Universidad de Valladolid

Dpto. Didáctica de las Ciencias Experimentales,
Sociales y de la Matemática

Razonamiento matemático y sentido socioafectivo en 2º ESO desde un enfoque basado en Aulas de Pensamiento

Trabajo Final del Máster de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas
Especialidad en Matemáticas

Autor:

Pablo Martín Gómez

Tutor:

José María Marbán Prieto

Valladolid, junio de 2025

Resumen

La enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria se enfrenta al reto de atender no solo a dimensiones del aprendizaje puramente cognitivas sino también a aspectos de carácter socioafectivo. De hecho, la relación entre diferentes componentes del dominio afectivo como las actitudes, las creencias y las emociones, por un lado, y el rendimiento académico, por otro, ha sido ampliamente estudiada, identificando, en particular, correlaciones negativas entre ansiedad matemática o bajo autoconcepto matemático y desempeño en matemáticas.

El presente Trabajo de Fin de Máster plantea una propuesta basada en el modelo *Aulas de Pensamiento* de Peter Liljedahl, aplicado al tema de *Ecuaciones de primer grado y segundo grado* de 2º de la ESO. Este modelo ofrece una alternativa a la educación tradicional diseñada para construir aulas en las que pensar matemáticamente sea la actividad principal, promoviendo la colaboración y la autonomía del alumnado. El objetivo principal del trabajo es fomentar la competencia matemática a través de procesos de pensamiento y razonamiento, a la vez que se favorece el dominio afectivo de los estudiantes hacia las matemáticas.

Palabras clave: Competencia matemática, dominio afectivo, *Thinking Classroom*, sentido socioafectivo, Educación Secundaria Obligatoria.

Abstract

The teaching of mathematics in Secondary Education faces the challenge of addressing not only purely cognitive dimensions of learning but also socio-affective aspects. In fact, the relationship between different components of the affective domain—such as attitudes, beliefs, and emotions—and academic performance has been widely studied. In particular, negative correlations have been identified between math anxiety or low mathematical self-concept and performance in mathematics.

This Master's Thesis presents an innovative proposal based on Peter Liljedahl's *Thinking Classroom* model, applied to the topic of *First-Degree and Second-Degree Equations* in

2nd year of Secondary Education. This model offers an alternative to traditional education, designed to create classrooms where mathematical thinking becomes the central activity, promoting both student collaboration and autonomy. The main objective of this work is to foster mathematical competence through processes of thinking and reasoning, while simultaneously enhancing students' affective engagement with mathematics.

Key words: Mathematical competence, affective domain, *Thinking Classroom*, socio-affective dimension, Secondary Education.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años, la educación en matemáticas ha experimentado un creciente interés por metodologías activas que promuevan una mayor implicación del alumnado no solo a nivel cognitivo, sino también en el ámbito socioafectivo. El éxito en el aprendizaje de las matemáticas no solo depende de la adquisición de conocimientos, sino también de factores como la motivación, la autoestima y las relaciones interpersonales en el aula. Desde esta perspectiva, surge la necesidad de explorar nuevas formas de enseñanza que favorezcan un aprendizaje significativo y emocionalmente positivo.

Dentro de este movimiento innovador, destaca el modelo de *Thinking Classroom* (Aulas de Pensamiento) desarrollado por Peter Liljedahl, que propone un cambio radical en la enseñanza tradicional. Esta metodología se centra en generar entornos de aprendizaje activos, colaborativos y pensantes, en los cuales reina el razonamiento y el pensamiento frente a la memorización y repetición de procedimientos. En este enfoque, los estudiantes asumen un papel protagonista en la construcción de su propio conocimiento. Liljedahl fundamenta su propuesta a través de la aplicación de una serie de prácticas específicas capaces de transformar las aulas en espacios donde pensar matemáticamente es la actividad central.

El presente Trabajo de Fín de Máster tiene como objetivo diseñar y analizar una propuesta innovadora aplicando el modelo *Thinking Classroom* al tema de *Ecuaciones de primer grado y segundo grado* en un aula de 2º de Educación Secundaria Obligatoria. Esta propuesta busca aprovechar la potencia del modelo de Liljedahl no solo en el ámbito cognitivo, sino también en el dominio afectivo de los estudiantes, promoviendo su autonomía y su implicación emocional para mejorar el clima socioafectivo en el aula garantizando el razonamiento y el pensamiento matemático.

Durante el periodo de prácticas del Máster, se llevó a cabo una implementación parcial de esta propuesta en un contexto real de aula, lo que permitió obtener observaciones directas sobre el impacto del modelo en el comportamiento y la motivación de los alumnos.

La estructura de este trabajo se organiza en cinco capítulos. Tras esta introducción, se presenta un *Marco Teórico* que contextualiza conceptos claves en la problemática de estudio como la competencia matemática, el dominio afectivo en la educació matemática y el modelo *Thinking Classroom* . A continuación, en el capítulo de *Diseño de la intervención*, se expone la descripción de la propuesta junto con su justificación y objetivos, mientras que en el capítulo de *Desarrollo de la intervención* se presenta la puesta en práctica y los resultados de aprendizaje. Finalmente, en el capítulo de *Conclusiones*, se recogen las principales aportaciones del trabajo y se reflexiona sobre la propuesta y su aplicación en el aula.

Capítulo 2

Marco Teórico

Este capítulo tiene como objetivo fundamentar los pilares conceptuales sobre los que se apoya este Trabajo de Fin de Máster.

En primer lugar, se analiza la competencia matemática como una competencia clave que se pretende potenciar mediante la propuesta sugerida. Se recoge tanto en informes internacionales como PISA[1], como en la ley española vigente (LOMLOE)[2]. Se revisarán las definiciones dadas por algunos autores y se concluirá con la idea de competencia matemática en la que se apoya este TFM.

En segundo lugar, se estudiarán las diversas definiciones de razonamiento matemático, proceso clave de la competencia matemática, que han dado algunos autores, cómo se recoge esto en la ley educativa vigente y qué dicen los informes internacionales.

El tercer pilar lo constituye el dominio afectivo, otro de los grandes puntos que busca potenciar esta propuesta. Se revisarán diversas definiciones de este y los motivos por los que su desarrollo influye de manera determinante en el rendimiento matemático y en la predisposición al aprendizaje.

Por último, se trata el modelo Thinking Classroom, desarrollado por Peter Liljedahl y en el que se apoya la propuesta de innovación de este trabajo como respuesta a la necesidad de fomentar el razonamiento y el dominio afectivo en las aulas de matemáticas.

2.1. Competencia matemática

La competencia matemática se ha convertido en un eje fundamental dentro del currículum escolar. La sociedad actual cada vez está más tecnificada y es por ello que las habilidades matemáticas trascienden el aula y deberían ser proyectadas hacia la vida cotidiana y el entorno laboral. A lo largo de las últimas décadas, numerosos investigadores y organismos han tratado de delimitar el concepto de competencia matemática. Aunque existen matices entre unas definiciones y otras, todas coinciden en señalar que no se trata únicamente del dominio de contenidos matemáticos, sino también de la capacidad de aplicarlos en situaciones cotidianas. En esta sección se estudiará la definición dada para la competencia matemática de distintos autores, de algunos organismos internacionales y del marco legislativo español actual.

En primer lugar, Michael Niss, profesor danés de educación matemática (2002), define la competencia matemática como "la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en diferentes contextos y situaciones, tanto dentro como fuera de las matemáticas"[3]. Esta habilidad implica, por tanto, comprender conceptos y procedimientos a la vez que aplicarlos para resolver problemas y tomar decisiones. El enfoque de Niss enfatiza además en la importancia de la comunicación de las ideas y los resultados de forma clara y precisa, y de la creatividad como forma de encontrar soluciones originales a los problemas y de crear modelos matemáticos.

Según Kilpatrick, Swafford y Findell (2001), en el informe *Adding It Up* [4][5] , proponen una visión multifacética de la competencia matemática basada en cinco componentes interrelacionados: la comprensión conceptual, la fluidez en los procedimientos, el razonamiento adaptativo, la competencia estratégica y la disposición productiva hacia las matemáticas. Estas dimensiones sugieren que el dominio matemático requiere tanto de conocimientos como de actitudes y habilidades cognitivas complejas.

Más actual es la definición de Ángel Alsina (2023), quien en su artículo *Conocimientos esenciales sobre los procesos, habilidades o competencias matemáticas* [6], destaca que la competencia matemática no solo implica conocimientos técnicos, sino también habilidades cognitivas y disposiciones afectivas. Subraya la importancia de resolver problemas conectados con contextos reales para desarrollar esta competencia.

Existen también definiciones de programas internacionales como el *Programme for International Student Assesment* (PISA) cuyo objetivo es establecer el grado de desarrollo de los países miembros de la OCDE y evaluar la calidad de sus sistemas educativos (Rico, 2005). PISA define la alfabetización o competencia matemática como:

> *”La capacidad de una persona para razonar matemáticamente y para formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una variedad de contextos del mundo real. Incluye conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a conocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y a tomar decisiones y juicios bien fundamentados, necesarios para ser ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos del siglo XXI.”* (PISA, 2022).

En este sentido, PISA considera que el objetivo primordial de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar la competencia matemática para dar respuesta a problemas y cuestiones en el uso cotidiano, social y técnico. Para ello, las matemáticas deben considerarse como una herramienta que sirven para enseñar las siguientes competencias:

- *Pensar y razonar*: Responder a cuestiones complejas en multitud de contextos, además de formar y relacionar conceptos.
- *Argumentar y justificar*: Elaborar argumentos basados en sus acciones desde su propia reflexión y formular los razonamientos desarrollados.
- *Comunicar*: Ser capaz de describir los resultados obtenidos, comunicando las conclusiones con precisión.
- *Modelizar*: Desarrollar y utilizar modelos matemáticos en múltiples situaciones.
- *Resolver problemas*: Dominar la resolución de problemas, seleccionando y aplicando estrategias y generalizando los resultados obtenidos a otros problemas similares.

- *Representar*: Conocer y usar diferentes Sistemas de Representación, como tablas o gráficos, y ser capaz de relacionar y traducir con fluidez distintos sistemas.
- *Lenguaje simbólico*: Dominar con rigor el lenguaje simbólico, desde las operaciones básicas hasta la representación de situaciones reales con símbolos utilizando algoritmos y fórmulas elementales.

Con todo esto, PISA plantea un modelo funcional para las matemáticas escolares en el que las Matemáticas en sí, son una herramienta para aprender las distintas competencias cognitivas aplicables a distintos campos de actuación, tal y como se recoge en la Figura 2.1.

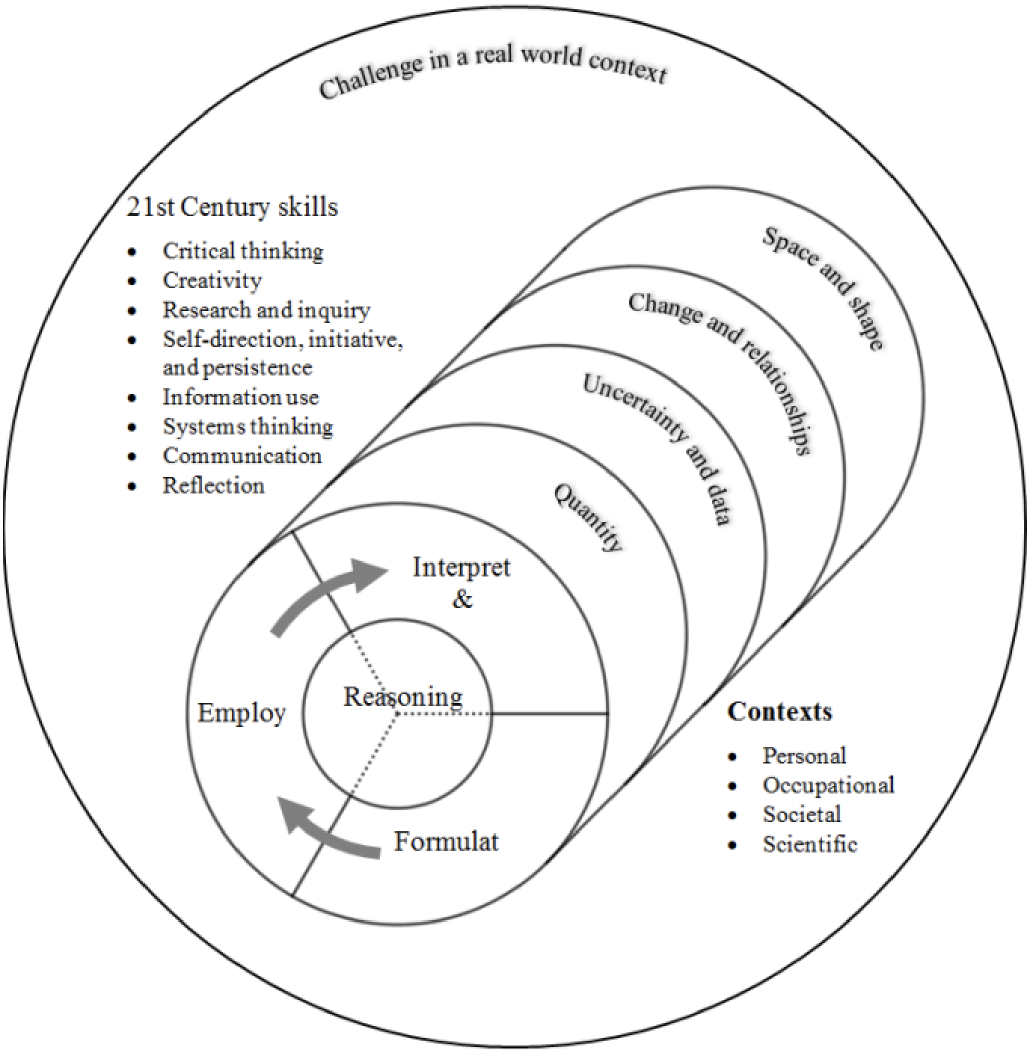

Figura 2.1: Modelo funcional para las matemáticas escolares. PISA 2022 [7]

En el contexto nacional, la Ley Orgánica 3/2020, de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE), vigente desde el 2022, sitúa la competencia matemática como una de las ocho competencias clave que todo alumno debe desarrollar a lo largo de su escolaridad.

Esta competencia matemática viene agrupada junto a la competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM) para subrayar la necesidad de integrar dichas competencias y promueve desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos [8].

Todas estas definiciones coinciden con la idea en la que se basará este trabajo: la competencia matemática trasciende la mera memorización de procedimientos y fórmulas y engloba la comprensión de los conceptos, la capacidad de resolver problemas en situaciones reales y la aplicación de las matemáticas en la vida cotidiana. La inclusión de esta competencia en el currículum de secundaria refleja un profundo cambio en el enfoque educativo: del conocimiento acumulativo al conocimiento aplicado, de la enseñanza tradicional al aprendizaje significativo, y de la escuela como espacio cerrado al entorno como contexto de aprendizaje.

2.2. Razonamiento matemático

El razonamiento matemático constituye uno de los pilares fundamentales del aprendizaje de las matemáticas tanto en colegios como institutos. No solo es esencial para resolver problemas, sino también para comprender en profundidad los conceptos matemáticos y su aplicabilidad en situaciones cotidianas. En esta sección se verán distintas perspectivas teóricas, como aparece recogido dicho concepto en la legislación educativa vigente en España (LOMLOE) y los resultados de las evaluaciones internacionales de PISA.

Esta habilidad puede definirse como el proceso mental por el cual se extraen conclusiones lógicas a partir de un conjunto de premisas o conocimientos previos. Este proceso implica habilidades como la deducción, la inducción, la generalización, la formulación de conjeturas y la validación de argumentos.

- *Deducción*: Es el proceso de obtener conclusiones lógicas a partir de premisas generales conocidas. Si las premisas son verdaderas, la conclusión también lo es. Es típico de las demostraciones matemáticas formales.

- *Inducción*: Consiste en observar casos particulares y a partir de ellos, inferir una regla general. No garantiza que la conclusión sea siempre verdadera, pero es útil para formular conjeturas. Se utiliza en términos de Estadística y Probabilidad.

- *Generalización*: Es el proceso de extender un resultado o patrón observado en algunos casos a una situación más amplia o abstracta. Se apoya en la inducción pero busca abarcar más casos.

- *Formulación de conjeturas*: Supone proponer una afirmación que parece verdadera, basándose en observaciones o patrones, pero que todavía no ha sido demostrada formalmente.

- *Validación de argumentos*: Implica examinar la lógica y coherencia de un razonamiento para verificar si una conclusión es válida. Es utilizada para comprobar la corrección de soluciones matemáticas.

Según Schoenfeld (1985), el razonamiento matemático es ”la capacidad para pensar de manera lógica y coherente en situaciones matemáticas, construyendo argumentos válidos y evaluando la veracidad de los enunciados” [9]. Por otro lado, Polya (1945) lo consideraba el núcleo del pensamiento matemático, especialmente en lo que respecta a la resolución de problemas. Según él, ”enseñar matemáticas sin fomentar el razonamiento es como enseñar literatura sin enseñar a leer” [10].

KilPatrick, Swafford y Findell (2001)[4], en su informe para el National Research Council, definen el razonamiento como una de las cinco competencias matemáticas esenciales, junto con la comprensión conceptual, la fluidez procedimental, la capacidad para resolver problemas y la disposición productiva.

Una perspectiva más práctica es la de Puig y Cerdán (2001), que afirman que ”el razonamiento matemático se manifiesta en la construcción de conjeturas, la búsqueda de patrones, y la capacidad para justificar, generalizar y argumentar”. [11]

En 2024, Graciela Celedonia en su estudio *Métodos de enseñanza del razonamiento lógico matemático para estudiantes universitarios* [12], define el razonamiento lógico matemático como el proceso de utilizar principios lógicos para llegar a conclusiones válidas y resolver problemas matemáticos. Destaca su importancia en el desarrollo del pensamiento crítico.

La Ley Orgánica 3/2020, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOMLOE), recoge el razonamiento matemático como una de las competencias clave a desarrollar en la etapa educativa obligatoria. Esta competencia se integra dentro de la Competencia Matemática y Competencias en Ciencia, Tecnología e Ingeniería (STEM), una de las ocho competencias clave definidas por la Unión Europea.

En el currículo de Educación Secundaria establecido por el Real Decreto 217/2022, se establece que el razonamiento y la argumentación forman parte del perfil de salida del alumnado. Además, los criterios de evaluación promueven explícitamente el uso del razonamiento:

> *”Utilizar estrategias personales y el razonamiento lógico para resolver problemas matemáticos en contextos diversos, revisando y comunicando el proceso seguido y los resultados obtenidos.”* (RD 217/2022) [13]

El Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA), desarrollado por la OCDE, ha incluido el razonamiento como una de las dimensiones evaluadas dentro de la competencia matemática. En el informe PISA 2022, el marco conceptual define el razonamiento matemático como:

> *”La capacidad de utilizar conceptos, herramientas y lógica matemáticos para conceptualizar y crear soluciones a problemas y situaciones de la vida real. Implica reconocer la naturaleza matemática inherente a un problema y desarrollar estrategias para resolverlo. Esto incluye distinguir entre información relevante e irrelevante, utilizar el pensamiento computacional, sacar conclusiones lógicas y reconocer cómo las soluciones pueden aplicarse en un contexto del mundo real.*

> *El razonamiento matemático también es la capacidad de construir argumentos y proporcionar evidencia para respaldar y explicar las propias respuestas y soluciones, y desarrollar conciencia de los propios procesos de pensamiento, incluidas las decisiones tomadas sobre qué estrategias seguir.”* (PISA, 2022) [1]

Uno de los aspectos evaluados es la capacidad para construir argumentos matemáticos, lo que se vincula directamente con el razonamiento. Los resultados han evidenciado que el alumnado con un nivel más alto de razonamiento tiende a mostrar un mejor rendimiento global en matemáticas y una mayor capacidad para transferir conocimientos a nueva situaciones.

En España, los resultados de PISA 2018 y 2022 reflejan una necesidad de fortalecer las habilidades de razonamiento del alumnado, dado que una proporción significativa se sitúa en los niveles bajos de desempeño, sobre todo en las tareas que requieren interpretar, modelizar o argumentar matemáticamente.[14]

En este sentido, este Trabajo de Fin de Máster propone una intervención innovadora orientada a fortalecer el razonamiento matemático del alumnado con una metodología que va más allá de la enseñanza tradicional.

2.3. Dominio afectivo

Durante muchos años, la enseñanza tradicional de las matemáticas se ha basado principalmente en el dominio cognitivo, siendo su objetivo principal el desarrollo de habilidades analíticas y la adquisición de contenidos disciplinares. Sin embargo, en las últimas décadas ha tomado importancia un nuevo enfoque del proceso de aprendizaje que reconoce la relevancia de los factores afectivos en el rendimiento académico y en la relación de los alumnos con la asignatura.

El dominio afectivo ha sido definido por multitud de autores en los últimos años. El equipo de educadores formado por Krathwohl, Bloom y Masia en 1964 lo conceptualizó como el conjunto de emociones, actitudes, creencias y valores que afectan la disposición del estudiante hacia el aprendizaje[15]. A su vez, David Krathwohl estableció una Taxonomía Afectiva subdividida en cinco categorías interrelacionadas:

- **Recibir**: Predisposición del alumno a aceptar ciertos fenómenos como prestar atención en clase y estar dispuesto a participar.
- **Responder**: Más allá de prestar atención, el estudiante responde, reacciona y disfruta participando en clase.
- **Valorizar**: El alumno atribuye valor a algo y muestra compromiso afectivo.
- **Organización**: Es capaz de relacionar los valores adquiridos en un sistema coherente que sirve para guiar su comportamiento.
- **Caracterización por un valor**: Actúa de forma coherente y constante respecto al sistema de valores interiorizado.

Estos niveles se ordenan de forma gradual y cada uno de ellos supone un nivel de aceptación mayor por parte del alumno.

Otra definición importante del dominio afectivo viene dada por McLeod, que lo define como un extenso rango de sentimientos y estados de ánimo que son considerados como algo diferente a la cognición (McLeod, 1989)[16][17]. En 1992, amplió esta definición para dividir el dominio afectivo en tres grandes componentes: emociones, actitudes y creencias[18][19].

- **Emociones**: Las emociones son respuestas afectivas intensas de corta duración, que se activan ante situaciones concretas en el aula de matemáticas como un examen, una tarea que suponga un desafío o la misma interacción con el docente. Se tratan de reacciones inmediatas y tienen un componente fisiológico claro como ansiedad, sudoración o tensión.

  Aunque las emociones tengan duración limitada, pueden influir fuertemente en el rendimiento cognitivo, especialmente si se repiten en el tiempo (McLeod, 1992, p. 579).

Un ejemplo de estas es la ansiedad matemática [20], que ha sido objeto de estudio como un tipo de emoción que interfiere con la memoria y la capacidad de razonamiento (Ashcraft y Kirk, 2001).

- **Actitudes**: Las actitudes son disposiciones afectivas con mayor estabilidad que las emociones, aunque menos estructuradas y racionalizadas que las creencias. Suponen una predisposición general hacia una situación o contenido, como el gusto o rechazo por las matemáticas. Se desarrollan a lo largo del tiempo mediante la acumulación de experiencias y suelen tener un carácter evaluativo.

  Las actitudes pueden tener un efecto directo en la persistencia ante la dificultad y la participación en el aula. Un estudiante con actitudes positivas se encontrará más dispuesto a esforzarse en las tareas más desafiantes.

- **Creencias**: Las creencias constituyen el nivel más complejo y duradero del dominio afectivo. Se refieren a ideas más o menos conscientes que los individuos tienen sobre las matemáticas, su utilidad y su propia competencia para aprenderlas. Son cognitivamente elaboradas y fuertemente arraigadas.

  Las creencias sirven para estructurar y dar una interpretación a las experiencias relacionadas con la materia. Pueden referirse tanto al contenido como a las capacidades de uno mismo. McLeod advierte que muchas creencias son resistentes al cambio, especialmente si estas se han formado en etapas tempranas del desarrollo (McLeod, 1992).

  Un aspecto central de las creencias es la llamada autoeficacia percibida, es decir, la creencia del estudiante sobre su capacidad para tener éxito. Estas creencias pueden condicionar tanto el rendimiento, como las decisiones académicas futuras.

Otra es la definición de Inés Gómez-Chacón[21] (2000), autora española, según la cuál, el dominio afectivo es un mediador fundamental entre el conocimiento matemático y el sujeto que aprende. En sus estudios, introduce el concepto de *yo afectivo matemático*, una construcción que engloba la percepción emocional que el estudiante tiene sobre sí mismo en relación con las matemáticas: su autoimagen, expectativas y su seguridad. También analiza como el dominio afectivo puede convertirse en un mecanismo de exclusión simbólica, ya que experiencias negativas repetidas pueden llevar a los estudiantes a marginarse a sí mismos de la materia desarrollando una imagen negativa de ellos. Todo esto está afectado por los factores socioculturales como la cultura escolar o las expectativas familiares que influyen directamente en el dominio afectivo de los estudiantes.

Una definición más reciente es la de Julio Antonio Jiménez Márquez (2023), en su tesis doctoral *Práctica pedagógica para la concreción del dominio afectivo en la educación matemática: una mirada desde elementos comunes con la cultura escolar* [22], en la que destaca la importancia de diseñar prácticas pedagógicas que integren las creencias, actitudes y emociones para mejorar el proceso de enseñanza, además de utilizar las TIC como mediadoras en este proceso. Su objetivo es transformar actitudes negativas hacia las matemáticas en experiencias más motivadoras.

El dominio afectivo toma un papel especialmente relevante en la Educación Secundaria Obligatoria, donde diversos estudios han señalado que la actitud hacia las matemáticas durante la secundaria puede ser un predictor del rendimiento matemático posterior y de la elección de estudios superiores relacionados con este área (Hannula, 2002; Zan et al., 2006)[23]. Es en esta etapa donde nace en la mayoría de los casos la ansiedad matemática, definida como una tensión que interfiere con la manipulación de números y la resolución de problemas matemáicos (Ashcraft y Kirk, 2001), que afecta al rendimiento y puede llegar a generar una aversión persistente hacia la materia.

Los factores que afectan al dominio afectivo se pueden dividir en tres grandes categorías:

- **Experiencias previas**: Los episodios vividos en las edades más tempranas tienen un efecto duradero en las emociones y creencias de los alumnos (Op't Eynde, De Corte y Verschaffel, 2006).
- **Clima del aula y metodología docente**: El tipo de relación que el docente establece con los estudiantes, así como la metodología utilizada, son determinantes en la configuración del dominio afectivo. Un ambiente de aula que fomente el error como parte del aprendizaje, que valore la participación y que reconozca el esfuerzo, puede contribuir significativamente a una mejor disposición afectiva (Boaler, 2002) [24].

- **Influencia social y cultural**: Las matemáticas están cargadas de connotaciones sociales que se transmiten en el ámbito escolar, familiar y social. Ideas como que las matemáticas son solo para personas inteligentes o son más propias del género masculino afectan directamente al dominio afectivo de los estudiantes creando creencias limitantes sobre su propia capacidad (Schoenfeld, 1985)[9].

Estas ideas se recogen también en la ley vigente, LOMLOE, en la que entre las competencias específicas de la asignatura de Matemáticas se incluye el sentido socioafectivo. Por un lado explicita el desarrollo de destrezas personales tales como la gestión de emociones poniendo en práctica estrategias de aceptación del error y la perseverancia en la consecución de objetivos. Por otro lado, se centra en las destrezas sociales. La ley apoya el trabajo en equipos heterogéneos para aprender a reconocer y respetar las emociones y experiencias de los demás. Esto se puede conseguir participando activamente en los trabajos en grupos o mediante el uso de roles asignados.

> *“Manejar las emociones correctamente mejora el rendimiento del alumnado en matemáticas, combate actitudes negativas hacia ellas, contribuye a erradicar ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato y promueve el aprendizaje activo”* (LOMLOE, 2020) [2].

Como se ha visto a lo largo de la sección, el dominio afectivo no es un aspecto trivial en el aprendizaje, sino un componente central que condiciona la motivación. Además, uno de los factores que puede condicionar el buen desarrollo de este, es la metodología empleada en el aula. Es en este aspecto en el que el presente Trabajo de Fin de Máster quiere incidir, presentando una metodología alternativa a la enseñanza tradicional que refuerce positivamente el dominio afectivo de los estudiantes.

2.4. Thinking Classrooms

Thinking Classrooms o Aulas de Pensamiento es un modelo diseñado por el profesor de educación matemática canadiense Peter Liljedahl como respuesta a la inquietante situación observada en las aulas de matemáticas: muchos estudiantes, incluso los más capaces, no piensan realmente en matemáticas durante las clases. En lugar de enfrentarse a los problemas de manera activa, se limitan a adoptar comportamientos pasivos, a reproducir mecánicamente procedimientos y a esperar indicaciones del profesor. El pensamiento es un precursor necesario del aprendizaje, y si los estudiantes no piensan, no están aprendiendo (Liljedahl, 2021). Esta cultura del *no pensamiento* no es casual, sino el resultado de años de práctica escolar que refuerza la obediencia por encima de la autonomía y la memorización por encima de la comprensión, como él dice, gran parte de lo que ocurre en las aulas se rige por las normas institucionales, que no han cambiado desde el inicio del modelo escolar en la época industrial.

A partir de esta situación, Liljedahl inició una profunda investigación durante más de quince años en colaboración con cientos de docentes y en más de 400 aulas de distintos niveles educativos. Durante esta investigación, en primer lugar, observó lo que sucedía en los aulas. Al estudiar el comportamiento de los alumnos al tener que enfrentarse a una tarea del tipo *ahora inténtalo tú*, resumió la actitud de estos en cinco grandes grupos:

1. *Holgazanean*: Ni siquiera se enfrentan a la tarea, hablan con sus compañeros o no hacen nada. No les interesa lo que está pasando. Estima que un 10 % toma esta actitud.

2. *Estancados*: Tampoco abordan la tarea, pierden el tiempo con comportamientos legítimos como ir al baño o beber agua y aseguran que no saben como responder la pregunta o que saben que el profesor pasará a otra cosa en breves minutos. Otro 10 % se comporta así.

3. *Fingiendo*: Fingen hacer la tarea pero en realidad no hacen nada. Pasan las páginas del libro, fingen escribir algo, pero al preguntarles, dicen que no saben hacer la tarea o

que esperan a que el profesor pase a otra cuestión. El 5 % de los alumnos toma esta actitud.

4. *Imitando*: Estos alumnos si que intentan completar la tarea. Para ello recrean el procedimiento que el profesor acaba de realizar en la pizarra en un ejemplo similar. Más de la mitad de los alumnos adopta este comportamiento.

5. *Intentándolo por su cuenta*: Solo un 15 % de los alumnos trata de hacer la tarea razonándola en su comprensión.

Ante estos alarmantes resultados, Liljedahl supo que algo tenía que cambiar en la forma de dar clase. De esta forma, probó pequeñas modificaciones, evaluó su impacto y sistematizó aquellas intervenciones que realmente generaban cambios significativos en la participación y el pensamiento matemático de los estudiantes.

Como resultado de este trabajo, nace el modelo de las Thinking Classrooms, colección de pautas concretas que inciden directamente en la manera en la que los estudiantes se relacionan con las matemáticas y con el proceso de aprendizaje, formando una estructura que los permite pensar realmente. Cada una de las pautas se aborda en un capítulo de su libro *Diseñando Aulas para Pensar en Matemáticas*[25] con ejemplos y sugerencias prácticas para implementarlas de forma progresiva. A continuación, veremos un resumen de las 14 pautas para mejorar el aprendizaje en las aulas de Matemáticas.

1. **Tipos de tareas**: Para que los estudiantes piensen, es necesario darles algo en lo que pensar (Liljedahl, 2021). En el sistema educativo tradicional, las matemáticas se basan en que el profesor explica un procedimiento seguido de un ejemplo resuelto y los alumnos deben reproducir lo que el docente acaba de realizar. Si queremos fomentar el pensamiento, es necesario dar tareas en las que los alumnos necesiten pensar. Esto concuerda con la ley vigente, en la que lo que se valora son las competencias, como el razonamiento y el pensamiento, y no los contenidos. Liljedahl distingue tres tipos de tareas según los contenidos que trabajan estas:

    - *Tareas no curriculares*: Son altamente atractivas para pensar y no guardan relación directa con el currículo.

- *Tareas siguiendo un guion*: Tareas relacionadas con los contenidos propios del currículo, que se plantean antes de indicar como resolverlas.
- *Tareas curriculares*: Tareas que guardan relación con el currículo y se resuelven promoviendo la imitación.

Liljedahl sugiere comenzar con tareas para pensar no curriculares pero altamente atractivas para los alumnos. Una vez los alumnos estén acostumbrados a este tipo de tareas, se puede cambiar a las tareas para pensar que siguen un guion. Es importante que en este tipo de tareas, se comience activando los conocimientos previos con alguna pregunta, extender esta pregunta más allá de los conocimientos previos después y terminar pidiendo a los estudiantes resolver una tarea sin decirles como hacerla.

2. **Formación de grupos**: El aprendizaje colaborativo presenta numerosas ventajas pedagógicas y sociales, y tras diversas pruebas, Liljedahl asegura que el número ideal de integrantes por grupo es **tres**, pues los grupos de más integrantes dan lugar a miembros ausentes a la tarea. Comunmente es el profesor quien decide cuáles serán estos grupos, dando lugar a ideas prestablecidas por los alumnos al ser asignados a un grupo. Es frecuente que algunos alumnos piensen que se les ha puesto en un grupo con alguien más capaz que ellos esperando que sean estos los que lleven el control de la tarea. De esta forma, se crea una predisposición a no pensar. Para solventar este problema, se sugiere crear **grupos aleatorios**, siendo de vital importancia que los alumnos estén presentes en el momento de su creación para ser conscientes de la aleatoriedad de los mismos. A la larga, los estudiantes se mostrarán más abiertos a trabajar en grupo, se habrán eliminado barreras sociales y se reducirá el estrés social que supone la autoselección de grupos.

3. **Dónde trabajar**: La siguiente cuestión a mejorar es el espacio donde trabajan los alumnos. Si el espacio sigue igual que siempre, sus comportamientos también seguirán igual.

   El hecho de que los alumnos estén sentados hace que se sientan anónimos, lo cual se agrava cuando se sientan lejos del profesor o con obstáculos entre medias. Para solucionarlo, se propone que los alumnos estén **de pie**, eliminando su sensación de anonimato. Además se sustituirá el papel y bolígrafo por superficies verticales no permanentes, como pizarras portátiles. Cuando trabajan sobre superficies **no permanentes**, pueden borrar cualquier error rápidamente, lo que les invita a escribir cualquier idea y rectificar después, aprendiendo del error. La pizarra vertical es la superficie que mejores resultados obtuvo en medidas como la participación, la voluntad para empezar o la persistencia, al compararla con otras como pizarras horizontales, papel vertical, papel horizontal o cuaderno (Figura 2.2).

WORK SURFACE	vertical whiteboard	horizontal whiteboard	vertical paper	horizontal paper	notebook
NUMBER OF GROUPS	10	10	9	9	8
1. time to task (seconds)	12.8	13.2	12.1	14.1	13.0
2. time to first notation (seconds)	20.3	23.5	144.3	126.8	18.2
3. time on task (minutes)	7.1	4.6	3.0	3.1	3.4
4. eagerness to start	3.0	2.3	1.2	1.0	0.9
5. amount of discussion	2.8	2.2	1.5	1.1	0.6
6. amount of participating	2.8	2.1	1.8	1.6	0.9
7. amount of persistence	2.6	2.6	1.8	1.9	1.9
8. amount of knowledge mobility	2.5	1.2	2.0	1.3	1.2
9. non-linearity of work	2.7	2.9	1.0	1.1	0.8

Figura 2.2: Comparación de distintas superficies de trabajo [25]

Es importante también que solo se disponga de un utensilio para escribir por grupo. De esta forma, solo una persona puede escribir a la vez y se valoran las ideas de todos, fomentando el aprendizaje colaborativo.

4. **Disposición del mobiliario**: La forma en la que el mobiliario está dispuesto en clase crea expectativas a los alumnos con tan solo entrar de lo que va a ocurrir en el aula. Tradicionalmente, los pupitres se encuentran ordenados orientados hacia la pizarra y la mesa del profesor, invitando a los alumnos a ser meros espectadores de un espectáculo en el que el docente es el único que actúa. Esta disposición trae como consecuencia comportamientos de imitación que no fomentan el pensamiento.

   El pensamiento es desordenado. En las aulas que están muy organizadas, los estudiantes no se sienten seguros para poder pensar libremente (Liljedahl, 2021). Una colocación de los pupitres perdiendo la rectitud y la simetría ha resultado tener mejores resultados a la hora de crear aulas para pensar (Figura 2.3). De esta forma, queda claro que el profesor deja de ser el protagonista al que hay que observar.

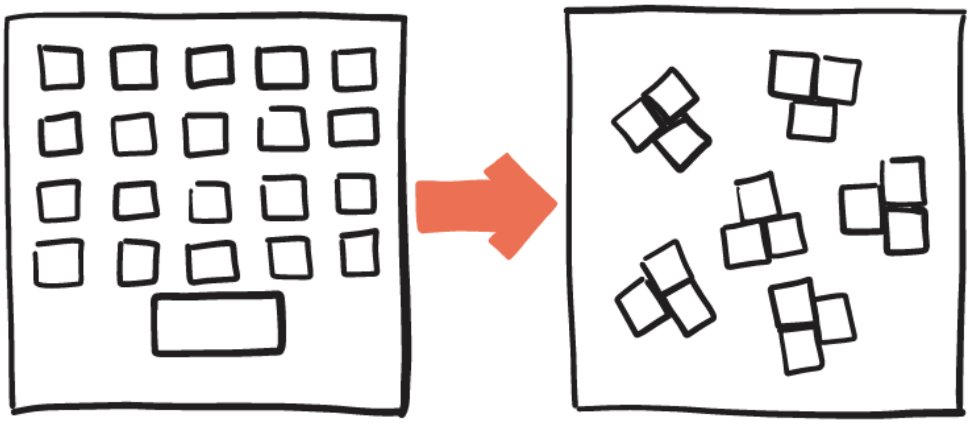

Figura 2.3: Disposición del mobiliario en un aula para pensar [25]

5. **Cómo responder a las preguntas**: Un docente normalmente responde entre 200 y 400 preguntas al día (Liljedahl, 2021), pero la forma en la que responda a estas preguntas puede ser crucial para fomentar el pensamiento de sus alumnos, pues muchas de estas preguntas van enfocadas a reducir su carga de trabajo y dejar de pensar. Podemos distinguir tres tipos de preguntas de los alumnos hacia el profesor:

   - *Preguntas de proximidad*: Son preguntas que los alumnos realizan al profesor cuando este se encuentra cerca. Estas preguntas, son frecuentemente cuestiones que los alumnos ya han deducido por si solos, pero las hacen para que el profesor vea que están cumpliendo su papel de estudiantes.
   - *Preguntas para dejar de pensar*: Estas preguntas van enfocadas a reducir su carga de trabajo como por ejemplo *¿Hay que aprenderse esto?* o *¿Esto entra en el examen?*
   - *Preguntas para seguir pensando*: Al contrario que las anteriores, estas preguntas las realizan los estudiantes cuando están motivados a seguir pensando.

   Liljedahl defiende que solo debemos responder a las preguntas para seguir pensando, pues las otras dos, se oponen al diseño de las Aulas de Pensamiento. Es importante que aunque estas preguntas no se respondan, el alumno sepa que el profesor le ha escuchado. Otra opción para no dejar las preguntas sin responder, es responder con otra pregunta del tipo *¿Eso es siempre cierto?* o *¿Estás seguro?*

6. **Entrega de las tareas**: Para aprovechar al máximo las tareas que los alumnos realizan en clase, hay que hacer una buena gestión en el momento en el que el profesor les entrega esta. Cuándo, dónde y cómo entregarla son aspectos tan importantes como la propia calidad de la tarea en sí.

   Por un lado, se sugiere entregarles la tarea al **principio** de la clase, en un intervalo de cinco minutos desde que el profesor realiza su intervención a toda la clase. Según la investigación, pasado este tiempo, la capacidad de pensamiento de los alumnos va disminuyendo, haciendo que sea más difícil que aprovechen la tarea a mitad de la sesión (Figura 2.4). Además, el hecho de haber trabajado previamente en otras tareas que no requieran tanto pensamiento, hace que cueste más ponerse a pensar después.

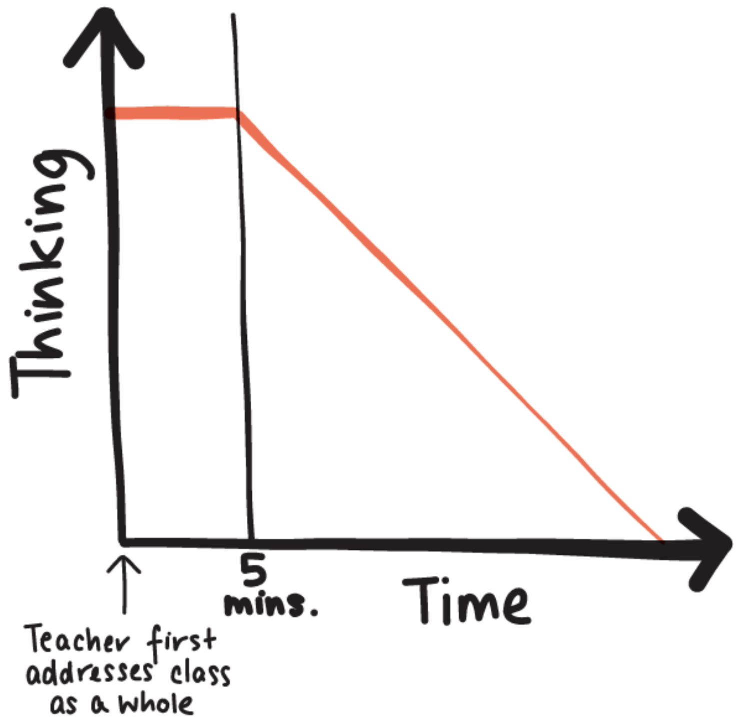

Figura 2.4: Relación entre pensamiento y el momento de entrega de la tarea [25]

   Por otro lado, el lugar en el que se de la tarea también afecta a la predisposición que tengan los alumnos. Se ha comprobado que si la tarea se entrega con los alumnos sentados, su pasividad aumenta y su energía disminuye. Por el contrario, si la tarea se les entregaba estando **de pie**, preparados para trabajar en sus superficies verticales, empezaban a realizarla más rápidamente y con menos preguntas al profesor.

Otro aspecto a tener en cuenta, es el modo en el que se da la tarea. Tras probar varias opciones, la que mejor resultados obtuvo fue la de entregar la tarea **verbalmente**. Entregar la tarea por escrito, en una hoja suelta, hace que los alumnos la asocien más con el *hacer* que con el *pensar*. Es importante que al darles la tarea, el profesor no se limite a leerla al pie de la letra, sino tratando de presentarla mediante un diálogo interactivo en el que se activen sus conocimientos previos y se fomente el debate.

7. **Deberes**: Los deberes necesitan una reformulación. En el sistema educativo tradicional, cuando se califican los deberes, gran parte de los alumnos los hace con ayuda, los copia o ni siquiera los hace. La tarea para casa debe enfocarse como una forma de que los alumnos puedan comprobar si han entendido lo visto en clase y poder asentar sus conocimientos, no como una obligación evaluable. De este modo, los deberes pasan a convertirse en *preguntas para comprobar la comprensión*. Es importante dejar claro que no se tomará nota de quien los ha hecho o no, aunque siguen teniendo la oportunidad de presentar sus dudas al profesor en caso de no haber sabido realizarlos.

8. **Fomento de la autonomía**: Al usar esta metodología, el profesor deja de ser la fuente de conocimientos y se convierte en un movilizador del conocimiento ya existente en el aula. Con el trabajo en grupos, el conocimiento puede fluir tanto dentro de un mismo grupo con entre grupos distintos. Es tarea del profesor guiar este conocimiento, haciendo que distintos grupos se comuniquen para poner en práctica competencias tales como la argumentación, la comunicación y la justificación.

9. **Pistas y ampliaciones**: La enseñanza tradicional de las matemáticas se basa en una idea de actividad sincrónica en la que todos los alumnos realizan a la vez la misma tarea. La realidad es que no todos los estudiantes avanzan al mismo ritmo ni tienen las mismas necesidades, y el profesor debería adaptarse a esta diversidad y permitir a cada alumno avanzar a su propia velocidad. La metodología de Liljedahl permite

este avance asíncrono gracias al uso de pistas y ampliaciones. Sugiere que las tareas en las que trabajen los estudiantes estén divididas en subtareas de dificultad gradualmente creciente que supongan un equilibrio entre desafío y aptitud para cada alumno. Es importante mantener a los estudiantes en el flujo entre frustración y aburrimiento, dándoles tareas que supongan un reto (sin llegar a frustrarles) pero que no sean demasiado sencillas, para evitar que pierdan el interés. Este flujo se representa en la Figura 2.5.

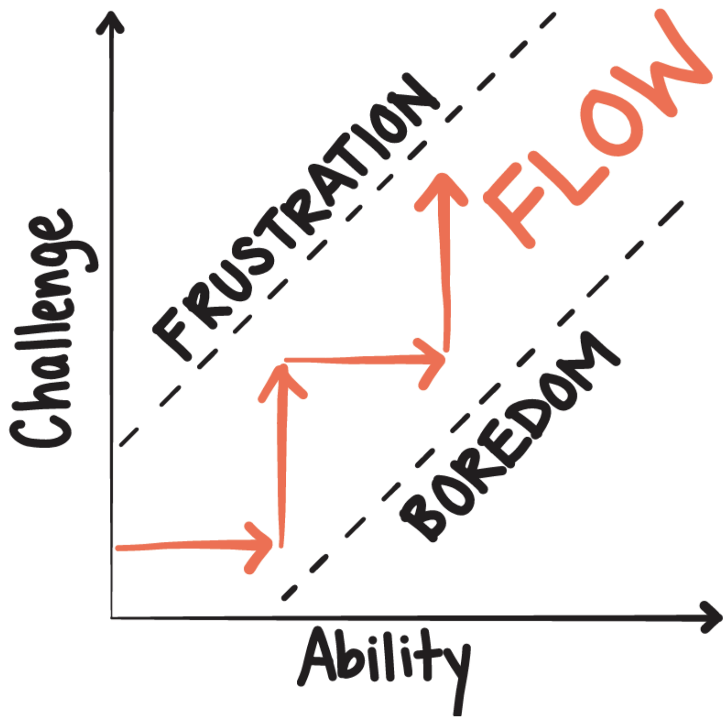

Figura 2.5: Equilibrio entre desafío y aptitud durante las tareas [25]

Para conseguir mantener el flujo, es importante que el aumento de la dificultad entre subtareas sea pequeño, en la que solo haya un pequeño cambio de la subtarea anterior.

Otra manera de mantener a los alumnos en el flujo, es mediante el uso de pistas. Existen pistas de dos tipos: para reducir el desafío o para incrementar la aptitud. Las primeras consisten en dar una solución parcial de la subtarea para hacer esta más sencilla. Las segundas requieren que el profesor les recuerde una estrategia que ya conocen o que se la de. Estas pistas son útiles para el resto de tareas y no tienen únicamente utilidad momentánea como las primeras.

10. **Consolidación de la lección**: Es importante consolidar los conocimientos desarrollados durante la sesión al final de esta, pero para ello, no basta con enseñarles como se hace la tarea. Para consolidar, es mejor utilizar el trabajo realizado por los propios alumnos a que el profesor desarrolle su propia explicación en la pizarra. Para esto se puede usar un *paseo por la galería*, observando el trabajo de todos los grupos.

    Una buena consolidación se realiza desde abajo, empezando a presentar las soluciones a las que todos los alumnos han llegado. Es importante que no sea el propio grupo quien presente su trabajo, sino que otro grupo intente descifrar el trabajo de sus compañeros para obligarles a pensar en lugar de explicar. El profesor puede resaltar rodeando con rotulador las partes del trabajo de los alumnos que manifiestan el pensamiento que han utilizado.

11. **Cómo tomar apuntes**: Tradicionalmente, la toma de apuntes se basa en copiar las anotaciones que el profesor realiza en la pizarra. Esto supone un problema, pues exige a los alumnos llevar el mismo ritmo que el profesor, y en ocasiones se traduce en alumnos perdidos intentando entender lo que están escribiendo y dejando de escuchar. El objetivo de tomar apuntes tiene que ser que ellos mismos, dentro de unas semanas, sean capaces de recordar lo que han aprendido durante la lección. Esto supone un problema, pues los alumnos, acostumbrados a escribir palabra por palabra lo que el profesor escribe, no saben como tomar notas significativas para ellos mismos en un futuro. Una solución, es apoyarse en organizadores gráficos con apartados como definiciones, conceptos, procedimientos o ejemplos. Lo importante es que comprendan que los apuntes son tomados por ellos y para ellos.

12. **Qué evaluar**: Esta metodología apoya una evaluación basada en competencias, como la ley vigente indica. Para ello, necesitamos instrumentos, tales como rúbricas que nos permitan evaluar competencias complejas.

    Es importante que los estudiantes conozcan estas rúbricas y sepan las cosas que se valoran para comenzar a dar importancia a actitudes tales como la perseverancia, la voluntad de asumir riesgos o la capacidad de colaboración. Estas rúbricas deben evaluar las *acciones* de los alumnos durante la realización de la tarea, no al haberla finalizado, por lo que se trata de rúbricas de observación. Es favorable que el número de columnas en cada punto a evaluar sea como mucho tres, pues más columnas para tratar de añadir más matices solo llevará lugar a confusión. Reducir el lenguaje en las rúbricas y el número de competencias evaluadas en cada rúbrica, ayuda a que los alumnos entiendan mejor de lo que se les está evaluando.

La presentación de esta rúbrica de evaluación es necesaria para que los alumnos le den la importancia que se espera a las actitudes que serán valoradas.

13. **Evaluación formativa**: La evaluación formativa es el proceso de recogida de información con el objetivo de mejorar la enseñanza y el aprendizaje (Liljedahl, 2021). En este sentido, el autor considera necesario que los alumnos sean capaces de identificar en que punto se encuentran de su recorrido en el aprendizaje, lo que ya saben hacer y lo que todavía no dominan. Para ello, se utilizan tablas de autoevaluación en la que el profesor determina tres niveles de dificultad de cada uno de los subtópicos del temario con ejercicios para evaluar cada uno de esos subtópicos en cada nivel de dificultad. La Tabla 2.1 constituye un ejemplo del tema de *Fracciones*.

FRACCIONES	**BÁSICO**	**INTERMEDIO**	**AVANZADO**
Suma y resta de fracciones simples	7a	7c	7e
Multiplica y divide fracciones simples	4b	11,13	3c
Resuelve problemas usando fracciones	9,11	6	12

Tabla 2.1: Instrumento de autoevaluación para la evaluación formativa

Para que los alumnos sean capaces de expresar con exactitud el punto en el que se encuentran en cada uno de los subtópicos, se establece un código con 6 niveles:

- ✓ Preguntas que se han intentado responder y se han respondido correctamente.
- **S** Preguntas que se han intentado responder y se han respondido correctamente en su mayoría, pero con algún error tonto.
- **H** Preguntas que se han intentado responder y se han respondido correctamente con la ayuda del profesor o algún compañero.

- **G** Preguntas que se han respondido correctamente dentro de un grupo de colaboración.
- ✗ Preguntas que se han intentado responder y se han respondido incorrectamente.
- **N** Preguntas que no se han intentado responder.

De esta manera, los estudiantes al empezar el tema tienen un punto de entrada, el nivel básico. Una vez se sientan seguros, pueden ver claramente cuales son los siguientes pasos para pasar a los siguientes niveles y no sentirse perdidos en su aprendizaje.

14. **Cómo calificar**: El modelo Thinking Classrooms propone una evaluación continua. Los exámenes son una observación puntual y no reflejan el progreso de los estudiantes. Para recoger calificaciones diarias se utilizan rúbricas similares a las del apartado anterior, con 3 niveles para cada uno de los subtópicos. El profesor debe recoger anotaciones por cada alumno de como consigue resolver los ejercicios con un código similar al anterior, que sea capaz de expresar cuando un alumno realiza las tareas sin ayuda, con ayuda, con algun error tonto, en grupo o no sabe realizarlas.

    Para crear una calificación hay que tener en cuenta varios aspectos. En primer lugar, si un alumno consigue superar un nivel, significa que ha superado también todos los anteriores. Es decir, si un alumno domina el nivel intermedio, se demuestra que también domina el nivel básico. Otro aspecto fundamental, es el no dar importancia al desconocimiento inicial de los alumnos. Al empezar a realizar ejercicios, estos están aprendiendo a hacerlos, es normal que no los sepan hacer. Por eso, las calificaciones negativas al comienzo, se verán ignoradas siempre y cuando haya calificaciones positivas después, y en ningún lugar se optará por hacerse una media aritmética. En el momento en el que un alumno resuelve dos ejercicios consecutivos de un subtópico de un determinado nivel, se puede considerar que domina dicho nivel. Finalmente, tras dar una puntuación a cada uno de los tres niveles (2 puntos para el nivel básico, 3 para el intermedio y 4 para el avanzado), se crea la calificación del alumno.

Para poner en práctica estas 14 pautas, Liljedahl sugiere un incremento gradual, comenzando por prácticas que exigen un cambio de comportamiento en los alumnos, como el uso de superficies verticales o grupos aleatorios; seguido de prácticas que se centran en la práctica docente como la respuesta a las preguntas; finalizando con las prácticas referentes a las evaluaciones y calificaciones.

El uso de esta metodología supone un cambio sustancial al sistema tradicional educativo, pero con altos beneficios como aumento de la colaboración, mejora de la autonomía en la toma de decisiones o fomento de la reflexión y el pensamiento. Gracias a las Aulas de Pensamiento se puede conseguir el objetivo principal a la hora de aprender Matemáticas: ir más allá de repetir procedimientos, pensar, razonar y construir conocimiento de forma significativa.

Capítulo 3

Diseño de la intervención

En el siguiente capítulo se desarrolla una propuesta didáctica innovadora basada en el modelo Thinking Classroom, descrito en la Sección 2.4. Esta propuesta pretende potenciar el dominio socioafectivo y cognitivo del alumnado, promoviendo tanto la autonomía y la colaboración como el pensamiento y el razonamiento. En concreto, la propuesta pretende trabajar la Unidad Didáctica de *Ecuaciones de Primer y Segundo grado* en Segundo de la ESO.

3.1. Justificación

Como ya se ha comentado previamente, la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria tradicionalmente se ha basado en metodologías expositivas, en las que los conocimientos se transmiten a través de clases magistrales y posteriormente los alumnos deben resolver mecánicamente ejercicios similares a los que el profesor ha ejemplificado. Aunque este enfoque es útil para aprender y memorizar procedimientos técnicos, no fomenta el pensamiento crítico ni el razonamiento matemático.

En respuesta a estas limitaciones, surge la necesidad de actualizar las prácticas educativas para alinearlas con los enfoques basados en competencias que promueven las nuevas leyes y que recomiendan los organismos internacionales como la OCDE o la UNESCO. El modelo de *Thinking Classroom* ofrece un marco teórico y práctico que transforma las dinámicas habituales del aula, fomentando el razonamiento activo, la colaboración entre iguales y la adquisición de conocimientos mediante la resolución de problemas en entornos no tradicionales.

Otro aspecto importante que trabaja este modelo es el dominio socioafectivo de los alumnos. En un instituto caracterizado por la enseñanza tradicional, implementar dinámicas que prioricen el pensamiento y el descubrimiento, supone también un cambio en la vivencia emocional al aprender matemáticas. Se busca impactar en la motivación, la autoestima académica y la actitud hacia el error de los alumnos, variables clave para un aprendizaje matemático significativo.

Por último, esta propuesta busca también experimentar y poder reflexionar sobre la viabilidad y los efectos de aplicar este tipo de metodologías en un entorno educativo tradicional.

3.2. Objetivos

El objetivo general de este trabajo es diseñar, implementar parcialmente y evaluar una propuesta de enseñanza de las matemáticas basada en el modelo *Thinking Classroom* que fomente el pensamiento y el razonamiento matemático frente a la memorización mecánica, y que potencie el dominio afectivo de los estudiantes en un entorno caracterizado por prácticas tradicionales.

Se espera que este modelo, además de fomentar el razonamiento matemático, promueva el trabajo en equipo a través de actividades que requieran pensar, argumentar y justificar soluciones, evitando los procedimientos rutinarios.

Además, con esta propuesta se pretende favorecer un clima afectivo positivo hacia las matemáticas, reduciendo la ansiedad de los estudiantes y mejorando su percepción de autoeficacia.

Otros objetivos son analizar los cambios en la participación y actitud del alumnado ante las matemáticas tras la aplicación de la propuesta y reflexionar sobre las oportunidades y dificultades que plantea este modelo.

3.3. Competencias clave

Según la ley educativa vigente, la educación primaria tiene como objetivo que los alumnos progresen de forma competencial adecuadamente. La educación secundaria debe ser una continuidad de este proceso, para ello, señala ocho competencias clave, todas ellas igual de importantes y que están entrelazadas entre sí. Todas estas competencias se pueden aplicar en diversos ámbitos y por tanto se pueden trabajar en más de una materia.

Cada una de estas competencias clave comprende tres dimensiones[26]:

- *Dimensión cognitiva*: Es la información en forma de datos, ideas o conceptos que los alumnos deben saber. Se identifica con el "saber".
- *Dimensión instrumental*: Es la habilidad para aplicar los conocimientos de la dimensión cognitiva en una práctica concreta. Estas habilidades deben ser entrenadas. Se identifica con el "hacer".
- *Dimensión actitudinal*: Es la disposición del alumno a actuar. Incluye los valores y las emociones del alumnado. Se identifica con el "querer".

A continuación, veremos la aportación de la propuesta que se diseñará en este TFM a cada una de las ocho competencias clave, de acuerdo con la LOMLOE.

1. *Competencia en comunicación lingüística (CCL)*
   Esta competencia es la habilidad de expresar e interpretar ideas y pensamientos de forma oral y escrita, interactuando eficazmente con el resto. Aunque esta propuesta

se enmarca en el ámbito de las matemáticas, el modelo *Thinking Classroom* promueve constantemente el uso del lenguaje oral y escrito. Los alumnos trabajan en grupos donde tienen que expresar sus razonamientos, debatir estrategias y justificar las soluciones. Esta interacción favorece la precisión del lenguaje matemático y mejora la capacidad para argumentar, tanto de manera oral como escrita.

2. *Competencia plurilingüe (CP)*

   Esta competencia, altamente relacionada con la anterior, es la habilidad de utilizar distintas lenguas para comunicarse y aprender. En este sentido, podemos considerar las matemáticas un propio lenguaje que modeliza el mundo real a través de variables y operaciones aritméticas. Con esta propuesta, los alumnos deberán expresar sus ideas en su lenguaje cotidiano y reformularlas utilizando el lenguaje matemático preciso. Esta traducción fortalece la conciencia metalingüística del alumnado.

3. *Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)*

   Esta competencia está fuertemente relacionada con la asignatura de Matemáticas e integra la habilidad de comprender el mundo utilizando el pensamiento y el razonamiento matemático apoyándose en representaciones matemáticas y métodos científicos. El modelo *Thinking Classroom* está altamente vinculado con esta competencia, pues propone tareas a los alumnos que fomentan su pensamiento crítico mediante la resolución de problemas. Además se utiliza la modelización, la validación de argumentos y la formulación de conjeturas, métodos científicos que se incluyen en dicha competencia.

4. *Competencia digital (CD)*

   La competencia digital implica el uso de tecnologías digitales para el aprendizaje. Si bien *Thinking Classroom* no depende necesariamente del uso de tecnologías, en algunas tareas se pueden integrar herramientas digitales para exponer soluciones o visualizar problemas, como será el caso en la propuesta de este trabajo. El uso de pizarras digitales fomenta la capacidad de los alumnos al trabajar con dispositivos tecnológicos y mejoran su alfabetización digital.

5. *Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)*

Esta competencia requiere que los alumnos reflexionen sobre ellos mismos, colaboren con otros y gestionen su propio aprendizaje. El modelo empleado en este trabajo está altamente relacionada con todos estos aspectos, pues promueve la autonomía del alumnado al tener que gestionar su propio aprendizaje y enfrentarse a tareas sin instrucciones directas. Otro aspecto que promueve este modelo es la cooperación en grupos aleatorios, lo que fomenta habilidades sociales como la colaboración y la comunicación.

6. *Competencia ciudadana (CC)*

   Según la ley, esta competencia promueve aspectos de ciudadanía responsable que hace a los individuos participar en la vida social y cívica, comprometidos con la sostenibilidad. El trabajo cooperativo del aula favorece el respeto por las ideas de los demás, la toma de decisiones entre todos los integrantes y la resolución de conflictos de manera dialogada. Además el trabajo en equipo fomenta la responsabilidad compartida y la participación, actitudes necesarias para una ciudadanía responsable.

7. *Competencia emprendedora (CE)*

   Esta competencia comprende la habilidad de aprovechar oportunidades para generar resultados de valor. Se basa en el pensamiento crítico, en tomar la iniciativa y en asumir riesgos de forma individual y grupal. Aunque no esté vinculada a aspectos financieros, en la propuesta planteada se fomenta la iniciativa y la capacidad de asumir riesgos, al tener que enfrentarse a problemas nuevos y decidir de manera grupal como abordarlos sin tener una guía fija. De esta forma se toman decisiones y se aprende del error.

8. *Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC)*

   Esta competencia promueve comprender y respetar las ideas de distintas culturas. Aunque pueda parecer menos relacionada con las matemáticas, el trabajo grupal fomenta la expresión creativa y la apreciación de diferentes formas de pensamiento, lo que enriquece la dimensión cultural del aula. Además, el modelo permite plantear problemas de diversas situaciones culturales que permitan a los alumnos conocer diferentes manifestaciones de otras culturas.

3.4. Competencias específicas

Las ocho competencias clave mencionadas en la sección anterior, se desarrollan mediante las competencias específicas, distintas para cada materia [26]. En matemáticas existen 10 competencias específicas agrupadas en cinco grandes bloques competenciales interrelacionados, compuestos cada uno de ellos por dos competencias específicas. Estos bloques son: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación, y destrezas socioafectivas.

Estas competencias se conectan con el perfil de salida que cada alumno debe lograr al finalizar la enseñanza básica mediante los descriptores operativos de las competencias clave.

A continuación se detalla en que consiste cada una de estas competencias específicas, en qué medida la propuesta educativa de este TFM trabaja cada una de ellas y como se relaciona cada competencia con los descriptores operativos del perfil de salida del alumnado de secundaria.

1. *Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.*

   El núcleo del modelo *Thinking Classroom* es la resolución de problemas no rutinarios, que hagan que el alumno interprete situaciones complejas, las traduzca al lenguaje matemático y las resuelva con distintas estrategias para obtener posibles soluciones, lo que concuerda totalmente con la competencia.

   Esta competencia específica se conecta con los descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL2, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.

2. *Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.*

Una de las ventajas del modelo, es el uso de las pizarras verticales, que permiten que las soluciones se analicen colectivamente y se contrasten entre grupos. Esta dinámica permite someter a debate la validez de las soluciones aportadas y permite a los alumnos justificar sus procedimientos argumentando matemáticamente.

Esta competencia específica se conecta con los descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM4, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.

3. *Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.*

   En las *Thinking Classroom*, la teoría se deduce a través de los problemas que van resolviendo, por lo que abunda el razonamiento inductivo para generar conocimiento. Esto permite a los alumnos formular sus propias conjeturas, discutirlas y razonar su validez. El profesor en esta situación, es un guía en su proceso de aprendizaje y no un transmisor, siendo ellos los que generan su conocimiento.

   Esta competencia específica se conecta con los descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL2, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3.

4. *Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.*

   Aunque este modelo no depende explícitamente de la tecnología, para resolver las tareas es necesario aplicar principios del pensamiento computacional como identificar patrones o descomponer problemas. Estas herramientas en concreto les serán necesarias para trabajar en las ecuaciones lineales de primer grado de la propuesta. De esta forma se puede considerar que se constituye una base para el desarrollo de habilidades computacionales sin la necesidad de usar dispositivos digitales.

   Esta competencia específica se conecta con los descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.

5. *Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas*

como un todo integrado.

Las tareas de Liljedahl ricas para pensar, exigen poner en juego conocimientos de diferentes bloques de contenido, lo que hace que los alumnos conecten conceptos y procedimientos en lugar de sentir las matemáticas como contenidos aislados.

Esta competencia específica se conecta con los descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.

6. *Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.*

   Los problemas propuestos en este modelo se contextualizan en situaciones reales o interdisciplinarias, lo que hace que los alumnos sientan las matemáticas como una herramienta para comprender y modelizar el mundo. Esta competencia promueve el aprendizaje interdisciplinario conectando las matemáticas con otras asignaturas como las ciencias sociales o la tecnología.

   Esta competencia específica se conecta con los descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM5, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.

7. *Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.*

   El modelo permite el uso de diferentes herramientas, desde algunas más tradicionales como pizarras y rotuladores (superficies verticales) hasta otras más innovadoras como pizarras digitales para representar ideas, conceptos o información. Cada alumno debe ser capaz de representar individualmente sus ideas al resto del grupo, y el grupo a su vez, debe saberlo expresar al resto de grupos. De esta manera se trabaja la representación de forma tanto individual como colectiva.

   Esta competencia específica se conecta con los descriptores del Perfil de salida: STEM3, STEM4, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.

8. *Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos*

matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.

Similar a la competencia anterior, además de representar las ideas, los estudiantes se ven constantemente obligados a expresarlas. Esta comunicación se convierte en una herramienta esencial tanto para la comunicación dentro del grupo como fuera de este, pues en las *Aulas de Pensamiento* el conocimiento viaja entre grupos. Además, en el *paseo por la galería*, los estudiantes deben explicar sus decisiones al resto de la clase. Esta interacción potencia el uso del lenguaje matemático con precisión, utilizando una terminología apropiada.

Esta competencia específica se conecta con los descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.

9. *Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en practica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.*

   La normalización del error como parte del aprendizaje es una de las grandes aportaciones del modelo de Liljedahl. El trabajo en grupos frente a retos sin solución inmediata, hace que los alumnos desarrollen perseverancia, resiliencia y autorregulación emocional. Esta competencia esta altamente relacionada con el dominio afectivo de los alumnos, uno de los pilares en los que se basa el modelo *Thinking Classroom*, motivo por el cual se la ha elegido como base para la propuesta de este trabajo.

   Esta competencia específica se conecta con los descriptores del Perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.

10. *Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.*

    Esta competencia está altamente relacionada con el modelo empleado. *Thinking Classroom* introduce la colaboración mediante el uso de grupos aleatorios en todas sus tareas. Estos grupos cambian con frecuencia, lo que mejora las habilidades sociales del alumnado. De esta forma, los estudiantes se ven obligados a escuchar distintos puntos de vista, resolver conflictos de forma constructiva y respetar diversas opiniones.

Una de las grandes ventajas del modelo es que al sentirse parte del grupo y ver sus ideas valoradas, el alumno construye una identidad positiva como estudiante de matemáticas, mejorando su autoestima y potenciando su sentido socioafectivo.

Esta competencia específica se conecta con los descriptores del Perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.

3.5. Contenidos

En esta sección se explicitan los contenidos que serán abordados en la propuesta didáctica de este trabajo. Como ya se indicó, la Unidad Didáctica que pretende abarcar esta propuesta es *Ecuaciones de primer y segundo grado* en 2º de la ESO.

Acorde con el Boletín Oficial de Castilla y León del 30 de septiembre de 2022[27], que detalla los contenidos de la materia Matemáticas que se deben impartir en cada curso, los conceptos de esta Unidad Didáctica se engloban dentro del sentido algebraico.

> El sentido algebraico conlleva explorar y reconocer patrones y funciones, establecer generalidades a partir de casos particulares formalizándolas en el lenguaje simbólico apropiado. En este sentido está incluido el pensamiento computacional (BOCyL, n.º 190).

Dentro de este sentido algebraico, la ley enumera los contenidos propios de cada curso. A continuación se detallan los que se trabajaran principalmente con esta propuesta.

1. *Modelo matemático*:

   Modelizar situaciones de la vida cotidiana usando material manipulativo y representaciones matemáticas para llegar al lenguaje algebraico.

Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.

Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.

2. Variable:

   Comprensión del concepto de variable como incógnita en ecuaciones lineales con coeficientes racionales, como indeterminadas en expresión de identidades y como cantidades variables en fórmulas.

   Monomios. Operaciones básicas.

3. *Igualdad y desigualdad:*

   Relaciones lineales en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.

   Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas, especialmente aquellos basados en relaciones lineales.

   Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones lineales con coeficientes racionales en situaciones de la vida cotidiana.

   Ecuaciones lineales: resolución mediante cálculo mental o métodos manuales.

Acorde a estos saberes básicos, el orden de los contenidos de la propuesta es el siguiente:

1. Concepto de igualdad. Identidades y ecuaciones. Número de soluciones de una ecuación.

2. Ecuaciones lineales de primer grado. Concepto de ecuación como balanza.

3. Resolución algebraica de ecuaciones lineales sencillas de primer grado. Reglas de la suma y del producto.

4. Resolución algebraica de ecuaciones lineales de primer grado más complejas. Denominadores y paréntesis.

5. Aplicación de las ecuaciones de primer grado para la resolución de problemas. Modelización y matematización de problemas de situaciones cotidianas. Traducción al lenguaje algebraico de situaciones de la vida cotidiana. Comprobación de la validez de las soluciones obtenidas.

6. Ecuaciones lineales de segundo grado incompletas. Ecuaciones de segundo grado completas. Número de soluciones de una ecuación.

7. Aplicación de las ecuaciones de segundo grado para la resolución de problemas. Modelización y matematización de problemas de situaciones cotidianas. Traducción al lenguaje algebraico de situaciones de la vida cotidiana. Comprobación de la validez de las soluciones obtenidas.

Esta propuesta está también altamente relacionada con el sentido socioafectivo de los alumnos, al estar basada en el modelo *Thinking Classroom*.

> El sentido socioafectivo conlleva identificar y gestionar las emociones, afrontar los desafíos, mantener la motivación y la perseverancia y desarrollar el autoconcepto y el sentido de la identidad en el aprendizaje de las matemáticas (BOCyL, n.º 190).

Los saberes básicos del sentido socioafectivo (expuestos en el BOCyL n.º 190) que incluye esta propuesta son los siguientes:

1. *Creencias, actitudes y emociones*

   Esfuerzo y motivación: reconocer su importancia en el aprendizaje de las matemáticas.

   Gestión emocional: Autoconciencia y autorregulación de las emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas.

   Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia al aprender matemáticas.

Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: estar abierto a cambios de estrategia y transformar el error en una oportunidad para seguir aprendiendo.

2. *Trabajo en equipo y toma de decisiones*

   Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.

   Conductas empáticas y estrategias para gestionar conflictos.

3. *Inclusión, respeto y diversidad*

   Actitudes inclusivas y aceptar la diversidad presente en el aula y en la sociedad.

   Contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas.

Estos saberes básicos se trabajaran transversalmente durante todas las sesiones de la propuesta gracias al modelo de Liljedahl, que fomenta el trabajo en grupo, la autonomía del alumnado y el respeto por la diversidad.

3.6. Metodología

Como ya se ha mencionado, la propuesta está basada en el modelo de *Aulas de Pensamiento* de Peter Liljedahl. Se busca, por tanto, una metodología que fomente el trabajo en grupo y la autonomía de los alumnos, donde ellos sean capaces de razonar los procedimientos a seguir para resolver los problemas planteados sin la necesidad de imitar al profesor. Este modelo se apoya principalmente en tres metodologías:

- *Aprendizaje Colaborativo*: En esta metodología, los estudiantes trabajan por grupos con unos objetivos comunes, de forma que solo pueden conseguir su propio objetivo si todo su grupo lo hace. En esta metodología, los grupos deben ser heterogéneos, con una participación equitativa e interactuando cara a cara a través del diálogo que fomenten la interacción social.

A diferencia del Aprendizaje Cooperativo, este está menos estructurado. No existen unos roles predefinidos por el profesor del papel que debe tomar el estudiante en el grupo. De esta forma, aumenta la autonomía de los estudiantes y la libertad para organizarse como mejor consideren.

La propuesta planteada cumple claramente con esta metodología. Los estudiantes trabajarán en grupos de 3 personas formados aleatoriamente, donde dentro del grupo todos los individuos tienen el mismo papel, debiendo aportar todo lo que puedan al grupo para alcanzar sus objetivos comunes.

- *Resolución de problemas*: Según Miguel de Guzmán, nos encontramos ante un problema si "*desde la situación en que estamos queremos llegar a otra, que conocemos con más o menos claridad pero desconocemos el camino*"[28]. Existen diversas heurísticas para resolver problemas, pero todas coinciden en que primero se debe comprender el problema, y por último revisar los resultados para comprobar la veracidad de la solución.

  En la propuesta de este trabajo, los estudiantes deberán resolver problemas de forma razonada con los conocimientos que tienen, para dar solución a una situación en la que el procedimiento para resolverlo no está del todo claro.

- *Aprendizaje basado en problemas*: Esta metodología se caracteriza por ser los estudiantes los que llegan a la teoría y la generalización a través de ejercicios y problemas. En lugar de ser el docente quien les expone los conceptos para que puedan utilizarlos en la resolución de problemas, ellos deben extraerlos de las propias tareas.

  Esta metodología no se empleará durante toda la propuesta, pues hay actividades en las que primero se explicará la teoría para que luego ellos la utilicen, como por ejemplo, al ver por primera vez la fórmula de las ecuaciones de segundo grado. Sin embargo, en otras actividades, serán ellos los que a través de los ejercicios deberán consolidar los procedimientos utilizados para resolverlos.

3.7. Materiales y recursos didácticos

En esta sección se especifican los materiales y recursos didácticos necesarios para llevar a cabo esta propuesta. Las sesiones se desarrollarán en un aula habitual, en el que se presupone que hay al menos un par de pizarras de tiza tradicionales verticales. A mayores, se utilizará:

- *Superficies verticales no permanentes*: Estas superficies son necesarias para que los grupos puedan desarrollar su tarea. Se pueden aprovechar las pizarras tradicionales que haya en el aula para hacer su función. En caso de no contar con estas superficies, se pueden aprovechar las ventanas del aula (con rotuladores para escribir sobre cristal), o usar pizarras apoyadas horizontalmente. En el peor de los casos, se pueden usar folios para que los alumnos desarrollen sus tareas, aunque estos no aprovechan las ventajas de la no permanencia de lo que se escribe. En todos los casos, se hará que los alumnos se mantengan de pie durante el desarrollo de las tareas.

- *Pizarra digital*: Esta pizarra se utilizará como superficie vertical no permanente durante el tiempo en el que los estudiantes trabajan en su tarea y como método de proyectar algún material durante otras tareas. En caso de no disponer, los materiales se pueden mostrar a través de un proyector, o en su defecto, copias impresas.

- *Libro de texto*: Este libro de texto es opcional, pero servirá a los estudiantes que no estén acostumbrados a este modelo a tener una guía donde apoyarse. Es importante que se utilice principalmente como refuerzo para los ejercicios y para indicar a los estudiantes los ejercicios que pueden realizar para reforzar lo hecho en clase. Los alumnos no deben utilizarlo para consultar la teoría antes de haber realizado las sesiones donde se trabajará. En este caso, se utilizó el libro de texto *Matemáticas. 2 Secundaria. Revuela. SM* [29] por ser el que utilizaba el centro.

- *Libro de tareas de Peter Liljedahl* [30]: Además del libro ya mencionado con las 14 pautas para diseñar Aulas de Pensamiento, Liljedahl tiene otro libro únicamente con tareas. Si bien estas tareas van enfocadas a primaria, también abarcan los primeros cursos de secundaria. Este libro dispone de material digital para las tareas, y se utilizará en algunas de las sesiones.

- *Fotocopias para las actividades*: El profesor utilizará fotocopias para proponer ciertas actividades durante las clases, así como material para consolidar lo aprendido durante la tarea.

3.8. Diseño de un Aula para Pensar

En esta sección se irán comprobando una por una las 14 pautas de Liljedahl para desarrollar Aulas de Pensamiento en Matemáticas y comprobando en qué medida y cómo se han implementado cada una de estas prácticas en la propuesta planteada. Cabe mencionar que el propio autor plantea que la puesta en práctica de estas pautas debe hacerse de forma gradual y que no es necesario aplicarlas todas a la vez. En su libro menciona el orden recomendado para ir implementando las pautas y que el cambio de metodología no resulte tan chocante ni a los alumnos ni al profesor.

Otro aspecto a mencionar es que en esta sección se desarrolla la propuesta teórica, no la implementación parcial que se llevó a cabo. Más adelante, en el capítulo *Puesta en práctica*4, se explicará cuánto de esta propuesta se pudo llevar a cabo en el contexto real durante el periodo de prácticas del Máster.

1. *Tipos de tareas*: Dentro de la clasificación de tres tipos de tareas que proponía Liljedahl (tareas no curriculares, tareas siguiendo un guion y tareas curriculares), esta propuesta se basará principalmente en tareas que siguen un guion, es decir, tareas relacionadas con los contenidos del currículo pero que se les entregan a los alumnos antes de indicarles como resolverlas.

   A pesar de ello, las dos primeras sesiones se utilizarán tareas no curriculares como sugiere el autor. De esta forma, los alumnos, acostumbrados a una metodología tradicional, pueden entender como se desarrollarán el resto de sesiones aprovechando tareas para pensar altamente atractivas.

Tras estas tareas no curriculares, la propuesta se centra en las tareas que siguen un guion. Estas tareas muestran una estructura secuencial, en la que a cada grupo se le entrega un problema o ejercicio a resolver y hasta que este no esté respondido y todos los miembros del grupo estén de acuerdo en la forma en la que se ha llegado a la solución, no se pasa a la siguiente. De esta forma, cada grupo puede avanzar a su propio ritmo, y no se obliga a los alumnos a seguir la misma velocidad que el profesor indica. Estas tareas secuenciales, incrementan su dificultad de forma gradual. Es importante que antes de subir un escalón la dificultad, se haya consolidado el paso anterior y que entre varios niveles de complejidad solo varíe un elemento. Un ejemplo de este tipo de actividades secuenciales se puede encontrar en la Sección 6.

Tanto las tareas no curriculares como las que siguen un guion, requieren que los alumnos piensen, razonen, argumenten y no se limiten a repetir los procedimientos explicados por el profesor.

2. *Formación de grupos*: En la propuesta, los grupos se formarán de manera aleatoria utilizando para ello una baraja de cartas española, donde el número de carta obtenido representa el grupo del que formarás parte. De esta forma, los alumnos ven en directo la formación de los grupos y están seguros de la aleatoriedad de estos. Estos grupos cambiarán en cada una de las sesiones para asegurar la heterogeneidad. Los grupos estarán formados por 3 estudiantes (o 4 en caso de que no se puedan formar únicamente grupos de 3). Liljedahl recomienda no superar grupos de 3 personas, siendo preferible el trabajo por parejas, pero en la propuesta se opta por llegar a grupos de 4 alumnos para tener menos grupos y que estos sean más fácilmente supervisables.

3. *Dónde trabajar*: Se opta por utilizar superficies verticales no permanentes y asegurarse de que los alumnos trabajarán de pie, para evitar el anonimato del que habla el autor canadiense. Para estas superficies verticales se pueden aprovechar pizarras tradicionales, pizarras digitales, superficies portátiles, o cristaleras con rotuladores aptos para ello en caso de que la iluminación lo permita. Como las superficies no son permanentes (a diferencia del cuaderno tradicional y el bolígrafo), los alumnos pierden el miedo a equivocarse y permite que aprendan de sus errores. Se utilizará un único rotulador o tiza por grupo, para que solo un alumno pueda escribir a la vez y evitar que

cada uno de los miembros del grupo trabaje por su cuenta, asegurándose de que las ideas de todos los integrantes es escuchada.

4. *Disposición del mobiliario*: Aunque es recomendable colocar el mobiliario de una forma no organizada y asimétrica para evitar el orden y la rigidez que no permitan fluir el pensamiento, al realizarse la actividad en el aula habitual, en el que se imparten más materias aparte de Matemáticas, invertir tiempo en desordenar y ordenar los pupitres no es viable. Por eso, los pupitres se mantendrán en la posición original, aunque no es un gran problema, pues la gran parte de la clase se desarrollará con los alumnos de pie, alejados de sus mesas.

   El espacio principal para trabajar serán las superficies verticales no permanentes, que estarán esparcidas por todas las paredes del aula, o donde estas se puedan colgar. Se intentará que estén lo suficientemente espaciadas las unas de las otras como para que cada grupo pueda trabajar de forma independiente, pero no lo suficientemente lejos, para que pueda fluir el conocimiento entre distintos grupos. De esta forma, se aprovecha la ventaja de compartir las ideas y razonamientos entre grupos, fomentando el debate, la argumentación y la justificación, además de mejorando los aspectos sociales del alumnado.

5. *Cómo responder a las preguntas*: Durante el tiempo en el que los alumnos trabajen en sus tareas, el profesor caminará por todo el aula para observar a los grupos. Es normal que los alumnos le pregunten al verle pasar, estas son las ya mencionadas preguntas de proximidad que el profesor debe evitar contestar. El profesor responderá únicamente a las preguntas para seguir pensando, y lo hará con otra pregunta que les guie en su razonamiento y nunca de forma directa, obstaculizando el proceso de pensar de los alumnos.

6. *Entrega de las tareas*: Las tareas se entregarán a los alumnos en los primeros cinco minutos de la clase, tras haber formado los grupos y realizado una activación de los conocimientos previos necesarios para dicha tarea mediante una introducción guionizada. Un ejemplo de esto se puede ver en el apartado de *Descripción de la propuesta* (Sección 3.9). La tarea se les entregará cuando estos estén ya de pie, en la zona de

trabajo de su grupo, preparados para empezar a realizarla. De esta forma se evitarán preguntas al profesor innecesarias. El modo de entrega de esta tarea será verbalmente, como una explicación y no limitándose a la lectura del enunciado. En el caso de las tareas secuenciales, las tareas se les darán según vaya necesitándolas cada grupo.

7. *Deberes*: No se tratarán de deberes como tal, pues estos no son obligatorios, sino más bien, de actividades de repaso opcionales para que los alumnos asienten sus conocimientos. Al final de cada sesión, se les entregará una hoja de ejercicios o se les recomendará algún ejercicio del libro de texto para que puedan comprobar si lo que han trabajado en grupo durante la sesión pueden hacerlo individualmente en su casa. En ningún caso se comprobará quien ha hecho los deberes ni se calificará su realización. Es importante que los alumnos conozcan dicha información.

8. *Fomento de la autonomía*: El papel del profesor será movilizar el conocimiento en el aula. Para ello puede hacer que distintos grupos se comuniquen, tanto para comparar soluciones que no coinciden y de esta forma fomentar el debate, como para mostrar a dos grupos con la misma solución y distintos procedimientos otra forma de llegar al resultado. Con esto se consigue poner en práctica la argumentación, justificación y sobre todo la autonomía de los alumnos al dejar de depender del profesor.

9. *Pistas y ampliaciones*: El profesor se encargará de mantener el flujo entre el desafío y la aptitud durante las tareas. Esto se consigue dando pistas a los grupos que se ven desbordados por la dificultad de la tarea, y ampliaciones a los grupos que encuentran aburrida la tarea por ser demasiado fácil. La elección de las pistas que se dan es una tarea crucial, pues no se trata de resolverles la tarea, sino de guiar su conocimiento hacia la forma en la que esta se resuelve. Esto se puede conseguir recordándoles estrategias que ya conocen. Por ejemplo, al resolver ecuaciones de segundo grado incompletas donde falta el término independiente, puede sugerirles extraer factor común, estrategia ya conocida, para acercarse a la solución.

10. *Consolidación de la lección*: Se tratará de consolidar la lección al final de la clase, revisando el trabajo de alguno de los grupos de forma conjunta. Es favorable que sea otro grupo quien lo explique, no el propio grupo del que se está revisando la tarea para

obligarles a pensar y entender lo que otros compañeros han hecho. En las sesiones en las que haya falta de tiempo, puede ser el propio profesor quien consolide la tarea, pero es recomendable que siempre sea a través del trabajo de uno de los grupos, para hacer que se sientan implicados y que vean que su trabajo es de utilidad.

11. *Cómo tomar apuntes*: Para la toma de apuntes no se utilizan los organizadores gráficos que Liljedahl sugiere. Los alumnos pueden tomar los apuntes que consideren en su cuaderno al terminar la sesión, contando siempre con el libro de texto para consultar y consolidar los conocimientos que han practicado. La toma de apuntes que propone el modelo *Thinking Classroom* requiere que los alumnos la practiquen durante cierto tiempo y no es de las primeras pautas en ser aplicadas que el autor sugiere.

12. *Qué evaluar*: La evaluación estará basada en competencias conforme a la ley vigente y se hará durante el desarrollo de la tarea, no al haberla finalizado. La evaluación se hará de manera verbal, dejando claro a los estudiantes los aspectos evaluables como la perseverancia, la colaboración y la actitud de trabajo. No se utilizarán rúbricas al considerar demasiado complicado para el profesor durante la tarea tomar notas escritas individuales de cada alumno a la vez que se gestiona el resto del aula.

13. *Evaluación formativa*: Se entregará un instrumento de autoevaluación a los alumnos en forma de tabla con los conocimientos del tema que deben saber y tres niveles distintos de dificultad para cada uno de ellos. De esta forma, los alumnos pueden saber donde están y a donde se dirigen en todo momento. Además, esta tabla puede utilizarse para sugerir ”deberes” a los alumnos para afianzar sus conocimientos.

14. *Cómo calificar*: El objetivo de la calificación en *Thinking Classroom* es restarle importancia a los exámenes y evitar a los alumnos el agobio que sufren al jugarse toda su nota en un solo día. Por ello, la calificación se realizará en torno a los criterios de evaluación de la Sección 3.10, considerando que si un alumno ha dominado un nivel, también ha dominado todos los anteriores. Se dará una puntuación de 2 puntos al nivel básico, 3 al intermedio y 4 al avanzado en cada uno de los contenidos evaluables.

3.9. Descripción de la propuesta

En esta sección se detalla la propuesta para la Unidad Didáctica de *Ecuaciones de primer y segundo grado* en 2º de la ESO, por sesiones de 50 minutos de duración. La propuesta cuenta con un total de 11 sesiones, aunque se le han añadido dos sesiones introductorias de actividades no curriculares para familiarizar a los alumnos con el modelo *Thinking Classroom* antes de comenzar con las tareas propias del currículo.

- *Sesiones 0*: Como se ha comentado, previo al comienzo de la Unidad Didáctica, se ha creído conveniente introducir a los estudiantes en el modelo de la propuesta. El principal motivo es que están acostumbrados a trabajar con una metodología tradicional, donde atienden las explicaciones del profesor desde sus pupitres sin apenas hablar con sus compañeros, y al final de la clase, individualmente, resuelven algún ejercicio imitando los procedimientos que el profesor ha utilizado ya.

  Estas sesiones son necesarias para que entiendan el cambio de paradigma. Se les hará ver la forma de trabajo, explicándoles que trabajarán por grupos de 3 estudiantes formados aleatoriamente en cada sesión. Se les hará salir de la zona de confort de sus pupitres para trabajar en las superficies verticales colocadas por todo el aula y se les explicarán los comportamientos a tener en cuenta para su evaluación, así como la colaboración, la perseverancia y la actitud hacia la tarea. También se les explicarán las normas durante el tiempo de trabajo, como que solo hay un instrumento para escribir por grupo y que deben mantenerse de pie durante la sesión.

  En este punto se corre el riesgo de que la clase se descontrole al sentir que ”ya no hay normas” por no tener que estar sentados en su sitio mirando hacia el profesor como están acostumbrados a hacer y por permitirse hablar con el resto de compañeros. Hay que recalcar que seguimos trabajando y que el objetivo de las sesiones sigue siendo el mismo, aprender matemáticas.

  Tras estas explicaciones acerca del modelo que se seguirá, se formarán los primeros grupos aleatorios y se les comentará verbalmente el enunciado de una tarea no curricular altamente atractiva para pensar. La tarea que realizarán en la primera sesión será encontrar tres números de tres cifras que al sumarlos den 999, teniendo la restricción de que los 3 números deben estar formados por las cifras del 1 al 9, utilizando una y solo una vez cada una de estas cifras. El enunciado completo de esta y del resto de tareas se puede encontrar en el Anexo de este trabajo. Es importante contar con posibles ampliaciones para la tarea, pues el objetivo no es llegar a una solución rápidamente y pasar a la siguiente tarea, sino sacarle provecho a esta tarea dándole más vueltas. Por ejemplo, se les puede pedir otra solución distinta o incluso preguntarles cuántas soluciones hay para resolver esta cuestión. Al finalizar la tarea, se revisará la solución de alguno de los grupos de manera conjunta, siendo otro grupo el que explique como han llegado a la solución.

Al tratarse de tareas no curriculares, no cuentan con ejercicios recomendados para practicar en casa, pues lo importante son los procesos de pensamiento y razonamiento que han empleado para resolver la tarea.

Si es posible, es recomendable contar con al menos otra sesión más de tarea no curricular. En este caso, se propone la tarea de descomponer el número 25 en sumandos, de forma que el producto de estos sumandos sea máximo. Como ya se ha comentado, es importante la forma en la que la tarea es entregada y no limitarse a leer el enunciado al pie de la letra. Una posible forma de introducirla es la siguiente:

Profesor: ¿Alguien me sabe decir como puedo descomponer el número 12 en dos sumandos?

Alumnos: 6+6

Profesor: ¿Y si multiplico esos dos sumandos entre sí, es decir, 6 por 6, qué numero obtengo?

Alumnos: 36

Profesor: Muy bien. ¿Alguna otra forma de descomponer el número 12 en sumandos?

Alumnos: 10+2

Profesor: ¿Y cuál es el producto de esos sumandos?

Alumnos: 10 por 2, es decir, 20.

Profesor: Genial. Pues os pido que averigüeis cuál es el producto máximo que puedo obtener al multiplicar los sumandos del número 25. Ah, el número se puede descomponer en más de dos sumandos.

Esta tarea permite varias ampliaciones. En primer lugar, no se les ha restringido que los números sean naturales, por lo que se les puede permitir explorar que pasaría si los sumandos son números racionales. Otra posible ampliación es ampliar los sumandos a los números enteros, permitiendo incluir números menores que 0. Lo importante es fomentar el pensamiento y el razonamiento para resolver la tarea y que los alumnos se sientan implicados y útiles dentro de su grupo.

- *Sesión 1*:

  Al comenzar la sesión se mencionará a los alumnos la Unidad Didáctica en la que estamos y se les entregará el instrumento de autoevaluación en forma de tabla con los conocimientos que deben saber y ejercicios para comprobar el dominio de dichos conocimientos en tres niveles de dificultad.

  La Unidad Didáctica previa a la de *Ecuaciones* es la de *Expresiones Algebraicas*, por lo que tras formar los grupos aleatorios, se les hará una breve introducción para activar los conocimientos previos y que refleje la principal diferencia entre las expresiones algebraicas y las igualdades, es decir, el signo igual que ahora conecta dos expresiones algebraicas equivalentes. Como consecuencia, mientras que en una expresión algebraica las variables pueden tomar cualquier valor, ahora el hecho de imponer que dicha expresión sea igual a otra, puede acotar el número de valores que pueden tomar las incógnitas.

  Dicho esto, comenzará la tarea, de la cual el objetivo es analizar distintas igualdades según el número de soluciones que estas tengan para llegar a una clasificación de las igualdades en identidades o ecuaciones. Esta es una tarea secuencial de las ya mencionadas, en las que se empieza por casos simples que van incrementando su dificultad. Es recomendable que la primera igualdad entregada sea una ecuación lineal de primer grado en el que la solución se vea *a ojo*, de forma que entiendan que solo tiene una posible solución. Esto se puede ir complicando, al pasar por ecuaciones con varias soluciones, con infinitas soluciones hasta llegar a las identidades.

Al acabar la sesión, se hará un resumen de los conceptos claves vistos, así como la clasificación de las igualdades y se les sugerirán ejercicios para practicar por su cuenta.

- *Sesión 2*:

  Se comienza la sesión recordando brevemente la clasificación de igualdades vista en la sesión anterior y se les dice que durante este tema nos centraremos mayoritariamente en las ecuaciones. Para ello se plantea una tarea manipulativa, que acerca la idea de ecuaciones a la de una balanza en equilibrio. Esta tarea forma parte del libro *Mathematics Tasks for the Thinking Classroom, Grades K–5*[30].

  Se trata de una tarea secuencial que muestra diversas balanzas en equilibrio, con objetos de peso conocido y animales de peso desconocido. El objetivo es calcular el peso de uno de los animales. La dificultad de estas balanzas es progresiva y de una forma concreta, sin entrar en lenguaje algebraico, los alumnos irán adquiriendo los procedimientos necesarios para resolver ecuaciones posteriormente.

Figura 3.1: Ecuación como balanza. Nivel básico

  Como ampliación para este ejercicio, se puede pedir a los alumnos representar con lenguaje algebraico la situación de la balanza, es decir, plantear la ecuación correspondiente. Al final de la sesión, se les entregará actividades similares para consolidar el conocimiento individualmente.

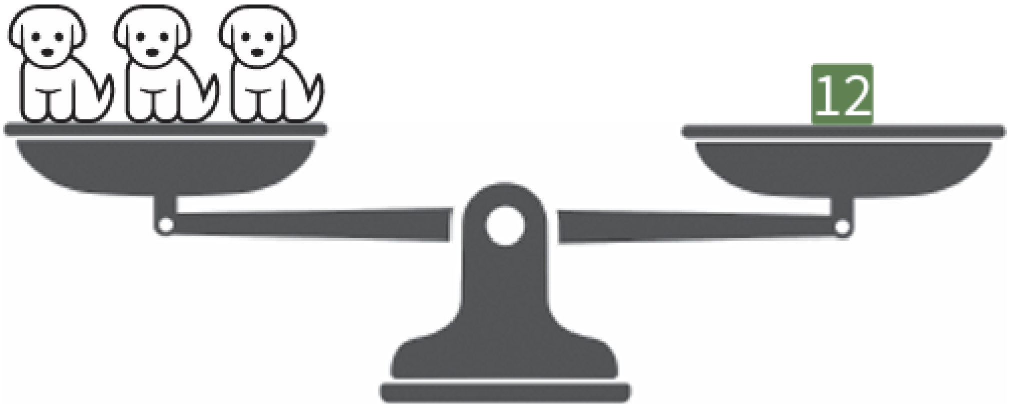

Figura 3.2: Ecuación como balanza. Nivel intermedio

Figura 3.3: Ecuación como balanza. Nivel avanzado

- *Sesión 3*:

  En esta sesión se seguirán trabajando las ecuaciones lineales de primer grado pero con un paso mayor de abstracción que en la sesión anterior. Para ello, se utilizará la Tarea 49 del libro *Mathematics Tasks for the Thinking Classroom, Grades K–5*[30].

  En esta tarea los alumnos deben adivinar el número en el que está pensando el profesor, dándoles este una pista como por ejemplo que si sumo a mi número 3.05, obtengo 12.56. Es importante que los números utilizados durante esta tarea tengan decimales que no les faciliten hacer la cuenta *a ojo*, de esta forma, lo que los alumnos practicarán y razonarán será el procedimiento de despejar la incógnita en función de las operaciones que están realizando los números. Previo a la tarea, se les recordará a los alumnos que deben trabajar como un equipo, ser paciente con el resto de integrantes y cooperar. Podrán utilizar una calculadora por grupo, de esta manera deberán escucharse unos a otros y trabajar como un equipo. El uso de la calculadora les facilitará centrarse en los procedimientos y razonamientos y no en problemas de cálculos.

Esta tarea se trata de nuevo de una tarea secuencial en el que el nivel de dificultad se va incrementando. Las primeras ecuaciones se resuelven en un solo paso, sumando o restando; las intermedias multiplicando o dividiendo; y por último ecuaciones en las que es necesario hacer dos pasos para resolverlas.

$$? - 9.34 = 12.93 \qquad \text{(Nivel básico)}$$
$$12.5 \div ? = 6.25 \qquad \text{(Nivel intermedio)}$$
$$? \times 0.1 + 0.9 = 2.98 \qquad \text{(Nivel avanzado)}$$

Cabe destacar que en esta tarea no se utilizan variables para nombrar las incógnitas, sino simplemente un signo de interrogación. De esta forma se mantienen una capa de abstracción por encima del lenguaje algebraico para facilitar su aterrizaje en él en la próxima sesión. Otro aspecto importante, es la comprobación de la validez de la solución. El profesor les pedirá que tras haber hallado la solución, comprueben que al sustituirla en la ecuación inicial, esta se verifica.

Entre la anterior tarea y la presente, los alumnos tienen oportunidad de entender las ecuaciones como una igualdad gracias a la balanza y de razonar los procedimientos para despejar ecuaciones a través del pensamiento. Estos procedimientos se consolidarán de manera más general más adelante, pero estas actividades permiten que sean ellos los que los deduzcan antes de que el profesor los explique.

Como en todas las sesiones, al finalizar se les dará ciertas tareas para poner a prueba individualmente los conocimientos practicados en la actividad.

- *Sesión 4*:

  En esta sesión se comenzará mezclando las ideas vistas en las dos sesiones anteriores con el objetivo de que los alumnos acaben deduciendo la *Regla de la suma y del producto*. Es probable que algunos alumnos recuerden del curso anterior trucos como ”lo que está sumando pasa restando”, pero antes de llegar a ese punto de atajar usando una regla mnemotécnica, deben entender el por qué de esto. Para ello, es necesario entender la ecuación como una igualdad (o una balanza) en la que para mantener el equilibrio entre un lado y otro, debo hacer la misma operación en ambos lados.

Durante esta sesión, de forma secuencial, los alumnos deberán utilizar el lenguaje algebraico para resolver ecuaciones indicando en cada paso la operación que se hace en ambos lados de la igualdad para ir despejando. Por ejemplo:

$$x + 1 = 7 \tag{3.1}$$

Restando 1 a ambos lados de la igualdad, para mantener expresiones algebraicas equivalentes (y mantener el equilibrio de la balanza):

$$x + 1 - 1 = 7 - 1 \tag{3.2}$$

Este paso intermedio es el punto clave de esta sesión, por lo que es recomendable que lo escriban. No se trata de pensar ”el 1 pasa restando al otro lado”, sino de entender que puedo restar 1 a ambos lados de la ecuación porque se sigue manteniendo la igualdad hasta llegar a una expresión del tipo *x igual a algo*.

$$x = 6 \tag{3.3}$$

- *Sesión 5*:

  Ahora que los alumnos ya conocen los procedimientos básicos para resolver ecuaciones, se pueden incluir expresiones algebraicas más complejas que incluyan denominadores y paréntesis. En esta sesión, deberán resolver ecuaciones de manera secuencial y con dificultad progresiva.

Para resolver estas ecuaciones deben utilizar herramientas ya conocidas como expresar fracciones con denominador común, o la propiedad distributiva para deshacer paréntesis. Todo esto se ha utilizado en la Unidad Didáctica anterior, *Expresiones algebraicas* y los estudiantes deben ser capaces de, partiendo de ecuaciones más sencillas, deducir los procedimientos para resolver ecuaciones más complejas.

- *Sesión 6*:

  Uno de los objetivos de esta propuesta es la aplicación de las ecuaciones para resolver problemas de la vida cotidiana mediante la modelización de estas. En esta sesión, de forma secuencial y en grupos aleatorios, deberán utilizar los procedimientos aprendidos en las sesiones anteriores para encontrar la solución de diversos problemas.

  En esta sesión, el profesor debe hacerles ver la importancia de verificar la validez de la solución hallada, viendo que esta cumple las suposiciones iniciales del problema, y en caso de que no lo haga, volver atrás sobre sus pasos para encontrar el error y aprender de él.

- *Sesión 7*:

  En esta sesión se comenzarán a trabajar las ecuaciones de segundo grado. Antes de resolver las ecuaciones de segundo grado completas, las cuáles necesitan el uso de una fórmula difícil de deducir y que les será facilitada, se resolverá ecuaciones de segundo grado incompletas, las cuales pueden resolver con las herramientas que ya conocen.

  De nuevo se trabajará por grupos aleatorios y de forma secuencial. Se comenzará resolviendo ecuaciones del tipo:

$$x^2 = c \tag{3.4}$$

Estas ecuaciones se irán complicando al contar el término de grado 2 con un coeficiente distinto de 1. De estas ecuaciones, los alumnos ya pueden deducir que cuentan con más de una solución.

Más tarde, se pasará a las ecuaciones de segundo grado del tipo:

$$ax^2 + bx = 0 \tag{3.5}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse sacando factor común, sin necesidad de utilizar la fórmula de las ecuaciones de segundo grado. De esta manera, los alumnos se familiarizan con casos particulares de las ecuaciones de grado 2, donde deducen el método para resolverlas sin conocer la fórmula completa.

- *Sesión 8*:

  Se comienza la clase recordando los dos tipos de ecuaciones de segundo grado que vieron en la sesión anterior y presentandoles la forma general de una ecuación de segundo grado:

  $$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.6}$$

  Se les demuestra como las ecuaciones que vieron el día anterior son casos particulares de estas donde *b* o *c* valen 0. Pueden reflexionar sobre qué ocurre si es el coeficiente *a* el que vale 0. Posteriormente se les muestra la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado completas.

  Por grupos, resolverán distintas ecuaciones de segundo grado cumpliendo todos los casos en los que el discriminante sea positivo, igual a 0 o negativo. Uno de los objetivos de esta sesión es que razonen sobre el número de soluciones que puede tener una ecuación de segundo grado, y en función de qué este número varía. De esta manera, la sesión no se limita a reproducir una fórmula marcada.

- *Sesión 9*:

  Durante esta sesión, siguiendo con el formato empleado en las anteriores clases, se empezará recordando lo visto en sesiones anteriores y formando grupos aleatorios de trabajo. Una vez que los alumnos ya han utilizado herramientas para resolver ecuaciones de segundo grado, deberán emplearlas para dar con la solución de problemas de la vida cotidiana.

  De forma secuencial y con dificultad creciente, se les hará trabajar en problemas que requieran utilizar ecuaciones de segundo grado para llegar a la solución. El profesor debe recordarles que hay que comprobar si la solución es correcta viendo si cumple las condiciones del enunciado, y además, ver si tiene sentido en el contexto del problema (por ejemplo, no podemos obtener longitudes negativas).

  Al finalizar la sesión, se revisará algún problema de alguno de los grupos de forma conjunta para consolidar lo visto, y se les propondrán problemas para practicar individualmente y autoevaluarse.

- *Sesión 10*:

  Esta sesión servirá a modo de resumen o repaso de todos los contenidos vistos. En ella se incidirá en lo que el profesor vea que los alumnos tengan mayor problema.

- *Sesión 11:*

  Para finalizar la propuesta, se realizará un examen relacionado con el contenido visto en clase en caso de que las condiciones de evaluación generales del curso lo permitan.

3.10. Evaluación

En esta sección se detallan los criterios de evaluación de la propuesta. Como ya se ha mencionado, el modelo *Thinking Classroom* intenta reducir el estrés y la ansiedad matemática que supone para los estudiantes jugarse toda su calificación en un único examen, por lo que su calificación estará constituida por observaciones diarias que el profesor recogerá, tanto en el tiempo en el que trabajen en las tareas como en posibles entregas que los alumnos le hagan de los deberes opcionales, a mayores de un examen final. En el examen se incluirán ejercicios de los tres niveles (básico, intermedio y avanzado) para cada objetivo del tema, de forma que si los estudiantes dominan un nivel, se asume que dominan los anteriores.

La ley vigente relaciona cada una de las competencias específicas con unos determinados criterios de evaluación. En la Tabla 3.1 se muestra la relación de cada uno de los objetivos de la propuesta con los criterios de evaluación de la LOMLOE.

Objetivos de la propuesta	**Criterios de evaluación**
Conocer el concepto de igualdad y diferenciar entre identidades y ecuaciones	3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones y propiedades. 8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos.
Ser capaz de resolver ecuaciones de primer grado lineales	5.2 Identificar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas. 8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos.

Reconocer ecuaciones de segundo grado completas e incompletas y ser capaz de resolverlas	5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas apreciando un todo coherente.
	5.2 Identificar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas. 8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos.
Interpretar y resolver problemas en situaciones cotidianas mediante el uso de ecuaciones de primer y segundo grado	1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana extrayendo los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. 1.2 Aplicar algunas herramientas sencillas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. 1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema por métodos sencillos activando los conocimientos necesarios.
	4.1 Organizar datos y descomponer un problema en partes más simples identificando los datos y los resultados de cada una de las partes

	4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando algoritmos.
Comprobar la validez de las soluciones tanto en ecuaciones como en problemas contextualizados	2.1 Comprobar, de forma guiada, la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios. 2.2 Comprobar, de manera guiada, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, conociendo el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas
Mantener una actitud positiva de trabajo asimilando el error como parte del aprendizaje	9.1 Reconocer las emociones propias, valorar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. 9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje planteadas.
Trabajar en equipo respetando a los compañeros	10.1 Colaborar activamente y construir relaciones con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y pensando de forma creativa.

	10.2 Participar en las tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado.

Tabla 3.1: Relación entre objetivos y criterios de evaluación

Por otro lado, el docente dispondrá de una rúbrica de evaluación para cada alumno en la que toma anotaciones según el modelo de Liljedahl para cada uno de los objetivos marcados en cada uno de los niveles como la que muestra la Tabla 3.2.

El profesor rellenará esta rúbrica con el siguiente código para cada alumno:

- ✓ Preguntas que se han intentado responder y se han respondido correctamente.
- **S** Preguntas que se han intentado responder y se han respondido correctamente en su mayoría, pero con algún error tonto.
- **H** Preguntas que se han intentado responder y se han respondido correctamente con la ayuda del profesor o algún compañero.
- **G** Preguntas que se han respondido correctamente dentro de un grupo de colaboración.
- ✗ Preguntas que se han intentado responder y se han respondido incorrectamente.
- **N** Preguntas que no se han intentado responder.

Si el alumno ha respondido correctamente las últimas observaciones de un objetivo para un nivel, habrá completado ese nivel y todos los anteriores. No importa que las primeras observaciones sean negativas, lo relevante es el resultado final, no los fallos cometidos al comenzar a trabajar. El nivel básico aporta 2 puntos al alumno, el intermedio 3 y el avanzado 4. Con estas puntuaciones y de forma ponderada se obtiene la calificación final del estudiante.

Objetivos	Básico	Intermedio	Avanzado	Puntuación
Conocer el concepto de igualdad y diferenciar entre identidades y ecuaciones				
Ser capaz de resolver ecuaciones de primer grado lineales				
Reconocer ecuaciones de segundo grado completas e incompletas y ser capaz de resolverlas				
Interpretar y resolver problemas en situaciones cotidianas mediante el uso de ecuaciones de primer y segundo grado				
Comprobar la validez de las soluciones tanto en ecuaciones como en problemas contextualizados				
Mantener una actitud positiva de trabajo asimilando el error como parte del aprendizaje				
Trabajar en equipo respetando a los compañeros				

Tabla 3.2: Rúbrica de evaluación

Capítulo 4

Desarrollo de la intervención

Parte de la propuesta descrita en el capítulo anterior se ha implementado en un Instituto de Enseñanza Secundaria durante el periodo de prácticas de este Máster. El modelo se implementó en el curso de 2º de la ESO para la Unidad Didáctica de *Ecuaciones de Primer y Segundo Grado*.

4.1. Contexto del centro

El centro en el que se llevó a cabo la propuesta es un instituto público de educación secundaria ubicado en Valladolid, gestionado por la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. El edificio está dividido en cuatro pabellones interconectados y en él se imparten las enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos de Administración y Gestión, tanto en régimen diurno como nocturno.

El edificio cuenta con 42 aulas para impartir enseñanzas teóricas y prácticas, parte de ellas con proyector y pizarra digital, además de aulas específicas para materias como cuatro aulas de Informática, tres de Tecnología, dos de Plástica, tres de Audiovisuales y dos de Música. Cuenta además con cuatro laboratorios, instalaciones deportivas (gimnasio cubierto con vestuarios y duchas, dos pistas deportivas y dos patios con zonas ajardinadas), biblioteca, salón de actos y despachos para los órganos administrativos (Dirección, Jefatura de Estudios, Administración y Departamentos).

El centro cuenta con algunos Planes que describen el funcionamiento de este en determinados aspectos. El Plan de Fomento de la Lectura tiene como propósito mejorar y consolidar hábitos lectores en los alumnos, por lo que todos los días, 25 minutos del horario lectivo se dedican a que estos puedan leer. El Plan de Convivencia detalla el funcionamiento del Centro para resolver conflictos, destacando el diálogo y el respeto. El Plan de Absentismo Escolar detalla el protocolo para prevenir y resolver los casos de faltas en el centro, llevando un seguimiento exhaustivo de faltas y comunicando a los padres o tutores en caso de ser necesario. El Plan TIC contempla actuaciones para integrar, aplicar y fomentar el uso innovador de las tecnologías en la acción docente.

El instituto participa en numerosas actividades extraescolares y proyectos internos entre los que destacan: participación en los Juegos Escolares Municipales con equipos de fútbol-sala, baloncesto y voleibol; grupo de teatro escolar acogido a las Aulas de Arte del Ayuntamiento; revista anual del centro, escrita y organizada por los alumnos; o intercambios culturales con Estados Unidos y Francia.

Al situarse en pleno centro de Valladolid, acuden a este instituto alumnos de diversos marcos socioculturales, dotando al centro de una característica heterogeneidad y pluralidad que enriquecen la convivencia. Destaca una distribución poco uniforme de la cantidad de alumnos en los cursos de Bachillerato respecto a la ESO. Esto se ve reflejado en el número de líneas que hay en cada curso: mientras que en los cursos de Secundaria existen cinco líneas, aumentan a siete en los cursos de Bachillerato. Los alumnos de los primeros cursos de secundaria provienen principalmente de Colegios de Primaria adscritos al centro, mientras que aproximadamente la mitad de los alumnos del primer curso de Bachillerato proviene de centros privados o concertados. Es escaso el número de alumnos inmigrantes y muy escaso el de alumnos con necesidades educativas especiales o con necesidad de compensación educativa.

Respecto al Departamento de Matemáticas, este está compuesto por un total de 12 miembros (entre profesores con plaza fija e interinos), quienes se encargan de la enseñanza de diferentes materias relacionadas con las matemáticas. No existe ningún acuerdo estricto establecido en la forma de diseñar e impartir las clases. Cada docente tiene libertad de cátedra para elegir sus recursos y aplicar las metodologías según sus criterios y la realidad de sus grupos, aunque a nivel general, destaca la clase magistral participativa. El uso de la tecnología o material innovador no es muy frecuente en las aulas, optando más por una enseñanza tradicional.

4.2. Puesta en práctica

En las secciones anteriores se ha descrito detalladamente la propuesta basada en el modelo *Thinking Classroom* para la unidad de Ecuaciones de 2º de la ESO. Como ya se ha comentado, esta implementación no pudo ser completa debido a restricciones de tiempo, retrasos y un cambio radical en la metodología de los estudiantes, acostumbrados a clases magistrales. A continuación se presenta en qué grado se han cumplido las pautas de Liljedahl para formar Aulas de Pensamiento y cuáles de las sesiones descritas anteriormente se implementaron.

- Los alumnos trabajaron en tareas no curriculares y en tareas que siguen un guion, acorde al plan inicial.
- Las tareas se desarrollaron en grupos aleatorios, formados en el momento mediante el uso de una baraja española de cartas, de entre 3 y 4 personas.
- El trabajo de las tareas se realizó en superficies verticales y algunas horizontales, al no disponer de suficiente espacio a pesar de aprovechar la pizarra de tiza y la digital de la que disponían en el aula.
- El mobiliario no se cambió de sitio ya que fueron ellos los que cambiaron su zona de trabajo a distintas zonas de la clase.
- Las tareas fueron entregadas al comienzo de la sesión, de forma verbal y una vez que los grupos ya estaban en sus zonas de trabajo.

- Después de las sesiones en las que se trabajaron tareas con contenidos de la unidad, se les sugirió algunos ejercicios para que se autoevaluen en casa, dejándoles claro que estos no eran obligatorios.

- Se asignaron pistas y ampliaciones a los distintos grupos en función de la dificultad que encontraron para realizar la tarea, intentando mantener el flujo.

- Se consolidó la lección al final de la clase sobre el trabajo de uno de los grupos.

- No se aplicaron técnicas de toma de apuntes ni de evaluación ni calificación, ya que no se llegó a calificar dicha Unidad Didáctica al quedar inacabada.

La asignatura de Matemáticas en 2º de la ESO en el Núñez de Arce cuenta con 4 horas semanales, por lo que llevaría unas 3 semanas realizar la propuesta completa. Para su implementación únicamente se contó con 5 sesiones, y se realizaron las actividades descritas a continuación.

- *Sesiones 1 y 2*:

  Durante las dos primeras sesiones se optó por hacer tareas no curriculares altamente atractivas para pensar. Liljedahl recomienda dedicar el primer mes de curso a estas tareas antes de intentar trabajar con tareas con contenidos propios del currículo para que los alumnos se adapten al nuevo modelo de clase. A falta de tiempo, se le dedicó dos sesiones.

  Se comenzó la primera sesión explicándoles como trabajaríamos durante los siguientes días y se formaron los grupos aleatorios. En la primera sesión se realizó la tarea de la suma de 3 números de 3 cifras que sumen 999. Los alumnos mostraban especial interés en ser los primeros en acabar la tarea comparándose constantemente con los otros grupos y reclamando al profesor para mostrarle todos sus avances o preguntarle si lo que habían hecho estaba bien. Se les insistió en que no se trataba de una competición, y que no era importante acabar los primeros sino llegar a la solución utilizando métodos razonados.

La diferencia entre grupos también se notó desde el primer momento, pues mientras algunos acabaron rápidamente otros encontraron problemas para afrontar la tarea. Por suerte esta tarea cuenta con ampliaciones como calcular cuantas soluciones posibles se pueden encontrar. Por lo general, los alumnos mostraron rechazo a las ampliaciones, porque según decían, ya habían acabado la tarea y otros grupos no la tenían hecha todavía asique no era justo que trabajaran más.

En la segunda sesión se realizó otra tarea no curricular, la ya mencionada en la descripción de la propuesta, en la que los alumnos deben descomponer un número en sumandos de forma que el producto sea máximo. De forma similar a la anterior, los estudiantes intentaban terminarla lo más rápido posible para mostrarle al profesor que habían sido los primeros. Esta tarea les llevó más tiempo, y se les amplió pidiendoles explorar que pasaría si permitimos que los sumandos sean números decimales.

Tras estas tareas no hubo deberes opcionales para fijar los contenidos, pues se trataban de tareas no curriculares.

- *Sesión 3*:

  En esta sesión se comenzó la Unidad Didáctica en sí, con la tarea de analizar diferentes igualdades para llegar a clasificarlas según el número de soluciones que tienen. En esta tarea se notó a los alumnos más centrados por tratarse de algo que relacionaban más directamente con la asignatura a la que ellos estaban acostumbrados. Tal y como dijeron ”esto si que es de *mates*”. El problema que ya se detecta aquí pero que se abordará en la el apartado *Resultados de aprendizaje* (Sección 4.3), es que los alumnos no relacionan los procesos de pensar y razonar y la propia competencia matemática en sí con los contenidos evaluables.

  Durante esta tarea secuencial, se vio claramente la diferencia entre las velocidades de cada grupo, pero el modelo *Thinking Classroom* se adapta a estas. Hay que pensar que en un modelo tradicional, todos los alumnos deben adaptarse al ritmo fijado por el profesor, quedándose algunos rezagados y sintiendo otros aburrimiento. De esta forma, cada grupo puede avanzar a su propio ritmo.

  El trabajo en grupo funcionó mejor que en las tareas anteriores, apreciándose colaboración entre los miembros del equipo, aunque en otros casos fue necesario recordarles que eran un grupo y que debían trabajar juntos, no cada uno por su cuenta o permitir que uno hiciera todo el trabajo.

Al finalizar la sesión, se les sugirió una serie de ejercicios para poner en práctica la clasificación entre ecuaciones e identidades.

- *Sesión 4*:

  Durante esta sesión se realizó la Tarea 48 del libro de tareas de Liljedahl, para introducir las ecuaciones de manera concreta, mediante la comparación con balanzas en equilibrio. En esta tarea se pudo comprobar la importancia del progreso en la dificultad de las subtareas, pues al pasar de un nivel de dificultad a otro, los alumnos relacionaban las técnicas empleadas del nivel anterior. La gran mayoría de ellos no tuvo problema en ir adaptando la balanza dada a una ecuación equivalente en el lenguaje algebraico.

  Al terminar la tarea se les entregó una fotocopia con algunas balanzas para practicar por su cuenta. Dichos ejercicios de autoevaluación, se incluyen en el propio libro de tareas de Liljedahl.

- *Sesión 5*:

  En esta sesión, se acercó el concepto de ecuación mediante la Tarea 49 de Liljedahl, de adivinar el número en el que se estaba pensando mediante relaciones con números decimales. Si bien en la anterior tarea los alumnos no tuvieron tanto problema, esta les resultó más complicada al dar un paso más de abstracción. El hecho de que las relaciones entre las ecuaciones estuvieran hechas con decimales, les dificultaba sacarlas ”a ojo” y de esta manera se conseguía prestar atención a los razonamientos para resolver las ecuaciones.

  Algo destacable es que a la hora de resolver las ecuaciones, algunos alumnos se negaban a abandonar la idea que ya tenían de ”lo que está dividiendo pasa multiplicando” a pesar de que no lo sabían utilizar bien, ya que encontraban problemas cuando la incógnita es la que divide a otro número. Por eso, se les pidió que se olvidaran de esos trucos de momento, ya que son reglas mnemotécnicas para atajar pero

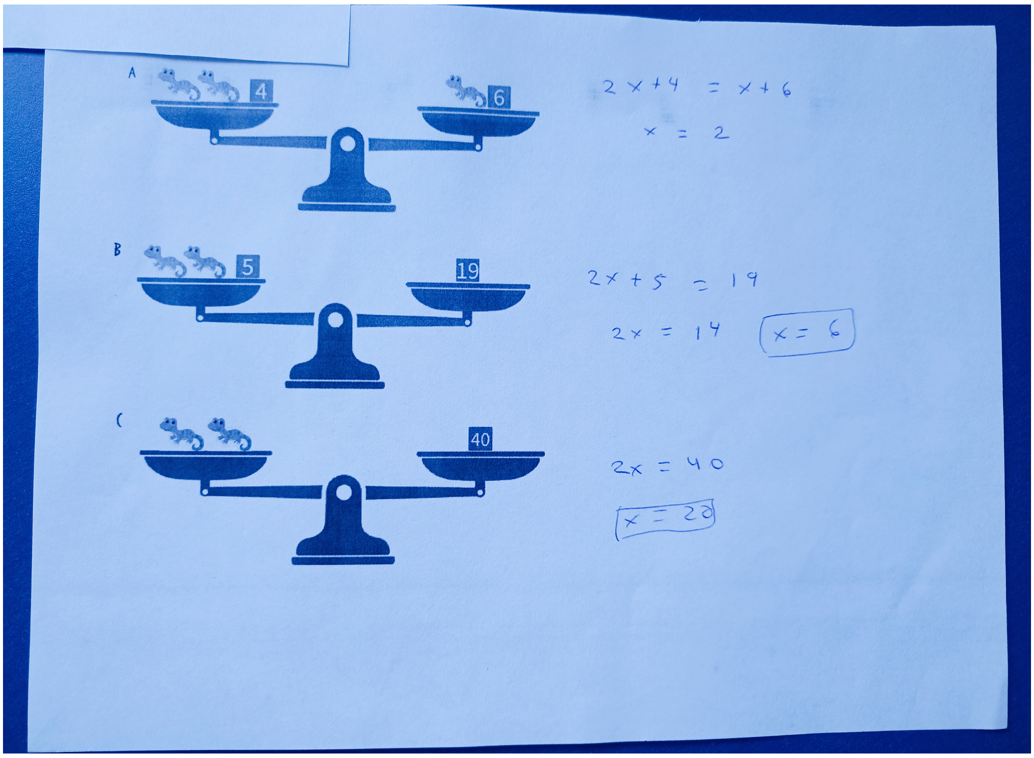

Figura 4.1: Fotocopia Sesión 4 (1) [31]

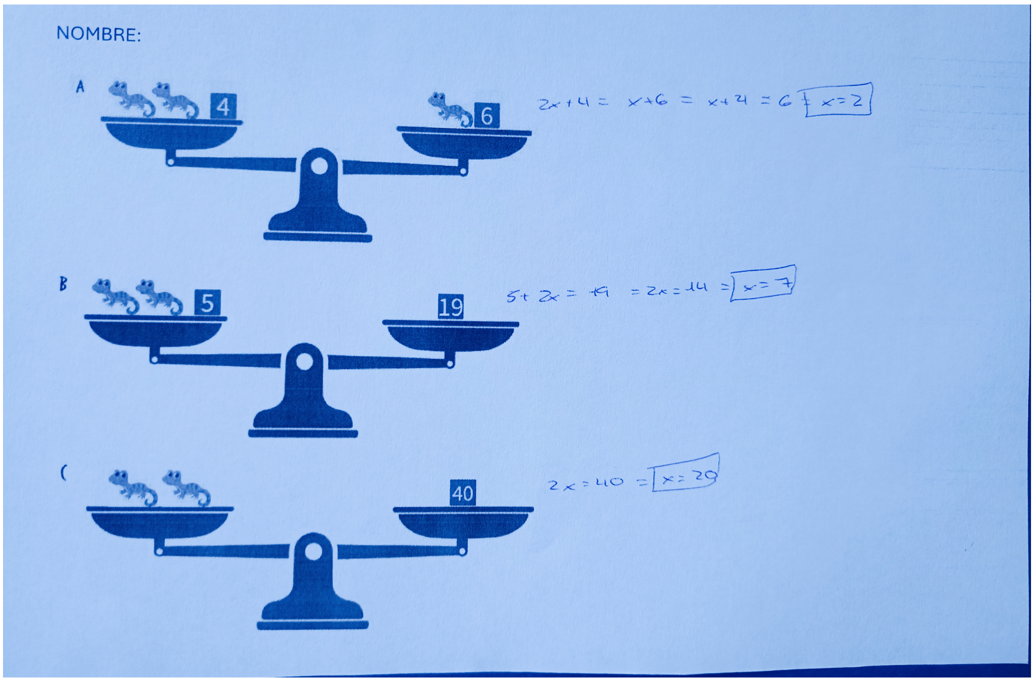

Figura 4.2: Fotocopia Sesión 4 (2) [31]

que no fomentan el pensamiento. Además, se les insistió en comprobar los resultados antes de pasar a la siguiente ecuación para verificar que la solución era válida.

Durante esta clase me di cuenta de que a nivel general, el trabajo en equipo, la colaboración y el respeto dentro de un grupo y entre grupos había mejorado desde la primera sesión. Los alumnos ya no tenían prisa por acabar la tarea los primeros, porque sabían que iba a haber más, asique se centraban en tratar de resolver las ecuaciones de forma correcta y razonando el proceso. También dejaron de perder tiempo comparando el avance de otros grupos y llegaron a comunicarse entre ellos para explicarse razonamientos unos a otros.

De nuevo se les entregó una fotocopia de autoevaluación para consolidar la tarea. A pesar de ser opcional, casi todos los alumnos la entregaron, no sé hasta que punto lo hicieron porque verdaderamente querían saber el nivel en el que habían entendido la tarea, o porque están acostumbrados a que cuando les entregas unos ejercicios, debes mostrarle al profesor que estos se han realizado.

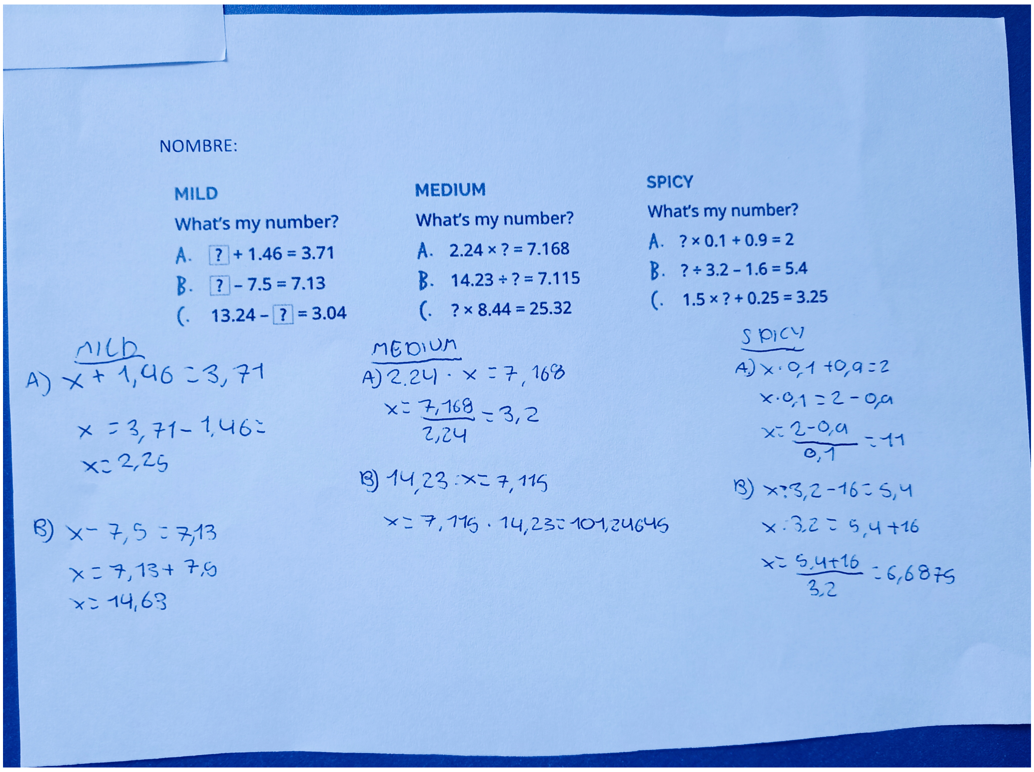

Figura 4.3: Fotocopia Sesión 5 (1) [31]

En la siguiente sección se extraen los resultados obtenidos durante la implementación parcial que se ha realizado y se reflexiona sobre las actitudes o cambios manifestados en los estudiantes durante la puesta en práctica de esta.

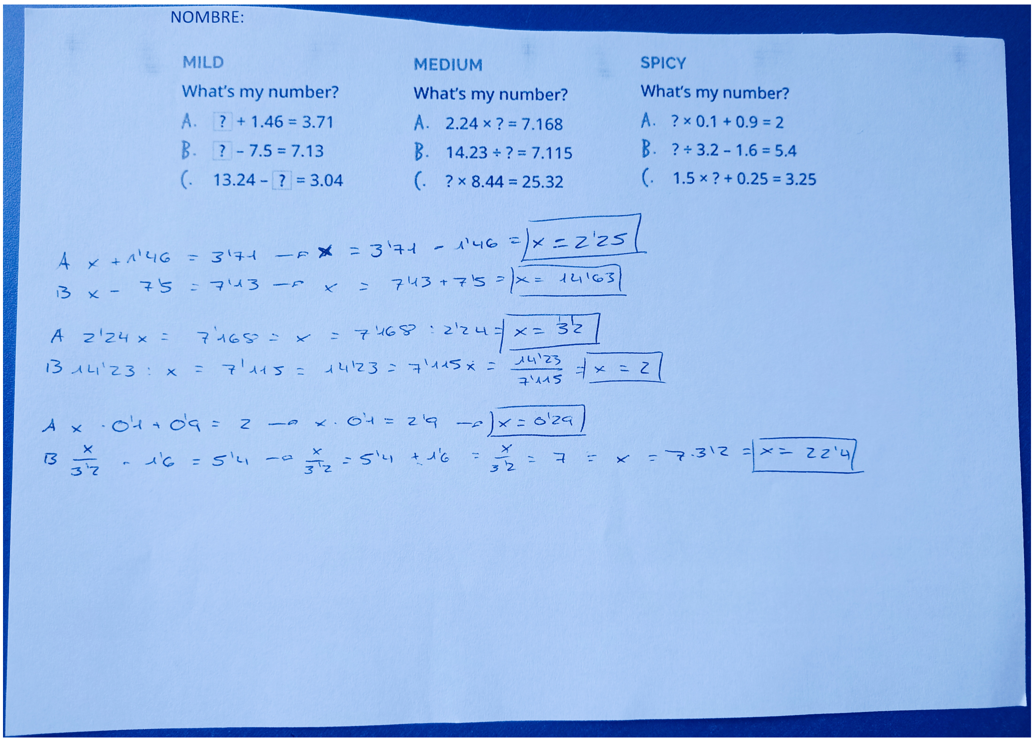

Figura 4.4: Fotocopia Sesión 5 (2) [31]

4.3. Resultados de aprendizaje

A pesar de no haber podido implementar la propuesta completa y solo haber intervenido durante cinco sesiones, a continuación se trata de analizar algunos hechos observados durante este periodo y su implicación en el aprendizaje de las matemáticas.

En primer lugar, respecto a los agrupamientos aleatorios, es cierto que los alumnos al principio querían ser ellos mismos los que eligieran con quien estaban en los grupos. Sin embargo, al final de la implementación, al evaluar el modelo verbalmente, reconocieron que les gustó el hecho de que los grupos fueran aleatorios, destacando la emoción de no saber con quien les iba a tocar cada día y la posibilidad de acabar trabajando con gente con la que no solían hacerlo. Este cambio de actitud pone de manifiesto una evolución positiva en el sentido socioafectivo del alumnado, favoreciendo la cooperación, el respeto y la comunicación entre iguales. En este sentido, el modelo de Liljedahl demuestra ser una herramienta clave para potenciar los factores de socialización en el alumnado durante las sesiones de matemáticas.

Otro aspecto a comentar es el hecho de que los alumnos solo relacionen las matemáticas con los contenidos curricularesº y no con los procesos como el razonamiento o el pensamiento. En las primeras sesiones, al trabajar en tareas no curriculares, sentían que eso eran juegos que no tenían que ver con las matemáticas en sí, por eso, al comenzar a ver ecuaciones uno de los alumnos destacó que "*eso si que eran matemáticas*". Este comentario, muestra la necesidad de incidir, tal como plantea la LOMLOE, en enfoques que integren los procesos matemáticos más allá del contenido, utilizando tareas no convencionales que activen el pensamiento matemático y permitan trabajar procesos como la argumentación.

Respecto a las tareas para practicar en casa después de las sesiones, prácticamente todos los alumnos las hicieron a pesar de no ser estas obligatorias. Sería muy optimista pensar que fue debido a que al no sentir presión por tener que hacerlas, ya que no iban a ser revisadas, entendieron que era una buena forma de consolidar sus conocimientos. En mi opinión, los alumnos estaban tan acostumbrados a entregar los deberes y a que estos contaran para su calificación, que sentían que de alguna forma, esta deberían seguir haciéndose, ya que insistían en entregármelos para que viera que estaban hechos.

Una gran ventaja del modelo de *Thinking Classroom* es la adaptabilidad a los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos. Desde la primera sesión, se podía ver la diferencia entre grupos a la hora de realizar la tarea. Lo bueno de este modelo, es que permite adaptarse a todos los ritmos, ofreciendo ampliaciones a los grupos más avanzados y pistas cuando sean necesarias a los grupos que se encuentran atascados en la realización de la tarea. Esta flexibilidad favorece la equidad y la inclusión, y contribuye al desarrollo de la competencia matemática al respetar los tiempos y procesos de cada alumno, en línea con lo que promueve la LOMLOE.

Un aspecto que me llamó la atención desde la primera sesión era el hecho de que los alumnos tenían prisa por llegar a la solución de la tarea y enseñársela hecha al profesor cuanto antes. No les importaba el procedimiento y si se les pedía comprobar o se les sugería ampliaciones, perdían el interés, pues la tarea ya estaba hecha y para ellos eso era lo importante. Después de varias sesiones insistiendo, acabaron por ver que por mucho que corrieran en acabarla, no se iba a valorar mejor el acabar antes, sino el proceso de realización de esta. Estos pequeños avances apuntan a una progresiva interiorización del valor del razonamiento matemático, uno de los pilares de la competencia matemática en el marco legislativo actual.

Creo que si se piensa aplicar este modelo, es importante realizarlo desde el principio del curso y de forma gradual para que los alumnos se adapten mejor a él. En tan solo cinco sesiones implementadas no se han podido observar grandes cambios en el comportamiento del alumnado, pero sí pequeños momentos que sugieren la potencia del modelo tanto en el sentido socioafectivo de los alumnos como en su autonomía. Todo ello refuerza la idoneidad de este enfoque para contribuir a los objetivos establecidos por la LOMLOE en torno a una enseñanza de las matemáticas más competencial e inclusiva.

Capítulo 5

Conclusiones

El presente Trabajo de Fin de Máster ha tenido como objetivo explorar el potencial del modelo *Thinking Classroom* en la enseñanza de las ecuaciones de primer y segundo grado en un aula de 2º de ESO. Esta propuesta nace de la necesidad de promover un aprendizaje significativo que supere la tradicional enseñanza basada en la memorización y ofreciendo mayor autonomía al alumnado en su proceso de aprendizaje.

La aplicación parcial de la propuesta durante el periodo de prácticas ha permitido obtener algunas observaciones que confirman premisas teóricas en las que se fundamenta el modelo de Peter Liljedahl. En primer lugar, se ha observado un impacto positivo en la dinámica social del aula, especialmente gracias a los agrupamientos aleatorios que mejoraron la cohesión grupal.

Otro aspecto destacable fue el hecho de ampliar la visión de lo que significa hacer matemáticas para los alumnos. Al principio, estos tendían a relacionar la asignatura con contenidos curriculares concretos, sin valorar suficientemente los procesos de razonamiento y pensamiento matemático. Sin embargo este modelo permite reconocer la importancia de estas habilidades, especialmente en las tareas no curriculares, y sugiere un cambio en la percepción de los alumnos que podría llegar a darse al continuar con dicho modelo durante más tiempo.

También se identificó uno de los grandes retos del modelo: la mentalidad de una educación orientada al producto y no al proceso. Muchos alumnos mostraban una tendencia a priorizar la rapidez de obtener resultados frente a la calidad del proceso. Sin embargo, con la insistencia y la práctica, se comenzaron a dar pasos hacia una valoración más profunda del razonamiento.

A pesar de la brevedad de la implementación, se han observado indicios prometedores de mejora tanto en el ámbito cognitivo como en el socioafectivo, que podrían llegar a potenciarse con una implementación prolongada del modelo. A continuación, se consideran líneas de futuro trabajo sobre esta propuesta para realizar una evaluación más rigurosa de su impacto a largo plazo.

La principal mejora es ampliar el tiempo de la implementación para permitir a los alumnos una adaptación gradual al modelo y extender la propuesta a otros bloques y sentidos matemáticos. Otro aspecto importante a mejorar es la aplicación del resto de pautas del modelo que no han sido implementadas como la toma de apuntes, la evaluación o la calificación durante todo el curso. Para un análisis más profundo, se podrían incluir recogidas de datos mediante cuestionarios o entrevistas que midan de forma específica la motivación, el autoconcepto matemático o las habilidades de razonamiento.

Por último, cabe destacar que a pesar de todas las ventajas que el modelo supone, este presenta también un gran esfuerzo para el docente que lo lleve a cabo. Aspectos como la evaluación o la calificación suponen estar atento del comportamiento y la evolución de todos los alumnos durante las sesiones, a la vez que se proporcionan pistas, ampliaciones y se trata de movilizar el conocimiento entre grupos. El modelo presenta un cambio muy grande respecto a la enseñanza tradicional, pero sus ventajas también son notables.

En definitiva, el modelo Thinking Classroom es una herramienta poderosa para transformar la enseñanza de las matemáticas, favoreciendo el desarrollo cognitivo y el sentido socioafectivo del alumnado. Este TFM constituye un primer paso en dicha dirección e invita a seguir investigando, adaptando y enriqueciendo la práctica docente desde una visión más humana y significativa.

Capítulo 6

Anexos

La suma 999

Encuentra tres números de tres cifras cuya suma sea 999. Estos tres números deben estar compuestos por los números del 1 al 9 de forma que cada cifra se utilice exactamente una vez (Figura 6.1).

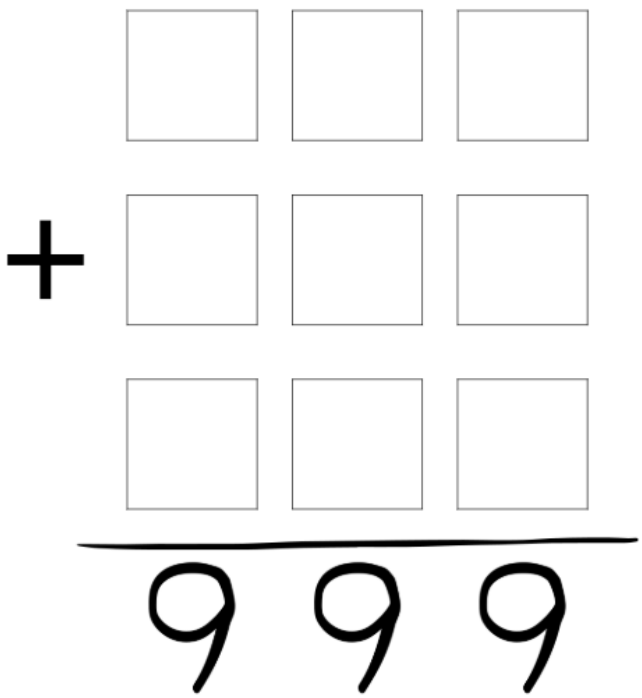

Figura 6.1: Tarea. Suma 999

Producto máximo de sumandos

Encuentra la descomposición en sumandos del número 25 que maximice el producto de estos.

Ecuaciones de primer grado. Secuencial

1. $2x + 3 = 11$
2. $5x - 4 = 16$
3. $2(x + 3) = 14$
4. $3(x - 2) + 4 = 10$
5. $\frac{x}{2} + 3 = 7$
6. $\frac{2x - 1}{3} = 5$
7. $\frac{1}{2}(x + 4) = 6$
8. $\frac{3(x - 1)}{4} + 2 = 5$
9. $\frac{2(x + 3)}{5} - \frac{x - 1}{2} = \frac{3}{2}$
10. $\frac{3(x - 2)}{4} + \frac{2(x + 1)}{3} = \frac{5x + 7}{6}$

Problemas de ecuaciones de primer grado

Ana ha comprado 7 lápices iguales y ha pagado 14,77 euros. ¿Cuánto cuesta cada lápiz?

Carlos tiene el doble de edad que su hermano menor. Si al hermano menor le faltan 4 años para tener 18, ¿cuántos años tiene Carlos?

Un cine vende entradas a 6 € cada una. Si alguien compra el doble de entradas de las que compró su amigo (que compró x entradas), y además paga 3 € por palomitas, y en total paga 27 €, ¿cuántas entradas compró el amigo?

Un fontanero cobra una tarifa fija de 20 € más 3/4 del número de horas trabajadas multiplicado por 12 €/hora. Si el cliente paga 56 €, ¿cuántas horas trabajó el fontanero?

Ecuaciones de segundo grado incompletas. Secuencial

1. $x^2 = 9$
2. $2x^2 = 18$
3. $5x^2 = 80$
4. $-3x^2 = -27$
5. $x^2 - 4x = 0$
6. $3x^2 + 6x = 0$
7. $-2x^2 + 10x = 0$
8. $5x^2 - 15x = 0$

Ecuaciones de segundo grado completas. Secuencial

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$ (Raíces reales y distintas)
2. $2x^2 - 3x - 5 = 0$ (Raíces reales y distintas)
3. $x^2 + 4x + 4 = 0$ (Raíz real doble)
4. $3x^2 + 2x + 7 = 0$ (Sin raíces reales)

Problemas de ecuaciones de segundo grado

Un cuadrado tiene una superficie de 49 m². ¿Cuánto mide cada lado?

La base de un triángulo mide el doble que su altura. Si su área es de 24 cm², ¿cuánto mide la altura?

El producto de dos números consecutivos es 56. ¿Cuáles son esos números?

Un rectángulo tiene un área de 35 m^2. Su largo mide 2 metros más que el doble del ancho. ¿Cuánto mide el ancho?

Bibliografía

[1] Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE), "Informe español pisa 2022 – volumen i: Resultados de competencia matemática, lectura y ciencias," https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2022/pisa-2022-informes-es.html, 2023, consultado en mayo de 2025.

[2] España, "Ley orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la ley orgánica 2/2006, de educación (lomloe)," 2020, boletín Oficial del Estado, núm. 340, de 30 de diciembre de 2020.

[3] M. Niss, *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*, A. Gagatsis and S. Papastavridis, Eds. Hellenic Mathematical Society, 2002.

[4] J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell, *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press, 2001. [Online]. Available: https://doi.org/10.17226/9822

[5] Creencias de formadores de profesores de matemática sobre resolución de problemas. [Online]. Available: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291245779016.pdf

[6] Ángel Alsina, "Conocimientos esenciales sobre los procesos, habilidades o competencias matemáticas," *Educación Matemática*. [Online]. Available: https://revistas.uva.es/index.php/edmain/article/view/8076

[7] L. Rico, "Marco teórico de evaluación en pisa sobre matemáticas y resolución de problemas," *Coleccion Digital Eudoxus*, no. 22,

2009. [Online]. Available: https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1214079/RicoL06-2803.pdf

[8] Las competencias clave de la lomloe. [Online]. Available: https://www.campuseducacion.com/blog/recursos/las-competencias-clave-de-la-lomloe/?srsltid=AfmBOorHzyGNUU2RoIDRuuyPWJZiQW2_Hw6cM5zsoNrhkaSldIjwtSG0#Competencia_matematica_y_competencia_en_ciencia_tecnologia_e_ingenieria

[9] A. H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press, 1985.

[10] G. Polya, *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press, 1945.

[11] L. Puig and F. Cerdán, "Los procesos de matematización y la modelización en la resolución de problemas," *Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2001.

[12] G. C. Sosa Bueno, "Métodos de enseñanza del razonamiento lógico matemático para estudiantes universitarios," *RECIMUNDO: Revista Científica de Investigación y Desarrollo*, vol. 8, 2024. [Online]. Available: https://recimundo.com/index.php/es/article/view/2266

[13] E. M. de Educación y Formación Profesional, "Real decreto 217/2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación secundaria obligatoria," 2022, boletín Oficial del Estado, núm. 67, de 19 de marzo de 2022.

[14] OCDE, "Resultados de pisa 2022. volumen i: El rendimiento de los estudiantes en matemáticas, lectura y ciencias," https://www.oecd.org/education/pisa/, 2023, consultado el 29 de abril de 2025.

[15] D. R. Krathwohl, B. S. Bloom, and B. B. Masia, *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals. Handbook II: Affective Domain*. New York: David McKay Company, 1964.

[16] D. B. McLeod, *Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization*, D. A. Grouws, Ed. New York: Macmillan, 1992.

[17] M. A. Estrada Roca and F. J. Díez Palomar, “Las actitudes hacia las matemáticas. análisis descriptivo de un estudio de caso exploratorio centrado en la educación matemática de familiares,” 2011.

[18] A. Caballero Carrasco, L. J. Blanco Nieto, and E. Guerrero Barona, “El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la universidad de extremadura,” *Paradigma*, vol. 29, no. 2, pp. 157–171, 2008.

[19] N. G. Ignacio, L. J. B. Nieto, and E. G. Barona, “El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. una revisión de sus descriptores básicos,” *Unión-Revista Iberoamericana de educación matemática*, vol. 1, no. 2, 2005.

[20] M. H. Ashcraft and E. P. Kirk, “The relationships among working memory, math anxiety, and performance,” *Journal of Experimental Psychology: General*, 2001.

[21] I. M. Gómez-Chacón, *Matemáticas y afectividad en el aula*. Madrid: Narcea, 2000.

[22] J. A. Jiménez Márquez, “Práctica pedagógica para la concreción del dominio afectivo en la educación matemática: una mirada desde elementos comunes con la cultura escolar,” Ph.D. dissertation, Universidad Simón Bolívar, Barranquilla, Colombia, 2023. [Online]. Available: https://bonga.unisimon.edu.co/items/89ac51b2-0940-4d33-bc83-5b53a721c597

[23] R. Zan, L. Brown, J. Evans, and M. S. Hannula, “Affect in mathematics education: An introduction,” *Educational Studies in Mathematics*, vol. 63, 2006.

[24] J. Boaler, *Experiencing School Mathematics: Traditional and Reform Approaches to Teaching and Their Impact on Student Learning*. Mahwah, NJ: Routledge, 2002.

[25] P. Liljedahl, *Diseñando aulas para pensar en matemáticas: 14 prácticas docentes para mejorar el aprendizaje*. Ned Ediciones, 2021.

[26] C. González, “Competencias en la lomloe,” 2024, tema 2. Estructura del Diseño del Currículo. Asignatura Diseño Curricular de Matemáticas. Universidad de Valladolid., howpublished = Apuntes de clase.

[27] J. de Castilla y León, “Boletín oficial. contenidos de matemáticas en secundaria,” 2022, boletín Oficial de Castilla y León, núm. 190, de 30 de septiembre de 2022.

[28] C. González, “Resolución de problemas,” 2024, tema 3. Resolución de problemas. Asignatura Metodología y Evaluación de las Matemáticas. Universidad de Valladolid., howpublished = Apuntes de clase.

[29] M. Nieto and F. Alcaide, *Matemáticas. 2 Secundaria. Revuela*. España: SM, 2023.

[30] P. Liljedahl, *Mathematics Tasks for the Thinking Classroom, Grades K–5*, ser. Corwin Mathematics Series. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2021.

[31] Núñez de arce. wikipedia. [Online]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Valladolid_-_IES_N%C3%BA%C3%B1ez_de_Arce_2.jpg