



TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Física

Mención en Física Matemática

Términos de Frontera en Gravedad Dilatónica

Autor: Alejandro Casas Gómez

Tutor/es: Fernando Ruiz Ruiz

Francisco Javier Negro Vadillo

Resumen

En este trabajo se establecen los términos de frontera que son necesarios añadir a la acción de Jackiw-Teitelboim en n dimensiones para obtener un principio variacional bien definido. A su vez, se resuelven las ecuaciones de campo que surgen de establecer dicho principio en la proximidad de la frontera para espacios tiempo de tipo Anti de Sitter, dando un ejemplo particular para $n = 3$. Por último, se añaden unos contratérminos a la acción de partida para que ésta pueda ser finita.

Abstract

In this work, we establish the boundary terms that must be added to the Jackiw–Teitelboim action in n dimensions in order to obtain a well-defined variational principle. We then solve the field equations that arise from imposing this principle near the boundary for Anti-de Sitter spacetimes, providing a specific example for $n = 3$. Finally, we introduce counterterms into the original action so that it becomes finite.

Índice

1. Introducción	4
2. Variación de la acción de Jackiw-Teitelboim y sus ecuaciones del movimiento	6
2.1. Término de frontera	7
2.1.1. Momentos canónicos conjugados	7
2.1.2. Clasificación de los términos de frontera	9
3. Solución en la proximidad de la frontera	11
3.1. Ecuaciones del movimiento	11
3.1.1. Elección de ansatz	12
3.2. Soluciones de las ecuaciones por órdenes	13
3.2.1. Solución a orden z	14
3.2.2. Solución a orden z^2	14
3.2.3. Solución a orden z^3	15
3.2.4. Solución a orden z^4	15
3.3. Solución para el caso $n = 3$	16
4. Contratérminos para una acción finita	18
5. Conclusiones	20
A. Transformaciones conformes	22
B. Geometría en ADM	22
B.1. Geometría en Fefferman-Graham	23
C. Expansión en serie de la métrica	23
C.1. Expansión para $\gamma^{(1)}$ y $\gamma^{(2)}$	23
C.2. Expansión para $\gamma^{(3)}$ y $\gamma^{(4)}$	24
D. Expansión del elemento de volumen $\sqrt{ h }$	24
Referencias	25

1. Introducción

La Relatividad General es un campo de estudio que fascina tanto a físicos como matemáticos, pues presenta una naturaleza exótica para desarrollar las matemáticas y la geometría. En este trabajo se presenta una teoría desarrollada inicialmente por Roman Jackiw y Claudio Teitelboim (JT) [6, 9] para espacio-tiempos de tipo Anti de Sitter (AdS). Esta teoría tiene mucho interés debido a que se presenta como un modelo fácil de resolver para la gravedad cuántica en el caso de trabajar en 2 dimensiones. Con el tiempo, se ha considerado como un *toy model* que permite analizar diversos problemas [7], por ejemplo la dinámica que se produce cerca del horizonte de los agujeros negros extremos en dimensiones superiores. En este trabajo, se toma una perspectiva diferente, pues se parte de una generalización para la acción en n dimensiones en vez de bidimensional.

Esta teoría se presenta como una modificación de la acción de Einstein-Hilbert a la que se le ha acoplado un campo escalar de la forma

$$S_{\text{JT}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^n x \sqrt{|g|} \phi (R + 2\Lambda), \quad (1)$$

en donde κ^2 es la constante de gravitación de Newton, $\mathcal{M}$ es la variedad del espacio-tiempo en n dimensiones con métrica g , ϕ es el campo escalar del dilatón, R es el tensor de Ricci y Λ es la constante cosmológica. Para los propósitos del trabajo, uno puede tomar una transformación conforme en la que se compactifique la variedad. Esto se debe a que cuando se estudia una variedad física aparecen una serie de divergencias que hay que eliminar. Esto se puede lograr mediante dicha transformación que haga pasar a una variedad no física sin divergencias. Uno puede tomarla como

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (2)$$

siendo Ω una función suave definida sobre la variedad. Si se toma la transformación para un caso particular como $\Omega = e^\omega$, la acción cambia como

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d\tilde{x}^n \sqrt{|\tilde{g}|} \left[\tilde{R} - 2(n-1)\tilde{\nabla}^2 \omega + (n-1)(n-2)(\tilde{\nabla} \omega)^2 + 2\Lambda \phi e^{-n\omega} \right], \quad (3)$$

que corresponde a un campo escalar acoplado a gravedad con un potencial exponencial. Este tipo de potenciales han sido utilizados en estudios sobre agujeros negros en gravedad dilatónica en dimensiones superiores [8].

Otro aspecto que es de gran importancia en el trabajo es la geometría que presenta el problema. Se puede suponer que la variedad de nuestro problema admite una foliación caracterizada por una función $\Phi = \text{cte.}$ De esta manera, se puede construir un vector normal a la hipersuperficie Σ_Φ

$$n_\mu = \frac{\partial_\mu \Phi}{\sqrt{g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi}}, \quad (4)$$

con $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \varepsilon$ donde ε puede valer +1 si es género tiempo, -1 si es de género espacio o 0 si es de tipo luz. En el caso que atañe, se considerará una foliación de género espacio. Además, hay interés en estudiar espacio-tiempos asintóticamente AdS. Al hacer uso de

coordenadas de Poincaré y con el gauge de Fefferman-Graham [4], el elemento de línea se escribe como:

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} \left(dz^2 + \gamma_{ij}(x^i, z) dx^i dx^j \right). \quad (5)$$

l es el radio para el espacio-tiempo de AdS, que en el trabajo se tomará como $l = 1$. En este caso, z juega el papel de coordenada temporal en gravedad canónica, y en el caso de la foliación se toma por hipersuperficies $\Sigma_z = \{z = \text{cte}\}$ que corresponden al tomar $\Phi = z$. Al trabajar en estas coordenadas, uno lo que toma es una variedad compactificada $\bar{\mathcal{M}}$ con frontera localizada en $z \rightarrow 0$. Nótese que siempre es posible elegir dicho gauge, pues es suficiente con escoger las coordenadas $\{z, x^i\}$ de tal manera que se anulen los $n - 1$ coeficientes de g_{zi} y fijar $g_{zz} = 1/z^2$.

En este trabajo se van a estudiar las siguientes cuestiones: en primer lugar, los términos de superficie que hay que añadir a la acción de JT para poder tener un principio variacional bien definido si se toman condiciones de contorno de tipo Dirichlet o Neumann para el campo gravitatorio y el dilatón (sección 2). Por condiciones Dirichlet en este trabajo se entiende a qué condiciones tienen que cumplir las coordenadas generalizadas, y por condiciones Neumann las que se imponen a los momentos conjugados, siendo la conjugación la asociada a la foliación en el gauge (5). Después (sección 3), se procederá a resolver las ecuaciones de campo para los campos mediante series de potencias en z para γ_{ij} y para ϕ , obteniendo los términos de dichas series para n arbitrario y los órdenes z^0 , z , z^2 . A continuación, fijaremos la dimensión a $n = 3$ y se calcularán las correcciones asociadas a los órdenes de z^3 y z^4 , proporcionando un ejemplo específico. Por último (sección 4), se discutirá brevemente los contratérminos que hay que añadir a la acción de partida para que esta sea finita.

Los convenios que se han tomado a la hora de realizar el trabajo han sido los siguientes: para los índices, las letras griegas $(\mu, \nu) = 0, 1, \dots, n - 1, z$, y para las letras romanas se toma $(i, j) = 0, 1, \dots, n - 1$; la signatura en la que se trabaja viene descrita por $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$ y el tensor de Riemann viene descrito por

$$R_{\mu\nu\rho}^{\alpha} = \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda},$$

de tal manera que el tensor de Ricci viene como la contracción del tensor de Riemann $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$.

2. Variación de la acción de Jackiw-Teitelboim y sus ecuaciones del movimiento

Para poder tener un principio variacional bien definido, es necesario imponer que $\delta S = 0$. Uno puede realizar dicha variación respecto a los campos de $g_{\mu\nu}, \phi$ para obtener las ecuaciones del movimiento, de tal forma que

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} dx^n \left(\mathcal{T}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (R + 2\Lambda) \delta \phi \right) + \delta_g S_{\partial\mathcal{M}} = 0, \quad (6)$$

en donde se define el tensor $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ ¹ como

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} := \phi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda \right) - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi. \quad (7)$$

Para poder llegar a la expresión (6), es necesario tomar la variación respecto del campo $g_{\mu\nu}$ y del campo ϕ . Si se toma respecto al primero, se puede ver que

$$\delta_g S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} dx^n \sqrt{|g|} \left(\phi \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda \right] \delta g^{\mu\nu} + \phi g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right). \quad (8)$$

La variación del tensor de Ricci se puede computar y tras un cálculo largo, se puede ver que su variación es

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \nabla_\mu \left[(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu}) \delta g_{\beta\nu} \right], \quad (9)$$

en donde el término entre corchetes se puede escribir como

$$W^{\mu\alpha} := (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu}) \delta g_{\beta\nu}. \quad (10)$$

Ahora bien, tomando la integración por partes del término asociado a $\phi \nabla_\alpha \nabla_\mu W^{\mu\alpha}$, se puede reescribir a

$$\phi \nabla_\alpha \nabla_\mu W^{\mu\alpha} = \nabla_\alpha (\phi \nabla_\mu W^{\mu\alpha} - \nabla_\mu \phi W^{\mu\alpha}) + W^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \nabla_\mu \phi \quad (11)$$

en donde el último término del miembro de la derecha se puede desarrollar para que se obtengan los dos últimos términos de (7). El término entre paréntesis es un término de frontera, de tal forma que

$$\delta_g S_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} dx^n \sqrt{|g|} \nabla_\alpha [\phi \nabla_\mu W^{\mu\alpha} - \nabla_\mu \phi W^{\mu\alpha}]. \quad (12)$$

¹Para el caso que trataron J y T, al tratarse de una teoría bidimensional, las ecuaciones de Einstein no tienen contenido; en ausencia de materia, el tensor $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ se convierte en una identidad, pero si se considera una teoría con materia, entonces $\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0$ y habría problemas en la teoría.

2.1. Término de frontera

Para obtener el término de frontera, es necesario utilizar el teorema de Stokes en (12), por tanto

$$\delta_g S_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\partial\mathcal{M}} dx^{n-1} \sqrt{|h|} n_\alpha [\phi \nabla_\mu W^{\mu\alpha} - \nabla_\mu \phi W^{\mu\alpha}]. \quad (13)$$

Operando con el término que aparece entre corchetes mediante la métrica inducida en la hipersuperficie $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ y realizando unos sencillos cálculos, se puede expresar en función de h y la curvatura extrínseca como

$$\delta_g S_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\partial\mathcal{M}} dx^{n-1} \sqrt{|h|} \left[\left(\nabla_n \phi h^{\mu\nu} - \phi K^{\mu\nu} \right) \delta h_{\mu\nu} - 2\phi \delta K \right]. \quad (14)$$

En el primer término, $\nabla_n \phi$ es la derivada respecto a la dirección del vector n_α , $\nabla_n \phi = n^\alpha \nabla_\alpha \phi$, mientras que K es la traza de la segunda forma fundamental que se define como la derivada de Lie de la métrica inducida respecto la dirección de n_μ , $K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\mu\nu}$. El elemento que va con δK puede ser modificado si uno tiene en cuenta que

$$\sqrt{|h|} \delta K = \delta(K \sqrt{|h|}) - \frac{1}{2} K h^{\mu\nu} \sqrt{|h|} \delta h_{\mu\nu}, \quad (15)$$

por lo que el término de superficie queda como

$$\delta_g S_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\partial\mathcal{M}} dx^{n-1} \sqrt{|h|} \left(\nabla_n \phi h^{\mu\nu} - \phi (K^{\mu\nu} - K h^{\mu\nu}) \right) \delta h_{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\partial\mathcal{M}} dx^{n-1} \delta(2K \sqrt{|h|}) \phi. \quad (16)$$

La expresión (16) es el término de frontera que surge de establecer un principio variacional sobre la acción (1). Ahora hay que imponer condiciones de contorno que tengan sentido y ver cuales de los términos que aparecen en (16) se anulan y cuáles sobreviven.

2.1.1. Momentos canónicos conjugados

Es conveniente pararse a analizar el lagrangiano de JT (1) desde el punto de vista hamiltoniano. En este apartado, se va a reescribir la acción mediante el formalismo ADM, similar al que se suele hacer en gravedad canónica. El elemento de línea se puede escribir como

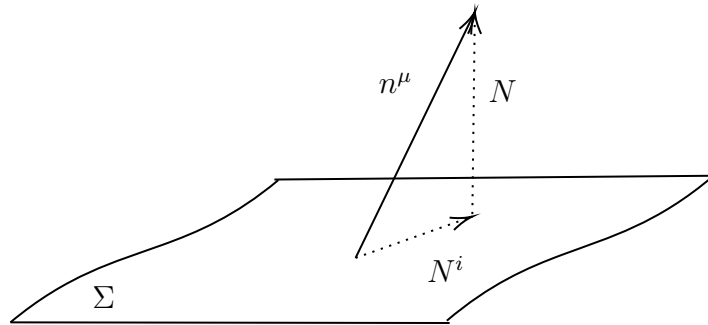


Figura 1: Descomposición de la foliación en sus componentes

$$ds^2 = (N^2 + N_i N^i) dt^2 + 2N_i dt dx^i + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (17)$$

en donde N^i es el vector de *shift*, que es un vector tangente a las hipersuperficies Σ_Φ , y N es la función *lapse*, que está asociado a la parte normal de la foliación (ver Figura 1). Uno puede ver que puede trabajar inicialmente en este formalismo y recuperar el gauge de Fefferman-Graham si toma como condición $N^i = 0$, $N^2 = \frac{1}{z^2}$ y $h_{ij} = \frac{1}{z^2} \gamma_{ij}$, y recordando que z juega el papel de t . Para calcular los momentos, será necesario determinar los símbolos de Christoffel asociados a esta métrica (véase el apéndice B). Se puede tomar como coordenadas canónicas el conjunto $\{N, N_i, h_{ij}, \phi\}$ y asociarle unos momentos conjugados $\{\pi_N, \pi^i, \pi^{ij}, \pi_\phi\}$ de la forma

$$\pi_N = \frac{\delta L}{\delta(\partial_z N)} \quad \pi^i = \frac{\delta L}{\delta(\partial_z N_i)} \quad \pi^{ij} = \frac{\delta L}{\delta(\partial_z h_{ij})} \quad \pi_\phi = \frac{\delta L}{\delta(\partial_z \phi)}. \quad (18)$$

Con todo ello, la acción puede escribirse de una forma concreta bajo este formalismo si se descompone el escalar de curvatura como [3]

$$R = R(h) + (K^2 - K_{ij} K^{ij}) + 2\nabla_\mu v^\mu \quad (19)$$

donde el vector v^μ es de la forma

$$v^\mu = n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu - n^\mu \nabla_\alpha n^\alpha. \quad (20)$$

Tomando $n^\mu = (\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N})$ y calculando las componentes de v^μ mediante los símbolos de la conexión, lo que se obtiene es

$$v^z = -\frac{K}{N} \quad v^i = -\frac{h^{ik}}{N} \partial_k N + \frac{N^i}{N} K. \quad (21)$$

La acción se escribe como

$$S_{JT} = \frac{1}{2\kappa^2} \int dz L \quad L = \int_{\Sigma_z} d^{n-1} x N \sqrt{|h|} [\phi(R(h) + (K^2 - K^{ij} K_{ij}) + 2\Lambda + 2\nabla_\mu v^\mu)], \quad (22)$$

Del lagrangiano se extrae bastante información, por ejemplo que $R(h)$ no contiene ninguna derivada respecto a z y que queda fuera del análisis de los momentos conjugados. Sin embargo, las componentes de v^μ sí contienen este tipo de derivadas en la K , pero en ningún momento aparece explícitamente $\partial_z N$ ni $\partial_z N^i$, luego solamente aparecerán π_ϕ y π^{ij} . De la definición (18), uno puede obtener que

$$\pi_\phi = \frac{\sqrt{|h|}}{\kappa^2} K \quad \pi^{ij} = \frac{\sqrt{|h|}}{2\kappa^2} \left[\phi(K^{ij} - h^{ij} K) - \frac{h^{ij}}{N} (\partial_z \phi - N^k \partial_k \phi) \right]. \quad (23)$$

Si uno juega con ambas expresiones y toma la definición de K_{ij} como

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ij} = \frac{1}{2N} [-\partial_z h_{ij} + D_i(h) N_j + D_j(h) N_i], \quad (24)$$

se puede obtener

$$\partial_z \phi = \frac{2\kappa^2}{(n-1)\sqrt{h}} \left[\pi_k^k - \left(1 - \frac{n}{2} \phi \pi_\phi\right) \right] + N^k \partial_k \phi, \quad (25)$$

$$\partial_z h_{ij} = \frac{4\kappa^2}{\phi} \frac{N}{\sqrt{h}} \left(\pi_{ij} - h_{ij} \frac{\pi_k^k}{(n-1)} + \frac{1}{2(n-1)} h_{ij} \phi \pi_\phi \right) + D_i N_j + D_j N_i. \quad (26)$$

Con las expresiones para los momentos conjugados, la primera integral de (16) puede escribirse como $\pi^{ij} \delta h_{ij}$ y la segunda integral como $\delta \pi_\phi \phi$. El término de frontera queda por tanto como

$$\delta_g S_{\partial \mathcal{M}} = - \int_{\partial \mathcal{M}} dx^{n-1} \left(\pi^{ij} \delta h_{ij} + \delta \pi_\phi \phi \right). \quad (27)$$

2.1.2. Clasificación de los términos de frontera

Una vez se tiene escrito (16) en la forma compacta mediante momentos conjugados, se puede analizar qué condiciones de contorno hay que imponer para que el término de frontera sea nulo. Esto debe ser así, puesto que si $\delta_g S_{\partial \mathcal{M}} \neq 0$, no se puede aplicar el principio variacional para obtener las ecuaciones de campo². Al estar (27) expresado en coordenadas y momentos conjugados, se puede analizar las condiciones de contorno de manera asequible y sus posibilidades son las siguientes:

- **Dirichlet-Dirichlet** ($\delta h_{ij} = 0 \quad \delta \phi = 0$)

Bajo estas condiciones, el primer término de (27) es nulo y para el segundo, se puede introducir el campo escalar dentro de la variación, y por tanto

$$\delta_g S_{\partial \mathcal{M}} = - \int_{\partial \mathcal{M}} dx^{n-1} \delta(\pi_\phi \phi) \implies S' = S + \int_{\partial \mathcal{M}} dx^{n-1} \pi_\phi \phi \quad (28)$$

- **Dirichlet-Neumann** ($\delta h_{ij} = 0 \quad \delta \pi_\phi = 0$)

En este caso particular, es donde todo el término B.T. es nulo y no hace falta añadir un cotratérmino a la acción.

- **Neumann-Dirichlet** ($\delta \pi^{ij} = 0 \quad \delta \phi = 0$)

En este caso, no se cancela ningún término, pero los dos se pueden escribir como una variación global, entonces la acción puede escribirse añadiendo el siguiente término

$$S' = S + \int_{\partial \mathcal{M}} dx^{n-1} [\pi_i^i + \pi_\phi \phi] \quad (29)$$

²Hay que recordar que mediante el principio variacional lo que se obtiene es $\delta S = [\text{E.L.}] + \text{B.T.}$, donde [E.L.] son las ecuaciones de Euler-Lagrange y B.T. es el término de frontera. Mediante dicho principio, uno busca que $\delta S = 0$ y ello tiene que llevar a que [E.L.] = 0 y eso se obtiene si y solo si las condiciones de contorno aseguran que B.T. = 0

- **Neumann-Neumann** ($\delta\pi^{ij} = 0 \quad \delta\pi_\phi = 0$)

Por último, si se imponen estas condiciones, el segundo término de (27) es nulo y el contratérmino pasa a ser

$$S' = S + \int_{\partial\mathcal{M}} dx^{n-1} \pi_i^i \quad (30)$$

De esta forma, se puede ver que dependiendo de las condiciones de contorno que se impongan a la teoría, habría que añadir un contratérmino distinto a la acción para anular $\delta_g S_{\partial\mathcal{M}}$. El que más se asimila al término de Gibbons-Hawking-York (GHY) [5, 10] para la acción de Einstein-Hilbert es el asociado a las condiciones Dirichlet-Dirichlet. De ahora en adelante, se tomarán dichas condiciones en todo el trabajo.

3. Solución en la proximidad de la frontera

En esta sección se resuelven las ecuaciones que surgen de establecer el principio variacional para (1). Aquí, se va a trabajar con un espacio-tiempo de tipo asintóticamente AdS. Estos espacios surgen de realizar una transformación conforme sobre la métrica, similar a como se mencionó en la introducción

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu}. \quad (31)$$

Lo que hace dicha transformación es pasar de una variedad física sin frontera $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ a una variedad no física compactificada $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ con frontera localizada a una distancia finita. En el apéndice A se dejan algunos resultados de realizar dicha transformación. Un ejemplo es el espacio-tiempo de Minkowski en 2 dimensiones (ver figura 2). Dicho espacio se puede representar mediante un diagrama de Penrose (izquierda), en donde toda la información queda representada para 2 dimensiones. Si uno toma una transformación conforme tal y como se comenta, el diamante rojo queda compactificado en un cilindro (derecha).

En el gauge de Fefferman-Graham se toma $\Omega = z$ de tal forma que la frontera se encuentra localizada en $z = 0$. Esto permite reescribir el elemento de línea para un espacio AdS $ds^2 = z^{-2}(dz^2 + \eta_{ij}dx^i dx^j)$ que es singular en $z = 0$ a un elemento de línea $d\tilde{s}^2 = z^2 ds^2$ no singular en $z = 0$.

3.1. Ecuaciones del movimiento

En la sección anterior, se había obtenido la variación de la acción junto con su término de frontera. Si uno establece $\delta S = 0$, se tiene como resultado las ecuaciones de campo. Al tener dos campos, una viene de tomar $\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0$ y la otra del término proveniente de $\delta\phi = 0$. Esas ecuaciones son

$$\phi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda \right) - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi = 0, \quad (32)$$

$$R + 2\Lambda = 0. \quad (33)$$

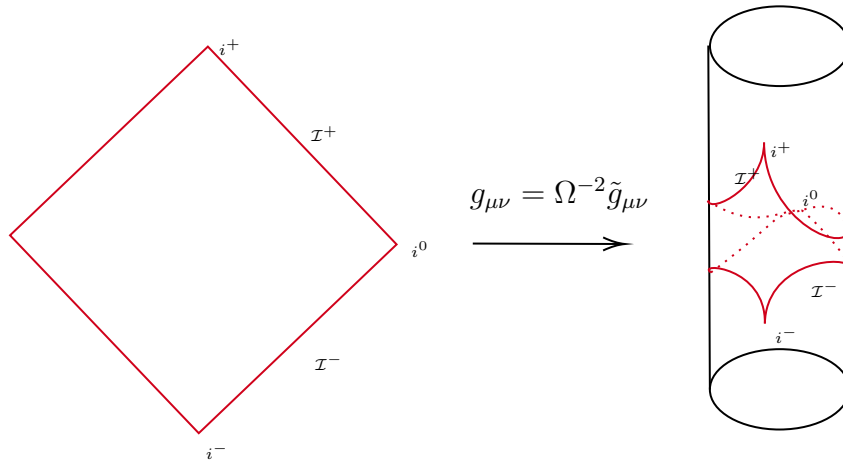


Figura 2: Compactificación conforme para el espacio tiempo de Minkowski en 2D

Si uno opera de forma conveniente con ambas expresiones, se puede obtener otro conjunto de ecuaciones

$$\nabla^2 \phi - \frac{2\Lambda}{n-1} \phi = 0, \quad (34)$$

$$R_{\mu\nu} \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi = 0. \quad (35)$$

Se puede apreciar que (34) tiene forma de un campo escalar de masa m con $m^2 = 2\Lambda/(n-1)$, luego el caso que se está estudiando presenta similitudes con otros casos de acoplamiento de un campo escalar a gravedad considerados anteriormente en la literatura [1]. Además, el dilatón viene introducido mediante un término $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi$, que no aparece en los casos mencionados en la literatura.

3.1.1. Elección de ansatz

Para estudiar la solución en la proximidad de la frontera ($z = 0$), lo que se hará es tomar un ansatz para $\gamma_{ij}(x, z)$ como para $\psi(x, z)$ mediante una expansión en serie de potencias

$$\gamma_{ij}(x^i, z) = \gamma_{ij}^{(0)}(x) + z\gamma_{ij}^{(1)}(x) + z^2\gamma_{ij}^{(2)}(x) + \mathcal{O}(z^3), \quad (36)$$

$$\phi(x^i, z) = z^\alpha \psi = z^\alpha \left(\psi^{(0)}(x) + z\psi^{(1)}(x) + z^2\psi^{(2)}(x) + \mathcal{O}(z^3) \right). \quad (37)$$

Si uno toma la ecuación (33), se ve que es independiente del dilatón y por consiguiente permite tratar con un único campo. Se puede expresar el escalar de Ricci mediante la transformación conforme como

$$R = z^2 \left[R(\gamma) - K^2 - K^{ij} K_{ij} - 2\partial_z K + \frac{2(n-1)}{z} K - \frac{n(n-1)}{z^2} \right], \quad (38)$$

donde $K = \gamma^{ij} K_{ij}$ es la traza de la segunda forma fundamental $K_{ij} = \frac{1}{2} \partial_z \gamma_{ij}$ en donde γ_{ij} está dado por $d\tilde{s}^2$. Para subir y bajar los índices $i, j, \dots$ se utiliza la métrica γ_{ij} . $R(\gamma)$, K y K_{ij} presentan también desarrollos en serie de potencias, y al orden más bajo se tiene

$$R = -n(n-1) + \mathcal{O}(z^2), \quad (39)$$

de esta manera, si uno toma (33) y combina al orden más bajo, lo que acaba obteniendo es cuánto vale la constante cosmológica $2\Lambda = -n(n-1)$ y la ecuación del dilatón pasa a ser

$$\nabla^2 \phi - n\phi = 0. \quad (40)$$

Ahora bien, en la expresión anterior se puede introducir el ansatz (37) de tal manera que

$$z^2(\partial_z^2\psi + \tilde{K}\partial_z\psi + D_i D^i\psi) + [2\alpha - (n-2)]z\partial_z\phi + K\alpha z\psi + [\alpha(\alpha-1) - \alpha(n-2) - n]\psi = 0. \quad (41)$$

Al orden más bajo, se puede buscar que el último término que aparece entre corchetes se anule, de tal manera que se obtiene una ecuación de segundo grado para α

$$\alpha(\alpha - 1) - \alpha(n - 2) - n = 0, \quad (42)$$

cuyas soluciones son $\alpha = -1, n$. Como el caso $\alpha = n$ está contenido dentro del caso $\alpha = -1$, la expansión en serie para el dilatón adquiere la forma

$$\phi = \sum_{p=0}^n z^{p-1}\Psi^{(p)}(x) + \sum_{p=0}^{\infty} z^{p+n}\tilde{\Psi}^{(p)}(x) = \frac{1}{z}\psi(z, x) \quad \psi(z, x) = \psi^{(0)}x + z\psi^{(1)}(x) + \dots \quad (43)$$

3.2. Soluciones de las ecuaciones por órdenes

Con todo lo presentado hasta ahora, se puede escribir (7) en conforme y permite descomponerse simultáneamente en componentes (zz) , (iz) y (ij)

$$-z^2\left(\partial_z^2\psi + \partial_z\tilde{K}\psi + \tilde{K}_i^j\tilde{K}_j^i\psi\right) + \tilde{K}\psi + \partial_z\psi = 0 \quad (44)$$

$$D_j(\tilde{K}_i^j\psi) - D_i\tilde{K}\psi - \partial_z\partial_i\psi = 0 \quad (45)$$

$$z\left[(\tilde{R}_{ij}(\gamma) - \partial_z\tilde{K}_{ij} - \tilde{K}\tilde{K}_{ij} + 2\tilde{K}_{il}\tilde{K}_j^l)\psi - D_i D_j\psi - \tilde{K}_{ij}\partial_z\psi\right] + (n-1)\tilde{K}_{ij}\psi + \gamma_{ij}(\tilde{K}\psi + \partial_z\psi) = 0 \quad (46)$$

Por último, con el ansatz para la ϕ , la ecuación (41) se puede escribir como

$$-K\psi - n\partial_z\psi + Kz\partial_z\psi + z\partial_z^2\psi + z\Delta\psi = 0, \quad (47)$$

en donde Δ representa al laplaciano de γ dado por $\Delta = D_i D^i$, siendo D_i la derivada covariante asociada a γ . Entonces, el conjunto de ecuaciones que se tiene que resolver son (38), (44), (45), (46) y (47). Éstas se pueden resolver orden a orden mediante relaciones de recurrencia.

3.2.1. Solución a orden z

Si uno introduce el ansatz desarrollado previamente en las ecuaciones (38), (46) y (47), lo que se obtiene es

$$\begin{aligned}(n-1)\text{Tr}(\gamma^{(1)}) &= 0, \\ \text{Tr}(\gamma^{(1)})\psi^{(0)} + n\psi^{(1)} &= 0, \\ \frac{n-1}{2}\gamma_{ij}^{(1)}\psi^{(0)} + \gamma_{ij}^{(0)}\left(\text{Tr}(\gamma^{(1)})\psi^{(0)} + \psi^{(1)}\right) &= 0,\end{aligned}\tag{48}$$

donde Tr se denota como el operador traza. De esta forma, los únicos valores que satisfacen dichas ecuaciones para los campos son

$$\gamma_{ij}^{(1)} = 0 \quad \psi^{(1)} = 0.\tag{49}$$

Hay que notar que si uno introduce estos resultados en (44) y (45), éstas se satisfacen trivialmente.

3.2.2. Solución a orden z^2

Análogamente, para el orden z^2 se opera de igual forma que antes y el conjunto de ecuaciones es

$$\begin{aligned}R^{(0)} + 2(n-2)\text{Tr}(\gamma^{(2)}) &= 0, \\ 2\psi^{(2)}(1-n) - \psi^{(0)}\text{Tr}(\gamma^{(2)}) + D_i^{(0)}D_{(0)}^i\psi^{(0)} &= 0, \\ (R_{ij}^{(0)} - \gamma_{ij}^{(2)})\psi^{(0)} - D_i^{(0)}D_j^{(0)}\psi^{(0)} + (n-1)\gamma_{ij}^{(2)}\psi^{(0)} + \gamma_{ij}^{(0)}(\text{Tr}(\gamma^{(2)})\psi^{(0)} + 2\psi^{(2)}) &= 0.\end{aligned}\tag{50}$$

En este caso, $R^{(0)}$ y $R_{ij}^{(0)}$ son el escalar y el tensor de Ricci para $\gamma^{(0)}$ respectivamente y $D_i^{(0)}$ la derivada covariante asociada a $\gamma^{(0)}$. De estas ecuaciones se puede obtener las expresiones para $\gamma_{ij}^{(2)}$ y $\psi^{(2)}$ como

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \frac{1}{(n-2)} \left[\frac{D_i D_j \psi^{(0)}}{\psi^{(0)}} - \frac{\gamma_{ij}^{(0)} \Delta^{(0)} \psi^{(0)}}{(n-1)\psi^{(0)}} + \frac{R^{(0)} \gamma_{ij}^{(0)}}{2(n-1)} - R_{ij}^{(0)} \right],\tag{51}$$

$$\psi^{(2)} = \frac{D_i D^i \psi^{(0)} - \psi^{(0)} \text{Tr} \gamma^{(2)}}{2(n-1)}.\tag{52}$$

De la expresión anterior se puede obtener mucha información al respecto. Como la acción presenta un acoplamiento entre el campo del dilatón y las derivadas de la métrica, las correcciones de órdenes superiores dependerán de cómo se defina la métrica en la frontera así como el valor que adquiera el dilatón. A su vez, en esta teoría no se puede fijar a 0 el dilatón puesto que lleva a una divergencia, pero si se toma $\psi^{(0)} = 1$, se obtienen

los resultados ya conocidos en [2]. También es fácil comprobar que dichas expresiones satisfacen (45) a orden z^2 .

3.2.3. Solución a orden z^3

Las ecuaciones para el orden z^3 son de la forma

$$\begin{aligned} 3(n-3)\text{Tr}(\gamma^{(3)}) &= 0, \\ -3(n-2)\psi^{(3)} - \frac{3}{2}\text{Tr}(\gamma^{(3)})\psi^{(0)} &= 0, \\ \frac{3}{2}(n-3)\gamma_{ij}^{(3)}\psi^{(0)} &= 0 \end{aligned} \tag{53}$$

De todas las expresiones vistas hasta ahora, lo que se puede apreciar es que para el orden z^3 no depende de $\gamma_{ij}^{(2)}$. A su vez, como las expresiones para la traza y para $\gamma_{ij}^{(3)}$ dependen de la dimensión de la variedad compactificada, esta permite discriminar dos escenarios: si la dimensión es $n \neq 3$, entonces necesariamente $\gamma_{ij}^{(3)}$ tiene que anularse como en el caso de $\gamma_{ij}^{(1)}$; pero si $n = 3$ entonces la traza queda indeterminada y ninguna de las dos expresiones mencionadas permite determinar mucha información sobre $\gamma_{ij}^{(3)}$. Si se toma el primer caso, el conjunto solución para este orden es

$$\gamma_{ij}^{(3)} = 0 \quad \psi^{(3)} = 0. \tag{54}$$

Sin embargo, si se toma $n = 3$, las ecuaciones anteriores se satisfacen de forma trivial y este orden queda indeterminado por dicho conjunto.

3.2.4. Solución a orden z^4

Éste es el último orden que se va a estudiar. Las ecuaciones que se obtienen son

$$\begin{aligned} R^{(2)} - [\text{Tr}(\gamma^{(2)})]^2 - \text{Tr}(\gamma^{(2)}\gamma^{(2)}) + 2(n-4)[2\text{Tr}(\gamma^{(4)}) - \text{Tr}(\gamma^{(2)}\gamma^{(2)})] &= 0, \\ -4(n-3)\psi^{(4)} + D_i^{(0)}D_{(0)}^i\psi^{(2)} + \psi^{(2)}\text{Tr}(\gamma^{(4)}) - \psi^{(0)}[2\text{Tr}(\gamma^{(4)}) - \text{Tr}(\gamma^{(2)}\gamma^{(2)})] &= 0, \\ R_{ij}^{(0)}\psi^{(2)} + R_{ij}^{(2)}\psi^{(0)} + 2(n-4)\gamma_{ij}^{(4)}\psi^{(0)} + \gamma_{ij}^{(2)}\psi^{(2)} + 2\gamma_{ik}^{(2)}\gamma_{jl}^{(2)}\gamma_{(0)}^{kl} - D_i^{(0)}D_j^{(0)}\psi^{(2)} - \\ - D_i^{(2)}D_j^{(2)}\psi^{(0)} + \gamma_{ij}^{(0)}\text{Tr}(\gamma^{(2)})\psi^{(2)} + \gamma_{ij}^{(0)}[2\text{Tr}(\gamma^{(4)}) - \text{Tr}(\gamma^{(2)}\gamma^{(2)})]\psi^{(0)} + 4\gamma_{ij}^{(0)}\psi^{(4)} &= 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Uno puede apreciar que si toma $n = 4$, sucede algo parecido al orden z^3 . La primera de las ecuaciones se convierte en una identidad, mientras que la $\psi^{(4)}$ depende de la traza de $\gamma^{(4)}$, y $\gamma_{ij}^{(4)}$ queda indeterminado puesto que la tercera ecuación no permite obtener su expresión en términos de órdenes más bajos. Si se toma un $n \neq 4$, entonces se podría resolver este orden.

3.3. Solución para el caso $n = 3$

Como se ha comentado en la introducción y se ha podido ver en la sección anterior, un caso de especial interés es considerar una variedad de dimensión $n = 3$. Para ello, se van a fijar unas coordenadas concretas para el gauge de Fefferman-Graham y son las coordenadas del cono de luz

$$x^+ = \frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}} \quad x^- = \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}} \quad \gamma_{ij}^{(0)} dx^i dx^j = e^{2\omega(x^+, x^-)} dx^+ dx^-. \quad (56)$$

Una vez se fija $\gamma^{(0)}$, se pueden resolver todos los órdenes superiores para la métrica y el dilatón. En este caso, no se especifica cuánto vale $\psi^{(0)}$, pero se escoge como un campo constante. Ello implica que el resto de correcciones para el dilatón no son constantes. Si uno toma la forma (56), se puede determinar para el orden de $\gamma^{(2)}$ y de $\psi^{(2)}$

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_+ \partial_- \omega \\ \partial_+ \partial_- \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \psi^{(2)} = \frac{\psi^{(0)} R^{(0)}}{8}, \quad (57)$$

en donde $R^{(0)} = -8e^{-2\omega} \partial_+ \partial_- \omega$ para el caso que se está tratando.

El orden z^3 se puede determinar de forma independiente al orden z^2 . Del conjunto (53), la segunda ecuación es la que indica cuánto vale $\psi^{(3)}$ si se conoce la traza de $\gamma^{(3)}$. Aun así, es posible determinar cuánto vale $\gamma_{ij}^{(3)}$ pese a que la tercera ecuación del conjunto quede indeterminada y es mediante el uso de (45) para ese orden. Dicha ecuación es

$$D_{(0)}^k [\gamma_{ki}^{(3)} \psi^{(0)}] + \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^{(3)}) \partial_i \psi^{(0)} = 0 \implies D_{(0)}^k [\gamma_{ki}^{(3)} \psi^{(0)}] = 0. \quad (58)$$

Si uno desarrolla las derivadas covariantes actuando sobre $\gamma^{(3)}$, lo que acaba obteniendo es un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} \partial_- \gamma_{++}^{(3)} + e^{2\omega} \partial_+ (e^{-2\omega} \gamma_{+-}^{(3)}) = 0 \\ \partial_+ \gamma_{--}^{(3)} + e^{2\omega} \partial_- (e^{-2\omega} \gamma_{+-}^{(3)}) = 0 \end{cases} \quad (59)$$

Este sistema en general no es posible resolverlo, pues hay dos ecuaciones para tres incógnitas. Sin embargo, se puede buscar una solución particular si uno toma como hipótesis $\partial_- \gamma_{++}^{(3)} = \partial_+ \gamma_{--}^{(3)} = 0$, entonces llega a

$$\left. \begin{aligned} e^{-2\omega} \gamma_{+-}^{(3)} &= f(x^-) \\ e^{-2\omega} \gamma_{+-}^{(3)} &= g(x^+) \end{aligned} \right\} \implies f(x^-) = g(x^+) = f_0 = \text{cte}. \quad (60)$$

De esta forma, para este caso en concreto, se puede concluir que para el orden z^3 una solución es

$$\gamma_{+-}^{(3)} = 2f_0 \gamma_{+-}^{(0)} \quad \psi^{(3)} = -\frac{1}{2} \gamma_{(0)}^{pq} \gamma_{pq}^{(3)} = -f_0 \psi^{(0)}. \quad (61)$$

Dentro de este ejemplo, uno es capaz de estudiar los difeomorfismos de la forma siguiente $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu(x)$. Esto lleva a considerar las variaciones respecto de la métrica como

$$\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} \partial_\nu \xi^\rho + g_{\nu\rho} \partial_\mu \xi^\rho, \quad (62)$$

en donde $\mathcal{L}$ es la derivada de Lie para el campo ξ . Se busca que el gauge de Fefferman-Graham permanezca igual para los difeomorfismos, con lo que $\delta g_{zz} = 0 = \delta g_{iz}$. Si uno desarrolla la derivada de Lie para estos casos, se tiene

$$\xi^z = z \hat{\xi}^z(x) \quad \xi^i = \hat{\xi}^i(x) - \partial_j \hat{\xi}^z \int_0^z z' \gamma^{ij}(z') dz', \quad (63)$$

donde $\hat{\xi}^z$ y $\hat{\xi}^i$ son una función y un vector que dependen unicamente de x . Si se desarrolla para g_{ij} , lo que se obtiene es

$$\mathcal{L}_\xi g_{ij} = \frac{1}{z^2} \left(\mathcal{L}_{\hat{\xi}} \gamma_{ij} - 2\gamma_{ij} \hat{\xi}^z + z \hat{\xi}^z \partial_z \gamma_{ij} \right). \quad (64)$$

Tomando los desarrollos en serie para la métrica γ_{ij} , y estableciendo que el orden más bajo en z de la expresión anterior sea nulo, lo que se obtiene es

$$2\gamma_{ij}^{(0)} \hat{\xi}^z = D_i^{(0)} \hat{\xi}_j + D_j^{(0)} \hat{\xi}_i \implies \hat{\xi}^z = \frac{D_i^{(0)} \hat{\xi}^i(x)}{(n-1)}, \quad (65)$$

en el último paso se ha tomado la traza. Tomando (56), las componentes de $\hat{\xi}_\pm$ pueden calcularse como

$$\hat{\xi}_+ = e^{2\omega} K(x^-) \quad \hat{\xi}_- = e^{2\omega} G(x^+) \implies \hat{\xi}^+ = 2K(x^-) \quad \hat{\xi}^- = 2G(x^+). \quad (66)$$

Entonces, se puede establecer las variables sin gorro a partir de estos resultados como

$$\xi^z = z e^{-2\omega} \left[\partial_+ (e^{2\omega} G(x^+)) + \partial_- (e^{2\omega} K(x^-)) \right]. \quad (67)$$

4. Contratérminos para una acción finita

En la sección 2 se estudiaron los términos de frontera necesarios para obtener un principio variacional a la acción JT dependiendo de las condiciones de contorno que uno imponga. Para poder tener una acción finita, en este caso, se va a tomar el término de frontera para las condiciones Dirichlet-Dirichlet (28). Si uno toma la acción con dicho término, esta diverge al integrar sobre toda la variedad. Esto se puede solucionar si se añaden unos contratérminos adecuados a la acción que eliminan las divergencias y mantienen inalteradas las ecuaciones de campo, como se vio en [2] y será el procedimiento que aquí se va a seguir.

Si se trabaja *on-shell*, la ecuación (33) establece que el término de volumen de la acción sea nulo, sobreviviendo únicamente el término de frontera

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^n x \sqrt{|g|} \phi (R + 2\Lambda) + \int_{\partial\mathcal{M}} dx^{n-1} \pi_\phi \phi \implies S_{\text{on-shell}} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\partial\mathcal{M}} dx^{n-1} \sqrt{|h|} K \phi. \quad (68)$$

Si se estudia en detalle dicho elemento, al usar el gauge de Fefferman-Graham, aparecen términos de la expansión en serie de potencias de z que son los causantes de las divergencias. El elemento de volumen se puede expresar como

$$\sqrt{|h|} = \frac{1}{z^{n-1}} \sqrt{|\gamma^{(0)}|} \left[1 - \frac{z^2}{2} \frac{R^{(0)}}{2(n-2)} + \mathcal{O}(z^4) \right]. \quad (69)$$

Ahora bien, en la sección anterior se dieron las expansiones en serie para K_{ij} , K y ϕ , de tal forma que se pueden ver cuáles son los términos que divergen. Quedándose solo hasta el orden z^2 , y tras unos cálculos largos, el término de frontera se puede expresar en la expansión como

$$\sqrt{|h|} K \phi = -\frac{1}{z^n} \sqrt{|\gamma^{(0)}|} \psi^{(0)} \left[(n-1) + \frac{z^2}{2} \left(\frac{\Delta^{(0)} \psi^{(0)}}{\psi^{(0)}} - \frac{n-4}{2(n-2)} R^{(0)} \right) + \mathcal{O}(z^4) \right]. \quad (70)$$

Los términos que hay que añadir para que la acción sea finita tienen que tener una estructura similar a los de la ecuación anterior pero con signo positivo. Observando la expresión, uno puede partir de

$$\sqrt{|h|} \phi (n-1) = \frac{\sqrt{|\gamma^{(0)}|}}{z^n} \psi^{(0)} \left[(n-1) + \frac{z^2}{2} \left(\frac{\Delta^{(0)} \psi^{(0)}}{\psi^{(0)}} - \frac{R^{(0)}}{2} \right) + \mathcal{O}(z^4) \right], \quad (71)$$

por otro lado, también se puede buscar el acople de $R(h)$ con ϕ de tal manera que

$$\sqrt{|h|} R(h) \phi = \frac{\sqrt{|\gamma^{(0)}|}}{z^{n-2}} \psi^{(0)} R^{(0)} \quad (72)$$

Si ahora uno junta (70) con (71), tras unos desarrollos, lo que se obtiene es

$$\begin{aligned}\sqrt{|h|}K\phi + \sqrt{|h|}(n-1)\phi &= -\frac{\sqrt{|\gamma^{(0)}|}}{z^{n-2}}\psi^{(0)}R^{(0)}\frac{2}{2(n-2)}[1 + \mathcal{O}(z^2)] \\ &= -\sqrt{|h|}R(h)\phi + \mathcal{O}(z^2),\end{aligned}\tag{73}$$

que es precisamente uno de los términos que se han calculado antes. Por ende, las expresiones que se han hallado previamente son las que hay que añadir para eliminar las divergencias, con lo que la acción pasa a ser

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^n x \sqrt{|g|} \phi (R + 2\Lambda) + \frac{1}{\kappa^2} \int_{\partial\mathcal{M}} dx^{n-1} \sqrt{|h|} \left[K + (n-1) + \frac{1}{2(n-2)} R(h) \right] \phi. \tag{74}$$

Esta acción es finita debido a que se han introducido los términos que se han mencionado antes y no cambia las ecuaciones de campo obtenidas previamente. Esto se debe a que el término de GHY con dilatón viene ya de hacer la integración por partes previamente y establecer las condiciones de frontera. Es importante aclarar que los contratérminos son esos para condiciones Dirichlet-Dirichlet; si se cambian dichas condiciones, entonces la acción requiere de otros contratérminos distintos.

5. Conclusiones

En este trabajo se han podido estudiar diferentes aspectos relacionados con espacios-tiempos de tipo Anti de Sitter. Se han comprobado cuáles son las ecuaciones de campo que surgen de establecer un principio variacional bien definido para la acción de Jackiw-Teitelboim. En el proceso, se han visto los términos de frontera necesarios que hay que añadir para que dicho principio esté bien definido. Se ha visto la importancia de las condiciones de frontera que se establecen para los campos, puesto que si son condiciones de tipo Dirichlet o de tipo Neumann, el término que hay que añadir cambia de forma; incluso, cabe la posibilidad de no añadir contratérmino. Las condiciones de tipo Dirichlet-Dirichlet permiten obtener un término similar al de Gibbons-Hawking-York para la acción de Einstein-Hilbert

$$S' = S + \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^{n-1}x \sqrt{|h|} \phi K.$$

Luego, se ha procedido a resolver las ecuaciones de campo en la proximidad de la frontera para $z = 0$, usando una compactificación conforme de la variedad y estableciendo un ansatz para los campos γ_{ij} y ϕ . Para este último, se resolvió la ecuación (40) y se estableció que el orden más bajo se anulara obteniendo $\alpha = -1, n$. Cabe mencionar que otra posible vía de estudio sería tomar otro orden del desarrollo e igualarlo a cero y obtener otros valores para α .

Una vez fijado el ansatz, se procedió a resolver las ecuaciones hasta el orden z^4 . Las expresiones que se obtuvieron para los campos dependían de los campos en la frontera, que son los asociados al orden (0). Los resultados que se obtuvieron son

$\gamma_{ij}^{(0)} \equiv \text{Dato en la frontera}$	$\psi^{(0)} \equiv \text{Dato en la frontera}$
$\gamma_{ij}^{(1)} = 0$	$\psi^{(1)} = 0$
$\gamma_{ij}^{(2)} = \frac{1}{(n-2)} \left[\frac{D_i D_j \psi^{(0)}}{\psi^{(0)}} - \frac{\gamma_{ij}^{(0)} \Delta^{(0)} \psi^{(0)}}{(n-1) \psi^{(0)}} + \frac{R^{(0)} \gamma_{ij}^{(0)}}{2(n-1)} - R_{ij}^{(0)} \right]$	$\psi^{(2)} = \frac{D_i D^i \psi^{(0)} - \psi^{(0)} \text{Tr} \gamma^{(2)}}{2(n-1)}$

Para los órdenes z^3 y z^4 las expresiones eran más largas y dependían de la dimensión de la variedad. Si se toma $n = 3$, el tercer orden queda indeterminado por las ecuaciones, mientras que si $n \neq 3$ las expresiones son nulas para los campos; para el orden z^4 sucede lo mismo si uno toma $n = 4$. Después se proporcionó un ejemplo concreto para $n = 3$ fijando $\psi^{(0)}$ como constante y $\gamma_{ij}^{(0)}$ como en (56). Así, se obtuvo una familia de soluciones dependiendo del parámetro f_0 .

Por último, se ha podido comprobar cómo se obtiene la finitud de la acción de Jackiw-Teitelboim. Se ha visto que era necesario añadir unos contratérminos, en especial dos, a partir de los resultados que se han obtenido en la sección 3 para eliminar las divergencias, resultando

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^n x \sqrt{|g|} \phi (R + 2\Lambda) + \frac{1}{\kappa^2} \int_{\partial \mathcal{M}} d^{n-1}x \sqrt{|h|} \left[K + (n-1) + \frac{1}{2(n-2)} R(h) \right] \phi.$$

Es aquí donde se puede comprobar la utilidad de los desarrollos en serie de Fefferman-Graham en la teoría que se ha estudiado. También se comentó que los términos adicionales pueden variar en función de qué tipo de condiciones de contorno se establezca para el problema (en este caso, Dirichlet-Dirichlet).

Este trabajo sienta las bases para poder seguir otros aspectos relacionados que no se han cubierto aquí. Por ejemplo, se podrían estudiar las cargas conservadas en la superficie de la variedad dependiendo de las condiciones de contorno que se impongan, los difeomorfismos residuales en la proximidad de la frontera o tomar el estudio de métricas más concretas o en dimensiones mayores que 3. Al trabajar en una generalización en n dimensiones de la teoría que propusieron inicialmente Jackiw y Teitelboim pero en 2 dimensiones, también se podría seguir con una cuantización de la gravedad por esta vía.

A. Transformaciones conformes

Como se comentó en la sección 3, aquí se dejan los desarrollos para una transformación conforme dada por (2). Los símbolos de Christoffel cambian de acuerdo a

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = -\Omega^{-1} \left(\Omega_{,\nu} \delta_{\mu}^{\alpha} + \Omega_{,\mu} \delta_{\nu}^{\alpha} - \Omega_{,\beta} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{g}_{\mu\nu} \right) + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}(\tilde{g}). \quad (75)$$

El tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura cambian a

$$\begin{aligned} R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} &= \tilde{R}_{\mu\beta\nu}^{\alpha}(\tilde{g}) + \Omega^{-1} \left(\delta_{\beta}^{\alpha} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} \Omega - \delta_{\nu}^{\alpha} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\beta} \Omega + \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_{\beta} \tilde{\nabla}^{\alpha} \Omega - \tilde{g}_{\beta\nu} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}^{\alpha} \Omega \right) + \\ &+ \Omega^{-2} \partial_{\lambda} \Omega \partial^{\lambda} \Omega (\delta_{\nu}^{\alpha} \tilde{g}_{\mu\beta} - \delta_{\beta}^{\alpha} \tilde{g}_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (76)$$

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu}(\tilde{g}) + \Omega^{-1} \left[(n-1) \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} \Omega + \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^2 \Omega \right] - \Omega^{-2} n \tilde{g}_{\mu\nu} \partial_{\lambda} \Omega \partial^{\lambda} \Omega \quad (77)$$

$$R = \Omega^2 \left[\tilde{R}(\tilde{g}) + 2n\Omega^{-1} \tilde{\nabla}^2 \Omega - \frac{n(n+1)}{\Omega^2} \partial_{\lambda} \Omega \partial^{\lambda} \Omega \right]. \quad (78)$$

En las expresiones anteriores, se ha utilizado la notación de ",," en el subíndice para referirse a la derivada ordinaria y $\tilde{\nabla}$ como la derivada covariante asociada a la métrica $\tilde{g}$. El operador de D'Alembert también cambia mediante esta transformación como

$$\nabla^2 \phi = \Omega^2 \left[\tilde{\nabla}^2 \Omega - (n-1) \Omega^{-1} \tilde{\nabla}_{\mu} \phi \partial^{\mu} \Omega \right] \quad (79)$$

B. Geometría en ADM

Como se ha mencionado en la sección 2.1.1, para poder establecer los momentos es necesario determinar los símbolos de Christoffel para el formalismo ADM.

$$\begin{aligned} \Gamma_{zz}^z &= \frac{\partial_z N}{N} + \frac{N^i \partial_i N}{N} + \frac{N^i N^j}{N} K_{ij} \\ \Gamma_{zi}^z &= \frac{\partial_i N}{N} + \frac{N^k}{N} K_{ik} \\ \Gamma_{zj}^i &= -\frac{N^i \partial_j N}{N} + D_j(h) N^i - (N h^{ik} + \frac{N^i N^k}{N}) K_{kj} \\ \Gamma_{jk}^i &= -\frac{N^i}{N} K_{jk} - \Gamma_{jk}^i(h) \\ \Gamma_{zz}^i &= -\frac{N^i}{2N^2} (\partial_z + N^j \partial_j) N^2 - \frac{N^i N^j N^k}{N} K_{jk} + h^{il} (\partial_z N_j - N \partial_j N - N^k D_l(h) N_k) \\ \Gamma_{ij}^z &= \frac{1}{N} K_{ij} \end{aligned} \quad (80)$$

En donde $D_j(h)$ es la derivada covariante asociada a la métrica inducida h_{ij} . Aquí, la curvatura extrínseca adquiere para este formalismo

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ij} = \frac{1}{2N} \left[-\partial_z h_{ij} + D_i(h) N_j + D_j(h) N_i \right] \quad (81)$$

B.1. Geometría en Fefferman-Graham

Al establecer el gauge de Fefferman-Graham, uno es capaz de calcular los símbolos de Christoffel asociado a una transformación conforme dada por (5). Aprovechando que están calculados para el formalismo ADM, se puede fijar $N = \frac{1}{z}$ y $N^i = 0$. Los únicos términos no nulos son

$$\Gamma_{zz}^z = -\frac{1}{z} \quad \Gamma_{ij}^z = -\frac{\gamma_{ij}}{z} + \tilde{K}_{ij} \quad \Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i(\gamma) \quad \Gamma_{zj}^i = -\frac{\delta_j^i}{z} + \frac{1}{2}\gamma^{ik}\partial_z\gamma_{jk} \quad (82)$$

De esta forma, se calculan las componentes del tensor de Riemann

$$\tilde{R}_{qkl}^i = \tilde{R}_{qkl}^i(\gamma) + K_l^i K_{qk} - K_k^i K_{ql}; \quad \tilde{R}_{qkl}^z = K_{qk,l} - K_{ql,k}; \quad \tilde{R}_{qzl}^z = -\partial_z K_{ql} + K_{pl} K_q^p. \quad (83)$$

El tensor de Ricci se obtiene por contracción del de Riemann,

$$\tilde{R}_{ql} = \tilde{R}_{ql}(\gamma) - K_{ql} K_i^i - \partial_z K_{ql} + 2K_{pl} K_q^p; \quad \tilde{R}_{zl} = K_{l,i}^i - K_{i,l}^i; \quad \tilde{R}_{zz} = -\partial_z K - K_{kp} K^{kp}. \quad (84)$$

Por último, se obtiene el escalar de Ricci por contracción del tensor

$$\tilde{R} = \tilde{R}(\gamma) - K_q^p K_p^q - (K_i^i)^2 - 2\partial_z K_i^i. \quad (85)$$

C. Expansión en serie de la métrica

En este apéndice se dejan los desarrollos técnicos de la expansión en serie para los objetos geométricos. Partiendo de (36), uno también tiene que construir la métrica pero con los índices contravariantes. Sin embargo, las expresiones cambian dependiendo de si se toma $\gamma_{ij}^{(1)} = 0$ o no.

C.1. Expansión para $\gamma^{(1)}$ y $\gamma^{(2)}$

Para los dos primeros órdenes se tienen las siguientes expresiones

$$\gamma^{ij} = \gamma_{(0)}^{ij} - z\gamma_{(0)}^{is}\gamma_{sp}^{(1)}\gamma_{(0)}^{pj} + z^2\left[\gamma_{(0)}^{kp}\gamma_{(0)}^{il}\gamma_{(0)}^{js}\gamma_{lk}^{(1)}\gamma_{sp}^{(1)} - \gamma_{(0)}^{il}\gamma_{pl}^{(2)}\gamma_{(0)}^{pj}\right] + \mathcal{O}(z^3). \quad (86)$$

Para las expresiones de la curvatura extrínseca se tiene

$$K_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}^{(1)} + z\gamma_{ij}^{(2)} + \mathcal{O}(z^2) \quad K_j^i = \frac{1}{2}\gamma_{(0)}^{ip}\gamma_{pj}^{(1)} + z\left[\gamma_{(0)}^{ip}\gamma_{pj}^{(2)} - \frac{1}{2}\gamma_{sp}^{(1)}\gamma_{(0)}^{ip}\gamma_{qj}^{(1)}\gamma_{(0)}^{sq}\right] + \mathcal{O}(z^2) \quad (87)$$

$$K^2 = \frac{1}{4}[\text{Tr}(\gamma^{(1)})]^2 + z[\text{Tr}(\gamma^{(1)})\text{Tr}(\gamma^{(2)}) - \frac{1}{2}\text{Tr}(\gamma^{(1)})\text{Tr}(\gamma^{(1)}\gamma^{(1)})] + \mathcal{O}(z^2) \quad (88)$$

C.2. Expansión para $\gamma^{(3)}$ y $\gamma^{(4)}$

Una vez queda establecido que $\gamma^{(1)} = 0$, los cálculos anteriores pueden expandirse a órdenes superiores y simplificarse considerablemente.

$$\gamma^{ij} = \gamma_{(0)}^{ij} - z^2 \gamma_{(0)}^{is} \gamma_{sp}^{(2)} \gamma_{(0)}^{pj} - z^3 \gamma_{(0)}^{is} \gamma_{sp}^{(3)} \gamma_{(0)}^{pj} + z^4 \left[\gamma_{(0)}^{kp} \gamma_{(0)}^{il} \gamma_{(0)}^{js} \gamma_{lk}^{(2)} \gamma_{sp}^{(2)} - \gamma_{(0)}^{il} \gamma_{pl}^{(4)} \gamma_{(0)}^{pj} \right] + \mathcal{O}(z^5). \quad (89)$$

Las expresiones para la segunda forma fundamental son

$$K_{ij} = z \gamma_{ij}^{(2)} + \frac{3}{2} z^2 \gamma_{ij}^{(3)} + 2 z^3 \gamma_{ij}^{(4)} + \mathcal{O}(z^4) \quad K = z K^{(1)} + z^2 K^{(2)} + z^3 K^{(3)} + \mathcal{O}(z^4), \quad (90)$$

en donde los elementos $K^{(i)}$ vienen determinados como las trazas de $\gamma^{(i)}$ como

$$K^{(1)} = \text{Tr}(\gamma^{(2)}) \quad K^{(2)} = \frac{3}{2} \text{Tr}(\gamma^{(3)}) \quad K^{(3)} = 2 \text{Tr}(\gamma^{(4)}) - \text{Tr}(\gamma^{(2)} \gamma^{(2)}) \quad (91)$$

D. Expansión del elemento de volumen $\sqrt{|h|}$

En la sección 4, para obtener la acción finita se toma las expansiones en serie vistas durante todo el trabajo. El elemento de volumen $\sqrt{|h|}$ también se puede expresar mediante un desarrollo, tal y como se presenta en (69). Aquí se dejan algunos desarrollos del resultado. Se parte de

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma} &= \sqrt{\det(\gamma^{(0)} + z^2 \gamma^{(2)})} = \exp\left(\frac{1}{2} \log [\det \gamma^{(0)} \times \det(1 + z^2 \gamma^{-1(0)} \gamma^{(2)})]\right) \\ &= \sqrt{\gamma^{(0)}} \exp\left(\frac{1}{2} \log [\det(1 + z^2 \gamma^{-1(0)} \gamma^{(2)})]\right), \end{aligned} \quad (92)$$

en donde en la última igualdad se ha utilizado la propiedad útil de los determinantes $\det(b + h) = \det b \det(1 + b^{-1}h)$ donde b y h son dos matrices invertibles. Otra propiedad que es útil es $\log \det = \text{Tr} \log$, que se puede utilizar y resulta

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma^{(0)}} \exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr}[\log(1 + z^2 \gamma^{-1(0)} \gamma^{(2)})]\right) = \sqrt{\gamma^{(0)}} \exp\left(\frac{z^2}{2} \text{Tr}(\gamma^{(2)}) + \mathcal{O}(z^4)\right). \quad (93)$$

En la última igualdad se ha tomado el desarrollo en serie de Taylor para z del logaritmo. Por último, el resultado que se da en la sección 4 se obtiene si se toma el desarrollo de Taylor para la exponencial

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma^{(0)}} \left[1 + \frac{z^2}{2} \text{Tr}(\gamma^{(2)}) + \mathcal{O}(z^4) \right]. \quad (94)$$

Referencias

- [1] A. Ashtekar and V. Petkov. *Springer Handbook of Spacetime, Chapter 19*. Springer Handbooks. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [2] S. De Haro, K. Skenderis, and S. N. Solodukhin. Holographic reconstruction of spacetime and renormalization in the ads/cft correspondence. *Communications in Mathematical Physics*, 217(3):595–622, 2001.
- [3] B. S. DeWitt. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys. Rev.*, 160:1113–1148, Aug 1967.
- [4] C. Fefferman and C. R. Graham. Conformal invariants. (S131):95–116, 1985.
- [5] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 15:2752–2756, May 1977.
- [6] R. Jackiw. Lower dimensional gravity. *Nuclear Physics B*, 252:343–356, 1985.
- [7] T. G. Mertens and G. J. Turiaci. Solvable models of quantum black holes: a review on jackiw–teitelboim gravity. *Living Reviews in Relativity*, 26(1), July 2023.
- [8] A. Sheykhi and A. Kazemi. Higher dimensional dilaton black holes in the presence of exponential nonlinear electrodynamics. *Physical Review D*, 90(4), Aug. 2014.
- [9] C. Teitelboim. Gravitation and hamiltonian structure in two spacetime dimensions. *Physics Letters B*, 126(1):41–45, 1983.
- [10] J. W. York. Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation. *Phys. Rev. Lett.*, 28:1082–1085, Apr 1972.