



Trabajo de Fin de Máster

Máster en Física

Mención en Física Matemática

Simulaciones de trayectorias nulas alrededor de objetos compactos con simetría axial

Autor:

Nicolás Jolaos Calero Villacís

Tutor:

Diego Sáez-Chillón Gómez

Resumen

El análisis del comportamiento de los rayos de luz en las proximidades de objetos compactos ha adquirido una relevancia creciente debido a los recientes resultados experimentales sobre sombras y apariencia óptica de agujeros negros. Este trabajo tiene como objetivo ofrecer un análisis detallado de distintos resultados teóricos y numéricos relacionados con el trazado de rayos, la apariencia óptica y la formación de sombras en este tipo de sistemas. En primer lugar, se presentan los fundamentos teóricos del fenómeno de deflexión gravitacional de la luz, partiendo de una métrica esféricamente simétrica, asintóticamente plana y estática. Se introducen conceptos como el parámetro de impacto, trayectorias nulas, órbitas críticas y el papel de la órbita de fotones.

Luego, se lleva a cabo un estudio comparativo entre los espacios-tiempo de Schwarzschild y Kerr, basado en simulaciones numéricas del trazado de rayos. Se analizan las diferencias que surgen debido a la rotación del agujero negro, como el arrastre de referencia (frame dragging) y la ruptura de simetría esférica, y cómo estos efectos modifican las trayectorias y la apariencia visual.

Además, se incorporan modelos de intensidad emitida desde discos delgados de acreción, lo que permite construir mapas de intensidad observada y generar imágenes de la apariencia óptica de agujeros negros. Se estudian tres perfiles de emisión representativos, que reflejan distintos supuestos físicos sobre la distribución radial de la luminosidad del disco.

Finalmente, se analiza cómo varía la forma de la sombra de un agujero negro de Kerr en función del parámetro de rotación y del ángulo de observación polar. A través de gráficos comparativos, se muestra cómo la sombra se deforma y pierde simetría conforme aumenta la rotación, lo que resalta la influencia directa del momento angular sobre las características observables del sistema.

Para el desarrollo de este trabajo se utilizaron herramientas computacionales como Mathematica y Python, tanto para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales como para la visualización de trayectorias de luz, construcción de mapas de intensidad y generación de imágenes simuladas de las sombras de agujeros negros.

Abstract

The analysis of light ray behavior in the vicinity of compact objects has gained increasing relevance due to recent experimental results on black hole shadows and optical appearance. This work aims to provide a detailed analysis of various theoretical and numerical results related to ray tracing, optical appearance, and the formation of shadows in such systems.

First, the theoretical foundations of the gravitational deflection of light are presented, starting from a spherically symmetric, asymptotically flat, and static metric. Key concepts such as the impact parameter, null geodesics, critical orbits, and the role of the photon sphere are introduced.

Next, a comparative study is carried out between the Schwarzschild and Kerr spacetimes, based on numerical simulations of ray tracing. The differences arising from black hole rotation are analyzed, including frame dragging and the breakdown of spherical symmetry, as well as how these effects modify the light trajectories and the visual appearance of the black hole.

In addition, emission models from thin accretion disks are incorporated, allowing for the construction of observed intensity maps and the generation of simulated optical images of black holes. Three representative emission profiles are studied, each reflecting different physical assumptions about the radial distribution of luminosity in the disk.

Finally, the shape of the Kerr black hole shadow is analyzed as a function of the spin parameter and the polar viewing angle. Through comparative plots, it is shown how the shadow becomes increasingly distorted as the spin grows, highlighting the direct influence of angular momentum on the observable features of the system.

For the development of this work, computational tools such as Mathematica and Python were used for the numerical integration of differential equations, visualization of light trajectories, construction of intensity maps, and generation of simulated black hole shadow images.

Índice general

1. Introducción	1
2. Espacio-tiempo simétrico tipo Schwarzschild	3
2.1. Condición para orbitas circulares	4
2.2. Ángulo de dispersión	7
2.3. Ángulo de escape	11
2.4. Aplicación I: espacio tiempo de Schwarzschild	13
2.5. Aplicación II: espacio tiempo de Reissner-Nordström	13
3. Trazado en el espacio-tiempo de Schwarzschild	15
4. Análisis de intensidad y apariencia óptica	18
5. Espacio tiempo de Kerr	23
5.1. Análisis en el plano ecuatorial	24
5.2. Trazado de rayos más allá del plano ecuatorial	26
5.3. Sombra	30
6. Nuevas líneas de investigación	32
7. Conclusiones	33

Capítulo 1

Introducción

De forma general, un objeto compacto (OC) es cualquier ente astrofísico cuya masa se encuentra delimitada dentro de ciertos límites. Así, esta definición alberga objetos como planetas, asteroides, cometas, entre otros. Sin embargo, algunos autores se refieren como OC (o también llamado estrella compacta) a únicamente enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros (AN) [1], [2]. También es común definir a un objeto compacto como el remanente que queda de una estrella cuando su combustible nuclear ha sido totalmente consumido [3]. Si el objeto en cuestión mantiene sus propiedades alrededor de un eje imaginario se dice que tiene simetría axial. Debido al teorema de rigidez [4], cualquier AN estacionario rotante, además de poseer un campo de Killing temporal, tiene un campo de Killing axial; en otras palabras, tiene simetría axial.

Por otro lado, en el contexto de la teoría de la relatividad general, una trayectoria nula (o de tipo luz) es aquella tal que cualquier intervalo espacio-temporal es igual a cero [5]. En específico, partículas sin masa, como fotones, siguen trayectorias nulas. Cabe destacar que la luz es deflectada cuando se propaga a través de un campo gravitatorio, fenómeno denominado lente gravitacional [6]. De hecho, dicho fenómeno fue la primera predicción experimental que fue comprobada sobre la teoría de la relatividad general [7] y sirve hasta la actualidad como herramienta de caracterización de objetos compactos.

Sin duda alguna, los objetos compactos han generado un gran interés por ser un laboratorio natural de gravitación y Física de altas energías [8]. A raíz de las primeras observaciones directas realizadas hacia los agujeros negros M87* [9] y Sgr A* [10], se ha comenzado a

profundizar en sus características ópticas, tales como su apariencia [11], [12], [13], [14] o su sombra [15], propiedades que surgen del comportamiento de las trayectorias nulas en presencia del AN. Debido al teorema de ausencia de pelo [16], un AN puede ser caracterizado completamente por 3 propiedades: su carga, su masa y su momento angular; la modulación de estas 3 propiedades produce una firma observacional distinta. Por lo tanto, el estudio de trayectorias nulas deflectadas por un AN permite su caracterización y análisis.

Como se explicó antes, una de las firmas observacionales de un agujero negro (AN) es su sombra: la región oscura que aparece porque los rayos de luz, al propagarse en las cercanías del AN, no alcanzan al observador debido a que terminan cayendo en el horizonte de eventos. Esta región está determinada por las trayectorias nulas que, al ser enviadas hacia atrás desde el plano de observación, se ven atrapadas por el campo gravitatorio del AN. Aunque comúnmente se asocia el borde de la sombra con la órbita de fotones (o *photon ring*), en realidad, existen trayectorias —llamadas retrógradas— que pueden llegar al observador desde regiones por debajo de este anillo, sin necesariamente pasar por él [15].

La sombra no coincide con el propio horizonte. Cuando un haz de luz pasa cerca del AN ocurren dos comportamientos básicos: (i) cruza el horizonte y se pierde o (ii) es desviado y escapa. Entre ambos extremos existe una órbita crítica —el anillo de fotones— en la que los fotones giran de forma inestable antes de ser absorbidos o expulsados [17]. La proyección de este anillo en el cielo delimita la silueta que llamamos sombra del AN.

El objetivo del presente trabajo es analizar el comportamiento de trayectorias nulas en presencia del campo gravitatorio de un objeto compacto, con especial atención a los casos de los agujeros negros de Schwarzschild y Kerr. Para ello, se aplicarán diversos resultados teóricos —como las ecuaciones de movimiento, el parámetro de impacto y modelos de intensidad emitida— mediante simulaciones numéricas implementadas en Wolfram Mathematica y Python¹.

¹Repositorio de los códigos en GitHub, de acceso público.

Capítulo 2

Espacio-tiempo simétrico tipo Schwarzschild

Este tipo de espacios-tiempos cumplen principalmente tres características [18]:

- **Asintóticamente plana:** Si se tiende la coordenada radial hacia el infinito, entonces se corresponde con el espacio-tiempo de Minkowski.
- **Esféricamente simétrica:** Conserva sus propiedades sin importar su dirección, en otras palabras, es invariante bajo la transformación de un elemento de $SO(3)$.
- **Estático:** Se deben cumplir dos distinciones, la primera es que exista un campo de Killing temporal y, segundo, que los elementos cruzados con el tiempo (g_{ti}) sean nulos.

Para el presente escrito, se va a utilizar el sistema de unidades geométrico ($G = 1$ y $c = 1$) y la signatura de la métrica será $(- + + +)$. De esta manera, se escribe el elemento de línea de este tipo de métricas, en coordenadas espaciales esféricas, como:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r) (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.1)$$

Se denota que si se toma $A(r) = 1$; entonces, se estaría en el caso de una métrica ultra-estática [19]. Para que este elemento de línea cumpla la condición de planitud asintótica, entonces los coeficientes A , B y C deben cumplir la siguiente condición límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) &= 1 \\
\lim_{r \rightarrow \infty} B(r) &= 1 \\
\lim_{r \rightarrow \infty} C(r) &= r^2
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Dado que la métrica no posee una dependencia explícita con las coordenadas axial (ϕ) y temporal (t), existen dos vectores de Killing asociados; que, en la base coordenada escogida, serían $\xi_t = \partial_t$ y $\xi_\phi = \partial_\phi$. Sea un cierto parámetro afín λ ; entonces, de los vectores de Killing se puede hallar una cantidad constante como el producto interno entre $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ y ξ^μ [16]. Así, se forma $E = -g_{\mu\nu}u^\mu\xi_t^\nu = A(r)\dot{t}$ y $L = g_{\mu\nu}u^\mu\xi_\phi^\nu = C(r)\dot{\phi}$, cantidades usualmente asociadas a la energía y el momento angular. Sea $b = L/E$, el parámetro de impacto, cantidad constante a lo largo de la trayectoria, entonces:

$$b = \frac{C(r)\dot{\phi}}{A(r)\dot{t}} \tag{2.3}$$

Por medio de la definición de trayectoria nula y de la ecuación del elemento de línea (2.1), se obtiene la ecuación de las geodésicas nulas:

$$-A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + C(r)\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right) = 0 \tag{2.4}$$

Debido a la simetría esférica de este espacio-tiempo, sin perder generalidad, a partir de ahora se tomará $\theta = \pi/2$. Por medio de la ecuación (2.3) y (2.4), se llega a deducir la ecuación de movimiento radial del sistema:

$$\dot{r}^2 = \frac{L^2}{C(r)B(r)} \left(\frac{C(r)}{b^2 A(r)} - 1 \right) \tag{2.5}$$

2.1. Condición para orbitas circulares

Ya desde la introducción del presente escrito, se habló sobre 3 regímenes que tienen los haces de luz cuando interaccionan con un AN. Es de particular interés obtener cuáles son las condiciones que se deben cumplir para la existencia de una órbita circular. Sea $R(r) =$

$C(r)/(A(r)b^2) - 1$; entonces, si se deriva la ecuación (2.5) con respecto al parámetro afín, se obtiene:

$$\ddot{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{B'}{B} + \frac{C'}{C} \right) \dot{r}^2 = \frac{C'}{2C} \dot{r}^2 + \frac{E^2}{2B} \left(\frac{C'}{C^2} b^2 - \frac{A'}{A^2} \right) \quad (2.6)$$

Donde el símbolo prima ($'$) representa d/dr . Luego, si se utiliza la expresión (2.5) en (2.6), tomando $D(r) = \frac{C'(r)}{C(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)}$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\ddot{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{B'}{B} + \frac{C'}{C} \right) \dot{r}^2 = \frac{E^2}{2AB} D(r) \quad (2.7)$$

Ahora, para que exista una órbita circular, necesariamente tanto la velocidad radial como la aceleración radial deben anularse ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$), y, por lo tanto, se cumplirá que:

$$D(r_c) = D_c = 0 \quad (2.8)$$

Donde r_c representa el radio de la esfera (o anillo) de fotones y el subíndice c hace referencia al régimen alcanzado, que al presentar divergencias e inestabilidad al sistema se lo suele denominar crítico. Por otro lado, se puede comprobar también que $R_c = 0$. Si se considera además el resultado de la expresión (2.8), entonces, de forma equivalente, también se cumple que $R'_c = C_c D_c / (b^2 A_c) = 0$. Estos resultados son útiles para determinar el radio de la esfera de fotones en una métrica que satisfaga las condiciones planteadas en este apartado.

Cuando el haz de luz se encuentra en su punto de máxima aproximación al centro gravitacional ($r = r_0$), se cumple que $\dot{r} = 0$. Luego, partiendo de la ecuación (2.5), se establece una relación entre el parámetro de impacto y las funciones métricas evaluadas en ese punto:

$$\left(\frac{C(r)}{b^2 A(r)} - 1 \right) = 0 \rightarrow b = \sqrt{\frac{C_0}{A_0}} \quad (2.9)$$

Donde $A_0 = A(r_0)$ y $C_0 = C(r_0)$. Hasta este punto, se ha hablado sobre la principal condición para la órbita de fotones ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$). Se ha demostrado que una condición equivalente es que $D(r) = 0 \rightarrow r = r_c$. Ahora, usando el último resultado, se establece

una forma llamada *límite de deflexión fuerte* [20]. Dicho límite se define matemáticamente como el límite cuando r_0 se aproxima a r_c (radio relacionado a la condición de $\dot{r} = \ddot{r} = 0$). De esta manera, se puede definir el parámetro de impacto crítico (b_c) como:

$$b_c = \lim_{r_0 \rightarrow r_c} \sqrt{\frac{C_0}{A_0}} \quad (2.10)$$

Existen otras maneras de caracterizar una órbita de fotones, aunque todas ellas son análogas a considerar que se anulen $\dot{r}$ y $\ddot{r}$. Por ejemplo, algunos autores caracterizan la formación de un anillo de fotones por medio de un potencial efectivo $V(r)$. Por ejemplo, Tsukamoto [20] propone que:

$$\dot{r}^2 = V(r) \rightarrow V(r) = \frac{R(r)L^2}{C(r)B(r)} \quad (2.11)$$

Derivando esta expresión, se puede demostrar que:

$$V'(r) = \frac{L^2}{B(r)C(r)} \left[R'(r) - R(r) \left(\frac{C'(r)}{C(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) \right] \quad (2.12)$$

Es evidente que, en el límite de deflexión fuerte, a partir de la ecuación (2.11), si se cumple que $\dot{r} = 0$, entonces el potencial efectivo también se anula, es decir, $V(r_c) = 0$. Por otro lado, como se ha demostrado previamente, dado que $R_c = R'_c = 0$, se sigue que $V'(r_c) = 0$.

En otras palabras, para que exista una órbita circular de fotones, se debe cumplir simultáneamente la siguiente condición:

$$V(r_c) = V'(r_c) = 0 \quad (2.13)$$

Además, el signo del segundo derivado del potencial efectivo en r_c determina la estabilidad de dicha órbita. En particular:

- Si $V''(r_c) > 0$, la órbita circular es estable.
- Si $V''(r_c) < 0$, la órbita circular es inestable.

En el caso de los agujeros negros astrofísicamente relevantes (como Schwarzschild o Kerr), las órbitas circulares de fotones se ubican en un máximo del potencial efectivo, es decir,

cumplen $V''(r_c) < 0$, lo que indica que son inestables: pequeñas perturbaciones provocan que el fotón escape hacia el infinito o caiga hacia el horizonte.

Por otro lado, otros autores como Perlick et al. [15] definen un potencial efectivo considerando que:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + V(r) = 0 \quad (2.14)$$

Debido a la regla de la cadena, $\dot{r} = (dr/d\phi)\dot{\phi}$, utilizando la expresión (2.5), se puede demostrar que:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{C(r)R(r)}{B(r)} \rightarrow V(r) = \frac{C(r)R(r)}{B(r)} \quad (2.15)$$

Debido a que el nuevo potencial efectivo $V(r)$ depende directamente de $R(r)$ y su derivada $V'(r)$ de $R'(r)$, se deduce que, en el límite de deflexión fuerte, también se cumple que: $V(r_c) = V'(r_c) = 0$.

2.2. Ángulo de dispersión

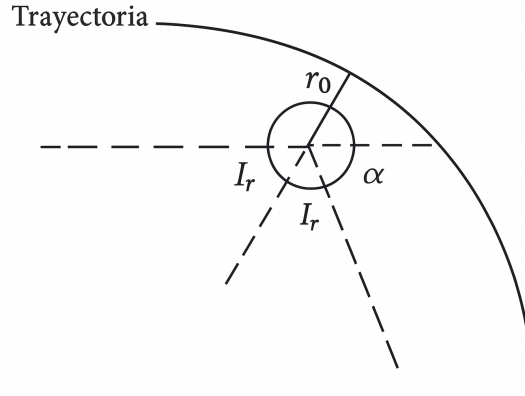


Figura 2.1: Esquema de un rayo de luz siendo deflectado por un campo gravitatorio intenso. La circunferencia representa un OC.

Como se observa en la figura, el ángulo de dispersión α de un haz de luz cuando este se ve inmerso en un campo gravitacional de un OC puede ser expresado como:

$$\alpha(r_0) = \pi - I(r_0) \leftrightarrow I(r_0) = 2I_r \quad (2.16)$$

Por medio de la expresión (2.15), I_r se obtiene como ¹:

$$I_r = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{\frac{R(r)C(r)}{B(r)}}} \quad (2.17)$$

Se sugiere tomar un cambio de variable para resolver la integral propuesta en (2.17). Por ejemplo, Bozza [21] propone utilizar:

$$z = \frac{A(r) - A(r_0)}{1 - A(r_0)} \quad (2.18)$$

En un principio, este cambio de variable resulta atractivo, ya que permite manejar las divergencias logarítmicas que surgen al resolver el problema, facilitando así la separación explícita de la parte divergente de la integral. No obstante, este cambio presenta limitaciones: falla en el caso de métricas ultraestáticas, ya que en dicho escenario el denominador de la transformación se anula, y también complica la resolución en métricas como la de Reissner–Nordström (agujero negro con carga y sin rotación) [16].

Para superar estas dificultades, Tsukamoto [20] propone una transformación alternativa (ver expresión (19)), que no solo simplifica el análisis en una amplia clase de métricas, sino que además incluye de forma natural el caso ultraestático, lo que la convierte en una opción más robusta para el tratamiento general de este tipo de geometrías.

$$z = 1 - \frac{r_0}{r} \quad (2.19)$$

Así, se reescribe:

$$\begin{aligned} I(r_0) &= 2 \int_0^1 f(z, r_0) dz \\ f(z, r_0) &= \frac{2r_0}{\sqrt{G(z, r_0)}} \\ G(z, r_0) &= \frac{R(r)C(r)}{B(r)} (1 - z)^4 \end{aligned} \quad (2.20)$$

¹De la expresión que se hace referencia surgen dos signos en la raíz, cuando el haz ingresa al campo, se usa signo negativo y cuando el haz sale del campo, se usa el positivo. Debido a la simetría del sistema, simplemente basta tomar un caso y duplicar el resultado.

Se observa que la integral en la expresión (2.20) presenta una divergencia en el límite de deflexión fuerte. Por esta razón, resulta conveniente descomponer la integral en dos contribuciones: una parte regular, I_R , que permanece bien definida lejos del límite, y una parte divergente, I_D , que captura el comportamiento singular cerca de dicho régimen. De este modo, la integral total puede escribirse como $I(r_0) = I_R(r_0) + I_D(r_0)$.

Sea una función arbitraria y holomorfa $F(z)$, entonces, si se realiza una expansión en series alrededor de $z = 0$ y se utiliza la regla de la cadena, se puede demostrar que:

$$F(r) = F_0 + F'_0 r_0 z + \left(r_0 F'_0 + \frac{r_0^2}{2} F''_0 \right) z^2 + O(z^3) \quad (2.21)$$

Donde $F_0 = F(r_0)$. Luego, la ecuación (2.21) permite expresar cualquiera de las funciones ya expuestas en esta sección con respecto a una expansión en serie de potencias. En particular, se puede demostrar que:

$$R(r) = D_0 r_0 z + \left[\frac{r_0}{2} \left(\frac{C''_0}{C_0} - \frac{A''_0}{A_0} \right) + \left(1 - \frac{A'_0 r_0}{A_0} \right) D_0 \right] r_0 z^2 + O(z^3) \quad (2.22)$$

A continuación, considerando que en la función $G(z, r_0)$ aparece un término del tipo $(1 - z)^4$, es necesario expandir este factor y multiplicarlo por las expansiones en serie de las funciones $R(r)$, $C(r)$ y $B(r)$, trabajando hasta orden $O(z^3)$. De esta manera, se obtiene:

$$\begin{aligned} G(z, r_0) &= c_1(r_0) z + c_2(r_0) z^2 + O(z^3) \\ c_1(r_0) &= \frac{C_0 D_0 r_0}{B_0} \\ c_2(r_0) &= \frac{C_0 r_0}{B_0} \left\{ D_0 \left[\left(D_0 - \frac{B'_0}{B_0} \right) r_0 - 3 \right] + \frac{r_0}{2} \left(\frac{C''_0}{C_0} - \frac{A''_0}{A_0} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Debido a la construcción de la expresión 2.23, se considera que este término se corresponde con las cercanías del régimen de deflexión fuerte y, por tanto, se relaciona con I_D . En este régimen, se observa que el coeficiente c_1 se anula, lo que implica que la divergencia de la integral correspondiente es del tipo $1/z$. En otras palabras, la integral presenta una divergencia logarítmica cuando $z \rightarrow 0$. Por otro lado, si se realiza una expansión del parámetro de impacto $b(r_0)$ alrededor de r_c , se obtiene:

$$b(r_0) = b_c + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{C_c}{A_c}} D'_c (r_0 - r_c)^2 + O((r_0 - r_c)^3) \quad (2.24)$$

Expandiendo c_1 de (2.23) en series alrededor de $r_0 = r_c$, y utilizando el resultado en (2.24), entonces, se puede demostrar que:

$$c_1(r_0) \approx \left(\frac{b}{b_c} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{2C_c r_c \sqrt{D'_c}}{B_c} \right) \quad (2.25)$$

A partir de los resultados obtenidos, se evalúa la integral I_D para valores de r_0 cercanos a r_c (o, de forma equivalente, para valores del parámetro de impacto b próximos a b_c). Utilizando la expresión (2.25), se obtiene:

$$I_D(r_0) = \frac{4r_c}{\sqrt{c_2(r_c)}} \left[-\log \left(\frac{b}{b_c} - 1 \right) + 4 \log \left(\frac{1}{2} \left(D_c^{1/4} \sqrt{r_c} + \sqrt{4 \sqrt{\frac{b}{b_c} - 1} + D_c^{1/2} r_c} \right) \right) \right], \quad (2.26)$$

Dadas las características del caso de estudio, es posible despreciar el término $\sqrt{b/b_c - 1}$ frente a $D_m^{1/2} r_m$, lo que permite simplificar la expresión obtenida anteriormente. Esta aproximación introduce un error del orden $O((b - b_c) \log(b - b_c))$. De este modo, se obtiene la siguiente forma aproximada para $I_D(b)$:

$$I_D(b) = \frac{-r_m}{\sqrt{c_2(r_m)}} \log \left(\frac{b}{b_c} - 1 \right) + \frac{r_m}{\sqrt{c_2(r_m)}} \log(r_m^2 D'_m) + O((b - b_c) \log(b - b_c)) \quad (2.27)$$

El término principal, con divergencia logarítmica en $b \rightarrow b_c$, refleja el hecho de que los rayos con parámetro de impacto cercano a b_c realizan un número cada vez mayor de órbitas alrededor del AN antes de escapar. Este comportamiento es característico del límite de deflexión fuerte, donde las trayectorias se acercan a la órbita inestable de fotones.

Por otro lado, por construcción, la parte regular de la integral puede reescribirse como $I_R = I - I_D$. No obstante, si se centra el análisis en el límite de deflexión fuerte, es posible expandir esta expresión alrededor del punto crítico $r_0 = r_c$. Esto permite aproximar la parte regular como:

$$I_R = \int_0^1 f(z, r_m) dz + O((b - b_c) \log(b - b_c)) \quad (2.28)$$

Finalmente, usando (2.27) y (2.28) en (2.16), se demuestra que:

$$\alpha = -\hat{a} \log \left(\frac{b}{b_c} - 1 \right) + \hat{b} + O((b - b_c) \log(b - b_c)) \quad (2.29)$$

Donde:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{2B_m A_m}{C_m'' A_m - A_m'' C_m}}$$

$$\hat{b} = \hat{a} \log \left(r_m^2 \left(\frac{C_m''}{C_m} - \frac{A_m''}{A_m} \right) \right) + I_R(r_m) - \pi$$

Este resultado, aplicable a lentes gravitacionales fuertes en varios contextos experimentales, constituye una expresión analítica que permite cuantificar la deflexión de los rayos de luz en las proximidades de un objeto compacto. En general, se destaca la alta sensibilidad del ángulo de deflexión cuando el parámetro de impacto se aproxima a su valor crítico, es decir, en el límite de deflexión fuerte.

2.3. Ángulo de escape

A pesar de haber obtenido una ecuación que generaliza la deflexión de un haz de luz en el régimen de deflexión fuerte (véase la ecuación (2.29)), es importante mencionar uno de los primeros intentos por caracterizar este fenómeno: el realizado por Synge en 1965 [22]. En su estudio, el autor analizó la trayectoria de un haz de luz que interactúa en las cercanías de un OC², introduciendo el concepto de ángulo de escape α_{sc} .

Como se ilustra en la figura 2.2(A), dicho ángulo describe la situación límite en la que un haz de luz proveniente de una fuente lejana se acerca al agujero negro pero no alcanza a cruzar el horizonte de eventos, quedando justo al borde de ser absorbido.

²En realidad, Synge se refiere a estrellas con campos gravitacionales intensos; sin embargo, los cuerpos considerados en su análisis pueden incluirse dentro del concepto general de objeto compacto presentado en este trabajo.

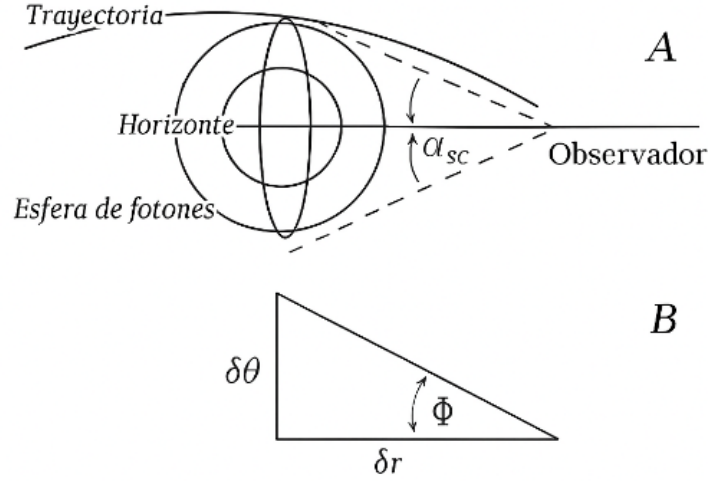


Figura 2.2: A) Esquema de formación de ángulo de escape. B) Esquema diferencial de la situación mostrada en A)

Se parte del supuesto de que la medición del *ángulo de escape* se realiza manteniendo fijas las coordenadas axial (ϕ) y temporal (t). Esquemáticamente, esto corresponde a una sección diferencial como la que se muestra en la figura 2.2(B).

Bajo esta configuración, y aplicando una relación trigonométrica entre los desplazamientos radiales y angulares en el espacio curvo, se obtiene:

$$\cot(\Phi) = \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{\phi\phi}}} \frac{dr}{d\phi} = \sqrt{\frac{B(r)}{C(r)}} \frac{dr}{d\phi}, \quad (2.30)$$

Usando la expresión (2.15), se obtiene que:

$$\cot \Psi = \sqrt{R(r)} = \sqrt{\frac{C(r)}{A(r)b^2} - 1} \quad (2.31)$$

Para determinar el ángulo buscado, se asume que el observador se encuentra situado en r_{obs} . Además, dado que el ángulo de escape está asociado al límite en el que el haz de luz apenas logra evitar caer en el agujero negro, se debe tomar el límite de deflexión fuerte sobre el parámetro de impacto.

Partiendo de la expresión (2.31), se tiene:

$$\sin(\Phi) = b^2 \frac{A(r)}{C(r)} \longrightarrow \sin(\alpha_{\text{sc}}) = \lim_{b \rightarrow b_c} \sin(\Phi)|_{r=r_{\text{obs}}} = b_c^2 \frac{A_{\text{obs}}}{C_{\text{obs}}} \quad (2.32)$$

Donde $A_{obs} = A(r_{obs})$ y $C_{obs} = C(r_{obs})$.

2.4. Aplicación I: espacio tiempo de Schwarzschild

En este caso, los coeficientes del elemento de línea mostrado en (2.1) cumplen que [16]:

$$A(r) = B^{-1}(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad C(r) = r^2 \quad (2.33)$$

Ya sea por medio de la expresión (2.8) o (2.13), se puede demostrar que $r_c = 3M$, el radio de la órbita de fotones. Asimismo, utilizando la ecuación (2.10) se determina que $b_c = 3\sqrt{3}M$. Utilizando estos resultados sobre (2.32), se llega a concluir el mismo resultado hallado por [22]:

$$\sin^2(\alpha_{sc}) = \frac{27M^2(1 - 2M/r_{obs})}{r_{obs}^2} \quad (2.34)$$

Finalmente, por medio de las expresiones en (2.29), se halla los coeficientes $\hat{a}$ y $\hat{b}$:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= 1 \\ \hat{b} &= \log(6) - \pi + 2 \log(6(2 - \sqrt{3})) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Con las igualdades en (2.35), se obtiene una expresión analítica completa para el ángulo de deflexión de un rayo en el régimen de deflexión fuerte. A modo de comparación, este resultado es igualmente hallado por [21] y [20].

2.5. Aplicación II: espacio tiempo de Reissner-Nordström

Por otro lado, para este caso, se cumplirá que [16]:

$$A(r) = B^{-1}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad C(r) = r^2 \quad (2.36)$$

Donde Q representa la carga. Tomando $Q \leq M$, existe un horizonte de eventos en $r_H = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$. Asimismo, aplicando la expresión (2.8), se encuentra que el radio de la esfera de fotones es:

$$r_c = \frac{3M + \sqrt{9M^2 - 8Q^2}}{2} \quad (2.37)$$

Seguidamente, el parámetro de impacto crítico se halla por medio de la expresión (2.10):

$$b_c = \frac{r_c}{\sqrt{r_c M - Q^2}} \quad (2.38)$$

Se puede demostrar que esta expresión es equivalente al parámetro de impacto crítico hallado por Zakharov [23]. Utilizando estas expresiones, se halla el ángulo de escape como:

$$\sin(\alpha_{sc}) = \frac{r_c}{\sqrt{r_c M - Q^2}} \frac{1 - 2M/r_{obs} + Q^2/r_{obs}^2}{r_{obs}^2} \quad (2.39)$$

Finalmente, por medio de las igualdades en (2.29):

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{r_c}{\sqrt{3Mr_c - 4Q^2}} \\ \hat{b} &= \hat{a} \log \left[\frac{8(3Mr_c - 4Q^2)^3}{M^2 r_c^2 (Mr_c - Q^2)^2} \left(2\sqrt{Mr_c - Q^2} - \sqrt{3Mr_c - 4Q^2} \right)^2 \right] - \pi \end{aligned} \quad (2.40)$$

Las aplicaciones presentadas hasta este punto ilustran el potencial práctico de las expresiones analíticas derivadas. A partir de ellas, es posible analizar diversas características de agujeros negros, como los de Schwarzschild o Reissner–Nordström.

Por ejemplo, las trayectorias de los rayos de luz que interactúan con estos objetos pueden clasificarse según el valor del parámetro de impacto crítico b_c ; la sombra del agujero negro puede definirse a partir del radio crítico de la órbita de fotones r_c ; y la desviación angular que sufren los rayos puede cuantificarse mediante el ángulo de deflexión α .

Capítulo 3

Trazado en el espacio-tiempo de Schwarzschild

En este punto, se han derivado diversas características relacionadas con la deflexión de trayectorias nulas en un amplio conjunto de métricas. Dentro de este conjunto, se puntualiza un caso de especial interés: el espacio-tiempo de Schwarzschild. A partir de la ecuación (2.15), se obtiene la siguiente expresión para describir la trayectoria de rayos de luz en dicha geometría:

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{r^2}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (3.1)$$

Considerando rayos provenientes de una fuente lejana, el signo negativo en la ecuación (3.1) se utiliza cuando los rayos se acercan al agujero negro, mientras que el signo positivo se emplea cuando los rayos se alejan de él. Esta distinción solo es relevante para valores del parámetro de impacto $b > b_c$, ya que en ese rango los rayos aún pueden ser deflectados sin cruzar el horizonte de sucesos.

Para trazar las trayectorias, se integra numéricamente la ecuación (3.1), disparando rayos desde el infinito con un ángulo inicial ϕ , y variando el valor de b . En la simulación, el procedimiento se implementa de la siguiente manera:

- Desde el infinito (es decir, un valor suficientemente grande de r) hasta el punto de aproximación mínima r_0 , se utiliza el signo negativo.

- Desde r_0 de regreso al infinito, se emplea el signo positivo.

Para el intervalo $b < b_c$, el rayo ingresa al horizonte ($r = r_H$), entonces la integración se hace con signo negativo desde el infinito hasta un valor muy próximo a r_H . Es importante denotar que para valores próximos a b_c se pueden producir divergencias numéricas en el proceso de integración, por lo que se requiere una alta precisión.

Se define $n = \phi/2\pi$ como el número de vueltas u órbitas completas que realiza un rayo alrededor del agujero negro en función del parámetro de impacto. Diversos autores, como [24] y [25], proponen clasificaciones del comportamiento de los rayos de luz según distintos intervalos de n . La tabla 3.1 resume dicha clasificación, mientras que la figura 3.1 muestra la relación entre n y b , utilizando un código de colores que sigue la categorización descrita.

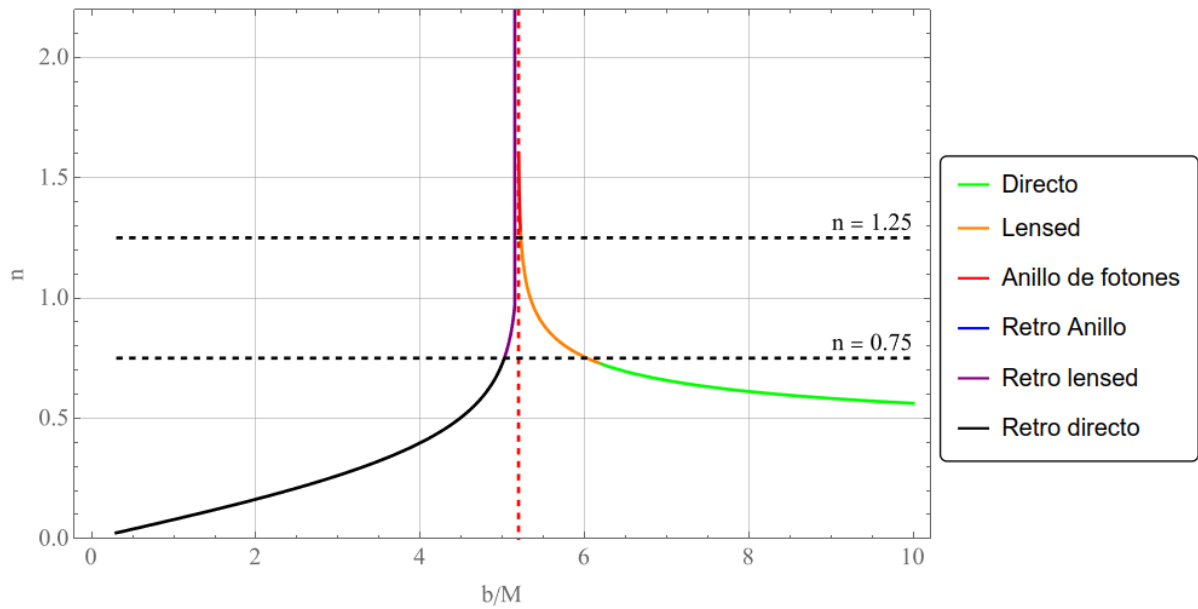


Figura 3.1: Número de orbitas realizado por los rayos desde un observador en el infinito.

Intervalo (n)	Nombre	Intervalo (b)	Nombre	Intervalo (b)
$0,75 \geq n > 0$	Directo	$b > 6,17$	Retro directo	$5,19 < b < b_c$
$1,25 \geq n > 0,75$	Lensed	$5,22 < b < 6,17$	Retro lensed	$5,02 < b < 5,19$
$n > 1,25$	Anillo de fotones	$b_c < b < 5,22$	Retro anillo	$b < 5,02$

Cuadro 3.1: Clasificación de trayectorias según los valores de n y b . Se ha tomado $M = 1$ y $b_c = 3\sqrt{3}M$.

Es posible que se pueda generar una confusión debido a que la noción de anillo de fotones

presentado previamente era para un valor concreto ya sea de r o b , mientras que en el cuadro 3.1 se presenta un intervalo. Ambas connotaciones son igualmente válidas, de hecho, existe una amplia gama de fenómenos que son denominados como anillo de fotones relacionados con la deflexión de trayectorias nulas alrededor de un OC. Esto se discute en [15].

Como los regímenes directo y lensed cubren casi todo el rango del parámetro de impacto —a diferencia del régimen de anillo—, la imagen resultante estará dominada por rayos que ni siquiera completan 1,25 órbitas alrededor del AN. Por ejemplo, en la figura 3.2 se trazaron las trayectorias representativas de cada régimen (cuadro 3.1). Se observa que, una vez que los rayos abandonan el régimen directo y pasan al lensed, su recorrido se concentra en zonas cada vez más estrechas. Esto aumenta la intensidad aparente, pero en un área muy reducida, resultado discutido en [23] y en [2].

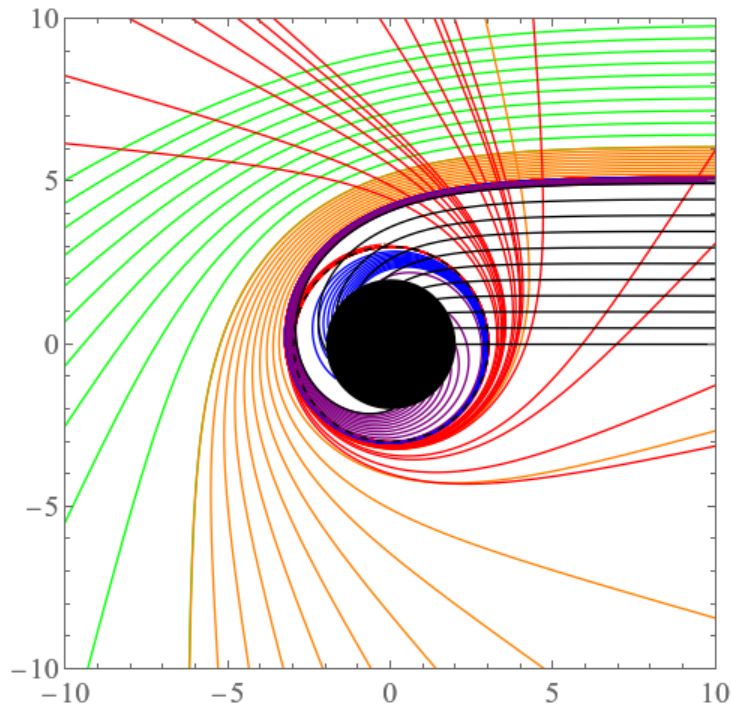


Figura 3.2: Trazado de rayos desde el infinito hasta el AN en el plano ecuatorial en función de las coordenadas radial (r) y axial (ϕ). En negro se muestra el horizonte de eventos y con una línea entrecortada el radio de la órbita de fotones. Las distancias están medidas en unidades de $M = 1$.

Capítulo 4

Análisis de intensidad y apariencia óptica

Debido al surgimiento del interés observacional en la apariencia óptica de un AN, es fundamental estudiar el comportamiento de la intensidad de la luz tal como sería medida por un observador ubicado en el infinito.

Con este propósito, se considera un conjunto de N partículas (fotones) confinadas en un volumen de espacio de fases $\mathbb{V}$. La función de distribución se define como $\rho = \frac{N}{\mathbb{V}}$. El volumen $\mathbb{V}$ está compuesto por un volumen espacial $\mathbb{V}_x$ y un volumen en el espacio de momentos $\mathbb{V}_p$, y su evolución está gobernada por las geodésicas seguidas por las partículas. Por el teorema de Liouville en espacio-tiempos curvos [16], este volumen total no varía a lo largo del flujo geodésico, es decir, es una cantidad conservada.

Dado que el número de partículas N también permanece constante, se concluye que la función de distribución ρ es invariante. Además, esta función puede reescribirse como:

$$\rho = \frac{1}{h^4} \frac{I_\nu}{\nu^3} \quad (4.1)$$

Donde h es la constante de Planck e I_ν es la intensidad específica (para un valor de frecuencia ν). Por lo tanto, se deduce que:

$$\left(\frac{I_\nu}{\nu^3} \right)_{\text{observado}} = \left(\frac{I_\nu}{\nu^3} \right)_{\text{emitido}} \quad (4.2)$$

Debido a la ecuación del corrimiento al rojo gravitacional [16], y considerando que el observador se encuentra en el infinito y que se trabaja con una métrica asintóticamente plana, se establece la siguiente relación entre la frecuencia observada y la frecuencia emitida:

$$\nu_{\text{obs}} = \nu_{\text{em}} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \quad (4.3)$$

Además, considerando la ecuación (4.3), para obtener una expresión de la intensidad observada total, se debe integrar la ecuación (4.2) para todo el rango de ν_{emitido} , que de forma general se considerará $(0, \infty)$. Así, siendo I la intensidad total, se obtiene:

$$I_{\text{observado}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 I_{\text{emitido}} \quad (4.4)$$

Se supone que la intensidad observada proviene de los rayos que atraviesan el disco de acreción, que, considerando que el observador se encuentra en dirección de uno de los polos del AN, estaría situado en el plano $\phi = \pi/2$. Como la ecuación (4.4) depende únicamente de la coordenada radial, lo primero es construir la función de transferencia (r_m): el valor de r en el que un rayo cruza el plano del disco en su m -ésima intersección [24], [27]. Tal como se explicó antes, la contribución de los rayos que completan varias órbitas alrededor del agujero negro es despreciable. Por ello, basta con calcular las tres primeras funciones de transferencia, es decir, para $m = 1, 2, 3$ ($\phi = \pi/2$ emisión directa, $\phi = 3\pi/2$ emisión lensed y $\phi = 5\pi/2$ anillo de fotones) como se expone en la figura 4.1.

De esta manera, para una intensidad emitida dada, se puede encontrar una intensidad observada por medio de la ecuación (4.5):

$$I_{\text{observada}} = \sum_m \left(1 - \frac{2M}{r_m}\right) I_{\text{emitido}}|_{r_m} \quad (4.5)$$

Por lo tanto, solamente faltaría proponer algún modelo para I_{emitido} . Se corrobora que varios autores, como [24], [25], [28], [29], [30], proponen 3 modelos de discos delgados de acreción similares:

- Modelo I: Pico de emisión en la órbita cercana más estable para partículas con masa (r_{isco}). La intensidad decae asintóticamente hacia afuera mientras detrás el pico la

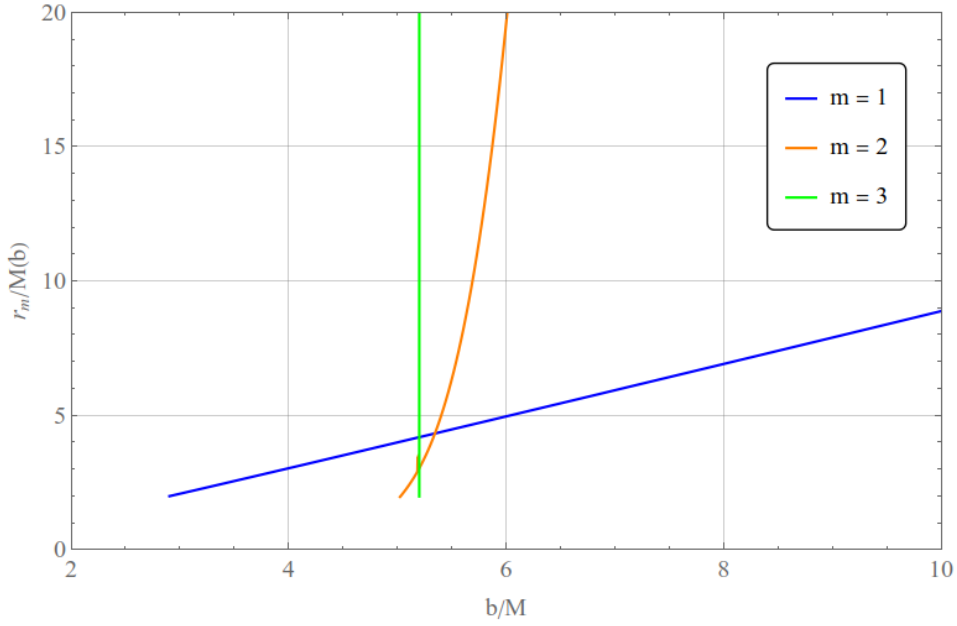


Figura 4.1: Las tres primeras funciones de transferencia para el AN de Schwarzschild.

intensidad es nula. Seguramente simula la intensidad intrínseca que emite un AN según el modelo de Novikov y Thorne [31].

$$I_{emitido}^I = \begin{cases} \frac{1}{(r - (r_{isco} - 1))^2} & \text{if } r \geq r_{isco}, \\ 0 & \text{if } r < r_{isco}. \end{cases} \quad (4.6)$$

- Modelo II: Pico de emisión en anillo de fotones (r_c). Después del pico existe una caída rápida de intensidad y detrás del pico no hay intensidad. Es un modelo parecido al primero en los extremos pero con el pico más delgado y en otra ubicación.

$$I_{emitido}^{II} = \begin{cases} \frac{1}{(r - (r_c - 1))^3} & \text{if } r \geq r_c, \\ 0 & \text{if } r < r_c. \end{cases} \quad (4.7)$$

- Modelo III: Pico en el horizonte de eventos (r_H). Después del pico la intensidad decae más lentamente en comparación con los otros modelos. La situación física representativa de este modelo sería considerar que el gas que rodea un AN todavía emite radiación incluso estando cerca del horizonte.

$$I_{emitido}^{III} = \begin{cases} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(r - 5)}{\frac{\pi}{2} - \arctan(r_H - 5)} & \text{if } r \geq r_H, \\ 0 & \text{if } r < r_H. \end{cases} \quad (4.8)$$

En la figura 4.2 se muestran los resultados obtenidos al aplicar los tres modelos descritos mediante la ecuación (4.5), utilizando los datos previamente presentados en la figura 4.1. La apariencia óptica para cada caso se genera a partir de una rotación axial del perfil de intensidad observada correspondiente, de modo que simula la imagen que vería un observador distante.

A simple vista, se observa que en los modelos I y II no hay emisión aparente para valores del parámetro de impacto menores a b_c , lo cual representa de forma clara la sombra del agujero negro. En contraste, en el modelo III, aunque también se conserva una región central oscura, se aprecia un brillo tenue cerca del borde definido por b_c , como resultado de la extensión de la emisión hasta zonas más próximas al horizonte.

El gráfico de intensidad observada revela que la mayor parte del brillo proviene de rayos en el régimen directo, con una contribución superior al 90 % en los tres modelos. El régimen lensed aporta aproximadamente un 4 %, 7 % y 9 % para los modelos I, II y III, respectivamente. En cambio, el régimen de anillo contribuye con menos del 1 % del total en todos los casos. Aunque este último produce un pico de intensidad elevado, su contribución espacial es muy limitada, por lo que su efecto visual es difícil de distinguir en la imagen final.

En general, la imagen final muestra:

- Un halo externo, correspondiente a rayos directos que escapan del agujero negro.
- Un anillo intermedio, producto del régimen lensed que genera un pico de intensidad bien definido.
- Un anillo interno, asociado a la órbita de fotones, que aunque puede alcanzar intensidades altas, resulta visualmente poco distinguible debido a su escasa extensión angular.

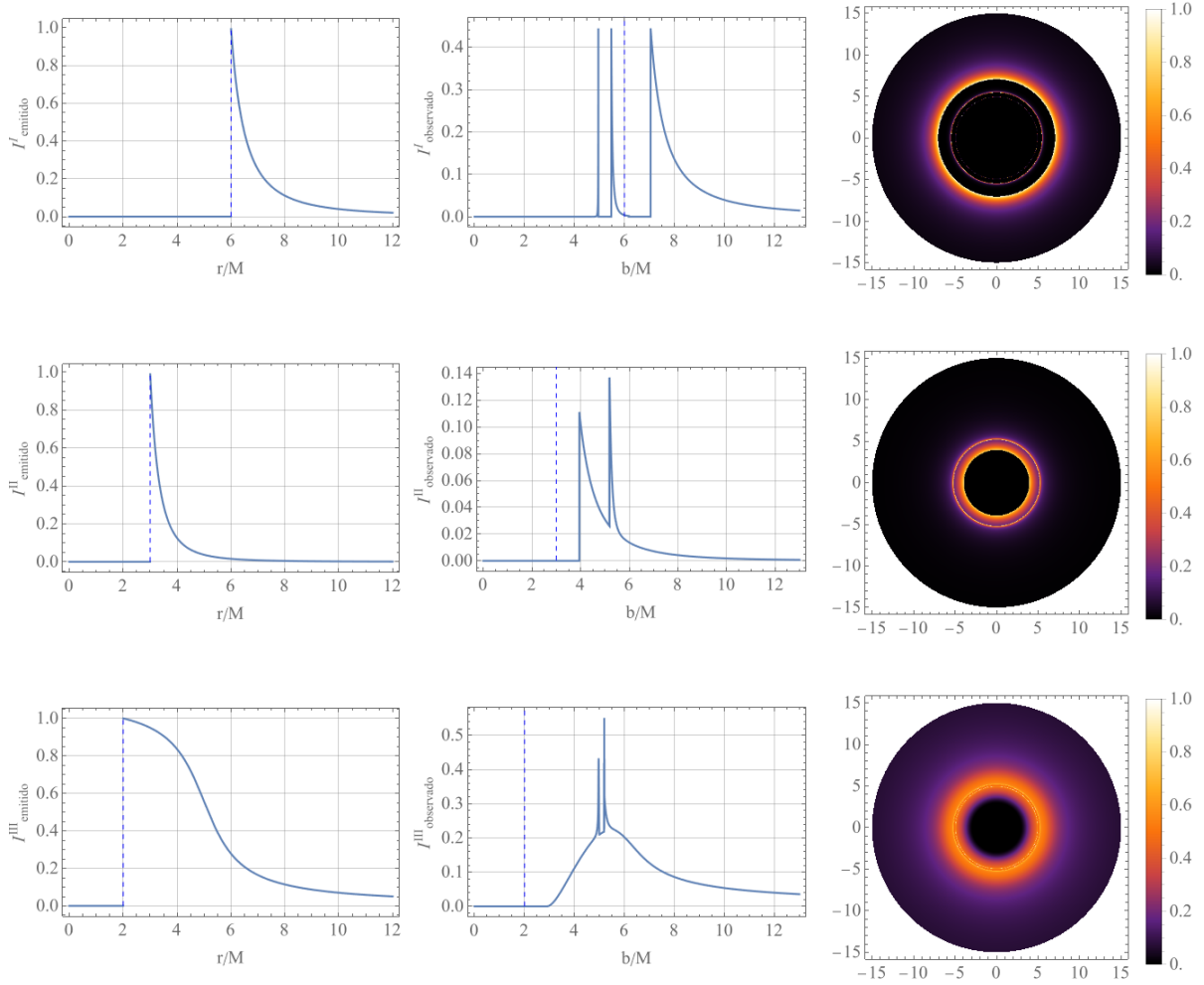


Figura 4.2: Apariencia óptica del AN según bajo diferentes modelos de discos de acreción. En la izquierda se observa la intensidad emitida y en el centro la intensidad observada. Mediante una línea entrecortada se graficó r_{isco} , r_c y r_H respectivamente. Se graficó la apariencia óptica a la derecha respecto a b/M y normalizandola respecto al máximo de intensidad alcanzado.

Capítulo 5

Espacio tiempo de Kerr

En las coordenadas de Boyer-Lindquist, se escribe el elemento de linea para el espacio-tiempo de Kerr como [16]:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt^2 - 2Mr a \sin^2(\theta) (dt d\phi + d\phi dt) \\ + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{\Sigma} \left((r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2(\theta) \right) d\phi^2 \quad (5.1)$$

Donde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$ y $a = J/M$ representa el momento angular por unidad de masa. Para evitar una singularidad desnuda [18], se toma necesariamente que $a \leq M$, o a su vez, en unidades de longitud de M , que $a \leq 1$. Este es el espacio-tiempo más general que se describe como estacionario (sin dependencia directa en t) y simétricamente axial (sin dependencia directa en ϕ) que presenta rotación (pero no carga). Además, presenta dos horizontes de eventos; aunque, para los propósitos de este escrito, se considerará solamente el externo $r_H = M + \sqrt{M^2 - a^2}$. Adicionalmente, existe una zona donde el arrastre giroscópico es imposible de evitar llamada ergoesfera, delimitada por $r_{ef} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$, lo que se denomina límite estático.

De la misma forma que se hizo con el caso del AN de Schwarzschild, se toma en cuenta que el elemento de linea en (5.1) no posee ninguna dependencia directa con t y ϕ . Por lo tanto, se pueden establecer dos vectores de Killing, uno asociado a la energía y el otro al momento angular:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{t} + \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{\phi} \\
L &= \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} ((r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta) \dot{\phi} - \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{t}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

5.1. Análisis en el plano ecuatorial

A diferencia del AN de Schwarzschild que tiene simetría esférica, este AN solo tiene simetría axial. Por lo tanto, tomar un valor concreto de θ si cambia las soluciones y se pierde generalidad. De hecho, la apariencia de este AN depende del ángulo de observación [32]. No obstante, debido a su sencillez y que los resultados guardan bastante similitud con el estudio previamente trabajado, se impone que $\theta = \pi/2$. Por lo tanto, se tiene que $\Sigma = r^2$ y de la expresión 5.2:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\Delta - a^2}{r^2} \dot{t} + \frac{2Mra}{\Sigma} \dot{\phi} \\
L &= \frac{1}{r^2} ((r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta) \dot{\phi} - \frac{2Mra}{r^2} \dot{t}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Resolviendo estas ecuaciones para $\dot{\phi}$ y $\dot{t}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\dot{t} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M}{r} \right) E - \frac{2aM}{r} L \right] \\
\dot{\phi} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) L + \frac{2aM}{r} E \right]
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Por otro lado, sea el lagrangiano del sistema:

$$2l = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \rightarrow l = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{4aM}{r} \dot{t} \dot{\phi} - \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M}{r} \right) \dot{\phi}^2 \tag{5.5}$$

Mediante una transformación de Legendre sobre la ecuación (5.5) se obtiene el hamiltoniano del sistema como:

$$\begin{aligned}
2H = & - \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} + \frac{2aM}{r}\dot{\phi} \right] \dot{t} + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 + \\
& + \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right)\dot{\phi} - \frac{2aM}{r}\dot{t} \right] \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Si se considera las expresiones en (5.3) y se puntualiza para trayectorias nulas, entonces:

$$2H = -E\dot{t} + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 + L\dot{\phi} = 0 \tag{5.7}$$

Esta es la ecuación de las geodésicas en el espacio tiempo de Kerr en el plano ecuatorial. Para obtener una ecuación radial se usa las expresiones en (5.4) sobre (5.7), con lo cual:

$$r^3\dot{r}^2 = E^2r^3 + r(E^2a^2 - L^2) + 2M(aE - L)^2 \tag{5.8}$$

Considerando la definición de parámetro de impacto (b), la expresión (5.8) puede ser reescrita definiendo un potencial efectivo como:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{\dot{r}^2}{L^2} + \frac{1}{r^2}V(r) \rightarrow V(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} - \frac{2M}{r} \left(1 \mp \frac{a}{b} \right)^2 \right) \tag{5.9}$$

Donde el signo negativo indica que el rayo es retrógrado con respecto a la rotación del agujero negro, mientras que el signo positivo corresponde al caso prógrado. Considerando que el parámetro afín puede absorber el factor L^2 , a partir de esta ecuación, junto con las expresiones (5.4), se puede obtener una formulación explícita para el movimiento radial del rayo en función de la coordenada axial. Además, como se explicó anteriormente, al imponer que tanto el potencial efectivo como su derivada radial se anulen simultáneamente, es posible determinar el parámetro de impacto crítico y el correspondiente radio crítico de la órbita de fotones [33]:

$$r_c = \frac{3M(b_c - a)}{b_c + a} \tag{5.10}$$

$$b_c = -a \mp 6M \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\pm \frac{a}{M} \right) \right) \tag{5.11}$$

Donde la diferencia entre un signo u otro depende de si la órbita en cuestión es retrógrada (signo negativo) o prógrada (signo positivo). Asimismo, siguiendo el mismo proceso

explicando en los apartados anteriores, también se puede hallar un ángulo de deflexión fuerte. De hecho, su forma simplificada termina siendo la misma, pero los coeficientes son mucho más extensos, como se muestra en [34].

Finalmente, a modo de ejemplo, en la figura 5.1 se muestra un ejemplo del trazado de trayectorias nulas provenientes de una fuente situada en el infinito (parte superior de la figura), para un agujero negro de Kerr con parámetro de rotación $a = 0,8$ en unidades de M , restringido al plano ecuatorial. Utilizando la ecuación 5.11, se determinó que $b_c \approx \{-6,7, 3,2\}M$.

A diferencia del caso de Schwarzschild, la característica más distintiva es el arrastre de los rayos inducido por la rotación del agujero negro, también conocido como frame dragging. Este efecto provoca una distorsión significativa en las geodésicas al aproximarse al horizonte de eventos. En términos generales, el comportamiento de las trayectorias sigue dependiendo principalmente del parámetro de impacto, aunque con asimetrías introducidas por la rotación.

5.2. Trazado de rayos más allá del plano ecuatorial

Para trazar los rayos en el espacio-tiempo de Kerr, es necesario determinar todas las ecuaciones de movimiento del sistema. Aunque en principio esto podría parecer un problema complejo, en realidad es resoluble de forma exacta, ya que el sistema es completamente integrable. Es decir, existen cuatro constantes de movimiento que permiten separar las ecuaciones.

Las dos primeras constantes provienen de los vectores de Killing asociados a las simetrías temporales y axiales de la métrica, ya discutidas previamente. A partir de este hecho, se obtienen las dos primeras ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}\Sigma \dot{t} &= -a(aE \sin^2 \theta - L) + \frac{(r^2 + a^2)(E(r^2 + a^2) - aL)}{\Delta} \\ \Sigma \dot{\phi} &= -\left(aE - \frac{L}{\sin^2 \theta}\right) + \frac{a(E(r^2 + a^2) - aL)}{\Delta}\end{aligned}\tag{5.12}$$

La tercera constante se corresponde con la ecuación de las geodésicas nulas $u^\mu u_\mu = 0$, que para este caso en concreto será:

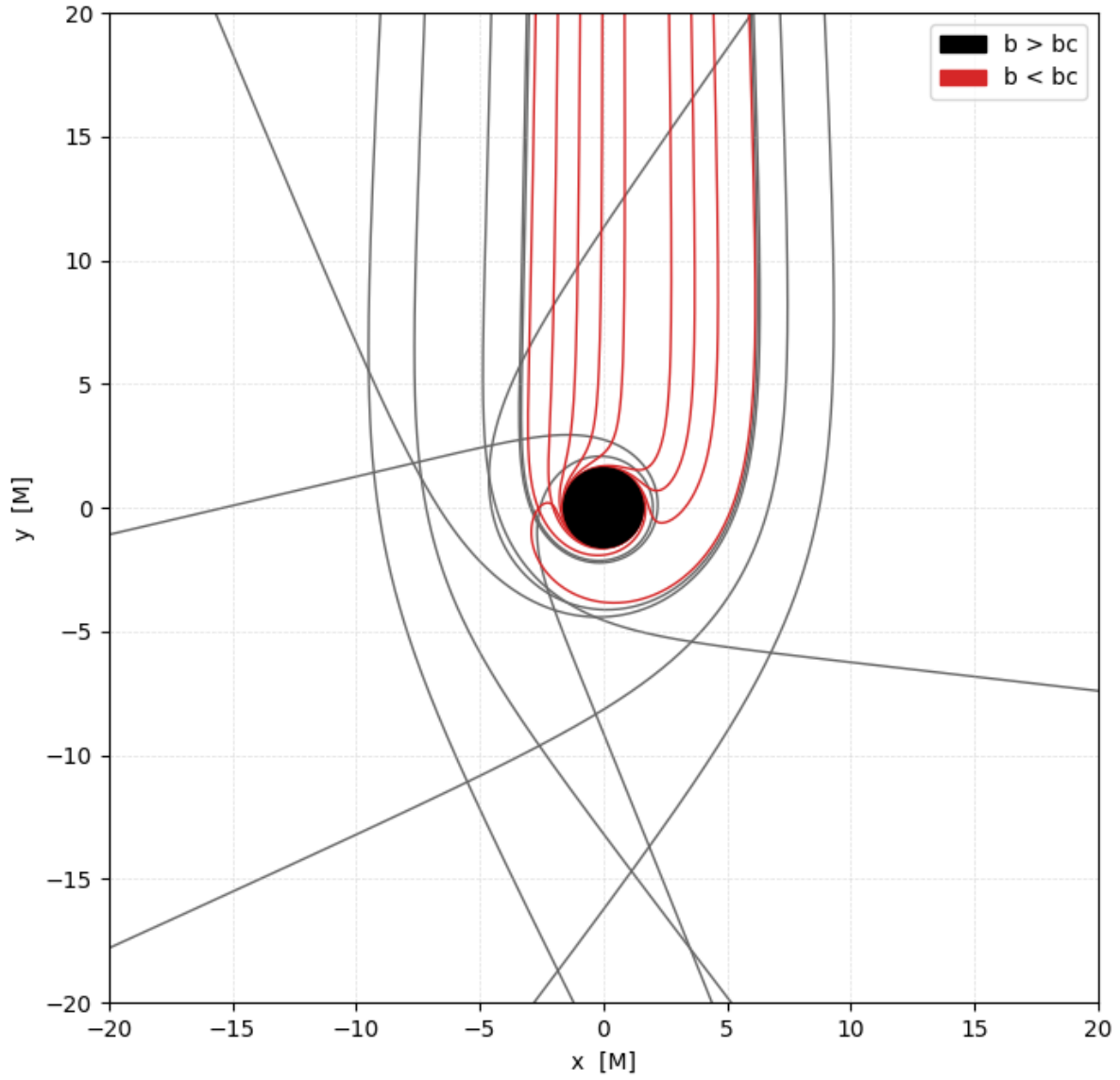


Figura 5.1: Trazado de trayectorias nulas representativas para el AN de Kerr en el plano ecuatorial. Las distancias son medidas en unidades de $M = 1$, $a = 0,8$ y $b_c \approx \{-6,7, 3,2\}$. El círculo negro representa el horizonte de eventos externo.

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \dot{t}^2 - \frac{-4Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{t} \dot{\phi} + \frac{\Sigma}{\Delta} \dot{r}^2 + \\
& \Sigma \dot{\theta}^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] \dot{\phi}^2 = 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Finalmente, la cuarta constante fue hallada por Carter [35]. (K) y tiene sus orígenes debido a la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada. Tomando $C + (L - aE)^2 = K$, entonces, se puede demostrar que:

$$\begin{aligned}
\Sigma^2 \dot{\theta}^2 &= C + \cos^2 \theta \left(a^2 E^2 - \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right) = \Theta \\
\Sigma^2 \dot{r}^2 &= (E(r^2 + a^2) - aL)^2 - \Delta ((L - aE)^2 + C) = \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Donde $\mathcal{R}$ y Θ se conocen comúnmente como el potencial radial y el potencial polar, respectivamente, y presentan propiedades análogas a las de un potencial efectivo como se ha expuesto en apartados anteriores [16].

En lugar de un único parámetro de impacto, como se introdujo previamente en métricas esféricamente simétricas, en el caso de Kerr es habitual definir dos parámetros independientes, denominados comúnmente parámetro azimutal y parámetro polar, los cuales se expresan como [36]:

$$\xi = \frac{L}{E} \quad \eta = \frac{\mathcal{C}}{E^2} \tag{5.15}$$

De forma análoga a lo revisado previamente, si se impone que el potencial radial y su derivada se anulen ($\mathcal{R} = \mathcal{R}' = 0$), se obtienen los parámetros de impacto críticos que definen las órbitas circulares de luz, es decir, los anillos de fotones. En este caso particular del espacio-tiempo de Kerr, se generan dos anillos de fotones distintos debido a la rotación del agujero negro.

A partir de estos resultados se construyó la figura 5.2, que muestra, a modo de ejemplo, tres trayectorias representativas de rayos alrededor del agujero negro de Kerr $((\eta, \theta) = \{(0, \pi/2), (4, \pi/3), (9, 2\pi/3)\})$ y $a = 0,95$. En la figura, se tomó la unidad de distancia como $M = 1$ y se graficó el horizonte de eventos externo ($r_H \approx 1,22$). Por medio de

la ecuación 5.18, se obtuvieron los parámetros de impacto críticos $\{\xi_{crit}^{\pi/2}, \xi_{crit}^{\pi/3}, \xi_{crit}^{2\pi/3}\} = \{2,58, 2,32, 1,91\}$.

La figura 5.2 permite visualizar varios aspectos interesantes. Primero, como se mencionó antes, los rayos experimentan un arrastre de referencia (o frame dragging), lo que implica que todos tienden a orbitar, al menos en parte, cuando se aproximan a una región cercana a r_{ef} .

Por otro lado, la trayectoria del rayo verde —con un valor del parámetro de impacto cercano al crítico— da varias vueltas alrededor del agujero negro, pero en distintos planos, lo que indica una precesión significativa. Estos efectos provocan una distorsión en la apariencia óptica del agujero negro, fenómeno ampliamente discutido en [37].

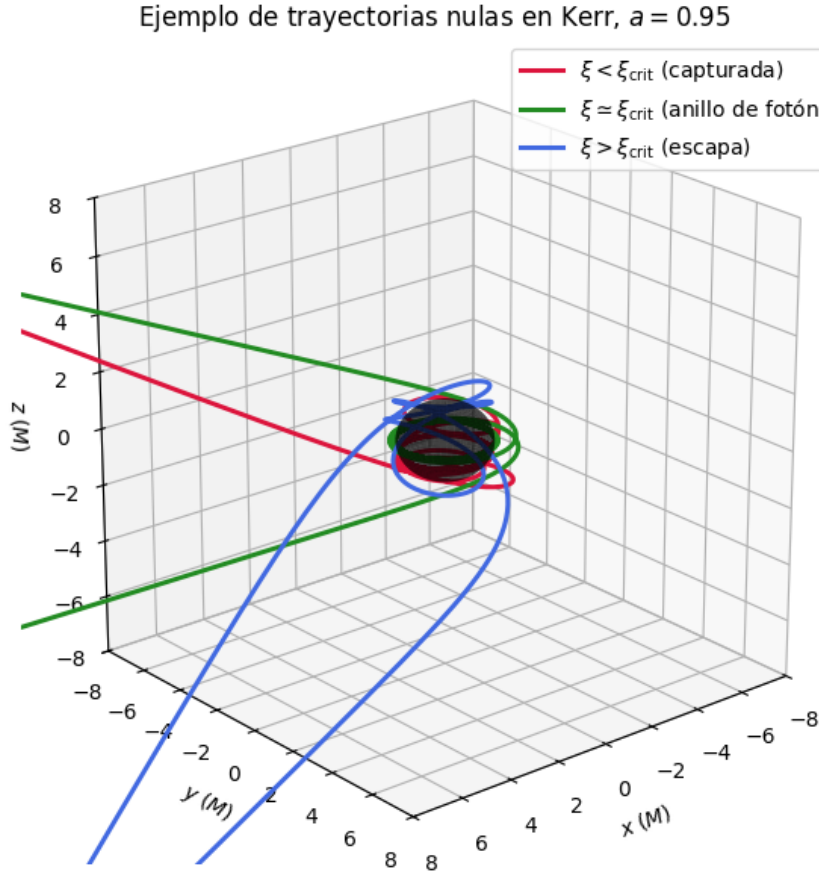


Figura 5.2: Trazo de rayos representativos alrededor del AN de Kerr. Se tomó $M = 1$. Se distingue mediante colores cuando el rayo ingresa al horizonte, cuando escapa y cuando esta muy próximo a un valor crítico y da numerosas órbitas alrededor del AN. La esfera de color negro del centro representa el horizonte de eventos externo.

5.3. Sombra

Previamente, ya se explicó que significa la sombra de un AN, básicamente es una región donde aparentemente no se ha emitido rayos y por tanto se percibe oscura. En el caso del AN de Schwarzschild, la sombra se producía de forma prácticamente circular. Esto era así debido a los rayos que ingresan al AN y no contribuyen finalmente a la intensidad de luz observada. No obstante, en el caso de un AN de Kerr, la sombra ya no es trivial puesto que:

- Se ha perdido simetría y por tanto se dependerá del ángulo de observación al AN.
- Existen dos anillos de fotones, que de hecho, como se observa en las expresiones (5.10) y (5.11), uno es retrógrado y otro es prógrado.

Si se considera que $\mathcal{R} = 0$, entonces:

$$(E(r^2 + a^2) - aL)^2 - \Delta((L - aE)^2 + C) = 0 \quad (5.16)$$

Si se considera que $\mathcal{R}' = 0$, entonces:

$$4r^3 + 2(a^2 - \xi^2 - \eta)r + 2M(\eta + (\xi - a)^2) = 0 \quad (5.17)$$

Combinando 5.17 y 5.16, se hallan soluciones para ambos parámetros de impacto:

$$\xi = \frac{1}{a(r - M)} (M(r^2 - a^2) - r\Delta) \quad \eta = \frac{r^3}{a^2(r - M)^2} (4M\Delta - r(r - M)^2) \quad (5.18)$$

Para visualizar la sombra del agujero negro, se considera un observador ubicado en el infinito y se emplean las llamadas coordenadas de Bardeen. Sean α y β estas variables, y sea θ_0 el ángulo de observación (es decir, el ángulo entre el eje de rotación del agujero negro y la línea de visión del observador) [1]. Estas coordenadas se definen como:

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{p^\phi}{p^t} \right) \quad \beta = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \frac{p^\theta}{p^t} \right). \quad (5.19)$$

Donde $p_\mu = \partial l / \partial u^\mu$ representa el momento asociado al lagrangiano l del sistema. Desde un punto de vista físico, α y β representan las coordenadas cartesianas aparentes en el

cielo del observador, medidas en un plano perpendicular a su línea de visión. En otras palabras, describen la posición angular aparente en el cielo donde un rayo de luz llegaría al observador si no hubiera sido absorbido por el agujero negro. La región del plano (α, β) en la que no se reciben rayos corresponde a la sombra del agujero negro. Para este caso, se reescribe las coordenadas como [17]:

$$\alpha = \xi \csc \theta_0 \quad \beta = (\eta + a^2 \cos^2 \theta_0 - \xi^2 \cot^2 \theta_0)^{1/2} \quad (5.20)$$

A pesar de que surja sencillo parametrizar el par (α, β) con respecto a r , usando las expresiones en (5.18), esto produce una alta sensibilidad numérica [17], generando serias dificultades para graficar la sombra del AN. Por este motivo, se debe buscar parametrizar con respecto a uno de los parámetros de impacto (ya sea ξ o η).

En la figura 5.3 se presentan varios ejemplos de la sombra del agujero negro para dos ángulos distintos de observación. Se observa que, a medida que aumenta el parámetro de rotación a del AN, la distorsión de la sombra se hace más pronunciada. Esta deformación se debe a la separación relativa entre los dos anillos de fotones —producidos por la rotación— y su influencia sobre la forma del borde de la sombra.

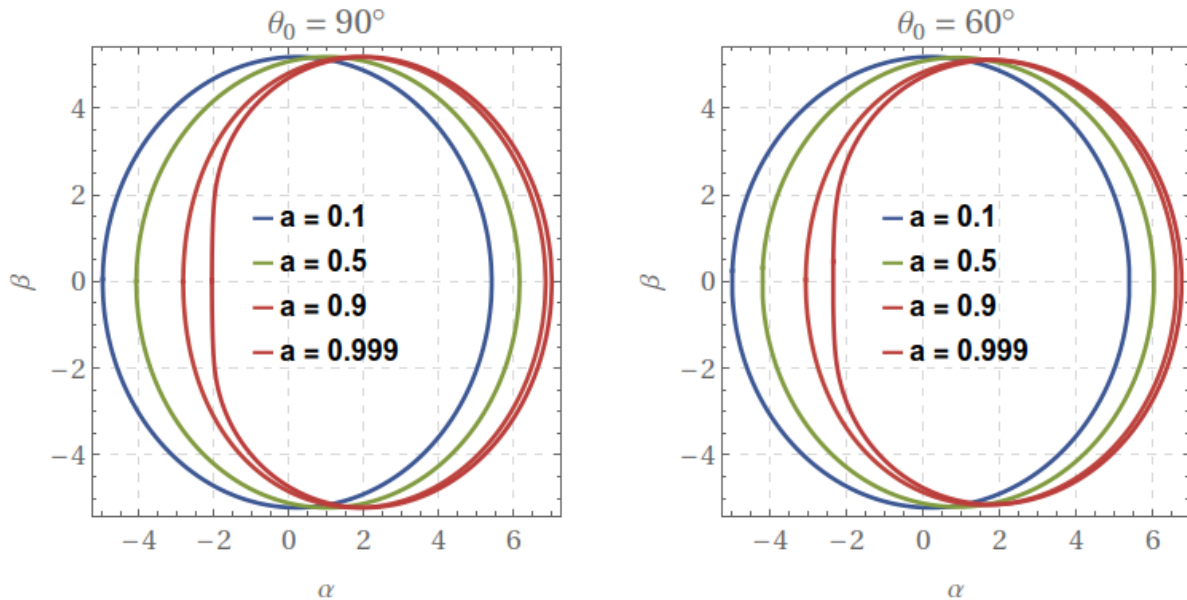


Figura 5.3: Sombras del AN de Kerr para distintos valores de momento angular por unidad de masa y del ángulo polar del observador. Se tomó $M = 1$ como unidad de distancia.

Capítulo 6

Nuevas líneas de investigación

Las técnicas analizadas en el presente trabajo son aplicables a un sinfín de modelos gravitacionales alternativos. De hecho, estudios como los de [38] y [25] han demostrado el potencial de estas herramientas para distinguir entre distintos modelos de gravedad a partir del análisis del trazado de rayos o de la apariencia óptica de un OC. Es particularmente prometedor el uso de estas simulaciones para caracterizar desviaciones respecto a la Relatividad General, como aquellas propuestas en teorías modificadas de gravedad, agujeros negros regulares [39], objetos exóticos como estrellas de bosones, o incluso remanentes sin horizonte de eventos. Además, con la mejora en la resolución de observaciones como las del Event Horizon Telescope, se abre la posibilidad de confrontar directamente las predicciones teóricas de diferentes métricas con imágenes reales, lo cual ofrece un nuevo enfoque para probar la validez de distintas teorías en el régimen fuerte de la gravedad.

Capítulo 7

Conclusiones

Al final del presente trabajo, se exponen los principales resultados obtenidos. Como se indicó previamente, el objetivo principal fue el estudio y análisis de las trayectorias nulas en las proximidades de agujeros negros, con énfasis en los casos descritos por las métricas de Schwarzschild y Kerr.

En ambos escenarios se resolvieron numéricamente las ecuaciones de movimiento, y los resultados fueron presentados gráficamente. Los diferentes hallazgos obtenidos constituyen una base sólida tanto para establecer comparaciones con observaciones experimentales, como para servir de punto de partida en futuras investigaciones que consideren otras geometrías espacio-temporales.

En primer lugar, se destaca que para geometrías espacio-temporales estáticas, esféricamente simétricas y asintóticamente planas, es posible obtener expresiones analíticas relativamente sencillas que permiten no solo el análisis de las trayectorias nulas, sino también la determinación de diversos observables astrofísicos, como el ángulo de escape, el ángulo de deflexión y el radio de la órbita de fotones. Estas expresiones fueron aplicadas específicamente a las métricas de Schwarzschild y Reissner–Nordström, lo que proporciona un ejemplo concreto de la utilidad práctica de los resultados teóricos obtenidos.

Por otro lado, la aplicación directa de los resultados teóricos permitió caracterizar el comportamiento de las trayectorias nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Se comprobó que el sistema presenta un comportamiento asintótico e inestable cerca del límite de deflexión fuerte, donde los rayos de luz se aproximan a la órbita de fotones.

En particular, se observó que, una vez que los rayos abandonan el régimen directo y entran en el régimen lensed, sus trayectorias se concentran en regiones cada vez más estrechas. Esto genera un aumento en la intensidad aparente, aunque confinada a un área muy reducida.

Además, se clasificaron las trayectorias según el número de órbitas completas realizadas alrededor del agujero negro, asociando a cada categoría un intervalo específico del parámetro de impacto. Finalmente, se simularon diversas trayectorias representativas, lo que permitió visualizar directamente el comportamiento de los rayos provenientes del infinito cuando interactúan con el agujero negro.

Seguidamente, se estableció que, para diversos modelos de intensidad emitida por el agujero negro de Schwarzschild, la apariencia óptica resultante presenta una estructura característica compuesta por tres regiones diferenciadas: Un halo externo, correspondiente a rayos en el régimen directo que escapan del agujero negro sin completar órbitas completas. Un anillo intermedio, generado por rayos en el régimen lensed, que producen un pico bien definido de intensidad observable. Un anillo interno, asociado a la órbita de fotones, que si bien puede alcanzar valores altos de intensidad, resulta visualmente poco distinguible debido a su reducida extensión angular.

Finalmente, se analizó el comportamiento de las trayectorias nulas en el espacio-tiempo de Kerr, identificando varios fenómenos de interés asociados a la rotación del agujero negro, como el arrastre de referencia (frame dragging) y la pérdida de simetría esférica. Se estudió la sombra proyectada por el agujero negro, observando la distorsión inducida por la rotación y la separación angular entre las órbitas de fotones prógradas y retrógradas.

En este contexto, se encontraron sensibilidades numéricas similares a las observadas en el caso de Schwarzschild, con la particularidad de que en Kerr dichas características se ven acentuadas al considerar el caso general —es decir, sin restringir el análisis al plano ecuatorial—, lo cual revela una mayor complejidad en la estructura de las trayectorias y en la forma de la sombra.

Bibliografía

- [1] M. Camenzind, Compact objects in astrophysics: white dwarfs, neutron stars, and black holes. en Astronomy and astrophysics library. Berlin; New York: Springer, 2007.
- [2] G. J. Olmo, J. L. Rosa, D. Rubiera-Garcia, y D. Sáez-Chillón Gómez, «Shadows and photon rings of regular black holes and geonic horizonless compact objects», Class. Quantum Gravity, vol. 40, n.o 17, p. 174002, sep. 2023, doi: 10.1088/1361-6382/aceacd.
- [3] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky, Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects, 1.a ed. WILEY-VCH, 1983. doi: 10.1002/9783527617661.
- [4] S. Hollands, A. Ishibashi, y H. S. Reall, «A Stationary Black Hole Must be Axisymmetric in Effective Field Theory», Commun. Math. Phys., vol. 401, n.o 3, pp. 2757-2791, ago. 2023, doi: 10.1007/s00220-023-04700-1.
- [5] S. M. Carroll, «Lecture Notes on General Relativity», 3 de diciembre de 1997, arXiv: arXiv:gr-qc/9712019. doi: 10.48550/arXiv.gr-qc/9712019. [6] P. Schneider, C. S. Kochanek, y J. Wambsganss, Gravitational lensing: strong, weak and micro. Berlin New York: Springer, 2006.
- [7] W. H. Dines, «The Deflection of Light during a Solar Eclipse», Nature, vol. 104, n.o 2616, pp. 393-393, dic. 1919, doi: 10.1038/104393c0.
- [8] J. A. Combi, «Astrofísica de altas energías de objetos compactos», Bol. Asoc. Argent. Astron., vol. 57, pp. 209-215, 2015.
- [9] The Event Horizon Telescope Collaboration et.al., «First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole», Astrophys. J. Lett., vol. 875, n.o 1, p. L1, abr. 2019, doi: 10.3847/2041-8213/ab0ec7.
- [10] Event Horizon Telescope Collaboration et.al., «First Sagittarius A* Event Horizon

Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way», *Astrophys. J. Lett.*, vol. 930, n.o 2, p. L12, may 2022, doi: 10.3847/2041-8213/ac6674.

[11] A. Chael, M. D. Johnson, y A. Lupsasca, «Observing the Inner Shadow of a Black Hole: A Direct View of the Event Horizon», *Astrophys. J.*, vol. 918, n.o 1, p. 6, sep. 2021, doi: 10.3847/1538-4357/ac09ee.

[12] R. A. Tinguely y A. P. Turner, «Optical analogues to the Kerr-Newman black hole», 29 de julio de 2020, arXiv: arXiv:1909.05256. doi: 10.48550/arXiv.1909.05256.

[13] S. Guo, Y.-X. Huang, E.-W. Liang, Y. Liang, Q.-Q. Jiang, y K. Lin, «Image of the Kerr–Newman Black Hole Surrounded by a Thin Accretion Disk», *Astrophys. J.*, vol. 975, n.o 2, p. 237, nov. 2024, doi: 10.3847/1538-4357/ad7d85.

[14] A. Sharma et.al., «Mahakala: a Python-based Modular Ray-tracing and Radiative Transfer Algorithm for Curved Space-times», 16 de mayo de 2025, arXiv: arXiv:2304.03804. doi: 10.48550/arXiv.2304.03804.

[15] V. Perlick y O. Y. Tsupko, «Calculating black hole shadows: Review of analytical studies», *Phys. Rep.*, vol. 947, pp. 1-39, feb. 2022, doi: 10.1016/j.physrep.2021.10.004.

[16] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, y D. I. Kaiser, *Gravitation*, First Princeton University Press edition. Princeton Oxford: Princeton University Press, 2017.

[17] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*. en *The International series of monographs on physics*, no. 69. Oxford New York: Clarendon press Oxford university press, 1982.

[18] R. M. Wald, *General relativity*. Chicago: University of Chicago Press, 1984.

[19] S. Sonner, «Ultrastatic spacetimes», *J. Math. Phys.*, vol. 51, n.o 9, p. 092502, sep. 2010, doi: 10.1063/1.3485599.

[20] N. Tsukamoto, «Deflection angle in the strong deflection limit in a general asymptotically flat, static, spherically symmetric spacetime», *Phys. Rev. D*, vol. 95, n.o 6, p. 064035, mar. 2017, doi: 10.1103/PhysRevD.95.064035.

[21] V. Bozza, «Gravitational lensing in the strong field limit», *Phys. Rev. D*, vol. 66, n.o 10, p. 103001, nov. 2002, doi: 10.1103/PhysRevD.66.103001.

- [22] J. L. Synge, «The escape of photons from gravitationally intense stars», *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 131, p. 463, ene. 1966, doi: 10.1093/mnras/131.3.463.
- [23] A. F. Zakharov, «Particle capture cross sections for a Reissner–Nordström black hole», *Class. Quantum Gravity*, vol. 11, n.o 4, pp. 1027-1033, abr. 1994, doi: 10.1088/0264-9381/11/4/018.
- [24] S. E. Gralla, D. E. Holz, y R. M. Wald, «Black Hole Shadows, Photon Rings, and Lensing Rings», *Phys. Rev. D*, vol. 100, n.o 2, p. 024018, jul. 2019, doi: 10.1103/PhysRevD.100.024018.
- [25] M. Guerrero, G. J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, y D. S.-C. Gómez, «Shadows and optical appearance of black bounces illuminated by a thin accretion disk», *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, vol. 2021, n.o 08, p. 036, ago. 2021, doi: 10.1088/1475-7516/2021/08/036.
- [26] J.-P. Luminet, «Image of a spherical black hole with thin accretion disk.», *Astron. Astrophys.*, vol. 75, pp. 228-235, may 1979.
- [27] M. Fathi y N. Cruz, «Observational signatures of a static $f(R)$ black hole with thin accretion disk», *Eur. Phys. J. C*, vol. 83, n.o 12, p. 1160, dic. 2023, doi: 10.1140/epjc/s10052-023-12341-w.
- [28] S. Wen, W. Hong, y J. Tao, «Observational appearances of magnetically charged black holes in Born–Infeld electrodynamics», *Eur. Phys. J. C*, vol. 83, n.o 4, p. 277, abr. 2023, doi: 10.1140/epjc/s10052-023-11431-z.
- [29] K.-J. He, S.-C. Tan, y G.-P. Li, «Influence of torsion charge on shadow and observation signature of black hole surrounded by various profiles of accretions», *Eur. Phys. J. C*, vol. 82, n.o 1, p. 81, ene. 2022, doi: 10.1140/epjc/s10052-022-10032-6.
- [30] J. Chen y J. Yang, «Optical appearance of Schwarzschild black holes with optically thin and thick accretion disks at various inclination angles», 28 de junio de 2025, arXiv: arXiv:2506.22891. doi: 10.48550/arXiv.2506.22891.
- [31] D. N. Page y K. S. Thorne, «Disk-Accretion onto a Black Hole. Time-Averaged Structure of Accretion Disk», *Astrophys. J.*, vol. 191, p. 499, jul. 1974, doi: 10.1086/152990.
- [32] H. Paugnat, A. Lupsasca, F. H. Vincent, y M. Wielgus, «Photon ring test of the Kerr hypothesis: Variation in the ring shape», *Astron. Astrophys.*, vol. 668, p. A11, dic. 2022,

- doi: 10.1051/0004-6361/202244216. [33] Y.-W. Hsiao, D.-S. Lee, y C.-Y. Lin, «Equatorial light bending around Kerr-Newman black holes», *Phys. Rev. D*, vol. 101, n.o 6, p. 064070, mar. 2020, doi: 10.1103/PhysRevD.101.064070.
- [34] T. Hsieh, D.-S. Lee, y C.-Y. Lin, «Strong gravitational lensing by Kerr and Kerr-Newman black holes», *Phys. Rev. D*, vol. 103, n.o 10, p. 104063, may 2021, doi: 10.1103/PhysRevD.103.104063.
- [35] B. Carter, «Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields», *Phys. Rev.*, vol. 174, n.o 5, pp. 1559-1571, oct. 1968, doi: 10.1103/PhysRev.174.1559.
- [36] C. T. Cunningham y J. M. Bardeen, «The Optical Appearance of a Star Orbiting an Extreme Kerr Black Hole», *Astrophys. J.*, vol. 183, pp. 237-264, jul. 1973, doi: 10.1086/152223.
- [37] A. A. Abdujabbarov, L. Rezzolla, y B. J. Ahmedov, «A coordinate-independent characterization of a black hole shadow», *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 454, n.o 3, pp. 2423-2435, dic. 2015, doi: 10.1093/mnras/stv2079.
- [38] Z. Zhang, Y. Hou, y M. Guo, «Observational signatures of rotating black holes in the semiclassical gravity with trace anomaly», 16 de marzo de 2024, arXiv: arXiv:2305.14924. doi: 10.48550/arXiv.2305.14924.
- [39] C. Lan, H. Yang, Y. Guo, y Y.-G. Miao, «Regular black holes: A short topic review», *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 62, n.o 9, p. 202, sep. 2023, doi: 10.1007/s10773-023-05454-1.