



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

**Introducción a la lógica matemática y la
teoría de conjuntos y revisión de su
utilización en
la enseñanza de las matemáticas en
Educación Secundaria**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación
Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y
Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.**

Alumna: María Martín Pérez

Tutor: Fernando Sanz Sánchez

Valladolid, junio de 2025

CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN	5
2.	SOBRE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS INTEGRADAS	6
	2.1 Fundamento Pedagógico y Didáctico.....	6
	2.2 Marco Legal y Curricular.....	7
	2.3 Filosofía y Matemáticas	8
3.	FUNDAMENTO TEÓRICO	8
	3.1 Lógica y Sistemas Formales.....	9
	3.2 Teoría de Conjuntos y Clases	24
4.	PROPUESTA DIDÁCTICA	32
	4.1 Introducción	33
	4.2 Contexto	33
	4.3 Contenido	35
	4.4 Objetivos	35
	4.5 Competencias Específicas	37
	4.6 Criterios de Evaluación	38
	4.7 Competencias Clave.....	39
	4.8 Metodología y Recursos.....	41
	4.9 Situación de Aprendizaje.....	44
	4.10 Temporalización y Descripción.....	47
	4.11 Atención a la Diversidad	68
	4.12 Evaluación.....	69
	4.13 Conclusiones	76
5.	BIBLIOGRAFÍA	78
6.	ANEXO I.....	80

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la educación secundaria ha experimentado una evolución significativa en sus planteamientos metodológicos, impulsada por una reforma educativa que, en gran medida, ha sido liderada por la Unión Europea. Para conocer el contexto de la actual legislación española en materia de educación, debemos tener en cuenta algunos referentes, como el contexto internacional con la Agenda 2030 (Naciones Unidas, 2015) o el contexto del marco europeo establecido en la estrategia EUROPA 2020, aprobada por la Comisión Europea en marzo de 2010 (Gutiérrez Ortega, 2024).

Por una parte, la estrategia EUROPA 2020 (Comisión Europea, 2010) es la estrategia de crecimiento de la Unión Europea para la década 2010-2020, buscando alcanzar un crecimiento inteligente, sostenible e integrador. Para ello fijó cinco objetivos, uno de los cuales está centrado en la educación: *“El porcentaje de abandono escolar debería ser inferior al 10 % y al menos el 40 % de la generación más joven debería tener estudios superiores completos”* (Comisión Europea, 2010, p. 5). La estrategia incluyó siete iniciativas emblemáticas para facilitar los avances en cada tema, siendo el educativo *“«Juventud en movimiento», para mejorar los resultados de los sistemas educativos y facilitar la entrada de los jóvenes en el mercado de trabajo”* (Comisión Europea, 2010, p. 6).

Por otra parte, la Agenda 2030 es un plan de acción global aprobado por la Asamblea General de la ONU en 2015, con horizonte en el año 2030. El núcleo de este plan son los 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), y en concreto el ODS 4 está dedicado a garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad, y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos y todas (Naciones Unidas, 2015).

Las políticas europeas han promovido una visión del aprendizaje orientada al desarrollo de competencias clave para la formación a lo largo de la vida, la empleabilidad, la inclusión social y la participación activa en la ciudadanía. A raíz de este movimiento, en España se ha creado la actual ley educativa 3/2020 de 29 de diciembre, la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación, o LOMLOE, (BOE, 2020), que se alinea con estos objetivos y tendencias educativas europeas. Se pasa de una educación más centrada en los contenidos a un enfoque más aplicado, en el que se prioriza la adquisición de habilidades y la movilización de los conocimientos en determinados contextos. Esta movilización requiere de una correcta interconexión entre los contenidos de las diferentes materias, por lo que el aprendizaje debe ser significativo para que tenga lugar la transferencia del aprendizaje y se garantice la generalización de los contenidos (Carbonero Martín, 2024).

Por tanto, en este proceso de transformación se han consolidado como ejes esenciales el enfoque competencial y la interdisciplinariedad, para una enseñanza más significativa y crítica. Lejos de compartimentar el conocimiento en materias inconexas, la propuesta de Unidades Didácticas Integradas (o interdisciplinares) permite establecer vínculos reales entre distintos saberes, generando contextos de aprendizaje en los que el alumnado pueda encontrar sentido a lo que estudia y desarrollar habilidades que trasciendan los contenidos estrictamente disciplinares.

Este trabajo parte precisamente de esa visión integradora, planteando el diseño de una Unidad Didáctica Integrada (UDI) entre las materias de Matemáticas y Filosofía, dirigida al alumnado de 1.º Bachillerato. Se trata de una propuesta que no solo busca explorar las posibilidades pedagógicas de la colaboración entre dos disciplinas que, a priori, no parecen muy relacionadas, sino que aspira también a ofrecer una respuesta coherente a los principios y orientaciones de la LOMLOE, que promueve activamente este tipo de planteamientos. La unidad se articulará en torno a un eje temático compartido: la lógica proposicional, los sistemas formales y la teoría de conjuntos. Estos contenidos, además de formar parte del currículo oficial, ofrecen un terreno especialmente interesante para la reflexión interdisciplinar, ya que permiten abordar tanto la estructura del pensamiento lógico-matemático como las implicaciones filosóficas del lenguaje formal, el razonamiento deductivo y los fundamentos del conocimiento.

2. SOBRE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS INTEGRADAS

Anteriormente se ha mencionado que la elaboración de una UDI parece apropiada para los propósitos educativos que se persiguen actualmente. No obstante, para una reflexión más exhaustiva de la conveniencia de su uso, se va a analizar el fundamento pedagógico y didáctico que lo sustenta, así como su cabida en el marco legal y curricular que lo regula, en este caso la LOMLOE, aprobada en 2020 y de aplicación plena en Bachillerato desde el curso 2022-2023.

Asimismo, se va a acompañar de una argumentación sobre la elección de temario y asignaturas para esta UDI, ya que su elección no es casual ni meramente funcional.

2.1 FUNDAMENTO PEDAGÓGICO Y DIDÁCTICO

Desde el punto de vista del aprendizaje, las unidades interdisciplinares permiten al alumnado establecer conexiones entre conocimientos que normalmente se presentan de forma fragmentada. La fragmentación curricular, tradicional en la enseñanza secundaria, tiende a dificultar que el alumnado entienda la utilidad de lo que aprende o vea conexiones entre las distintas asignaturas. Al integrar los contenidos de varias materias en torno a un eje común, se favorece no solo la comprensión de los conceptos, sino también la transferencia de conocimientos a nuevos contextos y la adquisición de una visión más global del saber (Carbonero Martín, 2024).

Además, este tipo de propuestas también enriquecen la práctica docente, al promover la colaboración entre profesores de distintas áreas y abrir espacios para la reflexión conjunta sobre los objetivos y métodos de enseñanza.

En el marco de esta propuesta, no se trata simplemente de yuxtaponer contenidos, sino de generar un espacio común en el que el alumnado pueda explorar la lógica como puente entre dos formas de conocimiento. Así, conceptos como la validez, la demostración o la estructura formal se abordan no solo desde su operatividad técnica, sino también desde su fundamentación filosófica, lo que permite una comprensión más profunda y crítica de los mismos.

2.2 MARCO LEGAL Y CURRICULAR

La LOMLOE se orienta decididamente hacia un enfoque competencial del currículo. En este contexto, la integración de saberes y la conexión entre disciplinas no solo son recomendables, sino que se contemplan como un camino pedagógicamente preferente para el desarrollo de las competencias clave. La ley subraya la importancia de que el alumnado sea capaz de movilizar conocimientos, destrezas y actitudes en contextos diversos, resolver problemas reales o simulados, y enfrentarse a situaciones nuevas de forma autónoma (LOMLOE, 2020). Para ello, se promueve la elaboración de propuestas didácticas que favorezcan un aprendizaje globalizado, significativo y funcional, en las que se integren diversas áreas de conocimiento. Este espíritu transversal está presente en los perfiles de salida, en las competencias específicas y en los descriptores operativos que guían la concreción curricular de cada materia.

Además, el propio currículo de Bachillerato contempla y facilita la posibilidad de desarrollar proyectos interdisciplinarios. Aunque en esta etapa la organización sigue siendo claramente disciplinar, la ley deja un espacio abierto para el trabajo conjunto entre materias, especialmente cuando se comparten competencias, contenidos o procedimientos.

La propuesta que se desarrolla en este trabajo parte de esta convicción. En lugar de abordar la lógica proposicional de manera aislada en Matemáticas y como introducción a la filosofía del lenguaje o la epistemología en Filosofía, se plantea un enfoque conjunto que permita al alumnado comprender tanto su formalización simbólica como sus implicaciones filosóficas. El objetivo no es únicamente que los estudiantes sepan operar con conectores lógicos o construir tablas de verdad, sino que también comprendan qué significa razonar con lógica, qué límites tiene ese razonamiento, y por qué se han desarrollado sistemas formales para garantizar la validez de las inferencias. Asimismo, la teoría de conjuntos, que aparece en el currículo de Matemáticas como base para el tratamiento de estructuras algebraicas, puede ser puesta en diálogo con las reflexiones filosóficas sobre la noción de infinito o la aparición de paradojas y círculos lógicos.

2.3 FILOSOFÍA Y MATEMÁTICAS

La elección de Matemáticas y Filosofía está debidamente fundamentada: ambas materias, aunque aparentemente situadas en ámbitos distintos del saber, comparten una profunda preocupación por el pensamiento abstracto, la precisión del lenguaje, el análisis formal y la construcción de sistemas deductivos.

Históricamente, las dos disciplinas han estado estrechamente vinculadas, ya que ambas buscan comprender la naturaleza de la realidad y el conocimiento a través del razonamiento lógico. En la antigua Grecia, filósofos como Aristóteles no solo reflexionaron sobre cuestiones metafísicas y éticas, sino que también sentaron las bases de las matemáticas como disciplina formal. Durante siglos, la filosofía ha proporcionado el marco para cuestionar los fundamentos y la certeza de las matemáticas.

La imagen que los estudiantes tienen de las matemáticas es más bien utilitaria, como un mero conjunto de operaciones que conducen a resultados necesarios para situaciones problemáticas. Al relacionarlo con la filosofía, proporciona una oportunidad de ampliar la visión tan aplicada que tienen de las mismas, permitiendo acercar al alumnado a unas matemáticas más profundas, más cercanas al álgebra, como una disciplina más completa y redonda.

Las materias de Matemáticas y Filosofía, en este sentido, presentan una oportunidad privilegiada para el diálogo didáctico. Ambas comparten un interés central por el razonamiento lógico, la argumentación rigurosa y el análisis de estructuras formales. Si bien sus lenguajes y métodos pueden diferir, sus objetivos profundos coinciden en formar ciudadanos capaces de pensar de manera crítica, rigurosa y autónoma. Integrar estas dos materias en una misma propuesta no implica renunciar a la especificidad de ninguna, sino aprovechar sus puntos de contacto para enriquecer la comprensión del alumnado y fomentar una visión más amplia y conectada del conocimiento. Además, la importancia que ambas le dan al pensamiento crítico no hace más que reforzar la adquisición de las competencias clave buscadas por la ley.

3. FUNDAMENTO TEÓRICO

A lo largo de las próximas páginas, paso a paso, se va a revisar la construcción de sistemas formales de la lógica proposicional, reparando en alguna de las paradojas y círculos lógicos que se crean al tratar de definir el concepto de conjunto, y recurriendo a la axiomática de clases y conjuntos como un medio para resolver estas paradojas y formalizar un entorno teórico abstracto seguro para los razonamientos matemáticos. Esta construcción se ha hecho siguiendo las notas proporcionadas por Cano Torres (2024) en la parte de Álgebra de la asignatura “Complementos de Matemáticas”, así como consultas concretas a libros específicos (Cameron, 1998).

3.1 LÓGICA Y SISTEMAS FORMALES

SISTEMAS FORMALES

Con carácter general, no riguroso, un sistema formal es un conjunto de símbolos, fórmulas, axiomas y reglas de deducción que se utiliza para construir y probar de forma rigurosa teoremas. De manera un tanto más precisa, un sistema formal está compuesto por:

- Una colección de símbolos, llamada *alfabeto*
- Una colección de fórmulas, que son sucesiones de símbolos bien “formadas”. Es decir, las fórmulas son un subconjunto de todas las posibles sucesiones de símbolos. Es necesario un algoritmo que determine si una sucesión de símbolos es o no una fórmula.
- Una subcolección de fórmulas llamadas *axiomas*. No cualquier fórmula es un axioma. Los axiomas son las fórmulas primitivas, que se dan por asumidas, de las que se deducen el resto de fórmulas “verdaderas” de una cierta teoría.
- Un conjunto de *reglas de deducción*, cada una de las cuales es un procedimiento de modo que, a partir de un input, que es una sucesión finita de varias fórmulas, proporciona un output, que será una única fórmula.

A partir de esto puede definirse lo que es una demostración:

Definición: Una *demostración* es una sucesión de fórmulas que o bien son axiomas o bien se obtienen de las fórmulas anteriores a partir de la aplicación de las reglas de deducción.

Definición: Un *teorema* es cualquier fórmula que se pueda deducir de una demostración, es decir, la última fórmula de esta.

Debe diferenciarse entre teorema y metateorema, ya que un *metateorema* es aquel que puede deducirse con demostraciones, que se encuentran fuera del sistema formal. Esta distinción puede ser difícil de entender, pero gracias a un ejemplo muy sencillo, proporcionado por Douglas R. Hofstadter (1979), esta diferencia se ve con mucha más claridad.

EJEMPLO DE SISTEMA FORMAL: MU

A continuación se describe este sencillo sistema formal, siguiendo la estructura presentada anteriormente:

- El alfabeto de MU está compuesto por las letras $\{M, U, I\}$.
- El algoritmo para determinar qué sucesiones de símbolos constituyen fórmulas es el siguiente: cualquier sucesión finita no vacía compuesta por los tres símbolos repetidos cuantas veces se deseen.
- Hay un único axioma: MI

- Las reglas de deducción son las siguientes:

- A cualquier sucesión de símbolos que termine en I se le puede añadir una U al final.
1) $\dots I \rightarrow \dots IU$
- A cualquier fórmula que empiece con M se le puede duplicar la sucesión de símbolos posterior a la M.
2) $MX \rightarrow MXX$
- Si en una fórmula aparecen tres I seguidas en cualquier posición, se pueden reemplazar por una U.
3) $\dots III \dots \rightarrow \dots U \dots$
- Dos U consecutivas en cualquier posición pueden eliminarse.
4) $XUUX' \rightarrow XX'$

A partir de este sistema formal, pueden realizarse varias demostraciones. Veamos algún ejemplo:

- 1) MI, MIU, MIUIU
- 2) MI, MII, MIII, MUI

Así se han demostrado dos teoremas: MIUIU y MUI

La pregunta que plantea Hofstadter es la siguiente: ¿Es MU un teorema? Si lo fuera, encontrar la demostración lo probaría, pero el hecho de no encontrarla no prueba que no lo sea. La forma de probar que MU no es un teorema es lo que antes se ha definido como metateorema.

Un metateorema sería, por ejemplo, que el número de letras I en cualquier teorema no es múltiplo de 3, y en particular no puede ser 0, por lo que MU no es un teorema. Esto puede demostrarse por inducción en el número de fórmulas:

n=1:	Como una demostración debe empezar por un axioma y solo hay uno, debe ser MI, y el número de I es 1, que no es múltiplo de 3
Hipótesis de inducción (HdI):	Para una demostración con n fórmulas, supongamos que el número de I's del teorema final es x, que no es múltiplo de 3
Caso n+1:	Vamos a ver cuántas I tendrá al añadirle una fórmula al caso anterior, usando una de las normas de deducción:

	1) El número de I sigue siendo x , que, por HdI, no es múltiplo de 3 2) El número de I se duplica, $2x$, que sigue sin ser múltiplo de 3 3) El número de I pasa a ser $x-3$, que sigue sin ser múltiplo de 3 4) El número de I sigue siendo x , que no es múltiplo de 3
--	--

En cada posibilidad del caso $n+1$ se ha probado que el número de I no es múltiplo de 3, luego por inducción queda probado, obteniéndose así el metateorema.

Esto es un sistema formal muy básico y, por lo tanto, muy limitado. Se utiliza únicamente como ejemplo para aclarar conceptos.

SEMÁNTICA

Antes de avanzar más en la construcción del sistema formal de la lógica proposicional, es necesario aclarar ciertos términos semánticos (Deaño, 1974).

Las fórmulas que se utilizan en la lógica proposicional son enunciados descriptivos, y estos son siempre o bien verdaderos o bien falsos, es decir, tienen necesariamente un valor de verdad. Esto es conocido como el *Principio de Bivalencia*: todo enunciado es o bien verdadero o bien falso. Los enunciados se representan con letras minúsculas como $p, q, r, s \dots$ como variables de enunciado. Así, la variable p puede tener el valor de verdad o el de falsedad, y esto se representa mediante una tabla de verdad:

p
V
F

Si en lugar de un único enunciado se toman dos, se deben combinar sus respectivos valores de verdad para obtener todas las posibilidades, obteniendo la siguiente tabla:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Es decir, al considerar conjuntamente dos enunciados independientes, cada uno de ellos puede ser verdadero o falso por su parte.

Esto se puede generalizar para un número n de enunciados, donde el número de casos posibles de sus valores de verdad será 2^n . Esto es así porque los enunciados son independientes entre sí. Pero para crear fórmulas en el sistema formal de la lógica proposicional, también se pueden utilizar conectivas, que forman conexiones lógicas entre los distintos enunciados. A continuación se describen algunas conectivas de la Lógica Proposicional:

- **Negación:**

Significa la inversión del valor de verdad de la proposición que se está negando, es decir, dado un enunciado p , su negación es *no- p* , que se expresa como $\neg p$. Por tanto, si p es verdadero, $\neg p$ será falso, y viceversa:

p	$\neg p$
V	F
F	V

- **Conjunción:**

Dados dos enunciados p y q , la conjunción implica unirlos con el “y” lingüístico, es decir, deben darse simultáneamente tanto p como q . Esto se expresa como $p \wedge q$ y su tabla de verdad será:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **Disyunción:**

Dados dos enunciados p y q , la disyunción implica unirlos con el “o” lingüístico, es decir, al menos una de las proposiciones debe ser verdadera. Esto se expresa como $p \vee q$ y su tabla de verdad será:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Implicación:**

Representa una condición suficiente. Dados dos enunciados p y q , se dice que p implica q si dándose p , entonces también debe darse q . Se expresa como $p \rightarrow q$ y su tabla de verdad será:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cabe destacar que decir $p \rightarrow q$ es otra forma de expresar $(\neg p) \vee q$

- **Bi-implicación:**

Representa una condición necesaria y suficiente. Dados dos enunciados p y q , la bi-implicación significa unirlos con el “si y sólo si” lingüístico, es decir, ambas proposiciones deben ser verdaderas o falsas simultáneamente. Se expresa como $p \Leftrightarrow q$ y su tabla de verdad será:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Estos son todos los conectores que se van a utilizar en el desarrollo de este trabajo.

Definición: Una *tautología* es una fórmula cuya tabla de verdad es completamente Verdadera siempre.

Ejemplo:

α	α	$\alpha \rightarrow \alpha$
V	V	V
F	F	V

De la misma manera, se puede definir una contradicción como su opuesto:

Definición: Una *contradicción* es una fórmula cuya tabla de verdad es completamente Falsa siempre.

Ejemplo:

α	$\neg\alpha$	$\alpha \Leftrightarrow \neg\alpha$
V	F	F
F	V	F

Definición: Dos fórmulas se dice que son *equivalentes* si tienen la misma tabla de verdad.

Ejemplo: $\alpha \rightarrow \beta$ es equivalente a $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg\beta$	$\neg\alpha$	$\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Definición: El conjunto de fórmulas Σ es *satisfacible* si existe una valoración v tal que $v(\beta) = V \forall \beta \in \Sigma$

SISTEMA FORMAL DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Como cualquier sistema formal, está formado por su propio alfabeto, su conjunto de fórmulas, su conjunto de axiomas y una serie de reglas de deducción. A continuación se repasan cada uno de sus elementos:

Alfabeto:

Está compuesto a su vez por tres tipos de símbolos:

- 1) Variables proposicionales: se refiere a los enunciados en sí, y si representan con letras en minúscula. Típicamente se utilizan $\{p, q, r, s, t, a, b, c, \dots, a_1, a_2, a_3, \dots\}$
- 2) Conectivas: las que se presentaron en el apartado anterior: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Leftrightarrow\}$, en orden: negación, conjunción, disyunción, implicación y bi-implicación.
- 3) Símbolos de separación: con esto se refiere a “(” y “)”

Fórmulas:

Ya se comentó en el funcionamiento general de cualquier sistema formal que no cualquier combinación de símbolos del alfabeto es válida para la construcción de fórmulas. A continuación se describe la forma correcta de construcción de fórmulas en el sistema formal de la lógica proposicional. Para empezar, debe distinguirse entre las proposiciones simples y compuestas:

Proposiciones simples: son aquellas que están formadas solamente por una variable proposicional.

Proposiciones compuestas: son aquellas que están formadas por la correcta combinación de variables proposicionales y conectivas.

Es necesario aclarar cuál es la manera correcta de combinar conectivas y variables proposicionales, para lo cual es necesario hacer una distinción entre las conectivas *monádicas* y las conectivas *diádicas*:

Conectivas monádicas: se refiere a aquellas que se aplican cada vez a *una sola* proposición, sea esta simple o compuesta. De las conectivas desarrolladas en este trabajo, la única monádica es la negación. A continuación se muestran dos ejemplos, uno con una proposición simple y otro con una compuesta:

$$\neg p$$

$$\neg(p \vee q)$$

En el segundo caso, $p \vee q$ es una proposición compuesta, y la negación afecta a toda la proposición como una unidad. Es por ello que se utilizan los símbolos de separación, para delimitar la proposición que se niega.

Conectivas diádicas: son aquellas que necesitan al menos dos proposiciones para poder aplicarse. El resto de conectivas estudiadas (conjunción, disyunción, implicación y bi-implicación) son de este tipo. A continuación se muestran expresiones carentes de significado, y que por tanto no constituyen fórmulas:

$$p \wedge$$

$$\vee q$$

$$p \rightarrow$$

$$\Leftrightarrow q$$

Para combinar correctamente estos símbolos, debe haber una proposición, ya sea simple o compuesta, a cada lado de la conectiva.

Axiomas:

Como ya se vio en el funcionamiento general de cualquier sistema formal, no cualquier fórmula constituye un axioma. En el caso de la lógica proposicional, la condición para que una fórmula sea un axioma, es que estos deben ser tautologías. A continuación se muestran los axiomas de la lógica de proposiciones, acompañados de sus tablas de verdad:

$$A_1: \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

α	β	$\beta \rightarrow \alpha$	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

$$A_2: (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

α	β	γ	$\beta \rightarrow \gamma$	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \rightarrow \gamma$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

A₃: $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$	$\beta \rightarrow \alpha$	$(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Reglas de deducción:

En el sistema formal de la lógica proposicional se trabaja únicamente con una regla de deducción, que es el Modus Ponens:

- *Modus Ponens (MP)*: las entradas $\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \rightarrow \beta \end{Bmatrix}$ producen β

Ejemplo: si α es una fórmula, entonces $\alpha \rightarrow \alpha$ es un teorema.

Hay que partir de algún axioma:

En el Axioma 2, llamemos $\beta = (\alpha \rightarrow \alpha)$ y $\gamma = \alpha$

- 1) A2: $(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$
- 2) A1: $(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha))$
- 3) MP 1) y 2): $((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$
- 4) A1: $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 5) MP 3) y 4): $(\alpha \rightarrow \alpha)$ TEOREMA

Con esto se finaliza la construcción del Sistema Formal de la Lógica Proposicional.

SISTEMA FORMAL DE LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Conviene hacer una distinción entre la lógica proposicional y la lógica de primer orden: la lógica de primer orden se diferencia de la lógica proposicional en que permite expresar propiedades que se extienden a todos los elementos de un conjunto, lo cual es fundamental en matemáticas. Gracias a esta capacidad, se facilita el paso de razonamientos particulares a demostraciones con validez general.

Vamos a repasar la misma estructura de elementos que hemos seguido antes:

Alfabeto:

De nuevo, está compuesto por varios tipos de símbolos:

1. Variables: denotadas como $x, y, z, \dots$ por ejemplo.
2. Conectores lógicos de la lógica proposicional: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Leftrightarrow\}$, en orden: negación, conjunción, disyunción, implicación y bi-implicación
3. Cuantificadores: "existe" y "para todo":
 $\forall$: se lee "para todo"
 $\exists$: se lee "existe". $(\exists x) \alpha$ sustituye a $(\neg(\forall x)(\neg \alpha))$
4. El símbolo universal de igualdad: "=", que se lee "igual".

A mayores, hay otros símbolos, que se llaman de función o de predicado:

5. Símbolos de "función" o de "predicado" (o "relación"): dependen de la teoría específica que se quiera tratar. Así, por ejemplo:
 - Si se quiere hacer teoría de conjuntos o clases (como se verá después), se usa el símbolo $\in$ de predicado binario que se interpretará como "pertenencia".
 - Si se quiere hacer la teoría de anillos, se usan los símbolos de función binaria: $+$ ("suma"), $\cdot$ ("producto"), y los símbolos de función constante: $0, 1$ (interpretados como elemento neutro de la suma y del producto, respectivamente).
 - Si se quieren hacer enunciados sobre orden, se emplea un símbolo de "predicado binario" que es $<$
 - ...

Fórmulas:

Las reglas de formación de fórmulas son un poco más complejas, pero básicamente, a las reglas de formación de fórmulas de la lógica proposicional hay que añadir la siguiente regla:

- Si A es una fórmula, entonces $(\forall x)A$ y $(\exists x)A$ son fórmulas.

Axiomas:

Los axiomas contienen a los de la lógica proposicional, y después algunos más que también dependen de la teoría. Por ejemplo, para la teoría de conjuntos, incluimos los axiomas de Zermelo-Fraenkel que se describirán después. Por otra parte, para la teoría de anillos, los axiomas son los enunciados que expresan las propiedades asociativa, conmutativa de la suma y el producto, distributiva, la definición de lo que es elemento neutro para suma y producto, etc.

Reglas de inferencia:

Las reglas de inferencia son el Modus Ponens y algunas otras que tienen que ver con el uso de cuantificadores. Hay muchas reglas de deducción que pueden aplicarse; no obstante, por el nivel tan temprano al que se pretende adaptar este temario, se va a desarrollar únicamente la siguiente:

- La entrada α produce $(\forall x) \alpha$, siendo x cualquier variable.

Con esto se finaliza la construcción del Sistema Formal de la Lógica de Primer Orden.

TEOREMA DE CORRECCIÓN Y COMPLETITUD

En el marco de la lógica proposicional, se tienen dos formas de deducir: la inferencia y la deducción semántica.

Inferencia:

Se representa con el símbolo $\vdash$, que se lee “proviene de”, “se deduce de” o “se demuestra a partir de”.

Del conjunto de fórmulas Σ se infiere una fórmula α si existen n fórmulas α_i tales que para todo i , α_i puede ser o bien un axioma, o bien pertenecer a Σ o bien deducirse por las reglas de inferencia de las anteriores.

$$\Sigma \vdash \alpha \text{ si } \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ t. q. } \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_i \text{ es axioma} \\ \alpha_i \in \Sigma \\ \alpha_i \text{ se deduce de fórmulas anteriores} \end{cases}$$

Deducción semántica:

Se representa con el símbolo $\models$, que es el símbolo de consecuencia lógica o símbolo semántico. Significa que la parte derecha es verdadera en todos los modelos donde la parte izquierda lo es.

$$\Sigma \vdash \alpha \Leftrightarrow \forall \text{ valoración } v \text{ cumpliendo que } \forall \beta \in \Sigma, v(\beta) = V \text{ entonces } v(\alpha) = V$$

Teorema: El *teorema de corrección y completitud* se enuncia diciendo que la inferencia como la deducción semántica son equivalentes entre sí.

La demostración de este teorema no se incluye en este trabajo por la limitación de extensión.

TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN

$\Sigma \vdash (\beta \rightarrow \alpha)$ si y solo si $\Sigma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$

Demostración

$\Rightarrow$ (condición suficiente)

$\Sigma \vdash (\beta \rightarrow \alpha)$

Lo que significa que $\exists \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash (\beta \rightarrow \alpha)$

donde $\gamma_i \equiv \begin{cases} \text{— } \textit{axioma} \\ \text{— } \gamma_i \in \Sigma \rightarrow \gamma_i \in \Sigma \cup \{\beta\} \\ \text{— } \gamma_i \text{ se deduce de las anteriores} \end{cases}$

De lo que se deduce:

- 1) $\Sigma \cup \{\beta\} \vdash (\beta \rightarrow \alpha)$
 - 2) $\Sigma \cup \{\beta\} \vdash \beta$
 - 3) $\Sigma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$
- (Por Modus Ponens de 1 y 2)

$\Leftarrow$ (condición necesaria)

$\Sigma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$

Lo que significa que $\exists \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n = \alpha$ tal que $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\gamma_i = \begin{cases} \gamma_i \text{ es axioma} \\ \gamma_i \in \Sigma \cup \{\beta\} \\ \gamma_i \text{ se deduce de fórmulas anteriores} \end{cases}$$

Tenemos que ver que $\Sigma \vdash (\beta \rightarrow \alpha)$

Por inducción en $n = \text{longitud de la demostración de } \Sigma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$

$n = 1$

$$\gamma_1 = \alpha \equiv \begin{cases} \text{es axioma} \\ \text{elemento de } \Sigma \cup \{\beta\}, \text{ es decir } \begin{cases} \text{elemento de } \Sigma \\ \alpha = \beta \end{cases} \\ \text{(No puede deducirse de MP porque harían falta dos fórmulas)} \end{cases}$$

- Si es un axioma, entonces se deduce de lo que sea, por ejemplo, $\Sigma \vdash \alpha$

- Si es un elemento de Σ , entonces $\Sigma \vdash \alpha$

En ambos casos:

$$1) \quad \Sigma \vdash \alpha$$

$$2) \quad \Sigma \vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$$

(Por el axioma 1 de la lógica proposicional)

$$3) \quad \Sigma \vdash (\beta \rightarrow \alpha)$$

(Por Modus Ponens de 1 y 2)

- Si $\alpha = \beta \Rightarrow \Sigma \vdash (\beta \rightarrow \alpha)$ porque:

$\alpha \rightarrow \alpha$ es axioma, y, como es axioma, se deduce de cualquier cosa como

$$\emptyset \vdash (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$\Sigma \vdash (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$\Sigma \vdash (\beta \rightarrow \alpha)$$

Por hipótesis de inducción, supongamos cierto para cualquier longitud menor que n

Para longitud n

$$\gamma_n = \alpha \equiv \begin{cases} \text{es un axioma} \\ \alpha \in \Sigma \cup \{\beta\} \\ \alpha \text{ se deduce MP con } \gamma_i \text{ y } \gamma_j \text{ con } i, j < n \end{cases}$$

- Los dos primeros son iguales al caso base.
- El tercer caso: se deduce *MP*:

Como $\Sigma \cup \{\beta\} \vdash \gamma_i$ con una longitud menor que n , por hipótesis de inducción tenemos que $\Sigma \vdash (\beta \rightarrow \gamma_i)$ lo mismo para γ_j : $\Sigma \vdash (\beta \rightarrow \gamma_j)$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_i = \theta \\ \gamma_j = (\theta \rightarrow \alpha) \end{array} \right\} \text{ para que usando MP se deduzca } \alpha$$

Luego tenemos:

1. $\Sigma \vdash (\beta \rightarrow \theta)$
2. $\Sigma \vdash (\beta \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha))$
3. $\Sigma \vdash (\beta \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\beta \rightarrow \theta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$ *axioma 2*
4. *MP entre 2 y 3:* $\Sigma \vdash (\beta \rightarrow \theta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
5. *MP entre 1 y 4:* $\Sigma \vdash (\beta \rightarrow \alpha)$

SISTEMAS INCONSISTENTES

Un conjunto de fórmulas Σ se dice que es un sistema inconsistente si existe una fórmula τ tal que de ese mismo sistema se pueda deducir tanto τ como su negación:

$$\begin{cases} \Sigma \vdash \tau \\ \Sigma \vdash \neg \tau \end{cases}$$

Lema: Si Σ es inconsistente, entonces se puede deducir cualquier fórmula a partir de Σ .

Demostración:

Supongamos que Σ es inconsistente, esto implica que existe una fórmula Φ tal que $\Sigma \vdash \Phi$ y $\Sigma \vdash (\neg \Phi)$.

Sea Ψ una fórmula arbitraria, vamos a ver si la podemos demostrar:

1. $\Sigma \vdash \Phi$
2. $\Sigma \vdash (\neg \Phi)$
3. *A1:* $\Sigma \vdash (\neg \Phi \rightarrow (\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi))$
4. *MP 2 y 3:* $\Sigma \vdash (\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi)$
5. *A3:* $\Sigma \vdash ((\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi))$
6. *MP 4 y 5:* $\Sigma \vdash (\Phi \rightarrow \Psi)$
7. *MP 1 y 6:* $\Sigma \vdash \Psi$

TEOREMA DE DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

$\Sigma \vdash \alpha \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg \alpha\} \text{ es inconsistente}$

Demostración:

$\Rightarrow$ (condición suficiente)

$\Sigma \vdash \alpha$

$$\frac{\Sigma \cup \{\neg \alpha\} \vdash \alpha}{\Sigma \cup \{\neg \alpha\} \vdash \neg \alpha} \Rightarrow \Sigma \cup \{\neg \alpha\} \text{ es inconsistente}$$

$\Leftarrow$ (condición necesaria)

$\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente

Por el lema anterior, si τ es un axioma:

$$\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \rightarrow \tau$$

$$\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \rightarrow \neg\tau$$

$\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \rightarrow \neg\tau$ por el teorema de deducción implica que $\Sigma \vdash (\neg\alpha \rightarrow \neg\tau)$

Entonces:

1. $\Sigma \vdash (\neg\alpha \rightarrow \neg\tau)$
2. A3: $\Sigma \vdash ((\neg\alpha \rightarrow \neg\tau) \rightarrow (\tau \rightarrow \alpha))$
3. MP 1 y 2: $\Sigma \vdash (\tau \rightarrow \alpha)$
4. $\Sigma \vdash \tau$ (por ser τ axioma se deduce de cualquier cosa)
5. MP 3 y 4: $\Sigma \vdash \alpha$

DEMOSTRACIÓN POR CONTRAPOSICIÓN

La demostración por contraposición se fundamenta en que es equivalente demostrar que $\beta \rightarrow \alpha$ a demostrar que $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$, ya que son fórmulas equivalentes.

Demostración: se realizará con su tabla de verdad, para mostrar que las fórmulas son equivalentes:

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$	$\beta \rightarrow \alpha$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Es importante no confundir la demostración por reducción al absurdo con la demostración por contraposición: mientras que en la primera se niega aquello que se quiere demostrar y se busca una contradicción, en la segunda se busca demostrar otra fórmula equivalente, sin obtener ninguna contradicción en principio. Se puede ver la diferencia a través de un ejemplo trivial.

Ejemplo: Si llueve, entonces el suelo se moja.

En primer lugar, es interesante detenerse en la diferencia entre condición necesaria y condición suficiente. En este caso, que llueva es una condición suficiente para que el suelo se moje, pero no es una condición necesaria: el suelo podría mojarse por otras razones sin que necesariamente esté lloviendo.

Aclarado esto, hay dos formas de enfocar la demostración de ese enunciado:

Por reducción al absurdo, el proceso consistiría en negar el enunciado que se quiere demostrar, y esperar llegar a una contradicción. En este caso, la negación de una implicación $p \rightarrow q$ es el enunciado $p \wedge (\neg q)$, que en este ejemplo sería: llueve y no se moja el suelo. A partir de este enunciado, se llegaría a una contradicción.

Por contraposición, el enunciado a demostrar se cambiaría a su equivalente: si no se moja el suelo entonces no llueve. Ambos enunciados son equivalentes, como se mostró con la tabla de verdad, por lo que si logramos demostrar que si no se moja el suelo entonces no llueve, habremos demostrado que la lluvia implica que se moje el suelo. Son enunciados equivalentes, no se busca una contradicción.

3.2 TEORÍA DE CONJUNTOS Y CLASES

CONCEPTO DE CONJUNTO

En la teoría de conjuntos de Cantor, se denomina, de manera informal, conjunto a un agregado de elementos que cumplen una propiedad expresada por una fórmula. Un conjunto está bien definido cuando se posee un criterio que permita afirmar si un elemento pertenece o no a dicho conjunto. Sus elementos siempre se escriben encerrados por llaves. Estos pueden definirse por extensión o por comprensión:

Comprensión: $A = \{\text{divisores de } 6\}$

Extensión: $A = \{1, 2, 3, 6\}$

PARADOJA DE RUSSELL

La definición de conjunto que se acaba de dar, en el marco de la teoría de conjuntos de Cantor, provoca paradojas y círculos lógicos que han obligado a reformular la teoría. En esencia, la paradoja lógica argumenta que la existencia de un conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos lleva a una contradicción:

Sea $\Delta \equiv$ conjunto de todos los conjuntos, se define Σ como otro conjunto tal que:

$$\Sigma = \{A \in \Delta / A \notin A\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \in \Sigma \rightarrow \Sigma \notin \Sigma \\ \Sigma \notin \Sigma \rightarrow \Sigma \in \Sigma \end{array} \right\} \rightarrow \Sigma \in \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \notin \Sigma$$

Esta paradoja es una de las más conocidas, y se ha ejemplificado de muchas maneras. La más habitual es con el ejemplo del barbero:

Un barbero afeita a todos los hombres de una ciudad que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero? Si el barbero se afeita, entonces viola la regla, y si no se afeita, entonces debe ser afeitado por alguien, lo que también viola la regla.

Paradojas como esta muestran la importancia de la rigurosidad a la hora de definir objetos matemáticos. Para solventar esta paradoja, se han propuesto dos teorías: la Teoría de Clases y la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel:

TEORÍA DE CLASES

En esta teoría, las *clases* son objetos primitivos sujetos a una relación binaria llamada de pertenencia y denotada por $\in$. Esto es, para dos clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ o bien su negación $\neg(\mathcal{A} \in \mathcal{B})$ es cierto. Si $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ diremos que $\mathcal{A}$ es un elemento de $\mathcal{B}$ o que $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{B}$.

Definición: Una clase A se dice que es un *conjunto* si existe una clase $\mathcal{A}$ tal que $A \in \mathcal{A}$.

Es decir, todos los conjuntos son clases, pero pueden existir clases que no son conjuntos, llamadas clases propias. Una analogía para explicar esto a estudiantes de bachillerato podría ser: los conjuntos son cajas dentro de un almacén: podemos meter una caja dentro de otra más grande sin problema, compararlas... Una clase propia sería el concepto “todas las cajas del almacén”: está clara la definición como fórmula, pero este concepto no puede meterse dentro de una caja porque es todo.

De esta manera se solventan las paradojas generadas por el conjunto de todos los conjuntos, ya que tal cosa no existe: más propiamente, la clase de todos los conjuntos no es un conjunto.

No desarrollamos aquí los axiomas de la teoría de clases, que acotan las propiedades que queramos usar de estos objetos (no definidos) para no entrar en contradicciones. Preferimos, no obstante, dar más detalles sobre la otra teoría habitual de conjuntos, que se debe a Zermelo-Fraenkel.

TEORÍA DE CONJUNTOS. AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKEL

- 1) *Axioma de extensión*: dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos:

$$(\forall x)(\forall y) \left((x = y) \leftrightarrow (\forall z) \left((z \in x) \leftrightarrow (z \in y) \right) \right)$$

- 2) *Axioma de conjunto vacío*: existe un conjunto que no tiene elementos (al que representaremos por $\emptyset$ y llamaremos conjunto vacío):

$$(\exists x) \left((\forall y) (\neg(y \in x)) \right)$$

- 3) *Axioma del conjunto de dos elementos*: si a y b son conjuntos, existe un conjunto cuyos elementos son exactamente a y b :

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u) \left(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y) \right)$$

- 4) *Axioma de unión*: si x es un conjunto, existe un conjunto cuyos elementos son los elementos de todos los elementos de x :

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z) \left((z \in y) \leftrightarrow (\exists w) \left((w \in x) \wedge (z \in w) \right) \right)$$

Veamos un ejemplo sencillo para comprenderlo mejor:

Supongamos que tenemos el conjunto:

$$x = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$$

Este conjunto contiene tres elementos, y cada uno de ellos es un conjunto.

El axioma de unión dice que debe existir un conjunto y que contenga todos los elementos de todos los conjuntos que están dentro de x . Es decir:

$$y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Este nuevo conjunto y es la unión de todos los elementos de x . Dicho formalmente, y contiene todos los elementos z tales que existe algún $w \in x$ con $z \in w$.

- 5) *Axioma del conjunto de partes de un conjunto*: Si x es un conjunto, existe un conjunto $\mathcal{P}(x)$ cuyos elementos son todos los subconjuntos de x :

$$\forall x \exists y \forall z \left(z \in y \leftrightarrow \forall v (v \in z \rightarrow v \in x) \right)$$

Veámoslo también con un ejemplo:

Supongamos que tenemos el conjunto:

$$x = \{a, b\}$$

El axioma del conjunto de partes nos garantiza que existe un conjunto $y = \mathcal{P}(x)$ que contiene todos los subconjuntos posibles de x .

Los subconjuntos de $x = \{a, b\}$ son:

- $\emptyset$ (el conjunto vacío)
- $\{a\}$
- $\{b\}$
- $\{a, b\}$

Por tanto, el conjunto de partes de x es:

$$\mathcal{P}(x) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

- 6) *Axioma de infinitud*: Existe un conjunto x tal que $\emptyset \in x$ y si $u \in x$ entonces el conjunto $S(u) := u \cup \{u\} \in x$:
- $$\exists x \left(\exists u (u \in x \wedge \forall v (v \notin u)) \wedge \forall u (u \in x \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall w (w \in y \leftrightarrow w \in u \vee w = u))) \right)$$
- 7) *Axioma de selección*: Si Φ es una fórmula en el lenguaje de primer orden con el símbolo $\in$, x una variable libre en Φ y a es un conjunto, existe un conjunto compuesto por los elementos de a que verifican $\Phi(x)$.
- 8) *Axioma de reemplazamiento*: Sea Φ una fórmula en la que intervienen libremente dos variables x e y y es tal que para cada x existe como máximo un y que verifica la fórmula, entonces si a es un conjunto, existe un conjunto cuyos elementos son los conjuntos y tales que $\Phi(x, y)$ se verifica para algún elemento x de a .
- 9) *Axioma de fundamento*: Para todo conjunto no vacío x existe $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$.
- 10) *Axioma de elección*: Para cualquier conjunto no vacío f existe un conjunto g que tiene exactamente un elemento en común con cada elemento de f . Si $f: x \rightarrow y$ es una aplicación con $f(z) \neq \emptyset, \forall z \in x$, existe una aplicación $g: x \rightarrow \cup y$, tal que $g(z) \in f(z), \forall z \in x$.

Con esta axiomática se evita la paradoja de Russell: no existe el conjunto de todos los conjuntos, pues si $x \in x$, por el axioma del conjunto de dos elementos, $y = \{x\}$ es un conjunto. Pero y no cumpliría el axioma de fundamento: el único elemento de y es x y se tiene que $x \in x \cap y = \emptyset$

REPRESENTACIÓN DE CONJUNTOS

Una vez solucionado el concepto de conjunto, se puede comenzar a trabajar con ellos de manera sencilla. Para comenzar, deben definirse una serie de conceptos y operaciones, así como sus propiedades.

Definición: Un conjunto A está *incluido* en un conjunto B si todos los elementos de B también pertenecen a A . Se dice entonces que A es un *subconjunto* de B

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\neg (A \subseteq B) \Leftrightarrow \exists x (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

Para demostrar que dos conjuntos son *iguales*, basta comprobar que todo elemento del primer conjunto pertenece al segundo y que todo elemento del segundo pertenece al primero, es decir:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases}$$

Operaciones con conjuntos:

- **Unión:** es el conjunto formado por los elementos pertenecientes al menos a uno de los conjuntos. Se escribe $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x / (x \in A) \vee (x \in B)\}$$
- **Intersección:** es el conjunto formado por los elementos comunes a ambos conjuntos. Se escribe $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$
- **Diferencia:** es el conjunto formado por los elementos del primer conjunto que no pertenezcan al segundo conjunto. Se escribe $A \setminus B$ o $A - B$.

$$A \setminus B = \{x / (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$
- **Complementario:** dado un conjunto U (que se suele llamar *universo*) y de uno de sus conjuntos A , el complementario de A es el conjunto formado por todos los elementos de U que no pertenecen a A . Se escribe $\bar{A}$. Se cumple que:

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Definición: Se denominan *conjuntos disjuntos* a aquellos cuya intersección es el conjunto vacío, es decir, no tienen elementos comunes.

Propiedades:

PROPIEDAD	UNIÓN	INTERSECCIÓN
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Elemento neutro	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
Elemento universal	$A \cup U = U$	
Elemento ínfimo		$A \cap \emptyset = \emptyset$
Simplificativa	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	
Distributivas	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	

Involutiva	$\overline{(\overline{A})} = A$
Monotonía	$A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \supset \overline{B}$
Complementaria	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$
Leyes de De Morgan	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

La representación de los conjuntos suele hacerse con Diagramas de Venn, que son diagramas de círculos superpuestos donde cada círculo representa un conjunto. Pueden ser de utilidad para comprobar la validez de las propiedades de los conjuntos. Veamos por ejemplo la demostración de la segunda ley de De Morgan:

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Para demostrar la igualdad, demostramos la doble inclusión.

$\subseteq$:

Veamos que $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

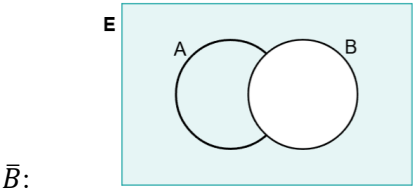
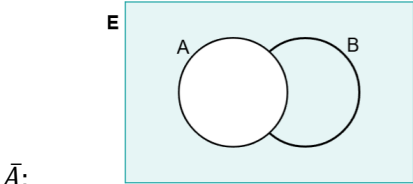
$$\text{Si } x \in \overline{(A \cap B)} \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \Rightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$$

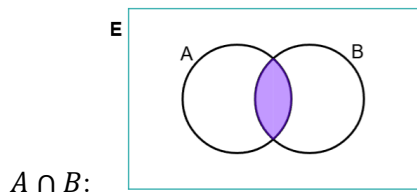
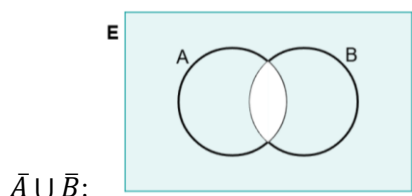
$\supseteq$:

Veamos que $\overline{(A \cap B)} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\text{Si } x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \Rightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in \overline{(A \cap B)}$$

Mientras que con Diagramas de Venn (GeoGebra Team, 2024):





Viéndose claramente que las dos últimas imágenes son complementarias.

Cabe aclarar que una demostración gráfica no es válida como demostración, pero puede facilitar la comprensión de esta.

Par ordenado:

Se llama par ordenado a una pareja de elementos (a, b) donde el orden de aparición importa. En teoría de conjuntos se puede distinguir formalmente entre (a, b) y (b, a) definiéndolo de la siguiente manera:

$$(a, b) = (\{a\}, \{a, b\})$$

En particular, se tiene que $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$

Generalización a n-uplas:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i \forall i \ 1 \leq i \leq n$$

Producto cartesiano de conjuntos:

Dados dos conjuntos A y B , el producto cartesiano de A y B , denotado por $A \times B$, es el conjunto formado por todos los pares ordenados donde el primer elemento pertenece a A y el segundo a B :

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$$

Correspondencia de un conjunto A en un conjunto B :

Se llama correspondencia de un conjunto A en un conjunto B a toda relación que asocia uno o varios elementos de A con uno o varios elementos de B . En otras palabras, si llamamos f a dicha correspondencia, entonces $f \subseteq A \times B$, es decir, f es un subconjunto de $A \times B$ donde A se llama conjunto de partida y B conjunto de llegada.

A continuación se definen algunos conceptos asociados a una correspondencia $f \subseteq A \times B$:

- **Dominio:** es el conjunto de elementos de A que se relacionan con al menos un elemento de B

$$Dom(f) = \{x \in A / \exists y \in B, (x, y) \in f\}$$

- **Imagen:** es el conjunto de elementos de B que están relacionados con algún elemento de A

$$Im(f) = \{y \in B / \exists x \in A, (x, y) \in f\}$$

- **Correspondencia inversa:** es la relación que se obtiene invirtiendo los pares ordenados: si $(a, b) \in f$, entonces $(b, a) \in f^{-1}$

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A / (x, y) \in f\}$$

Definición: Una correspondencia $f \subseteq A \times B$ es *unívoca* si

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \forall y' \in B, ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f) \Rightarrow y = y'$$

Definición: Una *aplicación* de A en B es toda correspondencia unívoca con dominio A

Notación: Si $f \subseteq A \times B$ es aplicación, dado un $a \in A$, como el $Dom(f) = A \Rightarrow \exists b \in B, (a, b) \in f$

Como f es unívoca, el elemento es único, y se denotará como $b = f(a)$ o se representará la aplicación f como $f: A \rightarrow B$

Cabe destacar tres tipos de aplicaciones especiales:

- **Inyectiva:** si no hay dos elementos diferentes de A que tengan asociada la misma imagen de B

$$\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

- **Sobreyectiva:** si todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A

$$Im(f) = B$$

- **Biyectiva:** si es a la vez inyectiva y sobreyectiva

Definición: Se denomina *cardinal* de un conjunto A, y se denota por $|A|$, al número de sus elementos. Dos conjuntos A y B se dice que tienen el mismo cardinal si existe una biyección de A en B. Se denota por $|A| = |B|$.

Un conjunto A se dice que tiene cardinal infinito si tiene el mismo cardinal que un subconjunto propio A' con $A' \neq A$. En caso contrario, se dice que el cardinal de A es finito. Propiedades:

- Reflexiva: $|A| = |A|$
- Simétrica: si $|A| = |B|$ entonces $|B| = |A|$
- Transitiva: si $|A| = |B|$ y $|B| = |C|$, entonces $|A| = |C|$

Definimos $|A| \leq |B|$ si existe una aplicación inyectiva de A en B

Merece la pena detenerse en un ejemplo interesante:

Ejemplo: $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$

Es decir, el cardinal de los números naturales es igual al cardinal de los números naturales pares. A simple vista, parece que $2\mathbb{N}$ debería tener “la mitad” de elementos que $\mathbb{N}$, ya que contiene solo los pares, pero en conjuntos infinitos no funciona así. La clave está en que se puede construir una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}$, lo cual demuestra que ambos conjuntos tienen el mismo cardinal:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}, f(n) = 2n$$

Esta función es inyectiva, ya que no hay dos números naturales distintos que den la misma imagen, y sobreyectiva, ya que todo número par aparece como imagen de algún número natural. Por lo tanto, aunque $2\mathbb{N}$ parece más pequeño que $\mathbb{N}$, tienen el mismo cardinal: $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$. Un resultado contraintuitivo pero muy interesante.

Definición: El conjunto *partes de un conjunto*, $P(C)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado. Es decir, dado un conjunto C , $P(C) = \{A / A \subseteq C\}$

Si C tiene n elementos, $P(C)$ tendrá 2^n elementos.

Demostración:

$$C = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

¿Cuántas formas tengo que formar los subconjuntos?

Regla de la multiplicación: cada elemento tiene dos opciones, estar o no estar:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$$

Teorema de Cantor:

$$|A| \neq |P(A)|$$

Se demuestra con el llamado “proceso diagonal” de Cantor, pero no se incluirá en el trabajo.

4. PROPUESTA DIDÁCTICA

En esta parte se va a explicitar la fundamentación de la UDI que se propone llevar a cabo con los estudiantes, para concretar las razones por las que se eligen o no unas metodologías o unas actividades concretas en función tanto del alumnado como del contenido objeto de estudio.

Se va a comenzar con una breve introducción a la propuesta, para posteriormente desarrollar los apartados típicos de una programación de una unidad, siguiendo un orden que facilite la comprensión y la construcción progresiva del tema.

4.1 INTRODUCCIÓN

Esta propuesta didáctica pretende iniciar al alumnado de 1.º de Bachillerato en la Lógica Proposicional y la Teoría de Conjuntos, desde un punto de vista interdisciplinar. Así pues, lo que se propone es una Unidad Didáctica Integrada conjunta entre las asignaturas de Matemáticas y Filosofía.

Desde la perspectiva de la Filosofía, se propone una aproximación crítica a la estructura del razonamiento y a los fundamentos de la validez argumentativa. A través del análisis de enunciados, silogismos y paradojas, el alumnado aprenderá a identificar las formas correctas de inferencia y a evaluar la solidez de los argumentos, no solo en contextos teóricos, sino también en la vida cotidiana y en los discursos sociales. Esta reflexión filosófica busca fomentar el pensamiento autónomo, el juicio racional y la capacidad de detectar falacias o manipulaciones argumentativas, contribuyendo así a la formación de ciudadanos informados, responsables y difíciles de influenciar sin fundamentos sólidos.

Desde la perspectiva de las Matemáticas, la unidad permite introducir al alumnado en el lenguaje formal desde una de sus manifestaciones más fundamentales: la lógica proposicional. Se trabajará el uso preciso de los conectores lógicos, la representación simbólica del razonamiento y la construcción de demostraciones sencillas a partir de sistemas axiomáticos. Además, al abordar la teoría de conjuntos, se pondrá en valor el papel de la abstracción y de la organización rigurosa del conocimiento matemático, mostrando cómo toda la edificación formal de esta disciplina se basa en unos principios iniciales que deben ser coherentes, consistentes y explícitos. Con ello, se pretende no solo mejorar la competencia matemática del alumnado, sino también despertar en él una mayor conciencia epistemológica sobre cómo se construye, valida y estructura el saber científico.

4.2 CONTEXTO

Esta propuesta didáctica está prevista para un centro educativo (público o concertado) de la Comunidad Autónoma de Castilla y León, cuyo objetivo es enriquecer el aprendizaje significativo del alumnado, favoreciendo las relaciones entre distintos contenidos y distintas áreas de conocimiento. Por tanto, el marco legal que se tendrá en cuenta será el dado por el Decreto 40/2022 del 29 de septiembre en el BOCyL (Junta de Castilla y León, 2022).

El curso al que va dirigida es 1.º de Bachillerato, ya que es donde se inician en el estudio de la Lógica en la asignatura de Filosofía, y en la asignatura de Matemáticas tiene cabida una Unidad Didáctica orientada a la preparación del tema de conjuntos y, posteriormente, su aplicación para el estudio de la probabilidad.

Por desgracia, no pude llevar a cabo esta propuesta durante mis prácticas del máster en el *IES Núñez de Arce*, ya que una unidad didáctica integrada requiere de la cooperación de dos departamentos, y la logística de un proyecto de esta envergadura superaba la duración de mi periodo de prácticas. No obstante, sí considero que se podría llevar a cabo en un instituto como ese o similar, por lo que es el que describiré para la realización de la propuesta curricular.

Se trata de un centro de titularidad pública, situado a escasos metros del ayuntamiento, en pleno centro de la ciudad de Valladolid. Está ubicado al lado del río, en la plaza de Poniente, que está muy bien comunicada en autobús con la mayoría de barrios próximos. Esta ubicación en un área urbana bien comunicada le permite acoger a alumnado de diversas procedencias, aunque con carácter general se trata de estudiantes de un entorno sociocultural y socioeconómico medio-alto. Sí que se distingue que en los cursos más bajos el perfil del alumnado es más diverso, y en cursos superiores se va homogeneizando. No obstante, en general se trata de un instituto destacado tanto por sus resultados académicos como por el perfil de alumnado, que destaca por su buen comportamiento.

En cuanto al grupo, estaba compuesto por 24 estudiantes de 1.º de Bachillerato de la rama de ciencias, por lo que presentaban una mejor predisposición hacia la asignatura de Matemáticas. Al tratarse de Bachillerato, la escolarización deja de ser obligatoria, lo que favorece el clima de aula; el ambiente era mucho más formal y respetuoso. El alumnado guardaba silencio durante la explicación y, aunque no todos mostraban interés activo, no interrumpían ni dificultaban la clase. El nivel académico era más alto, y la actitud ante la asignatura más madura. No se observaron problemas de convivencia ni de comportamiento. La clase transcurría con normalidad y el ritmo era adecuado para el nivel educativo.

Por todo ello, se ha decidido que esta propuesta utilice metodologías activas, ya que se trata de un grupo que permite el trabajo de forma más autónoma y responde bien a la cesión de responsabilidades por parte del docente.

En cuanto al contenido de la unidad, es prácticamente en su totalidad nuevo para los estudiantes, por lo que es difícil encontrar una conexión con su zona de desarrollo próximo (ZDP). Para favorecer la activación de los conocimientos previos que puedan relacionar con este temario, la unidad estará arraigada en los estudios previos sobre Aristóteles y sobre las paradojas que ya han aprendido en Filosofía. La transición hacia una lógica más formalizada, basada en símbolos, conectores y demostraciones estructuradas, puede plantearse como una extensión natural de esos contenidos, dentro de su zona de desarrollo próximo. Este enfoque favorece una construcción progresiva del conocimiento lógico, conectando lo intuitivo con lo formal, y lo filosófico con lo matemático. (Vygotsky, 1934/1995)

La propuesta se llevará a cabo en un total de 14 sesiones de 50 minutos cada una. Esto corresponde a dos semanas de docencia, ya que en el curso de 1.º de Bachillerato la asignatura de matemáticas tiene asignadas 4 horas lectivas a la semana, y a la de filosofía le corresponden 3 horas lectivas semanales.

4.3 CONTENIDO

Los contenidos que se van a trabajar en el aula para esta Unidad Didáctica serán una versión reducida de los que se presentaron en el fundamento teórico de este trabajo, ya que deben adaptarse tanto a los contenidos contemplados en el currículo como al alumnado al que está destinada.

Por una parte, se les presentarán las paradojas y los círculos lógicos, incluyendo la paradoja de Russell. De esta forma se pretende inculcarles la necesidad de la creación de un sistema formal para realizar las demostraciones de forma válida.

A raíz de esto, se introducirán brevemente las bases de un sistema formal y, para que el alumnado se familiarice con la terminología nueva, se les presentará el ejemplo MU para que lo trabajen.

En el Sistema Formal de la Lógica Proposicional, se les introducirán las tablas de verdad, las conectivas y las reglas de deducción, una parte del temario que generalmente recae sobre la asignatura de Filosofía.

A continuación, se les introducirán las demostraciones por Reducción al Absurdo, aunque es posible que alguno de los estudiantes ya las conozca si ha cursado la optativa Resolución de Problemas de 3.º ESO, ya que forma parte del temario que se trabaja.

Por otra parte, se comenzará con la parte de Conjuntos, tratando de explorar la dificultad de su definición. Se introducirán los subconjuntos y se trabajará con Diagramas de Venn. Por último, se revisarán sus operaciones más básicas y sus propiedades, haciendo hincapié en las Leyes de De Morgan.

4.4 OBJETIVOS

Se van a diferenciar entre los objetivos de etapa propios del Bachillerato, y los objetivos didácticos específicos de la propuesta:

OBJETIVOS DE ETAPA

Los objetivos de etapa vienen marcados por la ley, y son aquellos que el alumnado debe adquirir a lo largo de la etapa, como resultado del proceso de enseñanza-aprendizaje que tiene lugar en cada una de las áreas. Por tanto, son requisitos para finalizar la misma.

Los objetivos a los que se pretende aportar con esta propuesta educativa son:

b) Consolidar una madurez personal, afectivo-sexual y social que les permita actuar de forma respetuosa, responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever, detectar y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales, así como las posibles situaciones de violencia.

Principalmente se busca promover su madurez, tanto personal como social, por medio de la reflexión. Se espera que aprendiendo a razonar de una manera correcta, sin caer en inferencias erróneas, se estimule su espíritu crítico.

g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.

Con esta propuesta se espera favorecer la formación de su espíritu crítico, para evitar que se encuentren en situaciones en las que puedan ser manipulados o utilizados. Identificar y reconocer patrones de razonamientos falaces puede ser de utilidad a la hora de informarse en un mundo cada vez más inmediato, donde cualquier bulo o noticia falsa se viraliza antes de poder verificarla.

h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.

La relación entre la Filosofía y las Matemáticas busca también la reflexión sobre la evolución histórica de ambas materias, desde los inicios de la Lógica Aristotélica hasta las matemáticas que conocemos, y cómo estas se sostienen sobre la creencia de los axiomas que tomamos por válidos en nuestro sistema lógico, que de hecho no se ha probado como robusto.

j) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.

De nuevo, se busca la interiorización por parte del alumnado de la necesidad de razonar de forma correcta, como paso previo a la investigación, para la formulación de hipótesis coherentes y plausibles.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS ESPECÍFICOS

Los objetivos didácticos específicos son formulados por el docente para cada unidad concreta. Estos objetivos se diseñan en función de las características del grupo, los contenidos seleccionados y el enfoque metodológico de la propuesta, con el fin de guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Su finalidad es concretar qué se espera que el alumnado aprenda, desarrolle o consolide a lo largo de esta unidad en particular.

A continuación se presentan los objetivos didácticos planteados para esta unidad:

- 1) Dominar el uso del lenguaje simbólico de la lógica proposicional para traducir y analizar enunciados complejos de forma rigurosa
- 2) Iniciarse en la elaboración de demostraciones matemáticas formales, aplicando de manera ordenada axiomas y reglas de inferencia
- 3) Identificar conexiones conceptuales entre contenidos filosóficos y matemáticos, reconociendo la lógica como herramienta común para argumentar con precisión
- 4) Representar relaciones entre conjuntos y operaciones lógicas utilizando diagramas de Venn y analizar su utilidad como soporte visual del razonamiento
- 5) Mantener una actitud reflexiva con su propio proceso de aprendizaje, registrando de forma argumentada avances, dificultades y estrategias personales
- 6) Comprender la importancia del rigor en matemáticas y su papel en la construcción de conocimientos sólidos, fiables y coherentes, especialmente ante situaciones ambiguas o paradójicas

4.5 COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

En este apartado se van a revisar las competencias específicas correspondientes a la asignatura de Matemáticas que se van a trabajar en esta propuesta. Al ser una Unidad Didáctica Integrada, también corresponde hacer una fundamentación curricular para la asignatura de Filosofía que, si bien no se va a incluir de forma explícita en el trabajo, puede consultarse en la tabla-resumen de la unidad (*Anexo 1*).

Como ya se ha mencionado, la base de la LOMLOE reside en su enfoque competencial, ya que persigue una concepción del aprendizaje centrada en la comprensión profunda, la aplicación funcional del conocimiento y el desarrollo de capacidades transversales. Es por ello que las competencias son el eje vertebrador de cualquier unidad didáctica, ya que no basta con transmitir contenidos: es necesario diseñar experiencias de aprendizaje que permitan al alumnado movilizar los contenidos aprendidos en función del contexto que se les presente. Además, son las competencias las que guían los criterios de evaluación y la progresión real del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Así pues, con esta propuesta se espera aportar a la adquisición de las siguientes competencias:

2. *Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.*

Los contenidos que se verán en esta UDI son básicos para que los estudiantes aprendan a razonar y argumentar de manera correcta por sí mismos. Esto facilitará que, a la hora de enfrentarse a un problema, lo hagan con unas expectativas realistas de sus posibles soluciones, así como a la hora de descartar alguna de las que hayan obtenido.

3. Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.

Esta UDI proporciona al alumnado un contexto ideal para iniciarse en la formulación de conjeturas y en la investigación matemática a través de la lógica y los sistemas formales. El hecho de tener que justificar enunciados a partir de axiomas les introduce en el proceso de construcción de conocimiento matemático, no solo aplicando reglas conocidas, sino también explorando nuevas formas de razonamiento

5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.

A lo largo de las actividades propuestas, el alumnado deberá relacionar conceptos como implicación, pertenencia, subconjuntos o validez lógica, integrando procedimientos formales con argumentos deductivos. Esta articulación entre conceptos abstractos y estructuras formales permite dar sentido al aprendizaje y construir una base coherente sobre la que se asientan otras ramas de las matemáticas, contribuyendo así al desarrollo de un conocimiento matemático más profundo y estructurado.

6. Descubrir los vínculos de las Matemáticas con otras áreas de conocimiento y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.

Esta competencia se desarrolla en especial, ya que el propio concepto de UDI que se propone prioriza el establecimiento de vínculos entre distintas áreas: al integrar contenidos de Matemáticas y Filosofía, está especialmente diseñada para que el alumnado descubra y explore los vínculos entre ambas disciplinas.

4.6 CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Tal y como está planteada la LOMLOE, los criterios de evaluación están asociados a cada competencia específica, de manera que se evalúa el grado de consecución de cada una de ellas. De esta manera, se han elegido los criterios que más se adaptan al enfoque que se le da a cada una de las competencias trabajadas en esta UDI, para que la evaluación sea lo más apropiada posible.

Así, para la competencia 2 se ha elegido el criterio de evaluación 2.1:

2.1 Comprobar la validez matemática de las posibles soluciones de un problema utilizando el razonamiento y la argumentación.

Para la competencia 3 se ha elegido el criterio de evaluación 3.1:

3.1 Adquirir nuevo conocimiento matemático a partir de la formulación de conjeturas y problemas de forma guiada.

Para la competencia 5 se ha elegido el criterio de evaluación 5.1:

5.1 Manifestar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas.

Y, por último, para la competencia 6 se ha elegido el criterio de evaluación 6.2:

6.2 Analizar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad, reflexionando sobre su contribución en la propuesta de soluciones a situaciones complejas y a los retos científicos y tecnológicos que se plantean en la sociedad.

4.7 COMPETENCIAS CLAVE

A parte de las competencias específicas de cada materia, en general se espera que el alumnado adquiera y desarrolle otras destrezas, actitudes y valores para afrontar con éxito su formación y su vida, tanto personal como social y profesional. Estas son las competencias clave, que básicamente son los aprendizajes fundamentales que permiten a los estudiantes desenvolverse en contextos diversos de forma autónoma, crítica y eficaz.

Estas competencias clave también vienen recogidas en la LOMLOE, y en concreto esta propuesta didáctica espera facilitar la adquisición de las siguientes:

- *Competencia matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)*

La unidad permite al alumnado desarrollar esta competencia al enfrentarse a estructuras formales propias del pensamiento matemático, como la lógica proposicional y la teoría de conjuntos, aplicadas a situaciones de razonamiento y demostración. El uso de axiomas, inferencias y estructuras deductivas refuerza su capacidad para modelizar, argumentar con rigor y resolver problemas mediante el pensamiento lógico-matemático.

- *Competencia en comunicación lingüística (CCL)*

La formalización de enunciados filosóficos y el análisis de su validez lógica requieren una reflexión profunda sobre el lenguaje. La actividad les impulsa a traducir textos en lenguaje natural a notación simbólica y viceversa, y a justificar por escrito sus razonamientos, lo que mejora tanto su precisión expresiva como su capacidad de argumentación lógica y comunicativa. Además, el uso de conectivas de implicación y bi-implicación requiere de una comprensión profunda del lenguaje.

- *Competencia emprendedora (CE)*

El diseño de una actividad que desafía al alumnado a enfrentarse a su primera demostración formal fomenta la iniciativa personal, la creatividad y la toma de decisiones, resultando en un aumento de su autonomía.

- *Competencia digital (CD)*

Al reforzar sus estrategias de razonamiento, se les está preparando para hacer un mejor uso de las herramientas digitales a su alcance. Además, una parte importante de la competencia digital consiste en aprender a modelizar situaciones reales, y para ello es fundamental familiarizarse con el lenguaje lógico y con la noción de pertenencia a subconjuntos.

- *Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC)*

La conexión entre la lógica matemática y el pensamiento filosófico, especialmente a través de enunciados aristotélicos, ofrece al alumnado la oportunidad de valorar las raíces culturales del conocimiento y su evolución. A su vez, el diálogo entre distintas disciplinas fomenta el respeto por las distintas formas de ver y representar la realidad.

- *Competencia ciudadana (CC)*

La propuesta contribuye al desarrollo de la argumentación respetuosa y la toma de decisiones fundamentadas. Al trabajar en grupo, compartir razonamientos y valorar distintas perspectivas, el alumnado ejercita habilidades clave para una convivencia democrática, como la escucha activa, el respeto por el otro y la resolución razonada de desacuerdos.

- *Competencia social y de aprender a aprender (CPSAA)*

Al enfrentarse a una tarea compleja e inicialmente desconocida como es el construir una demostración desde cero, el alumnado desarrolla estrategias de autorregulación, perseverancia y autoconfianza. La reflexión sobre su propio proceso de aprendizaje y la coevaluación en grupo fortalecen su capacidad para aprender de forma consciente y colaborativa.

4.8 METODOLOGÍA Y RECURSOS

En este apartado se van a detallar las metodologías que han sido escogidas para desarrollar la docencia en el aula, así como los recursos y materiales que puedan ser necesarios o convenientes en función de las actividades que vayan a llevarse a cabo.

METODOLOGÍA

Como ya se mencionó, dado el perfil del alumnado se han seleccionado metodologías más activas, que permitan a los estudiantes explorar los contenidos de una forma más autónoma, con un aprendizaje guiado pero cuyo ritmo marcan ellos. Las diferentes metodologías que se van a utilizar durante la propuesta son:

- **Portfolio:**

El portfolio, o carpeta de aprendizaje, es un recurso de evaluación y formativo que poco a poco se ha convertido en una herramienta pedagógica. No se trata de una mera colección de materiales y notas, sino que debe incluir una dimensión reflexiva que invite al estudiante a recapacitar sobre su propio proceso de aprendizaje. Es un instrumento de gran utilidad para el docente, ya que facilita que la evaluación no quede reducida a su versión sumativa, sino que permite detectar necesidades, debilidades o fortalezas, así como recoger pruebas para la evaluación formativa. Esto es así ya que el portfolio refleja los esfuerzos llevados a cabo por el estudiante, y permite al docente comprobar la aplicación o desarrollo de contenidos y competencias. Además, permite visibilizar tanto el producto final como los borradores intermedios, lo que da valor al proceso de aprendizaje. Esta herramienta ofrece también al docente una panorámica del progreso individualizado del alumnado, facilitando ajustes metodológicos y fomentando una enseñanza más inclusiva (Zabala & Arnau, 2007).

La parte más importante de esta metodología, y por lo que ha sido elegida como la principal para esta unidad, es la reflexión que cada estudiante debe llevar a cabo sobre cada actividad o trabajo. Esta característica es la que permite que se trabaje la metacognición del aprendizaje.

En el marco legal, esto está estrechamente vinculado con la adquisición de la Competencia Personal, Social y de Aprender a Aprender (CPSAA), una competencia clave que busca priorizar esa metacognición, por lo que con una metodología como el portfolio se acompaña al alumnado en este proceso.

Como ya se ha mencionado, la gran mayoría del contenido de esta unidad es nuevo para el alumnado, por lo que se espera que con esta herramienta se pueda seguir de cerca la evolución de los estudiantes, y que ellos tengan un espacio para la toma de notas no sólo del temario, sino de su propia percepción sobre este.

- **Lección magistral:**

Es el método más tradicionalmente empleado en educación secundaria, y consiste en la exposición de los contenidos por parte del docente de manera oral mientras los estudiantes ejercen la escucha activa y tratan de tomar notas. La labor del docente es la de estructurar el aprendizaje, de forma que los contenidos estén sintetizados y organizados para transmitir de manera comprensible. En este caso, se va a buscar una lección magistral participativa, por lo que el papel del alumnado también cobra importancia: aparte de escuchar y elaborar sus apuntes, se espera de ellos que formen parte activa del proceso, respondiendo a las preguntas propuestas por el docente y marcando el ritmo de avance del aula en función de su comprensión del tema.

Este método ha sido seleccionado no solo por su pragmatismo a la hora de gestionar un aula con un elevado número de estudiantes, sino también por las ventajas que supone a la hora de establecer una primera toma de contacto con un tema novedoso. A pesar del auge de metodologías activas, la lección magistral continúa siendo una herramienta eficaz para introducir nuevos contenidos cuando se usa de forma estructurada y participativa (Casanova, 2011). En esta unidad, su función será la de crear un andamiaje, una base común sobre la que el alumnado pueda construir razonamientos más complejos en fases posteriores del aprendizaje. Es preferible comenzar con una lección magistral e ir alternando con otras metodologías más innovadoras poco a poco, según vayan adquiriendo la base teórica necesaria para tomar un papel más activo en su aprendizaje.

- **Aprendizaje colaborativo:**

Esta metodología utiliza el trabajo en equipos reducidos de alumnos con una finalidad didáctica, de manera que todos los estudiantes adquieran los contenidos escolares, cada uno al máximo de sus posibilidades. Además, aprenden a trabajar juntos. Es un aprendizaje que les exige un mayor nivel de responsabilidad, ya que no solo van a tener que aprender ellos de forma individual lo que el docente les enseña, sino que también deben contribuir a que lo aprendan sus compañeros de equipo.

La diferencia entre el aprendizaje colaborativo y el cooperativo es que en el colaborativo es el docente quien diseña y mantiene el control de las interacciones y los resultados que han de obtener, mientras que en el cooperativo la autonomía del alumnado es mucho mayor. Se ha elegido este como paso previo en una progresión de independencia del estudiante, donde poco a poco va adquiriendo mayor responsabilidad (Johnson & Johnson, 1999).

En relación con la LOMLOE, esta metodología favorece la adquisición de otras muchas competencias de carácter más transversal, y en concreto del *Artículo 9: Contenidos de carácter transversal* (LOMLOE, 2020) se trabajan los siguientes:

- 2. Igualmente, desde todas las materias se trabajarán las técnicas y estrategias propias de la oratoria que proporcionen al alumnado confianza en sí mismo, gestión de sus emociones y mejora de sus habilidades sociales.
- 3. Los centros educativos fomentarán la prevención y resolución pacífica de conflictos en todos los ámbitos de la vida personal, familiar y social, así como los valores que sustentan la libertad, la justicia, la igualdad, la paz, la democracia, la pluralidad, el respeto a los derechos humanos y al Estado de derecho, y el rechazo al terrorismo y a cualquier tipo de violencia.

Además, fomenta habilidades como la escucha activa, el respeto y la gestión del desacuerdo. Al trabajar en equipos, los estudiantes no solo comparten conocimiento, sino que aprenden a negociar ideas, escuchar activamente y resolver diferencias de forma constructiva, lo cual resulta especialmente valioso en una propuesta que articula contenidos matemáticos y filosóficos. Este enfoque no solo favorece el aprendizaje académico, sino también el desarrollo de la empatía, la argumentación razonada y el respeto mutuo, desembocando en el desarrollo moral y ético del alumnado.

Alternando estas tres metodologías se espera despertar el interés en los estudiantes y mantener su atención, a la par que transmitirles los conocimientos necesarios de manera que los comprendan e interioricen, dando pie a un aprendizaje significativo y, por tanto, a la transferencia del conocimiento.

RECURSOS Y MATERIALES

El uso de recursos y materiales en el aula no solo responde a una necesidad organizativa o didáctica, sino que tiene un fundamento teórico sólido en el enfoque constructivista del aprendizaje. Según Jerome Bruner (1960/1972), el conocimiento se construye a través de tres modos de representación progresiva: la fase manipulativa, en la que el alumnado aprende a través de la acción directa con objetos concretos; la fase pictórica, en la que se utilizan representaciones visuales como diagramas o esquemas; y la fase abstracta, en la que se emplea el lenguaje formal y simbólico, propio del pensamiento matemático. Incorporar materiales adecuados en cada una de estas fases permite acompañar al alumnado en el proceso de transición del pensamiento concreto al abstracto, facilitando una comprensión más profunda y significativa. Por ello, los recursos seleccionados para esta unidad no solo tienen una función instrumental, sino que están diseñados para apoyar el desarrollo cognitivo y competencial del alumnado.

Para esta unidad se han seleccionado dos recursos principales que acompañan al alumnado en su progresión desde tareas concretas hasta otras más abstractas:

- **Cartulinas:** se utilizarán como material manipulativo para que el alumnado construya diagramas de Venn físicos que representen relaciones de pertenencia, intersección o inclusión entre conjuntos. Este recurso se enmarca en la fase manipulativa, ya que permite al alumnado trabajar de forma tangible con los conceptos, visualizar estructuras y reorganizar elementos de manera directa.

- **GeoGebra:** está pensado para reproducir esos mismos diagramas en un entorno digital más dinámico.

El uso de esta herramienta permite pasar a una representación pictórica, la fase siguiente de Bruner.

Ambos recursos, por tanto, no solo facilitan la realización de las actividades propuestas, sino que están diseñados para acompañar y reforzar el proceso cognitivo por el que el alumnado transita de lo concreto a lo formal.

4.9 SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Dado el enfoque competencial y pragmático que se está priorizando, es necesario crear un contexto significativo en el que el alumnado pueda movilizar conocimientos, habilidades y actitudes para resolver el reto que se les propone de forma activa. Las situaciones de aprendizaje, tal y como se definen en el nuevo marco curricular, son escenarios pedagógicos diseñados para favorecer el desarrollo de las competencias clave, promoviendo la transferencia del aprendizaje más allá de las fronteras disciplinares.

En este caso, la unidad parte del reto de realizar su primera demostración formal. Como se parte de una UDI, es importante combinar la rama filosófica con la matemática en un mismo desafío. Es por eso que se han elegido enunciados de la filosofía aristotélica para demostrar de manera formal. Esta propuesta justifica el desarrollo progresivo de toda la unidad, desde la necesidad de un sistema formal para desarrollar las demostraciones sin caer en paradojas, pasando por el uso del sistema formal de la lógica proposicional hasta alcanzar los conjuntos y sus representaciones. El proyecto final consistirá en la consecución del reto inicial, representando el enunciado dado con subconjuntos y sus pertenencias en un diagrama de Venn y realizando su primera demostración formal a partir de unos axiomas.

Se trata, por tanto, de una situación que pone al alumnado en el centro del proceso de aprendizaje, desafiándolo a construir conocimiento a partir de herramientas formales y de un razonamiento estructurado. La propuesta conecta con el Perfil de salida del alumnado en aspectos como el pensamiento lógico y crítico, la autonomía intelectual, la resolución de problemas y la capacidad de integración entre saberes diversos.

En este sentido, esta situación de aprendizaje también ofrece un marco adecuado para aplicar metodologías activas centradas en la reflexión, la colaboración y la evaluación formativa, alineadas con el modelo competencial propuesto por la LOMLOE.

A continuación, se presenta una tabla síntesis con los elementos curriculares que conforman esta situación de aprendizaje, lo que permite tener una visión global y coherente de su diseño pedagógico. Algunas partes, como la explicitación de las actividades y su temporalización o el proceso de evaluación, serán desarrolladas en los próximos apartados. Además, y por la adecuación al trabajo que se presenta, solo se incluye la fundamentación

curricular de la parte de Matemáticas. La parte correspondiente al currículo de la asignatura de Filosofía puede consultarse en la tabla de la unidad didáctica incorporada en el *Anexo I*.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE				
Título: Mi primera demostración formal: jugando a ser Aristóteles				
Contextualización: Situación planteada en 1.º Bachillerato en el sentido algebraico para Matemáticas y en conocimiento y realidad para Filosofía. Está enmarcada en la UD12 (Sistema formal y lógica proposicional: teoría de conjuntos), en la cual propongo esta única SdA: para adquirir las bases de lo que es un sistema formal, aprender a deducir en el sistema formal de la lógica proposicional de primer orden, explorar el concepto de conjunto y sus representaciones, operaciones y propiedades y, finalmente, desarrollar un proyecto para la formalización de su primera demostración.				
Fundamentación curricular MATEMÁTICAS				
Competencias específicas	Criterios de evaluación	Indicadores de logro	Descriptorios operativos	Objetivos de etapa
CE. 2	2.1	Identifica errores o contradicciones lógicas en soluciones propias o ajenas	STEM1, STEM2, CE3	B
		Valida o descarta posibles soluciones mediante argumentos formales o apoyándose en propiedades matemáticas conocidas		
CE. 3	3.1	Formula conjeturas lógicas a partir de enunciados filosóficos	CCL1, STEM1, STEM2	B, G
		Utiliza ejemplos o contraejemplos para poner a prueba sus propias conjeturas		
CE. 5	5.1	Relaciona conceptos de lógica con estructuras de conjuntos, reconociendo equivalencias y analogías	STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CCECI	B, J
		Representa de forma coherente una situación lógica mediante diagramas de Venn		
CE. 6	6.2	Reconoce la importancia de la lógica matemática en la evolución del pensamiento filosófico y científico	CC4, CE2, CCECI	H, J
		Establece conexiones entre la necesidad de sistemas formales en matemáticas y los límites del lenguaje natural		
Contenidos del área/materia			Contenidos de carácter transversal	
D4.4, D5.2			Tecnologías de la Información y la Comunicación, gestión de sus emociones, mejora de sus habilidades sociales.	
Aprendizaje interdisciplinar: Filosofía				

Planificación de actividades y tareas					
Actividades o tareas	Método	Espacio	Agrupamiento	Tiempo	Material
Paradojas. Paradoja de Russell. Importancia del sistema formal.	Trabajo colaborativo	Aula clase	Individual	1 sesión	Portfolio
Sistema formal. MU.	Trabajo colaborativo	Aula clase	Parejas	1 sesión	Portfolio
Tablas de verdad. Conectivas. Reglas de deducción. Reducción al absurdo.	Trabajo colaborativo	Aula clase	Individual y parejas	4 sesiones	Portfolio
Conjuntos. Operaciones y propiedades. Diagramas de Venn. Leyes de De Morgan	Trabajo colaborativo	Aula clase, aula TIC	Individual	4 sesiones	Portfolio, cartulinas, ordenadores
Proyecto	Proyecto	Aula clase	Grupos de 4	4 sesiones	Portfolio, cartulinas
Proceso de evaluación del alumnado					
Instrumento de evaluación 1: Portfolio					
Indicadores de logro	Calificación		Agente	Momento	
	Peso	Herramienta			
Contiene toda la información de clase, además de reflexiones sobre el proceso de aprendizaje.	0,6	Lista de cotejo	Heteroevaluación	Final	
Instrumento de evaluación 2: Presentación del proyecto					
Indicadores de logro	Calificación		Agente	Momento	
	Peso	Herramienta			
Todos los miembros del grupo cumplen con sus roles, se expresan correctamente, el contenido de la presentación es correcto.	0,4	Rúbrica	Autoevaluación, heteroevaluación, coevaluación	Final	
Atención a las diferencias individuales					
Los agrupamientos se harán tratando de formar grupos heterogéneos, para favorecer la estimulación de los distintos perfiles del alumnado en el aula. Además, el proyecto final permitirá adaptaciones a todos los niveles que presenten los distintos estudiantes, siendo de suelo bajo y techo alto, lo que lo convierte en una tarea rica para todos (Liljedahl, 2020).					
Mecanismo de evaluación de la situación de aprendizaje					
Instrumento de evaluación: Encuesta de satisfacción					
Indicadores de logro			Agente	Momento	
El docente considera que la SdA consigue los objetivos planteados al comienzo de esta, optimizando el tiempo y facilitando la autonomía del alumnado			Autoevaluación	Evaluación continua	
El alumnado considera que la SdA satisface sus intereses y les permite adquirir y comprobar los conocimientos requeridos			Coevaluación	Final	
Propuestas de mejora					
A completar tras su puesta en práctica					

4.10 TEMPORALIZACIÓN Y DESCRIPCIÓN

En este apartado se va a describir la puesta en práctica prevista para la UDI, concretando tanto la secuencia de actividades como su distribución temporal.

La propuesta didáctica se llevará a cabo en 14 sesiones de 50 minutos (duración habitual de una clase de Bachillerato), que se han organizado en torno a cinco actividades principales. A continuación se va a desarrollar cada una de estas actividades, especificando las sesiones que se dedicarán a cada una, así como las tareas y ejemplos que se les propondrá a los estudiantes.

ACTIVIDAD 1

Esta actividad está pensada para trabajar el concepto de paradoja, presentar la paradoja de Russell y hacer consciente al alumnado de la importancia de un sistema formal en matemáticas. Está prevista su duración en una sesión.

Sesión 1:

La primera parte de la clase se empleará en proponer la *Paradoja de los dos hermanos*. Se trata de un acertijo lógico que dice así:

Un turista llega a un pueblo donde todos los habitantes son o siempre veraces o siempre mentirosos. Se encuentra con dos hermanos y pregunta:

—¿Cuál de los dos caminos lleva al castillo?

Uno de los hermanos responde:

—Mi hermano diría que es el camino de la izquierda.

¿A cuál debes ir?

Es una variante del clásico problema lógico de los dos caminos y los dos guardianes, popularizado por Raymond Smullyan (1978). Después de dejarles unos minutos para pensar, se resolvería, haciendo hincapié en que en realidad no se trata de una paradoja, puesto que una paradoja es un enunciado o conjunto de enunciados que conducen a una contradicción.

En segundo lugar, y para aclarar el concepto de paradoja, se les presentarían varias para que aprendan a diferenciarlas de los acertijos. En concreto se han pensado estas dos como ejemplos:

Paradoja de Epiménides: “Todos los cretenses son mentirosos -dicho por un cretense”

Paradoja de la omnipotencia: “¿Puede un ser omnipotente crear una piedra tan pesada que ni él mismo pueda levantar?”

Una vez se han explicado las contradicciones, se pasaría a la tercera parte de la clase, donde se mostraría la utilidad que tienen las paradojas para reflexionar en filosofía. Una buena paradoja para ilustrar esto es la siguiente:

Paradoja del Barco de Teseo: “El barco de Teseo fue conservado por los atenienses como monumento. Con el tiempo, sus partes comenzaron a deteriorarse, por lo que fueron reemplazadas una a una. Finalmente, no quedaba ninguna pieza original. ¿Sigue siendo el mismo barco? ¿Qué pasaría si alguien hubiera guardado todas las piezas originales y reconstruido el barco con ellas? ¿Cuál de los dos sería el verdadero barco de Teseo?”

De esta manera, los estudiantes podrán comprender cómo las paradojas invitan a cuestionar conceptos fundamentales y fomentan un pensamiento crítico, evidenciando la estrecha relación con la filosofía.

La cuarta parte de la clase busca mostrar la relación entre la filosofía y las matemáticas, para que comprendan el por qué de combinarlas durante las siguientes dos semanas. Para ello se les mostrarán paradojas que inciten a la reflexión en matemáticas, como por ejemplo con el concepto del infinito o el de límite:

Paradoja del hotel infinito de Hilbert: “Un hotel con infinitas habitaciones está completo. A pesar de ello, puede alojar a un nuevo huésped trasladando a los actuales de habitación.”

Paradoja de Zenón: “Para que Aquiles alcance a una tortuga que va delante, primero debe llegar al punto donde ésta estaba; pero mientras él llega, la tortuga avanza un poco más, y así sucesivamente, lo que sufre que nunca podrá alcanzarla.”

No se pretende hacer un análisis exhaustivo de estas paradojas, simplemente ilustrar que la reflexión sobre conceptos filosóficos es más cercana al ámbito científico y matemático de lo que puede parecer, para que comprendan la utilidad de unir ambas asignaturas temporalmente.

La paradoja en la que sí se busca un análisis mayor es la paradoja de Russell. Para ello, primero se les dará un enunciado más abstracto, para luego ilustrarlo con un ejemplo que facilite la comprensión de la paradoja:

Paradoja de Russell: “¿El conjunto de todos los conjuntos se incluye a sí mismo?”

Ejemplo: Paradoja del barbero: “En un pueblo, el barbero es el hombre que afeita a todos aquellos, y sólo a aquellos, que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero?”

Se trata de que vinculen ambas paradojas, ya que ilustran lo mismo: un elemento que se define en función de si se aplica a sí mismo o no.

Al ver que puede haber contradicciones en matemáticas, una disciplina que hasta ahora se les ha presentado como exacta, se busca reflexionar sobre la importancia de razonar de forma válida y correcta, cosa que a veces

el lenguaje natural no permite. Es necesaria la creación de un marco formal claro y coherente para desarrollar los razonamientos sin caer en errores lógicos profundos.

De esta forma se cierra la clase, incitando a una reflexión en sus portafolios sobre la importancia de los sistemas formales.

ACTIVIDAD 2

Esta actividad está pensada para introducir las bases de un sistema formal, cómo se construye y qué partes tiene, además de trabajar con un ejemplo simple para familiarizarse con los conceptos nuevos. Está prevista su duración en una sesión:

Sesión 2:

La primera parte de la clase se dedicará a la definición de un sistema formal, que se plantea como el marco teórico que nos permite realizar razonamientos y demostraciones sin caer en contradicciones. Para ello, se necesita un lenguaje más riguroso.

Para explicar esto, se propone una analogía entre el lenguaje natural y el de un sistema formal:

El alfabeto de este nuevo lenguaje está compuesto por variables proposicionales, conectivas y símbolos de separación. De esta manera, las nuevas frases serán las fórmulas, con sus normas de escritura para que su construcción tenga sentido.

En esta misma analogía, se pueden definir los axiomas como frases ciertas siempre. Así se introduce el concepto de tautología. Lo último que falta son las reglas de deducción, que son las que nos permiten pasar de los axiomas a otras fórmulas nuevas, llamadas teoremas.

De forma abstracta esto puede ser difícil de entender, y para practicar se propondrá un ejemplo concreto con el que trabajar las reglas de deducción y familiarizarse con lo que son los axiomas, las demostraciones y los teoremas: el sistema formal MU. La segunda y última parte de la clase se dedicará a trabajar con este sistema formal de prueba.

Los estudiantes se organizarán en grupos de dos para enfrentarse por primera vez a una actividad práctica relacionada con lo explicado. El trabajo en parejas permite que ambos estudiantes participen de manera equitativa, dialoguen sobre sus dudas y verbalicen su razonamiento, lo que refuerza el aprendizaje a través de la interacción. A diferencia del trabajo individual, esta dinámica proporciona apoyo mutuo sin que uno pueda quedar completamente pasivo, como podría ocurrir en grupos más grandes. Además, reduce la ansiedad ante el error y fomenta la reflexión compartida, sin dispersar la atención ni dificultar la coordinación, como sí puede suceder en equipos numerosos.

Como ya se les habrá explicado, para definir un sistema formal hacen falta estos cuatro elementos:

- El alfabeto: está compuesto por las letras $\{M, U, I\}$.
- El algoritmo para determinar qué sucesiones de símbolos constituyen fórmulas: cualquier sucesión finita no vacía compuesta por los tres símbolos repetidos cuantas veces se deseen.
- Los axiomas: hay un único axioma: MI
- Las reglas de deducción son las siguientes:
 - A cualquier sucesión de símbolos que termine en I se le puede añadir una U al final.
1) $\dots I \rightarrow \dots IU$
 - A cualquier fórmula que empiece con M se le puede duplicar la sucesión de símbolos posterior a la M.
2) $MX \rightarrow MXX$
 - Si en una fórmula aparecen tres I seguidas en cualquier posición, se pueden reemplazar por una U.
3) $\dots III \dots \rightarrow \dots U \dots$
 - Dos U consecutivas en cualquier posición pueden eliminarse.
4) $XUUX' \rightarrow XX'$

A partir de este enunciado, la actividad que se propone es realizar diversas demostraciones. Esto se hará en dos fases, ya que según le enfoque constructivista del aprendizaje, representado por autores como Bruner (1961), es recomendable que las actividades comiencen con una fase de exploración libre, donde el alumnado pueda interactuar con el contenido de manera intuitiva, antes de recibir una guía más formal o estructurada.

Durante esta primera fase, los estudiantes pueden probar a aplicar las normas de deducción en cualquier orden, a ver qué teoremas obtienen por sí mismos. Deben darse cuenta de que para empezar deben partir siempre de un axioma, y en este caso todos partirán del mismo porque solo hay uno. A partir de MI, pueden aplicar tanto la primera como la segunda regla, llegando a dos teoremas distintos. Deben ser conscientes de que ambos son teoremas, y si encadenan varias reglas, los pasos intermedios también son teoremas.

Después de unos minutos, se pasa a la segunda fase, donde se les proporcionará un teorema y ellos deben buscar un camino para obtenerlo, es decir, deben buscar su demostración.

Por ejemplo, si se les propone buscar una demostración para el teorema MIUIU, el camino más sencillo es:

MI, MIU, MIUIU

Aplicando primero la primera regla y después la segunda.

También se podría demostrar por un camino más largo:

MI, MII, MIII, MIU, MIUIU

De esta forma los estudiantes verán que es equivalente, pero que es preferible buscar siempre el camino más simple, para optimizar el número de pasos. Pueden proponerse varios teoremas para demostrar, en función del ritmo al que trabaje la clase.

Para finalizar la clase, se introducirá brevemente la siguiente actividad, lo que ayuda al alumnado a anticipar y preparar cognitivamente el nuevo contenido, mejorando la conexión entre sesiones y promoviendo una secuencia lógica del aprendizaje. Así pues, se les explicará que en la siguiente sesión se trabajará con otro sistema formal algo más complejo pero mucho más rico, que es el sistema formal de la lógica proposicional.

ACTIVIDAD 3

Esta actividad está pensada para trabajar el sistema formal de lógica proposicional y de primer orden. Se les definirán las conectivas y las reglas de deducción. Se introducirán las tablas de verdad como herramienta para verificar la validez de fórmulas. Se iniciará al alumnado en las demostraciones por reducción al absurdo. Está prevista su duración en cuatro sesiones.

Sesión 3:

Esta sesión seguirá una metodología de lección magistral, ya que se priorizará el ofrecer una presentación clara, estructurada y progresiva de los nuevos conceptos. Lejos de ser una metodología pasiva, se plantea como un espacio de construcción compartida del conocimiento, en el que el docente orienta el proceso y el alumnado interviene a través de ejemplos, reformulaciones y reflexiones dirigidas.

Se comenzará la clase con una explicación sobre qué son las conectivas, que como ya se mencionó en sesiones anteriores forman parte del alfabeto del sistema formal. Se introducirá como una herramienta fundamental para construir enunciados más complejos a partir de proposiciones simples. El objetivo es que el alumnado se familiarice con el significado y la función de las principales conectivas, que son la negación ($\neg$), la conjunción ($\wedge$), la disyunción ($\vee$), la implicación ($\rightarrow$) y la bi-implicación ($\Leftrightarrow$).

Es muy importante hacerles reflexionar sobre dos temas en particular para su portfolio: por una parte, la diferencia entre la implicación y la bi-implicación, que recae sobre la diferencia entre condición necesaria y condición suficiente; por otra parte, la diferencia entre la disyunción inclusiva y exclusiva:

1) Para la primera parte, se puede poner un ejemplo muy simple para ilustrar la diferencia que se quiere remarcar:

Todas las ratas son de color gris, pero ver algo de color gris no significa que se trate de una rata.

De esta manera, rata implica gris, pero gris no implica necesariamente rata. Es decir, gris es una condición necesaria para que se trate de una rata, pero no es una condición suficiente. Por ello, en este caso se utilizaría una implicación simple: $Rata \rightarrow Gris$

La bi-implicación solo se usa si la condición es a la vez necesaria y suficiente. Un ejemplo para ilustrarlo podría ser el siguiente:

Aprobarás la asignatura si sacas más de un cinco en el examen, y de ninguna otra manera.

De esta manera, sacar más de un cinco implica aprobar, y aprobar implica haber sacado más de un cinco. Por ello en este caso se utilizaría la doble implicación: $Aprobar \Leftrightarrow Sacar\ más\ de\ un\ cinco$

2) Para la segunda parte, primero hay que aclarar a qué se refieren los términos disyunción inclusiva y disyunción exclusiva. La disyunción se relaciona con la conjunción “o” en el lenguaje natural. La disyunción inclusiva es aquella que significa “una cosa, la otra, o ambas”. Sin embargo, la disyunción exclusiva sólo significa “una cosa o la otra, pero no ambas”.

En el lenguaje natural utilizamos la palabra “o” con distintos matices, a veces de forma inclusiva y otras de forma exclusiva. Se puede mostrar con algunos ejemplos:

“Apruebas o suspendes” utiliza la disyunción exclusiva, ya que no puedes aprobar o suspender a la vez.

“Puedes aprobar por el trabajo final o por la nota del examen” utiliza la disyunción inclusiva, ya que también podrías sacar buena nota en el examen y además entregar un buen trabajo.

En el lenguaje formal, la disyunción se refiere siempre a la inclusiva. Si se quisiera escribir en lenguaje formal una disyunción exclusiva, tendría que plantearse de la siguiente manera:

$(Apruebas \vee Suspendes) \wedge \neg (Apruebas \wedge Suspendes)$

Ya que parte de la disyunción y la restringe, eliminando la posibilidad de que se den ambas a la vez (conjunción).

El resto de la sesión estará dedicada por completo a que los estudiantes aprendan a traducir enunciados del lenguaje natural al simbólico. Para ello, se presentarán ejemplos cotidianos como los que se muestran a continuación:

“No está lloviendo” (negación)

“Hoy es martes y tenemos clase de matemáticas” (conjunción)

“Si llueve, no saldremos al recreo” (implicación y negación)

Progresivamente se puede aumentar el nivel, en función de la capacidad del grupo.

Sesión 4:

En esta sesión se van a introducir las tablas de verdad como una herramienta para analizar de forma sistemática el valor de verdad de expresiones lógicas en función de los valores de sus componentes. Permiten determinar cuándo un enunciado compuesto es verdadero o falso de forma clara y visual.

En la primera parte de la clase se van a utilizar para terminar de visualizar el comportamiento de los conectores lógicos, comprendiendo el significado formal de expresiones que utilizan habitualmente, como “no”, “y”, “o”, “si...”.

Para ello se les invitará a trabajar por parejas, de forma que puedan completar las tablas por sí mismos. El papel del docente será suscitar la reflexión por medio de preguntas orientativas, por ejemplo: “*Si una frase es cierta, ¿cómo será su negación?*” Pueden valerse de ejemplos para completarlas. La única indicación inicial que se les dará será que la primera parte de la tabla debe cubrir todas las posibilidades de valor de verdad, es decir, que si se tiene un solo enunciado la tabla tendrá dos filas, una si el enunciado es verdadero y otra si es falso. Si se tienen dos enunciados, se tendrán cuatro filas, de la siguiente forma:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

El objetivo es que descubran por sí mismos el significado de la cada una de las conectivas, llegando a las siguientes conclusiones:

- La negación es verdadera únicamente cuando la proposición original es falsa
- La conjunción solo es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas al mismo tiempo. Basta con que una de ellas sea falsa para que el enunciado completo lo sea también.
- La disyunción, al ser inclusiva, es falsa únicamente cuando las dos proposiciones son falsas. En cualquier otro caso, es decir, si al menos una es verdadera, el resultado será verdadero.
- La implicación solo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, ya que entonces se incumple el enunciado.
- La bi-implicación es verdadera cuando los valores del antecedente y del consecuente coincidan, ya sean verdaderos o falsos.

Al final de la clase, aparte de corregirse las tablas para todos los estudiantes, se definirán conceptos como tautología, contradicción o equivalencia, para que vean el resto de usos que tienen las tablas de verdad.

Para que entiendan los conceptos de tautología y contradicción, pueden usarse ejemplos del lenguaje natural, como:

“Llueve o no llueve”, que siempre es cierta porque siempre se dará una de las dos opciones.

“Llueve y no llueve”, que nunca se cumple porque no pueden darse ambos casos a la vez.

Por lo tanto, $p \vee \neg p$ es una tautología, mientras que $p \wedge \neg p$ es una contradicción.

También se les propondrán fórmulas lógicas equivalentes para que las comprueben realizando sus tablas de verdad y viendo que coinciden, como por ejemplo: $\alpha \rightarrow \beta$ es equivalente a $\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg \beta$	$\neg \alpha$	$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Sesión 5:

Esta sesión se aprovechará para introducir una nueva conectiva lógica: el cuantificador universal, representado como “ $\forall$ ”, que permite formular enunciados del tipo *“para todo x , se cumple...”*. Esta herramienta permite el paso de la lógica proposicional básica a la lógica de primer orden, más cercana a la estructura de los razonamientos formales en matemáticas y filosofía.

Gracias al cuantificador universal, el alumnado podrá enunciar propiedades que se aplican a todos los elementos de un conjunto, como ocurre habitualmente en matemáticas, y dar así el salto desde razonamientos basados en casos particulares a demostraciones generales.

También se introducirá la conectiva “pertenece a” ($\in$), fundamental para más adelante, cuando trabajemos con conjuntos. Esta conectiva permite expresar de forma precisa la relación entre un elemento individual y un conjunto.

El comienzo de la clase será con una discusión rápida sobre qué quiere decir realmente una afirmación como:

“Todos los cuervos son negros”.

El objetivo es que los estudiantes se den cuenta de lo que implica ese “*todos*”, de forma que cualquier cuervo debe cumplirlo. Otra forma de expresarlo, en preparación a las siguientes sesiones, sería señalando que

cualquier elemento del conjunto de todos los cuervos debe ser negro. Entonces, para todo x que pertenezca al conjunto de los cuervos, x pertenece al conjunto de los negros. La idea es reformular progresivamente la expresión por medio de esta discusión, hasta llegar a distintas formas de traducirlo al lenguaje simbólico usando el $\forall$:

$\forall x, x \text{ es cuervo} \rightarrow x \text{ es negro}$

$\forall x \in \text{Cuervos}, x \text{ es negro}$

$\forall x \in \text{Cuervos}, x \in \text{Negros}$

$\forall x, x \in \text{Cuervos} \rightarrow x \in \text{Negros}$

o similares. La intención no es ser absolutamente riguroso en la forma de traducirlo, simplemente que se acostumbren a trabajar con esta nueva nomenclatura y se familiaricen con la forma de pensar en términos lógicos y simbólicos, sin exigir una sintaxis formal estricta (al menos en esta fase introductoria). Esto mismo se puede repetir con distintas frases en lenguaje natural, para familiarizarse con la traducción al lenguaje formal.

Una vez esta parte se de por concluida, se pasará a la explicación de la regla de deducción Modus Ponens, que es la única que se les va a proporcionar en esta propuesta:

Modus Ponens (MP): las entradas $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha \rightarrow \beta \end{matrix} \right.$ producen β

Ejemplo:

- *Si estudias, aprobarás ($\text{estudiar} \rightarrow \text{aprobar}$)*
- *Estás estudiando*

Se deduce que aprobarás

Una vez explicada y ejemplificada, el resto de la clase se utilizará para practicar, dándoles varias cadenas de razonamiento con una implicación y su antecedente, y que ellos concluyan el consecuente, o bien dándoles partes incompletas y que reconstruyan las inferencias. A continuación se muestran algunos ejemplos:

Ejemplo tipo 1:

- *Si apruebas lógica, puedes acceder al siguiente curso*
- *Si estudias y practicas, apruebas lógica*
- *Marta ha estudiado y practicado*

¿Qué puedes concluir?

Ejemplo tipo 2:

- *Si una proposición es una tautología, entonces es válida en todos los casos*
- *Si es válida en todos los casos, no puede ser refutada*
- *Se concluye que no puede ser refutada*

¿Qué proposición falta?

La sesión se cerrará con una reflexión guiada sobre el uso que se hace en la vida diaria de la regla de deducción Modus Ponens, para que la incluyan en su portafolio, con ejemplos de deducciones automáticas que aplican constantemente.

Sesión 6:

Esta sesión se dedicará a trabajar la técnica de demostración por reducción al absurdo, que es un tipo de razonamiento que permite validar una afirmación partiendo de su negación y derivando una contradicción lógica. En términos generales, se parte de suponer que la afirmación que se desea demostrar es falsa, y mediante una cadena de razonamientos lógicos, se llega a una situación incompatible con las premisas o con la lógica interna del sistema, lo que obliga a rechazar la suposición inicial y, por tanto, a aceptar como verdadera la afirmación original.

Esta forma de argumentación permite al alumnado desarrollar un pensamiento lógico más flexible, al comprender que una afirmación puede ser defendida no solo de forma directa, sino también mostrando que su negación resulta insostenible.

Para que la explicación resulte más comprensible, se realizará paso a paso una demostración de ejemplo, como podría ser la que se muestra a continuación:

“No hay un número natural máximo”

Partimos de su negación, es decir, suponemos que sí existe un número natural máximo, mayor que todos los demás naturales. Llamémoslo n .

Entonces, si n es natural, $n+1$ también sería un número natural.

Pero $n+1 > n$, lo que nos lleva a una contradicción: n no puede ser el natural máximo, porque $n+1$ es natural y es mayor.

Por lo tanto, no existe tal número máximo.

Si este ejemplo aclara el procedimiento, podemos pasar a lo siguiente, que será generar una plantilla para guiar al alumnado paso a paso, que deberán registrar en su portafolio. Los pasos típicos que deben seguir para realizar una reducción al absurdo son:

- 1) ¿Qué quieres demostrar?
- 2) ¿Cuál sería la negación de esa afirmación?
- 3) ¿Qué ocurre si supones esa negación?
- 4) ¿A qué contradicción llegas?
- 5) ¿Qué puedes concluir?

Dando respuesta a estas cinco preguntas, deberían ser capaces de realizar demostraciones simples de esta manera. A continuación se les propondrán enunciados para que demuestren, como los siguientes:

Ejemplo 1: “*Si n^2 es par, entonces n es par*”

Este ejemplo es muy interesante, ya que les obliga a enlazar con la lógica tanto para traducir el enunciado como para negarlo, ya que se trata de una implicación:

- 1) Queremos demostrar: $n^2 \text{ par} \rightarrow n \text{ par}$
- 2) Suposición contraria: n^2 es par pero n es impar
- 3) Paso siguiente: n impar será del tipo $n=2k+1$ por lo que $n^2 = 4k^2+4k+1$ que es impar
- 4) Contradicción: n^2 sería impar, no par
- 5) Conclusión: si n^2 es par, n tiene que ser par

Ejemplo 2: “ *$\sqrt{2}$ no es un número racional*”

- 1) Queremos demostrar: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- 2) Suposición contraria: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a y b coprimos
- 3) Paso siguiente: $2 = \frac{a^2}{b^2}$; $a^2 = 2b^2$; a^2 es par; a es par; reiterando el argumento se demuestra que b también es par
- 4) Contradicción: a y b no son coprimos
- 5) Conclusión: $\sqrt{2}$ no es racional

Ejemplo 3: “*No existen dos enteros consecutivos que sean ambos pares*”

- 1) Queremos demostrar: no hay dos pares seguidos
- 2) Suposición contraria: existen dos enteros consecutivos que son pares
- 3) Paso siguiente: como son consecutivos, si uno es n el otro será $n+1$; pero si n es par, $n=2k$; $n+1=2k+1$ que es impar
- 4) Contradicción: si n es par, $n+1$ es impar, contradiciendo la suposición
- 5) Conclusión: dos consecutivos no pueden ser pares

La intención de esta sesión es que, a través del método de reducción al absurdo, los estudiantes aprenden a reconocer la fuerza lógica de la contradicción, y a utilizarla como herramienta válida para justificar afirmaciones.

ACTIVIDAD 4

Esta actividad está pensada para trabajar la teoría de conjuntos, tratando de introducir el concepto de conjunto para luego trabajar con los subconjuntos, sus operaciones y propiedades. Se hará especial hincapié en los diagramas de Venn, como representación esquemática de estos. En particular se destacarán las leyes de De Morgan como propiedades importantes. Está prevista su duración en cuatro sesiones:

Sesión 7:

Como introducción a la sesión, se invitará al alumnado a proponer definiciones del concepto de conjunto, partiendo de su intuición o de ejemplos cotidianos. A través de esta dinámica se espera que, al intentar definirlo, recurran involuntariamente al propio término "conjunto" o a sinónimos que no resuelven la circularidad. Algunas anticipaciones a las posibles definiciones que puedan proponer los estudiantes serían:

“Un conjunto es un grupo de cosas”

“Un conjunto es una colección de elementos”

“Un conjunto es una lista de cosas”

...

Con todas estas opciones, la labor del docente es indagar más en sus definiciones, buscando concretarlas: ¿Y qué es un grupo? ¿Y una colección?

Este punto marcará el momento clave para que el docente explique que, en matemáticas, el concepto de conjunto se considera primitivo, es decir, no se define en términos más básicos, sino que se acepta como dado. Esta reflexión permite al alumnado comprender los límites del lenguaje cuando se enfrenta a nociones fundamentales, y pone en perspectiva la necesidad de una formulación rigurosa para construir un sistema lógico coherente.

Una vez aclarado esto, se puede pasar a definir lo que es un subconjunto, introduciendo la notación de “*estar contenido en*”, con el símbolo $\subseteq$. De esta manera, un conjunto A está contenido en otro conjunto B si todos los elementos de A también son elementos de B. Para darle continuidad al tema, se propondrá a los estudiantes escribir la definición en el lenguaje lógico. Se espera que construyan una definición como:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

También se les puede proponer la negación de la pertenencia, para que reflexionen sobre la diferencia entre “*para todo*” y el “*existe un*”, que son contrarios. Se espera que lleguen a la siguiente definición:

$$\neg (A \subseteq B) \Leftrightarrow \exists x (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

La última parte de la clase se utilizará para trabajar con las operaciones con conjuntos, trabajando la unión, la intersección, la diferencia y el complementario. Se les proporcionará la definición escrita, y se espera que sean capaces de sacar la traducción al lenguaje formal:

- **Unión:** es el conjunto formado por los elementos pertenecientes al menos a uno de los conjuntos. Se escribe $A \cup B$.
$$A \cup B = \{x / (x \in A) \vee (x \in B)\}$$
- **Intersección:** es el conjunto formado por los elementos comunes a ambos conjuntos. Se escribe $A \cap B$.
$$A \cap B = \{x / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$
- **Diferencia:** es el conjunto formado por los elementos del primer conjunto que no pertenezcan al segundo conjunto. Se escribe $A \setminus B$ o $A - B$.
$$A \setminus B = \{x / (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$
- **Complementario:** dado un conjunto A y un conjunto universo U al que pertenecen todos los elementos posibles del contexto, se llama complementario de A al conjunto $\bar{A}$ formado por todos los elementos de U que no pertenecen a A .
$$\bar{A} = \{x / (x \notin A)\}$$

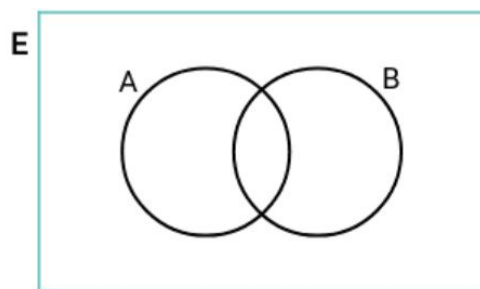
Para dar por finalizada la sesión, y aprovechando que acaba de introducirse el conjunto universo U , también se les presentará el conjunto vacío $\emptyset$, que es aquel que no tiene ningún elemento.

Sesión 8:

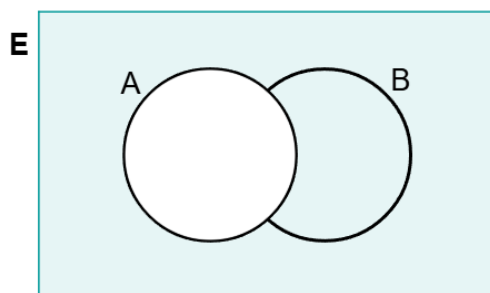
En esta sesión se van a introducir los diagramas de Venn. Se espera que sea un recurso muy útil para el alumnado, ya que facilita la comprensión profunda de algunos de los conceptos ya introducidos, gracias a la representación esquemática y por tanto más visual.

Los diagramas de Venn son diagramas de círculos superpuestos donde cada círculo representa un conjunto. Con esta representación se clarifica la idea de unión, intersección, diferencia, complementario e incluso la de subconjunto.

En esta sesión se van a utilizar cartulinas para representar los primeros diagramas de Venn. Se les dará una plantilla en blanco y negro, con diagramas “mudos” como el que se muestra a continuación, y se les propondrá que resalten en cada uno de los diagramas la parte que pida el enunciado.



Por ejemplo, si se pide el complementario de A, deberán responder resaltándolo de la siguiente manera:



La plantilla mostrará cuatro diagramas en blanco, para que trabajen la unión, la intersección, la diferencia y el complementario.

Una vez hayan completado la plantilla por completo, pasarán al aula TIC para comprobarla utilizando GeoGebra. Existen diversos recursos para utilizar diagramas de Venn ya creados, pero se prepararía un GeoGebra Classroom para crear un entorno de aprendizaje más guiado, creado específicamente para esta actividad y esta ficha en concreto.

La última parte de la clase será con ejemplos concretos, para que se acostumbren a trabajar estas operaciones con conjuntos reales, conociendo sus elementos. Por ejemplo, a partir de:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

Se les pediría calcular:

$$A \setminus B = \{1, 3, 5, 13\}$$

$$B \setminus A = \{4, 6, 10, 12\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13\}$$

$$A \cap B = \{2, 8\}$$

$$\bar{A} = \{4, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$$

$$\bar{B} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

Incluyendo colocar los números en un diagrama de Venn como el de la plantilla.

Sesión 9:

Esta sesión se dedicará de manera íntegra a estudiar las propiedades de los conjuntos, con el objetivo de que el alumnado no solo las conozca, sino que las comprenda y razone por sí mismo. En lugar de presentarlas como una lista de reglas formales para memorizar, se trabajarán de forma visual utilizando para cada una su correspondiente diagrama de Venn.

El listado de propiedades propuestas para esta sesión será el siguiente:

- Idempotente:
 - Unión:

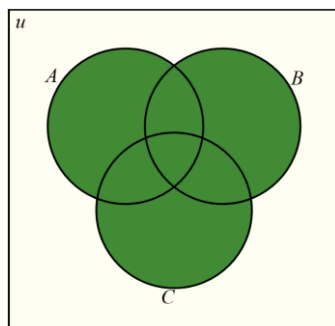
$$A \cup A = A$$
 - Intersección:

$$A \cap A = A$$

Cabe destacar que estos diagramas son los más básicos, ya que solo interviene un conjunto consigo mismo.

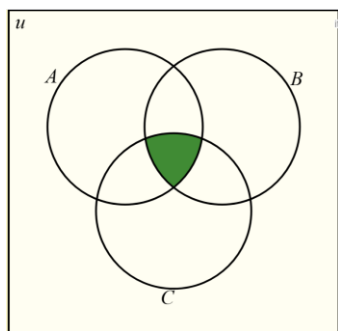
- Asociativa:
 - Unión:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$



- Intersección:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$



A partir de los diagramas con tres conjuntos, se espera que se reconozca la independencia del orden para formarlos. Si no, en lugar de razonar la propiedad sobre el diagrama estático, puede ser interesante que los construyan de las dos formas diferentes, para que vean que efectivamente coinciden.

- Conmutativa:
 - Unión:

$$A \cup B = B \cup A$$
 - Intersección:

$$A \cap B = B \cap A$$

Estas son mucho más intuitivas, se espera que el alumnado las comprenda con facilidad sobre el diagrama estático.

- Elemento neutro:
 - Unión:

$$A \cup \emptyset = A$$
 - Intersección:

$$A \cap U = A$$
- Elemento universal:
 - Unión:

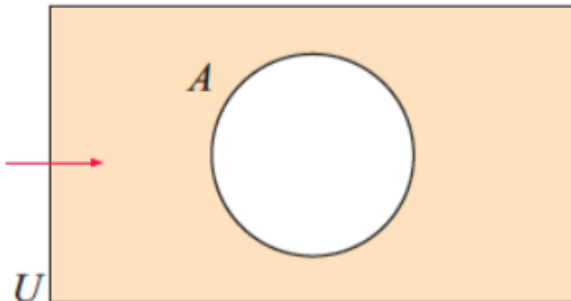
$$A \cup U = U$$
- Elemento ínfimo:
 - Intersección:

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
- Simplificativa:
 - $A \cup (A \cap B) = A$
 - $A \cap (A \cup B) = A$
- Distributivas:
 - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

- Involutiva:

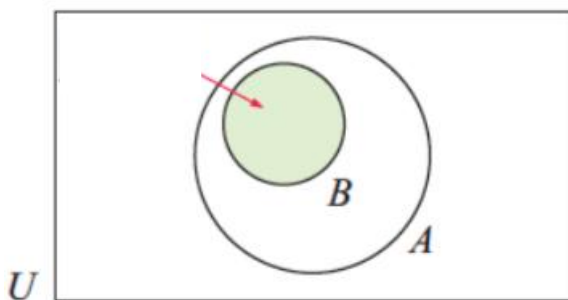
- $\overline{\overline{A}} = A$

Se puede visualizar a partir del $\overline{A}$:



- Monotonía:

- $B \subset A \Leftrightarrow \overline{B} \supset \overline{A}$



- Complementaria:

- $A \cup \overline{A} = U$

- $A \cap \overline{A} = \emptyset$

El resto de diagramas no se ha incluido en el presente trabajo, aunque podrían razonarse sin dificultad a partir de los ejemplos ya presentados.

Las leyes de De Morgan, que también son propiedades, se dejarán para la siguiente clase.

Sesión 10:

En esta sesión se trabajarán las leyes de De Morgan, dos reglas fundamentales que permiten trabajar la negación de una unión o una intersección en expresiones equivalentes. Estas leyes muestran cómo la negación afecta a las operaciones de conjunto, cambiando una unión por una intersección y viceversa. El alumnado deberá comprender que negar “A o B” equivale a decir “no A y no B”, y que negar “A y B” equivale a decir “no A o no B”.

La sesión tiene como objetivo que el alumnado no solo memorice estas leyes, sino que entienda su lógica interna y aprenda a aplicarlas. Se les pedirá que hagan una interpretación intuitiva para su porfolio de lo que significa cada una de estas propiedades.

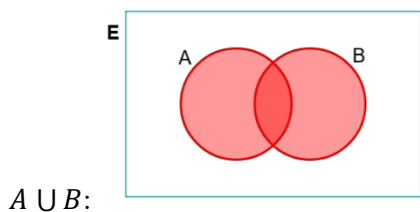
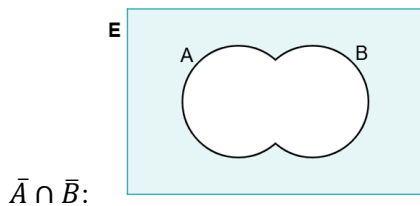
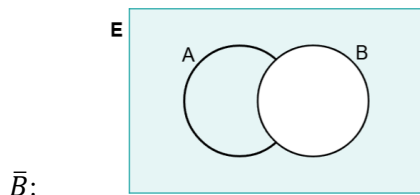
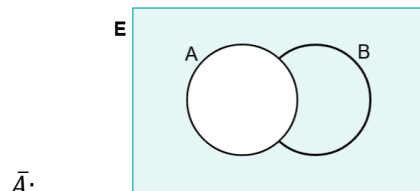
Estas leyes requieren un razonamiento más guiado. Es por ello que la construcción de estos diagramas se hará paso por paso:

- Primera ley de De Morgan:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Interpretación intuitiva: “Lo que no está en A ni en B es exactamente lo que está fuera de A y también fuera de B”.

Los diagramas para razonarla serán los siguientes, paso por paso:



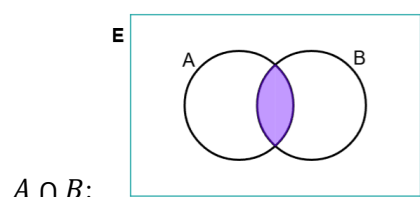
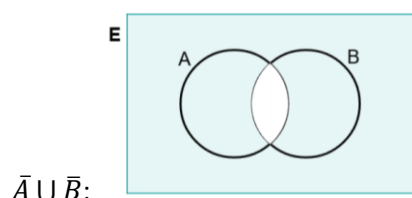
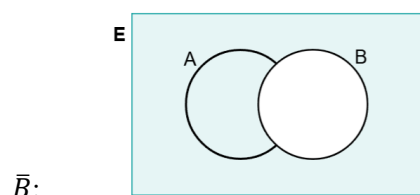
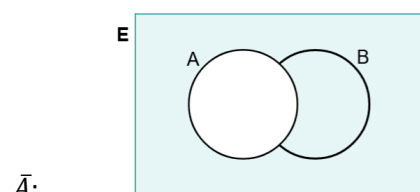
Viéndose que los dos últimos son complementarios.

- Segunda ley de De Morgan:

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Interpretación intuitiva: “*Todo lo que no pertenece simultáneamente a A y a B se encuentra o fuera de A, o fuera de B, o fuera de ambos*”.

Los diagramas para razonarla serán los siguientes, paso por paso:



Viéndose que los dos últimos son complementarios.

ACTIVIDAD 5

Esta actividad está pensada para cerrar la UDI. Consiste en la realización de un proyecto que condense todo lo que se ha trabajado a lo largo de la unidad. Está prevista su duración en cuatro sesiones.

Sesión 11:

En esta primera parte del proyecto, lo primero es organizar los grupos de trabajo colaborativo para el resto de la UDI. Estos los conformará el docente, buscando formar grupos heterogéneos. Dentro de este objetivo, el docente podrá tener en consideración las preferencias e incompatibilidades de sus estudiantes, ya que se da por hecho que los conoce bien. De esta forma, se busca asegurar una buena cohesión entre los participantes, para favorecer un clima de trabajo apropiado y agradable.

Una vez estos estén formados, se procederá al reparto de roles. La intención con esta organización interna de los grupos es garantizar la participación de todos los estudiantes por igual en el trabajo, cada uno cumpliendo además con el papel que se le haya asignado. En este caso, los grupos serán de cuatro estudiantes, por lo que serán necesarios cuatro roles:

- **Coordinador o portavoz:** encargado de organizar las tareas dentro del grupo, asegurarse de que se cumple con los plazos y representar al grupo cuando sea necesario intervenir en el aula o trasladar decisiones al docente.
- **Secretario:** responsable de tomar nota de las decisiones del grupo, registrar el progreso y recopilar las aportaciones de cada miembro.
- **Moderador o facilitador:** su función será velar por un reparto equilibrado en las intervenciones, fomentar la participación de todos los miembros y mediar en caso de desacuerdos.
- **Responsable de recursos o materiales:** gestionará el uso de materiales físicos o digitales necesarios para las tareas, se encargará de buscar la información cuando se necesite y velará por el buen uso de las herramientas durante el trabajo.

Esta estructura busca fomentar el sentido de pertenencia al grupo y la distribución equitativa de carga de trabajo, al mismo tiempo que se desarrollan competencias como la comunicación, la planificación, la colaboración y la resolución de conflictos. Los roles, en principio, se mantendrán fijos durante todo el proyecto, debido a su corta duración. Además, de esta manera se facilita el proceso de coevaluación.

Una vez se han repartido los roles, y todos los estudiantes han entendido cuál es su labor, se procederá a explicar la propuesta de proyecto:

A cada grupo se le va a proporcionar un enunciado filosófico de Aristóteles. Se les pide que lo representen con un diagrama de Venn, y que formalicen su demostración a partir de unos axiomas que vendrán dados con el enunciado. A continuación se desarrolla un ejemplo:

“Todos los hombres son mortales”

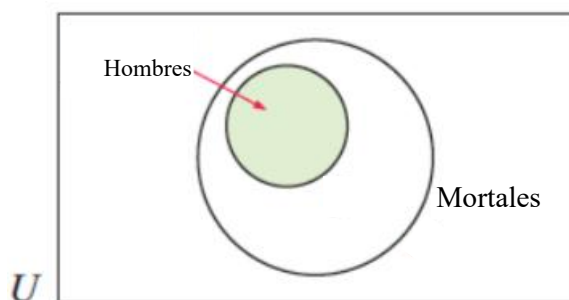
Axiomas:

- A1: $\forall x (x \in \text{Hombres} \rightarrow x \in \text{Seres humanos})$
- A2: $\forall x (x \in \text{Seres humanos} \rightarrow x \in \text{Seres vivos})$
- A3: $\forall x (x \in \text{Seres vivos} \rightarrow x \in \text{Mortales})$

Este sería un enunciado dado a uno de los equipos. Ellos deberán, por una parte, representar el enunciado en términos de conjuntos, y con un diagrama de Venn, y por otra parte demostrar su validez a partir de los axiomas. Lo esperable sería que llegaran a lo siguiente:

a) Representación:

Hombres $\subseteq$ Mortales



b) Demostración:

Se razonará por reducción al absurdo:

Partíamos del siguiente enunciado: $\forall x (x \in \text{Hombres} \rightarrow x \in \text{Mortales})$

Supongamos lo contrario de lo que se quiere demostrar, es decir, existe un hombre (llamémosle x) que no es mortal:

$$\exists x / ((x \in \text{Hombres}) \wedge (x \notin \text{Mortales}))$$

- A4 (por MP y A1): $x \in \text{Seres humanos}$
- A5 (por MP en 2 y 4): $x \in \text{Seres vivos}$
- A6 (por MP 3 y 5): $x \in \text{Mortales}$

Lo que lleva a una contradicción, ya que $x \notin \text{Mortales}$. Es decir, la suposición inicial es falsa

Luego se concluye que todos los hombres son mortales: $\forall x (x \in \text{Hombres} \rightarrow x \in \text{Mortales})$

Esta es la propuesta de actividad para cada uno de los grupos.

Sesión 12:

Esta sesión se dedicará entera a la realización del proyecto, trabajando de forma autónoma en los grupos. La función del docente durante esta sesión será de facilitador, acompañando a los estudiantes, supervisando su trabajo, y guiándoles con preguntas estratégicas y pistas si es que ellos lo requieren. Esto forma parte de la metodología del trabajo colaborativo, donde el docente, lejos de transmitir el conocimiento de forma directa, actúa como mediador del aprendizaje.

Será responsabilidad del alumnado aprovechar la clase para preguntar las dudas que tengan o solicitar la ayuda que necesiten para poder finalizar la tarea correctamente, ya que será la única sesión para hacerlo. Al finalizar la clase, se revisará el estado de avance de cada grupo para asegurarse de que estén en condiciones de entregar el producto final en la fecha establecida. Cualquier grupo que no haya avanzado lo suficiente deberá continuar fuera del horario lectivo.

Sesiones 13 y 14:

Las últimas dos sesiones de la UDI se dedicarán a la exposición de los proyectos y su evaluación.

Todos los grupos deberán salir a exponer de forma oral su trabajo, dado que cada equipo tendrá un enunciado Aristotélico diferente. Los cuatro participantes deberán intervenir por igual, para que el resto de la clase pueda coevaluarles de manera individual.

En cuanto a la evaluación, cada estudiante se encargará de valorar tanto la intervención de sus compañeros como la propia mediante una rúbrica previamente diseñada. Esta evaluación no tiene solo intención formativa, sino también sumativa, por lo que será guiada y supervisada por el docente para garantizar su objetividad y coherencia. Por ello se han previsto dos sesiones de exposiciones, durante las cuales presentarán tres grupos por día. El tiempo restante de cada sesión se dedicará a ofrecer una retroalimentación formativa, así como a facilitar una reflexión guiada antes de completar la evaluación entre iguales.

Respecto a la rúbrica, se centrará especialmente en aspectos como la claridad expositiva, la fluidez en la comunicación oral, la precisión en el uso del lenguaje, la organización del contenido y la corrección conceptual. También se tendrá en cuenta la capacidad de responder a preguntas y de mantener la atención del público, así como el grado de implicación individual en la presentación grupal.

Con esta dinámica se busca fomentar la capacidad crítica del alumnado, además de aumentar las retroalimentaciones generar más propuestas de mejora al tener mayor implicación e interacción con el proceso de evaluación.

4.11 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Esta unidad didáctica se ha diseñado teniendo en cuenta la diversidad del alumnado, entendida no solo como la existencia de necesidades educativas específicas, sino como una realidad presente en todo grupo. Con el objetivo de garantizar la participación y el progreso de todos los estudiantes, se ha adoptado el enfoque del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA).

El DUA es un enfoque pedagógico que promueve una planificación educativa flexible y proactiva, capaz de prever y eliminar barreras al aprendizaje antes de que estas aparezcan. Esto se hace anticipando las diferentes formas en que los estudiantes acceden a la información, se implican en el aprendizaje y expresan sus conocimientos. Frente al modelo tradicional basado en adaptaciones reactivas, es decir, en respuesta a las necesidades observadas, el DUA plantea desde el inicio una propuesta didáctica lo suficientemente variada y accesible como para reducir al máximo las barreras para el aprendizaje. Su objetivo no es uniformizar la forma de aprender del alumnado, sino ofrecer múltiples caminos para alcanzar los objetivos comunes, respetando los ritmos y las necesidades individuales de cada estudiante (MEFP, 2022).

Se basa en tres principios fundamentales:

1. **Proporcionar múltiples formas de representación de la información y los contenidos.** Esto se refiere al qué del aprendizaje, y en esta unidad se ha tenido en cuenta de la siguiente manera:

Los contenidos se ofrecen de forma oral, escrita y visual, incluyendo diagramas de Venn, ejemplos del lenguaje cotidiano y apoyos manipulativos. En caso necesario, se reformularán definiciones o se apoyará con esquemas para favorecer la comprensión de alumnado con dificultades en el procesamiento abstracto.

2. **Proporcionar múltiples formas de expresión del aprendizaje.** Esto se refiere al cómo del aprendizaje, ya que cada persona tiene sus propias habilidades de expresar lo que sabe. En esta unidad se ha previsto lo siguiente:

Se permite a los estudiantes demostrar lo aprendido a través de distintos formatos (como la exposición oral o el portfolio) y se contemplan ajustes de nivel o formato para aquellos casos en los que así lo requieran los informes de orientación. En estos casos, se facilitarán tareas adaptadas, objetivos intermedios o tiempos ampliados, siempre supervisados por el docente y coordinados con el equipo de orientación del centro.

3. **Proporcionar múltiples formas de implicación.** Esto conforma el porqué del aprendizaje, y se ha favorecido en esta unidad como sigue:

El proyecto final y las actividades intermedias permiten a los estudiantes interactuar activamente con el contenido, favoreciendo la motivación. Además, dentro de los grupos de trabajo se establecen roles diferenciados para facilitar que cada alumno pueda aportar desde sus fortalezas, y se trata de favorecer un clima de aula positivo que permita la participación sin temor al error.

Además, los agrupamientos colaborativos y heterogéneos permiten que los estudiantes con mayor facilidad en la materia puedan acompañar a quienes encuentran más dificultades, generando una dinámica de aprendizaje entre iguales que beneficia a ambos perfiles. Todo ello contribuye a un diseño que prioriza el aprendizaje personalizado, inclusivo y competencial, en línea con los principios que rigen el marco educativo actual.

4.12 EVALUACIÓN

La evaluación tiene dos partes: la primera, la evaluación del nivel de aprendizaje del alumnado, y la segunda, la evaluación de la propia unidad didáctica y de la actividad docente.

EVALUACIÓN DEL NIVEL DE APRENDIZAJE DEL ALUMNADO

La evaluación en el marco de la LOMLOE adquiere un papel fundamental que trasciende la mera calificación numérica. Al tratarse de un aprendizaje basado en competencias, la evaluación debe centrarse también en estas. Por tanto, evaluar consiste en valorar en qué grado se han adquirido las competencias que se trabajaban en la unidad. Es por eso que los criterios de evaluación van asociados a cada competencia, como ya se mencionó en su correspondiente apartado.

La ley pone especial énfasis en distinguir entre evaluar y calificar, entendiendo la evaluación como un proceso integral y formativo que permite conocer el progreso del alumnado, identificar dificultades y fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, la evaluación no se limita a un juicio final, sino que constituye una herramienta para acompañar y mejorar el proceso educativo, favoreciendo la retroalimentación positiva y la autorregulación del estudiante. La calificación, por su parte, es una consecuencia puntual que refleja un nivel de logro, pero no satisface la función formativa de la evaluación.

La LOMLOE establece que la evaluación debe ser continua, integral, global, formativa y participativa, y en ese sentido se enmarca el diseño de la evaluación en esta UDI. Esto implica una concepción amplia y dinámica del proceso evaluador. Que sea continua significa que no se limite a momentos puntuales, sino que acompañe al alumnado a lo largo de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, permitiendo detectar avances, dificultades y necesidades de apoyo. La evaluación integral hace referencia a que debe valorar no solo los conocimientos, sino también las competencias, actitudes y procesos implicados, teniendo en cuenta todas las dimensiones del desarrollo del estudiante. Que sea global supone que debe contemplar el conjunto de aprendizajes y no fragmentarse por áreas o actividades aisladas. En cuanto a su dimensión formativa, la evaluación busca mejorar el aprendizaje ofreciendo retroalimentación constante, ayudando al alumnado a reflexionar sobre su progreso y a tomar decisiones conscientes sobre su estudio. Finalmente, al ser participativa, se reconoce al alumnado como agente activo del proceso evaluador, promoviendo el diálogo entre docentes y estudiantes. Esto contribuye a una mayor implicación y responsabilidad en su propio aprendizaje (Tekman Education, s.f.).

Es clave entender que la evaluación formativa y sumativa son complementarias. La evaluación formativa se centra en el seguimiento del aprendizaje, facilitando al alumnado y al docente información para ajustar y mejorar la enseñanza y el estudio, mientras que la evaluación sumativa tiene lugar en momentos concretos para valorar el nivel de adquisición de competencias y contenidos.

Para estructurar la evaluación de manera rigurosa y coherente, se pueden identificar cuatro pasos fundamentales: el qué, el cómo, el cuándo y el quién.

- **El qué:** corresponde a los indicadores de logro vinculados a los criterios de evaluación. Estos indicadores son las expresiones concretas y observables que permiten medir el grado de consecución de los objetivos de la unidad. Se redactan de forma explícita y son específicos de cada unidad.

Establecer claramente estos indicadores es fundamental para orientar tanto la enseñanza como la evaluación.

- **El cómo:** hace referencia a los instrumentos de evaluación que se emplearán para recoger evidencias sobre el aprendizaje. Es importante distinguir entre instrumentos y herramientas:

Los instrumentos son los objetos de evaluación, por ejemplo una prueba escrita o un trabajo. Por tanto, estos son las pruebas o actividades que el estudiante realiza para demostrar su aprendizaje o competencia. Son el “producto” del aprendizaje que se evalúa.

Las herramientas son los medios para registrar o facilitar la evaluación, por ejemplo una rúbrica o una lista de cotejo. Por tanto, son los recursos que facilitan la recogida, registro y análisis de la información sobre el aprendizaje del estudiante.

Estos instrumentos permiten valorar tanto el conocimiento como las habilidades sociales y la capacidad de argumentación, fundamentales en un enfoque interdisciplinar.

- **El cuándo:** es el momento o los momentos en que se realiza la evaluación. La evaluación puede distribuirse en tres fases: inicial, continua y final:
 - La evaluación inicial permite conocer el punto de partida del alumnado y orientar al docente para preparar la enseñanza.
 - La evaluación continua, que es la más extensa, acompaña el desarrollo de las actividades y proyectos, favoreciendo la retroalimentación constante y la corrección de posibles desviaciones. Se suele corresponder con la evaluación formativa.
 - La evaluación final valora el grado de consecución de los objetivos al concluir la unidad. Se suele corresponder con la evaluación sumativa.

Es importante destacar la relevancia de la evaluación formativa, especialmente durante la fase continua, pues permite un seguimiento detallado del proceso de aprendizaje y fomenta la autonomía del alumnado.

- **El quién:** son los agentes que participan en la evaluación. La LOMLOE contempla diferentes tipos de evaluación: la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación:
 - La autoevaluación está a cargo del propio estudiante, que debe reflexionar sobre su aprendizaje.
 - La coevaluación depende del resto de compañeros, que valorarán el trabajo mutuo.
 - La heteroevaluación corresponde a la valoración externa por parte del docente.

Lo ideal es un equilibrio entre estas modalidades.

Además, de acuerdo con lo establecido en la LOMLOE, especialmente en lo relativo al desarrollo de competencias clave y contenidos de carácter transversal, resulta conveniente que las unidades didácticas incluyan actividades de exposición oral por parte del alumnado, como medio para trabajar la comunicación y la argumentación.

En relación con la aplicación concreta de esta unidad, la evaluación seguirá el esquema anteriormente descrito:

- **El qué:** en el caso de la presente unidad, los indicadores de logro están relacionados con la capacidad del alumnado para identificar errores lógicos, formular conjeturas, representar situaciones lógicas con diagramas de Venn y comprender la relación entre lógica matemática y filosofía. Estos criterios permiten verificar que el alumnado también desarrolle competencias de razonamiento lógico y argumentación filosófica. Pueden comprobarse en la tabla de la situación de aprendizaje del apartado 4.9.
- **El cómo:** se van a utilizar principalmente dos instrumentos de evaluación: el portfolio y la presentación del proyecto:
 - El portfolio actúa como el principal instrumento, recogiendo evidencias escritas y reflexivas sobre el proceso de aprendizaje. Como herramienta se utilizará una lista de cotejo como la que se muestra a continuación, que garantiza objetividad y claridad.

Indicador de logro	Cumple (✓)	No cumple (X)	Observaciones
El portfolio recoge de forma completa los contenidos tratados en clase			
Incluye reflexiones personales sobre el proceso de aprendizaje			
Se aprecian intentos de conexión entre conceptos matemáticos y filosóficos			
Contiene esquemas o diagramas que representan visualmente conceptos de lógica o conjuntos			
Se han realizado correcciones o revisiones sobre errores previos			
El formato es claro, ordenado y adecuado para su revisión			

- La presentación del proyecto se evalúa con una rúbrica detallada como la siguiente, que contempla aspectos comunicativos, colaborativos y de contenido.

Criterio	4 – Excelente	3 – Bien	2 – Suficiente	1 – Insuficiente
Contenido	Contenido completo, preciso y bien fundamentado	Contenido adecuado con pequeñas imprecisiones	Algunos errores conceptuales o lagunas en el contenido	Contenido incompleto o erróneo
Claridad y expresión oral	Discurso fluido, vocabulario preciso, tono adecuado	Discurso comprensible con pocos errores	Presentación poco clara, con errores frecuentes	Dificultades graves de comunicación
Uso de recursos visuales	Uso excelente de diagramas, símbolos lógicos, Venn, etc.	Uso adecuado con algunos fallos menores	Recursos mal integrados o poco relevantes	Ausencia de recursos visuales o uso incorrecto
Participación equilibrada	Todos los miembros participan de forma equitativa	Participación mayoritaria, pero no totalmente equilibrada	Uno o dos miembros dominan la exposición	Participación desigual, varios miembros apenas intervienen
Relación con los objetivos de la unidad	Muestra comprensión profunda del tema	Relación clara con los objetivos, aunque con mejorable	Relación algo forzada o superficial con los objetivos	No se evidencian los objetivos o están confundidos

Ambas herramientas permiten una evaluación integral, que no solo valora el producto final, sino también el proceso.

- **El cuándo:** la evaluación inicial no se ha previsto en esta unidad, dado que se trata de contenido nuevo y no se espera que el alumnado tenga unas bases asentadas. Para la evaluación continua, está prevista durante las sesiones mediante el seguimiento del portfolio y la observación del trabajo en clase. Por último, la evaluación final se llevará a cabo con la entrega del portfolio completo y la exposición del proyecto.
- **El quién:** el docente es responsable de la heteroevaluación del portfolio y participa en la coevaluación de las presentaciones. El alumnado, por su parte, se involucra en la autoevaluación y la coevaluación durante la preparación y presentación del proyecto, promoviendo una actitud crítica y colaborativa.

EVALUACIÓN DE LA UDI Y LA ACTIVIDAD DOCENTE

Para llevar a cabo esta evaluación, se deberá evaluar si la propuesta educativa cumple con los objetivos específicos que planteaba. No debe evaluarse solamente en base a la opinión del docente, ya que también se busca obtener información sobre el desarrollo de la actividad docente.

Aunque la unidad no se ha puesto en práctica aún, sí se han planteado mecanismos de evaluación para valorar la efectividad y la percepción del alumnado. Esto incluirá encuestas de satisfacción donde el alumnado podrá expresar su opinión sobre el desarrollo y los resultados de la unidad, y una autoevaluación docente basada en la observación y análisis del cumplimiento de los objetivos. Estos datos permitirán realizar propuestas de mejora para futuras implementaciones, fomentando un ciclo de mejora continua en la enseñanza.

A continuación se muestra una propuesta de rúbricaa para la evaluación de la UDI a cargo del alumnado:

Criterio	4 – Siempre / Totalmente	3 – Casi siempre	2 – A veces	1 – Rara vez / Nunca
He comprendido los conceptos básicos de lógica proposicional y teoría de conjuntos.				
He participado activamente en las actividades individuales y en pareja.				
He sabido conectar las ideas vistas en Filosofía con los contenidos de Matemáticas.				
He mantenido actualizado y completo mi portfolio personal.				
He reflexionado sobre mi propio aprendizaje en el portfolio.				
He asumido mi rol y he contribuido al trabajo del grupo en el proyecto final.				
He aprendido a razonar de forma más lógica, crítica y estructurada.				
Me he sentido motivado/a por esta forma de trabajar.				

La siguiente es la rúbrica diseñada para la autoevaluación de la UDI a cargo del propio docente:

Criterio	4 – Excelente	3 – Adecuado	2 – Mejorable	1 – Insuficiente
Los contenidos seleccionados han sido pertinentes y significativos				
Las actividades han favorecido el aprendizaje interdisciplinar				
El alumnado ha mostrado interés y participación activa				
Se han respetado los tiempos previstos y el desarrollo ha sido fluido				
Las adaptaciones para diversidad han resultado eficaces				
Los instrumentos de evaluación han proporcionado información útil y válida				
La evaluación formativa se ha integrado de forma constante en las sesiones				
El enfoque competencial se ha evidenciado a lo largo de la unidad				
El proyecto final ha servido para consolidar y aplicar los aprendizajes				
El feedback del alumnado ha sido positivo o ha aportado mejoras relevantes				

4.13 CONCLUSIONES

La propuesta didáctica desarrollada a lo largo de este trabajo representa una forma alternativa de concebir la enseñanza de la lógica proposicional y la teoría de conjuntos en 1.º de Bachillerato, integrando los saberes de las asignaturas de Matemáticas y Filosofía en una misma situación de aprendizaje. Esta unidad no busca únicamente transmitir contenidos conceptuales, sino también ofrecer al alumnado una experiencia educativa que ponga en valor el pensamiento formal, la argumentación rigurosa y la comprensión profunda de los sistemas formales desde múltiples perspectivas disciplinares.

Uno de los principales objetivos de esta propuesta ha sido favorecer una aproximación significativa a los contenidos, alejándose de una enseñanza exclusivamente técnica o memorística, y orientándose en cambio hacia una metodología activa, competencial y reflexiva. Para ello, se han combinado actividades manipulativas, trabajo en parejas, tareas colaborativas, ejercicios prácticos, exposición de paradojas filosóficas y desarrollo de un proyecto final en el que el alumnado tiene la oportunidad de construir su propia demostración formal. Esta diversidad de enfoques permite atender a distintos ritmos y estilos de aprendizaje, al tiempo que favorece una mayor implicación personal en el proceso educativo.

Frente a modelos tradicionales más centrados en el producto final que en el proceso, esta unidad pone el foco en el desarrollo del pensamiento lógico desde la exploración inicial hasta la formalización, pasando por la experimentación, la duda y el error como partes esenciales del aprendizaje. En este sentido, se asume que la adquisición del lenguaje lógico no debe reducirse a un conjunto de normas simbólicas, sino entenderse como un proceso de construcción de significado, en el que el alumnado debe ser protagonista activo. El uso de paradojas como recurso inicial cumple una función provocadora e inductiva, despertando la curiosidad intelectual y facilitando la comprensión de por qué son necesarios los sistemas formales.

La interdisciplinariedad, lejos de ser un simple añadido, se presenta como el eje vertebrador de la unidad. La lógica proposicional se muestra aquí como un puente natural entre las Matemáticas y la Filosofía, permitiendo que los aprendizajes ganen coherencia y transversalidad. Esta conexión entre áreas facilita no solo una mejor comprensión de los contenidos, sino también el desarrollo de competencias clave como el pensamiento crítico, la comunicación argumentativa y la capacidad para aplicar conocimientos a contextos diversos.

Además, se ha optado por un agrupamiento flexible y estratégico: el trabajo por parejas se plantea como la estructura más adecuada para abordar los primeros retos prácticos, ya que permite que el alumnado se enfrente a las dificultades con apoyo inmediato, fomente el diálogo didáctico y genere una primera capa de reflexión conjunta sin diluir responsabilidades, como podría ocurrir en grupos más amplios. Posteriormente, el proyecto final se plantea en grupos de cuatro, lo que permite una mejor distribución de tareas complejas y ayuda a trabajar mejor en equipo, fortaleciendo sus capacidades de liderazgo y gestión del tiempo.

A nivel metodológico, se apuesta por la evaluación continua, formativa, global e integradora, coherente con los principios de la LOMLOE. La evaluación no se entiende como un momento puntual ni como un

instrumento de control, sino como parte inherente del proceso de aprendizaje. A través del portfolio, el alumnado construye progresivamente una evidencia de su recorrido personal, al tiempo que recibe retroalimentación constante que le permite mejorar y reorientar su trabajo. Además, la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación ofrecen diferentes miradas complementarias sobre el proceso, fomentando la toma de conciencia, la autonomía y la corresponsabilidad.

El uso de instrumentos variados, como rúbricas, listas de cotejo, observaciones y presentaciones orales, permite evaluar no solo el resultado final, sino también aspectos como el razonamiento, la implicación, la creatividad, el esfuerzo sostenido o la claridad comunicativa. Esta diversidad de instrumentos hace que la evaluación se adapte mejor a la complejidad de los aprendizajes esperados.

Por otra parte, se considera clave evaluar también la unidad didáctica como diseño educativo. Para ello, se prevé la recogida de impresiones del alumnado mediante encuestas, así como una reflexión docente continua sobre la adecuación de tiempos, contenidos y metodologías. Esta mirada crítica sobre la práctica propia forma parte de un compromiso con la mejora continua y con el principio de calidad educativa.

Es importante señalar que este tipo de propuestas innovadoras pueden requerir un mayor esfuerzo de preparación y adaptación por parte del docente, especialmente en etapas como el Bachillerato, donde el enfoque académico y el peso de la evaluación externa condicionan fuertemente el diseño curricular. Sin embargo, se defiende firmemente que una enseñanza más rica, interdisciplinar y centrada en el pensamiento profundo no solo es compatible con los objetivos de esta etapa, sino que resulta más eficaz a largo plazo para la formación integral del alumnado.

En definitiva, esta unidad didáctica pretende ser una invitación a repensar cómo enseñamos contenidos fundamentales que suelen abordarse de manera excesivamente formal o fragmentada. La lógica, lejos de ser un saber árido o abstracto, se convierte aquí en una herramienta viva, conectada con la argumentación filosófica, con el rigor matemático, y con la capacidad humana de pensar con claridad. Me gustaría que esta propuesta, aún sujeta a revisión y mejora, pueda llegar a aplicarse en el aula y contribuir, aunque sea modestamente, a una educación más crítica, reflexiva y coherente con los principios pedagógicos del siglo XXI.

5. BIBLIOGRAFÍA

- BOE. (2020). *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE)*. Boletín Oficial del Estado, 340, 122868–123003. <https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3>
- Bruner, J. S. (1972). *El proceso de la educación* (4.^a ed.). Madrid: Morata. (Obra original publicada en 1960)
- Cameron, P. J. (1998). *Sets, Logic and Categories* (Springer undergraduate mathematics series). Springer-Verlag London. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0589-3>
- Cano Torres, J. M. (2024). *Introducción axiomática a la lógica* [Material docente no publicado]. Asignatura “Complementos de matemáticas”. Universidad de Valladolid.
- Carbonero Martín, M. Á. (2024). *Psicología de la educación* [Material docente no publicado]. Asignatura “Aprendizaje y desarrollo de la personalidad”. Universidad de Valladolid.
- Casanova, M. A. (2011). *La observación y la investigación en el aula*. Narcea.
- Comisión Europea. (2010). *EUROPA 2020: Una estrategia para un crecimiento inteligente, sostenible e integrador*. <https://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=COM:2010:2020:FIN:ES:PDF>
- Deaño, A. (1974). *Introducción a la lógica formal*. Alianza Editorial.
- GeoGebra Team. (2024). *GeoGebra* (versión 7.0) [Software matemático]. GeoGebra. <https://www.geogebra.org>
- Gutiérrez Ortega, M. (2024). *Panorámica general de las políticas educativas nacionales y europeas* [Material docente no publicado]. Asignatura “Procesos y contextos educativos”. Universidad de Valladolid.
- Hofstadter, D. R. (1979). *Gödel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle* [Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid]. Siglo XXI Editores.
- Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1999). *Aprender juntos y solos. Aprendizaje cooperativo*. Paidós.
- Junta de Castilla y León. (2022). *Decreto 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León*. Boletín Oficial de Castilla y León, 190, 30 de septiembre de 2022.
- Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2021). *Diseño Universal para el Aprendizaje: Una guía para docentes*. Secretaría de Estado de Educación.

- Naciones Unidas. (2015). *Transformar nuestro mundo: La Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*. <https://sdgs.un.org/2030agenda>
- Sanz Sánchez, F. (2016). *Teoría de clases y conjuntos. Axiomas* [Material docente no publicado]. Asignatura “Topología”. Grado en Matemáticas. Universidad de Valladolid.
- Smullyan, R. (1978). *What is the Name of This Book? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall.
- Sorensen, R. (2003). *A brief history of the paradox*. Oxford University Press.
- Tekman Education. (s.f.). *LOMLOE: evaluación por competencias*. Recuperado el 20 de mayo de 2025, de <https://www.tekmaneducation.com/lomloe-evaluacion-competencias/>
- Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje* (A. Kozulin, Ed.). AKAL. (Obra original publicada en 1934)
- Zabala, A., & Arnau, L. (2007). *11 ideas clave. Cómo aprender y enseñar competencias*. Graó.

6. ANEXO I

A continuación se muestra una tabla-resumen de la UDI, con la fundamentación curricular completa tanto para la asignatura de Matemáticas como para la de Filosofía.

Matemáticas: sentido algebraico Filosofía: conocimiento y realidad		UD12: Sistema formal y lógica proposicional: teoría de conjuntos			3.ª Evaluación	6 sesiones Filosofía 8 sesiones Matemáticas
Objetivos de etapa: B, G, H, J						
Saberes básicos (D40/2022)		C. esp.	Cr. Ev.	Descriptor	Objetivos didácticos	
Fund. curr. MATEMÁTICAS	D4.4. Álgebra simbólica en la representación y explicación de relaciones matemáticas de la ciencia y la tecnología. D5.2. Comparación de algoritmos alternativos para el mismo problema mediante el razonamiento lógico.	2	2.1	STEM1-2, CE3	1	Dominar el uso del lenguaje simbólico de la lógica proposicional para traducir y analizar enunciados complejos de forma rigurosa
		3	3.1	CCL1, STEM 1-2	2	Iniciarse en la elaboración de demostraciones matemáticas formales
		5	5.1	STEM1-3, CD2-3, CCEC1	3	Identificar conexiones conceptuales entre contenidos filosóficos y matemáticos
		6	6.2	CC4, CE2, CCEC1	4	Representar relaciones entre conjuntos y operaciones lógicas utilizando diagramas de Venn
Fund. curr. FILOSOFÍA	B1.6. Lógica Formal, Aristotélica y Proposicional	3	3.2	CCL1-2	5	Mantener una actitud reflexiva con su propio proceso de aprendizaje
		7	7.1	CCL2-3, STEM2, CPSAA4, CC1-3-4, CCEC1	6	Comprender la importancia del rigor en matemáticas y su papel en la construcción de conocimientos sólidos, fiables y coherentes, especialmente ante situaciones ambiguas o paradójicas
Recursos						
Espacios: Aula clase, aula TIC		Agrupamientos: grupos de cuatro, parejas y trabajo individual			Material: Porfolio, cartulinas, ordenadores	
ACNEAE: Agrupamientos heterogéneos, adaptaciones de nivel al proyecto final						
Evaluación: Porfolio (60 %), presentaciones (20 %), autoevaluación (10 %) y coevaluación (10 %)						