Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Matemáticas

Introducción al Álgebra de Weyl

(An Introduction to the Weyl Algebra)

Autora: Nerea Cenizo de Luis

Directora: Beatriz Molina Samper

Codirector: Alberto Fernández Boix

Curso 2024–2025

Resumen

Este trabajo estudia el álgebra de Weyl desde una perspectiva algebraica rigurosa, explorando sus diferentes construcciones y propiedades fundamentales. En la primera parte, se presentan dos definiciones equivalentes del álgebra y se analizan sus propiedades estructurales. En la segunda parte, se introduce la teoría de módulos holónomos, apoyándose en herramientas como las filtraciones y el polinomio de Hilbert, culminando con la caracterización de estos módulos mediante el uso de la dimensión de Krull y el polinomio de Bernstein–Sato.

Palabras clave: álgebra de Weyl, operadores diferenciales, módulos holónomos, polinomio de Bernstein–Sato

Abstract

This work studies the Weyl algebra from a rigorous algebraic perspective, exploring its different constructions and fundamental properties. In the first part, two equivalent definitions of the algebra are presented, and its structural properties are analyzed. The second part introduces the theory of holonomic modules, relying on tools such as filtrations and the Hilbert polynomial, and culminates with the characterization of these modules using the Krull dimension and the Bernstein–Sato polynomial.

Keywords: Weyl algebra, differential operators, holonomic modules, Bernstein–Sato polynomial

Índice general

Introducción **1**

1. Introducción al álgebra de Weyl **5**
1.1. Definición 6
1.2. Forma canónica 9
1.3. Propiedades algebraicas del Álgebra de Weyl 13

2. El anillo de operadores diferenciales **19**
2.1. Derivaciones 19
2.2. Relación con el álgebra de Weyl 24

3. Anillos de polinomios torcidos **31**
3.1. Definición y relaciones 31
3.2. El teorema de la base de Hilbert 37
3.3. Característica positiva 40

4. La filtración de Bernstein **43**
4.1. Anillos graduados 44
4.2. Filtraciones 50
4.3. Buenas filtraciones 58

5. Módulos holónomos **63**
5.1. Dimensión 63
5.2. El polinomio de Bernstein-Sato 75

A. Cálculos algebraicos **83**
A.1. Graduaciones 83
A.2. Filtraciones 84
A.3. Polinomio de Hilbert 86
A.4. Cálculo del polinomio de Bernstein-Sato 87

Bibliografía **89**

Introducción

El álgebra de Weyl es una construcción algebraica fundamental que surge en el contexto del desarrollo de la mecánica cuántica a comienzos del siglo XX. Su aparición está ligada a la necesidad de modelar ciertas relaciones entre operadores que describen las variables dinámicas de los sistemas físicos, en particular la posición q y el momento p, cuyas interacciones no obedecen las reglas conmutativas habituales.

Este fenómeno fue inicialmente observado por Werner Heisenberg en 1925, al introducir una formulación basada exclusivamente en magnitudes observables. Su propuesta representaba una ruptura con la física clásica: en lugar de trabajar con trayectorias bien definidas, la descripción debía asentarse en un marco algebraico donde el orden de las operaciones tuviera un papel esencial. Poco después, Max Born y Pascual Jordan ofrecieron una interpretación en términos de matrices, dando así una primera forma matemática precisa a estas nuevas ideas. Finalmente, Paul Dirac propuso una visión unificada y más abstracta, centrada en las relaciones algebraicas entre las variables dinámicas, con independencia de su interpretación física inmediata.

En palabras del propio Dirac:

> "Las cosas que se observan, o que están estrechamente relacionadas con las magnitudes observables, están todas asociadas a dos órbitas de Bohr y no solo a una: dos en lugar de una. Ahora bien, ¿cuál es el efecto de eso?" [Dir78]

Esta reflexión resume la idea central: la mecánica cuántica exige un marco matemático en el que las operaciones dependan de su orden, y en el que los conceptos clásicos de posición y momento ya no puedan coexistir como variables independientes y estrictamente conmutativas. Dicho de otro modo, la novedad no era solo física, sino profundamente algebraica.

Desde esta perspectiva, la formulación matemática natural es imponer una relación de conmutación que refleje esta asimetría. Tras una normalización conveniente, las variables posición y momento satisfacen la siguiente relación:

$$pq - qp = 1.$$

Esta identidad algebraica, sencilla en apariencia pero de gran alcance conceptual, constituye el núcleo de lo que hoy conocemos como el *álgebra de Weyl*. Décadas más tarde, Jacques Dixmier consolidaría la notación A_n para describir esta familia de álgebras y sentaría las bases de su estudio sistemático [Dix63; Dix68; Dix74].

Este enfoque algebraico, aunque inicialmente motivado por necesidades físicas, fue profundizado y formalizado desde el punto de vista matemático por Hermann Weyl. En su célebre libro *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* [Wey50], publicado originalmente en alemán en 1928, Weyl defiende con claridad que la teoría de grupos —y en particular, la teoría de representaciones— ofrece un lenguaje natural y poderoso para formular las leyes de la física cuántica. En sus palabras:

> "Mi deseo de mostrar cómo los conceptos que surgen en la teoría de grupos encuentran su aplicación en la física [...] me ha llevado a incluir una exposición de los fundamentos de la mecánica cuántica. [...] Esta nueva matemática [...] encuentra su expresión más alta en la teoría de funciones de una variable compleja, y sin embargo ahora debe aplicarse a un álgebra no conmutativa, cuyos elementos son las cantidades físicas mismas." [Wey50]

Esta visión unificadora —donde el álgebra no conmutativa y la teoría de grupos se entrelazan para dar forma al lenguaje de la física cuántica— fue anticipada por Weyl con notable profundidad. Su enfoque, fuertemente influido por el pensamiento abstracto que se consolidaba en las matemáticas del siglo XX, contribuyó de manera decisiva a la transición desde los métodos clásicos hacia una formulación moderna y estructural del problema físico.

Con el paso del tiempo, el álgebra introducida a partir de las relaciones entre operadores de posición y momento fue adquiriendo entidad propia. El álgebra de Weyl se ha convertido en un punto de confluencia entre varias ramas de las matemáticas: el álgebra no conmutativa, la teoría de operadores diferenciales, la teoría de representaciones y, más recientemente, la teoría de $\mathcal{D}$-módulos.

Además, el estudio de los módulos sobre el álgebra de Weyl, en particular de los llamados *módulos holónomos*, surgió con fuerza en el desarrollo de la teoría de $\mathcal{D}$-módulos durante los años 70. Esta teoría, impulsada por los trabajos de Bernstein, Kashiwara y Mebkhout, se consolidó como una formalización algebraica para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales [Ber71; Kas76]. A través de este enfoque, el álgebra de Weyl no solo proporciona un marco para entender operadores diferenciales y sus soluciones, sino que también establece conexiones profundas entre geometría algebraica, teoría de representaciones y física matemática. De este modo, el estudio de los módulos holónomos sobre A_n abre vías hacia fenómenos esenciales como la teoría de singularidades y las correspondencias entre estructuras geométricas y algebraicas, consolidando así al álgebra de Weyl como un objeto central en la matemática moderna.

Este trabajo se inscribe en esa tradición matemática, motivado por el deseo de comprender en profundidad la estructura algebraica, las propiedades y las aplicaciones del álgebra de Weyl en contextos más generales. Siguiendo la filosofía expresada por Hermann Weyl, abordamos su estudio desde perspectivas diversas y complementarias.

Dividimos el trabajo en dos grandes bloques que responden a enfoques complementarios en el estudio del álgebra de Weyl. El primero abarca los tres primeros capítulos y está dedicado a establecer los fundamentos algebraicos de esta estructura. En él desarrollamos dos construcciones distintas del álgebra de Weyl: una basada en operadores de multiplicación y derivación, y otra más abstracta, en términos de anillos no conmutativos. A lo largo de estos capítulos, mostramos que ambas definiciones conducen a la misma estructura algebraica, lo cual no solo confirma la solidez del objeto matemático en cuestión, sino que también pone de manifiesto la riqueza de puntos de vista desde los que puede abordarse. De manera más precisa, tenemos:

En el Capítulo 1 introducimos el álgebra de Weyl como un álgebra generada por los operadores de multiplicación y derivación respecto a una variable. A partir de esta construcción, mostramos que puede considerarse como un K-espacio vectorial, lo cual nos permite dotarla de una base conocida como la base de Birkhoff–Poincaré. Esta base resulta fundamental para definir el concepto de *grado* de un operador en A_n, análogo al grado de un polinomio, y nos permite establecer diversas propiedades algebraicas del álgebra de Weyl, entre ellas su simplicidad.

El objetivo del Capítulo 2 es presentar una caracterización del álgebra de Weyl como un anillo de operadores diferenciales, siguiendo la definición inductiva del orden de un operador introducida por Grothendieck. Este enfoque, más cercano a la geometría y al análisis algebraico, ofrece una perspectiva complementaria a la construcción inicial. Comenzamos trabajando en el marco general de una álgebra conmutativa sobre un cuerpo, donde se introduce el concepto de operador diferencial de orden finito y se estudian sus propiedades básicas. En una segunda etapa, nos centramos en el caso concreto del anillo de polinomios en varias variables, describimos de forma explícita sus operadores diferenciales y mostramos que su estructura coincide con la del álgebra de Weyl. Esta reinterpretación permite conectar el álgebra de Weyl con nociones más amplias provenientes del álgebra conmutativa y la teoría de ecuaciones diferenciales.

En el Capítulo 3, presentamos el álgebra de Weyl como un anillo de polinomios torcidos y demostramos que el álgebra dada con esta definición es isomorfa a la anterior. Esta caracterización puramente algebraica permite utilizar herramientas estructurales más potentes y conecta de manera natural con desarrollos recientes en teoría de anillos no conmutativos. Concluimos el capítulo enunciando y demostrando una versión del teorema de la base de Hilbert adaptada a este contexto, y reflexionamos sobre la elección de trabajar sobre un cuerpo K de característica cero. Aunque muchas propiedades del álgebra de Weyl persisten en característica positiva, el marco de característica cero ofrece un entorno más accesible y coherente para los objetivos de este trabajo.

El segundo bloque de este documento está dedicado a la introducción al estudio de los módulos holónomos. Sin embargo, la construcción de estos módulos no surge de manera inmediata, y requiere una base teórica sólida apoyada en una maquinaria algebraica.

El Capítulo 4 asume el peso principal de esta preparación. Comenzamos con una discusión sobre anillos graduados, y observamos que el álgebra de Weyl no admite una graduación natural adecuada. Esto motiva la introducción del concepto de *filtraciones*. En particular, utilizamos la *filtración de Bernstein*, basada en la noción de grado introducida en el primer capítulo, la cual nos permite construir un objeto graduado asociado: el *módulo graduado asociado*. Este objeto guarda una sorprendente isomorfía con el anillo de polinomios conmutativo en $2n$ variables. Gracias a esta construcción, obtenemos una *sombra* conmutativa del álgebra de Weyl que facilita su estudio, especialmente considerando que A_n es un anillo no conmutativo y simple, lo que complica significativamente el análisis directo de su estructura.

Por último, en el Capítulo 5 introducimos la noción de *módulo holónomo*, definida como aquellos módulos sobre el álgebra de Weyl que son nulos o tienen dimensión mínima posible. Para formalizar esta idea, introducimos previamente el concepto de *dimensión de Krull*, el cual podemos aplicar gracias al teorema del polinomio de Hilbert y a las herramientas desarrolladas en el capítulo anterior. Concluimos el capítulo estableciendo propiedades fundamentales de los módulos holónomos, tales como su carácter *noetheriano* y *artiniano*, lo que implica que estos módulos son de longitud finita. Además, abordamos la existencia del polinomio de Bernstein–Sato, una herramienta central en el estudio de ecuaciones diferenciales y singularidades, que pone de manifiesto la riqueza estructural de estos módulos.

Como colofón, añadimos un apéndice con recursos complementarios, incluyendo fragmentos de código y cálculos realizados con el software `SageMath`. En particular, se muestran ejemplos de cómo trabajar con graduaciones y filtraciones en anillos y álgebras, así como el cálculo computacional de series y polinomios de Hilbert. En varias ocasiones, se rescatan en este software los ejemplos que ya se han trabajado a mano a lo largo del documento, verificando que se obtienen los mismos resultados y preparando el terreno para aplicarlos a casos más complicados. Además, se incluyen ejemplos de cómo utilizar `Singular` para calcular polinomios de Bernstein-Sato en una variable, demostrando la utilidad de las herramientas computacionales para explorar casos que serían laboriosos de tratar manualmente.

Capítulo 1

Introducción al álgebra de Weyl

En este capítulo se presentan los aspectos fundamentales del álgebra de Weyl, una estructura central en álgebra no conmutativa con aplicaciones relevantes en física matemática y geometría algebraica. Partiremos de su definición formal, basada en relaciones de conmutación entre operadores, para explorar sus propiedades más representativas y su utilidad como herramienta algebraica. El objetivo es proporcionar una base sólida para comprender tanto la motivación como la aplicabilidad del álgebra de Weyl en los desarrollos posteriores del trabajo. Este capítulo se divide en tres secciones que tienen como objetivo introducir y desarrollar los conceptos fundamentales relacionados con el álgebra de Weyl.

La primera sección está dedicada a establecer las bases necesarias para el estudio del álgebra de Weyl: se introducen los elementos que la componen, se describen las operaciones fundamentales que permiten manipular dichos elementos, y se construye paso a paso su definición formal dentro del contexto de operadores lineales y estructuras algebraicas.

En la segunda sección se estudia la forma canónica del álgebra de Weyl como espacio vectorial sobre K, lo que nos llevará a la construcción de la base de Birkhoff–Poincaré. Se presentarán los resultados necesarios para establecer dicha base, y se incluirán ejemplos ilustrativos de cálculo de forma canónica.

La tercera y última sección se centra en las propiedades algebraicas del álgebra de Weyl. En ella se demostrará, entre otras cosas, que se trata de un dominio y que es un álgebra simple. Además, introduciremos una noción de grado para los operadores de A_n, basada en la forma canónica previamente desarrollada. Esta noción será especialmente útil en capítulos posteriores, particularmente en el Capítulo 4, cuando estudiemos la filtración de Bernstein.

Las referencias principales para este capítulo son el primer y segundo capítulo de [Cou95]. El primer capítulo será la base para las Secciones 1.1 y 1.2, mientras que el segundo capítulo se utilizará principalmente en la Sección 1.3. A lo largo del texto, también consultaremos otras fuentes para aspectos concretos y resultados específicos.

1.1. Definición

El objetivo de esta sección es definir qué es un álgebra de Weyl. Para ello, consideraremos dicha álgebra como un anillo de operadores lineales sobre un espacio vectorial de dimensión finita. Sin embargo, antes de entrar en detalles técnicos, introduciremos algunos conceptos básicos necesarios.

Trabajaremos con un cuerpo K de característica cero y definiremos $R = K[x_1, \dots, x_n]$ como el anillo conmutativo de polinomios en n variables con coeficientes en K. El anillo R posee estructura de espacio vectorial de dimensión infinita sobre K. En este contexto, si $\varphi : K \to R$ es un morfismo de anillos (es decir, si R es una K-álgebra), entonces φ es un monomorfismo y podemos identificar K con un subanillo de R, es decir, $K \subseteq R$. Además, dado que K es un cuerpo de característica cero, no existe ningún $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $n \cdot 1_K = 0$, pues en tal caso, la característica de K sería el menor de estos valores.

Denotamos por $\mathrm{End}_K(R)$ el conjunto de endomorfismos de R como K-módulo, cuyos elementos denominaremos operadores u operadores lineales. Podemos identificar el anillo R con un subanillo de $\mathrm{End}_K(R)$ mediante el morfismo natural de K-álgebras

$$\mu : R \longrightarrow \mathrm{End}_K(R), \qquad \mu(f)(g) = f \cdot g,$$

que asigna a cada $f \in R$ el operador de multiplicación por la izquierda por f. Como μ es un monomorfismo, consideraremos a R incluido en $\mathrm{End}_K(R)$, de modo que todo polinomio $f \in R$ puede interpretarse como un operador lineal que actúa sobre R mediante multiplicación.

Este punto de vista nos permite considerar tanto la multiplicación como ciertas derivaciones como operadores lineales sobre R. Definimos entonces dos tipos fundamentales de endomorfismos:

1. **Multiplicación por un elemento de** R: A cada $f \in R$ le asociamos el operador $\hat{f} := \mu(f) \in \mathrm{End}_K(R)$, definido por

   $$\hat{f}(g) = f \cdot g, \quad \text{para todo } g \in R.$$

   Nótese que $\hat{f}$ es una aplicación de R en R, es decir, $\hat{f} : R \to R$, y es K-lineal por construcción. Este operador representa la multiplicación por la izquierda por f, y está contenido en $\mathrm{End}_K(R)$ a través del morfismo μ definido anteriormente.

2. **Derivación respecto a** x_i: Para cada $i = 1, \dots, n$, definimos el operador diferencial

   $$\partial_i : R \to R, \qquad \partial_i \left(\sum a_\alpha x^\alpha \right) = \sum \alpha_i a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_i^{\alpha_i - 1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

   que corresponde a la derivada parcial con respecto a la variable x_i. Para cada índice i, el operador ∂_i pertenece a $\mathrm{End}_K(R)$ y satisface la regla de Leibniz:

   $$\partial_i(fg) = \partial_i(f)g + f\partial_i(g), \qquad \text{para todo } f, g \in R.$$

También introducimos una operación fundamental en el contexto de operadores lineales:

- **Conmutador o corchete de Lie**: Dados $F, G \in \mathrm{End}_K(R)$, definimos su conmutador como
$$[F, G] := F \circ G - G \circ F,$$
donde $\circ$ representa la composición de funciones. Como $\mathrm{End}_K(R)$ es cerrado bajo composición y suma, el conmutador también pertenece a $\mathrm{End}_K(R)$.

  Aunque la definición es en términos de composición, es común y más práctico omitir el símbolo de composición y escribir
$$[F, G] := F \cdot G - G \cdot F,$$
entendiendo que $F \cdot G$ y $G \cdot F$ denotan la composición de operadores $F \circ G$ y $G \circ F$, respectivamente. Esta notación simplificada (o simplemente $FG - GF$) es la que habitualmente se utiliza para estudiar la estructura del álgebra de Weyl.

Notación. *A partir de ahora, el operador $\hat{x}_i$ se llamará simplemente x_i por comodidad, es decir, $x_i(f) = x_i \cdot f = x_i f$. Esto es así porque estamos viendo R como un subálgebra de $\mathrm{End}_k(R)$, por lo que con esta identificación $\hat{x}_i = x_i$. En A_1 no especificaremos que estamos usando x_1 ni ∂_1, ya que al haber solo uno de cada simplemente pondremos x y ∂.*

Observación 1.1.1. *Una primera propiedad muy importante que vamos a dar va a ser ver que $[\partial_i, x_i] \neq 0$. Para ello, como por definición $[\partial_i, x_i] = \partial_i \cdot x_i - x_i \cdot \partial_i$ vamos a aplicar el operador $\partial_i \cdot x_i$ a un polinomio $f \in R$ y nos da la siguiente expresión:*
$$\partial_i \cdot x_i(f) = \partial_i(x_i f) = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} f + x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = f + x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$
Es decir, que el operador $\partial_i \cdot x_i$ es de la siguiente forma:
$$\partial_i \cdot x_i = 1 + x_i \cdot \partial_i,$$
donde 1 es operador identidad, que es, obviamente, no nulo, y por tanto hemos visto que $[\partial_i, x_i] = 1 \neq 0$.

Razonando de manera análoga, podemos encontrar más resultados de los diferentes conmutadores que podemos formar. Los recogemos en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.2. *Se dan las siguientes propiedades:*

- $[\partial_i, x_j] = \delta_{i,j}$,
- $[\partial_i, \partial_j] = [x_i, x_j] = 0$,

donde $\delta_{i,j}$ corresponde a la delta de Kronecker y $1 \leq i, j \leq n$.

Demostración: La comprobación de estas propiedades es elemental donde solo usaremos las definiciones y operaremos adecuadamente.

- Para demostrar el primer ítem vamos a razonar de manera análoga a lo que vimos en la Observación 1.1.1. Como $[\partial_i, x_j] = \partial_i \cdot x_j - x_j \cdot \partial_i$ vamos a aplicárselo a un $f \in K[X]$ y vemos que
$$\partial_i \cdot x_j(f) = \partial_i(x_j f) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \cdot f + x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} = \delta_{i,j} f + x_j \partial_j(f) = \delta_{i,j} f + x_j \cdot \partial_j(f),$$
por tanto, $[\partial_i, x_j] = \delta_{i,j}$.

- Para probar estas dos expresiones, utilizaremos la igualdad de las derivadas cruzadas y la conmutatividad de los elementos de R. Por tanto, razonando de manera análoga al anterior ítem como
$$\partial_i \cdot \partial_j(f) = \partial_i \left(\frac{\partial f}{\partial_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} = \partial_j \left(\frac{\partial f}{\partial_i} \right) = \partial_j \cdot \partial_i(f),$$
tenemos que $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Por otro lado
$$x_i \cdot x_j(f) = x_i(x_j f) = x_i x_j f = x_j(x_i f) = x_j \cdot x_i(f)$$
y por consiguiente acabamos concluyendo que $[x_i, x_j] = 0$ y hemos terminado.

Por tanto, se satisfacen las identidades deseadas. □

A continuación, presentaremos un ejemplo ilustrativo que resalta la importancia de identificar correctamente la naturaleza y el rol de cada elemento al operarlo. Será una generalización de la Observación 1.1.1.

Ejemplo 1.1.3. Consideremos la siguiente identidad:
$$[\partial_i, f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f \in K[X].$$
Para demostrarla, partimos de la definición del corchete de Lie:
$$[\partial_i, f] = \partial_i \cdot f - f \cdot \partial_i.$$
Recordemos que, según la notación adoptada, identificamos cada $f \in R$ con el operador de multiplicación por la izquierda en R, es decir, para $g \in R$ tenemos
$$f(g) = f \cdot g = fg.$$
Con esta convención, evaluamos el conmutador actuando sobre un polinomio arbitrario $g \in R$:
$$\begin{aligned}[\partial_i, f](g) &= \partial_i \cdot f(g) - f \cdot \partial_i(g) = \partial_i(fg) - f\partial_i(g) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} - f \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(g).\end{aligned}$$
Por tanto, la identidad queda demostrada.

Este ejemplo muestra cómo la no conmutatividad entre operadores es una propiedad fundamental. Con esto, introducimos formalmente el objeto central del capítulo: el álgebra de Weyl.

Definición 1.1.4. *La **(enésima) álgebra de Weyl** A_n sobre un cuerpo K de característica cero es la $K-$ subálgebra de $End_K(R)$ generada por los operadores $x_1, \dots, x_n$ y $\partial_1, \dots, \partial_n$. Para el caso más simple, $A_0 = K$.*

Para $n \geq m$, la acción de los operadores de A_m en R está bien definida, por lo que A_m se identifica naturalmente como una subálgebra de A_n. También se puede escribir $A_n(K)$ para hacer explícito el cuerpo sobre el que está definida el álgebra. Además, por la Observación 1.1.1 podemos comprobar que el álgebra de Weyl no es conmutativa.

Este objeto será la piedra angular sobre la que construiremos las propiedades y resultados posteriores, profundizando en su estructura y aplicaciones.

1.2. Forma canónica

El objetivo de esta sección es el de construir una base del álgebra de Weyl vista como un $K-$ espacio vectorial. A esta base la llamaremos base canónica, o base de Birkhoff-Poincaré, y diremos que un elemento de A_n está escrito en su forma canónica cuando está escrito como una combinación lineal de esa base. Esto es muy útil porque para comparar dos elementos en forma canónica es suficiente con comparar los coeficientes de las combinaciones lineales y eso es fácil de hacer.

Notación. *En esta subsección empezaremos a usar la notación multi-índice. Por si el lector no está acostumbrado, cuando hablemos de x^α o ∂^β donde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ estamos diciendo cuantas veces aparece cada variable del monomio en cuestión. Por ejemplo si escribimos $x^{(1,0,2)}$ es lo mismo a poner $x_1 x_3^2$ (análogo para ver que $\partial^{(0,0,2,3)} = \partial_3^2 \partial_4^3$). Además, cuando hablamos de $|\alpha|$ esto no es más que las sumas de las coordenadas. Por último, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$; es decir, el producto de los factoriales de todas sus coordenadas (tomando $0! = 1$).*

El resultado principal de esta sección es la construcción de la base de Birkhoff-Poincaré. Para ello, utilizaremos la notación de multiíndices previamente introducida. Antes de abordar la demostración, presentaremos un resultado auxiliar que nos será de utilidad en el desarrollo posterior.

Lema 1.2.1 (Acción de derivadas parciales en monomios mediante multi-índices)**.** *Sean σ, β con $|\sigma| \leq |\beta|$. Entonces, $\partial^\beta(x^\sigma) = \beta!$ si $\sigma = \beta$ y cero en otro caso.*

Demostración: Sabemos que

$$\partial^\beta(x^\sigma) = \frac{\partial^{|\beta|}(x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n})}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial^{\beta_i} x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i^{\beta_i}}. \tag{1.1}$$

A partir de esta expresión, analizamos dos casos:

- Si $\beta = \sigma$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que

$$\frac{\partial^{\beta_i} x_i^{\beta_i}}{\partial x_i^{\beta_i}} = \beta_i!,$$

ya que al derivar β_i veces la función $x_i^{\beta_i}$ con respecto a x_i obtenemos ese factorial. Por lo tanto,

$$\partial^\beta(x^\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \beta_i! = \beta!,$$

como se quería.

- Si $\beta \neq \sigma$. Como $|\sigma| \leq |\beta|$, debe existir algún índice $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\sigma_i < \beta_i$. Para ese i, se cumple

$$\frac{\partial^{\beta_i} x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i^{\beta_i}} = 0,$$

ya que se derivan más veces de las que permite el exponente del monomio. Por lo tanto, el producto en (1.1) se anula, y así $\partial^\beta(x^\sigma) = 0$.

Concluimos que, en todos los casos, se cumple la identidad enunciada. □

En el Ejemplo 1.2.5 veremos una aplicación de este lema. Con este resultado demostrado, estamos en condiciones de enunciar el resultado central de la sección.

Proposición 1.2.2 (Base de Birkhoff-Poincaré)**.** *El conjunto $\mathcal{B} = \{x^\alpha \partial^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ constituye una base de A_n como espacio vectorial sobre K.*

Demostración: Demostraremos que cualquier elemento de A_n puede expresarse como una combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$ y que estos son linealmente independientes. Por el Ejemplo 1.1.3, dado $f \in R$ se cumple que

$$\partial_i \cdot f - f \cdot \partial_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Esto nos permite llevar las potencias de x a la izquierda y reescribir cualquier elemento de A_n como una combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$.

Para probar que los elementos de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes consideremos una combinación lineal finita de la forma

$$D = \sum c_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta.$$

Queremos demostrar que si $D = 0$, entonces necesariamente todos los coeficientes de $c_{\alpha,\beta}$ son cero. Procedemos por contrarrecíproco suponiendo que existe un $c_{\alpha,\beta}$ no nulo. Dado que D es un operador diferencial lineal que actúa sobre R, basta encontrar una función f tal que $D(f) \neq 0$, lo que implicaría que $D \neq 0$. Siguiendo el Lema 1.2.1, tomamos $f = x^\beta$, de modo que

$$D(x^\beta) = \sum_\alpha c_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta(x^\beta).$$

Aplicando el resultado previo, se tiene que

$$D(x^{\beta}) = \beta! \sum_{\alpha} c_{\alpha,\beta} x^{\alpha}.$$

Dado que hemos supuesto que existe un $c_{\alpha,\beta}$ no nulo, se concluye que $D(x^{\beta}) \neq 0$ y por tanto $D \neq 0$. □

A continuación, presentaremos un par de ejemplos que ilustran cómo encontrar la forma canónica de un elemento en A_n.

Ejemplo 1.2.3. Determinemos la forma canónica de los siguientes elementos de A_2:

- $\partial_1^2 \cdot x_1^2$,
- $\partial_2 \cdot x_1^2$.

Ninguno de estos elementos se encuentra en su forma canónica, ya que para ello deberían estar expresados como combinaciones lineales de elementos de la base. Para encontrar su forma canónica, aplicaremos la regla de la cadena y la regla de Leibniz hasta obtener la forma deseada. Calculemos el primero:

$$\begin{aligned}
\partial_1^2 \cdot x_1^2(f) &= \partial_1(\partial_1(x_1^2 \cdot f)) = \partial_1(\partial_1(x_1^2) \cdot f + x_1^2 \cdot \partial_1(f)) = \partial_1(2x_1 \cdot f + x_1^2 \partial_1(f)) \\
&= \partial_1(2x_1^2) \cdot f + 2x_1 \cdot \partial_1(f) + \partial_1(x_1^2) \cdot \partial_1(f) + x_1 \cdot (\partial_1(\partial_1(f)) \\
&= 2 \cdot f + 4x_1 \cdot f + x_1^2 \cdot \partial_1^2(f).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\partial_1^2 \cdot x_1^2 = 2 + 4x_1 \cdot \partial_1 + x_1^2 \cdot \partial_1^2.$$

Ahora el segundo. Observamos que

$$\partial_2 \cdot x_1^2(f) = \partial_2(x_1^2 \cdot f) = \partial_2(x_1^2) \cdot f + x_1^2 \cdot \partial_2(f).$$

Dado que $\partial_2(x_1^2) = 0$, se obtiene

$$\partial_2 \cdot x_1^2 = x_1^2 \cdot \partial_2.$$

Observación 1.2.4. *A partir de estos ejemplos, podemos extraer una observación muy sencilla: si un elemento de A_n está en su forma canónica y además pertenece a algún A_m con $n \neq m$ entonces su forma canónica se mantiene invariante. En particular, da lo mismo considerar $\partial_1^2 \cdot x_1^2$ como un elemento de A_1 o como un elemento de A_2, pues su expresión en la base de Birkhoff-Poincaré es la misma en ambos casos.*

Terminemos esta subsección con los ejemplos mencionados tras el Lema 1.2.1, aplicando la notación multi-índice para operar, y considerando las variables x como funciones (elementos del anillo), no como operadores que actúan sobre él.

Ejemplo 1.2.5. Apliquemos la notación multi-índice para operar con los siguientes elementos en A_3:

- $\partial_1^2(x_1^2)$,
- $\partial_2(x_1^2)$.

En el primer ítem, usando el Lema 1.2.1, tenemos que

$$\partial_1^2(x_1^2) = \partial^{(0,2)}(x^{(0,2)}) = 2! = 2.$$

Por otro lado, para hacer el segundo apartado, la notación multi-índice no nos permite aplicar directamente el Lema 1.2.1. Primero aplicamos la regla de la cadena y luego el resultado:

$$\partial_2(x_1^2) = \partial_2(x_1 \cdot x_1) = \partial_2(x_1) \cdot x_1 + x_1 \cdot \partial_2(x_1) = \partial^{(0,1)}(x^{(1,0)})x^{(1,0)} + x^{(1,0)}\partial^{(0,1)}(x^{(1,0)}) = 0.$$

Para poder operar de forma general con elementos de A_n en notación multi-índice, como vimos en el ejemplo anterior, el Lema 1.2.1 resulta insuficiente. Por ello, vamos a enunciar una generalización.

Antes de continuar, fijamos la notación para el cociente de factoriales multi-índice, que escribiremos como

$$\frac{\sigma!}{(\sigma-\beta)!} \quad \text{donde } \sigma! = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i! \quad \text{y} \quad (\sigma-\beta)! = \prod_{i=1}^{n}(\sigma_i - \beta_i)!.$$

Con esta notación, presentamos el siguiente resultado:

Proposición 1.2.6 (Derivación de monomios por operadores diferenciales multi-índice)**.** *Sean $\sigma, \beta \in \mathbb{N}^n$ tales que $|\sigma| \geq |\beta|$ y, además, $\sigma_i \geq \beta_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces*

$$\partial^\beta(x^\sigma) = \frac{\sigma!}{(\sigma-\beta)!} x^{\sigma-\beta}.$$

En otro caso, es decir, si existe algún i tal que $\sigma_i < \beta_i$, entonces $\partial^\beta(x^\sigma) = 0$.

Demostración: Partimos de la misma expresión que en el Lema 1.2.1:

$$\partial^\beta(x^\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial^{\beta_i} x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i^{\beta_i}}.$$

Si existe algún índice i tal que $\sigma_i < \beta_i$, entonces el correspondiente factor en el producto es cero, y por tanto $\partial^\beta(x^\sigma) = 0$, como ya se vio en el lema anterior.

Supongamos ahora que $\sigma_i \geq \beta_i$ para todo i. En ese caso, para cada i se tiene:

$$\frac{\partial^{\beta_i} x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i^{\beta_i}} = \frac{\sigma_i!}{(\sigma_i - \beta_i)!} x_i^{\sigma_i - \beta_i},$$

y así,

$$\partial^\beta(x^\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i!}{(\sigma_i-\beta_i)!} x_i^{\sigma_i-\beta_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i!}{(\sigma_i-\beta_i)!}\right) x^{\sigma-\beta}.$$

Esto prueba que

$$\partial^\beta(x^\sigma) = \frac{\sigma!}{(\sigma-\beta)!}x^{\sigma-\beta}.$$

$\square$

Ahora podemos optimizar el cálculo de derivadas múltiples, previamente indefinido o ambiguo, sin recurrir a procedimientos complicados como la regla de la cadena. Esto nos lleva a la siguiente observación:

Observación 1.2.7. *Aunque definir el operador $\hat{x}_i$ (o simplemente x_i) como un operador suena repetitivo, esta definición nos permite conservar información que de otro modo se perdería. Por ejemplo, si consideramos las variables x_i solo como funciones, no podemos distinguir $\partial^3(x)$ de $\partial^3(x^2)$, pues ambas derivadas son cero. Sin embargo, al trabajar con los operadores y su composición, como en $\partial^3 \cdot x$ y $\partial^3 \cdot x^2$, obtenemos elementos diferentes y no nulos en la base $\mathcal{B}$, tal como vimos en el Ejemplo 1.2.3. Esto demuestra que la estructura operativa es esencial para diferenciar entre estos casos.*

1.3. Propiedades algebraicas del Álgebra de Weyl

Gracias a la construcción de la base de Birkhoff–Poincaré, podemos estudiar algunas propiedades fundamentales del álgebra de Weyl. Una de las más importantes es el concepto de grado de un operador, que se asemeja al grado de un polinomio, aunque adaptado al contexto no conmutativo de A_n.

Definición 1.3.1. *Sea $D \in A_n$ un operador. Escribimos a D en términos de la base de Birkhoff–Poincaré, es decir, como combinación lineal de elementos de la forma $x^\alpha\partial^\beta$ con $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$. Definimos el **grado** de D como*

$$\deg(D) := \max\{|\alpha| + |\beta| : x^\alpha\partial^\beta \textit{ aparece con coeficiente no nulo en } D\}.$$

Por convención, se define el grado del operador cero como $\deg(0) = -\infty$.

Ejemplo 1.3.2. *Sea $D = 3x_1^2\partial_1 + x_1x_2\partial_1^2\partial_2 \in A_2$. En la base de Birkhoff–Poincaré, los términos que aparecen son $x_1^2\partial_1$ (con $\alpha = (2,0), \beta = (1,0)$, de grado $2+1=3$) y $x_1x_2\partial_1^2\partial_2$ (con $\alpha = (1,1), \beta = (2,1)$, de grado $2+3=5$). Por lo tanto, $\deg(D) = 5$.*

Vamos a ver cómo se comportan las operaciones suma, producto y el corchete de Lie bajo esta definición. Estas propiedades más adelante serán útiles para la demostración de los resultados de esta parte. Para ello, antes presentamos un pequeño lema que nos ayudará a manejar los conmutadores de operadores:

Lema 1.3.3 (Conmutadores básicos de operadores diferenciales multi-índice)**.** *Sea $\beta \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice, y consideremos los operadores dentro del álgebra de Weyl A_n. Entonces, para cada $i = 1,\dots,n$, se cumplen*

- $[\partial^\beta, x_i] = \beta_i\,\partial^{\beta-e_i}$,
- $[x_i, \partial^\beta] = -\beta_i\,\partial^{\beta-e_i}$.

Demostración: El primer ítem se demuestra por inducción sobre $|\beta|$, donde el caso base se encuentra en la Proposición 1.1.2 y el paso inductivo sigue directamente de la identidad de conmutadores en A_n

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B.$$

El segundo ítem se obtiene inmediatamente de la antisimetría del corchete de Lie, también válida en A_n, ya que

$$[x_i, \partial^\beta] = -[\partial^\beta, x_i].$$

□

Proposición 1.3.4 (Propiedades del grado de las operaciones entre dos operadores de A_n). *Sean $D, D' \in A_n$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $\deg(D + D') \leq \max\{\deg(D), \deg(D')\}$.
2. $\deg(DD') = \deg(D) + \deg(D')$.
3. *Si* $\deg(D), \deg(D') \geq 1$, *entonces*

   $$\deg([D, D']) \leq \deg(D) + \deg(D') - 2.$$

   Además, si D y D' son ambos de grado 0, el conmutador es cero y la desigualdad se cumple trivialmente.

Demostración: Para la demostración de este resultado, primero demostraremos la primera propiedad y, seguidamente, de manera conjunta, probaremos las otras dos.

- Empecemos con la primera. Supongamos que D y D' están escritos en su forma canónica, es decir, como combinaciones lineales de los monomios $x^\alpha \partial^\beta$. Por definición, el grado de un operador D es el máximo valor de $|\alpha| + |\beta|$ para aquellos términos $x^\alpha \partial^\beta$ que aparecen en la expresión canónica de D con coeficiente no nulo.

  La suma $D + D'$ consiste en sumar los coeficientes correspondientes de cada término $x^\alpha \partial^\beta$. El único caso en el que se puede eliminar un término es si los coeficientes correspondientes en D y D' se cancelan. Esto puede ocurrir, pero no puede aumentar el grado de la suma. Por tanto, el término de mayor grado en $D + D'$ debe tener grado menor o igual que el mayor grado presente en D o en D'. Así,

  $$\deg(D + D') \leq \max\{\deg(D), \deg(D')\}.$$

- Para demostrar las propiedades (2) y (3), procederemos de manera conjunta mediante inducción sobre la suma de los grados $k = \deg(D) + \deg(D')$.

  Como punto de partida, consideremos los casos triviales. Si $k = 0$, ambos operadores son constantes y las dos propiedades se cumplen de inmediato: el producto de dos constantes es una constante, y su conmutador es nulo. Si uno de los operadores es constante y el otro no, la tercera propiedad no entra en juego, mientras que la segunda sigue siendo válida porque el producto con un operador constante simplemente escala al otro sin alterar su grado.

A partir de ahora podemos suponer que los dos operadores tienen grado al menos uno y realizar inducción para $k \geq 2$. Si $k = 2$, ambos operadores tienen grado 1. Si los dos son variables o derivadas, conmutan y el conmutador es nulo; si uno es variable y el otro derivada, el conmutador es una constante (las propiedades del conmutador las vimos en la Proposición 1.1.2). En todos los casos

$$\deg(DD') = 2, \qquad \deg([D, D']) \leq 0,$$

lo cual prueba las dos propiedades para $k = 2$.

Supongamos por hipótesis de inducción válidas las propiedades para operadores de suma de grados menor que k, con $k \geq 2$.

Basta tratar el caso en que $D = x^\sigma \partial^\beta$ y $D' = x^\alpha \partial^\eta$. El punto clave es la identidad

$$\partial^\beta x^\alpha = x^\alpha \partial^\beta + P,$$

donde el resto $P = [\partial^\beta, x^\alpha]$ tiene grado a lo sumo $|\alpha| + |\beta| - 2$. La verificación se hace por inducción sobre $|\beta|$: si $|\beta| = 0$ no hay nada que probar; si $|\beta| = 1$, se obtiene, por el primer ítem del Lema 1.3.3 $[\partial_i, x^\alpha] = \alpha_i x^{\alpha - e_i}$[1] de grado $|\alpha| - 1$; y si $|\beta| \geq 2$, escribiendo $\partial^\beta = \partial_i \partial^{\beta - e_i}$ y aplicando la hipótesis inductiva se alcanza la misma cota.

Aplicando esta identidad al producto se obtiene

$$DD' = x^{\sigma+\alpha} \partial^{\beta+\eta} + x^\sigma P \partial^\eta,$$

donde el primer término tiene grado exactamente $\deg(D) + \deg(D')$, y el segundo no supera $\deg(D) + \deg(D') - 2$. Así queda probada la segunda propiedad. Para el conmutador, basta observar que el mismo cálculo con $D'D$ produce el mismo término principal, que se cancela al restar, quedando solo términos de grado no mayor que $\deg(D) + \deg(D') - 2$. Esto demuestra la tercera propiedad.

Por linealidad, el resultado se extiende a operadores arbitrarios de A_n, completando la demostración.

Con esto concluimos con la demostración de las tres propiedades. □

Observación 1.3.5. *De las propiedades (1) y (2) de la Proposición 1.3.4 se deduce que el grado define una* ***valoración*** *sobre el anillo A_n, en el sentido de una función $\deg : A_n \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$ tal que:*

$$\deg(D + D') \leq \max\{\deg(D), \deg(D')\} \quad y \quad \deg(DD') = \deg(D) + \deg(D').$$

Esto será de utilidad en el Capítulo 4, cuando consideremos la filtración de Bernstein inducida por el grado.

[1] Donde e_i es el vector canónico en la i-ésima posición.

Como en el caso de los polinomios sobre un cuerpo, podemos usar el apartado dos del anterior resultado para dar la siguiente afirmación.

Corolario 1.3.6 (A_n es un dominio)**.** *El álgebra A_n es un dominio, es decir, no tiene divisores de cero.*

Demostración: Queremos demostrar que si $D, D' \in A_n$ y ambos son distintos de cero, entonces $DD' \neq 0$, es decir, A_n no tiene divisores de cero.

Sea $D, D' \in A_n$, con $D \neq 0$ y $D' \neq 0$. Por definición del grado en A_n, se tiene que $\deg(D), \deg(D') > -\infty$.

De la segunda propiedad de la Proposición 1.3.4 sabemos que:

$$\deg(DD') = \deg(D) + \deg(D').$$

Como $\deg(D), \deg(D') > -\infty$, se deduce que:

$$\deg(DD') > -\infty.$$

Por definición del grado, esto implica que $DD' \neq 0$. Por lo tanto, A_n no tiene divisores de cero y es un dominio. □

En contraste con los anillos conmutativos, que en general poseen muchos ideales biláteros, el álgebra A_n presenta una estructura mucho más rígida.

Teorema 1.3.7 (Simplicidad de A_n)**.** *El álgebra A_n es simple, es decir, sus únicos ideales biláteros son el ideal cero y el álgebra completa.*

Demostración: Sea $I \subset A_n$ un ideal bilátero no nulo. Tomemos un elemento $D \in I$ de grado mínimo posible distinto de cero, y sea $k = \deg(D)$.

Si $k = 0$, entonces D es un escalar no nulo, ya que los elementos de grado cero son escalares en A_n. Como A_n es un álgebra sobre un cuerpo K de característica cero, esto implica que $1 \in I$, y por tanto $I = A_n$.

Supongamos ahora que $k > 0$. Consideremos la forma canónica de D y un término no nulo de la forma $x^\alpha \partial^\beta$ con $|\alpha| + |\beta| = k$.

Si existe un índice i tal que $\beta_i \neq 0$, entonces el conmutador

$$[x_i, D] = x_i D - D x_i$$

pertenece a I (pues I es un ideal bilátero) y, mirando el término $x^\alpha \partial^\beta$ de grado k, se verifica usando el segundo ítem del Lema 1.3.3 y la regla de Leibniz que

$$[x_i, x^\alpha \partial^\beta] \;=\; x^\alpha [x_i, \partial^\beta] \;=\; -\beta_i\, x^\alpha \partial^{\beta - e_i} + (\text{términos de grado } \leq k-2),$$

de modo que el conmutador tiene un término de grado $k-1$ con coeficiente $-\beta_i \neq 0$. Por tanto $[x_i, D] \neq 0$, y por la tercera propiedad de la Proposición 1.3.4

$$\deg([x_i, D]) \leq \deg(x_i) + \deg(D) - 2 = 1 + k - 2 = k - 1,$$

lo cual contradice la elección de D como elemento de grado mínimo en I.

Por tanto, debemos tener que $\beta = (0, \ldots, 0)$, es decir, todos los términos de D son monomios en las variables x^α únicamente.

Como $k > 0$, existe algún $\alpha_i \neq 0$. Consideremos entonces el conmutador

$$[\partial_i, D] = \partial_i D - D\partial_i,$$

que también pertenece a I. Observando el término x^α de D se obtiene de manera similar al caso anterior que

$$[\partial_i, x^\alpha \partial^\beta] \;=\; [\partial_i, x^\alpha]\, \partial^\beta \;=\; \alpha_i\, x^{\alpha - e_i} \partial^\beta + (\text{términos de grado } \leq k-2),$$

de modo que el conmutador posee un término de grado $k-1$ con coeficiente $\alpha_i \neq 0$, y en particular no es nulo. Usando nuevamente la propiedad (3) se cumple

$$\deg([\partial_i, D]) \leq \deg(\partial_i) + \deg(D) - 2 = 1 + k - 2 = k - 1,$$

lo que también contradice la elección de D como elemento de grado mínimo.

Por lo tanto, la suposición de que $k > 0$ es falsa, y se concluye que $\deg(D) = 0$ y que $I = A_n$. □

Pese a que el álgebra de Weyl A_n es un anillo simple, está lejos de ser un anillo de división. De hecho, los únicos elementos invertibles en A_n son las constantes.

Esto se observa fácilmente: si $D \in A_n$ tuviera inverso, existiría $D' \in A_n$ tal que

$$DD' = 1.$$

De la segunda propiedad de la Proposición 1.3.4 sabemos que:

$$\deg(DD') = \deg(D) + \deg(D') = \deg(1) = 0.$$

Dado que el grado de un operador no nulo es siempre un número entero no negativo, concluimos que $\deg(D) = 0$, por lo que D debe ser una constante. Por tanto, todo operador no constante genera un ideal izquierdo propio no trivial en A_n.

Observación 1.3.8. *La simplicidad del álgebra A_n significa que no posee ideales biláteros propios distintos de cero y de sí misma. En contraste, en el caso conmutativo, la simplicidad de un anillo conmutativo implica que dicho anillo es un cuerpo, es decir, todos sus elementos no nulos son invertibles. Por lo tanto, la simplicidad en contextos no conmutativos, como el álgebra de Weyl, es una propiedad más general y menos restrictiva que en el caso conmutativo.*

El álgebra de Weyl tampoco es un anillo de ideales principales por la izquierda. Por ejemplo, el ideal izquierdo generado por ∂_1 y ∂_2 en A_2 no es principal.

Sin embargo, todo ideal izquierdo de A_n puede ser generado por a lo sumo dos elementos. Este resultado, de carácter técnico y fuera del alcance de este documento, se encuentra en el primer capítulo de Björk [Bjö79] y en trabajos clásicos de Dixmier [Dix70].

Observación 1.3.9. *En un anillo no necesariamente conmutativo, distinguir entre módulos izquierdos y módulos derechos es esencial, ya que la multiplicación no es conmutativa. Sin embargo, esta distinción se puede traducir utilizando el anillo opuesto* A^{op}*, en el cual la multiplicación se invierte. Así, un módulo izquierdo sobre* A *es lo mismo que un módulo derecho sobre* A^{op}*.*

En el caso conmutativo, $A = A^{\mathrm{op}}$*, por lo que no hay diferencia entre trabajar con módulos por la izquierda o por la derecha. Sorprendentemente, esto también ocurre cuando* A *es el álgebra de Weyl sobre un cuerpo de característica cero ya que* A *es isomorfo a* A^{op}*. Por tanto, resulta habitual trabajar con módulos izquierdos por conveniencia, sin pérdida de generalidad. Esta simetría se menciona en [Sta78] y se habla de forma más general en [Qui21].*

Capítulo 2

El anillo de operadores diferenciales

El objetivo de este capítulo es describir el *anillo de operadores diferenciales* sobre una K-álgebra conmutativa R, en el sentido introducido por Grothendieck, y mostrar que el álgebra de Weyl $A_n(K)$ puede identificarse con el anillo de operadores diferenciales sobre $K[X]$.

Para abordar este objetivo, el capítulo se divide en dos partes donde, aunque muchos de los resultados son válidos para cuerpos de característica arbitraria, nosotros continuaremos asumiendo que K es un cuerpo de característica cero. En la primera sección, se trabaja en el marco general de una K-álgebra conmutativa cualquiera. Se introduce la noción de *orden* de un operador diferencial, se define el conjunto $D^n(R)$ de operadores de orden menor o igual que n, y se estudian las propiedades fundamentales de estas construcciones.

En la segunda parte, se restringe el análisis al caso concreto en que $R = K[X]$. En este contexto, se caracterizan las derivaciones de $K[X]$ y se describe explícitamente la estructura del anillo de operadores diferenciales, lo que permite establecer una correspondencia natural con el álgebra de Weyl $A_n(K)$.

La referencia principal para este capítulo es el tercer capítulo de [Cou95], donde se desarrolla con claridad y detalle esta identificación. Esta conexión proporciona un puente conceptual entre el enfoque algebraico y el geométrico en el estudio de operadores diferenciales.

2.1. Derivaciones

Para estudiar el anillo de operadores diferenciales sobre una K-álgebra conmutativa R, seguimos la definición introducida por Grothendieck, que mide la "complejidad" de estos operadores mediante la noción de *orden*. Esta se define inductivamente a partir de la interacción del operador con la multiplicación por elementos de R. A continuación, presentamos esta definición.

Definición 2.1.1. *Sea R una K-álgebra conmutativa. Llamaremos **operador diferencial de orden** $\leq n$ a todo elemento de $\mathrm{End}_K(R)$, es decir, todo endomorfismo*

K-lineal de R (no necesariamente un morfismo de K-álgebras). Definimos el **orden** *de un operador $P \in \mathrm{End}_K(R)$ inductivamente de la siguiente forma:*

- *Se dice que P es de* **orden** *0 si conmuta con todos los elementos de R, es decir, si para todo $a \in R$ se tiene $[P, a] = 0$. Esto es $P(ar) = aP(r)\ \forall a \in R$.*
- *Para $n > 0$, decimos que P es de* **orden** *$\leq n$ si para todo $a \in R$, el conmutador $[P, a]$ es un operador de orden $\leq n - 1$.*

Denotamos por $D^n(R)$ al conjunto de todos los operadores $P \in \mathrm{End}_K(R)$ de orden menor o igual que n.

A partir de esta definición, diremos que un operador $P \in \mathrm{End}_K(R)$ es de **orden exactamente** n si $P \in D^n(R)$ pero $P \notin D^{n-1}(R)$. Es decir, el orden exacto de un operador es el menor entero n tal que $P \in D^n(R)$.

Observación 2.1.2. *Por definición, un* operador diferencial *sobre R es un operador que pertenece a algún $D^n(R)$; es decir, todos los operadores diferenciales tienen orden finito.*

Además, es inmediato ver que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $D^n(R)$ es un subespacio vectorial de $\mathrm{End}_K(R)$. En efecto, si $P, Q \in D^n(R)$ y $\lambda \in K$, entonces $[P + Q, a] = [P, a] + [Q, a]$ y $[\lambda P, a] = \lambda[P, a]$ para todo $a \in R$, por lo que $P + Q$ y λP también son de orden $\leq n$.

Como mencionamos al inicio del Capítulo 1, podemos identificar un operador $P \in \mathrm{End}_K(R)$ con un elemento de R, considerado como subálgebra de $\mathrm{End}_K(R)$ mediante la multiplicación por la izquierda. Con esta identificación, podemos caracterizar los operadores de orden cero.

Proposición 2.1.3 (Caracterización de los operadores de orden cero)**.** *Un operador $P \in \mathrm{End}_K(R)$ tiene orden 0 si y solo si P pertenece a R.*

Demostración: Supongamos que P tiene orden 0. Por definición, esto significa que $P(ar) = aP(r)$ para todo $a, r \in R$. Tomando $r = 1$, obtenemos

$$P(a) = aP(1) \qquad \text{para todo } a \in R.$$

Sea $b := P(1) \in R$. Entonces $P(a) = ab$ para todo a, lo que muestra que P es la multiplicación por b. En otras palabras, $P \in R$.

Recíprocamente, si $P \in R$, es decir, P es la multiplicación por algún $b \in R$, entonces para todo $a, r \in R$ se cumple

$$P(ar) = b(ar) = (ab)r = a(br) = aP(r).$$

Es decir, $[P, a] = 0$ para todo $a \in R$, y por definición P es de orden 0.

Concluimos que un operador tiene orden 0 si y solo si pertenece a R. □

Hagamos algunos ejemplos donde se ilustre con claridad la noción de orden de un operador, según la definición anterior. Para ello, consideraremos $R = K[X]$, que es una

K-álgebra conmutativa, y trabajaremos con operadores ya introducidos en el Capítulo 1. Estos ejemplos servirán como base para entender con mayor profundidad la sección siguiente.

Ejemplo 2.1.4 (Multiplicación por x). Sea $R = K[x]$ y recordemos el operador $P \in \mathrm{End}_K(R)$ definido por $P(f) = x \cdot f$, es decir, la multiplicación por x. Para estudiar su orden, observamos el conmutador de Lie con un elemento arbitrario $a \in R$:

$$[P, a](f) = P(af) - aP(f) = xaf - axf = 0.$$

Dado que esto ocurre para todo $a \in R$ y todo $f \in R$, concluimos que $[P, a] = 0$ para todo a, y por tanto P es un operador de orden 0.

Ejemplo 2.1.5 (Derivada usual). Sea $R = K[x]$ y recordemos el operador $D(f) = \partial(f)$, es decir, la derivada usual respecto de x. Para calcular su orden, evaluamos el conmutador con un elemento arbitrario $a \in R$:

$$\begin{aligned}[D, a](f) = D(af) - aD(f) &= \frac{\partial(af)}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial a}{\partial x} f + a\frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} f.\end{aligned}$$

Este resultado corresponde a la multiplicación por $\frac{\partial a}{\partial x} \in K[x]$, la cual, como vimos en el Ejemplo 2.1.4, es un operador de orden 0. Como esto es válido para todo $a \in R$, se concluye que D es un operador de orden 1.

Ejemplo 2.1.6 (Derivada segunda). Sea $P(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en $R = K[x]$. Calculamos el conmutador con $a \in R$:

$$\begin{aligned}[P, a](f) &= \frac{\partial^2(af)}{\partial x^2} - a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial x} f + a\frac{\partial f}{\partial x}\right) - a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} f + 2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}$$

Este operador tiene dos términos:

- $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} f$, que es un operador de orden 0, pues consiste en multiplicar por un elemento de $K[x]$, como vimos en el Ejemplo 2.1.4.
- $2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$, que es un operador de orden 1, ya que es el producto de un elemento de $K[x]$ por una derivada de orden 1, como vimos en el Ejemplo 2.1.5.

Por tanto, $[P, a]$ es de orden 1 para todo $a \in R$, lo que implica que P es un operador de orden 2.

Estos ejemplos sugieren que la derivada n-ésima será un operador de orden n en $K[X]$. Verificaremos esto más adelante en el Lema 2.2.1 mediante inducción.

Podemos caracterizar los operadores de orden ≤ 1. Para ello, primero definimos qué es una derivación.

Definición 2.1.7. *Llamamos* ***derivación*** *de una K-álgebra conmutativa R a un operador K-lineal $D : R \to R$ que satisface la regla de Leibniz:*

$$D(ab) = aD(b) + bD(a), \quad \textit{para todo } a, b \in R.$$

Denotamos por $Der_K(R) \subseteq End_K(R)$ al K-espacio vectorial de todas las derivaciones de R.

Observación 2.1.8. *Si $D \in Der_K(R)$ y $a \in R$, podemos definir una nueva derivación aD dada por*

$$(aD)(b) := a\, D(b), \quad \textit{para todo } b \in R.$$

Así, $Der_K(R)$ es un R-módulo por la izquierda para esta acción.

Una propiedad elemental que se verifica es que la derivación aplicada a la unidad es cero, ya que

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2D(1),$$

de donde se sigue que

$$D(1) = 0.$$

Antes de pasar a ejemplos, veamos cuál es el orden de una derivación.

Proposición 2.1.9 (Toda derivación tiene orden 1)**.** *Sea $D \in Der_K(R)$. Entonces D es un operador de orden 1, es decir,*

$$D \in D^1(R) \setminus D^0(R).$$

Demostración: Para cualquier $a, b \in R$ se cumple

$$[D, a](b) = D(ab) - aD(b) = D(a)b,$$

donde hemos usado la regla de Leibniz. Esto muestra que $[D, a]$ es la multiplicación por $D(a)$, un operador de orden 0 por la Proposición 2.1.3. Por definición, esto implica que D tiene orden 1.

Además, como $D(1) = 0$, D no pertenece a $D^0(R)$. Por lo tanto, podemos concluir que $D \in D^1(R) \setminus D^0(R)$. □

Pongamos un ejemplo de derivación que conecte con la geometría diferencial.

Ejemplo 2.1.10. Sea M una variedad diferenciable y sea $\mathfrak{F}(M)$ el anillo de funciones diferenciables $C^\infty(M)$. Un *campo vectorial* X sobre M puede identificarse de manera natural con una derivación de $\mathfrak{F}(M)$, es decir, un operador

$$X : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

lineal sobre $\mathbb{R}$ que satisface la regla de Leibniz. Esta identificación establece la correspondencia entre la noción geométrica de campo vectorial y la noción algebraica de derivación sobre el anillo de funciones diferenciables. Para una exposición más detallada de este hecho y de la conexión con la geometría diferencial, véase por ejemplo [Lee13] o [Gua].

Habiendo visto que toda derivación tiene orden 1 (Proposición 2.1.9) y que los elementos de R tienen orden 0 (Proposición 2.1.3), vamos a ver ahora el recíproco: más precisamente, queremos caracterizar todos los operadores de orden menor o igual que uno.

Proposición 2.1.11 (Caracterización de operadores diferenciales de orden menor o igual a uno)**.** *Los operadores de orden ≤ 1 se corresponden con los elementos de $Der_K(R) + R$. Los elementos de orden cero son los elementos de R.*

Demostración: Sea $Q \in D^1(R)$. Definimos $P := Q - Q(1)$. Como $Q(1) \in R$ y $R \subset D^1(R)$ (Proposición 2.1.3), se sigue automáticamente que $P \in D^1(R)$. Además,

$$P(1) = Q(1) - Q(1) = 0,$$

lo que implica que P es una derivación de R, es decir, $P \in Der_K(R)$. Finalmente, como $Q = P + Q(1)$ con $P \in Der_K(R)$ y $Q(1) \in R$, concluimos que $Q \in Der_K(R) + R$.

Recíprocamente, si $Q = \delta + r$ con $\delta \in Der_K(R)$ y $r \in R$, entonces δ tiene orden ≤ 1 y r tiene orden 0, por lo que $Q \in D^1(R)$. Por tanto, $D^1(R) = Der_K(R) + R$, y queda demostrada la caracterización de los operadores de orden ≤ 1.

La segunda parte es directa por la Proposición 2.1.3. $\square$

Hasta ahora hemos definido el concepto de operador diferencial en términos de su orden y hemos visto cómo caracterizar aquellos de orden menor o igual a uno. Esto nos permite construir una estructura algebraica natural que agrupa todos los operadores diferenciales que actúan sobre una K-álgebra conmutativa. Formalizamos esta idea con la siguiente definición:

Definición 2.1.12. *Sea R una K-álgebra conmutativa. Llamamos **anillo de operadores diferenciales** $D(R)$ de R al conjunto de todos los operadores de $End_K(R)$ que tienen orden finito.*

En otras palabras, $D(R)$ es la unión de los K-espacios vectoriales $D^n(R)$. Para ver que esta definición tiene sentido, vamos a mostrar que la suma y la composición de dos operadores de orden finito también tienen orden finito. Para la suma es sencillo, ya que la propiedad de ser operador de orden finito es preservada por la adición debido a la linealidad sobre K. Por tanto, basta demostrar explícitamente que el producto de dos operadores de orden finito también es de orden finito.

Proposición 2.1.13 (Orden del producto de operadores diferenciales)**.** *Sea $P \in D^n(R)$ y $Q \in D^m(R)$, entonces $P \cdot Q \in D^{n+m}(R)$.*

Demostración: Vamos a probar esta proposición por inducción sobre la suma $k = m + n$. En el caso base, si $k = 0$, necesariamente $m = n = 0$. Los elementos de orden cero son exactamente los elementos de R, es decir, $D^0(R) = R$. Por lo tanto, tanto P como Q pertenecen a R, y su producto PQ también está en $R = D^0(R)$, como queríamos.

Supongamos ahora que $k > 0$ y que la afirmación es cierta para todas las sumas de órdenes menores que k. Queremos demostrar que entonces se cumple para k.

Sea $a \in R$. Consideramos el conmutador

$$[PQ, a] = PQa - aPQ.$$

Observamos que podemos escribirlo como

$$[PQ, a] = PQa - PaQ + PaQ - aPQ = P(Qa - aQ) + (Pa - aP)Q = P[Q, a] + [P, a]Q.$$

Por la definición del orden, sabemos que $[P, a] \in D^{n-1}(R)$ y $[Q, a] \in D^{m-1}(R)$. Como en cada caso la suma de órdenes es menor que k, es decir, $(n-1)+m < k$ y $n+(m-1) < k$, podemos aplicar la hipótesis de inducción para afirmar que

$$P[Q, a], \quad [P, a]Q \in D^{n+m-1}(R).$$

De aquí deducimos que

$$[PQ, a] = P[Q, a] + [P, a]Q \in D^{n+m-1}(R).$$

Finalmente, al cumplirse que $[PQ, a] \in D^{n+m-1}(R)$ para todo $a \in R$, concluimos que $PQ \in D^{n+m}(R)$, lo que termina la demostración. □

Con esta proposición, sabemos que al multiplicar operadores diferenciales de orden finito, el resultado sigue siendo un operador de orden finito. Terminemos viendo un ejemplo donde mostremos que no siempre se alcanza el orden máximo.

Ejemplo 2.1.14 (Álgebra de los números duales)**.** Sea la K-álgebra conmutativa $K[x]/(x^2)$. Consideremos los operadores A y B definidos por

$$A(f) = xf, \quad \text{y} \quad B(f) = x\frac{\partial f}{\partial x},$$

que son de órdenes 0 y 1, respectivamente.

Observamos que

$$AB(f) = A(B(f)) = x \cdot \left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right) = x^2\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

ya que $x^2 = 0$ en $K[x]/(x^2)$. Por tanto, el operador compuesto AB es el operador nulo, de orden 0, a pesar de que esperábamos un orden mayor por la suma de los órdenes individuales.

2.2. Relación con el álgebra de Weyl

En esta sección abordaremos el estudio detallado de la estructura del anillo de operadores diferenciales sobre el anillo de polinomios $K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$, explorando cómo esta estructura se relaciona y puede identificarse con el álgebra de Weyl.

Como generalización de los ejemplos de operadores diferenciales que vimos en la sección anterior, nos centraremos en operadores construidos a partir de derivadas parciales. El siguiente resultado caracteriza el orden de estos operadores.

Lema 2.2.1 (Orden de operadores diferenciales de tipo derivada multi-índice)**.** *Sea $P = \partial^\alpha$ un operador diferencial sobre $K[X]$, con $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice. Entonces, el orden del operador P coincide con la suma de las componentes de α, es decir,*

$$\operatorname{ord}(P) = |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Demostración: Sea $P = \partial^\alpha$ un operador diferencial en $K[X]$ con $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice. Queremos demostrar que el orden de P como operador en $\operatorname{End}_K(K[X])$ es exactamente $|\alpha|$. Procederemos por inducción sobre $|\alpha|$.

Para el caso base, consideramos $|\alpha| = 0$, es decir, $\alpha = 0$. En este caso, $\partial^0 = \mathrm{Id}$, la identidad. Por la Proposición 2.1.3, como la identidad es el $1 \in K[X] = R$ se considera un operador de orden cero, es decir,

$$\partial^0 = \mathrm{Id} \in D^0(R),$$

y por lo tanto el caso base se cumple.

Supongamos que, por hipótesis de inducción, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| = k$, el operador ∂^α tiene orden exactamente k, es decir,

$$\partial^\alpha \in D^k(R) \setminus D^{k-1}(R).$$

Sea ahora $\beta \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\beta| = k + 1$. Como $\beta \neq 0$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_i \neq 0$. Definimos entonces $\alpha := \beta - e_i$, de modo que $|\alpha| = k$, y escribimos

$$\partial^\beta = \partial_i \partial^\alpha.$$

Por hipótesis de inducción, ∂^α es un operador de orden k. Ahora, queremos probar que $\partial^\beta \in D^{k+1}(R) \setminus D^k(R)$.

Sea $f \in K[X]$. Entonces, calculamos el conmutador:

$$\begin{aligned}
[\partial^\beta, f] &= [\partial_i \partial^\alpha, f] = \partial_i \partial^\alpha f - f \partial_i \partial^\alpha \\
&= \partial_i \partial^\alpha f - \partial_i f \partial^\alpha + \partial_i f \partial^\alpha - f \partial_i \partial^\alpha = \partial_i [\partial^\alpha, f] + [\partial_i, f] \partial^\alpha.
\end{aligned}$$

El primer término, $\partial_i[\partial^\alpha, f]$, pertenece a $D^k(R)$, pues por hipótesis de inducción se tiene $[\partial^\alpha, f] \in D^{k-1}(R)$ y, como $\partial_i \in D^1(R)$, la composición satisface $\partial_i \cdot D^{k-1}(R) \subseteq D^k(R)$. El segundo término, $[\partial_i, f]\partial^\alpha$, también está en $D^k(R)$, ya que $[\partial_i, f] \in D^0(R)$ y $\partial^\alpha \in D^k(R)$. Por lo tanto, $[\partial^\beta, f] \in D^k(R)$, lo que implica que $\partial^\beta \in D^{k+1}(R)$.

Queda por ver que $\partial^\beta \notin D^k(R)$ para concluir que su orden es exactamente $k+1$. Para ello, basta encontrar $k + 1$ elementos $f_1, \ldots, f_{k+1} \in K[X]$ tales que el conmutador iterado

$$[f_1, [f_2, \ldots, [f_{k+1}, \partial^\beta] \ldots]] \neq 0.$$

Tomemos $f_j = x_{i_j}$, con i_j en el soporte de β para cada $j = 1, \ldots, k + 1$. Entonces se cumple

$$[x_{i_1}, [x_{i_2}, \ldots, [x_{i_{k+1}}, \partial^\beta] \ldots]] \neq 0,$$

pues derivar sucesivamente respecto de las variables indicadas en el soporte de β no anula el operador.

Por lo tanto, $\partial^\beta \notin D^k(R)$, y se concluye que su orden es exactamente $k+1 = |\beta|$.

□

Observación 2.2.2. *Para el caso particular del operador ∂^α, su orden y su grado, definido en la Definición 1.3.1, coinciden.*

Tras haber visto el ejemplo del operador ∂^α y sus propiedades, estamos en posición de describir con más detalle la estructura de las derivaciones en el álgebra de polinomios. En particular, es importante entender que todas las derivaciones en $K[X]$ pueden expresarse de forma muy concreta como combinaciones lineales de las derivadas parciales con coeficientes en el mismo anillo. Esta caracterización será fundamental para analizar más adelante las propiedades de los operadores diferenciales en este contexto.

Proposición 2.2.3 (Forma de las derivaciones)**.** *Toda derivación de $K[X]$ es de la forma $\sum_{i=1}^n f_i\partial_i$, para algunos $f_1, \dots, f_n \in K[X]$. Dicho de otro modo, $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$ es una base del módulo de derivaciones.*

Demostración: Sea $D \in Der_K(K[X])$. Empezamos demostrando por inducción que

$$D(x_i^k) = kx_i^{k-1}D(x_i), \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Para el caso $k = 1$ la igualdad es trivial, ya que

$$D(x_i) = 1 \cdot x_i^0 D(x_i) = D(x_i).$$

Supongamos que la afirmación es cierta para un entero $k \geq 1$. Entonces, aplicando la regla de Leibniz, tenemos

$$D(x_i^{k+1}) = D(x_i^k x_i) = D(x_i^k)x_i + x_i^k D(x_i).$$

Usando la hipótesis de inducción y agrupando términos, obtenemos

$$D(x_i^{k+1}) = kx_i^{k-1}D(x_i)x_i + x_i^k D(x_i) = (k+1)x_i^k D(x_i),$$

que es lo que queríamos demostrar.

En particular, al aplicar D a un monomio general, estamos realizando la derivada en cada variable con respecto a su exponente correspondiente. Por ello, se cumple que

$$\left(D - \sum_{i=1}^n D(x_i)\partial_i\right)(x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}) = 0,$$

para todo monomio $x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$.

Dado que cualquier polinomio $f \in K[X]$ es combinación lineal de monomios, y la expresión anterior se verifica para cada uno de ellos, se sigue que

$$D(f) = \sum_{i=1}^n D(x_i)\partial_i(f),$$

para todo $f \in K[X]$. Es decir,

$$D = \sum_{i=1}^{n} D(x_i)\partial_i.$$

Esto prueba que toda derivación D se puede escribir como combinación lineal de las derivadas parciales ∂_i con coeficientes en $K[X]$. $\square$

Es ahora, con estas herramientas, que podemos mostrar que el álgebra de Weyl es un tipo particular de anillo de operadores diferenciales. Para ello, primero demostraremos algunos lemas previos que serán fundamentales.

Lema 2.2.4 (Caracterización de operadores de orden cero)**.** *Sea* $P \in D(K[X])$*. Si* $[P, x_i] = 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$*, entonces* $P \in K[X]$*.*

Demostración: Vamos a demostrar que $[P, f] = 0$ para todo $f \in K[X]$. Así, por definición, P será un elemento de orden cero y, por el Lema 2.1.11, esto implicará que $P \in K[X]$.

Como el corchete de Lie es aditivo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que f es un monomio de la forma $f = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Además, si $|\alpha| = 0$, entonces $f \in K$, y es trivial comprobar que $[P, f] = 0$. Por tanto, asumimos que existe algún i tal que $\alpha_i \neq 0$.

Demostraremos por inducción sobre el grado $|\alpha|$ que $[P, x^\alpha] = 0$. Para el caso base, cuando $|\alpha| = 1$, se tiene directamente por hipótesis que

$$[P, x^\alpha] = [P, x_i] = 0.$$

Supongamos ahora que para todo α con $|\alpha| = k \geq 1$ se cumple que $[P, x^\alpha] = 0$. Consideremos α tal que $|\alpha| = k + 1$. Como P es un operador diferencial, el corchete satisface la regla de Leibniz, y por tanto

$$[P, x^\alpha] = [P, x_i x^{\alpha - e_i}] = [P, x_i]x^{\alpha - e_i} + x_i[P, x^{\alpha - e_i}].$$

Por hipótesis de inducción, como $|\alpha - e_i| = k$, tenemos que $[P, x^{\alpha - e_i}] = 0$. Además, por la hipótesis del lema, $[P, x_i] = 0$. Por lo tanto, $[P, x^\alpha] = 0$, y con ello concluimos la demostración. $\square$

Definimos C_r como el conjunto de operadores en A_n que se pueden escribir como

$$\sum_\alpha f_\alpha \partial^\alpha, \quad \text{con } |\alpha| \leq r,$$

donde $f_\alpha \in K[X]$ y $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ para $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Observamos que C_r también puede caracterizarse como

$$C_r = C_{r+1} \cap D^r(K[X]).$$

Esta igualdad tiene sentido si recordamos que C_{r+1} contiene todos los operadores en A_n de orden a lo sumo $r + 1$, mientras que $D^r(K[X])$ denota el conjunto (más general) de todos los operadores diferenciales de orden a lo sumo r sobre $K[X]$. Al intersecar ambos conjuntos, se eliminan del lado de C_{r+1} los operadores de orden estrictamente mayor que r, quedando únicamente aquellos operadores de orden $\leq r$ que además pertenecen a A_n, es decir, exactamente los elementos de C_r. Por otro lado, de acuerdo con la Proposición 2.1.11, se tiene que $C_1 = \mathrm{Der}_K(K[X]) + K[X]$ y que $C_0 = K[X]$.

Adoptamos el convenio de que si $k < n$, entonces identificamos $\mathbb{N}^k$ con un subconjunto de $\mathbb{N}^n$ mediante la inclusión que asocia a cada k-upla la n-upla correspondiente cuyas últimas $n-k$ componentes son cero.

Además, por el Lema 2.2.1, sabemos que cada operador del tipo ∂^α tiene orden exactamente $|\alpha|$. Por tanto, cualquier combinación lineal finita de operadores ∂^α con $|\alpha| \leq r$ y coeficientes en $K[X]$ define un operador diferencial de orden a lo sumo r. En consecuencia, se concluye que

$$C_r \subseteq D^r(K[X]). \tag{2.1}$$

El siguiente lema nos permitirá construir operadores en C_r a partir de ciertos conmutadores que satisfacen condiciones de simetría.

Lema 2.2.5 (Existencia de un operador generador a partir de conmutadores)**.** *Sean $P_1, \ldots, P_n \in C_{r-1}$ y asumamos que $[P_i, x_j] = [P_j, x_i]$ para $1 \leq i, j \leq n$. Entonces existe $Q \in C_r$ tal que $P_i = [Q, x_i]$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración: Queremos demostrar que, si $P_1, \ldots, P_n \in C_{r-1}$ satisfacen la condición de simetría $[P_i, x_j] = [P_j, x_i]$ para todo par de índices i, j, entonces existe un operador $Q \in C_r$ tal que $[Q, x_i] = P_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Consideramos una expresión general para $Q \in C_r$ de la forma

$$Q = \sum_{|\beta| \leq r} g_\beta \, \partial^\beta,$$

donde los coeficientes $g_\beta \in K[X]$ son funciones polinomiales a determinar. Usando el primer ítem del Lema 1.3.3, se tiene que

$$[Q, x_i] = \sum_{|\beta| \leq r} g_\beta \, [\partial^\beta, x_i] = \sum_{|\beta| \leq r} \beta_i \, g_\beta \, \partial^{\beta - e_i}.$$

Por otro lado, cada $P_i \in C_{r-1}$ se puede escribir como

$$P_i = \sum_{|\alpha| \leq r-1} f_{i,\alpha} \, \partial^\alpha,$$

con $f_{i,\alpha} \in K[X]$. Para que se cumpla $[Q, x_i] = P_i$, debemos entonces tener, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq r-1$,

$$\sum_{\beta:\ \beta - e_i = \alpha} \beta_i \, g_\beta = f_{i,\alpha}.$$

Este sistema es lineal en las funciones desconocidas g_β, y está determinado por los datos $f_{i,\alpha}$. La clave es que este sistema tiene solución si, y solo si, los coeficientes $f_{i,\alpha}$

satisfacen las condiciones de compatibilidad $\partial_j f_{i,\alpha} = \partial_i f_{j,\alpha}$, lo cual equivale a que $[P_i, x_j] = [P_j, x_i]$. Como esto es parte de la hipótesis del lema, las condiciones de compatibilidad se cumplen, y por tanto el sistema admite solución con $g_\beta \in K[X]$. Así, existe un operador $Q \in C_r$ tal que $[Q, x_i] = P_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, lo que demuestra el resultado. □

Estamos en condiciones de establecer una caracterización completa del anillo de operadores diferenciales sobre $K[X]$. Esta caracterización conecta de manera directa con el álgebra de Weyl.

Teorema 2.2.6 (El álgebra de Weyl como un anillo de operadores diferenciales)**.** *El anillo de operadores diferenciales sobre $K[X]$ corresponde con $A_n(K)$. Además de esto, $D^k(K[X]) = C_k$.*

Demostración: Basta con probar que $D^k(K[X]) \subseteq C_k$, ya que la inclusión opuesta $C_k \subseteq D^k(K[X])$ la vimos en 2.1. Si logramos demostrar que $D^k(K[X]) = C_k$ para todo k, se sigue entonces que

$$D(K[X]) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D^k(K[X]) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k = A_n(K),$$

con lo que se concluye la igualdad entre el anillo de operadores diferenciales y el álgebra de Weyl.

Procedemos por inducción sobre k para probar que $D^k(K[X]) = C_k$. Para $k = 1$, sea $P \in D^1(K[X])$. Entonces, por el Lema 2.1.11, se tiene que $P \in \mathrm{Der}_K(K[X]) + K[X]$, y por la Proposición 2.2.3 sabemos que toda derivación en $K[X]$ es combinación lineal de las derivadas parciales con coeficientes en $K[X]$. Por tanto, $P \in C_1$ y se cumple que $D^1(K[X]) = C_1$.

Supongamos ahora que $D^k(K[X]) = C_k$ para todo $k \leq m-1$. Sea $P \in D^m(K[X])$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos $P_i := [P, x_i]$. Entonces $P_i \in D^{m-1}(K[X])$, y por la hipótesis de inducción, $P_i \in C_{m-1}$ para todo i.

Además, para todos $1 \leq i, j \leq n$, se cumple que

$$[P_i, x_j] = [[P, x_i], x_j] = -[[x_j, P], x_i] = [[P, x_j], x_i] = [P_j, x_i],$$

es decir, $[P_i, x_j] = [P_j, x_i]$. Por el Lema 2.2.5, existe entonces un operador $Q \in C_m$ tal que $[Q, x_i] = P_i$ para todo i.

Consideramos ahora $Q - P$. Para todo i, se tiene:

$$[Q - P, x_i] = [Q, x_i] - [P, x_i] = P_i - P_i = 0.$$

Por el Lema 2.2.4, se concluye que $Q - P \in K[X] \subseteq C_0 \subseteq C_m$. Por tanto, $P = Q - (Q - P) \in C_m$, lo que completa el paso inductivo.

En consecuencia, $D^k(K[X]) = C_k$ para todo k, y podemos concluir que $D(K[X]) = A_n(K)$. □

Capítulo 3

Anillos de polinomios torcidos

El objetivo de este capítulo es presentar una descripción alternativa del álgebra de Weyl $A_n(K)$, no como un anillo de operadores diferenciales, sino como un anillo de *polinomios torcidos*; esto es, una K-álgebra no conmutativa definida por relaciones específicas entre sus generadores. Veremos que esta construcción algebraica conduce a un anillo isomorfo al que se obtiene mediante operadores diferenciales sobre $K[X]$, mostrando así que ambas definiciones —la analítica, vía derivadas, y la algebraica, vía relaciones de conmutación— son equivalentes.

La primera parte del capítulo se dedica a formalizar esta construcción: comenzaremos definiendo los anillos de polinomios torcidos y, con esa herramienta, reconstruiremos el álgebra de Weyl desde una perspectiva puramente algebraica. Finalmente, demostraremos el isomorfismo entre esta versión y la ya conocida definición en términos de operadores diferenciales.

En la segunda parte, nos centraremos en una propiedad estructural clave del álgebra de Weyl: su *noetherianidad*. Demostraremos que todo ideal (a izquierda o derecha) es finitamente generado, es decir, que $A_n(K)$ es un anillo noetheriano. Este resultado, conocido como el *teorema de la base de Hilbert* en el contexto no conmutativo, será esencial para el desarrollo posterior de la teoría de módulos.

Finalmente, en la tercera parte del capítulo analizaremos cómo se modifican las propiedades del álgebra de Weyl cuando el cuerpo base K tiene *característica positiva*. En este contexto, ciertas construcciones y resultados válidos en característica cero dejan de ser aplicables, lo que justifica la restricción que hemos adoptado.

Para el desarrollo de este capítulo seguiremos dos referencias principales. En la primera parte, hasta la segunda sección incluida, nos basaremos en los dos primeros capítulos de [MR04]. Para la tercera parte, dedicada a discutir el caso de característica positiva, seguiremos el tratamiento del Capítulo 2 de [Cou95].

3.1. Definición y relaciones

Empecemos esta sección presentando a nuestro gran protagonista: el *anillo de polinomios torcidos*.

Definición 3.1.1. *Sea R un anillo y δ una derivación en R. Decimos que S es un* ***anillo de polinomios torcidos*** *sobre R o un* ***anillo de operadores diferenciales*** *sobre R, si tenemos que:*

- *S es un anillo, contiene a R como subanillo;*
- *x es un elemento de S;*
- *S es un R-módulo libre (es decir, admite una base por la izquierda) con base $\{1, x, x^2, \dots\}$;*
- *$xr = rx + \delta(r)$ para todo $r \in R$.*

Escribiremos $S = R[x; \delta]$.

El siguiente resultado encontrado en [MR04], nos sirve para justificar esta notación:

Proposición 3.1.2. *Sea $S = R[x; \delta]$ un anillo de polinomios torcidos, donde δ es una derivación sobre R. Supongamos que tenemos un anillo T, un homomorfismo de anillos $\varphi : R \to T$, y un elemento $y \in T$ tal que, para todo $r \in R$, se cumple la relación de conmutación:*

$$y\varphi(r) = \varphi(r)y + \varphi(\delta(r)).$$

Entonces, existe un único homomorfismo de anillos $\psi : S \to T$ tal que $\psi|_R = \varphi$ y $\psi(x) = y$.

Demostración: No incluimos la demostración. Este resultado se puede ver como un caso particular de la Proposición 2.4 de [MR04], tomando $\alpha = \mathrm{Id}$. La demostración se basa en la propiedad universal correspondiente, tal como se indica en la referencia. □
Justifiquemos su existencia.

Proposición 3.1.3 (Existencia del anillo de operadores diferenciables)**.** *Dado un anillo R y una derivación $\delta \colon R \to R$, existe un anillo $R[x; \delta]$, llamado anillo de operadores diferenciales, que contiene a R y un elemento x tal que*

$$xa = ax + \delta(a), \quad \textit{para todo } a \in R,$$

y que es generado como anillo por R y x sujeto a esta relación.

Demostración: Sea S el conjunto de todas las expresiones formales $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $a_i \in R$. Definimos la suma en S término a término, y el producto mediante la regla $xa = ax + \delta(a)$, de la cual se obtiene inductivamente

$$x^i a = \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} \delta^{\,i-l}(a)\, x^l.$$

Así, el producto de dos elementos de S está dado por

$$\left(\sum_i a_i x^i\right)\left(\sum_j b_j x^j\right) = \sum_{i,j} \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} a_i\, \delta^{\,i-l}(b_j)\, x^{l+j}.$$

Se verifica directamente que estas operaciones son bien definidas y dotan a S de estructura de anillo. Además, identificando cada $a \in R$ con $ax^0 \in S$, obtenemos un subanillo isomorfo a R dentro de S. Por construcción, el elemento $x \in S$ cumple la relación $xa = ax + \delta(a)$ para todo $a \in R$, y S está generado por R y x.

De este modo, S satisface exactamente las propiedades requeridas, y lo denotamos $R[x; \delta]$. $\square$

Ejemplo 3.1.4. Para el caso particular del anillo de polinomios $R = k[y]$, con k cuerpo, definimos la derivación $\delta = y\frac{d}{dy}$, que es la única derivación k-lineal en R tal que $\delta(y) = y$. En el anillo $R[x; \delta]$, la variable x satisface la relación de conmutación

$$xy = yx + y,$$

lo cual indica que x actúa como un operador diferencial sobre R, desplazando la variable y y generando términos adicionales.

Antes de enunciar el siguiente lema, conviene comentar que a partir de derivaciones que conmutan entre sí, podemos construir anillos de operadores diferenciales en varias variables, iterando la construcción del anillo de polinomios torcidos. El lema siguiente formaliza esta construcción y garantiza la existencia y unicidad de las extensiones de las derivaciones a los anillos construidos paso a paso.

Lema 3.1.5 (Construcción iterada de anillos de polinomios torcidos con derivaciones conmutativas)**.** *Sean $\delta_1, \ldots, \delta_n$ derivaciones conmutativas de un anillo R. Sea S_1 un anillo de operadores diferenciales sobre R definido de la siguiente manera:*

$$S_1 = R[x_1; \delta_1].$$

Para cada $i \geq 1$, construimos

$$S_{i+1} = S_i[x_{i+1}; \hat{\delta}_{i+1}],$$

donde $\hat{\delta}_{i+1}$ es una extensión de δ_{i+1} en S_i que cumple las dos siguientes condiciones:

- *$\hat{\delta}_{i+1}$ restringe a δ_{i+1} en R, es decir, $\hat{\delta}_{i+1}|_R = \delta_{i+1}$.*
- *$\hat{\delta}_{i+1}(x_j) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, i$.*

Entonces, $\hat{\delta}_{i+1}$ es una derivación en S_i bien definida y es única. En particular, obtenemos

$$S = S_n = R[x_1; \delta_1][x_2; \hat{\delta}_2] \cdots [x_n; \hat{\delta}_n],$$

que se denota comúnmente como

$$S = R[x_1, \ldots, x_n; \delta_1, \ldots, \delta_n].$$

Demostración: La existencia del anillo $S_1 = R[x_1; \delta_1]$ queda garantizada por la Observación 3.1.3, ya que R es un anillo y δ_1 una derivación en él. Para demostrar el lema, procederemos por inducción sobre i.

- Para el caso $i = 1$, construimos $\hat{\delta}_2$ y demostraremos que es la única derivación de $S_1 = R[x_1; \delta_1]$ tal que $\hat{\delta}_2|_R = \delta_2$ y $\hat{\delta}_2(x_1) = 0$. Notemos que las condiciones con las que hemos definido $\hat{\delta}_2$ implican que si tomamos un $f \in S_1$ definido como

  $$f = \sum_i a_i x_1^i,$$

  entonces,

  $$\hat{\delta}_2(f) = \sum_i \hat{\delta}_2(a_i)x_1^i + \sum_i a_i\hat{\delta}_2(x_1^i) = \sum_i \delta_2(a_i)x_1^i,$$

  pues $\hat{\delta}_2(x_1) = 0$.

  Para ver que $\hat{\delta}_2$ es una derivación en S_1, comprobaremos la linealidad y que cumple la regla de Leibniz. La linealidad se cumple porque, para $f, g \in S_1$, se tiene

  $$\hat{\delta}_2(f+g) = \sum_k \delta_2(a_k + b_k)x_1^k = \sum_k \delta_2(a_k)x_1^k + \sum_k \delta_2(b_k)x_1^k = \hat{\delta}_2(f) + \hat{\delta}_2(g),$$

  pues δ_2 es una derivación en R, en particular lineal.

  Para el producto, sean $f, g \in S_1$, entonces:

  $$\hat{\delta}_2(fg) = \sum_{k,l} \delta_2(a_k b_l)x_1^{k+l} = \sum_{k,l} \left(\delta_2(a_k)b_l + a_k\delta_2(b_l)\right)x_1^{k+l} = \hat{\delta}_2(f)g + f\hat{\delta}_2(g),$$

  donde hemos usado que δ_2 cumple la regla de Leibniz en R por ser derivación.

  Falta demostrar la unicidad, pero esto es mera comprobación suponiendo que existe otra derivación $\bar{\delta}_2$ en S_1 tal que $\bar{\delta}_2|_R = \delta_2$ y $\bar{\delta}_2(x_1) = 0$. Entonces, para $f \in S_1$, se tendría

  $$\bar{\delta}_2(f) = \sum_j \delta_2(a_j)x_1^j = \hat{\delta}_2(f),$$

  por tanto $\bar{\delta}_2 = \hat{\delta}_2$, y queda demostrada la unicidad.

- Para el caso general, suponemos cierto para $i-1$, es decir, que tenemos construido hasta

  $$S_i = S_{i-1}[x_i; \hat{\delta}_i]$$

  y demostramos para i definiendo $\hat{\delta}_{i+1}$ en S_i y construyendo

  $$S_{i+1} = S_i[x_{i+1}; \hat{\delta}_{i+1}].$$

  Es análogo al caso anterior, ya que con las hipótesis comprobamos que, para $f, g \in S_i$, como δ_i es una derivación en R:

  $$\hat{\delta}_i(f+g) = \sum_k \delta_i(a_k + b_k)x_{i-1}^k = \sum_k \delta_i(a_k)x_{i-1}^k + \sum_k \delta_i(b_k)x_{i-1}^k = \hat{\delta}_i(f) + \hat{\delta}_i(g),$$

y además,

$$\hat{\delta}_i(fg) = \sum_{k,l} \delta_i(a_k b_l) x_{i-1}^{k+l} = \sum_{k,l} \left(\delta_i(a_k) b_l + a_k \delta_i(b_l)\right) x_{i-1}^{k+l} = \hat{\delta}_i(f) g + f \hat{\delta}_i(g).$$

La unicidad también se razona de manera análoga.

□

Con este lema ya tenemos todas las herramientas necesarias para definir el álgebra de Weyl en un contexto general.

Definición 3.1.6. *Sea K un anillo conmutativo y $K[y]$ el anillo de polinomios en una variable sobre K. Sea $\frac{d}{dy}$ la derivación estándar en $K[y]$. El anillo de operadores diferenciales formal*

$$K[y][x; \frac{d}{dy}]$$

se llama ***(primera) álgebra de Weyl*** *sobre K y se denota por $\mathcal{A}_1(K)$.*

El álgebra de Weyl $\mathcal{A}_1(K)$ está generado, como álgebra sobre K, por los elementos x e y, que conmutan con los elementos de K y satisfacen la relación de conmutación

$$xy = yx + 1.$$

Extendiendo esta definición mediante el Lema 3.1.5, definimos el álgebra de Weyl de orden n:

Definición 3.1.7. *Sea $R = K[y_1, \ldots, y_n]$ un anillo de polinomios en n variables sobre K, y sean las derivadas parciales formales*

$$\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$$

derivaciones conmutativas en R. Definimos la ***(enésima) álgebra de Weyl*** *como el anillo de operadores diferenciales sobre R,*

$$K[y_1, \ldots, y_n][x_1, \ldots, x_n; \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}],$$

que se denota por $\mathcal{A}_n(K)$.

Podemos establecer que nuestra definición del álgebra de Weyl como subálgebra de operadores diferenciales en $\mathrm{End}_K(R)$ coincide, de hecho, con su construcción algebraica como anillo de polinomios torcidos iterados.

Teorema 3.1.8 (Isomorfismo entre las definiciones)**.** *Sea K un cuerpo de característica cero y sea $R = K[y_1, \ldots, y_n]$ el anillo de polinomios en n variables. Sea A_n el álgebra de Weyl, definida como la subálgebra de $\mathrm{End}_K(R)$ generada por los operadores de multiplicación por y_i y las derivadas parciales $\partial_i := \frac{\partial}{\partial y_i}$.*

Consideremos la n-ésima álgebra de Weyl definida como anillo de polinomios torcidos iterados

$$\mathcal{A}_n = R[x_1;\delta_1][x_2;\delta_2]\cdots[x_n;\delta_n],$$

donde cada δ_i es la derivación $\frac{\partial}{\partial y_i}$ sobre R, extendida inductivamente a los pasos anteriores mediante la regla

$$\delta_i(x_j) = 0 \quad \textit{para } j < i.$$

Entonces, existe un isomorfismo de K-álgebras

$$\psi : \mathcal{A}_n \longrightarrow A_n$$

que envía $y_i \mapsto$ multiplicación por y_i, y $x_i \mapsto \partial_i$. En particular, $\mathcal{A}_n \cong A_n$.

Demostración: Procederemos por inducción sobre n.

Sea $n = 1$. Entonces $R = K[y_1]$ y $\delta := \frac{d}{dy_1}$. El anillo de polinomios torcidos es $\mathcal{A}_1 = R[x_1;\delta]$, con la relación de multiplicación $x_1 f = f x_1 + \delta(f), \quad$ para todo $f \in R$. En particular, $x_1 y_1 = y_1 x_1 + 1$. Esto coincide exactamente con la relación de conmutación en el álgebra de Weyl $A_1 \subseteq \mathrm{End}_K(R)$, donde y_1 actúa por multiplicación y $\partial_1 := \frac{d}{dy_1}$ es la derivación usual.

Por la Proposición 3.1.2, existe un único homomorfismo de K-álgebras $\psi_1 : \mathcal{A}_1 \to A_1$ tal que $\psi_1(y_1) = y_1$, $\psi_1(x_1) = \partial_1$. Este es un isomorfismo porque los generadores satisfacen las mismas relaciones de conmutación que definen A_1, y los monomios $y_1^a x_1^b$ forman una base de $\mathcal{A}_1$ como K-espacio vectorial, al igual que en A_1.

Además, podemos definir un homomorfismo inverso

$$\theta_1 : A_1 \to \mathcal{A}_1, \quad \theta_1(y_1) := y_1, \quad \theta_1(\partial_1) := x_1,$$

que también está bien definido y satisface $\theta_1 \circ \psi_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_1}$ y $\psi_1 \circ \theta_1 = \mathrm{id}_{A_1}$, con lo cual ψ_1 es un isomorfismo.

Ahora, supongamos que el resultado es cierto para algún $n-1 \geq 1$. Sea $R := K[y_1,\ldots,y_{n-1}]$, y supongamos que tenemos un isomorfismo $\psi_{n-1} : \mathcal{A}_{n-1} \longrightarrow A_{n-1}$, donde

$$\mathcal{A}_{n-1} = R[x_1;\delta_1]\cdots[x_{n-1};\delta_{n-1}], \quad \delta_i = \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Extendemos el anillo base a $R[y_n]$, y consideramos la derivación $\delta_n := \frac{\partial}{\partial y_n}$, que conmuta con las anteriores y se extiende naturalmente a $\mathcal{A}_{n-1}[y_n]$. Definimos

$$\mathcal{A}_n := \mathcal{A}_{n-1}[y_n][x_n;\delta_n],$$

donde x_n satisface $x_n y_n = y_n x_n + 1$, y conmuta con los elementos anteriores.

Definimos ahora $\psi_n : \mathcal{A}_n \to A_n$ como el único homomorfismo que extiende ψ_{n-1} y envía $y_n \mapsto y_n$, $x_n \mapsto \partial_n$. Por la Proposición 3.1.2, este morfismo está bien definido porque preserva las relaciones de conmutación:

$$[x_n, y_n] = 1, \quad [x_n, y_i] = 0, \quad [x_n, x_i] = 0 \quad \text{para } i < n.$$

Observamos que en $\mathcal{A}_n$, los monomios ordenados $y^\beta x^\alpha := y_1^{\beta_1} \cdots y_n^{\beta_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ forman una base como K-espacio vectorial, por construcción inductiva. Lo mismo ocurre en A_n, ya que estos operadores actúan de forma linealmente independiente sobre $K[y_1, \ldots, y_n]$.

Finalmente, definimos un morfismo inverso $\theta_n : A_n \to \mathcal{A}_n$ enviando $y_i \mapsto y_i$ y $\partial_i \mapsto x_i$ para todo i, lo cual está bien definido porque los generadores satisfacen las mismas relaciones que en $\mathcal{A}_n$. Este es inverso de ψ_n, de modo que

$$\psi_n \circ \theta_n = \mathrm{id}_{A_n}, \quad \theta_n \circ \psi_n = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_n}.$$

Por tanto, hemos probado que ψ_n es un isomorfismo de K-álgebras y, por inducción, se concluye que $\mathcal{A}_n \cong A_n$. □

Observación 3.1.9. *Hay que tener cuidado de no confundir las variables y_i del anillo base $K[y_1, \ldots, y_n]$ con las variables x_i que aparecen en las extensiones por polinomios torcidos $R[x_i; \delta_i]$. En este contexto, los x_i no son variables independientes, sino operadores diferenciales que actúan sobre $K[y_1, \ldots, y_n]$.*

3.2. El teorema de la base de Hilbert

Un resultado fundamental en el estudio de álgebras no conmutativas es que la propiedad de ser noetheriano se preserva al construir extensiones iteradas de anillos mediante polinomios torcidos. Esto resulta esencial para el análisis y la comprensión estructural de las álgebras de operadores diferenciales.

Teorema 3.2.1 (Basissatz de Hilbert para un anillo de polinomios torcidos.)**.** *Sea δ una derivación. Si R es noetheriano por la derecha (por la izquierda), $S = R[x; \delta]$ es también noetheriano por la derecha (por la izquierda).*

Demostración: Supongamos que R es noetheriano por la derecha. El caso izquierdo es análogo una vez establecido este. Queremos demostrar que, dado un ideal por la derecha no nulo $I \subseteq S = R[x; \delta]$, se sigue que I es finitamente generado como ideal por la derecha de S. La demostración se divide en cinco pasos.

- **Primer paso.** Definimos el conjunto $J \subseteq R$ como el conjunto de los coeficientes líderes de elementos de I:

  $J = \{r \in R \mid \exists f \in I \text{ de la forma } f = rx^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_0,\ r_i \in R,\ n \geq 0\}.$

  Probaremos que J es un ideal por la derecha de R.

  Primero, J es un subgrupo aditivo. Sean $r_1, r_2 \in J$, entonces existen $f_1, f_2 \in I$ tales que

  $f_1 = r_1 x^{d_1} + \text{términos de menor grado}, \quad f_2 = r_2 x^{d_2} + \text{términos de menor grado}.$

  Supongamos sin pérdida de generalidad que $d_1 \geq d_2$. Entonces el elemento

  $$f := f_1 - f_2 x^{d_1 - d_2}$$

pertenece a I (pues I es ideal por la derecha). Al desarrollar $f_2x^{d_1-d_2}$, el término de grado d_1 tiene coeficiente r_2, por lo tanto

$$f = (r_1 - r_2)x^{d_1} + \text{términos de menor grado},$$

y entonces $r_1 - r_2 \in J$, con lo que J es cerrado bajo suma y opuestos.

Ahora probamos que J es un ideal por la derecha. Sea $r \in J$ y $s \in R$. Entonces existe $f \in I$ tal que

$$f = rx^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_0.$$

Consideramos $f \cdot s \in I$, ya que I es ideal por la derecha. La regla de multiplicación en $R[x;\delta]$ nos dice que:

$$x^k s = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \delta^i(s)x^{k-i},$$

así que el término de grado n en fs es rsx^n, y por tanto el coeficiente líder de fs es $rs \in R$. Como $fs \in I$, se concluye que $rs \in J$, y por tanto J es un ideal por la derecha de R.

- **Segundo paso.** Como R es noetheriano por la derecha y J es un ideal por la derecha de R, se sigue que J es finitamente generado como ideal por la derecha. Supongamos que $r_1, \ldots, r_k \in J$ son generadores de J. Por la definición de J, para cada r_i existe un polinomio $p_i \in I$ de la forma

$$p_i = r_i x^{n_i} + \text{términos de menor grado},$$

donde $n_i \in \mathbb{N}$ y r_i es el coeficiente líder de p_i. Sea $n := \text{máx}\{n_1, \ldots, n_k\}$. Para cada i, definimos un nuevo polinomio $q_i := p_i x^{n-n_i} \in I$, que también pertenece a I porque I es un ideal por la derecha de S. Al multiplicar por x^{n-n_i} se obtiene que q_i tiene grado n y coeficiente líder igual a r_i. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que los polinomios $p_1, \ldots, p_k$ tienen todos grado n y coeficientes líderes $r_1, \ldots, r_k$, respectivamente.

- **Tercer paso.** Sea n como en el paso anterior. Consideramos el conjunto

$$N := R + Rx + \cdots + Rx^{n-1},$$

es decir, el conjunto de todos los polinomios de $S = R[x;\delta]$ de grado estrictamente menor que n. Este conjunto es un submódulo por la derecha de S, considerado como R-módulo por la derecha: es decir, N es un submódulo por la derecha de tipo finito generado por $1, x, \ldots, x^{n-1}$. Como R es noetheriano por la derecha, todo módulo libre de tipo finito sobre R es noetheriano, por lo que N es un R-módulo por la derecha noetheriano.

Por tanto, su submódulo $I \cap N$ es también un R-submódulo por la derecha finitamente generado. Sea entonces $q_1, \ldots, q_t \in I \cap N$ una lista finita de generadores de $I \cap N$ como R-módulo por la derecha.

- **Cuarto paso.** Sea I_0 el ideal por la derecha de S generado por los elementos $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_t$. Como todos estos elementos pertenecen a I, se tiene que $I_0 \subseteq I$. Nuestro objetivo es demostrar que en realidad $I = I_0$.

  Para ello, sea $p \in I$. Consideramos dos casos:

  - Si $\deg(p) < n$, entonces $p \in I \cap N$. Por el tercer paso, sabemos que $I \cap N$ es generado como R-módulo por la derecha por los elementos $q_1, \dots, q_t$, así que existe una expresión:

    $$p = q_1 a_1 + \cdots + q_t a_t, \quad \text{con } a_i \in R.$$

    Como cada $q_i \in I_0$, se sigue que $p \in I_0$.
  - El caso en que $\deg(p) \geq n$ lo trataremos en el siguiente paso.

- **Quinto paso.** Sea $p \in I$ un elemento de grado $m \geq n$. Procederemos por inducción sobre el grado m para probar que $p \in I_0$, lo que completará la prueba de que $I \subseteq I_0$. El caso base $m < n$ ya ha sido resuelto en el paso anterior.

  Supongamos, como hipótesis inductiva, que todo elemento de I de grado estrictamente menor que m pertenece a I_0. Sea $r \in R$ el coeficiente líder de p. Como $p \in I$, se tiene $r \in J$, y dado que J está generado por $r_1, \dots, r_k$, existen elementos $a_1, \dots, a_k \in R$ tales que $r = r_1 a_1 + \cdots + r_k a_k$.

  Queremos construir un elemento $q \in I_0$ de grado m cuyo coeficiente líder sea r. Para ello, consideramos el siguiente elemento:

  $$q := \sum_{i=1}^{k} p_i x^{m-n} a_i.$$

  Este elemento pertenece a I_0 ya que cada $p_i \in I_0$ y I_0 es un ideal por la derecha. Además, como cada p_i tiene grado n y coeficiente líder r_i, el elemento q tiene grado m y coeficiente líder

  $$\sum_{i=1}^{k} r_i a_i = r.$$

  Entonces, la diferencia $p - q \in I$ tiene grado estrictamente menor que m, y por la hipótesis inductiva, se tiene que $p - q \in I_0$. Por tanto,

  $$p = (p - q) + q \in I_0.$$

  Esto prueba que $I \subseteq I_0$, y como ya habíamos mostrado que $I_0 \subseteq I$, concluimos que $I = I_0$. Finalmente, como I_0 está generado por una cantidad finita de elementos $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_t$, se deduce que I es finitamente generado.

  Dado que $I \subseteq S$ era un ideal por la derecha arbitrario, concluimos que $S = R[x; \delta]$ es noetheriano por la derecha.

Con estos cinco pasos concluimos la demostración. □

3.3. Característica positiva

Una condición que imponemos desde el inicio es que el cuerpo base K tenga característica cero. Surge de manera natural preguntarse por qué realizamos esta suposición, dado que todas las construcciones que hemos dado para el álgebra de Weyl siguen teniendo sentido en característica positiva. Sin embargo, en ese caso, dichas construcciones dejan de ser equivalentes entre sí, y el comportamiento del álgebra cambia de manera sustancial.

Para entenderlo, consideremos el caso de una variable y el cuerpo $\mathbb{Z}_p$, donde p es un número primo. Estudiaremos dos formas distintas de construir estructuras tipo Weyl sobre este cuerpo y veremos que ninguna de ellas cumple las propiedades deseadas vistas en la Subsección 1.3.

Primero, consideremos el anillo R_1 de operadores diferenciales generado por $\mathbb{Z}_p[x]$ y la derivada usual $\partial = \frac{d}{dx}$, tal como lo haríamos en característica cero. Siguiendo el mismo razonamiento utilizado en la demostración de la Proposición 1.2.6, podemos comprobar que, al aplicar ∂^p a un monomio, se obtiene:

$$\partial^p(x^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < p, \\ k(k-1)\cdots(k-p+1)\, x^{k-p} & \text{si } k \geq p. \end{cases}$$

En este último caso, el coeficiente $k(k-1)\cdots(k-p+1)$ es divisible por p, y por tanto se anula en $\mathbb{Z}_p$. De esto se deduce que $\partial^p = 0$ como operador en R_1. En consecuencia, $\partial \in R_1$ es un elemento *nilpotente*, lo cual implica que R_1 *no es un dominio*. Ahora consideremos otro anillo R_2, generado por $\mathbb{Z}_p$ y dos variables z_1 y z_2, sujetas a la relación de conmutación

$$[z_2, z_1] = 1.$$

Este anillo sí es un dominio. No obstante, presenta otra dificultad: no es simple. Para verlo, tomemos un polinomio $f \in \mathbb{Z}_p[z_1]$. Entonces se tiene:

$$[z_2, f] = \frac{\partial f}{\partial z_1}.$$

En particular, si consideramos $f = z_1^p$, se obtiene:

$$[z_2, z_1^p] = p z_1^{p-1} = 0 \quad \text{en } \mathbb{Z}_p.$$

Esto significa que z_1^p conmuta con todos los elementos de R_2, por lo que el ideal a izquierda generado por z_1^p es bilátero. En consecuencia, R_2 no es un anillo simple.

Por otro lado, si bien hemos demostrado que el producto de dos operadores de órdenes a lo sumo n y m es un operador de orden a lo sumo $n+m$, la igualdad puede no alcanzarse en general, como se muestra en el Ejemplo 2.1.14. No obstante, en el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$, que no tiene elementos nilpotentes, la situación en la que el producto no alcanza el orden máximo es exclusiva de la característica positiva; en característica cero, dicha degeneración no ocurre.

En conclusión, el álgebra de Weyl en característica positiva presenta comportamientos significativamente distintos a los del caso de característica cero. Por un lado, puede dejar de ser un dominio debido a la existencia de elementos nilpotentes, y también puede dejar de ser simple, al poseer ideales bilaterales no triviales. Por otro lado, la estructura de los operadores diferenciales se vuelve más sutil, ya que el producto de operadores no necesariamente alcanza el orden máximo esperado. Estas particularidades justifican la importancia de la hipótesis de trabajar sobre cuerpos de característica cero y sobre álgebras sin nilpotentes para preservar las propiedades algebraicas fundamentales que facilitan el estudio y la aplicación del álgebra de Weyl.

Capítulo 4

La filtración de Bernstein

Los anillos simples presentan serias dificultades a la hora de ser estudiados, ya que muchas de las herramientas clásicas del álgebra conmutativa dependen crucialmente de la existencia de ideales biláteros no triviales. En los anillos simples, sin embargo, por definición los únicos ideales biláteros posibles son el cero y el propio anillo, lo que limita considerablemente el alcance de dichas técnicas. Para el caso del álgebra de Weyl, afortunadamente, es posible adoptar un enfoque alternativo que permite recuperar parte de esa estructura perdida. El objetivo de este capítulo es construir la llamada filtración de Bernstein, a partir de la noción de grado introducida en el Capítulo 1, con el fin de asociar a A_n un anillo graduado conmutativo que actúe como su sombra algebraica. Esta construcción nos proporcionará una herramienta eficaz para estudiar tanto la estructura interna del álgebra de Weyl como la de sus módulos, y sentará las bases para introducir más adelante, en el Capítulo 5, la noción de dimensión.

En la primera sección abordaremos los anillos graduados, presentando conceptos básicos y esenciales como la graduación, los ideales homogéneos y los homomorfismos graduados. Estos fundamentos algebraicos serán clave para el desarrollo y comprensión de los temas posteriores del capítulo.

La segunda sección está dedicada a las filtraciones, explicando qué son y cómo permiten construir anillos graduados asociados. Una propiedad fundamental que veremos es que, gracias a la filtración de Bernstein, el álgebra de Weyl A_n tiene un anillo graduado asociado isomorfo a un anillo de polinomios conmutativo en $2n$ variables, lo que nos permite trasladar el estudio de A_n a un contexto conmutativo mucho más manejable.

En la tercera sección se introducen las buenas filtraciones, las cuales desempeñan un papel fundamental en el estudio de la dimensión. Asimismo, se presenta una caracterización de este tipo de filtraciones y un método para comparar dos buenas filtraciones distintas.

La exposición de este capítulo se basa principalmente en los capítulos siete y parte del ocho de [Cou95]. Aunque en la primera sección no asumimos la conmutatividad para las graduaciones que estudiamos, para profundizar en la teoría de anillos graduados hemos consultado también las referencias clásicas [Pee11] y [Eis95], que han sido de gran utilidad para la formulación y rigor de los conceptos tratados.

4.1. Anillos graduados

En esta sección introducimos la teoría de anillos graduados sin imponer conmutatividad. Veremos cómo una graduación permite descomponer el anillo en componentes homogéneas, lo que facilita su estudio y prepara el terreno para las filtraciones que trataremos más adelante. En lo que sigue, K denotará un cuerpo de característica cero.

Definición 4.1.1 (Anillo graduado)**.** *Sea R una K-álgebra. Diremos que R es un* ***anillo graduado*** *si existen subespacios vectoriales $R_i \subseteq R$, con $i \in \mathbb{N}$, tales que:*

$$R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i,$$

y se cumple que:

$$R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j} \quad \text{para todo } i, j \geq 0.$$

Cada R_i se denomina la ***componente homogénea de grado*** *i, y sus elementos,* ***elementos homogéneos de grado*** *i.*

Observación 4.1.2. *Por la condición de multiplicatividad, cada R_i es un R_0-módulo a izquierda y a derecha. No suponemos en general que $R_0 = K$, aunque en la mayoría de ejemplos que usaremos, esto sí sucede.*

La mayoría de ejemplos de anillos graduados con los que estamos familiarizados son conmutativos. Uno de los más usados es el anillo de polinomios usando una graduación por grado total.

Ejemplo 4.1.3. Un ejemplo importante es el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$, donde los monomios

$$x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \quad \text{con} \quad k_1 + \cdots + k_n = m$$

forman una base del subespacio homogéneo de grado m.

Así, el anillo puede escribirse como una suma directa:

$$K[x_1, \ldots, x_n] = \bigoplus_{m=0}^{\infty} R_m,$$

donde cada R_m es el espacio de los polinomios homogéneos de grado m. La multiplicación de polinomios proporciona un polinomio cuyo grado es la suma de los grados, lo que confirma que $K[x_1, \ldots, x_n]$ es un anillo graduado.

Observación 4.1.4. *Una forma general de definir una graduación en el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$ es mediante una aplicación de monoides $\varphi\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Cada monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ tiene exponente multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, y la graduación se induce enviando $\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$.*

En particular, si definimos $\varphi(e_i) = 1$ para todo i, donde $\{e_i\}$ es la base canónica de $\mathbb{N}^n$, se obtiene la ***graduación por grado total***[1]*, ya que entonces $\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Esta graduación convierte $K[x_1, \ldots, x_n]$ en un anillo graduado con R_d igual al subespacio generado por los polinomios homogéneos de grado total d.*

[1] También llamada graduación estándar o graduación canónica.

La noción de anillo graduado no se restringe al caso conmutativo, y de hecho existen muchos ejemplos relevantes en contextos no conmutativos:

Ejemplo 4.1.5. Sea K un cuerpo. El anillo $K\langle x, y\rangle$, conocido como el **álgebra libre** en dos variables sobre K, es un ejemplo fundamental de K-álgebra no conmutativa graduada.

Sus elementos son combinaciones lineales finitas de palabras en x e y, formadas por concatenación. No se impone ninguna relación entre los generadores: por ejemplo, $xy \neq yx$ y $x^2 \neq 0$, salvo que lo impongan los coeficientes. La multiplicación entre las palabras se define por concatenación y se extiende a todos los elementos del álgebra por ser una operación bilineal.

Este anillo admite una graduación natural, donde los elementos se clasifican según la longitud de las palabras que los componen; formalmente,

$$K\langle x, y\rangle = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n,$$

donde cada R_n es el subespacio vectorial generado por todas las palabras de longitud n:

$$R_0 = K, \quad R_1 = \mathrm{span}_K\{x, y\}, \quad R_2 = \mathrm{span}_K\{x^2, xy, yx, y^2\}, \quad \ldots$$

Aquí, $\mathrm{span}_K\{S\}$ denota el conjunto de todas las combinaciones lineales con coeficientes en K de los elementos del conjunto S.

Como la concatenación de una palabra de longitud i con una de longitud j nos da una palabra de longitud $i + j$, esta es una graduación en el sentido definido anteriormente.

Los anillos graduados que más comúnmente aparecen en geometría algebraica son anillos de polinomios cocientados por ideales generados por elementos homogéneos. Esta estructura permite estudiar propiedades geométricas mediante el análisis de las componentes homogéneas y su interacción con los ideales. Por ello, es fundamental definir el concepto de ideal graduado, que preserva la graduación del anillo.

Definición 4.1.6. *Sea $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ una K-álgebra graduada. Un ideal bilátero $I \subseteq R$ se llama un **ideal graduado** si*

$$I = \bigoplus_{i=0}^{\infty}(I \cap R_i),$$

es decir, si es la suma directa de sus componentes homogéneas.

Es natural preguntarse si un ideal generado por elementos homogéneos en un anillo graduado también es un ideal graduado, es decir, si puede descomponerse según la graduación del anillo. Esta propiedad es fundamental para estudiar los cocientes graduados y su estructura.

Proposición 4.1.7 (Ideales generados por elementos homogéneos son graduados)**.** *Sea $I \subseteq R$ un ideal bilátero generado por elementos homogéneos. Entonces I es un ideal graduado.*

Demostración: Basta probar que todo elemento de I se descompone como suma finita de elementos homogéneos contenidos en I, ya que la inclusión contraria es inmediata por definición de intersección.

Supongamos que I es un ideal bilátero generado por una familia de elementos homogéneos $\{a_\lambda \in R_{d_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$, es decir, $I = \langle a_\lambda : \lambda \in \Lambda\rangle$.

Sea $x \in I$. Como I está generado por los elementos a_λ, el elemento x puede escribirse como una combinación finita de términos de la forma $r_k a_{\lambda_k} s_k$, donde $r_k, s_k \in R$.

Dado que R es una álgebra graduada, cada coeficiente r_k y s_k se descompone como suma finita de componentes homogéneas. Es decir, podemos escribir $r_k = \sum_i r_{k,i}$ con $r_{k,i} \in R_i$, y análogamente $s_k = \sum_j s_{k,j}$ con $s_{k,j} \in R_j$.

Al multiplicar los términos $r_k a_{\lambda_k} s_k$, se obtiene una suma de productos del tipo $r_{k,i} a_{\lambda_k} s_{k,j}$. Como cada uno de los factores pertenece a una componente homogénea del anillo, y la multiplicación es compatible con la graduación, se tiene que cada uno de estos productos pertenece a $R_{i+d_{\lambda_k}+j}$, donde d_{λ_k} es el grado del generador homogéneo a_{λ_k}.

En consecuencia, cada elemento $x \in I$ se puede descomponer como una suma finita de términos homogéneos, cada uno de los cuales pertenece también a I. Dicho de otro modo, x se expresa como $x = \sum_\ell x_\ell$, donde cada x_ℓ es homogéneo y pertenece a la intersección $I \cap R_\ell$.

Por tanto, se concluye que $x \in \bigoplus_{i=0}^\infty (I \cap R_i)$. Con esto ya tenemos la igualdad demostrada. □

Ejemplo 4.1.8. Consideremos el anillo de polinomios $K[x, y]$, graduado por grado total, de modo que se descompone como $K[x, y] = \bigoplus_{m=0}^\infty R_m$, donde cada R_m está formado por los polinomios homogéneos de grado m.

Sea $I \subseteq K[x, y]$ el ideal generado por los polinomios x^2 y xy. Ambos generadores son homogéneos de grado 2, por lo que, según la proposición anterior, el ideal I es graduado. En consecuencia, puede escribirse como suma directa de sus componentes homogéneas:

$$I = \bigoplus_{m=2}^{\infty} (I \cap R_m).$$

Por ejemplo, la componente de grado 2 está generada por los propios generadores del ideal, es decir,

$$I \cap R_2 = \langle x^2, xy\rangle.$$

En grado 3, encontramos todos los productos de los generadores con monomios de grado 1, como $x \cdot x^2 = x^3$, $x \cdot xy = x^2y$, y $y \cdot xy = xy^2$, lo que da lugar a

$$I \cap R_3 = \langle x^3, x^2y, xy^2\rangle.$$

El ejemplo anterior muestra cómo la estructura graduada se refleja de forma natural en los ideales generados por elementos homogéneos. De manera más general, cuando trabajamos con homomorfismos entre K-álgebras graduadas, es natural exigir que estos respeten la graduación, es decir, que envíen cada componente homogénea en una correspondiente del mismo grado. Veamos los siguientes resultados:

Definición 4.1.9. *Sean* $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ *y* $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ *dos* K*-álgebras graduadas. Un homomorfismo de* K*-álgebras*

$$\varphi : R \to S$$

se dice ***graduado*** *si*

$$\varphi(R_i) \subseteq S_i \quad \textit{para todo } i \in \mathbb{N},$$

es decir, si preserva los grados.

Proposición 4.1.10 (Estructura graduada en núcleos y cocientes)**.** *Sea* $\varphi : R \to S$ *un homomorfismo graduado entre* K*-álgebras graduadas. Entonces:*

1. *El núcleo* $\ker(\varphi)$ *es un ideal bilátero graduado de* R*.*

2. *Si* I *es un ideal bilátero graduado de* R*, entonces el cociente* R/I *hereda una estructura natural de* K*-álgebra graduada.*

Demostración: Demostraremos cada afirmación por separado:

1. Sea $\varphi : R \to S$ un homomorfismo graduado y consideremos un elemento $a \in \ker(\varphi)$ que se descompone en suma directa de sus componentes homogéneas, es decir, $a = a_0 + a_1 + \cdots + a_s$, con cada $a_i \in R_i$. Al aplicar φ, obtenemos que

$$\varphi(a) = \varphi(a_0) + \varphi(a_1) + \cdots + \varphi(a_s) = 0.$$

Como la suma en S es directa y $\varphi(a_i) \in S_i$ para cada i, necesariamente cada $\varphi(a_i)$ debe ser cero. Por lo tanto, cada componente a_i pertenece a $\ker(\varphi)$, lo que implica que

$$\ker(\varphi) = \bigoplus_i \big(\ker(\varphi) \cap R_i\big),$$

es decir, $\ker(\varphi)$ es un ideal bilátero graduado.

2. Sea $I \subseteq R$ un ideal bilátero graduado, de modo que $I = \bigoplus_i (I \cap R_i)$. Entonces el cociente R/I se descompone como la suma directa $\bigoplus_i R_i/(I \cap R_i)$. La multiplicación en el cociente está bien definida y preserva la graduación, porque para elementos homogéneos $a_i \in R_i$ y $a_j \in R_j$, la clase producto satisface $(a_i + I)(a_j + I) = a_i a_j + I$. Dado que $a_i a_j \in R_{i+j}$, la clase resultante pertenece a $R_{i+j}/(I \cap R_{i+j})$, lo que garantiza que R/I es una K-álgebra graduada.

Con esto, queda demostrada la proposición. □

Observación 4.1.11. *Este resultado nos proporciona un método sencillo para construir ejemplos de anillos graduados. Por ejemplo, si tomamos polinomios homogéneos*

$$F_1, \ldots, F_k \in K[x_1, \ldots, x_n],$$

entonces el cociente

$$K[x_1, \ldots, x_n]/(F_1, \ldots, F_k)$$

hereda de forma natural una estructura de anillo graduado.

A su vez, una álgebra graduada admite un tipo especial de módulos, denominados módulos graduados, que estudiaremos a continuación.

Definición 4.1.12. *Sea $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ una K-álgebra graduada. Un R-**módulo** izquierdo M se dice **graduado** si existen subespacios vectoriales $M_i \subseteq M$, con $i \geq 0$, tales que*

$$M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i,$$

y además se cumple que

$$R_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$$

*para todo $i, j \geq 0$. A cada M_i se le llama la **componente homogénea de grado** i del módulo M.*

Es importante destacar que esta estructura depende de la graduación elegida en el anillo R. De la misma forma, un submódulo de un módulo graduado puede heredar naturalmente la estructura graduada.

Definición 4.1.13. *Sea $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ un módulo graduado sobre una K-álgebra graduada R. Un **submódulo** $N \subseteq M$ se dice **graduado** si*

$$N = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (N \cap M_i).$$

Los morfismos entre módulos graduados también pueden ser compatibles con la graduación.

Definición 4.1.14. *Sea $\psi : M \to M'$ un homomorfismo de R-módulos entre módulos graduados $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ y $M' = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M'_i$. Se dice que ψ es un **homomorfismo graduado** si*

$$\psi(M_i) \subseteq M'_i \quad \text{para todo } i \geq 0.$$

De manera análoga al caso de homomorfismos entre álgebras graduadas, las nociones de núcleo y cociente en el contexto de módulos graduados satisfacen propiedades similares. Enunciamos a continuación estos resultados sin demostración, ya que se obtienen por argumentos similares al caso de álgebras.

Proposición 4.1.15 (Estructura graduada en el núcleo y el cociente de un homomorfismo de módulos graduados)**.** *Sea $\psi : M \to M'$ un homomorfismo graduado de R-módulos graduados. Entonces:*

1. *El núcleo* $\ker(\psi)$ *es un submódulo graduado de M.*

2. *Si $N \subseteq M$ es un submódulo graduado, entonces el cociente M/N hereda una estructura natural de módulo graduado.*

Un ejemplo especialmente importante de módulo graduado surge al considerar módulos libres sobre álgebras graduadas. Este caso no solo proporciona una clase rica de ejemplos, sino que también aparece de manera natural en el estudio de módulos graduados finitamente generados y en la construcción de resoluciones libres. Veamos a continuación cómo se gradúa el módulo libre R^n y cómo esta graduación se transfiere a sus cocientes por submódulos graduados.

Ejemplo 4.1.16. Sea $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ una K-álgebra graduada. Consideramos el **módulo libre izquierdo** R^n, es decir, la suma directa de n copias de R como módulo izquierdo sobre sí mismo.

Este módulo admite una graduación natural definida del siguiente modo: para cada $k \in \mathbb{N}$, la componente homogénea de grado k se define como

$$(R^n)_k := \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} (R_{i_1} \oplus \cdots \oplus R_{i_n}).$$

Dicho de otro modo, $(R^n)_k$ está formado por los vectores cuyas coordenadas son elementos homogéneos de grados $i_1, \ldots, i_n$ tales que la suma total de los grados es k. Esto proporciona una descomposición graduada

$$R^n = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (R^n)_k,$$

y la acción de R sobre R^n es compatible con la graduación, en el sentido de que $R_i \cdot (R^n)_j \subseteq (R^n)_{i+j}$.

Además, si $L \subseteq R^n$ es un submódulo graduado, entonces el cociente R^n/L hereda de manera natural una estructura de módulo izquierdo graduado. Estos cocientes constituyen ejemplos fundamentales de módulos graduados finitamente generados, y son especialmente relevantes en el estudio de la dimensión de Hilbert y de las propiedades homológicas de R, como veremos en el Capítulo 5.

Como vimos en la Sección 1.3, en el álgebra de Weyl A_n es posible definir un grado para sus operadores. Sin embargo, esta graduación no convierte a A_n en un anillo graduado. El inconveniente surge al considerar elementos como $\partial_i x_i$, ya que si tratamos de imitar lo que sucede en el anillo de polinomios este sería un elemento homogéneo de grado dos, por ser producto de dos elementos de grado uno. Sin embargo, este mismo elemento puede escribirse como

$$\partial_i x_i = x_i \partial_i - 1,$$

que pese a seguir teniendo grado dos, se convierte en una suma con un elemento de grado cero que no es homogénea.

Para poder aprovechar de forma efectiva la noción de grado en este contexto, necesitamos generalizar el concepto de anillo graduado. Esto nos lleva a considerar la estructura más flexible de los anillos filtrados, que introduciremos a continuación.

4.2. Filtraciones

En esta sección introducimos la noción de *filtración*, una herramienta fundamental que permite extender muchas de las ideas asociadas a las álgebras graduadas a contextos más generales. Las filtraciones proporcionan una estructura compatible con el grado incluso cuando no existe una descomposición homogénea propiamente dicha.

Definición 4.2.1. *Sea R una K-álgebra. Una* ***filtración*** *en R es una familia creciente de subespacios vectoriales $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\geq 0}$ de R tal que:*

1. $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq \{F_i\} \subseteq \{F_{i+1}\} \subseteq \cdots \subseteq R$,
2. $R = \bigcup_{i\geq 0} F_i$,
3. $F_i \cdot F_j \subseteq F_{i+j}$ *para cualquier* $i, j \in \mathbb{N}$.

Si un álgebra R posee una filtración, decimos que R es una ***álgebra filtrada****.*

Observación 4.2.2. *Toda álgebra graduada induce de forma natural una filtración. Si $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$, podemos definir F_k como la suma de los componentes homogéneos de grado menor o igual que k. Esta colección $\{F_k\}_{k\geq 0}$ forma una filtración creciente de subespacios que cubre todo R. Además, como $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$, se tiene que*

$$F_h \cdot F_m = \bigoplus_{i=0}^{h} \bigoplus_{j=0}^{m} R_i \cdot R_j \subseteq \bigoplus_{r=0}^{h+m} R_r = F_{h+m},$$

lo que prueba que esta es efectivamente una filtración de álgebra.

Sin embargo, existen álgebras filtradas que no admiten una graduación natural. Este es el caso del álgebra de Weyl A_n, pese a que no admite una filtración natural, posee varias filtraciones útiles para su estudio.

Ejemplo 4.2.3 (Filtración de Bernstein). Una de las filtraciones más importantes del álgebra de Weyl A_n es la filtración de Bernstein, definida a partir del grado de los operadores diferenciales en A_n. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define

$$B_k := \{P \in A_n \mid \deg(P) \leq k\},$$

es decir, el subespacio vectorial formado por todos los operadores de grado menor o igual que k. La familia $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k\geq 0}$ verifica las siguientes condiciones:

- $B_k \subseteq B_{k+1}$ para todo k (familia creciente),
- $\bigcup_{k\geq 0} B_k = A_n$ (exhaustividad),
- $B_k \cdot B_\ell \subseteq B_{k+\ell}$ para todo $k, \ell \geq 0$ (compatibilidad con el producto).

Las dos primeras propiedades se deducen directamente de la definición. La tercera es una consecuencia inmediata del apartado (2) de la Proposición 1.3.4. Estas condiciones garantizan que $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k\geq 0}$ define una filtración de A_n. A veces se escribe $B_k(A_n)$ o $\mathcal{B}(A_n)$ para enfatizar la dependencia con respecto a A_n.

Observación 4.2.4. *Una propiedad fundamental de la filtración de Bernstein, que será clave en secciones posteriores, es que para cada $k \in \mathbb{N}$ el espacio B_k es de dimensión finita como espacio vectorial sobre K. En efecto, una base natural de B_k está formada por los monomios*

$$x^\alpha \partial^\beta := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n},$$

donde el grado total $|\alpha| + |\beta|$ es menor o igual que k.

Esta afirmación se sigue directamente de la definición del grado de un operador diferencial en A_n y del hecho de que el conjunto de monomios $x^\alpha \partial^\beta$ constituye una base de A_n como espacio vectorial. Como sólo hay un número finito de pares (α, β) con $|\alpha| + |\beta| \leq k$, concluimos que B_k es de dimensión finita.

Por ejemplo, $B_0 = K$, y una base de B_1 está dada por

$$\{1, x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\}.$$

Ejemplo 4.2.5 (Filtración por orden). Otra filtración relevante para el álgebra de Weyl A_n es la filtración por orden, que denotamos por $\mathcal{C} = \{C_k\}_{k \geq 0}$. Como se introdujo en el Capítulo 2, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$C_k := \{P \in A_n \mid \operatorname{ord}(P) \leq k\},$$

donde $\operatorname{ord}(P)$ denota el orden del operador diferencial P. Es decir, C_k es el subespacio vectorial de A_n formado por todos los operadores de orden menor o igual que k.

Esta familia $\{C_k\}_{k \geq 0}$ cumple las siguientes propiedades:

- $C_k \subseteq C_{k+1}$ para todo k (creciente),
- $\bigcup_{k \geq 0} C_k = A_n$ (exhaustiva),
- $C_k \cdot C_\ell \subseteq C_{k+\ell}$ para todo $k, \ell \geq 0$ (compatibilidad multiplicativa).

Las dos primeras propiedades se deducen directamente de la definición. La tercera es una consecuencia de la Proposición 2.1.13. Por tanto, $\mathcal{C} = \{C_k\}_{k \geq 0}$ define una filtración de A_n.

Observación 4.2.6. *A diferencia de la filtración de Bernstein, el espacio*

$$C_0 = K[X]$$

en la filtración por orden es un espacio vectorial de dimensión infinita. Esta diferencia subraya que la filtración por orden puede definirse incluso para otros anillos de operadores diferenciales, no solo para el álgebra de Weyl.

Estas filtraciones son herramientas fundamentales para analizar la estructura algebraica del álgebra de Weyl A_n, así como el comportamiento de los módulos sobre ella. En particular, resultan especialmente útiles cuando no existe una graduación natural o esta no es adecuada para los fines del estudio.

En este contexto, también es necesario introducir una noción compatible de filtración para los módulos sobre A_n. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 4.2.7 (Módulo filtrado). *Sea A_n el álgebra de Weyl equipada con la filtración $\Gamma' = \{\Gamma'_j\}_{j\geq 0}$, y sea M un A_n-módulo a izquierda. Una familia creciente de subespacios vectoriales sobre K,*

$$\Gamma = \{\Gamma_j\}_{j\geq 0},$$

*se llama **filtración** de M si satisface las siguientes condiciones:*

1. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \{\Gamma_i\} \subseteq \{\Gamma_{i+1}\} \subseteq \cdots \subseteq M$ *(crecimiento),*
2. $\bigcup_{j\geq 0} \Gamma_j = M$ *(exhaustividad),*
3. $\Gamma'_i \Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j}$ *para todo $i, j \geq 0$ (compatibilidad con la filtración de A_n),*
4. *Cada Γ_j es de dimensión finita como espacio vectorial sobre K.*

Al par (M, Γ) lo llamamos módulo filtrado.

Observación 4.2.8. *Aunque en general la definición de módulo filtrado la hemos hecho respecto a una filtración compatible cualquiera, nosotros definiremos los módulos filtrados utilizando la filtración de Bernstein; es decir con $\Gamma' = \mathcal{B}$. Esto se debe a que es la filtración que mejor se adapta a nuestro caso particular y con la que trabajaremos a lo largo del texto.*

A continuación, presentamos dos ejemplos ilustrativos de módulos filtrados que surgen de forma natural al trabajar con el álgebra de Weyl y sus representaciones. Estos ejemplos muestran cómo las filtraciones se extienden desde el álgebra a sus módulos de forma coherente:

Ejemplo 4.2.9 (Filtración del álgebra de Weyl como módulo). Un ejemplo inmediato de módulo filtrado es el álgebra de Weyl A_n considerada como A_n-módulo a izquierda sobre sí misma. Equipamos A_n con la filtración de Bernstein $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k\geq 0}$, donde recordamos que cada B_k es el subespacio generado por operadores de orden total menor o igual que k.

Esta familia cumple las propiedades exigidas: crecimiento ($B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$), exhaustividad ($\bigcup_{k\geq 0} B_k = A_n$), compatibilidad multiplicativa ($B_i B_j \subseteq B_{i+j}$), y dimensión finita de cada B_k como espacio vectorial sobre K.

Por tanto, $(A_n, \mathcal{B})$ es un A_n-módulo filtrado compatible con su propia filtración.

Ejemplo 4.2.10 (Filtración de $K[X]$ como A_n-módulo). Consideremos el A_n-módulo $K[X] := K[x_1, \ldots, x_n]$, con la acción natural dada por:

$$x_i \cdot f := x_i f, \qquad \partial_i \cdot f := \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Definimos una filtración $\Gamma = \{\Gamma_j\}_{j\geq 0}$ sobre $K[X]$ dada por el grado de los polinomios:

$$\Gamma_j := \{f \in K[X] \mid \deg(f) \leq j\}, \qquad \text{y } \Gamma_j := \{0\} \text{ para } j < 0.$$

Esta colección de subespacios cumple que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots \subseteq K[X]$, y que $\bigcup_{j\geq 0} \Gamma_j = K[X]$, por lo que es una filtración creciente y exhaustiva. Además, cada

Γ_j es de dimensión finita como espacio vectorial sobre K.

La acción del álgebra de Weyl filtrada con la filtración de Bernstein respeta esta filtración: si $P \in B_i$ y $f \in \Gamma_j$, entonces $P \cdot f \in \Gamma_{i+j}$. En general, el operador P puede disminuir el grado del polinomio (por ejemplo, si contiene derivadas), pero nunca lo aumenta más allá de $i+j$. Esta propiedad garantiza que la filtración es compatible con la de A_n.

Con estas condiciones, $(K[X], \Gamma)$ es un A_n-módulo filtrado compatible con la filtración de Bernstein.

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, las filtraciones permiten organizar la estructura de un módulo de forma compatible con la del álgebra que actúa sobre él. Esta compatibilidad entre filtraciones es clave para poder estudiar la estructura graduada asociada tanto al álgebra como a sus módulos. A continuación, formalizamos esta construcción, comenzando por el caso del álgebra.

Supongamos que R es una K-álgebra y que $\mathcal{F} = \{F_k\}_{k\geq 0}$ es una filtración de R. Para construir una versión graduada de esta álgebra, primero necesitamos entender cómo se "extrae" la parte de orden k de un elemento filtrado.

Definición 4.2.11 (Símbolo de orden k)**.** *Dado un elemento $d \in F_k$, se define su* ***símbolo de orden** k* *como la imagen de d mediante la proyección canónica*

$$\sigma_k : F_k \to F_k/F_{k-1},$$

donde, por convenio, se toma $F_{-1} := \{0\}$.

Observación 4.2.12. *El símbolo $\sigma_k(d)$ es no nulo si y solo si $d \notin F_{k-1}$.*

Con esta herramienta, podemos definir una estructura graduada que refleja la filtración original:

Definición 4.2.13 (Álgebra graduada asociada)**.** *Sea R una K-álgebra con filtración $\mathcal{F} = \{F_k\}_{k\geq 0}$. Su* ***álgebra graduada asociada*** *se define como*

$$\mathrm{gr}^{\mathcal{F}}(R) := \bigoplus_{k\geq 0} F_k/F_{k-1},$$

donde, por convención, $F_{-1} := \{0\}$.

Observación 4.2.14. *Si R es un anillo graduado, con descomposición $R = \bigoplus_{k\geq 0} R_k$, podemos considerar la filtración asociada dada por $F_k := \bigoplus_{i=0}^{k} R_i$. Entonces, al construir el álgebra graduada asociada respecto de esta filtración, se obtiene $\mathrm{gr}^{\mathcal{F}}(R) \cong R$ como álgebras graduadas. En otras palabras, el procedimiento de pasar de una graduación a su filtración inducida y luego volver a graduar recupera (salvo isomorfismo natural) el álgebra graduada original.*

Veamos un ejemplo que ilustre esta observación:

Ejemplo 4.2.15 (**Módulo graduado asociado a la filtración de** $K[X]$)**.** Sea $(K[X], \Gamma)$ el A_n-módulo filtrado descrito en el Ejemplo 4.2.10, donde Γ_j consiste en los polinomios de grado menor o igual que j. El módulo graduado asociado está definido por

$$\operatorname{gr}^{\Gamma} K[X] := \bigoplus_{j \geq 0} \Gamma_j / \Gamma_{j-1}.$$

Para cada $j \geq 0$, el cociente Γ_j/Γ_{j-1} se identifica naturalmente con el espacio de polinomios homogéneos de grado j, ya que todo polinomio en Γ_j puede descomponerse de forma única como suma de su parte homogénea de grado j más un polinomio de menor grado (contenido en Γ_{j-1}).

Así, obtenemos un isomorfismo natural de espacios vectoriales graduados:

$$\operatorname{gr}^{\Gamma} K[X] \;\cong\; \bigoplus_{j \geq 0} \{\text{polinomios homogéneos de grado } j\} = K[X],$$

donde en el lado derecho se considera la graduación estándar por grado.

En conclusión, el proceso de asociar a la filtración por grado de $K[X]$ su módulo graduado asociado recupera (salvo isomorfismo natural) la graduación usual de $K[X]$.

Para dotar a $\operatorname{gr}^{\mathcal{F}}(R)$ de estructura de álgebra graduada, definimos el producto sobre elementos homogéneos de la siguiente manera:

Si $a \in F_k$ y $b \in F_m$, entonces

$$\sigma_k(a) \cdot \sigma_m(b) := \sigma_{k+m}(ab).$$

Dado que la operación está bien definida y respeta la estructura de la filtración, se concluye que $\operatorname{gr}^{\mathcal{F}}(R)$ posee una estructura de álgebra graduada sobre K, cuyos componentes homogéneos en cada grado $k \in \mathbb{N}$ vienen dados por los cocientes F_k/F_{k-1}.

Como comentamos al final de la sección anterior, esta construcción estaba motivada por el ejemplo de $\partial_i x_i$, que era un elemento de orden dos pero no resultaba homogéneo. Sin embargo, al considerar el álgebra graduada asociada, este operador sí pasa a ser homogéneo, pues únicamente se conserva la parte de mayor grado. De este modo, la noción de símbolo principal permite rescatar la homogeneidad perdida en A_n.

A continuación, mostramos un ejemplo sencillo que ilustra cómo se calcula el símbolo principal de un operador diferencial en el marco de la filtración y el álgebra graduada asociada.

Ejemplo 4.2.16. Sea A_1 el álgebra de Weyl con la filtración de Bernstein, y consideremos el operador

$$d = x^2\partial + x\partial^2 + \partial + 1.$$

El símbolo principal $\sigma(d)$ se representa por la suma de los términos de mayor grado, que en este caso es 3. Por tanto,

$$\sigma(d) = x^2\partial + x\partial^2,$$

interpretados como elementos homogéneos de grado 3 en $\operatorname{gr}^{\mathcal{F}}(A_1)$.

Este ejemplo ilustra de forma concreta la utilidad del símbolo y la estructura graduada. A continuación, se enuncia un resultado fundamental que describe la estructura del álgebra graduada asociada al álgebra de Weyl en general.

Teorema 4.2.17. *Sea A_n el álgebra de Weyl con la filtración de Bernstein. Entonces, el álgebra graduada asociada*

$$S_n := \mathrm{gr}^{\mathcal{B}}(A_n)$$

es isomorfa al anillo de polinomios en $2n$ variables sobre K, es decir,

$$S_n \cong K[y_1, \ldots, y_{2n}],$$

donde, bajo este isomorfismo, las variables $y_1, \ldots, y_n$ corresponden a los símbolos de $x_1, \ldots, x_n$, y las variables $y_{n+1}, \ldots, y_{2n}$ corresponden a los símbolos de $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

Demostración: Denotemos por $\sigma_k(d)$ el símbolo principal de orden k de un operador $d \in A_n$, respecto a la filtración de Bernstein. Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos

$$y_i := \sigma_1(x_i), \quad y_{n+i} := \sigma_1(\partial_i). \tag{4.1}$$

Estos elementos generan una subálgebra graduada de $S_n := \mathrm{gr}^{\mathcal{B}}(A_n)$. Veamos que en realidad generan todo S_n, que esta es conmutativa y que no hay relaciones polinómicas entre ellos.

Cualquier operador $d \in A_n$ de orden k puede escribirse como combinación lineal de monomios $x^\alpha \partial^\beta$ con $|\alpha| + |\beta| \leq k$. El símbolo principal $\sigma_k(d)$ depende únicamente de los monomios con $|\alpha| + |\beta| = k$, y para cada uno de ellos se cumple:

$$\sigma_k(x^\alpha \partial^\beta) = \sigma_1(x_1)^{\alpha_1} \cdots \sigma_1(x_n)^{\alpha_n} \cdot \sigma_1(\partial_1)^{\beta_1} \cdots \sigma_1(\partial_n)^{\beta_n}.$$

Por la definición que hemos hecho en 4.1 se deduce que

$$\sigma_k(x^\alpha \partial^\beta) = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} \cdot y_{n+1}^{\beta_1} \cdots y_{2n}^{\beta_n}.$$

Es decir, el símbolo principal de cada monomio es exactamente un monomio en las variables y_i. Por lo tanto, los símbolos principales son polinomios en los y_i, lo que muestra que estos generan S_n como K-álgebra.

Respecto a la conmutatividad, los únicos conmutadores no triviales en A_n son $[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}$, pero el símbolo principal del conmutador es cero (pues $\delta_{ij} \in \mathcal{B}_0$), así que los símbolos y_i e y_j conmutan entre sí en S_n.

Finalmente, consideremos el homomorfismo de K-álgebras graduadas

$$\varphi : K[y_1, \ldots, y_{2n}] \longrightarrow S_n,$$

definido enviando $y_i \mapsto \sigma_1(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, y $y_{n+i} \mapsto \sigma_1(\partial_i)$ para $i = 1, \ldots, n$. Supongamos que un polinomio homogéneo $F(y_1, \ldots, y_{2n})$ se anula en S_n, es decir, que $\varphi(F) = 0$. Como F es homogéneo de grado k, la imagen $\varphi(F)$ correspondería al símbolo principal de un operador de orden k. Sin embargo, si dicha imagen es cero, significa que en realidad proviene de un operador de orden estrictamente menor. Esto solo es posible si todos los coeficientes de F son cero. Por tanto, $\ker \varphi = \{0\}$, y concluimos que φ es inyectivo.

Como los elementos $y_1, \ldots, y_{2n}$ generan el álgebra S_n y hemos demostrado que el homomorfismo φ que los envía a sus símbolos correspondientes es inyectivo, concluimos que dicho homomorfismo es en realidad un isomorfismo de álgebras graduadas. Por lo tanto, S_n es un álgebra conmutativa generada libremente por esos $2n$ elementos, es decir,

$$S_n \cong K[y_1, \ldots, y_{2n}].$$

□

Observación 4.2.18. *El ejemplo anterior, Ejemplo 4.2.16, puede reinterpretarse ahora de forma más precisa: el símbolo principal de un operador diferencial en A_1 se identifica con un polinomio homogéneo en el álgebra graduada isomorfa a $K[y_1, y_2]$, donde y_1 corresponde a x y y_2 a ∂. Así, para el operador*

$$d = x^2\partial + x\partial^2 + \partial + 1,$$

su símbolo principal en $S_1 = \mathrm{gr}^{\mathcal{B}}(A_1) \cong K[y_1, y_2]$ es $\sigma(d) = y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2$, un elemento homogéneo de grado 3 en dicha álgebra.

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, las filtraciones permiten organizar la estructura de un módulo de forma compatible con la del álgebra que lo actúa. Esta compatibilidad es esencial para construir objetos graduados que capturan información algebraica significativa.

Una vez construida el álgebra graduada $\mathrm{gr}^{\mathcal{F}}(R)$, podemos extender esta idea a módulos filtrados sobre R. En ese caso, el módulo graduado asociado adquiere de forma natural la estructura de $\mathrm{gr}^{\mathcal{F}}(R)$-módulo.

De este modo, el símbolo principal de un operador se interpreta como un polinomio homogéneo en la álgebra graduada, que es isomorfa a $K[y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n}]$. Esta identificación permite extender el concepto de símbolo principal a módulos filtrados sobre A_n.

Supongamos que M es un A_n-módulo por la izquierda, equipado con una filtración $\Gamma = \{\Gamma_k\}_{k \geq 0}$ compatible con la filtración de Bernstein $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 0}$ en A_n, es decir,

$$B_i \cdot \Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j} \quad \text{para todo } i, j \geq 0.$$

Antes de continuar, definimos el concepto fundamental que usaremos para estudiar estos módulos filtrados:

Definición 4.2.19 (Símbolo de orden k en un módulo)**.** *Sea $u \in \Gamma_k$. Su* ***símbolo de orden*** *k se define como la clase de u en el cociente*

$$\mu_k(u) := u + \Gamma_{k-1} \in \Gamma_k / \Gamma_{k-1},$$

donde, por convención, se toma $\Gamma_{-1} := \{0\}$.

Observación 4.2.20. *El símbolo $\mu_k(u)$ es no nulo si y solo si $u \notin \Gamma_{k-1}$.*

Este símbolo nos permite construir un objeto graduado que captura la información de la filtración:

Definición 4.2.21 (Módulo graduado asociado)**.** *Sea M un A_n-módulo por la izquierda, dotado de una filtración $\Gamma = \{\Gamma_k\}_{k\geq 0}$. Se define su* ***módulo graduado asociado*** *como*

$$\operatorname{gr}^{\Gamma} M := \bigoplus_{k\geq 0} \Gamma_k/\Gamma_{k-1},$$

con la convención $\Gamma_{-1} := \{0\}$.

Queremos ahora dotar a $\operatorname{gr}^{\Gamma} M$ de una estructura natural de S_n-módulo, donde

$$S_n := \operatorname{gr}_{\mathcal{B}}(A_n) \cong K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$$

es el álgebra graduada asociada al álgebra de Weyl con la filtración de Bernstein. Para ello, definimos una acción compatible con los símbolos:

Sean $a \in B_k$ y $u \in \Gamma_i$. Denotando por $\sigma_k(a)$ el símbolo de a en B_k/B_{k-1}, definimos la acción:

$$\sigma_k(a) \cdot \mu_i(u) := \mu_{i+k}(a \cdot u).$$

Esta operación está bien definida gracias a la compatibilidad entre las filtraciones: dado que $a \in B_k$ y $u \in \Gamma_i$ implican $au \in \Gamma_{i+k}$, y si además $u \in \Gamma_{i-1}$, entonces $au \in \Gamma_{i+k-1}$, la clase $\mu_{i+k}(au)$ depende únicamente de las clases de a y u. Por lo tanto, $\operatorname{gr}^{\Gamma} M$ adquiere una estructura natural de S_n-módulo graduado.

Observación 4.2.22. *Esta construcción convierte a $\operatorname{gr}^{\Gamma} M$ en una herramienta muy útil para estudiar la estructura del módulo original M, ya que muchas propiedades pueden analizarse en el contexto más sencillo de módulos sobre un álgebra graduada conmutativa como S_n.*

Recordemos el Ejemplo 4.2.10, donde describimos el A_n-módulo $K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$ con la filtración natural por grado de los polinomios. En ese contexto, el paso al módulo graduado asociado nos permite dotar a $K[X]$ de una estructura graduada compatible, sobre la cual actúa el álgebra graduada S_n. A continuación, describimos explícitamente cómo es dicha acción y cuál es el ideal anulador correspondiente.

Proposición 4.2.23 (Ideal anulador en el módulo graduado asociado al anillo de polinomios)**.** *Con la notación anterior, el ideal anulador de $\operatorname{gr}^{\Gamma} K[X]$ en el álgebra graduada S_n es*

$$\operatorname{ann}_{S_n}(\operatorname{gr}^{\Gamma} K[X]) = \langle y_{n+1}, \ldots, y_{2n}\rangle,$$

es decir, está generado por los símbolos correspondientes a las derivadas.

Demostración: Recordemos que la graduación inducida por la filtración Γ en $K[X]$ se corresponde con los polinomios homogéneos según su grado, es decir,

$$\operatorname{gr}^{\Gamma} K[X] \cong \bigoplus_{r\geq 0} (\Gamma_r/\Gamma_{r-1}),$$

donde cada componente Γ_r/Γ_{r-1} puede identificarse con el espacio de polinomios homogéneos de grado r en $K[X]$, de manera que como espacios vectoriales graduados tenemos $gr^{\Gamma}K[X] \cong K[X]$.

La acción de la álgebra graduada S_n sobre $\operatorname{gr}^{\Gamma} K[X]$ proviene del álgebra de Weyl A_n con su filtración de Bernstein $\mathcal{B}$.

Para $i = 1, \ldots, n$, el símbolo $y_i = \sigma_1(x_i)$ actúa multiplicando por la variable X_i, es decir,

$$y_i \cdot f = X_i f,$$

para todo polinomio homogéneo f.

En cambio, para $i = n+1, \ldots, 2n$, el símbolo $y_i = \sigma_1(\partial_{i-n})$ actúa como la derivada parcial respecto a X_{i-n}. Dado que $f \in \Gamma_r/\Gamma_{r-1}$ representa una clase de polinomios homogéneos de grado r, la derivada $\partial_{i-n}f$ es un polinomio homogéneo de grado $r-1$, por lo que $\partial_{i-n}f \in \Gamma_{r-1}$. Esto implica que la acción de y_i sobre f se representa en el módulo graduado como la clase de $\partial_{i-n}f$ en el siguiente nivel inferior de la filtración, es decir,

$$y_i \cdot f = \overline{\partial_{i-n}f} \in \Gamma_{r-1}/\Gamma_{r-2}.$$

Sin embargo, dentro del cociente Γ_r/Γ_{r-1}, esta clase es cero, ya que corresponde a un elemento de grado estrictamente menor. Por lo tanto, $y_i \cdot f = 0$, lo que muestra que los símbolos $y_{n+1}, \ldots, y_{2n}$ anulan a todo $\operatorname{gr}^{\Gamma} K[X]$.

Como la derivada de un polinomio homogéneo de grado r es un polinomio homogéneo de grado $r-1$, su clase en Γ_r/Γ_{r-1} es nula. Por lo tanto,$y_i \cdot f = 0$ para todo $f \in \operatorname{gr}^{\Gamma} K[X]$ y para todo $i = n+1, \ldots, 2n$.

De este modo, los elementos $y_{n+1}, \ldots, y_{2n}$ anulan $\operatorname{gr}^{\Gamma} K[X]$ y generan el ideal anulador en S_n, es decir,

$$\operatorname{ann}_{S_n}(\operatorname{gr}^{\Gamma} K[X]) = \langle y_{n+1}, \ldots, y_{2n} \rangle.$$

□

4.3. Buenas filtraciones

Sea M un módulo izquierdo finitamente generado sobre el álgebra de Weyl A_n, y sea $\Gamma = \{\Gamma_k\}_{k\geq 0}$ una filtración creciente de M compatible con la filtración de Bernstein $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k\geq 0}$ en A_n. Consideramos el módulo graduado asociado $\operatorname{gr}^{\Gamma}(M)$ de donde hemos visto en el Teorema 4.2.17 que

$$S_n := \operatorname{gr}(A_n) \cong K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n],$$

que es un anillo de polinomios conmutativo en $2n$ variables.

Si el módulo graduado $\mathrm{gr}^{\Gamma}(M)$ es finitamente generado sobre S_n, entonces es noetheriano como módulo sobre S_n, pues S_n es un anillo noetheriano y todo módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano es noetheriano (véase Proposición 2.5 en [Cou95]).

Por otra parte, por el *principio graduado*[2], se deduce que M es noetheriano como módulo sobre A_n.

Sin embargo, la afirmación recíproca no siempre es cierta: que M sea finitamente generado sobre A_n no garantiza que $\mathrm{gr}^{\Gamma}(M)$ sea finitamente generado sobre S_n para una filtración arbitraria Γ.

Definición 4.3.1. *Sea M un módulo izquierdo sobre A_n con una filtración Γ compatible con la filtración de Bernstein $\mathcal{B}$. Decimos que Γ es una* ***buena filtración*** *de M si el graduado asociado $\mathrm{gr}^{\Gamma}(M)$ es finitamente generado como módulo sobre S_n.*

Aunque la definición de buena filtración puede parecer exigente, es importante destacar que todo A_n-módulo finitamente generado admite al menos una. En efecto, si M está generado por los elementos $u_1, u_2, \ldots, u_s$, entonces la familia $\Gamma = \{\Gamma_k\}$ dada por

$$\Gamma_k := \sum_{i=1}^{s} B_k \cdot u_i$$

define una buena filtración de M.

Se puede comprobar que en esta situación, el módulo graduado $\mathrm{gr}^{\Gamma}(M)$ está generado, como S_n-módulo, por las clases $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_s$ de los generadores u_i.

Esta construcción es clave para el estudio de las propiedades algebraicas y geométricas del módulo M, ya que permite trasladar el problema al ámbito del anillo conmutativo S_n, donde herramientas como el polinomio de Hilbert se vuelven aplicables. Con esto aclarado, tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.3.2 (Buena filtración)**.** Sea A_n el álgebra de Weyl con la filtración de Bernstein $\mathcal{B}$. Consideremos el módulo $M = A_n$ como módulo sobre sí mismo, con la filtración inducida por $\mathcal{B}$, es decir, $\Gamma_k = B_k$.

En este caso, el módulo graduado asociado

$$\mathrm{gr}^{\Gamma}(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma_k / \Gamma_{k-1}$$

es isomorfo al álgebra graduada S_n como vimos en el Teorema 4.2.17, que es un anillo conmutativo de polinomios en $2n$ variables. Por tanto, $\mathrm{gr}^{\Gamma}(M)$ es finitamente generado sobre S_n, y Γ es una buena filtración.

[2] Este principio establece que si un módulo filtrado tiene un módulo graduado asociado que cumple cierta propiedad P, entonces el módulo original también cumple P. En particular, para la propiedad de ser noetheriano, esta transferencia se justifica y formaliza en el contexto de la microlocalización algebraica [Ess86]. Además, la finitud y noetherianidad de módulos filtrados también puede justificarse a partir de la Proposición 2.5 del capítulo 8 de [Cou95], que afirma que sobre un anillo noetheriano, los módulos finitamente generados son noetherianos.

Antes de abordar un ejemplo de filtración que no sea buena, conviene establecer un criterio que nos permita reconocer con facilidad cuándo una filtración sí lo es. El siguiente resultado proporciona una caracterización útil y manejable de las buenas filtraciones en términos del comportamiento de sus términos a partir de cierto grado.

Proposición 4.3.3 (Caracterización de una buena filtración)**.** *Sea M un A_n-módulo a izquierda. Una filtración Γ de M con respecto a $\mathcal{B}$ es buena si y solo si existe un k_0 tal que $\Gamma_{i+k} = B_i\Gamma_k$ para todo $k \geq k_0$.*

Demostración: Supongamos que existe k_0 tal que $\Gamma_{i+k} = B_i\Gamma_k$ para todo $k \geq k_0$. Entonces Γ_{k_0} es un espacio vectorial de dimensión finita, y los símbolos de una base de Γ_{k_0} generan $\operatorname{gr}^\Gamma M$. Por tanto, $\operatorname{gr}^\Gamma M$ es finitamente generado como S_n-módulo graduado, y Γ es una buena filtración.

Recíprocamente, supongamos que $\operatorname{gr}^\Gamma M$ es finitamente generado como S_n-módulo graduado. Sean $u_1, \ldots, u_s \in M$ elementos cuyos símbolos generan $\operatorname{gr}^\Gamma M$, y supongamos que $u_j \in \Gamma_{k_j} \setminus \Gamma_{k_j-1}$. Sea $k_0 = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_s\}$.

Fijado $k \geq k_0$, probaremos por inducción en i que $\Gamma_{i+k} = B_i\Gamma_k$. Si $i = 0$, entonces $\Gamma_k = B_0\Gamma_k$, y la igualdad es inmediata.

Supongamos ahora que la igualdad vale para $i-1$, y tomemos $v \in \Gamma_{i+k}$. Dado que los símbolos de los u_j generan $\operatorname{gr}^\Gamma M$, el símbolo de v en el grado $i+k$ se puede escribir como combinación lineal

$$\mu_{i+k}(v) \in \sum_{j=1}^{s} \sigma_{i+k-k_j}\left(B_{i+k-k_j}\right)\mu_{k_j}(u_j),$$

donde μ_m denota el símbolo de orden m respecto a Γ. Como $B_{i+k-k_j} = B_iB_{k-k_j}$, se sigue que

$$v \in \sum_{j=1}^{s} B_iB_{k-k_j}u_j + \Gamma_{i+k-1}.$$

Dado que $B_{k-k_j}u_j \subseteq \Gamma_k$ (pues $k \geq k_j$) y que, por hipótesis de inducción, $\Gamma_{i+k-1} = B_{i-1}\Gamma_k \subseteq B_i\Gamma_k$, se concluye que $v \in B_i\Gamma_k$, y por tanto $\Gamma_{i+k} \subseteq B_i\Gamma_k$. La inclusión opuesta $B_i\Gamma_k \subseteq \Gamma_{i+k}$ es inmediata por definición de filtración, así que se obtiene la igualdad deseada. $\square$

La caracterización obtenida en la proposición anterior no solo permite reconocer cuándo una filtración es buena, sino que también nos ofrece una herramienta eficaz para identificar aquellas que no lo son. A continuación, presentamos un ejemplo concreto de filtración que, aunque compatible con la filtración de Bernstein, no cumple las condiciones necesarias para ser buena.

Ejemplo 4.3.4 (Mala filtración)**.** Consideremos el A_n-módulo $M = A_n$, y definamos una filtración Γ' cuyos términos crecen de forma abrupta:

$$\Gamma'_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0, \\ K \cdot 1 & \text{si } k = 0, \\ A_n & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Esta filtración es compatible con la filtración de Bernstein en el sentido de que $B_i\Gamma'_k \subseteq \Gamma'_{i+k}$ para todo $i, k \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, el módulo graduado asociado

$$\mathrm{gr}^{\Gamma'}(M) = \Gamma'_0 \oplus (\Gamma'_1/\Gamma'_0) \oplus (\Gamma'_2/\Gamma'_1) \oplus \cdots$$

no es finitamente generado como S_n-módulo. En efecto, se tiene $\Gamma'_1/\Gamma'_0 \cong A_n/K$, y el símbolo de cada monomio de A_n de orden estrictamente positivo determina una clase no contenida en las anteriores. Por tanto, cada uno de estos símbolos genera una nueva clase homogénea, y no se puede generar $\mathrm{gr}^{\Gamma'}(M)$ con un número finito de ellos.

En consecuencia, Γ' no es una buena filtración.

Acabamos la sección dando una proposición para comparar filtraciones.

Proposición 4.3.5 (Comparando buenas filtraciones)**.** *Sea M un A_n-módulo a izquierda. Supongamos que Γ y Ω son dos filtraciones de M con respecto a la filtración $\mathcal{B}$ de A_n. Entonces:*

1. *Si Γ es una buena filtración, existe un entero k_1 tal que $\Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k_1}$ para todo j.*
2. *Si Γ y Ω son buenas filtraciones, existe un entero k_2 tal que*

$$\Omega_{j-k_2} \subseteq \Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k_2} \quad \textit{para todo } j.$$

Demostración: Supongamos que Γ es una buena filtración. Demostraremos cada parte por separado:

(1) Por la Proposición 4.3.3, existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\Gamma_{j+i} = B_i\Gamma_j \quad \text{para todo } j \geq k_0 \text{ y todo } i \geq 0.$$

En particular, Γ_{k_0} es un subespacio de dimensión finita de M, y por tanto está contenido en algún Ω_{k_1}. Para $j \geq 0$, se tiene

$$\Gamma_{j+k_0} = B_j\Gamma_{k_0} \subseteq B_j\Omega_{k_1} \subseteq \Omega_{j+k_1},$$

ya que Ω es una filtración compatible con $\mathcal{B}$. Reindexando $j + k_0 \mapsto j$, se obtiene

$$\Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k_1-k_0} \quad \text{para todo } j,$$

lo que prueba el punto (1).

(2) Si además Ω es una buena filtración, aplicamos el punto (1) dos veces: primero para obtener $\Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k_1}$, y luego $\Omega_j \subseteq \Gamma_{j+k'_1}$. Tomando $k_2 = \max(k_1, k'_1)$, se deduce que

$$\Omega_{j-k_2} \subseteq \Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k_2} \quad \text{para todo } j,$$

como queríamos demostrar.

Esto concluye la demostración de la proposición. □

Las buenas filtraciones no solo permiten transferir información entre un módulo y su graduado, sino que también proporcionan un marco técnico robusto para el estudio de A_n-módulos. Su verdadera potencia, sin embargo, se hará sentir en el próximo capítulo, donde las utilizaremos para definir una noción de dimensión en el contexto de módulos finitamente generados sobre A_n.

Capítulo 5

Módulos holónomos

Los módulos holónomos sobre el álgebra de Weyl A_n constituyen una clase fundamental en el estudio de sistemas diferenciales algebraicos. También conocidos en el ámbito de las ecuaciones en derivadas parciales como sistemas máximamente sobredeterminados, estos módulos se distinguen por tener dimensión exacta n. Su importancia radica en que muchas ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes polinómicos pueden interpretarse como módulos holónomos, lo que permite un análisis algebraico riguroso de sus propiedades. En este capítulo abordaremos el estudio de los módulos holónomos desde una perspectiva algebraica y geométrica, explorando sus propiedades y aplicaciones.

En la primera sección, gracias al concepto de buena filtración definido en el Capítulo 4, introducimos la noción de dimensión de un módulo a través del polinomio de Hilbert. Mostraremos que esta dimensión coincide con la dimensión de Krull. Además, se presentarán cotas importantes para la dimensión de un módulo sobre el álgebra de Weyl A_n, donde la desigualdad de Bernstein proporciona una cota inferior, mientras que la cota superior es igual a $2n$.

La segunda sección está dedicada a la definición de módulo holónomo y a la demostración de la existencia del polinomio de Bernstein-Sato, un objeto fundamental que enlaza análisis, geometría y álgebra. Este polinomio juega un papel esencial en la comprensión de la estructura y propiedades de los módulos holónomos.

Para la realización de este capítulo, se han tomado como referencias principales los capítulos 9 y 10 de [Cou95], que corresponden a las dos secciones respectivamente. Además, para la primera sección se ha contado con bibliografía de apoyo adicional, entre la que destacan [Pee11] y [CLO98].

5.1. Dimensión

En esta sección estudiaremos nociones fundamentales relacionadas con la dimensión de los módulos graduados, haciendo especial énfasis en la función y la serie de Hilbert. Consideramos el anillo graduado estándar de polinomios en n variables sobre un cuerpo conmutativo K, que denotamos por $\mathcal{S}_n = K[x_1, \ldots, x_n]$, dotado de la graduación natural por el grado total de los polinomios. Aunque nuestro principal interés es el estudio de $\mathcal{S}_n$, debido a la isomorfía vista en el Capítulo 4 con el álgebra graduada asociada de $A_{n/2}$ cuando n es par respecto a la filtración de Bernstein, adoptaremos en este capítulo un marco ligeramente más general. En particular, trabajaremos con el anillo graduado cociente $R = \mathcal{S}_n/I$, donde $I \subseteq \mathcal{S}_n$ es un ideal homogéneo. Obsérvese que, al tomar $I = \{0\}$, se recupera el caso $R = \mathcal{S}_n$.

Sea ahora $M = \bigoplus_{i\geq 0} M_i$ un R-módulo graduado finitamente generado, en el que cada M_i es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K. Este tipo de módulos aparece de manera natural en geometría algebraica, álgebra conmutativa y en el estudio del álgebra de Weyl A_n.

Bajo estas hipótesis, podemos definir funciones que cuantifican el crecimiento de las dimensiones de los espacios homogéneos M_i, lo cual nos permitirá analizar con mayor profundidad la estructura algebraica y geométrica del módulo M. A continuación, introducimos las definiciones básicas que servirán de base para este enfoque.

Definición 5.1.1. *Sea $M = \bigoplus_{i\geq 0} M_i$ un módulo graduado finitamente generado sobre una K-álgebra graduada R. Asociamos a M las siguientes funciones:*

- *La **función de Hilbert** de M es la aplicación*

$$\mathrm{Hilbert}_M : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad i \mapsto \dim_K(M_i),$$

  que asigna a cada grado i la dimensión de la componente homogénea correspondiente.

- *La **serie de Hilbert** de M es la serie formal*

$$\mathrm{Hilb}_M(t) := \sum_{i=0}^{\infty} \dim_K(M_i)\, t^i \in \mathbb{Z}[[t]],$$

  que codifica el comportamiento de la función de Hilbert mediante una serie generadora.

- *La **función de Hilbert acumulada** de M es la función*

$$H_M(s) := \sum_{i=0}^{s} \dim_K(M_i),$$

  que mide la dimensión total del módulo en grados menores o iguales a s.

Estas herramientas nos permiten estudiar el comportamiento asintótico de los módulos graduados en términos combinatorios y algebraicos. Ilustremos la definición anterior con un ejemplo concreto.

Ejemplo 5.1.2. Consideremos el anillo $K[x, y]$ con su graduación estándar, y tomemos el ideal homogéneo $I = (x^3, y^5)$. El cociente $R = K[x, y]/I$ hereda una estructura graduada, en la cual cada componente graduada R_d está formada por las clases de monomios de grado d que no pertenecen al ideal. Como los generadores de I son x^3 y y^5, cualquier monomio que contenga una potencia de x mayor o igual que 3, o de y mayor o igual que 5, se anula en el cociente.

Esto nos permite determinar una base para cada componente R_d. En grado cero sólo sobrevive la clase del monomio constante, mientras que en grado uno tenemos las clases de x e y. En grados sucesivos, los monomios válidos se obtienen combinando potencias de x menores que 3 con potencias de y menores que 5, siempre que el grado total sea el deseado. Así, por ejemplo, en grado dos aparecen las clases de x^2, xy y y^2, y en grado tres las de x^2y, xy^2 y y^3. Este patrón continúa hasta el grado seis, a partir del cual ya no quedan monomios que no pertenezcan al ideal.

A partir de esta descripción, podemos leer directamente los valores de la **función de Hilbert** de R, que en cada grado asigna la dimensión del componente correspondiente: vale 1 en grado cero, 2 en grado uno, 3 en los grados dos, tres y cuatro, 2 en grado cinco y 1 en grado seis. En grados mayores la función se anula. La **serie de Hilbert** correspondiente refleja esta secuencia como una serie formal de potencias:

$$\mathrm{Hilb}_R(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 3t^3 + 3t^4 + 2t^5 + t^6.$$

Por otro lado, la **función de Hilbert acumulada** de R registra la suma de las dimensiones hasta cierto grado s. En este caso, sus valores son: 1 para $s = 0$, 3 para $s = 1$, 6 para $s = 2$, 9 para $s = 3$, 12 para $s = 4$, 14 para $s = 5$, y 15 para $s = 6$ o superior. Como ya no aparecen nuevos monomios a partir del grado siete, la función acumulada se estabiliza en 15.

Recuperaremos este ejemplo en el Apéndice A.3 donde computaremos estas cuentas. Podemos hacer una observación que será útil para interpretar de forma combinatoria la función de Hilbert en ciertos casos particulares.

Observación 5.1.3. *Sea $R = \mathcal{S}_n/I$, donde $I \subseteq \mathcal{S}_n$ es un ideal homogéneo generado por monomios. Entonces, la función de Hilbert de R en el grado i cuenta el número de monomios de grado i que no pertenecen a I. Es decir,*

$$\mathrm{Hilbert}_R(i) = \dim_K(R_i) = \dim_K((\mathcal{S}_n/I)_i)$$

coincide con la cantidad de monomios de grado i que no están en I.

Esta observación nos permite calcular fácilmente la función y la serie de Hilbert de algunos anillos. Veamos un caso elemental.

Ejemplo 5.1.4. Consideremos el anillo $K[x]$ con la graduación estándar. En este caso, para cada $i \in \mathbb{N}$, el espacio graduado $(K[x])_i$ tiene como base al monomio x^i, por lo que su dimensión es uno. Por tanto, la función de Hilbert es constante e igual a uno en todos los grados.

La serie de Hilbert, que es la suma formal de estas dimensiones ponderadas por t^i, resulta ser la serie geométrica clásica:

$$\mathrm{Hilb}_{K[x]}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}.$$

Veamos ahora un ejemplo central que describe la función y la serie de Hilbert del anillo de polinomios graduado $\mathcal{S}_n$, uno de los casos más importantes en la teoría.

Ejemplo 5.1.5. Para el anillo $\mathcal{S}_n$ con la graduación estándar, la componente graduada $\mathcal{S}_i$ está formada por todos los monomios homogéneos de grado i en n variables. Como es bien sabido, el número de tales monomios es $\binom{n-1+i}{i}$, por lo que la función de Hilbert de $\mathcal{S}$ viene dada por

$$\mathrm{Hilbert}_{\mathcal{S}}(i) = \dim_K(\mathcal{S}_i) = \binom{n-1+i}{i}.$$

Esto permite escribir la serie de Hilbert como una serie formal:

$$\mathrm{Hilb}_{\mathcal{S}}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1+i}{i} t^i.$$

Esta suma coincide con una expresión racional clásica:

$$\mathrm{Hilb}_{\mathcal{S}}(t) = \frac{1}{(1-t)^n},$$

lo cual puede demostrarse por inducción sobre el número de variables n. El caso base $n = 1$ ya fue tratado en el Ejemplo 5.1.4. Para el paso inductivo, se observa que añadir una nueva variable equivale a multiplicar la serie por $\frac{1}{1-t}$, ya que los monomios en una variable adicional actúan como factores que aumentan el grado de forma independiente.[1]

Antes de avanzar, vamos a recordar y demostrar brevemente una proposición importante: la aditividad de la función de Hilbert. Esta propiedad será útil para descomponer módulos y analizar su crecimiento en términos de funciones más simples.

Proposición 5.1.6. *Sean U, V, W espacios vectoriales sobre K. Si*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, entonces se cumple que

$$\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(W).$$

Demostración: Como la sucesión es exacta, la imagen de la primera aplicación es isomorfa a U, y el cociente V/U es isomorfo a W. Por tanto,

$$\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(V/U) = \dim_K(U) + \dim_K(W),$$

como se quería demostrar. □

Como consecuencia directa, obtenemos el siguiente resultado para módulos graduados:

[1] Este argumento puede formalizarse por inducción usando la multiplicación por una variable; una demostración detallada puede encontrarse el capítulo 11 de [AM69].

Corolario 5.1.7. *Sean M', M, M'' módulos graduados finitamente generados sobre R. Si*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces

$$\mathrm{Hilbert}_M(t) = \mathrm{Hilbert}_{M'}(t) + \mathrm{Hilbert}_{M''}(t).$$

Por inducción, también se obtiene la siguiente generalización para sucesiones exactas largas:

Corolario 5.1.8. *Sean $M_0, M_1, \ldots, M_p$ módulos graduados finitamente generados sobre R. Si*

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{p-1} \longrightarrow M_p \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \,\mathrm{Hilbert}_{M_i}(t) = 0.$$

A continuación, presentamos una propiedad fundamental de la serie de Hilbert que será clave para comprender la relación entre un módulo graduado finitamente generado M y su **módulo desplazado** $M(-p)$, donde $p \in \mathbb{Z}$ indica el grado del desplazamiento.

Por definición, el desplazamiento se obtiene reindexando las componentes de M:

$$M(-p)_i := M_{i-p}.$$

Es decir, en el módulo $M(-p)$ la componente de grado i coincide con la componente de grado $i - p$ de M.

Proposición 5.1.9. *Sea M un R-módulo graduado finitamente generado. Entonces, para todo entero p, se cumple*

$$\mathrm{Hilb}_{M(-p)}(t) = t^p \,\mathrm{Hilb}_M(t).$$

Demostración: De la definición anterior se sigue que

$$\dim_K(M(-p)_i) = \dim_K(M_{i-p}).$$

Al trasladar esta relación a la serie de Hilbert, se obtiene

$$\mathrm{Hilb}_{M(-p)}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_K(M_{i-p}) t^i = t^p \sum_{j=0}^{\infty} \dim_K(M_j) t^j = t^p \,\mathrm{Hilb}_M(t),$$

donde en el segundo paso hemos hecho el cambio de variable $j = i - p$. Esto demuestra la afirmación. □

Con esta propiedad establecida, disponemos de una herramienta clave para el análisis de las funciones de Hilbert de módulos desplazados. Para la demostración del teorema principal de la sección, primero definiremos algunos conceptos previos y un lema técnico que facilitarán la argumentación.

Definición 5.1.10. *Un* ***polinomio numérico*** *es un polinomio $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $p(n) \in \mathbb{Z}$ para todo entero n suficientemente grande. Escribiremos $n \gg 0$.*

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función. Definimos su **función diferencia** como

$$\Delta f(z) := f(z+1) - f(z).$$

Para un entero $r \geq 0$ y una variable t, definimos el **coeficiente binomial generalizado** como

$$\binom{t}{r} := \frac{t(t-1)\cdots(t-r+1)}{r!}.$$

Este es un polinomio de grado r en la variable t, válido para todo $t \in \mathbb{C}$. Cuando $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ con $t \geq r$, coincide con el coeficiente binomial usual $\binom{t}{r} = \frac{t!}{r!(t-r)!}$.
Por convención, si $r = 0$ definimos $\binom{t}{0} = 1$.

Lema 5.1.11. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\Delta\binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}$ *para todo $r \geq 1$.*

2. *Sea $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio numérico. Entonces existen enteros $c_0, \ldots, c_k$ tales que*

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i}\binom{t}{i}.$$

   En particular, $p(n) \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3. *Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función. Si existe un polinomio numérico $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que para todo $n \gg 0$ se cumple*

$$\Delta f(n) = q(n),$$

   entonces existe un polinomio numérico $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que para todo $n \gg 0$

$$f(n) = p(n).$$

Demostración:

1. Esta demostración es una mera comprobación de la igualdad utilizando la definición de coeficiente binomial, la función diferencia y operar:

$$\Delta\binom{t}{r} = \binom{t+1}{r} - \binom{t}{r} = \frac{(t+1)!}{r!(t+1-r)!} - \frac{t!}{(t-r)!}.$$

   Como $(t+1-r)! = (t-r)!(t+1-r)$, sacamos factor común y operamos:

$$\Delta\binom{t}{r} = \frac{t!}{r!(t-r)!}\left[\frac{t+1}{t+1-r} - 1\right] = \frac{t!}{r!(t-r)!}\left[\frac{r}{t+1-r}\right].$$

   Operando y reescribiendo, obtenemos:

$$\Delta\binom{t}{r} = \frac{t!\cdot r}{r(r-1)!(t-r+1)!} = \frac{t!}{(r-1)!(t-(r-1))!} = \binom{t}{r-1}.$$

   Por tanto, se verifica que:

$$\Delta\binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}.$$

2. Procedemos por inducción sobre el grado del polinomio $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$.

   Si $\deg(p) = 0$, entonces $p(t) = a \in \mathbb{Q}$ es constante. Como $p(n) \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, se sigue que $a \in \mathbb{Z}$. Además, $\binom{t}{0} = 1$, por lo que

$$p(t) = a = a\binom{t}{0},$$

   con $a \in \mathbb{Z}$. Así, el resultado es cierto para polinomios constantes.

   Supongamos que todo polinomio numérico de grado menor o igual que $k-1$ se puede escribir como combinación lineal de funciones binomiales con coeficientes enteros. Sea ahora $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio numérico de grado k.

   Sabemos que las funciones $\binom{t}{i}$ para $i = 0, \ldots, k$ forman una base de $\mathbb{Q}[t]$ de grado menor o igual que k. Por tanto, existen coeficientes racionales $c_0, \ldots, c_k$ tales que

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i}\binom{t}{i}.$$

   Queremos probar que $c_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 0, \ldots, k$.

   Consideramos la diferencia finita definida por $\Delta p(t) := p(t+1) - p(t)$. Usando que $\Delta\binom{t}{i} = \binom{t}{i-1}$, se tiene:

$$\Delta p(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i}\left(\binom{t+1}{i} - \binom{t}{i}\right) = \sum_{i=1}^{k} c_{k-i}\binom{t}{i-1}.$$

   Reindexando la suma (tomando $j = i-1$), obtenemos:

$$\Delta p(t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_{k-(j+1)}\binom{t}{j} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{(k-1)-i}\binom{t}{i}.$$

   Esto muestra que $\Delta p(t)$ es un polinomio de grado $\leq k-1$. Además, como p es un polinomio numérico, se sigue que Δp también lo es.

   Por la hipótesis de inducción, los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ en esta expansión binomial son enteros. Nos resta probar que c_k también lo es. Para ello, evaluemos en un entero $r \geq k$: como $p(r) \in \mathbb{Z}$ y todas las $\binom{r}{i}$ con $i \geq 1$ son enteras, se tiene que

$$c_k = p(r) - \sum_{i=1}^{k} c_{k-i}\binom{r}{i},$$

   que es la diferencia de dos enteros. Por tanto, $c_k \in \mathbb{Z}$.

   Por tanto, todos los coeficientes c_i son enteros y se concluye que:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i}\binom{t}{i}, \quad \text{con } c_i \in \mathbb{Z}.$$

   En particular, como $\binom{n}{i} \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $i \geq 0$, y los coeficientes c_i son enteros, se sigue que $p(n) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i}\binom{n}{i} \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3. Supongamos que existe una función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que su diferencia $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ coincide con un polinomio numérico $q(n) \in \mathbb{Q}[t]$ para todo $n \gg 0$.

   Por el ítem (2) del lema, este polinomio $q(t)$ se puede escribir como combinación lineal de coeficientes binomiales con coeficientes enteros:

   $$q(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \binom{t}{i}, \quad \text{con } c_0, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}.$$

   Definimos ahora la función

   $$p(t) := \sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \binom{t}{i+1}.$$

   Esta construcción no es arbitraria: usamos el hecho de que, por el ítem (1) del lema,

   $$\Delta \binom{t}{i+1} = \binom{t}{i}.$$

   Aplicando la linealidad de Δ, se deduce que

   $$\Delta p(t) = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \Delta \binom{t}{i+1} = \sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \binom{t}{i} = q(t).$$

   Por tanto, $p(t)$ es un polinomio numérico tal que $\Delta p(t) = q(t) = \Delta f(t)$ para $t \gg 0$. Se sigue entonces que $\Delta(f - p)(n) = 0$ para todo $n \gg 0$. Esto significa que $f(n) - p(n)$ es constante para $n \gg 0$. Es decir, existe un entero c_{k+1} tal que $f(n) = p(n) + c_{k+1}$ para todo $n \gg 0$.

   Finalmente, como $p(t)$ es un polinomio numérico y $c_{k+1} \in \mathbb{Z}$, se concluye que $f(n)$ coincide con otro polinomio numérico (a saber, $p(t) + c_{k+1}$) para $n \gg 0$, como queríamos probar.

Con esto, concluimos la demostración de los tres ítems. □

Estamos listos para enunciar y demostrar el Teorema del polinomio Hilbert.

Teorema 5.1.12 (Polinomio de Hilbert). *Sea $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ un módulo graduado finitamente generado sobre el anillo de polinomios S_n. Entonces existe un polinomio $\chi(t) \in \mathbb{Q}[t]$ y un entero positivo N tales que*

$$H_M(s) = \chi(s) \quad \textit{para todo } s \geq N.$$

Demostración: Sea M un $\mathcal{S}_n$-módulo graduado finitamente generado. Por definición, existe una presentación exacta de módulos graduados

$$\bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{S}_n(-d_j) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{S}_n(-e_i) \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde cada $\mathcal{S}_n(-d)$ denota el módulo $\mathcal{S}_n$ con desplazamiento en la graduación, es decir, $\mathcal{S}_n(-d)_s = (\mathcal{S}_n)_{s-d}$. Esta presentación implica que, para cada $s \in \mathbb{Z}$, la dimensión $\dim_K(M_s)$ se puede expresar como una combinación finita (con coeficientes enteros) de dimensiones de espacios $(\mathcal{S}_n)_m$, con $m = s - d$ para ciertos desplazamientos d.

Sabemos que $\dim_K((\mathcal{S}_n)_m)$ es igual al número de monomios homogéneos de grado m en n variables. Para $m \geq 0$, esta cantidad está dada por el valor del polinomio numérico

$$\binom{m+n-1}{n-1},$$

y para $m < 0$, la dimensión es cero.

Por tanto, $\dim_K(M_s)$ es, para $s \gg 0$, una combinación lineal finita de valores de polinomios numéricos evaluados en s, y en consecuencia, también es un polinomio numérico para $s \gg 0$, en virtud del Lema 5.1.11 (2).

Como la diferencia finita de la función de Hilbert acumulada satisface

$$\Delta H_M(s) = \dim_K(M_s),$$

se deduce, aplicando el Lema 5.1.11 (3), que $H_M(s)$ también coincide con un polinomio numérico para $s \gg 0$.

En consecuencia, existe un polinomio $\chi(t) \in \mathbb{Q}[t]$ y un entero $N \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $s \geq N$,

$$H_M(s) = \sum_{i=0}^{s} \dim_K(M_i) = \chi(s).$$

□

A este polinomio se le conoce como el *polinomio de Hilbert*. Damos ahora su definición formal:

Definición 5.1.13. *Sea $M = \bigoplus_{i\geq 0} M_i$ un módulo graduado finitamente generado sobre el anillo de polinomios $\mathcal{S}_n$. El* ***polinomio de Hilbert*** *de M es el polinomio $\chi(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que existe un entero positivo N para el cual*

$$H_M(s) = \sum_{i=0}^{s} \dim_K(M_i) = \chi(s)$$

para todo $s \geq N$. Es decir, $\chi(t)$ coincide con la función de Hilbert acumulada H_M en todos los enteros suficientemente grandes.

Observación 5.1.14. *La definición del polinomio de Hilbert adoptada en este texto sigue la convención utilizada por [Cou95].*

Cabe señalar que esta no es la única convención presente en la literatura. Por ejemplo, en [Pee11], el polinomio de Hilbert *se define como el polinomio $g(i) \in \mathbb{Q}[i]$ que coincide con la* función de Hilbert *$\dim_K(M_i)$ para $i \gg 0$. Esta misma convención es adoptada también en [CLO98], donde se enfatiza el papel del polinomio como aproximación asintótica de la función de Hilbert, sin involucrar la versión acumulada.*

Estamos ahora en condiciones de definir la dimensión de un módulo sobre el álgebra de Weyl A_n. Sea M un A_n-módulo a izquierda, finitamente generado. Supongamos que $\Gamma = \{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$ es una buena filtración de M con respecto a $\mathcal{B}$. Denotamos por $\chi(t, \Gamma, M)$ al polinomio de Hilbert del módulo graduado $\mathrm{gr}^{\Gamma}(M)$ considerado como módulo sobre el anillo S_n. Por el Teorema 5.1.12, para $t \gg 0$, se cumple:

$$\chi(t, \Gamma, M) = \sum_{0}^{t} \dim_K \left(\frac{\Gamma_i}{\Gamma_{i-1}}\right) = \dim_K(\Gamma_t) \tag{5.1}$$

La última igualdad se justifica por la aditividad de la dimensión en sucesiones exactas cortas como vimos en el Corolario 5.1.7. En efecto, la graduación asociada $\mathrm{gr}^{\Gamma}(M)$ se construye a partir de sucesiones exactas grado a grado, lo que permite descomponer la dimensión total como suma de las dimensiones de los cocientes sucesivos.

Definición 5.1.15. *La **dimensión** de M, denotada por $d(M)$, se define como el grado del polinomio de Hilbert $\chi(t, \Gamma, M)$. Esta cantidad también se conoce como la **dimensión de Krull** de M, ya que coincide con la dimensión de Krull del módulo graduado $\mathrm{gr}^{\Gamma}(M)$ sobre el anillo $\mathcal{S}_n$.*

*El **coeficiente principal** de $\chi(t, \Gamma, M)$ se denota por $c(M)$, y la **multiplicidad** de M se define por*

$$m(M) := d(M)! \cdot c(M).$$

Ambos invariantes son enteros no negativos. Esto se puede ver ya que si $M = 0$, entonces $\chi(t, \Gamma, M) = 0$ y por convención tomamos $d(M) = -\infty$ y $m(M) = 0$. Si $M \neq 0$, entonces $\chi(t, \Gamma, M)$ es un polinomio numérico no nulo, de modo que su grado es un entero $d(M) \geq 0$. Además, por el ítem (ii) del Lema 5.1.11, el coeficiente principal $c(M)$ es positivo, por lo que la multiplicidad satisface $m(M) = d(M)!\, c(M) > 0$. En particular, $m(M) = 0$ si y solo si $M = 0$.

Observación 5.1.16. *En algunos textos, como [Pee11], la serie de Hilbert de M se presenta como una fracción racional de la forma*

$$\mathrm{Hilb}_M(t) = \frac{Q(t)}{(1-t)^d},$$

donde $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ y d es su dimensión de Krull. No es la primera vez que aparece una expresión de este tipo, ya que vimos un caso similar en el Ejemplo 5.1.5.

Aunque el polinomio $Q(t)$ no suele denominarse el polinomio de Hilbert, está estrechamente relacionado con él y refleja propiedades importantes del módulo, como su resolución libre graduada y su multiplicidad. En particular, cuando $\mathrm{Hilb}_M(t)$ tiene esta forma, el numerador $Q(t)$ codifica la misma información que el polinomio de Hilbert (es decir, el polinomio que coincide con la función de Hilbert acumulada para $s \gg 0$), lo cual puede verse mediante expansión en serie y manipulación algebraica.

Las definiciones de dimensión y multiplicidad a partir del polinomio de Hilbert se construyen considerando una buena filtración Γ del módulo o anillo en cuestión. A primera vista, podría parecer que estas cantidades dependen de la filtración escogida, ya que el polinomio de Hilbert se calcula respecto a dicha filtración. Sin embargo, es un resultado fundamental que tanto la dimensión como la multiplicidad son invariantes bien definidas, independientes de la elección de la buena filtración.

Proposición 5.1.17 (Independencia de dimensión y multiplicidad respecto a la buena filtración)**.** *La dimensión y la multiplicidad definidas a partir del polinomio de Hilbert no dependen de la buena filtración Γ escogida para su cálculo.*

Demostración: Supongamos que $\Gamma = \{\Gamma_j\}$ y $\Omega = \{\Omega_j\}$ son dos buenas filtraciones del módulo M. Por la Proposición 4.3.5, existe un entero $k \geq 0$ tal que para todo j,

$$\Omega_{j-k} \subseteq \Gamma_j \subseteq \Omega_{j+k}.$$

En particular, esto implica que las dimensiones de los espacios graduados asociados satisfacen

$$\dim \Gamma_{j-k} \leq \dim \Omega_j \leq \dim \Gamma_{j+k}.$$

De acuerdo con el Teorema 5.1.12, para $j \gg 0$

$$\chi(j-k, \Omega, M) \leq \chi(j, \Gamma, M) \leq \chi(j+k, \Omega, M).$$

Como el comportamiento asintótico de un polinomio está determinado por su coeficiente principal, concluimos que los polinomios de Hilbert $\chi(t, \Gamma, M)$ y $\chi(t, \Omega, M)$ asociados respectivamente a las filtraciones Γ y Ω tienen el mismo grado y el mismo coeficiente principal.

Por lo tanto, la dimensión $d(M)$ y la multiplicidad $m(M)$ definidas a partir de cualquiera de estas buenas filtraciones coinciden, es decir, son invariantes independientes de la elección de la buena filtración para M. □

Vamos a dar ahora unos ejemplos donde veamos cómo calcular explícitamente el polinomio de Hilbert, su dimensión y multiplicidad.

Ejemplo 5.1.18. Consideremos el A_n-módulo $M = A_n$ con la filtración de Bernstein $\mathcal{B}$, que es una buena filtración de M. Para calcular el polinomio de Hilbert $\chi(t, \mathcal{B}, M)$, por 5.1 sabemos que basta determinar la dimensión de $\mathcal{B}_t$.

Los monomios $x^\alpha \partial^\beta$ con $|\alpha| + |\beta| \leq t$ forman una base de B_t sobre K. Contar estos monomios equivale a contar las soluciones enteras no negativas de

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_1 + \cdots + \beta_n \leq t,$$

es decir, el número de combinaciones con repetición de $2n$ variables y suma menor o igual que t. Por tanto,

$$\chi(t, \mathcal{B}, M) = \binom{t+2n}{2n},$$

un polinomio de grado $2n$ cuyo coeficiente principal es $1/(2n)!$. Así, concluimos que

$$d(A_n) = 2n, \quad m(A_n) = 1.$$

Demos otro ejemplo con otra filtración distinta.

Ejemplo 5.1.19. Otro A_n-módulo bien conocido es $M = K[x_1, \ldots, x_n]$, con la acción usual de A_n y la filtración por grado descrita en el Ejemplo 4.2.10. Allí se definió la filtración Γ mediante los subespacios de polinomios de grado menor o igual que t, que forman una secuencia creciente, exhaustiva y compatible con la filtración de Bernstein $\mathcal{B}$. En efecto, se cumple que $B_i \cdot \Gamma_t \subseteq \Gamma_{t+i}$, lo que garantiza que Γ es una buena filtración y podemos hablar del polinomio de Hilbert.

En este caso, es bien sabido que la dimensión de Γ_t como espacio vectorial sobre K es $\binom{t+n}{n}$, por lo que el polinomio de Hilbert asociado es

$$\chi(t, \Gamma, M) = \binom{t+n}{n},$$

un polinomio de grado n y coeficiente principal $1/(2n)!$. En consecuencia, la dimensión de $K[x_1, \ldots, x_n]$ es n y su multiplicidad es 1.

Observación 5.1.20. *Sabemos que el valor de $\dim_K(\Gamma_t)$ que hemos calculado en el Ejemplo 5.1.19 coincide con la suma de las dimensiones de las componentes homogéneas de grado menor o igual que t en el anillo graduado $\mathcal{S}_n$. Esto no es algo que nos sorprenda ya que enlaza naturalmente con la función de Hilbert estudiada en el Ejemplo 5.1.5.*

A continuación presentamos un resultado fundamental que resulta especialmente útil para calcular la dimensión de ciertos módulos, al establecer una relación precisa entre la dimensión de un módulo, la de sus submódulos y la de sus cocientes.

Teorema 5.1.21 (Relación entre dimensión y multiplicidad en módulos y sus submódulos)**.** *Sea M un A_n-módulo izquierdo finitamente generado y $N \subseteq M$ un submódulo.*

1. $d(M) = \text{máx}\{d(N), d(M/N)\}$.
2. *Si* $d(N) = d(M/N)$, *entonces*

$$m(M) = m(N) + m(M/N).$$

Idea de la demostración: [2] El resultado se fundamenta en el hecho de que la función de Hilbert de un módulo M puede expresarse, de forma aproximada, como la suma de las funciones de Hilbert de un submódulo N y del cociente M/N. Esto sugiere que la dimensión de M, que viene dada por el grado del polinomio de Hilbert asociado, no puede superar el máximo entre las dimensiones de N y M/N. Por otro lado, la positividad de los coeficientes principales garantiza que esta desigualdad se convierte en una igualdad. La relación entre las multiplicidades surge de un razonamiento análogo considerando los términos principales de dichos polinomios.

Concluimos esta sección enunciando dos cotas para la dimensión, demostradas en el capítulo 9 de [Cou95]. Corresponden respectivamente al Corolario 3.4 y al Teorema 4.2. Este último teorema fue demostrado por primera vez por I. N. Bernstein en [Ber72]. Aunque no son técnicamente complicadas, sus demostraciones no son esenciales para el desarrollo de este texto.

[2] Para una versión más detallada de esta demostración, ver el Teorema 3.2 del capítulo 9 de [Cou95].

Corolario 5.1.22. *Sea M un A_n-módulo a izquierda finitamente generado. Entonces,*

$$d(M) \leq 2n.$$

Teorema 5.1.23 (Desigualdad de Bernstein)**.** *Si M es un A_n-módulo a izquierda finitamente generado no nulo, entonces*

$$d(M) \geq n.$$

Estos dos resultados acotan la dimensión de cualquier A_n-módulo finitamente generado entre n y $2n$. En particular, la cota inferior impuesta por la Desigualdad de Bernstein resulta fundamental para la siguiente sección. La cota superior, por otro lado, es consecuencia directa del hecho de que A_n tiene dimensión $2n$.

5.2. El polinomio de Bernstein-Sato

El estudio de los módulos holónomos constituye una parte fundamental de la teoría del álgebra de Weyl. Estos módulos se caracterizan por tener la dimensión mínima posible según la desigualdad de Bernstein, lo que incluye tanto al módulo nulo como a los módulos de dimensión mínima no trivial, y desempeñan un papel clave tanto en el análisis algebraico de operadores diferenciales como en la teoría de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

Comenzaremos esta sección presentando la definición formal de módulo holónomo, seguida de una breve recopilación de propiedades básicas que nos ayudarán a familiarizarnos con el concepto. La sección concluirá con una demostración importante: la existencia del polinomio de Bernstein-Sato.

Definición 5.2.1. *Sea M un módulo izquierdo finitamente generado sobre el álgebra de Weyl A_n. Decimos que M es* ***holónomo*** *si es el módulo nulo, o si su dimensión es igual a n.*

En este punto ya contamos con un ejemplo sencillo de un módulo holónomo.

Ejemplo 5.2.2. El A_n-módulo $K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$ es holónomo. En el Ejemplo 5.1.19 vimos que su dimensión es n, lo que coincide con el valor mínimo permitido por la desigualdad de Bernstein.

También disponemos de un ejemplo inmediato de un módulo que no es holónomo.

Ejemplo 5.2.3. La propia álgebra de Weyl A_n no es holónoma, ya que su dimensión es $2n$, como se mostró en el Ejemplo 5.1.18. Esto excede el mínimo permitido por la desigualdad de Bernstein.

Una primera propiedad que podemos demostrar es la siguiente:

Proposición 5.2.4 (Holonomía de los submódulos y cocientes de módulos holónomos)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo. Entonces, los submódulos y los cocientes de un A_n-módulo holónomo son también holónomos.*

Demostración: El resultado se deduce de la desigualdad de Bernstein. Sea M un A_n-módulo a izquierda, y $N \subseteq M$ un submódulo. Por el Teorema 5.1.21, se tiene que $d(N) < d(M)$ y $d(M/N) < d(M)$. Como $d(M) = n$ (porque M es holónomo), y usando la desigualdad de Bernstein, concluimos que necesariamente $d(N) = d(M/N) = n$. Por tanto, tanto N como M/N son holónomos. $\square$

Sabemos que un módulo holónomo M sobre el álgebra de Weyl A_n es noetheriano, ya que A_n es un anillo noetheriano y M es finitamente generado como módulo sobre él. A continuación, vamos a demostrar que M también es artiniano, es decir, que no puede tener cadenas infinitas estrictas descendentes de submódulos.

Teorema 5.2.5 (Artinianidad de los módulos holónomos)**.** *Todo módulo holónomo sobre A_n es artiniano, y por tanto tiene longitud finita.*

Demostración. Sea M un A_n-módulo holónomo. Supongamos que existe una cadena descendente de submódulos

$$M = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_r.$$

Por el Teorema 5.1.21 y la Proposición 5.2.4, la multiplicidad satisface la relación

$$m(N_i) = m(N_{i+1}) + m(N_i/N_{i+1}),$$

lo que implica que

$$m(M) = \sum_{i=0}^{r-1} m(N_i/N_{i+1}) + m(N_r).$$

Dado que cada cociente N_i/N_{i+1} es un subcuociente de M, su multiplicidad es no negativa y acotada. Como $m(M)$ es finita, la suma anterior sólo puede tener un número finito de sumandos no nulos. Por tanto, la cadena debe estabilizarse, lo que implica que M es artiniano. $\square$

Como era de esperar, no todos los módulos sobre el álgebra de Weyl A_n son artinianos. Es decir, existen módulos que no satisfacen la condición de Artin, pudiendo contener cadenas descendentes de submódulos estrictamente decrecientes de manera infinita. Para ilustrar este hecho, consideremos un ejemplo concreto:

Ejemplo 5.2.6. El anillo A_n no es artiniano como módulo sobre sí mismo. Esto se evidencia al considerar los submódulos generados por potencias de x:

$$A_n \supsetneq A_n x \supsetneq A_n x^2 \supsetneq A_n x^3 \supsetneq \cdots$$

Cada submódulo está estrictamente incluido en el anterior, mostrando que la cadena no tiene límite inferior finito.

Este ejemplo resalta que, aunque muchos módulos interesantes (como los módulos holónomos) tienen propiedades finitas, el álgebra de Weyl en su conjunto puede contener cadenas infinitas de submódulos, subrayando la importancia de estudiar clases de módulos con buen comportamiento de finitud.

Después de observar que el álgebra de Weyl A_n puede contener cadenas infinitas de submódulos, los módulos holónomos se distinguen por su comportamiento controlado: son artinianos y de longitud finita. A continuación, presentamos un ejemplo concreto de un módulo holónomo simple que ilustra esta estructura manejable.

Ejemplo 5.2.7. Consideremos un módulo holónomo simple sobre A_n:

$$M = A_n/A_n \cdot P,$$

donde $P \in A_n$ es un operador tal que el cociente sea simple, es decir, que no tiene submódulos propios distintos de 0 y M.

Por ejemplo, para $n = 1$:

$$P = x\partial - \lambda, \quad \lambda \notin \mathbb{Z}.$$

En este caso, M tiene dimensión de Krull cero, longitud finita y es artiniano, mostrando que los módulos holónomos simples poseen estructura algebraica controlada.

Un ejemplo de módulo holónomo de longitud 2 sobre A_1 es $M = A_1/A_1 \cdot (x\partial - \lambda)^2$, con $\lambda \notin \mathbb{Z}$, que contiene un submódulo propio

$$N = A_1/A_1 \cdot (x\partial - \lambda),$$

y el módulo trivial 0. Es decir,

$$0 \subsetneq N \subsetneq M,$$

donde vemos su longitud finita.

Observación 5.2.8. *Todo módulo holónomo sobre el álgebra de Weyl A_n es* noetheriano *y* artiniano. *En particular, admite una serie de composición finita*

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M,$$

donde cada cociente M_{i+1}/M_i es simple; a r se le llama la longitud *del módulo.*

Esto garantiza que cualquier cadena ascendente o descendente de submódulos se estabiliza y que la longitud de M está acotada por su multiplicidad.

Tras estas propiedades básicas, abordaremos el último resultado importante del trabajo: la existencia del polinomio de Bernstein-Sato. Para ello, necesitaremos utilizar algunos lemas previos que establecerán las bases técnicas necesarias para su demostración.

Lema 5.2.9. *Sea M un A_n-módulo izquierdo con una filtración Γ compatible con la filtración de Bernstein de A_n. Supongamos que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que, para todo $j > 0$,*

$$\dim_K \Gamma_j \leq \frac{c_1 j^n}{n!} + c_2(j+1)^{n-1}.$$

Entonces M es un A_n-módulo holónomo cuya multiplicidad no excede c_1. En particular, M es finitamente generado.

Demostración: Dividimos la demostración en dos partes:

Parte 1: Todo submódulo finitamente generado $N \subseteq M$ es holónomo y satisface $m(N) \leq c_1$.

Sea N un submódulo finitamente generado de M. Entonces N admite una buena filtración $\Omega = \{\Omega_j\}_{j\geq 0}$. Por la Proposición 4.3.5, existe un entero $r \in \mathbb{N}$ tal que $\Omega_j \subseteq \Gamma_{j+r} \cap N$ para todo j, y en particular $\dim_K \Omega_j \leq \dim_K \Gamma_{j+r}$.

Sea $\chi(j)$ el polinomio de Hilbert asociado a N con respecto a la filtración Ω. Por hipótesis, para j suficientemente grande se tiene

$$\chi(j) \leq \frac{c_1(j+r)^n}{n!} + c_2(j+r+1)^{n-1}.$$

Esto implica que $\deg(\chi) \leq n$, y por la desigualdad de Bernstein, $d(N) \geq n$, luego $d(N) = n$. Comparando los coeficientes principales, se concluye que $m(N) \leq c_1$.

Parte 2: El módulo M es finitamente generado.

Consideremos una cadena ascendente

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_r \subseteq \cdots \subseteq M$$

de submódulos finitamente generados. Cada N_i es holónomo y satisface $m(N_i) \leq c_1$. Por el Teorema 5.1.21, la multiplicidad es aditiva, es decir, $m(N_i) = m(N_{i-1}) + m(N_i/N_{i-1})$ para todo i. Iterando, se obtiene

$$m(N_r) = m(N_1) + \sum_{i=2}^{r} m(N_i/N_{i-1}) \leq c_1.$$

Como todos los sumandos son no negativos, la cadena debe estabilizarse en a lo sumo c_1 pasos. Por tanto, M es finitamente generado.

Aplicando la Parte 1 al módulo M, se concluye que M es holónomo y que su multiplicidad satisface $m(M) \leq c_1$. □

Lema 5.2.10. *El $A_n(K(s))-$módulo $K(s)[X, p^{-1}]p^s$ es holónomo.*

Demostración: Sea $M = K(s)[X, p^{-1}]p^s$ y supongamos que $\deg(p) = m$. Definimos la familia

$$\Gamma_k := \left\{ \frac{f}{p^r} p^s \in M \;\middle|\; \deg(f) \leq (m+1)k,\ r \in \mathbb{N} \right\}.$$

Mostraremos que $\{\Gamma_k\}_{k\geq 0}$ es una filtración de M como $A_n(K(s))$-módulo, verificando los axiomas:

- **Crecimiento:** $\Gamma_k \subseteq \Gamma_{k+1}$ para todo k.

  Sea $g = \frac{f}{p^r} p^s \in \Gamma_k$, entonces $\deg(f) \leq (m+1)k$. Por tanto,

  $$\deg(f) \leq (m+1)k < (m+1)(k+1),$$

  y entonces $g \in \Gamma_{k+1}$. Esto muestra que $\Gamma_k \subseteq \Gamma_{k+1}$.

- **Exhaustividad:** $\bigcup_{k\geq 0}\Gamma_k = M$.

  Todo elemento de M es de la forma $\frac{f}{p^r}p^s$ con $f \in K(s)[X]$. El polinomio f tiene grado finito, digamos $\deg(f) = d$. Tomando k suficientemente grande tal que $d \leq (m+1)k$, se tiene que $\frac{f}{p^r}p^s \in \Gamma_k$. Por lo tanto,

  $$M = \bigcup_{k\geq 0}\Gamma_k.$$

- **Compatibilidad con la filtración de $A_n(K(s))$:** para todo $i, j \geq 0$, $B_i\Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j}$, donde B_i es la filtración de Bernstein de orden i en $A_n(K(s))$.

  Consideremos los generadores x_i y ∂_i del álgebra de Weyl. Para x_i, si $\frac{f}{p^r}p^s \in \Gamma_k$,

  $$x_i \cdot \left(\frac{f}{p^r}p^s\right) = \frac{x_i f}{p^r}p^s,$$

  y como $\deg(x_i f) = \deg(f) + 1 \leq (m+1)k + 1 \leq (m+1)(k+1)$, se tiene $x_i \cdot \Gamma_k \subseteq \Gamma_{k+1}$.

  Para ∂_i, usando la regla del producto, se tiene

  $$\partial_i\left(\frac{f}{p^r}p^s\right) = \frac{\partial_i(f)}{p^r}p^s + \frac{fs\partial_i(p)}{p^{r+1}}p^s.$$

  Como $\deg(\partial_i(f)) \leq \deg(f) \leq (m+1)k$ y $\deg(\partial_i(p)) \leq m-1$, los grados de los numeradores de ambos sumandos son a lo sumo

  $$(m+1)k + (m-1) = (m+1)(k+1) - 2 \leq (m+1)(k+1).$$

  Por tanto, $\partial_i\Gamma_k \subseteq \Gamma_{k+1}$. Dado que los operadores de orden i son combinaciones de productos de x_j y ∂_j, se concluye que $B_i\Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j}$.

- **Dimensión finita:** Cada Γ_k es de dimensión finita sobre $K(s)$.

  Esto es cierto porque Γ_k está formado por elementos de la forma $\frac{f}{p^r}p^s$ con $\deg(f) \leq (m+1)k$, es decir, f está en un espacio vectorial de dimensión finita (el espacio de polinomios en X de grado a lo sumo $(m+1)k$). Fijado r, la multiplicación por potencias de p e inversos es un isomorfismo de espacios vectoriales sobre $K(s)$, por lo que Γ_k es finito dimensional.

Por lo tanto, $\{\Gamma_k\}$ es una filtración de M como $A_n(K(s))$-módulo.

Finalmente, estimamos la dimensión de Γ_k. Como los elementos en Γ_k son cocientes de polinomios de grado a lo sumo $(m+1)k$, multiplicados por p^s, se tiene:

$$\dim_{K(s)}\Gamma_k \leq \binom{(m+1)k+n}{n},$$

lo cual implica que existe una cota polinomial de orden n:

$$\dim_{K(s)} \Gamma_k \leq (m+1)^n \cdot \frac{k^n}{n!} + \text{término de orden menor.}$$

Por el Lema 5.2.9, esto implica que M es un módulo holónomo sobre $A_n(K(s))$, como queríamos probar. □

Con este último resultado contamos ya con el material previo suficiente para abordar la demostración del resultado principal que perseguíamos:

Teorema 5.2.11 (Existencia del polinomio de Bernstein-Sato)**.** *Sea $p \in K[X]$. Existe un polinomio $B(s) \in K[s]$ y un operador diferencial $D(s)$ en el anillo de polinomios $A_n(K)[s]$ tal que*

$$B(s)p^s = D(s)pp^s.$$

Demostración: Por el Lema 5.2.10 el $A_n(K(s))$-módulo $K(s)[X, p^{-1}]p^s$ es holónomo. Como $A_n(K(s))p^s$ es un submódulo de $K(s)[X, p^{-1}]p^s$, también debe ser holónomo. Esto es así porque si la dimensión de un módulo holónomo es mínima, la de un submódulo de él también lo debe ser.

En particular, $A_n(K(s))p^s$ tiene longitud finita por la Observación 5.2.8. Por tanto, la sucesión descendente de submódulos

$$A_n(K(s))p^s \supseteq A_n(K(s))p \cdot p^s \supseteq A_n(K(s))p^2 \cdot p^s \supseteq \cdots$$

debe estabilizarse. Es decir, existe $k > 0$ tal que $p^k \cdot p^s \in A_n(K(s))p^{k+1} \cdot p^s$. Multiplicando ambos lados por p^{-k} (lo cual es válido en $K(s)[X, p^{-1}]$), obtenemos $p^s \in A_n(K(s))p \cdot p^s$. Al eliminar denominadores, se concluye que existe un polinomio $B(s) \in K[s]$ tal que $B(s)p^s \in A_n(K)[s]p \cdot p^s$. □

Es fácil ver que el conjunto de todos los polinomios $B(s)$ que verifican la relación del teorema anterior forma un ideal de $K[s]$. Con esto, definamos formalmente qué es el polinomio de Bernstein–Sato.

Definición 5.2.12. *Sea $p \in K[X]$ como en el teorema anterior. Llamamos **polinomio de Bernstein–Sato** de p al generador mónico del ideal de $K[s]$ formado por todos los polinomios $B(s)$ que verifican la relación*

$$B(s)p^s = D(s)\, p\, p^s$$

para algún operador diferencial $D(s) \in A_n(K)[s]$. Este polinomio se denota por $b_p(s)$.

El polinomio de Bernstein-Sato asociado a una función o a un ideal es una herramienta fundamental en la teoría de $\mathcal{D}$-módulos. Su existencia permite establecer propiedades finitas de módulos importantes como la localización y la cohomología local, además de relacionarse con invariantes que miden la severidad de las singularidades, como los ideales multiplicadores y los *jumping numbers*. En particular, la raíz entera mínima del polinomio determina la estructura de la localización, lo que lo convierte en un ingrediente esencial en diversos argumentos algebraico-geométricos. Para una visión general accesible y detallada del tema en el contexto del álgebra conmutativa, véase [ÁJN21].

Históricamente, el polinomio de Bernstein-Sato fue introducido por Bernstein [Ber71] en relación con el problema de Gelfand sobre la extensión meromorfa de ciertas funciones analíticas. Posteriormente, Malgrange [Mal76] y Kashiwara [Kas76] demostraron resultados fundamentales sobre la naturaleza de sus raíces y su conexión con la teoría de singularidades. Estas contribuciones destacan la relevancia del polinomio no solo desde un punto de vista algebraico, sino también en análisis y geometría.

Para ilustrar de manera concreta cómo se cumple la identidad de Bernstein-Sato, consideremos el caso más sencillo posible:

Ejemplo 5.2.13. Tomemos como ejemplo el polinomio más básico en una variable:

$$p(x) = x \in K[x].$$

Nuestro objetivo es encontrar un polinomio $B(s) \in K[s]$ y un operador diferencial $D(s)$ tal que se cumpla la identidad de Bernstein-Sato, es decir, que $B(s)$ multiplicando p^s sea igual a aplicar $D(s)$ sobre $p \cdot p^s$. En este caso particular, la elección más natural es

$$B(s) = s + 1 \quad \text{y} \quad D(s) = \frac{d}{dx}.$$

Para comprobarlo, observamos que al multiplicar $p^s = x^s$ por $B(s)$ obtenemos $(s+1)x^s$. Por otro lado, si aplicamos el operador $D(s) = \frac{d}{dx}$ sobre $p \cdot p^s = x \cdot x^s = x^{s+1}$, obtenemos también $(s+1)x^s$.

De este modo, la identidad de Bernstein-Sato se cumple de manera explícita:

$$B(s)\, p(x)^s = (s+1)x^s = \frac{d}{dx}\left(x^{s+1}\right) = D(s)\, p(x) \cdot p(x)^s.$$

Este ejemplo es muy sencillo y sirve para ilustrar la mecánica básica del polinomio de Bernstein-Sato. En general, tanto el polinomio como el operador diferencial que verifican la identidad de Bernstein-Sato no son fáciles de “adivinar” a mano. Por ello, en el Apéndice A.4 se muestra cómo calcular computacionalmente el polinomio de Bernstein-Sato en una variable, lo que permite comprobar ejemplos concretos y explorar casos más complicados. Para ver cómo la situación se complica en varias variables, consideremos ahora un ejemplo clásico tratado en la literatura:

Ejemplo 5.2.14. Consideremos el polinomio lineal en n variables definido por

$$p(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n \in K[x_1, \ldots, x_n].$$

El cálculo explícito de su polinomio de Bernstein-Sato $b_p(s)$ resulta más laborioso que en el ejemplo univariable, aunque, para este tipo de polinomios lineales, todavía es posible realizarlo a mano. En este caso, se obtiene

$$b_p(s) = s(s+1)\cdots(s+n-1),$$

y existe un operador diferencial D (independiente de s) tal que se cumple la identidad de Bernstein-Sato

$$b_p(s)\, p^s = D\,(p \cdot p^s).$$

Este ejemplo ilustra cómo incluso polinomios aparentemente simples en varias variables pueden producir polinomios de Bernstein-Sato con raíces múltiples y cómo la estructura del operador diferencial puede ser más compleja que en el caso univariable.

Apéndice A

Cálculos algebraicos

En este anexo presentamos ejemplos concretos de cómo realizar cálculos algebraicos y trabajar con estructuras graduadas, utilizando principalmente `SageMath` [Dev25]. El objetivo no es desarrollar la teoría en profundidad, sino mostrar cómo implementar y comprobar de manera práctica algunos de los conceptos que aparecen en el texto principal. En la última sección, dedicada al cálculo del polinomio de Bernstein–Sato en una variable, se emplea `Singular`[GPS25], que resulta particularmente adecuado para este tipo de problemas.
Los temas que abordaremos incluyen:

- **Graduaciones:** cómo asignar grados a las variables de un anillo polinómico y trabajar con graduaciones estándar o ponderadas.
- **Filtraciones:** construcción de filtraciones crecientes en anillos y álgebras, incluyendo la filtración de Bernstein en el álgebra de Weyl.
- **Polinomio de Hilbert:** cálculo de series de Hilbert y polinomios de Hilbert para módulos sobre anillos graduados.
- **Cálculo del polinomio de Bernstein–Sato:** obtención del polinomio en una variable utilizando `Singular`.

Cada sección incluye ejemplos ejecutables, que permiten comprobar los resultados teóricos de manera directa y experimentar con variaciones de los problemas. De esta manera, el lector puede visualizar computacionalmente estructuras como graduaciones, filtraciones y la evolución de dimensiones de módulos, mientras que la última sección muestra la aplicación de estas herramientas a la obtención concreta del polinomio de Bernstein–Sato en un caso univariable.

A.1. Graduaciones

En muchas situaciones es útil considerar que las variables de un anillo polinómico tienen grados asignados, es decir, que el anillo es *graduado*. La graduación permite organizar los polinomios por su *peso* o grado total, y resulta fundamental para estudiar estructuras algebraicas como ideales homogéneos o filtraciones.

Ejemplo A.1.1. Consideremos el anillo polinómico $S = \mathbb{Q}[x, y, z]$ con la *graduación estándar*, donde cada variable tiene grado 1:

$$\deg(x) = \deg(y) = \deg(z) = 1.$$

Este es un caso concreto del Ejemplo 4.1.3 para $n = 3$, donde cada R_m corresponde al espacio de polinomios homogéneos de grado m.

En Sage podemos comprobarlo con el siguiente código:

```
sage: R.<x,y,z> = PolynomialRing(QQ, 3, order='degrevlex')
sage: [x.degree() for x in R.gens()]

[1, 1, 1]
```

Si queremos, podemos asignar otros pesos a las variables, obteniendo así una *graduación ponderada*.

Ejemplo A.1.2. Por ejemplo, si tomamos la graduación ponderada

$$\deg(x) = 2, \quad \deg(y) = 3, \quad \deg(z) = 7,$$

podemos definir el anillo en Sage de la siguiente manera:

```
sage: R.<x,y,z> = PolynomialRing(QQ, order=TermOrder('
    ↪ wdegrevlex',(2,3,7)))
```

Aunque Sage no devuelve directamente los grados ponderados con `.degree()`, sí modifica el orden de los monomios según los pesos especificados. Podemos ver esto creando algunos monomios y ordenándolos:

```
sage: M = [x^i * y^j * z^k for i,j,k in [(1,0,0),(0,1,0)
    ↪ ,(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1)]]
sage: sorted(M)

[x, y, x*y, z, x*z]
```

A.2. Filtraciones

En la Definición 4.2.1 se introdujo el concepto de filtración en una K-álgebra. Una filtración es una sucesión creciente de subespacios compatible con la multiplicación, que permite organizar los elementos del álgebra según su "grado" o "tamaño".

A continuación, presentamos dos ejemplos concretos en Sage: el primero muestra la filtración creciente por grado en un anillo de polinomios, y el segundo ilustra la filtración de Bernstein en el álgebra de Weyl A_1, que organiza los operadores diferenciales por su grado total.

Ejemplo A.2.1. Sea el anillo de polinomios $S = \mathbb{Q}[x, y, z]$. Para cada $m \geq 0$, definimos el subespacio vectorial

$$F_m := \{f \in S \mid \deg(f) \leq m\},$$

es decir, todos los polinomios de grado menor o igual que m. La sucesión

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots$$

es una filtración creciente de S que cumple la propiedad multiplicativa $F_i \cdot F_j \subseteq F_{i+j}$.

En Sage podemos construir estos subespacios explícitamente utilizando exponentes:

```
sage: R.<x,y,z> = PolynomialRing(QQ, 3)

sage: def monomials_of_degree_at_most(R, d):
....:     n = R.ngens()
....:     mons = []
....:     for total_deg in range(d+1):
....:         for exps in IntegerVectors(total_deg, n):
....:             mons.append(prod(R.gens()[i]^e for i,e in
    ↪ enumerate(exps)))
....:     return mons

sage: F = [monomials_of_degree_at_most(R, d) for d in range
    ↪ (4)]

sage: for i, mons in enumerate(F):
....:     print(f"F[{i}] = {mons}")

F[0] = [1]
F[1] = [1, x, y, z]
F[2] = [1, x, y, z, x^2, x*y, x*z, y^2, y*z, z^2]
F[3] = [1, x, y, z, x^2, x*y, x*z, y^2, y*z, z^2, x^3, x^2*y,
    ↪  x^2*z, x*y^2, x*y*z, x*z^2, y^3, y^2*z, y*z^2, z^3]
```

De esta manera, cada lista `F[m]` representa el “nivel” m de la filtración creciente por grado de polinomios.

Extendemos en el siguiente ejemplo la filtración creciente a operadores diferenciales en el álgebra de Weyl mediante la *filtración de Bernstein*, que organiza los operadores por su grado total y mantiene la estructura creciente compatible con el producto.

Ejemplo A.2.2 (Filtración de Bernstein en A_1). Como se introdujo en el Ejemplo 4.2.3, la *filtración de Bernstein* es un ejemplo concreto de filtración creciente en un álgebra de Weyl. En el caso de A_1 sobre $\mathbb{Q}$, esta filtración se define por

$$B_k := \{P \in A_1 \mid \deg(P) \leq k\}, \quad k \geq 0,$$

y cumple la propiedad multiplicativa $B_i \cdot B_j \subseteq B_{i+j}$.

A continuación mostramos cómo construirla explícitamente en Sage.

```
sage: R.<x> = QQ[]
sage: W = R.weyl_algebra()
sage: x, dx = W.gens()
sage: def bernstein_filtration(k):
....:     return [x^i * dx^j for i in range(k+1) for j in
    ↪ range(k+1)]
sage: B0 = bernstein_filtration(0)
sage: B1 = bernstein_filtration(1)
sage: B2 = bernstein_filtration(2)
sage: B0, B1, B2

([1], [1, dx, x, x*dx], [1, dx, dx^2, x, x*dx, x*dx^2, x^2, x
    ↪ ^2*dx, x^2*dx^2])
```

De este modo obtenemos la filtración de Bernstein como una familia creciente de subespacios de A_1, lista para trabajar algebraicamente.

A.3. Polinomio de Hilbert

En esta sección vamos a ilustrar de manera computacional el ejemplo que presentamos anteriormente en la Teoría, el Ejemplo 5.1.2, en el que calculamos a mano la función de Hilbert, la serie de Hilbert y la función acumulada de un módulo graduado. Utilizando Sage, mostraremos cómo obtener estos objetos de forma automática a partir de una resolución libre graduada, verificando los resultados manuales y permitiendo además calcular de manera directa el polinomio de Hilbert. De esta manera podremos realizar ejemplos más complicados de una manera computacional.

Ejemplo A.3.1. Sea $S = \mathbb{Q}[x, y]$ con la graduación estándar e $I = (x^3, y^5)$ un ideal homogéneo. Consideremos el módulo graduado

$$M = S/I.$$

Resolución libre graduada: Podemos calcularla en Sage mediante

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ)
sage: I = R.ideal([x^3, y^5])
sage: I.graded_free_resolution()

S(0) <-- S(-3) \oplus S(-5) <-- S(-8) <-- 0
```

lo que nos da la resolución:

$$0 \longrightarrow S(-8) \longrightarrow S(-3) \oplus S(-5) \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Serie de Hilbert: A partir de la resolución, la serie de Hilbert de M se puede expresar como

$$\mathrm{Hilb}_M(t) = \frac{1 - t^3 - t^5 + t^8}{(1-t)^2}.$$

En Sage, podemos calcularla directamente usando:

```
sage: I.hilbert_series()
t^6 + 2*t^5 + 3*t^4 + 3*t^3 + 3*t^2 + 2*t + 1
```

Numerador de la serie: El numerador, que Sage devuelve con `hilbert_numerator()`, refleja información combinatoria de los generadores y de la resolución:

```
sage: I.hilbert_numerator()
t^8 - t^5 - t^3 + 1
```

Polinomio de Hilbert: Según el Teorema 5.1.12, la función de Hilbert acumulada coincide con un polinomio $\chi(s)$ para s suficientemente grande. En este ejemplo, la función acumulada alcanza su valor máximo en grado 6:

$$H_M(s) = 15 \quad \text{para todo } s \geq 6,$$

por lo que el polinomio de Hilbert $\chi(s)$ es constante y vale 15 para $s \geq 6$.

A.4. Cálculo del polinomio de Bernstein-Sato

Para calcular el polinomio de Bernstein-Sato, `SageMath` presenta ciertas limitaciones. Por ello, utilizaremos `Singular` junto con las librerías `dmod.lib` y `bfun.lib`, que permiten trabajar con D-módulos y obtener de manera efectiva este polinomio.

Ejemplo A.4.1 (Cálculo del polinomio de Bernstein-Sato con Singular). En este apéndice mostramos cómo se puede calcular de manera efectiva el polinomio de Bernstein-Sato del polinomio presentado en el Ejemplo 5.2.13.

```
singular: ring R = 0,(x),dp;
singular: poly f = x;
singular: list RootsEncoded = bfct(f);
singular: RootsEncoded;

[1]:
   _[1]=-1
[2]:
   1
```

La lista codificada de raíces indica que el polinomio de Bernstein-Sato asociado a $p(x) = x$ tiene una única raíz -1. A partir de esta raíz, podemos reconstruir el polinomio explícito

$$B(s) = s + 1.$$

Así, recuperamos el mismo resultado que obtuvimos manualmente en el Ejemplo 5.2.13.

Ahora consideremos un polinomio un poco más complicado que el ejemplo anterior, para ver cómo el cálculo computacional sigue siendo útil cuando la identidad de Bernstein-Sato no es evidente a simple vista.

Ejemplo A.4.2 (Cálculo de raíces del polinomio de Bernstein-Sato para x^2). Consideremos el polinomio

$$p(x) = x^2 \in K[x].$$

Usando Singular, calculamos las raíces codificadas del polinomio de Bernstein-Sato:

```
singular: ring R = 0,(x),dp;
singular: poly f = x^2;
singular: list RootsEncoded = bfct(f);
singular: RootsEncoded;

[1]:
   _[1]=-1/2
   _[2]=-1
[2]:
   1,1
```

La lista codificada indica que el polinomio de Bernstein-Sato asociado a $p(x) = x^2$ tiene dos raíces: $-\frac{1}{2}$ y -1. A partir de estas raíces, podemos reconstruir el polinomio explícito como

$$B(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)(s + 1).$$

Bibliografía

[ÁJN21] J. Álvarez, J. Jeffries y L. Núñez-Betancourt. «Bernstein–Sato Polynomials in Commutative Algebra». En: *The 50th Seminar of Partial Differential Equations*. Disponible en línea desde el 21 de octubre de 2021. Springer, 2021, págs. 1-76. DOI: 10.1007/978-3-030-80593-7_1.

[AM69] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1969.

[Ber71] J. Bernstein. «Modules over a ring of differential operators; study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients». En: *Functional Analysis and Its Applications* 5.2 (1971), págs. 89-101. DOI: 10.1007/BF01076190.

[Ber72] I. N. Bernstein. «The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter». En: *Fundamental Analysis and Applications* 6 (1972), págs. 273-285.

[Bjö79] J.-E. Björk. *Rings of Differential Operators*. Vol. 21. North-Holland Mathematics Library. Amsterdam: North-Holland, 1979.

[CLO98] D. A. Cox, J. Little y D. O'Shea. *Using Algebraic Geometry*. 1st. Vol. 185. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 1998.

[Cou95] S. C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-Modules*. Vol. 33. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. ISBN: 0-521-55119-6.

[Dev25] The Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 10.3)*. https://www.sagemath.org. Disponible en línea; Accessed: 2025-09-16. 2025.

[Dir78] P. A. M. Dirac. «The development of quantum mechanics». En: *Dirac: Directions in Physics*. Ed. por H. Hora y J. R. Shepanski. New York, London, Sidney, Toronto: John Wiley y Sons, 1978.

[Dix63] J. Dixmier. «Représentations irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes». En: *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 35 (1963), págs. 491-519.

[Dix68] J. Dixmier. «Sur les algèbres de Weyl». En: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 96 (1968), págs. 209-242.

[Dix70] J. Dixmier. «Sur les algèbres de Weyl II». En: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 94 (1970), págs. 289-301.

[Dix74] J. Dixmier. *Algèbres enveloppantes*. Vol. 37. Cahiers Scientifiques. Paris: Gauthier-Villars, 1974.

[Eis95] D. Eisenbud. *Commutative Algebra*. New York: Springer, 1995.

[Ess86] A. van den Essen. «Algebraic micro-localization». En: *Communications in Algebra* 14.5 (1986), págs. 971-1000. DOI: 10.1080/00927878608823685.

[GPS25] G.-M. Greuel, G. Pfister y H. Schönemann. *Singular 4-3-2 — A computer algebra system for polynomial computations*. Disponible en línea; Accessed: 2025-09-16. University of Kaiserslautern. 2025.

[Gua] M. Gualtieri. *Lecture Notes on Differential Geometry*. https://www.math.toronto.edu/mgualt/courses/17-1300/docs/17-1300-notes-12.pdf. Accessed: 2025-09-16.

[Kas76] M. Kashiwara. «B-functions and holonomic systems». En: *Inventiones Mathematicae* 38 (1976), págs. 33-53. DOI: 10.1007/BF01405174.

[Lee13] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2nd. New York: Springer, 2013.

[Mal76] B. Malgrange. «Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée». En: *Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 459. Springer, 1976, págs. 98-119.

[MR04] J. C. McConnell y J. C. Robson. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Vol. 30. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/CBO9780511623733.

[Pee11] I. Peeva. *Graded Syzygies*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2011.

[Qui21] E. Quinlan-Gallego. «Symmetry on rings of differential operators». En: *Journal of Algebra* 586 (2021), págs. 787-807. ISSN: 0021-8693. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2021.01.013.

[Sta78] J. T. Stafford. «Module structure of Weyl algebras». En: *Journal of the London Mathematical Society* 18.3 (1978), págs. 429-442.

[Wey50] H. Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. New York: Dover, 1950.