



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

DISEÑO DE UNA PROGRAMACIÓN QUE SEA DÍNAMICA A LA HORA DE IMPARTIR MATEMÁTICAS.

3º DE LA E.S.O. SUCESIONES, FRACTALES Y MATERIALES MANIPULATIVOS

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria
Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas.
Especialidad de Matemáticas

Alumno: Rubén Valverde Pérez

Tutores: Cesáreo Jesús González Fernández
Ignacio Miguel Cantero

Valladolid, junio de 2025

Página en
blanco

Dedicado a mis padres.

Gracias a sus esfuerzos ha sido posible

toda la educación que he recibido.

Página en
blanco

RESUMEN

Las matemáticas siempre se han considerado como una ciencia intangible, que vive en el mundo de las ideas de Platón y tiene poca utilidad práctica en el mundo tangible. En este trabajo se pretende estudiar el tema de las sucesiones numéricas que forman parte del currículo de Matemáticas de 3º de la E.S.O. mediante la utilización de fractales y materiales manipulativos, que permiten fabricar con las manos conceptos y resultados abstractos. Se realizará un breve resumen histórico sobre las sucesiones, posteriormente la fundamentación histórica, epistemológica y curricular, seguido el desarrollo de la programación didáctica y por último, como tema central, la situación de aprendizaje de las sucesiones. Todo ello se llevará a cabo considerando las diferentes competencias propias del máster, en particular relacionadas con el diseño curricular, la práctica docente, la metodología y la evaluación.

Palabras clave: Sucesiones, fractales, materiales manipulativos, aprendizaje en matemáticas, programación dinámica.

ABSTRACT

Mathematics has always been considered an intangible science, residing in the world of Plato's ideas and having little practical use in the tangible world. This paper aims to study the topic of numerical sequences, which are part of the third-year compulsory secondary education mathematics curriculum, by using fractals and manipulative materials, which allow for the creation of abstract concepts and results. A brief historical summary of sequences will be presented, followed by the historical, epistemological, and curricular foundations, followed by the development of the teaching program, and finally, as a central theme, the learning situation of sequences. All of this will be carried out considering the different competencies of the master's degree, particularly those related to curriculum design, teaching practice, methodology, and assessment.

Keywords: Sequences, fractals, manipulative materials, learning in mathematics, dynamic programming.

Página en
blanco

INDICE

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1.	Justificación del trabajo.....	1
1.2.	Estructura del T.F.M.....	2
2.	FUNDAMENTACIÓN HISTÓRICA	4
2.1.	Historia de las Sucesiones	4
2.2.	Historia de los fractales	12
3.	FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR.....	14
3.1.	Objetivos de la etapa	14
3.2.	Competencias clave.....	15
3.3.	Currículo de la materia y las competencias específicas de matemáticas.....	16
3.4.	Criterios de evaluación	18
3.5.	Ubicación dentro del currículo	20
4.	FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA.....	21
4.1.	Introducción.....	21
4.2.	Sucesiones	22
4.2.1.	Término general y forma recurrente.....	22
4.2.2.	Operaciones con sucesiones.....	23
4.2.3.	Tipos de sucesiones.....	23
4.3.	Progresiones aritméticas.....	25
4.3.1.	Propiedades de las progresiones aritméticas	25
4.4.	Progresiones geométricas	26
4.4.1.	Propiedades de las progresiones geométricas	26
4.5.	Fractales.....	28
4.5.1.	Propiedades de los fractales	28
5.	PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA.....	30
5.1.	Descripción y análisis del entorno.....	30
5.2.	Objetivos específicos de la materia de matemáticas.....	35
5.3.	Relación entre objetivos y competencias clave	37

5.4.	Materiales y recursos.....	38
5.5.	Evaluación inicial	39
5.6.	Contenidos.....	39
5.7.	Competencias específicas, criterios de evaluación, contenidos e indicadores de logro.	43
5.8.	Contenidos de carácter transversal	44
5.9.	Metodología.....	44
5.10.	Concreción de los proyectos significativos.	46
5.11.	TIC en la práctica docente.....	47
5.12.	Concreción de planes, programas y proyectos del centro vinculados con el desarrollo de la materia	48
5.13.	Actividades complementarias y extraescolares	48
5.14.	Evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado	49
5.15.	Criterios de calificación.....	53
5.16.	Atención a las diferencias del alumnado	54
5.17.	Actividades de recuperación de los alumnos con materias pendientes de cursos anteriores.....	56
5.18.	Secuencia de unidades temporales de programación.....	56
5.19.	Orientaciones para la evaluación de la programación de aula y de la práctica docente.....	58
5.20.	Procedimiento para la evaluación de la programación didáctica.....	61
6.	DESARROLLO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE.....	63
6.1.	Título de la Situación de Aprendizaje	64
6.2.	Contextualización.....	64
6.2.1.	Contextualización curricular	64
6.2.2.	Contextualización social	65
6.2.3.	Contextualización epistemológica	66
6.2.4.	Contextualización con otras materias.....	66
6.3.	Objetivos concretos de la Situación de Aprendizaje.	67
6.4.	Competencias específicas, criterios de evaluación, contenidos e indicadores de logro.	68
6.5.	Metodología.....	71
6.6.	Actividades.....	72
6.7.	Recursos	72
6.8.	Atención a la diversidad	73

6.9.	Integración en los planes y proyectos del centro	74
6.10.	Temporalización.....	75
6.11.	Evaluación	92
6.11.1.	Criterios de evaluación.....	93
6.11.2.	Criterios de calificación	94
6.12.	Atención a la diversidad	94
6.13.	Conclusiones. Medios y criterios para evaluar la SdA.....	96
7.	SINTESIS Y CONCLUSIONES.....	97
	BIBLIOGRAFÍA.....	99
	ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	101
	ÍNDICE DE TABLAS.....	103
	ANEXOS.....	104

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Justificación del trabajo

Durante la educación escolar, siempre han surgido personas que piensan que las Matemáticas no tienen ninguna relevancia, o que no les resultan prácticas. Quizás desde el desconocimiento, quizás desde la falta de interés ¿Cómo podemos lograr que todas estas personas se interesen por esta materia tan complicada? ¿De qué manera podemos despertar ese interés o que les resulten atractivos y les gusten a los estudiantes? Ese fue el principal motivo por el que opté por cursar este máster y la especialidad de matemáticas. En mis comienzos como estudiante al principio no fui muy diestro en matemáticas, pero cuando en primero de B.U.P. me centre en la asignatura y estudie a conciencia, las dudas se iban despejando. Considero que las matemáticas al igual que otros aspectos de la vida pueden resultar atractivos y estimulantes si se trabaja sobre ello, resultando a posteriori fáciles y hasta bonitas.

Muchos estudiantes se han encontrado con la idea de que las matemáticas son una materia abstracta y poco relevante para su vida cotidiana. Sin embargo, la realidad es que las matemáticas, y en particular las sucesiones, intervienen en multitud de aspectos de nuestro día a día, desde la configuración de numerosos patrones en la naturaleza como en el desarrollo de nuevas tecnologías. Las sucesiones matemáticas, cada

esposa

Para describir patrones y regularidades, no solo nos permiten comprender el mundo que nos rodea, sino que también nos abren las puertas a conceptos fascinantes como los fractales. Estas estructuras geométricas, que se caracterizan por su autosimilitud y complejidad infinita, se generan a menudo mediante sucesiones matemáticas, mostrando la profunda conexión entre ambos conceptos.

Este Trabajo de Fin de Máster (de aquí en adelante TFM) se centra en el estudio de las sucesiones matemáticas en 3º de la E.S.O. con un enfoque particular utilizando materiales manipulativos. La elección de este tema se justifica por su importancia en el desarrollo del razonamiento lógico y la capacidad de abstracción de los estudiantes, así como por su potencial para conectar las matemáticas con el mundo real, incluyendo la fascinante geometría fractal.

El objetivo principal de este TFM es diseñar una Situación de Aprendizaje (de aquí en adelante SdA) dinámica para la enseñanza de las sucesiones. Desde el punto de vista docente, los objetivos que se quieren alcanzar con la presentación de este TFM a través de un análisis curricular, epistemológico y didáctico de los contenidos presentados son los siguientes:

- Conocer el currículo de 3º de Educación Secundaria Obligatoria y en concreto de la asignatura de Matemáticas orientada a la enseñanza académica.

- Elaborar una programación didáctica que sea dinámica tendiendo al conjunto de objetivos, competencias, metodologías pedagógicas y criterios de evaluación del currículo de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.
- Conseguir proporcionar al alumno múltiples formas para captar su interés conforme a los principios del diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) con la utilización de material manipulativo.
- Realizar un estudio de las sucesiones y su influencia en nuestra vida cotidiana, describiendo con rigurosidad la complejidad de sus contenidos.
- Estudio de la transposición didáctica, entre el saber del sabio y el saber del escolar, a través de diversas metodologías y ayudado por la utilización de materiales manipulativos.

Con todo esto se pretende mostrar que las matemáticas están en nuestra vida cotidiana y son bellas al igual que la naturaleza que nos rodea. Desde el punto de vista docente

"La naturaleza está escrita en lenguaje matemático" - (Galilei, 1623)

1.2. Estructura del T.F.M.

Este trabajo se estructura en varios capítulos de la siguiente forma:

En este [Capítulo 1](#), se realiza una breve introducción y planteamiento de la estructura base de este TFM.

En el [Capítulo 2](#), se presenta el marco histórico sobre las sucesiones matemáticas, incluyendo su definición, tipos y aplicaciones. En el haremos un recorrido desde los orígenes en Egipto y Babilonia, pasando por los trabajos Pitagóricos, Fibonacci, que popularizo secuencias específicas durante el renacimiento y finalizando con las bases de la teoría de sucesiones de Leibniz. Más recientemente los fractales fueron descubiertos y popularizados por el matemático Benoit Mandelbrot en la década de 1970, veremos su importancia en la naturaleza y como han sido utilizados en diversos campos.

El [Capítulo 3](#) nos muestra las bases del currículo para la SdA escogida. En este se llevará a cabo un estudio de la normativa actual en relación con dicha unidad, mostrando todo lo que la legislación actual contempla y centrándonos en el Decreto 39/2022 de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

El [Capítulo 4](#) corresponde con una fundamentación epistemológica de los contenidos de la SdA, con una fundamentación matemática profesional y teniendo en cuenta su rigurosidad. En ella se explicarán los principales conceptos matemáticos sobre sucesiones aplicados al currículo de tercero de secundaria.

En el [Capítulo 5](#) realizaremos una planificación general del curso atendiendo al contexto donde vamos a desarrollar la Situación de Aprendizaje, estableceremos los objetivos tanto general como específicos, veremos cuales son las competencias clave, los contenidos que se desarrollan, la metodología utilizada, los recursos, programación, criterios de evaluación, planes complementarios y atención a la diversidad.

El [Capítulo 6](#), principal de este TFM desarrolla la SdA sobre las sucesiones, contextualizando el estudio de las sucesiones en el centro Nuestra Señora del Carmen y realizando una planificación detallada de cada sesión. Se definen objetivos, competencias, criterios de evaluación y una metodología activa basada en materiales manipulativos. Además, se detallan las actividades, recursos, atención a la diversidad y la evaluación del proceso.

Por último, [Capítulo 7](#), se realizan las conclusiones, sintetizando los objetivos alcanzados a lo largo del desarrollo del TFM. Se reflexiona sobre la importancia de las sucesiones en el currículo de 3º de ESO y su potencial didáctico mediante el uso de fractales y materiales manipulativos.

Para finalizar el documento incluye la bibliografía, listado de figuras y tablas y los distintos anexos. En el primero ([Anexo I](#)) se incluyen las Situaciones de Aprendizaje a lo largo del curso. En el [Anexo II](#) el enunciado del proyecto colaborativo, junto con su rúbrica en el [Anexo III](#). El [Anexo IV](#) contiene los problemas y ejercicios trabajados. Para finalizar el [Anexo V](#) propone el enunciado del trabajo en CAD planteado sobre sucesiones y fractales.

2. FUNDAMENTACIÓN HISTÓRICA

El origen de las sucesiones, así como la de muchas otras disciplinas matemáticas, es incierta. Sin embargo, varios siglos antes de nuestra época existen documentos que corroboran su existencia por lo que no se debe atribuir su paternidad a ningún matemático específico.

2.1. Historia de las Sucesiones

EGIPCIO (5.500 a.C. - 395 d.C.)

Fracciones unitarias

En el ámbito matemático, las sucesiones hacen referencia a una serie de números que siguen un patrón o una norma determinada. Aunque las sucesiones tal y como las conocemos en la actualidad no se desarrollaron formalmente en el antiguo Egipto, la civilización egipcia utilizó patrones numéricos que podrían interpretarse como una versión inicial de las sucesiones, particularmente en campos como la arquitectura, la astronomía y las matemáticas aplicadas.

Por ejemplo, para escribir el número 2, los egipcios podían representarlo como la suma de dos fracciones unitarias: $2 = 1 + 1$. Para representar otros números, el sistema empleaba sumas de fracciones como:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \quad \text{ó} \quad \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$



Ilustración 1.- Capitel Egipcio

A pesar de no estar definidas como series matemáticas, la utilización de secuencias de fracciones unitarias representa un precedente de las secuencias y series. Otro ejemplo, de ello lo encontramos en uno de los capiteles egipcios del libro *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura* de Nicola Sala y Grabiell Cappellato que reproduce las primeras iteraciones del Conjunto de Cantor.

Papiro de Rhind

Otro ejemplo del antiguo Egipto es el *Papiro de Rhind* encontrado en las ruinas de un antiguo edificio en Tebas por el egiptólogo A. Henry Rhind. Tiene aproximadamente 6 m de longitud y 33 cm de anchura. Se trata de la fuente más fiable de datos sobre matemática egipcia que existe. Escrito en texto en hierático, incluye 87 cuestiones y su solución, entre ellos los siguientes problemas sobre sucesiones.



Ilustración 2: Papiro de Rhind

Problema 64 - Progresiones aritméticas.

Divide 10 hekat (medida de capacidad equivalente a 4,8 litros) de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia entre cada hombre y el siguiente sea $1/8$ de hekat. ¿Qué parte le corresponde a cada hombre?

Si aplicamos la formulación actual para progresiones aritméticas tenemos que, si a_i representa la cantidad de cebada que recibe cada hombre, n el número de personas, d la diferencia constante entre lo que recibe un hombre y el siguiente, y S el total de hekat, 10:

$$S = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \rightarrow \frac{S}{n} + (n-1) \cdot \left(\frac{d}{2}\right)$$

Así es, exactamente, como lo resuelve Ahmes, no sabemos si por propio razonamiento lógico o aplicando una formulación conocida. Hace:

- El número de diferencias es 9, una menos que el número de hombres.
- Multiplica este número por la mitad de la diferencia ($1/16$). $9 \cdot \left(\frac{1}{16}\right) = \frac{9}{16}$
- Suma este resultado al promedio de las partes. $1 + \frac{9}{16}$
- Para obtener las partes restantes resta sucesivamente la diferencia $1/8$ a esta cantidad. Se obtiene:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} ; 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} ; 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} ; 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} ; 1 + \frac{1}{16} ; \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} ; \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} ; \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} ; \frac{1}{2} + \frac{1}{16} ; \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} ; \frac{1}{4} + \frac{1}{16} ; \frac{1}{8} + \frac{1}{16} ; \frac{1}{16}$$

Si sumamos todos los términos obtenemos precisamente 10.

Problema 79 - Progresiones geométricas.

Este es el único problema sobre progresiones geométricas en el Antiguo Egipto que nos es conocido, además del primer ejemplo de matemática recreativa del que se tiene noticia. Se trata de una progresión geométrica en la que el primer término es 7 y la razón también 7, pero planteado de una forma extraña. En el problema se dice " 7 casas, 49 gatos, 343 ratones, 2401 espigas de trigo, 16807 medidas de grano". Hay que suponer que Ahmes se refería a un problema, posiblemente ya conocido, en el que en cada casa hay 7 gatos, cada uno de los cuales se come 7 ratones, cada uno de los cuales se ha comido 7 espigas de grano, cada una de las cuales había producido 7 hekat de grano. Ahmes aquí no sólo da la cantidad de hekat de grano ahorrado, sino que además da la suma del número de casas más gatos más ratones más espigas más hekat. Realmente es difícil interpretar el objetivo del escriba con este problema, pues la suma de todos los términos no es un objetivo lógico. Lo que sí parece constituir este problema es la base de la canción infantil:

Según iba a St. Ives

encontré a un hombre con 7 esposas

cada esposa tenía 7 sacos,

cada saco tenía 7 gatos,
cada gato tenía 7 gatitos
Gatitos, gatos, sacos y esposas.
¿Cuántos iban a St. Ives? (López, 1997)

BABILONIOS (1900 a.C – 539 a.C.)

En la antigua Babilonia, se practicaba una modalidad de "interés" fundamentada en el concepto de préstamo y pago. Los prestamistas concedían créditos a cambio de una compensación que se sumaba al monto inicial, una práctica que también constituye el fundamento del concepto actual de "interés".

Es conocido el problema de determinar en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto, lo que sugiere que tenían algún tipo de conocimiento sobre la fórmula del interés compuesto y, por ende, las progresiones geométricas.

Los Babilonios estudiaron las progresiones geométricas, quedando constancia en sus tablillas de arcilla, mostrando que habían encontrado la suma de los términos de una progresión geométrica en determinados problemas concretos. Así lo utilizaban para determinar la cantidad total de granos almacenados después de un cierto número de cosechas. Por ejemplo, si se almacenaba un grano en la primera cosecha, dos en la segunda, cuatro en la tercera y así sucesivamente, podían calcular el total de granos después de varias cosechas usando la suma de la progresión geométrica. Otro ejemplo es el problema de la división o del trabajo en algunas tablillas se calculaba cuánto trabajo se podría completar si cada día se hacía el doble que el anterior usando la suma de una progresión geométrica para obtener el resultado.

EUCLIDES (365 a.C. – 275 a.C.)

De Euclides sabemos muy poco, probablemente fue educado en Atenas, en la Academia de Platón. Es conocido como el padre de la geometría por su obra *Los Elementos* que presenta un sistema lógico de la misma. En ella Euclides estableció los fundamentos de la geometría cotidiana y los números primos. En el libro IX de *Los Elementos* de Euclides, aparece escrita una fórmula, semejante a la actual, de la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica:

“Si se suman tantos números impares como se quiera y su cantidad es impar, también el total será impar”
(Euclides, c. 300 a.C./1956)

ARQUÍMEDES (287 a.C. – 212 a.C.)

Arquímedes vivió en Syracuse, una ciudad en la isla de Sicilia, que en ese momento formaba parte del Imperio Griego. Su vida se desarrolló durante el período helenístico, una época de gran florecimiento para las ciencias y las matemáticas. Desarrolló diversos procedimientos para estimar cantidades numéricas que implicaban secuencias de cálculos en serie.

Un caso ilustrativo es su relación con el valor de π . Utilizó un proceso iterativo de inscribir y circunscribir polígonos regulares dentro de un círculo para aproximar el valor de π , y su enfoque puede verse como una forma temprana de sucesión convergente. Usó polígonos de 96 lados para obtener una aproximación de π , lo que resulta en una sucesión de valores cada vez más cercanos a π . A través de sucesivos pasos, logró aproximarse a π con una precisión notable para su tiempo, una técnica que se relaciona con lo que hoy conocemos como un método iterativo. En términos modernos, podemos pensar que Arquímedes estaba construyendo una sucesión de aproximaciones para acercarse al valor de π , y en este sentido, sus métodos anticipan las ideas de convergencia de sucesiones.

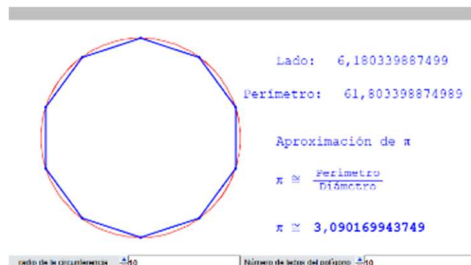


Ilustración 3: Aproximación del número π

La demostración la podemos encontrar en la Red Educativa Digital Descartes. (Barrios Calmaestra, s. f.)

La leyenda sobre el inventor del juego de ajedrez (s. VI d.C.)

La historia cuenta que fue un brahmán llamado Sissa Ben Dari quien invento el ajedrez y se lo presentó al rey de la India, Iadava, que cayó en profunda depresión tras perder a su hijo en batalla. Encerrado en sus aposentos, la angustia y la tristeza fueron haciendo mella en la moral del rey que no quería recibir a nadie. Hasta que un día un joven brahmán llamado Sisi Ben Dari pidió audiencia al cual le había llegado la noticia de la tristeza del rey y pensaba que sería un gran problema para el pueblo si el soberano se encerraba en sí mismo. Pensó que convenía inventar un juego que pudiera distraerlo y abrir el corazón a nuevas alegrías, para ello le presentó un tablero cuadrado dividido en sesenta y cuatro casillas iguales, el ajedrez.

El rey quedó fascinado ante semejante juego y le ofreció al inventor cualquier recompensa que deseara el sabio. Modestamente pidió un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera y así sucesivamente doblando la cantidad por cada casilla. En un principio, el rey se rio de él por la mínima cantidad que solicitaba. Sin embargo, esa sonrisa burlona no le duró mucho, dado que sus asesores le advirtieron que tras realizar los pertinentes cálculos esa cantidad no se la podía conceder, no había granos suficientes en todo el reino para satisfacer su petición, ya que la cantidad ascendía a 18.446.744.073.709.551.615 granos de trigo, los cuales tardarían en ser recogidos 1.173.055.797 siglos.

BHASKARA II (1114 - 1185)

También conocido como Bhaskara el Segundo o Bhaskaracharya. Su vida se desarrolló durante el período medieval en la India, Nació en lo que hoy es la India y se le conoce por sus importantes contribuciones a la matemática y la astronomía.

Su obra más famosa *Lilavati* contiene 270 problemas que combinan aritmética, geometría y álgebra, y fue escrito en un formato poético. En ella trató problemas de sucesiones aritméticas, aunque no usaba la notación

moderna, resolvía problemas que implicaban encontrar términos en una sucesión aritmética o calcular la suma de los primeros n términos.

Bhaskara también trabajó con sucesiones geométricas en las que cada término se obtenía multiplicando el término anterior por una constante. Su enfoque era más pragmático que teórico, y trataba problemas donde el incremento o disminución de los términos seguía una razón multiplicativa constante. También resolvió problemas relacionados con la multiplicación repetida de un número, que es una característica de las sucesiones geométricas. Por ejemplo, podría haber abordado problemas de interés compuesto, donde el valor crece de acuerdo con una tasa fija multiplicativa.

LEONARDO DE PISA (FIBONACCI) (1170 – 1250):

Introdujo en Europa la sucesión que lleva su nombre (1, 1, 2, 3, 5, 8...) a través de su obra *Liber Abaci* (El libro del ábaco), publicada en 1202, ella trata el problema relacionado con el crecimiento de los conejos,

“Cierta hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también” (de Pisa, 1202)

El problema responde a la Sucesión $\{a_n\}$ definida por:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ si } n \geq 3 \text{ y } a_1 = a_2 = 1$$

Esta ecuación aparece en infinidad de ejemplos tanto en plantas, animales, música, arquitectura o física.

GALILEO GALILEI (1564 - 1642)

Galileo Galilei fue un científico, matemático, astrónomo e ingeniero italiano, considerado uno de los fundadores de la ciencia moderna. Si bien no formuló teorías o tratados exclusivamente sobre sucesiones numéricas como lo hicieron los matemáticos anteriormente nombrados, sus contribuciones al estudio de la caída libre, las trayectorias de los cuerpos y la aceleración involucraron conceptos que se pueden modelar mediante sucesiones y series matemáticas.

Estudió las sucesiones cuadráticas en relación con los movimientos de los cuerpos, sobre todo al investigar las leyes del movimiento uniformemente acelerado. Desarrolló el concepto de que la distancia recorrida por un objeto que cae libremente está relacionada con el cuadrado del tiempo de caída, lo que lleva a la creación de sucesiones cuadráticas, siendo esta aquella cuya diferencia de las diferencias entre los términos consecutivos es constante y su fórmula general es:

$$a_n = An^2 + Bn + C \quad \text{donde A, B y C son constantes}$$

En el caso de la distancia recorrida en caída libre, la fórmula hasta el tiempo t es:

$d(t) = \frac{1}{2}gt^2$ si tomamos $g=10$ para simplificar tendríamos la sucesión (5, 20, 45, 80, 125, 180...) cuya diferencia entre términos consecutivos es (15, 25, 35, 45, 55 ...) lo que hace que la diferencia de las diferencias sea de 10.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716)

Leibniz es conocido fundamentalmente por sus contribuciones al cálculo, que hizo de manera independiente a Isaac Newton, aunque también destacó por sus trabajos en lógica, filosofía y en la invención de la calculadora mecánica. Desarrollo el cálculo infinitesimal, herramienta fundamental para el estudio de las sucesiones y series infinitas. Una de las contribuciones más importantes fueron las reglas para las operaciones con los símbolos " $\int$ " de la integral y " d " del diferencial.

Un ejemplo con las series de potencias, donde Leibniz desarrolló la fórmula para la expansión en serie de funciones como la arcotangente, conocida como la serie de Leibniz para $\arctan(x)$ cuya forma es la siguiente:

$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ que puede expresarse de manera general:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Otro de los ejemplos más conocidos de Leibniz está relacionado con la obtención del número π y conocida como la serie de Leibniz para π

$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$ que corresponde con la fórmula anterior evaluada en $x=1$:

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

ISAAC NEWTON (1642– 1727)

Matemático, físico y astrónomo, aunque es más conocido por sus leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal. Newton al igual que Leibniz, también hizo importantes contribuciones al estudio de las sucesiones y series, particularmente en relación con el cálculo infinitesimal y el desarrollo de las series de potencias.

Un ejemplo del trabajo de Newton relacionado con las sucesiones se encuentra en su desarrollo de la expansión binomial. Newton generalizó la expansión del binomio $(1+x)^n$ como una serie infinita, lo cual representó una gran innovación en su época.

La de la expansión binomial es:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

También la desarrollo para potencias fraccionarias o reales de n .

LEONHARD EULER (1707-1783)

Uno de los matemáticos más influyentes de todos los tiempos, con grandes contribuciones que influyeron el estudio de las sucesiones, series, álgebra, cálculo, y teoría de números. Fue uno de los primeros en formalizar sucesiones y series numéricas con notación muy cercana a la actual. Euler hizo importantes avances en el análisis de sucesiones, particularmente a través de sus trabajos con series infinitas, sucesiones recurrentes, y la función generadora.

Un ejemplo de su trabajo es la serie de Euler para la función exponencial en serie de potencias:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Pero la mayor contribución fue la función Zeta de Riemann que se define como:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Una serie infinita en la que cada término tiene la forma $\frac{1}{n^s}$, donde n es un número entero positivo y s es un número complejo con parte real mayor que 1. La importancia de esta fórmula es que está relacionada con la distribución de los números primos, la famosa Conjetura de Riemann.

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

Llamado "el príncipe de los matemáticos" debido a sus numerosas y profundas contribuciones a varias áreas de las matemáticas, incluyendo la teoría de números, el álgebra, la geometría, y el análisis. En cuanto a las sucesiones, es bien conocida por los matemáticos la historia de él, cuando tenía alrededor de 7 años, su maestro pidió a la clase que calcularan la suma de los números del 1 al 100, probablemente para tenerlos entretenidos. Gauss en lugar de sumarlos uno a uno, descubrió la fórmula de la sucesión aritmética que le permitió resolverla en muy poco tiempo, quedando de esta manera su profesor impresionado. La fórmula general para la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética es:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \quad \text{donde:}$$

S_n es la suma de los primeros n términos

a_1 es el primer término de la sucesión.

a_n es el n -ésimo término.

Otro ejemplo de la gran contribución de Gauss a las sucesiones es La Sucesión de Taylor de Gauss, que es una representación de una función como una sucesión infinita de términos, que es útil para aproximar

funciones complejas en torno a un punto. Si $f(x)$ es una función suave en torno a $x = a$, su serie de Taylor en a tiene la forma:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857)

Sus trabajos en análisis matemático, especialmente en cálculo, teoría de límites y sucesiones, fueron fundamentales para el desarrollo de muchas áreas de las matemáticas modernas. Cauchy fue un pionero en el rigor matemático, y uno de los aspectos más importantes de su trabajo fue formalizar y sistematizar conceptos como la convergencia de sucesiones.

El criterio de Cauchy dice lo siguiente: una sucesión (a_n) es convergente en $\mathbb{R}$ si y solo si, para cualquier $\zeta > 0$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos los $m, n \geq N$, se cumple:

$$|a_n - a_m| < \zeta$$

Es decir, los términos de la sucesión se van acercando entre sí a medida que avanzamos en la sucesión, lo que implica que la sucesión tiene un límite. Este concepto es útil porque no es necesario conocer el límite exacto, solo es necesario conocer que los términos de la sucesión se acercan entre si a medida que n y m van creciendo.

GEORG CANTOR (1845-1918)

Matemático alemán conocido principalmente por ser el creador de la teoría de conjuntos y por desarrollar la idea de los números transfinitos, que extienden los números naturales a tamaños infinitos. Su trabajo principal se centra en la teoría de conjunto, pero también realizó aportaciones a las sucesiones numéricas, como por ejemplo el *Argumento de la Diagonal de Canto* que demuestra que el conjunto de los números reales es innumerable, o la serie de Canto, que es una suma infinita que converge a un número específico. Una de las series geométricas más conocidas de Cantor es la serie infinita definida por:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

cuya suma tiende a $1/2$.

A pesar de que Cantor no se ocupó de manera directa de fractales tal como los conocemos en la actualidad, su labor en la teoría de conjuntos y la creación de conjuntos autosemejantes como el conjunto de Cantor (1874) resultó esencial para entender las estructuras fractales. El conjunto de Cantor es una serie de segmentos que se asemeja a sí mismo a diversas escalas y posee una dimensión fractal.

BOURBAKI (grupo de matemáticos)

El grupo de matemáticos conocidos como Bourbaki trataron el concepto de sucesión de manera rigurosa y abstracta, particularmente en el contexto de espacios métricos y espacios topológicos. Algunos de los temas que trataron fueron:

- Convergencia de sucesiones en Espacios Métricos.
- Convergencia Uniforme de Sucesiones de Funciones.

2.2. Historia de los fractales

Las sucesiones y los fractales están íntimamente relacionados, ya que las sucesiones matemáticas suelen ser herramientas fundamentales para definir fractales. Muchos fractales se generan mediante procesos iterativos que involucran sucesiones. Cada paso en la construcción de un fractal corresponde a un término de una sucesión, y a medida que se avanza en interacciones, se aproxima al fractal final.

Por ejemplo, el triángulo de Sierpinski se construye eliminando el triángulo central de cada subdivisión de un triángulo inicial. La sucesión describe cómo crece el número de triángulos o cómo cambia el área total en cada etapa. Otros fractales se definen mediante fórmulas recursivas que generan una sucesión de puntos, curvas o transformaciones geométricas.

Las principales características de los fractales son:

1. **Autosimilaridad:** Los fractales muestran patrones repetitivos a diferentes escalas. Aunque no siempre son idénticos, mantienen una estructura reconocible.
2. **Dimensión fractal:** Tienen una dimensión no entera, lo que significa que ocupan un espacio intermedio entre las dimensiones tradicionales (por ejemplo, entre 1D y 2D).
3. **Generación iterativa:** Se crean mediante procesos matemáticos iterativos que aplican reglas repetitivas.
4. **Complejidad infinita:** Los fractales tienen detalles infinitos, por lo que puedes hacer zoom sin fin y seguir observando nuevas estructuras.

BENOÎT B. MANDELBROT (1924 – 2010)

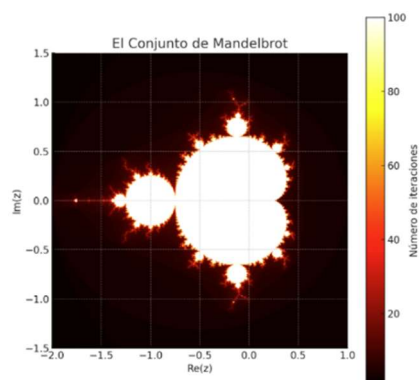
Conocido como el “padre de los fractales”, durante su vida, hizo contribuciones significativas a las matemáticas, especialmente en el campo de la geometría fractal y en la comprensión de patrones complejos en la naturaleza publicando el libro *Fractal Geometry of the Nature* (Mandelbrot, 1982). Revolucionó la geometría al demostrar que no todas las formas geométricas son “lisas” o regulares como los círculos o rectas. Existen también objetos “rugosos” o irregulares que la geometría euclidiana no puede modelar, estos son los fractales.

Su contribución más icónica es el Conjunto de Mandelbrot, definido mediante una fórmula matemática sencilla, pero con un comportamiento bastante complejo:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n \geq 0$$

En esta fórmula, z_n y c son números complejos. La iteración comienza con $z_0 = 0$, y el comportamiento de la sucesión resultante determina si un punto c pertenece al conjunto.

- Si la sucesión permanece acotada, el punto pertenece al conjunto.
- Si la sucesión diverge, el punto no pertenece.



Un punto pertenece al conjunto de Mandelbrot si, al iterar esta fórmula, la magnitud de z no diverge hacia infinito (es decir, permanece acotada). Visualmente, los puntos que pertenecen al conjunto forman una figura con bordes altamente complejos y detallados.

En la figura los puntos blancos no divergen es decir si la magnitud de z ($|z|$) permanece acotada ($|z| \leq 2$) tras sucesivas iteraciones. En el caso de los puntos blancos hasta más de 100 iteraciones.

Ilustración 4: El Conjunto de Mandelbrot

Los puntos negros divergen (es decir, superan el valor absoluto de 2). Por ejemplo, el punto $c = 1 + i$ diverge, según se ve en el siguiente proceso:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = z_0^2 + c = 0^2 + (1 + i) = 1 + i$$

$$z_2 = z_1^2 + c = (1 + i)^2 + (1 + i) = 1 + 3i$$

$$z_3 = z_2^2 + c = (1 + 3i)^2 + (1 + i) = (-8 + 6i) + (1 + i) = -7 + 7i \quad |z_3| = \sqrt{(-7)^2 + 7^2} \approx 9,90$$

FELIX HAUSDORFF (1868 – 1942)

Matemático alemán reconocido como uno de los fundadores de la teoría moderna de los conjuntos y la topología. La relación de Felix Hausdorff con los fractales se basa en que su definición de dimensión y medida nos permite entender la complejidad de estos objetos. Su contribución más importante fue la “Dimensión de Hausdorff” cuyo concepto nos permite medir la “dimensión” de conjuntos geométricos. De esta manera una línea tiene dimensión 1, un cuadrado tiene dimensión 2. La dimensión de Hausdorff captura la complejidad de estas formas, describiendo cómo “llena” un fractal el espacio.

Si tenemos $N(L)$ partes de un objeto, cada parte medida con resolución L , tendremos:

$$L^D \cdot N(L) = 1 \quad \text{siendo } D \text{ la dimensión fractal. Tomando logaritmos en esta expresión tenemos:}$$

$$D = \frac{\log(N(L))}{\log(\frac{1}{L})} \quad D \text{ es un número real que generaliza la dimensión topológica.}$$

3. FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

En la fundamentación curricular se pretenderá realizar un análisis del currículo escolar establecido en la normativa actual, nos remitiremos a los siguientes Decretos:

- **Real Decreto 217/2022**, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.
- **Decreto 39/2022**, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

3.1. Objetivos de la etapa

De acuerdo con el *Real Decreto 217/2022* en su artículo 7 (Objetivos). La Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos las capacidades que les permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a las demás personas, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con las demás personas, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Desarrollar las competencias tecnológicas básicas y avanzar en una reflexión ética sobre su funcionamiento y utilización.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la comunidad autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de las demás personas, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado, la empatía y el respeto hacia los seres vivos, especialmente los animales, y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación. (Gobierno de España, 2022)

A estos se añaden los del *Decreto 39/2022*, objetivos de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León:

- m) Conocer, analizar y valorar los aspectos de la cultura, tradiciones y valores de la sociedad de Castilla y León.
- n) Reconocer el patrimonio natural de la Comunidad de Castilla y León como fuente de riqueza y oportunidad de desarrollo para el medio rural, protegiéndolo, y apreciando su valor y diversidad.
- o) Reconocer y valorar el desarrollo de la cultura científica en la Comunidad de Castilla y León indagando sobre los avances en matemáticas, ciencia, ingeniería y tecnología y su valor en la transformación y mejora de su sociedad, de manera que fomente la iniciativa en investigaciones, responsabilidad, cuidado y respeto por el entorno. (Junta de Castilla y León, 2022)

3.2. Competencias clave

De conformidad con el artículo 11.1 del *Real Decreto 217/2022*, de 29 de marzo, las competencias clave son las siguientes:

- a) Competencia en comunicación lingüística (CCL)
- b) Competencia plurilingüe (CP)
- c) Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)**
- d) Competencia digital (CD)
- e) Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)
- f) Competencia ciudadana (CC)
- g) Competencia emprendedora (CE)
- h) Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC)

De sus siglas en inglés “Science, Technology, Engineering & Mathematics”, la competencia STEM integra la comprensión del mundo, junto a los cambios causados por la actividad humana, utilizando el pensamiento y la representación matemática, los métodos científicos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno a partir de la responsabilidad de cada individuo como ciudadano.

Así, la competencia matemática es la habilidad de desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos, junto a sus herramientas de pensamiento y representación, al objeto de describir, interpretar y predecir distintos fenómenos que permitan resolver problemas en situaciones cotidianas.

La competencia en ciencia es la habilidad de comprender y explicar el mundo natural y social utilizando un conjunto de conocimientos y metodologías, incluidas la observación, la experimentación y el contraste, con el fin de plantear preguntas y extraer conclusiones basadas en pruebas para así poder interpretar, conservar y mejorar el mundo natural y el contexto social.

La competencia en tecnología e ingeniería comprende la aplicación de los conocimientos y metodologías propios de las ciencias en respuesta a lo que se percibe como deseos o necesidades humanos en un marco de seguridad, responsabilidad y sostenibilidad.

3.3. Currículo de la materia y las competencias específicas de matemáticas

En este punto queremos destacar el Currículo de la Materia y las Competencias Específicas de Matemáticas dentro del *Decreto 39/2022*:

1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL2, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.

2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM4, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.

3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL2, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3.

4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.

5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1

6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM5, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.

7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM3, STEM4, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4

8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3

9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3

10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para

construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3. (Junta de Castilla y León, 2022)

De esta manera el mapa de relaciones competenciales quedaría de la siguiente manera:

Tabla 1.- Mapa de Relaciones Competenciales de Matemáticas

Matemáticas																																			
CCL					CP			STEM					CD					CPSAA					CC				CE				CCEC				
	CCL1	CCL2	CCL3	CCL4	CCL5	CP1	CP2	CP3	STEM1	STEM2	STEM3	STEM4	STEM5	CD1	CD2	CD3	CD4	CD5	CPSAA1	CPSAA2	CPSAA3	CPSAA4	CPSAA5	CC1	CC2	CC3	CC4	CE1	CE2	CE3	CCEC1	CCEC2	CCEC3	CCEC4	
Competencia Específica 1	✓	✓	✓						✓	✓		✓		✓								✓							✓					✓	
Competencia Específica 2	✓								✓	✓		✓		✓							✓				✓				✓						
Competencia Específica 3	✓								✓	✓				✓	✓		✓												✓						
Competencia Específica 4									✓	✓				✓	✓		✓												✓						
Competencia Específica 5									✓		✓				✓	✓																✓			
Competencia Específica 6	✓								✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓							✓		✓	✓	✓					
Competencia Específica 7											✓	✓		✓	✓		✓		✓										✓					✓	
Competencia Específica 8	✓		✓			✓			✓		✓			✓	✓														✓					✓	
Competencia Específica 9													✓						✓		✓	✓						✓	✓						
Competencia Específica 10					✓		✓			✓										✓		✓			✓	✓									

3.4. Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación para la asignatura de matemáticas de tercer curso son los siguientes:

Competencia específica 1

- 1.1. Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana, organizando los datos dados y/o localizando y seleccionando información, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. (CCL1, CCL2, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4)
- 1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. (STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CPSAA5, CE3)
- 1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias. (STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CE3, CCEC4)

Competencia específica 2

- 2.1. Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios. (STEM1, STEM2)

- 2.2. Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.). (STEM1, STEM4, CD2, CPSAA4, CC3, CE3)

Competencia específica 3

- 3.1. Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones. (CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2)
- 3.2. Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema. (STEM2)
- 3.3. Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas analizando el resultado obtenido. (STEM1, CD2)

Competencia específica 4

- 4.1. Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional. (STEM1, STEM2, CD2, CD3)
- 4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos. (STEM1, STEM3, CD2, CD3)

Competencia específica 5

- 5.1. Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente. (STEM1, CD2, CD3)
- 5.2. Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas. (STEM1, CD2, CCEC1)

Competencia específica 6

- 6.1. Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. (STEM1, STEM2, CD5)
- 6.2. Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados. (STEM2, CD3, CE3)
- 6.3. Reconocer y saber expresar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual. (STEM2, STEM5, CE2, CCEC1)

Competencia específica 7

- 7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información. (STEM3, CD1, CD2)

- 7.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada. (STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4)

Competencia específica 8

- 8.1. Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. (CCL1, CP1, STEM2, STEM4, CD2)
- 8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor. (CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4)

Competencia específica 9

- 9.1. Gestionar las emociones propias y reconocer las ajenas, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. (STEM5, CPSAA1, CE2, CE3)
- 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas. (CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5)

Competencia específica 10

- 10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y juicios informados. (CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CC2, CC3)
- 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo. (CP3, STEM3, CPSAA3) (Junta de Castilla y León, 2022)

3.5. Ubicación dentro del currículo

La asignatura en la que se encuadra el presente trabajo es Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para el curso 3º de la ESO. Según el *Decreto 39/2022*, esta asignatura queda dividida en los siguientes contenidos:

- A. Sentido numérico.
- B. Sentido espacial.
- C. Sentido algebraico.
- D. Sentido estocástico.
- E. Sentido socioafectivo.

Este TFM desarrolla la Programación Didáctica para estos contenidos y realizará la Situación de Aprendizaje para el tema de las Sucesiones Numéricas que se ubica en el Sentido Numérico en el punto 4 (Relaciones).

Patrones y regularidades numéricas. Reconocimiento, aplicación y uso de las sucesiones numéricas

4. FUNDAMENTACIÓN EPISTEMOLÓGICA

En este punto de la fundamentación epistemológica tendremos en cuenta la *Orden de 9 de septiembre de 1993*, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio. En su anexo III, para la asignatura de Matemáticas encontramos el:

Tema 8. Sucesiones. Término general y forma recurrente. Progresiones aritméticas y geométricas.

Aplicaciones. (Ministerio de Educación y Ciencia, 1993)

4.1. Introducción

Una sucesión de números reales es una colección ordenada de números reales. Al considerar una sucesión se conoce cuál es el lugar que ocupa cada uno. Hay un primer elemento, al que podríamos llamar a_1 , un segundo a_2 , un elemento n -ésimo o general, a_n , etc. De esta manera podemos decir que una sucesión es una aplicación

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

que a cada número natural n le asocia un número real $x_n = f(n)$. Es decir, cualquier aplicación del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en cualquier otro conjunto no vacío que por simplicidad y sin pérdida de generalidad, supondremos que es el conjunto de los números reales.

Las principales formas de representar una sucesión son:

- **Forma enumerativa:** Consiste en realizar una lista de los primeros términos de la sucesión, seguidos por puntos suspensivos para indicar que la sucesión continúa siguiendo un patrón implícito. Como, por ejemplo:

$$(1, 3, 5, 7, 9 \dots)$$

- **Forma explícita:** Se describe el término general a_n mediante una fórmula que permite calcular cualquier término en función de n . Un ejemplo:

$$a_n = 2n - 1, \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}$$

- **Ley de recurrencia:** El término a_n se expresa en función de uno o varios términos anteriores. Es necesario conocer uno o más valores iniciales. Como puede ser:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

- **Forma gráfica**

Se representan los términos de la sucesión como puntos en un sistema de coordenadas (n, a_n) . Un ejemplo puede ser el gráfico siguiente.

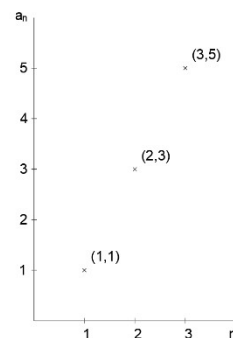


Ilustración 5: Forma gráfica de una sucesión

4.2. Sucesiones

A cada número natural n le corresponde una única imagen $f(n)$. Como el conjunto inicial de todas las sucesiones es el mismo, $\mathbb{N}$, se suele identificar a la sucesión con la imagen de la aplicación:

$$Im(f) = \{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

A cada uno de los valores a_i de la sucesión se le denomina término i -ésimo, mientras que al término a_n se le denomina término n -ésimo de la sucesión. En lo que sigue la sucesión se escribirá $\{a_n\}$

Al conjunto de todas las sucesiones de números reales se le representa por $\mathbb{R}^\infty$ o $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Una sucesión queda definida cuando es posible escribir sus términos hasta el último que se quiera, es decir, no basta con dar algunos de sus primeros términos. Por lo tanto, podemos establecer las siguientes definiciones.

4.2.1. Término general y forma recurrente

El **término general** de una sucesión será una expresión mediante la que se calcula cada término de la sucesión en función del lugar que ocupa, y que se expresa bajo la forma del término n -ésimo de la sucesión.

$$a_n = 2n - 1 \Rightarrow a_1 = 1; a_2 = 3; \dots \quad n \in \mathbb{N}$$

La **ley de recurrencia** de una sucesión será una expresión mediante la que se calcula cada término de la sucesión en función de k términos anteriores al que se quiere calcular.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ con } a_1 = 1, a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = 2; a_4 = 3; \dots$$

Así, una sucesión será recurrente de orden k si conocemos los k primeros términos $a_1, a_2, \dots, a_k$, y cada término siguiente viene dado en función de los k anteriores:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) \quad \forall n > k \quad \text{Ecuación de recurrencia de orden } k.$$

Un caso dentro de las sucesiones recurrentes, son las denominadas linealmente recurrentes, que definimos de la siguiente manera. Una sucesión será linealmente recurrente de orden k si podemos expresarla como combinación lineal de los k términos anteriores:

$$a_n = \alpha_1 \cdot a_{n-1} + \alpha_2 \cdot a_{n-2} + \dots + \alpha_k \cdot a_{n-k} \quad \forall n > k \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ y } a_1, \dots, a_k \text{ conocidos.}$$

En el caso de este tipo de sucesiones es posible obtener el término general de la sucesión a partir de la ley de recurrencia.

No debemos olvidar que existen sucesiones para las que no se puede encontrar ni término general ni ley de recurrencia que permita encontrar cualquier término de la sucesión, aunque este perfectamente definida,

como la sucesión de los números primos o la sucesión que forman los dígitos de la parte decimal de un número irracional.

4.2.2. Operaciones con sucesiones.

En el conjunto de todas las sucesiones, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se puede definir una operación interna (suma de sucesiones) y una externa (multiplicación por un escalar) sobre el conjunto de los números reales, para dotarla de estructura de espacio vectorial.

La **sucesión suma**, se define como la suma término a término de dos sucesiones $a_n, b_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$(a + b)_n := a_n + b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ es un **grupo abeliano** ya que la suma de sucesiones verifica las propiedades:

- Conmutativa: $a_n + b_n = b_n + a_n$
- Asociativa: $(a_n + b_n) + c_n = a_n + (b_n + c_n)$
- Elemento neutro: $a_n + 0 = 0$
- Elemento simétrico: $a_n + (-a_n) = 0$

La **multiplicación por un escalar** (operación externa) se define de la siguiente manera: Para un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y una sucesión $a_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, se define como:

$$(\lambda \cdot a)_n := \lambda \cdot a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades:

- Distributiva respecto de la suma de números reales (escalares): $(\lambda + \mu) \cdot a_n = \lambda a_n + \mu a_n$
- Distributiva respecto de la suma de sucesiones (vectores): $\lambda \cdot (a_n + b_n) = \lambda a_n + \lambda b_n$
- Pseudoasociativa: $(\lambda \cdot \mu) \cdot a_n = \lambda \cdot (\mu \cdot a_n)$
- Neutralidad del Escalar 1: $1 \cdot a_n = a_n, \quad \forall a_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

4.2.3. Tipos de sucesiones

Existe gran variedad de clasificación de las sucesiones según el criterio escogido. Presentaremos a continuación las más representativas:

Sucesiones Monótonas

Una sucesión es monótona si sus términos presentan un comportamiento consistentemente creciente o decreciente.

- Monótona estrictamente creciente: $a_n > a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Monótona creciente o no decreciente: $a_n \geq a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Monótona estrictamente decreciente: $a_n < a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Monótona decreciente o no creciente: $a_n \leq a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sucesiones Convergentes

Una sucesión es convergente si sus términos tienden a un valor finito L cuando $n \rightarrow \infty$.

$\{a_n\}$ converge a L si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $|a_n - L| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$.

- Si una sucesión converge, su límite es único.

Sucesiones Acotadas

Sus términos alcanzan un valor mínimo (acotadas inferiormente), o máximo (acotadas superiormente) ambos, es decir sus términos están contenidos dentro de un intervalo finito (acotadas), distinto de $\pm\infty$. Es decir, una sucesión (a_n) es acotada si existe un número real $M > 0$ tal que:

$$|a_n| \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

O lo que es lo mismo, si existen dos números reales m y M tales que:

$$m \leq a_n \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

En este caso, se dice que la sucesión esta acotada inferior y superiormente, o simplemente acotada.

- Toda sucesión convergente está acotada, pero no toda sucesión acotada converge. Como, por ejemplo:

$$a_n = \sin(n), \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Sucesiones Recurrentes de orden k

Una sucesión recurrente de orden k es una sucesión en la que cada término a partir del k -ésimo se define a partir de los k términos anteriores, mediante una fórmula de recurrencia.

Una sucesión (a_n) es recurrente de orden k si existe una relación del tipo:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) \text{ para } n \geq k$$

Donde f es alguna función que relaciona los k términos anteriores.

Sucesiones Alternadas

Una sucesión (a_n) es alternada si sus términos cambian de signo en cada paso, es decir, si cumple que:

$$a_n = (-1)^n \cdot b_n \quad \text{ó} \quad (-1)^{n+1} \cdot b_n$$

Donde b_n es una sucesión cuyos términos son todos positivos (o todos negativos)

4.3. Progresiones aritméticas

Diremos que una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es una progresión aritmética si existe un número real d , llamado diferencia común, tal que:

$$a_n = a_{n-1} + d \quad \text{para todo } n \geq 2$$

La fórmula general del término n -ésimo:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d, \quad n \geq 1$$

donde:

- a_1 es el primer término.
- d es la diferencia común
- n es la posición del término en la sucesión

Toda progresión aritmética $\{a_n\}$ es una sucesión recurrente de segundo orden, se puede escribir también:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

4.3.1. Propiedades de las progresiones aritméticas

Determinación de una progresión aritmética por un término y la diferencia.

Sea $\{a_n\}$ una progresión aritmética. Esta queda determinada si se conoce un término cualquiera a_k y la diferencia d . En concreto, se cumple:

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot d, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Simetría en la suma de términos equidistantes

Si consideramos una progresión aritmética $\{a_i\}$, con valores extremos a_p y a_q , donde $p \leq i \leq q$, obtenida como subconjunto finito de una progresión aritmética $\{a_n\}$, entonces la suma de dos términos equidistantes de dichos extremos es igual a la suma de estos extremos. Su demostración:

$$\begin{aligned} a_{p+k} + a_{q-k} &= a_p + k \cdot d + a_p + (q - k - p) \cdot d \\ &= a_p + [a_p + (q - p) \cdot d] \\ &= a_p + a_q \end{aligned}$$

Suma de una progresión aritmética

La suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión aritmética se puede expresar de la forma:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Llamemos S_n a la suma:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d)$$

Escribiendo esa misma suma al revés:

$$S_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \dots + a_1$$

Sumando ambas expresiones:

$$\begin{aligned} 2S_n &= [a_1 + (a_1 + (n-1)d)] + [(a_1 + d) + (a_1 + (n-2)d)] + \dots \\ &= [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots \\ &= n \cdot [2a_1 + (n-1)d] \end{aligned}$$

Entonces:

$$2S_n = n \cdot [2a_1 + (n-1)d] \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

Sabemos que el último término es:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Reemplazándolo en la formula:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

4.4. Progresiones geométricas

Una progresión geométrica de números reales $\{a_n\}$, es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante fija r , llamada razón:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = r, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ y con } a_k \neq 0$$

La fórmula general del término general de una progresión geométrica es:

$$a_n = r^{n-1} \cdot a_1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } r \neq 0$$

Toda progresión geométrica reales $\{a_n\}$ es una sucesión recurrente de segundo orden.

4.4.1. Propiedades de las progresiones geométricas

Determinación de una progresión geométrica por un término y la razón.

Sea $\{a_n\}$ una progresión geométrica. Entonces, ésta queda determinada si se conoce un término cualquiera a_k y la razón r . En concreto:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } r \neq 0$$

Simetría en la multiplicación de términos equidistantes

Si consideramos una progresión $\{a_i\}$, con valores extremos a_p y a_q , donde $p \leq i \leq q$, obtenida como subconjunto finito de una progresión geométrica $\{a_n\}$, entonces el producto de dos términos equidistantes de dichos extremos es igual al producto de estos extremos.

$$a_{p+r} \cdot a_{q-r} = a_p \cdot a_q, \quad \text{para todo } 0 \leq r \leq \frac{q-p}{2}$$

Su demostración es similar a la de la suma de las progresiones aritméticas.

Producto de los n primeros términos

El producto de los n primeros términos consecutivos de una progresión geométrica se puede expresar de la forma:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Sabemos que:

$$P_n = a_1 \cdot (a_1 \cdot r) \cdot (a_1 \cdot r^2) \dots (a_1 \cdot r^{n-1}) = a_1^n \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Descomponiendo en potencias con exponentes iguales:

$$P_n = a_1^{\frac{n}{2}} \cdot a_1^{\frac{n}{2}} \cdot (r^{n-1})^{\frac{n}{2}} = (a_1 \cdot a_1 \cdot r^{n-1})^{\frac{n}{2}} = \sqrt{(a_1 \cdot a_1 \cdot r^{n-1})^n} = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Suma de los n primeros términos

Se puede expresar de la forma:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Sea $\{a_n\}$ una progresión geométrica. Si se resta la progresión a otra equivalente a sí misma multiplicada por r tenemos:

$$\begin{aligned} (r - 1) \cdot S_n &= r \cdot S_n - S_n \\ &= (r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + \dots + r \cdot a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= (a_2 + a_3 + \dots + a_n + r \cdot a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= r \cdot a_n - a_1 \\ &= r^n \cdot a_1 - a_1 \\ &= a_1(r^n - 1) \end{aligned}$$

Despejando de la primera igualdad obtenemos:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

4.5. Fractales

El término fractal procede del latín fractus, que significa roto, fragmentado o irregular. (Chamoso Sánchez, Fernández Benito, & Reyes Iglesias, 2009, p. 202). Fue introducido por Benoît Mandelbrot en 1975, Los fractales son objetos geométricos cuya estructura se repite a distintas escalas, y cuyas propiedades no encajan dentro de la geometría clásica euclídea.

“Un fractal es un tipo de objeto geométrico fragmentado, que puede ser subdividido en partes, cada una de las cuales es aproximadamente una copia reducida del total.” (Sparrow & Mandelbrot, 1984)

Los fractales son objetos matemáticos cuya estructura se repite a diferentes escalas. Se caracterizan por presentar un patrón geométrico que, al ser ampliado, revela copias similares al todo original. Esta propiedad se denomina autosimilitud, y es una de las características fundamentales de los fractales.

Un fractal puede ser generado por un proceso iterativo, es decir, por la repetición de una regla o transformación en forma sucesiva. Esto conecta a los fractales con el concepto de sucesiones, ya que cada paso o iteración puede verse como un término de una sucesión de aproximaciones hacia la forma final del fractal.

4.5.1. Propiedades de los fractales

Formalmente, un fractal es un conjunto geométrico cuya dimensión (en sentido de Hausdorff o fractal) excede su dimensión topológica. Las propiedades más comunes de los fractales incluyen:

Autosimilitud

Una parte del fractal es similar al todo. Esta similitud puede ser:

- **Exacta:** Fractales cuyas partes son réplicas idénticas del todo (ej: Triángulo de Sierpiński).
- **Estadística:** Patrones similares en distribución, pero no idénticos (ej: costas o nubes).
- **Invariante bajo transformaciones de escala:** La estructura se preserva ante homotecias (zoom).

Complejidad infinita

Los fractales tienen detalles a cualquier escala de observación. Cuanto más se amplía, más estructuras aparecen, sin que se llegue nunca a un “fin”. A diferencia de las figuras euclidianas (como una recta o un círculo), cuyos detalles son finitos y predecibles, los fractales exhiben una estructura infinitamente detallada que se revela a medida que se aumenta la escala.

Generación por procesos iterativos

Los fractales se construyen mediante procesos iterativos, donde una regla simple se aplica repetidamente para generar estructuras de complejidad infinita. Entre los tipos de procesos iterativos podemos distinguir:

- **Sistemas de Funciones Iteradas (IFS):** Conjunto de transformaciones contractivas $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ aplicadas repetidamente a una figura inicial. Su fórmula general es:

$$F_{n+1} = \bigcup_{i=1}^k w_i(F_n)$$

- **Algoritmos de Escape:** Basados en recursión compleja $z_{n+1} = z_n^2 + c, n \geq 1$
- **Sustitución Geométrica:** Dividir la figura en partes y posteriormente reemplazar cada parte por una versión escalada de la figura original.

Dimensión fractal:

La dimensión fractal es un concepto fundamental en la geometría fractal, ya que permite cuantificar la complejidad de un objeto cuya forma no puede ser adecuadamente descrita por las dimensiones enteras de la geometría euclidiana (como 1 para líneas, 2 para superficies, 3 para volúmenes).

A diferencia de la dimensión topológica en la geometría tradicional, que toma valores enteros y mide el número de coordenadas necesarias para localizar un punto dentro de un objeto (por ejemplo, una línea tiene dimensión topológica 1), la dimensión fractal puede ser un número no entero (como 1.26, 1.58 o 1.89), indicando que el objeto tiene una estructura más compleja que una figura euclidiana clásica.

Para objetos fractales contruidos por repetición exacta de una misma figura a menor escala, se utiliza la llamada dimensión de homotecia o dimensión de autosemejanza, definida por:

$$D = \frac{\log(N)}{\log(1/L)}$$

Donde:

- N es el número de copias autosemejantes generadas en cada paso,
- L es la razón de escala o la reducción en el tamaño de cada copia respecto al original.

Tabla 2.- Ejemplos de dimensión fractal

FRACTAL	Nº DE COPIAS (N)	ESCALA (L)	DIMENSIÓN FRACTAL (D)
<i>Conjunto de Cantor</i>	2	1/3	$\log(2)/\log(3) \approx 0,6309$
<i>Curva de Koch</i>	4	1/3	$\log(4)/\log(3) \approx 1,2618$
<i>Triángulo de Sierpinski</i>	3	1/2	$\log(3)/\log(2) \approx 1,5849$
<i>Alfombra de Sierpinski</i>	8	1/3	$\log(8)/\log(3) \approx 1,8928$
<i>Esponja de Menger</i>	20	1/3	$\log(20)/\log(3) \approx 2,7268$

5. PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA

5.1. Descripción y análisis del entorno

Características del Centro

Para la contextualización de la Programación Didáctica, se ha escogido el Colegio Nuestra Señora del Carmen se sitúa en la Plaza de la Virgen del Carmen, en el barrio de Las Delicias, por ser uno de los barrios más populares de Valladolid. La parte Prácticum de este Máster, la lleve a cabo en el CEPA San Jorge de Palencia, en donde no ha sido implantada plenamente la LOMLOE, rigiéndose especialmente la Orden EDU/1259/2008. Por este motivo este TFM no está desarrollado sobre la experiencia vivida en el San Jorge, aunque tuve buen recuerdo de la parte Prácticum en él.

La Titularidad del Colegio Nuestra Señora del Carmen la ostenta el Arzobispado de Valladolid. Como tal, el colegio es una institución de la Iglesia que fundamenta su acción educativa en una concepción cristiana del hombre y del mundo.



Ilustración 6.- Nuestra Señora del Carmen

El colegio, desde su perspectiva cristiana entiende que toda persona tiene derecho a la educación, y su función educadora es complementaria a la acción educativa de la familia, dando así respuesta al deseo de educación cristiana que manifiestan muchas familias, aunque se abre a todos, como una comunidad en la que todos son aceptados, pueden dialogar, escuchar y ser escuchados.

La participación activa y coordinada de todos los estamentos implicados en el Colegio, construye la Comunidad Educativa encaminada a la formación integral de los educandos e insertando su acción en la realidad, cultura, costumbres y tradiciones de la zona en que está ubicado el centro. A lo largo de las décadas, el colegio ha evolucionado para adaptarse a los cambios pedagógicos, tecnológicos y sociales, sin perder su identidad ni sus valores fundacionales.

Su presencia en el barrio de Las Delicias ha sido significativa no solo desde el punto de vista educativo, sino también comunitario. El colegio ha sido testigo y protagonista de la transformación del barrio, participando activamente en iniciativas sociales, pastorales y culturales.

Historia

El Colegio Nuestra Señora del Carmen tiene sus raíces en las escuelas parroquiales del Ave María, fundadas en 1934 por el párroco Mariano Miguel López en el barrio de Las Delicias, Valladolid. Estas escuelas surgieron para atender la creciente demanda educativa de la población infantil y juvenil de la zona.

En 1956, se estableció una nueva estructura educativa en Las Delicias para asumir la enseñanza de una población en expansión debido al éxodo rural.

En 1963, comenzaron a funcionar nuevas secciones filiales en el barrio, entre ellas la número 2 del Núñez de Arce, denominada Nuestra Señora del Carmen, destinada a la educación de chicas.

A lo largo de las décadas, el colegio ha evolucionado, adaptándose a los cambios pedagógicos y tecnológicos, sin perder su identidad ni sus valores fundacionales. Hoy en día, es un referente en educación concertada en Valladolid, reconocido por su calidad educativa, ambiente familiar y compromiso con la innovación.

Infraestructura y Recursos

El centro cuenta con instalaciones modernas, funcionales y adaptadas a cada etapa educativa, entre las que destacan:

- Aulas equipadas con pizarras digitales y recursos TIC.
- Laboratorios, aulas específicas de música, plástica y tecnología.
- Una biblioteca escolar, con recursos de lectura y préstamo.
- Gimnasio cubierto, pistas deportivas y patios diferenciados por niveles.
- Capilla escolar, como espacio para la interioridad y la vivencia espiritual.
- Servicios complementarios como comedor escolar, programas de madrugadores y continuadores, enfermería y plataformas de gestión académica y comunicación con las familias.

Marco Socioeducativo y Cultural

El colegio acoge a un alumnado diverso, perteneciente en su mayoría a familias de clase media del propio barrio de Delicias y zonas cercanas. El ambiente que se genera es cercano, familiar y participativo. La convivencia es positiva y está marcada por el respeto, la colaboración y el acompañamiento activo del profesorado.

La comunidad educativa está implicada en la formación no solo académica sino también humana, con una clara apuesta por:

- La atención a la diversidad mediante apoyos educativos, orientación personalizada y refuerzo académico.
- Programas de ayuda como el Plan Releo Plus para garantizar la igualdad de acceso a materiales escolares.
- Acciones formativas en valores, convivencia y responsabilidad social.

Identidad, Proyectos y Valores

El proyecto educativo del colegio se centra en el desarrollo de las competencias clave, el crecimiento personal del alumnado y la vivencia de valores cristianos como la solidaridad, el respeto, la justicia y la paz.

Algunos proyectos destacados son:

- Programa Bilingüe en inglés (en primaria y secundaria).
- Innovación metodológica con trabajo cooperativo, aprendizaje por proyectos y metodologías activas.
- Integración de tecnologías digitales, tanto en el aula como en la gestión educativa.
- Actividades de acción social, medioambientales y solidarias.
- Proyecto NSC.radio, como espacio de expresión y participación del alumnado.

Departamento de Matemáticas.

El Departamento de Matemáticas de Nuestra Señora del Carmen está formado por un equipo estable de docentes que imparten clase en los niveles de ESO y Bachillerato. Se trata de un equipo cohesionado, con una clara orientación hacia la innovación metodológica y el trabajo colaborativo, cuya labor está profundamente alineada con los principios establecidos por la LOMLOE.

Este departamento destaca por su compromiso con la mejora continua y la atención a la diversidad, aspectos prioritarios dentro del proyecto educativo del centro. Además, el Departamento ha promovido el desarrollo de situaciones de aprendizaje contextualizadas, muchas de ellas relacionadas con el entorno cercano al alumnado.

En cuanto a la coordinación docente, el equipo mantiene reuniones mensuales para compartir experiencias, unificar criterios de calificación y evaluar el progreso del alumnado. También colabora de forma habitual con otros departamentos, especialmente en actividades interdisciplinares relacionadas con la sostenibilidad, la ciencia ciudadana y la cultura matemática.

Contextualización del alumnado y el aula

El alumnado se caracteriza por su heterogeneidad, enmarcada dentro de un contexto socioeducativo urbano y de clase media. La mayoría de los estudiantes provienen del barrio de las Delicias y zonas colindantes, manteniendo una continuidad educativa desde etapas tempranas (infantil) hasta bachillerato.

A nivel sociocultural se puede remarcar que existen números estudiantes inmigrantes provenientes de diferentes culturas principalmente latinoamericanas, del este de Europa, norteafricanas, alumnos de etnia gitana y alumnos provenientes en su mayoría del barrio de las Delicias. Muchas familias son de un nivel económico medio-bajo. El colegio participa en programas como el “Plan Releo Plus”, lo que facilita el acceso a recursos escolares a familias que lo necesitan.

No es elevado el número de alumnos con necesidades educativas especiales o con necesidad de compensación educativa. En particular, en el apartado de atención a la diversidad de este trabajo, se tendrá en cuenta la existe de tres alumnos con las siguientes características:

- Alumno con dificultades visuales.
- Alumno extranjero con dificultad en la comprensión del idioma.
- Alumno con altas capacidades intelectuales.

Uno de los aspectos más valorados del alumnado del centro es su buen clima de convivencia. El comportamiento en las aulas y en los espacios comunes es, por lo general, respetuoso y cooperativo:

- Las normas de convivencia son claras y están bien interiorizadas por el alumnado.
- El trato entre iguales y con el profesorado se basa en el respeto mutuo.
- El centro promueve iniciativas para la educación emocional, la mediación escolar y la resolución pacífica de conflictos.

Alumnos de 3º ESO B

Consideraremos una clase compuesta por 26 alumnos con las siguientes características:

- El 15% de ellos están interesados en estudiar una carrera de ciencias o ingeniería.
- El 20% quieren ser policías, bomberos o entrar en el ejército.
- Al 10% se les da muy bien las matemáticas y les gustan.
- El 35% se muestra indiferente ante las matemáticas.
- Un 20% no les gusta nada las matemáticas con lo que les resultan muy difíciles.

El aula y los medios

Como propuesta, consideraremos un aula estándar, pero siendo espacio moderno, cuidado y versátil, diseñado para favorecer tanto el aprendizaje académico como el desarrollo personal del alumnado. Las mesas hemos considerados que no son las tradicionales rectangulares, sino trapezoidales, lo que permite múltiples configuraciones en el aula. Gracias a esta disposición, el profesorado puede reorganizar rápidamente el espacio para facilitar trabajos individuales, en parejas, pequeños grupos o en círculo para dinámicas colectivas, adaptándose así a metodologías activas como el aprendizaje cooperativo o el trabajo por proyectos. A continuación, se muestra el diseño de dicha mesa:

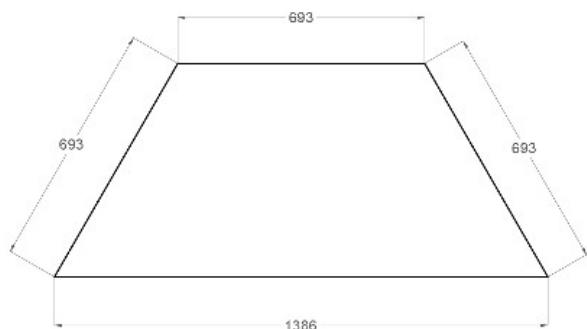


Ilustración 7.- Diseño de mesa trapezoidal

Con estas variantes, el profesorado puede reorganizar rápidamente el espacio para facilitar trabajos individuales, en parejas, pequeños grupos o en círculo para dinámicas colectivas, adaptándose así a metodologías activas como el aprendizaje cooperativo o el trabajo por proyectos. Se puede utilizar para diferentes

configuraciones de la clase,

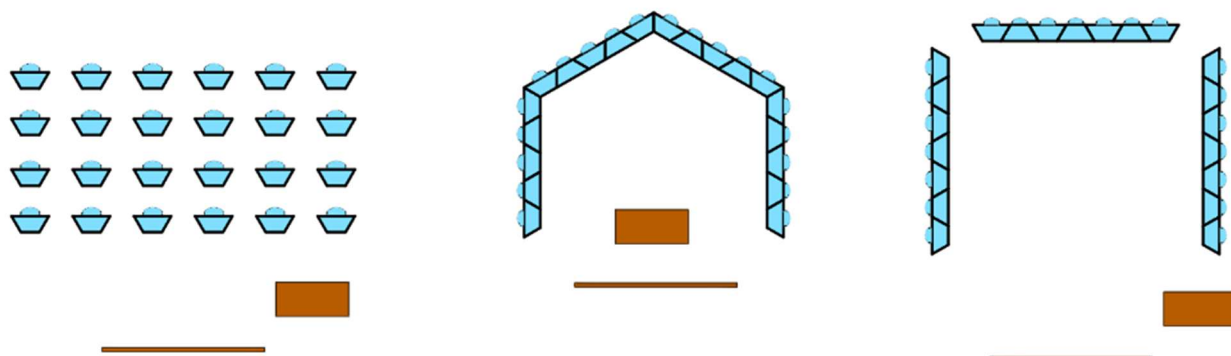


Ilustración 8.- Configuraciones de mesas en aula

para grupos grandes,

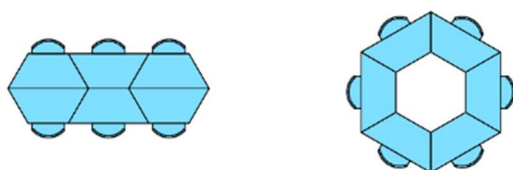


Ilustración 9.- Configuración de mesas en grupos grandes

o para grupos reducidos.

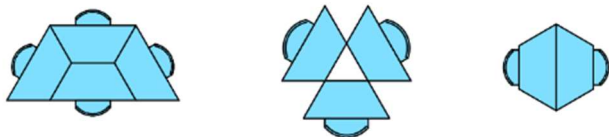


Ilustración 10.- Configuración en grupos reducidos

En cuanto a los recursos tecnológicos, el aula contará con un proyector y un equipo informático conectado a internet, que el docente puede utilizar para presentaciones, vídeos, acceso a plataformas educativas y uso de herramientas interactivas. Todo ello se integraría con el uso habitual de plataformas digitales como Google Classroom, Educamos o Moodle.

El aula incluye además materiales didácticos diversos, como juegos manipulativos, instrumentos de medida y recursos visuales para facilitar la comprensión de conceptos abstractos, especialmente de matemáticas. Con una buena iluminación natural, ventilación, calefacción y aire acondicionado, el aula está preparada para acoger a todos los alumnos, incluidos aquellos con necesidades educativas especiales.

Se dispone de un aula de informática, equipada para el desarrollo de competencias digitales. Este espacio cuenta con puestos individuales con ordenadores conectados en red y acceso a internet, permitiendo al alumnado trabajar de forma autónoma o guiada en actividades que requieren el uso de herramientas TIC.

Dispone de un proyector o pantalla interactiva y un ordenador para el docente, facilitando las explicaciones colectivas y la supervisión del trabajo de los alumnos.

5.2. Objetivos específicos de la materia de matemáticas

BLOQUE 1 – Contenidos Comunes

1. Desarrollar el razonamiento lógico y crítico en la resolución de problemas, comparando estrategias y valorando diferentes caminos hacia una solución.
2. Plantear conjeturas y formular hipótesis a partir de patrones observados, utilizando la experimentación y la argumentación matemática.
3. Verificar, revisar y generalizar soluciones, aplicando procedimientos de validación, comprobación y análisis de errores.
4. Expresar con claridad y precisión los procesos de resolución y resultados, utilizando el lenguaje matemático simbólico, gráfico y verbal.
5. Utilizar herramientas digitales (calculadora científica, hojas de cálculo, software de geometría dinámica o álgebra) para representar, calcular, explorar y comunicar ideas matemáticas.
6. Interpretar y comunicar información cuantitativa en distintos formatos: diagramas, gráficas, tablas, expresiones simbólicas o narrativas.
7. Aplicar las matemáticas a situaciones reales y de otras áreas del conocimiento, estableciendo conexiones útiles y significativas.
8. Desarrollar una actitud positiva ante el error, considerándolo parte natural del aprendizaje y una oportunidad para mejorar la comprensión.
9. Trabajar de forma cooperativa y autónoma, adoptando roles activos en la resolución de tareas, valorando la participación equitativa y el respeto a diferentes puntos de vista.
10. Valorar el pensamiento matemático como herramienta de interpretación del mundo, comprendiendo su relevancia en contextos científicos, sociales, económicos y tecnológicos.

BLOQUE 2 – Números

1. Operar con números enteros, decimales, fraccionarios y racionales con precisión y sentido del cálculo.
2. Utilizar estrategias de estimación y redondeo para verificar resultados.
3. Aplicar la jerarquía de operaciones en contextos variados.
4. Interpretar y utilizar porcentajes, fracciones y proporciones en situaciones reales.
5. Resolver problemas relacionados con tasas, escalas y repartos proporcionales.
6. Identificar y comparar distintos tipos de números reales, incluidos irracionales.
7. Utilizar la notación científica y las potencias para representar y calcular con números muy grandes o muy pequeños.
8. Interpretar raíces cuadradas y potencias como operaciones inversas.
9. Resolver situaciones financieras básicas: descuentos, intereses simples, inflación.
10. Valorar la coherencia de los resultados numéricos en relación con el contexto del problema.

BLOQUE 3 – Álgebra

1. Traducir enunciados verbales a expresiones algebraicas y viceversa.
2. Operar con expresiones algebraicas utilizando propiedades básicas (distributiva, asociativa, etc.).
3. Resolver ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
4. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante sustitución, igualación o reducción.
5. Utilizar ecuaciones para modelizar y resolver situaciones problemáticas.
6. Analizar y describir sucesiones numéricas, reconociendo patrones.
7. Obtener la expresión general de progresiones aritméticas y geométricas.
8. Resolver problemas relacionados con términos generales y sumas parciales de sucesiones.
9. Utilizar el lenguaje algebraico para justificar propiedades numéricas.
10. Aplicar el álgebra simbólica en contextos geométricos o funcionales.

BLOQUE 4 – Geometría

1. Clasificar figuras planas y cuerpos geométricos según sus propiedades.
2. Calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos regulares.
3. Resolver problemas geométricos aplicando el Teorema de Pitágoras.
4. Utilizar el sistema de coordenadas cartesianas para representar puntos, rectas y figuras.
5. Realizar transformaciones (traslaciones, giros, simetrías, homotecias) y analizar sus efectos.
6. Aplicar la geometría en contextos reales: planos, mapas, construcciones, arte.
7. Usar herramientas digitales para explorar figuras y transformaciones geométricas.
8. Calcular distancias y ángulos en el plano mediante trigonometría básica.
9. Identificar relaciones entre ángulos y lados en triángulos.
10. Valorar la simetría, la proporción y la estructura como aspectos relevantes del razonamiento geométrico.

BLOQUE 5 – Funciones

1. Comprender el concepto de función como relación entre dos magnitudes.
2. Identificar funciones lineales y cuadráticas a partir de su expresión algebraica, tabla o gráfica.
3. Representar funciones en el plano cartesiano usando distintos métodos.
4. Interpretar el crecimiento o decrecimiento de una función a partir de su gráfica.
5. Resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa usando funciones.
6. Aplicar funciones para modelizar fenómenos reales (movimiento, coste, temperatura, etc.).
7. Analizar la pendiente y la ordenada en el origen en funciones lineales.
8. Utilizar herramientas tecnológicas para explorar funciones y simular situaciones.
9. Comparar diferentes tipos de funciones según su representación gráfica.
10. Prever el comportamiento de una función a partir de su forma algebraica.

BLOQUE 6 – Estadística y Probabilidad

1. Recoger y organizar datos a partir de observaciones o encuestas.
2. Representar datos mediante tablas, diagramas de barras, sectores, líneas y gráficos de dispersión.

3. Calcular e interpretar la media, mediana, moda y rango de un conjunto de datos.
4. Analizar la dispersión de datos y su influencia en la interpretación de resultados.
5. Comparar conjuntos de datos utilizando medidas estadísticas.
6. Estimar probabilidades mediante experimentación y simulación.
7. Calcular la probabilidad de sucesos simples en contextos familiares.
8. Diferenciar entre sucesos compatibles e incompatibles, y aplicar la regla de Laplace.
9. Usar diagramas de árbol o tablas para calcular probabilidades compuestas.
10. Aplicar la estadística y la probabilidad en contextos reales: estudios, predicciones, juegos, ciencia.

En la SdA, haré hincapié en los objetivos del Bloque 1 – Contenidos Comunes y del Bloque 2 – Números y Álgebra, especialmente en lo relativo al reconocimiento de patrones, el uso del lenguaje algebraico y la formulación de expresiones generales.

5.3. Relación entre objetivos y competencias clave

La propuesta didáctica desarrollada en este TFM tiene como eje central el estudio de las sucesiones numéricas, empleando como hilo conductor la conexión con los fractales y el uso de materiales manipulativos. Esta elección metodológica no solo responde a criterios pedagógicos innovadores, sino que permite una alineación efectiva con los objetivos de etapa establecidos en el *Real Decreto 217/2022* y el *Decreto 39/2022* de Castilla y León, así como con el desarrollo de las competencias clave que configuran el perfil de salida del alumnado al término de la Educación Secundaria Obligatoria.

Los objetivos generales de etapa como el desarrollo del pensamiento lógico y crítico, la resolución de problemas en contextos diversos, la valoración del conocimiento matemático y científico, o el uso responsable de las tecnologías de la información y la comunicación, se ven directamente implicados en el abordaje del bloque de sucesiones. Asimismo, desde la perspectiva de aula, los objetivos específicos del área de Matemáticas (como identificar y generalizar patrones, utilizar el lenguaje algebraico y representar relaciones funcionales) encuentran una vía de desarrollo concreta a través del trabajo con sucesiones aritméticas, geométricas y fractales.

Esta coherencia se traduce en una relación directa con las competencias clave:

- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (STEM):** es la competencia vertebral del diseño, ya que se ejercita la modelización, el razonamiento inductivo y la formulación del término general de una sucesión o de su forma recurrente.
- **Competencia digital (CD):** se activa mediante el uso de herramientas TIC para visualizar, analizar y representar sucesiones, especialmente cuando se trabaja con fractales y simulaciones dinámicas.

- **Competencia en aprender a aprender (CPSAA):** se promueve al fomentar la reflexión metacognitiva sobre los errores y estrategias utilizadas en la resolución de problemas numéricos, así como mediante la experimentación con materiales manipulativos.
- **Competencia emprendedora (CE):** se potencia en la planificación de tareas abiertas y creativas que implican la toma de decisiones en la resolución de problemas o la construcción de fractales como el triángulo de Sierpinski.
- **Competencia ciudadana y conciencia cultural (CC y CCEC):** se integran desde la perspectiva del valor estético de las matemáticas (presente en los fractales), así como en el reconocimiento de la aportación cultural e histórica de matemáticos relevantes (por ejemplo, Fibonacci o Euclides).
- **Competencia en comunicación lingüística (CCL):** se trabaja a través del lenguaje matemático preciso necesario para describir patrones, justificar conjeturas y comunicar procedimientos y resultados.

Esta vinculación intencionada entre los objetivos y las competencias clave asegura una enseñanza competencial, inclusiva y significativa, que favorece la adquisición de aprendizajes duraderos y transferibles. Al situar las sucesiones como elemento organizador de la unidad didáctica y abordarlas mediante experiencias prácticas y visuales, se ofrece al alumnado un aprendizaje contextualizado y con sentido, acorde con los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) y las orientaciones metodológicas de la LOMLOE.

5.4. Materiales y recursos

Los criterios de selección de los materiales docentes curriculares que adoptan los equipos docentes se ajustan a un conjunto de criterios homogéneos que proporcionan respuesta efectiva a los planteamientos generales de intervención educativa y al modelo propuesto. Entre los recursos didácticos, el centro pone a disposición del profesorado los siguientes:

- Libro de texto “Matemáticas, Gauss. 3 ESO. Editorial SM”.
- Fichas y otros materiales preparados por el profesor.
- Cartulinas, tijeras, compas, escuadra, cartabón...
- Pizarra magnética con rotuladores
- Ordenador con conexión a internet y proyector de aula
- Calculadora científica
- Cuaderno de trabajo y materiales digitales de apoyo.
- Materiales del departamento de matemáticas: Cubos unilink, geoplanos, balanzas, tangram ...
- TIC: GeoGebra, Canva, Prezi...
- Buscar información en la red a través de páginas relacionadas con las matemáticas.
- Utilización del Aula Virtual como herramienta de trabajo habitual.
- Videos de Dimensions, en especial los capítulos 5 y 6 (Dimensions, s.f.).

5.5. Evaluación inicial

En la primera semana de curso se realizará una evaluación inicial que durará una sesión atendiendo a los siguientes criterios según la tabla adjunta.

Tabla 3.- Criterios de la evaluación inicial

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIA ESPECÍFICA	DESCRIPCIÓN BREVE	INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	AGENTE EVALUADOR		
				HETEROEV.	AUTOEV.	COEV.
1.3	Resolución de problemas	Estrategias de resolución (organizar, estimar, elegir métodos)	Prueba escrita	X		
3.1	Sentido numérico	Propiedades, operaciones, proporcionalidad	Prueba escrita	X		
3.2	Sentido numérico	Cálculo con racionales y decimales y precisión	Prueba escrita	X		
3.3	Sentido numérico	Representación de fracciones, decimales y porcentajes	Prueba escrita	X		

5.6. Contenidos

A. SENTIDO NUMÉRICO

1. Conteo

- Estrategias variadas de recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana (diagramas de árbol, técnicas de combinatoria, etc.) llegando solo si es necesario al uso de fórmulas.

2. Cantidad

- Conjuntos numéricos como respuesta a diferentes necesidades: contar, medir, comparar, resolver ecuaciones...
- Números racionales en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana.
- Diferentes formas de representación de números racionales.

3. Sentido de las operaciones

- Potencias de exponente racional. Propiedades.
- Relaciones inversas entre las operaciones: comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas.

- Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con números racionales tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo.

4. Relaciones

- Selección de la representación más adecuada de una misma cantidad en cada situación o problema.
- Conexiones entre las diferentes representaciones del número racional.
- Patrones y regularidades numéricas. Reconocimiento, aplicación y uso de las sucesiones numéricas.

5. Educación Financiera

- Información numérica en contextos financieros sencillos: interpretación.
- Métodos para la toma de decisiones de consumo responsable: relaciones calidad-precio y valor-precio en contextos cotidianos.

B. SENTIDO ESPACIAL

1. Localización y sistemas de representación

- Vectores: coordenadas, operaciones.

2. Movimientos y transformaciones

- Elementos básicos de las transformaciones: vectores, rectas, puntos y ángulos de giro.
- Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas o manipulativas.

3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica

- Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria...).

C. SENTIDO ALGEBRAICO

1. Patrones

- Patrones, pautas y regularidades: observación, predicción, búsqueda de términos que faltan y determinación de la regla de formación en casos sencillos, mediante palabras, gráficas, tablas o reglas simbólicas.
- Fórmulas y términos generales: obtención mediante la observación de pautas y regularidades sencillas y su generalización.

2. Modelo matemático

- Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando, representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico.
- Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.

- Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.

3. Variable

- Variable: comprensión del concepto como incógnita en ecuaciones cuadráticas, como indeterminadas en expresión de patrones o identidades notables y como cantidades variables en fórmulas y funciones cuadráticas.
- Polinomios en una variable, operaciones básicas y factorización.

4. Igualdad y desigualdad

- Relaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.
- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas, especialmente aquellos basados en relaciones cuadráticas. Identidades notables.
- Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana.
- Ecuaciones cuadráticas: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el uso de la tecnología según el grado de dificultad.

5. Relaciones y funciones

- Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan.
- Propiedades de las funciones a través de la representación gráfica (dominio y recorrido, monotonía y extremos, periodicidad, simetrías, puntos de corte, concavidad y convexidad).
- Funciones cuadráticas: traducción de unas formas de representación a otras y estudio de sus propiedades.
- Estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.

6. Pensamiento computacional

- Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas (como abstracción, pensamiento algorítmico y descomposición en partes) a otras situaciones, como pueden ser prácticas con datos, modelización y prácticas de simulación y de resolución de problemas computacionales.
- Estrategias útiles en la interpretación y modificación de algoritmos incluyendo los que se usan para operar con expresiones algebraicas (Ruffini), resolver ecuaciones y representar funciones.
- Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.

D. SENTIDO ESTOCÁSTICO

1. Organización y análisis de datos

- Importancia de la estadística a lo largo de la historia.

- Elaboración de la ficha técnica de un estudio estadístico.
- Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucran una sola variable. Diferencia entre variable y valores individuales.
- Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales.
- Gráficos estadísticos: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones...) y elección del más adecuado.
- Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales.
- Variabilidad: interpretación y cálculo, preferentemente con apoyo tecnológico, de medidas de dispersión en situaciones reales.
- Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión.
- Estudio de la representatividad de las medidas de centralización.

2. Inferencia

- Valoración de la necesidad o no de la elección de una muestra, y de su representatividad.
- Formulación de preguntas adecuadas que permitan conocer las características de interés de una población.
- Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la información procedente de una muestra preferentemente mediante herramientas digitales.
- Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.

E. SENTIDO SOCIOAFECTIVO

1. Creencias, actitudes y emociones

- Esfuerzo y motivación: reconocimiento de su importancia en el aprendizaje de las matemáticas.
- Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación.
- Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.
- Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.

2. Trabajo en equipo y toma de decisiones

- Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.
- Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.

3. Inclusión, respeto y diversidad

- Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.
- La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...) (Junta de Castilla y León, 2022)

5.7. Competencias específicas, criterios de evaluación, contenidos e indicadores de logro.

Este apartado desarrolla la vinculación directa entre las competencias específicas de la materia de Matemáticas y los criterios de evaluación establecidos en el currículo LOMLOE para 3º de ESO. Las competencias permiten concretar los aprendizajes que se espera que el alumnado desarrolle a lo largo del curso, mientras que los criterios de evaluación actúan como referencia objetiva para valorar su progresión y nivel de desempeño.

Cada competencia específica se traduce en uno o varios criterios que determinan los logros esperados, y se acompañan de indicadores de logro que permiten observar, registrar y valorar con mayor precisión el grado de adquisición de dichas competencias en situaciones reales de aprendizaje. Esta estructura refuerza un enfoque competencial, integrador y orientado a la aplicabilidad de las matemáticas en contextos diversos, fomentando la autonomía, la creatividad, el razonamiento crítico y la conexión con la vida cotidiana y otras áreas del saber.

A continuación, se plantean las siguientes Situaciones de Aprendizaje que se incluyen en el Anexo I de manera más desarrollada. La SdA de Sucesiones y Fractales se concretará más en el Capítulo 6.

- Bloque 1. Situación de aprendizaje 1. Cada número, en su conjunto.
- Bloque 1. Situación de aprendizaje 2. La potencia de las matemáticas.
- Bloque 2. Situación de aprendizaje 1. Semejantes, pero no iguales.
- Bloque 2. Situación de aprendizaje 2. Movimientos en el plano: creando belleza.
- Bloque 2. Situación de aprendizaje 3. Dando forma a nuestro entorno.
- **Bloque 3. Situación de aprendizaje 1. Fractales, la belleza matemática de las sucesiones.**
- Bloque 3. Situación de aprendizaje 2. El lenguaje de las matemáticas.
- Bloque 3. Situación de aprendizaje 3. Igualdades que resuelven problemas.
- Bloque 3. Situación de aprendizaje 4. Funciones: modelos para estudiar la realidad.
- Bloque 4. Situación de aprendizaje 1. Estadística: organizando información.

Hemos agrupado el tema de las Sucesiones en el Bloque 3, que está dedicado a temas relacionados como funciones, álgebra o patrones, fomentando una visión más conectada y aplicada de las matemáticas. Esto permite que los estudiantes hayan adquirido previamente una base sólida en operaciones y relaciones numéricas, lo que facilita la comprensión de conceptos más abstractos como las sucesiones y progresiones.

5.8. Contenidos de carácter transversal

La enseñanza de las matemáticas en 3º de ESO no se limita al desarrollo de competencias específicas de la materia, sino que también contribuye a la formación integral del alumnado mediante la incorporación de contenidos de carácter transversal. Estos contenidos permiten abordar valores, actitudes y habilidades clave para el desarrollo personal, social y ciudadano del estudiante.

A lo largo del curso, se integran en las situaciones de aprendizaje aspectos como la competencia digital, la educación emocional, la creatividad, el pensamiento crítico, la igualdad de género, la sostenibilidad o el emprendimiento. Todo ello, a través de actividades contextualizadas que fomentan la reflexión, el trabajo cooperativo, la resolución de problemas reales y la conexión con otras áreas del conocimiento y con la vida cotidiana.

Se detalla a continuación los contenidos transversales a los que se contribuye en cada una de las Situaciones de Aprendizaje.

Tabla 4.- Contenidos transversales de Situaciones de Aprendizaje

	SITUACIONES DE APRENDIZAJE									
CONTENIDOS TRANSVERSALES	B1.S1	B1.S2	B2.S1	B2.S2	B2.S3	B3.S1	B3.S2	B3.S3	B3.S4	B.4S.1
<i>La comprensión lectora</i>	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
<i>La expresión oral y escrita</i>						X	X		X	X
<i>La comunicación audiovisual</i>			X	X		X	X			
<i>La competencia digital</i>	X	X				X		X	X	
<i>El emprendimiento social y empresarial</i>								X	X	
<i>El fomento del espíritu crítico y científico</i>			X		X	X	X		X	
<i>La educación emocional y en valores</i>			X		X					
<i>La igualdad de género</i>					X			X		
<i>La creatividad</i>				X		X	X			
<i>Las TICs, y su uso ético y responsable</i>	X	X	X			X		X		
<i>Educación para la convivencia escolar proactiva.</i>					X		X	X	X	

5.9. Metodología

A lo largo del curso se propone una metodología activa, flexible y participativa, centrada en la elaboración por parte del profesorado de situaciones de aprendizaje que permitan evaluar si el alumnado ha interiorizado los conceptos tratados y es capaz de aplicarlos tanto de forma individual como en grupo. Para lograrlo, la

implicación docente resulta clave, ya que su papel como guía y modelo facilitará el cumplimiento de los objetivos propuestos en cada actividad.

Desde una perspectiva didáctica, se plantean las siguientes líneas de acción:

- Se fomentará una enseñanza en la que el alumnado participe activamente y experimente el aprendizaje de manera significativa.
- La propuesta parte de los saberes previos del alumnado y su nivel competencial, introduciendo nuevos contenidos de forma progresiva dentro de un enfoque constructivista.
- Se respetarán los distintos ritmos de aprendizaje, teniendo en cuenta las necesidades individuales de los estudiantes.
- Se buscará consolidar una base sólida de conocimientos vinculados al currículo.
- Se promoverá la capacidad de observar, analizar, interpretar, investigar, crear, comprender, reflexionar críticamente y resolver problemas, así como la aplicación de estos aprendizajes a situaciones variadas.
- Las tecnologías digitales y los recursos audiovisuales serán herramientas clave tanto para enseñar como para evaluar.
- El objetivo será favorecer aprendizajes con sentido, en conexión con los contenidos de la materia.

En este contexto, el profesorado deberá poner en marcha estrategias que le permitan identificar las ideas previas del alumnado sobre los temas a tratar, de forma que pueda diseñar propuestas que representen un desafío accesible: que no sean ni demasiado simples, ni tan complejas que desmotiven.

Se incentivará la expresión oral y el intercambio de ideas, organizando un entorno de participación libre y respetuosa. Esto se reflejará en dinámicas tanto individuales como grupales, donde los estudiantes puedan compartir perspectivas y generar mensajes utilizando distintos lenguajes y medios.

En cuanto a los métodos de enseñanza, se priorizarán aquellos que promuevan la implicación activa del alumnado, permitiéndoles tomar decisiones sobre el desarrollo de las actividades, su organización e incluso el modo en que se evalúan. El componente comunicativo será esencial para trabajar las competencias específicas y clave en matemáticas. Se valorará especialmente el uso comprensivo de las matemáticas más que su perfección formal, aunque se insistirá en ello, y se generará un ambiente motivador y de confianza.

Para fomentar el aprendizaje se optará por estrategias como el trabajo cooperativo, la interacción y la autoformación. Las técnicas que acompañarán estas estrategias serán variadas, activas, dinámicas y adaptadas tanto al contenido como al contexto del aula. Entre ellas se incluyen: exposiciones orales, diálogos, debates, juegos de rol, resolución de problemas, investigaciones o proyectos.

La organización de los agrupamientos será diversa según las tareas: trabajo individual para fomentar la autonomía; en parejas o grupos reducidos para estimular la cooperación y el respeto; y en gran grupo para compartir ideas y escuchar diferentes puntos de vista.

En lo que respecta a la gestión del tiempo y el uso de los espacios, se adoptará un enfoque flexible que atienda al tipo de actividad, al perfil del alumnado de 3º de ESO y a la estrategia pedagógica elegida. Los espacios físicos y digitales se complementarán para enriquecer el aprendizaje, favoreciendo la interacción, la experimentación y la creatividad matemática. Además, el ritmo del aula se adaptará a las características de cada grupo y a la dinámica de cada situación didáctica.

5.10. Concreción de los proyectos significativos.

Desde el área de Matemáticas se impulsará un proyecto con carácter significativo y cercano a los intereses del alumnado, que conecte con su realidad y estimule su participación activa. Este proyecto se articulará en torno a la resolución colaborativa de problemas, entendida no solo como una estrategia metodológica, sino como una vía para fomentar competencias clave. A través del trabajo en equipo, los estudiantes desarrollarán habilidades fundamentales como la autoestima, la autonomía personal, la capacidad de análisis crítico, la toma de decisiones compartida y la responsabilidad en sus procesos de aprendizaje. Esta propuesta pretende no solo afianzar contenidos matemáticos, sino también promover un aprendizaje integral y contextualizado que fortalezca su implicación y compromiso con la materia.

Tabla 5.- Proyecto significativo

TÍTULO: ¿QUÉ COMEMOS? ESTADÍSTICA DESDE EL SUPERMERCADO.				
Resumen: Este proyecto se enmarca en la situación de aprendizaje “Estadística: organizando información” del bloque 4. El alumnado trabajará en grupos para investigar y analizar datos reales relacionados con los hábitos de consumo alimentario. Recogerán información de etiquetados nutricionales, precios, cantidades o publicidad de productos disponibles en supermercados físicos u online. A partir de esta información, organizarán los datos en tablas, elaborarán gráficos estadísticos y calcularán parámetros como la media, la moda o el rango. Además, se propondrán reflexiones en torno a los hábitos alimentarios saludables, el consumo responsable y la comparación entre productos similares, fomentando así un enfoque crítico y contextualizado del uso de la estadística.				
Temporalización: 3 sesiones en el segundo trimestre				
Fundamentación curricular				
Competencias específicas	Criterios de evaluación	Indicadores de logro	Descriptorios operativos	Objetivos de etapa
CE.1	1.1 – 1.2	Identifica población y muestra. Clasifica variables estadísticas.	CD2, CPSAA5, CE3	b), f), g)

		Organiza datos en tablas y gráficos. Calcula parámetros de tendencia central.		
CE.2	2.2	Aplica la estadística a situaciones de la vida diaria.	CD2, CPSAA4, CC3	b), f), g)
CE.7	7.1	Representa y comunica datos de forma visual.	CD1, CD2, CD5, CE3	b), f), g)
CE.8	8.1 – 8.2	Diferencia entre variables cualitativas y cuantitativas.	CCL1, STEM2, CE3	b), f), g)
CE.9	9.1 – 9.2	Justifica sus conclusiones con argumentos basados en datos.	CPSAA1, CE3	b), f), g)
Contenidos de la materia		Contenidos de carácter transversal		
D.1.1 a D.1.9, D.2.2 a D.2.4		– Educación para el consumo responsable y la sostenibilidad. – Comunicación visual, oral y escrita. – Trabajo cooperativo, pensamiento crítico y toma de decisiones.		

5.11. TIC en la práctica docente.

En la asignatura se trabaja la competencia digital de forma transversal mediante el uso de distintas herramientas tecnológicas con fines educativos. A lo largo del curso se emplearán los siguientes recursos:

- Pizarra digital y ordenador de aula.
- **Google Workspace** para alumnos y profesor:
 - Google Classroom: plataforma que facilita la planificación del alumnado, permitiéndoles conocer las tareas que deben realizar y los plazos de entrega. También proporciona acceso a materiales compartidos por el profesor, como apuntes, vídeos o presentaciones, lo que favorece el estudio y la realización de las actividades. Además, sirve como agenda diaria de trabajo tanto dentro como fuera del aula. En esta asignatura, Classroom se empleará para la entrega digital de determinados trabajos, cuya evaluación también se realizará desde esta plataforma.

- Google Docs, Hojas de cálculo y Presentaciones: herramientas que promueven el trabajo colaborativo en tareas de redacción, análisis de datos o exposiciones.
- Google Drive: servicio de almacenamiento en la nube asociado a la cuenta de cada alumno, donde se guardan los trabajos entregados a través de Classroom, así como documentación o presentaciones subidas por el profesor.
- **FreeCAD o Tinkercad:** software y página gratuitos de diseño asistido por ordenador que se empleará como herramienta para modelar representaciones geométricas y analizar propiedades matemáticas en un entorno técnico y visual, favoreciendo una comprensión aplicada y precisa de los contenidos trabajados en el aula.
- **GeoGebra:** aplicación dinámica de matemáticas que se utilizará como recurso para explorar y visualizar conceptos de la asignatura, facilitando una comprensión más interactiva e intuitiva de los contenidos.

5.12. Concreción de planes, programas y proyectos del centro vinculados con el desarrollo de la materia

A continuación, se detalla cómo se articula la participación de esta materia en los distintos planes, programas y proyectos del centro:

- **Plan de lectura:** se fomentará a lo largo del curso mediante actividades de búsqueda y análisis de información, tal como se indica en los correspondientes indicadores de logro.
- **Plan de atención a la diversidad:** se promoverá la inclusión y participación de todo el alumnado a través de dinámicas de trabajo en grupo y actividades colaborativas planteadas durante el curso.
- **Plan de digitalización:** se incorporarán herramientas digitales para el desarrollo de actividades, especialmente aquellas relacionadas con el diseño y la experimentación matemática. En este sentido, se utilizará GeoGebra como recurso clave para la exploración interactiva de conceptos y la realización de construcciones dinámicas.

5.13. Actividades complementarias y extraescolares

Se consideran actividades complementarias aquellas organizadas por los docentes que emplean recursos o espacios distintos a los habituales en el área, incluso si requieren tiempo extra fuera del horario lectivo. Estas actividades pueden ser evaluadas con fines académicos.

Los enfoques metodológicos más adecuados para esta asignatura son el análisis y los proyectos de construcción, evolucionando desde una enseñanza más dirigida hacia una más abierta. Los objetos o sistemas técnicos que se estudien deben formar parte del entorno tecnológico cotidiano. El análisis debe incluir principalmente aspectos históricos, estructurales, funcionales, técnicos, económicos y medioambientales.

Los objetivos principales de estas actividades incluyen:

- Ampliar la formación obtenida en las clases regulares.
- Fomentar la interacción entre los alumnos y promover habilidades sociales y comunicativas.
- Facilitar la conexión del estudiante con su entorno físico y cultural.
- Impulsar valores y actitudes positivas relacionadas con el respeto mutuo y la conservación del patrimonio natural y cultural.
- Potenciar la participación en actividades vinculadas al entorno natural, social y cultural.
- Despertar el interés por la investigación y el conocimiento.
- Estimular la sensibilidad, la curiosidad y la creatividad.
- Promover un sentido de responsabilidad en las actividades en las que participan.

Ejemplos de actividades complementarias:

- Visitas a museos y entidades culturales.
- Presentaciones o exposiciones realizadas por los alumnos en el centro educativo.
- Celebración del día de las matemáticas, del día de la Paz...
- Comentarios sobre noticias que estén relacionadas con las matemáticas.
- Participación en los concursos matemáticos como puede ser la Olimpiada Matemática.
- Colaboración en actividades organizadas por otros Departamentos que impliquen el uso de las matemáticas.
- Charlas de miembros de la Universidad de Valladolid.

5.14. Evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado

La evaluación del aprendizaje del alumnado en esta etapa debe llevarse a cabo de manera constante, orientada a la mejora y con una visión global.

Constante: para que sea posible ajustar el proceso en función de las necesidades del alumnado, con el objetivo de optimizar sus aprendizajes.

Formativa (Orientada a la mejora): su propósito es ofrecer información útil tanto al docente como a los estudiantes sobre cómo se está desarrollando la enseñanza y el aprendizaje, permitiendo analizarla y tomar decisiones que favorezcan el progreso. Este tipo de evaluación se basa en una retroalimentación efectiva, que no solo corrige errores, sino que también permite entender sus causas, convirtiéndolos en oportunidades para aprender y avanzar.

Integradora (Global): porque permite evaluar, desde todas las asignaturas y ámbitos, el grado de consecución de los objetivos generales de la etapa y el desarrollo de las competencias clave.

Durante el proceso de evaluación formativa, entendida como una actividad constante, hay momentos clave que influyen especialmente en cómo se construye el aprendizaje.

Tabla 6.- Tipos de evaluación y características

MOMENTO	CARACTERÍSTICAS	RELACIÓN CON EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE
<i>EVALUACIÓN INICIAL</i>	– Permite conocer cuál es la situación de partida y actuar desde el principio de manera ajustada a las necesidades, intereses y posibilidades del alumnado. – Se realiza al principio del curso o unidad didáctica, para orientar sobre la programación, metodología a utilizar, organización del aula, actividades recomendadas, etc. – Utiliza distintas técnicas para establecer la situación y dinámica del grupo clase en conjunto y de cada alumno individualmente.	– Afectará más directamente a las primeras fases del proceso: diagnóstico de las condiciones previas y formulación de los objetivos.
<i>FORMATIVA CONTINUA</i>	– Valora el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje a lo largo del mismo. – Orienta las diferentes modificaciones que se deben realizar sobre la marcha en función de la evolución de cada alumno y del grupo, y de las distintas necesidades que vayan apareciendo. – Tiene en cuenta la incidencia de la acción docente.	– Se aplica a lo que constituye el núcleo del proceso de aprendizaje: estrategias didácticas y acciones que hacen posible su desarrollo.
<i>FINAL</i>	– Consiste en la síntesis de la evaluación continua y constata cómo se ha realizado todo el proceso. – Refleja la situación final del proceso. – Permite orientar la introducción de las modificaciones necesarias en el proyecto curricular y la planificación de nuevas secuencias de enseñanza-aprendizaje.	– Se ocupa de los resultados, una vez concluido el proceso, y trata de relacionarlas con las carencias y necesidades que en su momento fueron detectadas en la fase del diagnóstico de las condiciones previas.

Sobre las técnicas, herramientas de evaluación y responsables de evaluar:

Se emplearán distintas técnicas con el fin de garantizar una evaluación completa del alumnado y asegurar una valoración objetiva para todos. Estas técnicas estarán contextualizadas y ajustadas a la realidad del aula, propondrán situaciones de aprendizaje concretas y permitirán adaptaciones para responder a la diversidad del alumnado. Cada técnica vendrá acompañada por instrumentos específicos de evaluación, entre los cuales se encuentran:

- **Instrumentos de observación** (como el cuaderno del profesor): Es un recurso fundamental en el proceso evaluador, donde se registran elementos clave como la asistencia, el desempeño en actividades, la participación, la conducta, los resultados en pruebas y trabajos, entre otros. Para ello, se requiere una observación constante: supervisar los trabajos, anotar intervenciones, y registrar impresiones relevantes. Los aspectos que requieren especial atención incluyen:
 - Observación diaria: Permite valorar el trabajo cotidiano, útil para identificar y fomentar hábitos y comportamientos positivos.
 - Participación en actividades del aula: Momentos como debates o puestas en común son valiosos para evaluar actitudes, siendo la expresión oral un criterio de evaluación permanente.
 - Trabajo, compromiso, interés, organización y colaboración dentro del grupo.
- **Instrumentos de desempeño:**
 - Portafolio digital (por ejemplo, Classroom): Servirá para hacer un seguimiento del trabajo del alumno, desde sus fases iniciales hasta el resultado final.
- **Instrumentos de rendimiento (pruebas):** Estas deben ser variadas para incrementar su fiabilidad. Pueden ser orales o escritas, y se clasifican en:
 - Pruebas de información: Evalúan conocimientos teóricos y la memorización de datos relevantes. Son corregidas por el docente.
 - Pruebas de elaboración: Miden la capacidad para organizar ideas, relacionar conceptos, argumentar y crear un producto significativo relacionado con su entorno.
 - Pruebas de investigación: Aprendizajes en grupo mediante resolución de problemas (ABP), con evaluación entre pares.
 - Trabajos individuales o en grupo sobre un tema específico.

Luego:

- I. Se asignan los instrumentos correspondientes a cada criterio de evaluación.
- II. Se establece el momento del curso en que se aplicará cada instrumento, en función de los criterios que se desea evaluar.
 - La evaluación será continua, aunque se realizará una evaluación inicial al comienzo del curso.
 - La unidad básica de planificación será la situación de aprendizaje.
 - Las técnicas e instrumentos deberán aplicarse de forma regular y sostenida a lo largo de todo el proceso educativo.
- III. Se especifica qué tipo de evaluación será usada según el agente evaluador correspondiente, relacionándolo con los instrumentos y los criterios que se desean valorar.

De acuerdo con lo anterior se presenta le siguiente cuadro:

Tabla 7.- Criterios de evaluación

Criterios de evaluación	Instrumentos de evaluación	Profesorado	Participación alumnado		Situaciones de Aprendizaje									
		Heteroevaluación	Autoeva.	Coeva.	B1.S1	B1.S2	B2.S1	B2.S2	B2.S3	B3.S1	B3.S2	B3.S3	B3.S4	B4.S1
1.1	Prueba escrita; Portfolio	X			X		X							X
1.2	Prueba escrita; Guía de observación	X			X		X		X				X	X
1.3	Prueba escrita; Portfolio	X			X	X	X		X				X	
2.1	Prueba escrita; Portfolio	X			X		X							
2.2	Prueba escrita; Portfolio	X					X		X			X		X
3.1	Prueba escrita; Portfolio	X				X				X				
3.2	Prueba escrita; Portfolio	X				X					X			
3.3	Prueba escrita; Portfolio	X				X					X	X		
4.1	Guía de observación; Portfolio	X			X					X		X		
4.2	Prueba escrita; Portfolio	X								X	X	X		
5.1	Prueba escrita; Portfolio	X				X								
5.2	Prueba escrita; Portfolio	X				X						X		
6.1	Prueba escrita; Portfolio	X					X	X	X	X	X	X	X	
6.2	Guía de observación; Portfolio	X		X		X		X		X	X	X	X	
6.3	Portfolio; Guía de observación		X			X		X	X			X	X	
7.1	Portfolio	X	X					X	X	X	X		X	X
7.2	Portfolio	X	X				X	X	X		X		X	
8.1	Prueba escrita; Guía de observación	X				X		X	X		X		X	X
8.2	Prueba escrita; Guía de observación	X				X		X	X		X		X	X
9.1	Guía de observación	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
9.2	Guía de observación	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10.1	Guía de observación	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10.2	Guía de observación	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

5.15. Criterios de calificación

Los criterios de calificación de cada uno de los criterios de evaluación son proporcionales, es decir, todos los criterios tienen el mismo peso en la calificación.

El curso se estructura en tres evaluaciones, y cada una de ellas se divide en dos fases: una primera, llamada interevaluación, y una segunda evaluación. Cada fase ocupa aproximadamente la mitad del tiempo de la evaluación correspondiente.

Realización de trabajos en el aula: La asignatura de matemáticas se basa en la realización de actividades y resolución de problemas enmarcados en distintas situaciones de aprendizaje, los cuales se desarrollan durante todo el período de evaluación. El trabajo en clase se registra y se incorpora a la calificación final a través de los instrumentos de evaluación establecidos.

Realización de tareas fuera del aula: En cada situación de aprendizaje se asignan tareas para que los estudiantes trabajen de manera autónoma fuera del horario escolar. Estas tareas serán evaluadas al final de cada período.

Pruebas escritas:

- **Pruebas periódicas:** Se realizarán al finalizar cada situación de aprendizaje o cuando el docente lo estime necesario debido a la acumulación de contenidos.

La nota de la interevaluación se obtendrá haciendo la media de las calificaciones de las pruebas periódicas.

Pruebas de evaluación: Al final de cada evaluación, se realizará un examen escrito en la fecha indicada por la dirección del centro.

Para superar una evaluación, el alumno deberá obtener al menos un 5. En caso de no alcanzar esta nota, deberá presentarse a una prueba de recuperación, destinada a permitirle alcanzar las competencias específicas de la asignatura. Se establecerán tres exámenes de recuperación, uno por cada evaluación.

En junio, en una fecha que indicará la dirección del centro, se realizará una **prueba final** obligatoria para los alumnos que no hayan superado alguna evaluación:

- Si solo tienen pendiente una evaluación, el examen abarcará los contenidos de esa evaluación específica. La nota obtenida se promediará con las notas de las otras dos evaluaciones para obtener la calificación final del curso.
- Si se tienen dos o más evaluaciones pendientes, el alumno deberá examinarse de todos los contenidos del curso completo. En este caso, la nota del examen final será la calificación global de la asignatura.

La calificación final de la materia se calculará:

- A partir del promedio de las tres evaluaciones si todas están aprobadas.
- Si alguna evaluación está suspendida, se aplicarán los criterios anteriormente mencionados relacionados con el examen final.

Para los estudiantes que hayan superado la asignatura en el curso regular, la prueba final será opcional y servirá para mejorar sus competencias y su nota final.

LA CALIFICACIÓN DE LA EVALUACIÓN SE OBTIENE:

Tabla 8.- Criterios de evaluación

	PORCENTAJE
<i>Prueba final (Pruebas de evaluación para los alumnos que aprobado durante el curso)</i>	50 %
<i>Pruebas escritas periódicas</i>	25%
<i>Trabajo de clase</i>	15%
<i>Trabajo fuera del aula</i>	10%

Aunque los porcentajes están organizados por tipos de actividades, cada uno de estos instrumentos de evaluación está diseñado para recoger evidencias del grado de adquisición de las **competencias específicas de la materia**, conforme a los criterios de evaluación establecidos en el Decreto 39/2022. Las pruebas, trabajos y actividades se vinculan explícitamente a uno o varios criterios, garantizando una evaluación coherente con el enfoque competencial del currículo LOMLOE.

5.16. Atención a las diferencias del alumnado

La diversidad es un rasgo esencial e inevitable, y marca profundamente el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los alumnos presentan diferencias en aspectos como el ritmo de trabajo, el estilo de aprendizaje, los conocimientos previos y las experiencias personales, lo que obliga a los docentes a educar tanto en y para la diversidad. Esta realidad exige al docente planificar desde el inicio con un enfoque inclusivo. En este sentido,

el DUA proporciona un marco pedagógico que permite dar respuesta a esta diversidad, anticipando barreras y ofreciendo múltiples formas de representación, acción y motivación.

Cuando hablamos de “diferencias individuales del alumnado”, nos referimos a todos los estudiantes, no solo a aquellos con necesidades especiales o discapacidades. Por lo tanto, atender a la diversidad debe formar parte de la planificación educativa desde su inicio, y debe desarrollarse a nivel de centro, de grupo y de alumno individual.

- Las situaciones de aprendizaje introducirán nuevos contenidos usando ejemplos cotidianos, modelos visuales, esquemas, materiales manipulativos y planteamientos de problemas reales, favoreciendo así distintos canales de acceso al conocimiento (principio I del DUA: múltiples formas de representación).
- Se ofrecerán distintas formas de expresión del aprendizaje (trabajos escritos, presentaciones orales, productos digitales, etc.), de modo que cada alumno pueda demostrar lo aprendido de acuerdo con sus fortalezas (principio II del DUA: múltiples formas de acción y expresión).
- Se fomentará el aprendizaje cooperativo mediante dinámicas grupales que permiten compartir conocimientos y trabajar habilidades sociales, promoviendo distintas formas de implicación y colaboración (principio III del DUA: múltiples formas de implicación).
- Los ejercicios se organizarán en distintos niveles de dificultad, garantizando que todo el alumnado pueda desarrollar las competencias básicas desde su punto de partida, permitiendo una progresión personalizada.

Respecto a los alumnos con necesidades específicas de apoyo educativo, se aplicarán:

Planes específicos:

- **De refuerzo:** Para quienes no hayan promocionado, con revisión periódica durante el curso y al final del mismo.
- **De recuperación:** Para los alumnos que pasaron de curso con asignaturas pendientes, también revisados regularmente.
- **De enriquecimiento curricular:** Incluirá contenidos multidisciplinares, aprendizaje basado en proyectos, resolución de problemas complejos, experimentos y cooperación.

Adaptaciones curriculares:

- **De acceso:** Modificaciones en recursos espaciales, materiales, personales o de comunicación para facilitar el aprendizaje, como la reorganización del mobiliario o el uso de tablets para sustituir la escritura manual.
- **No significativas:** Cambios en los elementos no obligatorios del currículo, como más tiempo para tareas, actividades adaptadas, múltiples procedimientos de evaluación o apoyos basados en los conocimientos previos.

- **Significativas:** Si las adaptaciones anteriores no bastan debido a necesidades excepcionales (graves dificultades de expresión, comprensión, o discapacidades físicas o psíquicas), se elaborarán adaptaciones específicas en objetivos, contenidos, metodología, evaluación, materiales, organización y programas de desarrollo individual, siempre tras un informe psicopedagógico del Departamento de Orientación.

Además, se implementarán medidas complementarias alineadas con el DUA para atender mejor a la diversidad:

- Evaluaciones diagnósticas iniciales detalladas para conocer el punto de partida del alumnado.
- Ambientes de aprendizaje seguros, motivadores y flexibles.
- Refuerzo positivo para fortalecer el autoconcepto y fomentar la autonomía.
- Actividades de cohesión grupal para reforzar la dimensión emocional y social del aprendizaje.
- Ritmos flexibles y adaptados, especialmente durante el trabajo cooperativo.
- Apoyos personalizados mediante tutorización o recursos específicos, como apoyos visuales, esquemas de seguimiento o acceso a plataformas adaptativas.

5.17. Actividades de recuperación de los alumnos con materias pendientes de cursos anteriores

A los estudiantes que hayan pasado de curso con la materia pendiente, se les valorará su progreso en la adquisición de competencias a través de la observación continua en clase, teniendo en cuenta tanto su actitud positiva hacia la asignatura como su desempeño en una prueba objetiva sobre los contenidos básicos requeridos.

Para apoyar su mejora, se diseñará un plan de recuperación personalizado, que se implementará y ajustará según sea necesario a lo largo del año académico.

5.18. Secuencia de unidades temporales de programación

Teniendo en cuenta el calendario escolar de la Junta de Castilla y León para el curso 2024/2025, en donde algunas fechas importantes son:

- Inicio de curso 3º de ESO: 12 de septiembre de 2024.
- Vacaciones de Navidad: Desde el 21 de diciembre de 2024 hasta el 7 de enero de 2025.
- Vacaciones de Semana Santa: del 11 al 20 de abril de 2025.
- Final del curso: 23 de junio.



Se configura la siguiente programación:

Tabla 9.- Programación de las Situaciones de Aprendizaje

ORDEN	TÍTULO	SESIONES	SEMANAS APROXIMADAS
PRIMER TRIMESTRE	Bloque 1. Situación de aprendizaje 1	10	Del 12 de septiembre al 4 de octubre
	Bloque 1. Situación de aprendizaje 2	9	Del 7 de octubre al 25 de octubre
	Bloque 2. Situación de aprendizaje 1	11	Del 28 de octubre al 29 de noviembre
SEGUNDO TRIMESTRE	Bloque 2. Situación de aprendizaje 2	9	Del 8 de enero al 24 de enero
	Bloque 2. Situación de aprendizaje 3	9	Del 27 de enero al 13 de febrero
	Bloque 3. Situación de aprendizaje 1	8	Del 14 de febrero al 6 de marzo
TERCER TRIMESTRE	Bloque 3. Situación de aprendizaje 2	8	Del 10 de marzo al 3 de abril
	Bloque 3. Situación de aprendizaje 3	8	Del 21 de abril al 15 de mayo
	Bloque 3. Situación de aprendizaje 4	7	Del 16 de mayo al 5 de junio
	Bloque 4. Situación de aprendizaje 1	7	Del 6 de junio al 20 de junio

Las evaluaciones se realizarán en:

- Evaluación del primer trimestre: semana del 16 al 20 de diciembre de 2024.
- Evaluación del segundo trimestre: semana del 10 al 14 de marzo de 2025.
- Evaluación 3ª: semana del 17 al 23 de junio de 2025.
- Examen final: semana del 24 al 27 de junio de 2025.

El examen final está destinado a aquellos alumnos que no hayan superado alguna de las evaluaciones ordinarias. Según el número de evaluaciones pendientes, se evaluarán únicamente los contenidos correspondientes o bien la totalidad del curso.

5.19. Orientaciones para la evaluación de la programación de aula y de la práctica docente.

La evaluación de la programación será abordada en reuniones del departamento, donde el equipo docente revisará los logros y las dificultades encontradas.

Para la evaluación de la práctica docente pueden resultar útiles los siguientes modelos, el primero para completar por los alumnos y el segundo a modo de autoevaluación.

Tabla 10.- Evaluación práctica docente por parte de los alumnos

FORMULARIO PARA COMPLETAR POR LOS ALUMNOS (DIGITALMENTE)		
CUESTIONES	PUNTUACIÓN DE 1 a 10	OBSERVACIONES
<i>Sobre el temario. Se han abordado todos los contenidos programados</i>		
<i>He podido conocer los criterios de evaluación y calificación.</i>		
<i>Se me ha informado con tiempo sobre los exámenes pendientes (solo para aquellos alumnos que hayan tenido asignaturas pendientes).</i>		
<i>La metodología empleada en el aula me ayuda a comprender los contenidos de esta.</i>		
<i>Los instrumentos de evaluación y calificación han sido variados (exámenes, trabajos, exposiciones, proyectos, etc).</i>		
<i>Los instrumentos de evaluación me han ayudado en la adquisición de los contenidos de la materia.</i>		
<i>Han sido empleadas herramientas digitales a lo largo del curso.</i>		

<i>El libro de texto facilita la mejor comprensión de los contenidos vistos en clase.</i>			
<i>Las actividades realizadas han sido variadas y me han ayudado a la adquisición de los conocimientos de la materia.</i>			
<i>Los materiales facilitados en la materia me han ayudado al estudio.</i>			
CALIFICA LOS CONTENIDOS SEGÚN LA DIFICULTAD QUE TE HAYAN RESULTADO 1(muy fácil); 2(fácil); 3(regular); 4(difícil); 5(muy difícil)			
RAMA	PUNTUACIÓN DE 1 AL 5	RAMA	PUNTUACIÓN DE 1 AL 5
<i>Aritmética</i>		<i>Álgebra</i>	
<i>Geometría</i>		<i>Trigonometría</i>	
<i>Cálculo</i>		<i>Probabilidad y Estadística</i>	

Tabla 11.- Evaluación de la programación del aula

EVALUACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN DE AULA		
INDICADORES DE LOGRO	PUNTUACIÓN DE 1 A 10	OBSERVACIONES
<i>Antes de iniciar una actividad, se ha hecho una introducción sobre el tema para motivar a los alumnos y saber sus conocimientos previos.</i>		
<i>Antes de iniciar una actividad, se ha expuesto y justificado el plan de trabajo (importancia, utilidad, etc.), y han sido informados sobre los criterios de evaluación.</i>		
<i>Los contenidos y actividades se han relacionado con los intereses de los alumnos, y se han construido sobre sus conocimientos previos.</i>		
<i>Se ha ofrecido a los alumnos un mapa conceptual del tema, para que siempre estén orientados en el proceso de aprendizaje.</i>		
<i>Las situaciones de aprendizaje propuestas han sido variadas en su tipología y tipo de agrupamiento, y han favorecido la adquisición de las competencias clave.</i>		
<i>La distribución del tiempo en el aula es adecuada.</i>		

<i>Se han utilizado recursos variados (audiovisuales, informáticos, etc.).</i>		
<i>Se han facilitado estrategias para comprobar que los alumnos entienden y que, en su caso, sepan pedir aclaraciones.</i>		
<i>Se han facilitado a los alumnos estrategias de aprendizaje: lectura comprensiva, cómo buscar información, cómo redactar y organizar un trabajo, etc.</i>		
<i>Las actividades grupales han sido suficientes y significativas.</i>		
EVALUACIÓN DE LA PRÁCTICA DOCENTE		
INDICADORES DE LOGRO	PUNTUACIÓN DE 1 A 10	OBSERVACIONES
<i>Se ha favorecido la elaboración conjunta de normas de funcionamiento en el aula.</i>		
<i>El ambiente de la clase ha sido adecuado y productivo</i>		
<i>Se ha proporcionado al alumno información sobre su progreso.</i>		
<i>Se han proporcionado actividades El ambiente de la clase ha sido adecuado y productivo. Alternativas cuando el objetivo no se ha alcanzado en primera instancia.</i>		
<i>Ha habido coordinación con otros profesores.</i>		
<i>Se ha realizado una evaluación inicial para ajustar la programación a la situación real de aprendizaje.</i>		
<i>Se han utilizado de manera sistemática distintos procedimientos e instrumentos de evaluación, que han permitido evaluar contenidos, procedimientos y actitudes.</i>		
<i>Los alumnos han contado con herramientas de autocorrección, autoevaluación y coevaluación.</i>		
<i>Se han proporcionado actividades y procedimientos para recuperar la materia, a alumnos con alguna evaluación</i>		

<i>suspensa, o con la materia pendiente del curso anterior, o en la evaluación final ordinaria.</i>		
<i>Los criterios de calificación propuestos han sido ajustados y rigurosos.</i>		
<i>Los padres han sido adecuadamente informados sobre el proceso de evaluación: criterios de calificación y promoción, etc.</i>		

5.20. Procedimiento para la evaluación de la programación didáctica

Tabla 12.- Evaluación de la programación didáctica

EVALUACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA		
INDICADORES DE LOGRO	PUNTUACIÓN DE 1 A 10	OBSERVACIONES
<i>La programación ha facilitado la flexibilidad de las clases, para ajustarse a las necesidades e intereses de los alumnos lo más posible.</i>		
<i>La programación se ha realizado en coordinación con el resto del profesorado.</i>		
<i>Se ha conseguido contribuir a las competencias clave.</i>		
¿QUÉ SE EVALÚA? INDICADORES DE LOGRO		
<i>Los indicadores de logro se han formulado en función de los criterios de evaluación.</i>		
<i>La selección y temporalización de unidades, situaciones de aprendizaje y actividades ha sido ajustada.</i>		
<i>Los criterios de evaluación y calificación han sido claros y conocidos de los alumnos, y han permitido hacer un seguimiento del progreso de los alumnos.</i>		
¿CÓMO SE EVALÚA? INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN		
<i>Los instrumentos de evaluación han permitido una evaluación lo más objetiva posible.</i>		
<i>La programación ha facilitado la flexibilidad de las clases, para ajustarse a las necesidades e intereses de los alumnos lo más posible.</i>		

<i>Se han utilizado diversos instrumentos de evaluación en cada trimestre.</i>		
¿CUÁNDO EVALUAR? MOMENTOS EN LOS QUE SE REALIZARÁ LA EVALUACIÓN		
<i>La evaluación inicial ha servido para ajustar la práctica docente.</i>		
<i>Se ha llevado a cabo una evaluación continua a lo largo del curso.</i>		
<i>Ha habido un equilibrio entre la evaluación continua y las pruebas escritas.</i>		
¿QUIÉN EVALUA? PERSONAS QUE LLEVARÁN A CABO LA EVALUACIÓN		
<i>Ha habido un equilibrio entre la heteroevaluación, la coevaluación y la autoevaluación</i>		
<i>Los alumnos han tenido participación en la evaluación (coevaluación)</i>		
<i>Los alumnos han participado en su propia evaluación (Autoevaluación)</i>		

6. DESARROLLO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

El aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria debe orientarse a desarrollar no solo la competencia técnica en los contenidos, sino también la capacidad de observar, razonar, comunicar y aplicar el pensamiento matemático en contextos reales, creativos y significativos. Esta SdA se basa en el estudio de las sucesiones a través de la exploración de fractales, combinando el razonamiento inductivo, el uso de materiales manipulativos y el uso de herramientas digitales. Todo ello bajo una metodología centrada en el **Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP)**, que sitúa al alumno en el centro de su propio proceso formativo. Metodología pedagógica introducida por **William H. Kilpatrick** a principios del siglo XX, quien defendía que los alumnos aprenden mejor cuando se implican en tareas con sentido personal y social, conectadas con la realidad y realizadas de forma activa y colaborativa. Este enfoque propone que el conocimiento se construye a partir de la experiencia y que el aprendizaje cobra mayor valor cuando el estudiante participa en la planificación, ejecución y evaluación de sus propios procesos. En este caso, la construcción de fractales a partir de sucesiones numéricas no solo aporta rigor matemático, sino que también implica motivación, creatividad y sentido.

El **enfoque inductivo** permite a los estudiantes construir el conocimiento a partir de la observación de casos concretos, reconociendo regularidades y formulando conjeturas. Esta forma de razonar, reconocida desde hace décadas por expertos como **George Pólya**, forma parte de los procesos auténticos de resolución de problemas. Enseñar matemáticas debe significar enseñar a pensar, y ello requiere que los estudiantes observen, experimenten, descubran patrones y justifiquen sus afirmaciones. El razonamiento inductivo es, en este sentido, una herramienta esencial para fomentar la autonomía intelectual y la curiosidad matemática. (Pólya, 1945)

En esta propuesta, el uso del razonamiento inductivo se articula de manera natural a través del estudio de fractales, estructuras matemáticas caracterizadas por su auto-semejanza y recurrencia. A partir de la construcción física y digital de fractales como La pirámide de Sierpinski, El conjunto de Cantor, La curva de Koch ... el alumnado observa cómo se desarrollan estas figuras a lo largo de distintas iteraciones. Cada grupo de trabajo identifica el patrón numérico que las genera y formula, con ayuda del profesor, la ley de formación correspondiente ya sea mediante el término general o una relación de recurrencia. Esta actividad no solo permite aplicar conceptos de sucesiones aritméticas y geométricas, sino también ejercitar la argumentación matemática, el análisis visual y la creatividad.

La metodología del ABP responde a un enfoque constructivista y competencial del currículo. Lejos de la enseñanza transmisiva, el ABP propone una experiencia de aprendizaje en la que los estudiantes trabajan en grupo para resolver un reto real o simulado, que en este caso consiste en crear fractales físicos y con su correspondiente análisis matemático. La construcción colaborativa de este producto final no solo exige la aplicación de saberes matemáticos, sino también la planificación, la distribución de roles, la toma de decisiones, la elaboración de presentaciones y la defensa oral de las conclusiones. Todo ello en un entorno cooperativo que refuerza la responsabilidad compartida y el aprendizaje entre iguales.

En este sentido, esta situación de aprendizaje también se inspira en los planteamientos de **Seymour Papert**, pionero en el pensamiento computacional y defensor del uso de tecnologías para la construcción activa del conocimiento. Papert (1980) consideraba que el aprendizaje es más profundo cuando el alumno “construye algo externo a sí mismo”, especialmente si puede compartirlo con otros. En esta propuesta, la construcción de fractales con papel o software, acompañada de su análisis matemático y su presentación pública, permite a los alumnos convertir ideas abstractas en objetos tangibles y comprensibles, favoreciendo la conexión entre pensamiento y acción.

Situada en el tercer bloque de la programación de 3º de ESO, esta actividad aprovecha la base adquirida por el alumnado en bloques anteriores para introducir un contenido más formal, como el de las sucesiones, de una forma intuitiva, visual y aplicada. El momento es idóneo para trabajar patrones y regularidades desde una perspectiva abierta, transversal y motivadora, que anticipe los futuros contenidos de álgebra y funcione como cierre significativo del curso.

Desde la perspectiva competencial, esta SdA favorece el desarrollo de competencias como la formulación de conjeturas y razonamientos (competencia específica 3), la modelización con patrones y algoritmos (competencia 4), la conexión de las matemáticas con el arte, la ciencia y la tecnología (competencia 6), el uso de herramientas digitales (competencia 7) y el trabajo colaborativo (competencia 10). Asimismo, se promueve una actitud positiva ante el error, la perseverancia y la autonomía en el aprendizaje (competencia 9).

En definitiva, esta SdA sobre fractales no es solo una propuesta para trabajar contenidos del currículo, sino una invitación a mirar las matemáticas como una disciplina creativa, exploratoria y útil para interpretar el mundo. En ella, el aula se convierte en un laboratorio de ideas, donde observar, construir, representar y comunicar forman parte del proceso genuino de aprender.

6.1. Título de la Situación de Aprendizaje

La SdA que será objeto de estudio en el presente TFM, y cuya programación vamos a desarrollar a lo largo de este capítulo, llevará el nombre de **FRACTALES, LA BELLEZA MATEMÁTICA DE LAS SUCESIONES**, incluyéndose en la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, correspondiente al nivel de 3º de ESO.

6.2. Contextualización

En esta sección se argumentará, desde distintas perspectivas, la conveniencia de incorporar al temario una SdA dedicada al estudio de las sucesiones.

6.2.1. Contextualización curricular

De acuerdo con el *Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León*, en el curso de 3º de ESO, dentro de la asignatura de Matemáticas, se incluyen contenidos relacionados con el estudio y análisis de sucesiones numéricas, sucesiones recurrentes y progresiones aritméticas y geométricas. Estos contenidos se enmarcan en el Sentido Numérico en el punto 4 Relaciones.

“Patrones y regularidades numéricas. Reconocimiento, aplicación y uso de las sucesiones numéricas”
(Junta de Castilla y León, 2022)

La normativa establece, además, la necesidad de interpretar y utilizar estas estructuras tanto desde un enfoque inductivo como mediante herramientas del pensamiento computacional, lo que refuerza su valor formativo y transversal. Dada su coherencia interna y su extensión moderada, todos estos aprendizajes pueden abordarse de forma integrada en una única Situación de Aprendizaje, que recoja de manera global los conceptos de sucesión y serie, facilitando una comprensión progresiva y contextualizada.

6.2.2. Contextualización social

Las sucesiones también están presentes de forma explícita en algunos entornos formales. Por ejemplo, es habitual encontrarlas en **pruebas psicotécnicas de oposiciones**, como las que se realizan para acceder a cuerpos como la Policía Nacional o la Guardia Civil, donde se plantean secuencias numéricas, visuales o de figuras geométricas, que los aspirantes deben completar identificando el patrón de crecimiento o transformación.

¿Qué figura continúa?

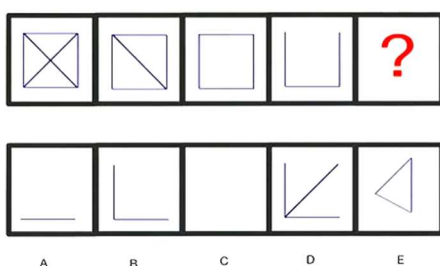


Ilustración 12.- ejemplo de sucesiones en pruebas psicotécnicas de oposición

En otro ámbito muy concreto, el financiero, los conceptos de sucesión y serie son esenciales para realizar cálculos de intereses, préstamos o amortizaciones. Las series aritméticas se utilizan en la estimación de pagos periódicos con intereses simples, mientras que las series geométricas permiten modelar fenómenos como el crecimiento de una inversión con interés compuesto. Si bien hoy en día muchas de estas operaciones se realizan con hojas de cálculo u otras aplicaciones digitales que ocultan la lógica matemática subyacente, el conocimiento de estas estructuras sigue siendo fundamental para interpretar resultados y tomar decisiones informadas.

6.2.3. Contextualización epistemológica

Aunque el estudio de las sucesiones no ocupa un lugar central en el resto del recorrido educativo obligatorio en comparación con otros temas matemáticos, el análisis de las series sí adquiere gran relevancia en diversas áreas de la ingeniería. Un ejemplo destacado son las series de Fourier, que permiten representar funciones arbitrarias mediante funciones periódicas construidas como sumas de sinusoides. Estas series tienen aplicaciones clave en ingeniería eléctrica, análisis de vibraciones y procesamiento de señales. Además, fuera del ámbito de la ingeniería, también se utilizan en disciplinas como la econometría.

Un buen dominio de las sucesiones y series, especialmente del término general, puede servir como una introducción muy útil para las unidades didácticas que se desarrollarán posteriormente, siempre según nuestro enfoque. De acuerdo con el currículo vigente, estas unidades siguientes se centran en el estudio de funciones reales de variable real.

6.2.4. Contextualización con otras materias

La zoología fue uno de los primeros ámbitos en los que se identificó la aparición de la sucesión como la de Fibonacci en fenómenos naturales. Esta sucesión tuvo su origen como solución a un problema relacionado con la reproducción de conejos, como se vio en el punto de la historia de las sucesiones.

En el ámbito de la botánica, la sucesión de Fibonacci también se manifiesta en numerosos elementos. Un ejemplo claro es la disposición de las semillas en los girasoles, donde cada nueva semilla que surge desplaza a las anteriores, generando un patrón en forma de espiral que responde a dicha sucesión.

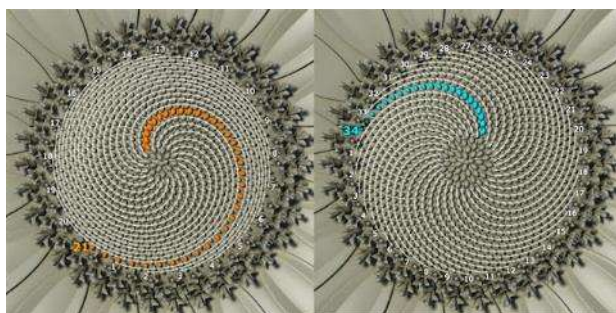


Ilustración 13.- Espirales dextrógiras y levógiras de un girasol

Si contamos las espirales de las pipas de un girasol en sentido de derechas (color naranja), vemos que son 21 y si las contamos en sentido contrario (color azul) vemos que tiene 34 espirales. El 21 y el 34 son dos números consecutivos en la Sucesión de Fibonacci = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, **21**, **34**, 55, 89, 144, 233, 377, ... de donde se extrae la fórmula:

$$\varphi = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 1,618033...$$

A este número casi mágico, el número de oro está sujeto el comportamiento de muchísimas cosas de la naturaleza. Lo podemos encontrar en el reino vegetal y en el animal (por ejemplo, en las conchas de los caracoles de mar (nautilus) y en las telarañas de las arañas), en los huracanes, en las galaxias.

La presencia de los fractales va mucho más allá del ámbito de la naturaleza, penetrando en el arte y la cultura con expresiones sumamente creativas e inspiradoras. Obras como *La Gioconda* y *El Hombre de Vitruvio*, ambas de Leonardo da Vinci, reflejan el profundo interés del Renacimiento por la armonía matemática en la representación del cuerpo humano y el mundo natural. En estas piezas, se percibe la influencia de proporciones matemáticas como la **proporción áurea**, estrechamente vinculada a la **sucesión de Fibonacci**, utilizada para lograr una composición equilibrada y visualmente atractiva. Esta búsqueda de orden y belleza a través de patrones numéricos encuentra un eco moderno en los **fractales**, estructuras geométricas que repiten su forma a distintas escalas y que, al igual que las sucesiones, revelan una organización interna compleja en lo que a primera vista parece caótico. Así, tanto en el arte clásico como en las representaciones digitales actuales, las matemáticas actúan como un puente entre ciencia, estética y naturaleza.

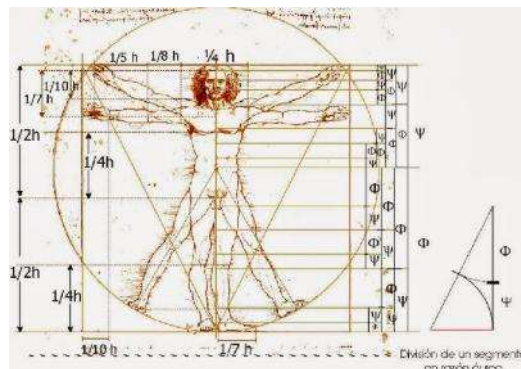
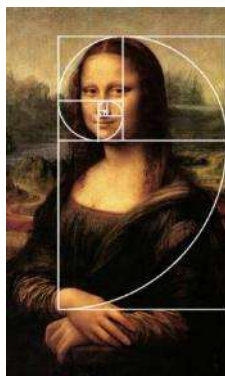


Ilustración 15.- Gioconda

Ilustración 14.- El hombre de Vitruvio



Ilustración 16.- - Exposición Art, Science and Infinite Worlds en el Nxt museum (Amsterdam)

Otro claro ejemplo se encuentra en la escultura y el arte digital, donde diversos artistas han explorado la creación de estructuras tridimensionales inspiradas en la geometría fractal. Estas obras pueden adoptar la forma de esculturas con diseños complejos o de piezas que remiten visualmente a elementos de la naturaleza. Un artista digital famoso por su trabajo con fractales es **Julius Horsthuis**. Es conocido por crear impresionantes animaciones fractales en 3D que combinan arte, matemática y música de manera visualmente hipnótica.

6.3. Objetivos concretos de la Situación de Aprendizaje.

La unidad didáctica sobre sucesiones establece una serie de objetivos específicos que, en principio, los estudiantes deberían alcanzar al finalizarla. Estos objetivos incluyen:

1. Reconocer el patrón de una sucesión concreta y emplearlo para anticipar sus términos siguientes.
2. Comprender y reconocer los elementos fundamentales de una progresión aritmética, como su diferencia, su término general y su fórmula recurrente.
3. Aplicar progresiones aritméticas para resolver problemas, comprobando que los resultados se ajustan al enunciado.
4. Entender el significado de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética y aplicarlo en la resolución de diversas situaciones
5. Comprender e identificar los elementos esenciales de una progresión geométrica, como la razón, el término general o la regla de recurrencia.
6. Resolver problemas que involucren progresiones geométricas, verificando la adecuación de la respuesta al enunciado.
7. Comprender el significado de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica y aplicarlo en la resolución de ejercicios.
8. Comprender qué implica la suma infinita de los términos de una progresión geométrica.

6.4. Competencias específicas, criterios de evaluación, contenidos e indicadores de logro.

Esta SdA se articula en torno a una serie de competencias específicas que guían el desarrollo de habilidades matemáticas clave a través del estudio de patrones, sucesiones y progresiones. Esta propuesta didáctica no solo promueve el razonamiento lógico y la formulación de conjeturas, sino que también integra la utilización de materiales manipulativos, la aplicación de las matemáticas a contextos reales, la representación digital de ideas, y el desarrollo personal y social del alumnado. A través de criterios de evaluación concretos, contenidos estructurados y claros indicadores de logro, esta unidad busca fomentar un aprendizaje significativo.

BLOQUE 3. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 1. FRACTALES, LA BELLEZA MATEMÁTICA DE LAS SUCESIONES.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3.	3.1. Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.	A.4.1	Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
		C.1.1	Calcula términos de una sucesión dado el término general.
		C.2.1	Halla el término general o la ley de recurrencia de una sucesión.
		C.2.2	Halla el término general de una progresión aritmética o geométrica y lo utiliza para realizar cálculos.
		C.2.3	Halla la suma de términos de una progresión aritmética o geométrica.
Competencia específica 4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.	4.1. Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional. 4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos.	A.4.3	Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
		C.1.1	Calcula términos de una sucesión dado el término general.
		C.6.1	Halla el término general y la ley de recurrencia de una sucesión y los aplica para calcular términos.
		C.6.3	Halla el término general de una progresión aritmética o geométrica y lo utiliza para realizar cálculos.
			Halla la suma de términos de una progresión aritmética o geométrica.
Competencia específica 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.	6.1. Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemática y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. 6.2. Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados.	A.4.3	Trabaja con aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
		C.1.1	
		C.2.1	
		C.2.3	
			Relaciona contenidos de este tema con otras áreas del saber.
Competencia específica 7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos	7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas, las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información.	A.4.3	Comprueba la validez de un resultado usando la calculadora.
		C.2.1	Utiliza herramientas TIC para el aprendizaje de los contenidos.

matemáticos. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.		C.2.2	Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	A.4.3 C.1.1 E.1.1 E.1.2 E.1.3 E.1.4	Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación.
			Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas.
			Pone a prueba sus aprendizajes.
			Se concientiza a sí mismo y a los demás sobre la importancia de conservar a las abejas.
Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	A.4.3 C.1.1 E.2.1 E.2.2 E.3.1	Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo.
			Mantiene el nivel de ruido
			Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.

6.5. Metodología

En consonancia con las prácticas pedagógicas actuales, esta SdA no se apoya en una única metodología, sino que se nutre de un enfoque didáctico ecléctico y flexible, que combina diversas estrategias con el objetivo de evitar la rutina en el aula y de favorecer distintos estilos de aprendizaje. Se busca así ofrecer al alumnado experiencias variadas que les permitan implicarse activamente en su proceso formativo y desarrollar tanto competencias matemáticas como habilidades sociales y comunicativas.

Un componente esencial de esta propuesta será el uso del **Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP)**, mediante el cual se plantea un reto para toda la clase. Este proyecto integrará tanto representaciones gráficas como la construcción física de fractales utilizando materiales manipulativos (papel, cartulina, tijeras, etc.), fomentando así el pensamiento espacial y la visualización matemática. La actividad culminará con una exposición de los trabajos en la que cada grupo presentará su creación y explicará el razonamiento seguido.

Uno de los pilares metodológicos de esta unidad será el desarrollo del **razonamiento inductivo**. A través de la observación de ejemplos concretos, el alumnado identificará patrones y regularidades en sucesiones y estructuras fractales, formulando hipótesis y generalizaciones. Esta forma de razonar fomenta una actitud investigadora y constructiva, en la que el conocimiento se construye a partir de la experiencia y se valida mediante la argumentación lógica y la discusión en grupo.

Además, se incorporarán dinámicas de **aprendizaje dialógico**, donde el trabajo autónomo se alternará con el trabajo en parejas o pequeños grupos, promoviendo la construcción conjunta del conocimiento. En estas actividades, el alumnado descubrirá y debatirá conceptos como el término general, la ley de recurrencia o la naturaleza de las progresiones aritméticas y geométricas, desarrollando habilidades de comunicación, escucha activa y argumentación.

Así mismo, se empleará la **modelización matemática** a través de actividades de **indagación guiada (IBL)**. En ellas, los estudiantes recibirán una situación problema en forma de pregunta abierta y trabajarán en grupo para plantear hipótesis, explorar soluciones y llegar a conclusiones propias. El docente acompañará el proceso como mediador, dinamizando los intercambios entre grupos y favoreciendo la institucionalización de los aprendizajes obtenidos.

Se utilizará de forma puntual, una metodología de **clase magistral**, propia de la tradición escolar, que consistirá en breves explicaciones por parte del docente en las que se introduzcan o refuercen conceptos clave, como el significado general de sucesión, la suma de términos o la clasificación de progresiones. Este tipo de exposición se dinamizará mediante la participación del alumnado, preguntas interactivas y el uso de recursos visuales para evitar que se convierta en un proceso pasivo o repetitivo. No obstante, se limitará su aplicación al mínimo necesario, complementándola con metodologías activas más significativas.

Posteriormente, se desarrollarán ejercicios y problemas prácticos que permitirán reforzar lo aprendido. En este caso, se seguirá una **metodología activa**, en la que los estudiantes trabajarán tanto de forma individual como en parejas, fomentando el aprendizaje cooperativo. Las parejas se organizarán con criterios de heterogeneidad, favoreciendo así el apoyo entre iguales. Este enfoque promueve la reflexión personal y el diálogo matemático, al tiempo que facilita la detección de errores y la consolidación de conceptos.

En conjunto, esta unidad combina metodologías activas, inductivas y cooperativas que promueven un aprendizaje profundo, significativo y motivador. El uso de proyectos, materiales manipulativos y el fomento del razonamiento inductivo permite que el alumnado se convierta en protagonista de su aprendizaje, desarrollando no solo competencias matemáticas, sino también personales y sociales.

6.6. Actividades

En esta SdA se realizará un trabajo en grupo consiste en la realización de un fractal y posteriormente su exposición al resto de la clase. El objetivo es desarrollar las competencias sociales, creativas mediante el trabajo colaborativo.

Se presentan en el Anexo IV, los ejercicios y problemas propuestos que se desarrollaran en esta Situación de Aprendizaje. Estas actividades han sido diseñadas atendiendo a diferentes niveles, y se clasifican según los siguientes criterios:

- **Nivel de mecanización:** actividades centradas en el cálculo, identificación o formulación de patrones con bajo nivel de contextualización.
- **Aplicación significativa del contenido:** actividades que requieren aplicar conceptos en situaciones no triviales, con mayor exigencia cognitiva.
- **Relación con otras áreas:** tareas que conectan las matemáticas con otras disciplinas como física, economía, biología, arte o geometría.
- **Trabajo de campo / Modelización / Contexto real:** situaciones contextualizadas que pueden extenderse al entorno real o implicar estimaciones, búsquedas o conexiones interdisciplinarias.

Por último, en la SdA los alumnos de manera individual realizarán un mini-proyecto con CAD en la que presentarán una sucesión y fractal incluyéndose en el Anexo V el enunciado. Se pretende favorecer la creatividad y el gusto por el arte matemático ayudado por las nuevas tecnologías.

6.7. Recursos

Para llevar a cabo de forma adecuada la Situación de Aprendizaje y todas las actividades asociadas, será preciso disponer de una variedad de recursos de distinta naturaleza. A continuación, se detallan dichos recursos en la tabla siguiente.

Tabla 13.- Recursos del aula

TIPO DE RECURSO	RECURSOS
<i>Propios</i>	• Libro de texto. • Pizarra.
<i>Impreso</i>	• Fichas de enunciados para actividades de aprendizaje dialógico y de modelización. • Apuntes de los estudiantes.
<i>Informático</i>	• Ordenadores con conexión a internet. • Procesador de texto.
<i>Tecnológico</i>	• Calculadora científica. • FreeCAD • GeoGebra
<i>Físico</i>	• Aula. • Aula con ordenadores (de no disponer de ordenadores portátiles).
<i>Humano</i>	• Profesor de matemáticas. • Departamento de orientación. • Familias de los alumnos.
<i>Manipulativos</i>	• Hojas de papel. • Cartulinas. • Palillos, bastones, palos de helados • Rotuladores.

6.8. Atención a la diversidad

Es imprescindible garantizar que todo el alumnado logre, como mínimo, los objetivos esenciales planteados en esta unidad didáctica, independientemente de sus circunstancias individuales. Para lograrlo, es fundamental establecer **medidas de atención a la diversidad** que permitan adaptar el proceso de enseñanza-aprendizaje a las necesidades específicas de cada estudiante. El primer paso en este proceso consiste en conocer el punto de partida de cada alumno, lo cual se puede conseguir mediante la evaluación diagnóstica inicial y con base en las observaciones acumuladas a lo largo del curso.

Un grupo significativo de estudiantes que puede beneficiarse de estas medidas está formado por quienes requieren un refuerzo en los contenidos trabajados o, en el extremo opuesto, aquellos que necesitan ampliación para mantener su motivación y nivel de implicación. En ambos casos, se **adecuarán las actividades** y los problemas propuestos a las capacidades concretas del alumnado, procurando que quienes necesitan apoyo logren alcanzar un nivel competencial equivalente al de sus compañeros, y que los alumnos con altas capacidades encuentren desafíos que les mantengan comprometidos sin desligarse del grupo-clase. También se contemplarán situaciones específicas, como la de alumnos repetidores o aquellos que no superaron la

materia en cursos anteriores, facilitándoles recursos complementarios o materiales alternativos, ya sea por parte del docente o del departamento correspondiente.

Desde la perspectiva del **Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)**, se reconoce que la diversidad no es una excepción, sino la norma en cualquier aula. Esta diversidad incluye no solo diferencias en capacidades, sino también en los modos en los que cada estudiante accede a la información, se expresa o se motiva. Tal como señala el enfoque DUA, “las barreras para el aprendizaje no son, de hecho, inherentes a las capacidades de los estudiantes, sino que surgen de su interacción con métodos y materiales inflexibles” (Pastor et al., 2014). Por tanto, la planificación de esta unidad incorpora un enfoque flexible, que contempla diferentes vías de representación, expresión e implicación, asegurando que cada estudiante encuentre formas accesibles de participar y aprender.

Entre las medidas más eficaces, y ya anticipadas en el apartado metodológico, se encuentra el **trabajo cooperativo**. Agrupar al alumnado de forma heterogénea (asociando a estudiantes que manejan bien los contenidos con aquellos que presentan dificultades) puede favorecer procesos de enseñanza entre iguales, promover el apoyo mutuo y fortalecer tanto las competencias sociales como las académicas. Este enfoque no solo respeta los principios de equidad educativa, sino que permite dar respuesta real a la variedad de ritmos y estilos de aprendizaje presentes en el aula, fomentando un entorno más inclusivo, participativo y significativo para todos. En el punto 6.2 de este TFM se detallarán las medidas concretas para la atención a la diversidad.

6.9. Integración en los planes y proyectos del centro

Esta Situación de Aprendizaje se alinea y contribuye al desarrollo de varios planes y proyectos institucionales que forman parte del Proyecto Educativo del centro:

Plan de lectura:

Se fomenta la comprensión lectora y la extracción de información relevante a partir de distintos textos (enunciados matemáticos, textos explicativos y recursos visuales). Además, se incluirán actividades específicas de lectura comprensiva relacionadas con el contexto de los fractales, las sucesiones y su aparición en la naturaleza, el arte o la arquitectura.

Plan de atención a la diversidad:

La actividad está diseñada para permitir diferentes niveles de profundización, adaptando los contenidos y las tareas según las necesidades del alumnado. Se aplican principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), ofreciendo múltiples formas de acceso al contenido (explicaciones, representaciones visuales, manipulativos), así como diversas opciones para que los estudiantes expresen su comprensión (trabajos escritos, gráficos o presentaciones orales). También se contempla la creación de grupos heterogéneos para fomentar la enseñanza entre iguales.

Plan de digitalización:

La presente unidad incorpora herramientas digitales como medio de exploración y representación matemática. En particular, se contempla el uso de **FreeCAD** para el diseño y dibujo de estructuras fractales, permitiendo al alumnado familiarizarse con programas de diseño asistido por ordenador (CAD), desarrollar su competencia digital y aplicar conceptos geométricos y algebraicos en entornos tecnológicos reales. Esta actividad refuerza el vínculo entre las matemáticas y su aplicación profesional en campos como la ingeniería, la arquitectura o el diseño gráfico.

Proyecto de innovación o metodologías activas:

La SdA está basada en la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), en la que el alumnado desarrolla un trabajo colectivo centrado en la construcción, representación y análisis de fractales, aplicando conceptos matemáticos mediante el uso de materiales manipulativos y el razonamiento inductivo.

Proyecto de convivencia o coeducación:

El trabajo cooperativo y por equipos favorece un clima de aula inclusivo, donde se refuerzan habilidades sociales, la corresponsabilidad y el respeto a las diferencias. Se promueve así una convivencia positiva en el marco de la educación en valores.

6.10. Temporalización

De acuerdo con el apartado 5.16 de este TFM, se van a emplear 8 sesiones (de unos 50 minutos cada una) para impartir esta SdA y sus contenidos correspondientes al tema del libro de texto.

No obstante, es importante tener en cuenta que esta planificación temporal es orientativa, ya que el ritmo real del aprendizaje debe adaptarse al propio alumnado, en función de sus necesidades y del tiempo que requiera cada actividad para desarrollarse adecuadamente.

Tabla 14.- Temporalización de las sesiones

SESIONES	CONTENIDO DE LA SESIÓN
<i>PRIMERA</i>	• Corrección de deberes o dudas del tema anterior (10 min). • Presentación general del tema (10 min). • Videos sobre fractales y sucesiones (15 min). • Explicación del trabajo: Investigación por grupo sobre fractales. Se crearán los grupos de trabajo (15 min).
<i>SEGUNDA</i>	• Sucesiones: Definición, términos de una sucesión, subíndice y termino general. Vinculación de las sucesiones con los fractales. Será una actividad de aprendizaje dialógico (30 min). • Operaciones con sucesiones (20 min).
<i>TERCERA</i>	• Progresiones aritméticas: Se presentarán varias progresiones que los grupos tendrán que averiguar cuál es la ley de recurrencia, término general, etc. Será una actividad de aprendizaje dialógico (35 min). • Realización de ejercicios (15 min).

<i>CUARTA</i>	• Repaso de la sesión anterior y corrección de ejercicios (10 min). • Teoría de suma de los n términos de una progresión aritmética (20 min). • Realización de ejercicios de Suma de n términos (20 min)
<i>QUINTA</i>	• Progresiones geométricas: Se presentarán varias progresiones que los grupos tendréis que averiguar cuál es la ley de recurrencia, término general, etc. Será una actividad de aprendizaje dialógico (35 min) • Realización de ejercicios (15 min)
<i>SEXTA</i>	• Repaso de la sesión anterior (10 min). • Teoría de suma de los n términos de una progresión geométrica. Operaciones con progresiones. (20 min). • Realización de ejercicios de Suma de n términos (20 min).
<i>SEPTIMA</i>	• Síntesis del tema (10 min). • Realización de fractales con software CAD (40 min).
<i>OCTAVA</i>	• Presentación de los trabajos por los diferentes grupos sobre fractales (50 min).

El examen de los contenidos de esta SdA aprendizaje se realizará de manera conjunta con el del resto de la evaluación.

A continuación, se detalla el desarrollo de cada una de las sesiones incluidas en la tabla anterior. Cabe señalar que, si el número de ejercicios asignados en una sesión resulta excesivo, podrá ajustarse, dejando algunas como opcionales para que el alumnado las utilice como práctica adicional de cara a la sesión de evaluación.

SESION 1: PRESENTACIÓN GENERAL DEL TEMA Y DEL TRABAJO

DESARROLLO DE LA SESIÓN:

- La sesión dará comienzo con un breve repaso y dudas del tema anterior que corresponde con Teorema de Pitágoras y cuerpos geométricos, con el objetivo de afianzar y activar conocimientos previos para esta unidad (10 min).
- Al ser la sesión inicial del tema, en primer lugar, se escribirá en la pizarra el **índice de los contenidos** que se va a abordar en esta unidad. Dichos contenidos se estructuran en tres grandes bloques:
 - a) Sucesiones y operaciones con sucesiones. Relación entre fractales y sucesiones.
 - b) Progresiones aritméticas y suma de sus n términos.
 - c) Progresiones geométricas y suma de sus n términos.

Seguidamente, se realizará una breve activación del **conocimiento previo y motivación inicial**, formulando al alumnado preguntas abiertas como: *¿Qué sabéis sobre las sucesiones? o ¿Dónde aparecen*

los fractales en la vida cotidiana o en la naturaleza? Estas cuestiones permitirán detectar representaciones iniciales e intereses, al tiempo que introducen la noción de fractal como objeto matemático con aplicaciones reales y estéticas (10 min).

- Después de este pequeño debate, como recurso de apoyo visual y para fomentar el interés del alumnado hacia los contenidos de la SdA, se procederá a la **proyección de una selección de vídeos divulgativos** sobre fractales y sucesiones. Estos materiales audiovisuales servirán de base para establecer un primer contacto conceptual con el contenido central de la SdA. A título orientativo, se proponen los siguientes enlaces:

Secuencia Fibonacci y Proporción Áurea. La Geometría Sagrada de la Creación

<https://www.youtube.com/watch?v=6vT1YMd9gLw>

¿Qué son los fractales? De Derivando

https://www.youtube.com/watch?v=Wea_1L-C9Xo

El mito de Carl F. Gauss y la suma de la sucesión aritmética

<https://www.youtube.com/watch?v=LpNHKkFSQII>

Capítulos 5 y 6 de Dimensions

https://www.dimensions-math.org/Dim_E.htm

Se puede invitar a los alumnos a realizar un juego para crear motivación entre los alumnos como puede ser expresar en forma de sucesiones el año en el que se empieza el curso. En nuestro caso el 2025, que se podría expresar de las siguientes maneras:

$$2025 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$$

$$2025 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2$$

$$2025 = 403 + 404 + 405 + 406 + 407$$

$$2025 = T(44) + T(45) \text{ números triangulares} \quad (15 \text{ min})$$

- Para finalizar la clase se expondrá el **proyecto colaborativo** que tiene que realizar los alumnos sobre los fractales. El alumnado trabajará en grupos cooperativos de tres personas, constituidos de manera heterogénea por el docente. Esta agrupación buscará equilibrar perfiles de alumnado con distinto nivel de competencia, lo que permitirá una dinámica de aprendizaje entre iguales. Dado que esta unidad se sitúa en el segundo trimestre, el docente podrá conformar los grupos con conocimiento suficiente del progreso del alumnado. Los alumnos tendrán que realizar un trabajo y análisis de fractales de una lista que se propone (Conjunto de cantor, Alfombra de Sierpinski, Pirámide de Sierpinski, Curva del Dragón, etc) Se da la posibilidad de que ellos también inventen un fractal y se lo expongan a los compañeros. En el anexo II se adjunta el enunciado del proyecto. El trabajo será una presentación en Power Point y realización del fractal manipulativamente. La evaluación será realizada por los alumnos (coevaluación) y también por el profesor (heteroevaluación) mediante la creación de una rúbrica que se incluye en el anexo III. Los últimos minutos de la clase se destinarán a la formación inicial de los equipos y a la distribución provisional de los fractales

asignados, ofreciendo la posibilidad de realizar modificaciones consensuadas en la siguiente sesión (15 min).

CONTENIDOS

- A.4.3** Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación.
- C.2.2** Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
- C.2.3** Relaciona contenidos de este tema con otras áreas del saber.
- E.3.1** Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.
- E.2.1** Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- 6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas.
- 10.2** Participar en el reparto de tareas en equipos heterogéneos, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose.
- 9.2** Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada ante nuevas situaciones de aprendizaje.

INDICADORES DE LOGRO

Participa de forma inicial en la reflexión sobre patrones y fractales.

Relaciona los fractales con contextos reales (naturaleza, arte, ciencia).

Se integra en el grupo de trabajo asumiendo el rol asignado.

Muestra interés por el proyecto y mantiene actitud positiva ante la nueva unidad.

METODOLOGÍAS

Activación de conocimientos previos; Metodología inductiva y constructivista; Aprendizaje basado en proyectos (ABP); Aprendizaje cooperativo; Uso de recursos audiovisuales; Evaluación formativa y compartida

SESION 2: SUCESIONES: DEFINICIONES Y OPERACIONES

DESARROLLO DE LA SESIÓN:

- Se preguntará a los alumnos si ha quedado claro lo que se ha dado en la sesión anterior y el trabajo que hay que realizar. La sesión se centrará en una serie de actividades de aprendizaje dialógico cuyo propósito principal será que el alumnado comprenda y consolide el concepto de sucesión, además de introducirse en nociones como término de una sucesión, subíndice o término general. Durante estas dinámicas iniciales, la intervención del docente será mínima, limitándose a guiar la organización de la clase y a ofrecer una breve explicación sobre sucesiones en un momento determinado.

Como ejemplo para introducir en el concepto de sucesiones se puede realizar una primera actividad con tapones de botellas pintados de diferentes colores.

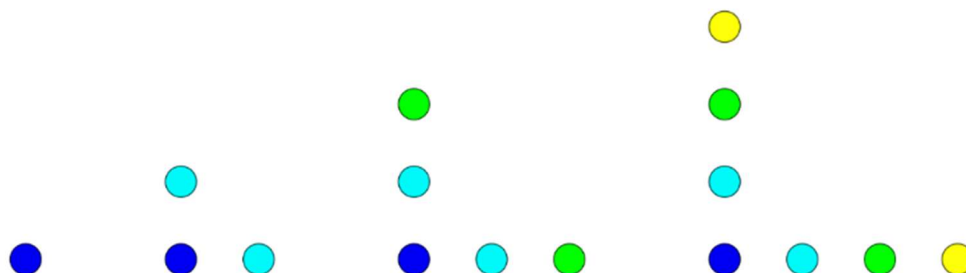


Ilustración 17:- Ejercicio inicial de sucesiones

Para fomentar el aprendizaje en la modelización matemática a través de la indagación guiada, se pueden realizar las siguientes cuestiones abiertas para que contesten los alumnos:

- *Vemos que tenemos una secuencia ¿Podemos ir numerando cada una de las escenas de la secuencia con números naturales?*
- *¿Cuántos tapones tenemos en cada una de las escenas?*
- *¿Se puede relacionar matemáticamente el número de tapones en cada escena con el número de escena que es?*

Se puede ir introduciendo **Definiciones** como:

Una **sucesión de números reales** es un conjunto de números dados en cierto orden.

Cada una de las escenas que hemos visto la podemos llamar **Término de una sucesión**, y se designan con una letra minúscula y un número como subíndice de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 \end{array}$$

Al término a_n , se le llama **término general** o término n -ésimo, que nos permite calcular cualquier elemento de la sucesión en función de su posición:

- *¿Me podríais indicar como se escribiría el término general en esta sucesión?*

Una vez planteada esta primera actividad los alumnos pueden crear por parejas, para fomentar el aprendizaje entre iguales y que los alumnos más aventajados guíen al resto, sucesiones similares con tapones de botellas pintados, de manera que se active la creatividad y vayan identificando en cada una de ellas los términos, subíndices y termino general. A modo de ejemplo se plantean las siguientes sucesiones:

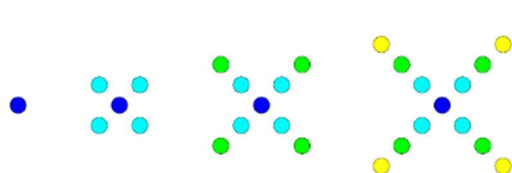


Ilustración 19:- Ejemplo sucesión 2

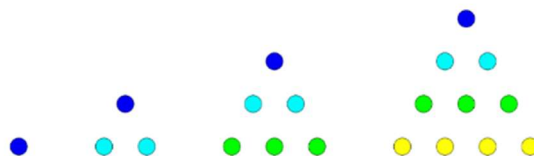


Ilustración 18.- Ejemplo sucesión 1

También se pueden realizar ejemplos de sucesiones de manera manipulativa, utilizando un papel y realizando diversos cortes. Los alumnos pueden medir en cada uno de los términos la longitud de lado del cuadrado o el área y establecer una sucesión.

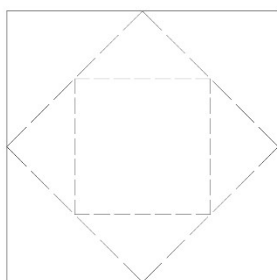


Ilustración 21.- Ejemplo sucesión 3

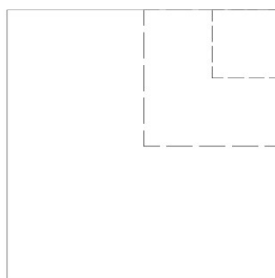


Ilustración 20:- Ejemplo sucesión 4

Para la consolidación de los conceptos trabajados se puede realizar los siguientes ejercicios de manera individual (E-1, E-2, E-3 y E-4) y problemas de desarrollo (P-1). Los ejercicios que no se puedan realizar en clase se mandarán como tareas para casa (30 min).

- Para la segunda parte de esta sesión se plantearán las **operaciones con sucesiones**. Dado su carácter mecánico, esta parte se desarrollará conforme a la propuesta del libro de texto. En esta parte la participación del profesor es más activa planteándose como una clase magistral en la que se den los siguientes conceptos.

La suma o diferencia de sucesiones es otra sucesión cuyos términos son la suma o diferencia de términos del mismo índice.

$$\text{Suma: } (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \quad \text{Diferencia: } (a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$$

El producto o cociente de dos sucesiones es otra sucesión cuyos términos son el producto o cociente de los términos del mismo índice.

$$\text{Producto: } (a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) \quad \text{cociente: } (a_n) : (b_n) = (a_n : b_n)$$

En este apartado se plantean a modo de ejemplos los ejercicios (E-5, E-6, E-7 y E-8) y problemas de desarrollo (P-2) los ejercicios que no se puedan realizar en clase se mandarán como tareas para casa (20 min).

CONTENIDOS

A.4.1 Calcula términos de una sucesión dado el término general.

A.4.3 Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación.

- C.1.1** Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
- C.2.1** Halla el término general o la ley de recurrencia de una sucesión.
- C.2.2** Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
- C.6.1** Halla el término general de una progresión aritmética o geométrica y lo utiliza para realizar cálculos.
- C.6.3** Utiliza progresiones aritméticas o geométricas para resolver problemas.
- E.2.1** Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo.
- E.2.2** Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 4.1** Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples.
- 4.2** Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando y modificando algoritmos.
- 6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas matemáticas.
- 6.2** Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias.

INDICADORES DE LOGRO

Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.

Calcula términos de una sucesión dado el término general.

Halla el término general o la ley de recurrencia de una sucesión.

Realiza operaciones (suma, diferencia, producto, cociente) entre sucesiones.

Traduce representaciones manipulativas (tapones, cortes de papel) a expresiones simbólicas.

Resuelve problemas relacionados con sucesiones en contextos reales y manipulativos.

METODOLOGÍAS

Aprendizaje dialógico; Indagación guiada; Aprendizaje cooperativo; Aprendizaje manipulativo; Clase magistral estructurada.

SESION 3: PROGRESIONES ARITMÉTICAS, DEFINICIONES

DESARROLLO DE LA SESIÓN:

- Esta sesión prácticamente continuación de la anterior, debido a que muchas sucesiones se centran en las progresiones aritméticas, donde la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma. Para comenzar la sesión el profesor reunirá en torno a una mesa a los alumnos para mostrarles cómo se realiza la progresión aritmética de números impares para construir cuadrados

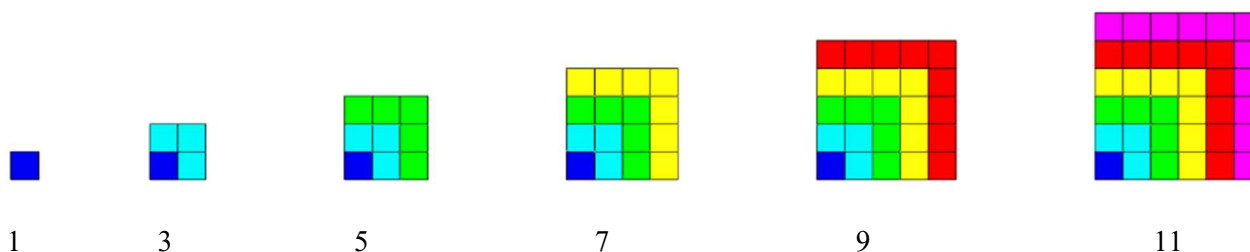


Ilustración 22.- Progresión aritmética de números impares

Esta es una de las formas más visuales, tangibles y potentes para enseñar progresiones aritméticas usando materiales manipulativos, como pueden ser la utilización de cartulinas de diferentes colores cortadas en forma de cuadrados o mediante la utilización de cubos Unifix. En esta progresión en cada uno de los términos se van añadiendo cuadrados entorno a los del término anterior que siguen la progresión aritmética 1, 3, 5, 7, 9, Donde la diferencia entre los términos es 2. El profesor ira realizando preguntas abiertas a los alumnos sobre estas indicaciones de manera que los alumnos de una forma inductiva averigüen la ley de recurrencia.

- ¿Si el término primero vale 1 y el segundo 3 cuanto hemos sumado?
- ¿Si el término primero vale 1 y el tercero 5 cuanto hemos sumado?
- Es decir, vamos sumando la diferencia entre términos tantas veces como términos menos uno, ¿no?

De esta manera trataremos de llegar a la obtención del término general y podremos dar las siguientes definiciones:

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, se obtiene del anterior sumando una misma cantidad, que se llama **diferencia**.

$$\text{Término general: } a_n = a_1 + (n - 1)d \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Con esta progresión también podemos ir introduciendo la suma de términos, que en este caso vemos visualmente que la suma de los números impares da un cuadrado perfecto.

Otro ejemplo que se puede realizar por si el primero no queda claro, es la construcción sucesiva mediante triángulos de palillos. (35 min)

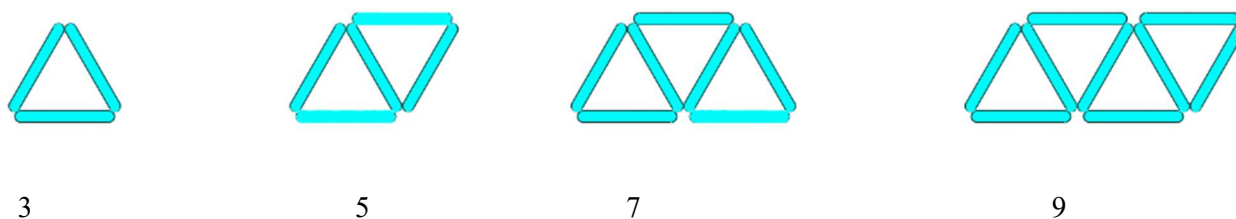


Ilustración 23.- Progresión aritmética mediante palillos.

- Introducidos los conceptos principales de las progresiones aritméticas los alumnos ya podrían realizar de una manera individual los siguientes ejercicios a modo de ejemplo (E-9, E-10, E-11 y E-12) y los problemas (P-3 y P-4). (15 min).

CONTENIDOS

- C.2.1** Halla el término general o la ley de recurrencia de una sucesión.
- C.2.2** Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
- C.6.1** Halla el término general de una progresión aritmética y lo utiliza para realizar cálculos.
- C.6.3** Utiliza progresiones aritméticas para resolver problemas contextualizados.
- A.4.3** Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación (ej.: esquemas, dibujos manipulativos).
- E.2.1** Participa respetuosamente en la puesta en común y aprendizaje entre iguales.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 4.1** Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples.
- 6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas matemáticas.
- 6.2** Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias o contextos reales.

INDICADORES DE LOGRO

Reconoce una progresión aritmética a partir de su estructura y diferencia común.

Halla el término general de una progresión aritmética.

Aplica la fórmula del término general para calcular elementos específicos de la progresión.

Resuelve problemas reales (alquiler, geometría) mediante el modelo de progresión aritmética.

Participa activamente en el razonamiento inductivo para deducir reglas generales a partir de ejemplos.

METODOLOGÍAS

Aprendizaje dialógico; Indagación guiada; Aprendizaje cooperativo; Aprendizaje manipulativo.

SESION 4: SUMA DE LOS n TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

DESARROLLO DE LA SESIÓN:

- Se realizará un breve repaso de la lección anterior y se corregirán los ejercicios y problemas visto en las sesiones anteriores. (10 min)
- Como introducción al tema de la suma de los n términos de una progresión aritmética, se puede utilizar para captar la atención de los alumnos el video del Mito de Gauss si este no se ha utilizado en la primera de las sesiones.

El mito de Carl F. Gauss y la suma de la sucesión aritmética

<https://www.youtube.com/watch?v=LpNHKkFSQII>

Basado en este video podemos realizar una actividad manipulativa como es el **doble rectángulo**, que consiste en representar una progresión aritmética mediante fichas, post-it o recortes de cartulina. Colocando una primera fila con los números en orden creciente y posteriormente otra debajo, pero en orden decreciente. Al juntar ambas filas se verá que cada par de números suman el mismo valor.

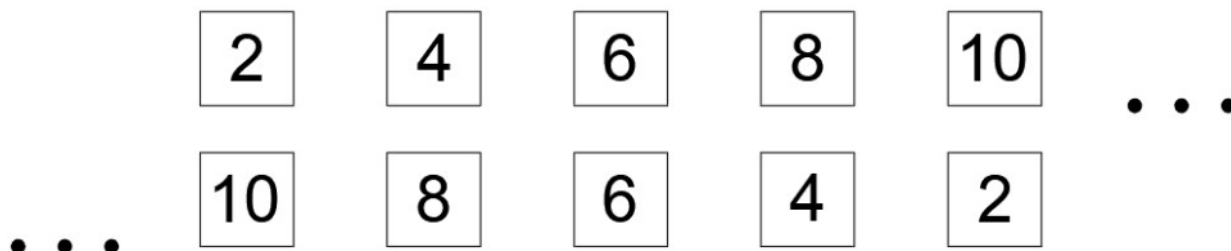


Ilustración 24.- Doble rectángulo

De esta manera el profesor realizará preguntas abiertas a los alumnos para que de manera inductiva obtenga la fórmula de la suma de los n términos de una progresión aritmética. Posteriormente se realizará la formulación matemática de como cualquier progresión aritmética se puede escribir a partir de a_1 o bien a partir de a_n , a partir de la fórmula del término general de la siguiente manera:

a_1	a_2	a_3	...	a_{n-1}	a_n
a_1	$a_1 + d$	$a_1 + 2d$	...	$a_1 + (n-2)d$	$a_1 + (n-1)d$
$a_n - (n-1)d$	$a_n - (n-2)d$	$a_n - (n-3)d$	...	$a_n - d$	a_n

Y poniendo la fila de abajo en orden inverso y sumando ambas filas:

a_1	$a_1 + d$	$a_1 + 2d$	...	$a_1 + (n-2)d$	$a_1 + (n-1)d$
a_n	$a_n - d$	$a_n - 2d$	...	$a_n - (n-2)d$	$a_n - (n-1)d$
$a_1 + a_n$	$a_1 + a_n$	$a_1 + a_n$	...	$a_1 + a_n$	$a_1 + a_n$

La suma por tanto es: $(a_1 + a_n)n/2$

Otra alternativa para explicar la suma de progresiones aritméticas es continuar con el problema de la sesión anterior, de la suma de los números impares. Este problema es excelente para visualizar patrones y conectar álgebra con geometría. (20 min)

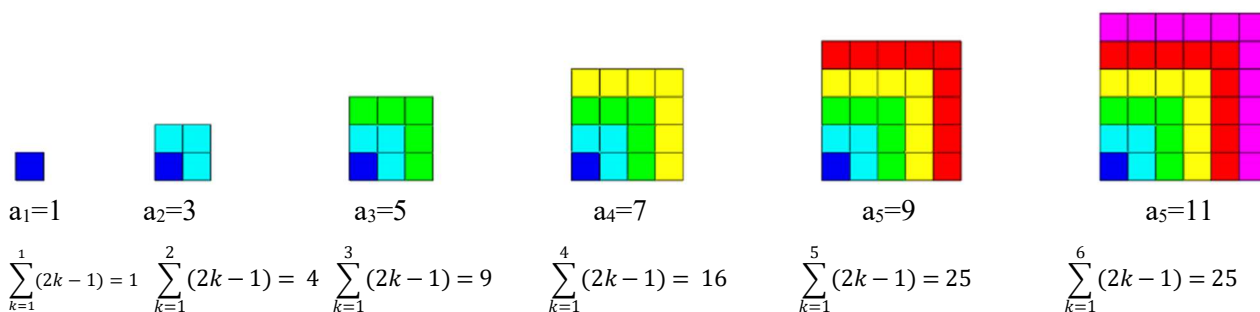


Ilustración 25.- Progresión aritmética de números impares

Siendo la expresión general de la suma:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Una vez explicada la teoría se procederá a la realización de ejercicios de manera individual, a modo de ejemplo serían los ejercicios (E-13, E-14, E-15 y E-16) y el problema (P-5) (20 min).

CONTENIDOS

- C.2.1** Cálculo de términos de una sucesión dado el término general.
- C.2.2** Obtención del término general o ley de recurrencia.
- C.2.3** Cálculo del término general y la suma de progresiones aritméticas.
- A.4.3** Uso de modelos visuales y manipulación para deducir fórmulas algebraicas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 4.1** Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples.
- 4.2** Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.
- 6.1** Reconocer situaciones reales que pueden ser formuladas matemáticamente.

INDICADORES DE LOGRO

Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.

Halla el término general y la suma de términos de una progresión aritmética.

Aplica la fórmula de la suma en problemas contextualizados.

Realiza deducciones inductivas mediante material manipulativo (doble rectángulo, sumas de impares).

Explica verbalmente o por escrito el proceso de deducción y cálculo.

METODOLOGÍAS

Aprendizaje dialógico; Indagación guiada; Aprendizaje manipulativo; Clase magistral estructurada.

SESION 5: PROGRESIONES GEOMÉTRICAS, DEFINICIONES

DESARROLLO DE LA SESIÓN:

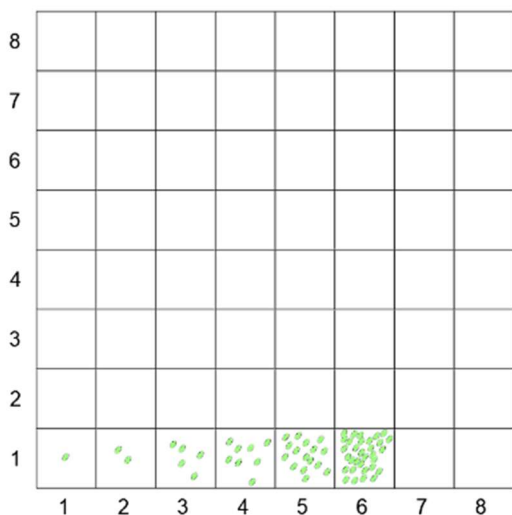


Ilustración 26.- Leyenda del ajedrez

- Para iniciar esta clase y atraer la atención de los alumnos se puede comenzar con la leyenda sobre el inventor del juego de ajedrez (s. VI d.C.). Visualmente impactante, se puede utilizar un tablero de ajedrez e ir colocando los granos de arroz doblando en cada casilla la cantidad (1, 2, 4, 8, 16 ...) obviamente, hasta donde se puede. Esto ayuda a visualizar el crecimiento exponencial de la progresión. Permite una conexión histórica y cultural al relacionar las progresiones geométricas con el invento del ajedrez por Sissa ben Dahir. El profesor ira realizando preguntas a los alumnos para que de manera intuitiva vaya introduciendo términos como la razón, el término general e incluso la suma de una progresión geométrica.

Otra forma de presentar las progresiones geométricas de una manera dinámica y manipulativa sería la creación de pirámides de Sierpinski con cartulinas doblándolas. Permite conectar además con los fractales y su propiedad de la autosimilaridad.

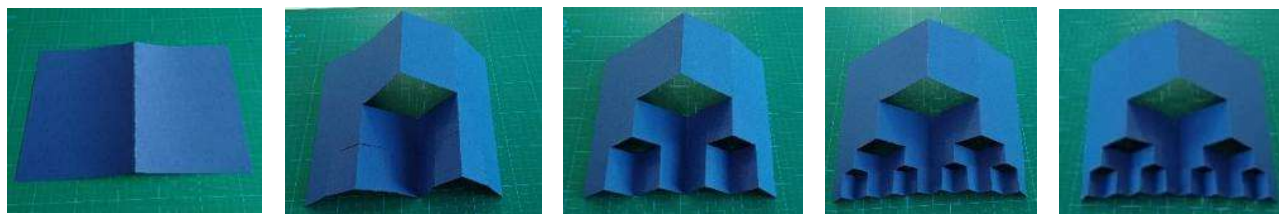


Ilustración 27.- Proceso de creación de la Pirámide de Sierpinski

Si consideramos las crestas en cada una de las iteraciones, tenemos una progresión geométrica igual a la del tablero de ajedrez y los granos, con una razón de 2. Se puede realizar por grupos la creación de diferentes tipos de pirámides dependiendo del número de cortes o pliegues. A modo de ejemplo se exponen las siguientes pirámides:

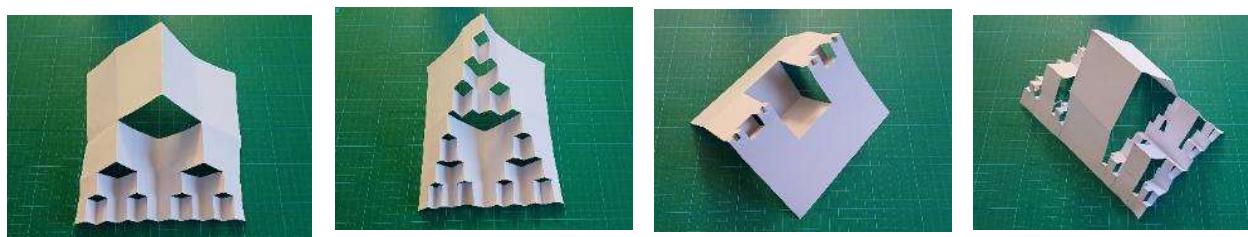


Ilustración 28.- Varios ejemplos de Pirámides de Sierpinski

Una vez presentados los conceptos de una manera dinámica se procederá a realizar una clase magistral ayudado del libro de texto para fijar las definiciones claves (35 min).

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, se obtiene del anterior multiplicando por un mismo número, que se llama **razón** de la progresión.

$$\text{Término general: } a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad \text{con } r \neq 0$$

- Introducidos los conceptos principales, como en sesiones anteriores, los alumnos ya podrían realizar de una manera individual los siguientes ejercicios a modo de ejemplo (E-17, E-18, E-19 y E-20) y los problemas (P-6 y P-7). (15 min).

CONTENIDOS

- C.2.1** Halla el término general o la ley de recurrencia de una sucesión.
- C.2.2** Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
- C.6.1** Halla el término general de una progresión geométrica y lo utiliza para realizar cálculos.
- C.6.3** Utiliza progresiones geométricas para resolver problemas contextualizados.
- A.4.3** Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación (ej.: esquemas, dibujos manipulativos).
- E.2.1** Participa respetuosamente en la puesta en común y aprendizaje entre iguales.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 4.1** Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples.
- 6.1** Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas matemáticas.
- 6.2** Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias o contextos reales.

INDICADORES DE LOGRO

Reconoce una progresión geométrica a partir de su estructura y diferencia común.

Halla el término general de una progresión geométrica.

Aplica la fórmula del término general para calcular elementos específicos de la progresión.

Resuelve problemas reales (virus, pirámide, ajedrez) mediante el modelo de progresión geométrica.

Participa activamente en el razonamiento inductivo para deducir reglas generales a partir de ejemplos.

METODOLOGÍAS

Aprendizaje dialógico; Indagación guiada; Aprendizaje cooperativo; Aprendizaje manipulativo.

SESIÓN 6: SUMA DE LOS n TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

DESARROLLO DE LA SESIÓN:

- Se comenzará con una breve puesta en común y repaso de los contenidos trabajados en la sesión anterior sobre progresiones geométricas. Se resolverán dudas y se corregirán los ejercicios y problemas indicados como tareas. (10 min)
- Como introducción al concepto de suma de términos de una progresión geométrica, **se puede utilizar el problema del ajedrez** y los granos de trigo, una leyenda que atrapa fácilmente la atención del alumnado. Posteriormente, se planteará a los estudiantes las siguientes preguntas:

¿Cuántos granos habría en total en el tablero?"

¿Podrías expresar la suma con una fórmula sin calcular casilla por casilla?

De esta manera, el docente guiará mediante preguntas inductivas hacia la deducción de la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica. A partir de un ejemplo sencillo (por ejemplo, $S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$), se guiará la deducción usando la técnica de multiplicar ambos miembros por la razón y restar. Sea:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \dots + a_1 \cdot r^{n-1}$$

Multiplicando ambos miembros por r :

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \dots + a_1 \cdot r^n$$

Al restar las dos ecuaciones se obtiene:

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n) \rightarrow S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{(1 - r)}, \text{ con } r \neq 1$$

(20 min)

- Introducidos los conceptos principales de las progresiones geométricas, los alumnos ya podrían realizar de una manera individual los siguientes ejercicios a modo de ejemplo (E-21, E-22 y E-23) y el problema (P-8). (20 min).

CONTENIDOS

- C.2.1** Cálculo de términos de una sucesión dado el término general.
- C.2.2** Obtención del término general o ley de recurrencia.
- C.2.3** Cálculo del término general y la suma de progresiones geométricas.
- A.4.3** Uso de modelos visuales y manipulación para deducir fórmulas algebraicas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.

- 4.1** Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples.
- 4.2** Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.
- 6.1** Reconocer situaciones reales que pueden ser formuladas matemáticamente.

INDICADORES DE LOGRO

Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.

Halla el término general y la suma de términos de una progresión geométrica

Aplica la fórmula de la suma en problemas contextualizados.

Calcula la suma de una progresión geométrica.

Explica verbalmente o por escrito el proceso de deducción y cálculo.

METODOLOGÍAS

Aprendizaje dialógico; Indagación guiada; Aprendizaje manipulativo; Clase magistral estructurada.

SESIÓN 7: SÍNTESIS Y APLICACIÓN INFORMÁTICA

DESARROLLO DE LA SESIÓN:

- La sesión comenzará con una breve revisión de los principales conceptos trabajados hasta el momento:
 - Definición y representación de una sucesión.
 - Progresiones aritméticas y suma de sus n términos.
 - Progresiones geométricas y suma de sus n términos.

Se utilizará la pizarra digital para construir un esquema visual conjunto que resuma las fórmulas más importantes del tema (10 min).

- En el aula de informática y cada alumno de manera individual realizará dibujos fractales con la ayuda de una aplicación informática tipo CAD, ideal para la su representación debido a que se puede realizar ampliaciones o reducciones de una manera ilimitada. Además, es ideal para dar los primeros pasos en Diseño Asistido por Computadora.

En los primeros minutos de la sesión el profesor explicará a los alumnos los principales comandos del programa como pueden ser los comandos de realización de dibujo (rectas, curvas, splines...) y los de modificación (copiar, traslación, giro, matriz...). Seguidamente se practicará con la realización de alguna sucesión o fractal visto hasta el momento por medio de la aplicación CAD (muchos ejemplos de este TFM han sido realizados con ordenador).

Como tarea a realizar en casa o con los ordenadores del centro, se propondrá la realización de manera individualizada de una sucesión y un fractal inventado por los alumnos. Se adjunta enunciado de la tarea en el Anexo IV y algunos ejemplos que pudieran realizar los alumnos:

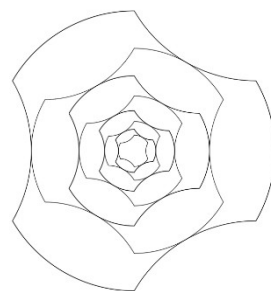
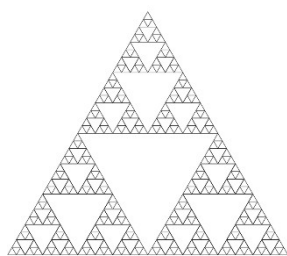
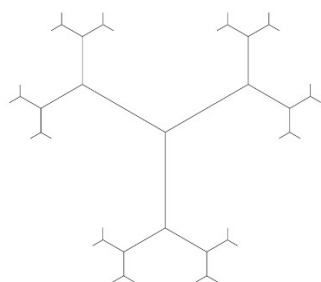


Ilustración 29.- Fractales en CAD

Para finalizar y motivar a los alumnos en la creación a través del diseño asistido por ordenador se expondrá por parte del profesor algunos trabajos realizados CAD de algunos artistas contemporáneos como pueden ser: (40 min).

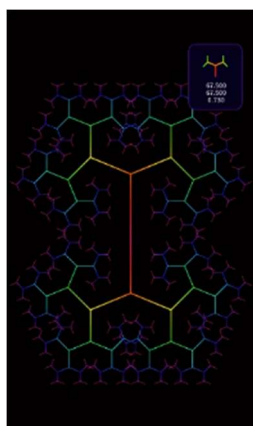


Ilustración 30.- Árbol fractal de Thebhaktimathguru

Ilustración 31.- Escultura fractal de Tom Beddard

Ilustración 32.- Columna del arquitecto fractal Michael Hansmeyer

CONTENIDOS

- C.1.1** Identificación y representación de patrones visuales y numéricos.
- C.2.1** Cálculo de términos de una sucesión dado el término general.
- C.2.3** Representación y análisis de progresiones aritméticas y geométricas.
- C.6.1** Uso de herramientas digitales para modelizar sucesiones y estructuras fractales.
- A.4.3** Utilización de modelos visuales y tecnológicos para deducir y representar relaciones matemáticas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- 3.1** Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 4.1** Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples.
- 4.2** Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando y modificando algoritmos.
- 6.1** Reconocer situaciones reales que pueden ser formuladas y resueltas matemáticamente.
- 7.1** Representar conceptos, procedimientos e información matemática con herramientas digitales.

INDICADORES DE LOGRO

Resume los conceptos clave del tema de sucesiones de forma clara y ordenada.

Aplica los comandos básicos del entorno CAD para realizar dibujos matemáticos.

Representa visualmente una sucesión o fractal con estructura coherente.

Emplea la tecnología de forma autónoma para modelizar patrones matemáticos.

Propone y diseña un fractal o sucesión propio con criterio estético y matemático.

METODOLOGÍAS

Aprendizaje visual y computacional; Trabajo autónomo asistido con TIC; Aprendizaje por descubrimiento y creatividad aplicada.

SESION 8: PRESENTACIÓN DE LOS TRABAJOS.

DESARROLLO DE LA SESIÓN:

- Esta sesión estará dedicada a la exposición oral de los proyectos colaborativos sobre fractales desarrollados por los grupos de trabajo durante la unidad.

Cada grupo de tres alumnos presentará ante el resto de la clase:

- El fractal elegido (de la lista o uno propio inventado).
- Su relación con una sucesión matemática.
- Su construcción manipulativa.
- Su presencia en la naturaleza, el arte o la tecnología.

La presentación se realizará con un soporte digital (PowerPoint, Genially, Canva...) y una muestra física del fractal creado con materiales como cartulina, papel o palillos.

Cada grupo dispondrá de 5 a 8 minutos para su exposición. Durante la misma, se evaluarán los siguientes aspectos:

- Claridad y profundidad del contenido.
- Relación entre el fractal y la sucesión matemática.
- Calidad del trabajo manipulativo.
- Uso adecuado del lenguaje matemático.
- Participación equilibrada de los miembros del grupo.

La evaluación se llevará a cabo mediante una rúbrica común entregada previamente, que será utilizada tanto por el profesor (heteroevaluación) como por el alumnado (coevaluación de las exposiciones de los compañeros). Las rúbricas se recogerán al final de la sesión para su análisis.

Durante las exposiciones, se fomentará la escucha activa, la formulación de preguntas y la valoración respetuosa del trabajo de los demás. Al final de la sesión, el docente hará una breve reflexión sobre los aprendizajes observados y destacará las mejores prácticas presentadas. (50 min)

CONTENIDOS

C.1.1 Identificación y expresión de patrones numéricos y geométricos.

C.2.3 Construcción de sucesiones a partir de situaciones fractales.

A.4.3 Representación manipulativa y digital de conceptos matemáticos.

E.1.1 / E.2.1 Elaboración colaborativa de proyectos matemáticos.

E.3.1 Comunicación estructurada de razonamientos matemáticos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

3.1 Formular y comprobar conjeturas mediante el análisis de patrones.

4.1 Reconocer y construir modelos matemáticos basados en sucesiones.

6.1 Relacionar las matemáticas con contextos reales y culturales.

7.1 Representar procesos y resultados con herramientas digitales y materiales.

8.1 Comunicar con precisión ideas matemáticas en grupo.

10.1 Participar activamente en equipos cooperativos con roles definidos.

INDICADORES DE LOGRO

Presenta de forma clara y estructurada el fractal trabajado.

Explica con corrección la sucesión matemática asociada.

Relaciona el fractal con contextos reales (naturaleza, arte, ciencia...).

Utiliza adecuadamente el soporte digital y el material manipulativo.

Participa activamente en la coevaluación de los compañeros.

Contribuye a la reflexión final con comentarios constructivos.

METODOLOGÍAS

Aprendizaje cooperativo; Aprendizaje basado en proyectos (ABP); Exposición oral y visual; Evaluación formativa (coevaluación + heteroevaluación); Uso de TIC y materiales manipulativos.

6.11. Evaluación

Para la evaluación de esta Situación de Aprendizaje se deben tener en cuenta varias consideraciones. En primer lugar, el bloque temático de sucesiones ocupa un espacio limitado dentro del currículo de 3º de ESO, en comparación con otros como álgebra o funciones, lo que implica que su carga temporal y su peso específico en la evaluación deben ser proporcionales.

Pese a ello, su relevancia conceptual y su potencial para desarrollar el razonamiento inductivo, la representación algebraica y la conexión con contextos reales, justifica la inclusión de actividades diversas, tanto individuales como grupales.

Dado que esta unidad se inserta en una evaluación trimestral donde se han abordado otros contenidos con mayor peso curricular (como puede ser el álgebra o funciones lineales), y que las sucesiones se desarrollan en un bloque reducido de sesiones, su ponderación global dentro del trimestre será moderada. Aun así, se evaluarán múltiples factores: conocimiento conceptual, aplicación en problemas contextualizados, trabajo cooperativo, actitud y uso de herramientas digitales. Se pondrán en el examen trimestral ejercicios y problemas similares a los mostrados durante las sesiones de esta Situación de Aprendizaje.

6.11.1. Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación empleados están recogidos en el Decreto 39/2022, de Castilla y León, y se derivan principalmente de las competencias específicas CE1, CE3, CE4, CE6, CE7, CE9 y CE10. Se concretan en los siguientes términos:

Tabla 15.- Criterios de evaluación

CONTENIDO	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS CLAVE	INDICADORES DE LOGRO
<i>Sucesiones y patrones</i>	Formular y verificar conjeturas numéricas. Calcular términos de una sucesión dada explícitamente o por recurrencia.	CMCT, CCL, CPSAA, CE	Reconoce, formula y representa sucesiones simples.
<i>Progresiones aritméticas</i>	Calcular términos generales, diferencias y sumas parciales. Resolver problemas contextuales.	CMCT, CCL, CE, STEM	Aplica progresiones en situaciones reales.
<i>Progresiones geométricas</i>	Calcular razón, término general, sumas finitas e infinitas.	CMCT, CCL, CD, STEM	Usa progresiones en contextos financieros, físicos, etc.
<i>Representación de estructuras y fractales</i>	Modelizar situaciones iterativas mediante sucesiones. Interpretar la dimensión fractal.	CMCT, CD, CCEC, CE	Construye, describe y analiza fractales matemáticos.
<i>Trabajo colaborativo y TIC</i>	Participar de forma activa en proyectos grupales. Utilizar herramientas tecnológicas.	CPSAA, CD, CCEC, CE	Colabora, presenta y comunica sus resultados.

6.11.2. Criterios de calificación

Dada la extensión limitada de esta unidad y su integración dentro del trimestre, se utilizarán cuatro herramientas de evaluación, cada una con un peso específico, siguiendo los principios establecidos en la programación didáctica general de la asignatura:

Tabla 16.- Criterios de calificación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	DESCRIPCIÓN	PESO SOBRE LA CALIFICACIÓN DE LA SDA
Examen trimestral	Prueba escrita en la que se incluyen una parte sobre cuestiones de sucesiones	50 %
Proyecto en grupo: Fractal manipulado	Trabajo cooperativo: Diseño y construcción de un fractal físico con presentación	25 %
Trabajo diario y tareas autónomas	Resolución de problemas en clase, tareas en casa, participación y actitud.	25 %

Las competencias específicas se evaluarán a través de estos instrumentos, recogiendo evidencias de aprendizaje que permitan valorar el grado de desarrollo de las competencias clave vinculadas.

Desglose del trabajo diario y autónomo:

- Mini-proyecto en CAD sobre fractales: 10%
- Problemas en clase y en casa: 10 %
- Actitud, participación y cooperación en clase: 5 %

En conjunto, la calificación de esta Situación de Aprendizaje no superará el 15% de la nota del trimestre, respetando así su proporción en el conjunto del curso, pero asegurando una evaluación completa y formativa que promueva el pensamiento matemático, la creatividad y el trabajo colaborativo.

6.12. Atención a la diversidad

El Colegio Nuestra Señora del Carmen, centro educativo en el que se desarrolla esta propuesta didáctica, presenta una realidad escolar marcada por la diversidad del alumnado. En sus aulas conviven estudiantes con distintos ritmos de aprendizaje, procedencias culturales y niveles competenciales. Esta riqueza de perfiles convierte el aula en un entorno que demanda una planificación flexible e inclusiva, fundamentada en principios pedagógicos como los que aporta el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA).

La atención a la diversidad constituye un principio esencial de la práctica educativa inclusiva. Siguiendo el marco del DUA, entendemos que la diversidad es la norma en el aula, no la excepción (Moore, 2007), y que las barreras no están en el alumnado, sino en los métodos, materiales y medios inflexibles con los que a menudo se estructura el currículo.

Desde este enfoque, la SdA se ha concebido desde el inicio para ser accesible y flexible, anticipando y respondiendo a las diferentes necesidades del alumnado. En esta clase en concreto, nos encontramos con tres alumnos que requieren de atención a la diversidad:

1. Alumno con dificultades visuales.

Siguiendo el principio I del DUA (proporcionar múltiples formas de representación) se adaptarán los materiales para que sean accesibles visual y táctilmente. Por ello en esta unidad son importantes los modelos manipulativos, fichas con tipografías grandes o con relieve, la utilización de textos digitales compatibles con lectores de pantalla o convertidores de texto a voz (en el proyecto digital). Asimismo, se seleccionarán y personalizarán recursos digitales que permitan modificar tamaño, contraste y velocidad de lectura.

2. Alumno extranjero con dificultad en la comprensión del idioma.

Para este estudiante se aplicarán estrategias, facilitando la comprensión multilingüe y el uso de representaciones visuales, gráficas y manipulativas. Se incorporarán apoyos visuales (pictogramas, esquemas, vídeos subtítulos), el uso de herramientas de traducción digital y en la actividad cooperativa puede apoyarse en sus compañeros.

3. Alumno con altas capacidades intelectuales.

En este caso, se propone una ampliación curricular en línea con el principio III del DUA (proporcionar múltiples formas de implicación). Además de las sucesiones aritméticas y geométricas se le propondrá que estudie otras como las cuadráticas o recurrentes. El alumno podrá desarrollar fractales manipulativos más complejos (por ejemplo, el conjunto de Mandelbrot o Julia), estudiar otro tipo de series como las cuadráticas, o emplear lenguajes de programación como Python, Scratch o Processing para diseñar fractales digitales.

La propuesta general de esta unidad se articula sobre una base metodológica coherente con los tres principios fundamentales del DUA:

- **Representación:** múltiples formas de presentar la información.
- **Acción y expresión:** diversas formas de mostrar lo aprendido.
- **Implicación:** diferentes maneras de motivar y comprometer al alumnado.

De este modo, se garantiza un entorno de aprendizaje accesible, equitativo y enriquecedor, donde todos los estudiantes puedan progresar desde su punto de partida, sin ser definidos por sus dificultades o capacidades, sino por su potencial.

6.13. Conclusiones. Medios y criterios para evaluar la SdA

La implementación de la SdA “Fractales, la belleza matemática de las sucesiones” que he desarrollado en otras asignaturas del Máster, es una propuesta motivadora, transversal y enriquecedora para el aula, integrando contenidos matemáticos complejos desde una perspectiva accesible y creativa, vinculada con numerosos aspectos de la vida cotidiana. El uso de fractales y materiales manipulativos ha permitido al alumnado visualizar y construir el conocimiento desde la experimentación, fomentando el trabajo cooperativo, el pensamiento inductivo y el uso de herramientas digitales.

En términos evaluativos, se ha seguido una planificación coherente con los principios de la evaluación continua, formativa e inclusiva, tal como se recoge en la normativa vigente. El proceso de evaluación se ha basado en la combinación equilibrada de distintas técnicas e instrumentos, permitiendo valorar tanto el producto como el proceso de aprendizaje del alumnado.

Los **medios de evaluación** empleados han sido:

- **Prueba escrita integrada en el examen trimestral** (50 %), donde se evalúan los contenidos y procedimientos matemáticos tratados en la SdA.
- **Proyecto en grupo: creación de un fractal físico** (25 %), valorado mediante rúbricas que incluyen aspectos como originalidad, precisión matemática, cooperación y presentación.
- **Trabajo diario y tareas autónomas** (25 %), recogidas a través de observación directa, participación en el aula, resolución de actividades y mini-proyecto digital.

A estos instrumentos se han añadido otros, como el cuaderno del profesor, registros de observación, autoevaluaciones y coevaluaciones, lo que permite una visión más global del progreso del alumnado.

La **evaluación de la propia SdA** también ha sido tenida en cuenta. Para ello se ha utilizado la tabla de evaluación de la programación de aula incluida en el punto 5.17, valorando aspectos como la adecuación al currículo, la inclusión de las competencias clave, la adaptación a la diversidad, el equilibrio metodológico y la satisfacción del alumnado.

En definitiva, esta Situación de Aprendizaje contribuye de forma significativa en el alumnado, permitiendo trabajar conceptos matemáticos de una manera manipulativa y visual. Se han tenido en cuenta los principios del DUA, proponiéndose actividades de suelo bajo y techo alto para las diferentes necesidades del alumnado.

7. SINTESIS Y CONCLUSIONES

El presente Trabajo Fin de Máster ha abordado el estudio y la enseñanza de las sucesiones numéricas en 3º de Educación Secundaria Obligatoria, integrando la perspectiva innovadora del uso de fractales y materiales manipulativos como eje vertebrador de la Situación de Aprendizaje diseñada. Se ha puesto en práctica los conocimientos adquiridos en el Máster, especialmente de las asignaturas relacionadas con la Didáctica de las Matemáticas.

Se ha llevado a cabo una triple fundamentación (epistemológica, curricular e histórica) para contextualizar y justificar la inclusión de las sucesiones y los fractales en el currículo de 3º de ESO. En el plano epistemológico, se han analizado los conceptos matemáticos fundamentales y su desarrollo formal, valorando su relevancia en el pensamiento algebraico y funcional. Desde la perspectiva histórica, se ha evidenciado la presencia de patrones y progresiones desde civilizaciones antiguas, lo que demuestra su evolución a través del pensamiento matemático.

Por otro lado, el análisis curricular se ha centrado en la normativa educativa vigente y en su concreción en un contexto, como es el del Colegio Nuestra Señora del Carmen. Este estudio ha permitido vincular las sucesiones y los fractales con las competencias específicas y los criterios de evaluación establecidos. Se trata de un tema sin gran dificultad para el alumnado que puede resultar atractivo y desarrolle el gusto por las matemáticas. Una gran parte de las actividades realizadas son problemas de carácter repetitivo, limitándose a la aplicación directa de fórmulas o procedimientos, sin apenas requerir reflexión o adaptación. Para contrarrestar esta situación, se ha promovido el trabajo cooperativo, en el que los alumnos deben emplear su creatividad para diseñar sucesiones y fractales originales, uniendo de esta manera, el pensamiento matemático con la imaginación.

Desde una perspectiva metodológica, se ha apostado por enfoques activos, basados en los materiales manipulativos, la experimentación y el trabajo cooperativo, reforzando la motivación del alumnado mediante la conexión entre las matemáticas y la estética, la naturaleza y la tecnología. El uso de fractales ha permitido abordar las sucesiones desde un prisma geométrico y visual, facilitando su comprensión y despertando el interés del alumnado. En esta línea, el desarrollo de un mini-proyecto en CAD ha ofrecido una dimensión aplicada al aprendizaje, permitiendo al alumnado construir sucesiones y figuras fractales en un entorno digital.

Se ha hecho especial hincapié en la atención a la diversidad, aplicando los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) para asegurar una enseñanza inclusiva y equitativa. La planificación contempla medidas específicas para alumnado con dificultades visuales, estudiantes con barreras idiomáticas y alumnos con altas capacidades, proponiendo actividades que pueden modificarse como se suele decir, de suelo bajo y techo alto, garantizando así la personalización del aprendizaje y el progreso en la medida de las posibilidades de cada uno.

En cuanto a la evaluación, se han utilizado una variedad de instrumentos y técnicas que responden a una visión formativa y competencial. La inclusión de rúbricas, observación directa, trabajos cooperativos y pruebas escritas busca valorar no solo los resultados, sino también los procesos, actitudes y competencias desarrolladas por el alumnado.

En definitiva, se ha propuesto una Situación de Aprendizaje innovadora y dinámica, que aspira a integrar el conocimiento matemático con la creatividad. Se ha mostrado que es posible enseñar contenidos tradicionalmente abstractos como las sucesiones desde una perspectiva atractiva y significativa para el alumnado, reforzando así su pensamiento crítico, su autonomía y su gusto por las matemáticas como herramienta para comprender el mundo.

BIBLIOGRAFÍA

Barrios Calmaestra, L. (s. f.). *Aproximación de PI*. Proyecto Descartes.

https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Aproximacion_de_pi-JS/index.html.

CabanesMartínez, R. (2009). *Sucesiones y series: numéricas, potencias, funciones y Fourier : 63 problemas útiles*. García-Maroto editores.

Chamoso Sánchez, J. M., Fernández Benito, I., & Reyes Iglesias, M. E. (2009). *Burbujas de arte y matemáticas* (Vol. 6). Nivola Libros y Ediciones.

De Pisa, L. (1202). *Liber Abaci* .

Derivando. (2023, 3 mayo). *Matemáticas 3º ESO. Sucesiones. 2. Sucesiones numéricas y visuales* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=LpNHKkFSQII>

Díez Díez, P. (2001). *Sucesiones y límites* (1ª ed., serie B) [Book]. Pedro Díez.

Dimensions. (s.f.). *Matemáticas con sentido*. https://www.dimensions-math.org/Dim_ES.htm

Galilei, G. (1623). *Il Saggiatore*.

Gobierno de España. (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. Boletín Oficial del Estado, núm. 76, 30 de marzo de 2022. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217>

Junta de Castilla y León. (2022). *Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León*. Boletín Oficial de Castilla y León, núm. 190, 30 de septiembre de 2022. <https://bocyl.jcyl.es/boletines/2022/09/30/pdf/BOCYL-D-30092022-3.pdf>

López, F. (1997). *Las Matemáticas*. https://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm. https://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

MatematicasTV. (c. 2016). *Cine matemático: El mito de Carl F. Gauss y la suma de la sucesión aritmética* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=LpNHKkFSQII>

Mandelbrot, B. B. (1982). *The fractal geometry of nature* (Rev. ed.). W. H. Freeman and Company.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1993). *Orden de 9 de septiembre de 1993, por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, de 4 de junio*. Boletín Oficial del Estado, núm. 226, 21 de septiembre de 1993. [https://www.boe.es/eli/es/o/1993/09/09/\(1\)](https://www.boe.es/eli/es/o/1993/09/09/(1))

Moore, S. L. (2007). David H. Rose, Anne Meyer, Teaching Every Student in the Digital Age: Universal Design for Learning. *Educational Technology Research and Development*, 55(5),597-601
<https://doi.org/10.1007/s11423-007-9056-3>

Pastor, C. A., Sánchez, J. M., & Zubillaga, A. (2014). Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) Pautas para su introducción en el currículo. *Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)*.
[https://doi.org/10.1016/0164-1212\(95\)00086-0](https://doi.org/10.1016/0164-1212(95)00086-0)

Pólya, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press.

QuantumFracture. (2017, 13 abril). *¿Qué es el infinito? – El infinito explicado con mates* [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=6vT1YMd9gLw>

Sala, N. & Cappellato, G. (2012). *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura* (4ª ristampa). Franco Angeli.

Sparrow, C., & Mandelbrot, B. (1984). The Fractal Geometry of Nature. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 147, 616. <https://doi.org/10.2307/2981858>

Sucesiones y series: definiciones, teoremas y resultados. (2009). [Book]. García-Maroto editores.

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1.- Capitel Egipcio.....	4
Ilustración 2: Papiro de Rhind.....	4
Ilustración 3: Aproximación del número pi.....	7
Ilustración 4: El Conjunto de Mandelbrot	13
Ilustración 5: Forma gráfica de una sucesión	21
Ilustración 6.- Nuestra Señora del Carmen.....	30
Ilustración 7.- Diseño de mesa trapezoidal.....	33
Ilustración 8.- Configuraciones de mesas en aula	34
Ilustración 9.- Configuración de mesas en grupos grandes	34
Ilustración 10.- Configuración en grupos reducidos.....	34
Ilustración 11.- Calendario escolar 24/25.....	57
Ilustración 12.- ejemplo de sucesiones en pruebas psicotécnicas de oposición	65
Ilustración 13.- Espirales dextrógiras y levógiras de un girasol.....	66
Ilustración 14.- El Hombre de Vitruvio.....	67
Ilustración 15.- Gioconda	67
Ilustración 16.- .- Exposición Art, Science and Infinite Worlds en el Nxt museum (Amsterdam)	67
Ilustración 17:- Ejercicio inicial de sucesiones	79
Ilustración 18.- Ejemplo sucesión 1	80
Ilustración 19:- Ejemplo sucesión 2	80
Ilustración 20:- Ejemplo sucesión 4	80
Ilustración 21.- Ejemplo sucesión 3	80
Ilustración 22.- Progresión aritmética de números impares	82

Ilustración 23.- Progresión aritmética mediante palillos.	82
Ilustración 24.- Doble rectángulo	84
Ilustración 25.- Progresión aritmética de números impares	84
Ilustración 26.- Leyenda del ajedrez.....	86
Ilustración 27.- Proceso de creación de la Pirámide de Sierpinski.....	86
Ilustración 28.- Varios ejemplos de Pirámides de Sierpinski	86
Ilustración 29.- Fractales en CAD	90
Ilustración 30.- Escultura fractal de Tom Beddard.....	90
Ilustración 31.- Árbol fractal de Thebhaktimathguru	90
Ilustración 32.- Columna del arquitecto fractal Michael Hansmeyer.....	90
Ilustración 33.- Imagen auxiliar del problema P-2	138
Ilustración 34.- Imagen auxiliar del problema P-6	139

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.- Mapa de Relaciones Competenciales de Matemáticas.....	18
Tabla 2.- Ejemplos de dimensión fractal	29
Tabla 3.- Criterios de la evaluación inicial.....	39
Tabla 4.- Contenidos transversales de Situaciones de Aprendizaje.....	44
Tabla 5.- Proyecto significativo.....	46
Tabla 6.- Tipos de evaluación y características	50
Tabla 7.- Criterios de evaluación.....	52
Tabla 8.- Criterios de evaluación.....	54
Tabla 9.- Programación de las Situaciones de Aprendizaje	57
Tabla 10.- Evaluación práctica docente por parte de los alumnos.....	58
Tabla 11.- Evaluación de la programación del aula	59
Tabla 12.- Evaluación de la programación didáctica.....	61
Tabla 13.- Recursos del aula	73
Tabla 14.- Temporalización de las sesiones	75
Tabla 15.- Criterios de evaluación.....	93
Tabla 16.- Criterios de calificación	94

ANEXOS

ANEXO 1

SITUACIONES DE APRENDIZAJE

Bloque 1. Situación de aprendizaje 1. Cada número, en su conjunto.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.	1.1. Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. 1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. 1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.	A.2.1 A.2.2 A.2.3 A.3.1 A.3.2 A.3.3 A.4.2	Conoce el concepto de fracciones equivalentes y las sabe calcular.
			Simplifica y amplifica fracciones.
			Compara fracciones.
			Opera con fracciones y simplifica cuando procede.
			Distingue y clasifica los números decimales en distintas situaciones.
			Construye la fracción generatriz de un número decimal dado y entiende su utilidad para realizar operaciones.
			Clasifica los números en diferentes conjuntos y tipos.
			Trabaja con la recta numérica.
			Conoce y aplica el valor absoluto de un número.
			Pasa de fracción a decimal y de decimal a fracción.
			Aproxima y redondea números con la precisión requerida.
			Calcula el error relativo y absoluto al realizar aproximaciones.
			Diferencia intervalos y semirrectas.
			Utiliza la calculadora como herramienta de apoyo.
			Resuelve problemas utilizando números reales.
			Resuelve problemas utilizando la fracción generatriz.
			Resuelve problemas de la vida cotidiana analizando los errores absoluto y relativo que se cometen en ellos.

Competencia específica 2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.	2.1. Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.	A.3.2 A.4.2	Comprueba la validez del resultado usando la calculadora.
Competencia específica 4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.	4.1. Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional.	C.6.1	Analiza un problema resuelto y resuelve otros similares a partir de él.
			Utiliza organizadores para analizar como cambiar un resultado si cambian los datos de un problema.
Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	A.2.2 C.6.1 E.1.2 E.1.3 E.1.4	Reflexiona sobre aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
			Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación.
			Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje.
			Pone a prueba sus aprendizajes.
			Establece relaciones entre las matemáticas y el mundo real.
			Analiza información numérica sobre el consumo de agua.
			Presta atención al profesor cuando la pide
Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas,	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban	E.2.1 E.2.2 E.3.1	Debate con compañeros para extraer conclusiones.
			Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo.
fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.		Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.

Bloque 1. Situación de aprendizaje 2. La potencia de las matemáticas.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.	1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.	A.2.1 A.2.2	Conoce el concepto de potencia y lo aplica para resolver ejercicios y problemas.
			Entiende la importancia de los signos tanto en la base como en el exponente de una potencia.
			Trabaja el caso particular de las potencias de base 10.
			Conoce y aplica las propiedades de las potencias para simplificar expresiones y resolver problemas.
			Realiza operaciones combinadas en las que aparecen potencias.
			Descubre la necesidad y la utilidad de la notación científica.
			Transforma expresiones de notación científica a notación decimal y viceversa.
			Resuelve operaciones y problemas con números en notación científica.
			Conoce el concepto de raíz (y sus elementos) y lo aplica para resolver ejercicios y problemas.
			Analiza el número de soluciones de una raíz.
			Establece la relación entre raíces y potencias.
			Conoce y aplica el concepto de radicales equivalentes para resolver ejercicios y problemas.
			Utiliza la calculadora como herramienta de apoyo.
			Comprueba la validez del resultado usando la calculadora.
Competencia específica 3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.	3.1. Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones. 3.2. Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema.	A.2.1	Conoce el concepto de potencia y lo aplica para resolver ejercicios y problemas.
		A.2.2	Entiende la importancia de los signos tanto en la base como en el exponente de una potencia.
		A.3.2	Trabaja el caso particular de las potencias de base 10.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3.	3.3. Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.	A.4.1	Aplica las propiedades de las potencias para simplificar expresiones y resolver problemas. Realiza operaciones combinadas en las que aparecen potencias. Descubre la necesidad y la utilidad de la notación científica. Transforma expresiones de notación científica a notación decimal y viceversa. Resuelve operaciones y problemas con números en notación científica. Conoce el concepto de raíz (y sus elementos) y lo aplica para resolver ejercicios y problemas. Analiza el número de soluciones de una raíz. Establece la relación entre raíces y potencias. Conoce y aplica el concepto de radicales equivalentes para resolver ejercicios y problemas. Utiliza la calculadora como herramienta de apoyo. Comprueba la validez del resultado usando la calculadora.
Competencia específica 5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.	5.1. Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente. 5.2. Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.	A.2.1 A.4.1 C.6.1	Analiza un problema resuelto y resuelve otros similares a partir de él. Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas. Relaciona contenidos de este tema con otros aspectos de las matemáticas.
Competencia específica 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.	6.2. Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados. 6.3. Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.	A.2.1 A.2.2 C.6.1	Relaciona contenidos de este tema con otros aspectos de las matemáticas. Relaciona contenidos de este tema con otras áreas del saber.
Competencia específica 8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	8.1. Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.	A.2.1 A.2.2 A.4.1	Descubre la necesidad y la utilidad de la notación científica. Transforma expresiones de notación científica a notación decimal y viceversa.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.	8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.		Resuelve operaciones y problemas con números en notación científica.
Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	E.1.1 E.1.2 E.1.3 E.1.4	Reflexiona sobre aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas. Analiza un problema resuelto y resuelve otros similares a partir de él. Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación. Utiliza organizadores para analizar cómo cambia un resultado si varían los datos de un problema. Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas. Explica si una afirmación es verdadera o falsa aportando evidencias. Pone a prueba sus aprendizajes. Establece relaciones entre las matemáticas y el mundo real. Se conciencia como ciudadano ante los desafíos sociales y ambientales del planeta.
Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	E.2.1 E.2.2 A.3.1	Se implica en el trabajo en equipo Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.

Bloque 2. Situación de aprendizaje 1. Semejantes, pero no iguales.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.	1.1. Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. 1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. 1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.	B.3.1 B.2.2	Utiliza herramientas TIC para el aprendizaje de los contenidos.
			Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
			Clasifica figuras geométricas según sus ángulos y lados.
			Aplica las propiedades de los polígonos para realizar cálculos.
			Construye triángulos.
			Identifica figuras semejantes y calcula su razón de semejanza.
			Conoce y aplica el teorema de Tales.
			Aplica las razones de semejanza en perímetros, áreas y volúmenes.
Competencia específica 2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.	2.1. Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema. 2.2. Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).	B.3.1 B.2.2	Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
			Resuelve actividades y problemas sobre escalas.
			Resuelve problemas de proporcionalidad geométrica y proporción áurea.
Competencia específica 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de	6.1. Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemática y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.	B.1.1 B.2.1 B.2.2 B.3.1	Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
			Resuelve actividades y problemas sobre escalas.
			Resuelve problemas de proporcionalidad geométrica y proporción áurea.

salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.			Aplica el teorema de Tales.
Competencia específica 7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.	7.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden a la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.	B.1.1	Clasifica figuras geométricas según sus ángulos y lados.
		B.2.1	Aplica las propiedades de los polígonos para realizar cálculos.
		B.2.2	Construye triángulos.
		B.3.1	Identifica figuras semejantes y calcula su razón de semejanza.
			Aplica el teorema de Tales.
			Aplica las razones de semejanza en perímetros, áreas y volúmenes.
Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	E.1.1	Pone a prueba sus aprendizajes.
		E.1.2	Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas.
		E.1.3	Analiza una actividad resuelta y resuelve otras similares a partir de ella.
		E.1.4	
			Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación.
			Usa la semejanza para mejorar la gestión de residuos en las ciudades haciéndolas más sostenibles
Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la	E.2.1	Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo.
		E.2.2	
		E.3.1	Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.
		E.3.2	
bienestar personal. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.		Se implica en las propuestas en común de clase.

Bloque 2. Situación de aprendizaje 2. Movimientos en el plano: creando belleza.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.	6.1. Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemática y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. 6.2. Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados. 6.3. Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.	B.1.1 B.2.1 B.2.2 B.3.1	Conoce el concepto de vector, calcula sus coordenadas y su suma.
			Reconoce y realiza simetrías axial y central.
			Identifica ejes y centro de simetría y los utiliza para realizar construcciones.
			Identifica y realiza composiciones de movimientos en figuras planas, las organiza mediante un flujograma y analiza el proceso inverso.
			Relaciona el arte de frisos y mosaicos con la simetría y los movimientos realizados para construirlos.
			Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
Competencia específica 7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.	7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información. 7.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden a la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.	B.1.1 B.2.1 B.2.2 B.3.1	Utiliza vectores para realizar traslaciones.
			Utiliza herramientas TIC para el aprendizaje de los contenidos.
			Aplica giros a figuras planas.
			Identifica ejes y centro de simetría y los utiliza para realizar construcciones.
			Identifica y realiza composiciones de movimientos en figuras planas, las organiza mediante un flujograma y analiza el proceso inverso.
			Realiza sus propios frisos y mosaicos.
Competencia específica 8. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.	8.1. Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. 8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.	B.1.1 B.2.1 B.3.1	Reconoce y realiza simetrías axial y central.
			Identifica ejes y centro de simetría y los utiliza para realizar construcciones.
			Valora los movimientos y la simetría en el arte como punto común entre personas y culturas.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.			Utiliza herramientas TIC para el aprendizaje de los contenidos.
Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	E.1.1	Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
		E.1.2	Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación.
		E.1.3	
		E.1.4	Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas.
			Pone a prueba sus aprendizajes.
			Valora los movimientos y la simetría en el arte como punto común entre personas y culturas.
Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	E.2.1	Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo.
		E.2.2	
		E.3.1	Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.
		E.3.2	
			Se implica en el trabajo en equipo.

Bloque 2. Situación de aprendizaje 3. Dando forma a nuestro entorno.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.	1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. 1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.	B.1.1	Calcula el área y el volumen de cuerpos geométricos simples.
		B.3.1	Aplica el teorema de Pitágoras en cuerpos geométricos.
			Calcula el área y el volumen de cuerpos geométricos complejos.
			Conoce las coordenadas geográficas y cómo usarlas.
			Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
Competencia específica 2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.	2.2. Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).	B.1.1	Calcula el área y el volumen de cuerpos geométricos simples.
		B.2.2	Aplica el teorema de Pitágoras en cuerpos geométricos.
		B.3.1	Calcula el área y el volumen de cuerpos geométricos complejos.
			Conoce las coordenadas geográficas y cómo usarlas.
			Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
Competencia específica 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.	6.1. Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemática y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. 6.3. Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.	B.1.1	Reconoce las características de los poliedros y los cuerpos de revolución.
		B.3.1	Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
			Identifica simetrías en el espacio.
			Conoce las coordenadas geográficas y cómo usarlas.
Competencia específica 7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías,	7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad	B.1.1 B.2.1 B.2.2	Reconoce las características de los poliedros y los cuerpos de revolución.

para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.	para compartir información. 7.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden a la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.	B.3.1	Identifica simetrías en el espacio.
			Utiliza herramientas TIC para el aprendizaje de los contenidos.
Competencia específica 8. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.	8.1. Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. 8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.	B.2.1	Reconoce las características de los poliedros y los cuerpos de revolución.
		B.2.2	Calcula el área y el volumen de cuerpos geométricos simples.
		B.3.1	
			Calcula el área y el volumen de cuerpos geométricos complejos.
			Conoce las coordenadas geográficas y cómo usarlas.
			Identifica simetrías en el espacio.
Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	E.1.1	Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
		E.1.2	Analiza una actividad resuelta y resuelve otras similares a partir de ella.
		E.1.3	Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación.
		E.1.4	
			Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas.
			Pone a prueba sus aprendizajes.
			Reflexiona sobre la eficiencia del reciclado con ayuda de la geometría.
Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados.	E.2.1	Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo.
		E.2.2	
		E.3.1	

heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	E.3.2	Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.
---	---	--------------	---

BLOQUE 3. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 1. FRACTALES, LA BELLEZA MATEMÁTICA DE LAS SUCESIONES.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3.	3.1. Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.	A.4.1	Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
		C.1.1	Calcula términos de una sucesión dado el término general.
		C.2.1	Halla el término general o la ley de recurrencia de una sucesión.
		C.2.2	Halla el término general de una progresión aritmética o geométrica y lo utiliza para realizar cálculos.
		C.2.3	Halla la suma de términos de una progresión aritmética o geométrica.
Competencia específica 4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.	4.1. Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional. 4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos.	A.4.3	Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
		C.1.1	Calcula términos de una sucesión dado el término general.
		C.6.1	Halla el término general y la ley de recurrencia de una sucesión y los aplica para calcular términos.
		C.6.3	Halla el término general de una progresión aritmética o geométrica y lo utiliza para realizar cálculos.
			Halla la suma de términos de una progresión aritmética o geométrica.
Competencia específica 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.	6.1. Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemática y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. 6.2. Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados.	A.4.3	Trabaja con aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
		C.1.1	
		C.2.1	
		C.2.3	
			Relaciona contenidos de este tema con otras áreas del saber.
Competencia específica 7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos	7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas, las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información.	A.4.3	Comprueba la validez de un resultado usando la calculadora.
		C.2.1	Utiliza herramientas TIC para el aprendizaje de los contenidos.

matemáticos. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.		C.2.2	Reconoce patrones y los utiliza para hacer predicciones.
Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	A.4.3 C.1.1 E.1.1 E.1.2 E.1.3 E.1.4	Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación.
			Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas.
			Pone a prueba sus aprendizajes.
			Se concienza a si mismo y a los demás sobre la importancia de conservar a las abejas.
Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	A.4.3 C.1.1 E.2.1 E.2.2 E.3.1	Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo.
			Mantiene el nivel de ruido
			Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.

Bloque 3. Situación de aprendizaje 2. El lenguaje de las matemáticas.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3.	3.2. Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema. 3.3. Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.	C.2.1	Analiza una actividad resuelta y resuelve otras similares a partir de ella.
		C.3.1	Comprueba la validez de un resultado usando una calculadora algebraica
		C.3.6	Utiliza herramientas TIC para profundizar en el aprendizaje de los contenidos.
Competencia específica 4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.	4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos.	B.3.1	Traduce del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.
		C.3.1	Calcula el valor numérico de una expresión algebraica.
		E.1.3	Resuelve problemas utilizando expresiones algebraicas.
		E.1.4	Reconoce los monomios, los polinomios y los elementos de cada uno de ellos.
			Opera con monomios y polinomios.
			Aplica las identidades notables para desarrollar expresiones.
			Factoriza polinomios utilizando distintas técnicas.
Competencia específica 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.	6.1. Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemática y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. 6.2. Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados.	B.3.1	Resuelve problemas utilizando expresiones algebraicas.
		E.1.4	Trabaja con aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
			Utiliza organizadores para analizar cómo cambia un resultado si varían los datos de un problemas.
			Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas.
			Relaciona contenidos de este tema con otros aspectos de las matemáticas.
			Relaciona contenidos de este tema con otras áreas del saber.
			Evalúa si una expresión es correcta y la corrige en caso de error.
			Explica si una afirmación es verdadera o falsa aportando evidencias.

Competencia específica 7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.	7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas, las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información. 7.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden a la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.	C.2.1	Utiliza herramientas TIC para profundizar en el aprendizaje de los contenidos.
		C.3.1	Traduce del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.
Competencia específica 8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.	8.1. Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. 8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.	B.3.1	Traduce del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.
		C.2.1	Reconoce los monomios, los polinomios y los elementos de cada uno de ellos.
		C.3.1	

Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	C.2.1 C.3.1 E.1.1 E.1.2 E.1.3 E.1.4	Evalúa si una expresión es correcta y la corrige en caso de error.
			Justifica sus argumentos aportando evidencias.
			Pone a prueba sus aprendizajes.
			Analiza una actividad resuelta y resuelve otras similares a partir de ella.
			Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación.
			Utiliza organizadores para analizar cómo cambia un resultado si varían los datos de un problema.
			Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas.
Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	C.2.1 C.3.1 E.2.1 E.2.2 E.3.1	Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo.
			Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.
			Presta ayuda cuando alguien la necesita.

Bloque 3. Situación de aprendizaje 3. Igualdades que resuelven problemas.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.	2.2. Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).	B.3.1	Comprueba la validez de un resultado usando la calculadora.
		C.2.1	Utiliza herramientas TIC para profundizar en el aprendizaje de los contenidos.
		C.4.1	
		C.4.2	Justifica sus argumentos aportando evidencias.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.		C.4.3	Resuelve problemas utilizando ecuaciones.
		C.4.4	Resuelve problemas utilizando sistemas de ecuaciones.
		E.1.3	
Competencia específica 3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3.	3.3. Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.	B.3.1	Comprueba la validez de un resultado usando una calculadora algebraica.
		C.2.1	
		C.4.4	
		E.1.3	Utiliza herramientas TIC para profundizar en el aprendizaje de los contenidos.
Competencia específica 4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.	4.1. Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional.	B.3.1	Descubre e identifica distintos tipos de ecuaciones.
		C.2.1	Expresa mediante ecuaciones situaciones propias de las matemáticas y de la vida cotidiana.
	4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos.	C.4.1	
		C.4.2	Realiza transformaciones para obtener ecuaciones equivalentes.
		C.4.3	Resuelve ecuaciones de primer y segundo grado y comprueba resultados.
		C.4.4	
		C.6.1	Identifica el número de soluciones de una ecuación.
		C.6.2	
		C.6.3	Resuelve ecuaciones de grado superior que pueden reducirse a ecuaciones de segundo grado.
		E.1.1	
		E.1.2	Resuelve problemas utilizando ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
		E.1.3	
		E.1.4	Clasifica sistemas de ecuaciones según el número de soluciones que tienen.

			Realiza transformaciones en sistemas de ecuaciones para obtener otros equivalentes.
			Resuelve sistemas de ecuaciones.
			Resuelve problemas utilizando sistemas de ecuaciones.
			Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas.
Competencia específica 5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas con un todo integrado.	5.2. Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.	C.4.2	Resuelve ecuaciones de primer y segundo grado y/o comprueba resultados.
		C.4.3	
		C.6.1	Resuelve ecuaciones de grado superior que pueden reducirse a ecuaciones de segundo grado.
		C.6.2 C.6.3	Resuelve sistemas de ecuaciones.
Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.			Realiza transformaciones en sistemas de ecuaciones para obtener otros equivalentes.
			Relaciona contenidos de este tema con otros aspectos de las matemáticas.
Competencia específica 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.	6.1. Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemática y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. 6.2. Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados. 6.3. Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.	C.2.1 E.1.4	Relaciona contenidos de este tema con otras áreas del saber.
			Trabaja con aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.
Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	C.2.1	Analiza una actividad resuelta y resuelve otras similares a partir de ella.
		C.2.3	
		E.1.1	Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación.
		E.1.4	Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas.
			Pone a prueba sus aprendizajes.
			Justifica sus argumentos aportando evidencias.

y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.			Reflexiona sobre la igualdad de oportunidades entre los hombres y las mujeres.
Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	C.2.1 C.2.3 E.2.1 E.2.2 E.3.1	Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo.
			Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.
			Ayudar dando pistas.

Bloque 3. Situación de aprendizaje 4. Funciones: modelos para estudiar la realidad.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.	1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. 1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.	A.5.2	Analiza aspectos de la vida cotidiana a través de las funciones.
		C.2.1	Modeliza situaciones con funciones para comprenderlas y extraer conclusiones.
		C.2.2	Modeliza situaciones con funciones para comprenderlas y extraer conclusiones.
		C.3.1	Conoce el concepto de función, cómo expresarlas y sus elementos principales.
		C.4.1	Conoce el concepto de función, cómo expresarlas y sus elementos principales.
		C.5.1	Estudia las propiedades de una función a través de su gráfica y su expresión algebraica.
		C.5.2	Estudia las propiedades de una función a través de su expresión algebraica.
Competencia específica 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.	6.1. Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemática y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. 6.2. Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados. 6.3. Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.	C.5.3	Estudia las propiedades de una función a través de su expresión algebraica.
		C.5.4	Estudia las propiedades de una función a través de su expresión algebraica.
			Maneja distintas formas de expresar la ecuación de una recta identificando además su pendiente y su ordenada en el origen.
			Estudia la posición relativa de dos rectas y escribe rectas paralelas a una dada.
		A.5.2	Modeliza situaciones con funciones para comprenderlas y extraer conclusiones.
		C.2.1	Modeliza situaciones con funciones para comprenderlas y extraer conclusiones.
		C.2.2	Modeliza situaciones con funciones para comprenderlas y extraer conclusiones.
Competencia específica 7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.	7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas, las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información. 7.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden a la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.	C.3.1	Analiza aspectos de la vida cotidiana a través de las funciones.
		C.4.1	Relaciona contenidos de este tema con otras áreas del saber.
		C.5.1	Relaciona contenidos de este tema con otras áreas del saber.
		C.5.2	Estudia la posición relativa de dos rectas y escribe rectas paralelas a una dada.
		C.5.3	Estudia la posición relativa de dos rectas y escribe rectas paralelas a una dada.
		C.5.4	Estudia la posición relativa de dos rectas y escribe rectas paralelas a una dada.
			Estudia la posición relativa de dos rectas y escribe rectas paralelas a una dada.
		C.2.1	Utiliza herramientas TIC como punto de apoyo para el aprendizaje.
		C.2.3	Utiliza herramientas TIC como punto de apoyo para el aprendizaje.
		C.3.1	Estudia las propiedades de una función a través de sus gráficas.
		C.3.2	Estudia las propiedades de una función a través de sus gráficas.
		C.3.3	Analiza y representa funciones lineales y cuadráticas.
		C.5.1	Reconoce y representa funciones definidas a trozos.
		C.5.3	Reconoce y representa funciones definidas a trozos.
		C.5.4	Modeliza situaciones con funciones para comprenderlas y extraer conclusiones.
			Modeliza situaciones con funciones para comprenderlas y extraer conclusiones.

Competencia específica 8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.	8.1. Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. 8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.	A.5.2 C.2.1 C.2.3 C.3.1 C.4.1 C.5.1 C.5.2 C.5.3 C.5.4	Estudia las propiedades de una función a través de sus gráfica. Analiza aspectos de la vida cotidiana a través de las funciones. Modeliza situaciones con funciones para comprenderlas y extraer conclusiones.
Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	C.5.1 C.5.3 C.5.4 E.1.1 E.1.2 E.1.3 E.1.4	Reflexiona sobre sus conocimientos matemáticos para generalizar dicho aprendizaje y resolver situaciones nuevas. Reflexiona sobre su proceso de aprendizaje. Pone a prueba sus aprendizajes. Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación. Analiza un ejemplo o actividad resuelta y resuelve otras similares a partir de ella. Analiza aspectos de la vida cotidiana a través de las funciones. Establece relaciones entre las matemáticas y el mundo real. Toma conciencia de la importancia de ahorrar energía.

Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	C.5.1 C.5.3 C.5.4 E.2.1 E.2.2 E.3.1 E.3.2	Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo. Respetar el turno de palabra.
--	--	--	--

Bloque 4. Situación de aprendizaje 1. Estadística: organizando información.

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS	INDICADORES DE LOGRO
Competencia específica 1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.	1.1. Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. 1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.	D.1.1	Diferencia entre población y muestra.
		D.1.2	Clasifica variables estadísticas.
		D.1.3	Organiza datos en tablas de frecuencias y reflexiona sobre su significado.
		D.1.4	Representa la información mediante gráficos.
		D.1.5	
		D.1.6	
		D.1.7	Interpreta los datos representados mediante gráficos.
		D.1.8	
		D.1.9	Analiza los datos calculando los parámetros de posición, de dispersión y el coeficiente de variación.
Competencia específica 2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.	2.2. Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).	D.2.2	
		D.2.3	
		D.2.4	Resuelve problemas utilizando herramientas estadísticas.
		D.1.4	Resuelve problemas utilizando herramientas estadísticas.
		D.2.4	Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas.

Competencia específica 7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.	7.1. Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas, las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información.	D.1.5	Representa la información mediante gráficos.
Competencia específica 8. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error	8.1. Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los	D.1.5 D.1.6	Diferencia entre población y muestra.
		D.1.7 D.1.8 D.2.1	Clasifica variables estadísticas.

como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.	digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. 8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.	D.2.4	Organiza datos en tablas de frecuencias y reflexiona sobre su significado. Representa la información mediante gráficos.
Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.	9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	E.1.1 E.1.2 E.1.3 E.1.4	Trabaja aspectos de la vida cotidiana relacionados con las matemáticas. Analiza e interpreta con sentido crítico los datos con los que se trabaja. Analiza una actividad resuelta y resuelve otras similares a partir de ella. Realiza algún tipo de elaboración de la información para facilitar su asimilación. Justifica argumentos en la resolución de problemas aportando evidencias. Pone a prueba sus aprendizajes. Saca conclusiones sobre el problema del calentamiento global utilizando la estadística
Competencia específica 10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables. Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.	10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados. 10.2. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.	E.2.1 E.2.2 E.3.1	Trabaja en equipo de forma respetuosa con los compañeros responsabilizándose del trabajo final creado por el equipo. Utiliza técnicas cooperativas sencillas para el trabajo en equipo.

ANEXO 2

ENUNCIADO DEL PROYECTO COLABORATIVO

FRACTALES, LA BELLEZA MATEMÁTICA DE LAS SUCESIONES.

OBJETIVO GENERAL DEL PROYECTO

Explorar, comprender y representar un fractal matemático, analizando su relación con las sucesiones, y mostrar sus conexiones con fenómenos naturales, artísticos o tecnológicos.

TRABAJO PARA REALIZAR EN EQUIPO

En grupos de 3 personas preferiblemente, se realizar un trabajo sobre uno de los fractales de la siguiente lista propuesta o también se aceptan otros fractales o inventados por el grupo, previa consulta al profesor:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| 1. Conjunto de Cantor. | 7. Sucesión de Fibonacci. |
| 2. Alfombra de Sierpinski. | 8. Sucesión de Pell. |
| 3. Triángulo de Sierpinski. | 9. Esponja de Menger. |
| 4. Curva del Dragón. | 10. La curva de Hilbert: |
| 5. Copo de nieve de Koch. | 11. La curva de Peano. |
| 6. Pentacopo. | |

TAREAS PARA REALIZAR SOBRE EL FRACTAL SELECCIONADO

1. Breve historia sobre su creador.
2. Forma de construcción del fractal.
3. Investigación sobre la sucesión que genera atendiendo a alguno de los siguientes parámetros: número de segmentos, longitud del segmento, área...
4. Construir la sucesión indicando el valor de cada uno de los términos y término general.
5. ¿Dónde aparece este fractal en la naturaleza, arte, ciencia o tecnología?
6. Construir el fractal manipulativamente, utilizando materiales como papel, cartulina, palillos, rotuladores, etc.
7. Preparar una pequeña exposición en Power Point, Canvas, Genially ... para exponer al resto de la clase.
Cada grupo dispondrá entre 5 y 8 minutos para exponer su trabajo.

EVALUACIÓN

Cada grupo evaluará la presentación del resto de grupo junto con la evaluación del profesor mediante una rúbrica que se proporciona. La nota sobre 10, hará media con le resto de trabajos de clase que suponen un 15% de la nota final.

FECHAS

Una semana para subir el archivo digital al campus virtual. Presentación de los trabajos en la última sesión del tema.

ANEXO 3

RÚBRICA DEL TRABAJO EN EQUIPO

RÚBRICA DE EVALUACIÓN				
CRITERIO PARA VALORAR	PARTICIPANTE 1 Nombre: Apellidos:	PARTICIPANTE 2 Nombre: Apellidos:	PARTICIPANTE 3 Nombre: Apellidos:	GRUPO
<i>Proceso comunicativo</i>				
<i>Comprensión matemática del fractal</i>				
<i>Construcción del fractal</i>				
<i>Valoración de la presentación digital</i>				
<i>Tiempo de exposición</i>				
<i>Contestación a preguntas o dudas</i>				

1.- Muy insuficiente 2.- Insuficiente 3.- Aceptable 4.- Notable 5.- Excelente

La nota de cada participante será el 50% de la valoración obtenida por el mismo y el 50% de la valoración del grupo.

ANEXO 4

EJERCICIOS DE CONSOLIDACIÓN

SUCESIONES

Ejercicios

E-1: Indica cual es cada uno de los términos de la siguiente sucesión:

- a) a_2, a_4, a_6 en la sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12...
- b) b_1, b_3, b_5 en la sucesión: 10, 7, 4, 1, -2, -5...
- c) c_3, c_4, c_6 en la sucesión: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}...$

E-2: Indica los tres siguientes términos de la sucesión y explica como los has obtenido:

- a) 100, 90, 80, 70...
- b) 2, 6, 18, 54...
- c) 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}...$
- d) 1, 3, 6, 10, 15...

E-3: Observa los términos de estas sucesiones, deduce su término general y calcula el valor del término número 12 en cada caso.

- a) 2, 5, 8, 11, 14...
- b) 1, 4, 10, 20, 35...
- c) 100, 50, 25, 12.5...
- d) 1, -1, 1, -1, 1...

E-4: Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.

- a) $a_n = 2n + 1$
- b) $b_n = (-1)^n \cdot n$
- c) $c_n = 10 - n^2$
- d) $d_n = \frac{1}{n+1}$

E-5: Dadas las sucesiones $a_n = 2n + 1$ y $b_n = n^2$, calcular:

- a) $a_n + b_n$
- b) $a_n - b_n$
- c) $a_n \cdot b_n$
- d) $a_n : b_n$
- e) $3 \cdot a_n$

E-6: Dadas las sucesiones 4, 9, 16, 25, ... y 1, 3, 5, 7, ..., calcular:

- a) La diferencia de las sucesiones.
- b) El término general de la sucesión diferencia.

E-7: Dada la sucesión $c_n = n^2 + 2n$

- a) Encuentra dos sucesiones tales que $c_n = a_n + b_n$
- b) Escribe los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones.

E-8: Dada la sucesión 2, 10, 30, 68, ...

- a) Exprésala como suma de dos sucesiones.
- b) Halla el término general de cada una de ellas.

E-9: Comprueba si las siguientes sucesiones son aritméticas y, en caso afirmativo, indica la diferencia y el término general:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a) 1, 5, 11, 16, 21 ... | c) 32, 22, 12, 2, ... |
| b) 6, 6, 6, 6, 6, ... | d) 4, 54, 104, 154, ... |

E-10: Escribe los seis primeros términos de la progresión aritmética en la que $a_3 = 12$ y la diferencia $d = 4$

E-11: ¿Es una progresión aritmética la sucesión 5, 9, 13, 17, ...? Si continua así, ¿Cuánto vale el término que ocupa la posición 500?

E-12: En una sucesión $a_2 = 60$ y $a_7 = 80$ ¿Cuánto vale la diferencia? ¿Cuánto vale el término primero y el décimo?

E-13: En la progresión aritmética 7, 10, 13, 16, ... 88. Calcula la suma de todos los términos hasta llegar a 88.

E-14: En una progresión aritmética, $a_5 = 24$ y $d = -2$. Calcula la suma de los cinco primeros términos de la progresión.

E-15: En una progresión aritmética, $a_1 = 5$ y $a_9 = 37$. Calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión.

E-16: En una progresión aritmética, la suma de los siete primeros términos es 126 y $a_1 = 3$ Calcula:

- a) El término a_7 .
- b) La expresión del término general.

E-17: En una progresión geométrica $a_1 = 5$ y $r = 3$. Escribe los siete primeros términos.

E-18: En una progresión geométrica el primer término es 4 y la razón 6. Escribe la formula que da el término general.

E-19: Encuentra la posición que ocupa 486 en la progresión geométrica cuyos términos primero y tercero son 2 y 18, respectivamente.

E-20: Calcula los términos que faltan en la progresión geométrica 10, a, b, 640, ...

E-21: Calcula la suma de los seis primeros términos de la progresión geométrica en la que $a_4 = 9$ y la razón $r = 1/3$.

E-22: Escribe los siete primeros términos de una progresión geométrica de primer término 3 y razón 2. Halla su suma

E-21: Dada la sucesión geométrica $a_n = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ Calcula:

- El valor de a_3 , a_5 y a_7
- La suma de los diez primeros términos de la sucesión.
- ¿Cuánto se aproxima la suma infinita de esta sucesión?

Problemas

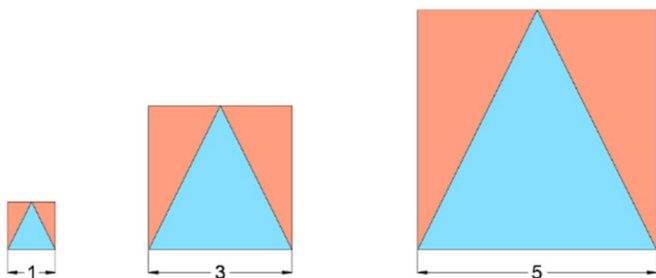
P-1: En un instituto están reformando un antiguo patio rectangular. Deciden decorarlo colocando baldosas cuadradas formando una figura triangular escalonada:

- En la primera fila colocan 1 baldosa.
- En la segunda fila, colocan 3 baldosas.
- En la tercera fila, colocan 5 baldosas.

Y así sucesivamente, aumentando el número de baldosas por fila según ese patrón.

- ¿Cuántas baldosas necesitará el encargado de la obra quiere saber si decide poner 20 filas siguiendo esa distribución?
- ¿Cuántas baldosas hay en la fila número 10? ¿Y en la fila número 20?
- ¿Podrías encontrar una expresión general para calcular el número de baldosas totales hasta una fila n ?

P-2: Una serie de triángulos isósceles están contenidos en unos cuadrados que tienen la misma base. Si las medidas de las bases en cm siguen la sucesión 1, 3, 5, 7, ... calcular:



medidas de las bases en cm siguen la sucesión 1, 3, 5, 7, ... calcular:

- La sucesión del perímetro del triángulo y cuadrado.
- La sucesión de sus áreas.
- La sucesión diferencia entre el área del cuadrado y del triángulo.

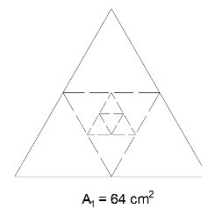
Ilustración 33.- Imagen auxiliar del problema P-2

P-3: El alquiler de una bici cuesta la primera hora 5 euros, y 3 euros más cada nueva hora. Escribe la sucesión aritmética del coste del alquiler de los patines durante 1, 2, 3, 4, 5, ... horas ¿Cuál es el coste durante n horas?

P-4: Halla los ángulos de un triángulo, sabiendo que están en progresión aritmética y que la diferencia de la progresión es igual al menor de los ángulos.

P-5: María quiere ahorrar dinero para un viaje que hará dentro de 6 meses. Decide comenzar ahorrando 10 euros el primer día del mes y aumentar la cantidad que ahorra en 5 euros cada mes. Es decir, el segundo mes ahorra 15 €, el tercero 20 €, y así sucesivamente.

- a) ¿Cuánto dinero habrá ahorrado en total al final de los 6 meses?
- b) Si en lugar de aumentar 5 €, hubiera decidido aumentar 10 € cada mes, ¿cuánto habría ahorrado al final?



P-6: A un triángulo de área 64 cm^2 Se le unen los puntos medios de cada lado y se forma otro triángulo. Si se repite el proceso, se obtiene una sucesión de triángulos.

- a) Escribe la sucesión de las áreas.
- b) ¿Qué tipo de sucesión es?
- c) ¿Cuál es el término general de la sucesión?

Ilustración 34.- Imagen auxiliar del problema P-6

P-7: Un nuevo virus se propaga en una célula. Al infectar una célula, el virus duplica su cantidad cada hora. Supongamos que al comenzar (hora 0) hay 1 solo virus.

- a) ¿Cuántos virus habrá después de 1, 2, 3... hasta 10 horas?
- b) ¿Qué tipo de sucesión sigue esta evolución?
- c) Si una célula muere al alcanzar 1 millón de virus, ¿en qué hora ocurrirá?

P-8: Se construye una torre utilizando bloques de madera. El primer nivel de la torre tiene 243 bloques. Cada nivel superior tiene una tercera parte de los bloques del nivel anterior. Así, el segundo nivel tiene 81 bloques, el tercero 27, y así sucesivamente.

- d) ¿Cuántos bloques tendrá el quinto nivel de la torre?
- e) ¿Cuál es el número total de bloques utilizados en los 6 primeros niveles?
- f) Si la torre se construye indefinidamente siguiendo este patrón, ¿cuál es el número total de bloques que se necesitarían?

ANEXO 5

ENUNCIADO DEL TRABAJO EN CAD

DISEÑA TU SUCESIÓN O FRACTAL CON CAD

OBJETIVO GENERAL DEL PROYECTO

Utilizando el programa de diseño asistido por computadora (CAD) que hemos trabajado en clase, diseña de manera individual dos dibujos que represente:

- Una sucesión matemática (puede ser aritmética, geométrica u otra que hayas inventado), y otro
- Un fractal, creado por invención propia.

El objetivo es aplicar los conocimientos aprendidos durante el tema de sucesiones, integrándolos con herramientas de diseño digital, fomentando así la creatividad, la precisión y la interpretación visual de patrones matemáticos.

REQUISITOS MÍNIMOS

- El dibujo debe contener al menos 5 elementos repetidos o iterados.
- Debe ser construido con comandos básicos de CAD: líneas, copias, giros, escalas o matrices.
- Debe estar acompañado de un título y una breve explicación (3-5 líneas) indicando qué tipo de sucesión o fractal representa y cómo ha sido construida.
- El archivo debe ser entregado en formato CAD y exportado como imagen JPG o PNG, subido a través del aula virtual.

EVALUACIÓN

Se considerará como parte de la evaluación de las tareas realizadas en casa.

FECHA LÍMITE

1 semana para su entrega.