



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Didáctica de las CC.EE., CC.SS. y de la Matemática

DISEÑO Y ANÁLISIS DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA 2º ESO, CON ESPECIAL ÉNFASIS EN LOS PROCESOS DE REPRESENTACIÓN, RAZONAMIENTO, COMUNICACIÓN Y DISCUSIÓN, EN SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación
Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza
de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna/o: Miguel Ángel López Albertos

Tutor: Dr. Matías Arce Sánchez

Valladolid, julio 2025

Resumen

La normativa actual (LOMLOE), así como los planteamientos del NTCM (*National Council of Teachers of Mathematics*), abogan por un aprendizaje activo para que el alumno desarrolle un pensamiento lógico, crítico y creativo. Los procesos de representación, conjeturación, demostración y comunicación de ideas matemáticas son fundamentales para lograr ese conocimiento constructivo, al tiempo que potencian el autoconcepto.

A través de las actividades propuestas en el siguiente trabajo relativas a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, se pretende que el alumno trabaje esos procesos, incorporando una visión completa, promoviendo la reflexión y la comprensión de los conceptos experimentando mediante prácticas guiadas con GeoGebra, de tal forma que se lleguen a conclusiones basadas en la propia experiencia, viviendo el proceso del aprendizaje en primera persona. Se ha optado mayoritariamente por trabajo grupal, pues a parte de contribuir a las competencias clave de la etapa, introduce la discusión y debate como herramienta para contrastar ideas y opiniones, contribuyendo a la construcción de un conocimiento, inspiración de la teoría Constructivista de Vygotsky.

Se trata, en definitiva, trabajar sobre actividades que involucren al alumnado en su aprendizaje de forma participativa, dejando de un lado la fórmula de clase magistral pasiva para dar paso a la exploración de la materia mediante la manipulación dinámica de los elementos que la constituyen.

Palabras clave:

Sistemas de ecuaciones lineales, representación, visualización, conjeturación, demostración, comunicación.

Abstract

The current regulations (LOMLOE), as well as the approaches of the NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), advocate for active learning so that students can develop logical, critical, and creative thinking. The processes of representation, conjecture, proof, and communication of mathematical ideas are fundamental to achieving this constructive knowledge, while also enhancing students' self-concept.

Through the activities proposed in the following work, related to solving systems of linear equations, the aim is for students to engage with these processes, incorporating a comprehensive perspective that promotes reflection and understanding of concepts by experimenting through guided practices using GeoGebra. This approach allows students to reach conclusions based on their own experiences, living the learning process firsthand. Group work has been predominantly chosen, as it not only contributes to the key competencies of the educational stage but also introduces discussion and debate as tools to contrast ideas and opinions, thereby contributing to the construction of knowledge, inspired by Vygotsky's Constructivist theory.

Ultimately, the goal is to work on activities that involve students in their learning in an active and participatory manner, moving away from the passive lecture format and instead exploring the subject matter through the dynamic manipulation of its elements.

Keywords:

Linear equation systems, representation, visualization, conjecture, demonstration.

INDICE

I.	Introducción.....	1
1.1.	Objetivos del TFM.....	3
1.2.	Contribución de las enseñanzas del Máster a este TFM	4
II.	Marco teórico.....	9
2.1.	Constructos utilizados.....	14
2.2.	Antecedentes: dificultades en la resolución de S. E. Lineales.....	19
III.	Marco legal	24
IV.	Propuesta didáctica	28
4.1.	Contextualización	28
4.2.	Fundamentación curricular.....	34
4.2.1.	Objetivos de la etapa	34
4.2.2.	Objetivos pedagógicos.....	36
4.2.3.	C. Específicas, descriptores operativos, criterios de evaluación.	37
4.2.4.	Instrumentos de evaluación	39
4.3.	Metodología	47
4.3.1.	Métodos, estilos, estrategias y técnicas.	47
4.3.2.	Organización del alumnado y agrupamientos.	48
4.3.3.	Cronogramas y organización de tiempo	49
4.3.4.	Materiales y recursos	49
4.4.	Actividades programadas.....	50
4.4.1.	Actividad 1: Recordando	50
4.4.2.	Actividad 2: Ecuaciones lineales con dos incógnitas	56
4.4.3.	Actividad 3: Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas	61
4.4.4.	Actividad 4: Métodos de resolución. ABP	67
4.4.5.	Actividad 5: Escape room.....	71
4.5.	Atención a la diversidad del aula.....	73
4.6.	4.6 Estudio de la posible respuesta del alumnado a las actividades	75
4.7.	Valoración de la situación de aprendizaje.....	81
V.	Conclusiones.....	83
VI.	Referencias bibliográficas	85
VII.	Anexos.....	89

I Introducción

El presente trabajo fin de máster pretende, a través de varias actividades, trabajar los procesos de representación, conjeturación, razonamiento y comunicación en el ámbito de los **sistemas de ecuaciones lineales**, incluyendo el intercambio de ideas y su discusión.

El Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, dice que “las situaciones de aprendizaje se conciben como la herramienta imprescindible para que el alumnado adquiera en primer término las competencias específicas de la materia o materias correspondientes, como en definitiva las competencias clave del Perfil de salida y los objetivos de etapa. Indica así mismo que se deberán plantear en formato de situación problema en un contexto determinado, estar compuesta por tareas de creciente complejidad, en función del nivel psicoevolutivo del alumnado, y cuya resolución creativa implique la movilización de manera integrada de lo adquirido y aprendido en las materias que integran la etapa y conlleve la construcción de nuevos aprendizajes”.

En esencia se trata de escenarios cuya función es fomentar el aprendizaje activo, significativo, relevante y contextualizado. Los estudiantes de este modo construyen su conocimiento con autonomía, iniciativa y creatividad desde sus propios aprendizajes y experiencias.

Mediante un planteamiento retador y motivador, se plantean problemas o situaciones de complejidad variable, que deben ser resueltas, unas partes a título individual, otras en modo cooperativo, con el fin último de reforzar el autoconcepto, la autonomía, la iniciativa, la reflexión crítica y la responsabilidad. Durante el proceso desarrollan y ponen en juego las capacidades del alumnado, así como procesos mentales profundos, como el razonamiento, la conjeturación, argumentación y comunicación y, llegado el caso, demostración y el debate.

Las propuestas incluidas en el presente TFM, además de lo anterior, están diseñadas de tal forma que, partiendo de la visualización de un concepto (ecuación de la recta, intersección de dos rectas, variación de los parámetros de la ecuación, etc....mediante la aplicación dinámica GeoGebra) y, mediante preguntas o afirmaciones guía, el alumno realice conjeturas encaminadas a la adquisición de conocimientos: solución del sistema, bien si es única, no existe o infinitas, e interpretar en qué medida esa solución satisface todas las ecuaciones del sistema.

Podría decirse que se trata del procedimiento inverso al habitual en este tipo de actividades, en las que en primera instancia se explican los contenidos en una clase magistral para, acto seguido, mostrar una representación alternativo de ese conocimiento, por ejemplo, gráficamente, para así afianzar lo aprendido. Sin embargo, en ese tipo de metodologías el alumnado sigue siendo un elemento pasivo. Lo que se propone,

por el contrario, es el trabajo a partir de una representación gráfica para llegar, mediante diversas actividades, a las conclusiones teóricas.

Se trata por tanto de una forma más aproximada al razonamiento matemático. No importa si la conjetura es errónea, o se llega a un sinsentido. Lo importante es trabajar sobre lo que se ve y aprender de lo que se deduce. Este planteamiento tiene encaje con los principios del DUA, proporciona múltiples formas y medios de representación, pone en juego múltiples formas de acción y expresión y potencia diferentes modelos de implicación y participación.

Para la puesta en práctica de las situaciones de aprendizaje propuestas se requiere de un espacio suficiente para que los equipos de trabajo que se constituyan puedan desarrollar sus tareas con cierta independencia. El aula puede ser ese espacio, siempre y cuando se pueda adaptar mínimamente a lo requerido. Por otra parte, dado que el aspecto visual se realiza mediante applets de GeoGebra, será necesario contar con tablets u ordenadores. En este caso, es posible llevar la actividad al aula de informática si se dispone de ella.

Para las presentaciones y debates, es muy recomendable disponer de pizarra electrónica donde poder visualizar las conclusiones y aportaciones que lleven a cabo los diversos grupos.

El presente TFM se ha estructurado en torno a siete bloques.

El primero de ellos la introducción, donde se da una idea general del trabajo, que incluye los objetivos planteados, así como una descripción de lo aportado por las distintas asignaturas cursadas a lo largo del periodo lectivo. El segundo expone el marco teórico, con una relación de los constructos utilizados, haciendo mención a las definiciones aportadas por distintos autores y la elección justificada de la más apropiada, según mi criterio. Se incluyen así mismo los antecedentes o referencias a estudios previos tenidos en cuenta. El tercero versa sobre el marco legal y cómo la visión sobre la enseñanza en matemáticas ha ido evolucionando en las distintas leyes educativas. Se presenta también la vinculación de las competencias contempladas en la normativa en vigor con el trabajo propuesto. El cuarto es la propuesta didáctica en sí, con las distintas actividades planteadas, con los elementos que deben ser considerados según anexo II.C Orientaciones para el diseño de desarrollo de situaciones de aprendizaje, del DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. El quinto son las conclusiones, una valoración en conjunto de la propuesta. El sexto es una recopilación de las referencias empleadas. El séptimo son los anexos, en esencia las plantillas de trabajo usadas por los alumnos.

1.1 Objetivos del TFM

- Analizar el rol de los procesos de comunicación, representación, conjeturación y demostración en la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).
- Identificar las dificultades y errores habituales que presentan los estudiantes al resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Diseñar una propuesta didáctica que fomente la conjetura y la argumentación como herramientas de comprensión en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Evaluar el uso y potencial de GeoGebra para facilitar la representación y comunicación de ideas matemáticas en torno a los sistemas de ecuaciones lineales.
- Diseñar y aplicar instrumentos de evaluación que permitan valorar la competencia adquirida en la actividad propuesta.

1.2 Contribución de las enseñanzas del Máster a este TFM

A continuación, se describirá las aportaciones más significativas de las distintas asignaturas cursadas durante el Máster al presente trabajo, bien sea como soporte en la confección de las distintas secciones, bien en calidad de recurso conceptual.

- Aprendizaje y desarrollo de la personalidad

La asignatura se ha estructurado en torno a tres bloques: Desarrollo del adolescente, modelos y teorías explicativas del aprendizaje y por último conceptos de capital importancia para el aprendizaje de las matemáticas: atención, meta-atención, memoria, la teoría de inteligencias múltiples de Gardner, procesos lectura-escritura, inteligencia emocional, estilos y estrategias de aprendizaje, motivación y su mejora.

Se han tenido en cuenta las peculiaridades propias de la edad puestas de manifiesto en la asignatura, todas ellas vinculadas en mayor o menor medida con el aprendizaje de las matemáticas, pues están directamente ligado a la forma en que estas se perciben. Por ello se pretende, mediante las actividades, que el alumnado refuerce la confianza en sacar adelante cada cuestión propuesta, así como fortalecer su iniciativa, idea de pertenencia al grupo al trabajar en equipo y, por parte del docente, tener presente estas circunstancias para conducir con tacto las distintas fases del trabajo, reforzando los aciertos y ayudando a progresar en los errores, entendiendo tales como parte necesaria del proceso de aprendizaje. La idea del docente como modelo está presente, y condicionará la forma de actuar del profesor, transmitiendo seguridad y a la vez motivando. Las distintas teorías del aprendizaje encajan en la propuesta didáctica, al estar diseñadas para que el alumnado adquiera un conocimiento profundo, no meramente memorístico, fundamentado en procesos de razonamiento y conjeturas que, partiendo de conocimientos previos (algunos como el de ecuación, serán recordados y revisados), progrese en el autoconocimiento y, mediante el lenguaje, sea capaz de comunicarlo al resto, lo cual no deja, en el marco de una actividad grupal, de ser un ejercicio de socialización.

- Procesos y contextos educativos.

La asignatura se ha impartido organizada en tres bloques y siete temas. A lo largo de los mismos se ha tratado la situación del Sistema Educativo, la profesión docente, la formación del profesorado, el currículo y ordenación de las enseñanzas, la organización del centro de Secundaria y sus reglamentos internos, la coordinación didáctica y el trabajo en equipo de los profesores, la participación escolar, planes de orientación académica y profesional. Aula: procesos de interacción y comunicación. Estilo docente.

La contribución esencial es, tomando como referencia la normativa en vigor, su estructura y fundamento, la confección de las actividades del trabajo, tomando siempre en consideración el carácter competencial del currículo, así como todos aquellos elementos asociados: competencias específicas, criterios de evaluación,

atención individualizada del alumnado, materia, contenidos de carácter transversal, principios pedagógicos y metodológicos y objetivos de la etapa.

- [Sociedad, familia y educación.](#)

Estudiamos el concepto de Sociología de la Educación. Desarrollamos el concepto de Socialización como elemento constructor de individuo. Aprendimos los tipos de familias y su clasificación atendiendo a la repercusión que, según las distintas teorías, tienen sobre docente. Terminamos con la visión del alumnado como grupo social y su influencia sobre el estudiante. Los efectos perversos que la relación profesor-alumno pueden acarrear y la perspectiva de la escuela como instrumento de dominación.

Para la confección de las actividades se tiene en cuenta el entorno socio-cultural de centro, la tipología del alumnado y la relación en su conjunto de las familias con el alumno (ya que, dependiendo de ello, el soporte que reciben los jóvenes es determinante para su formación, por lo tanto, se considera de cara a la parte del trabajo que se deja para hacer en los hogares).

Consideración especial tiene el hecho de no crear falsas expectativas autocumplidas (efecto Pigmalión), o la asignación de una etiqueta o categoría a un individuo basada en ciertas características, comportamientos o características percibidas.

- [Complementos de matemáticas.](#)

Esta asignatura viene a representar un recordatorio de ciertos contenidos matemáticos que el docente debe manejar dentro del contexto de los cursos en los que desarrollará su actividad docente. La aportación esencial es, en mi caso, una puesta al día con los conceptos, la demostración, la resolución de problemas, el lenguaje matemático y la metodología asociada al aprendizaje de las matemáticas, que tienen su reflejo en la forma de diseñar y presentar las distintas actividades.

- [Didáctica de la matemática.](#)

La asignatura aporta el conocimiento de los principales sistemas de representación dentro del ámbito de la docencia de las matemáticas: representación gráfica (2D y 3D), simbólica, diagrama de árbol, diagrama cartesiano, tablas de contingencia, representación analítica, verbal.

Para el desarrollo de la actividad didáctica propuesta en este TFM, se ha tenido muy presente el contenido de un trabajo desarrollado en esta asignatura, en especial los modelos de representación, pues son el eje fundamental de las distintas actividades elaboradas. En su aplicación para nuestro ejercicio, la fase concreta y pictórica son difíciles de distinguir, al trabajarse el concepto de ecuación y sistema de ecuaciones lineales mediante manipulación, experimentación y visualización con el programa GeoGebra. Gran parte de la fase

abstracta es a la que tienen que llegar los alumnos a través de las distintas herramientas de guía que se les ofrecen.

- [Diseño curricular en matemáticas.](#)

En la asignatura aprendimos el concepto de Currículo a lo largo de las distintas normativas españolas, así como la estructura del mismo. Aprendimos las principales teorías curriculares: Técnica, Práctica y Crítica.

Exploramos las guías de la Junta de Castilla y León para la elaboración de una propuesta curricular y para la programación didáctica, tanto para la ESO, como para el Bachillerato. Trabajamos los principios del DUA, origen, fundamentos, aportaciones y cómo se puede aplicar en la práctica docente en el aula de matemáticas. Se vieron varios modelos estándar para situaciones de aprendizaje, de cara a su aplicación en las diversas propuestas desarrolladas en varias asignaturas. Para terminar, conocimos los pormenores del programa PISA en ámbito de las matemáticas.

Tomando como referencia los distintos modelos trabajados de situaciones de aprendizaje, se confeccionan las distintas actividades del trabajo. Se tuvieron en cuenta los principios del DUA, para tratar de integrar a la totalidad del alumnado en este proyecto, independientemente de sus antecedentes o capacidades. Para ello, se recuperan conocimientos previos en parte de las actividades, de cara a igualar la situación de conocimiento previo entre todos los alumnos. Igualmente se pretende, mediante las distintas etapas, ir asimilando el conocimiento y asentarlo antes de dar el salto al siguiente nivel. El trabajo en equipo tiene carácter colaborativo, donde unos alumnos trabajan juntos, pero también se ayudan unos a otros.

Los modelos de representación propuestos tratan en gran medida de ser un instrumento de marcada inspiración DUA, ya que proporciona múltiples medios de representación, a través del uso de las tecnologías disponibles. Se ponen igualmente en juego varias formas de acción y expresión, en la medida en que los alumnos tendrán la posibilidad de expresar y desplegar sus capacidades de comunicación frente al resto de los equipos. Finalmente, el alumno dispone de distintas maneras de obtener retroalimentación de su progresión: entre los miembros del grupo, del resto de compañeros en las presentaciones, de la guía de profesorado...

Las actividades desarrolladas pretender dar cobertura a los conocimientos requeridos en el DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, para segundo curso de la ESO, D. Sentido algebraico, punto 4. Igualdad y desigualdad: Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales con coeficientes racionales y sistemas de ecuaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana. Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el uso de la tecnología según el grado de dificultad.

- [Ideas y conceptos matemáticos a través de la historia.](#)

La asignatura hace un recorrido por la historia de las matemáticas. La retrospectiva mostrada en la asignatura sirve como referente para apreciar el valor de la contribución individual al avance del conocimiento. Esa misma filosofía se ha aplicado en el proceso de trabajo planteado, al ir de lo sencillo y los conceptos elementales a, progresivamente, conceptos más complejos y evolucionados.

Iniciación a la investigación en matemáticas.

Aunque este TFM no es en sí mismo un trabajo de investigación como tal, sí incluye en sus apartados de una forma u otra la búsqueda de antecedentes y estudios relativos a la problemática del aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales, para lo cual se han de emplear los conocimientos de búsqueda adquiridos de cara a lograr recopilar la información necesaria para poner el contexto el presente trabajo, así como para dotarlo de perspectiva y fundamentar los objetivos.

De igual modo, muchos de los apartados del presente trabajo comparten forma y procedimiento con la metodología Rayuela, por ejemplo, los objetivos, el marco conceptual, la recopilación de información, confiabilidad y validez, e incluso los principios éticos.

- Innovación docente en matemáticas.

Los conocimientos aplicados obtenidos en esta asignatura ayudan a movilizar el pensamiento de los estudiantes mediante la elaboración de tareas matemáticas usando representaciones visuales, físicas, simbólicas, contextuales y verbales, tal y como se pone de manifiesto en el diseño de las actividades, anticipando las respuestas de los estudiantes, planteando preguntas guía como ya se ha comentado para reconducir el razonamiento. Supervisar el trabajo de los estudiantes durante el transcurso de las actividades, promover que los estudiantes expongan su trabajo, ordenar respuestas de los alumnos en un orden específico para el debate, conectar respuestas de distintos alumnos y relacionarlos con las ideas matemáticas claves.

Durante las distintas actividades, se propondrán preguntas deliberadas que se pueden hacer a los estudiantes, para reflexionar y que arrojen ideas para llegar a los porqués. Se integra el recurso GeoGebra, del cual se intenta sacar el máximo potencial representativo encaminado a la comprensión de los conceptos.

Con los conocimientos adquiridos se han seleccionado los materiales más adecuados dentro de las posibilidades que plantean los sistemas de ecuaciones lineales, incluyendo pantallas digitales y las capacidades que aportan, entre otros.

- Metodología y evaluación en matemáticas.

Las metodologías empleadas en las actividades del trabajo han sido la clase magistral, para introducir o recordar conceptos, así como para explicar la sistemática de las propias actividades, el aprendizaje basado en problemas y el estudio de casos. Se completa con algún juego o gamificación para introducir un aspecto más lúdico, sin llegar a promover la competición entre grupos. A través de un portfolio, cada grupo presenta tanto

sus resultados como el modo de llegar a ellos, tanto si son correctos como si no, dando mayor relevancia al proceso de razonamiento y conjetura que al resultado en sí.

Los criterios de evaluación y la forma de medirla en el presente trabajo siguen esencialmente lo indicado en el DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

- [Modelos matemáticos.](#)

No se han realizado modelizaciones como las indicadas en la asignatura, dada su especificidad en el presente trabajo.

II Marco teórico.

2.1 Constructos utilizados

COMUNICACIÓN.

La Real Academia Española (2024) define “comunicación” como: “Acción y efecto de comunicar o comunicarse”; y también como “trato, correspondencia entre dos o más personas” y “transmisión de señales mediante un código común al emisor y al receptor” (RAE, s. v. comunicación). Dentro del ámbito del aula, esta definición sitúa la comunicación como instrumento esencial para la transmisión de conocimiento, facilitando el aprendizaje.

A lo largo de la normativa educativa española, la comunicación ha sido reconocida como un elemento fundamental para el desarrollo integral del alumnado y, más específicamente, en el aprendizaje de las matemáticas. La LOGSE (1990) incluye la comunicación como componente esencial de la competencia lingüística y el desarrollo global del estudiante. Posteriormente, la LOMCE (2013) refuerza la importancia de fomentar la capacidad de expresar pensamientos y emociones con claridad y coherencia. La LOMLOE (2020), en su preámbulo, declara que “el lenguaje y la comunicación son elementos fundamentales para el desarrollo cognitivo y social del alumnado” e incorpora explícitamente la comunicación como medio para desarrollar la competencia matemática, señalando que “aprender a comunicar ideas matemáticas y representarlas con distintos tipos de lenguaje contribuye a la autonomía en el pensamiento lógico-matemático”. En línea con esta orientación, el Real Decreto 157/2022, que regula la ESO, establece que la competencia matemática implica “comunicar y representar ideas matemáticas con distintos tipos de lenguaje, incluyendo simbólico, algebraico, gráfico y estadístico” (art. 5). A nivel internacional, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) también destaca la comunicación como uno de los cinco procesos esenciales para la enseñanza efectiva de las matemáticas, señalando que “los estudiantes deben organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación”. En conjunto, estas normativas y referentes subrayan la relevancia de la comunicación como una herramienta clave para el desarrollo cognitivo, social y matemático del alumnado.

Diversos autores reconocidos en el ámbito educativo coinciden en señalar la estrecha relación entre comunicación y aprendizaje, aunque desde enfoques teóricos distintos. Desde la teoría sociocultural, Vygotsky (1978) sostiene que el aprendizaje humano tiene una naturaleza social, ya que los niños acceden al pensamiento a través de la interacción con otros; el lenguaje, según él, es la herramienta psicológica por excelencia, y la comunicación verbal en el aula actúa como puente entre el desarrollo real y el potencial, es decir, entre lo que el estudiante puede hacer solo y lo que puede lograr con ayuda (zona de desarrollo próximo). Piaget (1959), por su parte, enmarca la comunicación dentro del proceso constructivista del conocimiento, donde la inteligencia se construye mediante la acción y la interacción con el entorno, siendo el lenguaje un mediador esencial en este proceso, directamente vinculado con el desarrollo intelectual. En una

línea similar, Bruner (1960) entiende el aprendizaje como un intercambio social que cumple una función fundamental para la asimilación del conocimiento, destacando así el valor de la comunicación no sólo entre docente y alumno, sino también entre alumno y alumno. Ausubel (1963), aunque no se refiere explícitamente al proceso comunicativo, resalta la importancia de partir de los conocimientos previos del estudiante para construir aprendizajes significativos, lo cual requiere una eficaz transmisión y comprensión del mensaje educativo. Bandura (1977), desde su teoría del aprendizaje social, señala que el aprendizaje se da en contextos sociales mediante la observación y la imitación, lo que sitúa al docente como modelo comunicador. Finalmente, Skinner (1957), desde una visión conductista, concibe el lenguaje como una conducta verbal reforzada por la interacción social, entendiendo así la comunicación como una forma de conducta que se modela y consolida a través del entorno. A pesar de las diferencias teóricas, todos coinciden en destacar que la comunicación es un elemento esencial y transversal en el proceso de aprendizaje.

Históricamente, la enseñanza de las matemáticas ha estado marcada por un enfoque tradicional centrado en la clase magistral, donde el docente era el único emisor del conocimiento. Sin embargo, a partir de los años 80 y 90, influida por los enfoques constructivista y sociocultural, comenzó a desarrollarse una concepción del aula como un espacio de diálogo, también en el ámbito matemático (Sfard, 2008). Esta evolución implicó una revalorización de la comunicación como eje central del aprendizaje, en particular en la enseñanza de las matemáticas. Planas y Civil (2013) destacan que esta comunicación puede tomar múltiples formas: verbal (como explicaciones orales, argumentaciones o discusiones), no verbal (gestos, señales o uso de materiales concretos) y simbólica (uso de signos, fórmulas o representaciones gráficas), lo cual guarda relación con propuestas metodológicas como el enfoque Singapur. En esta misma línea, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) subraya que “los estudiantes deben ser capaces de expresar ideas matemáticas con precisión oral y escrita; comprender y evaluar el razonamiento de otros; y usar lenguaje matemático para construir argumentos convincentes” (p. 60), reforzando así la importancia de una comunicación clara y precisa como base para el aprendizaje efectivo, enriquecido mediante la interacción entre compañeros. La comunicación no sólo se relaciona directamente con la argumentación y el razonamiento matemático, ya que ambos requieren intercambio verbal y simbólico, sino también con otros procesos clave como la representación, al apoyarse en formas gráficas, simbólicas y verbales, y con la resolución de problemas, donde resulta imprescindible expresar el planteamiento, las estrategias empleadas y la solución. Sfard (2008) resume esta idea de forma contundente al afirmar que “pensar en matemáticas es participar en una forma particular de comunicación”. Esta participación se manifiesta en el aula a través de múltiples canales: interacciones orales entre docentes y estudiantes (turnos de palabra, preguntas abiertas, reformulaciones), así como trabajos escritos del alumnado, por ejemplo, resoluciones de problemas, apuntes o portafolios. En este sentido, Sánchez y García (2020) aportan evidencia empírica en el contexto de secundaria, al afirmar que “el uso intencionado del lenguaje en la clase de matemáticas mejora la comprensión conceptual y la capacidad de argumentación del alumnado” (p. 84), reafirmando el papel clave de la comunicación como herramienta de construcción del conocimiento matemático.

Por otra parte, según (Arce Sánchez, Conejo Garrote & Muñoz Escolano, 2019, cuadro 9.1) se describen algunas de las características de la comunicación oral y escrita:

Comunicación oral	Comunicación escrita
• Comunicación más directa y espontánea. • Producción rápida (poca planificación) • Carácter no permanente: facilidad para alterar y modificar la misma en el momento • Carácter más contextualizado, ligado a una situación y a un contexto de producción de la comunicación • Posible existencia de factores limitantes para expresarse (timidez, vergüenza)	• Comunicación más pausada, suele llevar aparejada una mayor reflexión y comunicación con uno mismo de lo que se quiere escribir • Requiere mayor planificación en su desarrollo • Carácter permanente: menos proclive a modificaciones en el momento, pero sí que permite modificaciones en relecturas posteriores • Carácter menos contextualizado (al poder ser leído en otros momentos o por otras personas) • Medio de expresión más cómodo para personas tímidas o vergonzosas

Según esto, puede decirse que la comunicación oral es la que se da en el ámbito de la interacción habitual del aula, y en concreto en las situaciones de aprendizaje organizadas por grupos, donde se requiere gran dinamismo e intercambio ágil de ideas. La comunicación escrita por su parte, parece más específica en el ámbito del trabajo personal y el estudio o, dentro del trabajo grupal, cuando se preparan conclusiones o resúmenes de lo desarrollado en las actividades propuestas. La visión elegida para definir el constructo en el ámbito del presente TFM será la de Vygotsky, quien sostiene que el aprendizaje no es un proceso individual y aislado, sino que se desarrolla principalmente a través del lenguaje y la comunicación en contextos sociales significativos. En este sentido, el lenguaje actúa como una herramienta mediadora fundamental, que facilita el tránsito del conocimiento externo (social) al interno (individual). En el caso particular de las matemáticas, el diálogo, la argumentación, la explicación y la discusión entre estudiantes, así como entre estudiantes y docentes, no son actividades auxiliares, sino elementos centrales para lograr una comprensión profunda de los conceptos. A través del intercambio verbal, los estudiantes tienen la oportunidad de clarificar sus ideas, contrastar estrategias, justificar sus razonamientos y construir significados compartidos.

Este constructo aparece reflejado de forma implícita en el DECRETO 39/2022, dentro del ámbito de la asignatura de matemáticas, en la competencia específica 8: “Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas”. Y según explicación de la propia normativa: “La comunicación y el intercambio de ideas es una parte esencial de la educación científica y matemática. A través de la comunicación las ideas se convierten en objetos de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. Comunicar ideas, conceptos y procesos contribuye a colaborar, cooperar, afianzar y generar nuevos conocimientos”. También en la competencia específica 10: “Trabajar los valores de respeto, igualdad o resolución pacífica de conflictos, al tiempo que resuelven retos matemáticos, desarrollando destrezas de comunicación efectiva...”

REPRESENTACIÓN

El concepto de representación en el ámbito de la didáctica de las matemáticas puede abordarse desde distintas perspectivas complementarias. Según la Real Academia Española (RAE), representa una “imagen o idea que sustituye a la realidad”, y entre sus sinónimos se encuentran términos como símbolo, imagen, emblema o figura. Esta noción básica se desarrolla ampliamente con las aportaciones de distintos autores especializados en educación matemática. Raymond Duval (2006) sostiene que ningún procesamiento matemático puede darse sin un sistema semiótico de representación, y que la actividad matemática gira en torno a la transformación de dichas representaciones, más que a las representaciones en sí mismas. En trabajos posteriores, resalta cómo estas permiten a los estudiantes activar estrategias cognitivas diversas y explorar propiedades matemáticas de manera más profunda. Por su parte, Anna Sfard (1991) destaca la naturaleza dual de los conceptos matemáticos, que pueden ser visualizados mediante imágenes mentales o tratados a través del lenguaje, introduciendo la noción de “procepto”, donde representación y construcción de significado se integran en la comprensión matemática. En esta línea, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) reconoce la representación como uno de los cinco procesos matemáticos fundamentales para una enseñanza efectiva, junto al razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación y las conexiones, y la considera esencial para ilustrar, explorar y comunicar conceptos matemáticos. Asimismo, Goldin y Shteingold (2001) enfatizan su carácter instrumental al definir las representaciones como herramientas de pensamiento para hacer matemáticas, mientras que Janvier (1987) subraya el valor del simbolismo y de recursos visuales, como diagramas, en los materiales didácticos actuales. De modo similar, Ainsworth, Bibby y Wood (2002) afirman que representar objetos matemáticos de múltiples formas resulta clave para lograr una comprensión sólida. Finalmente, autores como Zbiek y Conner (2006) remarcan el papel de las representaciones en el desarrollo del pensamiento algebraico, al permitir a los estudiantes visualizar, interpretar y manipular conceptos complejos dentro del modelado matemático, mediante representaciones gráficas y simbólicas que conectan ideas y favorecen una comprensión profunda. En conjunto, estas visiones coinciden en considerar la representación no sólo como una forma de expresión, sino como una mediación indispensable para el pensamiento y el aprendizaje matemático.

En el DECRETO 39/2022, se hace relación a este constructo en currículo de matemáticas en la competencia específica 7, en los siguientes términos: “Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.”.

Los distintos tipos de representaciones más relevantes considerados en el ámbito de los sistemas de ecuaciones lineales serán:

- Representación simbólica o algebraica: es la más habitual en el aula, y consiste en expresar las relaciones matemáticas mediante símbolos y letras. Permite aplicar métodos formales de resolución,

aunque puede resultar un tanto abstracta si no se considera de forma conjunta con otras representaciones. Un ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

- Representación gráfica: consiste en representar cada ecuación como una recta en el plano cartesiano. La intersección de las rectas, si existe, representa la solución del sistema. Este tipo de representación se empleará en varias actividades de la situación de aprendizaje propuesta. Muy útil para visualizar el significado geométrico de la solución. Ayuda a entender cuándo un sistema tiene una única solución (intersección), infinitas (coincidentes) o ninguna (paralelas).
- Representación tabular. Para cada recta se construye una tabla, mostrando pares ordenados x , y que verifican cada una. Facilita la comprensión al considerar puntos para representar gráficamente. Por ejemplo, para la recta $y = 2x + 1$

x	y
0	1
1	3
2	5

- Representación verbal: describe el sistema a través del lenguaje natural, muchas veces en forma de problema contextualizado. Conecta las matemáticas con situaciones reales y favorece la interpretación y formulación de modelos algebraicos a partir del contexto.
Por ejemplo, un enunciado de problema: "Un parque cobra 2 € por entrada de niño y 3 € por entrada de adulto. Si se vendieron 100 entradas y se recaudaron 250 €, ¿cuántas entradas de cada tipo se vendieron?".
- Representación concreta o manipulativa: Uso de objetos físicos, bloques, balanzas, fichas, etc., para representar las ecuaciones y sus transformaciones. Por ejemplo: simular una balanza con pesas para mostrar que mover un término al otro lado debe mantener el equilibrio (representación de igualdad).

En este TFM, el constructo “representación” será un compendio de todas las definiciones anteriores. En resumen, como las distintas formas que usamos para expresar ideas matemáticas: símbolos, gráficos, tablas o lenguaje verbal. Estas representaciones no solo sirven para comunicar, sino también para pensar, resolver problemas y comprender mejor los conceptos una herramienta esencial que permite expresar, explorar y construir significados matemáticos. No se limita a ilustrar conceptos, sino que facilita el pensamiento al activar diferentes estrategias cognitivas y conectar diversas formas de comprensión, como lo simbólico, visual o lingüístico. Así, la representación se convierte en un medio fundamental para aprender, comunicar y hacer matemáticas.

El uso de GeoGebra como herramienta tecnológica se alinea con las orientaciones del currículo de Castilla y León, que promueve el uso de recursos digitales para facilitar el aprendizaje. En ese sentido, este software permite:

- Visualizar gráficamente los sistemas de ecuaciones, mostrando de forma clara la solución como intersección de rectas.
- Comprobar soluciones obtenidas algebraicamente, lo que refuerza la comprensión y fomenta la autonomía.
- Modificar coeficientes y constantes en tiempo real, observando cómo cambian las gráficas y las soluciones.
- Trabajar con representaciones simultáneas (gráfica, simbólica y numérica), facilitando la conexión entre distintas formas de pensamiento matemático.

Además, en Castilla y León existen materiales y propuestas didácticas vinculadas al uso de GeoGebra, tanto en la web educativa oficial como en las formaciones para docentes, lo que muestra su integración creciente en el aula.

CONJETURACIÓN / Conjetura

El concepto de conjetura ha sido abordado desde diferentes disciplinas y perspectivas, especialmente en el campo de la educación matemática. La Real Academia Española (RAE) define conjetura como una “hipótesis o suposición que se hace de algo no probado”, lo que encaja con su uso frecuente en la enseñanza de las matemáticas. Desde un enfoque didáctico, Morales, Quevedo y Hernández (2017) definen la conjetura matemática como el juicio que una persona forma a partir de indicios u observaciones, sin que haya sido comprobado o refutado. Complementariamente, Álvarez et al. (2014) afirman que conjeturar implica formular y validar afirmaciones, mientras que argumentar consiste en establecer inferencias derivadas de una información inicial. En una visión más general, Ame Jumelle (s.f.) considera la conjetura como una suposición no probada, utilizada en matemáticas y otros campos como punto de partida para investigar o resolver problemas.

En el ámbito educativo, autores como Van Hiele (1986) destacan que los estudiantes, en niveles iniciales de razonamiento, generan conjeturas basadas en observaciones visuales antes de alcanzar niveles más formales de demostración. En esta misma línea, Kress y Van Leeuwen (2006) sostienen que las conjeturas surgen de la visualización de objetos matemáticos y sus comportamientos, una afirmación que coincide con Stewart (2001), quien subraya que estas ideas preliminares suelen emerger durante la resolución de problemas. Para Sinclair y McCulloch (2008), la conjetura es el motor de la exploración matemática, ya que impulsa la creatividad del estudiante y orienta las investigaciones. Por su parte, Lesh y Doerr (2003) enfatizan que la formulación de conjeturas supone un desafío intelectual que estimula el pensamiento lógico y promueve una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. Asimismo, Low y Sweller (2005) afirman que estas suposiciones pueden abrir la puerta a investigaciones más amplias y a la formulación de nuevas teorías matemáticas.

A nivel curricular, la importancia de la conjetura se refleja en el Real Decreto 40/2022, que regula la enseñanza en España. Este documento reconoce explícitamente la formulación y comprobación de conjeturas

como parte esencial del quehacer matemático y como una vía eficaz para desarrollar la competencia emprendedora, al requerir creatividad, toma de decisiones flexible y aplicación innovadora del conocimiento. En las competencias específicas del currículo de Matemáticas, se destaca la formulación e investigación de conjeturas como parte clave para generar nuevo conocimiento matemático y fomentar el pensamiento crítico, creativo y argumentativo, al tiempo que se conecta con distintos contextos. Finalmente, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) establece que la formulación e investigación de conjeturas, junto con el desarrollo y evaluación de argumentos, forman parte esencial del razonamiento matemático, consolidando así su valor como herramienta cognitiva, pedagógica y epistémica en la enseñanza de las matemáticas.

En el currículo de secundaria, se menciona en la competencia específica 3: “Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento”. El mismo apartado desarrolla el concepto: “El razonamiento y el pensamiento analítico incrementan la percepción de patrones, estructuras y regularidades tanto en situaciones del mundo real como abstractas, favoreciendo la formulación de conjeturas sobre su naturaleza”. “La formulación de conjeturas, el planteamiento de nuevos problemas y su comprobación o resolución se puede realizar por medio de materiales manipulativos, calculadoras...”. “El desarrollo de esta competencia conlleva formular y comprobar conjeturas, examinar su validez y reformularlas para obtener otras nuevas susceptibles de ser puestas a prueba...”

En el contexto de este TFM, el constructo “conjetura” se entenderá según la perspectiva de Kress y Van Leeuwen (2006), los cuales subrayan que la construcción de conjeturas en matemáticas se basa en la visualización y manipulación de objetos matemáticos mediante múltiples modos de representación (lo visual, lo verbal, lo simbólico), de tal forma que los estudiantes seleccionan activamente ciertos aspectos de la figura, los interpretan mediante su contexto, y luego utilizan ese significado para formular ideas o suposiciones sobre su comportamiento.

DEMOSTRACIÓN

La Real Academia Española (RAE) define demostración como la acción y efecto de demostrar, relacionándola con la comprobación de principios mediante hechos ciertos o razonamientos deductivos, una definición más cercana al ámbito filosófico que al matemático. No obstante, esta definición resulta conceptualmente válida en matemáticas, ya que ambas disciplinas se fundamentan en el uso del razonamiento. En este contexto, diversos autores han explorado la naturaleza, el propósito y la enseñanza de la demostración matemática. Para Schoenfeld (1994), la demostración es absolutamente necesaria en la didáctica de la matemática, lo que pone en evidencia su centralidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En un enfoque didáctico similar, Artigue (1995) señala que la demostración permite al estudiante apropiarse del conocimiento matemático a través de la argumentación y la validación, mientras que Brousseau (1997) la concibe como una situación didáctica clave que favorece la apropiación del saber.

Pólya (1954) aporta una visión social al afirmar que las demostraciones no son productos individuales, sino bienes colectivos sujetos al análisis racional. Esta perspectiva se complementa con la de Fischbein (1993), quien destaca que la demostración establece la veracidad de una proposición a través de pasos lógicos, y representa una garantía de certeza que debe ser entendida por los estudiantes. Para Arcavi (2003), la demostración transforma conjeturas en verdades verificadas, y permite a los estudiantes comprender la necesidad de justificar y verificar resultados matemáticos. De forma similar, Stewart (2001) define la demostración como la justificación formal de afirmaciones, enfatizando que debe enseñarse de manera progresiva, desde razonamientos informales hasta estructuras rigurosas.

Desde una perspectiva evolutiva del razonamiento, Van Hiele (1986) plantea que la demostración representa una etapa en el desarrollo del pensamiento matemático, donde los estudiantes avanzan desde la intuición visual hacia el razonamiento formal. En esta línea, Sinclair y McCulloch (2008) resaltan que la demostración actúa como puente entre la intuición visual y la matemática formal, permitiendo comprender cómo se enlazan las ideas abstractas con propiedades conocidas. En términos de madurez matemática, Hoffer (1981) sostiene que la capacidad de demostrar es fundamental, pues implica el uso estructurado de la lógica para validar teoremas. Finalmente, Low y Sweller (2005) consideran la demostración como una estrategia que refuerza la comprensión y aplicación de las reglas matemáticas, promoviendo el razonamiento deductivo y la transferencia del conocimiento a diferentes contextos.

En el currículo de matemáticas de Secundaria, el constructo es mencionado en la competencia específica 3, de la mano del concepto de conjetura (ya referido con anterioridad)

Aquí consideraremos la visión de Low y Sweller (2005), los cuales plantean que la demostración matemática no es solo una forma de validar proposiciones, sino también una poderosa herramienta didáctica para afianzar la comprensión conceptual de las reglas y principios matemáticos. Desde su enfoque cognitivo, destacan que una demostración bien estructurada permite a los estudiantes organizar y relacionar la información de manera significativa, reduciendo la carga innecesaria en la memoria de trabajo y favoreciendo el aprendizaje profundo.

ARGUMENTACIÓN / ARGUMENTAR

La Real Academia Española (RAE) define argumentar como la acción de aducir, alegar o dar razones para defender una idea, así como disputar o impugnar una opinión ajena. Aunque esta definición se plantea en un sentido general, resulta plenamente aplicable al contexto matemático, en tanto que la argumentación constituye una herramienta central del razonamiento riguroso. Diversos autores han explorado el papel de la argumentación en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, destacando su valor como puente entre el pensamiento intuitivo y la lógica formal.

Fischbein (1993) considera la argumentación matemática como el proceso lógico mediante el cual se justifica una afirmación, partiendo de axiomas, definiciones y teoremas ya establecidos, y subraya su

importancia en el desarrollo del pensamiento matemático riguroso. Arcavi (2003) complementa esta visión al enfatizar que la argumentación implica elaborar razones lógicas que sustenten una conclusión, construyendo una secuencia coherente de razonamientos que justifiquen las proposiciones. En esta misma línea, Stewart (2001) sostiene que los estudiantes deben aprender a construir y evaluar argumentaciones para validar afirmaciones, lo cual implica un trabajo activo con el lenguaje lógico y las estructuras deductivas.

Desde la perspectiva evolutiva, Van Hiele (1986) subraya que la argumentación permite a los estudiantes progresar desde formas intuitivas de razonamiento hacia otras más formales y deductivas, en función de su nivel de comprensión. A esta progresión se suma la dimensión crítica del proceso argumentativo, destacada por Sinclair y McCulloch (2008), quienes afirman que argumentar implica formular, defender y cuestionar afirmaciones, lo cual fortalece el pensamiento analítico y crítico.

La argumentación también adopta formas no verbales. Kress y Van Leeuwen (2006) destacan que, en matemáticas, puede manifestarse visual y simbólicamente mediante representaciones como diagramas, los cuales ayudan a respaldar o refutar afirmaciones. Asimismo, Hoffer (1981) plantea que la argumentación actúa como un nexo entre el conocimiento matemático formal y el razonamiento personal del estudiante, favoreciendo así una comprensión más profunda. En una visión centrada en el desarrollo del pensamiento crítico, Lesh y Doerr (2003) enfatizan que argumentar permite a los estudiantes construir, defender y evaluar ideas matemáticas, promoviendo así una actitud investigadora. Finalmente, Low y Sweller (2005) sostienen que la argumentación debe ser clara y estructurada para ser efectiva, siendo una herramienta esencial en la resolución de problemas y en la consolidación del pensamiento lógico.

Al igual que en el constructo anterior, la argumentación es mencionada en la competencia específica 3, junto al proceso de conjetura (ya referenciado anteriormente).

Para nosotros, el constructo será básicamente la idea formulada por Fischbein (1993), pues define la argumentación matemática como un proceso lógico y estructurado, a través del cual se justifica la validez de una afirmación utilizando como base axiomas, definiciones y teoremas previamente aceptados. Desde esta perspectiva, la argumentación no se limita a una simple explicación, sino que constituye una herramienta fundamental para construir conocimiento matemático de forma coherente y fundamentada.

RAZONAMIENTO / Razonar

La Real Academia Española (RAE) define razonamiento como la acción y efecto de razonar, entendido como el proceso de exponer razones para explicar o demostrar algo, o como la capacidad de ordenar y relacionar ideas para llegar a una conclusión. Este constructo, esencial en múltiples disciplinas, adquiere un valor particular en el ámbito matemático, donde el razonamiento constituye el eje central del pensamiento lógico, la formulación de conjeturas, la argumentación y la demostración. Según Fischbein (1993), el razonamiento matemático se basa en procesos cognitivos mediante los cuales los estudiantes elaboran inferencias lógicas dentro del marco formal de la matemática. Desde esta perspectiva, el razonamiento es una

herramienta que permite establecer la validez de una proposición a partir de premisas conocidas, promoviendo así la construcción de conocimiento. Arcavi (2003) profundiza en esta idea al señalar que el razonamiento es la habilidad para seguir cadenas lógicas de pensamiento que llevan a conclusiones válidas, siendo la base para resolver problemas, crear teorías y validar afirmaciones. En este sentido, el razonamiento es inseparable del quehacer matemático y debe ser desarrollado sistemáticamente en el aula.

Desde una perspectiva evolutiva, Van Hiele (1986) plantea que el razonamiento permite a los estudiantes avanzar desde niveles concretos hacia niveles abstractos a través de etapas de desarrollo cognitivo. Esta progresión implica una creciente competencia en el uso de razonamientos formales y deductivos. El razonamiento no es exclusivamente verbal: Kress y Van Leeuwen (2006) destacan su vinculación con el uso de representaciones visuales y simbólicas. Estas representaciones (diagramas, gráficos, símbolos) son medios para construir, comunicar y respaldar conclusiones matemáticas. En esta línea, el razonamiento incluye la habilidad de manipular estas representaciones de forma significativa. Stewart (2001) aporta que el razonamiento matemático incluye tanto el enfoque inductivo como el deductivo. El primero permite generalizar a partir de casos particulares, mientras que el segundo valida conclusiones partiendo de premisas generales. Ambos son esenciales para resolver problemas, desarrollar teorías y dar estructura al conocimiento matemático. Asimismo, Sinclair y McCulloch (2008) consideran el razonamiento como una competencia cognitiva clave que exige hacer inferencias con base en evidencia, promoviendo la construcción de conclusiones lógicas y fundadas. Complementariamente, Lesh y Doerr (2003) destacan que el razonamiento es una herramienta fundamental para construir conocimiento matemático, permitiendo explorar conjeturas, modelar situaciones y establecer relaciones entre ideas.

Finalmente, Low y Sweller (2005) enfatizan que el razonamiento permite procesar y organizar información matemática de manera eficiente. A través de procesos lógicos y deductivos, los estudiantes aplican principios matemáticos no solo para resolver problemas, sino también para formular nuevas hipótesis, extendiendo así su comprensión conceptual.

Este constructo es mencionado en la competencia específica 2: “Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas...”. Seguidamente, en la explicación del mismo apartado por la normativa: “Los razonamientos científico y matemático serán las herramientas principales para realizar esa validación”. También en la 3 la normativa desarrolla el concepto : “El razonamiento y el pensamiento analítico incrementan la percepción de patrones, estructuras y regularidades tanto en situaciones del mundo real como abstractas, favoreciendo la formulación de conjeturas sobre su naturaleza”. “El desarrollo de esta competencia conlleva formular y comprobar conjeturas, examinar su validez y reformularlas para obtener otras nuevas susceptibles de ser puestas a prueba promoviendo el uso del razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas. Cuando el alumnado plantea nuevos problemas, mejora el razonamiento y la reflexión, al tiempo que construye su propio conocimiento”.

Según Arce Sánchez, Conejo Garrote y Muñoz Escolano (2019), el razonamiento es un proceso esencial en matemáticas y puede manifestarse en tres formas: abductiva, inductiva y deductiva. El razonamiento abductivo parte de suposiciones no confirmadas para formular hipótesis plausibles. El razonamiento inductivo generaliza afirmaciones a partir de casos particulares observados. El razonamiento deductivo, en cambio, utiliza datos y reglas válidas para llegar a conclusiones ciertas, siendo el único tipo reconocido como válido en matemáticas formales. Sin embargo, tanto el razonamiento inductivo como el abductivo tienen un papel muy importante en la enseñanza escolar, ya que permiten a los estudiantes explorar, conjeturar y generalizar, lo cual es clave para su desarrollo matemático. Aunque no garantizan conclusiones verdaderas, estos razonamientos fomentan el debate, la argumentación y la necesidad de llegar eventualmente a una justificación mediante razonamiento deductivo.

2.2 Antecedentes: dificultades en la resolución de S. E. Lineales

Resolver sistemas de ecuaciones lineales presenta dificultades para muchos estudiantes de secundaria. Aunque no es un tema particularmente difícil en términos de contenido, las dificultades van más allá de la complejidad de las ecuaciones en sí. A menudo, los problemas con los sistemas se originan mucho antes, debido a malentendidos en conceptos básicos que los estudiantes arrastran desde etapas anteriores de aprendizaje. Es decir, los errores que cometen al tratar con ecuaciones lineales de una sola variable o problemas relativamente simples, los siguen afectando cuando abordan sistemas de ecuaciones más complejos. Según el trabajo de Peña Lizano (2019), se da una “influencia de errores aritméticos previos: Algunos errores tienen su origen en conocimientos mal adquiridos en niveles anteriores (como en la aritmética), que se arrastran hacia el álgebra.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) explica que “los errores al resolver ecuaciones no son solo descuidos; son el reflejo de ideas erróneas sobre conceptos básicos, como la igualdad, las variables o las reglas con operaciones matemáticas” (NCTM, 2000, p. 287). Egodawatte (2011) expuso que “los estudiantes tienen dificultades al resolver ecuaciones porque no entienden correctamente el concepto de igualdad ni cómo mantener el equilibrio entre ambos lados de una ecuación” (p. 145).

Se han de considerar también factores afectivos y emocionales: el miedo a las matemáticas, el bajo autoconcepto o la falta de atención.

- **Problemas de comprensión del signo igual (=).**

Uno de los problemas más comunes es la manera en que los estudiantes entienden el signo igual (=). En lugar de verlo como una relación de equivalencia (algo es igual a algo), muchos lo interpretan simplemente como una señal de que deben hacer algo, como si les estuviera pidiendo realizar una operación. Baroody (1999) señala que “cuando los estudiantes ven el signo igual, lo interpretan como una invitación a hacer algo, lo que los lleva a cometer errores al intentar mantener el equilibrio de ambos lados de una ecuación”. Este es

un error básico que se vuelve un serio obstáculo cuando los estudiantes empiezan a resolver ecuaciones lineales, donde trabajar correctamente con los dos miembros de la igualdad es fundamental.

Gunawardena Egodawatte (2011) destaca “Convertir expresiones algebraicas como respuestas en ecuaciones: Este error ocurre, en su mayoría, cuando los estudiantes utilizan el signo igual para indicar “el siguiente paso es”, es decir, cuando el signo igual se usa como un marcador de paso”.

“Falta de comprensión del significado de la igualdad: Algunos confunden la expresión $0 = 0$ con una ecuación sin solución o le atribuyen un significado erróneo”. Peña Lizano (2019)

- Problemas para comprender el concepto de variable:

La variable no es identificada como lo que es. Muchas veces se confunde el concepto de variable e incógnita. Kieran (1981) explica que “los estudiantes tienden a ver las letras como si representaran algo concreto, cuando en realidad son símbolos que representan cantidades desconocidas que pueden cambiar”.

Por su parte, Gunawardena Egodawatte (2011) expone 4 tipos de errores de este tipo:

1. Asignación de etiquetas, valores arbitrarios, o verbos a las variables o constantes. El error consiste, por ejemplo, cuando en un problema se propone que el precio de una camiseta es “p”, y se compran 10 unidades, en vez de interpretar $10p$ como el precio total $10 \times p$, entienden que es 10 camisetas, asignando a “p” la etiqueta de “camiseta”, en vez del valor de su precio.
2. Error a la hora de interpretar el producto de dos variables. En algunos casos interpretando el producto de dos variables como una sola variable, otros asignando un único valor al producto y otros viendo una relación numérica entre las dos variables en el producto. Los estudiantes no tienen en cuenta el signo de multiplicación entre las letras y simplemente piensan que xy es similar a un número como 12.
3. No entender las variables como generalización de números. Por ejemplo, en la ecuación $y = 2t + 3$, muchos estudiantes en su estudio identificaron correctamente tanto la “y” y la “t” como variables, pero sin percatarse de que pueden tomar más de un valor y, por lo tanto, pueden considerarse la expresión como una generalización
4. Error de planteamiento de las ecuaciones, es decir, trasladar el lenguaje ordinario a lenguaje algebraico. Un error típico es el denominado “error de inversión”: ocurre cuando los estudiantes escriben una ecuación con el orden de los términos incorrecto, invirtiendo la relación entre las cantidades. Es común en la traducción de enunciados verbales a ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, interpretar “hay seis veces más profesores que estudiantes” como $6P = E$.

Según el estudio Pérez, Diego, Polo, & González (2019) señalan el error denominado “disociación incógnita/término independiente, y coeficiente”. Este error se debe a que los estudiantes no han llegado a asimilar la diferencia entre el término con incógnita y el término sin esta. Por ejemplo, se pide resolver la ecuación $3x + 5 = 11$. El alumno procede operando $3 + 5 = 11$, tratando el término $3x$ como si fuera

solamente 3, ignorando completamente la presencia de la incógnita. Añaden el error de concepto de coeficiente. Se da entre los estudiantes más jóvenes y desaparece con los años. Surge de la falta de asimilación de que los coeficientes son multiplicadores de las incógnitas

“Muchos estudiantes confunden el conjunto solución con los valores individuales de las variables (por ejemplo, $x = a$, $y = b$), sin entender que deben expresarlo como un par ordenado o como un conjunto. Algunos no logran diferenciar entre sistemas con solución única, infinitas soluciones o sin solución”. Peña Lizano (2019).

- Errores asociados al signo cuando se mueven términos.

“Muchos estudiantes piensan que, al mover un término de un lado a otro de la ecuación, deben cambiar su signo, aunque no siempre es necesario. Esto es lo que se conoce como el mal uso de la regla cambio de lado, cambio de signo”. Egodawatte (2011).

Según la tesis de Ramírez Estrada (2023), el error que más cometió la población de su estudio fue despejar un término que está sumando con esta misma operación sin utilizar la resta como operación contraria.

Según Pérez, Diego, Polo, & González (2019) es frecuente el error de igualdad: “es en una aplicación errónea del método de la balanza, al realizar la operación en uno solo de los miembros de la igualdad”. Mencionan también el error de paso, al mover términos de un lado a otro de la igualdad.

- Errores de aplicación de la propiedad distributiva.

“Un ejemplo claro es cuando se debe resolver $3(x+2) = 12$, pero se aplica mal la propiedad y opera $3x+2 = 12$, en lugar de $3x+6 = 12$ ”. Egodawatte (2011). “Otra forma común de este error consiste en elevar un binomio a una potencia de forma inapropiada, del tipo $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ”. Aquí entiendo que si se considera de la forma $(a+b) \cdot (a+b)$ ”.

- Errores al simplificar.

Si una simplificación no se realiza correctamente, se llega a resultados erróneos. Por ejemplo en la ecuación $2x+6=8$, se puede simplificar dividiendo cada término por dos, $x+3=4$, pero se puede producir el error: $2+3=4$. “A veces, los estudiantes no siguen todos los pasos necesarios al simplificar las ecuaciones, lo que genera respuestas incorrectas” Egodawatte (2011).

Añade el concepto de sobre-simplificación: “consiste en unir, conectar o incluso agrupar los términos en contra de las reglas de las operaciones algebraicas. A veces se omiten operaciones de suma, resta, división y multiplicación, formando conjuntos de cadenas (de símbolos) sin operadores”.

Según la tesis de Ramírez Estrada (2023) “el alumno no simplifica totalmente los resultados. Si bien esto no es un error, pues el resultado es correcto, simplificar puede considerarse un buen hábito para la presentación de los resultados y también para resolver más cómodamente operaciones posteriores”

- Errores al operar con fracciones.

“Cuando las ecuaciones incluyen fracciones o decimales, muchos estudiantes se sienten inseguros y cometen errores básicos en las operaciones”. (Stacey & MacGregor, 1999).

Según Gunawardena Egodawatte (2011) destaca los errores de multiplicación en cruz: al operar cuando hay denominadores, pero sin asignar el denominador 1 cuando en una expresión no aparece explícitamente. Por ejemplo, si se pide resolver la ecuación:

$$3x/4=6$$

El alumno multiplica en cruz sin asignar denominador 1 al término de la derecha, es decir sin entender que la ecuación realmente es de la forma:

$$3x/4=6/1$$

y por tanto su operación quedaría de la forma: $3x \cdot 6 = 24$.

Errores a la hora de sacar común denominador: hay dos tipos diferentes de errores en esta categoría. Uno consiste en elegir el número menor como denominador común entre dos números, y el otro en coger la suma de las variables en los dos denominadores como denominador común, en lugar de tomar su producto, lo cual implica que los estudiantes pensaban de manera distinta según si había números o letras en el denominador. Después de elegir la suma de las letras como común denominador, sumaban o multiplicaban las dos letras o los números en los numeradores, sin aplicar el algoritmo adecuado para simplificarlos.

Comparar cantidades de forma incorrecta: En esta categoría, los estudiantes compararon las magnitudes de dos fracciones algebraicas observando únicamente sus denominadores. Por ejemplo, considerando $\frac{1}{n+1}$ mayor que $\frac{1}{n}$.

Torre (2004) observó errores al sumar fracciones, al calcular el mínimo común múltiplo, y al dividir un número entre una fracción, al que se añade el error de invertir el numerador y el denominador de la fracción en el último paso de la ecuación.

- Confusión a la hora de aplicar métodos de resolución de sistemas de ec. Lineales.

Los estudiantes mezclan métodos de resolución, y no aplican correctamente los pasos requeridos para llegar a una solución.

Wati, Fitriana, & Mardiyana (2017) en un estudio relacionado con la resolución de ecuaciones lineales indican las dificultades más relevantes: “Dificultades fácticas: están relacionadas con la identificación de puntos en el plano cartesiano. Dificultades conceptuales: se refieren al concepto de intersección de rectas, los conceptos de intersecciones con los ejes x e y, y el concepto de pendiente. Dificultades operacionales: están asociadas al manejo del álgebra y los cálculos. Dificultades de principios: se refieren al método para hallar el punto de intersección de dos rectas”.

“Los estudiantes aprenden a aplicar métodos como sustitución o reducción sin comprender su justificación ni su relación con conceptos como dependencia lineal o representación gráfica”. Peña Lizano (2019)

- Necesidad de obtener siempre una respuesta numérica.

Según Ruano, Socas, y Palarea, (2008), “si logramos que el alumno entienda por qué su forma de pensar no sirve en ciertos casos, estará en camino de construir un conocimiento más sólido”. Por ejemplo, supongamos que se ha de resolver la ecuación al final de un desarrollo:

$$5x + 3 = 5x + 7$$

El estudiante resta $5x$ en ambos términos y le queda $3 = 7$, por lo que piensa que ha cometido un error de cálculo, en vez de comprender que la ecuación no tiene solución.

- Dificultades de representación.

Según Barti, & Usdiyana (2020) se produce “representación limitada: la mayoría de los estudiantes solo utiliza una forma de representación (principalmente simbólica), sin integrar otras como la visual o verbal”, y remarca la “dificultad en traducir problemas a modelos matemáticos: muchos tienen problemas para transformar enunciados verbales en ecuaciones algebraicas, lo que refleja una comprensión conceptual débil”.

“Varios estudiantes presentan errores al interpretar gráficamente la solución de un sistema, como pensar que cada punto de intersección entre pares de rectas (en sistemas de más de dos ecuaciones) representa una solución válida”. Peña Lizano (2019).

- Aplicación de algoritmos mecánicamente sin comprenderlos

Según el trabajo Peña Lizano (2019), “los estudiantes se enfocan en aplicar procedimientos y algoritmos mecánicos sin comprender los fundamentos conceptuales del sistema de ecuaciones lineales. Esto limita su capacidad para transitar hacia modos de pensamiento más complejos”.

Skemp (1976) lo explica así: “Muchos estudiantes aprenden a resolver ecuaciones aplicando fórmulas y pasos sin entender realmente el propósito detrás de cada operación”.

III Marco legal.

Para la elaboración del presente TFM, es imprescindible situar en contexto las actividades que se van a proponer dentro del entramado normativo actualmente en vigor que le aplica.

Para ello y por orden jerárquico se ordena la normativa nacional y autonómica, dado el carácter descentralizado del modelo educativo español.

Seguidamente se desarrollará los aspectos normativos relacionados directamente con la materia y temática específica abordada, a fin de comprender las implicaciones legales de la propuesta didáctica, así como garantizar su alineación con el marco jurídico vigente.

Normativa nacional.

CONSTITUCIÓN ESPAÑOLA (1978). Artículo 27: derecho a la educación y libertad de enseñanza. Derecho universal: Todos tienen derecho a la educación. Finalidad: La educación debe fomentar el pleno desarrollo de la persona y el respeto a los derechos y libertades. Libertad de enseñanza: Se reconoce la libertad de cátedra y de creación de centros docentes. Derecho de los padres: Los padres tienen derecho a que sus hijos reciban la formación religiosa y moral que esté de acuerdo con sus propias convicciones. Participación: Se garantiza la participación de la comunidad educativa (profesores, padres y alumnos) en la organización y control de los centros sostenidos con fondos públicos. Centros públicos y privados: Se permite la creación de centros docentes tanto públicos como privados. Ayuda pública: Se prevé que los poderes públicos puedan ayudar económicamente a los centros que reúnan los requisitos legales. Inspección y control: La enseñanza está sujeta a la inspección y control de los poderes públicos. Libertad de elección: Se garantiza la libertad de elección educativa, respetando los principios constitucionales.

LOMLOE (Ley Orgánica 3/2020), que modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE).

Mientras que la LOE es el texto base del sistema educativo español, la LOMLOE lo modifica, introduciendo un enfoque más competencial, inclusivo y equitativo del sistema educativo. Entre sus principales cambios destacan: la reestructuración del currículo para centrarse en el desarrollo de competencias clave mediante situaciones de aprendizaje.

Artículo 6.3 (LOMLOE): *"La definición de los elementos del currículo [...] estará orientada al desarrollo de las competencias clave y se organizará en competencias específicas, saberes básicos y criterios de evaluación, que se concretarán en situaciones de aprendizaje significativas."*

La situación de aprendizaje desarrollada en el presente TFM tiene por tanto como propósito contribuir a la adquisición de las competencias clave y específicas establecidas en el currículo, tal y como propone la LOMLOE.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.

Aunque se comentará en el apartado de normativa autonómica con detalle el aspecto competencial de la normativa en relación a la propuesta didáctica contemplada en el presente TFM, se han extractado varios textos de este RD a fin de poner de manifiesto cómo la situación de aprendizaje propuesta tiene encaje en el articulado del mismo, ya que aplica de un modo u otro a lo largo de su desarrollo, pues en su diseño se ha pretendido que el alumnado adquiera un aprendizaje significativo basado en el trabajo en equipo, resolviendo los problemas o cuestiones propuestas de forma colaborativa, para lo cual se emplee el razonamiento, la conjetura y, frente al resto de compañeros y mediante un proceso de comunicación, la demostración justificada o, al menos, un despliegue argumentativo sólido que promueva el debate y el intercambio de ideas.

En su artículo 5. Principios generales, dice “...se pondrá especial atención en la potenciación del aprendizaje de carácter significativo para el desarrollo de las competencias, promoviendo la autonomía y la reflexión”.

En el artículo 6. Principios pedagógicos: “En esta etapa se prestará una atención especial a la adquisición y el desarrollo de las competencias establecidas en el Perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica y se fomentará la correcta expresión oral y escrita y el uso de las matemáticas”. Del mismo modo se cita textualmente: “Para fomentar la integración de las competencias trabajadas, se dedicará un tiempo del horario lectivo a la realización de proyectos significativos y relevantes y a la resolución colaborativa de problemas, reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión y la responsabilidad”.

En el artículo 7. Objetivos: La Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan: “Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal”.

En el artículo 12. Competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos: “Para la adquisición y desarrollo, tanto de las competencias clave como de las competencias específicas, el equipo docente planificará situaciones de aprendizaje en los términos que dispongan las administraciones educativas”.

En el anexo III. Situaciones de aprendizaje.” La adquisición y el desarrollo de las competencias clave del Perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica, que se concretan en las competencias específicas de cada materia o ámbito de la etapa, se verán favorecidos por metodologías didácticas que

reconozcan al alumnado como agente de su propio aprendizaje. Para ello es imprescindible la implementación de propuestas pedagógicas que, partiendo de los centros de interés de los alumnos y alumnas, les permitan construir el conocimiento con autonomía y creatividad desde sus propios aprendizajes y experiencias. Las situaciones de aprendizaje representan una herramienta eficaz para integrar los elementos curriculares de las distintas materias o ámbitos mediante tareas y actividades significativas y relevantes para resolver problemas de manera creativa y cooperativa, reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión crítica y la responsabilidad”.

Por otra parte, ya dentro del apartado de las Matemáticas, se menciona: “Las líneas principales en la definición de las competencias específicas de matemáticas son la resolución de problemas y las destrezas socioafectivas. Además, se abordan la formulación de conjeturas, el razonamiento matemático, el establecimiento de conexiones entre los distintos elementos matemáticos, con otras materias y con la realidad, y la comunicación matemática, todo ello con el apoyo de herramientas tecnológicas”, lo cual conecta y justifica la orientación del presente trabajo, ya que se alinea directamente con su formulación y esencia.

De igual modo, las competencias específicas están conectadas con los constructos vistos en el trabajo: razonamiento, comunicación, representación y, prueba (demostración). Se relacionan entre sí y han sido agrupadas en torno a cinco bloques competenciales según su naturaleza: resolución de problemas (1 y 2), razonamiento y prueba (3 y 4), conexiones (5 y 6), comunicación y representación (7 y 8) y destrezas socioafectivas (9 y 10).

Normativa autonómica.

DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

El Decreto 39/2022, que regula el currículo de Educación Secundaria Obligatoria en Castilla y León, actúa como desarrollo del Real Decreto 217/2022, que establece las enseñanzas mínimas a nivel estatal. Aporta una mayor concreción curricular en todas las materias, y en el caso particular de Matemáticas introduce varias precisiones que completan y ponen en contexto la normativa nacional. Una de las principales diferencias es que el decreto autonómico organiza los saberes básicos y los criterios de evaluación por cada curso (de 1.º a 4.º de ESO), mientras que el real decreto lo hace de forma general para toda la etapa.. Por ejemplo, se detalla en qué curso deben introducirse los sistemas de ecuaciones o el análisis de funciones, especificando los enfoques metodológicos y el uso de herramientas concretas.

El Decreto 39/2022 también presenta un mayor nivel de desarrollo del pensamiento algebraico, con progresiones bien definidas que incluyen desde el trabajo con expresiones algebraicas hasta la resolución de ecuaciones y sistemas. Además, fomenta el uso de múltiples representaciones (simbólica, gráfica, tabular, verbal) y sitúa estos aprendizajes en contextos reales y cotidianos. Esto se traduce en una enseñanza menos

abstracta y más significativa. Otro aspecto destacable es el énfasis que se hace en el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra. El decreto autonómico menciona expresamente su utilización para trabajar conceptos como las funciones, las gráficas y los sistemas de ecuaciones, y lo alinea con el impulso regional de recursos digitales y formación docente en este ámbito. La representación gráfica y dinámica que permite GeoGebra resulta especialmente útil para el desarrollo del razonamiento y la comprensión conceptual del alumnado. Asimismo, el Decreto 39/2022 ofrece optativas propias, como el “Taller de Matemáticas”, destinadas a reforzar o ampliar los contenidos desde una perspectiva más práctica. Esto no se contempla en el decreto estatal, que deja la definición de optativas en manos de las comunidades autónomas.

Finalmente, se valora de forma clara que competencias como la resolución de problemas, la representación, el razonamiento y la comunicación deben abordarse de forma integrada, no como elementos aislados. Esta orientación refuerza el enfoque competencial del currículo, favorece una enseñanza contextualizada y mejora las condiciones para una evaluación auténtica de los aprendizajes.

IV Propuesta didáctica

4.1 Contextualización

La situación de aprendizaje se circunscribe en segundo curso de la ESO.

Si duda, la mejor manera de llevar a la práctica y prueba un proyecto docente de cualquier tipo es en un aula. Es el entorno que permite poner a prueba tanto los conocimientos adquiridos durante las distintas asignaturas del Máster, como su mejora a través de la retroalimentación y valoración de los resultados.

Desgraciadamente, mi periodo de prácticas no facilitó dicha actividad, pues se trató mayoritariamente de tutorías para alumnado de educación a distancia. Si bien desde es el punto de vista pedagógico tienen su interés al tratarse de personas que volvían al mundo educativo tras un periodo fuera de las aulas, bien por cuestiones laborales o personales, de algún modo requerían recursos metodológicos especiales orientados específicamente para un alumnado difícil, con carencias arrastradas de cursos superados no con pocas trabas, así como una clara falta de motivación. En muchos casos su interés no iba más allá de conseguir titular para conseguir un trabajo o porque se lo requerían en el que ya tenían. También se daba el caso de alumnos extranjeros incorporados al sistema educativo de forma tardía, que a la dificultad de las propias asignaturas se sumaba el del idioma.

Desarrollar una propuesta pedagógica en ese contexto resultó imposible, partiendo de la base de que las tutorías tenían carácter voluntario, lo que redundaba en una falta de regularidad en la asistencia a las clases que, por otra parte, tenían un número reducido de alumnos, en función de la disponibilidad.

No obstante, durante esas mismas prácticas, también acudí dos días a jornada completa para conocer la vida del centro en las modalidades presenciales. Es en ese ámbito donde pude comprobar de primera mano el funcionamiento a pleno rendimiento de un centro educativo y donde, por otra parte, desplegué una situación de aprendizaje centrada en geometría, en la fase de intervención con alumnado de 1º de la ESO.

Dicho todo lo cual, para la contextualización del presente trabajo he seleccionado ese centro, del que conozco tanto la tipología de alumnado, el profesorado, y las posibilidades técnicas que ofrece, donde situaré la actividad que propongo, en modo hipotético. Se planteará como si fuera a desarrollarse en un aula de informática o clase habitual, dependiendo de las circunstancias. Al no tratarse de un trabajo de campo real, la ausencia retroalimentación obligará a desarrollar un conjunto de “posibles” respuestas y situaciones basadas en el conocimiento del alumnado y su variedad, las vivencias tanto en las actividades presenciales como a distancia, así como de la respuesta frente a las matemáticas observadas durante todo el periodo.

El centro educativo es el I.E.S Leopoldo Cano, de Valladolid, que dispone de una oferta educativa de ESO y bachillerato, en educación presencial y en Educación a distancia de Personas Adultas. Su titularidad es pública. El horario de apertura del centro: de 8:00h a 22:00h de lunes a viernes.



Figura 1. Imagen de la ubicación del IES Leopoldo Cano (Fuente: Google Maps)

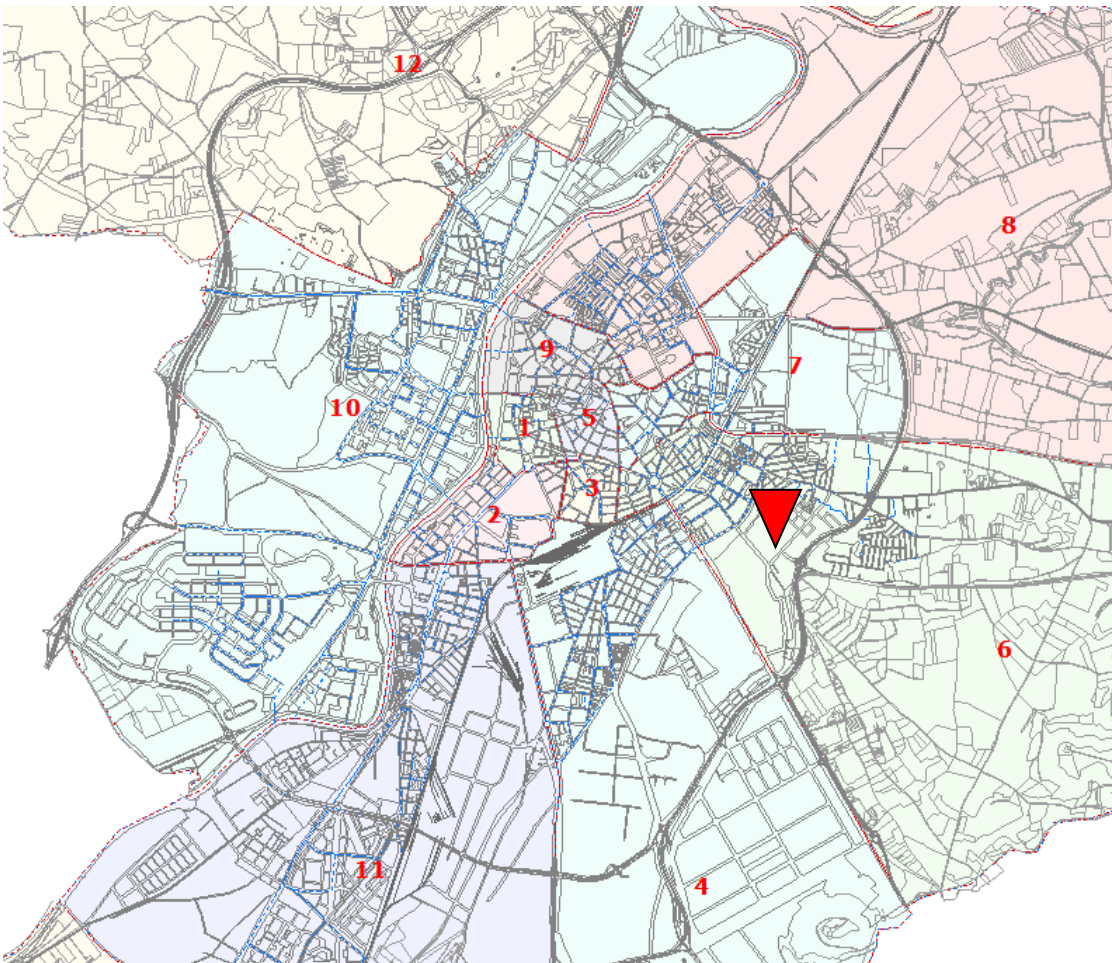


Figura 2. Ubicación del IES Leopoldo Cano en Valladolid. (Fuente: Ayto. Valladolid)

Este barrio tuvo su origen en la segunda mitad del siglo XX, concretamente en la década de 1960, como resultado del proceso de expansión industrial impulsado por la implantación de dos importantes empresas de capital francés vinculadas al sector del automóvil: Fasa-Renault y Michelin. Desde entonces, y durante varias décadas, el barrio ha estado habitado mayoritariamente por una clase media trabajadora, caracterizada por su compromiso con el progreso social y, en particular, por su firme apuesta por la educación de sus hijos e hijas.

En la actualidad, el barrio presenta una composición demográfica diversa y multicultural, similar a la de otros barrios populares del entorno europeo. Su población está conformada por trabajadores vinculados al sector industrial y empresarial de la ciudad, emprendedores propietarios de pequeños negocios, así como empleados públicos en distintos niveles de la administración municipal y regional. Una parte significativa de sus habitantes mantiene fuertes vínculos con zonas rurales, lo que se traduce en un profundo sentido de pertenencia y compromiso con su comunidad y su entorno.

El IES Leopoldo Cano recibe un alumnado heterogéneo, con predominio de alumnos de etnia gitana y de inmigrantes que han llegado de otros países con situaciones de partida y expectativas diversas que a veces presenta necesidades específicas de aprendizaje del español y su cultura. Se espera en este contexto cierta resistencia a las actividades planteadas, pero se procurará, como se describe más adelante, buscar la heterogeneidad de los grupos e intentar mantener la vigilancia y el soporte constante por parte del profesor.

El proyecto educativo del centro, tal como ha sido divulgado públicamente, se articula en torno a los siguientes objetivos:

- Educar y formar ciudadanos responsables, comprometidos con la igualdad y el respeto a la diversidad, promoviendo la participación activa del alumnado, las familias y los agentes sociales en la transformación del entorno sociocultural.
- Desarrollar personas autónomas, críticas y con pensamiento propio.
- Potenciar al máximo las capacidades individuales de cada alumno y alumna.
- Concebir la educación como una herramienta inclusiva, integradora y exigente, orientada a garantizar la igualdad de oportunidades.
- Fomentar una conciencia eco-solidaria y el compromiso con la sostenibilidad.
- Impulsar el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (NTIC), el aprendizaje de lenguas extranjeras y la adopción de hábitos de vida saludables.
- Estimular la creatividad, la sensibilidad artística y el espíritu emprendedor.
- Promover una educación en valores para todo el alumnado.
- Favorecer la implicación activa de las familias y de los distintos agentes sociales en el proceso educativo.
- Participar activamente en la vida social y cultural del entorno.

En concreto, departamento de matemáticas donde estaría situada la actividad, imparte las siguientes asignaturas:

Enseñanza presencial: Matemáticas 1º ESO, Matemáticas 2º ESO, Matemáticas 3º ESO, Matemáticas 4º ESO Opción A, Conocimiento matemático 1º ESO, Conocimiento matemático 2º ESO, Conocimiento matemático 3º ESO, Ampliación de Matemáticas 1º ESO.

Enseñanza a distancia: Módulo I de E.S.P.A.D. Ámbito científico tecnológico, Módulo II de E.S.P.A.D. Ámbito científico tecnológico, Módulo III de E.S.P.A.D. Ámbito científico tecnológico, Módulo IV de E.S.P.A.D. Ámbito científico tecnológico, Matemáticas I y II. Bachillerato, modalidad Científico-Tecnológico, Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II de Bachillerato, de HYCCSS.

En número habitual de alumnos en el aula de las clases presenciales estaba en torno a los 15 alumnos, lo cual facilita bastante la labor de guía del profesor, pues puede destinar una cantidad relativamente generosa de tiempo a cada alumno, facilitando una atención individualizada, al contrario que en una clase magistral. Esto se pone de manifiesto de forma especial en el caso de actividades como la propuesta, ya que la participación y el intercambio de ideas es mucho más fácil y dinámico cuando el grupo de alumnos no es excesivamente numeroso, por no hablar de mantener el orden y la disciplina en clase, es especial en los primeros cursos.

Como se describirá más adelante, la actividad requerirá de uso de equipos informáticos para las evoluciones planteadas con el programa GeoGebra, cuya capacidad de manipulación y visualización dinámica lo convierten en una herramienta muy interesante para que el alumno realice modificaciones y detecte patrones. Mediante un razonamiento ordenado y guiado, elaborando sus propias conjeturas, llegará a través de la comunicación con los integrantes de su grupo y luego con el resto de la clase a confeccionar un aprendizaje significativo, conectado con sus conocimientos previos, los cuales serán también revisados.

El aula de informática dispone de equipos en cantidad suficiente para trabajar. Desgraciadamente no se puede modificar la distribución de esa aula para organizar el trabajo en grupos. La planificación del trabajo se desarrollará en dos ámbitos: uno, la propia aula de informática, donde se realizará el trabajo de investigación, se tomarán notas y donde trabajan los equipos con las applets de GeoGebra, realizando las variantes que consideren necesarias a según vayan avanzando en sus descubrimientos y en la confección de la teoría propuesta. El otro será el aula, ya que dispone de pizarra digital donde se pueden exponer las ideas al resto de los compañeros y, si fuera necesario, recurrir a discusiones sobre la misma, cargando la applet de GeoGebra objeto de discusión. La idea fundamental es que se produzca un debate y que sobre las ideas que surjan, demostrar o refutar en tiempo real mediante argumentación.

Como se ve, a lo largo de la actividad se pretenden trabajar en los constructos de partida. Mediante distintas representaciones (gráfica, tabular, geométrica...), conjeturando y, mediante razonamiento, llegar a demostrar o refutar. Finalmente, el conocimiento se afianza mediante la interacción grupal, donde la comunicación será el vehículo para organizar todo el conocimiento adquirido.

Seguidamente se indica la disposición de la las aulas tanto de informática como ordinaria.

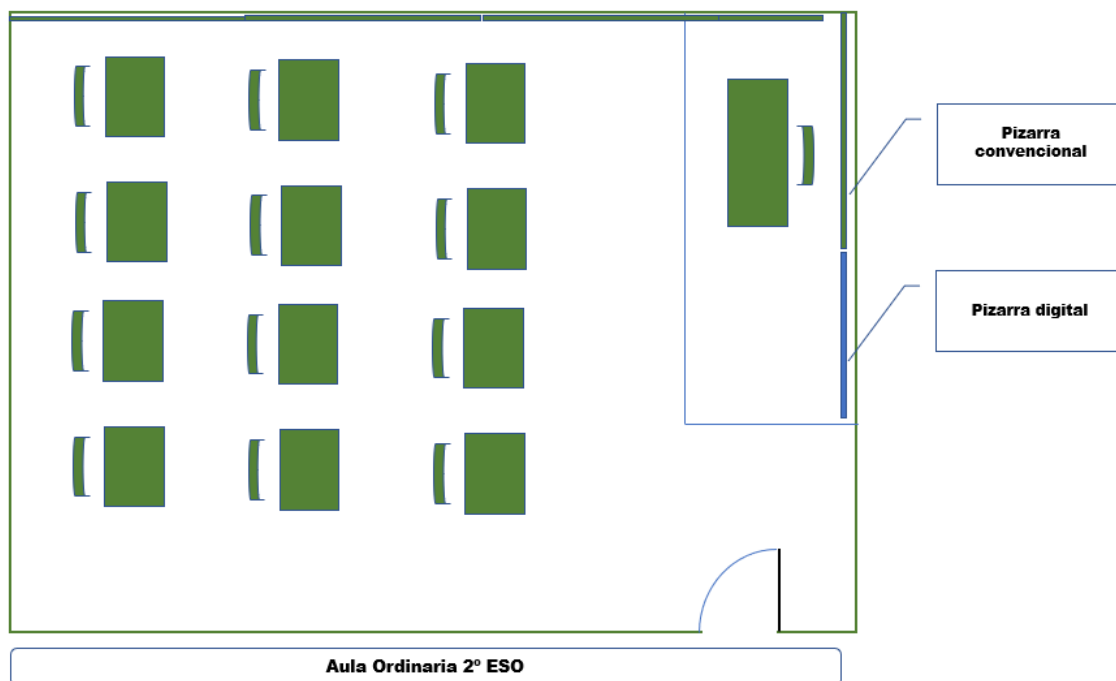


Figura 3. Esquema genérico de aula del centro. (Fuente: elaboración propia).

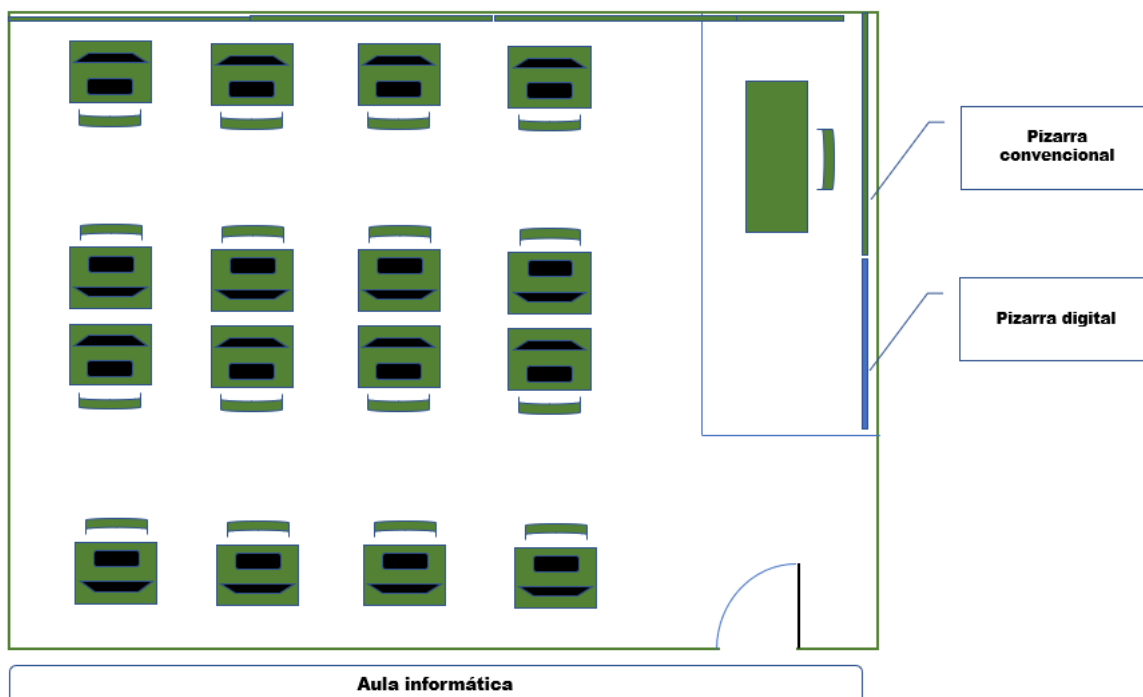


Figura 4. Esquema genérico de aula de informática del centro. (Fuente: elaboración propia).

En el caso del aula de clase, se puede perfectamente modificar los puestos para realizar el trabajo en grupo. Al finalizar la actividad, se colocan en su posición habitual.

En un grupo de 2.º de ESO formado mayoritariamente por alumnado de etnia gitana y estudiantes inmigrantes (en su mayoría de origen marroquí o centroeuropeo con escaso dominio del idioma, junto con otros de origen hispanoamericano con buena competencia lingüística), el contexto familiar y social influye de manera clara en la respuesta que dan al proceso de enseñanza-aprendizaje, especialmente en áreas como matemáticas. Se suma además un nivel económico bajo y una escasa formación académica en las familias, lo que repercute directamente tanto en la actitud ante la escuela como en la autonomía del alumnado.

Será posible encontrarse una actitud inicial de desconfianza o apatía hacia las tareas escolares. Muchos de estos alumnos y alumnas pueden arrastrar experiencias previas poco gratificantes en su educación, por lo que es posible que adoptan una posición de cierta resistencia, más defensiva que desafiante. Confío en que el vínculo personal juegue un papel clave, y que el alumnado responda mejor cuando se sienta escuchado, valorado y comprendido. Mi esperanza es que, tras unas semanas de relación sincera y continua, se pase del desinterés y la apatía a la implicación y el esfuerzo, sobre todo si el trato es justo y sin prejuicios. Se puede dar la circunstancia de que, en matemáticas, las dificultades no sean tanto de capacidad como de acceso al contenido y la comprensión de lo que se trata de enseñar. La barrera lingüística, en el caso de quienes no dominan aún el castellano, se puede multiplicar en esta materia por el uso de un lenguaje específico y abstracto que no siempre se acompaña de un apoyo visual o contextual, aunque es precisamente lo que se trata de evitar en la situación de aprendizaje propuesta. Incluso entre quienes sí manejan el idioma con soltura, puede darse la circunstancia de que muchos no hayan adquirido del todo las nociones básicas como las operaciones fundamentales, la resolución de problemas sencillos o la comprensión de muchos de los conceptos planificados, lo que dificultaría el avance con seguridad en contenidos propios del curso. En este sentido, puede ser conveniente disponer de un diagnóstico claro del nivel real de cada alumno o alumna, para realizar ajustes del ritmo de trabajo.

Las metodologías que se cree darán mejor resultado en estos grupos serán las que se apoyen en lo visual, lo manipulativo y lo práctico. El uso de material concreto, como el software GeoGebra, puede facilitar un aprendizaje más accesible y menos abstracto. El empleo de contextualización puede contribuir a la comprensión y tal vez se reduzca el rechazo inicial. En este tipo de alumnado, la experiencia directa, la explicación paso a paso y la posibilidad de repetir el proceso con pequeñas variaciones pueden marcar la diferencia. Además, trabajar en pareja o en pequeños grupos, con roles definidos y apoyos constantes, favorecería no solo el aprendizaje sino también la integración.

Se entiende igualmente que la evaluación continua y formativa es, en este contexto, mucho más eficaz que una evaluación basada solo en pruebas objetivas como exámenes. El alumnado de este tipo es posible que necesite sentir su progreso, y que el error forma parte del proceso. Los elogios específicos, las tareas con éxito posible y la devolución inmediata del trabajo ayudan a mantener la atención y refuerzan su autoconcepto, algo fundamental para mantener el interés en una materia que muchos asocian con el fracaso.

Otro aspecto importante es que, dada la situación familiar de buena parte de este alumnado, no se puede dar por hecho que contarán con condiciones adecuadas para hacer deberes en casa. Las tareas que se manden fuera del aula deben ser mínimas y muy claras, o bien se debe buscar que todo el trabajo relevante se realice en el aula, donde se les puede acompañar y guiar.

4.2 Fundamentación curricular.

Según el R.D. DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, el contenido se sitúa en el apartado D.4, Sentido Algebraico, Igualdad y Desigualdad:

- Relaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.
- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas, especialmente aquellos basados en relaciones lineales.
- Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales con coeficientes racionales y sistemas de ecuaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana.
- Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el uso de la tecnología según el grado de dificultad.

4.2.1 Objetivos de la etapa.

Los objetivos de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León son los establecidos en el artículo 23 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, en el artículo 7 del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo y en artículo 6 del Decreto 39/2022. De ellos, se pasa a comentar la contribución de una selección de los mismos por tener relación con la actividad propuesta.

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a las demás personas, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

Un elemento fundamental de la actividad propuesta es su organización por grupos en la mayoría de las tareas de las que está compuesta. Dichos grupos se seleccionarán intentando que sean lo más heterogéneos posibles, a fin de enriquecer el proceso de intercambio de ideas y facilitar que los alumnos aprendan unos de otros. Se fomenta así mismo un sentimiento de aportación individual, cada uno dentro de sus posibilidades, para lograr un objetivo común. Igualmente se promueve la solidaridad, ya que alumnos con diferentes capacidades pueden de ese modo ayudarse unos a otros. La distribución del trabajo mediante roles contribuye a un sentimiento de participación, fomentando la responsabilidad individual para con el equipo, pues cada cual tiene su tarea, de la que ha de rendir cuentas con sus compañeros.

El trabajo conjunto promueve una motivación de origen social, pues la pertenencia a un grupo que progresa en función de las aportaciones individuales genera un sentimiento de pertenencia y aceptación. Durante el trabajo y las discusiones entre los miembros del grupo, deben primar comportamientos respetuosos y dialogantes, no solo por educación y cortesía, sino porque un buen ambiente redundará sin duda en una mayor productividad como equipo, facilita la resolución de pequeños conflictos y ayuda a centrarse en la tarea, en vez de dispersar la atención hacia sentimientos y conductas que nada tienen que ver con las matemáticas.

Durante el proceso de evaluación se tendrá en cuenta el proceso, no sólo el resultado final.

b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

Sin duda la mejor manera de lograr este objetivo es mediante una actividad retadora y realista. Este objetivo no es fácil el ámbito de las matemáticas, menos aún mediante una situación de aprendizaje considerada de modo aislado, pues los hábitos, por definición, se logran a lo largo del tiempo.

En cualquier caso, la actividad está pensada para que nadie se quede atrás, y paso a paso se vaya avanzando en la construcción de conocimiento. Si el alumno se da cuenta de que progresa, que entiende, que es capaz de manejar los conceptos, le motivará a perseverar.

Se pedirá un cuaderno de trabajo en el que se anotarán los aprendizajes de cada sesión, de tal forma que día a día haya un trabajo individual y de reflexión y, de paso, servirá como punto de partida para la siguiente sesión, ya que tendrán una referencia de las ideas más relevantes aprendidas y podrán de ese modo conectarlas con la actividad del día siguiente. A través del cuaderno el alumno construye y organiza sus ideas individualmente, y toma conciencia de la importancia del trabajo continuo, estableciendo una disciplina.

c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.

Dentro de la heterogeneidad de los grupos, el sexo de los participantes es aleatorio, pues las personas de cada grupo se seleccionarán en atención a sus capacidades, siendo el género irrelevante.

f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

Ver el conocimiento científico como algo integrado nos lleva a entender que las matemáticas no son solo una disciplina aislada, sino una herramienta clave para abordar problemas en distintas áreas del saber. No importa si se trata de física, economía o biología, las matemáticas ofrecen los métodos necesarios para formular y resolver problemas de forma clara y precisa. Además, estas herramientas permiten no solo analizar fenómenos complejos, sino también conectar distintas ramas del conocimiento, haciendo posible

encontrar soluciones innovadoras y mejorar nuestra comprensión del mundo. De este modo las matemáticas conectan claramente con el resto de materias.

g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

El espíritu emprendedor se trabajará al desarrollar las distintas ideas que pueden surgir de los planteamientos sugeridos, sin penalizar el error o el fallo, ya que se entiende que es parte del proceso. La confianza en uno mismo se potenciará, dentro del grupo, defendiendo sus propias aportaciones y, frente al resto del grupo, cuando presenten sus resultados o conclusiones grupales. A medida que se enfrentan a las distintas actividades, los alumnos tomarán distintas decisiones basadas en sus procesos de reflexión y trabajo comunitario, donde descartarán unas ideas en favor de otras, aceptando finalmente tanto el éxito como el fracaso, pero entendiendo este siempre como una opción de mejora, investigando y siendo conscientes de por qué el camino tomado no fue el adecuado, convirtiéndose en un referente para futuras tomas de decisiones. Es importante que el alumno aprenda a arriesgarse y no tenga miedo al error, tomando iniciativas para encontrar vías alternativas, aprendiendo que no es fácil acertar a la primer y que el aprendizaje se basa en ser resiliente. Sólo mediante el esfuerzo continuado se consigue llegar a buen puerto.

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la comunidad autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

La situación de aprendizaje planteada propone la discusión y, sobre todo, la puesta en común de las ideas y conclusiones, para lo cual se ejercita la expresión oral, incluyendo tanto el lenguaje ordinario como medio de transmisión e intercambio de ideas, como el lenguaje algebraico propio de las matemáticas para la correcta exposición y demostración de las mismas.

4.2.2 Objetivos pedagógicos

- Fomentar el trabajo colaborativo a través de actividades grupales de exploración, discusión y retroalimentación.
- Resolver e interpretar sistemas de ecuaciones lineales utilizando representaciones gráficas en GeoGebra.
- Elaborar conjeturas sobre la existencia y naturaleza de soluciones (única, infinitas o ninguna) a partir de la representación gráfica y algebraica.
- Demostrar propiedades de los sistemas de ecuaciones (como la equivalencia entre formas) usando argumentos lógicos y visuales.
- Comparar y contrastar diferentes métodos de resolución de sistemas lineales (gráfico, sustitución, igualación, reducción), justificando la elección de cada uno.

- Desarrollar habilidades comunicativas mediante la participación activa en debates matemáticos enfocados en validar o refutar conjeturas.
- Adquirir soltura en exposiciones orales que integren lenguaje matemático preciso, representación visual en GeoGebra y razonamiento lógico.
- Reflexionar críticamente sobre los procesos seguidos, identificando aciertos, errores y formas de mejorar la comprensión y comunicación matemática.

4.2.3 Competencias específicas y descriptores operativos.

Las competencias específicas corresponden a la asignatura MATEMÁTICAS, según DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

Competencia específica 1: *Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.*

Descriptores operativos del perfil de salida: CCL1, CCL2, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.

Actividades de la situación vinculadas: Actividad 4, Actividad 5.

Competencia específica 2: *Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.*

Descriptores operativos del perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM4, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.

Actividades de la situación vinculadas: Actividad 4.

Competencia específica 3: *Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.*

Descriptores operativos del perfil de salida: CCL1, CCL2, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3.

Actividades de la situación vinculadas: Actividad 1, Actividad 2, Actividad 3, Actividad 4.

Competencia específica 4: *Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.*

Descriptores operativos del perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.

Actividades de la situación vinculadas: Actividad 1.

Competencia específica 5: *Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.*

Descriptores operativos del perfil de salida: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.

Actividades de la situación vinculadas: Actividad 1, Actividad 2.

Competencia específica 7: *Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.*

Descriptores operativos del perfil de salida: STEM3, STEM4, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.

Actividades de la situación vinculadas: Actividad 2, Actividad 3, Actividad 4, Actividad 5

Competencia específica 8: *Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.*

Descriptores operativos del perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.

Actividades de la situación vinculadas: Actividad 1, Actividad 2, Actividad 3, Actividad 4, Actividad 5

Competencia específica 9: *Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.*

Descriptores operativos del perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.

Actividades de la situación vinculadas: Actividad 5.

Competencia específica 10: *Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.*

Descriptores operativos del perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.

Actividades de la situación vinculadas: Actividad 1, Actividad 2, Actividad 3, Actividad 4, Actividad 5.

Cuadro resumen de la vinculación:

Tabla 1. Tabla que vincula cada actividad con las competencias específicas y criterios de evaluación abordados.

COMPETENCIA	ACT 1	ACT 2	ACT 3	ACT 4	ACT 5
Competencia específica 1				✓	✓
Criterios de evaluación				1.1	1.1
Competencia específica 2				✓	
Criterios de evaluación				2.2	
Competencia específica 3	✓	✓	✓	✓	
Criterios de evaluación	3.1	3.3	3.2, 3.3	3.3	
Competencia específica 4	✓				
Criterios de evaluación	4.2				
Competencia específica 5	✓	✓			
Criterios de evaluación	5.2	5.1			
Competencia específica 7		✓	✓	✓	✓
Criterios de evaluación		7.1	7.1	7.1	7.1
Competencia específica 8	✓	✓	✓	✓	✓
Criterios de evaluación	8.1, 8.2	8.1, 8.2	8.1, 8.2	8.1, 8.2	8.1, 8.2
Competencia específica 9					✓
Criterios de evaluación					9.1
Competencia específica 10	✓	✓	✓	✓	✓
Criterios de evaluación	10.1	10.1	10.1	10.1	10.1

4.2.4 Instrumentos de evaluación

Para la situación de aprendizaje propuesta, se van a implementar varios instrumentos de evaluación. Una rúbrica agrupada en torno a cada uno de los cinco bloques competenciales, según su naturaleza: resolución de problemas (competencias específicas 1 y 2), razonamiento y prueba (competencias específicas 3 y 4),

conexiones (competencias específicas 5 y 6), comunicación y representación (competencias específicas 7 y 8) y destrezas socioafectivas (competencias específicas 9 y 10), que será nutrida mediante la observación del docente (heteroevaluación).

Otra rúbrica para el análisis del desempeño, valorando la ejecución de sus compañeros cuando salen a exponer sus resultados (coevaluación).

Se generan las correspondientes rúbricas, con rango de valoración de 1 a 5, siendo:

- 1: Nivel insuficiente.
- 2: Nivel mejorable.
- 3: Nivel aceptable
- 4: Nivel satisfactorio.
- 5: Nivel excelente.

Considerando los distintos criterios de observación que se han tenido en cuenta, se pasa a relacionar la rúbrica asociada a cada uno, que se será aplicado a la cada actividad según sea oportuno.

VALORACIÓN DE LA ACTIVIDAD. HETEROEVALUACIÓN.

Tabla 2. Rúbrica relativa a los criterios de evaluación asociado al bloque competencial “resolución de problemas”.

Criterio de evaluación	Nivel insuficiente	Nivel mejorable	Nivel aceptable	Nivel satisfactorio	Nivel excelente
1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana, organizando los datos dados y/o seleccionando información, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas	No comprende el enunciado ni identifica datos relevantes. Confunde términos del problema. No organiza la información	Reconoce partes del enunciado y algunos datos, pero omite información clave o establece relaciones incorrectas. Necesita guía externa.	Comprende lo esencial del problema. Identifica los datos y organiza parte de ellos correctamente. Reconoce relaciones simples.	Interpreta con claridad el enunciado, identifica y organiza correctamente los datos, y establece relaciones adecuadas	Comprende completamente el problema. Selecciona, organiza y relaciona datos de forma precisa y autónoma, detectando incluso datos irrelevantes o implícitos
2.2 Comprobar, con algunas indicaciones de guía, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas	No considera el contexto del problema ni reflexiona sobre la validez de la solución.	Con guía, reconoce aspectos del contexto, pero no los relaciona con la solución.	Analiza el contexto del problema y la adecuación de la solución con cierta profundidad. Reflexiona con ayuda sobre consecuencias básicas	Justifica la coherencia de la solución dentro del contexto.	Evalúa con profundidad la validez y repercusión de la solución en su contexto. Propone mejoras o alternativas.

Tabla 3. Rúbrica relativa a los criterios de evaluación asociado al bloque competencial “razonamiento y prueba”.

Criterio de evaluación	Nivel insuficiente	Nivel mejorable	Nivel aceptable	Nivel satisfactorio	Nivel excelente
3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.	No comprende qué es una conjetura ni reconoce patrones o relaciones. Requiere ayuda constante.	Identifica algunos patrones con ayuda, pero no los analiza correctamente ni comprueba conjeturas de forma clara.	Reconoce patrones o regularidades simples y comprueba conjeturas básicas con orientación.	Analiza patrones y propiedades con corrección, comprueba conjeturas de manera guiada y justifica sus conclusiones.	Comprueba conjeturas de forma autónoma, interpreta patrones complejos y propone argumentos o contraejemplos sólidos.
3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la comprobación de conjeturas o problemas analizando el resultado obtenido	No utiliza herramientas tecnológicas o las usa incorrectamente sin extraer conclusiones.	Usa alguna herramienta básica con ayuda (GeoGebra, calculadora), pero con errores o sin interpretar los resultados.	Emplea correctamente herramientas como GeoGebra, y comprueba parcialmente las conjeturas, sin completar extraer conclusiones.	Utiliza herramientas digitales apropiadas (GeoGebra, calculadoras) para comprobar conjeturas y extrae conclusiones relevantes.	Integra herramientas tecnológicas con autonomía para explorar y comprobar conjeturas. Interpreta los resultados de manera crítica y propone nuevas ideas a partir de ellos.
4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando y modificando algoritmos	No representa la situación con modelos matemáticos ni comprende el uso de algoritmos.	Intenta modelizar con errores o simplificaciones excesivas; interpreta algoritmos parcialmente, sin aplicarlos correctamente.	Modeliza situaciones básicas con ayuda, aplicando o ajustando algoritmos simples para resolver el problema	Representa la situación de forma adecuada, interpreta y adapta algoritmos correctamente para obtener soluciones.	Modeliza con precisión y creatividad, modifica o construye algoritmos propios si es necesario y argumenta su adecuación y eficiencia.

Tabla 4. Rúbrica relativa a los criterios de evaluación asociado al bloque competencial “conexiones”.

Criterio de evaluación	Nivel insuficiente	Nivel mejorable	Nivel aceptable	Nivel satisfactorio	Nivel excelente
5.1 Conocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente	No relaciona conceptos matemáticos entre sí. Presenta una visión fragmentada del conocimiento.	Identifica relaciones muy básicas entre contenidos matemáticos, pero con errores o con ayuda. Le cuesta establecer conexiones.	Reconoce relaciones directas entre distintos conceptos o procedimientos matemáticos en contextos conocidos.	Establece conexiones claras y razonadas entre distintos contenidos, mostrando comprensión global y coherente del área.	Integra múltiples conocimientos matemáticos con fluidez, estableciendo relaciones complejas y justificadas que revelan pensamiento sistémico.
5.2 Conocer y usar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas	No aplica conocimientos previos ni establece conexiones entre procesos matemáticos distintos.	Usa algún conocimiento previo aislado, pero sin integrarlo adecuadamente en nuevos contextos o procedimientos	Aplica conocimientos previos en la resolución de nuevos problemas cuando la conexión es evidente o con orientación.	Transfiere conocimientos y estrategias entre distintos procesos o situaciones con autonomía y criterio.	Establece y utiliza conexiones entre procesos matemáticos diversos de forma original y eficaz, aplicando experiencias previas incluso en contextos novedosos.

Tabla 5. Rúbrica relativa a los criterios de evaluación asociado al bloque competencial “comunicación y representación”.

Criterio de evaluación	Nivel insuficiente	Nivel mejorable	Nivel aceptable	Nivel satisfactorio	Nivel excelente
7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos	No representa correctamente conceptos o procedimientos. No emplea herramientas adecuadas.	Realiza representaciones muy limitadas o poco precisas. Requiere ayuda para usar recursos digitales o estructurar procesos.	Utiliza representaciones básicas (gráficas, tablas, esquemas) y herramientas digitales simples con ayuda. Muestra parte del proceso.	Representa correctamente conceptos y resultados de varias formas (gráfica, numérica, simbólica, digital), estructurando bien los procesos.	Emplea con autonomía representaciones múltiples y herramientas digitales para visualizar, estructurar y comunicar con claridad procesos matemáticos completos y complejos.
8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, usando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos, procedimientos y conclusiones	No es capaz de comunicar empleando lenguaje matemático. No comunica correctamente los resultados ni explica los razonamientos, procedimientos y conclusiones.	Realiza comunicaciones, pero con poco rigor en el uso de lenguaje matemático. Los razonamientos son confusos e inconsistentes, impidiendo que se explique adecuadamente.	Se comunica empleando lenguaje matemático con algún error. Explica los razonamientos, procedimientos y conclusiones, pero se atasca en algún momento, hay imprecisiones y necesita ser auxiliado por el profesor en algún momento.	Comunica empleando lenguaje matemático con corrección dentro del nivel. Explica con soltura sus razonamientos, que son coherentes con las conclusiones.	Comunica con claridad, rigor y coherencia procedimientos, razonamientos y conclusiones. Integra medios orales, escritos y digitales con lenguaje matemático preciso y contextualizado.
8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión	No reconoce ni utiliza adecuadamente el lenguaje matemático en contextos reales. No transmite mensajes con contenido numérico o lógico.	Identifica algunos elementos matemáticos del entorno (recta, variable, plano, etc...), pero los comunica con errores o imprecisiones.	Reconoce y emplea términos matemáticos básicos en situaciones cotidianas (recta, variable, plano, etc...). Se comunica con cierto acierto.	Expresa con precisión mensajes con contenido matemático contextualizado, utilizando adecuadamente el vocabulario matemático.	Analiza e interpreta situaciones reales con contenido matemático, y comunica sus ideas con exactitud, adaptando el lenguaje al medio y al contexto.

Tabla 6. Rúbrica relativa a los criterios de evaluación asociado al bloque competencial “destrezas socioafectivas”.

Criterio de evaluación	Nivel insuficiente	Nivel mejorable	Nivel aceptable	Nivel satisfactorio	Nivel excelente
9.1 Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos	Muestra rechazo frecuente hacia las matemáticas, baja autoestima académica y se bloquea ante nuevos retos sin intentar afrontarlos.	Tiene dificultades para manejar la frustración; muestra dudas persistentes sobre su capacidad matemática, aunque a veces lo intenta.	Comienza a identificar sus emociones ante tareas matemáticas. Afronta nuevos retos con apoyo y cierta confianza.	Se enfrenta a tareas con actitud positiva. Acepta el error como parte del aprendizaje y desarrolla una imagen de sí mismo/a como alguien capaz en matemáticas.	Gestiona eficazmente sus emociones, mantiene una actitud positiva y resiliente, y tiene una visión constructiva y confiada de su competencia matemática, animando incluso a sus compañeros/as.
10.1 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones	No participa o participa negativamente, muestra falta de respeto a opiniones diferentes y dificultad para comunicarse con el grupo.	Participa poco y con poca colaboración. Escucha de forma limitada, acepta opiniones con dificultad y toma decisiones sin consenso.	Participa activamente, respeta las opiniones de los demás y se comunica adecuadamente. Aplica pensamiento crítico y creativo con apoyo.	Colabora de forma constante, promueve el respeto y la escucha activa, contribuye con ideas críticas y creativas, y participa en decisiones consensuadas.	Lidera el trabajo colaborativo, fomenta un clima inclusivo y respetuoso, comunica con claridad, piensa críticamente y creativamente, y ayuda a tomar decisiones eficaces en equipo.

ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO: COEVALUACIÓN

Los alumnos valorarán en este punto el desempeño explicativo de sus compañeros cuando salen a desarrollar sus explicaciones o cuando responden a las cuestiones planteadas. Es por tanto coevaluación y para ello se desarrolla al final de todas las exposiciones y debates en clase, pues se valora la intervención de los grupos. Por ese motivo, la valoración es de cada individuo al resto de los grupos.

La coevaluación entre compañeros es una forma muy útil de aprender, porque permite que los alumnos se fijen con atención en el trabajo de los demás y aprendan también de sus explicaciones. Valorar a otros ayuda a entender mejor los contenidos y a darse cuenta de qué cosas se hacen bien y cuáles se pueden mejorar. Además, fomenta el respeto, la responsabilidad y el trabajo en equipo, ya que no solo se trata de opinar, sino de hacerlo con criterio y de forma justa. En el aula, esto crea un ambiente de colaboración donde todos participan y se sienten parte del proceso de aprendizaje.

Tabla 7. Rúbrica relativa al análisis del desempeño: valoración entre grupos (coevaluación).

VALORACIÓN DE LOS GRUPOS					
Instrucciones: para cada grupo de tus compañeros, valora de 1 a 4, cada apartado, siendo: 1: Insuficiente 2: Mejorable 3: Aceptable 4: Satisfactorio.					
Pregunta	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
¿Han hablado claro y se les entendía bien?					
¿Han explicado bien las cuestiones de matemáticas?					
¿Han usado palabras de matemáticas correctamente?					
¿Han usado bien la pizarra o la presentación?					
¿Todos los miembros del grupo han participado?					
¿Han sabido responder a las preguntas?					
Aquí puedes poner alguna opinión más o lo que creas que puede ayudar a mejorar a cualquier grupo o compañero					

ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO: CUADERNO DEL ALUMNO

Tener un buen cuaderno en clase es más importante de lo que a veces parece. No solo sirve para apuntar lo que se da en clase, sino que ayuda a entender mejor los temas, organizar las ideas y tener un sitio claro donde repasar antes de un examen. Un cuaderno bien hecho demuestra que el alumno está atento, que se esfuerza y que lleva un seguimiento de lo que se va trabajando. Además, es útil para ver el progreso a lo largo del curso. Evaluarlo no es solo para ver si está limpio o bonito, sino para valorar cómo trabaja el alumno día a día, cómo se organiza y cómo se implica en su propio aprendizaje.

El cuaderno que se pide para esta situación de aprendizaje no es de una complejidad excesiva, sino que pretende ser un lugar donde el alumno guarda la información que considera más relevante para su aprendizaje, “lo que no se debe olvidar”. Anota las cosas como las recuerda y aprendió.

Se debe realizar todos los días en casa y entregar al final de la situación. La forma de organizar la información es libre, pero sí debe seguir el orden de las distintas actividades hechas en clase. Puede incluir ejemplos y las propias conclusiones y deducciones del alumno, incluso las posibles dudas que, pese a todo lo practicado en las sesiones, siga sin comprenderse (se puede emplear en sesiones de tutoría, clases de apoyo, sesiones especiales de recordatorio y práctica, etc....

Tabla 8. Rúbrica relativa al análisis del desempeño: cuaderno del alumno (autoevaluación).

Criterio de evaluación	Nivel insuficiente	Nivel mejorable	Nivel aceptable	Nivel satisfactorio
Comunicación (explicación escrita)	No se entiende o faltan explicaciones.	Explica algunos pasos, pero con dudas o confusión en el lenguaje.	Explica los pasos con claridad, aunque a veces falta precisión en el lenguaje.	Explica con claridad los pasos y razones, usando lenguaje matemático adecuado y sin errores.
Representación (diagramas, gráficos, símbolos)	No utiliza representaciones o son incorrectas.	Usa pocas representaciones o poco claras.	Usa representaciones en general bien, pero con algunos errores o poco detalle.	Usa dibujos, esquemas, gráficos y símbolos correctamente para apoyar la comprensión.
Demostración (argumentación y justificación)	No justifica o las justificaciones no tienen sentido.	Justifica algunos resultados, pero de forma incompleta o confusa.	Justifica la mayoría de resultados, aunque con razonamientos poco profundos.	Justifica con precisión los resultados y argumentos con razonamientos sólidos.
Organización y presentación	Cuaderno desordenado, difícil de seguir.	Presentación aceptable, pero con desorden o falta de claridad.	Cuaderno generalmente ordenado y con buena presentación.	Cuaderno ordenado, limpio, con fechas, títulos y espacio para cada tema o ejercicio.
Contenido	Muchas ausencias o ejercicios sin hacer.	Apunta algunos ejercicios, pero faltan contenidos importantes.	Apunta la mayoría de ejercicios y contenidos, con pocas ausencias.	Apunta todos los ejercicios y contenidos vistos en clase y tareas completas.
Reflexión sobre el aprendizaje	No hay evidencia de la reflexión personal sobre el aprendizaje.	Registra reflexiones esporádicas o superficiales, carente de análisis alguno	Incluye reflexiones, pero son muy generales y apenas incluyen reflexión	Incluye reflexiones profundas y completas: identificando errores, aciertos y opciones de mejora.
Estrategias utilizadas	No identifica ni hace mención a las estrategias empleadas	Menciona algunas estrategias, pero sin justificación, análisis o valoración.	Describe las estrategias, pero sin ningún tipo de análisis.	Realiza análisis de las estrategias empleadas y valora la efectividad, en especial en resolución de problemas.

ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO. HETEROEVALUACIÓN.

Se dedicarán dos días en clase a la resolución de problemas. Se plantea un problema y se intenta hacer entre todo el grupo, siguiendo los pasos planteados en las actividades. Se saldrán en la pizarra en grupos de tres personas para la realización de forma simultánea tanto de los planteamientos como de la resolución. Al hacerse en simultáneo, el resto de compañeros pueden ver cómo se van desarrollando los distintos pasos. Si ven algún error, pueden parar al alumno que lo comete y hacérselo notar. No es una competición, se trata de comparar tres formas de hacer un mismo problema y ver en qué medida se llegan a los resultados y dónde se comenten los fallos habitualmente, para tomar nota e incluirlo en cuaderno del alumno y poner especial cuidado en esos pasos.

El tercer día se realizará la prueba escrita compuesta de dos problemas, para los cuales se deja la calculadora. Ver anexos.

Como actividad complementaria, el docente puede preparar una tabla con los errores advertidos durante las dos clases preparatorias y los cometidos durante la prueba escrita, a fin de establecer una relación y valorar si las clases han sido significativas en la identificación y comprensión de errores habituales, y si estos se han vuelto a reproducir en el examen y en qué medida.

4.3 Metodología

4.3.1 Métodos, estilos, estrategias y técnicas.

En esta situación de aprendizaje se parte de un enfoque constructivista y competencial, en el que el alumnado construye el conocimiento de forma activa a partir de sus ideas previas, interactuando con su entorno y con sus compañeros. Tal como sostiene Ausubel, es fundamental "conectar los nuevos conocimientos con los que el alumno ya posee" para lograr un aprendizaje significativo. En este sentido, se inicia la secuencia didáctica con un breve recordatorio de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, lo que permite activar conocimientos previos y detectar posibles lagunas de aprendizaje.

A continuación, se introducen las ecuaciones lineales con dos incógnitas y los sistemas asociados mediante el uso de herramientas digitales como GeoGebra, que favorecen la visualización gráfica y la experimentación interactiva. Esta fase permite que el alumnado comprenda de forma manipulativa y visual el concepto de solución de un sistema, favoreciendo una comprensión profunda y accesible a distintos ritmos de aprendizaje.

La propuesta incorpora también el uso de estrategias de aprendizaje cooperativo, que permiten estructurar el trabajo en equipo de forma eficaz, favoreciendo tanto el desarrollo social como el cognitivo, en línea con la teoría de Vygotsky, quien subraya la importancia del aprendizaje en interacción con los demás y del lenguaje

como herramienta mediadora. Durante las sesiones, se organizarán grupos heterogéneos y se asignarán roles para fomentar la responsabilidad compartida y el apoyo mutuo.

El núcleo metodológico gira en torno a un problema contextualizado que servirá para enseñar los tres métodos de resolución de sistemas (sustitución, igualación y reducción). Esta actividad se plantea como un aprendizaje basado en problemas (ABP), lo que permite al alumnado analizar la situación, seleccionar estrategias adecuadas y reflexionar sobre su eficacia, favoreciendo así el desarrollo de competencias como el pensamiento crítico, la toma de decisiones y la capacidad de aplicar los contenidos a situaciones reales.

La secuencia culmina con una actividad lúdica y motivadora en forma de “escape room”, la cual responde a un enfoque de gamificación, diseñada específicamente para aplicar los conocimientos adquiridos sobre sistemas de ecuaciones en la resolución de enigmas. Esta actividad tiene un alto componente emocional al tratarse de una forma de juego-competición, además de cooperativo, lo que potencia el interés del alumnado y su implicación activa en el aprendizaje, aspectos clave para Piaget, quien defendía que el aprendizaje debe surgir de la acción y la resolución de conflictos cognitivos.

Durante todo el proceso se prioriza la atención a la diversidad, a través de actividades multinivel, el uso de herramientas digitales que permiten adaptar el ritmo y la dificultad, y una organización flexible del aula. Se contemplan apoyos específicos para alumnado con necesidades educativas especiales y propuestas de enriquecimiento para quienes muestren mayor capacidad o interés.

Finalmente, se promueve la metacognición mediante la confección del cuaderno del alumno, que permiten al alumnado tomar conciencia de su proceso de aprendizaje, identificar sus aciertos y dificultades, y establecer estrategias de mejora, haciendo visible el propio proceso cognitivo.

4.3.2 Organización del alumnado y agrupamientos.

Dado que los grupos de clase están en el orden de 14 a 20 alumnos, los grupos serán de 4 o 5 personas, para que las explicaciones y los debates no sean prácticos por el exceso de grupos, primando el intercambio de ideas entre los miembros de cada grupo frente al que se realiza entre los grupos.

El I.E.S. Leopoldo Cano se caracteriza por contar con una población estudiantil diversa, con presencia de alumnado procedente de distintos países, especialmente de América Latina, Europa del Este y el norte de África. Esto genera una riqueza cultural notable, pero también plantea desafíos relacionados con las competencias lingüísticas, la adaptación curricular y la integración social. Además, existe una proporción relevante de alumnado en situación de vulnerabilidad social, por lo que se hace imprescindible aplicar medidas de atención a la diversidad y una planificación inclusiva. Para responder a esta diversidad, se propone un sistema de agrupamiento flexible, mixto y cooperativo. En primer lugar, se favorecerán los grupos heterogéneos, en los que se combinen diferentes niveles de competencia, estilos de aprendizaje y

procedencias culturales. Esto permitirá la cooperación entre iguales, el aprendizaje entre compañeros y el fomento de valores como la solidaridad, el respeto y la empatía.

Los grupos no se harán al azar, sino que serán confeccionados por el profesor teniendo en cuenta los criterios antes mencionados.

4.3.3 Cronogramas y organización de tiempos.

SEMANA	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Semana 1	Actividad 1	Actividad 2		Actividad 3	Actividad 4
Semana 2	Actividad 5	Problemas 1		Problemas 2	Examen
Semana 3					Entrega cuaderno

Todas las actividades se desarrollarán en la hora habitual de clase de matemáticas, bien sea en el aula o en el aula de informática.

4.3.4 Recursos materiales

- Aula de clase: el aula permite adecuar el espacio para organizar el trabajo en grupo desplazando ligeramente las mesas y reubicando a los componentes de cada grupo.
- Aula de informática: emplazamiento situado como máximo a una planta de diferencia de la clase habitual. El tiempo de desplazamiento hasta la misma desde la clase habitual es de 1 minuto. Ese entorno no permite mover las mesas, pero se puede agrupar las sillas en torno a un equipo informático. Si el grupo lo considera apropiado, existe la posibilidad de trabajar cada alumno en un equipo informático y luego poner de acuerdo sus resultados. Este último punto queda a la elección de los miembros de los equipos, de cara a flexibilizar su organización interna.
- Pizarra digital aula informática: para presentaciones, exposición, etc....dispondrá de acceso a internet y red local para cargar applets y resultados del trabajo de los alumnos, así como para desplegar dinámicamente los desarrollos de las distintas actividades.
- Pizarra digital clase: misma consideración que la pizarra digital del aula de informática.
- GeoGebra: software dinámico de uso gratuito.
- Pizarra convencional: para explicaciones o aclaraciones adicionales que se requieran (aula de clase y aula de informática).
- Cuadernos: para anotaciones del cuaderno de alumnos en modo borrador.
- MS. Teams: para intercambio de contenidos entre profesor y alumnos, y entre los propios alumnos

4.4 Actividades programadas

4.4.1 ACTIVIDAD 1: RECORDANDO.

La actividad se ha llamado “RECORDANDO”, pues su finalidad es precisamente eso, recordar conceptos, sus relaciones, así como la correcta realización de operaciones.

El propósito de esta actividad inicial es recordar conceptos previos que, aunque seguramente estén incorporados y se manejen con mayor o menor soltura, conviene recuperar para poder enlazarlos con los sistemas de ecuaciones lineales.

A tenor de todo lo expuesto en los antecedentes, en especial a los fallos más comunes de los alumnos tanto en el manejo de expresiones algebraicas como ecuaciones de primer grado, se hace imprescindible dedicar una jornada a recuperar ese conocimiento y afianzarlo, para poder de ese modo encarar con más garantías el siguiente escalón. Se empleará una perspectiva “gamificada” para que resulte menos tediosa, involucrando en mayor medida al alumnado.

Para que el aprendizaje sea significativo, ha de enlazar conocimientos anteriores con los nuevos. En esta primera sesión, por tanto, se trata de refrescar esos conocimientos para que entronquen perfectamente con los siguientes, en especial en la parte conceptual y en especial de cálculo.

Dado que para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (esencialmente los que trabajarán en este curso), llegado a cierto punto, en los tres métodos de resolución, se ha de resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, revisaremos sobre éstas la terminología básica, de cara a manejarnos en el futuro con el lenguaje matemático apropiado. También la forma de despejar y los cálculos que la acompañan.

Dentro de la actividad, se propone en primera instancia tratar de construir la definición de ecuación: “igualdad entre dos expresiones algebraicas que se cumple sólo para algunos valores de las incógnitas, o ninguno”. Se incluye por tanto el concepto de solución de la ecuación y se trabajará para razonar que no siempre se obtiene una solución, es decir que, por el mero hecho de plantear una ecuación, no quiere decir que lleguemos al tan esperado “equis igual a algo”.

Se trabajarán también conceptos como *número*, *variable*, *coeficiente*, *término* y *expresión algebraica*. Con ellos y auxiliados por ejemplos, se tratará de construir por parte de los alumnos la definición más exacta de ecuación.

Se repasan también, según lo indicado, las operaciones fundamentales en las que tantos estudiantes se equivocan

Con esta actividad se quiere lograr equiparar el nivel del alumnado, progresando en la inclusión. De este modo las posibles carencias comprensivas de etapas anteriores se reducen, fomentando la participación de los alumnos más rezagados, evitando en la medida de lo posible que se “descuelguen”. Se pretende también elevar la autoestima matemática al comprender aspectos necesarios para el siguiente objetivo, los sistemas de ecuaciones lineales.

El formato de esta clase será la puesta en común, donde el profesor sigue el guión propuesto en la actividad. Se trabaja en grupos para confeccionar cada respuesta. En cada ocasión debe responder un miembro distinto de cada grupo. A cada pregunta o cuestión por turnos va respondiendo cada grupo, y para cada respuesta el resto de los grupos han de indicar si están de acuerdo o no. Si la respuesta es no, deben justificarla y dar una alternativa que consideren correcta. En caso de duda o debate, el profesor guiará mediante preguntas y comentarios hacia la solución, intentando que a medida que se avance en el razonamiento, sean los propios alumnos los encargados de realizar las aportaciones para concluir.

Se empleará la pizarra digital, donde se pueden ir disponiendo las distintas cuestiones y donde se puede trabajar rodeando las respuestas correctas o hacer las operaciones que se pidan.

El tiempo para la actividad se estima en 50 minutos. El lugar, la clase habitual con colocación de las mesas para que los miembros del mismo grupo estén juntos y puedan debatir.

Las definiciones son:

- **Expresión algebraica:** es una combinación de números, letras (incógnitas) y operaciones matemáticas (como suma, resta, multiplicación, división), que no contiene signos de igualdad.
- **Ecuación:** igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple para algunos valores de las incógnitas, o ninguno.
- **Miembro** de una ecuación: cada una de las expresiones algebraicas que aparecen a cada lado del signo igual. La de la izquierda es el primer miembro, mientras que la de la derecha es el segundo.
- **Incógnita:** cada una de las letras que aparecen cuyo valor se desconoce y queremos calcular.
- **Términos:** son cada uno de los sumandos de cada miembro.
- **Grado** de una ecuación con una incógnita: el mayor exponente al que aparece elevada la variable.
- **Solución** de una ecuación, si la tiene, es el valor de la incógnita que hace que se cumpla la igualdad. (Es lo que se llama resolver la ecuación).

CUESTIONES conceptuales para plantear en la pizarra digital. En este apartado se entregará una ficha a cada grupo con las cuestiones para que las traten de resolver en un periodo de 10 minutos.

Encuentra de entre las del listado la que no es una expresión algebraica y porqué.

$$3x+2$$

$$5y-7$$

$$-4x+1$$

$$\frac{2x}{3}$$

$$x+y$$

$$x-y+6$$

$$4x-3y+33$$

$$(x-1)\left(\frac{3-x}{2}\right)$$

$$\frac{2x(x-3)}{6} + \frac{17}{12}$$

$$2x+5=4$$

De las siguientes expresiones, indica cuáles son ecuaciones y cuáles no y explica el porqué.

$$x+3=7$$

$$2y-5=3y+1$$

$$5-2x+7$$

$$4=4$$

$$2x < 6$$

Rodea con un círculo cada uno de los miembros en cada ecuación

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = \frac{3}{4} - x + 2 \quad -3y + 2 + 4y - 3 = 6 + 2y$$

Rodea con un círculo la incógnita.

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = \frac{3}{4} - x + 2 \quad -3y + 2 + 4y - 3 = 6 + 2y \quad x - 2 - \frac{3(x-1)}{2} + \frac{1}{6}(x-3) = \frac{2(x-1)}{3} - \frac{x+1}{2} - \frac{7}{3}$$

Rodea con un círculo cada término

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = \frac{3}{4} - x + 2 \quad -3x + 2 + 4x - 3 = 6 + 2x \quad y - 2 - \frac{3(y-1)}{2} + \frac{1}{6}(y-3) = \frac{2(y-1)}{3} - \frac{y+1}{2} - \frac{7}{3}$$

Soluciones de una ecuación: decir si los siguientes valores son solución de la ecuación:

$$2x - (3-2x) = 7x + 4 - (-x-1) \quad x = 1 \quad x = -2$$

$$\frac{y}{2} - \frac{y}{8} = \frac{3}{4} - y + 2 \quad y = 2 \quad y = -2$$

Viendo lo anterior, construye la definición de ecuación. (Los distintos grupos deben confeccionar su definición lo más completa posible a tenor de las características observadas en los ejemplos anteriores. Entre todos los grupos se irá construyendo la definición más completa posible, algo como: “Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones, denominadas miembros y separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas”.

Explica qué significa que un valor es solución de una ecuación.

Finalizado este apartado, se pone en común con las aportaciones de todos los grupos, para lo cual, por turnos, irá dando su respuesta a una cuestión, que serán contrastadas con las del resto, argumentando por qué están de acuerdo o no.

OPERACIONES:

Para este apartado se entregará la segunda parte de la ficha con las cuestiones para que, como en el caso anterior, las respondan por grupos. Las respuestas no se incluyen en la ficha, pero se añaden aquí como guía para el profesor. Cada paso de la ficha se irá poniendo en común y resolviendo entre todos, dándoles 1 minuto o 2, dependiendo del progreso, para resolverlos antes de debatirlo.

Para resolver una ecuación, seguiremos siempre los mismos pasos:

P: ¿Qué expresión es la que queremos al final de las operaciones?: R: $x = \text{número}$.

Nota incluida en la ficha: para mantener la igualdad, hay que operar de igual modo a ambos **miembros**. Recuerda que has marcado con anterioridad lo que es un miembro. La operación que hagas, se la haces al todo el miembro completo, no solamente a una de sus partes

P: ¿Cuál sería el primero?, ¿qué es lo que más “molesta”? R: Los denominadores.

$$x - 2 - \frac{3(x-1)}{2} + \frac{1}{6}(x-3) = \frac{2(x-1)}{3} - \frac{x+1}{2} - \frac{7}{3}$$

P: ¿Qué tiene que pasar en ambos miembros para poder quitar los denominadores en la ecuación? R: que el denominador sea el mismo en ambos miembros.

P: ¿Cómo conseguimos eso? R: haciendo común denominador en todos los **términos** de la ecuación.

P: ¿Cómo buscamos el denominador común? R: haciendo el máximo común múltiplo. En este caso 6.

P: ¿Qué operación haríamos? R: Multiplicar a ambos por el denominador común, con lo cual simplificamos la expresión y desaparecen los denominadores.

$$\frac{6x}{6} - \frac{12}{6} - \frac{9(x-1)}{6} + \frac{1}{6}(x-3) = \frac{4(x-1)}{6} - \frac{3(x+1)}{6} - \frac{14}{6}$$

$$\frac{6x-12-9(x-1)+(x-3)}{6} = \frac{4(x-1)-3(x+1)-14}{6}, \text{ ¿están ambos miembros divididos por el mismo número?}$$

P: ¿Qué podemos hacer ahora? R: Multiplicar ambos miembros por 6

$$6\left(\frac{6x-12-9(x-1)+(x-3)}{6}\right) = 6\left(\frac{4(x-1)-3(x+1)-14}{6}\right)$$

$$6x - 12 - 9(x - 1) + (x - 3) = 4(x - 1) - 3(x + 1) - 14$$

P: ¿Qué paso sería el siguiente, ¿qué quitaríamos ahora? R: Los paréntesis.

Explica con palabras qué significa poner paréntesis a una expresión. ¿Por qué se hace? ¿Qué pasa cuando operamos con un signo menos delante de un paréntesis?

Nota para incluir en la ficha o para ser mencionada por el profesor: Una agrupación por ejemplo son los alumnos de una clase. Son un conjunto agrupado, por ejemplo 2ºA. Si el profesor decide poner un examen tu día a la clase de 2ºA, significa que **todos** los alumnos de 2ºA, por estar en ese grupo, tienen examen ese día. Si a un paréntesis le sumamos, multiplicamos, dividimos o restamos algo, se lo restamos a cada término del paréntesis. Ejemplo:

$$6x - 12 - 9x + 9 + x - 3 = 4x - 4 - 3x - 3 - 14,$$

observa que lo que multiplica a un paréntesis afecta a todo lo que hay dentro del paréntesis, respetando la regla de los signos.

P: ¿Cómo se opera con la regla de los signos? R: ++ = +, -- = +, +- = -, -+ = -

Para llegar a la expresión que buscamos $x = \text{número}$, ¿qué hacemos ahora? R: pasar todas las x al mismo miembro de la ecuación.

$$6x - 12 - 9x + 9 + x - 3 = 4x - 4 - 3x - 3 - 14$$

$$6x - 12 - 9x + 9 + x - 3 - 4x + 3x = 4x - 4x - 4 - 3x + 3x - 3 - 14$$

P: ¿Qué hacemos en este paso? R. sumamos los términos que nos interesan en ambos miembros de la ecuación para que desaparezcan las x del miembro de la derecha.

$$6x - 12 - 9x + 9 + x - 3 - 4x + 3x = -4 - 3 - 14$$

P: ¿Cuál es el siguiente paso ahora? R: quitar todos los miembros sin x del miembro de la derecha.

$$6x - 12 + 12 - 9x + 9 - 9 + x - 3 + 3 - 4x + 3x = -4 - 3 - 14 + 12 + 3 - 9$$

$$6x - 9x + x - 4x + 3x = -4 - 3 - 14 + 12 + 3 - 9$$

Juntamos las x para ver cuántas tenemos, así como el número total en el segundo miembro:

$$-3x = -15$$

P: ¿y ahora? R: dividimos a ambos miembros por -3

$$\frac{-3x}{-3} = , \text{ de donde queda: } x = \frac{-15}{-3}$$

P: ¿se puede hacer algo más? R: simplificar.

P: ¿En qué consiste simplificar? R: en dividir al numerador y denominador por un mismo número, para que la fracción represente la misma cantidad.

$$x = \frac{-15}{-3} = \frac{(-1) \cdot 5 \cdot 3}{(-1) \cdot 3}, \text{ dividiendo por } (-1) \text{ en el numerador y denominador } \frac{5 \cdot 3}{3}$$

Y dividiendo por 3 en el numerador y denominador $x = 5$

P: ¿Cómo podemos saber si es correcto? R: sustituyendo la x por su valor en la ecuación original y verificar que se cumple. Comprobamos

P. A lo largo de la resolución de la ecuación, hemos ido avanzando por diversos pasos donde seguíamos teniendo una ecuación transformada de la anterior. ¿Qué pasaría si sustituimos la x en cualquiera de esos pasos por la solución que hemos obtenido? Justifica y demuestra tu respuesta con un ejemplo.

4.4.2 ACTIVIDAD 2: ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Previo al trabajo con sistemas de ecuaciones lineales, se realizará una actividad exclusivamente para aprender cada una de las estructuras algebraicas que los componen: las ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas plantean una ventaja desde el punto de vista pedagógico, pues admiten representación gráfica, lo que contribuye a tener una perspectiva de su naturaleza y comportamiento, siendo la diferencia esencial con la ecuación lineal de una incógnita la introducción de una segunda variable.

El concepto esencial que debe transmitirse al alumno es que se trata de poner en relación dos variables y que la evolución de una afecta directamente a la otra. Cada valor de una implica un valor para la otra, pues están relacionadas. A través de la práctica se concluirá que la ecuación tiene infinitas soluciones posibles, en función de los pares x , y que verifiquen la igualdad. Cada par de valores que se obtiene verificando la igualdad, representan un punto. Con todos los puntos posibles se construye una recta. Por tanto, la recta representa el conjunto de soluciones de la ecuación y, por ende, cada punto de esa recta es una solución. (Este concepto será importante más adelante cuando se resuelvan sistemas, ya que la intersección de dos rectas representa el punto que es solución de cada una y, por tanto, es una solución común, que a fin de cuentas es en lo que consiste resolver un sistema).

Previo a la práctica en sí, se realizará una pequeña presentación de la forma genérica de la ecuación lineal con dos incógnitas: $ax + by = c$, indicando que **a** y **b** se denominan coeficientes, **c** es el término independiente, **a**, **b** y **c** son número fijos, **x** e **y** serán las incógnitas.

Como en la anterior actividad, se presupone una duración de 50 minutos, el equivalente a una clase ordinaria. La ubicación será en el aula de informática, para poder visualizar mediante GeoGebra la gráfica de la ecuación. El trabajo será por grupos, realizando de forma independiente cada tarea, para finalmente realizar una puesta en común. Un representante de cada grupo sale a la pizarra, escribiendo la solución todos al tiempo. Se han de poner de acuerdo entre ellos para determinar cuál de todas es la válida, o si todas lo son, mediante debate frente a sus compañeros. En este punto se debate sobre cómo se ha llegado al resultado y si algún grupo presenta dudas o no lo entiende, otros grupos pueden añadir sus ideas para tratar de ayudarlos. En última instancia el tutor hará sus comentarios sobre la exposición y añadirá las conclusiones que considere oportunas a fin de clarificar las dudas.

Se empieza la actividad con un ejemplo práctico:

En una frutería nos cobran por dos kilos de manzanas y un kilo de peras 10 €. ¿Podríamos saber cuánto nos cuesta por separado el kilo de manzanas y el de peras?

Se deja trabajar a los grupos para que intenten dar algún tipo de solución: por tanteo, haciendo una tabla con posibles opciones, etc....Se puede sugerir que hagan algún tipo de representación, para ver si llegan a una formulación en lenguaje algebraico que puedan representar mediante GeoGebra.

Pasado un tiempo prudente de 10 minutos, el docente evalúa el estado de progreso del grupo, dando la siguiente pista para progresar:

P: Primera parte: plantea una ecuación que ponga en relación el precio los kilos de una fruta y la de la otra.

Se dejará 1 minuto para que los grupos elaboren una posible respuesta

R: siendo x el precio del kilo de manzanas, y el precio del kilo de peras, la información que nos dan se traslada a lenguaje algebraico de la siguiente manera: $2x + y = 10$.

Se invita a construir una tabla x , y con los valores obtenidos, dejando a los grupos 5 minutos para su confección. Es importante resaltar la regla de que, si un alumno de los que no están en la pizarra desea expresar su opinión, es imprescindible levantar la mano para pedir la palabra, a fin de que la exposición sea ordenada y no haya confusión ni conversaciones a dos bandas, pues podrían perderse razonamientos correctos o incorrectos que aportarían mucho valor a la clase.

Cada grupo escribe su tabla. Lo probable es que los grupos presenten soluciones distintas, de hecho, tienen que ser distintas a las que van apuntando sus compañeros, todas válidas (cumplen la ecuación), añadiéndose a la tabla previamente confeccionada por el primer grupo. Cada grupo defenderá la validez de la suya, demostrando que, efectivamente, verifica la igualdad. La conclusión a la que ha de llegar la clase en su conjunto es que todas las soluciones son válidas.

El siguiente paso consiste en representar las soluciones en un plano.

Para ello, mediante la herramienta GeoGebra, se pedirá que representen los puntos obtenidos (en este punto puede ser necesario que el profesor explique la forma en que se ha de grabar los datos en la aplicación). Dado que el número de grupos será de al menos cuatro, son soluciones suficientes a priori para detectar el patrón subyacente.

Supongamos que la tabla obtenida ha sido del tipo:

x	y
1	8
0.5	9
3	4
4	2

Nota; hay que hacer notar a los alumnos que el contexto de los problemas es importante: se trata de kilos de fruta, por lo tanto, no podemos escoger valores negativos, porque no tendría sentido.

La representación de los puntos considerados mediante GeoGebra, situando las x en el eje de ordenadas y las y en el de abscisas, tendría aproximadamente el siguiente aspecto:

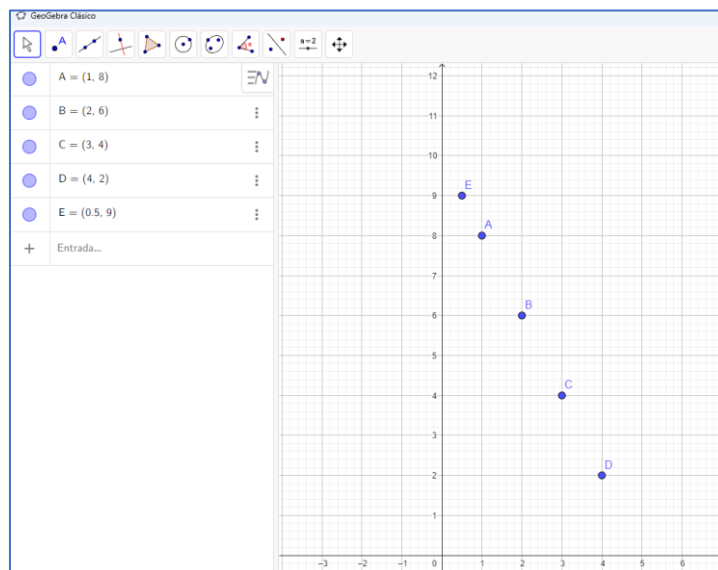


Figura 5. Puntos solución. Actividad 2 (Elaboración propia).

La siguiente cuestión es discutir durante 5 minutos, a ver si son capaces de detectar el patrón, para ello se recompone la información de la siguiente manera:

- Los puntos son todos soluciones de la ecuación, pues verifican la igualdad.
- Podríamos buscar más puntos, de hecho, se puede colocar alguno más si ayuda a llegar a la conclusión.
- ¿Existen puntos que, debido al planteamiento del problema no nos valgan como solución? Aquí se comentaría la restricción a que no tiene sentido trabajar con valores negativos.

El primer grupo que llegue a la conclusión de que forman una recta, saldrá a la pizarra y formará una recta sobre el programa. Llegado a este punto, se formularía la siguiente pregunta: ¿cuántos pares de valores x, y (puntos), necesitamos para obtener nuestra recta solución? Lógicamente, la ecuación de la recta obtenida ha de ser igual o equivalente a la original de la que se obtuvieron los puntos de la tabla.

Aquí de nuevo se hará hincapié en que la gráfica tiene infinitos puntos, pero dentro del planteamiento de nuestro problema, no nos “sirven” todos, sino los que son coherentes con los planteamientos.

Para demostrarlo, todos los grupos irán añadiendo los puntos por ellos obtenidos, verificando que se añaden a la recta. Si alguno no se sitúa en la recta, se preguntará y debatirá el por qué.

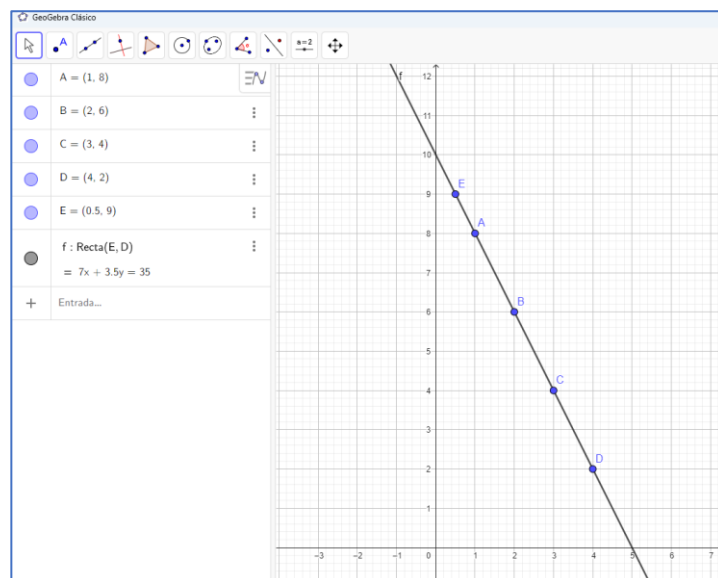


Figura 6. Recta solución. Actividad 2 (Elaboración propia).

Seguidamente, se pedirá demostrar que cualquier punto de la recta es solución. A modo de pista se pedirá construir un punto genérico en la recta. Desplazándolo a lo largo de la misma y, seleccionando para ello en la aplicación la opción “nombre y valor”, se pueden ver los valores que toma la variable x e y en cada posición. Se para en un punto al azar en recta y se anotan los valores del punto obtenidos (aquí se resaltaré el hecho de que tomando cualquier punto equivale a decir que la propiedad se cumple para todos).

Seguidamente se sustituyen x e y de la ecuación de la recta por los dichos valores, y se comprueba que la igualdad se cumple, con lo que queda demostrado que cualquier punto de la recta es solución. Obviamente no es una demostración formal, pero lo que se pretende es visualizar que, sea cual fuere el punto de la recta que seleccionemos, siempre verificará la ecuación.

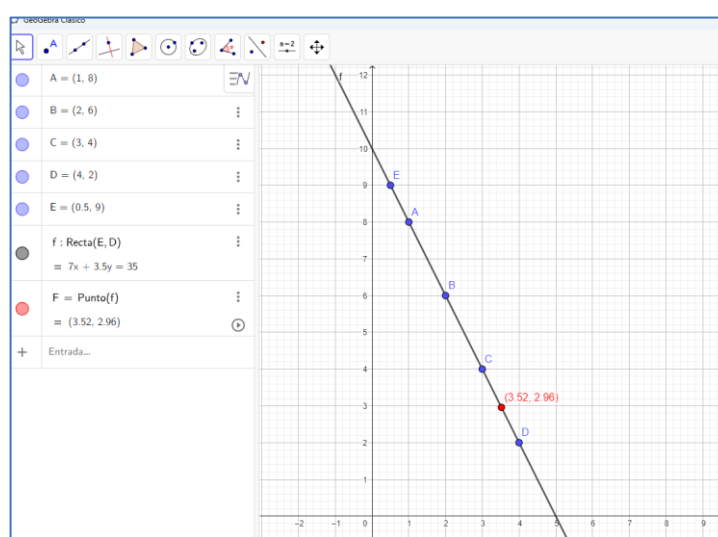


Figura 7. Punto cualquiera solución. Actividad 2 (Elaboración propia).

Finalmente, mediante un applet del programa GeoGebra, exploraremos qué le pasa a la recta cuando variamos los coeficientes y el término independiente. Para ello se dispone de tres deslizadores, dos para los coeficientes de la x y la y , y otro para el término independiente.

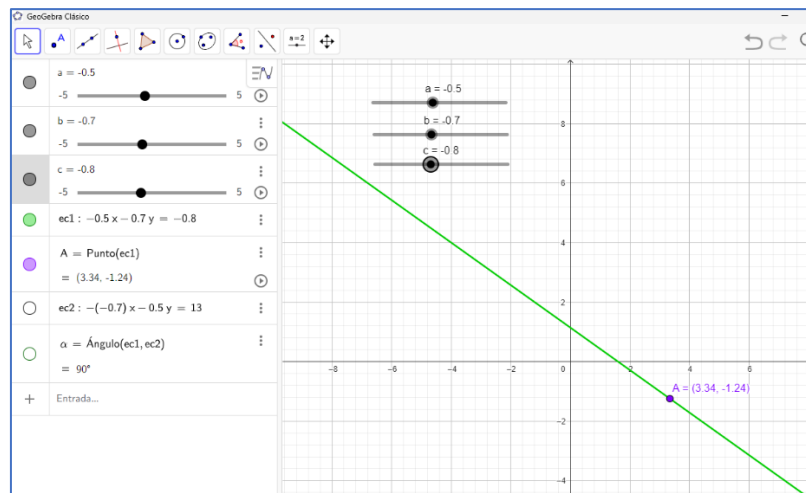


Figura 8. Manipulación dinámica de coeficientes y términos independientes. Actividad 2 (Elaboración propia).

Para ello construimos una recta en la cual, mediante los correspondientes deslizadores, se puedan modificar los coeficientes de la x , y , así como el término independiente.

Se pide, modificando uno a uno, evaluar los diferentes comportamientos de la recta.

El objetivo es percatarse de que:

- Si se desplaza únicamente el deslizador del coeficiente de la x la recta gira en torno a un punto en el eje y . Ese punto es precisamente el punto en cual la x es cero.
- Si se desplaza únicamente el deslizador del coeficiente de la y la recta gira en torno a un punto en el eje x . Ese punto es precisamente el punto en cual la y es cero.
- Si se desplaza el deslizador del término independiente, la recta se desplaza paralelamente a la original, pero no cambia su inclinación (pendiente).

4.4.3 ACTIVIDAD 3: SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

La actividad se desarrollará con los mismos grupos de las dos anteriores, en el aula de informática, con una duración de 50 minutos.

Para esta actividad se empezará con un breve debate de 10 minutos en la que se aclarará en qué consisten los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, antes de introducir el lenguaje algebraico, y para dotar de significado al concepto que se está manejando, se definirá etimológicamente la palabra sistema.

- Sistema: Conjunto de reglas o principios sobre una materia racionalmente enlazados entre sí.
Conjunto de cosas que relacionadas entre sí ordenadamente contribuyen a determinado objeto.

Se pedirá a los alumnos qué reflexionen sobre qué puede significar esto cuando hablamos de ecuaciones con dos incógnitas.

La idea a la que se tiene que llegar, es que la solución buscada en este caso debe ser cumplida **simultáneamente** por **todas** las ecuaciones que conforman nuestro sistema. Si partimos de un sistema de dos ecuaciones, los valores x e y obtenidos, si existen, han de verificar nuestras dos ecuaciones, no sólo una.

-Solución gráfica de un sistema de ecuaciones.

En la primera parte de esta actividad vamos comprender qué entendemos por solución de un sistema de ecuaciones lineales. Para ello recordaremos, preguntando al grupo sobre la actividad anterior, qué representa la recta de una ecuación respecto a las soluciones de la misma. Si fuera necesario se cargará el applet de la sesión anterior en la pizarra digital para facilitar el recordatorio.

Se plantea un ejemplo de sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$$

Los alumnos disponen de la aplicación GeoGebra, y como primera tarea tendrán que representar las dos rectas.

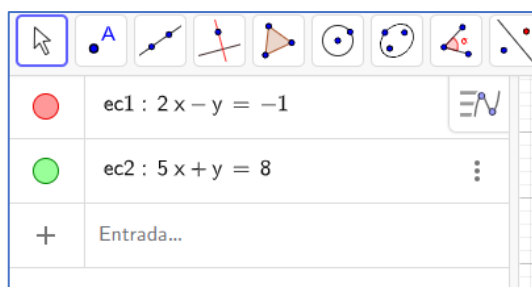


Figura 9. Introducción de ecuaciones en GeoGebra. Actividad 3 (Elaboración propia).

Quedaría una representación del tipo:

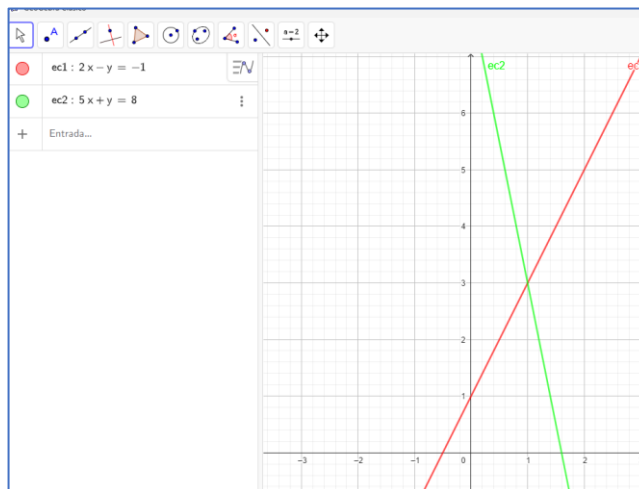


Figura 10. Representación gráfica de dos rectas en applet GeoGebra. Actividad 3 (Elaboración propia).

Se proponen un conjunto de preguntas para que las trabajen en los distintos grupos.

Pregunta: ¿Qué podemos hacer para encontrar puntos x e y que satisfagan las dos ecuaciones al mismo tiempo partiendo de las rectas que la representan?

Pregunta: si cada recta representa todos los puntos que son solución, viendo la gráfica, ¿cómo podemos determinar un lugar geométrico (conjunto de todos los puntos que satisfacen una condición o propiedad determinada dentro de un espacio, por ejemplo, una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia otro llamado centro es la misma), que cumplan ambas ecuaciones al mismo tiempo?

Se deja a los grupos trabajar durante 5 minutos. A modo de ayuda, se puede recordar de la actividad anterior como un punto que recorría la recta nos iba indicando todas las soluciones.

El primer grupo que lo deduzca, sale a la pizarra a explicarlo al resto. Se organizarán de tal manera que todos los integrantes del grupo tendrán que hablar durante la explicación, previa organización interna. Si alguno cometiera algún error, el resto de compañeros del grupo se lo pueden hacer notar, se para la explicación, hablan entre ellos. El alumno que paró la explicación, continuará con la misma hasta finalizar.

Se debe llegar a la conclusión de que el punto de intersección corresponde al lugar geométrico de las soluciones que son comunes a las dos rectas.

Mediante la opción “punto” + “intersección”, y seleccionando ambas rectas, se llega a identificar el punto solución del sistema.

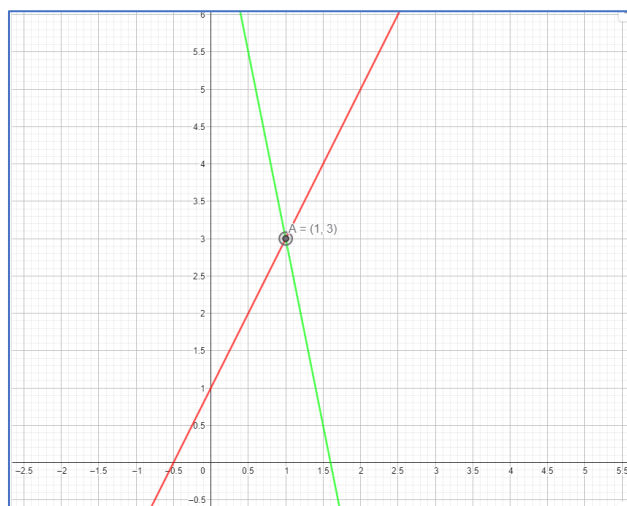


Figura 11. Representación gráfica de dos rectas y su punto de intersección a modo de solución del sistema que formas esas dos rectas en applet GeoGebra. Actividad 3 (Elaboración propia).

Se pedirá anotar las coordenadas x e y , en este caso $(1,3)$

Pregunta: ¿Cómo podemos demostrar que esa es la solución de nuestro sistema?

De nuevo se deja 5 minutos a los grupos para determinar la respuesta. Esta ha de ser, naturalmente, sustituyendo x e y respectivamente en ambas ecuaciones, verificando que se cumple la igualdad. El primer grupo, distinto del anterior, con la respuesta sale a demostrarlo, para lo cual ha de obtener las dos igualdades.

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 = -1 \\ 5 \cdot 1 + 3 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = -1 \\ 8 = 8 \end{cases}$$

Luego el punto seleccionado es solución del sistema porque satisface ambas ecuaciones simultáneamente.

SOLUCIONES DEL SISTEMA.

Hemos visto que una solución del sistema corresponde a la intersección de dos rectas. Pero puede haber otras situaciones posibles.

Se pedirá a los alumnos que razonen qué otras posibilidades podrían darse. O, dicho de otra manera, qué otras posibilidades hay para las posiciones relativas (como se sitúan una respecto a la otra en el plano) entre las rectas distintas a la del corte en un punto, que acabamos de ver.

Se dejará a los alumnos debatir durante 5 minutos para intentar encontrar otras posibilidades. El profesor puede ir guiándoles, por ejemplo, indicando una forma de búsqueda basada en dejar una recta fija y, modificando la otra, ver las posibles alternativas.

Para ello, se facilita un sencillo applet de GeoGebra donde una ecuación del sistema está fija y, mediante desplazadores pueden variar tanto los valores de los coeficientes como del término independiente.

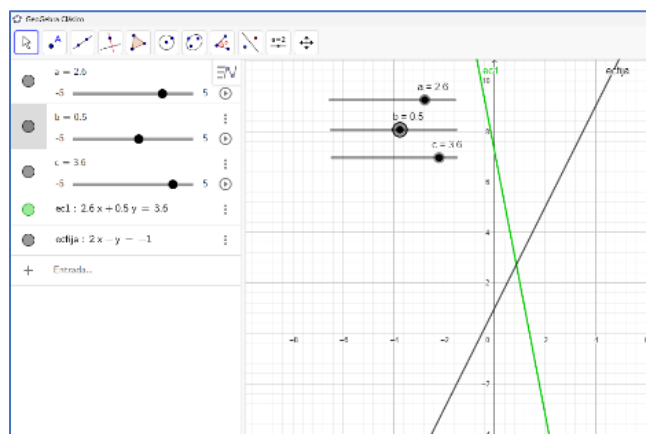


Figura 12. Posición relativa entre dos rectas: intersección. Actividad 3 (Elaboración propia).

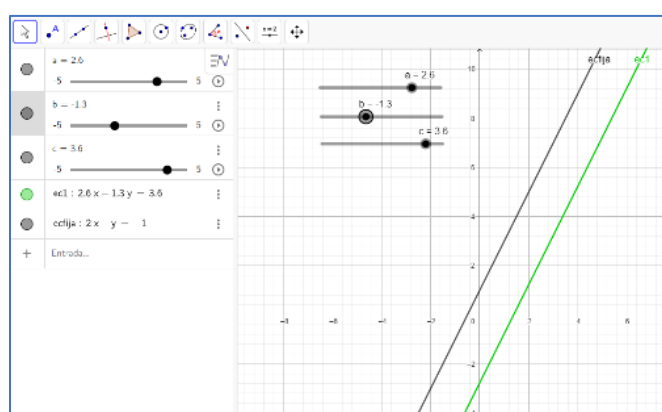


Figura 13. Posición relativa entre dos rectas: paralelas. Actividad 3 (Elaboración propia).

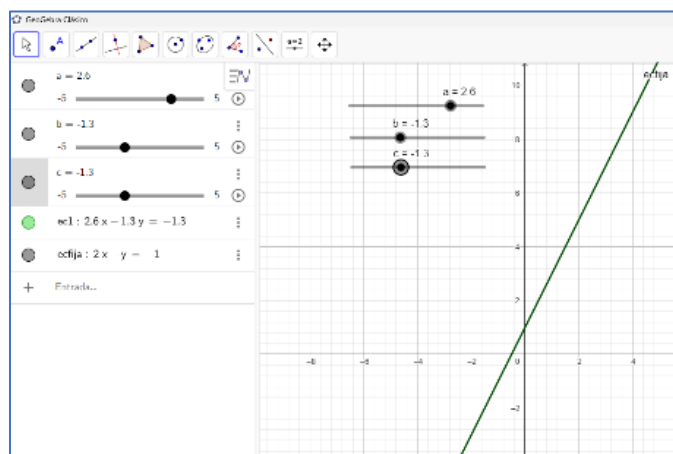


Figura 14. Posición relativa entre dos rectas: coincidentes. Actividad 3 (Elaboración propia).

Se deja durante 5 minutos a los alumnos para que trabajen modificando los desplazadores a fin de que razonen e intenten averiguar las posibles opciones que se pueden obtener.

En las imágenes se aprecian las tres opciones a las que han de llegarse, una solución (si las rectas son secantes), ninguna solución (rectas paralelas), infinitas soluciones (las rectas son coincidentes). Viene a ser

lo mismo que determinar cuántos puntos tienen en común ambas rectas, es decir, los lugares donde se cumplen las dos ecuaciones simultáneamente.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES.

Con todo lo anterior, veremos cómo se clasifican los sistemas de ecuaciones en función del número de soluciones. En concreto vamos a investigar patrones que puedan aparecer al considerar los cocientes entre los coeficientes de las x, y, y términos independientes de ambas ecuaciones.

Definimos de forma genérica dos ecuaciones como:

$$a x + b y = c$$

$$d x + e y = f$$

Utilizando el applet GeoGebra facilitado a los alumnos, se les pide que encuentren cómo son los cocientes

$\frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f}$, en los casos:

1. Las rectas se cortan en un punto, es decir, sólo existe una solución del sistema.
2. Las rectas son coincidentes, es decir, el sistema tiene infinitas soluciones.
3. Las rectas son paralelas, es decir, el sistema no tiene solución.

Guiados por el profesor, se ha de llegar a las siguientes conclusiones, según cada caso:

1. $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$, por su parte $\frac{c}{f}$ no influye para nada en este caso. Se denomina COMPATIBLE DETERMINADO.
2. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$. El sistema se denomina COMPATIBLE INDETERMINADO.
3. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$. El sistema se denomina INCOMPATIBLE.

Se ha añadido en el applet los valores dinámicos de $\frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f}$ para que el alumno pueda encontrar las distintas opciones, modificándolos mediante desplazadores.

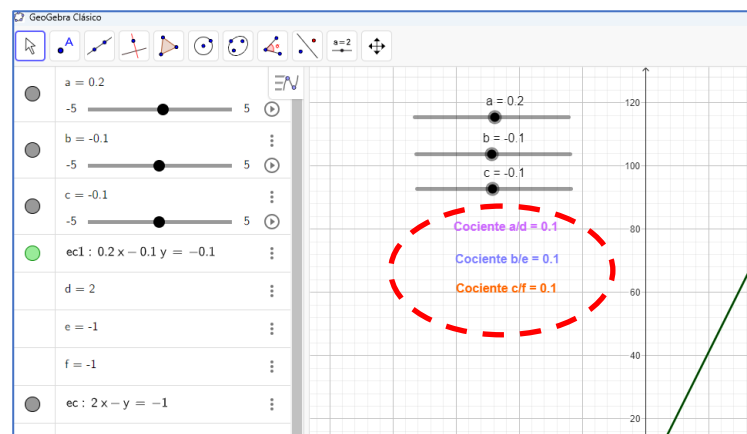


Figura 15. Applet GeoGebra con desplazadores para modificar los coeficientes $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{f}$. Actividad 3

(Elaboración propia).

4.4.4 ACTIVIDAD 4: MÉTODOS DE RESOLUCIÓN. ABP

Para el desarrollo de esta cuarta sesión de la situación de aprendizaje, usaremos la metodología ABP (Aprendizaje basado en problemas), con el propósito de que los estudiantes comprendan y apliquen los tres métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante una situación contextualizada, promoviendo el razonamiento lógico y la comparación de estrategias, de tal forma que puedan valorar y poner el algoritmo de resolución en práctica mientras resuelven un problema.

Se trata de una única sesión para trabajar los tres métodos de resolución, pero el problema que se plantea para hacer de vehículo del aprendizaje es relativamente sencillo, de cara a que el alumno se centre en la resolución y la comprensión de la mecánica, en vez de profundizar en el planteamiento en sí. Cuando se adquiera la mecánica y se haya comprendido la sistemática, será más fácil aplicarlo a problemas cuyo planteamiento sea más complicado.

El Aprendizaje Basado en Problemas centra el aprendizaje en el estudiante, promoviendo autonomía, pensamiento crítico y trabajo colaborativo. El docente actúa como guía. Esta metodología fomenta competencias clave, conectando conocimientos con la vida real, mejorando la motivación y preparación para resolver problemas.

Los estudiantes identifican lo que necesitan aprender, investigan, analizan y explican problemas guiados por un tutor. Se valora tanto el conocimiento adquirido como el proceso de aprendizaje.

Enunciado del problema

Sofía y Tomás fueron a un concierto y compraron entradas de dos tipos: entradas normales y entradas VIP. En la taquilla solo se sabe que:

Compraron 8 entradas en total.

Gastaron 2200 €.

Cada entrada normal cuesta 250 € y cada entrada VIP cuesta 400 €.

¿Cuántas entradas normales y cuántas entradas VIP compraron Sofía y Tomás?

Estrategia de resolución de problemas.

Aunque se trata en esta actividad de aprender las distintas metodologías para el aprendizaje significativo de los métodos de resolución como tales, conviene también establecer durante 10 minutos una “receta” o pauta genérica para encarar el problema y, de forma pautada, proceder a su planteamiento y resolución.

El esquema será el siguiente:

1. Leer el enunciado cuantas veces sea necesario hasta identificar las incógnitas y se les asigna dos letras, habitualmente x e y (pero pueden ser cualesquiera).
2. Expresamos por medio de dos ecuaciones lineales las relaciones entre los datos y las incógnitas. Es como leer el enunciado del problema, pero transformándolo en lenguaje algebraico.
3. Resolvemos el sistema por el método que consideremos más adecuado y obtenemos así el valor de las incógnitas.
4. Comprobamos que la solución obtenida cumple las condiciones del enunciado y, si tiene, le damos la solución al problema. A modo de conclusión, deberemos hacernos la siguiente pregunta: ¿con el resultado obtenido, contesto a lo que me piden?, lo cual incluye tanto las unidades (euros, kilómetros, segundos, etc.), y así razonar si la respuesta es coherente. En nuestro caso, el resultado no puede ser negativo, pues se trata del número de entradas.

Se explicará también que los tres métodos tienen por objetivo “eliminar” una de las incógnitas, para resolver entonces una ecuación con una única incógnita. Cuando hayamos obtenido el valor de una incógnita, se sustituye en cualquier ecuación, ya que en el fondo se está resolviendo también una ecuación con una sola incógnita.

Antes que nada, teniendo en cuenta el guión ya expuesto para la resolución de sistemas de ecuaciones, se deja a los alumnos 5 minutos para plantear las ecuaciones del problema.

1. Identificamos las incógnitas. x será el número de entradas normales, mientras que y será número de las entradas VIP.
2. Representamos el problema mediante dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 250x + 400y = 2200 \end{cases}$$

3. Resolvemos el sistema.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Se entregan las instrucciones siguientes para que lo apliquen al problema:

1. Despejar una variable en la ecuación 1.
2. Sustituir en la ecuación 2.
3. Resolver y verificar.

Se deja trabajar a los alumnos con las instrucciones básicas del método, para que intenten entender la metodología.

Todos los grupos han de terminar la tarea y encontrar una solución. Se pone en común en primera instancia los valores obtenidos para comprobar que todos los grupos han llegado a los mismos valores.

El grupo que más haya tardado en resolverlo o, si fuera el caso, que no haya terminado, saldrá a la pizarra a exponer cómo han procedido, mientras que el resto de los grupos les asistirán.

Durante la exposición, se explicará cada uno de los tres pasos indicados en el método, incluyendo la verificación de resultados, pues es parte del ejercicio. También se responderá a la pregunta ¿por qué se llama método de sustitución?

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Las instrucciones en este caso serán:

1. Se despeja la misma incógnita (x ó y) en ambas ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones. Es decir, como tendremos $x = \text{expresión 1}$, $x = \text{expresión 2}$, procedemos a hacer: $\text{expresión 1} = \text{expresión 2}$. (igual si hubiéramos despejado la y).
3. Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una incógnita.
4. El valor de otra lo obtenemos sustituyendo

El grupo que más haya tardado en resolverlo o, si fuera el caso, que no haya terminado, saldrá a la pizarra a exponer cómo han procedido, mientras que el resto de los grupos les asistirán.

Durante la exposición, se explicará cada uno de los tres pasos indicados en el método, incluyendo la verificación de resultados, pues es parte del ejercicio. También se responderá a la pregunta ¿por qué se llama método de igualación?

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Método de actuación.

1. Multiplicar o dividir una o las dos ecuaciones por números de tal manera que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales u opuestos.
2. Se restarán o sumarán las ecuaciones para eliminar esa parte de la ecuación.
3. Se resuelve y obtenemos el valor de una incógnita.
4. El valor de la otra lo obtenemos sustituyendo.

El grupo que más haya tardado en resolverlo o, si fuera el caso, que no haya terminado, saldrá a la pizarra a exponer cómo han procedido, mientras que el resto de los grupos les asistirán.

Durante la exposición, se explicará cada uno de los tres pasos indicados en el método, incluyendo la verificación de resultados, pues es parte del ejercicio. También se responderá a la pregunta ¿por qué se llama método de reducción?

PROBLEMA FINAL: visualización del efecto de multiplicar una ecuación por un número.

Para terminar, se propone un problema a todo el grupo para resolverlo por el método que elijan, y exponerlo en clase.

Enunciado:

Dos recipientes contienen entre los dos 42 litros de agua. Se sabe que, si se trasvasan 9 litros de uno a otro, entonces contendrán la misma cantidad. Determina cuántos litros contiene cada recipiente.

Cuestión adicional 1: ¿Qué pasa si multiplicamos cualquiera de las ecuaciones de un sistema por un número?

Para razonar este planteamiento, recurrimos de nuevo a GeoGebra, mediante la applet preparada para que los alumnos visualicen la operación gráficamente y comprueben esta propiedad.

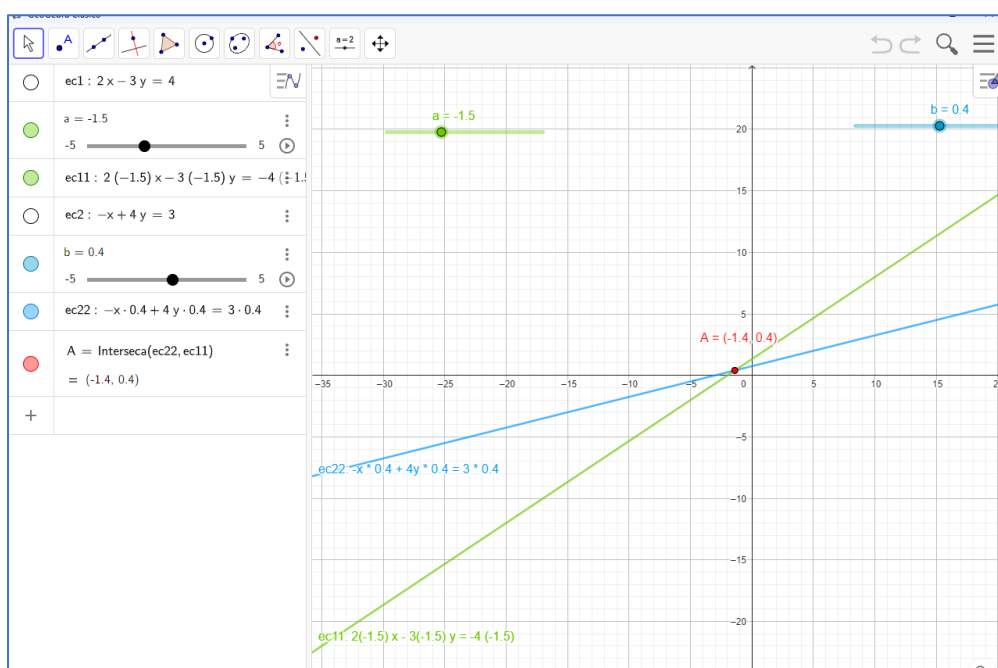


Figura 16. Applet GeoGebra para visualizar el efecto de multiplicar una ecuación por un número.

Actividad 4 (Elaboración propia).

Mediante deslizadores, se multiplican las ecuaciones por números y se ve que la gráfica no varía. Lógicamente el punto de intersección, la solución, tampoco varía. Comentar que tiene relación con la analogía de la balanza explicada en las ecuaciones lineales, donde al multiplicar los dos miembros de una igualdad por el mismo número, se obtiene una expresión equivalente.

Cuestión adicional 2: ¿En qué método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales aplicamos esta propiedad? (En el método de reducción, pues decimos que multiplicamos una ecuación por números no nulos).

4.4.5 ACTIVIDAD 5: ESCAPE ROOM

Para la última actividad, se propone un Escape Room algebraico. Incluye la resolución de problemas en sí aplicando todo el conocimiento previo. Empleando el recurso de la gamificación se pretende que los alumnos disfruten de una competición entre ellos, al tiempo que ponen su atención en la resolución de los distintos problemas planteados.

Un Escape Room (o sala de escape) es una actividad de ocio en la que un grupo de personas es "encerrado" en una habitación temática (en nuestro caso el aula habitual), y debe resolver una serie de acertijos, rompecabezas y desafíos para poder "escapar" dentro de un tiempo límite, normalmente 60 minutos (en nuestro caso 40 minutos aproximadamente). Estas salas suelen tener una narrativa o historia que guía la experiencia, como un misterio policial, una aventura arqueológica o una misión de ciencia ficción, lo que convierte el juego en una experiencia inmersiva.

Los participantes deben colaborar, usar su ingenio y observar cuidadosamente su entorno para encontrar pistas, desbloquear candados, descifrar códigos y progresar en la trama (en nuestro caso contextualizaremos una pequeña historia, pero para progresar resolverán sistemas de ecuaciones con dos incógnitas). Aunque el nombre implica una necesidad de "escapar", muchas veces el objetivo puede variar: desactivar una bomba, encontrar un objeto perdido o resolver un crimen. Los escape rooms fomentan el trabajo en equipo, la comunicación y el pensamiento lógico, lo que los hace populares tanto como actividad recreativa entre amigos como herramienta para dinámicas de grupo y formación en empresas o, como en el caso que nos ocupa, entre compañeros de clase.

ESCAPE ROOM: PROYECTO Z: FUGA DEL LABORATORIO

Introducción

Una instalación científica secreta ha sido víctima de un accidente biológico: un virus experimental ha escapado y está convirtiendo a los científicos en zombis. Vosotros, jóvenes aprendices de laboratorio, estabais realizando prácticas cuando comenzó la emergencia. El sistema de seguridad ha sellado las salidas. Para escapar, debéis resolver cuatro pruebas matemáticas. Cada prueba os acerca más a la cápsula de salvamento. El valor de x de cada sistema formará el código final de despegue.

PRUEBA 1: El laboratorio sellado.

El sistema de cierre magnético del laboratorio requiere que introduzcáis la cantidad exacta de energía en dos baterías, la X y la Y .

Un científico dejó una nota:

“Para desbloquear la puerta, las dos baterías juntas deben proporcionar 16 unidades de energía. Tres veces la energía de la batería X, más el doble de la energía de la batería Y, da justo ese total. Además, la batería X tiene dos unidades más que la batería Y.”

¿Cuánta energía debe tener la batería X?

Comprueba antes de pasar a la siguiente prueba que el valor de X e Y satisface tu sistema.

PRUEBA 2: Zona contaminada

Para activar el sistema de descontaminación, debéis programar la cantidad litros de antídoto que se inyectará automáticamente en dos depósitos: el rojo (x) y el azul (y).

En un documento encontrado se lee: “El doble de la cantidad de antídoto en el depósito rojo menos la del azul debe ser igual a 1 litro. Además, la suma de la cantidad de ambos depósitos debe ser 5 litros.”

¿Cuánto antídoto debe ir en el depósito rojo?

Comprueba antes de pasar a la siguiente prueba que el valor de X e Y satisface tu sistema

PRUEBA 3: El ascensor

Llegado a la puerta del ascensor que nos llevará a la superficie, es necesario indicar al ordenador la potencia de cada uno de los dos motores que lo impulsa. Para ello, accediendo al histórico del procesador, se puede leer:

La energía del primer motor junto a 4 veces la energía del segundo motor suma 14 unidades. Por otra parte, también se puede obtener la siguiente información: 2 veces la energía del primer motor, más 6 veces la energía del segundo motor totalizan 23 unidades.

¿Cuántas unidades de energía tiene cada motor?

Comprueba antes de pasar a la siguiente prueba que el valor de X e Y satisface tu sistema

PRUEBA 4: Cápsula de salvamento.

Para poder escapar en la cápsula de salvamento hay que conocer el tiempo en minutos de carga de cada una de las unidades energéticas, una situada en el ala derecha y otra situada en el ala izquierda.

Verificando el panel de carga se puede ver información de los minutos que llevan cargando:

El tiempo de carga del ala derecha es el doble que el del ala izquierda. Hace 14 minutos el tiempo de carga del ala derecha era el triple que el del ala izquierda.

¿Cuál es el tiempo de carga de cada ala?

FINAL: Código de despegue.

Ya habéis llegado a la cápsula y está todo listo. Pero para poder iniciar la secuencia de despegue tenéis que demostrar que sois merecedores de salvar el pellejo. Para lo cual hay que introducir un código de seguridad que pondrá los motores en marcha para salir pitando de allí.

El código consiste en los valores numéricos siguientes.

1. De la prueba uno, el valor de energía obtenido en la batería x.
2. De la prueba dos, la cantidad de antídoto del depósito rojo.
3. De la prueba tres, las unidades de energía del motor 1.
4. De la prueba 4, el tiempo de carga del ala derecha.

Mediante una hoja Excel, en el la pizarra digital se podrá meter el código y si es correcto, aparecerá el mensaje “IGNICIÓN, ESTÁIS CAMINO DE CASA”.

SOLUCIONES

PRUEBA 1: $x = 4$

PRUEBA 2: $x = 2$

PRUEBA 3: $x = 4$

PRUEBA 4: $x = 56$

CÓDIGO FINAL: 4 – 2 – 4 – 56

Presentación grupal

Cada grupo debe terminar y verifica su código individualmente. Al final cada grupo debe exponer una de las pruebas y cómo lo ha resuelto, en debate abierto en el cual el resto de grupos pueden indicar si han elegido otro método de resolución o las dificultades con las que se han encontrado durante el proceso.

En el cuaderno del alumno cada alumno individualmente resolverá las pruebas en casa si no les ha dado tiempo a terminarlás, empleando las notas tomadas en clase.

4.5 Atención a la diversidad del aula.

En el IES Leopoldo Cano de Valladolid, como parte del DECRETO 39/2022 que regula el currículo de la ESO en Castilla y León, la atención a la diversidad es un pilar fundamental para garantizar que todos los

estudiantes tengan la oportunidad de aprender de forma equitativa, adaptándonos a sus características y necesidades específicas.

En esta situación de aprendizaje, se busca aplicar una metodología inclusiva que permita que todos los estudiantes, independientemente de su contexto social, cultural o lingüístico, puedan desarrollar sus competencias matemáticas. Aunque no se espera estudiantes con necesidades educativas especiales, la diversidad cultural y lingüística en el aula sí exige que adaptemos nuestra enseñanza a las diferentes realidades del alumnado, especialmente de aquellos de etnia gitana y de origen musulmán, quienes presentan algunas necesidades específicas.

Uno de los retos más comunes en el aula es la disponibilidad de recursos tecnológicos. Muchos de los estudiantes de la etnia gitana, debido a su situación socioeconómica, no tienen acceso a dispositivos electrónicos como ordenadores o tablets en casa, lo que les dificulta seguir algunas actividades académicas que requieren el uso de tecnologías, sobre todo si deben terminarlas en su domicilio, por ejemplo, en el caso de un cuaderno del alumno. Para subsanar esto, el centro ofrece préstamo de dispositivos a los estudiantes que lo necesiten, asegurando que todos puedan acceder a las herramientas digitales para resolver los ejercicios y ver los recursos interactivos que utilizamos en clase.

Además, el trabajo en grupos cooperativos es una herramienta clave en este contexto. Los estudiantes pueden apoyarse mutuamente, compartiendo conocimientos y estrategias para resolver las tareas propuestas, lo que facilita que los que puedan tener más dificultades se beneficien del trabajo colaborativo.

En cuanto a los alumnos de origen musulmán, que a menudo presentan ciertas dificultades con el idioma castellano, tanto oral como escrito (especialmente este último en lo que se refiere a redacción y construcciones gramaticales), se han implementado medidas específicas para mejorar su comprensión de los contenidos. En este caso, utilizamos glosarios matemáticos, donde los términos técnicos y claves como "solución", "ecuación" o "sistema" están traducidos de forma sencilla y clara. También se recurre a materiales visuales y ejemplos concretos para explicar los pasos en la resolución de ecuaciones, de manera que puedan seguir el razonamiento sin depender tanto del dominio completo del idioma.

Además de la adaptación de recursos y estrategias lingüísticas, también es importante que el aula sea un espacio que valore y respete la diversidad cultural. En este sentido, las actividades colaborativas no solo permiten el aprendizaje matemático, sino también la interacción intercultural, creando un ambiente en el que los estudiantes pueden compartir sus experiencias y conocimientos, y aprender unos de otros.

Para fomentar la integración de los estudiantes gitanos, musulmanes y de otras procedencias, se promueven la construcción de grupos heterogéneos, sin acumulación de individuos de una etnia o nacionalidad en el mismo grupo.

En cuanto a la evaluación, se implementa un sistema que no se limita a las pruebas tradicionales. Aparte de los exámenes escritos, se valoran también las evaluaciones orales y las presentaciones en grupo, ya que

permiten que los estudiantes demuestren su comprensión de los sistemas de ecuaciones de una forma más accesible y adaptada a sus habilidades comunicativas. Para aquellos con barreras idiomáticas, la evaluación continua en clase y las oportunidades para explicar sus procesos de resolución les dan una mayor flexibilidad.

El enfoque que seguimos en este contexto de resolución de sistemas de ecuaciones de segundo grado no solo busca que todos los estudiantes adquieran los conocimientos matemáticos necesarios, sino que también fomenta un entorno inclusivo que respeta las diferencias culturales y lingüísticas. Las adaptaciones tecnológicas, el refuerzo lingüístico y el trabajo cooperativo son solo algunas de las medidas que implementamos para que cada alumno, sin importar su origen o contexto, pueda avanzar en el aprendizaje de las matemáticas y sentirse parte activa del aula.

4.6 Estudio de la posible respuesta del alumnado a las actividades

Dada la particularidad de las prácticas en el I.E.S. Leopoldo Cano, y ante la imposibilidad de llevar a cabo una implantación de la actividad de forma realista, lo que hubiera aportado una retroalimentación muy interesante que habría completado el presente TFM, se hace en cambio un estudio de la posible respuesta que se podría haber dado por parte del alumnado durante el desarrollo de las actividades.

Con carácter general, por la edad del alumnado y, basándome en la experiencia adquirida en las prácticas en el centro, se ha de esperar cierta dispersión en la atención durante algunas explicaciones, si estas se prolongan en el tiempo, por lo que se intentará ser todo lo ágil posible en ese sentido. Tienden también, pese a estar en una clase, a cierta familiaridad entre ellos y con el profesor: conversando al margen de la temática de la actividad, bromean, se dirigen la palabra, aunque no sean del mismo grupo simplemente porque son amigos, etc....es decir, puede darse un déficit de disciplina. Para ello el docente deberá estar permanentemente vigilante, en especial cuando se da tiempo a los alumnos para el trabajo en grupo, paseando entre las distintas mesas, interesándose haciendo preguntas acerca del progreso del trabajo, por ejemplo, con la finalidad de que no se relaje la actividad.

No se esperan alumnos especialmente disruptivos (situación frente a la cual el Máster desgraciadamente no te prepara), pero sí individuos con falta clara de motivación frente a las matemáticas, especialmente procedentes de etnias concretas. La actitud del docente será seguir con la actividad e intentar su participación sin presionarles, intentando introducirlos progresivamente en las dinámicas propuestas.

ACTIVIDAD 1: RECORDANDO

Aunque se pretenda mediante una situación de aprendizaje un enfoque diferenciado frente a una clase magistral, hay aspectos difíciles de plantear sin una explicación teórica. En este caso no obstante, se omite tal explicación, intentando que los alumnos vinculen por asociación el término trabajado con su existencia en un ejemplo práctico. También se incorpora ejemplos guiados de cómo operar para, de forma cooperativa,

recordar y afianzar los términos. Con ello se quiere hacer más accesible un conjunto de términos y definiciones que serán necesarias.

Presentar la actividad de forma diferente a lo habitual suele ser bien recibido por los alumnos. El hecho de incluir acciones que requieran su participación centra más su atención que en el caso de una clase magistral.

Al tratarse de una actividad de repaso matemático, se puede conseguir que el alumno adquiera un poco más de confianza, sienta mayor seguridad y sea bien recibida en general, pues le ayuda a situarse en un nivel similar de conocimientos iniciales que el resto. Pretender en una sola actividad igualar los conocimientos de todos los alumnos es probablemente una visión poco realista, sin embargo, es preciso incluir alguna acción preparatoria con la finalidad de que “no se pierdan” al pasar a cuestiones nuevas, cuyo éxito va a depender necesariamente de conceptos fundamentales que, como se ha visto en estudios previos, originan dificultades a posteriori si no están bien asimilados. Desde el punto de vista psicológico, puede suceder que alumnos con mayor nivel matemático consideren aburrido o innecesario realizar una actividad de refresco. En este caso, designar a estos alumnos para echar una mano al resto de compañeros puede ser una opción. No obstante, siempre es útil recordarles a todos los estudiantes que repasar conceptos previos facilita el aprendizaje de los nuevos.

Al facilitar al alumno un conjunto de definiciones para identificar sobre objetos matemáticos, puede haber confusión al principio, pero analizando los posibles errores cometidos, no se espera excesiva dificultad en asociarlos correctamente. Nótese la variedad de ocasiones en la que se utilizan palabras como “ecuación”, “término”, “miembro”, “solución”, por ello es fundamental aprender y visualizar lo que realmente representan para poder identificarlos.

Es posible, y es algo que puede repetirse en posteriores actividades, que el alumno se desaliente si comete errores durante la realización de operaciones necesarias para resolver las tareas propuestas. Es importante enfatizar durante el desarrollo de la actividad la posibilidad de cometer errores, pero también la importancia de aprender de los mismos.

Al resolver parte de las cuestiones propuestas de forma cooperativa, es probable que el alumno no manifieste pasividad, como podría darse en una clase magistral. Aunque no se han fijado roles para los miembros del grupo, sería interesante que cada vez hiciera de portavoz uno distinto, a fin de conseguir un mayor nivel de integración en las tareas.

Alumnos con problemas idiomáticos, pueden tener dificultades con los términos a identificar. En esas circunstancias puede hacerse necesario incidir por repetición durante la actividad. Es probable que algunos de ellos se preparen un resumen o similar para no olvidarlos, con sus propias anotaciones.

Una respuesta frecuente es ir comparando entre ellos los posibles resultados: “a ti cuánto te da”, “qué has puesto en esta pregunta”. Se trabajará la vigilancia por parte del docente para que esas situaciones se den sólo entre miembros del mismo grupo.

Actividad 2: ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Introducir para esta actividad la visualización con GeoGebra puede ser un aliciente para ellos, al ser capaces de interconectar conceptos y visualizarlos dinámicamente.

Posible respuesta del alumnado:

Confundir las variables que van en cada eje. Si bien es cierto que se trata de una convención, de cara a la comprensión y asimilación de ideas, es importante situar correctamente cada variable en su eje. Pueden suponer la existencia de una única solución a priori. En este punto es fundamental que comprendan la existencia de infinitos pares de puntos que satisfacen la igualdad, formando la recta solución. A medida que avance la actividad, es muy posible que los alumnos comiencen a visualizar las relaciones entre variables, puestas de manifiesto a través de la ecuación, dado que los ejemplos y tareas les conducen a ello.

En esta actividad se puede poner de manifiesto las carencias en cuanto al manejo de aplicaciones como GeoGebra. Se entiende disponibilidad suficiente de tiempo para recuperar mediante las explicaciones apropiadas, a aquellos alumnos con dificultades en este aspecto. Se espera cierta curiosidad por parte del alumnado respecto a esta app, pues es dinámica y por lo tanto permite obtener de forma inmediata el resultado de las modificaciones o cambios practicados, lo que seguramente los animaría a experimentar.

Se presume que el alumnado ganará en confianza si sus resultados coinciden con el del resto de los grupos, lo que puede animarlos a incrementar el nivel de participación. En ese sentido es importante no manifestar por el profesor rechazo a las respuestas erróneas, sino valorar el intento y emplear frases como: “no está mal, pero no es exacto”, “casi, pero mejor si...”, etc....

Es muy posible que al pedirles demostrar que cualquier punto de la recta es solución, tengan dificultades al generar un punto dinámico apropiado. En este sentido, el profesor realizará un guiado meramente técnico al respecto, no condicionando la reflexión matemática objeto de la tarea.

Actividad 3: SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

El alumno debe entender en este apartado la idea esencial de que el punto de corte es la solución simultánea de las dos ecuaciones. Se debe guiar el razonamiento hacia esa conclusión.

Las respuestas previstas para esta actividad son:

Confusión entre ecuación individual y sistema: Algunos alumnos pueden no diferenciar entre resolver una ecuación individual y resolver un sistema de ecuaciones (en el que las soluciones deben satisfacer ambas ecuaciones, como ya se ha indicado). Será conveniente remarcar este hecho en su momento.

Significado del punto de intersección: Puede haber dificultad para comprender que el punto de intersección representa la única solución común. Esta idea es clave y los grupos deben evidenciar su comprensión.

Uso de GeoGebra: Alumnos pueden equivocarse al escribir las ecuaciones o al usar herramientas como la de intersección, por lo que se verificará cada paso durante el uso de GeoGebra, dejando la sintaxis en la pizarra digital si fuera necesario, aunque se prevé esté explícitamente en la ficha de la tarea. El hecho de usar GeoGebra, puede promover un uso activo y autónomo para explorar soluciones, de hecho, es una de las principales características y aliciente de la herramienta, razón por la que fue seleccionada para la actividad. Algunos alumnos pueden sentirse inseguros frente al uso de GeoGebra, en esta y en el resto de actividades. Poco a poco deben ir entendiendo cómo funciona y la ayuda guiada del profesor es necesaria y no afecta al proceso de aprendizaje. Incluso es posible que alumnos se interesen por la app, cómo instalarla en casa y cómo avanzar en su manejo. Quizá se pueda preparar algún tipo de manual básico para las acciones que desarrollan habitualmente en el aula.

Sustitución incorrecta de coordenadas: Podrían cometer errores al comprobar si el punto satisface ambas ecuaciones (operaciones mal realizadas). Se va poniendo en común los progresos en cada paso para determinar si algún grupo ha cometido un posible error. Una actividad interesante sería buscar por parte de los otros grupos el error.

Inferencias incorrectas en la clasificación de sistemas: Al comparar cocientes, pueden llegar a conclusiones erróneas, por ejemplo, pensar que, si solo dos cocientes son iguales, ya es compatible. Este es un punto complejo y con dificultad para ellos, por lo que el docente debe estar pendiente continuamente, solicitando a cada grupo el estado de progreso.

Razonamiento sin generalización: Pueden quedarse con casos concretos sin entender la estructura subyacente. Más adelante se realizarán ejercicios como se ha dicho, pero es importante transmitir la búsqueda de patrones, siendo éstos comunes a otros sistemas que tendrán el mismo comportamiento.

Preguntas demasiado abiertas: Algunas preguntas guiadas podrían ser difíciles si el grupo no está acostumbrado a trabajo inductivo. Como en casos anteriores, la guía del profesor es imprescindible, sin llegar a facilitarles la solución, pero siempre manteniendo la “tensión” de razonamiento.

La dinámica de presentación grupal podría ser desordenada o pérdida del hilo argumental. Esto es previsible y lógico, por ello durante las presentaciones se ha de ir corrigiendo, verificando sobre todo el correcto uso del lenguaje matemático, así como brevedad y concisión. Por otra parte, el trabajo cooperativo fomenta la discusión argumentada y la corrección entre pares. El hecho de poder expresarse y razonar ante los demás, puede despertar una actitud más activa hacia el razonamiento y la discusión matemática.

Si se da algún tipo de error de cálculo, es necesario hacer hincapié en su naturaleza cuando aparezcan, poniéndolo en común para todo el grupo. Si se dispone de tiempo se hará algún ejemplo en la pizarra por parte del grupo o alumno que cometió el error.

Carga cognitiva elevada: Hay varias tareas encadenadas, tales como leer, realizar gráficas, interpretar, deducir, hacer inferencias..., lo que puede “saturar” a alumnos con dificultades de atención o de costumbre

en el razonamiento. Se realizarán pequeñas pausas y se llevará la clase sin prisas por terminar todo lo programado en detrimento de la comprensión. Es conveniente tener previsto alguna clase más disponible por si las actividades se alargaran de forma no intencionada.

ACTIVIDAD 4: MÉTODOS DE RESOLUCION. ABP

Tiempo limitado para tres métodos: Puede resultar excesivo abordar tres métodos en una sola sesión, aunque el problema sea simple. Podría repartirse en dos sesiones si se observa que el alumnado no llega a comprender la mecánica o les resulta excesivamente complejo. Por otra parte, al disponer de tres métodos de resolución, el alumno puede valorar cuál de ellos es el más apropiado o más acorde a sus preferencias de cálculo, en ese sentido es de esperar que los estudiantes valoren distintas estrategias para elegir el método más adecuado.

Para garantizar un ambiente positivo y evitar que ningún equipo se sienta señalado, si se observa que un mismo grupo encuentra dificultades de forma recurrente, se considerará la posibilidad de reorganizar los equipos para favorecer nuevas dinámicas de apoyo mutuo, o bien acompañar más de cerca a ese grupo durante las tareas, brindando una ayuda discreta que les permita avanzar al ritmo del resto sin perder la confianza en sus capacidades.

La similitud en las instrucciones de los tres métodos de resolución permite al alumnado establecer conexiones y reconocer patrones comunes, lo que facilita una comprensión progresiva. Esta repetición intencionada favorece el cambio entre métodos, ayudando a interiorizar la mecánica. Para potenciar aún más el aprendizaje activo, se invitará al alumnado a identificar y explicar por sí mismos las diferencias clave entre los métodos, promoviendo el pensamiento crítico y la consolidación del aprendizaje.

Al revisar la actividad, se aprecia como puntos fuertes: el alumno es protagonista del aprendizaje, se fomenta la investigación, análisis y socialización del conocimiento mediante el trabajo grupal. Se prioriza la comprensión sobre el aprendizaje del algoritmo o tarea mecánica. Se comienza por un problema sencillo que se va complicando. Se promueve el paso de lenguaje formal al algebraico. Se insiste en la comprobación.

Pese a todo, puede resultar una metodología a la que el alumno no está muy acostumbrado, pudiendo presentar ciertos problemas de adaptación.

Quizá en esta actividad se diera la necesidad de incluir alguna mejora en atención a la diversidad, pues puede resultar complicada para alumnos con carencias idiomáticas o de adaptación tecnológica. Se podría hacer más hincapié en la etimología de las palabras cuando se presenten los distintos métodos para asociarlos a la mecánica que les es propia.

ACTIVIDAD 5: ESCAPE ROOM

Si ocurriera que un grupo va muy adelantado respecto al resto, se hará una pausa para explicar mediante pistas aspectos facilitadores para ayudar al resto en su progresión.

Aunque la competición puede ser estimulante, conviene recordar que no todos los alumnos reaccionan positivamente a este planteamiento. De hecho durante la ejecución de la situación de aprendizaje durante las prácticas, una alumna mostró su disconformidad a la hora de llevar a cabo la actividad, pues insistía en haber terminado antes que el resto y no consideraba justo haber compartido el privilegio de ser los primeros con otro grupo que más o menos terminó al tiempo. Realmente fue insistente y, pese a no ser una alumna destacada en cuanto a las calificaciones, quedó claro su alta competitividad. Si bien esto es positivo en lo referente a motivación, para ella representaba su única motivación.

Estas situaciones pueden reproducirse durante la actividad, incluso sacar a la luz rencillas entre compañeros o situaciones de conflicto pasadas. En este punto quizá la idea no sea enfatizar la idea de ganadores, sino de que cada grupo ha de completar su misión, independientemente de si termina antes o después.

No se contemplan de modo específico, apoyos o recursos diferenciados para alumnado con necesidades educativas especiales. Esto puede solucionarse añadiendo ayudas visuales, pistas extra, etc.... dependiendo del punto en el que aparezcan las dificultades. Es una situación delicada, pues el resto de grupos no deben percibir la ayuda “extra” a otro grupo como un beneficio que supla la capacidad y el esfuerzo de otros, sino más bien como un acto de equidad.

En un primer borrador se había planteado que el grupo que terminara primero saldría a exponer cómo lo había logrado, pero finalmente se ha descartado, pues podría asumirse por el resto de grupos un rol de perdedores y hacerles perder interés o sentirse fracasados. Todos los grupos han de terminar en la medida de lo posible. Se tratará de hacerles comprender el hecho de no poder terminar todos al tiempo, pero lo importante es trabajar y completar, cada cual, a su ritmo, el reto. Se trata de aprender, de competir contra uno mismo.

Una idea interesante es tener un reto extra para los grupos que acaben por delante del resto, de dificultad alta para no dar la sensación de estar de “recreo” por haber terminado antes, mientras el resto sigue trabajando, lo cual puede hacer que se desconcentren o perder el interés. Por ejemplo, un problema del tipo:

Supongamos que manejamos dos líquidos: el primero tiene un 32% de agua y el segundo un 65%.

- a) ¿Podríamos mezclarlos de manera que obtengamos una mezcla con el 70% de agua?
- b) Si se pide una mezcla con el 51% de agua, ¿tenemos datos suficientes para hacerla?
- c) Sabiendo que el volumen final de la mezcla deben ser 390 ml, ¿es importante este dato para realizar la mezcla exacta?
- d) Con los datos anteriores ¿qué cantidad de cada líquido necesitamos mezclar?

Aunque no tiene vinculación directa con la temática del escape room, se puede plantear como acertijo adicional bajo algún contexto, ya que este tipo de enunciados son difíciles para los alumnos, según mi experiencia en las prácticas.

Siempre se puede presentar en los grupos alumnos más participativos o interesados, mientras que otros simplemente se dejan llevar. Para ello, se pueden implementar roles que fuercen de algún modo a tener una actitud más activa.

Por otra parte, al no ser obligatorio un método específico de resolución, los alumnos pondrán en práctica sus estrategias de resolución, eligiendo ellos las más apropiadas y valorando las diferencias entre unas y otras de cara a obtener soluciones.

Es probable también que, dado que no deja de ser un juego, algunos alumnos opten por verificar los resultados obtenidos para asegurarse la victoria o al menos llegar con más seguridad al código, lo que afianza una práctica muy recomendable. Esto además tiene su valor como proceso de autocorrección, incrementando su independencia en la adquisición de conocimiento.

Quizá algún alumno con tiempo pudiera emplear GeoGebra para representar las ecuaciones y encontrar las soluciones por el método gráfico, si piensa que es más rápido. En cualquier caso, la experimentación por sí mismo de esta opción ya habría valido la pena.

4.7 Valoración de la situación de aprendizaje

Para la valoración, se pasará un cuestionario a los alumnos.

Se les pide que lean cada pregunta con atención y respondan con sinceridad. Se trata de marcar una única opción, la que mejor refleje su opinión. Se añaden dos cuestiones en abierto para expresar más libremente una opinión.

¿Has entendido qué es un sistema de ecuaciones con dos incógnitas?

Sí, completamente /Más o menos/No mucho/Nada

¿Qué método te ha resultado más fácil para resolver sistemas?

Igualación/Sustitución/Reducción/No lo sé/Ninguno

¿Te ha parecido útil aprender a resolver sistemas de ecuaciones?

Sí, mucho/Un poco/No mucho/Nada

¿Cómo te has sentido durante las actividades en clase sobre este tema?

Muy bien, me ha gustado/Bien, pero a veces me he liado/Regular, me ha costado/Mal, no me he enterado

¿Qué te prefieres, trabajar sólo o en grupo?

Solo/a/En grupo/Solo, pero con ayuda del profesor/a/Una mezcla de todo, depende de la tarea.

¿Te ha costado mucho explicarte delante de tus compañeros?

No/Un poco/Mucho/No quiero volver a tener que hacerlo

¿Te gustaría seguir practicando este tema con más ejercicios o juegos?

Sí, me gustaría/No, ya he tenido suficiente/Depende del tipo de actividad

¿Qué nota te pondrías en esta actividad?

Sobresaliente/Notable/Bien/Suficiente/Insuficiente

¿Qué parte te ha parecido más difícil?

¿Qué sugerencia darías para mejorar las clases sobre este tema?

V Conclusiones

El presente Trabajo Fin de Máster ha tenido como eje principal el diseño y análisis de una situación de aprendizaje dirigida al alumnado de 2º de ESO, centrada en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, con un enfoque metodológico basado en la representación, el razonamiento, la conjetura, la argumentación y la comunicación.

Se ha logrado analizar en profundidad el rol de los procesos clave en el aprendizaje matemático (representación, comunicación, conjeturación, demostración y razonamiento), aportando una fundamentación teórica apoyada en autores relevantes y en las orientaciones del NCTM, así como en la normativa española vigente (LOMLOE y normativa estatal y autonómica de Secundaria). Se ha conseguido también identificar las dificultades más comunes que presentan los estudiantes en relación con el álgebra elemental y, más específicamente, con la resolución de sistemas de ecuaciones, integrando en el análisis estudios recientes y categorizaciones didácticas que enriquecen el marco conceptual del trabajo.

Se ha diseñado una secuencia didáctica contextualizada y progresiva, con un enfoque activo y participativo, coherente con los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) y del aprendizaje significativo. Dicha actividad no solo busca la adquisición de conocimientos matemáticos, sino también el desarrollo de competencias clave específicas de la asignatura de Matemáticas desplegadas en el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León), tales como el trabajo cooperativo, la autonomía, la toma de decisiones y la capacidad de comunicar ideas matemáticas. El uso de GeoGebra como herramienta de representación ha sido especialmente relevante para fortalecer la conexión entre lo simbólico, lo gráfico y lo verbal, favoreciendo el aprendizaje a través de la experimentación visual. Esta integración responde a los objetivos planteados y representa un valor añadido en términos de metodología asociado a las tecnologías.

Desde una perspectiva personal, el desarrollo de este trabajo ha supuesto para mí una valiosa oportunidad de consolidación y aplicación de los contenidos y competencias adquiridos a lo largo del Máster. La elaboración del TFM ha requerido integrar conocimientos pedagógicos, didácticos, psicológicos y de contenido matemático, aplicados a un contexto educativo ficticio. Además, ha permitido desarrollar una mirada reflexiva sobre la práctica docente y reforzar la idea de que enseñar matemáticas no debe limitarse a la transmisión mecánica de contenidos, sino que ha de orientarse hacia la construcción activa del conocimiento. La redacción del trabajo ha contribuido también al desarrollo de competencias profesionales esenciales como el diseño curricular, la planificación didáctica, la atención a la diversidad y la evaluación formativa.

Este proceso ha sido igualmente una oportunidad para revisar y profundizar en los conocimientos adquiridos y explorar formas más eficaces y motivadoras de enseñar contenidos tradicionalmente considerados difíciles, abstractos y descontextualizados. El uso de modelos de representación múltiples, la formulación de

conjeturas desde lo visual y el papel de la comunicación en el aula han sido aspectos especialmente enriquecedores, que espero seguir desarrollando en una futura labor docente, si se da el caso.

En términos generales, el trabajo aporta una propuesta didáctica sólida, coherente con los marcos normativos actuales y con las tendencias pedagógicas más relevantes en la enseñanza de las matemáticas. Su principal aportación radica en ofrecer un modelo concreto de situación de aprendizaje centrado en un contenido curricular clave, pero abordado desde una óptica integradora, competencial y activa. Esta propuesta puede servir como ejemplo replicable o adaptable por otros docentes interesados en promover aprendizajes profundos, significativos y motivadores, en los que el alumnado se convierta en protagonista activo del proceso de construcción del conocimiento matemático.

El presente TFM considero que cumple con los objetivos establecidos, y constituye un ejercicio de reflexión pedagógica y de diseño didáctico que contribuye a enriquecer la práctica docente y a fortalecer la formación profesional de cualquier profesor de matemáticas en Educación Secundaria.

VI Referencias bibliográficas

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *The Journal of the Learning Sciences*, 11(1), 25–61.

Álvarez, I., Ángel, J. L., Vargas, E., & Soler, M. N. (2014). *Actividades matemáticas: Conjeturar y argumentar*. Funes.

Ame Jumelle. (s. f.). *Significado de conjetura*. Recuperado de <https://es.ame-jumelle.com/significado-espiritual/significado-de-conjetura>

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241.

Arce Sánchez, M., Conejo Garrote, L., & Muñoz Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria* (1.ª ed.). Madrid.

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Universidad Nacional de Colombia.

Baroody, A. J. (1999). The roles of psychological research in the development of early arithmetic instruction. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 127–154). National Council of Teachers of Mathematics.

Barti, N. P., & Usdiyana, D. (2020). An analysis of mathematical representation skills in solving problems of systems of linear equations in two variables. In *The 2nd International Conference on Elementary Education (ICEE-2), Global Perspective on 21st Century Elementary Education* (Vol. 2, No. 1, pp. 814–823). Universitas Pendidikan Indonesia.

Brousseau, G. (1997). *Teoría de las situaciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas*. Paidós.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400>

Egodawatte, G. (2011). *Secondary school students' misconceptions in algebra* (Tesis doctoral inédita, University of Toronto), p. 145.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1–23). National Council of Teachers of Mathematics.

Hoffer, A. R. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 74(1), 11–18.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67–71). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317–326. <https://doi.org/10.1007/BF00311062>

Kress, G., & Van Leeuwen, T. (2006). *Reading images: The grammar of visual design* (2nd ed.). Routledge.

- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. (1990, 4 octubre). *Boletín Oficial del Estado*, 238, 27427–27442. <https://www.boe.es/eli/es/lo/1990/10/03/1>
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (2020, 30 diciembre). *Boletín Oficial del Estado*, 340, 122868–122953.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. (2013, 10 diciembre). *Boletín Oficial del Estado*, 295, 97858–97921. <https://www.boe.es/eli/es/lo/2013/12/09/8>
- Low, R., & Sweller, J. (2005). The modality principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 147–158). Cambridge University Press.
- Macgregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1–19. <https://doi.org/10.1023/A:1002970913563>
- Morales, A., Quevedo, E. G., & Hernández, V. M. (2017). Sobre algunas conjeturas en matemáticas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, (12), 107–124.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Pérez, M., Diego, J. M., Polo, I., & González, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. Editorial Universidad de Granada.
- Planas, N., & Civil, M. (2013). Language-as-resource and language-as-political: Tensions in the discourses in two settings. *Mathematics Education Research Journal*, 25(3), 361–378.
- Pólya, G. (1954). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.
- Ramírez Estrada, A. A. (2023). *Los tipos de errores que cometen los estudiantes de secundaria al resolver ecuaciones lineales con una variable*. Universidad Autónoma de Puebla.
- Real Academia Española. (2024). *Diccionario de la lengua española* (24.^a ed.). <https://dle.rae.es>
- Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo. (2022, 2 marzo). *Boletín Oficial del Estado*, 52, 24830–24909. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157>
- Real Decreto 40/2022, de 25 de enero. (2022). *Currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. *Boletín Oficial del Estado*, 28, 50061–50310.
- Ruano, R. M., Socas, M. M., & Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61–74.
- Sánchez, M., & García, F. (2020). El lenguaje como herramienta para el aprendizaje matemático en secundaria. En A. López & C. Ruiz (Eds.), *Didáctica de las matemáticas en contextos escolares* (pp. 75–90). Editorial Académica.
- Schoenfeld, A. H. (1994). La demostración: elemento vivo en la didáctica de la matemática. *Revista Educación Matemática*, 6(2), 5–15.

- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944>
- Sinclair, N., & McCulloch, A. (2008a). Modeling practices in mathematics education. Springer.
- Sinclair, N., & McCulloch, A. (2008b). The role of the aesthetic in mathematical inquiry. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(3), 261–278.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, (77), 20–26.
- Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning about fractions. In *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 25–32). PME.
- Stewart, S. L. (2001a). Developing mathematical reasoning in grades K–12. National Council of Teachers of Mathematics.
- Stewart, S. L. (2001b). *Mathematical Reasoning: Writing and Proof*. Prentice Hall.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.
- Wati, S., Fitriana, L., & Mardiyana. (2017). Students' difficulties in solving linear equation problems. Department of Mathematics Education, Universitas Sebelas Maret.
- Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Representation of mathematical ideas: A case of modeling. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763–804). Information Age.

VII ANEXOS

Prueba escrita.

IES LEOPOLDO CANO – 2º ESO MATEMÁTICAS PRUEBA ESCRITA: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.		
Nombre:	Grupo:	Fecha:
Ejercicio 1: (Valor 5 puntos) Los 90 alumnos de 2º de la ESO del IES Leopoldo Cano de Valladolid han ido de excursión a San Vicente de la Barquera (Cantabria), pues sus resultados académicos han sido muy buenos. Cada alumno debe elegir entre dos actividades ofertadas: surf (11 € por alumno) y paddle surf (16 € por alumno). Si en total se paga 1285 €, ¿cuántos alumnos han hecho surf y cuántos paddle surf?		
Ejercicio 2 Resuelve por el método que elijas los dos sistemas de ecuaciones siguientes: 2.1. <i>Valor (2 puntos)</i> $\begin{cases} 5x - y = 6 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ 2.2. <i>Valor (3 puntos)</i> $\begin{cases} 3(x - 2) - 12(3 - y) = y \\ -2(-2x + 3) - 7(-y + 3) = x \end{cases}$		