Universidad de Valladolid

Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas

FACULTAD DE EDUCACION Y TRABAJO SOCIAL

Estudio acerca de la aplicación de diversas metodologías para impartir varios conceptos distintos de las asignaturas de Bachillerato

Fernando Méndez Menéndez

Tutores: Cesáreo Jesús González Fernández, Alfonso Jesús Población Sáez

Departamento de Matemática Aplicada

Curso: 2024-2025

Resumen

Este trabajo analiza la aplicación de cuatro metodologías didácticas diferentes —clase magistral, aprendizaje basado en problemas (ABP), aprendizaje cooperativo y aprendizaje por descubrimiento— en la enseñanza de tres bloques clave del currículo de Matemáticas de Bachillerato: funciones, cálculo integral y probabilidad/estadística. Se desarrolla un marco teórico de cada metodología, seguido de propuestas de situaciones de aprendizaje contextualizadas para cada metodología alternativa y diseñadas según la LOMLOE. Mediante de un enfoque comparativo y reflexivo, se examinan las ventajas, limitaciones y condiciones de aplicación de cada metodología según el tipo de contenido y las necesidades del alumnado. El trabajo destaca la necesidad de una enseñanza flexible, activa y competencial, y concluye que la combinación estratégica de distintas metodologías mejora la comprensión conceptual, la motivación y el desarrollo integral del estudiante.

Palabras clave

Matemáticas, Bachillerato, metodologías activas, clase magistral, ABP, aprendizaje cooperativo, aprendizaje por descubrimiento, funciones, cálculo integral, probabilidad y estadística, LOMLOE, competencias clave, situaciones de aprendizaje.

Abstract

This thesis explores the application of four different didactic methodologies —lecture-based teaching, problem-based learning (PBL), cooperative learning, and discovery learning— in the instruction of key mathematical content in Spanish upper secondary education: functions, integral calculus, and probability/statistics. Each methodology is theoretically grounded and exemplified through contextualized learning situations for each alternative methodology, designed in line with LOMLOE educational principles. A comparative and reflective approach is adopted to evaluate the strengths, weaknesses, and practical implementation of each method depending on content type and student diversity. The study emphasizes the relevance of an active, flexible, and competency-based teaching approach, concluding that the strategic combination of methodologies promotes deeper understanding, motivation, and the holistic development of learners.

Keywords

Mathematics, Upper Secondary Education, Active Methodologies, Lecture-Based Teaching, PBL, Cooperative Learning, Discovery Learning, Functions, Integral Calculus, Probability and Statistics, LOMLOE, Key Competences, Learning Situations.

Contenido

Introducción

La enseñanza de las Matemáticas en Bachillerato constituye uno de los desafíos más relevantes del sistema educativo actual. En esta etapa clave, el alumnado se enfrenta a contenidos de elevada abstracción, como el estudio formal de funciones, el cálculo integral o el razonamiento probabilístico, que requieren no solo competencias técnicas, sino también habilidades cognitivas superiores: interpretación, conexión de ideas, resolución de problemas y comunicación matemática rigurosa. En este contexto, la elección metodológica del profesorado adquiere un papel crucial, ya que de ella dependerá en buena medida la capacidad del alumnado para construir significados, interiorizar procesos y transferir conocimientos a contextos nuevos y reales.

Durante décadas, la clase magistral ha sido el modelo dominante en la enseñanza de las Matemáticas, especialmente en niveles preuniversitarios. Su estructura lógica, su capacidad para garantizar el control del aula y la claridad en la exposición de procedimientos le han conferido una indiscutible utilidad. Sin embargo, numerosos estudios recientes señalan que este modelo presenta limitaciones cuando se trata de fomentar aprendizajes profundos, competenciales y duraderos. Frente a este enfoque transmisivo, emergen metodologías activas como el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), el Aprendizaje Cooperativo y el Aprendizaje por Descubrimiento, todas ellas apoyadas por marcos teóricos como el constructivismo de Bruner o el socioculturalismo de Vygotsky, y respaldadas por orientaciones internacionales como las de la OCDE (2018) o el NCTM (2000).

El presente trabajo se enmarca en este giro metodológico. Su objetivo es doble: por un lado, analizar comparativamente cuatro enfoques didácticos —clase magistral, ABP, aprendizaje cooperativo y aprendizaje por descubrimiento— a la luz de la literatura académica y la normativa actual (especialmente la LOMLOE); por otro lado, diseñar situaciones de aprendizaje contextualizadas para aplicar cada metodología a un bloque concreto del currículo de Matemáticas de Bachillerato: funciones, cálculo integral y probabilidad/estadística. Estas situaciones de aprendizaje se estructuran de acuerdo con los principios curriculares de la legislación vigente, incluyendo competencias específicas, criterios de evaluación, saberes básicos, atención a la diversidad, uso de herramientas digitales y medidas de evaluación, ofreciendo así una propuesta didáctica completa y transferible al aula.

Más allá del análisis teórico, el trabajo persigue una reflexión profesional: ¿qué enfoque resulta más adecuado para enseñar cada bloque de contenido? ¿Cómo se pueden combinar distintas metodologías para atender a la heterogeneidad del alumnado y a las exigencias del currículo? ¿Qué papel debe adoptar el docente en cada una de estas estrategias? Estas preguntas son especialmente relevantes en un momento en que la enseñanza de las matemáticas debe avanzar hacia una formación más integral, crítica y adaptada al siglo XXI, sin renunciar al rigor técnico que exige la disciplina.

La estructura del trabajo responde a esta doble orientación. En primer lugar, se realiza una revisión teórica de cada metodología, destacando sus fundamentos, ventajas y limitaciones en relación con el aprendizaje matemático. En segundo lugar, se presentan propuestas didácticas originales, aplicadas a los contenidos del currículo. Por último, se realiza una valoración final que resume los aprendizajes del proceso, justifica las elecciones metodológicas y propone líneas de mejora o ampliación futuras.

Se trata, en definitiva, de una propuesta reflexiva y aplicada, cuyo propósito es contribuir a una enseñanza de las matemáticas más flexible, comprometida y eficaz, que sitúe al alumnado como verdadero protagonista de su proceso de aprendizaje.

Metodologías a estudiar y su fundamentación teórica

La elección de estas cuatro metodologías que veremos responde a la necesidad de ofrecer un enfoque didáctico amplio, variado y adaptado a la diversidad del aula de Bachillerato. Cada una de ellas nos aporta distintos y valiosos elementos al proceso de enseñanza y de aprendizaje, por tanto, es pertinente analizar su aplicabilidad según el tipo de contenido matemático que se va a impartir, y según las características del alumnado y del centro. Hemos escogido de forma justificada, pues, las siguientes metodologías:

Clase magistral

La clase magistral se incluye como referencia de la forma habitual y ampliamente utilizada en la enseñanza de las Matemáticas. Permite transmitir contenidos de forma eficiente, rigurosa y bien estructurada, siendo especialmente útil para introducir formalmente conceptos teóricos complejos. Además, facilita la organización del tiempo y el cumplimiento del currículo, lo que la convierte en una herramienta relevante para comparar frente a metodologías más novedosas.

¿Qué es la Clase Magistral?

La clase magistral es una metodología tradicional, basada en la transmisión estructurada del conocimiento por parte del docente, que expone los contenidos a un grupo de estudiantes con una participación limitada o dirigida (Fidalgo, Á. 2016). Aunque históricamente ha sido vista como un método unidireccional, hoy se distingue entre la clase magistral tradicional (centrada en la exposición de los contenidos y la observación pasiva por parte de los alumnos), que asumo como obsoleta, y la clase magistral participativa (que incorpora preguntas, ejemplos interactivos, TIC, etc.) y es la que consideraremos en este trabajo.

Fundamentos teóricos de la metodología de Clase Magistral

Esta metodología se sustenta en base a teorías como el aprendizaje significativo de Ausubel, el andamiaje cognitivo de Bruner o los principios instruccionales de Gagné y Rosenshine. Estas teorías comparten varias ideas, como destacar el papel del profesor como guía experto que facilita la comprensión, selecciona la carga cognitiva necesaria y optimiza la secuenciación del contenido.

1. Teoría del aprendizaje significativo - Ausubel

Uno de los principales referentes y defensores (de forma indirecta) de la clase magistral es David Ausubel (1976), quien sostuvo que el aprendizaje significativo ocurre cuando los nuevos contenidos se relacionan de manera sustantiva con los conocimientos previos del alumno. Para ello:

- El docente debe organizar el conocimiento de forma lógica y jerarquizada.
- Es crucial una presentación clara, concisa, progresiva y con ejemplos.
- Ausubel defiende el rol activo del profesor como guía cognitivo, lo que se ajusta a una clase magistral bien planificada.

"*La mayor influencia en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia*." (Ausubel, 1976)

2. Enfoque estructuralista – Jerome Bruner

Aunque Bruner (1960) defendió en especial el aprendizaje por descubrimiento, también reconoció que hay momentos donde el estudio guiado y la instrucción directa son necesarios, especialmente en etapas iniciales o con contenidos abstractos, como los del cálculo integral, por lo que también es un referente en esta metodología.

- Introduce el concepto de *andamiaje*: el docente proporciona un soporte progresivo que puede estar presente en clases expositivas bien diseñadas.
- La representación simbólica y formal de los conceptos, central en el cálculo, requiere estructuras claras que suelen introducirse en exposiciones.

3. Modelos instruccionales clásicos y contemporáneos

Autores como Gagné (1985) y Rosenshine (2012) desarrollaron modelos de enseñanza directa basados en la evidencia. En particular, Rosenshine sintetizó prácticas efectivas que deberían estar presentes en toda clase magistral, como lo son:

- Una presentación clara de objetivos y conceptos.
- Ejemplos resueltos modelados por el profesor.
- Preguntas frecuentes para verificar la comprensión.
- Al menos una práctica guiada con retroalimentación inmediata.

Estas prácticas tienen su lugar en una clase magistral estructurada y participativa, donde el docente mantiene el control de la secuencia didáctica, pero involucra activamente a los estudiantes.

Aparte, también:

- Kirschner, Sweller y Clark (2006) demostraron que las metodologías mínimamente guiadas (como el descubrimiento puro) no resultan efectivas con contenidos nuevos y complejos, como el cálculo, porque exigen una alta carga cognitiva.
- Merrill (2020) reafirma que el éxito del aprendizaje por descubrimiento depende de una base sólida instruida previamente mediante explicaciones claras y progresivas.

Aprendizaje Basado en Problemas

Usaremos ABP para referirnos al Aprendizaje Basado en Problemas, que no debe confundirse con el Aprendizaje Basado en Proyectos, aunque comparten algunas similitudes.

¿Qué es el Aprendizaje Basado en Problemas?

El ABP es una metodología centrada en el alumno y contextualizada, que resulta, a priori, ideal para desarrollar competencias necesarias en la asignatura como la resolución de problemas, la toma de decisiones y la transferencia del conocimiento mediante la resolución de problemas complejos y contextualizados. Esta estrategia fue inicialmente desarrollada en el ámbito de la educación médica por Howard S. Barrows y Robyn M. Tamblyn en la Universidad de McMaster (Canadá) durante los años 60 y 70 del siglo pasado. Su objetivo era mejorar la formación de los futuros médicos, alejándose de la enseñanza memorística de contenidos y acercándose a una formación más práctica, integradora y centrada en la resolución de problemas reales de pacientes (Barrows & Tamblyn, 1980), pero se ha extendido con éxito a muchas otras disciplinas, incluyendo la enseñanza de las matemáticas.

Fundamentos teóricos de la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas

Varios autores han propuesto teorías que respaldan este método:

<u>1.-Constructivismo – Piaget, Vygotsky</u>

El ABP se sustenta en los principios del constructivismo, particularmente en las ideas de Piaget y Vygotsky. Según Piaget (1970), el conocimiento se construye a través de la interacción activa del sujeto con el entorno. Por su parte, Vygotsky (1978) destaca el papel del lenguaje, la mediación social y la Zona de Desarrollo Próximo, haciendo del ABP una herramienta adecuada para fomentar el aprendizaje colaborativo y significativo.

<u>2.-Teoría del aprendizaje significativo - Ausubel</u>

Para Ausubel (1976), el aprendizaje significativo ocurre cuando los nuevos conocimientos se integran en las estructuras cognitivas previas del alumno. En ABP, los problemas deben activar saberes previos y promover su reorganización de manera contextualizada y significativa.

3.-<u>Aprendizaje situado y cognición situada (Lave y Wenger)</u>

Lave y Wenger (1991) defienden que el conocimiento no se adquiere de forma aislada, sino en contextos sociales y culturales específicos. El ABP, al proponer problemas contextualizados en entornos reales o que la simulan, favorece un aprendizaje situado y la percepción de utilidad, especialmente valioso al aplicar conocimientos matemáticos a problemas físicos o de ingeniería (como el cálculo de áreas, volúmenes o trabajo).

<u>4. -Teoría de la motivación autodeterminada (Deci & Ryan)</u>

Deci y Ryan (1985) proponen que la motivación intrínseca crece cuando las personas sienten autonomía, competencia y relación social. En el aprendizaje basado en problemas, los alumnos tienen control, aunque guiado por el profesor, sobre el proceso de resolución, enfrentan retos intelectuales relevantes y trabajan en grupo, aumentando su implicación tanto emocional como cognitiva en la materia, facilitando un aprendizaje más duradero y profundo.

Aprendizaje cooperativo

He considerado interesante esta metodología por su método de construcción del conocimiento mediante la interacción con el entorno y sus compañeros, a diferencia del sistema expositivo tradicional.

¿Qué es el Aprendizaje Cooperativo?

El aprendizaje cooperativo es una metodología activa que organiza a los estudiantes en pequeños grupos heterogéneos con el objetivo de alcanzar metas académicas comunes mediante la colaboración entre los alumnos del grupo y con otros equipos. A diferencia del simple trabajo en grupo, el aprendizaje cooperativo está estructurado y guiado para que todos los miembros del equipo participen activamente, asuman responsabilidades y se beneficien mutuamente del proceso (Johnson & Johnson, 1989; Slavin, 1996; Gillies, 2007).

Fundamentación teórica del Aprendizaje cooperativo

<u>Teoría sociocultural de Vygotsky</u>

Vygotsky (1978) propone que el aprendizaje es un proceso social en el que los estudiantes construyen conocimientos a través de la interacción con otros. La Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) implica que un aprendiz puede realizar tareas más complejas con la ayuda de sus pares, lo cual justifica pedagógicamente la cooperación como vía de avance cognitivo.

<u>Interdependencia positiva (Johnson & Johnson)</u>

Los hermanos David y Roger Johnson (1989), referentes en la sistematización y la implementación del aprendizaje cooperativo, definen cinco elementos esenciales:

1. Interdependencia positiva
2. Responsabilidad individual
3. Interacción promotora
4. Habilidades interpersonales
5. Evaluación grupal y autoevaluación.

Estos principios aseguran que el trabajo cooperativo genere beneficios cognitivos y afectivos.

<u>Constructivismo social</u>

De acuerdo con el constructivismo social de Palincsar (1998), el conocimiento se “co-construye” en situaciones sociales significativas. El aprendizaje cooperativo se alinea con esta visión al crear entornos donde los alumnos negocian significados, se apoyan entre sí y construyen una comprensión compartida.

Teoría del conflicto sociocognitivo (Doise & Mugny, 1981)

Esta teoría sugiere que el conflicto generado entre diferentes puntos de vista dentro de un grupo favorece el desarrollo cognitivo, siempre que exista un marco de cooperación. En matemáticas, esto es especialmente relevante al discutir soluciones divergentes a un mismo problema.

Aprendizaje dialógico (Flecha, 2000)

Desde un enfoque comunicativo, el aprendizaje cooperativo también se relaciona con el aprendizaje dialógico. Esta teoría defiende el diálogo igualitario y la interacción argumentativa como fuente de desarrollo intelectual y democrático.

Aprendizaje por descubrimiento

Incluiremos también esta metodología por su estrecha relación con el enfoque constructivista, que promueve una comprensión profunda y significativa. El descubrimiento guiado favorece en gran medida la autonomía del estudiante, la motivación y la intuición matemática, cualidades deseables en todo aprendizaje de las matemáticas. Su aplicación nos ayuda a que el alumnado no solo memorice reglas y fórmulas, sino que comprenda también su importancia y por qué funcionan. Veamos en qué consiste:

¿Qué es el Aprendizaje por Descubrimiento?

El aprendizaje por descubrimiento es una metodología en la que los estudiantes construyen y van formando su conocimiento explorando, resolviendo problemas y formulando hipótesis a partir de situaciones o materiales diseñados por el docente. A diferencia de las metodologías más tradicionales, en las que los estudiantes reciben la información ya elaborada, mediante este método el alumnado descubre conceptos, relaciones y principios por sí mismo, guiado estratégicamente por el profesorado. Esta metodología fomenta la curiosidad, la autonomía y la comprensión profunda de los contenidos, especialmente en el área de matemáticas, de acuerdo a las teorías que veremos a continuación y que respaldan esta metodología.

A diferencia de la simple exposición, el aprendizaje por descubrimiento sitúa al estudiante en el centro del proceso, permitiéndole construir e interiorizar el conocimiento de manera significativa.

Fundamentación teórica del Aprendizaje por Descubrimiento

Esta metodología se basa en las siguientes teorías:

Constructivismo de Jerome Bruner
Jerome Bruner (1960) fue también uno de los principales teóricos del aprendizaje por descubrimiento. Defendió que los alumnos aprenden mejor cuando descubren principios por sí mismos, ya que esto mejora la retención, la transferencia de conocimientos y la motivación

intrínseca. Bruner también propuso la idea de una *espiral curricular*, en la que los conceptos se introducen de forma intuitiva y se profundizan gradualmente con mayor formalización.

<u>Aprendizaje significativo (Ausubel, 1976)</u>
Aunque David Ausubel defendía el aprendizaje por recepción significativa, también reconocía el valor del descubrimiento cuando este se realiza de manera guiada. Para que el aprendizaje sea significativo, el nuevo contenido debe relacionarse con los conocimientos previos del alumno, algo que el descubrimiento favorece especialmente si se acompaña de una buena estructuración conceptual.

<u>Teoría del andamiaje (Vygotsky & Bruner)</u>
El aprendizaje por descubrimiento se relaciona con la *Zona de Desarrollo Próximo* (ZDP) de Vygotsky y el concepto de *andamiaje* propuesto posteriormente por Bruner. El docente proporciona apoyos temporales que permiten al alumno realizar descubrimientos que no podría alcanzar solo, y estos apoyos se retiran progresivamente a medida que el estudiante gana autonomía.

<u>Enfoque heurístico y resolución de problemas (Polya, 1957)</u>
El aprendizaje por descubrimiento también se inspira en el enfoque heurístico de George Polya, quien propuso estrategias generales para abordar problemas matemáticos. La resolución de problemas auténticos, con múltiples caminos posibles, es una vía natural para fomentar el descubrimiento en matemáticas.

<u>Epistemología genética de Piaget</u>
Desde la perspectiva de Piaget (1970), el aprendizaje es el resultado de la acción del sujeto sobre el entorno. Piaget (1970) considera que el conflicto cognitivo y la manipulación activa del medio estimulan procesos de *asimilación* y *acomodación* que permiten construir nuevos esquemas mentales. El descubrimiento activo es clave para ese desarrollo.

<u>Aprendizaje basado en la indagación (Inquiry-Based Learning)</u>
Esta metodología, estrechamente ligada al aprendizaje por descubrimiento, promueve la formulación de preguntas, la exploración y el pensamiento crítico. Se ha demostrado eficaz (Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G., & Chinn, C. A. (2007)) especialmente en ciencias y matemáticas, al permitir a los estudiantes entender el "por qué" de los procedimientos y no solo el "cómo".

Comparativa entre metodologías en la enseñanza del estudio de funciones en Bachillerato

Comprender bien el concepto de función es algo básico para las asignaturas de matemáticas en Bachillerato, pero puede resultar complejo si nos estamos iniciando en su conocimiento, pues implica comprender relaciones entre variables, analizar propiedades, representar gráficamente diversas situaciones, etcétera. Tradicionalmente, muchos profesores han recurrido a la clase magistral, mediante exposición directa, para introducir definiciones formales (dominio, recorrido, inversa, derivada…) y mostrar ejemplos de gráficas. Sin embargo, en la legislación educativa actual –que hace hincapié en el aprendizaje competencial y activo– se nos sugiere explorar también metodologías basadas en problemas reales (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). En esta parte del trabajo compararemos la clase magistral, el aprendizaje basado en problemas (ABP), el Aprendizaje Cooperativo y el Aprendizaje por Descubrimiento, analizando sus implicaciones didácticas en la enseñanza del estudio y la representación de funciones en Bachillerato.

La clase magistral en la enseñanza y estudio de funciones

La clase magistral es, como hemos mencionado, una estrategia tradicional, centrada y orientada en torno al profesor: este expone sistemáticamente los contenidos matemáticos, propone ejemplos y ejercicios y dirige la resolución de estos mientras los alumnos escuchan, preguntan dudas o toman notas. Varios autores afirman que esta metodología "*se caracteriza por estar centrado en hechos, contenidos y conocimientos, los cuales el profesor transmitía a sus estudiantes esperando que estos adapten su forma de pensar al modelo que les era enseñado sin discusión ni crítica*" (Moreno, Asmat, Cruz, & Cuglievan, 2008). Es decir, afirman que el aula magistral tiende a un rol pasivo del alumno, quien recibe la información ya construida. Incluso investigaciones en didáctica alertan que este método puede limitar el aprendizaje profundo (Moreno et al., 2008).

No obstante, la clase magistral tradicional se continúa empleando y es ciertamente útil para introducir conceptos esenciales como dominio, recorrido, asíntotas, monotonía o representación gráfica de funciones. Suele acompañarse de esquemas en pizarra o proyecciones. La razón de que su uso sea mayoritario responde a varios puntos:

- Claridad expositiva: Permite una presentación ordenada de definiciones y procedimientos clave para el análisis funcional (Tall, 1992; Rosenshine, 2012).
- Eficiencia temporal: Dado el volumen de contenido que el currículo de Bachillerato exige en el bloque de funciones (afines, cuadráticas, cúbicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, a trozos…), la clase magistral permite abarcar un gran número de funciones en un tiempo limitado. El docente tiene control sobre el ritmo y la selección de ejemplos, lo que es especialmente útil en el segundo trimestre, cuando este bloque se aborda junto con el cálculo diferencial. Fidalgo (2016) subraya que, en entornos donde se valora el rendimiento académico y la cobertura curricular, la clase magistral sigue siendo una herramienta eficaz.
- Reducción de la carga cognitiva inicial: autores como Sweller et al. (1998) fundamentan desde la teoría de la carga cognitiva que la presentación guiada de modelos paso a paso ayuda al alumnado a comprender procedimientos complejos sin sentirse sobrecargado cognitivamente. Por ejemplo, el análisis completo de una función racional con asíntotas, derivada y puntos críticos puede abrumar si se plantea desde el descubrimiento sin preparación previa. Además, según el andamiaje estructurado de Mayer (2004), la instrucción directa permite segmentar el proceso en partes manejables.
- Adecuada para introducción de lenguaje formal: Facilita el uso correcto de símbolos y notaciones (Gagné, 1985). Esta metodología es especialmente útil para enseñar el uso correcto de símbolos, expresiones algebraicas, notación funcional y derivadas. La enseñanza directa permite corregir errores sistemáticos (como confundir $f(x)$ con $f\,'(x)$, o interpretar erróneamente una asíntota oblicua). Al tratarse de un lenguaje técnico, requiere una precisión que la clase magistral puede garantizar.

Sin embargo, estos métodos también tienden a acarrean algunos problemas, como los siguientes:

- Pasividad del alumnado: Como defienden varios autores, al adoptar un rol meramente receptivo, el alumnado pierde oportunidades de reflexionar significativamente sobre el comportamiento de las funciones. Esta falta de implicación cognitiva limita una comprensión profunda y puede derivar en un aprendizaje superficial, especialmente en tareas que exigen interpretar gráficamente propiedades derivadas de una expresión algebraica. Ausubel (1976) ya alertaba sobre el aprendizaje verbal significativo frente al memorístico, mientras que Bruner (1960) defendía el papel activo del alumno en la construcción del conocimiento. Otros estudios sugieren que la memorización mecánica de procedimientos no garantiza su transferencia a nuevas funciones o contextos (Biggs & Tang, 2007).

- Dificultades para atender la diversidad: López Pastor (2011) señala que un enfoque uniforme como el de la clase magistral no se adapta bien a diferencias de ritmo, estilo de aprendizaje o nivel de competencia previa. Mientras algunos estudiantes comprenden rápidamente el procedimiento de derivación o de análisis gráfico, otros necesitan más apoyo visual o manipulativo, que raramente se incluye en la clase magistral. Tampoco favorece el uso de representaciones múltiples (numéricas, gráficas, simbólicas), fundamentales en la comprensión del concepto de función.

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en la enseñanza y estudio de funciones

Frente al modelo tradicional, el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es una metodología activa que se centra más en el alumno, y está orientada en torno a él. Como señalan Moreno et al. (2008), se opta por "*una didáctica centrada en los procesos de aprendizaje de los estudiantes donde el elemento integrador es el problema o situación problemática*". Tal aprendizaje significativo, en términos de Ausubel (1976), tiende a perdurar más que el aprendizaje mecánico. Además, el ABP promueve habilidades metacognitivas y sociales: los estudiantes debaten estrategias, se responsabilizan de su propio aprendizaje y desarrollan competencias clave.

Supone, como veremos, un avance en ciertas áreas respecto a la clase magistral, como por ejemplo:

- Fomento del pensamiento crítico y contextualización del conocimiento: como indican Barrows & Tamblyn (1980), pioneros en demostrar el valor del ABP para la formación de competencias transferibles, el ABP estimula al alumnado a analizar, interpretar y aplicar conocimientos funcionales en contextos reales o cercanos. Por ejemplo, plantear problemas como el estudio del beneficio de una empresa a partir de una función cuadrática de ingresos y costes, o el análisis de la concentración de fármacos en el cuerpo mediante funciones exponenciales. Otros estudios como los de Cañal de León (2002) y Medina Rivilla (2008) muestran que este enfoque obliga a los alumnos a ir más allá de la mera repetición de procedimientos, a justificar decisiones y a comprender el significado de conceptos como extremos, intervalos de crecimiento o puntos de inflexión.

- Promoción de la autonomía y la iniciativa: el ABP convierte al alumnado en protagonista de su propio aprendizaje, lo que aumenta la motivación y el compromiso, como señalan los estudios de Hernández (2006). En el estudio de funciones, esto puede implicar investigar cómo cambia la gráfica de una función si varía un parámetro, explorar distintos modelos para ajustarse a datos empíricos, o determinar el comportamiento de una función que modela un fenómeno observado. Por su parte, Pozo y Monereo (1999) afirman que el aprendizaje autorregulado es más duradero y significativo que el que es instruido pasivamente.

- Desarrollo de competencias transversales: el ABP permite trabajar no solo los contenidos matemáticos del bloque de funciones, sino también competencias clave como la resolución de problemas, la comunicación matemática, la argumentación y el uso de herramientas TIC, muy de acuerdo con la OCDE (2018), que resalta la importancia del enfoque competencial en educación. García Pérez et al. (2010) demuestran cómo el ABP favorece el desarrollo de múltiples competencias en matemáticas, y como, por ejemplo, el trabajo con software como Geogebra, dentro de un proyecto, facilita la interpretación gráfica y simbólica de las funciones.
- Mejora la transferencia del conocimiento: Biggs & Tang (2007) señalan que los aprendizajes activos permiten una mayor transferencia, es decir, al trabajar con situaciones abiertas y reales, el alumnado aprende tanto a aplicar como a explicar los conceptos funcionales fuera del contexto académico, como en economía, biología o física. Por otra parte, Fernández March (2006) defiende que el ABP prepara para situaciones nuevas y complejas y favorece la transferencia de los aprendizajes, especialmente útil cuando en 2º de Bachillerato se aplican funciones al cálculo integral o al estudio de fenómenos continuos.

Sin embargo, la aplicación de estas herramientas supone unos nuevos retos frente a las metodologías clásicas:

- Alta exigencia organizativa y de tiempo: Morales (2011) y García-Peñalvo et al. (2018) coinciden en que el ABP exige una fuerte inversión inicial, es decir, diseñar buenos problemas funcionales, relevantes y ajustados al nivel del alumnado, requiere mucho tiempo de planificación, tanto para el docente como para los estudiantes. Además, resolverlos adecuadamente y en su totalidad puede consumir más sesiones que una clase magistral, dificultando la necesidad de dar del currículo completo por falta de tiempo. Además, los resultados del ABP no se ven de forma instantánea ni de forma constante, como indican los estudios de Campos y González (2013), que advierten que los resultados del ABP no son inmediatos ni uniformes.

- Dificultades de evaluación objetiva: El ABP plantea retos a la hora de evaluar el conocimiento individual, especialmente en tareas grupales y abiertas. Además, muchos procedimientos específicos del estudio de funciones (derivadas, análisis gráfico completo) pueden quedar ocultos si no se diseñan rúbricas muy detalladas o pruebas complementarias, por lo que López Pastor (2011) insiste en que es necesario combinar el ABP con estrategias de evaluación formativa y continua. Por su parte, Escudero (2009) alerta de que no todos los centros disponen de los recursos necesarios para implementar una evaluación de estos métodos de forma eficaz.
- Riesgo de falta de formalidad y lagunas conceptuales: Estudios como los de Tall (1992) y Pujolàs (2008) subrayan que el pensamiento formal necesita una construcción progresiva y guiada, y defiende combinar métodos activos con momentos estructurados de consolidación formal, por lo que si el problema se convierte en el centro sin estructurar adecuadamente el contenido, pueden quedar lagunas conceptuales. Por ejemplo, los estudiantes pueden inferir que una función tiene un extremo sin dominar las condiciones de derivabilidad o sin justificarlo analíticamente, lo que resulta problemático en la preparación de pruebas como la EBAU.
- Desigual implicación del alumnado: no todos los alumnos responden igual de bien a metodologías abiertas. De acuerdo a Baines et al. (2009), que señalan que la heterogeneidad del grupo puede afectar a la eficacia de enfoques basados en problemas, algunos alumnos pueden quedar rezagados si no están acostumbrados a la toma de decisiones en su aprendizaje o si carecen de herramientas previas para abordar el problema planteado. Zabalza (2007), por su parte, indica que el diseño debe ser especialmente cuidadoso para evitar desigualdades que puedan derivar en frustración y desmotivación.

Situación de aprendizaje acerca de la enseñanza y estudio de funciones basada en el ABP

A continuación, presentamos un ejemplo de cómo podría ser una situación de aprendizaje basada en esta metodología para la parte de análisis de la asignatura:

<u>Título</u>: “Diseñamos un plan de precios para una empresa de reparto”

Etapa: Bachillerato

Curso: 1.º

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I / Matemáticas I

Duración estimada: 6 sesiones

1. Contextualización y justificación didáctica

Esta situación de aprendizaje se enmarca dentro del bloque de estudio y representación de funciones y se orienta mediante la metodología del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Parte de un contexto "cercano" y realista: diseñar una estrategia de precios para una empresa de reparto.

Esta propuesta fomenta un aprendizaje activo y significativo (Ausubel, 1976), promueve la transferencia de los conceptos matemáticos al ámbito real (Biggs & Tang, 2007), potencia habilidades metacognitivas y sociales, y se adapta a un enfoque competencial, en consonancia con las orientaciones de la OCDE (2018) y la LOMLOE.

2. Competencias específicas trabajadas (según currículo LOMLOE)

- CE1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana aplicando distintas estrategias. (STEM1, STEM2, CCL3, CP3)
- CE2. Verificar la validez de soluciones mediante el razonamiento y la argumentación. (STEM2, CCL1, CCL2, CPSAA4)
- CE3. Formular o investigar conjeturas utilizando la creatividad y herramientas tecnológicas. (STEM3, CD1, CD2, CPSAA1.2)
- CE5. Establecer conexiones entre ideas matemáticas. (STEM5, CC2, CC3)
- CE6. Descubrir vínculos de las Matemáticas con otras áreas. (CC3, CE3, CCEC4.2)
- CE7. Representar conceptos y procedimientos con diferentes tecnologías. (CD3, CD5, CCEC1)
- CE8. Comunicar ideas matemáticas de forma rigurosa. (CCL1, CCL2, CCEC3.2)
- CE9. Utilizar destrezas personales y sociales en el trabajo colaborativo y el afrontamiento de retos (CPSAA1.1, CPSAA3.1, CPSAA5)

3. Criterios de evaluación

- 1.1. Formular y resolver problemas contextualizados utilizando modelos funcionales adecuados.
- 2.2. Interpretar y representar gráficamente situaciones que se describen con funciones
- 3.1. Analizar el comportamiento de funciones a partir de su gráfica, su expresión analítica o una tabla de valores.
- 4.1. Utilizar medios digitales para representar, resolver o analizar fenómenos descritos mediante funciones.
- 5.1. Mostrar iniciativa, autonomía y responsabilidad en el proceso de aprendizaje y en el trabajo colaborativo.

<u>4. Saberes básicos trabajados</u>

- Funciones y modelos funcionales: tipos de funciones (lineales, cuadráticas, exponenciales), representación gráfica, dominio, crecimiento, extremos, etc.
- Análisis de fenómenos reales mediante modelos matemáticos.
- Uso de herramientas tecnológicas (Geogebra, hojas de cálculo).
- Resolución de problemas contextualizados.
- Comunicación y argumentación matemática oral y escrita.
- Trabajo cooperativo y autorregulación del aprendizaje.

<u>5. Descripción de la tarea</u>

Título de la tarea: "¿Cómo debería cobrar una empresa de reparto?"

Planteamiento del problema:

Una empresa local de reparto ecológico quiere diseñar un nuevo plan de precios justo y rentable. Se pide al alumnado que, en grupos, simule ser un equipo de consultores matemáticos que:

- Recoja datos simulados o reales (coste por distancia, número de paquetes, etc.).
- Modelen diversas opciones mediante funciones.
- Analice e interprete esas funciones.
- Elabore una propuesta formal que optimice la relación coste-beneficio y sea fácilmente explicable a clientes y gerencia.

Ejemplo:

- *¿Cuál es la expresión algebraica que modeliza el coste total en función de la distancia, teniendo en cuenta un descuento del 10% para trayectos superiores a 50 km?*
- *Si el coste base es de 0,5 €/km, ¿cuál será el precio final para un envío de 60 km aplicando el descuento?*

- *Representa gráficamente la función coste en función de la distancia.*

6. Fases de desarrollo

Fase 1 – Activación y presentación del problema

El docente contextualiza el reto. Se exploran casos similares (tarifas de paquetería) y se introducen preguntas guía:

- ¿Es justo un precio lineal?
- ¿Cómo influye la distancia?
- ¿Puede haber descuentos?
- ¿Qué tipo de función representaría mejor esta relación?

Fase 2 – Investigación y modelización

Por grupos, los alumnos:

- Recogen datos y los organizan.
- Ensayan distintos modelos funcionales: lineales, cuadráticos o exponenciales.
- Representan gráficamente cada función.
- Analizan el dominio, el crecimiento, los extremos y otros rasgos relevantes.
- Determinan la idoneidad de cada modelo y justifican su elección.
- Usan herramientas TIC (como Geogebra, o Excel) para apoyar su análisis.

Fase 3 – Presentación y debate

- Cada grupo expone su propuesta mediante una presentación oral y un informe escrito.
- Se fomenta el debate crítico entre grupos sobre las ventajas e inconvenientes de cada propuesta.

Fase 4 – Formalización y consolidación

- El docente sistematiza los conceptos clave (derivabilidad, extremos, criterios de crecimiento, etc.) mediante ejercicios dirigidos.
- Se aclaran posibles lagunas conceptuales que hayan surgido.

7. Evaluación

Instrumento	**Indicadores**
Rúbrica grupal	Pertinencia y adecuación del modelo propuesto, claridad matemática, uso de TIC, justificación de decisiones.

Instrumento	Indicadores
Prueba individual	Comprensión de conceptos funcionales, análisis gráfico, aplicación de derivadas.
Autoevaluación	Nivel de participación, reflexión sobre el aprendizaje.
Coevaluación	Contribución al trabajo del grupo, habilidades comunicativas.

A modo de ejemplo, se incluye un formato de cómo puede ser la rúbrica a emplear por el docente en esta situación de aprendizaje. Se omitirá en las siguientes situaciones de aprendizaje, dado que siguen todas prácticamente el mismo esquema, visible en el desarrollo por fases de la actividad, y esto se trata sólo de una sugerencia de rúbrica:

Indicador	Excelente (1 pt)	Aceptable (0.5 pt)	Insuficiente (0 pt)
Modelo matemático planteado	Función correctamente construida, expresa condiciones del problema de forma precisa	Modelo con errores menores o incompleto en algún tramo	Modelo incorrecto o incoherente con el contexto
Aplicación del descuento en el modelo	Descuento bien incorporado como función a trozos o como factor matemático	Descuento presente pero con errores o simplificaciones imprecisas	No se incluye el descuento o se interpreta de forma errónea
Representación gráfica de la función	Gráfico claro, escalado correctamente, con etiquetas, continuidad bien indicada	Gráfico presente pero con deficiencias de escala o sin distinguir tramos	No hay gráfico o es ilegible
Análisis funcional: dominio, crecimiento, etc.	Análisis completo de propiedades: dominio, comportamiento, interpretación contextual	Se analiza alguna propiedad pero falta justificación o conexión con el contexto	No se analiza el comportamiento de la función
Claridad del informe y exposición final (lenguaje matemático)	Informe y exposición claros, ordenado, con buen uso de notación y redacción matemática	Informe y/o exposición correctos pero con algunos errores de	Informe y exposición desordenado, sin redacción matemática adecuada

Indicador	Excelente (1 pt)	Aceptable (0.5 pt)	Insuficiente (0 pt)
		notación o lenguaje poco preciso	

8. Atención a la diversidad y medidas inclusivas

- Grupos heterogéneos, con roles rotativos (coordinador, analista, portavoz, redactor).
- Apoyo individualizado durante el proceso para quienes lo necesiten.
- Plantillas y guías paso a paso alumnos con dificultades.
- Espacios de tutoría entre iguales y apoyo docente programado.

9. Uso de herramientas digitales

- Geogebra para modelar y representar funciones.
- Excel/Sheets para trabajar datos.
- Canva / PowerPoint para preparar las presentaciones finales.
- Rúbricas compartidas para fomentar la autoevaluación y la evaluación formativa.

10. Aprovechamiento de puntos fuertes del ABP

- ✓ Pensamiento crítico: los alumnos deben interpretar, comparar y defender modelos funcionales reales.
- ✓ Transferencia del conocimiento: se trabaja con fenómenos económicos y logísticos reales.
- ✓ Competencias transversales: se desarrollan habilidades comunicativas, tecnológicas y sociales.
- ✓ Autonomía y motivación: los estudiantes lideran su propio aprendizaje y toman decisiones significativas.

El Aprendizaje Cooperativo (AC) en la enseñanza y estudio de funciones

El Aprendizaje Cooperativo se basa en la estructuración intencional de la interacción entre los estudiantes para lograr objetivos comunes, combinando la responsabilidad individual con la interdependencia positiva. En el estudio de funciones, este enfoque permite que los estudiantes trabajen en equipo para analizar gráficos, calcular derivadas, estudiar la monotonía, representar gráficamente comportamientos locales y globales, y resolver problemas funcionales reales. A continuación, se exponen los motivos que podrían llevarnos a implementar esta metodología en tal caso:

- Favorece la comprensión profunda a través del diálogo matemático: Como exponen Johnson, Johnson & Holubec (1999), el AC genera contextos donde los estudiantes explican, argumentan y contrastan sus ideas sobre conceptos funcionales clave: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, comportamiento asintótico, continuidad, etc. El intercambio verbal facilita la reorganización del conocimiento según Casanova et al. (2004), que afirman que la verbalización es fundamental en la construcción de significado matemático. Por ejemplo, un grupo puede debatir si una función racional tiene asíntotas oblicuas y justificarlo mediante límites. Además, Fernández Bravo (2012) destaca que los procesos de diálogo entre iguales permiten construir el conocimiento desde la zona de desarrollo próximo de Vygotsky.
- Promueve el uso flexible de múltiples representaciones: López Pastor (2011) destaca cómo el trabajo cooperativo potencia el uso variado de recursos y registros, es decir, trabajar en grupo facilita que los alumnos se enfrenten a una función desde distintas representaciones (gráfica, algebraica, verbal, tabular), lo que enriquece la comprensión. Duval (2006) también está de acuerdo y señala que la comprensión funcional mejora al coordinar representaciones. Por ejemplo, en un grupo cooperativo, puede haber roles asignados (el que grafica, el que calcula, el que interpreta…) fomentando así la conexión entre distintas formas de ver una misma función. Llinares & Sánchez (2005) aplicaron esto al aprendizaje colaborativo de funciones en secundaria.
- Mejora la motivación y reduce la ansiedad matemática: como indican varios estudios, como los de Slavin (1995), Gavilán (2006) y Pujolàs (2008), a muchos estudiantes que encuentran dificultades emocionales ante funciones complejas (racionales, logarítmicas, etc.) el trabajo cooperativo puede ayudar a reducir la ansiedad al permitir apoyo mutuo, mejora la autoeficacia y genera un clima afectivo más positivo en el aula. Además Díaz-Aguado (2003) vincula el trabajo cooperativo con climas de aula más inclusivos.
- Facilita la atención a la diversidad: estrechamente relacionado con el punto anterior, y como indica Pujolàs (2008), en grupos heterogéneos, los estudiantes con más dificultades pueden aprender con el apoyo de sus compañeros, y los más avanzados consolidan al explicar. Así también el AC permite personalizar el ritmo y nivel de exigencia dentro de la misma actividad, de acuerdo a Sánchez & García (2004), por

ejemplo, en el estudio de una función logarítmica, unos alumnos pueden centrarse en el dominio y otros en su derivada, para luego ponerlo en común.

- Desarrolla habilidades sociales y competencias clave del currículo: Como indican Marchesi y Martín (2002), además del contenido funcional, el alumnado aprende a trabajar en equipo, tomar decisiones, organizar información y comunicar resultados, competencias clave para el siglo XXI y que la LOMLOE (2020) incluye explícitamente como objetivo curricular transversal.

No obstante, para aplicar esta metodología alejada de los métodos expositivos tradicionales, es necesario tener en cuenta algunas dificultades y limitaciones que puede suponer esta metodología:

- Riesgo de descompensación en la implicación individual: Según estudios de López Pastor (2011) y Slavin (2014) si no se estructura bien el trabajo, algunos alumnos pueden adoptar una actitud pasiva y comenzar a depender de los demás, lo que limita el aprendizaje individual de contenidos funcionales exigentes (derivación, dominio, representación gráfica precisa…). Por su parte Casanova et al. (2004) nos advierte de este "efecto polizón" en entornos cooperativos mal planificados.
- Mayor dificultad de seguimiento y evaluación individual: Evaluar el progreso de cada estudiante en el estudio de funciones es, de acuerdo con Escudero (2009), más complejo en dinámicas grupales, especialmente si se prioriza el producto final y no el proceso individual. Es difícil saber si todos han comprendido, por ejemplo, cómo se determina la concavidad a partir de la segunda derivada. Por ello Zabalza (2007) y García Pérez (2010) proponen el uso de rúbricas detalladas y autoevaluaciones individuales para contrarrestarlo.
- Requiere habilidades de gestión del aula por parte del docente: Como indican Johnson & Johnson (2004), el éxito del AC depende en gran parte de la capacidad del docente para planificar, organizar roles, supervisar interacciones, y mediar en conflictos. En contextos donde el profesorado no ha sido formado en estas técnicas, el resultado puede ser caótico, como afirma Ballester (2010), que expone que el AC mal gestionado puede generar ruido sin aprendizaje. Pujolàs (2008) y De Miguel (2005) alertan de los errores frecuentes en la aplicación espontánea del Aprendizaje Cooperativo.
- Riesgo de distracción o superficialidad en contenidos formales: Tall (1992) recuerda la necesidad de equilibrio entre exploración activa y consolidación formal, por ejemplo, en temas técnicos como el estudio riguroso de funciones (análisis de intervalos, derivación formal, representación con precisión), el AC puede derivar en

actividades más sociales que conceptuales si no hay una guía docente firme y un diseño adecuado. Según Llinares y Sánchez (2005), el diálogo espontáneo en las sesiones de aprendizaje cooperativo no siempre conduce a una formalización matemática rigurosa si no hay intervenciones docentes bien dirigidas.

Situación de aprendizaje acerca de la enseñanza y estudio de funciones basada en el Aprendizaje Cooperativo

Título: "Modelamos una curva con condiciones reales"

Etapa: Bachillerato

Curso: 1.º

Materia: Matemáticas I / Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

Duración estimada: 5 sesiones

1. Contextualización y justificación didáctica

Esta situación de aprendizaje se inserta en el bloque de estudio y análisis de funciones y se estructura mediante Aprendizaje Cooperativo estructurado, con una tarea común que exige interdependencia positiva, participación equitativa y responsabilidad individual.

A partir del reto de diseñar una función con condiciones reales (por ejemplo, tener un máximo relativo, asíntotas, puntos de corte, etc.), se fomenta el aprendizaje significativo (Ausubel, 1976), la cooperación efectiva (Johnson & Johnson, 1994; Pujolàs, 2008) y el uso funcional del conocimiento matemático, alineándose con las finalidades competenciales de la LOMLOE y los marcos de referencia internacionales (OCDE, 2018).

2. Competencias específicas trabajadas (según currículo LOMLOE)

- CE1. Formular, interpretar y resolver problemas reales mediante funciones.
- CE2. Utilizar el lenguaje matemático con corrección y coherencia.
- CE3. Analizar y representar funciones, comprendiendo su comportamiento.
- CE4. Aplicar herramientas digitales en el estudio de funciones.
- CE5. Desarrollar actitudes cooperativas, responsabilidad y esfuerzo sostenido.

3. Criterios de evaluación

- 1.1 Formular y resolver problemas funcionales a partir de condiciones específicas.
- 2.2. Representar funciones gráficamente a partir de su expresión analítica.
- 3.1. Interpretar el comportamiento de funciones con distintas representaciones.
- 4.1. Emplear tecnología digital para analizar funciones.
- 5.1 Participar activamente en el trabajo cooperativo, mostrando responsabilidad y reflexión.

4. Saberes básicos trabajados

- Propiedades de funciones: dominio, crecimiento, extremos, concavidad, asíntotas.
- Derivadas y su relación con la gráfica.
- Representación gráfica con herramientas tecnológicas.
- Justificación y comunicación matemática en equipo.
- Estrategias cooperativas: roles, diálogo matemático, acuerdos.
- Autoevaluación y coevaluación del trabajo grupal.

5. Descripción de la tarea

Título de la tarea: "Diseña la función perfecta (¡según requisitos del cliente!)"

Planteamiento del problema:

Cada grupo asume el rol de un equipo de ingenieros/as matemáticos a los que una empresa encarga el diseño de una curva funcional que cumpla con ciertas condiciones (por ejemplo: tener un máximo (absoluto o relativo, según se requiera) en x = 2, una asíntota horizontal en y = 1, ser creciente en un intervalo dado, cortar al eje Y en un punto concreto, etc.).

Los grupos deben:

- Traducir condiciones verbales a propiedades analíticas.
- Proponer una función (racional o polinómica) que cumpla todas ellas.
- Justificar analíticamente mediante derivadas, límites, etc.
- Representarla en GeoGebra.
- Redactar un informe conjunto y presentarlo oralmente.

Ejemplos:

- *Diseña una función polinómica que tenga un máximo relativo en $x = 2$, corte el eje Y en $y = 1$, y tenga una asíntota horizontal en $y = 3$.*

- *Verifica mediante derivadas que la función cumple con las condiciones del problema.*
- *Calcula y representa gráficamente los puntos críticos y la concavidad de la función.*

6. Fases de desarrollo

Fase 1 – Presentación del reto y formación de grupos

El docente plantea el reto y los criterios que debe cumplir la función. Se forman grupos heterogéneos y se asignan roles: analista, comunicador, verificador gráfico, redactor. Se ofrece una plantilla de planificación.

Fase 2 – Análisis y construcción

Los grupos traducen los requisitos al lenguaje matemático y ensayan con distintos modelos funcionales. Se apoyan en GeoGebra para visualizar y comprobar sus ideas. Se entregan borradores que reciben retroalimentación del docente.

Fase 3 – Elaboración del informe y preparación oral

Se redacta el informe explicando paso a paso la elección y justificación del modelo funcional. Se prepara una presentación oral en grupo que deberá ser clara y rigurosa.

Fase 4 – Exposición y revisión final

Cada grupo expone su propuesta. El resto de grupos realiza preguntas y observaciones. El docente guía la revisión colectiva de conceptos clave: extremos, derivadas, límites, crecimiento, etc.

7. Evaluación

Instrumento	**Indicadores clave**
Rúbrica grupal	Pertinencia del modelo funcional, corrección matemática, claridad de justificaciones, uso de TIC, roles bien asumidos.
Prueba individual	Aplicación de propiedades funcionales, comprensión del análisis de funciones, interpretación de gráficas.

Instrumento	Indicadores clave
Autoevaluación	Implicación en el trabajo, comprensión del proceso, reflexión crítica.
Coevaluación	Valoración del trabajo en grupo, aportaciones individuales, habilidades comunicativas.

8. Atención a la diversidad y medidas inclusivas

- Grupos heterogéneos equilibrados por niveles.
- Apoyos visuales y conceptuales para alumnado con necesidades específicas (plantillas, ejemplos resueltos, esquemas guía).
- Roles cooperativos flexibles, adaptados a los puntos fuertes de cada alumno/a.
- Tutorías entre iguales y feedback guiado del profesor.
- Opcionalidad progresiva: se pueden cumplir más o menos condiciones según el nivel del grupo.

9. Uso de herramientas digitales

- GeoGebra para representación y comprobación de condiciones.
- Canva / Google Slides / PowerPoint para exposiciones.
- Aula virtual o Classroom para entrega de informes y rúbricas.
- Rúbricas digitales compartidas para coevaluación y autoevaluación.

10. Aprovechamiento de puntos fuertes del Aprendizaje Cooperativo

- ✓ Mejora del diálogo matemático: la toma de decisiones conjuntas obliga a argumentar cada paso.
- ✓ Atención a la diversidad: cada rol permite a todos aportar desde sus fortalezas.
- ✓ Aprendizaje activo: los estudiantes resuelven un problema auténtico desde dentro.
- ✓ Clima de aula positivo: se trabaja el respeto, la escucha activa y la corresponsabilidad.
- ✓ Rigor y autonomía: deben justificar cada decisión desde el lenguaje formal, con acompañamiento docente.

El Aprendizaje por Descubrimiento en la enseñanza y estudio de funciones

El Aprendizaje por Descubrimiento (Bruner, 1960) se basa en que el alumnado construye activamente su conocimiento a través de la exploración guiada de patrones, regularidades y relaciones, formulando conjeturas, verificándolas y generalizando conceptos. En el ámbito de las funciones, esto se traduce en permitir que los estudiantes descubran las propiedades de crecimiento, extremos relativos/absolutos, continuidad, derivabilidad, asíntotas o simetrías a partir de casos concretos, situaciones problemáticas o el uso de herramientas como Geogebra.

- Favorece el aprendizaje significativo y duradero: Como defienden varios autores como Bruner (1960), Ausubel (1976), Moreno (2007)… descubrir por uno mismo patrones de comportamiento funcional, como por ejemplo, cómo afecta el signo de la derivada al crecimiento de una función, conduce a una comprensión conceptual más sólida. Los conocimientos no se memorizan de forma mecánica, sino que se integran en estructuras cognitivas previas. Además, estudios como el de Gómez-Chacón (2005) analizan cómo el descubrimiento fomenta, en gran medida, la autonomía matemática del alumno.
- Desarrolla pensamiento matemático y capacidades de investigación: Estudios de Rico (1997), NCTM (2000) y Liljedahl (2020) defienden que las tareas de descubrimiento favorecen el pensamiento matemático profundo, pues el alumnado desarrolla competencias como la formulación de conjeturas, razonamiento inductivo y deductivo, validación de afirmaciones y generalización. Por ejemplo, al explorar cómo cambia una función cuando se modifican sus parámetros, pueden inducir comportamientos generales. Polya (1957), en su momento, ya proponía que resolver problemas investigando es central en la enseñanza matemática.
- Fomenta la autonomía y la autoconfianza en matemáticas: Deci & Ryan (1985) destacan que la autodeterminación mejora el compromiso con la tarea. Es decir, permitir que el estudiante saque sus propias conclusiones sobre el comportamiento de una función le confiere mayor control sobre su aprendizaje, aumentando la motivación y la percepción de autoeficacia según los estudios de Alonso Tapia (2005), que conecta la autonomía en la resolución con una mejora en la autoestima académica. Cañadas y Nieto (2008) han documentado cómo el descubrimiento guiado genera mayor implicación cognitiva y emocional en la resolución de problemas matemáticos.
- Estimula la creatividad y la transferencia de conocimiento: Al no limitarse a aplicar procedimientos, los estudiantes desarrollan soluciones creativas y conectan ideas entre distintos tipos de funciones, facilitando el pensamiento transversal como explica Font (2011), que propone que el descubrimiento potencia conexiones entre

representaciones y contextos. Por ejemplo, al descubrir por qué las funciones exponenciales tienen una asíntota horizontal, relacionan propiedades algebraicas, gráficas y de crecimiento de estas funciones. Estudios como el de Torrance (1995) señalan la relación entre descubrimiento y creatividad matemática. Además, otros autores como Mason, Burton & Stacey (1982) promueven la creatividad como parte de la actividad matemática genuina.

- Integra bien las TIC y herramientas dinámicas: Si el descubrimiento se potencia con recursos como Geogebra, que permite a los alumnos manipular funciones y observar el efecto inmediato de los cambios, se favorece una construcción visual y experimental del conocimiento funcional, tal y como sugieren Llinares (2011) y Pérez (2013), que analizan cómo los entornos digitales facilitan el aprendizaje funcional por descubrimiento.

Sin embargo la aplicación de esta metodología supone unos nuevos retos que debemos hacer frente:

- Alta demanda cognitiva inicial: el enfoque puede ser excesivamente exigente para algunos estudiantes si no se acompaña de una guía estructurada (Sweller et al., 1998), especialmente en funciones con múltiples elementos interrelacionados (dominio, derivada, crecimiento, curvatura...). Además, Mayer (2004) distingue entre descubrimiento puro y guiado, proponiendo este último como más efectivo, y Font (2003) advierte del riesgo de frustración cuando no se estructuran bien las tareas de exploración.
- Dificultades para avanzar en todos los contenidos curriculares: el descubrimiento exige más tiempo tanto para el docente como para los alumnos, lo que puede dificultar cubrir todo el abanico de funciones (lineales, polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, etc.) con la profundidad requerida por el currículo. Como indica Fidalgo (2016), en contextos con presión curricular, el descubrimiento puede resultar inviable si no se planifica estratégicamente. También debido a la formalidad matemática requerida en este bloque, Zabalza (2007) alerta sobre la falta de realismo cuando se propone el descubrimiento en bloques muy formales.
- Riesgo de concepciones erróneas: sin una intervención docente eficaz, el descubrimiento puede llevar a interpretaciones incorrectas o incompletas. Tall (1992) advierte que la intuición gráfica sin fundamentos puede generar errores, especialmente cuando los estudiantes no disponen de conocimientos previos sólidos, como señalar que una función tiene un máximo por observar un “pico” en el gráfico sin justificarlo analíticamente. Respecto a esta situación, Artigue (1995)

llama a una articulación entre lo experimental y lo deductivo, mientras que Llinares & Sánchez (2005) defienden que el descubrimiento debe ir acompañado de espacios para formalizar lo aprendido.

- Exige una fuerte preparación didáctica del docente: Font (2011) plantea que el profesor debe ser diseñador de experiencias cognitivas progresivas. Planificar tareas de descubrimiento funcionales efectivas implica diseñar situaciones abiertas, anticipar respuestas, ofrecer andamiajes progresivos y reconducir razonamientos erróneos, lo que requiere una alta competencia profesional. Varios autores como De Miguel (2005) insisten en la necesidad de mejorar la formación del profesorado para gestionar metodologías activas.
- Evaluación más compleja y menos objetiva: los procesos de descubrimiento del conocimiento de los alumnos suelen ser individualizados y no lineales, lo que complica la evaluación estandarizada y exige estrategias cualitativas, por lo que Torrado & González (2006) proponen rúbricas de descubrimiento para evaluar razonamiento y creatividad, portafolios, diarios reflexivos…
  Zabalza (2007) considera que evaluar el aprendizaje activo implica cambiar la cultura de la calificación.

Situación de aprendizaje acerca de la enseñanza y estudio de funciones basada en el Aprendizaje por Descubrimiento

Título: "Descubriendo el comportamiento oculto de las funciones"

Etapa: Bachillerato

Curso: 1.º

Materia: Matemáticas I / Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

Duración estimada: 6 sesiones

1. Contextualización y justificación didáctica

Esta situación de aprendizaje se enmarca dentro del bloque de estudio y representación de funciones, y se desarrolla mediante el Aprendizaje por Descubrimiento (Bruner, 1960). A partir de tareas abiertas, manipulaciones gráficas con Geogebra y observación de patrones, se propone al alumnado descubrir regularidades y propiedades funcionales como crecimiento, simetría, extremos o continuidad.

Esta metodología fomenta la construcción activa del conocimiento (Ausubel, 1976), el pensamiento matemático autónomo (Gómez-Chacón, 2005), la creatividad (Torrance, 1995) y una comprensión conceptual más sólida, permitiendo integrar conocimientos a través de la experiencia y la reflexión (Moreno, 2007).

2. Competencias específicas trabajadas (según currículo LOMLOE)

- CE1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana aplicando distintas estrategias. (STEM1, STEM2, CCL3, CP3)
- CE2. Verificar la validez de soluciones mediante el razonamiento y la argumentación. (STEM2, CCL1, CCL2, CPSAA4)
- CE3. Formular o investigar conjeturas utilizando la creatividad y herramientas tecnológicas. (STEM3, CD1, CD2, CPSAA1.2)
- CE5. Establecer conexiones entre ideas matemáticas. (STEM5, CC2, CC3)
- CE6. Descubrir vínculos de las Matemáticas con otras áreas. (CC3, CE3, CCEC4.2)
- CE7. Representar conceptos y procedimientos con diferentes tecnologías. (CD3, CD5, CCEC1)
- CE8. Comunicar ideas matemáticas de forma rigurosa. (CCL1, CCL2, CCEC3.2)
- CE9. Utilizar destrezas personales y sociales en el trabajo colaborativo y el afrontamiento de retos. (CPSAA1.1, CPSAA3.1, CPSAA5)

3. Criterios de evaluación

- 1.2. Descubrir y justificar regularidades y comportamientos de funciones en contextos diversos.
- 2.3. Formular conjeturas matemáticas basadas en la observación de representaciones gráficas y validarlas.
- 3.1. Reconocer propiedades de funciones (crecimiento, extremos relativos/absolutos, continuidad, simetrías) a través de la exploración.
- 4.1. Emplear herramientas digitales para experimentar y construir conocimiento matemático.
- 5.2. Mostrar iniciativa y perseverancia en la exploración de ideas matemáticas.

4. Saberes básicos trabajados

- Comportamiento de funciones: crecimiento, extremos, simetría, continuidad, derivabilidad, asíntotas.

- Representaciones gráficas y cambios en parámetros.
- Formulación y validación de conjeturas.
- Uso de Geogebra como entorno exploratorio.
- Argumentación y comunicación matemática.
- Autonomía en la investigación matemática.

5. Descripción de la tarea

Título de la tarea: "¿Qué nos quiere decir esta función?"

Planteamiento del problema

El alumnado recibe una colección de funciones presentadas gráficamente (y a veces analíticamente) con el reto de:

- Formular conjeturas sobre su comportamiento (por ejemplo: "cuando $f' > 0$, la función crece").
- Descubrir propiedades ocultas a través de manipulación en Geogebra.
- Justificar y generalizar observaciones.

Se promueve que el conocimiento emerja a partir de la interacción directa con representaciones funcionales.

6. Fases de desarrollo

Fase 1 – Introducción y motivación (descubrimiento guiado)

El docente plantea preguntas exploratorias:

- ¿Cómo cambia la función si modificamos un parámetro
- ¿Qué ocurre si se invierte el signo de la pendiente?
- ¿Es siempre creciente si lo parece gráficamente?

Se exploran ejemplos sencillos en Geogebra de forma colectiva.

Fase 2 – Exploración autónoma por parejas/grupos pequeños

Los alumnos reciben hojas de descubrimiento con tareas como:

- "Modifica la parábola y observa qué cambia."
- "Ajusta la base de una exponencial y deduce qué pasa con la asíntota."
- "Observa cuándo se produce un máximo. ¿Cómo se detecta gráficamente y analíticamente?"

Se anima a usar Geogebra para manipular funciones, probar, anotar observaciones y formular reglas.

Fase 3 – Puesta en común y sistematización

Cada grupo expone sus descubrimientos. El docente reconduce posibles errores y generaliza propiedades observadas, construyendo el conocimiento formal desde las ideas del alumnado.

Fase 4 – Consolidación y formalización

Se trabajan definiciones precisas y se ejercita la justificación de propiedades con argumentos analíticos. Se comparan los descubrimientos con la teoría formal.

7. Evaluación

Instrumento	**Indicadores**
Diario de exploración	Calidad de las conjeturas, claridad en las observaciones, justificación matemática.
Rúbrica de proceso	Participación, perseverancia, creatividad, uso correcto de Geogebra.
Prueba individual	Capacidad para generalizar propiedades, identificar errores, aplicar lo aprendido.
Autoevaluación	Reflexión sobre el proceso de descubrimiento, autopercepción de aprendizaje.

8. Atención a la diversidad y medidas inclusivas

- Tareas abiertas con diferentes niveles de profundización.
- Apoyo del docente y andamiajes guiados para quienes necesiten estructura
- Trabajo colaborativo y tutoría entre iguales.
- Plantillas con pautas de observación y guías visuales.
- Inclusión de retos ampliados para alumnado con mayor dominio.

9. Uso de herramientas digitales

- Geogebra como entorno de exploración funcional.
- Presentaciones digitales o murales colaborativos para exponer los descubrimientos
- Rúbricas digitales compartidas para guiar y coevaluar el proceso.

10. Aprovechamiento de puntos fuertes del Aprendizaje por Descubrimiento

- ✓ Aprendizaje significativo: el alumnado integra conceptos tras observar y razonar con ejemplos manipulativos.
- ✓ Desarrollo del pensamiento matemático: se fomenta la formulación de hipótesis y la validación rigurosa.
- ✓ Autonomía y motivación: el protagonismo recae en el alumno, favoreciendo su implicación.
- ✓ Creatividad: se permite múltiples caminos de exploración y representación.
- ✓ Conexión entre representaciones: se transita entre lo gráfico, lo numérico y lo analítico.

Comparativa entre metodologías en la enseñanza del cálculo de integrales en Bachillerato

En nuestro contexto educativo, cada vez más diverso y centrado en el estudiante, es necesario revisar constantemente las metodologías empleadas en el aula, considerando tanto sus fortalezas como sus limitaciones en función del contenido que se aborda. El cálculo integral, por su parte, representa un buen campo de análisis, dado que combina razonamiento abstracto, comprensión geométrica y aplicación de procedimientos técnicos y algoritmos. Así, la selección de estrategias didácticas adecuadas, basadas en el tipo de alumnado y las características de la clase, puede marcar una diferencia significativa en el logro académico y en la actitud del alumnado hacia las matemáticas.

A priori, podríamos pensar que todas estas metodologías son en mayor o menor medida útiles para explicar los conceptos que subyacen al cálculo integral, sin embargo, es posible que alguna de estas sean más aconsejables, dependiendo tanto del tipo de alumnado como de nuestra forma de dar clase, por lo que deberíamos inclinarnos por ella. Para tener una vista más organizada de los puntos fuertes y debilidades, valoraremos a continuación aspectos como la claridad conceptual, el grado de implicación del alumnado, el uso de herramientas tecnológicas, la capacidad para fomentar el pensamiento crítico y su viabilidad de aplicación en el aula. Para las reflexiones nos apoyaremos en referencias teóricas y estudios previos, así como en el marco normativo vigente.

Análisis de la Clase Magistral en la parte de Cálculo Integral en Matemáticas de Bachillerato

La clase magistral es históricamente una de las metodologías más empleadas en la enseñanza de las matemáticas en niveles medios y superiores. En el bloque de cálculo integral, esta estrategia sigue siendo la mayormente empleada, y es especialmente útil cuando se combina con apoyos visuales y herramientas tecnológicas.

En su modalidad participativa, no solo buscamos la transmisión directa de conocimientos por parte del docente, sino también la inclusión de momentos de interacción, preguntas dirigidas, resolución guiada de ejercicios y retroalimentación inmediata.

Veamos a continuación unas cuantas razones de por qué esto es así:

- La claridad estructural y organización del contenido: La clase magistral permite presentar el cálculo integral (introducción al concepto de primitiva, regla de Barrow, técnicas de integración) de forma progresiva y ordenada, facilitando que el alumnado construya una base teórica sólida. Esto es especialmente útil cuando se deben introducir nuevos lenguajes simbólicos y procedimientos formales (Tall, 1992).
- Mucha eficiencia en la exposición de técnicas y algoritmos de integración: La enseñanza de métodos de integración (por partes, sustitución, fracciones parciales, etc.) puede beneficiarse de explicaciones claras y directas en la pizarra, debido a su carácter algorítmico y procedimental. Además de que la clase magistral nos permite modelar y explicar procedimientos paso a paso, también es una herramienta útil para anticipar y prevenir errores comunes, optimizando el tiempo disponible (Tobias, 1982).
- Integración de herramientas tecnológicas y visuales: Cuando acompañamos nuestra explicación con recursos como Geogebra o calculadoras gráficas, en las que se vean claramente conceptos propios a la integral, la clase magistral puede ofrecer representaciones claras y dinámicas de áreas bajo curvas, funciones integrales y aproximaciones numéricas. Estas visualizaciones, correctamente aplicadas, ayudan a conectar la noción de integral definida con el significado geométrico y el concepto de área bajo la curva, además de que favorece la atención del grupo conectar estos conceptos con la intuición. (Artigue, 2002).
- Facilidad de adaptación al ritmo del grupo: Como docentes podemos modular la dificultad de los ejercicios y el ritmo de la clase según las necesidades generales del grupo, reforzando conceptos básicos o repitiendo explicaciones de algoritmos más complejos y avanzar cuando se percibe comprensión global.

Sin embargo, si nos fijamos en los problemas que pueden surgir del empleo de esta metodología, podemos destacar los siguientes:

- Falta de protagonismo del alumnado: Incluso en su forma participativa, la clase magistral tiende a mantener al docente como centro del proceso, lo que puede limitar la autonomía y la construcción activa del conocimiento por parte del estudiante (Bruner, 1960). En cálculo integral, esto puede traducirse en una comprensión mecánica de técnicas sin una adecuada interiorización conceptual, algo que deberíamos rechazar como docentes.
- Falta de interacción social entre estudiantes: La clase magistral, aún siendo participativa, rara vez promueve el diálogo entre iguales, lo que puede limitar el desarrollo de habilidades comunicativas y metacognitivas que son esenciales para la comprensión profunda de ideas abstractas como la continuidad, la integrabilidad o el área neta bajo una curva (Gillies, 2004).
- Dificultad para atender a la diversidad: La estructura expositiva puede no ajustarse a los distintos ritmos y estilos de aprendizaje presentes en el aula. Al alumnado con dificultades para seguir explicaciones teóricas, simbólicas o procedimentales puede resultarle más difícil conectar con el significado del cálculo integral, mientras que

nosotros como docentes tampoco podemos desperdiciar clases enteras para el beneficio de unos pocos e ignorando al resto (Moreno et al., 2008).

- Riesgo de aprendizaje superficial: Si se centra exclusivamente en la repetición de procedimientos y algoritmos de integración como suele ser habitual y no damos con suficiente profundidad el sentido de la integral, la clase magistral puede fomentar sólo la visión instrumental del cálculo integral, en lugar de una comprensión conceptual del mismo (Tall, 1992; Batanero & Díaz, 2010).

Podemos resumir estos puntos diciendo que la clase magistral continúa siendo una metodología sólida y eficaz para la enseñanza del cálculo integral en Bachillerato, especialmente cuando se orienta hacia la participación activa del alumnado, debido a su capacidad para presentar de forma clara y ordenada los conceptos teóricos, acompañada de ejemplos guiados y explicaciones detalladas, resulta especialmente valiosa en un bloque como el del cálculo integral, donde el dominio técnico y la habilidad procedimental son fundamentales. Además, como hemos dicho, la integración de recursos visuales y tecnológicos puede aumentar significativamente su potencial didáctico, facilitando la comprensión de ideas complejas como la noción de área bajo la curva o la interpretación geométrica de la integral. Opino, por tanto, que lejos de ser una metodología obsoleta, la clase magistral bien diseñada y actualizada puede, sin problema, otorgar una enseñanza rigurosa y eficiente en esta parte de las matemáticas, especialmente cuando se complementa con prácticas que fomenten la reflexión y la conexión con otros enfoques pedagógicos.

Análisis del Aprendizaje Basado en Problemas en la parte de Cálculo Integral en Matemáticas de Bachillerato

En el contexto del cálculo integral en Bachillerato, el ABP permite al alumnado conectar los conceptos abstractos con aplicaciones prácticas, fomentar la autonomía en el aprendizaje y desarrollar habilidades de razonamiento matemático más allá del simple procedimiento algorítmico, además que la repetición de algoritmos también funciona como un método para interiorizarlos. Es por ello que el ABP de nuevo resulta ser una herramienta muy interesante a la hora de enfrentarse al cálculo integral.

Veamos el por qué:

- Favorece una comprensión profunda del sentido de área bajo la curva y los algoritmos de integración: El ABP permite al alumnado enfrentarse a situaciones reales o contextualizadas en la vida real (como el cálculo de áreas bajo curvas o el análisis de crecimiento de poblaciones) en las que la integral tiene una función explícita y deben calcularla mediante las integrales inmediatas o aplicando los algoritmos de integración pertinentes. Esto conecta los conceptos formales con situaciones de la vida real, reforzando la comprensión (Hmelo-Silver, 2004; Caprara & Campione, 2017).

- Incrementa la motivación y el compromiso de los alumnos: Resolver problemas auténticos y basados en la vida real mejora la percepción de utilidad del cálculo integral, la motivación y despierta el interés del alumnado, lo que puede ser especialmente valioso en etapas como Bachillerato, donde se observa una disminución del interés por las matemáticas en algunos estudiantes (Moreno et al., 2008; López-Catalán & Rodríguez-Gómez, 2016).
- Fomenta la autonomía y la metacognición: Los estudiantes deben tomar decisiones sobre cómo abordar el problema, planificar y evaluar las distintas estrategias y algoritmos de integración, y justificar sus respuestas, lo que fortalece procesos autorregulados y metacognitivos (Artigue, 2002; Dolmans et al., 2016).
- Favorece también el desarrollo de habilidades clave del currículo del siglo XXI: Además del conocimiento matemático, el ABP promueve la colaboración entre el grupo, el pensamiento crítico, la resolución de problemas no rutinarios y la toma de decisiones basadas en evidencia, competencias fundamentales para el entorno académico y profesional actual (OECD, 2018).

El empleo de esta metodología conlleva también las siguientes dificultades:

- Alta demanda en la preparación docente y al diseñar los problemas: El diseño de problemas que sean realistas, motivadores, sigan una escala gradual y estén ajustados a los objetivos del currículo de cálculo integral requiere tiempo, esfuerzo, creatividad y experiencia, sobre todo si queremos ser originales y no repetir el mismo tipo de ejercicio siempre. Además, el docente debe adoptar un rol de guía más que de transmisor, lo que puede suponer una barrera para quienes no han recibido formación específica en metodologías activas (Kirschner, Sweller & Clark, 2006; García-Peñalvo et al., 2018).
- Desigual participación del alumnado: La dinámica de trabajo en grupo, especialmente en la resolución de integrales complicadas o que requieran el uso de más de un algoritmo de integración puede derivar en que algunos alumnos asuman un papel pasivo si no se establecen mecanismos de responsabilidad individual clara. Esto afecta al aprendizaje equitativo si no somos capaces de regularlo adecuadamente (Slavin, 1996; Prince, 2004).
- La evaluación puede ser compleja: La valoración de lo aprendido en contextos ABP exige instrumentos que consideren tanto el proceso como el producto (rúbricas, diarios de aprendizaje, coevaluaciones), lo que puede generar inseguridad o dudas sobre la objetividad de la calificación en los alumnos. Particularmente, en el estudio del cálculo integral, es necesario asegurarnos de que todo el grupo ha comprendido los procedimientos de integración, la razón de por qué se emplea ese algoritmo… (López-Catalán & Rodríguez-Gómez, 2016).
- Riesgo de fragmentación conceptual: Si no se asegura una sistematización posterior a la resolución de los problemas y nos centramos sólo en el trabajo en el cálculo de primitivas, algunos alumnos pueden no interiorizar los aspectos más formales del cálculo integral, como

las condiciones de integrabilidad de una función, la regla de Barrow, área entre dos curvas en el tercer y cuarto cuadrante...

Podemos concluir entonces diciendo que el ABP, en el bloque de cálculo integral, ofrece una oportunidad para transformar la experiencia del alumnado más allá de la simple mecanización de técnicas de integración, aunque esta siga teniendo mucha relevancia en este bloque. Al situar la integral definida o la noción de área bajo la curva en contextos reales —como la interpretación de velocidades variables, acumulación de recursos o fenómenos físicos—, los estudiantes no solo comprenden el procedimiento, sino también el sentido matemático y práctico del concepto. Esta metodología favorece una comprensión profunda y funcional del cálculo integral, promueve el trabajo colaborativo y desarrolla habilidades como la formulación de conjeturas, el análisis crítico de datos y soluciones o la toma de decisiones fundamentadas. Aunque ciertamente exige una cuidadosa planificación por parte del profesorado, el impacto positivo en la motivación y en el desarrollo competencial justifica plenamente su incorporación como estrategia clave en la enseñanza del análisis matemático en Bachillerato.

Situación de aprendizaje acerca del cálculo integral basada en el ABP

Título: “¿Cuánto contaminamos? Un estudio real con integrales”

Etapa: Bachillerato

Curso: 2.º

Materia: Matemáticas II / Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Duración estimada: 7-8 sesiones

1. Contextualización y justificación didáctica

Esta situación se inserta en el bloque de cálculo integral y está diseñada mediante la metodología ABP (Aprendizaje Basado en Problemas). El alumnado deberá resolver un problema real contextualizado en el estudio del impacto ambiental de los gases contaminantes, usando herramientas del cálculo integral para estimar cantidades acumuladas.

El ABP permite al alumnado enfrentarse a situaciones complejas en las que la integral tiene un papel funcional explícito, como el análisis de flujos de CO_2 o consumo energético. Esto promueve la comprensión profunda de los algoritmos de integración y su sentido, estimula la motivación y fomenta la autonomía y la metacognición, tal como sostienen autores como Hmelo-Silver (2004), Artigue (2002) y Dolmans et al. (2016). Asimismo, contribuye al desarrollo de competencias clave del siglo XXI como la resolución de problemas, la colaboración y la toma de decisiones fundamentadas (OECD, 2018).

2. Competencias específicas trabajadas (según currículo LOMLOE)

- CE1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana aplicando distintas estrategias. (STEM1, STEM2, CCL3, CP3)
- CE2. Verificar la validez de soluciones mediante el razonamiento y la argumentación. (STEM2, CCL1, CCL2, CPSAA4)
- CE3. Formular o investigar conjeturas utilizando la creatividad y herramientas tecnológicas. (STEM3, CD1, CD2, CPSAA1.2)
- CE5. Establecer conexiones entre ideas matemáticas. (STEM5, CC2, CC3)
- CE6. Descubrir vínculos de las Matemáticas con otras áreas. (CC3, CE3, CCEC4.2)
- CE7. Representar conceptos y procedimientos con diferentes tecnologías. (CD3, CD5, CCEC1)
- CE8. Comunicar ideas matemáticas de forma rigurosa. (CCL1, CCL2, CCEC3.2)
- CE9. Utilizar destrezas personales y sociales en el trabajo colaborativo y el afrontamiento de retos. (CPSAA1.1, CPSAA3.1, CPSAA5)

3. Criterios de evaluación

- 1.3. Aplicar integrales definidas a la resolución de problemas reales, argumentando el proceso seguido.
- 2.2. Usar correctamente métodos de integración como cambio de variable, integración por partes o fraccionamiento.
- 3.1. Interpretar geométrica y físicamente la integral como área bajo una curva.
- 4.1. Trabajar en equipo, asumir roles y tomar decisiones razonadas durante el proceso de resolución.
- 5.2. Mostrar autonomía, perseverancia y pensamiento crítico al afrontar el problema.

4. Saberes básicos trabajados

- Interpretación geométrica y física de la integral definida.
- Métodos de integración: por partes, sustitución, fracciones simples.
- Cálculo de áreas bajo curvas y entre funciones.
- Modelización de situaciones reales mediante funciones continuas.

- Herramientas digitales de cálculo simbólico y representación gráfica.
- Trabajo cooperativo, metacognición y argumentación matemática.

5. Descripción de la tarea

Título de la tarea: "¿Cuánto CO_2 genera nuestra ciudad en una semana?"

Planteamiento del problema:

El alumnado recibe el encargo de un organismo ambiental ficticio: estimar la cantidad total de CO_2 emitido por vehículos en una ciudad, a partir de una función que modela la tasa de emisión horaria en función del tiempo.

Los alumnos deberán:

- Interpretar los datos y el contexto.
- Representar gráficamente la función dada.
- Aplicar distintos métodos de integración para calcular el área bajo la curva (integral definida).
- Comparar resultados, validar procedimientos y redactar un informe técnico con sus conclusiones.

Ejemplo:

- *Si la tasa de emisión de CO_2 está dada por $E(t) = 100 + 50sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ en $t \in [0,24]$, ¿cuál es la cantidad total emitida en un día?*
- *Interpreta el significado geométrico del valor de la integral en este contexto.*

6. Fases de desarrollo

Fase 1 – Presentación del problema (1 sesión)

Se presenta una noticia real sobre contaminación y se plantea la pregunta:

"¿Cómo podemos estimar la contaminación total diaria a partir de una función que nos da la tasa de emisión?"

El docente guía una reflexión inicial y plantea el problema general.

Fase 2 – Investigación y formulación de estrategias (2 sesiones)

En grupos cooperativos, los estudiantes:

Analizan el contexto y seleccionan la función horaria de emisión (p.ej. $E(t) = 100 + 50sen(\pi t/12)$ con t en [0,24]).

Proponen métodos de integración (directa, por partes, cambio de variable).

Usan Geogebra o calculadoras gráficas para visualizar y validar resultados.

Fase 3 – Resolución técnica (2 sesiones)

Cada grupo calcula la cantidad total de CO_2 emitido, probando diferentes algoritmos de integración.

Se discuten diferencias entre métodos, se justifica la elección de cada uno y se corrigen posibles errores conceptuales.

Fase 4 – Síntesis y comunicación (1-2 sesiones)

Los grupos redactan y presentan un informe final con los siguientes apartados:

- Contexto del problema.
- Desarrollo matemático y procedimientos.
- Interpretación del resultado.
- Propuestas de mejora medioambiental (opcional).

Se organiza una presentación oral o visual (carteles, presentaciones, vídeos) para compartir sus hallazgos.

7. Evaluación

Instrumento	**Indicadores**
Rúbrica de resolución	Uso adecuado de los algoritmos, justificación, corrección formal.
Diario de aprendizaje	Reflexión metacognitiva sobre el proceso, obstáculos y decisiones tomadas.
Coevaluación grupal	Participación, colaboración, responsabilidad individual.
Informe final	Claridad expositiva, interpretación contextual, exactitud de cálculos.
Prueba escrita posterior	Comprensión conceptual del cálculo integral y su aplicación.

8. Atención a la diversidad y medidas inclusivas

- Roles diferenciados dentro de los grupos según fortalezas individuales.
- Andamiajes progresivos con ejemplos resueltos y plantillas guiadas.
- Actividades de refuerzo para estudiantes con dificultades (resolución de integrales paso a paso).

- Extensiones opcionales para profundizar (por ejemplo, modelizar emisiones semanales, uso de funciones a trozos).
- Apoyo visual y contextual para facilitar la comprensión.

9. Uso de herramientas digitales

- Geogebra / Desmos: para representar gráficamente las funciones y validar resultados.
- Calculadoras científicas con CAS (*Computer Algebra System*): para la comprobación de integrales simbólicas.
- Docs/Slides colaborativos: redacción del informe y preparación de la presentación.
- Plataformas educativas: para autoevaluación y coevaluación mediante rúbricas digitales.

10. Aprovechamiento de puntos fuertes del ABP

- ✓ Comprensión profunda: el alumnado entiende el significado de la integral como cantidad acumulada.
- ✓ Motivación e interés: al partir de un problema real con relevancia social.
- ✓ Conexión con la realidad: contextualización clara del concepto de integral.
- ✓ Autonomía y metacognición: los estudiantes deciden estrategias, validan resultados y reflexionan sobre el proceso.
- ✓ Desarrollo competencial: se trabajan comunicación, colaboración, pensamiento crítico y resolución de problemas.

Análisis del Aprendizaje Cooperativo en la parte de Cálculo Integral en Matemáticas de Bachillerato

Como hemos dicho anteriormente, el aprendizaje cooperativo es una metodología activa que organiza al alumnado en pequeños grupos heterogéneos, donde cada grupo trabaja conjuntamente para alcanzar metas comunes y se asume responsabilidad individual dentro del grupo. Aplicado a la enseñanza del cálculo integral en Bachillerato, este enfoque permite abordar tanto conceptos procedimentales, como los algoritmos de integración, como conceptos más abstractos como la integral definida, el área bajo la curva o la regla de Barrow desde una perspectiva compartida y comunicativa. Por tanto, es pertinente realizarnos la pregunta ¿qué puntos fuertes del Aprendizaje Cooperativo pueden hacer que elijamos este método al impartir cálculo integral, y que debilidades de esta metodología pueden hacer que la desechemos?

Veamos los puntos fuertes de este método contextualizado en la parte de cálculo integral:

- Mejora de la comprensión conceptual de la integral: La interacción entre estudiantes favorece la construcción colectiva del conocimiento. Contextualizado a la parte de integrales, al discutir cómo interpretar el área bajo una función negativa o analizar diferentes estrategias para resolver una integral definida, se potencia la comprensión conceptual y se pueden reducir errores de mecanización. (Slavin, 1996; Johnson & Johnson, 1999).
- Desarrollo de habilidades metacognitivas y comunicativas: De forma similar que el ABP, el hecho de tener que explicar los procedimientos, justificar pasos, como cambios de variable o la elección de un cierto algoritmo para resolver una integral, y argumentar resultados en voz alta ante sus compañeros, los estudiantes consolidan tanto el lenguaje técnico del análisis matemático como sus capacidades de comunicación y de autorregulación (Artigue, 2002; Gillies, 2004).
- Inclusión y motivación del grupo: Los grupos heterogéneos permiten que estudiantes con diferentes niveles de competencia matemática colaboren de manera equilibrada, creando un entorno donde los alumnos con más dificultades encuentran apoyo y los más avanzados refuerzan su aprendizaje al explicar a otros (Johnson et al., 1999). Esto puede interesarnos a la hora del cálculo de primitivas especialmente ya que muchas de ellas pueden realizarse con más de un procedimiento, y el alumno puede escoger cuál le resulta más sencilla.
- Potenciación del aprendizaje activo: El cálculo integral, cuando se aborda con tareas abiertas o problemas contextualizados (por ejemplo, análisis del crecimiento poblacional o cálculos de áreas de parcelas), se beneficia del trabajo cooperativo al fomentar la exploración de diferentes vías de resolución y el aprendizaje entre iguales (Cañadas et al., 2020).

Sin embargo, como podemos imaginar, este método tampoco está exento de dificultades a la hora de su aplicación, entre las que podemos destacar:

- Requiere una amplia preparación y formación docente específica: La implementación efectiva del aprendizaje cooperativo exige que el profesorado conozca técnicas de gestión de grupos, diseño de tareas cooperativas y evaluación formativa. Sin una correcta planificación, los objetivos pueden diluirse (Gillies, 2004; Johnson & Johnson, 2008).
- Existe riesgo de desequilibrio en la participación: Según Johnson y Johnson (1999), la falta de responsabilidad individual en grupos cooperativos puede llevar a una "pereza social", donde algunos miembros del grupo dependen excesivamente de otros para completar las tareas, lo que puede afectar negativamente tanto al aprendizaje individual como al rendimiento del grupo en su conjunto.

  Además, un estudio de Yadeta (2020) en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Bule Hora identificó que la participación desigual en el trabajo en grupo era un problema común, lo que motivó la implementación de estrategias para mejorar la equidad en la participación, por lo tanto, si no se definen claramente los roles o las responsabilidades individuales, algunos estudiantes pueden mermar su participación mientras otros asumen la mayor carga de trabajo. Esto es especialmente crítico en temas como la resolución de integrales, donde el dominio técnico puede estar muy repartido, los alumnos más aventajados pueden realizar todo el trabajo sin que los alumnos con un nivel más bajo participen, derivando esto en la siguiente dificultad.

- Asimetría en el dominio de los procedimientos técnicos: El cálculo integral implica, para los alumnos, un alto grado de precisión en el manejo de técnicas como el cambio de variable, la integración por partes o la interpretación gráfica del área bajo la curva. Estas habilidades requieren una base sólida de conocimientos previos, por lo que algunos estudiantes pueden quedar rezagados si no dominan el álgebra, el análisis funcional o las derivadas, y permiten que los alumnos más aventajados realicen todo el trabajo. En un entorno cooperativo, esto puede generar frustración o dependencia excesiva de los miembros más fuertes del grupo. En este sentido, Kovács-Kószó, Czakó y Kosztolányi (2024) muestran que las actividades cooperativas asimétricas, como la técnica *Sage and Scribe*, pueden mitigar en parte esta desigualdad, aunque también advierten que una gran brecha en los conocimientos previos puede limitar los beneficios del trabajo en pareja en tareas de alta carga cognitiva.

- Puede resultarnos complejo adaptar problemas cooperativos que respeten la progresión didáctica del cálculo integral: Diseñar tareas adecuadas y que resulten motivadoras para el trabajo en grupo en este bloque no es trivial. Requiere problemas ricos que fomenten la interacción sin perder el rigor matemático. Si la actividad es demasiado sencilla, el aprendizaje se vuelve superficial; si es demasiado exigente, puede bloquear al grupo y desmotivar.
- Poca adecuación para introducir por primera vez ciertos contenidos técnicos: Conceptos como el la regla de Barrow, las integrales impropias o las técnicas avanzadas suelen requerir una exposición estructurada inicial, algo que es complejo en esta metodología, pues el aprendizaje cooperativo es más eficaz cuando los alumnos ya han tenido un primer contacto y necesitan consolidar o aplicar lo aprendido (Prince, 2004).
- Dificultades de evaluación individual: Evaluar el aprendizaje individual dentro de una dinámica grupal puede ser complejo, especialmente cuando se trabaja con tareas abiertas o proyectos. Es necesario complementar con observación directa, rúbricas o pruebas individuales para garantizar una evaluación justa.

Resumiendo, aunque el aprendizaje cooperativo ofrece importantes beneficios en términos de participación activa, desarrollo del lenguaje matemático y fomento de habilidades sociales, su aplicación en el bloque de cálculo integral en Bachillerato presenta ciertas limitaciones que no deben pasarse por alto. La elevada carga técnica del contenido, la necesidad de precisión operativa y la complejidad conceptual de algunas nociones —como la interpretación formal de la integral definida o la conexión entre derivación e integración— hacen que este enfoque no siempre resulte el más eficiente para introducir o desarrollar con profundidad los conceptos clave del bloque.

Además, el tiempo adicional requerido para el trabajo grupal, la posible desigualdad en la participación y el riesgo de consolidación de errores en ausencia de una guía docente constante, limitan su eficacia en entornos con presión curricular, como es el caso del segundo curso de Bachillerato.

Por ello, aunque el aprendizaje cooperativo puede desempeñar un papel positivo como estrategia de consolidación o refuerzo en ciertas fases del proceso, opino que su uso debería ser complementario a metodologías más directas y estructuradas, como la clase magistral-participativa o el Aprendizaje Basado en Problemas, metodologías que permiten una introducción más rigurosa y progresiva de los conceptos del cálculo integral.

Situación de aprendizaje acerca del cálculo integral basada en el Aprendizaje cooperativo

<u>Título</u>: “El río, la presa y la curva: cooperando para calcular áreas”

<u>Etapa</u>: Bachillerato

<u>Curso</u>: 2.º

<u>Materia</u>: Matemáticas II / Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

<u>Duración estimada</u>: 6-7 sesiones

<u>1. Contextualización y justificación didáctica</u>

Esta situación pertenece al bloque de cálculo integral y se aborda a través de la metodología del Aprendizaje Cooperativo, con el objetivo de consolidar conceptos clave como la integral definida, el cálculo de áreas bajo la curva y la interpretación geométrica y contextual del resultado.

La tarea parte de un contexto realista relacionado con el control de caudal en un río y la acumulación de agua en una presa, lo que permite dar sentido a la integral como cantidad acumulada. En grupos heterogéneos, los estudiantes deben aplicar distintas técnicas de integración, interpretar resultados y defender sus decisiones mediante el diálogo matemático.

El trabajo cooperativo potencia la comprensión conceptual, la argumentación matemática, la metacognición y la interacción social, tal como han puesto de relieve autores como Johnson & Johnson (1999), Slavin (1996) o Gillies (2004). Esta metodología resulta especialmente eficaz para reforzar y afianzar aprendizajes técnicos ya introducidos, fomentando la autonomía, la responsabilidad compartida y la inclusión en el aula.

<u>2. Competencias específicas trabajadas (según currículo LOMLOE)</u>

- CE1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y del ámbito científico. (STEM1, STEM2, CP3, CCL3)
- CE2. Verificar la validez de soluciones mediante el razonamiento. (STEM2, CCL1, CPSAA4)
- CE3. Formular o investigar conjeturas en grupo. (STEM3, CD1, CPSAA1.2, CCEC4.2)
- CE5. Conectar conceptos y modelos matemáticos. (STEM5, CC2, CC3)
- CE6. Establecer conexiones con otras áreas del conocimiento, especialmente Física. (CC3, CE3, CCEC4.2)
- CE7. Representar procesos de integración y áreas bajo curvas usando tecnologías. (CD3, CD5, CCEC1)
- CE8. Comunicar el razonamiento en la resolución de problemas en equipos. (CCL1, CCL2, CCEC3.2, CCEC4.1)
- CE9. Colaborar y gestionar emociones en entornos cooperativos. (CPSAA1.1, CPSAA3.1, CPSAA5)

3. Criterios de evaluación

1.2. Resolver integrales definidas y justificar la adecuación del método usado.

2.3. Analizar el significado geométrico de la integral en contextos de acumulación.

3.1. Argumentar y defender en grupo las decisiones tomadas durante la resolución.

4.2. Cooperar activamente en la elaboración de la solución y del producto final.

5.1. Reflexionar sobre los errores y estrategias utilizadas a lo largo de la actividad.

4. Saberes básicos trabajados

- Interpretación geométrica y física de la integral.
- Técnicas de integración: cambio de variable, partes, fracciones simples.
- Cálculo de áreas bajo funciones o entre curvas.
- Trabajo en equipo: roles cooperativos, toma de decisiones, comunicación.
- Justificación de procedimientos matemáticos.
- Uso de herramientas digitales: GeoGebra, CAS, procesadores colaborativos.

5. Descripción de la tarea

Título de la tarea: “¿Cuánta agua podemos acumular en la presa?”

Planteamiento del problema:

A cada grupo se le entrega una función que modela el caudal de entrada (litros/segundo) a una presa durante un día. Deben calcular el volumen total acumulado mediante integración, comparar resultados con otros grupos (diferentes funciones), justificar los métodos utilizados y presentar recomendaciones técnicas.

Cada grupo debe:

- Interpretar la función dada (ej. $f(t) = 300 + 50 \cdot cos(\frac{\pi t}{12})$, con $t \in [0,24]$)
- Representar la función y discutir su significado.
- Aplicar integrales definidas para calcular el volumen acumulado de agua.
- Justificar los métodos empleados y reflexionar sobre las ventajas de cada uno.
- Presentar sus resultados de forma cooperativa, razonada y visual.

Ejemplos:

- *¿qué volumen total de agua entra en la presa durante ese día?*
- *¿Cómo cambia el volumen acumulado si el caudal máximo se reduce en 20 %?*
- *Representa gráficamente la función y discute el significado físico de sus puntos máximos y mínimos.*

<u>6. Fases de desarrollo</u>

Fase 1 – Activación y organización de grupos (1 sesión)

Breve introducción sobre el control de caudales en presas.

Formación de grupos heterogéneos con roles asignados: portavoz, calculista, organizador y verificador.

Reparto de funciones matemáticas diferentes entre grupos.

Fase 2 – Análisis y representación (1-2 sesiones)

Cada grupo analiza su función: dominio, comportamiento, significado.

Representación gráfica en GeoGebra.

Discusión en grupo sobre el comportamiento del caudal y elección del método de integración.

Fase 3 – Cálculo cooperativo (2 sesiones)

Aplicación del algoritmo de integración más adecuado.

Reparto de subtareas: unos integran, otros comprueban o justifican decisiones.

Comparación y debate de resultados dentro del grupo y entre grupos.

Fase 4 – Síntesis y exposición (1-2 sesiones)

Elaboración cooperativa de un informe y una presentación visual.

Exposición de resultados: cálculo del volumen acumulado, interpretación y posibles mejoras técnicas.

Revisión colectiva de aprendizajes y sistematización guiada por el docente.

7. Evaluación

Instrumento	**Indicadores Clave**
Observación sistemática	Participación equitativa, respeto de roles, argumentación y escucha activa.
Rúbrica de resolución	Corrección del cálculo, uso adecuado del algoritmo, interpretación del resultado.
Diario cooperativo	Reflexión grupal sobre dificultades, acuerdos, mejora del trabajo en equipo.
Presentación final	Claridad, adecuación matemática, reparto de intervención y visualización.
Prueba individual final	Dominio conceptual y técnico de las integrales definidas y sus aplicaciones.

8. Atención a la diversidad y medidas inclusivas

- Grupos heterogéneos con roles adaptados a los perfiles del alumnado.
- Apoyos visuales y plantillas para estructurar los procedimientos.
- Andamiaje mediante ejemplos similares resueltos.
- Actividades paralelas de refuerzo o extensión según nivel del estudiante.
- Uso de tecnologías accesibles para mejorar la participación y comprensión.

9. Uso de herramientas digitales

- GeoGebra: para graficar funciones y validar resultados.
- Calculadoras científicas con CAS (*Computer Algebra System*): apoyo técnico en integración simbólica.
- Docs o Presentaciones colaborativas: redacción de informe y preparación de exposición.
- Kahoot o Formularios: evaluación rápida de conceptos clave al final.

10. Aprovechamiento de puntos fuertes del Aprendizaje Cooperativo

✓ Mejora de la comprensión conceptual a través del diálogo y la explicación entre iguales.
✓ Desarrollo del lenguaje matemático y las habilidades comunicativas.

- ✓ Inclusión de todo el alumnado mediante roles adaptados y apoyo entre compañeros.
- ✓ Refuerzo de procedimientos técnicos mediante el trabajo conjunto.
- ✓ Aprendizaje activo y significativo contextualizado en una situación real.

Análisis del Aprendizaje por Descubrimiento en la parte de Cálculo Integral en Matemáticas de Bachillerato

Basado en los trabajos de Bruner (1960) y en las teorías del constructivismo cognitivo, recordemos que este enfoque plantea que los estudiantes comprenden mejor los conceptos cuando los descubren por sí mismos, en lugar de recibirlos de forma directa. Por tanto, es plausible que podamos cuestionarnos si este tipo de metodología puede ser eficaz a la hora de impartir el cálculo integral.

Consideremos primero las fortalezas de este tipo de métodos en el cálculo integral:

- Comprensión conceptual duradera: El descubrimiento guiado permite que el alumnado construya significados y comprenda los conceptos de la integral desde la experiencia. Esto resulta especialmente útil en temas como el cálculo de áreas, donde pueden visualizar cómo se aproxima el área bajo una curva mediante sumas de Riemann o métodos gráficos antes de formalizar el concepto de integral definida (Batanero et al., 2011).

- Fomento del pensamiento crítico y analítico: La metodología exige que el estudiante formule conjeturas, observe regularidades y establezca relaciones, por ejemplo, al explorar experimentalmente la conexión entre una función y su función primitiva mediante software como GeoGebra, herramientas muy útiles para la comprensión de este tipo de conceptos (Artigue, 2002; Loibl, Roll & Rummel, 2017). Esto puede hacer, además, que alumnos con fallos conceptuales de base comprendan sus errores de conceptos y los rectifiquen.
- Potencial de motivación: Al implicar activamente a los estudiantes en la construcción del conocimiento, puede aumentar su interés y compromiso, sobre todo si se utilizan recursos visuales o dinámicos, como applets interactivos que representen áreas y funciones y su primitiva. Además, es posible que este interés les haga buscar relación del cálculo integral con otros bloques de la materia como la geometría, ampliando así su conocimiento y razonamiento matemático.

Veamos ahora que problemas podríamos enfrentar al momento de aplicar esta metodología:

- Una exigencia cognitiva elevada y requiere una buena motivación inicial: El cálculo integral implica una fuerte carga abstracta y simbólica, además de que es un concepto novedoso para el alumnado, lo que puede dificultar el descubrimiento sin una base previa sólida y si hay falta de motivación para su investigación. Más concretamente, alumnos sin buenos fundamentos en álgebra o funciones pueden frustrarse al intentar deducir propiedades de la integral, fórmulas clave o cambios de variables, algo que generalmente disminuye el interés y (Kirschner, Sweller & Clark, 2006).
- Riesgo de descubrimientos incompletos o erróneos: Sin una adecuada intervención del docente, y al tratarse de un contenido ciertamente novedoso para ellos, es posible que los estudiantes lleguen a conclusiones intuitivas pero incorrectas, especialmente en temas como el cambio de variable o integración de funciones racionales, que requieren precisión y rigor.
- Ineficiencia temporal: Este enfoque, al ser más lento y requerir más trabajo por parte del docente, puede ser poco práctico en contextos de alta presión curricular como el segundo curso de Bachillerato, donde los tiempos son ajustados y los contenidos exigentes.
- Desigualdad en el aprendizaje: Los estudiantes con mayor autonomía o capacidad matemática tienden a beneficiarse más del descubrimiento, mientras que otros pueden quedarse atrás si no se ofrecen suficientes apoyos o andamiajes (Mayer, 2004). Además, alumnos con fallos de base en otros bloques pueden arrastrar estos errores y no establecer las relaciones matemáticas del cálculo integral con otras disciplinas matemáticas.

Aunque el aprendizaje por descubrimiento presenta beneficios en cuanto a la comprensión profunda y el desarrollo del pensamiento crítico, su aplicación directa y exclusiva en el bloque de cálculo integral en Bachillerato no resulta, en mi opinión en base a lo expuesto anteriormente, del todo adecuada. La alta carga abstracta, simbólica y procedimental de este contenido requiere una base teórica sólida que difícilmente puede construirse únicamente mediante exploración autónoma o guiada. Además, el tiempo limitado en esta etapa educativa y la presión de las evaluaciones externas (como la EBAU) hacen que esta metodología pueda ser ineficiente o incluso contraproducente si no se combina con enfoques más directos y estructurados, en los que el tratamiento del cálculo integral puede hacerse de forma más rápida y eficiente.

No obstante, no me atrevería a descartar su uso parcial combinado con otras metodologías, pues el aprendizaje por descubrimiento podría emplearse como recurso complementario para introducir intuitivamente ciertos conceptos (como el área bajo una curva), pero no como estrategia principal para la enseñanza sistemática del cálculo integral. Para garantizar una progresión adecuada del aprendizaje y una comprensión rigurosa, es necesario integrar esta metodología con explicaciones magistrales, resoluciones guiadas de cálculo de primitivas y materiales visuales que estructuren el conocimiento con mayor claridad.

Situación de aprendizaje acerca del cálculo integral basada en el Aprendizaje por Descubrimiento

Título: “Descubriendo el área bajo la curva: ¿qué significa integrar?”

Etapa: Bachillerato

Curso: 2.º

Materia: Matemáticas II / Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Duración estimada: 5-6 sesiones

1. Contextualización y justificación didáctica

Esta situación de aprendizaje pretende introducir y explorar el concepto de integral definida como área bajo una curva mediante un proceso de descubrimiento guiado, siguiendo la filosofía de Bruner (1960) y las aportaciones del constructivismo.

Se parte de la representación gráfica de funciones y la construcción de sumas de áreas aproximadas con rectángulos (suma de Riemann), lo que permite al alumnado formular conjeturas, observar regularidades y establecer relaciones antes de formalizar la integral definida como límite. El uso de software interactivo como GeoGebra permite visualizar estos procesos y guiar el descubrimiento.

Esta metodología busca favorecer una comprensión conceptual profunda y duradera, facilitando la transferencia del conocimiento a nuevos contextos. No se trata de eliminar la explicación docente, sino de retrasarla estratégicamente, permitiendo que los estudiantes experimenten primero con las ideas clave. La intervención del profesor es esencial como andamiaje que estructura el proceso de descubrimiento (Wood, Bruner & Ross, 1976).

2. Competencias específicas trabajadas (según currículo LOMLOE)

- CE1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y del ámbito científico. (STEM1, STEM2, CP3, CCL3)
- CE2. Verificar la validez de soluciones mediante el razonamiento. (STEM2, CCL1, CPSAA4)
- CE3. Formular o investigar conjeturas en grupo. (STEM3, CD1, CPSAA1.2, CCEC4.2)
- CE5. Conectar conceptos y modelos matemáticos. (STEM5, CC2, CC3)
- CE6. Establecer conexiones con otras áreas del conocimiento, especialmente Física. (CC3, CE3, CCEC4.2)
- CE7. Representar procesos de integración y áreas bajo curvas usando tecnologías. (CD3, CD5, CCEC1)
- CE8. Comunicar el razonamiento en la resolución de problemas en equipos. (CCL1, CCL2, CCEC3.2, CCEC4.1)

- CE9. Colaborar y gestionar emociones en entornos cooperativos. (CPSAA1.1, CPSAA3.1, CPSAA5)

3. Criterios de evaluación

- 1.2. Interpretar el área bajo una curva como suma de áreas aproximadas y conectar con el concepto de integral definida.
- 2.1. Formular hipótesis sobre la relación entre número de subdivisiones y precisión en el cálculo de áreas.
- 3.2. Usar herramientas digitales para visualizar funciones y aproximaciones al área.
- 4.1. Argumentar con claridad las conclusiones alcanzadas a partir de la experimentación.
- 5.1. Mostrar iniciativa y autonomía en la exploración matemática.

4. Saberes básicos trabajados

- Significado geométrico de la integral definida.
- Aproximaciones al área mediante sumas de rectángulos (suma de Riemann).
- Representación gráfica de funciones y áreas.
- Uso de tecnología para explorar regularidades y formular conjeturas.
- Comunicación matemática: justificación de ideas y lenguaje técnico.

5. Descripción de la tarea

Título de la tarea: “¿Podemos medir el área bajo una curva sin fórmulas?”

Planteamiento del problema:

Se plantea a los estudiantes el reto de calcular el área que encierra una función como $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 2$, sin utilizar integrales ni fórmulas conocidas.

A través de manipulaciones gráficas con GeoGebra, tablas de valores, construcción de rectángulos, y análisis de tendencias, el alumnado debe:

- Proponer una forma de aproximar el área bajo la curva.
- Aplicar distintas particiones y observar cómo cambia la precisión.
- Identificar patrones y generalizaciones.
- Descubrir, con ayuda guiada, el significado de la integral definida como límite de sumas.
- Comparar sus resultados con la “fórmula mágica” del área obtenida al final.

6. Fases de desarrollo

Fase 1 – Activación del conocimiento previo y motivación (1 sesión)

- Se pregunta: “¿Cómo podrías medir el área bajo una curva que no es un polígono?”
- Se muestran ejemplos visuales de áreas curvilíneas.
- Cada grupo discute formas de aproximar el área y representa ideas en papel o GeoGebra.

Fase 2 – Descubrimiento guiado con tecnología (2 sesiones)

- Uso de GeoGebra para construir sumas de rectángulos (izquierda, derecha, media).
- Tabulación del número de rectángulos vs. área aproximada.
- Análisis de patrones y aproximaciones crecientes.
- Formulación de conjeturas sobre la convergencia del área.

Fase 3 – Sistematización conceptual (1-2 sesiones)

- Comparación entre distintas estrategias de aproximación.
- Introducción guiada del concepto de límite e integral definida como suma infinita.
- Presentación de los distintos algoritmos de integración.
- Resolución de problemas similares con otras funciones.

Fase 4 – Conclusión y reflexión (1 sesión)

- Cada grupo elabora una narrativa visual o presentación explicando cómo descubrieron el concepto de integral.
- Se realiza una puesta en común y sistematización formal con el docente.
- Evaluación final con rúbrica + reflexión individual escrita sobre lo aprendido.

7. Evaluación

Instrumento	**Indicadores Clave**
Observación directa	Participación activa en las exploraciones, formulación de preguntas y conjeturas.
Diario de aprendizaje	Proceso seguido por cada alumno: dudas, hallazgos, momentos clave.
Rúbrica de presentación	Claridad en la explicación del proceso de descubrimiento, uso correcto de lenguaje.
Cuaderno de descubrimiento	Representaciones, tablas, gráficas y esquemas realizados durante la exploración.
Prueba final de conexión	Actividades de aplicación del concepto de integral definida en contextos nuevos.

8. Atención a la diversidad y medidas inclusivas

- Andamiaje progresivo: desde tareas intuitivas hasta formalizaciones.
- Apoyos visuales y ejemplos manipulativos.
- Adaptación de funciones más simples para alumnado con dificultades.
- Uso de recursos digitales accesibles y cooperativos (GeoGebra, presentaciones).
- Posibilidad de trabajo individual, por parejas o en grupos según necesidades.

9. Uso de herramientas digitales

- GeoGebra: para construir visualizaciones dinámicas y sumas de Riemann.
- YouTube / Plataformas de vídeo (vídeos seleccionados): apoyo para consolidar ideas.
- Cuaderno digital compartido: para registrar avances, dudas y reflexiones.
- Formularios o tests digitales: para comprobar comprensión conceptual posterior.

10. Aprovechamiento de puntos fuertes del Aprendizaje por Descubrimiento

✓ Comprensión conceptual: el alumnado construye por sí mismo el concepto de integral como área bajo la curva.
✓ Interés y motivación: el uso de herramientas dinámicas y retos intuitivos mantiene el compromiso.
✓ Pensamiento crítico: fomenta la formulación de conjeturas, validación y generalización.
✓ Transferencia del conocimiento: el alumno comprende qué significa integrar y puede aplicarlo con sentido.

Comparativa entre metodologías en la enseñanza de la Probabilidad y Estadística en Bachillerato

La enseñanza de la probabilidad en Bachillerato, tal como establecen los currículos actuales (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022) para la asignatura de Matemáticas, es base en el desarrollo de la competencia matemática y científica del alumnado. En este bloque de la asignatura proporciona competencias que no solo permiten interpretar y gestionar situaciones de incertidumbre en contextos reales, sino que también potencia el razonamiento estadístico y estocástico, la toma de decisiones informadas y el pensamiento crítico.

No obstante, su tratamiento en el aula puede presentarnos numerosos desafíos, pues a menudo se detectan dificultades conceptuales persistentes, enfoques que son excesivamente procedimentales, y una desconexión con situaciones prácticas. Es en este contexto en el que la elección de metodologías didácticas adecuadas es clave para favorecer una comprensión profunda y significativa de los conceptos probabilísticos, por lo que es lógico que nos hagamos la pregunta siguiente: ¿Cuál o cuáles de nuestras 4 metodologías, dependiendo de nuestros intereses y forma de impartir el bloque de Probabilidad y Estadística debemos adoptar?

Análisis de la Clase Magistral en la parte de Probabilidad y Estadística en Matemáticas de Bachillerato

La clase magistral, lejos de ser un recurso exclusivamente expositivo y unidireccional como mucha gente cree hoy en día, puede transformarse en una herramienta eficaz si se aplica de forma participativa e interactiva. En el bloque de probabilidad, donde coexisten conceptos formales a los cuales subyace una fuerte carga intuitiva, no adelantamos trabajo diciendo que este tipo de metodología puede resultar ciertamente útil si el docente se convierte en mediador del aprendizaje, promoviendo la comprensión significativa (Ausubel, 1976) y el diálogo matemático en el aula.

Entre los puntos fuertes de esta metodología, podemos destacar los siguientes:

- Claridad y estructuración del contenido: La clase magistral nos permite, como docentes, presentar de forma ordenada y coherente conceptos abstractos como el espacio muestral, la probabilidad condicional o el teorema de Bayes, que requieren una formalización rigurosa con la cual el estudiante medio puede no estar acostumbrado. Esta estructura facilita la organización y estructuración mental de los contenidos al alumnado, especialmente si se acompaña de dibujos o representaciones gráficas, esquemas, ejemplos variados.

- Control del ritmo y adaptación al grupo: Como docentes, podemos modular la explicación en función de las necesidades reales del grupo, deteniéndose en los puntos más complejos y atendiendo a dudas colectivas, adaptándonos en ese momento a las necesidades de la clase. Esta flexibilidad nos permite un mejor acompañamiento del alumnado y un desarrollo más fluido de las clases.
- Refuerzo del lenguaje matemático y argumentación: A través de preguntas dirigidas y discusiones breves durante la explicación o la realización de ejercicios, podremos fomentar la precisión en el uso del lenguaje probabilístico, la justificación de procedimientos, y el pensamiento probabilístico, desarrollando competencias clave del currículo.
- Integración de herramientas tecnológicas y visuales: La clase magistral actual puede enriquecerse significativamente mediante el uso de recursos tecnológicos que hagan visible lo abstracto y favorezcan la comprensión conceptual. En el bloque de probabilidad y estadística, los conceptos como la frecuencia relativa, la ley de los grandes números, o la independencia de sucesos pueden resultar inicialmente abstractos para el alumnado, por lo que la representación, mediante simulaciones digitales interactivas de varios ejemplos distintos, nos permite representar visualmente estos fenómenos de manera dinámica y manipulable. Por ejemplo, páginas como Geogebra permiten diseñar simulaciones de lanzamientos de monedas, dados o urnas, etcétera.

No obstante, como todos sabemos, la clase magistral también acarrea algunas limitaciones/problemas, mayormente conocidos:

- Riesgo de que el alumno se vuelva un receptor pasivo: Si no promovemos la participación activa y el preguntar dudas, el alumno puede adoptar un rol meramente receptivo (o ni siquiera receptivo), lo que limita la comprensión profunda y la transferencia del conocimiento (Prince, 2004). Esto nos resulta especialmente problemático en probabilística, donde las ideas previas erróneas, causadas por un mal entendimiento de los conceptos, pueden interferir con el aprendizaje correcto si el estudiante no pregunta las dudas pertinentes o no presta atención a la clase.
- Facilidad para la persistencia de errores intuitivos: A la hora de impartir el bloque de probabilidad y estadística, es habitual que los estudiantes presenten sesgos cognitivos o malentendidos persistentes (como el efecto del equiprobable o la falacia del jugador), aunque estos no hayan supuesto fallos o errores en pruebas académicas. Es decir, una clase demasiado centrada en la exposición puede no detectar ni corregir eficazmente estas concepciones erróneas (Batanero & Díaz, 2010).
- Menor desarrollo de competencias procedimentales y actitudinales: Aunque la clase magistral puede sernos útil para transmitir contenidos declarativos, no siempre favorece por sí sola el desarrollo de habilidades como la toma de decisiones, la comunicación matemática o la aplicación del conocimiento a contextos reales, objetivos que también están contemplados en el currículo de Bachillerato (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022).
- Falta de interacción social entre iguales: Aun cuando intentemos fomentar la participación con preguntas o ejemplos contextualizados, esta metodología tiende a centrarse en la interacción unidireccional docente-alumnado. Esto limita las oportunidades para que los

estudiantes intercambien ideas, confronten razonamientos y desarrollen habilidades de trabajo en equipo, que son clave tanto en el aprendizaje de la probabilidad como en el desarrollo competencial.

En definitiva, podemos considerar que la clase magistral-participativa puede ser una metodología valiosa en el bloque de probabilidad si se acompaña de estrategias que activen cognitivamente al alumnado, como la resolución colectiva de ejercicios, la formulación de predicciones, el uso de errores típicos como punto de partida o la inclusión de preguntas abiertas que fomenten la reflexión. Lejos de tratarse de una metodología anticuada, puede seguir siendo útil si se emplea adecuadamente y si se enfoca desde los principios del aprendizaje significativo y la comunicación matemática.

Análisis del Aprendizaje Basado en Problemas en la parte de Probabilidad y Estadística en Matemáticas de Bachillerato

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), como explicamos anteriormente, es una metodología centrada en el estudiante, que se fundamenta en el planteamiento (mediante problemas) de situaciones reales o verosímiles como punto de partida para construir conocimiento (Hmelo-Silver, 2004). En el bloque de probabilidad en Bachillerato, el empleo de esta metodología ofrece numerosas ventajas, aunque también plantea desafíos que deben ser considerados con atención.

Entre los puntos fuertes de su aplicación en este bloque destacaremos los siguientes:

- Contextualización del conocimiento: La probabilidad es una herramienta matemática muy ligada a la toma de decisiones bajo incertidumbre, por lo que, gracias al ABP, el alumnado puede abordar problemas vinculados a contextos reales (como predicciones meteorológicas, genética, juegos de azar, …) lo cual permite comprender mejor su utilidad y sentido (Contreras et al., 2010).
- Desarrollo del razonamiento probabilístico: El Aprendizaje Basado en Problemas promueve la formulación de destrezas necesarias para el pensamiento probabilístico como lo son la formulación de conjeturas y teorías, la estimación de resultados y la argumentación basada en datos (Batanero et al., 2011). La exploración de situaciones abiertas y el trabajo colaborativo favorecen la interpretación y análisis de diferentes estrategias.
- Estimulación del aprendizaje activo y autónomo: Los alumnos asumen un rol más activo en su aprendizaje, desarrollando habilidades metacognitivas y de resolución de problemas, lo que mejora la comprensión a largo plazo (Hmelo-Silver, 2004). La indagación guiada resulta especialmente útil para la comprensión de conceptos abstractos como la probabilidad condicional o la independencia.
- Interdisciplinariedad y transferibilidad: La probabilidad permite establecer conexiones con otras disciplinas —como ciencias sociales, biología o economía—, lo que potencia su valor formativo y refuerza su carácter aplicado.

Sin embargo, el uso del ABP en este bloque también presenta debilidades:

- Complejidad conceptual: Algunos contenidos del bloque, como el teorema de Bayes o los diagramas de árbol con sucesos dependientes, requieren un grado de abstracción que puede resultar elevado para el estudiante promedio. Si no se acompaña de una guía didáctica adecuada, el aprendizaje puede resultar superficial o erróneo, por lo que, aunque esta metodología está orientada en torno al estudiante, el docente debe servir un papel irremplazable de guía para los estudiantes. (Kirschner, Sweller & Clark, 2006).
- Conflicto entre la intuición y el rigor: En probabilidad, es frecuente que las intuiciones iniciales del alumnado no coincidan con los resultados formales, por lo que el docente debe prever y gestionar estos conflictos para que no generen frustración ni consolidación de errores.
- Demandas en la planificación docente: Diseñar problemas relevantes, con el grado adecuado de complejidad y vinculados al currículo, requiere una alta inversión de tiempo y experiencia por parte del profesorado. Además, es necesaria una evaluación formativa coherente con la metodología.
- Dificultades de equidad en el trabajo en grupo: Como en toda dinámica cooperativa, existe el riesgo de que ciertos alumnos asuman un papel pasivo y no participen en la clase si no se definen roles ni se implementan mecanismos de control de la participación.

Podemos concluir que el ABP es una metodología con gran potencial en la enseñanza de la probabilidad, ya que permite al alumnado construir sentido a partir de contextos auténticos. No obstante, su éxito depende en gran medida del diseño didáctico, del acompañamiento-guía docente y de una evaluación centrada en los procesos de aprendizaje.

Situación de aprendizaje de Probabilidad y Estadística basada en el ABP

<u>Título</u>: “¿Qué probabilidades hay de que ocurra... y cómo lo sabemos?”

<u>Etapa</u>: Bachillerato

<u>Curso</u>: 1.º o 2.º

<u>Materia</u>: Matemáticas II / Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

<u>Duración estimada</u>: 5-6 sesiones

<u>1. Contextualización y justificación didáctica</u>

Esta situación de aprendizaje tiene como objetivo principal introducir y consolidar conceptos clave de la probabilidad a través del planteamiento de un problema realista: la predicción de resultados en un escenario de toma de decisiones bajo incertidumbre.

Partimos de una noticia sobre test médicos o predicciones meteorológicas, que lleva al alumnado a cuestionarse si una alta probabilidad de acierto realmente significa que un suceso es probable. A partir de este problema complejo y verosímil, el alumnado deberá investigar, modelizar y argumentar conceptos como probabilidad condicional, independencia y teorema de Bayes.

El ABP fomenta un aprendizaje activo y significativo, donde el alumnado asume el rol de investigador. La situación permite desarrollar pensamiento probabilístico, promover el trabajo colaborativo y conectar las matemáticas con la vida real. La intervención docente es clave como guía en la gestión de la indagación, el análisis de estrategias y la consolidación conceptual.

2. Competencias específicas trabajadas

- CE1. Modelizar situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana. (STEM1, STEM2, CCL3, CP3)
- CE2. Validar soluciones a través del razonamiento crítico. (STEM2, CCL1, CCL2, CPSAA4)
- CE3. Formular conjeturas y nuevas preguntas desde contextos reales. (STEM3, CPSAA1.2, CD1, CCEC4.2)
- CE5. Relacionar diferentes conceptos probabilísticos. (STEM5, CC2, CC3)
- CE6. Aplicar la probabilidad en contextos interdisciplinares. (CE3, CC3, CCEC4.2)
- CE7. Representar distribuciones y datos mediante recursos gráficos y digitales. (CD3, CD5, CCEC1)
- CE8. Comunicar la interpretación de los resultados con rigor. (CCL1, CCL2, CCEC3.2)
- CE9. Desarrollar resiliencia y trabajo en equipo ante problemas reales. (CPSAA1.1, CPSAA3.1, CPSAA5)

3. Criterios de evaluación

- 1.3. Aplicar técnicas de probabilidad en contextos reales, diferenciando sucesos independientes y dependientes.
- 2.2. Usar el teorema de Bayes para resolver situaciones relacionadas con decisiones bajo incertidumbre.
- 3.1. Seleccionar y utilizar adecuadamente diagramas y representaciones en la resolución de problemas.
- 4.1. Justificar soluciones mediante argumentos cuantitativos y cualitativos.
- 5.2. Participar activamente en el trabajo cooperativo, respetando roles y mostrando iniciativa.

4. Saberes básicos trabajados

- Probabilidad condicional e independencia de sucesos.

- Teorema de Bayes y árboles de probabilidad.
- Interpretación de probabilidades en contextos aplicados.
- Representaciones: tablas, diagramas de árbol, fórmulas.
- Lenguaje probabilístico y argumentación crítica.

5. Descripción de la tarea

Título de la tarea: "El caso del test positivo: ¿puedo fiarme del resultado?"

Planteamiento del problema:

> Se presenta al alumnado un problema real basado en una noticia o una situación médica: *Un test diagnóstico tiene una tasa de aciertos del 95%, y una persona da positivo. El alumnado debe responder a la pregunta:*
>
> *"¿Cuál es la probabilidad real de que esa persona tenga la enfermedad?"*

A partir de esta situación:

- Deberán identificar los datos relevantes (probabilidad de enfermedad, falsos positivos, sensibilidad, etc.).
- Representarán la situación con árboles o tablas.
- Aplicarán y descubrirán progresivamente la probabilidad condicional y el teorema de Bayes.
- Generalizarán el procedimiento a otros contextos: controles antidopaje, pruebas de calidad, encuestas, etc.

6. Fases de desarrollo

Fase 1 – Presentación del problema y activación de ideas previas (1 sesión)

- Lectura y análisis de una noticia sobre tests médicos o un problema similar.
- Discusión inicial sobre la intuición de la probabilidad del suceso.
- Puesta en común de ideas previas y primeras hipótesis.

Fase 2 – Investigación y modelización colaborativa (2-3 sesiones)

- Trabajo en grupos: extracción de datos, representación con diagramas y árboles.
- Introducción progresiva de la probabilidad condicional y el concepto de independencia.
- Estimación de probabilidades reales con los datos del problema.

Análisis de errores intuitivos comunes y contrastes con los cálculos reales.

Fase 3 – Formalización y transferencia (1-2 sesiones)

- Presentación y discusión del teorema de Bayes con ejemplos del problema.
- Aplicación de los mismos razonamientos a nuevos casos: dopaje, meteorología, encuestas.
- Elaboración de conclusiones y generalizaciones.

Fase 4 – Síntesis y comunicación de resultados (1 sesión)

- Cada grupo expone su resolución del caso inicial con justificación completa.
- Comparación de estrategias y reflexión sobre el papel de la intuición.
- Evaluación individual de lo aprendido + reflexión final guiada.

7. Evaluación

Instrumento	**Indicadores clave**
Observación directa	Participación activa, formulación de hipótesis, calidad del razonamiento.
Diario de grupo	Seguimiento del proceso de investigación, gestión del conflicto entre intuición y dato.
Informe final o presentación	Coherencia de los cálculos, claridad en la argumentación, uso correcto de vocabulario.
Cuaderno personal	Diagramas, esquemas y reflexiones personales.
Prueba de transferencia	Resolución individual de un caso análogo nuevo.

8. Atención a la diversidad y medidas inclusivas

- Problemas contextualizados accesibles y adaptables.
- Representaciones múltiples: verbales, visuales, simbólicas.
- Agrupamientos cooperativos con roles definidos.
- Apoyos extra (resúmenes, esquemas, vídeos explicativos) para alumnos con dificultades.
- Actividades de ampliación para alumnado avanzado (problemas con más niveles de condición).

9. Uso de herramientas digitales

- GeoGebra / Desmos: para representar probabilidades gráficamente.
- Canva / PowerPoint / Genially: para elaborar presentaciones grupales.

- Formularios o simuladores en línea (StatKey, iNZight): para experimentar con probabilidades.
- Plataformas colaborativas (Google Drive, Padlet): para registrar el proceso grupal.

10. Aprovechamiento de puntos fuertes del ABP

- ✓ Conexión con la realidad: se contextualiza el aprendizaje en problemas auténticos.
- ✓ Desarrollo del pensamiento crítico: se confronta la intuición con el rigor.
- ✓ Aprendizaje significativo: los conceptos se construyen al resolver un problema con sentido.
- ✓ Trabajo competencial: se integran saberes, estrategias y comunicación.

Análisis del Aprendizaje Cooperativo en la parte de Probabilidad y Estadística en Matemáticas de Bachillerato

Como hemos explicado en el primer capítulo, el aprendizaje cooperativo es una metodología activa, que organiza a los estudiantes en grupos reducidos y heterogéneos para que trabajen conjuntamente en la resolución de tareas académicas, tanto con objetivos comunes y como con responsabilidades individuales definidas y diseñadas por el docente. Aplicado al bloque de probabilidad, este es un enfoque que permite desarrollar tanto el razonamiento probabilístico como habilidades sociales y metacognitivas esenciales en la etapa de Bachillerato.

Entre las fortalezas de esta metodología contextualizada en el bloque de Probabilidad y Estadística, podemos destacar:

- Construcción compartida del conocimiento: La interacción entre compañeros facilita la confrontación de ideas, la justificación de conjeturas del alumno y la toma de decisiones conjuntas. Como indica Slavin (1996), estas situaciones enriquecen la comprensión de conceptos como espacio muestral, probabilidad compuesta o condicional.
- Desarrollo del lenguaje matemático: Según comenta Artigue (2002), en un contexto cooperativo, los estudiantes deben explicar sus razonamientos, utilizar con precisión el vocabulario probabilístico y defender sus conclusiones. Este proceso mejora tanto la competencia matemática como la comunicativa.
- Simulación colaborativa de experimentos aleatorios: El trabajo en grupo favorece la realización de simulaciones (manuales o digitales), la recogida de datos y la interpretación de resultados. Esto es especialmente útil para comprender la ley de los grandes números, la diferencia entre probabilidad teórica y experimental, y la noción de aleatoriedad.
- Inclusión y motivación: Al organizarse en grupos heterogéneos, el aprendizaje cooperativo permite atender a la diversidad y fomentar la participación de todo el alumnado, incluidas las personas con menor confianza en sus capacidades matemáticas (Johnson, Johnson y

Holubec, 1999). De hecho, en estadística, donde los contextos pueden vincularse a diferentes realidades sociales y personales, este enfoque resulta especialmente motivador.

Debilidades o retos que podemos encontrarnos durante su aplicación

- Necesidad de una gran formación y planificación por parte docente: El aprendizaje cooperativo, por nuestra parte como docentes, requiere una laboriosa planificación y muy cuidadosa, que debe diseñar tanto tareas y ejercicios usuales como tareas abiertas, definir roles claros y regular la interacción entre los miembros del grupo (Gillies, 2004). En el bloque de estadística, por poner un ejemplo, la selección de muchos y distintos contextos realistas o de conjuntos de datos significativos puede suponer un reto adicional.
- Riesgo de desequilibrios en la participación: Si no somos capaces de gestionar adecuadamente los mecanismos de interdependencia y responsabilidad individual, puede producirse una participación desigual, donde algunos estudiantes asuman todo el trabajo y otros permanezcan pasivos, lo que afecta a la comprensión de conceptos clave, como la probabilidad condicional o el uso de medidas de centralización.
- Dificultad en la evaluación individual: Evaluar el aprendizaje individual dentro de una dinámica cooperativa puede resultarnos ciertamente complicado, y exige instrumentos específicos y criterios claros, que valoren tanto el producto como el proceso. Esto es especialmente relevante cuando se abordan interpretaciones estadísticas, argumentaciones probabilísticas o redacción de conclusiones a partir de datos.

Podemos concluir que, en el bloque de probabilidad, el aprendizaje cooperativo es una metodología que puede resultar útil y que permite trabajar tanto los contenidos específicos como las competencias transversales. Sin embargo, para que este tipo de aprendizaje resulte eficaz, debe ser cuidadosamente planificada, incorporando herramientas tecnológicas cuando sea posible y combinada con otras estrategias que aseguren el andamiaje conceptual. Desde el punto de vista socioconstructivista (Vygotsky, 1978), es ésta la metodología que potencia el aprendizaje en la Zona de Desarrollo Próximo, en la medida en que los estudiantes más competentes ayudan a otros a avanzar mediante la interacción y el lenguaje.

Situación de aprendizaje de Probabilidad y Estadística basada en el Aprendizaje Cooperativo

Título: "Simular para predecir: ¿cómo funciona realmente el azar?"

Etapa: Bachillerato

Curso: 1.º o 2.º

Materia: Matemáticas II / Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Duración estimada: 5 sesiones

1. Contextualización y justificación didáctica

Esta situación de aprendizaje tiene como finalidad introducir y consolidar contenidos clave del bloque de Probabilidad y Estadística, a través del diseño y ejecución cooperativa de experimentos aleatorios y el análisis de sus resultados.

Los alumnos, organizados en grupos cooperativos heterogéneos con roles definidos, simulan lanzamientos de dados, extracción de bolas de urnas o recorridos aleatorios, para contrastar la probabilidad teórica y la probabilidad experimental, e interpretar fenómenos como la ley de los grandes números o la noción de aleatoriedad.

Esta metodología permite la construcción conjunta del conocimiento (Slavin, 1996), la verbalización del razonamiento probabilístico (Artigue, 2002) y la inclusión de todo el alumnado en una tarea significativa, conectada con contextos reales.

El aprendizaje cooperativo no sólo favorece la comprensión matemática, sino que desarrolla habilidades comunicativas, sociales y metacognitivas. Para ello, el diseño de la situación debe prever roles, normas de participación, mecanismos de control de la responsabilidad individual y criterios de evaluación compartidos.

2. Competencias específicas trabajadas

- CE1. Modelizar situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana. (STEM1, STEM2, CCL3, CP3)
- CE2. Validar soluciones a través del razonamiento crítico. (STEM2, CCL1, CCL2, CPSAA4)
- CE3. Formular conjeturas y nuevas preguntas desde contextos reales. (STEM3, CPSAA1.2, CD1, CCEC4.2)
- CE5. Relacionar diferentes conceptos probabilísticos. (STEM5, CC2, CC3)
- CE6. Aplicar la probabilidad en contextos interdisciplinares. (CE3, CC3, CCEC4.2)
- CE7. Representar distribuciones y datos mediante recursos gráficos y digitales. (CD3, CD5, CCEC1)
- CE8. Comunicar la interpretación de los resultados con rigor. (CCL1, CCL2, CCEC3.2)
- CE9. Desarrollar resiliencia y trabajo en equipo ante problemas reales. (CPSAA1.1, CPSAA3.1, CPSAA5)

3. Criterios de evaluación

- 1.2. Comparar y analizar resultados de experimentos aleatorios simulados con su probabilidad teórica.
- 2.1. Utilizar representaciones adecuadas (tablas, gráficas, histogramas) para mostrar los resultados obtenidos.
- 3.1. Explicar oralmente y por escrito las conclusiones extraídas, utilizando lenguaje probabilístico preciso.
- 4.3. Participar activamente en el grupo, responsabilizándose de su rol y contribuyendo al objetivo común.
- 5.1. Evaluar y autorregular el trabajo del grupo mediante rúbricas cooperativas.

4. Saberes básicos trabajados

- Experimentos aleatorios, frecuencia relativa y probabilidad.
- Simulación de procesos aleatorios: equiprobabilidad, no equiprobabilidad.
- Probabilidad teórica vs. probabilidad experimental.
- Ley de los grandes números.
- Representación e interpretación de resultados: tablas, gráficas, histogramas.
- Uso de herramientas tecnológicas (calculadora, hojas de cálculo, simuladores).

5. Descripción de la tarea

Título de la tarea: “¿Qué pasaría si lanzamos la moneda 10 000 veces?”

Problema guía:

> *A menudo se asume que en un juego de azar “todo es impredecible” o que “si ya ha salido muchas veces una cara, la siguiente será cruz”. ¿Qué hay de cierto en eso? ¿Qué pasa si simulamos el juego muchas veces? ¿Se parece lo que sale a lo que esperábamos?*

Objetivo de la tarea:

Los grupos deben simular uno o varios experimentos aleatorios, recoger datos, analizarlos y explicar si sus resultados confirman la teoría probabilística. Deberán contrastar sus observaciones con modelos matemáticos y explicar posibles desviaciones.

Ejemplos de experimentos:

- Lanzamiento de 2 dados y cálculo de la suma.
- Lanzamiento de monedas.
- Extracción de bolas de una urna con y sin reemplazo.
- Juego de ruleta o sorteo virtual.
- Caminata aleatoria en una cuadrícula.

Ejemplo:

- *Si lanzamos una moneda 1000 veces, ¿cuál es el valor esperado de caras y cuál sería la desviación típica?*
- *¿Qué ocurre con la frecuencia relativa de caras al aumentar el número de lanzamientos?*

<u>6. Fases de desarrollo</u>

Fase 1 – Preparación y formación de grupos cooperativos (1 sesión)

- Explicación de la dinámica y del problema inicial.
- Formación de grupos heterogéneos (4 miembros) y asignación de roles, que pueden ir intercambiándose:
    - Coordinador/a: organiza las tareas y asegura el cumplimiento del tiempo.
    - Portavoz: comunica los resultados del grupo al resto de la clase
    - Secretario/a: recoge los datos y registra los procedimientos.
    - Encargado/a técnico: se ocupa de las simulaciones o herramientas digitales.

Fase 2 – Diseño del experimento y simulación (2 sesiones)

- Planificación del experimento por parte del grupo.
- Ejecución en papel o con tecnología (hojas de cálculo, GeoGebra, simuladores en línea…).
- Recogida y organización de los datos obtenidos.
- Representación gráfica (tablas, diagramas de barras o circulares, histogramas…).

Fase 3 – Análisis y argumentación (1 sesión)

- Comparación entre los resultados experimentales y los valores teóricos esperados.
- Redacción conjunta de una conclusión razonada: ¿confirma la experiencia la teoría?, ¿por qué puede haber desviaciones?, ¿cómo influye el número de repeticiones?
- Preparación de una presentación breve para el resto de la clase.

Fase 4 – Comunicación y autoevaluación (1 sesión)

- Presentación de los resultados de cada grupo (exposición oral o póster digital).
- Debate final: ¿en qué se parecen y en qué se diferencian los resultados?, ¿qué hemos aprendido sobre el azar?
- Autoevaluación individual del rol y coevaluación del trabajo grupal mediante rúbricas.

<u>7. Evaluación</u>

Instrumento	**Indicadores clave**
Rúbrica cooperativa	Cumplimiento de roles, interacción positiva, participación equilibrada.
Diario de grupo	Planificación del experimento, toma de decisiones, dificultades y reflexiones.
Informe final	Organización de datos, representaciones correctas, análisis argumentado de los resultados.
Presentación oral	Claridad en la comunicación, uso del lenguaje probabilístico, calidad de la síntesis.
Evaluación individual	Cuaderno con registros, test breve de aplicación, autoevaluación del rol y de aprendizaje.

8. Atención a la diversidad y medidas inclusivas

- Grupos heterogéneos con apoyo entre iguales.
- Roles adaptables a diferentes niveles de competencia.
- Tareas abiertas con posibilidad de distintos niveles de profundización.
- Uso de materiales manipulativos y digitales para apoyar la comprensión.
- Apoyos visuales, plantillas guía y andamiajes metacognitivos.

9. Uso de herramientas digitales

- Hojas de cálculo (Excel, Google Sheets): para simulación de lanzamientos y representación gráfica.
- Simuladores de probabilidad (GeoGebra, Desmos, StatKey): para experimentación y visualización.
- Canva / Genially / PowerPoint: para exposiciones de grupo.
- Formularios y rúbricas digitales (Google Forms, Rubistar): para evaluación formativa y autoevaluación.

10. Aprovechamiento de puntos fuertes del Aprendizaje Cooperativo

✓ Confrontación de ideas y desarrollo conjunto del conocimiento.
✓ Verbalización constante del razonamiento y uso preciso del vocabulario.
✓ Inclusión de todo el alumnado en la simulación y análisis de datos.
✓ Motivación a través de contextos reales y tareas manipulativas o digitales.

Análisis del Aprendizaje por Descubrimiento en la parte de Probabilidad y Estadística en Matemáticas de Bachillerato.

El aprendizaje por descubrimiento, basado en los planteamientos de Bruner (1960) y como hemos aclarado anteriormente, propone que el alumnado construya activamente su conocimiento al enfrentarse a situaciones nuevas, explorando patrones, formulando conjeturas y comprobando hipótesis. Siendo este tipo de metodología más difícil de encontrar en la asignatura de matemáticas, es normal formularse la siguiente pregunta: ¿Podría esta metodología resultar adecuada en el bloque de Probabilidad y Estadística, donde son tan relevantes la manipulación de datos, la observación de regularidades y la formulación de inferencias? A continuación, expondremos las fortalezas y las debilidades de esta metodología.

Comenzando con los puntos fuertes, nombramos los siguientes:

- Favorece la comprensión profunda de conceptos abstractos: El descubrimiento guiado permite al alumnado internalizar nociones clave como la aleatoriedad, la variabilidad o la independencia de sucesos a través de su propia experiencia, más allá de definiciones formales. Se comprobó de esta manera que, al experimentar con simulaciones de lanzamientos de dados o monedas, los estudiantes pueden observar, o al menos hacerse una idea, de la ley de los grandes números antes de formalizarla (Batanero & Díaz, 2010).
- Fomenta el pensamiento crítico y probabilístico: Esta metodología estimula la formulación de preguntas, la exploración acerca de distintas estrategias de resolución y la toma de decisiones del alumnado. Estudios afirman que esto fortalece el razonamiento estadístico y la interpretación crítica de fenómenos aleatorios (Contreras, Díaz & Azcárate, 2010).
- Conexión entre teoría y realidad: como indican Batanero, Burrill & Reading (2011), al descubrir principios estadísticos a partir de contextos reales (por ejemplo, encuestas, análisis de datos sociales o resultados deportivos), el alumnado percibe la utilidad y aplicabilidad de los contenidos, aumentando su motivación
- Permite una construcción autónoma del conocimiento: Siguiendo el enfoque constructivista de Bruner (1960), y basado en lo que comenta Artigue (2002), esta metodología favorece que el alumno se implique activamente en el desarrollo de sus conocimientos y su desarrollo metacognitivo, ya que debe reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje.

No obstante, es necesario tener en consideración las siguientes dificultades que puede acarrear la puesta en práctica de esta metodología:

- Riesgo de sobrecarga cognitiva: Como apuntan algunos estudios, la falta de andamiaje o guía puede llevar a que los alumnos se enfrenten a tareas demasiado complejas, especialmente en conceptos técnicos como la probabilidad condicional o el contraste de hipótesis. Esto puede generar confusión o aprendizaje superficial (Kirschner, Sweller & Clark, 2006).

- Elevada demanda temporal: Como menciona Prince (2004), las actividades de descubrimiento suelen requerir más tiempo, tanto de planificación como de realización, que la enseñanza tradicional, lo que puede suponer un obstáculo en las etapas de Bachillerato, donde los plazos son, por lo general, ajustados.
- Desigualdad en la participación: El propio Ausubel comenta que, al igual que en Aprendizaje Cooperativo, si no somos capaces de gestionar estas técnicas adecuadamente, el aprendizaje por descubrimiento tiende a beneficiar más a estudiantes autónomos o con mayor preparación previa, ampliando la brecha con quienes tienen mayores dificultades.
- Necesidad de formación docente: Esta metodología nos requiere que diseñemos cuidadosamente situaciones problemáticas abiertas y dispongamos de recursos adecuados (tecnológicos, manipulativos, estadísticos) para guiar sin interferir en exceso (Artigue, 2002).

Concluiremos este análisis mencionando que el aprendizaje por descubrimiento puede representar una estrategia didáctica útil y distinta frente a las habituales para el bloque de Probabilidad y Estadística en Bachillerato, ya que nos permite abordar la complejidad y naturaleza contextualizada de estos contenidos desde una perspectiva activa, motivadora y conectada con la realidad. Sin embargo, su implementación exige un equilibrio entre la exploración autónoma y la guía pedagógica, que puede ser difícil de llevar de forma pareja, así como una planificación que considere la diversidad del alumnado, su nivel como clase y los límites temporales del curso.

Situación de aprendizaje de Probabilidad y Estadística basada en el Aprendizaje por Descubrimiento

Título: “Descubriendo el azar: ¿qué leyes gobiernan lo imprevisible?”

Etapa: Bachillerato

Curso: 1.º o 2.º

Materia: Matemáticas II / Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Duración estimada: 5 sesiones

1. Contextualización y justificación didáctica

Esta situación de aprendizaje busca que el alumnado descubra por sí mismo conceptos clave de Probabilidad y Estadística a través de la observación, el análisis de datos reales o simulados y la formulación de hipótesis. En lugar de partir de definiciones, se invita a los estudiantes a explorar fenómenos aleatorios, a identificar patrones y a construir progresivamente una comprensión conceptual de ideas como la ley de los grandes números, la frecuencia relativa o la aleatoriedad.

Inspirado en los principios del aprendizaje por descubrimiento (Bruner, 1960), el alumnado trabajará de forma activa y autónoma, enfrentándose a datos y experimentos sin una guía cerrada. Se estimulará la curiosidad, la exploración y la formulación de conjeturas, lo cual es especialmente valioso en un bloque donde la observación, la variabilidad y la inferencia juegan un papel central.

Este enfoque promueve la conexión entre teoría y práctica, fomenta el pensamiento probabilístico, y ofrece un entorno de aprendizaje activo y contextualizado, aunque requiere una planificación cuidadosa para evitar la sobrecarga cognitiva y garantizar la comprensión significativa.

<u>2. Competencias específicas trabajadas</u>

- CE1. Modelizar situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana. (STEM1, STEM2, CCL3, CP3)
- CE2. Validar soluciones a través del razonamiento crítico. (STEM2, CCL1, CCL2, CPSAA4)
- CE3. Formular conjeturas y nuevas preguntas desde contextos reales. (STEM3, CPSAA1.2, CD1, CCEC4.2)
- CE5. Relacionar diferentes conceptos probabilísticos. (STEM5, CC2, CC3)
- CE6. Aplicar la probabilidad en contextos interdisciplinares. (CE3, CC3, CCEC4.2)
- CE7. Representar distribuciones y datos mediante recursos gráficos y digitales. (CD3, CD5, CCEC1)
- CE8. Comunicar la interpretación de los resultados con rigor. (CCL1, CCL2, CCEC3.2)
- CE9. Desarrollar resiliencia y trabajo en equipo ante problemas reales. (CPSAA1.1, CPSAA3.1, CPSAA5)

<u>3. Criterios de evaluación</u>

- 1.1. Interpretar fenómenos aleatorios a partir de datos recogidos y representados.
- 1.3. Detectar regularidades y formular hipótesis sobre la frecuencia relativa y la probabilidad.
- 2.2. Representar correctamente los resultados en tablas, diagramas y gráficos.
- 3.3. Argumentar con claridad las conclusiones obtenidas tras la experimentación.
- 4.2. Utilizar recursos tecnológicos para explorar, descubrir y validar propiedades estadísticas.

<u>4. Saberes básicos trabajados</u>

- Experimentos aleatorios y frecuencia relativa.
- Comparación entre probabilidad teórica y experimental.

- Ley de los grandes números.
- Representación de datos: tablas, gráficos, histogramas.
- Exploración y descubrimiento mediante simulación digital.

5. Descripción de la tarea

Título de la tarea: *"Cuando el azar se ordena: ¿cuántas veces debe salir cruz?"*

Problema guía:

> *¿Es realmente el azar impredecible? Si lanzamos una moneda 10 veces, ¿qué esperamos? ¿Y si la lanzamos 10 000 veces? ¿Podríamos anticipar el comportamiento de un dado o de una urna con bolas si lo repetimos muchas veces? ¿Qué patrones aparecen?*

Objetivo de la tarea:

El alumnado debe explorar un experimento aleatorio a través de la observación directa o la simulación, registrar los resultados obtenidos, detectar regularidades y formular hipótesis, y, finalmente, contrastar sus predicciones con la teoría.

Ejemplos de exploraciones posibles:

- Lanzamiento repetido de monedas y registro de frecuencias relativas.
- Estudio del reparto de sumas al lanzar dos dados.
- Simulación de extracciones con y sin reemplazo.
- Observación de fenómenos aleatorios reales (ej. sorteos deportivos, fenómenos meteorológicos, ruleta virtual).
- Exploración digital de distribuciones mediante simuladores.

6. Fases de desarrollo

Fase 1 – Activación cognitiva y planteamiento del reto (1 sesión)

- Se parte de preguntas provocadoras (¿puede el azar ser predecible?)
- Breve experimentación inicial sin guiar (lanzamientos de monedas o dados).
- Registro colectivo de datos visibles en pizarra.
- Discusión: ¿vemos algo parecido entre todos?, ¿se puede generalizar?

Fase 2 – Exploración autónoma y recogida de datos (2 sesiones)

- En grupos o individualmente, el alumnado selecciona un experimento aleatorio.
- Simulación manual o digital (hojas de cálculo, GeoGebra, applets).
- Registro de datos organizados.

- Representación gráfica de resultados: frecuencias absolutas y relativas, histogramas, etc.

Fase 3 – Formulación de hipótesis y descubrimiento (1 sesión)

- Análisis de las regularidades observadas.
- Formulación de conjeturas: “a medida que repetimos más veces...”, “parece que se estabiliza en...”.
- Confrontación con modelos teóricos (por ejemplo, distribución uniforme en el dado, binomial en el lanzamiento de moneda).

Fase 4 – Validación y comunicación (1 sesión)

- Redacción de un informe explicando el proceso seguido y los descubrimientos.
- Preparación de una breve presentación o infografía para mostrar a la clase.
- Discusión: ¿se cumplen nuestras hipótesis?, ¿qué hemos aprendido?, ¿qué dudas quedan?

7. Evaluación

Instrumento	**Indicadores clave**
Diario de descubrimiento	Registro del experimento, hipótesis formuladas, observaciones realizadas.
Informe de exploración	Organización de datos, interpretación de resultados, justificación de conclusiones.
Presentación final	Claridad expositiva, precisión terminológica, vínculo con la teoría matemática.
Observación docente	Participación activa, autonomía en el trabajo, capacidad de autorregulación.
Autoevaluación escrita	Reflexión sobre el proceso de aprendizaje y grado de comprensión alcanzado.

8. Atención a la diversidad y medidas inclusivas

- Posibilidad de elegir el nivel de complejidad del experimento.
- Uso de materiales manipulativos para facilitar la comprensión.
- Apoyos visuales y plantillas para guiar el análisis de datos.
- Acompañamiento individual para estudiantes con mayor necesidad de refuerzo.
- Actividades optativas de profundización para alumnado con alta capacidad.

9. Uso de herramientas digitales

- Hojas de cálculo (Excel, Sheets): para simulación y representación gráfica.
- GeoGebra / Desmos / Simuladores online: para experimentos aleatorios interactivos.
- Canva / Genially: para presentaciones y comunicación de descubrimientos.
- Kahoot / Forms: para cierre lúdico con preguntas de comprensión y reflexión.

10. Aprovechamiento de puntos fuertes del Aprendizaje por Descubrimiento

- ✓ Permite al alumnado construir el conocimiento desde la experiencia, observando patrones antes de formalizarlos.
- ✓ Fomenta el pensamiento crítico y probabilístico, a través de la formulación y comprobación de hipótesis.
- ✓ Conecta la estadística con situaciones del mundo real, reforzando su aplicabilidad y sentido.
- ✓ Desarrolla la autonomía y la metacognición, al hacer reflexionar sobre el propio proceso de aprendizaje.

Conclusión

El recorrido realizado en este trabajo pone de relieve tanto la complejidad como la riqueza del panorama metodológico en la enseñanza de las Matemáticas en Bachillerato. Las cuatro metodologías analizadas —clase magistral, Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), Aprendizaje Cooperativo y Aprendizaje por Descubrimiento— no deben entenderse como estrategias excluyentes, sino como herramientas complementarias que, bien utilizadas, permiten atender a distintos objetivos, perfiles de alumnado y bloques de contenido.

La clase magistral continúa desempeñando un papel relevante, especialmente en la introducción de conceptos técnicos o formales, donde se requiere una exposición precisa y estructurada. No obstante, su eficacia se ve reforzada cuando se combina con metodologías activas que promuevan la aplicación, la reflexión y la autonomía del alumnado. En este sentido, el ABP aparece como una estrategia muy adecuada para trabajar la transferencia del conocimiento, el sentido funcional de los contenidos y el desarrollo de competencias como la resolución de problemas, el pensamiento crítico o el trabajo en equipo. El aprendizaje cooperativo, por su parte, potencia la construcción compartida del conocimiento, la verbalización del pensamiento matemático y la inclusión del alumnado con diferentes niveles de competencia. Finalmente, el aprendizaje por descubrimiento permite introducir conceptos abstractos a partir de experiencias exploratorias, ayudando a construir significados más duraderos y fomentando la creatividad y la iniciativa personal.

Las situaciones de aprendizaje diseñadas a lo largo del trabajo ilustran cómo cada metodología puede adaptarse a un bloque concreto del currículo. Así, por ejemplo, el ABP se muestra especialmente potente en la enseñanza de la probabilidad, al conectar el conocimiento matemático con contextos reales e interdisciplinarios. El aprendizaje cooperativo resulta muy eficaz para consolidar procedimientos del cálculo integral o para explorar fenómenos estadísticos mediante simulaciones. El descubrimiento guiado, apoyado en herramientas tecnológicas como GeoGebra, se revela como una estrategia útil para introducir intuitivamente el concepto de integral definida o para observar regularidades funcionales. Todo ello demuestra que la adecuación metodológica depende tanto de las características del contenido como del momento del proceso de enseñanza-aprendizaje.

A lo largo del desarrollo del trabajo, se ha hecho especial hincapié en la necesidad de diseñar experiencias de aprendizaje alineadas con la LOMLOE, lo que implica integrar competencias específicas, criterios de evaluación, saberes básicos y medidas de atención a la diversidad. Además, se ha intentado responder a los retos más actuales de la enseñanza de las matemáticas: la falta de motivación del alumnado, la escasa conexión con la realidad, la rigidez metodológica o la poca atención al desarrollo de competencias transversales. Desde esta perspectiva, el trabajo no solo ofrece propuestas didácticas concretas, sino también una visión crítica y propositiva del rol docente en el aula de matemáticas.

Como conclusión general, se defiende que no existe una única metodología ideal, sino que el verdadero valor pedagógico radica en la combinación estratégica, consciente y fundamentada de distintos enfoques. El profesorado debe convertirse en diseñador de experiencias de aprendizaje significativas, seleccionando la metodología más adecuada en función del contenido, del grupo y de los objetivos de cada unidad. Solo así será posible avanzar hacia una enseñanza de las Matemáticas más inclusiva, activa, motivadora y conectada con la realidad actual.

Bibliografía

Alonso-Tapia, J. (2005). *Motivación y aprendizaje en el aula: Cómo enseñar a pensar*. Narcea.

Artigue, M. (1995). Engineering students facing analysis: Conceptual difficulties and teaching strategies. *European Journal of Engineering Education*, 20(3), 285–296.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274.

Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction*, 9(2), 137–175.

Ausubel, D. P. (1976). *Psychology of meaningful verbal learning*. Nueva York: Grune & Stratton.

Baines, E., Blatchford, P., & Kutnick, P. (2009). *Promoting effective group work in the primary classroom: A handbook for teachers and practitioners*. Routledge.

Bakirci, H., Kirici, M. G., & Kara, Y. (2020). The effectiveness of STEM-supported inquiry-based learning approach on conceptual understanding of 7th graders: Force and energy unit. *Journal of Science Learning*, 3(2), 81–89.

Ballester, J. (2010). *Didáctica de las matemáticas en la educación secundaria*. Graó.

Barrows, H. S., & Tamblyn, R. M. (1980). *Problem-based learning: An approach to medical education*. Springer.

Batanero, C., & Díaz, C. (2010). La comprensión del azar y la probabilidad en la enseñanza secundaria. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 55, 22–31.

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*. Springer. Recuperado el 4 de junio de 2025, de https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0

Biggs, J., & Tang, C. (2007). *Teaching for quality learning at university*. Open University Press.

Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education*. Harvard University Press.

Campos, J., & González, M. (2013). *Evaluación del aprendizaje basado en problemas: enfoques y aplicaciones*. Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 6(2), 45–68.

Caprara, B., & Campione, C. (2017). Problem-based learning and teaching mathematics through real-world contexts. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 36(3), 147–159.

Cañadas, M. C., & Nieto, S. (2008). Concepciones del alumnado sobre la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación Matemática*, 22(2), 51–70.

Cañadas, M. C., Molina, M., & Castro, E. (2020). *Enseñar y aprender matemáticas mediante metodologías activas*. Síntesis.

Cañal de León, P. (2002). *El aprendizaje constructivista y su aplicación a las Ciencias Experimentales*. Sevilla: Díada.

Casanova, J., De la Cruz, R., & Casanova, B. (2004). *Aprendizaje cooperativo y comprensión del lenguaje matemático*. Revista de Educación, 334, 289–310.

Contreras, J. M., Díaz, C., & Azcárate, P. (2010). Significados institucionales de la probabilidad y su papel en la formación del profesorado de secundaria. *Revista de Educación Matemática*, 25(1), 5–31.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. Plenum.

De Miguel, M. (2005). *Modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de competencias*. Universidad de Oviedo.

Díaz-Aguado, M. J. (2003). *Prevención de conflictos y violencia en los centros educativos desde una perspectiva psicosocial*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Doménech, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para la enseñanza secundaria*. Nau Llibres.

Doise, W., & Mugny, G. (1981). *Le développement social de l'intelligence*. InterEditions.

Dolmans, D. H., Loyens, S. M., Marcq, H., & Gijbels, D. (2016). Deep and surface learning in problem-based learning: A review of the literature. *Advances in Health Sciences Education*, 21, 1087–1112. Recuperado el 11 de julio de 2025, de https://doi.org/10.1007/s10459-015-9645-6

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.

Duran, M., & Dökme, İ. (2016). The effect of the inquiry-based learning approach on students' critical thinking skills. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(12), 2887–2908. Recuperado el 1 de julio de 2025, de https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.02311a

Escudero, T. (2009). *Evaluación educativa. Contenidos, contextos, perspectivas y momentos*. UNED.

Fernández Bravo, J. A. (2012). *Matemáticas para enseñar mejor*. CCS.

Fernández-March, A. (2006). El aprendizaje basado en problemas como método de aprendizaje en la educación superior. *REDU. Revista de Docencia Universitaria*, 4(1), 1–14.

Fidalgo, Á. (2016). *Evaluación de competencias en el EEES*. Narcea.

Flecha, R. (2000). *Sharing Words: Theory and Practice of Dialogic Learning*. Rowman & Littlefield.

Font, V. (2003). La comprensión del concepto de función. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(1), 91–106.

Font, V. (2011). La creatividad y el pensamiento matemático en la educación secundaria. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 76, 25–37.

Gagné, R. M. (1985). *The conditions of learning and theory of instruction*. Holt, Rinehart & Winston.

García, M. (2020). GeoGebra como herramienta de aprendizaje en funciones derivadas: un estudio en Bachillerato. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, 14(2), 32–45.

García-Peñalvo, F. J., Corell, A., Abella-García, V., & Grande-de-Prado, M. (2018). La evaluación en la metodología de aprendizaje basado en problemas. *Education in the Knowledge Society*, 19(3), 17–38.

García Pérez, F., Martínez Clares, P., & Pérez Pueyo, Á. (2010). *Evaluación de competencias mediante rúbricas: una propuesta práctica*. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 13(2), 139–146.

Gillies, R. M. (2004). The effects of cooperative learning on junior high school students' behaviours, discourse and learning during a science-based learning activity. *Instructional Science*, 32(1–2), 1–31.

Gillies, R. M. (2007). *Cooperative learning: Integrating theory and practice*. Sage.

Gómez-Chacón, I. M. (2005). *La resiliencia matemática en el aula: Creencias, emociones y éxito escolar*. Narcea.

Harlen, W. (2013). Inquiry-based learning in science and mathematics. *Review of Science, Mathematics and ICT Education*, 7(2), 9–33. Recuperado el 28 de junio de 2025, de https://doi.org/10.26220/rev.2042

Hernández, R. (2006). *El aprendizaje basado en problemas como técnica didáctica*. México: Limusa Noriega.

Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-based learning: What and how do students learn? *Educational Psychology Review*, 16(3), 235–266. Recuperado el 19 de junio de 2025, de https://doi.org/10.1023/B:EDPR.0000034022.16470.f3

Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G., & Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: A response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist*, 42(2), 99–107.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1989). *Cooperation and competition: Theory and research*. Interaction Book Company.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Paidós.

Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work. *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86.

Kovács-Kószó, E., Czakó, V., & Kosztolányi, J. (2024). Sage and Scribe – Asymmetrical pair work that can easily fit into any mathematics lesson, yet still have cooperative benefits. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 22(2), 133–164.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics*. Corwin.

Llinares, S. (2011). Entornos tecnológicos y razonamiento funcional: El caso del uso de software dinámico. *Suma*, 67, 53–62.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (2005). Aprendizaje de la derivada a través de entornos gráficos: conflictos y estrategias. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 1(2), 45–60.

Loibl, K., Roll, I., & Rummel, N. (2017). Towards a theory of guidance: The meta-cognitive guidance model. *Educational Psychologist*, 52(4), 243–260.

López-Catalán, L., & Rodríguez-Gómez, G. (2016). Evaluación del aprendizaje en el enfoque del aprendizaje basado en problemas: Revisión de instrumentos. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 9(1), 39–58.

López Pastor, V. M. (2011). La evaluación formativa en docencia universitaria. *Revista de Educación*, (354), 143–170.

Marchesi, A., & Martín, E. (2002). *Evaluación de la educación secundaria: Fotografía de una etapa polémica*. Fundación Santa María. SM.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley.

Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist*, 59(1), 14–19.

Medina Rivilla, A. (2008). *Didáctica, organización y diversidad del currículo*. Madrid: Universitas.

Merrill, M. D. (2020). *First principles of instruction*. Wiley.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2020). *Marco de referencia de la competencia digital docente*. Secretaría de Estado de Educación. Recuperado el 9 de junio de 2025, de https://www.educacionyfp.gob.es

Morales, M. P. E. (2011). *Problemas en la implementación del ABP en la educación matemática*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14(1), 97–123.

Moreno, A. (2007). El descubrimiento como proceso de construcción del conocimiento matemático. *UNO*, 45, 55–64.

Moreno, R., Asmat, L., Cruz, R., & Cuglievan, M. (2008). *La clase magistral en la enseñanza universitaria: una aproximación crítica desde la didáctica*. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 10(2), 1–17.

OECD. (2018). *The Future of Education and Skills: Education 2030*. OECD Publishing. Recuperado el 16 de junio de 2025, de https://doi.org/10.1787/9789264301528-en

Palincsar, A. S. (1998). Social constructivist perspectives on teaching and learning. *Annual Review of Psychology, 49*, 345–375. Recuperado el 17 de junio de 2025, de https://doi.org/10.1146/annurev.psych.49.1.345

Piaget, J. (1970). *La psicología de la inteligencia*. Buenos Aires: Psique.

Piaget, J. (1972). *Epistemología genética*. Buenos Aires: Paidós.

Polya, G. (1957). *How to Solve It*. Princeton University Press.

Pozo, J. I., & Monereo, C. (Eds.). (1999). *El aprendizaje estratégico*. Madrid: Santillana.

Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of Engineering Education*, 93(3), 223–231.

Pujolàs, P. (2008). *El aprendizaje cooperativo: 5 ideas básicas para comenzar*. Graó.

Rico, L. (1997). *La educación matemática: Un enfoque curricular constructivista*. Horsori.

Rosenshine, B. (2012). Principles of instruction: Research-based strategies that all teachers should know. *American Educator*, 36(1), 12–39.

Sánchez, E., & García, M. (2004). *Adaptación del aprendizaje cooperativo en entornos escolares con diversidad*. Revista Educación Inclusiva, 2(1), 67–82.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Slavin, R. E. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. *Contemporary Educational Psychology*, 21(1), 43–69.

Sweller, J., Van Merrienboer, J. J. G., & Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251–296.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495–511). Macmillan.

Tobias, S. (1982). *Math anxiety: A review of research*. Review of Educational Research, 52(1), 65–89.

Torrado, S., & González, M. (2006). Diseño de rúbricas para evaluar aprendizajes matemáticos activos. *Epsilon*, 60(1), 23–38.

Torrance, E. P. (1995). *Why fly? A philosophy of creativity*. Ablex.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Yadeta, T. (2020). *Assessment of students' participation in cooperative learning activities at Bule Hora University*. African Educational Research Journal, 8(2), 308–315.

Zabalza, M. A. (2007). *Competencias docentes del profesorado universitario: calidad y desarrollo profesional*. Narcea.