UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

EL CONCEPTO DE ÁREA DE SUPERFICIES PLANAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: Irene Pérez Lorenzo

Tutor: José Cano Torre

Valladolid, Junio de 2025

Índice general

Resumen

Este Trabajo Final de Máster comienza con un capítulo sobre la evolución del concepto de área a lo largo de la historia, desde los primeros cálculos aproximados de los egipcios, hasta el cálculo integral, pasando por el estudio axiomático del área. Se muestra cómo la idea de área surge de forma natural y aunque parece simple, es difícil de definir con rigurosidad. Además, se abordan algunos problemas antiguos relacionado con el cálculo de áreas.

En el segundo capítulo se realiza una análisis didáctico del concepto de área, empezando con un breve repaso de referentes teóricos en la didáctica de las matemáticas y cómo sus teorías pueden aplicarse al concepto de área. Después, se reflexiona sobre la complejidad de definir el área en secundaria y el impacto que tiene la definición escogida. Por último, se añaden algunas recomendaciones para la enseñanza del concepto de área basadas en los estudios de Rosa Corberan.

Para terminar, en el tercer capítulo se presenta una secuencia didáctica, diseñada a partir de análisis didáctico de capitulo 2, que pretende promover un aprendizaje significativo del concepto de área.

Palabras clave:

ÁREA, COMPRENSIÓN, EDUCACIÓN, GEOMETRÍA

Abstract

This Master's Final Project begins with a chapter on the evolution of the concept of area throughout history, from the early approximate calculations of the Egyptians to integral calculus, including the axiomatic study of area. It is shown how the idea of area arises naturally and, although it seems simple, it is difficult to define rigorously. Additionally, some ancient problems related to area calculation are addressed.

The second chapter presents a didactic analysis of the concept of area, starting with a brief review of theoretical references in mathematics education and how their theories can be applied to the concept of area. Then, there is a reflection on the complexity of defining area at the secondary level and the impact that the chosen definition can have. Finally, some recommendations for teaching the concept of area are included, based on the studies by Rosa Corberan.

Lastly, the third chapter presents a teaching sequence designed based on the didactic analysis in Chapter 2, aimed at promoting meaningful learning of the concept of area.

key words:

AREA, UNDERSTANDING, EDUACTION, GEOMETRY

Introducción

El concepto de área es uno de los primeros que se enseñan en la escuela, puede parecer simple e intuitivo, pero entender bien qué es el área y por qué se calcula de ciertas formas no es nada fácil.

Estudiar áreas es importante porque ayuda a desarrollar el pensamiento espacial y a conectar las matemáticas con el mundo real, sin embargo, en la Educación Secundaria, los temas de áreas suelen enseñarse de forma rápida y el aprendizaje se centra en la memorización de fórmulas y la aplicación en ejercicios mecánicos.

El objetivo principal de este trabajo es reflexionar sobre cómo se enseña el área en Secundaria, y proponer una forma de trabajar este tema que ayude a los estudiantes a comprenderlo mejor.

Capítulo 1

La evolución del concepto de área

El concepto de área ha sido fundamental en la historia de las matemáticas, desde sus primeras aplicaciones prácticas en la antigüedad, hasta su formalización en los sistemas axiomáticos modernos. Este desarrollo no solo refleja la evolución de las matemáticas, sino también el crecimiento de la capacidad humana para comprender y describir el mundo a su alrededor con precisión y rigor. En este capítulo, exploraremos su origen en las primeras civilizaciones, como los egipcios y babilonios, que ya utilizaban métodos empíricos para calcular áreas de figuras sencillas en sus aplicaciones arquitectónicas y agrícolas.

A medida que avanzamos en el tiempo, veremos cómo los matemáticos clásicos comenzaron a investigar el concepto de área con mayor profundidad, lo que llevó a la formulación de métodos más abstractos y rigurosos. Además, reflexionaremos sobre la cuadratura del círculo, uno de los problemas de áreas más intrigantes de la antigüedad, que ocupó a los matemáticos durante siglos.

También abordaremos la definición axiomática del área, primero con el enfoque de Euclides en su Elementos y después con el de Hilbert, que ofreció una reformulación aún más rigurosa dentro del marco de los sistemas axiomáticos modernos.

Otro aspecto interesante que exploraremos en este capítulo es la evolución de los métodos para calcular el área los triángulos, desde la sencilla formula de base por altura divido entre dos, hasta una más compleja que relaciona el producto de los lados de un triángulo con su área, pasando por la famosa formula de Herón.

Finalmente, veremos cómo la noción de área se formaliza en el análisis matemático a través de la integral, un concepto que revolucionó el cálculo de áreas en figuras más complejas. Este recorrido nos permitirá comprender la evolución del concepto de área y su importancia en el desarrollo de las matemáticas.

1. El origen del concepto de área

La noción de magnitudes geométricas, como la longitud, el área o el volumen, tiene un origen muy antiguo, estrechamente vinculado a necesidades cotidianas, como medir la distancia entre dos puntos, calcular la extensión de un terreno o determinar la cantidad de un líquido como vino o aceite. No es sorprendente, entonces, que las primeras civilizaciones desarrollaran métodos para realizar estos cálculos, al menos en casos simples.

Esto es evidente en las civilizaciones egipcia y babilónica, de las cuales nos han llegado ejemplos de problemas resueltos y algunas reglas prácticas, aunque no un método sistemático de cálculo.

El ser humano ha necesitado desde tiempos muy antiguos medir la tierra. Esta necesidad práctica fue una de las primeras motivaciones para desarrollar el concepto de área, mucho antes de que existiera una formulación matemática como la que conocemos hoy. Por eso, las primeras medidas nacieron en el contexto del trabajo agrícola.

En muchas civilizaciones antiguas, el área de un terreno no se medía con unidades geométricas cuadradas, como hoy hacemos con el metro cuadrado. En lugar de eso, se usaban unidades vinculadas al tiempo que una persona o una yunta de animales tardaban en cultivar una superficie. En España la unidad más conocida es la yugada, una medida de superficie agrícola que equivale la cantidad de tierra que recorre en un día un arado tirado por animales unidos por un yugo. La extensión de una yugada no era uniforme y variaba considerablemente entre diferentes regiones y épocas. Por ejemplo, en algunas zonas de España, una yugada podía equivaler a aproximadamente 2,700 m^2 (El Profe José, 2014). Este enfoque refleja una forma muy práctica de entender el espacio: no como algo abstracto, sino como algo ligado directamente a la experiencia y el trabajo humano.

Además, es interesante notar que el área no se concebía desde el inicio como una magnitud bidimensional. Primero se midieron distancias, es decir, longitudes unidimensionales, como el codo o el pie. Solo más adelante surgió la idea de multiplicar dos longitudes para obtener una medida de superficie. Este paso, aunque hoy pueda parecer simple, supuso un avance conceptual importante. La noción de unidad cuadrada es la clave para entender por qué el área de un rectángulo se calcula multiplicando la base por la altura. Si tomamos una longitud (la base) y colocamos, por ejemplo, 5 unidades cuadradas una al lado de la otra, y luego repetimos esa fila verticalmente tantas veces como indica la altura (por ejemplo, 3 veces), estamos construyendo una malla de unidades cuadradas que llenan completamente el rectángulo como puede verse en la figura 1.1. Así, 5 unidades en la base por 3 en la altura generan 15 unidades cuadradas, que es el área total. Multiplicar base por altura es, entonces, una forma de contar cuántas veces se puede replicar una misma unidad cuadrada dentro de la figura, consolidando así la noción de superficie como algo formado por la repetición ordenada de una unidad bidimensional.

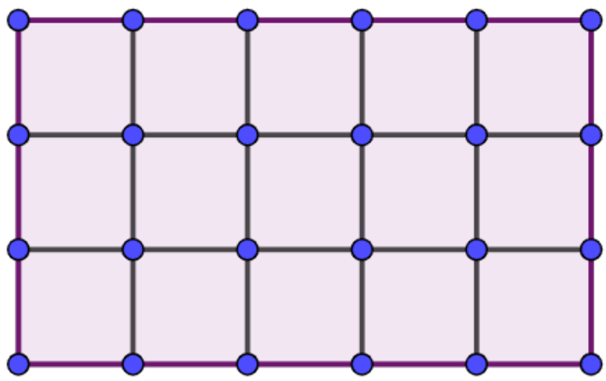

Figura 1.1: Área del rectángulo

A partir de este principio, se deduce que el área de un triángulo equivale a la mitad del área de un rectángulo con la misma base y altura (esto lo veremos con más detenimiento en le capitulo 3). Para figuras poligonales más complejas, se utilizaba el método de disección, que consistía en dividir la figura en triángulos como se ve en la figura 1.2.

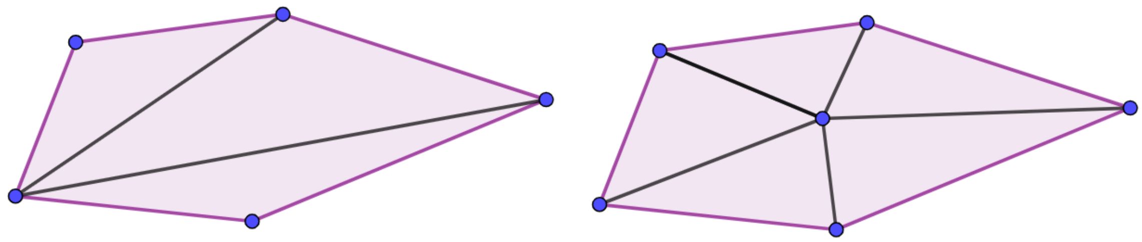

Figura 1.2: Disección

Los resultados que obtenían, normalmente a partir de una secuencia de instrucciones aritméticas, eran hallados de manera empírica y en muchos casos eran incorrectos. Bombal Gordón (2012) da algunos ejemplos de esto: los egipcios utilizaban la formula

$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

para calcular el área de cualquier cuadrilátero cuya medida de lados sucesivos es a, b, c y d. En textos antiguos es común encontrar procedimientos para resolver problemas sin justificación teórica, por ejemplo, los egipcios utilizaban la aproximación

$$A = \left(\frac{16}{9}r^2\right)$$

para calcular el área de un círculo con radio r, mientras que los babilonios empleaban

$$A = 3r^2,$$

sin embargo, no existen registros que expliquen el razonamiento detrás de estas ideas.

2. El concepto de área en Grecia

Los pensadores griegos no aceptaban respuestas basadas únicamente en la autoridad del pasado. En su búsqueda de explicaciones racionales, sentaron las bases de la Filosofía, las Matemáticas y la Ciencia en su sentido moderno. Se atribuye a Tales de Mileto (640-546 a.C.), uno de los Siete Sabios de Grecia, la introducción de la demostración matemática. A partir de su trabajo, los griegos desarrollaron métodos que dieron lugar al sistema axiomático y al razonamiento lógico-deductivo, que serviría de modelo para las matemáticas posteriores.

Este enfoque consistía en construir el conocimiento matemático a partir de un conjunto reducido de axiomas o verdades evidentes, de los cuales se deducían nuevos resultados mediante pasos lógicos rigurosos. Aristóteles subrayó la importancia de que los conceptos fueran consistentes y verificables mediante construcción geométrica. Por lo tanto, los matemáticos griegos, guiados por un ideal de orden, simplicidad y belleza, se centraron en demostrar teoremas utilizando únicamente la regla y el compás.

Así, la rigurosidad matemática griega se consolidó principalmente en el ámbito de la geometría plana y tridimensional, con especial énfasis en los objetos que podían construirse con regla y compás. Los 3 problemas de construcción con regla y compás más famosos son los *"problemas clásicos"*: la trisección del angulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del circulo. Nos centraremos en este último, por estar relacionado con el concepto de área.

2.1. La cuadrátura del circulo

Bombal Gordón (2012) examina la historia de la cuadratura del círculo como una obsesión matemática milenaria, una de las cuestiones matemáticas más fascinantes y desafiantes a lo largo de la historia. Desde la antigüedad, matemáticos de distintas épocas han intentado resolverlo utilizando herramientas geométricas. La búsqueda de una solución a este problema no solo ha impulsado el desarrollo de la geometría, sino que también ha llevado a descubrimientos fundamentales en el ámbito de los números irracionales. El problema consiste en construir un cuadrado con el mismo área que el de un circulo dado utilizando solo regla y compás.

Antes de plantearse el problema de la cuadratura del circulo, los griegos resolvieron otras cuadraturas. En general, los problemas de cuadratura consistían en construir un cuadrado con el mismo área que una figura dada. A continuación, veremos como resolvieron los griegos los problemas de la cuadratura de rectángulos, triángulos y polígonos.

Empezamos con el rectángulo, partimos de un rectángulo $ABCD$ como el de la figura 1.3. Primero construimos el punto E, que esta en la recta CD y a la misma distancia de C que B. Luego calculamos el punto F, que es el punto medio entre D y E. A continuación marcamos el punto G, que esta en la recta CB y está a la misma distancia de F que E. Por último, construimos un cuadrado que tenga por lado el segmento CG. Ahora veremos que el cuadrado que hemos construido tiene el mismo área que el rectángulo $ABCD$. Para ello llamaremos a al segmento FG, b al segmento FC y c al segmento CG. La altura del rectángulo $ABCD$ es $a - b$, mientras que la anchura vale $a + b$, por lo tanto el área del rectángulo sera $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 = c^2$, que coincide con el área del cuadrado.

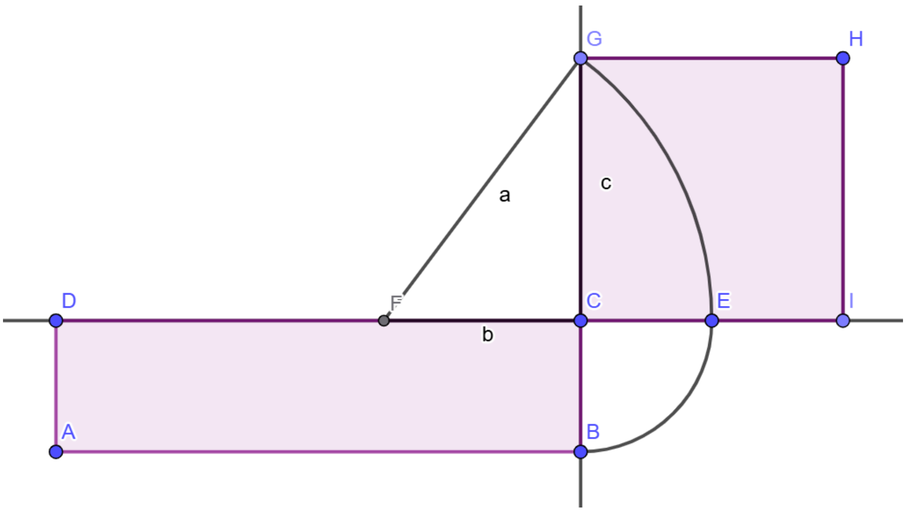

Figura 1.3: Cuadratura del rectángulo

Para resolver la cuadratura del triángulo es suficiente con encontrar un rectángulo que tenga el mismo área que el triangulo dado y luego hallar la cuadratura del rectángulo obtenido, esto es muy sencillo teniendo en cuenta que el área de un triángulo es igual al área de un rectángulo con la mitad de base (ver figura 1.4).

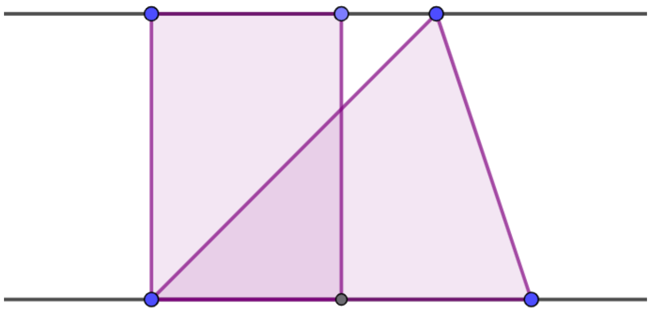

Figura 1.4: Cuadratura del triángulo

Una vez tenemos esto ya podemos hallar la cuadratura de cualquier polígono, trasformando previamente el polígono en un triángulo de igual área, como explica Galván (2005). Veamos un ejemplo de como se haría eso para el caso del pentágono $ABCDE$ que vemos en la figura 1.5. El procedimiento general consiste en "ir eliminando lados" utilizando que el área de dos triángulos con igual base y con altura en una misma recta paralela a la base tienen el mismo área. Veamos como funciona esto en el ejemplo, el pentágono $ABCDE$ tiene el mismo área que el cuadrilátero $ABCF$ porque los triángulos AED y ADF tienen el mismo área, así hemos eliminado un lado. Con un razonamiento análogo podemos eliminar otro (ver figura 1.6), el cuadrilátero $ABCF$ tiene el mismo área que el triángulo AGF porque los triángulos BCF y BGF tiene el mismo área.

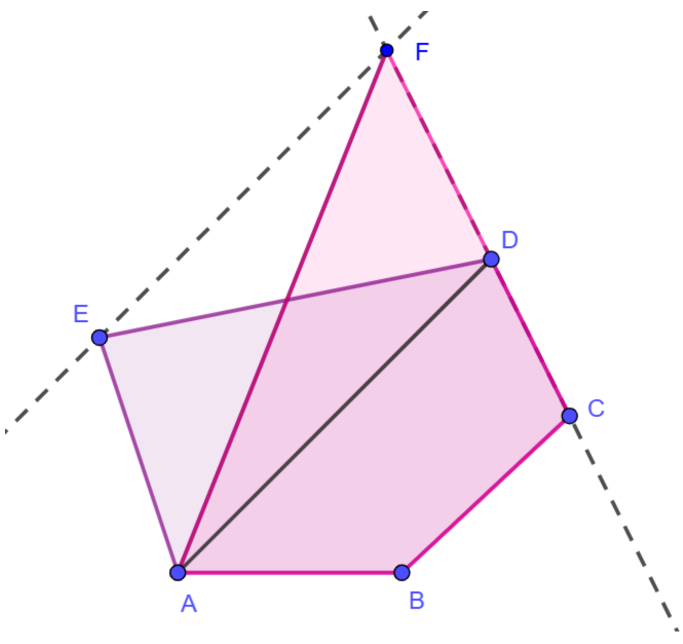

Figura 1.5: De pentágono a cuadrilátero

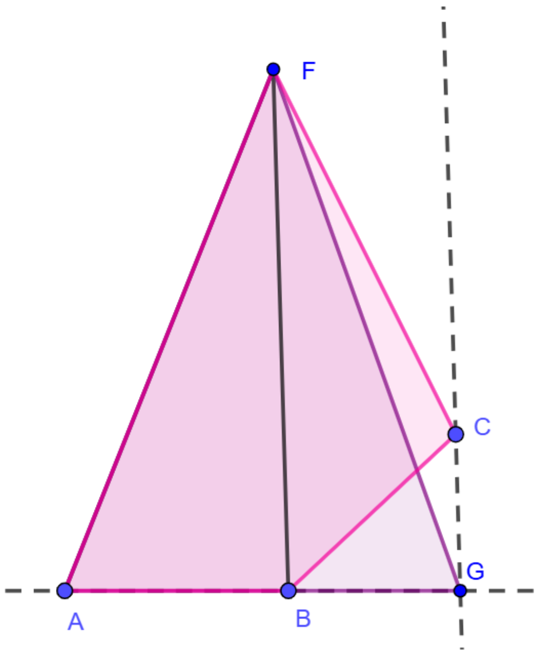

Figura 1.6: De cuadrilátero a triángulo

Los griegos asumieron como evidente que todas las figuras geométricas planas tenían un área. Sin embargo, no estaba nada claro que las regiones limitadas por líneas no poligonales pudieran cuadrarse, es decir, construir un cuadrado con la misma área. La primera cuadratura rigurosa (con regla y compás) de una figura curvilínea se debe a Hipócrates, se trata de la cuadratura de una lúnula, es decir, una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia. Concretamente, el caso tratado por Hipócrates es el de la lúnula formada por el semicírculo construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles y el construido sobre uno de sus catetos, como se ve en la figura 1.7.

En la demostración, Hipócrates uso que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio, este fue un hecho aceptado por las civilizaciones más antiguas, como las egipcias y mesopotámicas (junto con el de que la longitud de una circunferencia era proporcional a su diámetro), pero las primeras demostraciones rigurosas que nos han llegado son las que aparecen en los *Elementos* de Euclides.

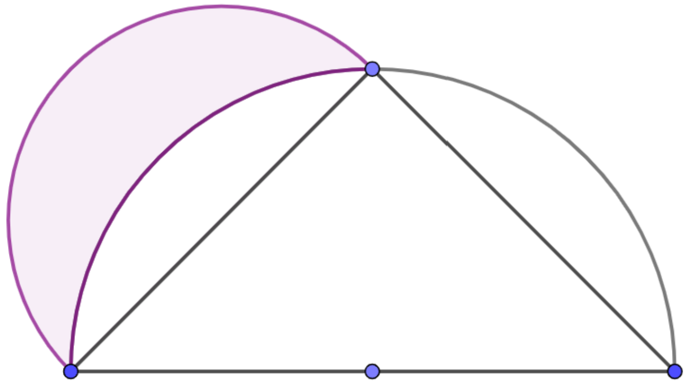

Figura 1.7: Lúnula

Otro famoso matemático que trató de resolver el problema fue Arquímedes, que consiguió obtener de forma rigurosa la cuadratura de algunas figuras curvilíneas, como la elipse y la de un segmento de parábola. Además, utilizando un refinamiento del conocido método de exhausción, que es la aproximación del círculo por polígonos regulares inscritos y circunscritos (ver figura 1.8), Arquímedes probó en *La Medida del Círculo* que el área de un círculo es igual a la de un triángulo de base la longitud de su circunferencia y de altura el radio y que la razón de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro es menor que $3 + \frac{1}{7}$ y mayor que $3 + \frac{10}{71}$.

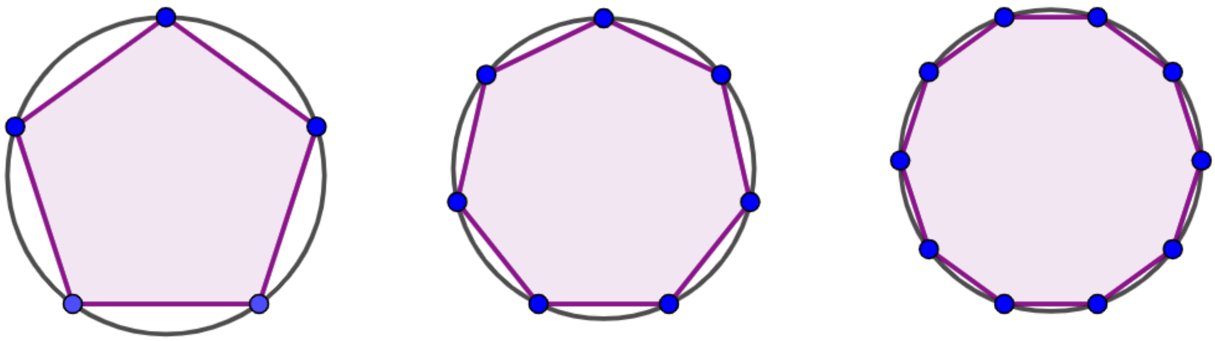

Figura 1.8: Aproximación del circulo por polígonos regulares inscritos

A partir del trabajo de Arquímedes, gran parte de los esfuerzos de los cuadradores de círculos posteriores se dividieron entre la obtención de métodos geométricos para construir un segmento de longitud π a partir de un segmento de longitud unidad, y la obtención de más y más cifras exactas de π. Sin embargo, según Bombal

Gordón (2012), para la época de Arquímedes los griegos teníán prácticamene asumido que el problema de la cuadratura del círculo (junto con los otros dos problemas clásicos: la duplicación del cubo y la trisección de cualquier ángulo) no podía resolverse solamente con el uso de la regla y el compás. Aunque ningún geómetra griego pudo probar esta afirmación, pronto llegaron a la conclusión de que era necesario la utilización de curvas más generales o construcciones de carácter más mecánico. La primera cuadratura efectiva del círculo la realizó Dinostrato en el 350 a.C., utilizando la curva trisectriz de Hipias (que a partir de entonces también se conoce como cuadratriz). Esta curva es una de las llamadas curvas mecánicas, pues su construcción se basa en un experimento mental que involucra un movimiento. El experimento consiste en imaginar un cuadrado de vértices $ABCD$ en el que el lado AB se traslada paralelamente a sí mismo y con velocidad uniforme desde su posición inicial a llegar a coincidir con DC. Durante el mismo intervalo de tiempo, el lado DA gira con velocidad uniforme en el sentido de las agujas del reloj, hasta coincidir también con DC (ver figura 1.9) . La cuadratriz es precisamente el lugar geométrico de los puntos P de intersección de los dos segmentos móviles en cada instante.

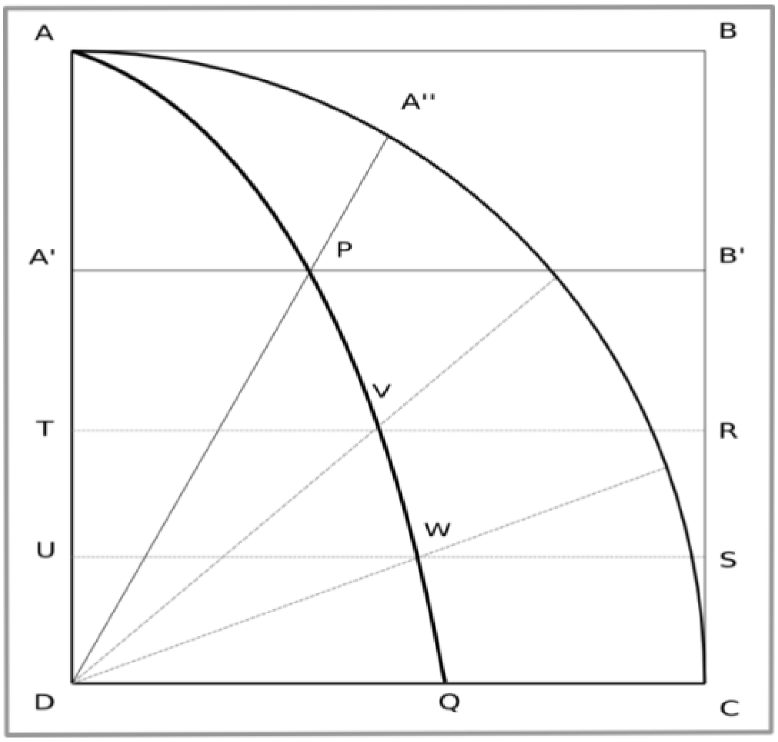

Figura 1.9: Curva de Hipias

Durante la Edad Media y el Renacimiento, el problema continuó atrayendo la atención de matemáticos que intentaron resolverlo utilizando distintos métodos. Sin embargo, no fue hasta el siglo XIX que se demostró de manera concluyente que la cuadratura del círculo es imposible utilizando exclusivamente regla y compás. Esta demostración se basó en la naturaleza trascendente del número π, establecida por Ferdinand von Lindemann en 1882, esta demostración puede encontrarse en el artículo de Pasquel (1990). Un número trascendente es aquel que no puede ser obtenido como solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales, lo que implica que no puede ser construido con regla y compás, una prueba de esto esta en el libro de Rotman (1990).

El descubrimiento de la imposibilidad de la cuadratura del círculo no significó el fin de su relevancia en las matemáticas. Además, el problema ha trascendido el ámbito matemático y se ha convertido en un símbolo de lo inalcanzable, siendo utilizado en literatura, filosofía y cultura popular como una metáfora de lo imposible.

Desde la perspectiva de la educación matemática, el estudio de la cuadratura del círculo ofrece una oportunidad única para ilustrar la evolución del pensamiento matemático y la importancia de la demostración rigurosa. A través de su análisis, los docentes pueden mostrar a los estudiantes cómo las matemáticas han avanzado mediante la interacción entre la intuición geométrica y el razonamiento algebraico. Asimismo, el problema permite reflexionar sobre la naturaleza de las construcciones geométricas y su relación con la teoría de los números, proporcionando un contexto rico para la enseñanza de estos conceptos en la educación secundaria y universitaria.

El problema de la cuadratura del círculo también plantea cuestiones filosóficas sobre los límites del conocimiento matemático. Durante siglos, la humanidad creyó que cualquier problema geométrico podía resolverse, pero el descubrimiento de la imposibilidad de cuadrar el círculo exclusivamente con regla y compás demostró que existen restricciones inherentes a ciertos sistemas matemáticos.

En conclusión, el estudio de la cuadratura del círculo no solo ha sido fundamental para el desarrollo de las matemáticas, sino que también ofrece valiosas lecciones para la educación matemática. Su historia es un testimonio del progreso del pensamiento matemático y un recordatorio de que, en matemáticas, la búsqueda de la verdad es tan importante como la solución de problemas específicos.

2.2. El área en los Elementos de Euclides

Los *Elementos* de Euclides son reconocidos como una de las obras más influyentes en el desarrollo de las matemáticas a lo largo de la historia, donde se recopila el contenido esencial de la matemática griega hasta el 300 a.C. Durante varios siglos, esta obra constituyó la base de la matemática y sirvió como modelo de un sistema formal. Su importancia es tal que se ha convertido en uno de los libros más editados e impresos en el mundo. Euclides, matemático alejandrino de finales del siglo IV a.C., es célebre por su habilidad expositiva y pedagógica. Los *Elementos* pueden considerarse como un libro de texto diseñado para introducir a los estudiantes en la geometría y, en general, en las matemáticas elementales conocidas en su época, incluyendo la aritmética, la geometría y el álgebra. Estas disciplinas están organizadas en la obra, de manera que cada proposición pueda justificarse con base en postulados, definiciones y proposiciones demostradas previamente.

Jiménez (2010), analiza ampliamente el tratamiento que se le da al área en los Elementos de Euclides. La consideración de problemas relacionados con el área aparece en el primer libro de la obra. Específicamente, en la proposición I.35, que dice

”Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales”.

Antes de esto, Euclides utilizaba la igualdad en un sentido estricto de congruencia, si un objeto puede trasladarse para coincidir exactamente con otro, entonces son iguales Esta es una coincidencia experimental y no necesariamente válida desde el punto de vista axiomático. Sin embargo, en la proposición I.35, sin una introducción previa, se refiere a igualdad de paralelogramos con formas diferentes, afirmando así la igualdad de contenido o área. Para demostrar la proposición, se consideran los paralelogramos $ABCD$ y $EBCF$, quienes comparten la base BC y suben ambos hasta la paralela AF como en la figura 1.10. Se debe observar que el triángulo BCG es común a los dos paralelogramos, por lo que la demostración estaría lista si comprobamos la igualdad de los trapecios $ABGD$ y $FEGC$. Para hacer evidente tal igualdad observamos que ambos trapecios provienen de quitar el triángulo DEG a los triángulos EAB y FDC que son iguales por la igualdad de sus tres lados (los lados son iguales por las propiedades de los paralelogramos).

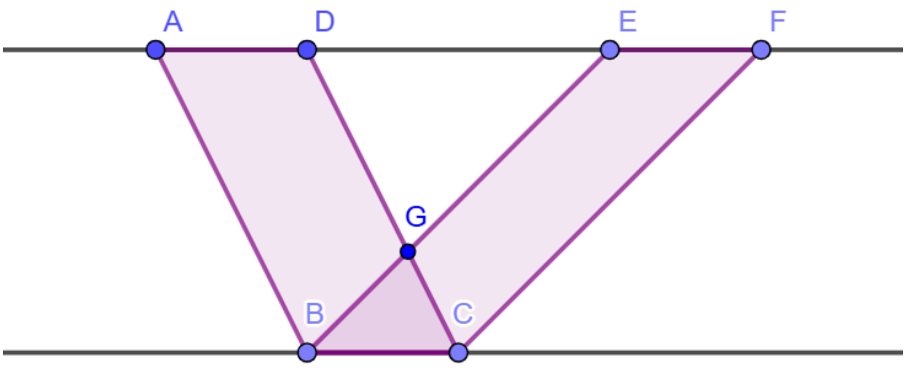

Figura 1.10: Proposición I.35

Una idea un poco más elaborada aparece en la proposición I-41:

> *"Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están colocados entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo"*

Esto es, que Euclides afirma, sin recurrir a fórmulas, que el área del triángulo es la mitad del área de un paralelogramo de igual base y altura. Para demostrar esta proposición se necesitan las proposiciones I-37 y I-34, que dicen

> *"Los triángulos colocados sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales"*

y

> *"Los lados y los ángulos opuestos de un paralelogramo son entre sí iguales y la diagonal divide al paralelogramo en dos partes iguales. "*

Veamos ahora la demostración de la proposición I-41 siguiendo la construcción de la figura 1.11. Considérese el triángulo EBC con base BC igual a la del paralelogramo ABCD y colocados entre las mismas paralelas AE y BC. Trácese la recta AC y entonces, los triángulos ABC y EBC son iguales (proposición I-37); además, El paralelogramo ABCD es doble del triángulo ABC (Proposición I-34), luego, el paralelogramo ABCD es el doble del triángulo EBC, como se quería demostrar.

La demostraciones anteriores refuerzan nuestro punto principal: no hay números involucrados en el discurso; se demuestra a partir del reacomodo de las piezas geométricas, casi como un rompecabezas, lo que le da un carácter lúdico.

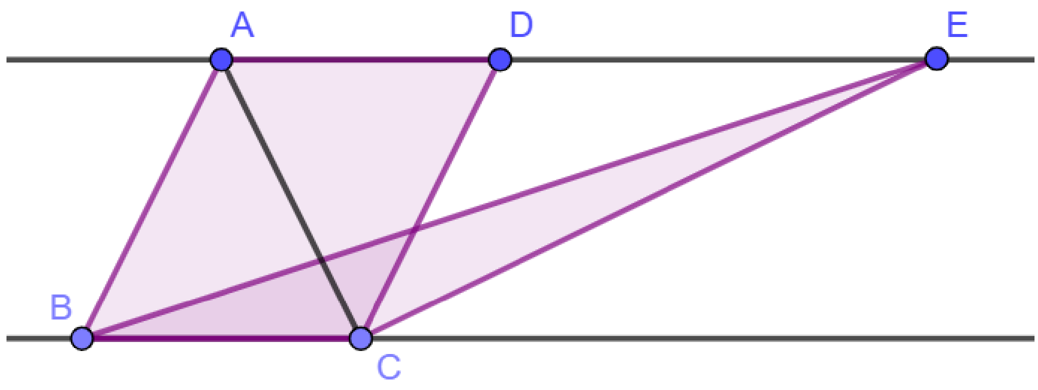

Figura 1.11: Proposición I.41

3. Los axiomas de Hilbert

Aunque Los Elementos de Euclides representaron un gran avance, el sistema axiomático que propone no especifica todo lo que se puede deducir a partir de los términos primitivos. Por ejemplo, hace uso de las isometrías de manera implícita, sin definirlas formalmente. Este vacío fue abordado en 1899 con la publicación de Fundamentos de la Geometría de David Hilbert, donde se presentó un desarrollo axiomático riguroso de la geometría.

Mora Mendieta, Torres Díaz y Luque Arias (2004) examinan cómo se introduce el concepto de área dentro del marco de los axiomas de Hilbert, resaltando su papel en la fundamentación formal de la geometría. Hilbert (1970) aborda el concepto de área en el capítulo 4, que se titula *teoría del contenido superficial en el plano*. Para abordar el concepto de área, Hilbert empieza definiendo el área de un triángulo y a partir de esa idea define el área de un polígono teniendo en cuanta cualquier polígono se puede descomponer en triángulos. Para llegar a estas definiciones necesita los conceptos previos de equidescomponibilidada y equicompletentariedad.

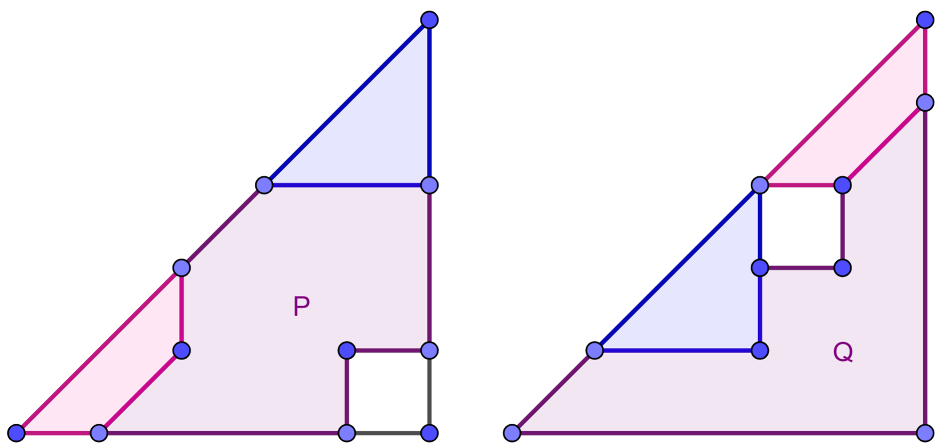

Figura 1.12: Polígonos equicomplementarios

Hilbert define dos polígonos como equidescomponibles cuando pueden descomponerse en un número finito de triángulos que, por parejas, son congruentes entre sí; y define dos polígonos como equicomplementarios cuando se les puede agregar un número finito de polígonos equidescomponibles, de modo que los polígonos compuestos sean equidescomponibles. Por ejemplo, los polígonos P y Q de la figura 1.12 son equicomplementarios.

Cabe destacar que todos los polígonos equidescomponibles son equicomplementarios y todos los pológonos equicomplementarios son equidescomponibles, Hilbert usa dos definiciones distintas como un truco para realizar sus demostraciones.

Después de dar estas dos definiciones, demuestra que en un triángulo cualquiera ABC, el producto de un lado por la altura correspondiente no depende del lado escogido, y como consecuencia, el semiproducto de la base por la altura de un triángulo es un segmento que llama característico. A este segmento lo llama área del triángulo y lo denota $[ABC]$.

A partir de lo anterior Hilbert define el área de un polígono, P, como la suma de las áreas de todos los triángulos en que queda dividido por una determinada descomposición y lo denota $[P]$. Además, demuestra que el área de un polígono es independiente del modo de descomposición en triángulos, y por lo tanto, queda determinada unívocamente tan sólo por el polígono. También prueba que:

> *Dos polígonos equicomplementarios tienen igual área y dos polígonos de igual área son equicomplementarios.*

Esta caracterización sirve para describir de forma rigurosa la idea intuitiva que tenían los griegos del concepto de área: dos polígonos tienen el mismo área si puedo trasformarlos en iguales quitando o añadiendo polígonos con áreas iguales.

Por último, Hilbert aborda el tema de la medida de áreas, para ello observa que la relación de equidescomponibilidad es una relación de equivalencia. A cada clase de equivalencia la llama un área, y a cada área le hace corresponder un número, que es la medida de su área.

4. El área del triángulo

El cálculo del área de un triángulo ha acompañado al pensamiento matemático desde sus orígenes. A lo largo de la historia, diferentes civilizaciones han ideado fórmulas que permitían determinar esta área de manera efectiva, reflejando su comprensión cada vez más profunda de la geometría. Desde la fórmula básica de base por altura dividido entre dos, pasando por formula de Herón, hasta llegar a fórmulas que relacionan los lados del triángulo con su circunradio, cada etapa representa un hito en la evolución del pensamiento geométrico.

La fórmula más antigua y directa para calcular el área de un triángulo es

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

donde b representa la base del triángulo y h la altura correspondiente. Esta relación ya era utilizada por civilizaciones como la egipcia y la babilónica. En el Papiro de Rhind (ca. 1650 a.C.), por ejemplo, se encuentran procedimientos para calcular áreas de figuras triangulares, lo que muestra una comprensión intuitiva de que el triángulo es, en esencia, la mitad de un paralelogramo. Aunque no se expresaba con lenguaje algebraico, esta noción estaba bien afianzada.

En el siglo I d.C., el ingeniero y matemático Herón de Alejandría recopiló y desarrolló muchas ideas geométricas en su obra *Metrica*. Allí presentó una fórmula notable para calcular el área de un triángulo en función de sus tres lados:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

es el semiperímetro del triángulo. Esta fórmula permite calcular el área sin necesidad de conocer o trazar alturas, lo que resulta especialmente útil en triángulos escalenos. No esta claro que Herón fuera el inventor original, pero su exposición sistemática marcó un hito en la geometría griega. A continuación veremos la demostración de este teorema (Berele & Goldman, 2001, p.39).

Teorema 1. *Sea ABC un triángulo con lados $b = AB$, $a = BC$ y $b = AC$ y sea s el semiperimetro, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Entonces, el área del triángulo ABC es igual al $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.*

Demostración. Sea $\overline{AD}$, la altura de la base $\overline{BC}$, $AD = h$. Distinguiremos dos casos, en el que la altura esta dentro de el triángulo y en el que no lo está. Para el primero caso tomamos $CD = x$ como se ve en la figura 1.13.

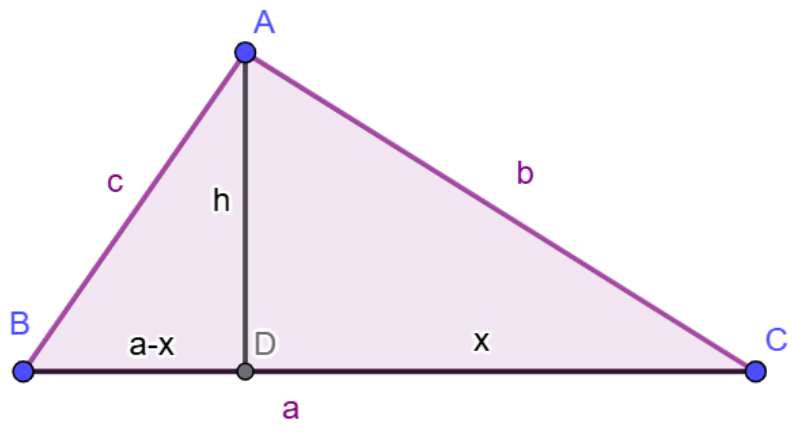

Figura 1.13: Formula de Herón

Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$h^2 = b^2 - x^2 \tag{1.1}$$

$$c^2 = h^2 + (a-x)^2 \tag{1.2}$$

Juntando 1.1 y 1.2 tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax. \tag{1.3}$$

Si ahora combinamos 1.1 con 1.3 y operamos queda:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2 = \left(b - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right). \tag{1.4}$$

Ahora, multiplicamos todo por a^2 y seguimos operando:

$$a^2h^2 = \frac{1}{4}(2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = \frac{1}{4}[c^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - c^2] =$$
$$\frac{1}{4}(c-a+b)(c+a-b)(a+b+c)(a+b-c).$$

Dividiendo todo por 4 queda:

$$\frac{1}{4}a^2h^2 = \frac{c-a+b}{2}\frac{c+a-b}{2}\frac{a+b+c}{2}\frac{a+b-c}{2} = (s-a)(s-b)s(s-c),$$

La última igualdad se da porque los factores de la izquierda son iguales a los factores de la derecha (por la definición de s), por ejemplo

$$\frac{c-a+b}{2} = s - a$$

Ya solo queda tomar raíces cuadradas y entonces nos queda

$$\frac{1}{2}ah = \sqrt{(s-a)(s-b)s(s-c)}. \tag{1.5}$$

como el área del triángulo es base por altura partido dos ya tenemos lo que queríamos probar. Ahora veremos el segundo caso, sea $x = DB$ como en la figura 1.14

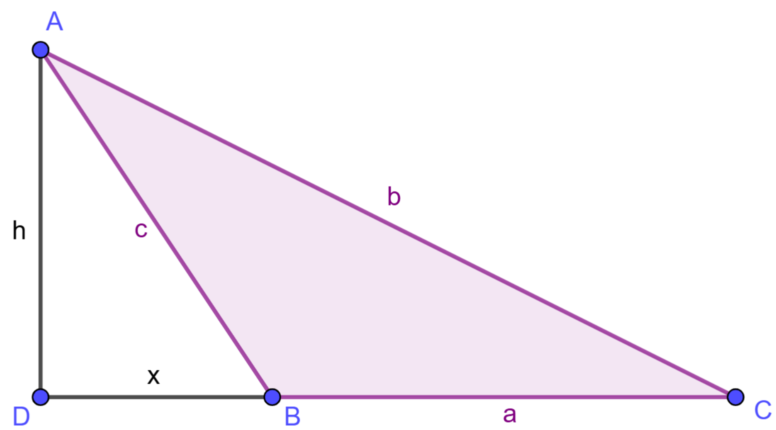

Figura 1.14: Formula de Herón

Por el teorema de pitágoras tenemos que

$$h^2 = b^2 - x + a^2 \tag{1.6}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 \tag{1.7}$$

Juntando 1.6 y 1.7 tenemos

$$c^2 = b^2 - a^2 - 2ax. \tag{1.8}$$

Despejando x de 1.8 y sustituyendo en 1.7 nos queda:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

Cambiando al b con la c tenemos lo mismo que teníamos en el caso anterior en 1.4, por lo que de forma análoga podemos finalizar la demostración. □

Es interesante observar que el único resultado que se usa en esta demostración es el teorema de Pitágoras. Además, podemos usar esta prueba para ver que el área del triángulo con la formula base por altura partido dos es independiente de la base escogida porque si nos fijamos en 1.5 vemos la parte izquierda de la igualdad depende de la base escogida, mientras que la parte izquierda no lo hace. Esto nos permite definir una noción de área de un triángulo.

Avanzando hacia el siglo VII, encontramos a Brahmagupta, uno de los matemáticos más influyentes del mundo indio. En su obra *Brāhmasphuṭasiddhānta*, no solo generalizó la fórmula de Herón para cuadriláteros, sino que también introdujo una expresión notable para el área del triángulo utilizando sus lados y el círculo que lo circunscribe:

$$A = \frac{abc}{4R} \tag{1.9}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo, y R es el radio del circuncírculo. Un error común en alumnos de primaria es calcular el área del triángulo como el producto de sus 3 lados, aunque esto no sea correcto la formula que acabamos de ver prueba que si existe una relación entre el producto de los lados de un triángulo y su área. A continuación veremos dos teoremas que nos sirven para demostrar la formula 1.9 (Berele & Goldman, 2001, p.94).

Teorema 2. *Sean $\triangle ABC$ un triángulo, $AC = b$, $AB = c$, R el circunradio y h la longitud del segmento $\overline{AD}$, que es la altura de A hasta $\overline{BC}$, entonces $bc = 2Rh$*

Demostración. Sea A' el punto tal que $\overline{AA'}$ es el diámetro de la circunferencia circunscrita y sean los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle ACA'$ (marcados en morado en la figura 1.15).

Los ángulos $\angle B$ y $\angle A'$ con iguales porque son ángulos inscritos sobre el mismo arco (en le dibujo llamamos a ese angulo α). Además, tanto el ángulo $\angle BDA$, como el ángulo $\angle A'CA$ son ángulos rectos, por lo tanto son iguales entre sí. Estas dos observaciones implican que los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle ACA'$ son semejantes y entonces:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AA'}.$$

Operando en la ecuación tenemos que $AD \cdot AA' = AB \cdot AC$, esto es $2Rh = bc$, que es justo lo que queríamos probar.

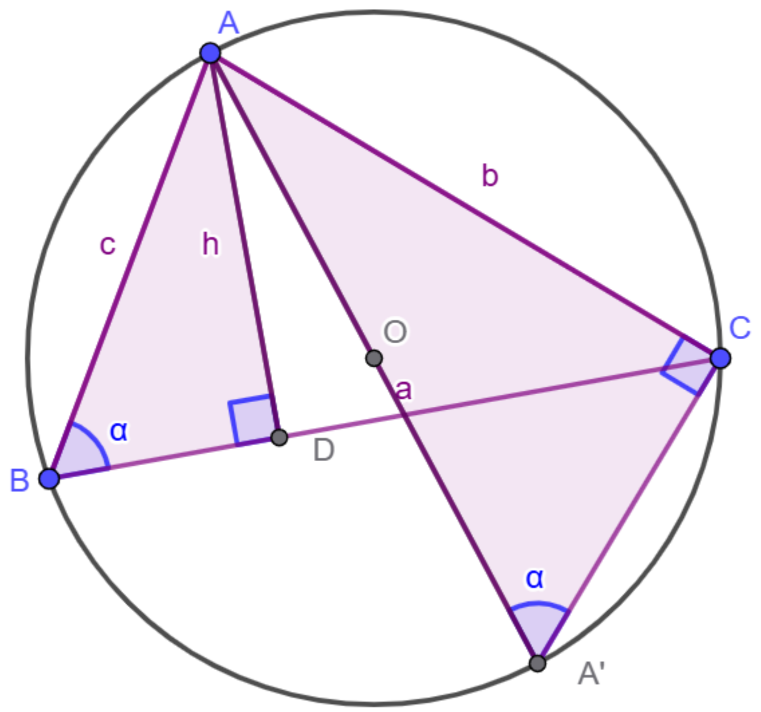

Figura 1.15: Teorema 2

□

Corolario 1. *El área de un triángulo de lados a, b y c es $\frac{abc}{4R}$, donde R es el circuncentro.*

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que $2Rh = bc$. Si multiplicamos ambos lados por a obtenemos $2Rah = abc$, operando queda

$$\frac{1}{2}ah = \frac{abc}{4R}, \tag{1.10}$$

que es el área del triángulo.

□

En esta demostración no se usa el teorema de Pitágoras, pero se usa las propiedades de la semejanza de triángulo, por lo tanto utiliza en quinto postulado de Euclides y no es valida para geometrías no Euclideas. Es fácil ver que esta demostración también sirve para probar la independencia de la base en la fórmula del área del triángulo, basta con ver 1.10 y razonar como lo hicimos después de la demostración de la formula de Herón.

Además, Brahmagupta generalizó la fórmula de Herón para aplicarla a cuadriláteros cíclicos, es decir, aquellos que pueden inscribirse en un círculo. Para un cuadrilátero con lados a, b, c y d, su fórmula para el área es:

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

donde

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

5. Integrales

La definición de área de Hilbert es rigurosa, pero solo sirve para el área de polígonos, para definir el área de figuras curvas se necesita el concepto de integral. Fernández (2011) repasa la evolución histórica del concepto de integral.

La idea de integral, tal como la entendemos hoy, fue desarrollándose poco a poco a lo largo de la historia. Todo comenzó en el último cuarto del siglo XVII, cuando Isaac Newton (1642–1727) en Inglaterra y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) en Alemania, trabajando de manera independiente, desarrollaron el cálculo diferencial e integral. Aunque usaron enfoques diferentes, ambos descubrieron que derivar e integrar son operaciones inversas, algo que hoy llamamos el Teorema Fundamental del Cálculo.

Newton abordó el cálculo desde una perspectiva dinámica, para él las derivadas eran una herramienta para resolver problemas de física. Introdujo el concepto de fluente, que se refiere a una cantidad que varía con el tiempo, como la posición de un objeto en movimiento. A la tasa de cambio de esa cantidad con respecto al tiempo la llamó fluxión. Por ejemplo, si x representa la posición de un cuerpo en movimiento (la fluente), su velocidad instantánea sería la fluxión de x, escrita como $\dot{x}$. Newton desarrolló reglas algorítmicas para trabajar con fluxiones, que aplicó en problemas de geometría, física y astronomía, incluyendo el cálculo de cuadraturas, tangentes, máximos y mínimos.

Leibniz, por su parte, adoptó un enfoque más abstracto. Concibió el cálculo como el estudio de cantidades infinitamente pequeñas, a las que llamó diferenciales. Por ejemplo, una pequeña variación en x era dx, y una pequeña variación correspondiente en y era dy. En este marco, una integral era la suma de muchos infinitesimales, es decir, la acumulación de estos pequeños cambios. Fue él quien introdujo la notación $\int$, inspirada en la letra ”S” alargada, que representa la suma de diferenciales, es la notación se sigue usando hoy en día. Su publicación inicial sobre el cálculo diferencial fue en 1684, seguida por la del cálculo integral en 1686.

Más adelande, Bernoulli (1667–1748) utilizo la idea de que la integración como la operación inversa de la diferenciación para resolver numerosos problemas en el campo de las ecuaciones diferenciales. Además escribió uno de los primeros cursos completos sobre cálculo integral, publicado en 1742, que contribuyo en la difusión y aplicación del cálculo en Europa.

Leonhard Euler (1707–1783), alumno de Johann Bernoulli, publicó numerosos tratados en los que sistematizó y extendió los métodos del cálculo. Además, aplicó el cálculo para resolver problemas de física, mecánica, astronomía y geometría. .

Aunque el cálculo de Newton y Leibniz era muy útil, le faltaba una base rigurosa. Fue en el siglo XIX cuando Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) proporcionó una definición precisa del límite.

Más adelante, Bernhard Riemann (1826–1866) utilizó la definición de límite de Cauchy para definir de manera precisa la integral de Riemann, válida para funciones continuas y acotadas en un intervalo cerrado. En la siguiente sección, estudiaremos brevemente esta definición.

Sin embargo, algunos tipos de funciones más complejas no podían ser integradas con el método de Riemann. A principios del siglo XX, Henri Lebesgue (1875–1941) introdujo una nueva forma de integración, basada en medir el tamaño de los conjuntos donde una función toma ciertos valores. Su enfoque permitió integrar una clase más amplia de funciones y es esencial en áreas modernas como el análisis funcional, la probabilidad y la teoría de la medida.

5.1. La integral de Riemann

A continuación veremos como la definición de integral de Riemman surge del problema de hallar el área debajo de una curva. Supongamos que tenemos una función $f(x) \geq 0$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y queremos encontrar el área bajo la gráfica de f, es decir, el área entre la curva $y = f(x)$, el eje x, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Dado que no todas las curvas forman figuras geométricas sencillas, no podemos usar directamente fórmulas conocidas de áreas. Por ello, surge la idea natural de aproximar dicha área utilizando rectángulos.

Para ello, dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

lo que se conoce como una partición del intervalo. En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se construye un rectángulo cuya altura está relacionada con los valores de la función en ese intervalo.

Si se toma como altura el ínfimo de los valores de f en el intervalo, se obtiene una suma inferior (ver figura 1.16). Si se toma el supremo, se obtiene una suma superior (ver figura 1.17).

Estas sumas se definen como:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad \text{donde } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad \text{donde } M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Ambas son aproximaciones del área real: una por debajo y otra por encima. Al refinar la partición, es decir, al hacer los subintervalos cada vez más pequeños, las sumas inferior y superior tienden a acercarse. Si en el límite ambas tienden al mismo valor, se dice que la función es integrable, y ese valor es el área bajo la curva. En tal caso, se define la integral de Riemann de f en $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Este valor representa el área bajo la curva cuando f es no negativa, o el valor neto del área cuando f toma valores positivos y negativos.

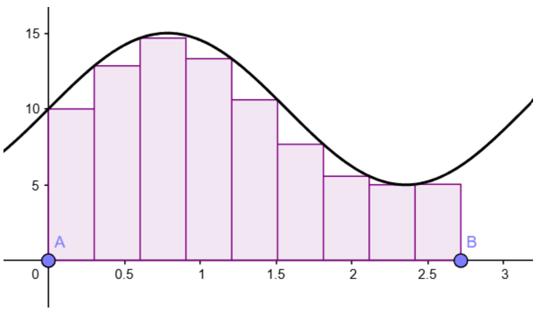

Figura 1.16: Suma inferior

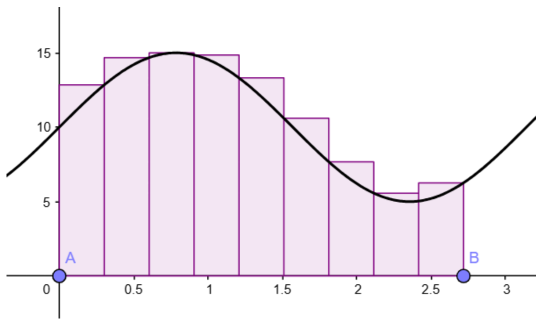

Figura 1.17: Suma superior

Como hemos visto, la construcción de la integral de Riemann surge de una forma natural a partir del problema de calcular el área bajo una curva mediante aproximaciones con rectángulos y el uso del concepto de límite.

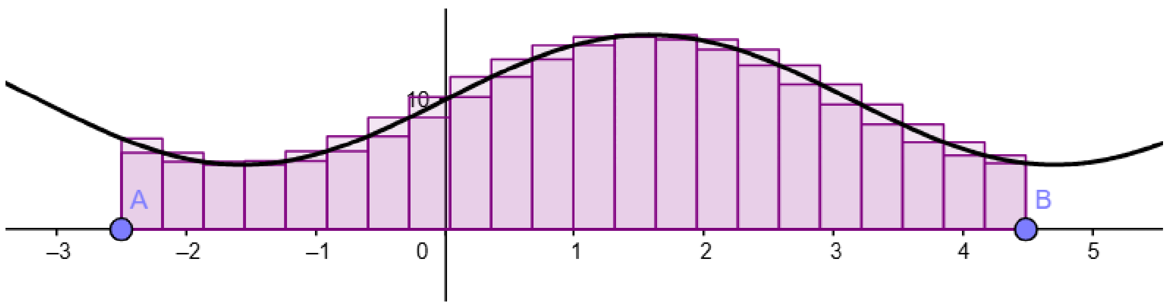

Figura 1.18: Integral de Riemman

Capítulo 2

Análisis didáctico

El área es uno de los conceptos fundamentales en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en la educación primaria y secundaria. No obstante, su aparente simplicidad esconde una complejidad conceptual que con frecuencia se pasa por alto tanto en los materiales escolares como en la formación de los docentes. Habitualmente, el área se introduce como una magnitud asociada a figuras planas, presentada mediante fórmulas específicas para figuras sencillas como rectángulos, triángulos y círculos. Esta visión, sin una base conceptual sólida, puede tener consecuencias negativas en la comprensión profunda del concepto por parte del alumnado.

En el contexto de la educación matemática, comprender un concepto no significa únicamente saber aplicarlo mecánicamente en ejercicios rutinarios, sino ser capaz de entender su significado y sus relaciones con otros conceptos matemáticos.

1. Referentes teóricos en la didáctica de las matemáticas

El estudio de las matemáticas, particularmente en la educación secundaria, ha estado siempre marcado por diversos enfoques pedagógicos. Los matemáticos y educadores han propuesto diferentes teorías del aprendizaje que buscan optimizar la comprensión de los conceptos abstractos y promover una enseñanza más efectiva. El concepto de área es uno de los primeros conceptos geométricos que los estudiantes encuentran en su proceso de aprendizaje. Sin embargo, su comprensión no siempre es inmediata. Diversos enfoques teóricos explican cómo los estudiantes pueden llegar a comprender este concepto fundamental, este apartado tiene como objetivo explorar estas teorías psicológicas y pedagógicas, analizando cómo cada una contribuye al aprendizaje del concepto de área en la educación secundaria.

Jean Piaget

Jean Piaget fue un psicólogo y pedagogo suizo cuya teoría sobre el desarrollo cognitivo ha tenido una influencia profunda en la educación y la psicología. Piaget (1956) postuló que el desarrollo cognitivo de los niños ocurre en etapas, y que los individuos pasan por estas etapas en un orden determinado, aunque la velocidad con la que avanzan puede variar. Cada una de estas etapas implica un cambio cualitativo en la forma en que los niños piensan y entienden el mundo, y son fundamentales para el aprendizaje de conceptos abstractos como los que se encuentran en las matemáticas. Las 4 etapas que identificó son: la sensoriomotora, la preoperacional, la operacional concreta y la operacional formal. Estas etapas reflejan cómo los niños desarrollan gradualmente habilidades cognitivas más complejas, desde las habilidades más básicas de percepción y manipulación de objetos hasta las habilidades más abstractas de razonamiento lógico.

En el contexto de la enseñanza del concepto de área, la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget puede aplicarse de manera efectiva al comprender cómo los estudiantes de diferentes edades pueden comprender y aprender este concepto, en función de su desarrollo cognitivo:

- Etapa sensoriomotora (0-2 años): En esta etapa temprana, los niños aprenden principalmente a través de la exploración sensorial y la manipulación de objetos. Aunque los niños en esta etapa no comprenden el concepto de área, pueden comenzar a interactuar con objetos de diferentes tamaños y formas. A través de estas interacciones físicas, los niños desarrollan una comprensión básica de las dimensiones y el espacio, que les servirá como base para el aprendizaje más adelante.
- Etapa preoperacional (2-7 años): En esta etapa, los niños desarrollan el pensamiento simbólico, pero aún no son capaces de pensar de manera lógica y organizada. Aunque los niños en esta etapa pueden ser capaces de contar unidades o identificar figuras geométricas simples, su comprensión del área será todavía limitada y se centrará más en las percepciones visuales o la comparación directa de tamaños. Los niños en esta etapa podrían trabajar con bloques o cuadrículas para empezar a explorar el concepto de área de manera concreta. Por ejemplo, podrían llenar figuras geométricas con unidades cuadradas y comparar el área de diferentes figuras mediante la observación directa.
- Etapa de operaciones concretas (7-11 años): En esta etapa, los niños comienzan a desarrollar el pensamiento lógico y la capacidad para realizar operaciones mentales más complejas, pero su pensamiento todavía se limita a situaciones concretas. En este momento, los niños pueden aprender a calcular áreas de figuras geométricas simples, como rectángulos. Los estudiantes de esta etapa ya pueden trabajar con conceptos de área de manera más formal, utilizando fórmulas y representaciones visuales.
- Etapa de operaciones formales (11 años en adelante): En esta etapa, los adolescentes desarrollan la capacidad de pensar de manera abstracta y lógica, lo que les permite manejar conceptos más complejos y resolver problemas abstractos. Los estudiantes pueden comprender el área no solo como una medida concreta, sino también como un concepto abstracto que involucra fórmulas y propiedades geométricas. En esta etapa, los estudiantes pueden trabajar con conceptos más complejos relacionados con el área, como el cálculo del área de figuras irregulares o el uso de integrales para calcular el área bajo curvas.

Piaget tiene un enfoque constructivista, sostiene que el conocimiento no es algo que simplemente se transfiere de un maestro a un estudiante, sino que es algo que los individuos construyen activamente a medida que interactúan con su entorno y resuelven problemas. Los niños no son receptores pasivos de información, sino que son actores activos que experimentan, exploran y reflexionan sobre el mundo que los rodea.

El aprendizaje, según Piaget, es un proceso activo de asimilación y acomodación, donde los individuos integran nuevas experiencias dentro de sus esquemas mentales existentes (asimilación) , y luego ajustan esos esquemas para incorporar nuevas ideas (acomodación). Por ejemplo, un estudiante necesita entender el concepto de medir longitudes antes de aplicar este conocimiento para comprender el cálculo del área de un rectángulo multiplicando la longitud por la anchura. Por otro lado, la acomodación ocurre cuando los estudiantes deben modificar sus esquemas para incorporar nuevas ideas. En el caso del área, esto puede implicar que los estudiantes tengan que revisar o adaptar su concepto de área cuando se enfrentan a problemas más complejos.

El proceso de aprendizaje está dirigido por un intento de lograr el equilibrio entre los esquemas previos del niño y las nuevas experiencias. Cuando un niño encuentra una discrepancia entre lo que ya sabe y lo que experimenta, entra en un estado de desequilibrio, lo que impulsa el proceso de aprendizaje y la modificación de sus esquemas. Por ejemplo, al aprender a calcular el área de un triángulo, un estudiante puede inicialmente usar un enfoque incorrecto o no entender cómo la fórmula se aplica. Sin embargo, al trabajar con ejemplos concretos, discutir el problema con otros y reflexionar sobre sus errores, el estudiante gradualmente puede encontrar un equilibrio entre su comprensión previa y el nuevo conocimiento, lo que le permite comprender el cálculo del área de manera correcta.

Lev Vygotsky

Lev Vygotsky fue un psicólogo ruso cuya teoría del desarrollo cognitivo y del aprendizaje se enfoca en el papel fundamental del contexto social y cultural en el proceso de adquisición del conocimiento. Su teoría sociocultural sostiene que el aprendizaje humano no se da de manera aislada, sino que es un proceso social que se produce a través de la interacción con otros en un entorno determinado por la cultura. De acuerdo con Vygotsky, las habilidades cognitivas superiores como el pensamiento abstracto, la resolución de problemas y el razonamiento matemático se desarrollan primero a nivel social, a través de la interacción con otras personas, y luego se interiorizan en el nivel individual. Vygotsky afirmas que los estudiantes aprenden mejor cuando están involucrados en actividades colaborativas que les permitan compartir y construir conocimiento conjuntamente.

Otro concepto importante de la teoría de Vigotsky es la zona de desarrollo próximo (ZDP), es la distancia entre lo que un estudiante puede hacer de manera independiente y lo que puede hacer con la ayuda de otros. Vygotsky argumenta que el aprendizaje más efectivo ocurre cuando los estudiantes están en su ZDP, es decir, cuando están trabajando en tareas que son un poco más difíciles que aquellas que pueden hacer por sí solos, pero que pueden resolver con el apoyo adecuado (por ejemplo, con la ayuda de un profesor o compañero).

En el contexto del aprendizaje matemático, como el concepto de área, la ZDP es clave para guiar a los estudiantes hacia un aprendizaje efectivo. Por ejemplo, supongamos que un grupo de estudiantes ya sabe calcular el área de figuras simples como rectángulos y triángulos, pero aun no sabe calcular el área de figuras compuesta. En este caso, se puede guiar a la clase para que aprenda a calcular figuras compuestas, sin darle la respuesta directamente. En lugar de resolverle el problema, el profesor plantea preguntas estratégicas como “¿qué figuras reconoces aquí?”, “¿cómo podrías calcular el área de cada parte?”, o “¿qué crees que debes hacer con esas áreas?”. Esta orientación activa el pensamiento del estudiante y lo mantiene como protagonista del aprendizaje. De esta forma, el aprendizaje se construye en interacción y el alumno avanza desde lo que puede hacer con apoyo, hasta la autonomía.

David Ausubel

David Ausubel fue un psicólogo y pedagogo estadounidense cuya teoría del aprendizaje significativo ha tenido un profundo impacto en la educación, especialmente en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas.

El concepto central en la teoría de Ausubel es que el aprendizaje debe ser significativo, lo que implica que los estudiantes deben ser capaces de integrar el nuevo conocimiento dentro de sus estructuras cognitivas ya existentes. A diferencia del aprendizaje repetitivo o memorístico, que se limita a la retención de datos sin comprenderlos en profundidad, el aprendizaje significativo involucra la asimilación activa de la nueva información y su conexión con conceptos previos. Por ejemplo, para que los estudiantes aprendan el concepto de área de manera significativa, es crucial que comprendan los conceptos de longitud, ancho y superficie de figuras geométricas. Si los estudiantes ya tienen una comprensión básica de las formas geométricas y sus propiedades, se puede hacer una conexión directa entre estas ideas y el concepto de área. Antes de enseñar el concepto de área, el docente podría activar los conocimientos previos de los estudiantes preguntando sobre cómo miden objetos en su vida cotidiana. Otra forma de introducir el concepto sería mostrar un rectángulo de papel y pedir a los estudiantes que adivinen cuántas cuadrados de cierto tamaño caben dentro de él, lo que les prepara para comprender que el área se mide en unidades cuadradas. Este tipo de actividad establece el marco para introducir la fórmula del área del rectángulo de manera significativa.

Otra de las estrategias que propone Ausbel para lograr un aprendizaje significativo es la organización del conocimiento. Ausubel destaca la importancia de organizar la información de manera jerárquica. Los conceptos más generales deben ser presentados antes que los específicos, para que los estudiantes puedan estructurar el conocimiento de manera coherente. Para enseñar el concepto de área de forma significativa en secundaria, se puede estructurar el contenido jerárquicamente. En la cúspide de la jerarquía estaría el concepto inclusivo de "medida", entendido como la cuantificación de una propiedad de un objeto (como longitud, masa, o superficie). Dentro de ese concepto, se introduce el concepto subordinado de "área" como la cantidad de una superficie en dos dimensiones. Finalmente, en el nivel más específico, se trabajan ejemplos concretos y problemas aplicados, como calcular el área de una habitación rectangular de 4 m por 3 m o el área de un triángulo con base y altura conocidas.

Por último, Ausbel habla de la importancia de entender el aprendizaje como un proceso activo, en el que los estudiantes interactúan con la nueva información, la comprenden, y la integran en su estructura cognitiva. Esto se puede lograrse presentándoles problemas prácticos que requieran que los estudiantes utilicen el concepto de área para resolver situaciones cotidianas, como medir la superficie de una habitación para colocar alfombra o calcular el área de una figura en el contexto de un proyecto de arte.

Jerome Bruner

Jerome Bruner, uno de los psicólogos más influyentes del siglo XX, es ampliamente conocido por sus contribuciones a la teoría del aprendizaje y la educación. Es conocido por identificar tres fases que los estudiantes deben atravesar para comprender los conceptos matemáticos. Cada una de estas fases corresponde a una forma distintas de organizar y expresar el conocimiento, y son:

- Manipulativo: Este es el primer modo de representación, y corresponde a la manipulación concreta de objetos. A través de la acción y la manipulación física de materiales, los estudiantes forman representaciones iniciales de los conceptos. Es la fase más concreta del aprendizaje, donde los estudiantes interactúan directamente con los objetos y las situaciones. Esto puede aplicarse en el contexto de la enseñanza del área con en el uso de materiales manipulativos, como bloques, cuadrados unitarios o patrones geométricos, que los estudiantes pueden organizar y mover para formar diferentes figuras. A través de estas actividades, los estudiantes pueden ver cómo las figuras se llenan de unidades de área y cómo la forma de una figura influye en su área. Por ejemplo, se podría proponer una actividad en la que los estudiantes tengan que cubrir una figura geométrica (por ejemplo, un rectángulo) con unidades cuadradas. A medida que los estudiantes colocan las unidades cuadradas dentro de la figura, pueden contar cuántas unidades caben en ella, lo que les permitirá entender cómo se calcula el área de una figura y reforzar la comprensión de la multiplicación. Además, esta actividad puede ampliarse a figuras más complejas, como triángulos y otros polígonos.

- Pictórica: En esta fase, los estudiantes comienzan a representar los conceptos a través de imágenes, diagramas o modelos visuales. Este modo de representación se centra en la representación visual de las ideas, lo que ayuda a los estudiantes a organizar y comprender conceptos de manera más abstracta. Para aplicar esto al aprendizaje del área los estudiantes pueden trabajar con cuadrículas de papel donde deben dibujar diferentes figuras (rectángulos, triángulos, etc.) y luego contar las casillas que cubren la figura. A medida que los estudiantes ven cómo la figura se ajusta a la cuadrícula, desarrollan una representación visual del concepto de área. También se puede utilizar herramientas digitales, como geogebra, que permitan a los estudiantes manipular figuras y ver su área en tiempo real, lo que refuerza la comprensión pictórica del concepto.

- Abstracta: En esta etapa, los estudiantes utilizan símbolos, palabras o fórmulas para representar los conceptos de manera abstracta. En el contexto de las matemáticas, esto implica el uso de fórmulas, ecuaciones y representaciones algebraicas. A través de este modo simbólico, los estudiantes acceden a un nivel más abstracto de comprensión y pueden aplicar lo aprendido en una variedad de contextos. En el aprendizaje del área, en la fase abstracta, los estudiantes pasan a utilizar fórmulas y expresiones algebraicas para calcular el área. En este punto, los estudiantes deben haber desarrollado una comprensión sólida de lo que significa el área de una figura, por lo que están listos para utilizar fórmulas matemáticas para calcular el área. En este nivel, los estudiantes aprenden a utilizar la fórmula del área del rectángulo, del triángulo , y otras fórmulas asociadas con figuras geométricas más complejas.

En su obra, Bruner establece que la educación debe ser un proceso activo y participativo, en el cual los estudiantes no solo absorban información, sino que construyan su propio conocimiento a través de la exploración, el descubrimiento y la resolución de problemas. Su enfoque se fundamenta en la idea de que el aprendizaje debe ser un proceso constructivo, que permita a los estudiantes llegar a una comprensión profunda de los conceptos. Esta idea de ”descubrimiento guiado” es un principio clave en su teoría del aprendizaje.

Además, siguendo la linea de pensamiento de Vigotsky , Bruner resalta la importancia de la estructura del conocimiento. Según Bruner, el conocimiento debe ser organizado y estructurado de manera coherente para que los estudiantes puedan asimilarlo de forma más efectiva. A través de la representación de la estructura de un concepto, los estudiantes pueden establecer conexiones significativas entre las ideas, lo que facilita su comprensión y aplicación en contextos diversos. Bruner también desarrolló, a partir de las ideas de Vygotsky, el concepto de andamiaje, que se refiere al apoyo temporal que el docente proporciona al estudiante para ayudarlo a alcanzar un nivel de comprensión o habilidad que aún no puede lograr por sí solo. Este acompañamiento no implica ofrecer respuestas directas, sino guiar al alumno mediante preguntas, ejemplos, pistas o estrategias que le permitan avanzar en la construcción de su propio conocimiento. A medida que el estudiante gana autonomía, el andamiaje se retira progresivamente, favoreciendo así un aprendizaje significativo y duradero. Esta forma de intervención docente es clave para que los alumnos puedan apropiarse de conceptos complejos dentro de una estructura organizada y con sentido.

Por último, Bruner introduce la idea de que los conceptos deben ser enseñados de manera progresiva. Los estudiantes deberían ser introducidos a los conceptos en una secuencia espiral, es decir, el mismo concepto debe ser abordado en diferentes niveles de complejidad a medida que los estudiantes avanzan en su aprendizaje. De esta manera, los estudiantes construyen su comprensión de un concepto a medida que exploran sus diferentes facetas, y en cada nueva fase, integran lo aprendido previamente.

Zoltan Dienes

Zoltán Dienes, matemático y pedagogo húngaro, desarrolló un enfoque muy influyente en la enseñanza de las matemáticas, fue contemporáneo de Bruner y compartía con el un enfoque constructivista del aprendizaje.

Una de las principales contribuciones de Dienes fue la creación y el uso de materiales manipulativos para enseñar conceptos matemáticos. Estos materiales permiten a los estudiantes experimentar con conceptos abstractos de forma concreta. En su enfoque, los estudiantes interactúan con objetos físicos que representan conceptos matemáticos, lo que les permite interiorizar ideas complejas de manera más tangible y comprensible. El método de Dienes se basa en la utilización de materiales que representan los conceptos matemáticos en diferentes niveles de abstracción. Estos materiales deben estar diseñados para ser utilizados a lo largo de diversas etapas del aprendizaje, permitiendo a los estudiantes construir su comprensión gradualmente, desde la experiencia concreta hasta la abstracción completa.

El enfoque de Dienes puede aplicarse de manera directa al aprendizaje del concepto de área. Según Dienes, los estudiantes deben tener la oportunidad de experimentar con figuras geométricas de manera concreta antes de introducir las fórmulas y los cálculos abstractos. A través del uso de materiales manipulativos, los estudiantes pueden explorar cómo se calcula el área de diferentes figuras de una forma visual y tangible. Por ejemplo, un estudiante podría usar bloques o cuadrados de unidades para cubrir una figura, como un rectángulo o un triángulo, y contar cuántas unidades de área caben dentro de la figura. Este enfoque no solo les permite visualizar el concepto de área, sino también experimentar con la relación entre las unidades de medida y las figuras geométricas.

Dienes identificó una serie de principios clave, que son esenciales para entender cómo aplicar su teoría en el aula de matemáticas. Estos principios incluyen:

- El principio dinámico: Este principio sostiene que el aprendizaje matemático es más efectivo cuando los estudiantes participan activamente en la construcción del conocimiento a través del juego, la experimentación y la exploración libre antes de llegar a la formalización de los conceptos. Según este principio, es fundamental que los alumnos tengan la oportunidad de interactuar con materiales concretos de forma lúdica y sin instrucciones rígidas, lo que les permite descubrir regularidades, formular hipótesis y establecer relaciones por sí mismos. Esta fase experimental favorece una comprensión más profunda y significativa, ya que el conocimiento no se impone desde fuera, sino que se construye desde la experiencia del propio alumno, respetando su ritmo de desarrollo y su proceso de abstracción progresiva.

- Variabilidad perceptiva: Este principio señala que, para que un concepto matemático sea comprendido en profundidad, los estudiantes deben experimentarlo en diversas formas y contextos perceptivos. Esto implica presentar un mismo concepto con diferentes colores, tamaños, formas o materiales, de modo que el alumno no asocie el concepto únicamente a una representación fija, sino que aprenda a reconocer lo esencial del concepto más allá de sus características superficiales. Por ejemplo, si se enseña la idea de triángulo, se deben usar triángulos equiláteros, isósceles, escalenos, grandes, pequeños, con distintos colores y orientaciones, para que el estudiante construya una imagen mental flexible y abstracta del concepto, desligada de aspectos irrelevantes.

- Variabilidad matemática. Este principio sostiene que, para lograr una comprensión profunda de un concepto, es necesario que el alumno experimente con todas sus variables esenciales, observando cómo los cambios en una afectan a las demás. En el caso del área, esto puede lograrse permitiendo al estudiante manipular la longitud de los lados de un rectángulo y observar cómo esas variaciones influyen en el área total. De esta forma, el alumno no solo aprende una fórmula de memoria (A = base × altura), sino que comprende la relación funcional entre las variables, construyendo el concepto a partir de la exploración activa.

Hans Freudenthal

Hans Freudenthal fue un matemático y pedagogo de origen neerlandés que tuvo una influencia significativa en la forma en que se enseña matemáticas. Su propuesta más reconocida es la Educación Matemática Realista (Realistic Mathematics Education, RME), un enfoque que considera que las matemáticas deben enseñarse como una actividad humana. Según esta visión, el aprendizaje parte de situaciones cercanas a la realidad del estudiante, y el objetivo principal es lograr una comprensión profunda de los conceptos, más allá de la simple memorización.

A diferencia de otros enfoques más estructurados o formales, Freudenthal defendía que las matemáticas no deben presentarse como un sistema cerrado de conocimientos ya elaborados, sino como una actividad que los alumnos deben redescubrir y reinventar por sí mismos, con ayuda del docente. Esta visión tiene profundas implicaciones sobre cómo debe enseñarse el concepto de área, que a veces se presenta como un conjunto de fórmulas a memorizar, sin una comprensión profunda de su significado.

Dentro de este enfoque, Freudenthal también planteó que el aprendizaje debe avanzar por niveles. Primero se parte de experiencias informales y concretas, luego se pasa por una etapa intermedia donde los alumnos comienzan a usar modelos, y finalmente se llega a una comprensión formal y abstracta. Estas ideas recuerdan a las fases manipulativa, pictórica y abstracta de Bruner. Además, subrayó la importancia del trabajo colaborativo: aprender matemáticas es también un proceso social, donde discutir y compartir ideas permite construir significados más sólidos. En esto, su opinión se acercaba a la de Vigotsky.

Finalmente, insistía en que las situaciones de aprendizaje deben tener sentido para los estudiantes. Utilizar contextos realistas ayuda a que los contenidos sean más comprensibles y relevantes. En conjunto, estas ideas transforman la enseñanza de las matemáticas en una actividad viva, conectada con la realidad y centrada en el desarrollo del pensamiento.

A continuación veremos un ejemplo de secuencia didáctica siguiendo los principios de Hans Freudenthal. Esta propuesta busca que el alumnado no memorice fórmulas de forma mecánica, sino que comprenda el concepto de área como una medida que surge de necesidadaes prácticas.

La situación inicial parte de un contexto cotidiano y cercano: la comparación entre dos paredes de distinto tamaños que se desean pintar. Los estudiantes deberán adivinar en cual de las dos voy a necesitar más pintura. Esta actividad inicial tiene como objetivo activar los conocimientos previos del alumnado y generar una necesidad real de medir superficies. Al tratarse de una situación abierta y visualmente comprensible, permite que los estudiantes se impliquen de manera natural en la resolución del problema.

A partir de esta situación, se da paso a una discusión colectiva. Se invita a los alumnos a compartir sus ideas sobre cómo podrían determinar cuál alfombra cubre más. Algunos propondrán apoyarse en medidas lineales como el largo y el ancho, otros sugerirán usar recortes o superposiciones. Esta discusión cumple una función clave: permite al docente recoger las representaciones iniciales de los estudiantes y aprovecharlas como punto de partida para guiar la construcción conceptual.

La siguiente etapa consiste en una fase de exploración activa. Los alumnos reciben representaciones esquemáticas de las paredes sobre una cuadrícula y se les plantea la tarea de contar cuántas unidades cuadradas ocupa cada una. Esta actividad les permite establecer una relación directa entre el concepto de área y la cantidad de unidades utilizadas para cubrir una superficie. Aquí no se impone la noción formal de área; por el contrario, se fomenta que los alumnos descubran sus propias estrategias de medición, comparando visualmente, contando, organizando y descomponiendo figuras.

En esta fase, algunos alumnos empezarán a observar que, cuando las figuras tienen forma rectangular, pueden calcular el número total de cuadrados contando filas y columnas. Surge entonces una transición natural hacia la formalización: el descubrimiento del producto como estrategia de conteo. El área se concibe ahora como el resultado de multiplicar el número de unidades a lo largo de la base por el número de unidades en la altura. Esta formalización no es impuesta desde fuera, sino que nace de la necesidad de optimizar los procedimientos descubiertos por los propios estudiantes.

Con la noción de área ya construida para rectángulos, se introduce una etapa de ampliación. En ella se presentan triángulos y se invita al alumnado a relacionarlos con rectángulos ya conocidos. A través de la descomposición de figuras y la simetría, los estudiantes descubren que un triángulo ocupa la mitad del área de un rectángulo del mismo base y altura. Este descubrimiento permite extender el concepto de área a nuevas formas geométricas, consolidando el pensamiento estructural y relacional.

Finalmente, se propone una fase de reflexión, en la que se pide a los alumnos que comparen las estrategias utilizadas, generalicen los procedimientos descubiertos y los expresen verbalmente o por escrito. Este momento metacognitivo permite consolidar los aprendizajes, fomentar la argumentación y propiciar una visión más consciente y profunda de los conceptos trabajados.

En conjunto, esta secuencia representa fielmente el enfoque de Freudenthal: se parte de una situación realista, se guía al estudiante en un proceso de reinvención del conocimiento matemático, se promueve el paso progresivo de lo concreto a lo formal, y se estimula la reflexión crítica sobre lo aprendido. Todo ello en un entorno en el que el alumno se convierte en protagonista activo de su propio aprendizaje.

Bernhard Erhard

Bernhard Erhard es una figura relevante en el campo de la didáctica de las matemáticas, particularmente en la enseñanza de la geometría. Su trabajo se ha centrado en el diseño y la implementación de materiales manipulativos que permitan a los estudiantes construir activamente su conocimiento matemático a través de la exploración, la intuición y el descubrimiento guiado. Uno de los aspectos fundamentales en su propuesta es la creación de entornos de aprendizaje en los que el alumno pueda investigar conceptos espaciales mediante la experiencia concreta y sensorial.

Lejos de una enseñanza centrada en definiciones formales y ejercicios repetitivos, Erhard propone una geometría vivida, donde los conceptos como el área, el perímetro, las transformaciones o las propiedades de las figuras planas surgen de la manipulación directa, la observación y la experimentación. Para ello, recomienda el uso de materiales como rejillas, recortables, geoplanos, tangrams y bloques geométricos, que permiten establecer conexiones entre lo visual, lo corporal y lo simbólico.

La enseñanza según Erhard debe favorecer el desarrollo del pensamiento espacial en etapas progresivas. En las primeras fases, se prioriza la familiarización con las formas y sus transformaciones mediante juegos, actividades de clasificación, composición y descomposición de figuras. Más adelante, se introducen nociones más formales y estructuradas, pero siempre partiendo de la experiencia concreta del alumno. Esta metodología busca construir una geometría con sentido, en la que los conceptos no se memorizan de manera aislada, sino que se entienden en relación con la acción y el contexto.

Además, Erhard defiende el uso del diálogo y la argumentación en el aula de matemáticas, ya que considera que explicar las propias estrategias y escuchar las de los demás fortalece el pensamiento lógico y la capacidad de generalizar. La geometría, en su enfoque, no es solo una rama del saber matemático, sino una herramienta poderosa para formar el pensamiento crítico, la percepción espacial y la capacidad de resolver problemas.

En el caso específico del concepto de área, su propuesta es especialmente interesante. En lugar de introducir la fórmula como punto de partida, Erhard sugiere actividades como cubrir superficies con unidades cuadradas, comparar figuras que ocupan el mismo espacio pero tienen formas distintas, o descomponer figuras complejas en otras más simples. De este modo, los alumnos descubren el concepto de área como medida del espacio ocupado y comprenden por qué las fórmulas funcionan, al relacionarlas con las acciones que han realizado previamente.

La perspectiva de Erhard encaja plenamente con los principios del constructivismo y refuerza la idea de que la enseñanza de las matemáticas debe ser un proceso activo, en el que el alumno explore, proponga hipótesis, se equivoque y, sobre todo, construya significados a partir de su experiencia personal.

2. La definición de área

La complejidad del concepto de área se manifiesta en la variedad de definiciones que ofrecen los libros de texto, las cuales pueden ir desde aproximaciones empíricas basadas en la medida de superficies hasta formulaciones más formales que introducen propiedades axiomáticas. Sin embargo, más allá de la diversidad de enfoques, surge una cuestión fundamental: ¿qué tipo de comprensión se pretende promover en el alumnado? ¿Se busca una definición matemática precisa o la construcción progresiva de un objeto mental significativo?

En este sentido, la perspectiva de Hans Freudenthal (1973) resulta especialmente relevante. Desde su teoría del realismo matemático, Freudenthal sostiene que la enseñanza de las matemáticas debe centrarse en la matematización progresiva de la realidad, priorizando la construcción de significados por parte del estudiante. Para Freudenthal, el proceso de aprendizaje no se reduce a la transmisión de conceptos acabados, sino que debe fomentar la emergencia del conocimiento como reconstrucción personal. Así, la construcción del concepto de área no debe entenderse como la simple adquisición de una fórmula o una definición, sino como el desarrollo de una estructura mental que permita al estudiante interpretar, comparar, estimar, transformar y justificar relaciones espaciales vinculadas con la medida de superficies.

Desde esta perspectiva, las definiciones de área presentes en los libros de texto no deben analizarse solo por su fidelidad al conocimiento matemático formal, sino también por su potencial para generar experiencias de aprendizaje significativas. Evaluar cómo se introduce y desarrolla el concepto en distintos textos escolares permite visibilizar los posibles obstáculos u oportunidades que estas propuestas generan para la formación matemática del estudiante de secundaria.

Un estudio reciente de Tossavainen, Suomalainen y Mäkäläinen (2017) aporta evidencia significativa sobre cómo la definición que los docentes dan del concepto de área incide en su capacidad para resolver problemas que involucran esta noción. El estudio, realizado con 82 estudiantes de Finlandia, reveló que solo un pequeño porcentaje fue capaz de proporcionar una definición matemáticamente precisa y que incluyera la idea de bidimensionalidad. La mayoría de los participantes ofrecieron definiciones vagas o ligadas exclusivamente al uso de fórmulas, y una parte significativa incluso confundía el área con la noción de perímetro o con ejemplos particulares.

Por ejemplo, únicamente seis participantes ofrecieron definiciones que entraban en la categoría más alta de calidad, como:

> "El área es una magnitud que expresa el tamaño bidimensional de una superficie"

Este tipo de formulación es válida porque reconoce explícitamente la dimensión a la que pertenece el área, permite generalizar a distintos contextos y no está limitada a figuras regulares ni al uso de fórmulas específicas.

En contraste, un número importante de estudiantes ofreció definiciones más vagas o restringidas. Veintiséis estudiantes dieron la siguiente definición:

> "El área es el tamaño de un dominio o figura plana"

lo cual, aunque puede parecer correcto, no incorpora el componente dimensional y puede generar confusión con otras magnitudes, como el perímetro o incluso el volumen. Además, veinte participantes limitaron la definición al caso de figuras acotadas, como en el ejemplo:

> “El área es el tamaño del interior de una figura limitada”.

Este tipo de definición es problemática porque excluye de entrada la posibilidad de aplicar el concepto de área a figuras no limitadas, como ciertas curvas o regiones infinitas, e impide desarrollar una visión más abstracta y general del concepto.

Una cuarta categoría, presente en veintidós casos, consiste en definiciones basadas exclusivamente en fórmulas o ejemplos concretos, como:

> “El área define el tamaño de una región. Se calcula con altura por base”

Aquí, el área no es entendida como una propiedad geométrica general, sino como un procedimiento de cálculo vinculado a figuras específicas, lo cual limita seriamente su comprensión conceptual. Finalmente, un pequeño grupo de participantes ofreció definiciones muy vagas o directamente erróneas, como

> “El área es delimitar una superficie con métodos numéricos”

lo que revela una desconexión importante entre el conocimiento matemático formal y las imágenes mentales asociadas al concepto.

El estudio demuestra que la comprensión de la bidimensionalidad (una característica esencial del área) está ausente en muchos casos, incluso entre quienes dominan los algoritmos y fórmulas para su cálculo.

De hecho, los autores del estudio encontraron que existe una débil correlación entre la calidad de las definiciones conceptuales de área dadas por los participantes y su rendimiento en ejercicios prácticos. Esto sugiere que el dominio procedimental (saber aplicar una fórmula) no garantiza una comprensión conceptual (saber qué representa realmente el área y cómo se relaciona con otras dimensiones).

Estos resultados tienen profundas implicaciones para el análisis didáctico del concepto de área. En primer lugar, invitan a reconsiderar cómo se introduce el concepto en las aulas: ¿se presenta como una herramienta para calcular, o como una idea matemática que debe ser comprendida en su profundidad? En segundo lugar, señalan la necesidad de que los futuros docentes reflexionen explícitamente sobre el significado de los conceptos que enseñan, y que puedan distinguir entre una imagen conceptual (lo que ”visualizan” o creen que es un concepto) y una definición formal (lo que matemáticamente significa ese concepto). En el caso del área, al tratarse de una noción primitiva y muy difícil de definir formalmente (como ya hemos visto en el capítulo 1), lo mejor es introducir el concepto a través de ejemplos variados que permitan a los alumnos construir una idea mental del concepto sin la necesidad de llegar a una definición formal.

3. Recomendaciones para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de área

R. Corberan (1997) realiza un análisis profundo sobre cómo se comprende el concepto de área en distintos niveles educativos. La comprensión profunda de esta noción requiere que los estudiantes construyan un objeto mental que les permita interpretar el área como una magnitud bidimensional, aplicable a distintas figuras y situaciones. En este contexto, la tesis de Rosa Corberán ofrece un valioso análisis didáctico que permite identificar obstáculos comunes en el aprendizaje y, a su vez, proponer orientaciones metodológicas fundamentadas en marcos teóricos sólidos.

Las recomendaciones que se presentan a continuación están elaboradas a partir del estudio realizado por Rosa Corberán, y recogen tanto reflexiones pedagógicas como estrategias concretas para abordar el área desde una perspectiva significativa. Estas sugerencias no deben entenderse como una receta cerrada, sino como un conjunto de propuestas abiertas que pueden ser adaptadas a distintos contextos educativos. Todas ellas tienen como objetivo principal favorecer la comprensión conceptual del área, su vinculación con las propiedades geométricas, y su aplicación en situaciones reales y variadas.

Priorizar la construcción del significado antes que la memorización de formulas

La enseñanza del concepto de área en los niveles iniciales de la educación matemática debe enfocarse prioritariamente en la construcción del significado antes que en la aplicación mecánica de fórmulas. En lugar de comenzar con la presentación directa de la fórmula del área de figuras planas (como el clásico ”base por altura dividido por dos” en triángulos o ”base por altura” en rectángulos), es fundamental que el alumnado experimente, explore y comprenda el porqué de dichas expresiones.

Un enfoque significativo requiere situar el concepto de área en contextos reales o simulados que generen la necesidad de cuantificar superficies. Por ejemplo, cubrir una mesa con manteles, empapelar una pared o calcular el espacio de una huerta pueden ser situaciones problemáticas que lleven a los estudiantes a preguntarse “¿cuánto ocupa?” o “¿cuánto necesito para cubrir esto?”. A partir de este tipo de situaciones, puede emerger de forma natural la idea de área como medida de superficie.

Estas actividades deben permitir manipular, comparar y descomponer figuras, favoreciendo el desarrollo de estrategias personales que conduzcan, mediante la observación y el razonamiento, a la construcción de fórmulas. De este modo, la fórmula no es un punto de partida, sino una conclusión razonada, una herramienta que surge como respuesta a un problema significativo y que, por lo tanto, tiene sentido para quien la utiliza.

Al promover este tipo de enseñanza, no solo se facilita la comprensión profunda del concepto de área, sino que se fomenta la autonomía intelectual del alumnado, su capacidad de argumentación y su pensamiento matemático.

El Enfoque cualitativo del concepto de área

Una vez que los estudiantes han comenzado a construir el significado del área como medida de la superficie, es fundamental avanzar hacia una comprensión más profunda introduciendo la noción de área como una propiedad invariante. Esta idea puede abordarse mediante actividades en las que las figuras se dividen o se reorganizan sin que ello implique un cambio en su área total.

Trabajar con figuras que se descomponen y se recomponen permite que los estudiantes desarrollen la noción de conservación del área. Por ejemplo, si un rectángulo se corta en dos triángulos y estos se reconfiguran para formar un paralelogramo, el área permanece constante. Este tipo de tareas también promueve la comprensión de la aditividad del área: el área de una figura compuesta es igual a la suma de las áreas de sus partes.

Para facilitar estos aprendizajes, es útil incluir actividades prácticas donde los estudiantes manipulen figuras, las recorten, las trasladen, las reflejen o las roten, observando cómo ciertas transformaciones no alteran el área. Esta exploración de equivalencias entre figuras a través de recortes y simetrías fortalece su capacidad para reconocer propiedades invariantes y razonar espacialmente.

Además, es importante no limitar el trabajo a cálculos exactos. Las actividades de estimación y comparación de áreas (por ejemplo, determinar cuál de dos figuras irregulares ocupa más espacio sin medirlas) ayudan a desarrollar la intuición geométrica y a consolidar el sentido del área más allá de los números.

En lugar de enseñar una expresión diferente para cada tipo de figura, se pueden buscar conexiones entre ellas. Por ejemplo, comprender que el área del triángulo es la mitad del área de un rectángulo con la misma base y altura, o que un romboide puede descomponerse en dos triángulos equivalentes, permite reducir la cantidad de información a memorizar y fortalece la comprensión estructural del concepto.

Esta forma de trabajar también favorece la generalización: a partir de casos particulares, los estudiantes pueden identificar regularidades y elaborar afirmaciones más amplias. Así, se cultiva un pensamiento matemático flexible y significativo, en el que las fórmulas son fruto de la comprensión, no un simple objeto de memorización. Este enfoque refuerza el aprendizaje activo y reflexivo, y consolida el concepto de área como una propiedad geométrica que puede analizarse, discutirse y justificarse, no solo calcularse.

El papel de las unidades en la construcción del concepto de área

La comprensión del área como medida de superficie no puede desligarse del trabajo con unidades. Sin embargo, este trabajo debe desarrollarse de manera progresiva y reflexiva, priorizando la comprensión del concepto sobre la aplicación mecánica de unidades convencionales. Es por eso que resulta clave favorecer, en las primeras etapas, el uso de distintas unidades de medida, incluyendo aquellas no estandarizadas o creadas por los propios estudiantes.

Una estrategia didáctica eficaz es comenzar con unidades arbitrarias: por ejemplo, medir el área de una superficie usando tapas de frascos, hojas, post-its o manos. Esta aproximación permite que los alumnos comprendan que medir es comparar con una unidad, y que el número resultante depende del tamaño de la unidad utilizada. A través de estas experiencias, se genera una base conceptual sólida sobre lo que significa medir una superficie.

Posteriormente, se puede introducir el uso de cuadrículas o papel milimetrado, que funcionan como puentes hacia las unidades convencionales. Estos recursos ofrecen una representación visual clara de la medición y permiten realizar estimaciones, comparaciones y cálculos más precisos. Además, promueven la idea de que el área se puede descomponer en partes iguales, lo cual fortalece la comprensión de la estructura multiplicativa detrás de muchas fórmulas.

Asimismo, permitir que los estudiantes diseñen sus propias unidades o utilicen elementos cotidianos como base de comparación fomenta la creatividad, la apropiación del conocimiento y el desarrollo de un pensamiento más flexible. Este enfoque no solo hace más significativo el aprendizaje, sino que también sienta las bases para una transición natural y comprensiva hacia el uso de unidades convencionales como el centímetro cuadrado o el metro cuadrado.

Trabajar con distintas unidades, especialmente en contextos concretos, enriquece la construcción del concepto de área y refuerza su vínculo con la medición y la experiencia cotidiana, permitiendo a los estudiantes comprender el área no solo como un resultado numérico, sino como una idea profundamente conectada con el espacio y la acción de medirlo.

Distinguir entre área y perímetro

Uno de los obstáculos frecuentes en el aprendizaje de la geometría es la confusión entre los conceptos de área y perímetro. Por ello, es fundamental que en la enseñanza se diferencien claramente ambas nociones, no solo desde lo conceptual, sino también a través de experiencias concretas que permitan a los estudiantes construir y contrastar su significado.

El perímetro mide una longitud, es decir, la distancia total que recorre el contorno de una figura plana. Es una magnitud unidimensional. En cambio, el área mide la superficie que ocupa una figura, es decir, la cantidad de espacio dentro de ese contorno: una magnitud bidimensional. Esta diferencia esencial (una dimensión frente a dos) debe ser destacada mediante actividades que inviten a visualizar, medir y comparar.

Una estrategia efectiva es proponer tareas comparativas donde se analicen figuras que tienen el mismo perímetro pero distintas áreas, o viceversa. Por ejemplo, se puede pedir a los estudiantes que construyan varias figuras con perímetro fijo usando una cuerda o una tira de papel, y luego comparen cuánta superficie ocupan cada una. De este modo, no solo se evidencia que perímetro y área no están directamente relacionados, sino que se fomenta el pensamiento crítico y la argumentación matemática.

También puede trabajarse con figuras de igual área que presentan diferentes perímetros, promoviendo así la exploración de cómo la forma influye en estas magnitudes. Estas experiencias ayudan a desmontar la idea errónea de que “más perímetro significa más área” o viceversa, y permiten consolidar ambas nociones como conceptos distintos pero complementarios.

Al clarificar la diferencia conceptual y funcional entre área y perímetro, se fortalece la comprensión de ambas medidas y se sientan las bases para un aprendizaje más sólido y duradero en geometría.

El carácter bidimensional del área

Una comprensión sólida del concepto de área requiere enfatizar su carácter bidimensional. A diferencia de la longitud o el perímetro, que se refieren a una sola dimensión, el área se extiende en dos direcciones: largo y ancho. Esta diferencia no es solo formal o terminológica, sino conceptual, y debe ser objeto de una enseñanza explícita y significativa.

Es clave reforzar que el área se expresa en unidades cuadradas, como centímetros cuadrados (cm^2) o metros cuadrados (m^2), porque mide la cantidad de ”cuadraditos” de cierta medida que caben dentro de una superficie. Este vínculo visual y conceptual con los cuadrados como unidades de medida ayuda a comprender que el área implica extensión en dos dimensiones, y que no puede tratarse como una simple medida lineal.

Una de las confusiones más frecuentes es asumir que si se duplica la longitud de los lados de una figura, su área también se duplica. Para contrarrestar este error, es útil proponer actividades en las que los estudiantes construyan figuras ampliadas, por ejemplo, duplicando o triplicando sus lados, y luego comparen sus áreas. Así podrán observar que si se duplican ambos lados de un cuadrado, el área se no se duplica, ya que el crecimiento afecta a las dos dimensiones al mismo tiempo.

Este tipo de experiencias no solo refuerza el carácter bidimensional del área, sino que también introduce de forma intuitiva ideas sobre crecimiento cuadrático y relaciones no lineales, que serán fundamentales en niveles más avanzados de la educación matemática.

Por tanto, diseñar actividades en las que los estudiantes analicen el efecto del aumento proporcional de los lados sobre el área, ya sea mediante cálculos, dibujos en papel cuadriculado o representaciones con material concreto, les permitirá interiorizar una comprensión más profunda, visual y razonada de lo que significa medir en dos dimensiones.

La importancia de la argumentación matemática

Es fundamental fomentar la argumentación y la justificación en torno al área. Actividades donde se compare el área de figuras diferentes, se analicen recortes y transformaciones, o se debata si dos figuras tienen la misma superficie, ayudan a desarrollar la capacidad de explicar, fundamentar y comunicar razonamientos matemáticos. Pedir a los estudiantes que expliquen por qué dos figuras tienen la misma área (aunque una sea más “alargada” o tenga una forma menos regular)fortalece la comprensión conceptual y estimula el pensamiento crítico.

En este mismo espíritu, es importante promover la autonomía y la creatividad a través de actividades abiertas. Propuestas como “dibuja todas las figuras diferentes que puedas con un área de 12 unidades cuadradas” o “construye una figura con igual área que esta pero diferente forma” invitan al alumno a explorar, tomar decisiones y experimentar soluciones múltiples. Este tipo de tareas, ricas en posibilidades, permiten que cada estudiante avance desde su propio nivel de comprensión, y favorecen un clima de investigación y participación activa.

Incorporar el área como parte de situaciones reales, fomentar la reflexión y abrir espacios para la creación convierte la enseñanza en una experiencia significativa. Así, el concepto se interioriza no solo como una fórmula o resultado, sino como una herramienta potente para comprender y transformar el mundo que nos rodea.

Capítulo 3

Propuesta didáctica para 1º ESO

La enseñanza de las matemáticas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria enfrenta el reto de ir más allá de la mera transmisión de procedimientos mecánicos. En un contexto en el que las competencias clave, el pensamiento crítico y el aprendizaje significativo cobran cada vez mayor protagonismo, resulta imprescindible situar al alumnado como verdadero protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Esta propuesta curricular está diseñada para el nivel de 1º de Educación Secundaria Obligatoria, y tiene como tema central el trabajo con los conceptos de perímetro y área, contenidos fundamentales en el bloque de Geometría del currículo oficial. Lejos de abordar estos contenidos de forma puramente procedimental, la propuesta busca fomentar la comprensión profunda de las magnitudes, su sentido práctico, y su vinculación con el entorno real del alumnado.

El diseño de la secuencia didáctica se apoya en el modelo de Thinking Classroom de Peter Liljedahl (2020), que promueve una cultura de aula basada en el pensamiento, el trabajo colaborativo y el aprendizaje activo. A través de tareas abiertas, manipulativas y visuales, se pretende no solo facilitar la adquisición de los contenidos curriculares, sino también cultivar actitudes positivas hacia las matemáticas, favoreciendo la autonomía, la autoestima académica y el desarrollo de habilidades metacognitivas.

Además, se incorporan principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) con el fin de garantizar una enseñanza inclusiva, que atienda a la diversidad del alumnado y ofrezca múltiples formas de acceso a los contenidos, expresión del conocimiento y participación.

Esta propuesta se articula en torno a cinco fases progresivas, que abarcan desde la construcción conceptual de perímetro y área hasta el uso formal de unidades de medida estandarizadas. Cada etapa ha sido cuidadosamente diseñada para guiar al alumnado desde la intuición y la experiencia hacia la abstracción matemática, integrando actividades manipulativas, discusiones en grupo y reflexiones individuales, con el objetivo de generar aprendizajes duraderos y transferibles.

1. Contenidos

Esta propuesta didáctica se estructura en torno a tres temas recogidos en el currículo oficial de Matemáticas para 1.º de ESO según el DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, 2022. Estos contenidos están enmarcados dentro del bloque relativo a la medición y la geometría plana y están dividimos en 3 apartados:

1. Magnitud. Se trabaja la noción de magnitud a partir de la exploración de atributos mensurables de objetos tanto físicos como matemáticos en el plano, tales como la longitud o el área . El alumnado investiga estas propiedades a través de situaciones concretas, estableciendo relaciones entre ellas y reconociendo su presencia en distintos contextos del entorno. Se fomenta la elección razonada de unidades y operaciones adecuadas para resolver problemas de medida, con especial énfasis en el desarrollo de estrategias personales y la comprensión del sentido de las operaciones aplicadas. Esta etapa busca construir una base sólida para abordar los contenidos más formales desde una perspectiva significativa.
2. Medición. A lo largo de la secuencia didáctica se trabajan diferentes procedimientos para la medición de longitudes y áreas en figuras planas, promoviendo su deducción, interpretación y aplicación en situaciones reales y simuladas. Se hace especial hincapié en la comprensión del área como medida basada en unidades cuadradas, y en la transición de unidades no convencionales a unidades estandarizadas (cm^2, m^2). Asimismo, el alumnado desarrolla representaciones gráficas de objetos geométricos planos con propiedades determinadas, como la longitud de sus lados o la amplitud de sus ángulos, favoreciendo el uso de herramientas de dibujo, la estimación visual y la precisión en la representación.
3. Estimación y relaciones. Este bloque se aborda mediante actividades que invitan a la formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones métricas en el plano, a partir de la observación, la manipulación y la experimentación. El objetivo es fomentar el desarrollo del pensamiento inductivo y la capacidad de argumentar de forma lógica y coherente. Paralelamente, se introducen estrategias para la toma de decisiones sobre el grado de precisión necesario en contextos de medida, promoviendo una actitud crítica ante los resultados obtenidos y valorando la adecuación de las herramientas y unidades utilizadas en función del problema planteado.

2. Metodología

Esta secuencia didáctica se fundamenta en el modelo de Thinking Classroom o Aulas de Pensamiento, desarrollado por Peter Liljedahl (2020), cuyo objetivo principal es favorecer una participación activa, reflexiva y significativa del alumnado. Este enfoque se alinea con las competencias clave promovidas por la LOMLOE (2020), especialmente la competencia matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM) y la competencia de aprender a aprender.

El modelo parte de la premisa de que un aula matemática efectiva es aquella en la que los estudiantes piensan más que repiten, y en la que el profesorado diseña y facilita experiencias de aprendizaje ricas que promuevan el pensamiento crítico, la colaboración y la autonomía. En este contexto, la metodología utilizada en esta propuesta se articula en torno a tres principios fundamentales del Thinking Classroom:

- Trabajo en grupos aleatorios y visibles: Las actividades se plantean para ser resueltas en grupo, preferentemente en equipos pequeños y heterogéneos, asignados de forma aleatoria para fomentar la interacción entre diferentes perfiles de estudiantes. Las tareas se realizan de pie, en superficies verticales (como pizarras o ventanas con rotuladores especiales), lo que contribuye a la visibilidad del pensamiento y facilita el diálogo matemático entre compañeros (Liljedahl, 2020).
- Tareas ricas y desafiantes: Se priorizan actividades abiertas, contextualizadas y que invitan al descubrimiento, especialmente en las fases iniciales de la secuencia. Estas tareas están diseñadas para despertar la curiosidad y promover múltiples estrategias de resolución, lo que permite que todo el alumnado pueda aportar, independientemente de su nivel inicial (Boaler, 2016).
- Construcción colectiva del conocimiento: El papel del docente no se limita a transmitir contenidos, sino que se convierte en facilitador del pensamiento. A través de preguntas abiertas, reformulaciones y gestión del aula como comunidad de indagación, se potencia la co-construcción del conocimiento y el aprendizaje por descubrimiento guiado. Se favorece así un cambio en la cultura del aula, donde el error es valorado como parte del proceso y donde se legitima el pensamiento propio y ajeno (OECD, 2018).

Asimismo, la propuesta se construye desde una perspectiva inclusiva, alineada con los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), que sugiere ofrecer múltiples formas de representación, expresión y participación (CAST, 2018). Esto se refleja en el uso de materiales manipulativos, tareas visuales, espacios de discusión y reflexión individual y grupal, que permiten al alumnado acceder a los contenidos y demostrar su comprensión de diversas maneras.

En conjunto, esta metodología busca promover un aprendizaje profundo de las matemáticas, no solo desde la comprensión conceptual, sino también desde la implicación emocional y el desarrollo de la autonomía y la confianza matemática.

3. Secuencia didáctica

La enseñanza del concepto de área en 1º de ESO representa una oportunidad clave para consolidar nociones geométricas fundamentales y fomentar una comprensión profunda de la medida de superficies. Esta secuencia didáctica ha sido diseñada con el propósito de construir progresivamente el significado del área.

Partiendo de contextos cercanos al alumnado y problemas interesantes, se busca que los estudiantes desarrollen estrategias personales para explorar, estimar, comparar y calcular áreas, favoreciendo así una construcción activa del conocimiento. Las actividades propuestas están secuenciadas de manera que permitan transitar desde experiencias concretas hasta una formalización progresiva.

Antes de adentrarnos en el desarrollo de esta secuencia, es importante recordar que toda planificación en educación debe entenderse como una propuesta flexible, abierta a adaptaciones en función de las características del grupo, el ritmo de aprendizaje, los intereses del alumnado y las circunstancias que surjan en el aula. Este documento pretende ser una guía orientativa, no un guion cerrado.

A lo largo de la secuencia se proponen diversas actividades, algunas de las cuales pueden parecer demasiado complejas o ambiciosas para 1º ESO. No están pensadas para ser obligatoriamente trabajadas en su totalidad, sino para ofrecer opciones que el docente podrá seleccionar, simplificar o posponer según convenga. En algunos casos, pueden servir como enriquecimiento para alumnos que necesiten un reto mayor; en otros, podrían retomarse en cursos posteriores, ya que muchas ideas aquí planteadas tienen valor más allá de un único nivel educativo.

El objetivo final no es "completar" todas las tareas, sino generar oportunidades reales para que el alumnado explore, piense, discuta y construya significados en torno a los conceptos geométricos. En este sentido, la planificación es un punto de partida que se transforma y cobra sentido en la práctica, en el aula, con los estudiantes y sus procesos.

Introducción de área y perímetro

La primera sesión de la secuencia didáctica se dedicará a repasar y afianzar las nociones de área y perímetro, conceptos que el alumnado ya debería haber abordado durante la etapa de Educación Primaria. El objetivo principal es activar los conocimientos previos, identificar posibles confusiones y establecer una base común para los aprendizajes de las sesiones posteriores. En esta sesión se introducirá el concepto de área desde un enfoque constructivista, partiendo de la idea de que este es un concepto difícil de definir de forma directa y abstracta, especialmente para el alumnado de 1º de ESO. No se comenzará la clase con definiciones formales, sino que se propondrán situaciones que permitan al alumnado construir poco a poco el significado de "área" a través de ejemplos, manipulaciones, comparaciones y discusiones guiadas.

La sesión se centrará en una actividad práctica contextualizada: se entregarán recortes de papel con distintas formas geométricas que representarán terrenos agrícolas a escala. Se pedirá al alumnado que imagine que esos terrenos pueden usarse para cultivar alimentos y se les planteará la pregunta: "¿Cuál de estos terrenos te parece más rentable? ¿En cuál podrías cultivar más comida?"

No se les proporcionarán aún herramientas de medida, de modo que el alumnado deba recurrir a su intuición para ordenar los terrenos de mayor a menor superficie cultivable. Esto les llevará a verbalizar criterios visuales, que serán recogidos y discutidos colectivamente. Algunas figuras, a pesar de parecer grandes por su forma alargada, podrían tener una superficie menor que otras más compactas, lo que dará pie a una reflexión interesante.

Una vez compartidas las decisiones y debatidos los criterios utilizados, se introducirá una segunda pregunta que ampliará el contexto: "Y si en lugar de cultivar, el terreno fuera para criar animales, ¿en cuál necesitaríais poner una valla más larga para que no se escaparan?" Esta cuestión introducirá la idea de perímetro de manera natural, relacionada con la necesidad de rodear el terreno. El alumnado podrá descubrir por sí mismo que no siempre el terreno más amplio requiere más valla, y que figuras con igual área pueden tener perímetros diferentes, y viceversa.

Como segunda fase, se entregarán cuadrículas transparentes o plantillas de papel milimetrado para que puedan cubrir las figuras y así comparar superficies con mayor precisión. Esto servirá para comprobar si los resultados obtenidos de forma intuitiva son correctos.

Para terminar, se guiará al grupo a formular sus propias conclusiones: que la cantidad de tierra disponible para sembrar representa el área, mientras que la longitud de valla necesaria para cerrar el terreno representa el perímetro. Este momento será clave para afianzar la distinción entre ambos conceptos a partir de una experiencia directa y significativa.

Ejercicios cualitativos

Tras haber introducido y diferenciado los conceptos de área y perímetro, el siguiente paso en la secuencia didáctica se centra en favorecer una comprensión cualitativa del área, es decir, más allá del simple cálculo numérico. En esta fase, se pretende que el alumnado desarrolle una intuición geométrica sólida sobre qué significa "ocupar espacio" y cómo este puede conservarse, transformarse o compararse entre diferentes figuras, incluso sin recurrir a fórmulas.

Los ejercicios cualitativos permiten explorar propiedades fundamentales del área como la invarianza ante transformaciones (por ejemplo, cortar y reorganizar partes), la aditividad (el todo es igual a la suma de las partes), y la posibilidad de comparar visualmente superficies sin necesidad de medir. Esta etapa es clave para construir un significado profundo y duradero del concepto de área, y para prevenir errores frecuentes como confundirlo con la longitud o el volumen.

Se utilizarán actividades manipulativas, visuales y de razonamiento verbal que promuevan el análisis y la argumentación matemática, y que permitan al alumnado estimar, comparar y justificar relaciones entre áreas sin necesidad de realizar cálculos exactos. Además, estas actividades contribuyen a desarrollar habilidades espaciales y pensamiento lógico, fundamentales en la formación matemática.

Tarea 1. *¿Que fracción del cuadrado grande representa el área blanca de la figura 3.1? ¿Y el rosa? ¿Y el morado? ¿Y el azul?*

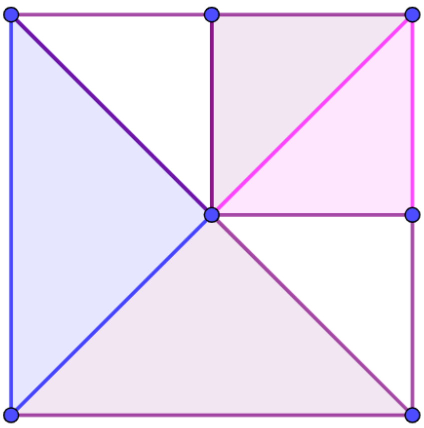

Figura 3.1: Problema extraído de Hoffer (1979)

En esta actividad se invita al alumnado a observar relaciones de proporcionalidad entre áreas dentro de una figura conocida.

Trabajar con fracciones de un área total ayuda a consolidar la idea de área como parte de un todo, al tiempo que se desarrollan habilidades de estimación, simetría y descomposición de figuras. Además, al no presentar unidades ni medidas concretas, se pone el foco en el razonamiento geométrico, lo cual favorece una comprensión estructural del concepto de área.

Tarea 2. *Construye un tangram con papel y calcula que fracción del cuadrado grande representan cada una de las piezas. Después construye las siguientes figuras y calcula su área y su perímetro. Por último crea un figura con el tangram, dibuja su contorno en un papel e intercambialo con tus compañeros para tratar de construir sus figuras.*

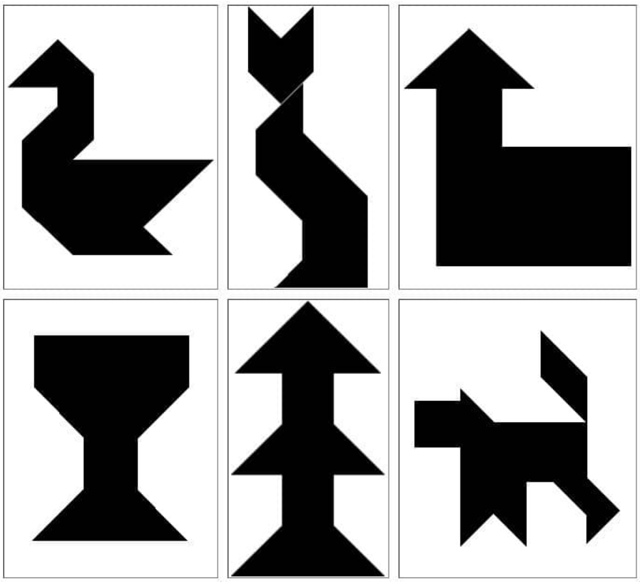

Figura 3.2: Tamgram

Esta propuesta combina tres grandes ideas matemáticas de forma muy natural: la descomposición de figuras, el trabajo con fracciones y el cálculo de áreas y perímetros. A través de la construcción del tangram, una figura manipulativa muy rica, el alumnado no solo visualiza las relaciones geométricas, sino que también se implica activamente en el proceso, lo cual favorece la comprensión.

En primer lugar, al pedir que calculen qué fracción representa cada pieza respecto al cuadrado original, se refuerza lo aprendido en la tarea 1.

Después, cuando se les propone construir nuevas figuras con las piezas del tangram, los alumnos observaran que el área total se mantiene constante (si usan todas las piezas), pero el perímetro varía según la disposición, lo que invita a reflexionar sobre cómo cambia una magnitud y no la otra.

Además, este tipo de actividad fomenta la creatividad y permite introducir el trabajo colaborativo y la comunicación matemática. Los alumnos pueden compartir sus figuras, discutir estrategias y comparar resultados, haciendo que el aula se convierta en un espacio de intercambio de ideas.

En resumen, trabajar con el tangram permite una experiencia geométrica muy completa: se manipula, se observa, se mide, se razona y se comunica. Es una propuesta con un potencial didáctico que favorece el desarrollo de la intuición espacial, el pensamiento lógico y el sentido numérico, todo ello desde una actividad lúdica.

Tarea 3. *La figura A ha sido cortada en dos piezas que han sido reorganizadas para formar la figura B. ¿Tienen el mismo área? En caso de que no, ¿Cual tiene mayor área?¿Tienen el mismo perímetro?En caso de que no, ¿Cual tiene mayor perímetro?*

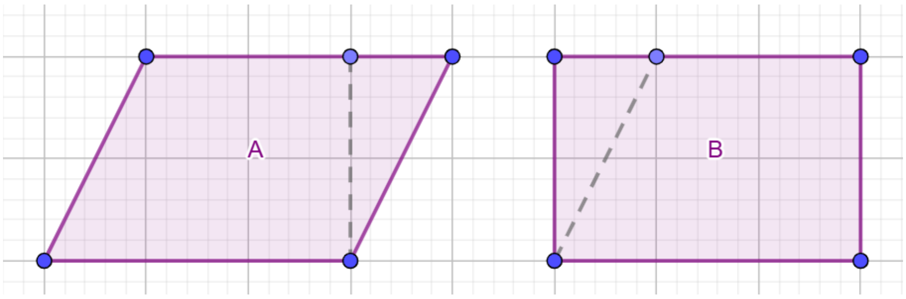

Figura 3.3: Problema extraído del Corberan (1997)

En esta actividad se estudia la conservación del área cuando hay una traslación y la variación que experimenta el perímetro de una superficie cuando esta es sometida a una trasformación por recorte en trozos y posterior pegado de estos sin solapamiento. El objetivo es familiarizar a los alumnos con el procedimiento de comparación indirecta basado en el recorte y posterior reconfiguración. También sirve para comprobar que superficies de formas distintas pueden tener igual área y que superficies de igual área tienen diferente perímetro.

Tarea 4. *Descompón cada una de las siguientes figuras en "trozos" iguales. ¿Esta descomposición es única? Expresa la relación entre el área de cada una de estas figuras y la de los "trozos"en los que ha sido descompuesta.*

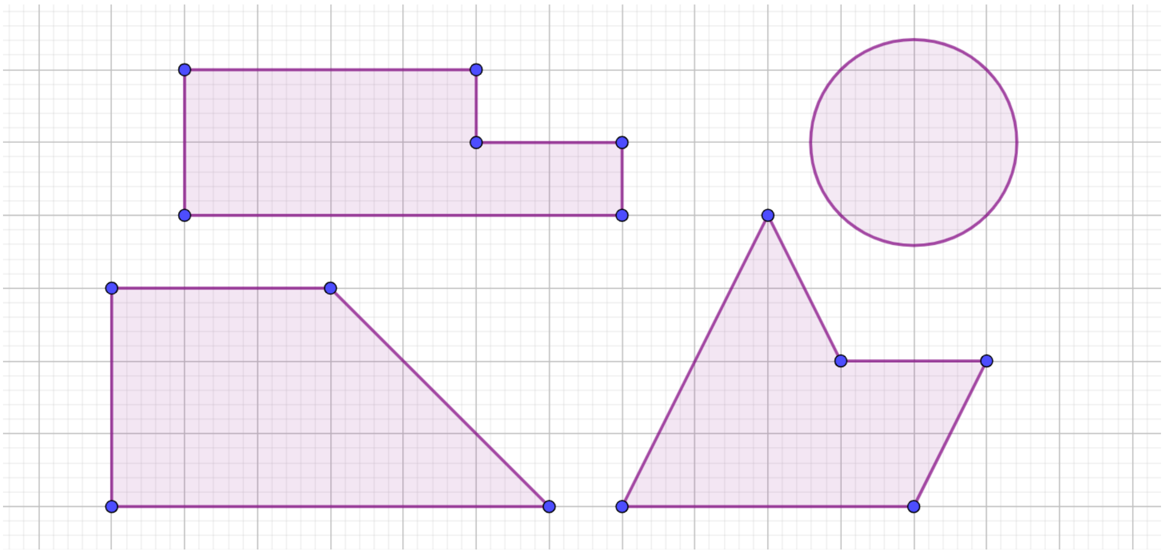

Figura 3.4: Figuras extraídas del Gardner (1981)

Esta actividad sirve para familiarizar a los alumnos con la partición de superficies en figuras congruentes y para mostrarles que no existe una única descomposición de una superficie. Esto les ayuda empezar a construir la idea de unidad de área.

Tarea 5. *Una camisa vieja tiene dos agujeros con la formas de los dos polígonos de la derecha. Si el trozo de tela que tengo para arreglarla es como el polígono de la izquierda, ¿Por donde tendré que cortar y coser el trozo de tela que tengo para convertirlo en dos trozos como los que necesito?*

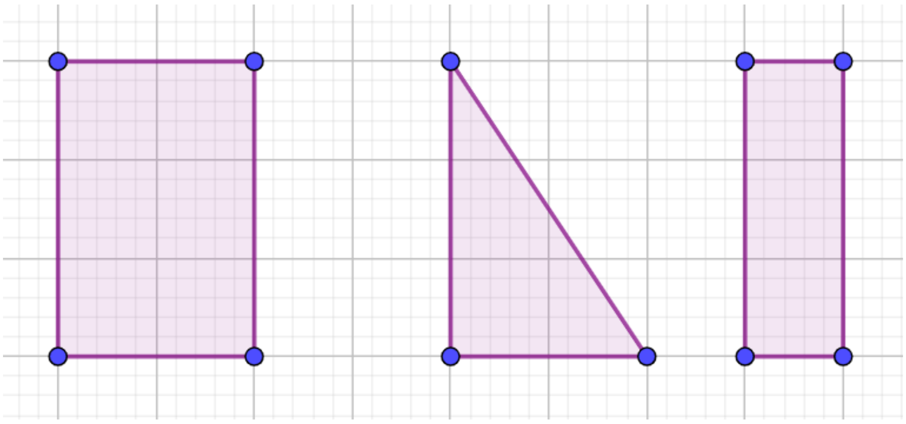

Figura 3.5: Problema extraído del Guillén (1983)

Esta actividad propone un problema de transformación y descomposición de áreas en un contexto cercano y manipulativo, como es el arreglo de una prenda de ropa. Su objetivo principal es que el alumnado reconozca la invariancia del área al realizar cortes y desplazamientos dentro de una figura, desarrollando así la idea de que una misma superficie puede adoptar formas distintas sin alterar su área.

Además, este ejercicio favorece el desarrollo de habilidades como la anticipación, el razonamiento lógico y la justificación de decisiones, ya que el alumnado deberá explicar cómo cortaría el trozo de tela y por qué su propuesta garantiza que obtendrá exactamente las formas deseadas. En la figura 3.6 se muestra la solución del problema.

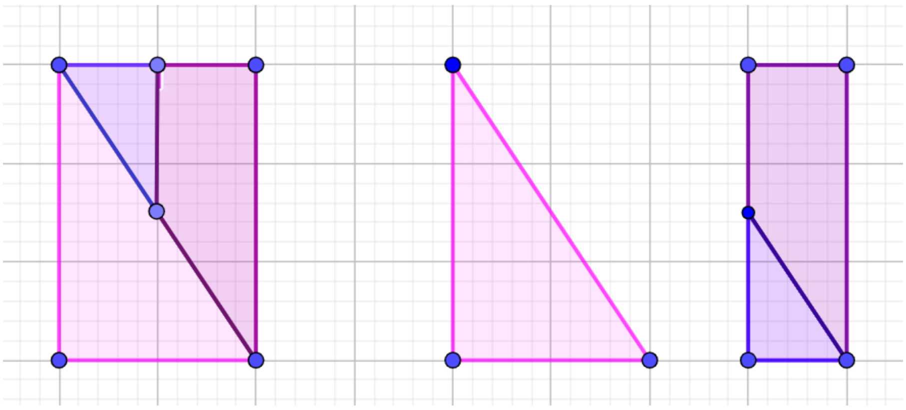

Figura 3.6: Solución

Tarea 6. *Modifica el siguiente polígono para crear, en cada caso, una figura con mayor área y menor perímetro y otra con menor perímetro y mayor área.*

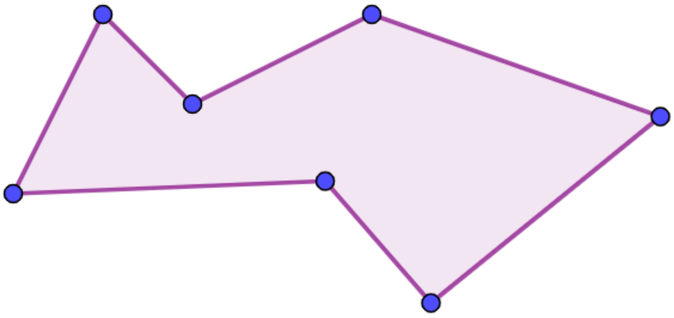

Figura 3.7: Problema inspirado en una actividad del Corberan (1997)

Esta tarea permite a los estudiantes explorar activamente la relación entre el área y el perímetro de figuras geométricas, desarrollando un pensamiento geométrico más profundo. Al modificar polígonos con el objetivo de aumentar o disminuir estas magnitudes de manera intencional, los alumnos ponen en práctica habilidades de visualización espacial. Además, este tipo de tarea favorece la comprensión de conceptos como eficiencia geométrica y optimización, fundamentales tanto en el ámbito académico como en aplicaciones prácticas, como el diseño y la arquitectura. Además, el ejercicio promueve el aprendizaje significativo mediante la experimentación y la toma de decisiones conscientes durante el proceso de construcción de nuevas figuras.

Tarea 7. *Compara el área morada con el área blanca en la figura 3.8.*

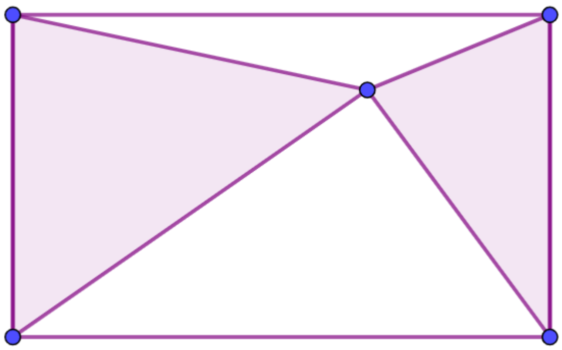

Figura 3.8: Problema extraído del O'Daffer y Clemens (1977)

Una pista que se les puede dar a los alumnos si no sean capaces de resolver esta actividad es dibujar las lineas que se ven en la figura 3.9.

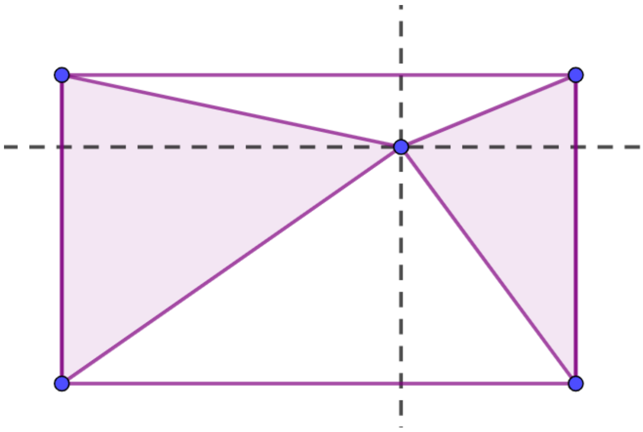

Figura 3.9: Pista

Tarea 8. *Compara el área morada con el área del cuadrado grande de las figuras 3.10 y 3.11.*

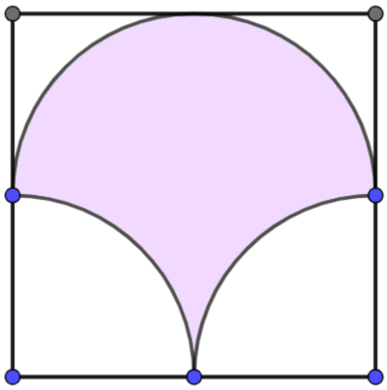

Figura 3.10: Problema extraído del Corberan (1997)

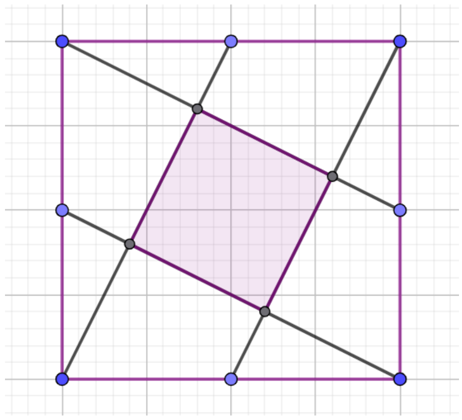

Figura 3.11: Problema extraído del Milauskas (1987)

Tarea 9. *Compara el área morada con el área azul de la figura 3.12*

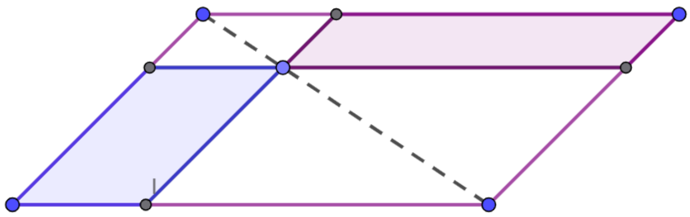

Figura 3.12: Problema extraído del Castelnuevo (1981)

Tarea 10. *Compara el área morada con el área del cuadrado grande de la figura 3.13*

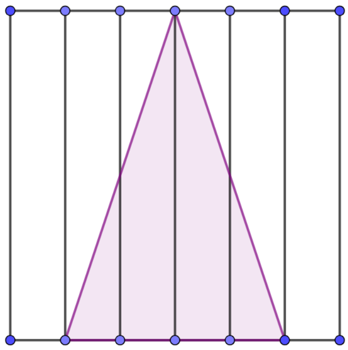

Figura 3.13: Problema extraído del Padilla (1990)

Tarea 11. *Compara el área azul y el área morada de la figura 3.14.*

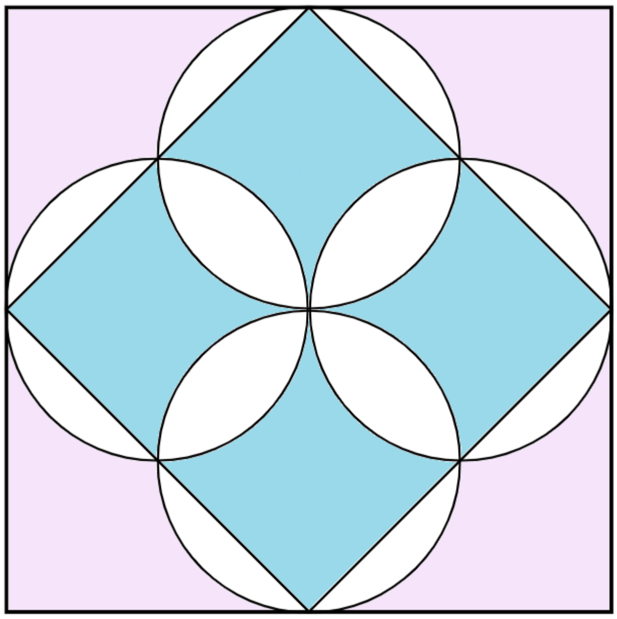

Figura 3.14: Problema extraído del Musser y Burger (1988)

Para guiar a los alumnos en esta actividad sin darles directamente la solución he preparado varias preguntas que pueden darles pequeñas pistas y ayudarles a reflexionar:

- ¿La figura es simétrica? ¿Respecto de que ejes?
- ¿Puedo descomponer la figura de alguna forma que me ayude a comparar las áreas?
- ¿Qué relación hay entre el área del cuadrado grande y el área del cuadrado que está en su interior?

Este problema es especialmente interesante porque se puede resolver de muchas formas distitnas, a continuación muestro algunas posibilidades:

1. Dividir la fiugra en "trozos" iguales.

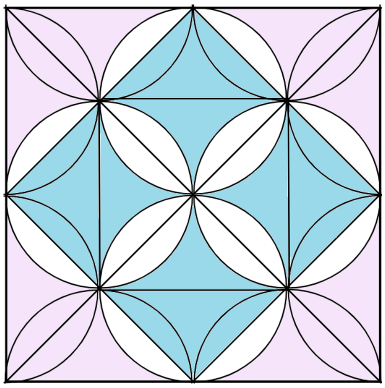

Figura 3.15: Solución 1

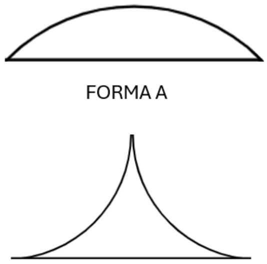

Figura 3.16: Formas A y B

Añadiendo algunos círculos y segmentos podemos dividir la figura en 'piezas' de la forma A o B como en la figura 3.15. Si contamos las piezas vemos que hay el mismo número de cada tipo en cada color. Otra forma más sencilla de dividir la figura en formas iguales es la que se muestra en la figura 3.17.

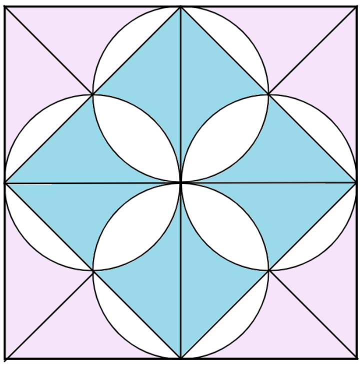

Figura 3.17: Solución 2

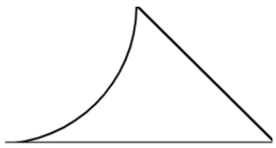

Figura 3.18: Forma C

2. Usar la simetría: Si dividimos la figura como en 3.19, será suficiente con compara las áreas de la figura 3.20. Por otro lado, si dividimos la figura como en 3.21, será suficiente con compara las áreas de la figura 3.22.

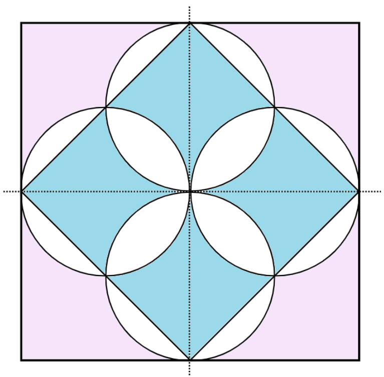

Figura 3.19: Simetría 1

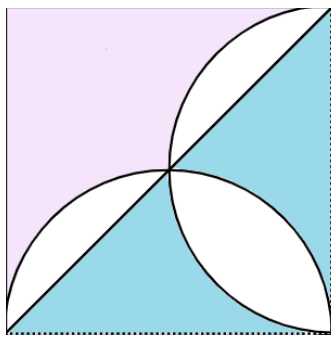

Figura 3.20: Simetría 1

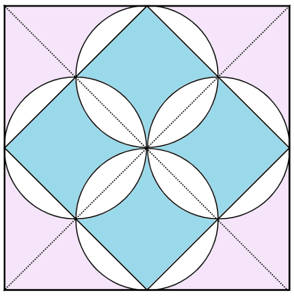

Figura 3.21: Simetría 2

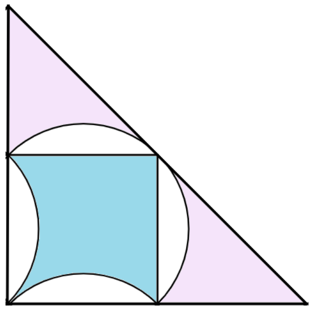

Figura 3.22: Simetría 2

3. Comparar cuadrados: observar la figura 3.23 y notar que el nuevo área azul es igual que el nuevo área morado y que ambos se han construido añadiendo 8 formas de tipo A (ver 3.16).

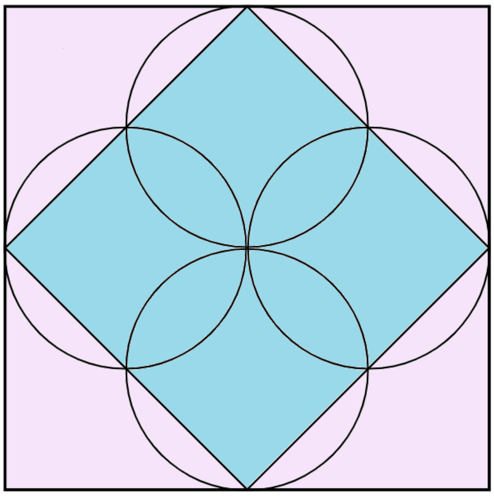

Figura 3.23: Solución 3

Las actividades 7, 8, 9 10 y 11 sirven para aprender a comparar áreas utilizando estrategias distintas. Esto ayuda a que el alumnado desarrolle flexibilidad cognitiva y explore diversas formas de abordar un mismo problema. Estas tareas permiten comparar superficies sin necesidad de aplicar fórmulas, lo que fomenta el uso de estrategias cualitativas, como la descomposición en figuras conocidas, la simetría, la conservación del área o la superposición visual.

A través de estas comparaciones, el alumnado no solo ejercita el razonamiento espacial, sino que también aprende a justificar sus elecciones y construir argumentos matemáticos sólidos. Esta diversidad de enfoques promueve la comprensión profunda del área como magnitud, y evita una visión mecanicista del cálculo.

Además, este tipo de actividades refuerza la idea de que el área puede conservarse aunque cambie la forma, y permite identificar errores comunes. Trabajar con estrategias variadas contribuye también al desarrollo de la autonomía matemática del alumnado, alentándolo a elegir y defender métodos propios de resolución.

Ejercicios con unidades variadas

Tras una primera aproximación cualitativa a los conceptos de perímetro y área, resulta fundamental que el alumnado explore diferentes formas de medir dichas magnitudes, utilizando unidades no estandarizadas. Este enfoque permite conectar los conceptos matemáticos con la experiencia cotidiana del alumnado, favoreciendo así una comprensión más profunda y significativa. Además, se estimula el razonamiento estimativo y la comparación entre objetos, lo que constituye un paso intermedio necesario entre la intuición visual y el cálculo formal.

Tarea 12. *Observa la figura 3.24 y utiliza las unidades de la fila de abajo para recubrir los polígonos de la de la arriba escogiendo la unidad más adecuada para cada polígono. Después calcula el área de las figuras usando esas unidades.*

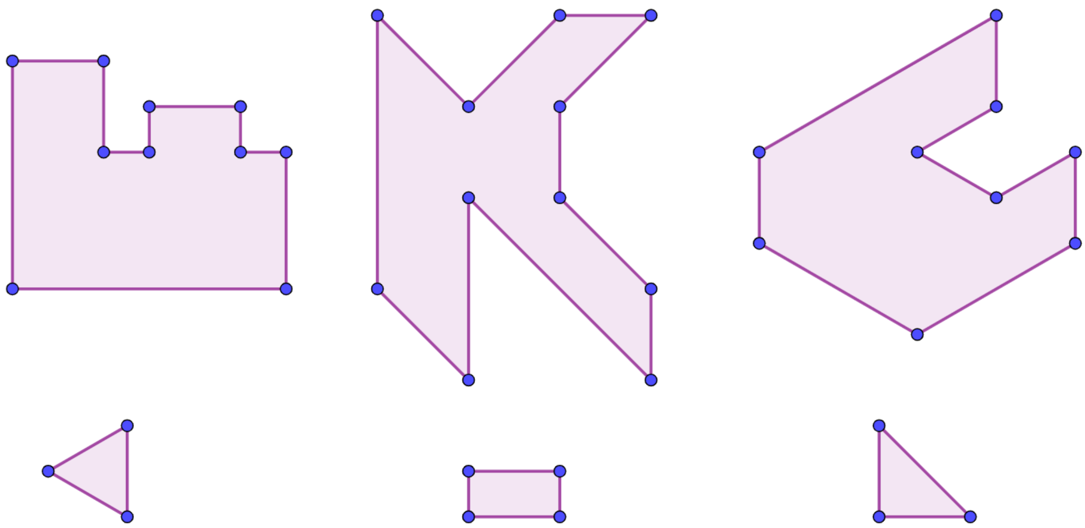

Figura 3.24: Tarea inspirada en una actividad de Douady y Perrín-Glorian (1983)

Tarea 13. *Utiliza las unidades A, B, C y D para calcular el área del polígono de arriba. ¿Qué sucede cuando usamos unidades más pequeñas?*

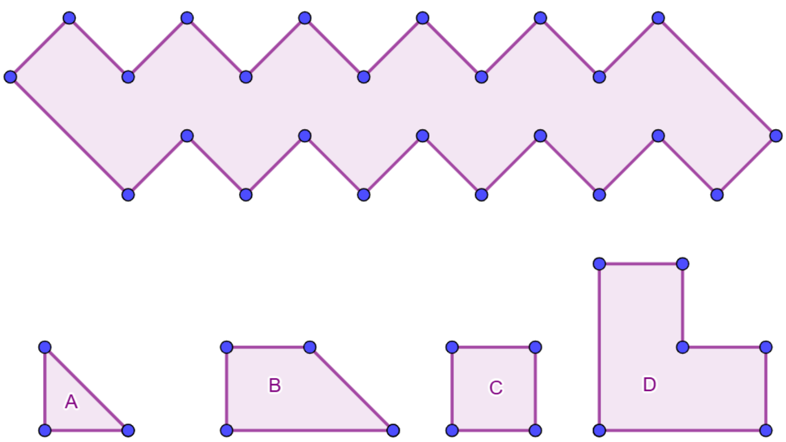

Figura 3.25: Actividad extraída del Corberan (1997)

Gracias a esta tarea los estudiantes descubrirán de manera concreta cómo el número de unidades necesarias cambia en función del tamaño de la unidad elegida. La actividad promueve una visión relacional del área y ayuda a interiorizar la idea de que el área es una medida relativa al tamaño de la unidad. Además, al observar que el uso de unidades más pequeñas conduce a contar más elementos, se refuerza el concepto de precisión en la medición y se fomenta la reflexión crítica sobre la elección de unidades adecuadas según el contexto.

Introducción a la unidad cuadrada y ejercicios con unidades cuadradas.

El concepto de unidad cuadrada es esencial para construir el significado del área de forma rigurosa y visual. En este apartado, se presenta la idea de que medir una superficie consiste en contar cuántas unidades cuadradas, todas iguales, se necesitan para cubrirla completamente sin dejar espacios ni superposiciones.

Se parte del trabajo con cuadrículas, lo cual permite representar el área de una figura como un número de "cuadraditos" o celdas. Este enfoque facilita la comprensión espacial y proporciona una representación visual directa del concepto de área. Además, permite a los estudiantes realizar aproximaciones y justificar sus estimaciones, lo que contribuye al desarrollo de habilidades metacognitivas.

Esta etapa representa una transición clave desde una concepción informal y visual del área hacia una más formal y cuantitativa, donde la unidad cuadrada se convierte en la base del sistema de medición de superficies.

La siguiente tarea sirve para introducir la medida con unidades cuadradas y es una buena oportunidad para reflexionar sobre porque la formula para hallar el área del rectángulo es longitud de la base por longitud de la altura. También es útil para entender que el área de una figura no tiene porque ser un número natural.

Tarea 14. *Calcula el área y perímetro de las siguientes figuras usando como unidad de área el cuadrado U y como unidad de longitud el segmento L.*

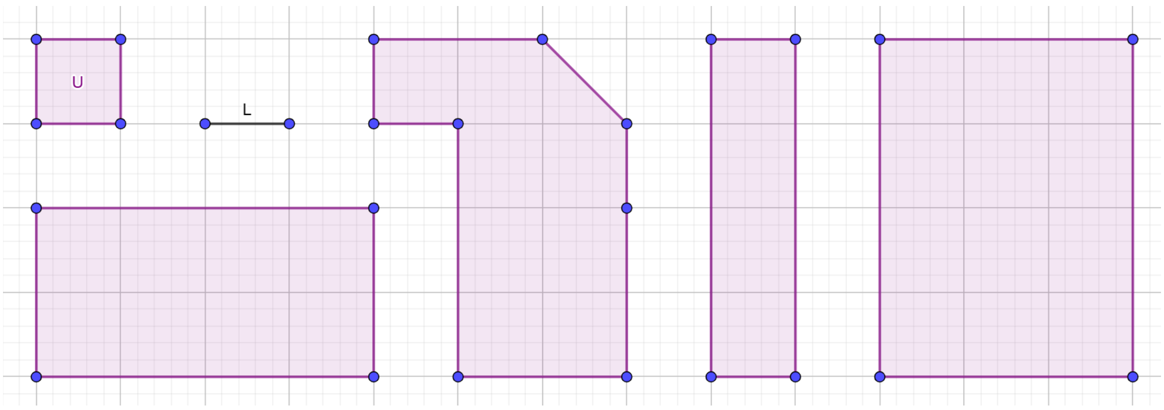

Figura 3.26: Tarea inspirada en una actividad del Corberan (1997)

Tarea 15. *Sobre un papel cuadriculado dibuja 8 figuras de área 1 u^2, 4 figuras de área $\frac{1}{2}u^2$, 8 figuras de área $\frac{3}{2}u^2$. Luego ordenalas de menos a mayor perímetro.*

Tarea 16. *Sobre un papel cuadriculado dibuja 4 figuras de perímetro 10 y ordenalas de menor a mayor área.*

Las Tareas 15 y 16 proponen una exploración complementaria entre área y perímetro, promoviendo una comprensión más profunda y flexible de estas dos magnitudes geométricas. En la Tarea 15, al construir figuras con áreas fijas y luego ordenarlas según su perímetro, los estudiantes descubren que una misma cantidad de superficie puede adoptar formas con bordes muy distintos. Por su parte, la Tarea 16 propone el reto inverso: diseñar figuras con un perímetro constante y observar cómo varía el área que encierran. Esta actividad ayuda a comprender que mantener fija la longitud del contorno no garantiza un área determinada. En conjunto, ambas tareas favorecen el desarrollo del razonamiento geométrico, la visualización espacial y la toma de decisiones fundamentadas en propiedades matemáticas, alineándose con enfoques didácticos que promueven el aprendizaje activo y significativo.

Aunque en el enunciado de la tarea pone que se debe dibujar en papel cuadriculado también se puede realizar la actividad utilizando geoplanos.

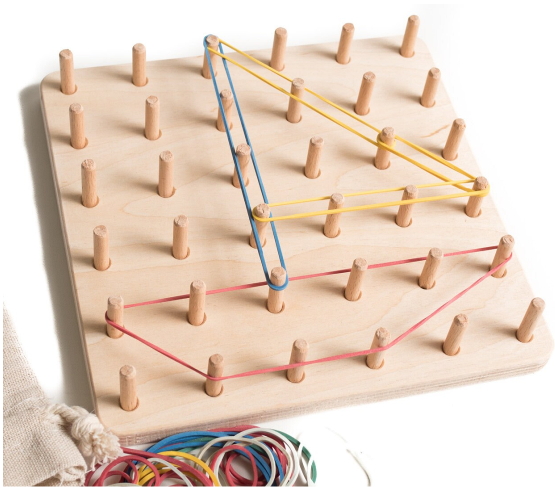

Figura 3.27: Geoplano

El geoplano es un recurso didáctico manipulado utilizado en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en los niveles de Educación Primaria y Secundaria. Consiste en una superficie plana, generalmente cuadrada, sobre la que se distribuyen una serie de clavos o puntos dispuestos en una cuadrícula regular. Sobre estos puntos se pueden colocar bandas elásticas para formar figuras geométricas.

Este material permite a los estudiantes explorar conceptos geométricos de manera visual y tangible, como perímetro, área, simetría, traslaciones, rotaciones o fracciones de figuras. Su uso facilita el paso de lo concreto a lo abstracto, y favorece la comprensión de propiedades y relaciones espaciales mediante la manipulación directa.

Además, el geoplano promueve el razonamiento visual, la creatividad y el aprendizaje activo, convirtiéndose en una herramienta valiosa dentro de metodologías activas y constructivistas de enseñanza de la geometría.

A continuación, se presenta una tarea que es una buena oportunidad para empezar a entender porque la formula para hallar el área del triángulo es longitud de la base por longitud de la altura dividido entre 2. Es una formula que los alumnos de secundaria ya han estudiado en primaria, pero es posible que no hayan reflexionado sobre el origen de la formula.

Tarea 17. *Calcula el área en unidades cuadradas de los siguientes triángulos de la figura 3.28.*

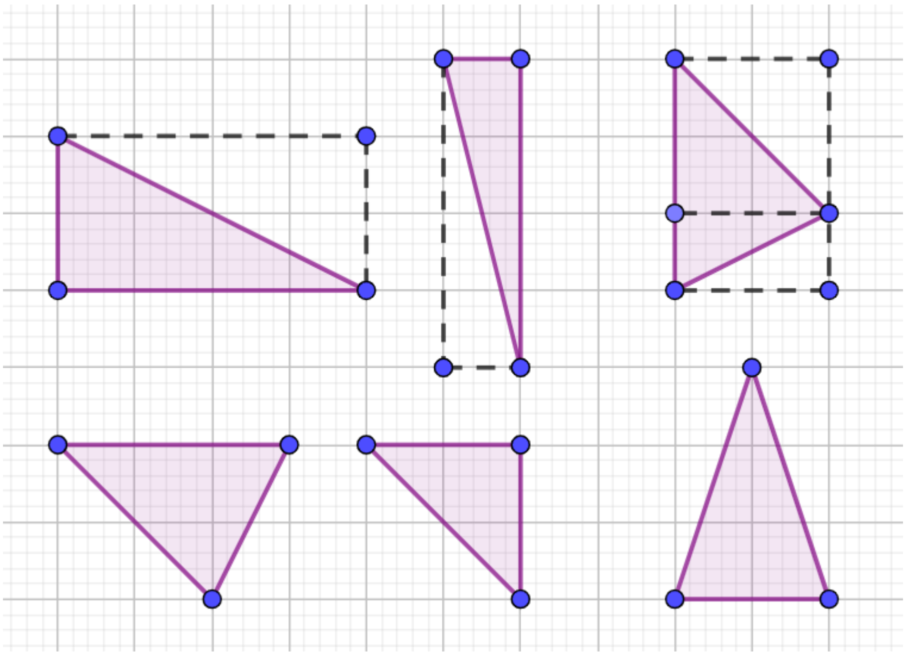

Figura 3.28: Problema basado en una actividad del Corberan (1997)

Los tres primeros triángulos tienen lineas discontinuas que dan una pista sobre como calcular el área, se pretende que a partir de esa idea los alumnos puedan hallar el área de los tres últimos triángulos dibujando ellos mismos las lineas discontinuas.

Tarea 18. *Calcula el área en unidades cuadradas de los siguientes polígonos.*

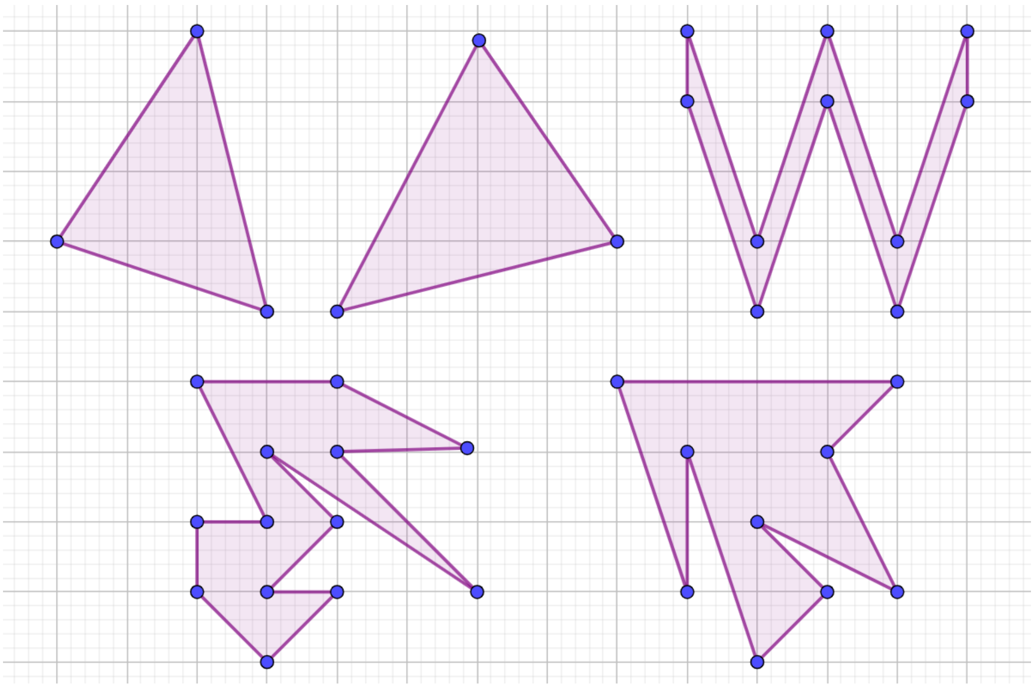

Figura 3.29: Problema del O'Daffer y Clemens (1977))

La idea es guiar al alumnado para que aprenda a calcular área sin usar formulas, en vez de eso deberán utilizar diferentes estrategias. Por ejemplo, un forma de calcular el área del tercer polígono sería darse cuenta de que es suficiente con calcular el área de uno de los lados de la ”W” y luego multiplicarlo por 4. Después, partiendo el lado en trozos y reagrupandolos vemos que el área de cada trozo es 1.

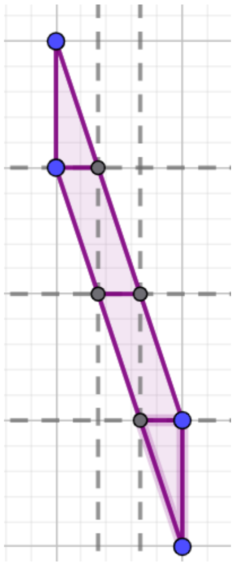

Figura 3.30: Partición de la ”W”

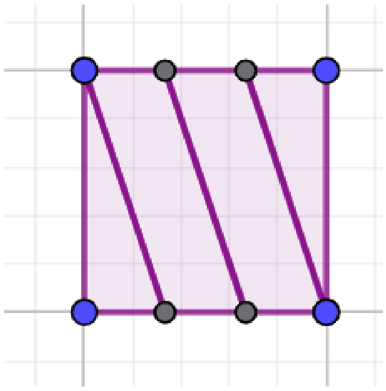

Figura 3.31: Reagrupación de la ”W”

Otra estrategia para calcular áreas es ”meter” el polígono cuyo área desconocemos en un polígono mayor y calcular su área como el área del polígono menos lo que sobre, de esta forma es sencillo calcular el área del primer triángulo.

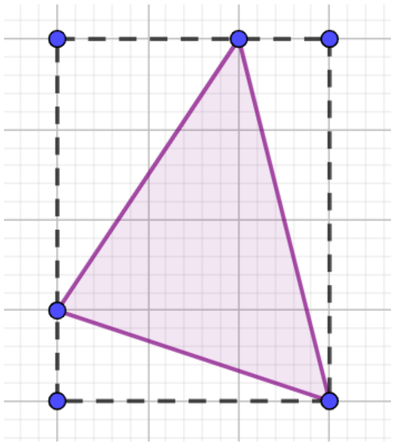

Figura 3.32: Pista

Introducción de unidades estándar (cm², m²...)

Una vez asentado el significado de unidad cuadrada, se introduce la necesidad de emplear unidades de área normalizadas dentro del sistema métrico decimal, como el centímetro cuadrado (cm²) y el metro cuadrado (m²). Esta formalización responde tanto a la necesidad de comunicar mediciones de forma precisa y universal como a los requerimientos curriculares del nivel.

El uso de unidades estandarizadas permite además comparar y relacionar superficies de distinto tamaño, y aplicar fórmulas de área en contextos reales. En esta fase, los estudiantes comienzan a utilizar instrumentos de medida (como la regla o la cinta métrica) de forma sistemática, y a registrar sus resultados empleando la notación adecuada.

Este paso es crucial para la conexión entre la experiencia manipulativa previa y los procedimientos matemáticos más formales que se desarrollarán en cursos posteriores. Además, se trabajará la importancia de elegir la unidad adecuada según la magnitud del objeto o superficie que se desea medir.

Estudio de las fórmulas

En la parte final de la secuencia didáctica se aborda el estudio de las fórmulas para calcular el perímetro y el área de figuras planas. Lejos de presentar estas expresiones como reglas que deben memorizarse y aplicarse de forma mecánica, el objetivo es que el alumnado comprenda su origen, su significado y su utilidad a través de procesos de razonamiento, manipulación y visualización.

En las etapas de Educación Secundaria, las demostraciones matemáticas suelen estar ausentes del aula, relegadas en muchos casos a niveles superiores o abordadas solo desde una óptica formal. Sin embargo, introducir formas elementales de argumentación y justificación puede ser muy beneficioso para el desarrollo del pensamiento matemático desde edades tempranas. En este sentido, la geometría se presenta como una buena oportunidad para iniciarse en esta práctica, ya que permite visualizar propiedades, transformar figuras y establecer relaciones de forma accesible, aunque no se alcance un nivel de rigor propio del lenguaje matemático formal.

Además, es importante abordar el estudio de las fórmulas una vez que el alumnado ha tenido la oportunidad de desarrollar cierta intuición geométrica. Gracias a las actividades previas (exploratorias, manipulativas y cualitativas), los estudiantes han podido construir significados en torno a las magnitudes geométricas, comprender qué es medir, experimentar con unidades y establecer relaciones entre formas. Solo sobre esa base es posible introducir las fórmulas de forma natural, como una síntesis de lo ya observado y como una herramienta útil en vez de como una norma arbitraria.

Por ello, se plantean demostraciones sencillas y adaptadas al nivel de 1.º de ESO, que permiten deducir de forma intuitiva y visual las fórmulas de figuras como el rectángulo, el triángulo o el paralelogramo. Estas deducciones se apoyan en técnicas como la descomposición y reconfiguración de figuras, el uso de papel cuadriculado y la comparación con figuras ya conocidas, promoviendo así el desarrollo del pensamiento geométrico y la construcción activa del conocimiento.

El recorrido hacia la formalización de las fórmulas comienza con el área del rectángulo, una figura especialmente adecuada para introducir el concepto, debido a la regularidad de su estructura y la facilidad con la que puede ser rellenada con unidades cuadradas. En fases anteriores de la secuencia, el alumnado ha trabajado la idea de unidad cuadrada mediante papel cuadriculado, y ha cubierto figuras con ”cuadraditos” para estimar y calcular áreas de manera visual y manipulativa. Esta experiencia sirve ahora como base para justificar que el área de un rectángulo puede obtenerse multiplicando el número de filas (altura) por el número de columnas (base).

El área de un rectángulo de base b y altura h es $b \times h$.

A partir de esta observación es fácil deducir la formula del área del cuadrado porque un cuadrado es un rectángulo con base y la altura iguales, a los que se les llama lados.

El área de un cuadrado de lado l es l^2.

A continuación, se introduce el estudio del área del triángulo, conectándolo directamente con las estrategias exploradas en actividades anteriores, donde los estudiantes estimaron y calcularon áreas triangulares utilizando cuadrículas o construyendo figuras auxiliares.

El área de un triángulo de base b y altura h es $\frac{b \times h}{2}$.

Es imprescindible insistir en que esta formula es valida independientemente del lado del triángulo que escojas como base, para mostrar a los alumnos que esto es cierto es conveniente empezar con el caso más sencillo, el del triángulo rectángulo, para ello usaremos de guia la figura 3.33.

Si tomamos por base uno de los catetos, entonces la altura será el otro cateto y el área del triángulo ABC será la mitad del área del rectángulo $ABDC$, que comparte base y altura las del triángulo ABC, por lo tanto, el área del triángulo ABC sera base por altura entre 2. Si por el contrario, tomamos por base la hipotenusa del triángulo, podemos observar que la altura divide al triángulo ABC en los triángulos ABE y AEC. El área del triángulo AEC es la mitad que la del rectángulo $AECF$ y el área del triángulo ABE es la mitad que la del rectángulo $AGBE$, por lo tanto, el área del triángulo ABC será la mitad del área del rectángulo $GBCF$, que comparte base y altura con el triángulo ABC, con esto tenemos que el área del triángulo ABC será base por altura entre 2.

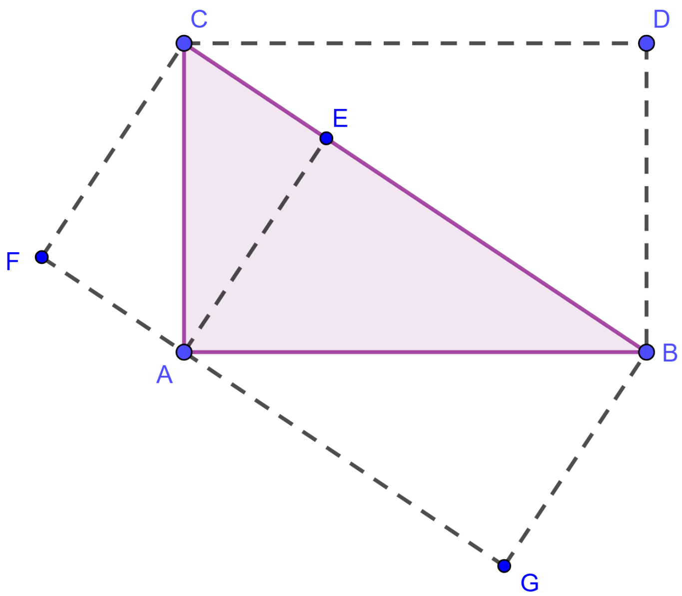

Figura 3.33: Triangulo rectángulo

El caso en el que el triángulo es acutángulo también es muy sencillo, basta con razonar igual que cuando tomábamos por base la hipotenusa del triángulo rectángulo (ver figura 3.34) y repetir el razonamiento en cada uno de los 3 lados.

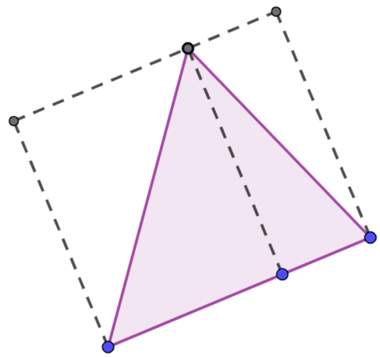

Figura 3.34: Triángulo acutángulo

Nos queda el caso del triángulo obtusángulo. Si tomamos por base el lado largo el razonamiento es el mismo que en el caso anterior, pero si tomamos uno de los lados cortos es un poco más complejo. Empezamos realizando la construcción de la figura 3.35 y queremos probar que el área de ABC es $\frac{a \times h}{2}$. Sabemos que el área ABC será el área del triángulo BEA menos el área del triángulo CEA, por lo tanto el área de ABC será

$$\frac{(a+e) \times h}{2} - \frac{e \times h}{2} = \frac{a \times h}{2}$$

como queríamos probar. Esta demostración sigue un razonamiento sencillo que puede servirles a los alumnos para pasar de lo puramente geométrico a lo algebraico.

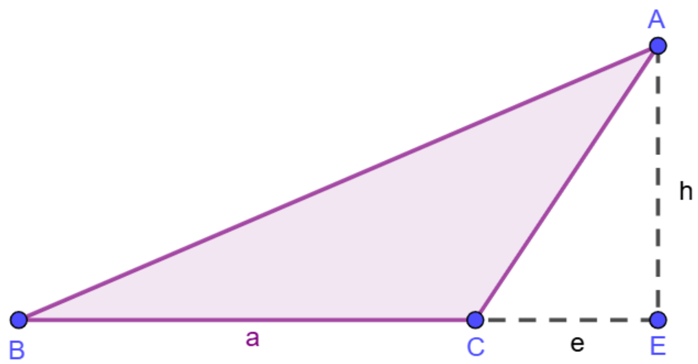

Figura 3.35: Área del triángulo

Para que asimilen la idea de que el área del triángulo es base por altura independientemente de la base escogida se les planteará la siguiente tarea.

Tarea 19. *Dibuja las 3 alturas del triángulo de la figura 3.36. Luego mide los lados y las alturas con la regla. Usa esa información para hallar el área del triángulo aplicando la formula con cada una de las 3 bases posibles y comprueba que el resultado es el mismo.*

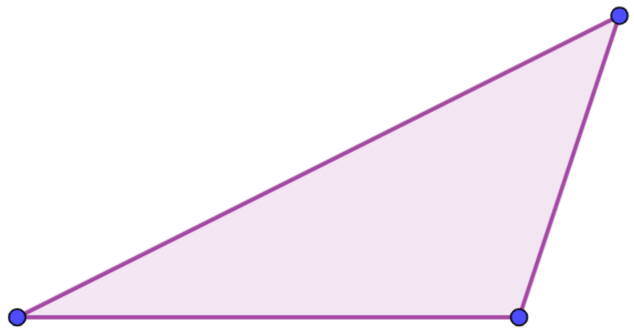

Figura 3.36: Calcula el área

Tras la comprensión del área en figuras básicas como el rectángulo y el triángulo, se amplía el estudio hacia otros cuadriláteros, con el objetivo de deducir sus fórmulas a partir de transformaciones y comparaciones con figuras conocidas. Esta estrategia permite mantener la coherencia metodológica de la secuencia, basada en la construcción progresiva del conocimiento a partir de la experiencia manipulativa y visual.

Empezaremos con el rombo, aprovechando su simetría y sus diagonales perpendiculares. Se propone una estrategia basada en la descomposición del rombo en cuatro triángulos congruentes, utilizando sus diagonales como referencia. A partir de ahí, se ”completa” cada triangulo con otro formando 4 rectángulos. Viendo el dibujo resultante, que es el de la figura 3.37 es fácil deducir la siguiente formula:

El área del rombo con diagonal mayor D y diagonal menos d es $\frac{D\times d}{2}$.

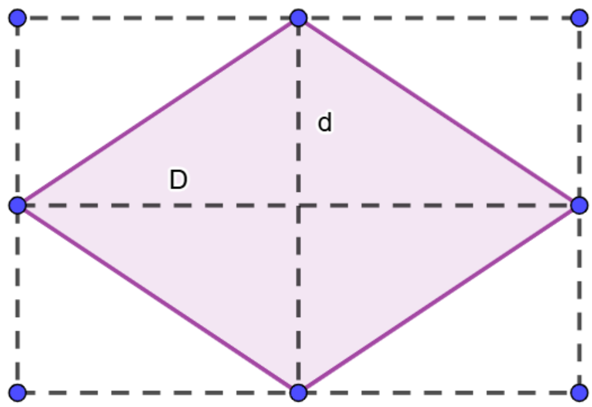

Figura 3.37: Rombo

Esta deducción permite al alumnado comprender la utilidad de trabajar con elementos distintos a los lados o la altura, y refuerza su capacidad para analizar figuras desde múltiples perspectivas. Antes de mostrar esta demostración general a la clase, les propondría una tarea sobre calcular el área de varios rombos sin usar formulas. Esto hará que la formula y su demostración les resulten mucho más naturales o incluso puede que sean capaces de deducir la formula ellos mismos.

Tarea 20. *Calcula el área de los rombos de al figura 3.38.*

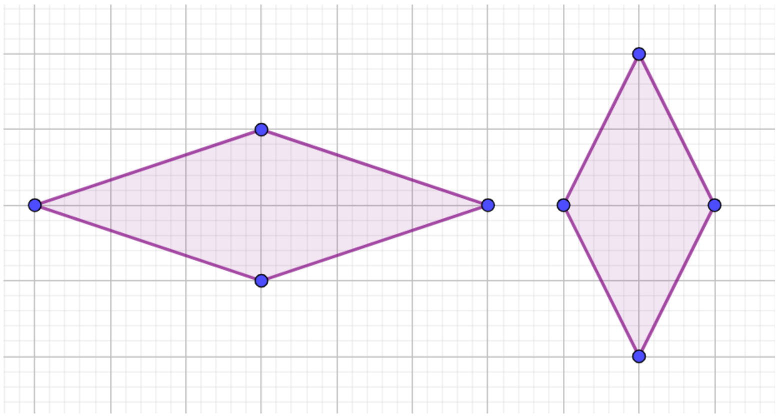

Figura 3.38: Calcula el área

Tarea 21. *Utiliza la regla para tomar las medidas necesarias que te permitan hallar el área del rombo de la figura 3.39*

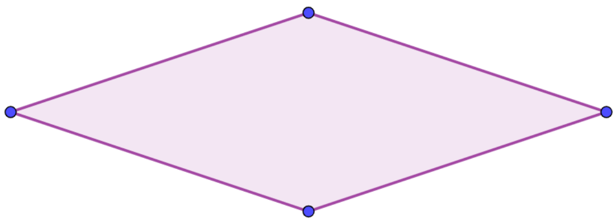

Figura 3.39: Calcula el área

A continuación, se aborda el caso del romboide, veremos dos formas muy simples de demostrar la siguiente formula:

> *El área de un romboide de base* b *y altura* h *es* $b \times h$

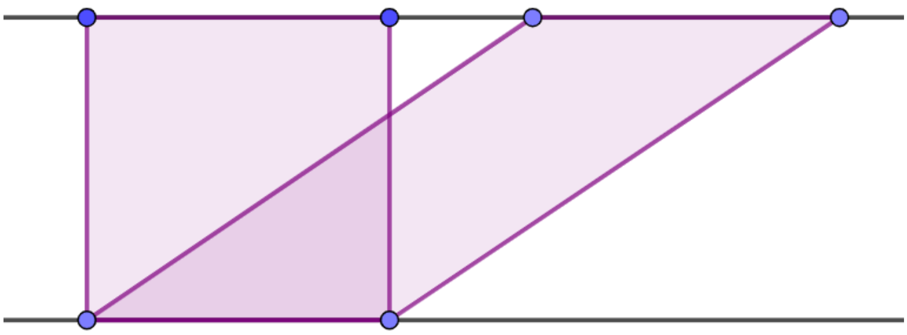

Figura 3.40: Romboide

La primera forma de probar esto es ver que el área de un romboide es igual al área de un rectángulo con iguales base y altura como los que se ven el al figura 3.40. Para demostrar esto se pueden seguir los mismo pasos que siguió Euclides y que están descritos en la sección de 2.2 de este trabajo. La otra forma es dividir el romboide en 2 triángulos como en la figura 3.41 y observar que al área será la suma del área de los triángulos, por lo tanto el área será:

$$\frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} = b \times h,$$

como queríamos probar.

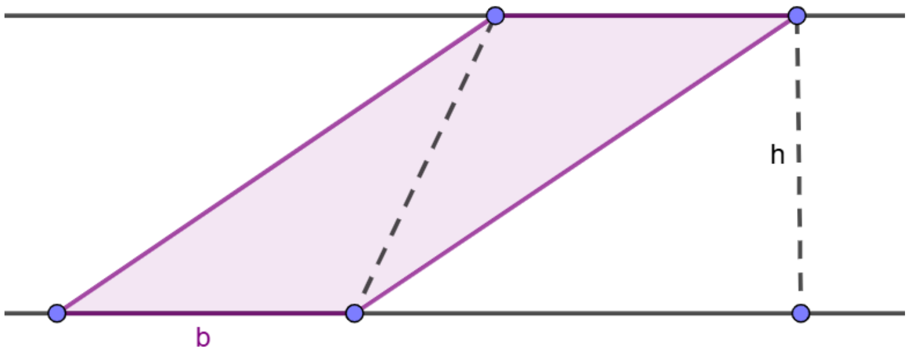

Figura 3.41: Romboide

Igual que en el caso del rombo, antes de explicar las demostraciones propondría una tarea para que los alumnos vayan aproximándose a la formula de forma intuitiva.

Tarea 22. *Halla el área de los rombos de la figura 3.42*

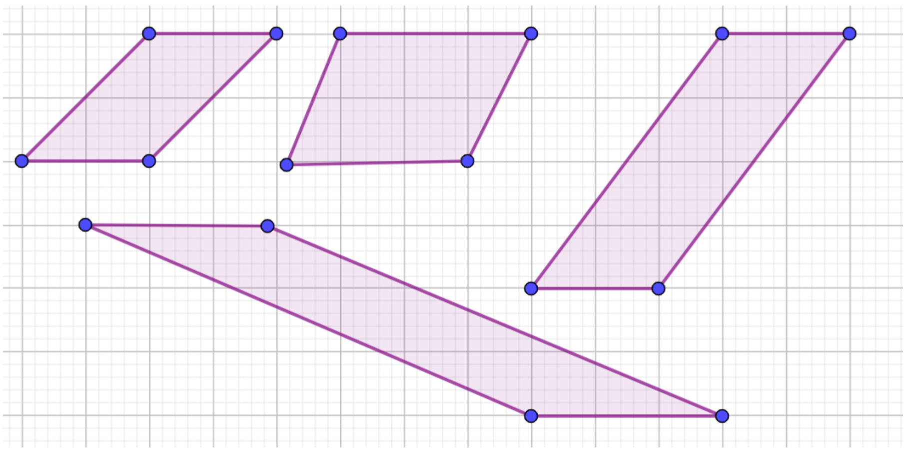

Figura 3.42: Calcula el área

Tarea 23. *Toma las medidas necesarias y calcula el área del rombo de la figura 3.43.*

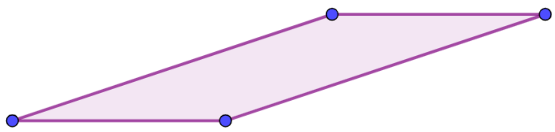

Figura 3.43: Rombo

Por último, se introduce el trapecio, cuya fórmula puede deducirse al construir un segundo trapecio congruente y colocarlo invertido junto al primero, formando un romboide como se ve en la figura 3.44. Después es suficiente con darse cuenta de que el área del trapecio es la mitad del área del romboide. Esta observación permite deducir la siguiente formula:

El área de un trapecio con base mayor B, base menor b y altura h es $\frac{b+B}{2} \times h$.

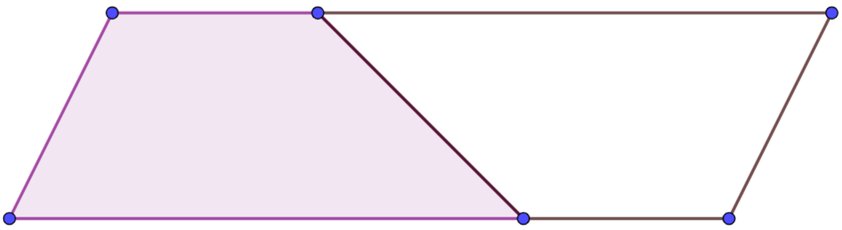

Figura 3.44: Trapecio

Otra forma de deducir la formula del área del trapecio es dividir el trapecio en 2 triángulos como en la figura 3.45. Después basta con darse cuenta de que el área del trapecio es la suma del área de los triángulos y hacer las siguientes cuentas:

$$\frac{b \times h}{2} + \frac{B \times h}{2} = \frac{b + B}{2} \times h$$

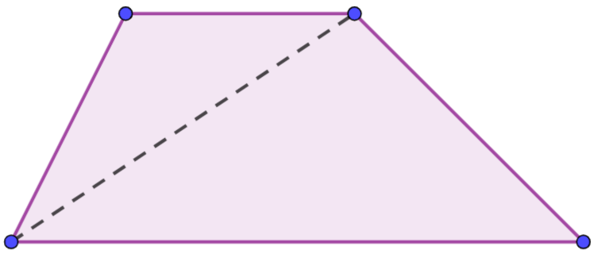

Figura 3.45: Trapecio

Al igual que con el rombo y el romboide y por los mismos motivos, la demostración de la formula del área trapecio también irá precedida de dos tareas.

Tarea 24. *Utiliza la regla tomar las medidas necesarias que te permitan hallar el área del rombo de la figura 3.46.*

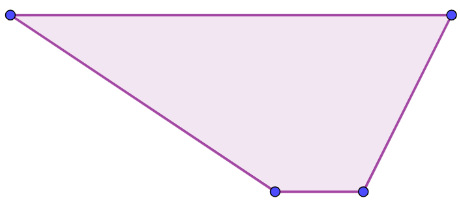

Figura 3.46: Trapecio

Tarea 25. *Calcula el área de los trapecios de la figura 3.47*

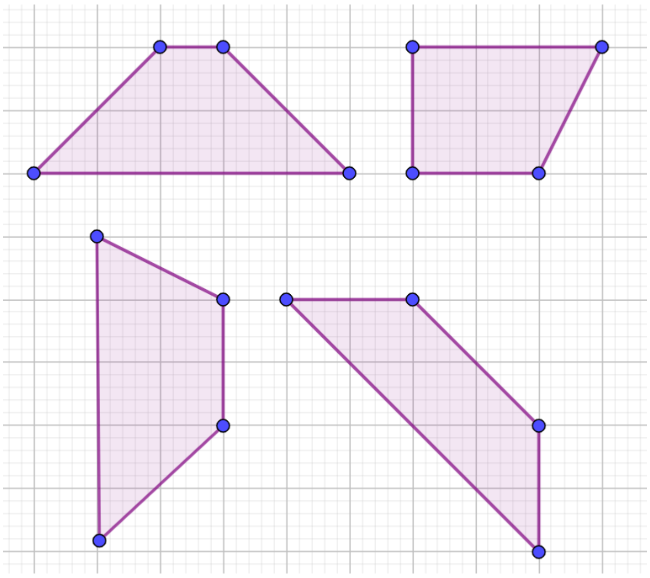

Figura 3.47: Calcula el área

En las tareas 24 y 25 se han utilizado trapecios en distintas orientaciones para aplicar el principio de variabilidad perceptiva propuesto por Zoltan Dienes. Este principio sostiene que para que los estudiantes puedan abstraer una estructura matemática, deben experimentar múltiples representaciones perceptualmente diferentes de una misma idea. Al variar la posición, forma y contexto del trapecio, se facilita que el alumnado identifique sus propiedades invariantes más allá de los aspectos visuales concretos.

Para cerrar el recorrido por las fórmulas de área, se introducen los polígonos regulares y el círculo, ambos presentes en el currículo de 1.º ESO y adecuados para continuar fomentando la comprensión geométrica desde una perspectiva visual y significativa.

En el caso de los polígonos regulares, se propone un acercamiento a través de la descomposición en triángulos isósceles congruentes, con vértice en el centro del polígono como se ve en la figura 3.48.

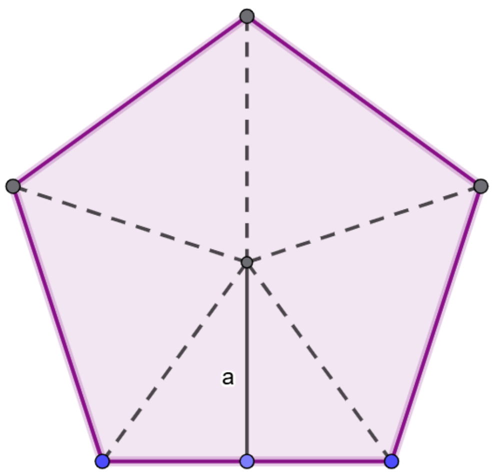

Figura 3.48: Area del pentagono

Esta estrategia permite deducir que el área total se puede calcular sumando las áreas de dichos triángulos. A partir de ahí, y con ayuda de la construcción visual, se introduce la siguiente formula:

El área de un polígono regular de perímetro p *y apotema* a *es* $\frac{p \times a}{2}$

Este proceso ofrece al alumnado una nueva perspectiva sobre el perímetro, no solo como contorno, sino como elemento funcional dentro de una fórmula de área. Esta formula debe acompañar de ejercicios de calcular el área de polígonos regulares para facilitar su asimilación.

Tarea 26. *Halla el área pintada de morado en los siguientes casos.*

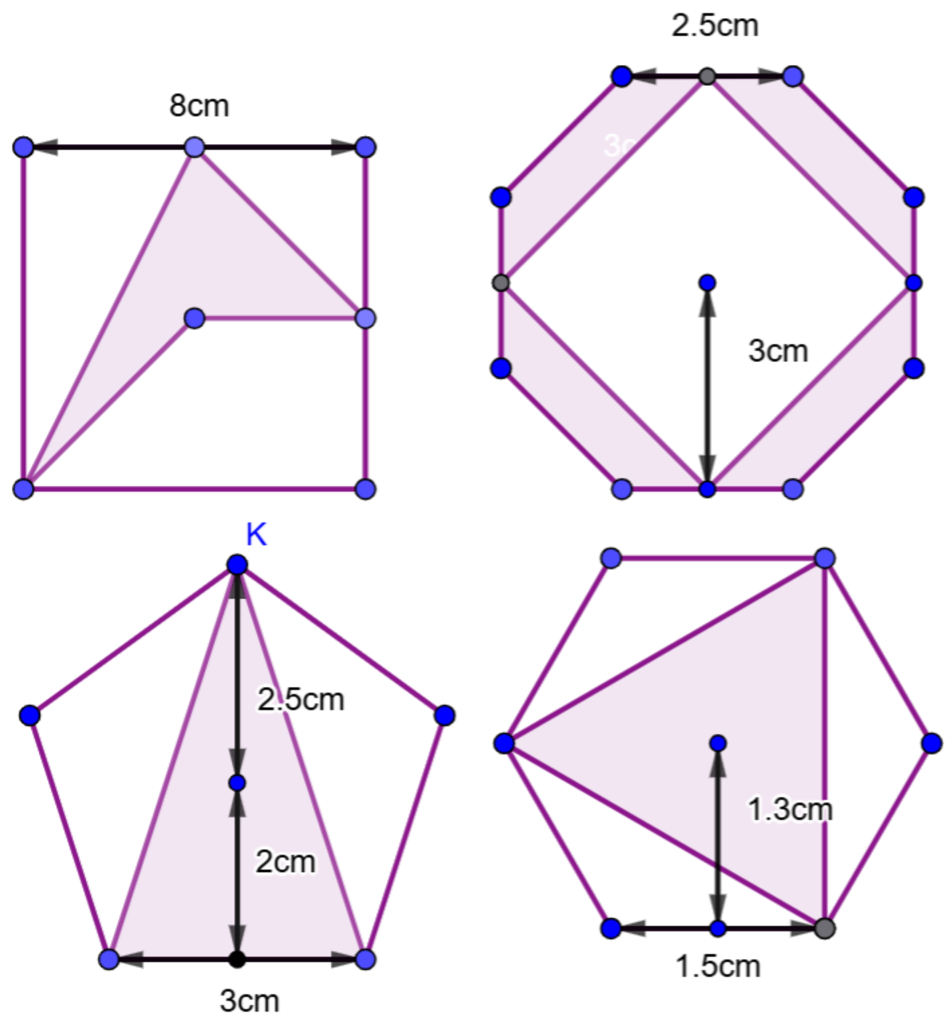

Figura 3.49: Calcula el área

Esta tarea resulta interesante porque no se trata de un ejercicio de aplicación directa de las formulas. Todo lo contrario: requiere una reflexión previa sobre la figura y la puesta en práctica de estrategias geométricas que el alumnado ya ha explorado en actividades anteriores. Este tipo de tareas obliga a ir más allá del simple uso mecánico de una expresión matemática: moviliza conocimientos previos y potencia el desarrollo del pensamiento geométrico.

En definitiva, es un ejemplo de cómo, incluso en una fase del proceso en la que ya se ha formalizado el conocimiento, es posible seguir planteando actividades que inviten al análisis, la estrategia y la toma de decisiones, favoreciendo así una comprensión profunda y no rutinaria de los contenidos geométricos. La tarea esta inspirada en ejercicios de los libros de texto de McGraw-Hill.

Una vez introducidas las fórmulas de los polígonos regulares y comprendido su significado geométrico, es un buen momento para que el alumnado explore una deducción visual del área del dodecágono regular, utilizando como recurso gráfico, la figura 3.50.

La figura 3.50 representa un dodecágono regular inscrito en un cuadrado. Este cuadrado está dividido en cuatro partes iguales mediante dos ejes ortogonales, y cada uno de esos cuadrantes contiene parte del dodecágono. Si nos fijamos en las esquinas del cuadrado, observamos que en cada una de ellas, hay un conjunto de pequeños triángulos que, si se añaden al dodecágono, completan exactamente los cuatro cuadrados en los que ha sido dividido el cuadrado grande.

Lo interesante viene cuando nos damos cuenta de que cada una de las 4 partes del dodecagono puede descomponerse en triángulos congruenes con los de las 3 esquinas restantes. Si recolocamos esos triángulos, es fácil deducir la siguiente formula.

> *El área de un dodecágono de radio r es $3 \times r^2$.*

Esta idea puede explicarse mejor con la ayuda de un video de youtube del canal Matemáticas Profesor Luis Carlos.

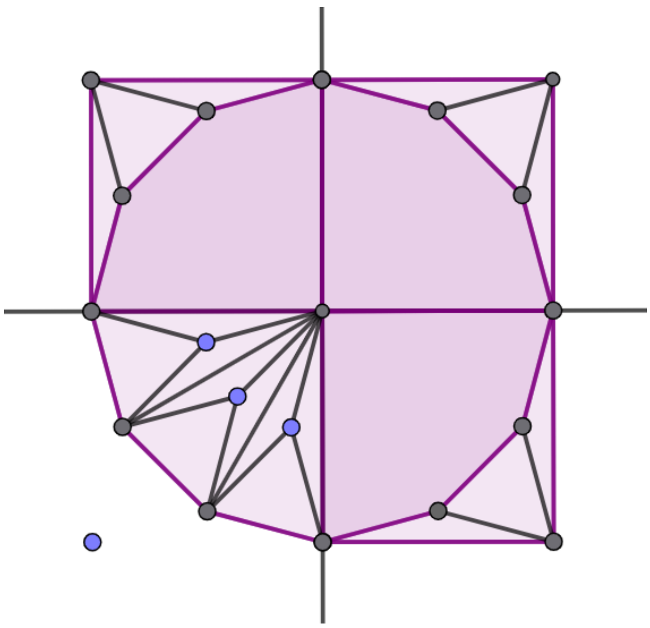

Figura 3.50: Dodecágono

Esta estrategia permite reforzar la comprensión de la descomposición de figuras. El alumnado debe observar detenidamente la figura, identificar patrones, aplicar conceptos previamente trabajados (como la simetría, la construcción con polígonos regulares y las relaciones entre áreas). Se trata, por tanto, de un ejercicio ideal dentro de un enfoque de aula de pensamiento, donde lo esencial no es llegar rápidamente a la respuesta, sino el camino que se recorre para construirla con sentido.

Además, este tipo de deducción se aleja de la típica memorización de fórmulas y ofrece al alumnado una experiencia matemática significativa, donde se conectan el razonamiento visual, la intuición geométrica y el rigor progresivo que se va adquiriendo a lo largo de la unidad.

Por último, veremos una deducción visual de la fórmula del área del círculo, pero antes, es interesante introducir cómo se aproximaba este valor en la antigüedad, mucho antes del desarrollo del cálculo moderno. Ya hemos visto en el capitulo 1 que en la antigua Grecia, matemáticos como Arquímedes utilizaron métodos ingeniosos para estimar el área del círculo, sirviéndose de polígonos regulares inscritos y circunscritos.

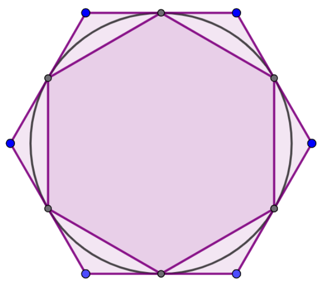

Figura 3.51: Hexágono

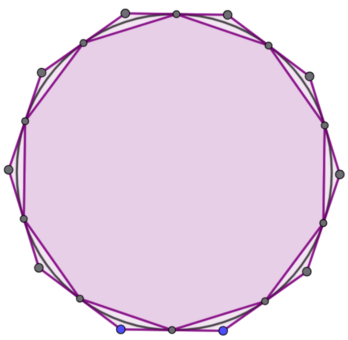

Figura 3.52: Decagono

La idea consistía en inscribir un polígono regular dentro del círculo, y a su vez circunscribir otro polígono del mismo número de lados por fuera del círculo. El área del círculo debía estar comprendida entre las áreas de esos dos polígonos. A medida que se aumentaba el número de lados, estas áreas se aproximaban cada vez más al área real del círculo. De esta forma, sin necesidad de fórmulas exactas, se podía acotar y estimar su valor con bastante precisión. La figura 3.51 muestra la acotación del área del circulo usando el hexágono y la figura 3.52, con el decágono.

Este enfoque introduce de manera accesible una de las ideas fundamentales del pensamiento matemático: la aproximación progresiva mediante el refinamiento de figuras conocidas. Además, permite establecer una conexión entre la geometría y el paso del tiempo, mostrando cómo el ser humano ha tratado de comprender y medir lo circular a partir de lo poligonal. Para el alumnado, este relato histórico refuerza la idea de que las matemáticas son una construcción humana que evoluciona, y prepara el terreno para la siguiente actividad visual, donde veremos cómo descomponer el círculo en sectores permite, de forma similar, aproximar su área como si fuera un rectángulo. Así, la comprensión moderna de la fórmula del área del círculo se enlaza con un proceso que ya había comenzado hace más de dos mil años.

Veamos ahora un enfoque visual e intuitivo que permita al alumnado de 1ºESO descubrir la fórmula de su área a partir su perímetro.

Se comienza mostrando el círculo dividido en sectores circulares, similares a porciones de pizza, que luego se reorganizan de manera alterna, unos hacia arriba y otros hacia abajo, formando una figura que se asemeja visualmente a un rectángulo (ver figura). Esta transformación no solo capta la atención del alumnado, sino que facilita la comprensión de la fórmula al conectar con conceptos geométricos ya conocidos y trabajados previamente.

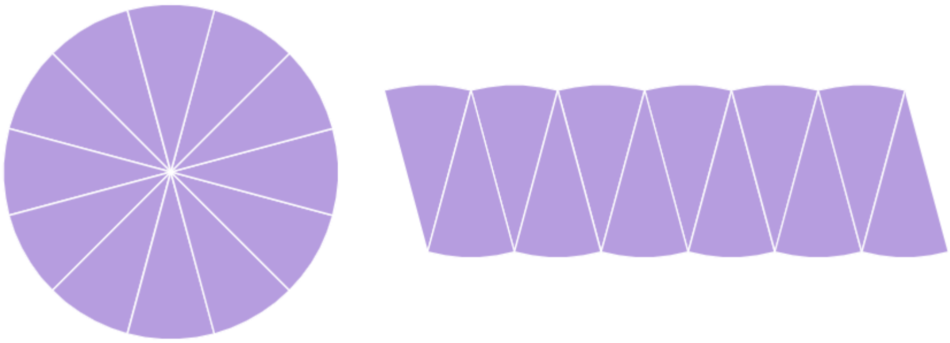

Figura 3.53: Descomposición del círculo

Cada uno de los sectores tiene como altura el radio del círculo, mientras que las partes curvas de los sectores, al colocarse alternadamente, forman la base aproximada de la nueva figura. Si aumentamos el número de sectores, esta figura se va aproximando cada vez más a un rectángulo. Este paso de lo circular a lo casi rectangular permite deducir de forma visual que la base de la figura creada es aproximadamente la mitad de la circunferencia del círculo, es decir, $\pi \times r$, y su altura sigue siendo el radio, r. Así, el área de esta figura que se aproxima a un rectángulo se calcula como base por altura, es decir, $\pi \times r \times r$, lo que da como resultado $\pi \times r^2$. Este razonamiento visual justifica de formula:

El área de un circulo de radio r es $\pi \times r^2$

A través de este enfoque, se evita que el alumnado simplemente memorice la fórmula, y se promueve en cambio una comprensión significativa y duradera del concepto de área en el círculo. Se refuerza también el papel de π como relación entre el perímetro del círculo y su diámetro, así como la conexión con el conocimiento previo sobre áreas de figuras planas como rectángulos y triángulos. Esta actividad, convierte un concepto abstracto en algo tangible y accesible, permitiendo que el alumnado entienda la fórmula como el resultado de una transformación geométrica lógica y coherente. No se trata de una demostración rigurosa de la fórmula, ya que el objetivo no es alcanzar una precisión formal absoluta, sino fomentar una comprensión intuitiva y visual que permita al alumnado interpretar las fórmulas.

Por último, se propone una tarea basada en algunos ejercicios de los libros de texto de McGraw-Hill.

Esta tarea ofrece un enfoque especialmente rico y didáctico dentro del trabajo con áreas circulares. A diferencia de los ejercicios de aplicación directa de la fórmula del área del círculo, aquí el alumnado se enfrenta a figuras compuestas que requieren análisis, descomposición y estrategias de cálculo indirecto. Esto convierte cada situación en un pequeño reto de pensamiento geométrico.

Tarea 27. *Calcula el área morada en los siguientes casos:*

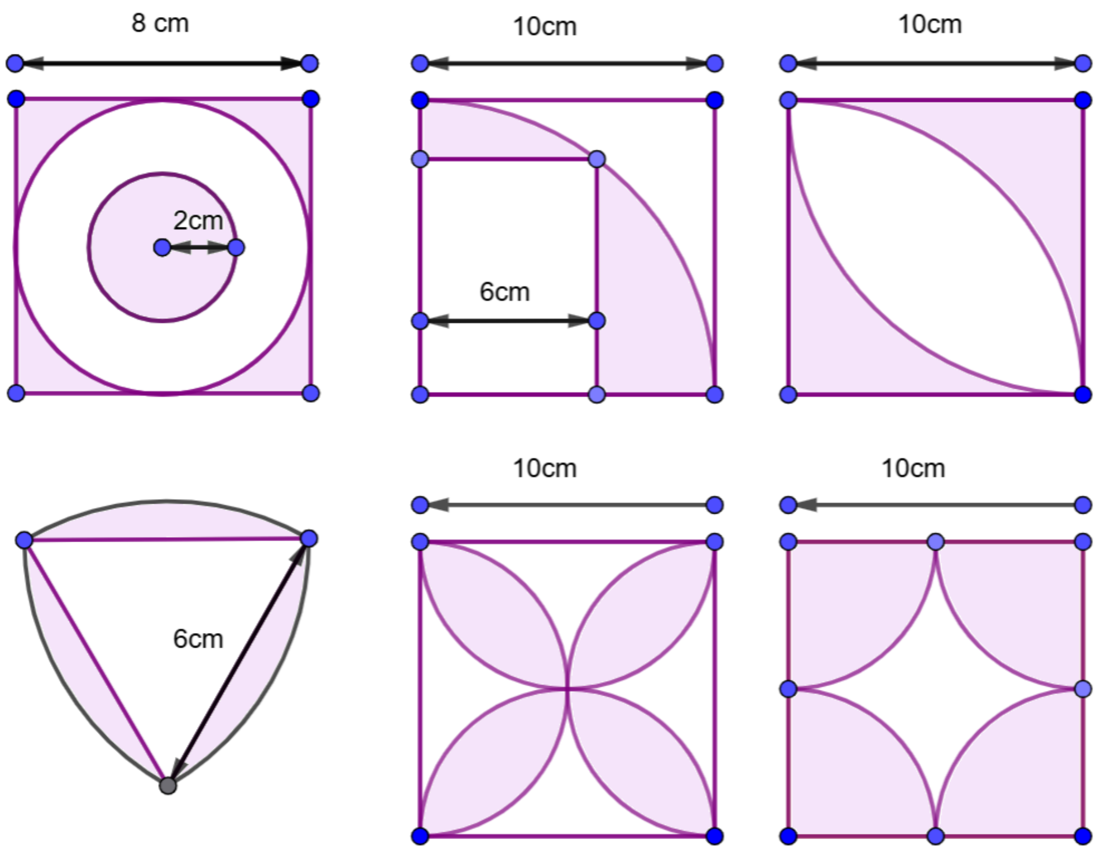

Figura 3.54: Calcula el área

Lo interesante es que para resolver cada uno de estos ejercicios, los estudiantes deben combinar múltiples ideas previamente trabajadas: el uso de fórmulas básicas (como las del círculo o el cuadrado), la comprensión de fracciones del círculo (medios círculos, cuartos, sectores...), el uso del razonamiento simétrico y la descomposición de figuras en partes conocidas. Por ejemplo, pueden tener que restar el área de un círculo interior, sumar varios sectores circulares o combinar áreas conocidas para obtener una más compleja.

Además, estos ejercicios tienen un valor añadido porque permiten trabajar con una representación visual clara y atractiva. Esto favorece la participación y el interés del alumnado, y también promueve un enfoque menos algorítmico de la geometría. Aquí, no se trata solo de recordar fórmulas, sino de entender el espacio, visualizar relaciones y justificar decisiones.

Otro aspecto clave es que, aunque puedan parecer simples a primera vista, no tienen una única forma de resolverse. Algunos alumnos pueden razonar desde áreas totales y restar, otros pueden descomponer las figuras en partes más pequeñas, y otros tal vez busquen simetrías o transformaciones. Esta diversidad de estrategias permite visibilizar distintas maneras de pensar y compartir razonamientos en el aula, enriqueciendo la experiencia colectiva de aprendizaje.

En definitiva, estos ejercicios son una excelente manera de trabajar el área del círculo de forma significativa, profunda y creativa. Son problemas que respetan la comprensión geométrica del alumnado, que conectan ideas previas y que, al mismo tiempo, siguen siendo accesibles para estudiantes de secundaria.

Conclusión

Este trabajo ha sido una oportunidad para reflexionar sobre el concepto de área, su evolución histórica, su tratamiento en el aula y algunas propuestas didácticas que pueden contribuir a una mejor comprensión por parte del alumnado. Aunque se trata de una noción que aparece pronto en la educación matemática, no siempre se le dedica el tiempo ni el enfoque necesarios para que los estudiantes lleguen a entenderla en profundidad.

El área es un concepto que, a pesar de su aparente sencillez, requiere tiempo, cuidado y atención para ser realmente comprendido. No basta con aplicar fórmulas, es necesario que el alumnado entienda qué está midiendo, por qué se mide de esa forma, y cómo se relacionan las diferentes figuras entre sí.

En este camino, la introducción a la demostración matemática puede jugar un papel importante. Familiarizar a los estudiantes con el razonamiento y la justificación, aunque sea con ejemplos sencillos y visuales, puede ayudarles a construir un conocimiento más sólido. La geometría, en particular, ofrece muchas oportunidades para ello, ya que permite plantear demostraciones accesibles y apoyadas en lo visual.

Con este trabajo no se pretende ofrecer soluciones definitivas, sino aportar una pequeña contribución a la tarea, siempre compleja, de enseñar matemáticas de forma que resulten comprensibles, interesantes y significativas para el alumnado.

Bibliografía

- Berele, A., & Goldman, J. (2001). Geometry: theorems and constructions. New Jersey: Prentice Hall.
- Boaler, J. (2016). Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching. Jossey-Bass.
- Bombal Gordón, F. (2012). La cuadratura del círculo: Historia de una obsesión.
- Bruner, J. S. (1960). The process of education. Harvard University Press.
-
- Canal Matemáticas Profesor Luis Carlos. (2024, 9 de agosto).Encontrar el área de un dodecágono regular. Interesante comparar con el área de un círculo 3 vs. π[Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=8Ub82nAogcQ
- CAST (2018). Universal Design for Learning Guidelines version 2.2. Center for Applied Special Technology. https://udlguidelines.cast.org
- Castelnuovo. E (1981). La matemàtica. La Geometria. Ketres, Barcelona.
- Clemens, S. R., & O'Daffer, P. G. (1992). Geometry: An investigative approach. Addison Wesley, London.
- Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la comunidad de castilla y león. (2022). (Consejería de Educación)
- Dienes, Z. P. (1960). Building up mathematics. Hutchinson Educational.
- Dienes, Z. P. (1973). La lógica de la enseñanza matemática. Buenos Aires: Kapelusz.
- Fernández, L. (2011). La historia como herramienta didáctica: el concepto de integral. Trabajo de Fin de Master.
- Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Reidel.
- Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel Publishing Company.
- Galván, C. (2005). Cuadratura de polígonos. Unión-revista iberoamericana de educación matemática, 1(1).
- Gardner, M., & Bou Garcia, L. E. (1981). Aja!: Inspiracion aja!.

- Guillén, G. (1983). Necesidad y experimentación de un nuevo modelo para el estudio de la geometría en la EGB y Escuelas de Magisterio. Memoria de Investigación.
- Hilbert, D. (1970). Fundamentos de la geometría (L. Español, Trad.). Reverté. (Obra original publicada en 1899)
- Hoffer, A. R. (1979). Geometry. A model of the universe. Addison Wesley, London.
- Jiménez, D. (2010). El problema del área en los Elementos de Euclides. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 12(2), 179-207.
- Liljedahl, P. (2020). Building Thinking Classrooms in Mathematics: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning. Corwin Press.
- Milauskas, G. A. (1987). Creative Geometry Problems. Learning and Teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook, 49, 69.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE). Boletín Oficial del Estado.
- Mora Mendieta, L. C., Torres Díaz, J. A., & Luque Arias, C. J. (2006). El concepto de área. [Trabajo académico, Universidad Pedagógica Nacional]. Bogotá D.C., Colombia.
- Musser, G. L., & Burger, W. F. (1993). Ma-thematics for Elementary Teacher: A Con-temporary Approach. New Jersey: A Simon & chuster Company.
- OECD (2018). The future of education and skills: Education 2030. Organisation for Economic Cooperation and Development.
- Padilla, V. (1990). Les figures aident-elles à voir en géométrie?. In Annales de didactique et de sciences cognitives (Vol. 3, pp. 223-252).
- Pasquel, J. T. (1990). Irracionalidad y Trascendencia de e y π. Pro Mathematica, 4(7-8), 70-128.
- Perrin, M. J., & Douady, R. (1988). Conceptions del élèves à propos d'aires de surfaces planes. In Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique (pp. 161-172). Grénoble (Francia): La Pensée Sauvage.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). The child's conception of space (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). Routledge & Kegan Paul. (Original work published 1948)
- Rotman, J. J., & Rotman, J. (1990). Galois theory. New York: Springer.
- Corberan Salvador, R. (1997). Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad (Doctoral dissertation, Universitat de València).
- Tossavainen, T., Suomalainen, H., & Mäkäläinen, T. (2017). Student teachers' concept definitions of area and their understanding about two-dimensionality of area. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48(4), 520-532.