se había comprendido del todo.

La pregunta 3 me parecía especialmente interesante: tenía verdadera curiosidad por saber cómo se habían sentido durante las actividades. Me alegró ver que la gran mayoría se habían sentido interesados: las actividades habían logrado su objetivo, eran interesantes y lograban enganchar a los alumnos.
Muchos comentan cómo querían responder las preguntas para poder comprobar si estaban bien o mal, y otros se alegraban porque al final conseguían entenderlas, lo cual les hacía sentirse bien consigo mismos.
Sin embargo algunas de las respuestas ponen de manifiesto que las actividades eran demasiado difíciles y a veces se sentían frustrados por no poder responder y sentir que no lograban aportar nada a su grupo.

La última de las respuestas del cuestionario que estaba directamente relacionada con la implementación de la propuesta era la pregunta número 4: la mayoría de estudiantes encontró las actividades entretenidas e interesantes, aunque muchos de ellos no consideraban haber utilizado las matemáticas. Otros sin embargo sí notaron que habían utilizado las matemáticas pero de una manera diferente a la que estaban acostumbrados, afirmando que de esta manera les resultaba menos aburrida, más práctica y menos teórica.
Aunque la gran mayoría consideraba las actividades adecuadas unos pocos reconocieron

que les habían parecido demasiado difíciles y largas.

La respuesta por parte de los alumnos a realizar esta propuesta fue positiva, les resultaba algo nuevo y diferente por lo que se mostraron más dispuestos, en general, que en una clase tradicional.
Sus respuestas al cuestionario nos dejan saber que su evaluación de la propuesta fue buena, con una gran mayoría de valoraciones positivas: pareció gustarles trabajar en grupo, incluso si estos era hechos por el profesor, poder trabajar con las pizarras, pues todos podían participar, y las actividades, que encontraron atractivas e interesantes.
A pesar de ello debemos centrar la mirada en aquellas respuestas más negativas, que dejan de manifiesto los posibles errores en la implementación y desventajas de la metodología de Aulas de pensamiento: unas actividades quizá demasiado complejas para las que aún no estaban preparados, la ausencia de posibles pistas para ayudar a aquellos que van más rezagados (como ya hemos comentado en la pequeña evaluación de las actividades) y actividades demasiado largas que podían desmotivarles.
Debemos además tener en cuenta que muchos de los estudiantes tenían creencias muy negativas no sólo en lo que respecta a las matemáticas, sino dentro de su propio grupo de clase: eran conscientes de su mal comportamiento y habían aceptado las ideas que tenían los profesores de ellos mismos. Esto influía en su manera de observar las clases, incluso las que se llevaron a cabo con las aulas de pensamiento, y cambiar eso sería más difícil y requeriría más tiempo del que disponíamos.

Autoevaluación de la propuesta

Una vez presentadas las opiniones de los alumnos respecto de la propuesta y su implementación considero importante realizar una autoevaluación: ¿Qué aspectos considero mejorables de la implementación? ¿Qué aspectos considero que han sido positivos? Dadas las circunstancias ¿Qué se podría haber mejorado y qué no?
Finalmente a nivel personal ¿Cómo evaluaría mi trabajo durante las actividades? ¿Hubo algo de lo que observé que me sorprendiera especialmente

Dentro de los aspectos de la propuesta que de mí dependían me gustaría comenzar evaluando las actividades: como ya comenté al principio de la descripción, de las 5 actividades que se pudieron implementar diseñé 3.

1. **El edificio sin ascensor:** Esta primera actividad considero que mantiene un buen equilibrio entre curricular y atractiva: Es evidentemente curricular, pues involucra representar gráficamente, situar en un plano y modelizar movimiento a través de funciones. Sin embargo la conexión con una posible situación real y la manera en la que está planteado el enunciado contribuyen a darle un aspecto más "informal" que favorece que los alumnos la aborden desde un punto de vista más casual y menos académico.

   Esto a su vez permite que los estudiantes se olviden de que están haciendo matemáticas y dejen a un lado los prejuicios (sus creencias) que acompañan a esta asignatura. Los niveles y las pistas están bien planteados y contribuyen a que los estudiantes se mantengan pensando el mayor tiempo posible.

2. **El banco TMD:** Así como la primera actividad mantenía un buen equilibrio esta segunda actividad está más inclinada hacia las no curriculares, a pesar de que inicialmente quería incluirla en el ámbito curricular. Originalmente esta actividad iba a ser una actividad de descodificación, pero a medida que avanzaba con el diseño me iba dando cuenta de los problemas que iban surgiendo: el primero y más importante de ellos era la falta de tiempo.

   Hubiera querido que esta actividad fuese más completa, que requiriese cierto razonamiento matemático y la utilización de operaciones para encontrar el patrón que seguía el código. Sin embargo había empezado ya con la implementación, y tuve que adaptar la actividad al tiempo; no sólo a los 55 minutos de clase, sino teniendo en cuenta la velocidad de los estudiantes.

   Considero que, siendo no curricular, debería haber sido más atractiva: aunque intenté buscar una situación que pudiera resultarles familiar creo que no conseguí del todo el objetivo, los estudiantes no se mostraron tan interesados como yo había esperado. Aunque tampoco sería justo no considerar las circunstancias en las que se llevó a cabo la actividad debo reconocer que, incluso si las circunstancias hubieran sido favorables, la actitud de los estudiantes hacia la actividad probablemente no habría cambiado demasiado.

3. **La recta punto-pendiente:** Como ya adelanté brevemente en la evaluación de la implementación de esta actividad, considero que los estudiantes no estaban preparados aún para este tipo de actividades secuenciales, poco atractivas y muy curriculares. Considero también que, aunque bien planteada, no considera los puntos débiles de los estudiantes: es una actividad más bien genérica y con pocas opciones para la variabilidad de representaciones. Aunque la diseñé originalmente para ayudar a comprender más profundamente ciertos conceptos y objetos matemáticos, durante la implementación me di cuenta de que estos conceptos eran necesarios para resolver los niveles: no había un crecimiento gradual que nos facilitara la construcción del conocimiento. Las pistas requerían de un conocimiento de base que los alumnos aún no tenían, por lo que no surtieron el efecto esperado; en algunos casos no sólo no fueron una ayuda, sino que entorpecieron a algunos estudiantes.

Dentro de la implementación también considero que se podrían haber mejorado algunos aspectos: el primero de ellos es la gestión del aula y de las pistas. Durante las sesiones de implementación en el aula había dos profesores presentes: mi tutor de prácticas y yo, por lo que la coordinación a veces fallaba. Aunque sí que le mostré alguna de las actividades y le expliqué brevemente en qué consistían las aulas de pensamiento, hubría sido necesario habernos coordinado previo a la entrada al aula para cada una de las actividades.
Debí haberle enseñado las pistas de cada una de las actividades y haberle dado más indicaciones de cuándo podíamos ayudar a los estudiantes y de qué manera. Por otro lado creo que al ser dos profesores la experiencia de la aulas de pensamiento cambia, tanto para los profesores al cargo como para los estudiantes.

A lo largo de las dos semanas de implementación hubo días en los que tanto los grupos como todo el conjunto de alumnos funcionaron muy bien, y los profesores pudimos seguir las pistas y repartirlas como estaba establecido. Sin embargo los días en los que el ambiente de clase era más negativo resultaba más complicado seguir las pautas y manejar a los alumnos.
Quizá hubiera hecho falta algo más de disciplina hacia los estudiantes, haber sido más firmes en cuanto a las reglas y no haber tolerado ciertos comportamientos que, incluso

durante la dinámica de las aulas de pensamiento, estropeaban el ambiente de la clase.

Desgraciadamente, el aspecto que considero que más ha determinado la propuesta en general, tanto a nivel de implementación como a nivel de diseño, ha sido sin ninguna duda el tiempo disponible.
El período de prácticas, durante el cual estuve el el centro público en el que se realizó la propuesta, comenzó el 20 de febrero y terminó el 11 de abril: no llega a dos meses. En ese tiempo uno apenas puede hacerse al centro y los estudiantes, y menos aún preparar e implementar una propuesta didáctica que se adapte a los estudiantes.
Cuando decidí realizar la propuesta de aulas de pensamiento con el grupo de 3º de la ESO estaba aún conociéndoles, por lo que hubo actividades que diseñé que no estaban bien adaptadas a lo que los alumnos podían hacer. Además el sentimiento era mutuo: los alumnos estaban aún haciéndose a mí cuando comencé con las actividades.

Por otro lado cuando realizamos las prácticas tenemos un tutor, profesor del centro, que nos guía a lo largo de nuestra prácticas y a quien acompañamos durante todo el período. Esto tiene una gran ventaja y es que nunca estamos solos en nuestro primer contacto con un centro educativo como profesores, pero en mi opinión también es una desventaja: nunca nos enfrentamos por nuestra cuenta al manejo de la clase, a la preparación de las lecciones ni al trato con los estudiantes.
No sólo eso, sino que cuando comenzamos el período de prácticas nos incorporamos a una clase que lleva formada meses, con unas dinámicas de aula establecidas en las cuales el elemento externo y extraño somos nosotros. Por lo tanto debemos, evidentemente, adaptarnos al lugar al que llegamos y tratar de hacerlo lo mejor posible, tratando de alterar lo menos posible el ritmo del curso. Esto dificulta en gran medida las posibles cambios que se podrían observar en un transcurso de tiempo más largo.

Más allá de lo escaso que pueda ser el período de prácticas a nivel formativo, de cara a realizar un “proyecto” como este el tiempo supone enormes limitaciones. La primera de ellas es que al implementar una metodología como la de Aulas de pensamiento se requiere de un proceso de adaptación, tanto de profesores como de alumnos, para poder observar

cambios reales en las creencias de los estudiantes, en su actitud y en la forma en la que interactúan con las matemáticas.
Además, como comenté en el marco teórico, Liljedhal recomienda introducir las pautas poco a poco para que los estudiantes se familiaricen con la metodología: en apenas 2 semanas esto resulta prácticamente imposible.
A la escasez de tiempo se añaden además las circunstancias propias del curso escolar: excursiones, ausencias de alumnos y el cumplimiento de la programación.

En cuanto al trabajo que realicé durante la implementación de las actividades creo que algunos aspectos a mejorar habrían sido el favorecer el movimiento del conocimiento. Quizá habría podido controlar mejor las pistas si en vez de comprobar grupo a grupo las respuestas y los niveles de las actividades hubiera animado a los alumnos a preguntar a otros grupos que ya habían superado el nivel. Esto me habría permitido tener más tiempo para observar a los grupos, ver las dinámicas y roles que se establecían dentro y fuera de ellos y el trabajo que iban realizando.

Una de los aspectos que tuvieron lugar a lo largo de la propuesta y que considero necesario comentar fue la disminución progresiva de las asistencias a clase: El lunes 31 de marzo asistieron 13 estudiantes, el martes fueron 11 y el jueves 3 de abril tan sólo asistieron 6 alumnos. Para justificar este comportamiento contemplo dos posibles causas; por un lado muchos de los alumnos ya habían comentado que, puesto que no se podía avanzar materia al faltar 7 de los 20 estudiantes, no pensaban venir a clase. Que el lunes asistieran todos fue algo que me sorprendió muy positivamente.
También creo que al considerar la propuesta como algo "extraordinario" le asignaron menos importancia: lo percibían como un juego, algo que no requería su asistencia porque no suponía un cambio en la nota.
Por ello creo que no sería justo considerar la disminución en la asistencia como un punto negativo de la propuesta o asociarlo con una falta de motivación por parte de los alumnos: a mi parecer lo excepcional fue que pudiéramos trabajar con varios estudiantes en todas las clases que dimos en este grupo esa semana.

Considero que, a pesar de las limitaciones del tiempo, el trabajo que hicimos en la propuesta tanto los alumnos como yo fue bueno y los efectos de la misma positivos. Por mi parte disfruté mucho viendo a los estudiantes trabajar, colaborando con personas con las que en otro entorno quizás no lo hubieran hecho, disfrutando de las matemáticas sin darse cuenta.
A pesar de la disminución progresiva en la asistencia debo destacar el caso de los 6 alumnos que asistieron el jueves:
De estos 6 estudiantes dos de ellos eran alumnos muy disruptivo, que en las clases que yo había presenciado nunca habían querido participar; además en la primera sesión de aulas de pensamiento se mantuvieron totalmente al margen. Sin embargo el martes y el jueves de esa semana no sólo asistieron a clase, sino que colaboraron con sus compañeros y llevaron a cabo las actividades con buena actitud.
De nuevo esto me hizo cuestionarme hasta qué punto estaban establecidas las dinámicas dentro del aula: el lunes en el que volvieron los compañeros que habían estado de viaje, a pesar de que seguimos trabajando con aulas de pensamiento, la actitud de estos estudiantes cambió completamente.
Otros 2 estudiantes me sorprendieron también muy positivamente: durante las clases tradicionales eran muy habladores, no prestaban atención y no mostraban ningún interés en la asignatura. Sus notas rondaban el insuficiente y se mostraban muy desmotivados con el instituto, con múltiples llamadas de atención a su comportamiento.
Sin embargo durante las sesiones de aulas de pensamiento se mostraron optimistas y motivados por las actividades; no sólo me sorprendió su actitud, sino lo bien que lograron resolver las actividades planteadas, de forma que sus grupos siempre lograban estar entre los que más habían avanzado.

A modo de breve conclusión para esta autoevaluación debo reconocer que la sensación personal que tuve al acabar la implementación fue algo agridulce: sinceramente pienso que se lograron los objetivos principales, se comprobó que las aulas de pensamiento funcionan y se consiguió que los alumnos disfrutaran y aprendieran. Sin embargo creo que se podría haber hecho mucho más, que los alumnos podrían haber hecho mucho más, si sólo hubiéramos tenido más tiempo: más tiempo para que se acostumbraran y más tiempo para poder trabajar.

Creo que, al igual que yo pude ver partes de ellos que no había visto en el desarrollo de las clases tradicionales, ellos vieron partes de sí mismos que no conocían, además de descubrir que existen enfoques de las matemáticas totalmente distintos a los que ellos están acostumbrados.

Personalmente, aunque lejos de lograr cambiar sus creencias, actitudes y emociones relacionadas con las matemáticas, creo que una de las consecuencias más fundamentales que ha podido tener esta implementación en los estudiantes es la de abrirles los ojos a otra forma de enseñanza y otras formas de aprender a las que quizá puedan adaptarse mejor.

3. Reflexión final y conclusiones

Una vez presentada, implementada y evaluada la propuesta queda por último echar la vista atrás y reflexionar sobre el trabajo realizado.

Como reflejan muchos estudios, entre ellos el Informe PISA 2022, el problema de la ansiedad matemática en los estudiantes de matemáticas sigue, si no más que nunca, muy presente en las aulas españolas. Uno de los objetivos principales que me propuse a nivel personal cuando comencé el período de prácticas en este centro fue el de cambiar la percepción que estos alumnos tenían de las matemáticas: no únicamente porque las percibieran como algo aburrido e inútil, sino porque consideraban que eran demasiado complejas y esto hacía sufrir a muchos de ellos.

Este sufrimiento era perceptible incluso cuando ellos mismos trataban de ocultarlo utilizando la indiferencia como herramienta: se percibía cuando se frustraban ante una pregunta, cuando dejaban de escuchar porque habían aceptado que no lo entenderían, cuando hacían los exámenes, nerviosos porque pensaban que no les daría tiempo...

En el momento en el que me planteé este objetivo ya era consciente de lo ambicioso del mismo pero no por ello iba a dejar de intentarlo; era una de las principales motivaciones por las que quise hacer el máster de educación y por las que siempre he querido ser profesora.

No siempre he tenido una buena relación con las matemáticas, y diría que aún a día de hoy tengo momentos en los que siento que las matemáticas no son para mí, que no soy lo suficientemente buena para ellas. Este fenómeno no lo observo sólo en mí misma, sino en muchas personas de mi entorno que, habiendo estudiado la misma carrera y habiendo demostrado más de una vez su validez para las matemáticas, aún tienen momentos de duda.

Soy consciente de que este tipo de dudas se dan en todos los mundos de la educación superior y no sólo en las matemáticas, pero es en matemáticas donde la duda se da a un nivel tan profundo que ataca directamente las bases de la educación del individuo.

Está claro que un sistema de educación que aún permite y perpetra unas dinámicas que producen estudiantes inseguros de sí mismos, incluso en aquellos con buenos resultados académicos y facilidad para las matemáticas, no puede cambiar de un día para otro.

Mi objetivo era por lo tanto del todo inalcanzable: con un límite de tiempo de apenas dos meses y limitaciones en la capacidad de actuar era prácticamente imposible lograr algún cambio a largo plazo en los estudiantes, que habían sido educados durante toda su vida en el sistema educativo que les hacía dudar de sus capacidades o que simplemente no se las mostraba.
Por ello este objetivo tuvo que reducirse a pequeños logros que pudieran cumplirse durante el día a día, clase a clase; conseguir que los alumnos estén pensando la mayor parte del tiempo, diseñar actividades que les resulten atractivas, que puedan completar y a las que puedan aportar algo y, por supuesto, mostrarles un lado distinto de las matemáticas y una forma distinta de aprenderlas. La metodología de las aulas de pensamiento ofrecía el marco perfecto para esto: una metodología innovadora, planteada desde un punto de vista del trabajo colaborativo y que pretendía en cierto grado romper los esquemas que los estudiantes tienen sobre lo que debe ser una clase de matemáticas.

Más aún, la filosofía de las aulas de pensamiento está enfocada desde un punto de vista que, aunque su objetivo fundamental sea maximizar el tiempo que los estudiantes se mantienen pensando durante la clase de matemáticas, permite el desarrollo de habilidades sociales y de gestión emocional que se encuentran dentro del sentido socioafectivo que contempla la ley de educación LOMLOE. Sin embargo el trabajo que se pueda realizar con los estudiantes en un ámbito socioafectivo se ve muy limitado por el tiempo disponible: los principales efectos que el trabajo con las aulas de pensamiento pueda tener sobre las actitudes, emociones y creencias de los estudiantes podrían observarse a largo plazo. Es por eso que considero, como ya he comentado anteriormente, que la limitación de tiempo ha supuesto un verdadero impedimento para poder apreciar cambios reales en los alumnos.

A pesar de ello, a medida que se fue desarrollando la implementación, estos pequeños logros fueron causando ligeros efectos en los estudiantes: algunos de ellos se mostraban mucho más confiados, otros estaban más dispuestos a trabajar y, en general, todos parecían tener más iniciativa.
Reconozco que los resultados de la implementación que recoge este trabajo pueden no pa-

recer demasiado importantes o suficientemente notables pero, para mí, que compartí dos meses de clase con esos chicos, es suficiente con saber que logré sorprenderles, mostrarles algo diferente.

Personalmente considero que es suficiente con saber que logré abrirles una pequeña ventana hacia un enfoque de las matemáticas distinto que, quizá para algunos de ellos, pueda suponer el principio de algo nuevo.

4. Referencias

1. Blanco Nieto, L. J., Caballero Carrasco, A., Piedehierro, A., Guerrero Barona, E., y Gómez del Amo, R. (2010). El dominio afectivo en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. Campo abierto.

2. Carrasco, A. C., Lizarazo, J. C., y del Amo, R. G. (2014). El Dominio Afectivo en la Resolución de Problemas Matemáticos: una jerarquización de sus descriptores. Revista INFAD de Psicología. International Journal of Developmental and Educational Psychology., 7(1), 233-246.

3. De Bellis, V., y Goldin, G. (1999). Aspects of affect: Mathematical intimacy, mathematical integrity. In Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 249–256). Haifa, Israel.

4. Di Martino, P., y Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. Zdm, 43, 471-482.

5. Evans, J., y Zan, R. (2006, July). Sociocultural approaches to emotions in mathematics education: Initial comparisons. In Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 41-48).

6. González-Pineda, J. A. Y Álvarez Pérez, L. Dificultades específicas relacionadas con las matemáticas. En González Pineda, J. A. Ynúñez Pérez, J.C. (Coords.): Dificultades del aprendizaje escolar. Madrid: Pirámide, 1998, pp. 315-340.

7. Goñi, J. Mª Las emociones de los docentes de matemáticas: emotidocencia. En Uno: Revista.

8. Hart, L. E. (1989). Describing the affective domain: Saying what we mean. In Affect and mathematical problem solving: A new perspective (pp. 37-45). New York, NY: Springer New York.

9. Hernández, R., y Gómez-Chacón, I. Mª (1997). Las actitudes en educación matemática. Estrategias para el cambio. Revista de Didáctica de las matemáticas, UNO, Monográfico Actitudes y Matemáticas, 13, 41-61.

10. Liljedahl. (n.d.). Peter Liljedahl. https://www.peterliljedahl.com/

11. Liljedahl, P. (2020). Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning. Corwin press.

12. Mandler, G. (1984). Mind and Body: Psychology of emotion and stress. New York: Norton.

13. Márquez, J. C. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. Statistics Education Research Journal, 3(1), 5-28.

14. Martínez, O. J. Dominio afectivo en educación matemática. Paradigma, 2005, vol. 26, n. 2, pp. 7-34.

15. Meyer, M. R., y Fennema, E. (1988). Girls, boys, and mathematics. Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods, 406-425.

16. McLeod, D. B., y Adams, V. M. (Eds.). (2012). Affect and mathematical problem solving: A new perspective. Springer Science and Business Media.

17. McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. Handbook of research on mathematics teaching and learning, 1, 575-596.

18. Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. Review of Educational Research, 62(3), 307–332.

19. Rajecki, D. W. (1982). Attitudes: Themes and Advances. SinauerAssociates. Inc., Sunderland.

20. Reyes, L. H. (1984). Affective variables and mathematics education. The elementary school journal, 84(5), 558-581.

21. Romero, L. R. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. In La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 15-38). Horsori. de didáctica de las matemáticas, 2007, n. 45, 5-7.

22. Schoenfeld, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making en mathematics. En GROUWS, D.A. (Ecl): Handbook o/ research

on Matheniatics teching and learning. Macmillan Publishing Company. New York, 1992, pp. 334-370.

23. Shavelson, R., Hubner, J.,y Stanton, G. (1976). Self-concept: Validation of construct interpretations. Review of Educational Research, 46(3), 407–441. https://doi.org/10.3102/00346543046003407

5. Anexos

Cuestionario

- **Pregunta 1:**¿Qué te ha parecido trabajar con las pizarras? ¿Consideras que has aprendido más, igual o menos que en una clase normal? Aprovecha este espacio para expresar tu opinión sobre esta forma de trabajar.

- **Pregunta 2:** Cuando formábamos grupos ¿Qué rol considerabas que tenías en tu grupo?

- **Pregunta 3:** A la hora de responder las preguntas ¿Cómo te sentías? Interesado/a, aburrido/a, intrigado/a, decepcionado/a...

- **Pregunta 4:** ¿Qué te han parecido los problemas propuestos en las clases? Interesantes, largos, difíciles... ¿Crees que has usado las matemáticas para resolverlos?

- **Pregunta 5:** Antes de trabajar con las pizarras dábamos clase de manera más tradicional ¿Qué opinión tienes de esas clases? ¿Qué crees que podríamos haber hecho los profesores para que funcionaran mejor?

- **Pregunta 6:** ¿Qué crees que podrías haber hecho tú para que la clase funcionara mejor?

- **Pregunta 7:** En tu opinión ¿Por qué crees que alguien querría ser profesor?

- **Pregunta 8:** Aprovecha este espacio para expresar tu opinión sobre las clases de matemáticas, respecto a cualquier aspecto que consideres.