

Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo de Fin de Máster
Máster en Matemáticas

**Métodos dinámicos y numéricos de la teoría
del promedio con aplicación en problemas de
osciladores.**

Autor: Jorge Rodríguez Pérez
Tutores: Rafael Obaya García y
María Paz Calvo Cabrero

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo demostrar diversas cotas para la diferencia entre la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales que combina dos escalas de tiempo y su sistema promediado, utilizando un enfoque moderno y riguroso. Se define el concepto de promedio y se analizan propiedades de las funciones KBM, estableciendo cotas para la diferencia entre soluciones en escala de tiempo $1/\varepsilon$. Además, se introducen funciones UKBM para generalizar resultados a intervalos no acotados. La teoría del promedio para funciones periódicas se expone en su versión clásica, estudiando un cambio de variable que transforma la ecuación original en la promediada, y generalizándose para aproximaciones de mayor orden. Finalmente, se presentan aplicaciones prácticas, como el análisis del péndulo de Kapitza y el fundamento e implementación de los métodos numéricos de promediado estroboscópico, que permiten integrar de manera eficiente problemas de osciladores.

Palabras clave: teoría de promedio, forma estándar, funciones KBM, promediado estroboscópico, péndulo invertido

Abstract

This work aims to demonstrate various bounds for the difference between the solution of a system of differential equation where two time-scales are present and its averaged system, using a modern and rigorous approach. The concept of averaging is defined, and properties of KBM functions are analyzed, establishing bounds for the difference between solutions on a time scale of $1/\varepsilon$. Additionally, UKBM functions are introduced to generalize results to unbounded intervals. The theory of averaging for periodic functions is presented in its classical version, studying a change of variables that transforms the original equation into the averaged one, and generalizing to higher-order approximations. Finally, practical applications are presented, such as the analysis of the Kapitza pendulum and the theoretical basis and implementation of the of stroboscopic averaging numerical methods, which allow for the efficient integration of oscillator problems.

Keywords: averaging theory, standard form, KBM functions, stroboscopic averaging, inverted pendulum

*Quiero dar las gracias a mis tutores por sus consejos y
dedicación durante este año,
a mi familia y amigos por su apoyo en este viaje,
y a Sara, por estar siempre ahí.*

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Teorema de existencia y unicidad	4
2.2. Dependencia respecto de las condiciones iniciales	6
2.3. Desigualdad de Gronwall	6
2.4. Notación de Landau	8
2.5. Forma estándar	13
3. Teoría de promedio	19
3.1. Funciones KBM	19
3.2. Aproximación de soluciones utilizando el problema promediado	38
3.3. Acondicionar el problema	45
4. Intervalos de validez no acotados	55
4.1. Funciones UKBM	56
4.2. Aproximación de soluciones en $[0, \infty)$	62
5. Teoría de promedio para funciones periódicas	72
5.1. Aproximación de primer orden	72
5.2. Aproximaciones de mayor orden	78
6. Aplicaciones	85
6.1. El péndulo de Kapitza	85
6.2. Métodos numéricos de promediado estroboscópico	93
Bibliografía	102

Capítulo 1

Introducción

En muchos sistemas cuando se experimenta un cambio desde una posición de equilibrio estable, se generan oscilaciones, lo que hace que estén presentes en numerosos sistemas físicos y en el ámbito de la ingeniería. Los problemas relacionados con osciladores surgen en contextos muy variados, como el estudio del movimiento de un péndulo, la mecánica celeste, la dinámica de poblaciones, los circuitos eléctricos o los relojes atómicos. Este tipo de sistemas dinámicos se representa matemáticamente a través de sistemas de ecuaciones diferenciales.

En el estudio de problemas de osciladores, generalmente se recurre a modelos expresados mediante sistemas de ecuaciones diferenciales que se pueden integrar. No obstante, las leyes que rigen estos problemas son habitualmente de carácter no lineal y los modelos son simplificaciones que no son capaces de reproducir la complejidad de la realidad, y solo proporcionan soluciones aproximadas. La teoría de perturbaciones permite estudiar la diferencia entre la solución real y la solución del modelo simplificado como una perturbación que se pretende estimar, corrigiendo la solución para obtener aproximaciones más precisas.

La teoría de perturbaciones surgió en el siglo XVIII como un esfuerzo por conciliar las observaciones astronómicas con las predicciones teóricas de las órbitas planetarias. Las leyes gravitatorias de Newton, aplicadas a la dinámica de un sistema de dos cuerpos (el Sol y un planeta), proporcionaban un ajuste razonable a las observaciones, pero no eran suficientemente precisas. En este contexto, Lagrange [21] y Laplace [22] analizaron el efecto de otros planetas sobre el sistema de dos cuerpos, considerándolo como una perturbación. Esto llevó al desarrollo de ecuaciones diferenciales en lo que ahora se conoce como forma estándar

$$\mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

donde ε es una constante pequeña que representa la magnitud de la perturbación. Este enfoque permitió mejorar la precisión de las predicciones orbitales al tener en cuenta las interacciones gravitatorias adicionales. Lagrange estudió la ecuación en forma estándar, para una función periódica $\mathbf{f}$, desarrollándola con respecto a t en lo que ahora se conoce como serie de Fourier, truncando la serie y conservando únicamente el término independiente del tiempo. De esta forma, se obtiene una nueva ecuación diferencial autónoma

$$\mathbf{y}' = \varepsilon \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}),$$

más sencilla de resolver y analizar, que ahora se conoce como la ecuación promediada. Este procedimiento estableció las bases de la teoría de promedio, objeto de estudio de este trabajo, que se desarrolló en el siglo XX.

La teoría de promedio, tal y como se conoce actualmente, estudia la diferencia entre la solución de la ecuación $\mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ y la de la ecuación $\mathbf{y}' = \varepsilon \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y})$. La primera justificación rigurosa de una cota para esta diferencia se debe a Fatou [11], quien en 1928, empleando iterantes de Picard, demostró que cuando $\mathbf{f}$ es periódica la diferencia entre ambas soluciones es $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo $1/\varepsilon$. Sin embargo, las bases de la teoría de promedio moderna se desarrollaron principalmente en la segunda mitad del siglo XX, en la escuela rusa iniciada por Krylov.

Krylov y su estudiante Bogolyubov [20] consideraron métodos de promediado de mayor orden aplicados a problemas de osciladores, prestando especial atención a circuitos eléctricos, y utilizando técnicas basadas aún en series de Fourier. Posteriormente, Bogolyubov y Mitropolsky [4] extendieron la teoría de promedio a funciones más generales, proporcionando la definición de promedio que se utiliza en la teoría moderna y estableciendo las hipótesis de lo que hoy se conocen como funciones KBM y UKBM, en honor a estos tres autores. La teoría de promedio fue incorporada a la bibliografía occidental, en gran medida, gracias a la labor de Sanders y Verhulst [26].

El objetivo de este trabajo es demostrar distintas cotas para la diferencia entre la solución de la ecuación original y de la promediada en un lenguaje moderno y cuidando las hipótesis de estos resultados. Se busca proporcionar una obra de referencia sobre la teoría del promedio que sirva como un nexo entre los trabajos previos y las investigaciones más recientes en el área. A continuación, se presenta la estructura del trabajo, detallando los contenidos capítulo por capítulo.

En el Capítulo 2, se recogen los resultados fundamentales de ecuaciones diferenciales que son necesarios para el desarrollo de las demostraciones del trabajo, como el Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones o la Desigualdad de Gronwall. Además, se introducen las notaciones que se emplearán posteriormente para simplificar la expresión de las cotas que se probarán. Este capítulo también aborda la relación entre la solución del problema original y la solución del problema que se obtiene al suprimir la perturbación, en lugar de utilizar métodos de promediado. Asimismo, se explica cómo obtener ecuaciones en forma estándar para distintos problemas, en particular, para los problemas de osciladores.

En el Capítulo 3, se define el concepto de promedio y se analizan diversas propiedades de las funciones KBM. Se presenta una demostración, fundamentada en el artículo de Arstein [3], que establece una cota para la diferencia entre las soluciones en una escala de tiempo de $1/\varepsilon$ para funciones acotadas y globalmente lipschitzianas. En el caso de funciones periódicas, la cota es $\mathcal{O}(\varepsilon)$, mientras que en el caso general resulta ser $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_K(\varepsilon)})$, donde $\delta_K(\varepsilon)$ representa la tasa de convergencia, la cual será definida en el transcurso del capítulo. La demostración es aplicable tanto al caso periódico como al caso general, y se fundamenta en el concepto de tasa de promedio. Se finaliza el capítulo explicando cómo, acondicionando el problema, las hipótesis de acotación y de carácter globalmente lipschitziano pueden relajarse.

En el Capítulo 4, se estudian las funciones UKBM, que permiten generalizar los resultados del Capítulo 3 a intervalos temporales trasladados. Esta generalización permite demostrar un teorema que extiende la cota para la diferencia entre la solución del problema original y la del promediado a intervalos de tiempo no acotados, siempre que la ecuación promediada verifique ciertas propiedades dinámicas en las proximidades de la condición inicial.

En el Capítulo 5, se expone la teoría del promedio para funciones periódicas, siguiendo las demostraciones clásicas de la escuela rusa. La demostración se fundamenta en la

construcción de un cambio de variable adecuado que transforma la ecuación original en la ecuación promediada. Este enfoque ofrece una alternativa a la demostración presentada en el Capítulo 3, permitiendo establecer la cota $\mathcal{O}(\varepsilon)$, la cual puede ser generalizada a órdenes superiores para generar aproximaciones cuya diferencia con la solución de la ecuación original es $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$.

Para concluir, en el Capítulo 6 se presentan dos aplicaciones de los resultados analizados en los capítulos anteriores. En primer lugar, se lleva a cabo un estudio del péndulo invertido de Kapitza, en el cual se examina cómo se puede formular el problema en forma estándar y se justifican las condiciones bajo las cuales se puede aplicar el teorema del Capítulo 4 para demostrar que el péndulo permanece en posición vertical de manera indefinida. En segundo lugar, se introducen métodos numéricos de promediado estroboscópico, los cuales se basan en la teoría del promedio de funciones periódicas desarrollada en el Capítulo 5. Estos métodos permiten integrar de manera eficiente problemas de osciladores sin la necesidad de calcular expresiones analíticas para la ecuación promediada y resultan competitivos incluso frente a algoritmos modernos de paso variable.

A lo largo de todo el trabajo, el desarrollo teórico se complementa con ejemplos ilustrados con gráficas de elaboración propia. El código utilizado para generar estas gráficas, así como el correspondiente a los métodos numéricos de promediado estroboscópico, está disponible en <https://github.com/Rxaon/AveragingMethods>.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se recogen algunos resultados y conceptos básicos que se usarán con frecuencia a lo largo del trabajo, y se explican algunas notaciones relevantes.

En primer lugar, se enuncian resultados de existencia y unicidad de soluciones, que establecen las hipótesis mínimas que deben cumplirse para que se pueda hablar de soluciones de la ecuación diferencial. Estos resultados son fundamentales para garantizar que las soluciones están bien definidas y son únicas bajo ciertas condiciones.

Además, puesto que el objetivo del trabajo es encontrar cotas para la diferencia entre soluciones, la Desigualdad de Gronwall será de gran importancia, así como la notación de la O grande de Landau para describir esas cotas de manera abreviada.

El capítulo también aborda cómo transformar ecuaciones diferenciales a lo que denominaremos forma estándar, en la que se enuncian todos los resultados de la teoría de promedio.

A lo largo del trabajo se empleará **negrita** para los elementos de $\mathbb{R}^n$ o las funciones con llegada en este espacio. A menos que se especifique lo contrario, se emplea la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$. Como es habitual, en un abuso de notación, se omitirá la dependencia del tiempo en la escritura de la ecuación diferencial, aunque se explicitará para sus soluciones.

2.1. Teorema de existencia y unicidad

El objetivo del trabajo es estudiar ecuaciones diferenciales de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon),$$

donde $\mathbf{x}$ es una función en la variable $t \in \mathbb{R}$ que toma valores en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{f}$ es una función con llegada en $\mathbb{R}^n$ y definida en $D \times (0, \varepsilon_0]$, siendo $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio, es decir, un conjunto abierto conexo no vacío.

Sin embargo, en esta sección consideraremos que la función $\mathbf{f}$ no depende de ε . El teorema de existencia y unicidad se enunciará en estos términos, ya que, cuando tengamos que aplicarlos, la dependencia con ε estará dada por una expresión de la forma $\delta(\varepsilon)\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Entonces, para cada valor fijo de ε la existencia y unicidad de soluciones no se verá modificada.

En primer lugar, conviene notar que la primera variable del dominio D se corresponde con el tiempo, mientras que el resto son coordenadas espaciales. Por tanto, es habitual que las hipótesis sobre la variable temporal y las espaciales difieran. En particular, las

propiedades de localmente y globalmente lipschitziana siempre se refieren a las variables espaciales.

Definición 2.1.1. Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio y una función $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que $\mathbf{f}$ es localmente lipschitziana si para todo $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ existen $r > 0$, con $B((t_0, \mathbf{x}_0), r) \subset D$, y una constante L tal que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in B((t_0, \mathbf{x}_0), r),$$

donde L dependerá en general de r , t_0 y $\mathbf{x}_0$.

Definición 2.1.2. Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio y $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que $\mathbf{f}$ es globalmente lipschitziana si existe una constante L tal que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in D.$$

Cuando se quiera recalcar el papel de la variable $\mathbf{x}$ también diremos que $\mathbf{f}$ es localmente o globalmente lipschitziana respecto de la variable espacial, o respecto de $\mathbf{x}$. Además, en ocasiones es posible que $\mathbf{f}$ esté definida en un dominio donde no sea localmente o globalmente lipschitziana, pero su restricción a un subespacio X sí lo sea. En este caso diremos que $\mathbf{f}$ es localmente o globalmente lipschitziana en X .

Los siguientes resultados, cuya demostración se puede encontrar en el libro de Fernández y Vegas [14], muestran la importancia de las condiciones tipo Lipschitz en la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales.

Teorema 2.1.3. Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio y $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y localmente lipschitziana. Dado un punto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$, el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

tiene una única solución maximal $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ definida en un intervalo abierto $(\alpha(t_0, \mathbf{x}_0), \beta(t_0, \mathbf{x}_0))$ que contiene a t_0 . Es decir, para todo $t \in (\alpha(t_0, \mathbf{x}_0), \beta(t_0, \mathbf{x}_0))$, $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ y se verifica que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Aunque el resultado es de gran importancia, y muestra que bajo hipótesis bastante débiles tenemos garantizada la existencia y unicidad de soluciones, no tenemos ninguna garantía sobre el intervalo maximal de definición de la solución. Para garantizar que la solución existe en un cierto intervalo se puede emplear la siguiente proposición.

Proposición 2.1.4. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\mathbf{f}: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y localmente lipschitziana. Supongamos que existe una función continua $L: I \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L(t)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall t \in I, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

tiene solución única definida en todo I , para todo $t_0 \in I$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

En particular, si la función $\mathbf{f}: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es globalmente lipschitziana, aplicando la proposición con $L(t) = L$, concluimos que toda solución con $t_0 \in I$ está definida en todo el intervalo I .

2.2. Dependencia respecto de las condiciones iniciales

Además de la existencia y unicidad de soluciones, en ocasiones resulta interesante estudiar la dependencia de la solución respecto a las condiciones iniciales. Es decir, utilizando la notación del Teorema 2.1.3, si consideramos $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ como una función de $\mathbb{R}^{2+n}$, se busca estudiar la continuidad o derivabilidad respecto de t_0 o $\mathbf{x}_0$.

El siguiente teorema afirma que con las mismas hipótesis que garantizan la existencia y unicidad, la función es continua. Su demostración, así como las de los demás resultados de esta sección, se pueden encontrar en [14].

Teorema 2.2.1. *Sea $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ la solución maximal en las condiciones impuestas en el Teorema 2.1.3, y sea*

$$W = \{(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{2+n} : (t_0, \mathbf{x}_0) \in D, t \in (\alpha(t_0, \mathbf{x}_0), \beta(t_0, \mathbf{x}_0))\}.$$

Se tiene que W es abierto y $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es una función continua en W .

Sin embargo, para garantizar la derivabilidad respecto de las condiciones iniciales, hay que imponer hipótesis adicionales.

Teorema 2.2.2. *Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio y $\mathbf{f}: D \times \mathbb{R}^n$ una función continua con derivadas primeras continuas respecto a $\mathbf{x}$, en particular, es localmente lipschitziana. Si $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es la solución maximal dada por el Teorema 2.1.3, entonces $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es una función de clase C^1 en W .*

Además, la derivada $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))Y \\ Y(t_0) = I \end{cases}$$

donde I denota la identidad $n \times n$, y verifica que

$$\mathbf{x}_{t_0}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = -\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0).$$

Si se exige una mayor regularidad a la función $\mathbf{f}$, se puede garantizar una mayor regularidad de la solución con respecto de las condiciones iniciales, como establece la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3. *Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio y $\mathbf{f}: D \times \mathbb{R}^n$ una función de clase C^k en D . Si $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es la solución maximal dada por el Teorema 2.1.3, entonces $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ es una función de clase C^k en W .*

2.3. Desigualdad de Gronwall

Una desigualdad de uso frecuente en el estudio de ecuaciones diferenciales es la Desigualdad de Gronwall. Normalmente se enuncia como se recoge en el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [15].

Lema 2.3.1. *(Desigualdad de Gronwall) Sean $u, k, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tres funciones reales definidas y continuas en un intervalo de $\mathbb{R}$, con $k(t) \geq 0$ para $t \in [a, b]$. Si se tiene que*

$$u(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)u(s)ds \quad \forall t \in [a, b],$$

entonces,

$$u(t) \leq g(t) + \int_a^t g(s)k(s) \exp\left(\int_s^t k(r)dr\right)ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Esta es la forma más completa de enunciarlo. Sin embargo, existen múltiples versiones de uso más frecuente. En particular, es frecuente que la función $g(t)$ sea constante, en cuyo caso la Desigualdad de Gronwall se traduce en el siguiente corolario.

Corolario 2.3.2. Sean $u, k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones reales definidas y continuas en un intervalo de $\mathbb{R}$, con $k(t) \geq 0$ para $t \in [a, b]$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Si se tiene que

$$u(t) \leq c + \int_a^t k(s)u(s)ds \quad \forall t \in [a, b], \quad (2.1)$$

entonces,

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_a^t k(s)ds\right) \quad \forall t \in [a, b].$$

La versión que nos interesa principalmente de la Desigualdad de Gronwall para este trabajo es la siguiente. Aquí se proporciona una demostración a partir del Corolario 2.3.2, pero es posible encontrar una demostración directa en [26].

Corolario 2.3.3. Sea $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función real, continua y no negativa en un intervalo de $\mathbb{R}$ y sean $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ constantes no negativas y tal que $k_1 > 0$. Si se verifica que

$$u(t) \leq k_0 + k_1 \int_a^t u(s)ds + k_2(t - a) \quad \forall t \in [a, b], \quad (2.2)$$

entonces

$$u(t) \leq \left(k_0 + \frac{k_2}{k_1}\right) \exp(k_1(t - a)) - \frac{k_2}{k_1} \quad \forall t \in [a, b].$$

Demostración. Se puede reescribir la condición dada (2.2) en la forma (2.1) considerada en el corolario previo. Dado $t \in [a, b]$, se tiene que

$$u(t) \leq k_0 + k_1 \int_a^t u(s)ds + k_2(t - a) = k_0 + k_1 \int_a^t \left(u(s) + \frac{k_2}{k_1}\right) ds$$

con lo que

$$u(t) + \frac{k_2}{k_1} \leq \left(k_0 + \frac{k_2}{k_1}\right) + k_1 \int_a^t \left(u(s) + \frac{k_2}{k_1}\right) ds.$$

Ahora, aplicando el Corolario 2.3.2 se deduce que

$$u(t) + \frac{k_2}{k_1} \leq \left(k_0 + \frac{k_2}{k_1}\right) \exp(k_1(t - a)).$$

como se quería probar. □

2.4. Notación de Landau

La notación de Landau es una notación de gran utilidad a la hora de describir el comportamiento asintótico de funciones. Aunque se puede definir para estudiar el comportamiento en un punto genérico o incluso en el infinito, dado que nuestro propósito en este trabajo es estudiar el comportamiento cuando ε tiende a 0, únicamente se recogen aquí las definiciones específicas de este caso, al igual que hacen Sanders, Verhulst y Murdock en su libro [27].

Para comparar el comportamiento asintótico empleamos las denominadas funciones de orden, que definimos a continuación.

Definición 2.4.1. Una función $\delta(\varepsilon)$ definida en $(0, \varepsilon_0]$ con llegada en $\mathbb{R}$ se llama función de orden si es continua, positiva y existe $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta(\varepsilon)$. Si, además, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta(\varepsilon) = 0$, decimos que es un infinitésimo.

Puesto que nos interesa el comportamiento asintótico, resulta natural definir las funciones de orden en un conjunto abierto por 0. Además, la propiedad de ser positiva no se cumplirá en general en el cero, sino que en general trataremos con el caso de infinitésimos. Obsérvese que las funciones de orden se pueden extender a una función continua en $[0, \varepsilon_0]$, con lo que serán acotadas en dicho intervalo.

En primer lugar, si la función depende únicamente de ε , las definiciones de O grande y o pequeña son las siguientes.

Definición 2.4.2. Sea $\varphi(\varepsilon)$ una función definida para $\varepsilon > 0$ y con llegada en $\mathbb{R}^n$.

1. Decimos que $\varphi(\varepsilon)$ es una O grande de $\delta(\varepsilon)$ y escribiremos $\varphi(\varepsilon) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ si existen $\varepsilon_0 > 0$ y $k > 0$ de modo que $\delta(\varepsilon)$ es una función de orden en $(0, \varepsilon_0]$ y

$$\|\varphi(\varepsilon)\| \leq k\delta(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

2. Decimos que $\varphi(\varepsilon)$ es una o pequeña de $\delta(\varepsilon)$ y escribiremos $\varphi(\varepsilon) = o(\delta(\varepsilon))$ si existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que $\delta(\varepsilon)$ es una función de orden en $(0, \varepsilon_0]$ y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|\varphi(\varepsilon)\|}{\delta(\varepsilon)} = 0.$$

De este modo, la notación de O grande se traduce en que la función φ es comparable a la función de orden $\delta(\varepsilon)$ o, como diremos en ocasiones, que la función φ es de orden $\delta(\varepsilon)$. Por el contrario, la notación de o pequeña indica que la función es pequeña en comparación con funciones de orden $\delta(\varepsilon)$.

El objetivo es usar la notación de Landau para establecer cotas para las diferencias entre soluciones de ecuaciones diferenciales, con lo que la definición anterior no es suficiente porque φ no es una función del tiempo. Una posibilidad es que las cotas sean independientes del tiempo, es decir, que tuviéramos la misma cota para todo $t \in I \subset \mathbb{R}$ en el caso de la O grande o que el límite fuera uniforme en I en el caso de la o pequeña. La siguiente definición recoge estos casos.

Definición 2.4.3. Sea $\varphi(t, \varepsilon)$ una función definida para $\varepsilon > 0$ y con llegada en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\varphi(t, \varepsilon) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ en $I \subset \mathbb{R}$ si $\sup_{t \in I} \|\varphi(t, \varepsilon)\| = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$. Respectivamente, si $\sup_{t \in I} \|\varphi(t, \varepsilon)\| = o(\delta(\varepsilon))$, diremos que $\varphi(t, \varepsilon) = o(\delta(\varepsilon))$ en $I \subset \mathbb{R}$.

Idealmente, nos gustaría que las cotas fueran válidas en todo el intervalo maximal de la solución. Sin embargo, no siempre se puede garantizar esto, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.4. Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = -x + \varepsilon x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

con $\varepsilon > 0$, cuya solución es $x_\varepsilon(t) = \exp(\varepsilon t - t)$. Ahora bien, como $x_\varepsilon(t)$ es derivable en la variable ε , por el Teorema del Valor Medio, existe $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ de modo que

$$x_\varepsilon(t) - \exp(-t) = t \exp(\varepsilon_1 t - t) \varepsilon.$$

Dado ε_0 de modo que $\varepsilon_0 < 1$, consideremos ahora que $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. En estas condiciones, puesto que $\varepsilon_1 - 1 < \varepsilon - 1 < \varepsilon_0 - 1$ y la función $t \exp((\varepsilon_0 - 1)t)$ alcanza un máximo en $[0, \infty)$, si denotamos por k al valor de este máximo, se tiene que

$$x_\varepsilon(t) - \exp(-t) = t \exp(\varepsilon_1 t - t) \varepsilon \leq k \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), t \in [0, \infty).$$

Por tanto,

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|x_\varepsilon(t) - \exp(-t)\| = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

o con la notación de la definición anterior, $x_\varepsilon(t) = \exp(-t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ en $[0, \infty)$.

Para ε pequeño, pues recordemos que la cota no es cierta para $\varepsilon > 1$, lo que acabamos de probar es que el problema de Cauchy (2.3) proporciona una solución similar a la solución del problema de Cauchy con $\varepsilon = 0$. Sin embargo, nótese que la cota es falsa en $\mathbb{R}$, que es el intervalo maximal de definición de la solución, ya que a tiempo pasado las soluciones se separan exponencialmente por pequeño que sea el valor de ε .

La teoría de promedio se suele enunciar únicamente para tiempo futuro, con lo que incluso aunque la cota no sea cierta en todo el dominio de definición, el caso del ejemplo sigue siendo muy favorable. Como veremos en este trabajo, normalmente no estamos en esta situación, sino que los tiempos donde son válidas las cotas son intervalos que dependen del valor de ε . Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.4.5. Sea $\varphi(t, \varepsilon)$ una función definida para $\varepsilon > 0$ y con llegada en $\mathbb{R}^n$.

1. Decimos que $\varphi(t, \varepsilon) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ en escala de tiempo $\gamma(\varepsilon)^{-1}$ si existen $\varepsilon_0 > 0$, $k > 0$ y $c > 0$ de modo que $\delta(\varepsilon)$ y $\gamma(\varepsilon)$ son funciones de orden en $(0, \varepsilon_0]$ y

$$\|\varphi(t, \varepsilon)\| \leq k \delta(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], t \in (0, c/\gamma(\varepsilon)).$$

2. Decimos que $\varphi(t, \varepsilon) = o(\delta(\varepsilon))$ en escala de tiempo $\gamma(\varepsilon)^{-1}$ si existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que $\delta(\varepsilon)$ y $\gamma(\varepsilon)$ son funciones de orden en $(0, \varepsilon_0]$ y dado $\alpha > 0$ existen $\beta < \varepsilon_0$ y $c > 0$ tales que

$$\frac{\|\varphi(t, \varepsilon)\|}{\delta(\varepsilon)} < \alpha,$$

si $\varepsilon \in (0, \beta)$ y $t \in (0, c/\gamma(\varepsilon)]$, es decir, si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|\varphi(t, \varepsilon)\|}{\delta(\varepsilon)} = 0$$

uniformemente para $t \in (0, c/\gamma(\varepsilon)]$.

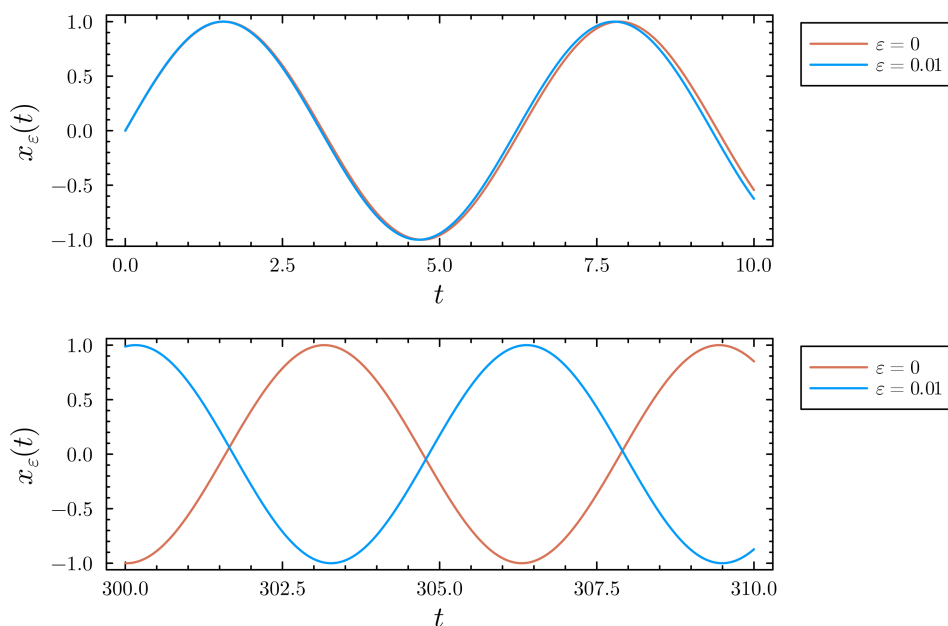


Figura 2.1: Soluciones desfasadas.

La misma función puede tener distintas cotas de error en distintas escalas de tiempo, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.6. Consideremos la siguiente ecuación diferencial $x'' + (\varepsilon + 1)^2 x = 0$. En primer lugar, escribimos el sistema como un sistema diferencial de primer orden de la forma que estamos estudiando en este trabajo. La ecuación de segundo orden es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = (\varepsilon + 1)y = y + \varepsilon y \\ y' = -(\varepsilon + 1)x = -x - \varepsilon x. \end{cases}$$

Imponemos a continuación $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$ como condiciones iniciales. Entonces, el sistema tiene solución $x_\varepsilon(t) = \sin((\varepsilon + 1)t)$, $y_\varepsilon(t) = \cos((\varepsilon + 1)t)$.

Centrémonos en la función $x_\varepsilon(t)$, que es la solución de la ecuación de segundo orden original. Como en el ejemplo anterior, vamos a estudiar la diferencia entre la solución para $\varepsilon > 0$ y la solución de la ecuación para $\varepsilon = 0$, es decir, queremos estudiar cotas para $\sin(\varepsilon t + t) - \sin(t)$.

En la Figura 2.1, se han representado las soluciones para $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = 0,01$ en los intervalos $[0, 10]$ y $[300, 310]$. Como se aprecia en la figura, las soluciones, al tener periodos distintos, aunque empiezan próximas y la diferencia es pequeña, se van desfasando y la diferencia aumenta. En el intervalo $[300, 310]$ la diferencia máxima es próxima a 2, un valor mucho mayor que la diferencia máxima en el intervalo $[0, 10]$.

Vamos a ver que este comportamiento permite ilustrar distintas cotas para la diferencia en distintas escalas de tiempo.

En primer lugar, puesto que el seno es una función acotada por 1, la resta está acotada por 2 y

$$\sin(\varepsilon t + t) - \sin(t) = \mathcal{O}(1)$$

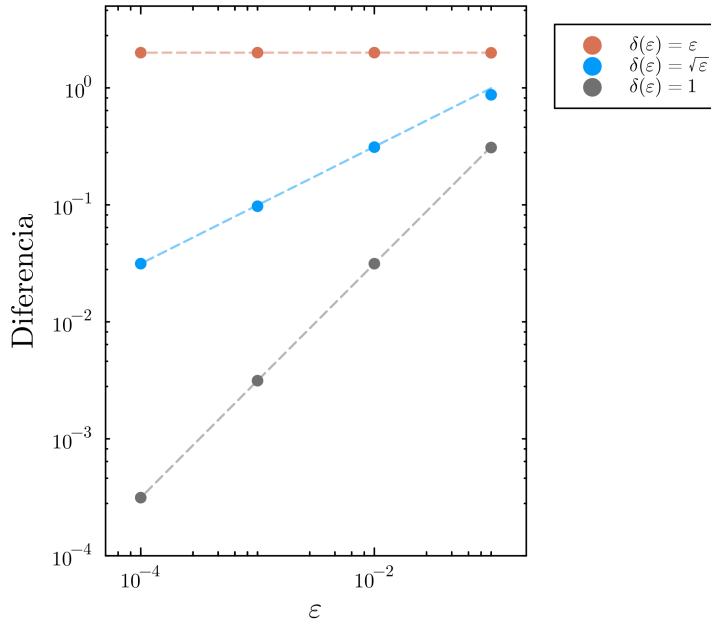


Figura 2.2: Cotas de error en distintas escalas de tiempo.

en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ o escala de tiempo. Veamos si se puede mejorar la cota. Sea $\gamma(\varepsilon)$ una función de orden, vamos a buscar una cota en escala de tiempo $\gamma(\varepsilon)^{-1}$. Utilizando la fórmula de la resta de senos, para cualquier tiempo t , podemos escribir

$$\sin(\varepsilon t + t) - \sin(t) = 2 \sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right) \cos\left(\frac{\varepsilon t}{2} + t\right). \quad (2.4)$$

Si acotamos usando $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\sin(x)| \leq |x|$, concluimos que para $t \in [0, L/\gamma(\varepsilon)]$,

$$|\sin(\varepsilon t + t) - \sin(t)| \leq |\varepsilon t| \leq L \frac{\varepsilon}{\gamma(\varepsilon)} \quad (2.5)$$

con lo que $x_\varepsilon(t) = \sin(t) + \mathcal{O}(\varepsilon/\gamma(\varepsilon))$ en escala de tiempo $\gamma(\varepsilon)^{-1}$.

Nótese que si $\varepsilon/\gamma(\varepsilon)$ tiende a infinito cuando ε tiende a cero, aunque válida, la cota que acabamos de encontrar no es útil, ya que antes hemos comprobado que tenemos una cota $\mathcal{O}(1)$ en cualquier escala de tiempo. Es decir, aunque es cierto que la diferencia entre los senos es $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-2} , también es $\mathcal{O}(1)$ en escala de tiempo ε^{-2} , con lo que la primera cota no aporta nueva información.

En la Figura 2.2 se representa en escala doblemente logarítmica el máximo del valor absoluto de la diferencia entre ambas soluciones (2.4) evaluada en puntos equiespaciados 0,01 en los intervalos $[0, \pi/\gamma(\varepsilon)]$ para $\gamma(\varepsilon)$ tomando valores ε (círculos naranjas), $\sqrt{\varepsilon}$ (círculos azules) y 1 (círculos grises) para $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ y 10^{-1} . También se han pintado en línea discontinua las funciones $\pi\varepsilon/\gamma(\varepsilon)$, para $\gamma(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ y $\gamma(\varepsilon) = 1$ que es la cota que proporciona la desigualdad (2.5). En el caso de $\gamma(\varepsilon) = \varepsilon$, la cota (2.5) no es óptima, sino que se puede acotar por 2 como se mencionó al principio y es la función que se ha representado en línea discontinua naranja. Como se aprecia en la figura, el comportamiento de la diferencia entre las soluciones en cada escala de tiempo es aproximadamente igual a las cotas que hemos encontrado.

Tanto en este ejemplo como en el anterior, hemos buscado cotas a partir de la expresión de las soluciones. Lo que se pretende es encontrar cotas a partir de la ecuación diferencial. Los siguientes capítulos profundizan cómo conseguir esto utilizando teoría de promedio. Sin embargo, podemos enunciar un primer resultado básico basado en la Desigualdad de Gronwall.

La siguiente proposición demuestra una cota entre dos soluciones con misma condición inicial cuando se añade un término que depende de ε a la ecuación original.

Proposición 2.4.7. Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio y $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g}: D \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas y localmente lipschitzianas. Supongamos además que $\mathbf{f}$ es globalmente lipschitziana y que $\mathbf{g}$ es acotada. Si $\delta(\varepsilon)$ es una función de orden y $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ son las soluciones de los problemas de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \delta(\varepsilon)\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

respectivamente, entonces $\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}(t) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ en escala de tiempo 1.

Demostración. En primer lugar, puesto que $\delta(\varepsilon)$ se puede extender a una función continua en $[0, \varepsilon_0]$, por el Teorema de Weierstrass está acotada. Por tanto, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \delta(\varepsilon)\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ es continua y localmente lipschitziana y se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad de soluciones maximales, con lo que, $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ están bien definidas. Además, se pueden escribir las ecuaciones diferenciales como ecuaciones integrales, resultando que las soluciones verifican

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\varepsilon(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t (\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_\varepsilon(s)) + \delta(\varepsilon)\mathbf{g}(s, \mathbf{x}_\varepsilon(s), \varepsilon)) ds \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds. \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones y tomando normas se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}(t)\| &= \left\| \int_0^t (\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_\varepsilon(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) + \delta(\varepsilon)\mathbf{g}(s, \mathbf{x}_\varepsilon(s), \varepsilon)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_\varepsilon(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\| ds + \delta(\varepsilon) \int_0^t \|\mathbf{g}(s, \mathbf{x}_\varepsilon(s), \varepsilon)\| ds. \end{aligned}$$

Por la acotación de $\mathbf{g}$, existe $M > 0$ de modo que $\|\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)\| \leq M$ en $D \times (0, \varepsilon_0]$, y por ser $\mathbf{f}$ globalmente lipschitziana, existe $L > 0$ de modo que $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ en D . Por tanto,

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq L \int_0^t \|\mathbf{x}_\varepsilon(s) - \mathbf{y}(s)\| ds + \delta(\varepsilon)Mt.$$

Esta expresión tiene la forma de la versión de la Desigualdad de Gronwall del Corolario 2.3.3 con $u(t) = \|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}(t)\|$ y constantes $k_0 = 0$, $k_1 = L$ y $k_2 = \delta(\varepsilon)M$. Entonces, se deduce que para $t \geq 0$

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \frac{\delta(\varepsilon)M}{L} \exp(Lt) - \frac{\delta(\varepsilon)M}{L}.$$

Por tanto, para todo intervalo de la forma $(0, \alpha)$, si k es el máximo de la función continua $M/L (\exp(Lt) - 1)$ en $[0, \alpha]$, se tiene que

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq k\delta(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], t \in (0, \alpha]$$

con lo que $\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}(t) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ en escala de tiempo 1. $\square$

Centremos nuestra atención en las ecuaciones diferenciales que aparecen en la Proposición 2.4.7. Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio, $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g}: D \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas y localmente lipschitzianas y $\delta(\varepsilon)$ un infinitésimo. Llamamos problema perturbado al problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \delta(\varepsilon)\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

y problema sin perturbar al problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

La Proposición 2.4.7 afirma que, bajo hipótesis adicionales sobre $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$, las soluciones de ambas ecuaciones están próximas para ε pequeño en intervalos de tiempo acotados. Es decir, si pensamos en el término $\delta(\varepsilon)\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ como una perturbación o error de magnitud $\delta(\varepsilon)$ pequeña, lo que afirma la proposición es que suprimir esa perturbación o error proporciona una buena aproximación en intervalos de tiempo acotados.

Observemos que los ejemplos 2.4.4 y 2.4.6 son de la forma de la proposición con $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ y el término que corresponde a $\mathbf{f}$ es globalmente lipschitziano, pues en ambos casos es lineal, pero el término que corresponde a $\mathbf{g}$ no es acotado en ninguno de los dos casos. Sin embargo, como se aprecia en la demostración del teorema, basta que $\mathbf{g}$ permanezca acotada a lo largo de todas las órbitas $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ y esto sí se verifica.

Puesto que en ambos ejemplos se han calculado las soluciones y las órbitas permanecen acotadas, al ser $\mathbf{g}$ una función continua, está acotada en las órbitas y la proposición permite concluir que la diferencia entre las soluciones es $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo 1. Esto es más débil que lo que se comprobó en el caso del Ejemplo 2.4.4, puesto que de hecho vimos que la cota es válida en todo $[0, \infty)$, pero más fuerte de lo que se dedujo en el caso del Ejemplo 2.4.6, ya que solo se comprobó en una de las coordenadas. Aunque solo se haya comprobado en una coordenada, las simulaciones numéricas del Ejemplo 2.4.6 muestran que la cota que proporciona la Proposición 2.4.7 en escala de tiempo 1 no es válida para escalas de tiempo mayores.

2.5. Forma estándar

Para conseguir soluciones aproximadas mejores no basta con suprimir la perturbación, hay que encontrar una ecuación diferencial que refleje el comportamiento aproximado del término adicional. Este es el propósito de los siguientes capítulos y de la teoría del promedio. Sin embargo, la teoría de promedio no se enuncia para ecuaciones de la forma (2.6).

Para aplicar teoría de promedio la ecuación diferencial tiene que ser de la forma

$$\mathbf{x}' = \delta(\varepsilon)\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$$

donde el infinitésimo multiplica todo el lado derecho de la ecuación. Es decir, se plantea directamente sobre el término del error. Cuando la ecuación diferencial tenga esta forma diremos que está escrita en forma estándar. Puesto que es más frecuente que una ecuación diferencial tenga la forma (2.6), en esta sección se trata cómo transformar esta ecuación, así como algunos casos particulares de esta a forma estándar.

En primer lugar, se enuncia un resultado general basado en el método de variación de constantes. Recordemos que el método de variación de constantes se emplea para resolver sistemas de ecuaciones lineales con un término no homogéneo. Una vez encontrada la solución del problema homogéneo, el método permite obtener una solución particular del problema no homogéneo. El siguiente resultado muestra que si conocemos la solución del problema sin perturbar, la variación de las constantes proporciona una ecuación en forma estándar en las nuevas variables.

Proposición 2.5.1. Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio, $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g}: D \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas y localmente lipschitzianas y $\delta(\varepsilon)$ un infinitésimo. Supongamos además que $\mathbf{f}$ es de clase $C^{0,2}$, es decir, que admite derivadas y derivadas segundas continuas respecto de la variable $\mathbf{x}$. Denotamos por $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z})$ a la solución maximal del problema sin perturbar (2.7) con $\mathbf{y}(t_0; t_0, \mathbf{z}) = \mathbf{z}$. Entonces, la ecuación diferencial en forma estándar en la variable $\mathbf{z}$

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = \delta(\varepsilon)(\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}))^{-1} \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}), \varepsilon) \\ \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

está definida en un entorno de $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ y verifica las condiciones del Teorema 2.1.3. Además, si $\mathbf{z}_\varepsilon(t)$ es la solución de (2.8), entonces $\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}(t, \mathbf{z}_\varepsilon(t))$ es solución del problema perturbado (2.6).

Demostración. Sea $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z})$ la solución maximal del problema sin perturbar. Por el Teorema 2.2.2, como la función $\mathbf{f}$ admite derivadas primeras continuas respecto a la variable espacial, tenemos que $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z})$ admite derivada parcial respecto de $\mathbf{z}$. Además, el teorema también permite afirmar que $\mathbf{y}_z(t_0; t_0, \mathbf{z}) = I$, en particular, $\mathbf{y}_z(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = I$. Puesto que, por el Teorema 2.2.1, la función $\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z})$ es continua, concluimos que en un entorno de $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$, su determinante es no nulo, y por tanto es invertible. Por tanto, en este entorno, la ecuación diferencial (2.8) está bien definida. Veamos ahora que se verifica las condiciones del Teorema 2.1.3.

Denotemos $\mathbf{h}(t, \mathbf{z}) = (\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}))^{-1} \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}), \varepsilon)$. Es claro que la función es continua, vamos a ver que es localmente lipschitziana. La ecuación diferencial que verifica $\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z})$, cumple las hipótesis del Teorema 2.2.2, puesto que $\mathbf{f}$ admite segundas derivadas continuas respecto a la variable espacial. Entonces, concluimos que $\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z})$, es derivable, y por tanto $(\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}))^{-1}$ también, y en particular es localmente lipschitziana. Para ver que el producto lo es también, escribimos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}(t, \mathbf{z}_1) - \mathbf{h}(t, \mathbf{z}_2)\| &\leq \|(\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}_1))^{-1} (\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_1), \varepsilon) - \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_2), \varepsilon))\| \\ &\quad + \|((\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}_1))^{-1} - (\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}_2))^{-1}) \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_2), \varepsilon)\|. \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la norma matricial para $\mathbb{R}^{n \times n}$, podemos acotar el primer término por

$$\|(\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}_1))^{-1}\| \|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_1), \varepsilon) - \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_2), \varepsilon)\|.$$

Puesto que $(\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}_1))^{-1}$ es continua, está acotada en entornos compactos, y como las normas son equivalentes en dimensión finita, la norma matricial puede acotarse. Además,

por la continuidad de $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z})$ y por ser $\mathbf{g}$ localmente lipschitziana, se puede acotar la norma de la resta por una constante multiplicada por $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_1) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_2)\|$. Finalmente, utilizando que $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z})$ es también localmente lipschitziana por ser derivable, obtenemos que se puede acotar el primer sumando por una constante por $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|$ en entornos adecuados.

En cuanto al segundo término, utilizando de nuevo la norma matricial, podemos acotarlo por

$$\|(\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}_1))^{-1} - (\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}_2))^{-1}\| \|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_2), \varepsilon)\|.$$

Puesto que hemos probado antes que $(\mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}))^{-1}$ es localmente lipschitziana, y que $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_2), \varepsilon)$ está acotada en intervalos compactos por ser continua, concluimos que este término también puede acotarse por una constante multiplicando $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|$. Por tanto $\mathbf{g}$ es localmente lipschitziana, y (2.8) verifica las hipótesis del Teorema 2.1.3, como queríamos probar.

Sea $\mathbf{z}_\varepsilon(t)$ la solución maximal del problema de Cauchy (2.8). Si se define $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ como $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_\varepsilon(t))$, entonces, derivando respecto al tiempo y aplicando la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_\varepsilon(t) &= \mathbf{y}_t(t; t_0, \mathbf{z}_\varepsilon(t)) + \mathbf{y}_z(t; t_0, \mathbf{z}_\varepsilon(t)) \mathbf{z}'_\varepsilon(t) \\ &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_\varepsilon(t))) + \delta(\varepsilon) \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_\varepsilon(t)), \varepsilon) \\ &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t)) + \delta(\varepsilon) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t), \varepsilon) \end{aligned}$$

Además, está claro que $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ verifica la condición inicial, puesto que

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t_0) = \mathbf{y}(t_0; t_0, \mathbf{z}_\varepsilon(t_0)) = \mathbf{y}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0.$$

Concluimos que $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ es solución del problema perturbado (2.6), como se quería demostrar. $\square$

2.5.1. Ecuaciones lineales

Puesto que no siempre se puede calcular una expresión cerrada para la solución de una ecuación diferencial, la Proposición 2.5.1 no siempre es útil, depende de la expresión del problema no perturbado. En el caso en que el problema no perturbado sea lineal, es decir, si $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$, sí disponemos de una expresión explícita para su solución.

El estudio de ecuaciones lineales homogéneas se supone conocido. Sin embargo, se recoge el siguiente resultado fundamental por completitud, que garantiza la existencia de soluciones y determina su forma. Se trata de un resultado estándar de ecuaciones diferenciales que se puede encontrar en muchas referencias. En el libro de Chicone [9] se puede encontrar una demostración.

Teorema 2.5.2. *Sea $\mathbf{A}(t)$ una función continua en un intervalo (α, β) , entonces, el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{z} \end{cases}$$

tiene solución única definida en todo el intervalo (α, β) para todo $t_0 \in (\alpha, \beta)$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Además, existe una única matriz $\Phi(t; t_0)$ de modo que $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}) = \Phi(t; t_0)\mathbf{z}$ para todo $t_0 \in (\alpha, \beta)$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

La matriz del Teorema 2.5.2 se conoce como matriz fundamental del sistema lineal homogéneo. Puesto que la solución del problema no perturbado lineal con condición inicial $\mathbf{z}$ es $\Phi(t; t_0)\mathbf{z}$, es inmediato que $\mathbf{y}_{\mathbf{z}}(t; t_0, \mathbf{z}) = \Phi(t; t_0)\mathbf{z}$ con lo que la Proposición 2.5.1 proporciona la siguiente ecuación diferencial en forma estándar

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = \delta(\varepsilon)\Phi^{-1}(t; t_0)\mathbf{g}(t, \Phi(t; t_0)\mathbf{z}, \varepsilon) \\ \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

En el caso en que la matriz $\mathbf{A}(t)$ sea independiente del tiempo, es decir, $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$, entonces la matriz fundamental se puede calcular como la exponencial de $\mathbf{A}$. En este caso, se tiene que $\Phi(t; t_0) = \exp(\mathbf{A}(t - t_0))$. La inversa de esta matriz es $\exp(-\mathbf{A}(t - t_0))$ con lo que una forma estándar es

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = \delta(\varepsilon)\exp(-\mathbf{A}(t - t_0))\mathbf{g}(t, \exp(\mathbf{A}(t - t_0))\mathbf{z}, \varepsilon) \\ \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

2.5.2. Oscilador forzado y variables amplitud fase

Un problema frecuente en el ámbito de la física es el oscilador lineal forzado. La ecuación de un oscilador lineal simple es $x'' + \omega^2 x = 0$, donde $\omega > 0$ es la frecuencia natural del oscilador. Si se introduce una fuerza que actúa en el oscilador la ecuación se convierte en $x'' + \omega^2 x = F(t, x, x', \varepsilon)$, que es la ecuación del oscilador forzado. Supongamos que la expresión de la fuerza es $\delta(\varepsilon)g(t, x, x', \varepsilon)$, entonces el problema físico está modelado por el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'' + \omega^2 x = \delta(\varepsilon)g(t, x, x', \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Si lo escribimos en forma vectorial, tenemos

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} + \delta(\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, x, y, \varepsilon) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

que es un problema lineal y al que podemos aplicar los resultados anteriores para convertirlo a forma estándar.

El problema sin perturbar es una ecuación diferencial lineal con coeficientes independientes del tiempo y matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como sabemos, $\cos(\omega(t - t_0))$ y $\sin(\omega(t - t_0))$ son dos soluciones independientes de esta ecuación diferencial, pudiendo escribirse cualquier otra como combinación lineal de ambas. Para obtener la matriz fundamental normalizamos la segunda solución dividiendo por ω . Entonces, la matriz fundamental es

$$\exp(\mathbf{A}(t - t_0)) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - t_0)) \\ -\omega \sin(\omega(t - t_0)) & \cos(\omega(t - t_0)) \end{pmatrix}.$$

Puesto que es una matriz 2×2 con determinante 1, es inmediato calcular la inversa. Se tiene que

$$\exp(-\mathbf{A}(t - t_0)) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) & -\frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - t_0)) \\ \omega \sin(\omega(t - t_0)) & \cos(\omega(t - t_0)) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el sistema en forma estándar que se obtiene por (2.9) se traduce en

$$\begin{cases} z_1' = -\frac{\delta(\varepsilon)}{\omega} \sin(\omega(t - t_0))g(t, \exp(\mathbf{A}(t - t_0))\mathbf{z}, \varepsilon) \\ z_2' = \delta(\varepsilon) \cos(\omega(t - t_0))g(t, \exp(\mathbf{A}(t - t_0))\mathbf{z}, \varepsilon) \\ z_1(t_0) = x_0, z_2(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Hasta ahora, siempre hemos empleado la Proposición 2.5.1 para transformar la ecuación a forma estándar. Sin embargo, dependiendo del problema, puede haber otros cambios de variables que nos proporcionen una forma estándar. En el caso de un oscilador, una manera más frecuente de escribir la solución es usando la amplitud y el ángulo. Todo problema de Cauchy de un péndulo simple admite una solución de la forma

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t + \theta) \\ y = -r\omega \sin(\omega t + \theta). \end{cases}$$

Veamos qué obtenemos si aplicamos variación de las constantes en r y θ . Es decir, queremos ver si en lugar de considerar las variables posición y velocidad, se pueden considerar las variables amplitud y fase, y obtener también una ecuación en forma estándar.

Derivando las expresiones para x y y se obtiene

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos(\omega t + \theta) - r \sin(\omega t + \theta)(\omega + \theta') \\ y' &= -r' \omega \sin(\omega t + \theta) - r \omega \cos(\omega t + \theta)(\omega + \theta'), \end{aligned}$$

con lo que, sustituyendo en las ecuaciones del problema perturbado, se obtiene

$$\begin{aligned} r' \cos(\omega t + \theta) - r \sin(\omega t + \theta)(\omega + \theta') &= -r \omega \sin(\omega t + \theta) \\ -r' \omega \sin(\omega t + \theta) - r \omega \cos(\omega t + \theta)(\omega + \theta') &= -\omega^2 r \cos(\omega t + \theta) + \delta(\varepsilon)g(t, x, y, \varepsilon), \end{aligned}$$

donde x e y son funciones de r, θ y t . Estas ecuaciones se simplifican a

$$\begin{aligned} r' \cos(\omega t + \theta) - r \sin(\omega t + \theta)\theta' &= 0 \\ -r' \omega \sin(\omega t + \theta) - r \omega \cos(\omega t + \theta)\theta' &= \delta(\varepsilon)g(t, x, y, \varepsilon), \end{aligned}$$

que se pueden expresar de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega t + \theta) & -r \sin(\omega t + \theta) \\ -\omega \sin(\omega t + \theta) & -r \omega \cos(\omega t + \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \delta(\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, invirtiendo la matriz se tiene que

$$\begin{cases} r' = -\frac{\delta(\varepsilon)}{\omega} \sin(\omega t + \theta)g(t, x, y, \varepsilon) \\ \theta' = -\frac{\delta(\varepsilon)}{r\omega} \cos(\omega t + \theta)g(t, x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (2.11)$$

es otra forma estándar para el mismo problema.

Observemos que las ecuaciones en las variables amplitud y fase, si $\mathbf{g}$ es continua y localmente lipschitziana, verifican las condiciones del Teorema 2.1.3, como se comprueba igual que se hizo en la demostración de la Proposición 2.5.1. Sin embargo, a diferencia de la forma estándar que proporciona la proposición, si se emplean variables amplitud y fase, hay que modificar la condición inicial en el problema de Cauchy. Además, en este caso, las condiciones iniciales no son únicas, puesto que la fase está definida módulo 2π .

En el siguiente capítulo veremos distintos ejemplos para ilustrar la utilidad de considerar distintas formas estándar para un mismo problema.

Capítulo 3

Teoría de promedio

Consideremos el problema de Cauchy en forma estándar

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

El objetivo de este capítulo es estudiar hipótesis suficientes para que exista un problema de Cauchy de la forma

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

cuya solución aproxime de forma adecuada la solución del sistema original (3.1). El sistema (3.2) tiene la ventaja de ser autónomo, por lo que su estudio es mucho más sencillo que el del sistema original.

De acuerdo con la Proposición 2.4.7, si $\mathbf{f}$ es acotada, podemos tomar $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ y las soluciones de ambos sistemas se diferenciarán en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo 1. Sin embargo, se pueden encontrar candidatos mejores. La teoría de promedio propone tomar como $\mathbf{g}$ un promedio de la función $\mathbf{f}$, de ahí que nos refiramos al nuevo sistema como sistema promediado. El propósito de este capítulo es probar que, bajo condiciones muy generales, la solución del sistema promediado es una buena aproximación a la solución original en escala de tiempo ε^{-1} .

3.1. Funciones KBM

En primer lugar, vamos a estudiar cuándo tiene sentido hablar de promedio y qué entendemos por esto. En tiempo finito, una media se define de la siguiente manera.

Definición 3.1.1. Sea $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Llamamos media en tiempo $T > 0$ a la función

$$\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt.$$

Para el promedio estamos interesados en una media en todo el intervalo $[0, \infty)$, con lo que lo definiremos por el límite de las medias. Sin embargo, la simple existencia de este límite no es suficiente. Para que el sistema promediado tenga solución, buscamos que el promedio sea continuo y localmente lipschitziano. En esta sección vamos a estudiar un tipo de funciones para las cuales el promedio cumplirá estas propiedades.

Definición 3.1.2. Sea $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Se dice que $\mathbf{f}$ es una función KBM (por Krylov, Bogolyubov, Mitropolsky) si verifica que

1. para todo $r > 0$ existe $L_r > 0$ de modo que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L_r \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall t \geq 0, \|\mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_2\| \leq r,$$

2. para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la función

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})$$

está bien definida. Denominaremos a esta función promedio de $\mathbf{f}$.

Observemos que una función KBM, además de tener promedio, verifica una condición tipo Lipschitz que es más fuerte que ser localmente lipschitziana pero más débil que ser globalmente lipschitziana. En particular, el sistema (3.1) verifica las condiciones del Teorema 2.1.3, y tiene una única solución maximal.

Vamos a ver que, con estas condiciones, $\widehat{\mathbf{f}}$ es continua y localmente lipschitziana, con lo que si en (3.2) se toma $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y})$, el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \varepsilon \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

verifica las condiciones del Teorema 2.1.3.

Proposición 3.1.3. Sean $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM, $r > 0$, y $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$. Si $\|\mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_2\| \leq r$, se tiene que

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_1) - \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_2)\| \leq L_r \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall T \in (0, \infty).$$

Demostración. Dados $r > 0$ y $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_2\| \leq r$, entonces

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_1) - \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_2)\| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| dt \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T L_r \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| dt = L_r \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|. \end{aligned}$$

□

Puesto que la media es continua respecto de T , se puede tomar límite cuando T tiende a infinito en la desigualdad de la proposición. Entonces, se deduce el siguiente resultado.

Corolario 3.1.4. Si $\mathbf{f}$ es una función KBM, dado $r > 0$, para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ con norma menor o igual que r se tiene que

$$\|\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_2)\| \leq L_r \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|,$$

en particular, $\widehat{\mathbf{f}}$ es continua y localmente lipschitziana.

Por tanto, si la función $\mathbf{f}$ de (3.1) es KBM, el sistema promediado (3.3) admite una única solución maximal con la misma condición inicial. Sin embargo, el teorema fundamental que establece la cota para la diferencia entre las soluciones de estos sistemas se reserva para la siguiente sección. Antes, vamos a estudiar las propiedades de este tipo de funciones.

En muchos modelos, las funciones involucradas son periódicas. En este caso, normalmente el promedio se define como la media en el periodo. La siguiente proposición muestra que la función promedio está bien definida y coincide con este valor.

Proposición 3.1.5. *Sea $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y periódica en el tiempo, de periodo T_0 , es decir, $\mathbf{f}(t + T_0, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Entonces, la función promedio de $\mathbf{f}$ está bien definida y se tiene que $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}_{T_0}(\mathbf{x})$.*

Demostración. Fijamos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La función $t \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es continua y su norma está acotada por $M > 0$ en el compacto $[0, T_0]$. Entonces, por la hipótesis de periodicidad, se tiene que M es una cota en todo $[0, \infty)$.

Ahora, dado $T > 0$, escribimos $T = kT_0 + \delta$ con $0 \leq \delta < T_0$, con lo que se tiene que

$$\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \left(\int_0^{kT_0} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt + \int_{kT_0}^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \right).$$

Se puede desarrollar la integral del primer sumando como

$$\int_0^{kT_0} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{jT_0}^{(j+1)T_0} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt = \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^{T_0} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}) ds = kT_0 \widehat{\mathbf{f}}_{T_0}(\mathbf{x}),$$

donde se ha usado el cambio de variable $s = t - jT_0$ y la periodicidad para trasladar cada intervalo $[jT_0, (j+1)T_0]$ a $[0, T_0]$. Además, el segundo sumando se puede acotar como

$$\left\| \frac{1}{T} \int_{kT_0}^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \right\| \leq \frac{1}{T} \int_{kT_0}^T M dt = \frac{\delta M}{T} \leq \frac{T_0 M}{T}.$$

Por tanto, al tomar límites cuando $T \rightarrow \infty$ se concluye que el primer término tiende a $\widehat{\mathbf{f}}_{T_0}(\mathbf{x})$ y el segundo tiende a 0, de lo que se deduce el resultado. $\square$

A partir de la proposición es inmediato construir ejemplos de funciones KBM. Cualquier función periódica que sea derivable, con derivada acotada, es una función KBM. En efecto, el Teorema del Valor Medio permite asegurar que la función es globalmente lipschitziana, con lo que la condición tipo Lipschitz de la definición de KBM, que es más débil, se verifica, y la existencia de función promedio está garantizada por la proposición.

Ahora que sabemos calcular el promedio de funciones periódicas, podemos calcular el sistema promediado de un problema físico bien conocido.

Ejemplo 3.1.6. Consideremos la ecuación diferencial $x'' + \omega^2 x = \varepsilon \cos(\omega t)$, que se corresponde a la de un péndulo forzado en resonancia. La acción de la fuerza se corresponde con la frecuencia natural de oscilación, con lo que la amplitud de la oscilación crece con el tiempo de manera no acotada.

Puesto que el coseno es una función con promedio nulo, en primera instancia podemos estar tentados de tomar $x'' + \omega^2 x = 0$ como sistema promediado. Además, esta sería la ecuación que se obtendría al truncar la perturbación como sugiere la Proposición 2.4.7. Sin

embargo, esta ecuación se corresponde con un péndulo simple y tiene un comportamiento muy distinto que el de nuestra ecuación original.

Recordemos que la ecuación debe estar expresada en forma estándar. Por tanto, lo primero es obtener una expresión de este estilo para nuestro problema. El caso del oscilador forzado ya se estudió en el capítulo anterior, con lo que, tomando $t_0 = 0$, sabemos que podemos escribir las ecuaciones en forma estándar en las variables z_1 y z_2 como

$$\begin{cases} z_1' = -\frac{\varepsilon}{\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \\ z_2' = \varepsilon \cos^2(\omega t), \end{cases}$$

es decir, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t), \cos^2(\omega t))$. Es inmediato que $\mathbf{f}$ es continua y periódica de periodo $2\pi/\omega$. Además, como es independiente de las variables espaciales, $\mathbf{f}$ es KBM.

Sabemos que el promedio es la integral en el periodo dividida por el periodo, por tanto, teniendo en cuenta que

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt = \frac{\pi}{\omega}$$

el sistema promediado resulta ser

$$\begin{cases} \bar{z}_1' = 0 \\ \bar{z}_2' = \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

El sistema obtenido no solo es autónomo, sino que además es inmediato de resolver. Integrando el sistema con condición inicial x_0 e y_0 y deshaciendo el cambio de variable, se tiene que el sistema promediado proporciona la solución

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} (y_0 + \frac{\varepsilon}{2} t) \sin(\omega t).$$

En este caso, como se comprueba fácilmente, la solución del promediado coincide exactamente con la solución del sistema original, con lo que, en efecto, es una aproximación mejor que la que proporciona la Proposición 2.4.7.

En general, como se verá a lo largo de este trabajo, las funciones periódicas son especialmente adecuadas para la teoría del promedio. De hecho, como se demostrará más adelante, las cotas de error son más favorables en el caso de funciones periódicas, por lo que dedicaremos un capítulo específico a su estudio.

Dado que las funciones periódicas nos permiten obtener de manera sencilla funciones KBM, nos planteamos la posibilidad de construir funciones KBM a partir de sumas o límites de otras funciones KBM. Así, al considerar sumas e incluso series de funciones periódicas, podríamos garantizar la propiedad KBM en una importante familia de funciones.

Proposición 3.1.7. *Las funciones KBM son un subespacio vectorial de las funciones continuas de $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Además, la aplicación $\mathbf{f} \mapsto \widehat{\mathbf{f}}$ es lineal.*

Demostración. Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Por la linealidad de la integral

$$(\widehat{\mathbf{f} + \mathbf{g}})_T(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x})) dt = \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{g}}_T(\mathbf{x})$$

con lo que $\widehat{(\mathbf{f} + \mathbf{g})}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{(\mathbf{f} + \mathbf{g})}_T(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$. Análogamente,

$$\widehat{(\lambda \mathbf{f})}_T(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt = \lambda \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})$$

con lo que $\widehat{(\lambda \mathbf{f})}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{(\lambda \mathbf{f})}_T(\mathbf{x}) = \lambda \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$. Por lo que tanto $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ como $\lambda \mathbf{f}$ admiten promedio.

Ahora, si dado $r > 0$, L_r es la constante de Lipschitz para $\mathbf{f}$ y L'_r es la de $\mathbf{g}$, entonces para todo $t \geq 0$ y $\|\mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_2\| \leq r$ se tiene que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L_r \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| + L'_r \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

y

$$\|\lambda \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \lambda \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq \lambda L_r \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

con lo que $L_r + L'_r$ es una constante de Lipschitz para $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ y λL_r lo es para $\lambda \mathbf{f}$. $\square$

Usando esta propiedad podemos construir funciones KBM no periódicas, como la del siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.8. Sea $\mathbf{a}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función derivable con derivada acotada. Consideremos $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (\sin((\pi + 1)t) + \sin((\pi - 1)t)) \mathbf{a}(\mathbf{x})$. Tanto $\sin((\pi + 1)t)$ como $\sin((\pi - 1)t)$ son periódicas y tienen derivada acotada, luego su producto por $\mathbf{a}$, que también tiene derivada acotada, es KBM, y en consecuencia su suma lo es también. Sin embargo, vamos a ver que $\mathbf{f}$ no es una función periódica.

Podemos reescribir $\mathbf{f}$ como $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 2 \sin(\pi t) \cos(t) \mathbf{a}(\mathbf{x})$. Entonces, es claro que para un $\mathbf{x}$ donde $\mathbf{a}$ no se anule, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ se anula únicamente en $\mathbb{Z}$ y en $\pi k - \frac{\pi}{2}$ para $k \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $\mathbf{f}$ es periódica, entonces existe $T > 0$ de modo que $\mathbf{f}(t + T, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, $\mathbf{f}(T, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(0, \mathbf{x}) = 0$, con lo que T necesariamente es entero o igual a $\pi k - \frac{\pi}{2}$ para algún k entero. En el primer caso, si T es entero, se llega a un absurdo puesto que debería cumplirse que $\mathbf{f}(T - \frac{\pi}{2}, \mathbf{x}) = 0$. Supongamos entonces que $T = \pi k - \frac{\pi}{2}$, en este caso, se llega a un absurdo puesto que se tendría que $\mathbf{f}(T + 1, \mathbf{x}) = 0$.

Aunque la función no sea periódica, al tenerla escrita como una suma de periódicas es sencillo calcular el promedio. Como se ha visto en la Proposición 3.1.7, el promedio de la suma es la suma de los promedios. Puesto que la integral a lo largo de un periodo del seno es nula, la Proposición 3.1.5 nos permite afirmar que el promedio de los senos es nulo, y por tanto el de $\mathbf{f}$ también lo es.

Ya hemos visto que la suma de funciones KBM es KBM. A continuación vamos a ver qué se puede afirmar del límite uniforme de funciones KBM. En primer lugar, el siguiente resultado garantiza que la propiedad de tener promedio se conserva tomando límite uniforme.

Proposición 3.1.9. Sea $\mathbf{f}_k: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una sucesión de funciones continuas tal que, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}_k(t, \mathbf{x})$ converge uniformemente en $[0, \infty)$ a una función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Si para cada $k \in \mathbb{N}$, el promedio $\widehat{\mathbf{f}}_k$ está bien definido, entonces $\mathbf{f}$ admite promedio y se tiene que $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{f}}_k(\mathbf{x})$.

Demostración. Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $T > 0$. Dado $\alpha > 0$, por la convergencia uniforme, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $k \geq k_0$ y $t \geq 0$ se tiene que $\|\mathbf{f}_k(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| < \alpha$. Entonces

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_{k,T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{f}_k(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| dt < \alpha$$

por lo que $\widehat{\mathbf{f}}_{k,T}(\mathbf{x})$ converge uniformemente en T a $\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})$.

En particular, es uniformemente de Cauchy, con lo que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para $p, q \geq k_0$ y $T > 0$ se tiene que $\|\widehat{\mathbf{f}}_{p,T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_{q,T}(\mathbf{x})\| < \alpha/3$. Tomando límite $T \rightarrow \infty$ en la expresión, se deduce que $\|\widehat{\mathbf{f}}_p(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_q(\mathbf{x})\| < \alpha/3$ para todo $p, q \geq k_0$, con lo que la sucesión es de Cauchy y admite límite. Si denotamos al límite por $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, falta probar que $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$.

Fijado $k \geq k_0$, por convergencia de las medias de $\mathbf{f}_k$ al promedio, existe un $T_0 > 0$ de modo que para todo $T \geq T_0$ se tiene que $\|\widehat{\mathbf{f}}_k(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_{k,T}(\mathbf{x})\| < \alpha/3$. Entonces, para todo $T \geq T_0$ se tiene que

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_k(\mathbf{x})\| + \|\widehat{\mathbf{f}}_k(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_{k,T}(\mathbf{x})\| + \|\widehat{\mathbf{f}}_{k,T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})\| < \alpha$$

donde se ha usado que $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_k(\mathbf{x})\| < \alpha/3$, como se deduce haciendo $p \rightarrow \infty$ en $\|\widehat{\mathbf{f}}_p(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_k(\mathbf{x})\| < \alpha/3$, y que $\|\widehat{\mathbf{f}}_{k,T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})\| < \alpha/3$, que se deduce al tomar $q \rightarrow \infty$ en $\|\widehat{\mathbf{f}}_{k,T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_{q,T}(\mathbf{x})\| < \alpha/3$. Concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{f}}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

como queríamos probar. $\square$

La existencia de promedio es una propiedad en la variable temporal, y en la proposición no se impone ninguna condición sobre la variable espacial que permita garantizar la propiedad de tipo Lipschitz necesaria para que el límite sea KBM. De hecho, puede ocurrir que la función límite no sea siquiera continua. Pero, aunque el límite sea uniforme también en la variable espacial y la función límite sea continua, puede no ser KBM, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.10. Consideremos la función $f(t, x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor} \sqrt{(x - \lfloor x \rfloor)(1 - x + \lfloor x \rfloor)}$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x . La función f es constante en el tiempo y por tanto coincide con su promedio. Se trata de semicircunferencias pegadas de manera alternada en los enteros, como se representa en naranja en la Figura 3.1. La función es continua, pero no es derivable en los enteros y su derivada no es acotada en ningún entorno de los enteros. Por tanto, los cocientes incrementales se pueden hacer tan grandes como se quiera, y la propiedad de tipo Lipschitz no se verifica, con lo que no es una función KBM.

Sin embargo, es una función periódica de periodo 2 y se puede construir una sucesión de poligonales que converja uniformemente a ella y que sea también periódica. Por ejemplo, se puede tomar la sucesión de poligonales obtenida al unir los puntos de la gráfica espaciados 2^{-k} unidades con $k \in \mathbb{N}$. En la Figura 3.1 se han representado dichas poligonales con k desde 1 hasta 5, y se aprecia cómo la pendiente de las poligonales en $x = 1$ crece a medida que disminuye el espacio entre los puntos. Sin embargo, siendo la poligonal un conjunto de rectas, tomando la pendiente máxima de las rectas en un intervalo fijo de longitud 2 se tiene una cota para la derivada en todo $\mathbb{R}$ para cada poligonal. Por tanto, las poligonales sí son funciones KBM.

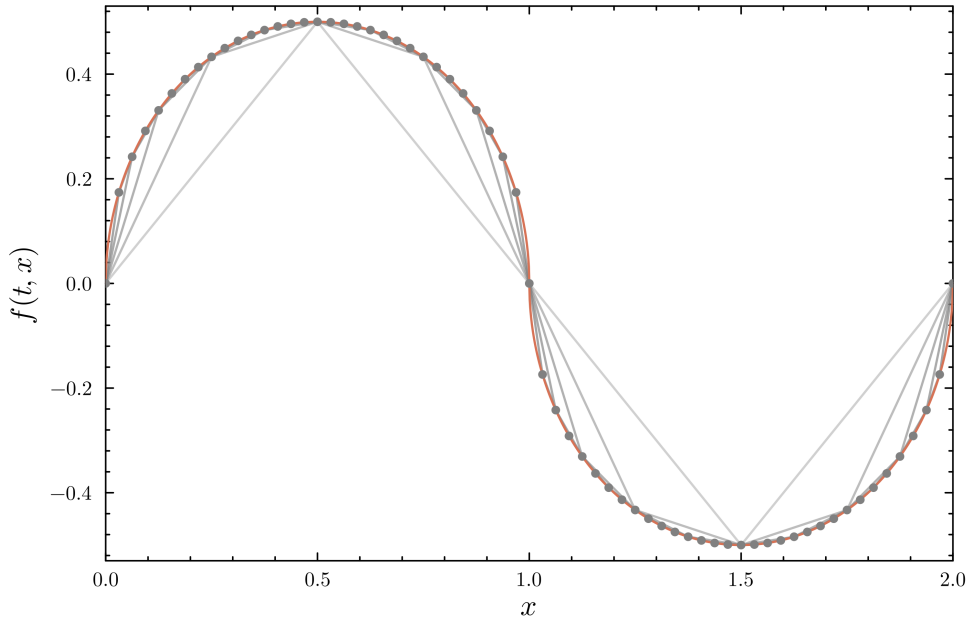


Figura 3.1: Límite uniforme de funciones KBM

Puesto que la propiedad de tipo Lipschitz no se conserva por límite uniforme, el límite de funciones KBM puede tener promedio pero no ser KBM, como en el ejemplo, donde la pendiente máxima que se alcanza en las poligonales se hace cada vez más grande. Aunque en cada una de ellas la pendiente máxima está acotada, se hace arbitrariamente grande a medida que se refina la partición, lo que impide que el límite sea KBM. Por tanto, si no se imponen condiciones adicionales, no es cierto que el límite uniforme de funciones KBM sea KBM.

Para que la función límite sea KBM necesitamos la continuidad de la función así como la condición tipo Lipschitz. Una manera de garantizar ambas cosas es exigir una condición de tipo Lipschitz uniforme para toda la sucesión de funciones. Con esta hipótesis adicional, entonces sí podemos asegurar que la función límite es KBM, como se recoge en el siguiente resultado.

Corolario 3.1.11. *Sea $\mathbf{f}_k: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una sucesión de funciones KBM tal que, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}_k(t, \mathbf{x})$ converge uniformemente en $[0, \infty)$ a una función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Si para cada $r > 0$ existe L_r de modo que*

$$\|\mathbf{f}_k(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}_k(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L_r \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall t \geq 0, \|\mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_2\| \leq r, k \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

entonces $\mathbf{f}$ es KBM.

Demostración. Por la Proposición 3.1.9, la función $\mathbf{f}$ admite promedio. Además, tomando límite $k \rightarrow \infty$ en la desigualdad (3.4) se deduce que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L_r \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall t \geq 0, \|\mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_2\| \leq r.$$

Por tanto, solo queda probar que la función $\mathbf{f}$ es continua.

Dados $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ y $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\|\mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t_2, \mathbf{x}_2)\| \leq \|\mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_2)\| + \|\mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(t_2, \mathbf{x}_2)\|.$$

El primer sumando puede acotarse usando la condición de tipo Lipschitz. Por otro lado, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)$ es continua como función de t por ser límite uniforme de funciones continuas, con lo que también se puede acotar el segundo sumando. Concluimos que $\mathbf{f}$ es continua y por tanto KBM. $\square$

Para concluir con las propiedades de las funciones KBM, vamos a estudiar la derivabilidad del promedio. Se trata de una propiedad que necesitaremos en el capítulo de funciones periódicas, pero se recoge aquí en términos más generales para una función KBM cualquiera.

En primer lugar, necesitamos el siguiente lema técnico. Además, se trata de un resultado importante para posteriores demostraciones.

Lema 3.1.12. *Sea $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM. Entonces el límite*

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})$$

es uniforme en los compactos de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Fijado un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, definimos la siguiente familia de funciones continuas en K

$$\mathcal{F} = \{\widehat{\mathbf{f}}_T: T \in (0, \infty)\}.$$

Sea $\mathbf{x}_0 \in K$. Vamos a ver que $\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_0)$ está acotado en $T \in (0, \infty)$. En primer lugar, es inmediato que la aplicación $T \mapsto \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_0)$ es continua. Además,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_0) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \quad \text{y} \quad \lim_{T \rightarrow 0^+} \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, 0),$$

donde el segundo límite es consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo. Concluimos que $\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_0)$ permanece acotado. Ahora, si definimos $r = \max_{\mathbf{x} \in K} \|\mathbf{x}\|$, para cualquier $\mathbf{x} \in K$, se tiene que

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_0)\| \leq L_r \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq 2rL_r \quad \forall T \in (0, \infty).$$

Por tanto, si $\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_0)$ está acotado por $M > 0$, concluimos que

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})\| \leq 2rL_r + M \quad \forall T \in (0, \infty), \quad (3.5)$$

por lo que la familia está uniformemente acotada.

Además, si $R = \|\mathbf{x}_0\|$, dado $r > 0$ se tiene que

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_0)\| \leq L_{R+r} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \quad \forall T \in (0, \infty), \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r),$$

puesto que si $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ entonces $\|\mathbf{x}\| \leq R + r$ y estamos en condiciones de aplicar la Proposición 3.1.3. Por tanto, concluimos que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua.

La acotación uniforme y la equicontinuidad de la familia $\mathcal{F}$ nos permite aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli para concluir que $\mathcal{F}$ es relativamente compacta. En consecuencia, si el límite no fuera uniforme en K , se tendría que existe un $\alpha > 0$ de modo que para todo $j \in \mathbb{N}$, existe un $T_j \geq j$ de modo que

$$\|\widehat{\mathbf{f}} - \widehat{\mathbf{f}}_{T_j}\|_\infty \geq \alpha.$$

Esto es absurdo, ya que por ser $\mathcal{F}$ relativamente compacta, si tomamos la sucesión $\{\widehat{\mathbf{f}}_{T_j}\}_{j=1}^\infty$ de elementos de $\mathcal{F}$, sabemos que admite una subsucesión convergente, y por hipótesis, debe converger a $\mathbf{f}$, con lo que la desigualdad anterior no se puede verificar. $\square$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente resultado, que garantiza la derivabilidad del promedio, siempre que la función tenga derivadas KBM.

Proposición 3.1.13. *Sea $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM de clase $\mathcal{C}^1$. Si $\partial \mathbf{f} / \partial x_i$ es KBM, entonces el promedio de $\partial \mathbf{f} / \partial x_i$ es $\widehat{\partial \mathbf{f} / \partial x_i}$.*

Demostración. Puesto que $\mathbf{f}$ es KBM, se tiene que

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})$$

y por ser $\mathbf{f}$ de clase $\mathcal{C}^1$ podemos aplicar el Teorema de Derivación Bajo el Signo Integral (véase [2]) y concluimos que

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{f}}_T}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \right) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) dt = \left(\widehat{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}} \right)_T(\mathbf{x}).$$

Ahora bien, por ser $\partial \mathbf{f} / \partial x_i$ KBM, se tiene que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\widehat{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}} \right)_T(\mathbf{x}) = \widehat{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}}(\mathbf{x})$$

y por el Lema 3.1.12, el límite es uniforme en los compactos de $\mathbb{R}^n$.

Por tanto, como las derivadas de $\widehat{\mathbf{f}}_T$ convergen uniformemente en los compactos de $\mathbb{R}^n$ al promedio de $\partial \mathbf{f} / \partial x_i$, concluimos que la función límite $\widehat{\mathbf{f}}$ admite derivada parcial respecto de x_i y

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{f}}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \widehat{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}}(\mathbf{x}),$$

como se deduce de los resultados de convergencia uniforme para sucesiones de funciones derivables. $\square$

Aplicando sucesivas veces la Proposición 3.1.13 se puede garantizar una mayor regularidad del promedio cuando $\mathbf{f}$ es más regular, como muestra el siguiente corolario.

Corolario 3.1.14. *Sea $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM de clase $\mathcal{C}^k$. Si todas sus derivadas parciales respecto a variables espaciales hasta orden k son KBM, entonces $\widehat{\mathbf{f}}$ es de clase $\mathcal{C}^k$.*

Demostración. Aplicando el resultado anterior repetidas veces, se tiene que

$$\frac{\partial^k \widehat{\mathbf{f}}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}) = \left(\widehat{\frac{\partial^k \mathbf{f}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}} \right)(\mathbf{x}) \quad \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}.$$

Además, por el Corolario 3.1.4, como el promedio es continuo, todas las derivadas de orden k de $\widehat{\mathbf{f}}$ son continuas, y en consecuencia $\widehat{\mathbf{f}}$ es de clase $\mathcal{C}^k$. $\square$

La Proposición 3.1.13 y el Corolario 3.1.14 son especialmente relevantes para funciones periódicas. Dado que la derivada espacial también es periódica, la Proposición 3.1.5 asegura la existencia del promedio de las derivadas. Por tanto, en el caso periódico, $\widehat{\mathbf{f}}$ siempre admite derivadas. Si, además, las derivadas de $\mathbf{f}$ son KBM, es decir, si podemos garantizar la propiedad tipo Lipschitz, entonces el Corolario 3.1.14 afirma que las derivadas del promedio son continuas.

3.1.1. Tasa de convergencia

Al principio del capítulo se ha introducido el sistema promediado como una posible alternativa a la ecuación original para obtener soluciones aproximadas. Como ya se mencionó, el objetivo es encontrar cotas para la diferencia entre la solución del sistema original y la del sistema promediado que sean válidas en escala de tiempo ε^{-1} . Puesto que el infinitésimo que aparece en la ecuación (3.1) es ε , podríamos esperar que la diferencia entre las soluciones fuera $\mathcal{O}(\varepsilon)$ por similitud con la Proposición 2.4.7. Sin embargo, en general, la cota obtenida es peor.

Vamos a ver con un ejemplo cómo la diferencia entre las soluciones tiende a cero con mayor o menor rapidez en función de ε con distintas funciones. Se trata de un oscilador con un término de amortiguamiento cuyo coeficiente se incrementa con el tiempo de un valor inicial a un valor límite. Vamos a ver cómo, dependiendo de la velocidad con la que se da la transición, la diferencia en escala de tiempo ε^{-1} cambia. Este ejemplo se puede encontrar también en [27] y [30].

Ejemplo 3.1.15. Consideremos la ecuación $x'' + \varepsilon h(t)x' + x = 0$, donde $\varepsilon h(t)$ es el coeficiente de amortiguamiento del oscilador y $h(t)$ es una función tal que $h(0) = 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 2$. Es decir, estamos considerando un oscilador armónico en el que se incrementa el término de rozamiento con el tiempo de ε a 2ε . Tomamos como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = 0$, es decir, se suelta en reposo desde una posición x_0 .

Como en otros ejemplos, lo primero es escribir el problema en forma estándar. En primer lugar, escribimos el sistema como uno de primer orden tomando $y = x'$, con lo que el sistema queda como

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - \varepsilon h(t)y \\ x(0) = x_0, y(0) = 0. \end{cases}$$

Esta expresión coincide con la de un oscilador forzado (2.10) con $\omega = 1$, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ y término de fuerza $g(t, x, y, \varepsilon) = -h(t)y$. En este caso, a diferencia de lo que ocurriría en el Ejemplo 3.1.6, la función g depende de las variables espaciales y no solo de las temporales y resulta más sencillo emplear las variables amplitud fase para expresar la ecuación en forma estándar.

Tomando $x = r \cos(t + \theta)$ e $y = -r \sin(t + \theta)$, se tiene que

$$g(t, x, y, \varepsilon) = rh(t) \sin(t + \theta),$$

con lo que sustituyendo en (2.11), se obtiene el siguiente problema de Cauchy en forma estándar

$$\begin{cases} r' = -\varepsilon r \sin^2(t + \theta)h(t) \\ \theta' = -\varepsilon \sin(t + \theta) \cos(t + \theta)h(t) \\ r(0) = x_0, \theta(0) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Recordemos que en el caso de la transformación a variables amplitud fase hay que transformar la condición inicial, pero en el caso $y(0) = 0$, las condiciones iniciales para las nuevas variables coinciden.

Sea

$$\mathbf{f}(t, r, \theta) = \begin{pmatrix} -r \sin^2(t + \theta)h(t) \\ -\sin(t + \theta) \cos(t + \theta)h(t) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

la función que determina el nuevo sistema. Las funciones $\sin^2(t + \theta)$ y $\sin(t + \theta) \cos(t + \theta)$ tienen derivada acotada respecto de θ , con lo que son globalmente lipschitzianas. Además, multiplicar por r no cambia el carácter globalmente lipschitziano en subconjuntos acotados, al igual que tampoco lo hace el multiplicar por una función del tiempo que esté acotada, como h . Por tanto, la función $\mathbf{f}$ verifica la condición tipo Lipschitz de las funciones KBM. Vamos a probar que la función también admite promedio y es por tanto KBM.

Para ello, basta comprobar que tanto $r \sin^2(t + \theta)h(t)$ como $\sin(t + \theta) \cos(t + \theta)h(t)$ admiten promedio. Desafortunadamente, ninguna de las dos funciones es periódica, y en general no vamos a disponer de una expresión cerrada para las integrales para poder calcular el promedio usando la definición. Sin embargo, sabemos que el promedio de $r \sin^2(t + \theta)$ es $r/2$ y que el promedio de $\sin(t + \theta) \cos(t + \theta)$ es nulo, ya que son funciones periódicas y podemos calcularlo integrando en $[0, 2\pi]$. Denotamos

$$\mathbf{g}(t, r, \theta) = \begin{pmatrix} -r \sin^2(t + \theta) \\ -\sin(t + \theta) \cos(t + \theta) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{g}}(r, \theta) = \begin{pmatrix} -r/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de modo que $\mathbf{f}(t, r, \theta) = h(t)\mathbf{g}(t, r, \theta)$. Puesto que $h(t)$ es una función con límite 2 en el infinito, cabe esperar que $\widehat{\mathbf{f}}(r, \theta) = 2\widehat{\mathbf{g}}(r, \theta)$. Vamos a ver que, en efecto, es el caso.

Podemos acotar

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(t, r, \theta) dt - 2\widehat{\mathbf{g}}(r, \theta) \right\| &= \left\| \frac{1}{T} \int_0^T (h(t)\mathbf{g}(t, r, \theta) - 2\widehat{\mathbf{g}}(r, \theta)) dt \right\| \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T 2 \|\mathbf{g}(t, r, \theta) - \widehat{\mathbf{g}}(r, \theta)\| dt + \frac{1}{T} \int_0^T \|(h(t) - 2)\mathbf{g}(t, r, \theta)\| dt, \end{aligned}$$

de modo que el primer término tiende a cero por definición del promedio. Veamos qué ocurre con el segundo término.

Dado $\alpha > 0$, existe $T_0 > 0$ de modo que $|h(t) - 2| < \alpha/2$ para $t > T_0$. Entonces, si $T > T_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |h(t) - 2| dt &= \frac{1}{T} \int_0^{T_0} |h(t) - 2| dt + \frac{1}{T} \int_{T_0}^T |h(t) - 2| dt \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^{T_0} |h(t) - 2| dt + \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Si tomamos $T_1 > 0$ de modo que para todo $T > T_1$ se cumpla que

$$\frac{1}{T} \int_0^{T_0} |h(t) - 2| dt < \frac{\alpha}{2},$$

concluimos que

$$\frac{1}{T} \int_0^T |h(t) - 2| dt < \alpha$$

para todo $T > \max\{T_0, T_1\}$, con lo que tiende a cero cuando T tiende a infinito. Puesto que, para cada r, θ fijos, la función $\mathbf{g}(t, r, \theta)$ está acotada en $[0, \infty)$, concluimos que el

segundo término también tiende a cero. Por tanto, concluimos que $\hat{\mathbf{f}}(r, \theta) = (-r, 0)$ y el sistema promediado es

$$\begin{cases} \bar{r}' = -\varepsilon \bar{r} \\ \bar{\theta}' = 0 \\ \bar{r}(0) = x_0, \bar{\theta}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

independientemente de h , y su solución es $\bar{r}(t) = x_0 e^{-\varepsilon t}$, $\bar{\theta}(t) = 0$.

Aunque el sistema promediado coincida para toda h , vamos a ver que, dependiendo de la rapidez de convergencia de h hacia 2, resultará una mejor aproximación o peor. Vamos a considerar distintas funciones h e integrar numéricamente las soluciones del sistema (3.6) para calcular la diferencia con la solución del promediado. Para integrar el sistema (3.6) se empleará Vern9, un algoritmo de paso variable de orden 9, con una tolerancia de 10^{-8} . Una descripción del algoritmo y su implementación se puede encontrar en [32]. El algoritmo se encuentra implementado en la librería DifferentialEquations.jl (véase [25]) de Julia.

Consideremos en primer lugar $h(t) = 2 - \exp(-t^2)$. Si se toma $\varepsilon = 0,1$ y condición inicial $x_0 = 1$, se obtienen las soluciones que aparecen representadas en la parte izquierda de la Figura 3.2. Se ha dibujado en naranja la solución del sistema original (3.6) tanto para la variable amplitud como para la variable fase, y en azul la solución del sistema promediado (3.8). A la derecha se representa el valor máximo de la diferencia entre las dos soluciones en puntos espaciados 0,1 en el intervalo $[0, \varepsilon^{-1}]$ para distintos valores de ε entre 10^{-4} y 10^{-1} . Además, se ha representado en una línea discontinua una recta con pendiente 1 para comparar la diferencia entre las dos soluciones con la cota $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Puesto que la exponencial decrece muy rápido con el tiempo, la función h tiende rápidamente a 2, con lo que la solución del sistema original y la solución del promediado son muy parecidas. El valor de la fase permanece pequeño y la amplitud disminuye exponencialmente de manera similar a la amplitud de la solución del sistema promediado. Si se comprueba la diferencia de las soluciones en escala de tiempo ε^{-1} , observamos una tendencia que parece indicar que la diferencia de las soluciones es $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} .

Tomemos ahora $h(t) = 2 - \frac{t}{1+t^2}$. En este caso se repite el mismo procedimiento que con la función anterior, obteniéndose los resultados que aparecen en la Figura 3.3. En este caso la función h tiende más lentamente a 2, con lo que se comporta durante más tiempo como si tuviera un coeficiente de amortiguamiento menor, y la amplitud disminuye más lentamente. Este comportamiento, que se aprecia en la gráfica de la amplitud en el caso de $\varepsilon = 0,1$, conduce a un comportamiento distinto de la diferencia de las soluciones. Como se puede ver en la Figura 3.3, en este caso la diferencia entre las dos soluciones disminuye más lentamente que en el caso de la exponencial (la tendencia de los cuatro puntos representados en la gráfica derecha de la Figura 3.3 es decreciente, pero de manera más lenta que la de una recta de pendiente 1).

Finalmente, consideremos $h(t) = 2 - (1+t)^{-0,25}$. De nuevo, se repite el mismo procedimiento, obteniendo los resultados de la Figura 3.4. Como se puede ver en la gráfica de la amplitud, la amplitud del sistema original (3.6) disminuye bastante más lentamente que la amplitud en el promediado. Además, en este caso es más evidente que la diferencia entre las dos soluciones en escala de tiempo ε^{-1} disminuye mucho más lentamente que en los dos casos anteriores.

El ejemplo pone de manifiesto la importancia de cuantificar la velocidad con la que la función original se aproxima al promedio para obtener cotas para la diferencia entre la

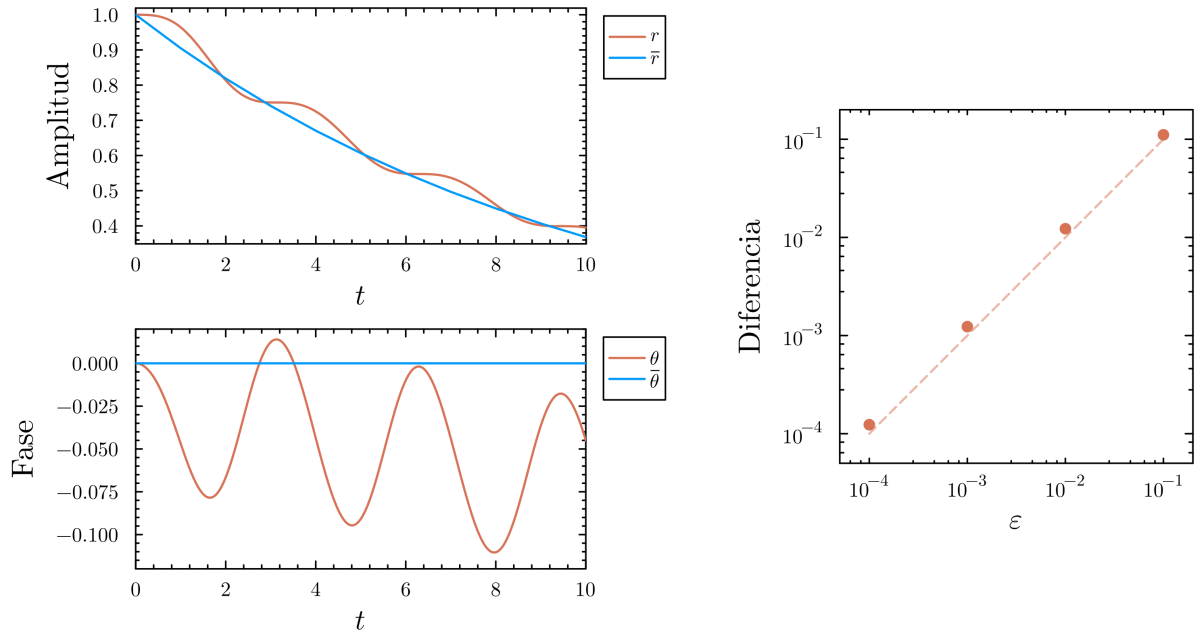


Figura 3.2: Solución exacta y promediada para $h(t) = 2 - \exp(-t^2)$ con $\varepsilon = 0,1$ y la diferencia en función de ε en escala de tiempo ε^{-1} .

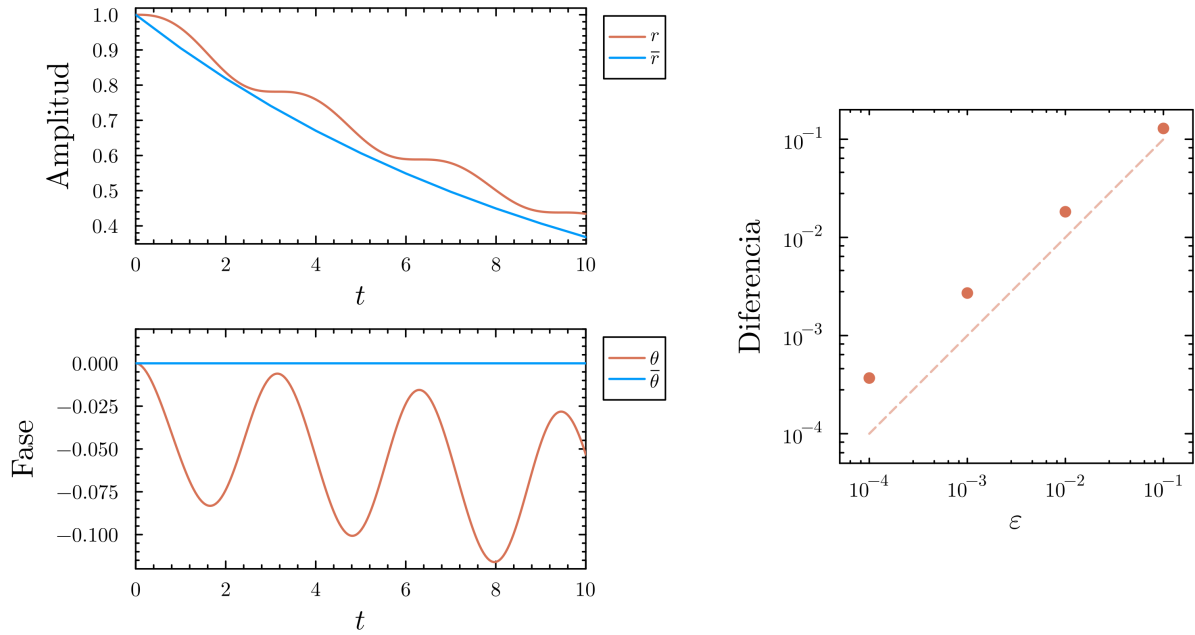


Figura 3.3: Solución exacta y promediada para $h(t) = 2 - \frac{t}{1+t^2}$ con $\varepsilon = 0,1$ y la diferencia en función de ε en escala de tiempo ε^{-1} .

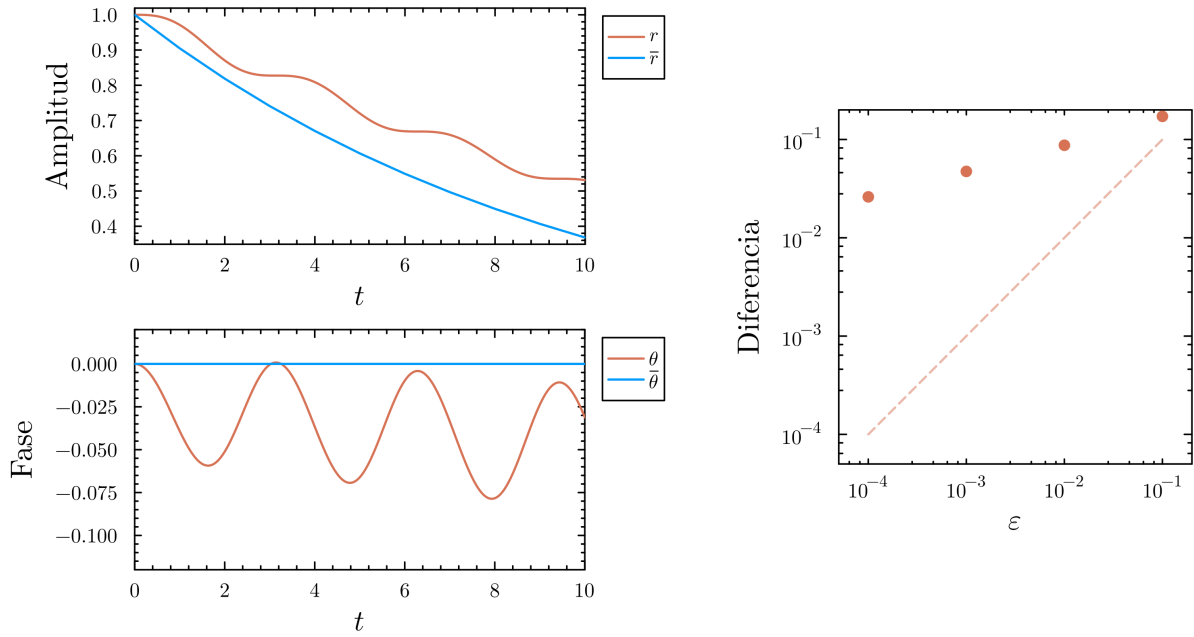


Figura 3.4: Solución exacta y promediada para $h(t) = 2 - (1 + t)^{-0.25}$ con $\varepsilon = 0,1$ y la diferencia en función de ε en escala de tiempo ε^{-1} .

solución del sistema original y el promediado. Este es el objetivo de lo que resta de esta sección.

Vamos a construir una función de orden que estará relacionada con la cota que obtendremos para la diferencia entre las soluciones de (3.1) y (3.3) y que mide en cierto modo la diferencia entre la media en tiempo ε^{-1} y el promedio.

Definición 3.1.16. Dada $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM, y un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, se define la tasa de convergencia en K como

$$\delta_K(\varepsilon) = \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \varepsilon \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\|.$$

Puesto que la tasa de convergencia está relacionada con la diferencia entre el promedio y la media a tiempos cada vez más largos, es razonable anticipar que su límite, cuando ε tiende a cero, sea cero. Esto es lo que prueba la siguiente proposición. Además, se establece que la tasa de convergencia caracteriza la existencia de promedio, puesto que de existir una función a la que las medias se aproximan en este mismo sentido, se demuestra que debe ser el promedio.

Proposición 3.1.17. Si $\mathbf{f}$ es una función KBM, entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta_K(\varepsilon) = 0$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Recíprocamente, si $\mathbf{f}$ es tal que existe $\widehat{\mathbf{f}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de manera que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \varepsilon \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| = 0$$

para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\widehat{\mathbf{f}}$ es límite uniforme de $\widehat{\mathbf{f}}_T$ en los compactos de $\mathbb{R}^n$, es decir, $\widehat{\mathbf{f}}$ es el promedio de $\mathbf{f}$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{f}$ es KBM, y sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, entonces

$$\delta_K(\varepsilon) = \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \varepsilon \left\| \int_0^T \left(\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right) dt \right\| = \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \varepsilon T \left\| \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right\|.$$

Sea $\alpha > 0$, por el Lema 3.1.12, la convergencia de $\widehat{\mathbf{f}}_T$ en K es uniforme, con lo que existe un $T_0 > 0$ de modo que $\|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| < \alpha$ para todo $\mathbf{x} \in K, T \in [T_0, \infty)$. Entonces, para todo $T \in [T_0, 1/\varepsilon]$, se tiene que

$$\sup_{\mathbf{x} \in K} \varepsilon T \left\| \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right\| < \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \alpha = \alpha.$$

Además, usando (3.5), si denotamos, como entonces, $r = \max_{\mathbf{x} \in K} \|\mathbf{x}\|$, se tiene que $\|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| \leq 2(2rL_r + M)$. Por tanto, tomando $\varepsilon < \frac{\alpha}{2T_0(2rL_r + M)}$,

$$\sup_{\mathbf{x} \in K} \varepsilon T \left\| \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right\| < \alpha$$

para todo $T < T_0$. En consecuencia, para $\alpha > 0$, y todo $\varepsilon < \frac{\alpha}{2T_0(2rL_r + M)}$,

$$\delta_K(\varepsilon) = \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \varepsilon T \left\| \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right\| < \alpha,$$

con lo que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta_K(\varepsilon) = 0$.

Recíprocamente, si existe $\widehat{\mathbf{f}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de modo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \varepsilon \left\| \int_0^T \left(\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right) dt \right\| = 0$$

para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces,

$$\sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \varepsilon \left\| \int_0^T \left(\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right) dt \right\| \geq \|\widehat{\mathbf{f}}_{1/\varepsilon}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\|$$

con lo que $\widehat{\mathbf{f}}$ es el límite uniforme de $\widehat{\mathbf{f}}_T$ en los compactos cuando $T \rightarrow \infty$. $\square$

Para ver que la tasa de convergencia es una función de orden tenemos que comprobar que es una función continua. Esto es lo que se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.18. Sean $\mathbf{f}$ una función KBM y $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto. Entonces la tasa de convergencia δ_K es una función uniformemente continua en $[\varepsilon_0, 1]$ para todo $\varepsilon_0 \in (0, 1)$. En particular, es continua en $(0, 1)$.

Demostración. Sean $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, y $\alpha > 0$. Existe un $\beta > 0$ de modo que para todo $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ con $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq 1$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \leq \beta$, se tiene que

$$\int_{1/\varepsilon_2}^{1/\varepsilon_1} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| dt \leq \alpha.$$

En efecto, puesto que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ es continua y, por tanto, está acotada por una constante $M > 0$ en el compacto $[1, 1/\varepsilon_0] \times K$, la integral se puede acotar por $(1/\varepsilon_1 - 1/\varepsilon_2)M$ y

la afirmación es consecuencia de la continuidad uniforme de la función $\varepsilon \mapsto 1/\varepsilon$ en el intervalo $[\varepsilon_0, 1]$. Por tanto, dados t_1, t_2 con $1/\varepsilon_2 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1/\varepsilon_1$, se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| dt \leq \int_{1/\varepsilon_2}^{1/\varepsilon_1} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| dt \leq \alpha. \quad (3.9)$$

Por definición de superior, existen $T \in [0, 1/\varepsilon_2]$ y $\mathbf{x} \in K$ de modo que

$$\delta_K(\varepsilon_2) \leq \alpha + \varepsilon_2 \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| = \alpha + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \varepsilon_1 \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\|.$$

Ahora, puesto que $T \in [0, 1/\varepsilon_2] \subset [0, 1/\varepsilon_1]$, se deduce que

$$\delta_K(\varepsilon_2) \leq \alpha + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \delta_K(\varepsilon_1)$$

con lo que

$$\delta_K(\varepsilon_2) - \delta_K(\varepsilon_1) \leq \alpha + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \delta_K(\varepsilon_1).$$

Análogamente, existen $T \in [0, 1/\varepsilon_1]$ y $\mathbf{x} \in K$ de modo que

$$\delta_K(\varepsilon_1) \leq \alpha + \varepsilon_1 \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\|.$$

La integral se puede acotar separando el intervalo como

$$\left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \left\| \int_0^{1/\varepsilon_2} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| + \left\| \int_{1/\varepsilon_2}^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\|,$$

de modo que el primer término queda acotado por $\delta_K(\varepsilon_2)/\varepsilon_2$ y el segundo por la desigualdad (3.9). Concluimos entonces que

$$\delta_K(\varepsilon_1) \leq \alpha + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \delta_K(\varepsilon_2) + \varepsilon_1 \alpha$$

con lo que, como $\varepsilon_1 \leq 1$,

$$\delta_K(\varepsilon_1) - \delta_K(\varepsilon_2) \leq 2\alpha + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \delta_K(\varepsilon_2).$$

Por lo tanto, se tiene que

$$|\delta_K(\varepsilon_2) - \delta_K(\varepsilon_1)| \leq 2\alpha + \left| \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right| \max\{\delta_K(\varepsilon_1), \delta_K(\varepsilon_2)\},$$

con lo que para concluir la prueba basta probar que δ_K está acotada. La acotación de δ_K es una consecuencia inmediata de la acotación de $\|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\|$ que ya se probó en la demostración de la Proposición 3.1.17. $\square$

Por la Proposición 3.1.17 y la Proposición 3.1.18, la tasa de promedio es continua, está bien definida en $(0, 1)$ y tiene límite cero. Por tanto, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.19. Sean $\mathbf{f}$ una función KBM y $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto. Entonces la tasa de convergencia δ_K es un infinitésimo.

En este sentido, la tasa de convergencia se puede entender como una medida de la rapidez de la convergencia de las medias al promedio. Si la convergencia es rápida, cabe esperar que las soluciones de las ecuaciones (3.1) y (3.3) sean similares. Por tanto, interesa buscar funciones que tengan una tasa de convergencia que tienda rápidamente a cero. Sin embargo, la siguiente proposición muestra que la velocidad con la que la tasa de promedio tiende a cero presenta ciertos límites.

Proposición 3.1.20. Sean $\mathbf{f}$ una función KBM y $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto. Si la tasa de convergencia verifica $\delta_K(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, entonces $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in K$. En particular, $\mathbf{f}$ es contante en el tiempo en K .

Demostración. Si $\delta_K(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, entonces

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\delta_K(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\|.$$

Ahora bien, $\delta_K(\varepsilon)/\varepsilon$ es una función positiva y decreciente, puesto que a medida que crece ε se restringe el intervalo donde se toma el supremo. Por tanto, si toma límite nulo en 0, se tiene que la función $\delta_K(\varepsilon)/\varepsilon$ es idénticamente nula. Concluimos entonces que para todo $\mathbf{x} \in K$ y $T \geq 0$ se tiene que

$$T\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \int_0^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt.$$

Haciendo la derivada respecto de T a ambos lados de la igualdad se concluye, como se quería probar, que $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. $\square$

Entonces, si $\mathbf{f}$ es una función KBM con tasa de promedio $o(\varepsilon)$, la ecuación promediada coincide con la original, con lo que los métodos de promedio no son útiles para simplificar la ecuación. Por tanto, el caso más favorable es cuando $\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Vamos a introducir ahora un tipo de funciones para las cuales se tiene esta propiedad.

Definición 3.1.21. Sea $\mathbf{f}$ una función KBM. Decimos que $\mathbf{f}$ es de primitiva acotada en $[0, \infty)$ si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $M_k > 0$ de modo que

$$\sup_{\|\mathbf{x}\| \leq k} \sup_{T \geq 0} \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq M_k.$$

Proposición 3.1.22. Sea $\mathbf{f}$ una función KBM de primitiva acotada en $[0, \infty)$. Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, su tasa de promedio en K verifica $\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Demostración. Sea $k > 0$ de modo que $K \subset \overline{B}(\mathbf{0}, k)$, entonces

$$\begin{aligned} \delta_K(\varepsilon) &= \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \varepsilon \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \\ &\leq \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq k} \sup_{T \in [0, \infty)} \varepsilon \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq M_k \varepsilon \end{aligned}$$

con lo que $\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. $\square$

En particular, las funciones periódicas son funciones de primitiva acotada y, por consiguiente, son funciones cuyas medias convergen rápidamente al promedio.

Proposición 3.1.23. *Sea $\mathbf{f}$ una función KBM periódica. Entonces es de primitiva acotada en $[0, \infty)$. En particular, para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, se tiene que $\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.*

Demostración. Sean T_0 el periodo de $\mathbf{f}$ y $M_K > 0$ una cota de la función $\mathbf{f}$ en $[0, T_0] \times K$. Por ser la función periódica, se tiene que para todo $t \in [0, \infty)$ y $\mathbf{x} \in K$, $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq M_K$. Además, dado $\mathbf{x} \in K$, se tiene que

$$\|\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| = \|\widehat{\mathbf{f}}_{T_0}(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| dt \leq M_K.$$

Dado $T > 0$, como en la prueba de la Proposición 3.1.5, escribimos $T = kT_0 + \delta$ con $0 \leq \delta < T_0$. Siguiendo los mismos pasos que entonces, y teniendo en cuenta que $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}_{T_0}(\mathbf{x})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt &= kT_0 \widehat{\mathbf{f}}_{T_0}(\mathbf{x}) + \int_{kT_0}^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt - (kT_0 + \delta) \widehat{\mathbf{f}}_{T_0}(\mathbf{x}) \\ &= \int_{kT_0}^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \end{aligned}$$

con lo que

$$\left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \int_{kT_0}^T \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| dt \leq 2T_0 M_K.$$

Por tanto,

$$\sup_{\|\mathbf{x}\| \leq k} \sup_{T \geq 0} \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq 2T_0 M_K$$

y $\mathbf{f}$ es de primitiva acotada. Aplicando la Proposición 3.1.22, se concluye que entonces $\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ para cualquier compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. $\square$

Para estudiar distintos ejemplos de tasas de convergencia, vamos a volver sobre el caso que se presentó en el Ejemplo 3.1.15 y estimar δ_K para cada una de las tres funciones que se consideraron.

Ejemplo 3.1.24. Independientemente de la función h , podemos acotar la integral de la diferencia entre la función y su promedio como

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, r, \theta) - \widehat{\mathbf{f}}(r, \theta)) dt \right\| &\leq \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, r, \theta) - \widehat{\mathbf{f}}(r, \theta)) dt \right\|_1 \\ &= \left| \int_0^T r(\sin^2(t + \theta)h(t) - 1) dt \right| + \left| \int_0^T \sin(t + \theta) \cos(t + \theta)h(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^T r \sin^2(t + \theta)(h(t) - 2) dt \right| + \left| \int_0^T r(2 \sin^2(t + \theta) - 1) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^T \sin(t + \theta) \cos(t + \theta)(h(t) - 2) dt \right| + \left| \int_0^T 2 \sin(t + \theta) \cos(t + \theta) dt \right|. \end{aligned}$$

Consideremos en primer lugar que $h(t) = 2 - \exp(-t^2)$, vamos a probar que la función $\mathbf{f}$ es de primitiva acotada. Por la desigualdad anterior, basta comprobar que se pueden acotar las cuatro integrales de la cota. Observemos en primer lugar que

$$\left| \int_0^T r(2 \sin^2(t + \theta) - 1) dt \right| \quad \text{y} \quad \left| \int_0^T 2 \sin(t + \theta) \cos(t + \theta) dt \right| \quad (3.10)$$

son la integral de la diferencia entre una función periódica y su promedio. Puesto que, por la Proposición 3.1.23, las funciones periódicas son de primitiva acotada, concluimos que ambas integrales están acotadas en los compactos para todo $T \geq 0$. En cuanto a las otras dos integrales, se tiene que

$$\left| \int_0^T r \sin^2(t + \theta)(h(t) - 2) dt \right| \leq |r| \int_0^T \exp(-t^2) dt \leq |r| \int_0^\infty \exp(-t^2) dt$$

y

$$\left| \int_0^T \sin(t + \theta) \cos(t + \theta)(h(t) - 2) dt \right| \leq \int_0^T \exp(-t^2) dt \leq \int_0^\infty \exp(-t^2) dt.$$

Por tanto, concluimos que en el caso $h(t) = 2 - \exp(-t^2)$ la función $\mathbf{f}$ es de primitiva acotada y $\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Consideremos a continuación $h(t) = 2 - \frac{t}{1+t^2}$. Los términos (3.10) contribuyen a $\delta_K(\varepsilon)$ como $\mathcal{O}(\varepsilon)$ por la Proposición 3.1.22. Vamos a estudiar los otros dos. Se tiene que

$$\sup_{(r,\theta) \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \left| \int_0^T r \sin^2(t + \theta)(h(t) - 2) dt \right| \leq \max_{(r,\theta) \in K} |r| \int_0^{1/\varepsilon} \frac{t}{1+t^2} dt$$

y, análogamente,

$$\sup_{(r,\theta) \in K} \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \left| \int_0^T \sin(t + \theta) \cos(t + \theta)(h(t) - 2) dt \right| \leq \int_0^{1/\varepsilon} \frac{t}{1+t^2} dt.$$

Puesto que

$$\int_0^{1/\varepsilon} \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \log(1 + \varepsilon^{-2}) = \frac{1}{2} (\log(\varepsilon^2 + 1) - \log(\varepsilon^2)) = \mathcal{O}(|\log(\varepsilon)|),$$

se tiene que los otros dos términos contribuyen a $\delta_K(\varepsilon)$ como $\mathcal{O}(\varepsilon |\log(\varepsilon)|)$.

Como $\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon |\log(\varepsilon)|)$, los términos (3.10) pueden englobarse en la cota $\mathcal{O}(\varepsilon |\log(\varepsilon)|)$ y concluimos que, para este caso, $\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon |\log(\varepsilon)|)$.

Finalmente, si $h(t) = 2 - (1+t)^{-0,25}$, un razonamiento análogo al caso previo muestra que

$$\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O} \left(\varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} (1+t)^{-0,25} dt \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^{0,25}).$$

En la Figura 3.5 se han representado las diferencias entre las soluciones de (3.6) y (3.8) de la Figura 3.2 (círculos naranjas), la Figura 3.3 (círculos azules) y la Figura 3.4 (círculos grises), junto a las funciones ε , $\varepsilon |\log(\varepsilon)|$ y $\varepsilon^{0,25}$, con línea discontinua en el mismo color, respectivamente. Como se puede apreciar, la línea discontinua, que es paralela a la cota obtenida para las funciones $\delta_K(\varepsilon)$, es paralela a cada conjunto de puntos que estima la diferencia. Por tanto, el experimento numérico parece indicar que la diferencia en escala de tiempo ε^{-1} se comporta como las cotas que hemos obtenido para la tasa de promedio.

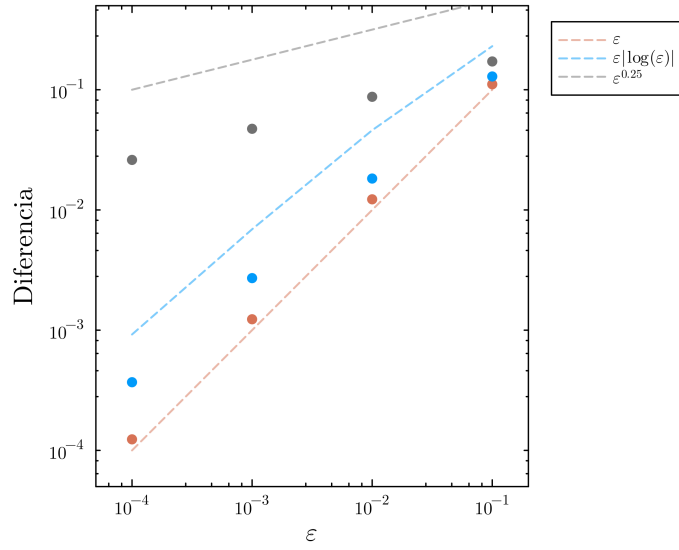


Figura 3.5: Diferencia en función de ε en escala de tiempo ε^{-1} junto con las estimaciones obtenidas.

Aunque en el Ejemplo 3.1.24 la diferencia entre la solución del sistema original y la del sistema promediado se comporta como $\delta_K(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} , este no es el caso en general para una función KBM. En el artículo [5] se proporciona un ejemplo de función de primitiva acotada, es decir, con $\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, en el que la diferencia entre las soluciones es peor que $\mathcal{O}(\varepsilon)$. En general, la cota que se puede probar en el caso más general es $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_K(\varepsilon)})$ en escala de tiempo ε^{-1} .

Puesto que, por el Corolario 3.1.19, la tasa de promedio es un infinitésimo, esto demostraría que las soluciones de los problemas de Cauchy (3.1) y (3.3) se aproximan para ε pequeño y en intervalos cada vez más grandes. Por tanto, demostraría que el sistema promediado resulta ser una mejor aproximación que simplemente tomar $\varepsilon = 0$ como sugiere la Proposición 2.4.7.

3.2. Aproximación de soluciones utilizando el problema promediado

El propósito de esta sección es demostrar que la diferencia entre la solución del sistema sin promediar (3.1) y la solución del sistema promediado (3.3), para $\mathbf{f}$ globalmente lipschitziana y acotada, es $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_K(\varepsilon)})$ en conjuntos de la forma $[0, 1/\varepsilon]$. En particular, se tiene que la diferencia es $\mathcal{O}(\sqrt{\delta_K(\varepsilon)})$ en escala de tiempo ε^{-1} , puesto que se corresponde a fijar $c = 1$ en la Definición 2.4.5.

En primer lugar, observemos que, por la Proposición 2.1.4, al ser $\mathbf{f}$ globalmente lipschitziana, la solución del sistema (3.1) está definida en todo $[0, \infty)$ para cualquier ε . En particular, está definida en $[0, 1/\varepsilon]$. Para ver que se puede afirmar lo mismo de las soluciones del sistema promediado (3.3), tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1. *Sea $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM acotada por $M > 0$ y globalmente lipschitziana con constante $L > 0$. Entonces, $\hat{\mathbf{f}}$ está acotada por $M > 0$ y es globalmente lipschitziana con constante $L > 0$.*

Demostración. Para todo $T > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_1) - \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}_2)\| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| dt \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| dt = L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.\end{aligned}$$

y

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T M dt = M.$$

Puesto que la media es continua respecto de T , el resultado se deduce de tomar límite cuando T tiende a infinito en ambas desigualdades. $\square$

Puesto que el promedio $\widehat{\mathbf{f}}$ es globalmente lipschitziano, la Proposición 2.1.4, garantiza que el intervalo de definición de las soluciones del sistema promediado (3.3) también incluye el intervalo $[0, 1/\varepsilon]$. Por tanto, tiene sentido hablar de la diferencia en este intervalo.

Dado que el intervalo $[0, 1/\varepsilon]$, con el que vamos a trabajar, depende de ε , a menudo conviene hacer el cambio de escala $s = \varepsilon t$. De este modo, el intervalo temporal $[0, 1/\varepsilon]$ se transforma en el intervalo $[0, 1]$, que ya no depende de ε . Además, en la nueva variable temporal, las ecuaciones (3.1) y (3.3) toman la siguiente forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{f}(s/\varepsilon, \mathbf{x}) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{y}}{ds} = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}). \quad (3.11)$$

La ecuación promediada en la nueva variable temporal no depende de ε , con lo que la solución del sistema promediado es independiente de ε en tiempo s . Por estos motivos, la variable temporal s resulta más natural que t en muchas de las demostraciones de esta sección.

Si comparamos las ecuaciones (3.1) y (3.3) con las ecuaciones (3.11) observamos que para ε pequeño la variación de $\mathbf{x}$ respecto al tiempo t es pequeña en comparación con su variación en tiempo s . Por este motivo se dice que $\mathbf{x}$ es una variable lenta y que t es un tiempo rápido. Por el contrario, las variables $\mathbf{x}$ y s tienen la misma escala, por lo que s recibe el nombre de tiempo lento.

Una vez hechas las debidas consideraciones acerca del intervalo de trabajo, estamos en condiciones de avanzar hacia la demostración de la cota. Para su demostración, se sigue el artículo [3], que se basa en un teorema más general que permite obtener cotas a partir de lo que se denomina una tasa de promedio.

Definición 3.2.2. Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM y $\widehat{\mathbf{f}}$ su promedio. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, se dice que $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$ es una tasa de promedio de $\mathbf{f}$ en X si $\Delta(\varepsilon)$ es un infinitésimo, $\eta(\varepsilon)$ es un infinitésimo o idénticamente nulo y verifican que

$$\frac{\varepsilon}{\Delta(\varepsilon)} \left\| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \eta(\varepsilon) \quad (3.12)$$

para todo $\mathbf{x} \in X$ y $0 \leq t_0 \leq \frac{1}{\varepsilon}(1 - \Delta(\varepsilon))$, es decir, cuando el intervalo de integración está contenido en el intervalo $[0, 1/\varepsilon]$.

La condición (3.12) admite una expresión más natural en tiempo lento, que toma la forma

$$\frac{1}{\Delta(\varepsilon)} \left\| \int_{s_0}^{s_0+\Delta(\varepsilon)} (\mathbf{f}(s/\varepsilon, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) ds \right\| \leq \eta(\varepsilon)$$

para $0 \leq s_0 \leq s_0 + \Delta(\varepsilon) \leq 1$, es decir, cuando el intervalo de integración está contenido en el intervalo $[0, 1]$. En esta expresión se ve más claramente el significado de una tasa de promedio. Una tasa de promedio proporciona una cota $\eta(\varepsilon)$ para la diferencia entre medias en intervalos de tiempo lento de longitud $\Delta(\varepsilon)$, que es uniforme en todo el intervalo de integración.

Toda función KBM admite una tasa de promedio, como muestra el siguiente resultado, en el que se construyen tasas de promedio en base a la tasa de convergencia.

Proposición 3.2.3. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM. Dado un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, si $\delta_K(\varepsilon)$ es la tasa de convergencia en K , entonces $(\delta_K(\varepsilon)^\alpha, 2\delta_K(\varepsilon)^{1-\alpha})$ es una tasa de promedio en K para todo $\alpha \in (0, 1)$.*

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in K$ y $0 \leq t_0 \leq \frac{1}{\varepsilon}(1 - \delta_K(\varepsilon)^\alpha)$. Entonces $0 \leq t_0 \leq t_0 + \frac{\delta_K(\varepsilon)^\alpha}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ y se tiene que

$$\varepsilon \left\| \int_0^{t_0} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \delta_K(\varepsilon)$$

y

$$\varepsilon \left\| \int_0^{t_0 + \frac{\delta_K(\varepsilon)^\alpha}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \delta_K(\varepsilon).$$

Por tanto, usando la desigualdad triangular, se tiene

$$\varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\delta_K(\varepsilon)^\alpha}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq 2\delta_K(\varepsilon).$$

Dividiendo por $\delta_K(\varepsilon)^\alpha$ a ambos lados de la desigualdad se obtiene el resultado buscado. $\square$

Por tanto, para una función KBM siempre existen infinitas tasas de promedio. Puesto que el teorema fundamental de esta sección nos permite obtener cotas entre las soluciones en base a una tasa de promedio, nos interesa buscar tasas de promedio que nos proporcionen buenas cotas. En el caso de las funciones periódicas tenemos otra tasa de promedio de gran importancia, que proporciona mejores cotas que los resultados generales de funciones KBM.

Proposición 3.2.4. *Si $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función periódica de periodo T , entonces $(\varepsilon T, 0)$ es una tasa de promedio en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Se trata de una consecuencia de la Proposición 3.1.5. En efecto, se tiene que

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt = \int_0^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt$$

por la periodicidad de $\mathbf{f}$ y, puesto que $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})$, entonces

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon T} \left\| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\varepsilon T}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| = \left\| \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| = \|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| = 0.$$

$\square$

Es decir, la tasa de promedio $(\varepsilon T, 0)$ está afirmando que la media en un periodo coincide con el promedio. Este es el motivo de que se admita en la Definición 3.2.2 que la función $\eta(\varepsilon)$ pueda ser idénticamente nula. Se trata de una condición muy fuerte que, como veremos, hace que la teoría de promedio funcione particularmente bien con las funciones periódicas.

La demostración del teorema se basa en algunos resultados de aplicaciones contractivas. Recordemos que, si X es un espacio métrico completo con distancia d , una aplicación $S: X \rightarrow X$ es una contracción, con constante ρ , si $\rho < 1$ y $d(S(v), S(w)) \leq \rho d(v, w)$ para todo $v, w \in X$. En estas condiciones, el Teorema del Punto Fijo de Banach (véase [1]) permite afirmar que la aplicación S tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $v \in X$ de modo que $S(v) = v$. El siguiente lema proporciona una cota sobre la distancia entre puntos fijos.

Lema 3.2.5. *Sea X un espacio métrico completo, y $S_0: X \rightarrow X$ una contracción, con constante $\rho < 1$. Dados $S_1: X \rightarrow X$ y v_1 un punto fijo de S_1 , si se verifica que $d(S_0(v_1), S_1(v_1)) \leq \varepsilon$, entonces, la distancia entre v_1 y el único punto fijo de S_0 es menor o igual que $\varepsilon(1 - \rho)^{-1}$.*

Demostración. Si v_0 es el punto fijo de S_0 y v_1 es un punto fijo de S_1 , entonces, por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} d(v_0, v_1) &\leq d(v_0, S_0(v_1)) + d(S_0(v_1), v_1) \\ &= d(S_0(v_0), S_0(v_1)) + d(S_0(v_1), S_1(v_1)) \leq \rho d(v_0, v_1) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Reordenando la desigualdad se obtiene el resultado. $\square$

El interés en tener cotas para la distancia entre puntos fijos radica en el hecho de que, fijado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, la función $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución de la ecuación diferencial $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, con $\mathbf{f}$ continua, y con condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ si, y solo si, es un punto fijo de la aplicación $S: \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ definida como

$$S(\mathbf{x})(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds. \quad (3.13)$$

La demostración de la cota para la diferencia entre las soluciones pretende usar el Lema 3.2.5 con la aplicación (3.13) en el intervalo $[0, 1]$, que es el intervalo en tiempo lento de las soluciones que queremos estudiar. Para ello necesitamos probar antes que es una contracción. Sin embargo, este no es el caso en la norma usual de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$. El siguiente lema demuestra que existe una norma en la que las aplicaciones de la forma (3.13) para $\mathbf{f}$ y su promedio son contracciones bajo las hipótesis con las que trabajamos en esta sección.

Lema 3.2.6. *Si $\mathbf{f}$ es una función continua y globalmente lipschitziana con constante $L > 0$, entonces la aplicación (3.13) es una contracción respecto a la norma*

$$\|\mathbf{x}\|_L = \max_{t \in [0, 1]} \|\mathbf{x}(t)\| e^{-Lt}$$

con constante $\rho = 1 - e^{-L}$. Además, la norma $\|\cdot\|_L$ es equivalente a la norma infinito.

Demostración. Existe $t \in [0, 1]$ de modo que

$$\|S(\mathbf{x}) - S(\mathbf{y})\|_L = \left\| \int_0^t (\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))) ds \right\| e^{-Lt}.$$

Por la condición Lipschitz de $\mathbf{f}$, esta expresión es menor o igual que

$$\begin{aligned} e^{-Lt} \int_0^t L \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)\| ds &= e^{-Lt} \int_0^t L e^{Ls} e^{-Ls} \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)\| ds \\ &\leq e^{-Lt} \max_{s \in [0, t]} (\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)\| e^{-Ls}) \int_0^t L e^{Ls} ds \leq e^{-Lt} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_L \int_0^t L e^{Ls} ds \\ &= e^{-Lt} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_L (e^{Lt} - 1) = (1 - e^{-Lt}) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_L. \end{aligned}$$

Ahora, tomando el peor de los casos, es decir, $t = 1$, se concluye que S es una contracción para la norma $\|\cdot\|_L$ con constante $\rho = 1 - e^{-L}$.

Para ver que la norma $\|\cdot\|_L$ es equivalente a la norma infinito, basta tomar máximos en las siguientes desigualdades

$$\|\mathbf{x}(t)\| e^{-Lt} \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t)\| e^{L(1-t)} = e^L \|\mathbf{x}(t)\| e^{-Lt}$$

válidas para todo $t \in [0, 1]$ y $\mathbf{x} \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Entonces, se deduce que

$$\|\mathbf{x}\|_L \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq e^L \|\mathbf{x}\|_L. \quad (3.14)$$

□

Finalmente, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema fundamental de aproximación de soluciones para funciones KBM. Como se ha adelantado, el teorema se enuncia para $\mathbf{f}$ una función KBM, acotada y globalmente lipschitziana, en intervalos de la forma $[0, 1/\varepsilon]$, y proporciona una cota para la diferencia entre las soluciones de los sistemas (3.1) y (3.3) que tiende a cero cuando ε tiende a cero.

Teorema 3.2.7. Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM, globalmente lipschitziana con constante $L > 0$ y acotada por $M > 0$. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema (3.1), $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema (3.3) y $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$ una tasa de promedio en un conjunto que contenga a $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ para todo $t \in [0, 1/\varepsilon]$. Entonces, se tiene que

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)\| \leq e^{2L} ((L + 2)M\Delta(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)) \quad \forall t \in [0, 1/\varepsilon],$$

es decir, $\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\max\{\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon)\})$ en escala de tiempo ε^{-1} .

Demostración. Como se ha comentado al principio de la sección, por ser $\mathbf{f}$ globalmente lipschitziana, la Proposición 2.1.4 garantiza que la solución $\mathbf{x}_\varepsilon$ está definida en todo $[0, \infty)$, en particular está definida en $[0, 1/\varepsilon]$ y la Proposición 3.2.1 junto con la Proposición 2.1.4 permite afirmar que $\mathbf{y}_\varepsilon$ está igualmente definida en todo $[0, \infty)$, y en particular en $[0, 1/\varepsilon]$. En tiempo lento, se tiene que $\mathbf{x}_\varepsilon(s)$ y $\mathbf{y}_\varepsilon(s)$ son elementos de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^n)$, con lo que se pueden aplicar los lemas anteriores.

En primer lugar, vamos a probar que para toda función $\mathbf{x}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitziana con constante $M > 0$ se verifica que

$$\left\| \int_0^s (\mathbf{f}(\sigma/\varepsilon, \mathbf{x}(\sigma)) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(\sigma))) d\sigma \right\| \leq (L + 2)M\Delta(\varepsilon) + \eta(\varepsilon) \quad (3.15)$$

para todo $s \in [0, 1]$.

Puesto que $\Delta(\varepsilon) \leq 1$, existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $s = m\Delta(\varepsilon) + \delta$ con $\delta < \Delta(\varepsilon)$. Definimos ahora la función $\mathbf{z}(\sigma)$ constante en los intervalos

$$I_0 = [0, \Delta(\varepsilon)), I_1 = [\Delta(\varepsilon), 2\Delta(\varepsilon)), \dots, I_j = [j\Delta(\varepsilon), (j+1)\Delta(\varepsilon)), \dots, I_m = [m\Delta(\varepsilon), s],$$

donde toma el valor $\mathbf{x}(\sigma_j)$, con σ_j el punto intermedio del intervalo I_j .

Ahora, podemos acotar

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^s (\mathbf{f}(\sigma/\varepsilon, \mathbf{x}(\sigma)) - \mathbf{f}(\sigma/\varepsilon, \mathbf{z}(\sigma))) d\sigma \right\| &\leq \sum_{j=0}^m \int_{I_j} \|\mathbf{f}(\sigma/\varepsilon, \mathbf{x}(\sigma)) - \mathbf{f}(\sigma/\varepsilon, \mathbf{z}(\sigma))\| d\sigma \\ &\leq \sum_{j=0}^m \int_{I_j} L \|\mathbf{x}(\sigma) - \mathbf{z}(\sigma)\| d\sigma \leq \sum_{j=0}^m \int_{I_j} LM |\sigma - \sigma_j| d\sigma \leq \sum_{j=0}^m \int_{I_j} LM \frac{\Delta(\varepsilon)}{2} d\sigma \\ &\leq sLM \frac{\Delta(\varepsilon)}{2} \leq LM \frac{\Delta(\varepsilon)}{2}, \end{aligned}$$

donde se ha usado el carácter Lipschitziano de $\mathbf{f}$ y $\mathbf{x}$. Análogamente, se demuestra que

$$\left\| \int_0^s (\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(\sigma)) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}(\sigma))) d\sigma \right\| \leq LM \frac{\Delta(\varepsilon)}{2}.$$

Ahora, puesto que $\mathbf{z}(\sigma)$ es constante en los intervalos I_j , podemos aplicar la propiedad de la tasa de promedio en cada uno de los intervalos salvo en el último, donde usamos la acotación de $\mathbf{f}$ y su promedio. Entonces, se obtiene la acotación

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^s (\mathbf{f}(\sigma/\varepsilon, \mathbf{z}(\sigma)) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}(\sigma))) d\sigma \right\| &\leq \sum_{j=0}^m \left\| \int_{I_j} \mathbf{f}(\sigma/\varepsilon, \mathbf{z}(\sigma)) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}(\sigma)) d\sigma \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} \eta(\varepsilon) \Delta(\varepsilon) + 2M\delta \leq s\eta(\varepsilon) + 2M\Delta(\varepsilon) \leq \eta(\varepsilon) + 2M\Delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Usando las tres desigualdades probadas y la desigualdad triangular se obtiene la desigualdad (3.15) que se buscaba.

A continuación, definimos

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{x})(s) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^s \mathbf{f}(\sigma/\varepsilon, \mathbf{x}(\sigma)) d\sigma \\ S_2(\mathbf{x})(s) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^s \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(\sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

Por la acotación de $\mathbf{f}$ se tiene que

$$\|S_1(\mathbf{x})(s) - S_1(\mathbf{x})(s')\| = \left\| \int_{s'}^s \mathbf{f}(\sigma/\varepsilon, \mathbf{x}(\sigma)) d\sigma \right\| \leq M|s - s'|,$$

es decir, $S_1(\mathbf{x})$ es lipschitziana de constante M . Entonces, podemos estudiar S_1 como una aplicación del espacio $\mathcal{L}_M$ de las funciones Lipschitz de constante M en sí mismo, que es un espacio métrico completo. Además, puesto que, por la Proposición 3.2.1, $\widehat{\mathbf{f}}$ está acotada por la misma constante, S_2 también tiene llegada en el mismo espacio. Puesto que

$\mathbf{f}$ es continua y Lipschitz con constante L , el Lema 3.2.6 permite afirmar que S_1 es una contracción en $\mathcal{L}_M$ respecto a la norma $\|\cdot\|_L$ con constante $1 - e^{-L}$. Análogamente, por la Proposición 3.2.1, se tiene que $\widehat{\mathbf{f}}$ es globalmente lipschitziana con la misma constante que $\mathbf{f}$ y S_2 es una contracción en $\mathcal{L}_M$ con la misma norma.

Ahora, $\mathbf{y}_\varepsilon(s)$ es un punto fijo de S_2 y verifica que

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon(s) - \mathbf{y}_\varepsilon(s')\| \leq \int_{s'}^s \|\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}_\varepsilon(\sigma))\| d\sigma \leq M|s - s'|,$$

con lo que $\mathbf{y}_\varepsilon(s)$ es lipschitziana con constante M . Entonces, podemos aplicar la cota (3.15) para concluir que

$$\|S_1(\mathbf{y}_\varepsilon) - S_2(\mathbf{y}_\varepsilon)\|_\infty \leq (L + 2)M\Delta(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)$$

y, por (3.14), se tiene que

$$\|S_1(\mathbf{y}_\varepsilon) - S_2(\mathbf{y}_\varepsilon)\|_L \leq \|S_1(\mathbf{y}_\varepsilon) - S_2(\mathbf{y}_\varepsilon)\|_\infty \leq (L + 2)M\Delta(\varepsilon) + \eta(\varepsilon).$$

Por tanto, por el Lema 3.2.5,

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{x}_\varepsilon\|_L \leq ((L + 2)M\Delta(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)) e^L.$$

Finalmente, las desigualdades (3.14) permiten concluir la desigualdad para la norma infinito que se buscaba. $\square$

Por la Proposición 3.2.3, toda función KBM admite una tasa de promedio, con lo que se puede usar el Teorema 3.2.7 para obtener cotas para la diferencia entre las soluciones de (3.1) y (3.3) en base a la tasa de convergencia, como se pretendía. Puesto que el error entre las soluciones estará dado por el máximo entre $\Delta(\varepsilon)$ y $\eta(\varepsilon)$, la mejor tasa de promedio de la forma $(\delta_K(\varepsilon)^\alpha, 2\delta_K(\varepsilon)^{1-\alpha})$ es aquella que toma $\alpha = 1/2$, donde se debe tomar K de modo que las órbitas de las soluciones queden contenidas en el compacto. Entonces, el teorema se puede particularizar para esa tasa de promedio, obteniendo el siguiente corolario.

Corolario 3.2.8. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM, globalmente lipschitziana y acotada por $M > 0$. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema (3.1) e $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema (3.3). Fijado un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ que contenga a $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ para todo $t \in [0, 1/\varepsilon]$, se tiene que $\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\sqrt{\delta_K(\varepsilon)})$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

Ya se vio en la Proposición 3.1.20 que, salvo el caso trivial en que el sistema (3.1) es autónomo, se tiene que $\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, con lo que $\sqrt{\delta_K(\varepsilon)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Esto impone un límite en la cota que proporciona el teorema al usar la tasa de promedio de la Proposición 3.2.3. Sin embargo, en el caso de las funciones periódicas tenemos un resultado más favorable, ya que se puede usar la tasa de promedio de la Proposición 3.2.4, que además es válida en todo $\mathbb{R}^n$.

Corolario 3.2.9. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función periódica, globalmente lipschitziana y acotada. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema (3.1) e $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema (3.3). Entonces, $\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

De hecho, esta es la mejor cota que se puede obtener con el Teorema 3.2.7. El siguiente resultado muestra que, igual que la tasa de convergencia no puede tender a 0 más rápido que ε , el infinitésimo $\Delta(\varepsilon)$ de la tasa de promedio tampoco.

Proposición 3.2.10. Sean $\mathbf{f}$ una función KBM y $X \subset \mathbb{R}^n$. Si $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$ es una tasa de promedio de $\mathbf{f}$ en X y $\Delta(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ entonces $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in X$. En particular, $\mathbf{f}$ es constante en el tiempo en X .

Demostración. Fijamos $\mathbf{x} \in X$ y $t_0 \in [0, \infty)$. Entonces existe un $\varepsilon'_0 > 0$ de modo que $t_0 < 1/\varepsilon'_0$. Además, como $\Delta(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, se tiene que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \Delta(\varepsilon)/\varepsilon = 0$, con lo que existe un $\varepsilon''_0 > 0$ de modo que $t_0 + \Delta(\varepsilon)/\varepsilon < 1/\varepsilon'_0$ para todo $\varepsilon < \varepsilon''_0$. Si denotamos $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon'_0, \varepsilon''_0\}$, tenemos que

$$\frac{\varepsilon}{\Delta(\varepsilon)} \left\| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \eta(\varepsilon) \quad (3.16)$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$. Tomando límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, se tiene que $\eta(\varepsilon)$ tiende a 0. Por el contrario, como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \Delta(\varepsilon)/\varepsilon = 0$, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{\Delta(\varepsilon)} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}).$$

Por tanto, el lado izquierdo de la desigualdad (3.16) tiende a $\|\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\|$.

Concluimos entonces que $\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, y como t_0 y $\mathbf{x}$ se eligieron arbitrariamente, se tiene el resultado que se buscaba. $\square$

Puesto que el Teorema 3.2.7 afirma que la cota para la diferencia entre las soluciones de (3.1) y (3.3) es $\mathcal{O}(\max\{\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon)\})$, concluimos que no es posible obtener una aproximación mejor que $\mathcal{O}(\varepsilon)$ por el sistema promediado. Por tanto, el caso más favorable es el de las funciones periódicas, como pone de manifiesto el Corolario 3.2.9.

3.3. Acondicionar el problema

El Teorema 3.2.7 está enunciado para una función KBM, globalmente lipschitziana y acotada. Sin embargo, no todos los ejemplos que hemos planteado verifican estas condiciones. En el Ejemplo 3.1.15, pudimos comprobar que la solución del sistema original (3.1) y la solución (3.3) se aproximan pero la función $\mathbf{f}$ dada en (3.7), no es acotada ni globalmente lipschitziana. De hecho, estas hipótesis son muy restrictivas y no se dan en muchos modelos habituales.

Ejemplo 3.3.1. Un ejemplo típico de aplicación de los métodos de promedio en los libros de Verhulst [26], [31], [27] y [30] es la ecuación de Van der Pol $x'' + x = \varepsilon(1 - x^2)x'$. Se trata de una ecuación de la forma (2.10) con $g(t, x, x', \varepsilon) = (1 - x^2)x'$, con lo que podemos expresarla en forma estándar usando variables amplitud fase como

$$\begin{cases} r' = \varepsilon r \sin^2(t + \theta)(1 - r^2 \cos^2(t + \theta)) \\ \theta' = \varepsilon \sin(t + \theta) \cos(t + \theta)(1 - r^2 \cos^2(t + \theta)). \end{cases} \quad (3.17)$$

Observemos que la función del sistema en forma estándar no está en las condiciones del Teorema 3.2.7, ya que no es acotada ni globalmente lipschitziana, aunque sí sea una función KBM por ser periódica y derivable con derivada acotada en conjuntos acotados.

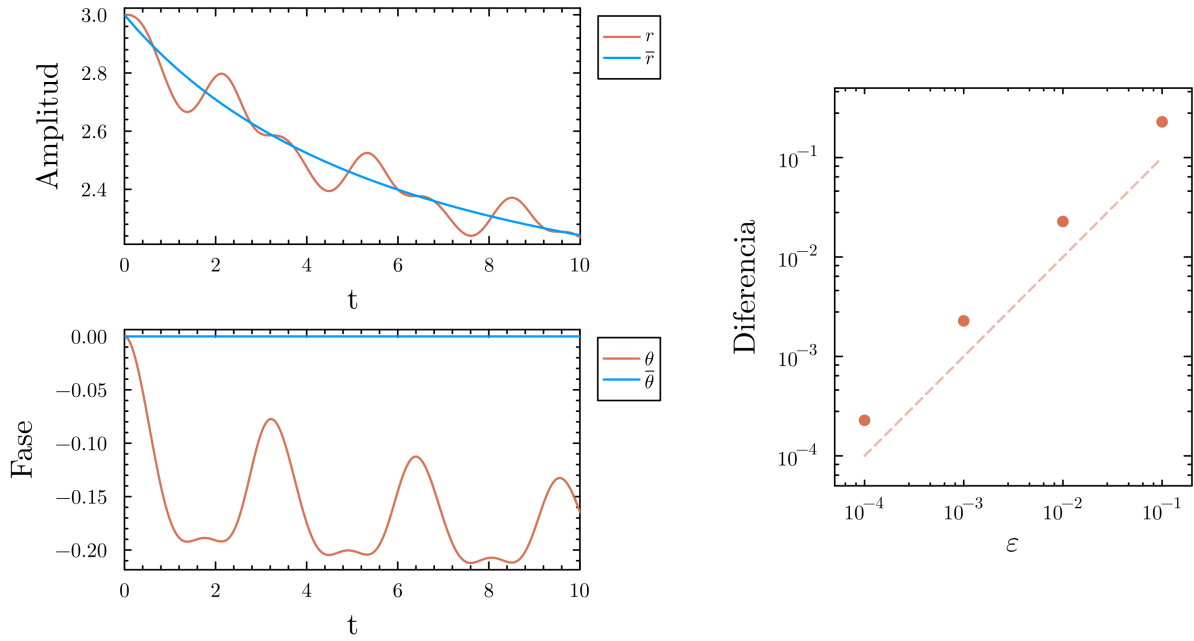


Figura 3.6: Solución exacta y promediada para la ecuación de Van der Pol y la diferencia en función de ε en escala de tiempo ε^{-1} .

Puesto que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos^2(t) dt = \frac{1}{8},$$

y

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos^3(t) dt = 0,$$

el sistema promediado es

$$\begin{cases} \bar{r}' = \varepsilon \bar{r} \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{r}^2}{8} \right) \\ \bar{\theta}' = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

La ecuación en $\bar{\theta}$ es inmediata de resolver, y la ecuación en $\bar{r}$ es una ecuación de Bernoulli, que también se puede integrar como se describe en [13]. Si tomamos como condiciones iniciales $\theta(0) = 0$ y $r(0) = r_0 > 0$, entonces la solución del sistema promediado (3.18) es

$$\bar{r}(t) = r_0 \frac{e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + r_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)/4}}, \quad \bar{\theta}(t) = 0.$$

Como se hizo en el Ejemplo 3.1.15, vamos a integrar numéricamente la solución del sistema original (3.17) para compararla con la solución obtenida del problema promediado (3.18) utilizando Vern9 con una tolerancia de 10^{-8} . En la Figura 3.6 se han representado las soluciones para condición inicial $r_0 = 3$ y $\varepsilon = 0,1$, así como la máxima diferencia entre las soluciones, para la misma condición inicial y valores de ε de 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} y 10^{-1} , estimada a partir de evaluaciones cada 0,1 unidades en el intervalo $[0, \varepsilon^{-1}]$. También se ha representado la recta de pendiente uno como referencia.

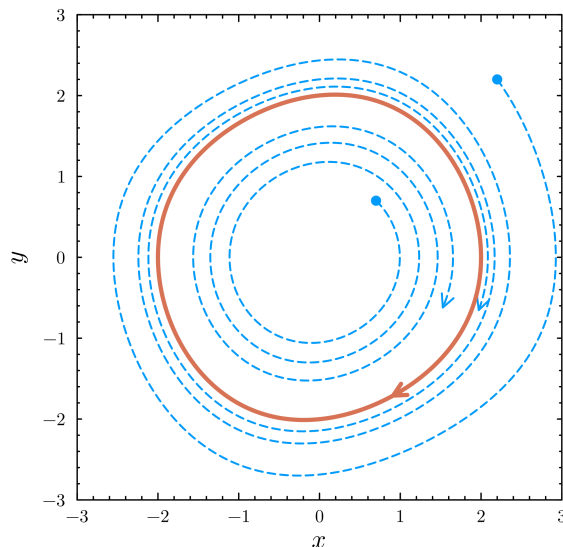


Figura 3.7: Diagrama de fases para la ecuación de Van der Pol con $\varepsilon = 0,1$.

Como se aprecia en la Figura 3.6, las integraciones numéricas realizadas parecen indicar que la diferencia de las soluciones es $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} , como esperaríamos por el Corolario 3.2.9, si la función verificara las hipótesis de acotación y carácter globalmente lipschitziano que requiere el teorema. Sin embargo, hasta ahora no hemos tenido en cuenta las propiedades dinámicas del sistema. Si las órbitas de las soluciones permanecen en una región acotada, lo que ocurra con la función fuera de esta región debería ser irrelevante de cara al comportamiento de las soluciones. Puesto que la función que determina el sistema (2.11) es $\mathcal{C}^\infty$, en una región acotada es acotada y globalmente lipschitziana, con lo que si probamos que las soluciones permanecen en una región acotada, tiene sentido que la cota del Corolario 3.2.9 sea aplicable.

En la Figura 3.7 se representa el diagrama de fases de la ecuación de Van der Pol con $\varepsilon = 0,1$. Se han representado tres soluciones integradas hasta $t = 20$ usando Vern9 con tolerancia 10^{-8} . Las dos órbitas en azul se corresponden con soluciones con condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0,7$ y $x(0) = y(0) = 2,2$, mientras que la órbita naranja tiene condiciones iniciales $x(0) = 2, y(0) = 0$. En [17] se demuestra que el diagrama de fases de la ecuación de Van der Pol, para cualquier valor de ε está formado por un ciclo límite y órbitas que tienden hacia él, salvo por el punto inestable $(0,0)$. Es decir, se tiene la situación representada en la Figura 3.7, una órbita periódica de modo que si la condición inicial está dentro la órbita describe una espiral hacia fuera que evoluciona hacia ella, y si está fuera la órbita describe una espiral hacia dentro.

Por tanto, las propiedades dinámicas de la ecuación de Van der Pol nos garantizan que las órbitas de las soluciones van a permanecer acotadas, con lo que parece razonable pensar que el Corolario 3.2.9 es aplicable, a pesar de que la función no es acotada ni globalmente lipschitziana.

El propósito de esta sección es comprobar cómo se pueden relajar las hipótesis sobre $\mathbf{f}$ de modo que se puedan seguir aplicando los resultados de la sección previa. El objetivo es sustituir nuestro problema por otro que sea equivalente con una función que sí sea acotada y globalmente lipschitziana. Nos referimos a esto como acondicionar el problema, y denotaremos a la nueva función por función acondicionada.

Tomando como referencia el Ejemplo 3.3.1, si conseguimos que las soluciones estén acotadas, solo nos interesa lo que ocurra con la función en esa región. Por tanto, el candidato natural para función acondicionada es una que valga lo mismo en esa región y sea nula fuera, lo que se puede conseguir multiplicando la función por una función de soporte compacto.

Vamos a ver que una función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ KBM, multiplicada por una función $\varphi(\mathbf{x})$ de soporte compacto cumple las hipótesis del Teorema 3.2.7, siempre que la función $\mathbf{f}$ esté acotada en el tiempo para algún punto fijado. En primer lugar, queremos ver que esta condición sobre $\mathbf{f}$ es suficiente para garantizar la acotación para todo tiempo en conjuntos compactos de la variable espacial.

Lema 3.3.2. *Sea $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM. Dados $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, si $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ está acotada en $[0, \infty)$ entonces $\mathbf{f}$ está acotada en $[0, \infty) \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$.*

Demostración. Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r$, podemos escribir

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0) + (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)).$$

Por tanto, si $R = \|\mathbf{x}_0\|$ y $M > 0$ es una cota de $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)\|$, se tiene que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)\| + \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)\| \leq M + L_{R+r} r.$$

Entonces $\mathbf{f}$ está acotada en $[0, \infty) \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ por $M + L_{R+r} r$. $\square$

A continuación, se demuestra que la función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ verifica las condiciones del Teorema 3.2.7, siempre que tengamos la acotación en un punto que requiere el lema previo.

Proposición 3.3.3. *Sea $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM, tal que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ está acotada en $[0, \infty)$ para $\mathbf{x}_0$ fijo, y sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ una función de soporte compacto. La función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ es KBM, acotada y globalmente lipschitziana en la variable espacial. Además, su promedio es $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$.*

Demostración. Sea $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$. Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{g}}_T(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$$

con lo que $\mathbf{g}$ admite promedio.

Sea $r > 0$ de modo que el soporte de φ está contenido en la bola $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$. Por el lema previo $\mathbf{f}$ está acotada en $[0, \infty) \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$. Además, como φ toma valores en $[0, 1]$, se tiene que $\|\mathbf{g}(t, \mathbf{x})\| = \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|$ en $[0, \infty) \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ y fuera de ese conjunto $\mathbf{g}$ es nula, con lo que $\mathbf{g}$ es acotada.

Finalmente, queda comprobar que $\mathbf{g}$ es globalmente lipschitziana en la variable espacial. Puesto que φ tiene derivada continua, alcanzará un máximo en el compacto $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ y fuera es nula, con lo que está acotada. Por tanto, existe $L > 0$ de modo que $|\varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2)| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$.

Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$, y sea $R = \|\mathbf{x}_0\|$, entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_2)\| &\leq \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\varphi(\mathbf{x}_1)\| + \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\varphi(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\varphi(\mathbf{x}_2)\| \\ &\leq |\varphi(\mathbf{x}_1)|\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| + |\varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2)|\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \\ &\leq (L_{R+r} + L\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\|)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|. \end{aligned}$$

Por tanto, si $M > 0$ es una cota de $\mathbf{f}$ en $[0, \infty) \times \overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$, entonces $L_{R+r} + LM$ es una constante de Lipschitz para $\mathbf{g}$ en $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$. Vamos a ver que de hecho es válida para todo par de puntos de $\mathbb{R}^n$.

Si tanto $\mathbf{x}_1$ como $\mathbf{x}_2$ están fuera de la bola $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$, entonces $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_1) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_2) = 0$, con lo que la cota se verifica. Supongamos ahora que solo uno de ellos está fuera de la bola, que podemos suponer que es $\mathbf{x}_1$ sin pérdida de generalidad. Entonces se tiene que $\varphi(\mathbf{x}_1) = 0$, con lo que resulta que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_2)\| &\leq |\varphi(\mathbf{x}_1)| \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| + |\varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2)| \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \\ &= |\varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2)| \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|. \end{aligned}$$

Por tanto, también se verifica la cota. $\square$

Entonces, si la función $\mathbf{f}$ del problema (3.1) es KBM y podemos garantizar la acotación para un punto espacial, lo que afirma la Proposición 3.3.3 es que para toda función de soporte compacto $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$, el problema de Cauchy acondicionado

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.19)$$

verifica las condiciones del Teorema 3.2.7, con el sistema promediado siendo

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \varepsilon \hat{\mathbf{f}}(t, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Puesto que el objetivo es resolver el problema con la función $\mathbf{f}$, se debe buscar φ de modo que no modifique las soluciones del sistema original ni del promediado en los intervalos de tiempo estudiados. Esto se puede conseguir si para cualquier ε las soluciones de (3.1) y (3.3) están contenidas en $\varphi^{-1}(1)$ para $t \in [0, 1/\varepsilon]$, o equivalentemente, en tiempo lento, si las soluciones de (3.11) están contenidas en $\varphi^{-1}(1)$ para $s \in [0, 1]$.

Es decir, se busca una situación como la reflejada en la Figura 3.8. Si probamos que las órbitas en tiempo lento $s \in [0, 1]$ están contenidas para todo ε en un cierto conjunto compacto K , podemos tomar φ de modo que valga 1 en K y 0 fuera de una bola que contenga K . Entonces, las soluciones de (3.19) y (3.20) coincidirían con las de (3.1) y (3.3) en el intervalo $[0, 1/\varepsilon]$. Posteriormente, las soluciones de los sistemas acondicionados continuarían, puesto que la Proposición 2.1.4 garantiza que están definidas en todo $[0, \infty)$, pero una vez salen de K no tienen por qué coincidir con las soluciones del problema original.

Supongamos que el problema promediado original en tiempo lento (3.11) tiene solución $\mathbf{y}(s)$ definida para $s \in [0, 1]$ y sea K un conjunto compacto que contiene un entorno de la órbita de la solución. Como se ha descrito antes, tomamos φ una función de soporte compacto que vale 1 en K y 0 fuera de una bola que contenga a K . Entonces, los sistemas (3.19) y (3.20) están en las condiciones del Teorema 3.2.7, con lo que para una tasa de promedio adecuada, se tiene que

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)\| \leq e^{2L}((L+2)M\Delta(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)) \quad \forall t \in [0, 1/\varepsilon],$$

Ahora bien, se tiene que $\mathbf{y}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}(t\varepsilon)$ con lo que $\mathbf{y}_\varepsilon(t) \in K$ para todo $t \in [0, 1/\varepsilon]$. Y, puesto que $\Delta(\varepsilon)$ y $\eta(\varepsilon)$ tienen límite cero cuando ε tiende a cero y se ha tomado K de

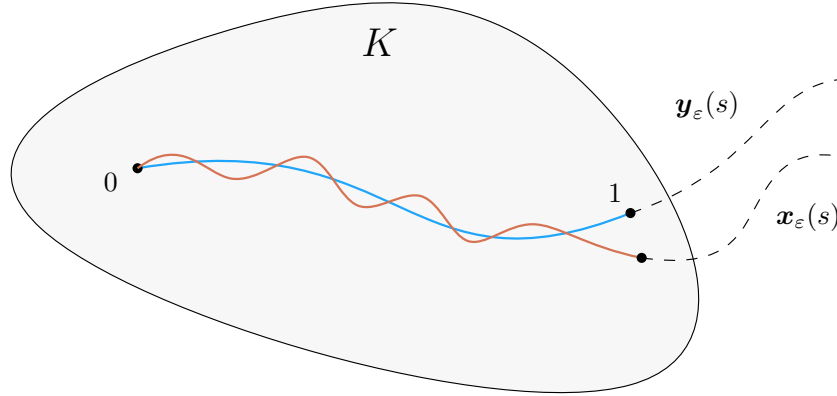


Figura 3.8: Órbitas del problema condicionado en tiempo lento.

modo que contenga a un entorno de la órbita de $\mathbf{y}_\varepsilon$, existen un ε_0 de modo que $\mathbf{x}_\varepsilon(t) \in K$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ y $t \in [0, 1/\varepsilon]$. Por tanto, para ε suficientemente pequeño, podemos garantizar que la solución del sistema condicionado (3.19) coincide con la solución del sistema original (3.1).

En cuanto al conjunto de validez de la tasa de promedio, puesto que para aplicar el Teorema 3.2.7 solo se necesita que sea válida en la órbita de la solución promediada, se puede tomar una tasa de promedio en K . Entonces, puesto que la función acondicionada y la función original coinciden, es una tasa de promedio para ambas. En consecuencia, acabamos de justificar el siguiente resultado.

Teorema 3.3.4. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM y supongamos que existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ está acotada en $[0, \infty)$. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema (3.1), $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema (3.3). Si el intervalo de definición de la solución $\mathbf{y}_\varepsilon$ contiene a $[0, 1/\varepsilon]$, y $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$ es una tasa de promedio de $\mathbf{f}$ en un conjunto compacto que contenga un entorno de $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ para $t \in [0, 1/\varepsilon]$, entonces, se tiene que $\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\max\{\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon)\})$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

En particular, podemos tomar la tasa de promedio de la Proposición 3.2.3 con el compacto K que hemos descrito antes, que proporciona el siguiente corolario.

Corolario 3.3.5. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM y supongamos que existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ está acotada en $[0, \infty)$. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema (3.1) y $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema (3.3). Si el intervalo de definición de la solución $\mathbf{y}_\varepsilon$ contiene a $[0, 1/\varepsilon]$, y K es un conjunto compacto que contenga un entorno de $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ para $t \in [0, 1/\varepsilon]$, entonces, $\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\sqrt{\delta_K(\varepsilon)})$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

El caso de las funciones periódicas, puesto que la acotación para cada punto está garantizada, y la tasa de promedio de la Proposición 3.2.4 es válida en todo $\mathbb{R}^n$, el Teorema 3.3.4 adquiere una expresión más sencilla.

Corolario 3.3.6. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM periódica. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema (3.1) y $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema (3.3). Si el intervalo de definición de la solución $\mathbf{y}_\varepsilon$ contiene a $[0, 1/\varepsilon]$, entonces, $\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

La ecuación de Van der Pol que estudiamos en el Ejemplo 3.3.1, puesto que la solución promediada está definida en todo $[0, \infty)$, verifica las condiciones del Corolario 3.3.6. Esto

justifica que la diferencia entre las soluciones es $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} , como indicaba el experimento numérico.

No siempre se puede garantizar que la solución del sistema promediado esté definida en $[0, 1/\varepsilon]$. Sin embargo, esto no quiere decir que no se puedan aplicar los métodos de promedio. Vamos a verlo con un ejemplo.

Ejemplo 3.3.7. Consideremos la ecuación $x'' + x = \varepsilon(x')^3$, de la forma (2.10) con $\omega = 1$, y donde el lado derecho de la ecuación corresponde a $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ y $g(t, x, x', \varepsilon) = (x')^3$. La ecuación se puede expresar en forma estándar usando variables amplitud fase como

$$\begin{cases} r' = \varepsilon r^3 \sin^4(t + \theta) \\ \theta' = \varepsilon r^2 \cos(t + \theta) \sin^3(t + \theta). \end{cases} \quad (3.21)$$

Por tanto, el lado derecho del sistema es una función KBM y periódica de periodo 2π . Puesto que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4(t) dt = \frac{3}{8} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin^3(t) dt = 0,$$

el sistema promediado es

$$\begin{cases} \bar{r}' = \varepsilon \frac{3}{8} \bar{r}^3 \\ \bar{\theta}' = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Si imponemos como condiciones iniciales $\theta(0) = 0$ y $r(0) = r_0 > 0$, podemos integrar el sistema promediado analíticamente para obtener la solución

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{3r_0^2}{4}t\varepsilon}}, \quad \theta(t) = 0.$$

Como se puede ver, la solución está definida hasta $t = \frac{4}{3r_0^2}\varepsilon^{-1}$, y para $r_0 \geq 2/\sqrt{3}$ la solución de la ecuación promediada no está definida en todo el intervalo $[0, 1/\varepsilon]$ con lo que no estamos en condiciones de aplicar los resultados de esta sección.

En tiempo lento, la solución del sistema promediado (3.22) está definida en $[0, \frac{4}{3r_0^2})$. Si fijamos $c < \frac{4}{3r_0^2}$ y definimos una nueva variable temporal $\tau = t/c$, se obtienen los siguientes sistemas en la nueva escala temporal

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = \varepsilon c r^3 \sin^4(t + \theta) \\ \frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon c r^2 \cos(t + \theta) \sin^3(t + \theta) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \frac{d\bar{r}}{d\tau} = \varepsilon c \frac{3}{8} \bar{r}^3 \\ \frac{d\bar{\theta}}{d\tau} = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

En la nueva escala temporal, la solución del sistema promediado (3.23) tiene intervalo de definición que incluye a $[0, 1/\varepsilon]$, con lo que se puede aplicar el Corolario 3.3.6.

Tomamos $r_0 = 2$ y $c = 0,3 < 1/3$, e integramos numéricamente con Vern9 y tolerancia 10^{-8} los sistemas (3.21) y (3.22) para $\varepsilon = 0,01$ en el intervalo $[0, c/\varepsilon]$. En la Figura 3.9, se ha representado en azul la solución de la ecuación promediada (3.22), y en naranja la solución de la ecuación original (3.21). Como se puede ver, las soluciones se van separando a medida que se acercan al extremo derecho del intervalo. Sin embargo, si se representa la diferencia entre las soluciones en $[0, c/\varepsilon]$ estimada por evaluaciones cada 0,1 unidades para ε tomando valores 10^{-4} , 10^{-3} y 10^{-2} , se puede ver la tendencia $\mathcal{O}(\varepsilon)$ esperada.

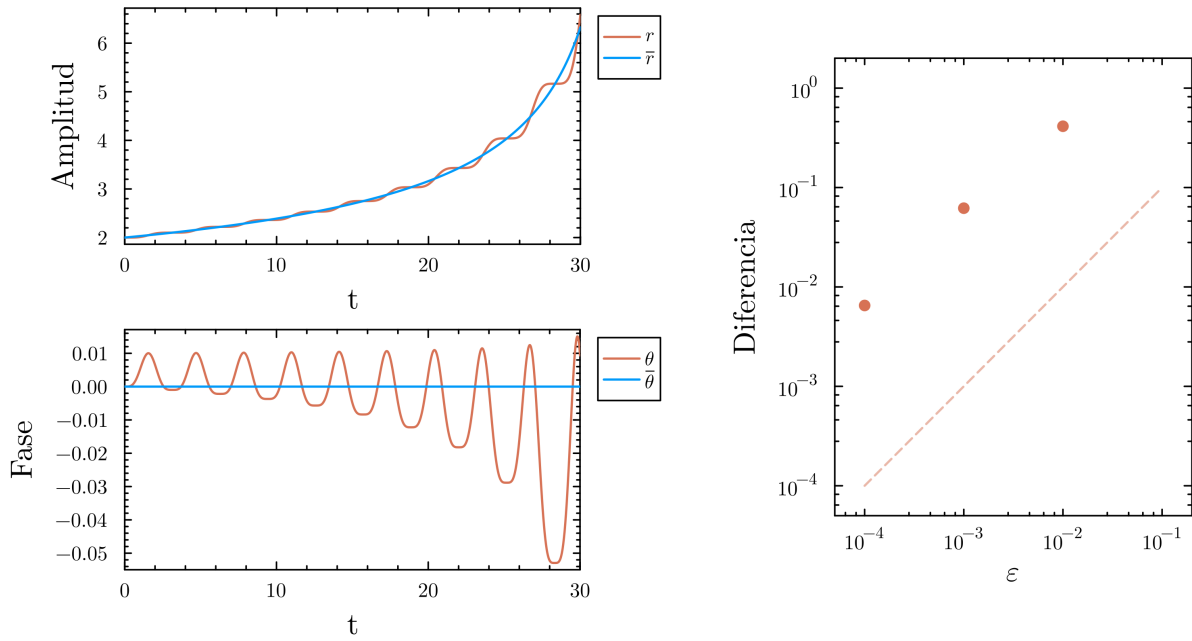


Figura 3.9: Solución exacta y promediada del sistema (3.21) para $\epsilon = 0,01$ y diferencia en función de ϵ en escala de tiempo ϵ^{-1} .

En este caso no se representa la diferencia para $\epsilon = 0,1$ puesto que el integrador numérico devuelve un error en torno al tiempo 2,33, lo que parece indicar que la solución del problema original no está definida en todo el intervalo. Recordemos que si la función $\mathbf{f}$ no es globalmente lipschitziana no podemos garantizar el intervalo de definición de la solución, antes se ha probado tan solo para ϵ suficientemente pequeño.

Como se ha visto en el ejemplo, los resultados de teoría de promedio pueden adaptarse para aplicarse a intervalos más pequeños. Aunque se podría haber trabajado directamente con un intervalo en tiempo lento $[0, c]$ en la demostración del Teorema 3.2.7, también se puede probar con un cambio de escala temporal como hemos hecho en el ejemplo.

Sea $\mathbf{y}(s)$ la solución del sistema promediado (3.11). Si $\mathbf{f}$ es KBM, por el Corolario 3.1.4, el sistema promediado verifica las condiciones del Teorema 2.1.3, con lo que existe un entorno de 0 tal que la solución $\mathbf{y}(s)$ está definida. Es decir, existe $c > 0$ de modo que $\mathbf{y}(s)$ está definida en $[0, c]$. Al igual que hicimos en el ejemplo, si tomamos $\tau = t/c$, obtenemos una nueva ecuación diferencial donde el intervalo $[0, c/\epsilon]$ se corresponde con $[0, 1/\epsilon]$ en tiempo τ .

En la nueva escala temporal, el sistema original y el promediado se transforman en

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \epsilon c \mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x}) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = c \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}). \quad (3.24)$$

Puesto que la solución del promediado en la nueva variable temporal está definida en $[0, 1/\epsilon]$, podemos aplicar el Teorema 3.3.4 con una tasa de promedio de $c \hat{\mathbf{f}}(c\tau, \mathbf{x})$. El siguiente lema muestra cómo obtener tal tasa de promedio a partir de una tasa de promedio de la función original.

Lema 3.3.8. Sean $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM y $X \subset \mathbb{R}^n$. Dada $(\Delta(\epsilon), \eta(\epsilon))$, una tasa de promedio de $\mathbf{f}$ en X , se tiene que $(\Delta(\epsilon/c), c\eta(\epsilon/c))$ es una tasa de promedio de $c \hat{\mathbf{f}}(c\tau, \mathbf{x})$ en X .

Demostración. Para todo $\mathbf{x} \in X$ y $0 \leq t_0 \leq \frac{1}{\varepsilon}(1 - \Delta(\varepsilon))$ se tiene

$$\frac{\varepsilon}{\Delta(\varepsilon)} \left\| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \eta(\varepsilon),$$

que, aplicando el Teorema del Cambio de Variable, se puede reescribir en tiempo $\tau = t/c$ como

$$\frac{\varepsilon}{\Delta(\varepsilon)} \left\| \int_{\frac{t_0}{c}}^{\frac{t_0}{c} + \frac{\Delta(\varepsilon)}{c\varepsilon}} (c\mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) d\tau \right\| \leq \eta(\varepsilon),$$

donde ahora el intervalo de integración está contenido en $[0, \frac{1}{c\varepsilon}]$. Reescalando la variable ε , podemos escribir

$$\frac{\varepsilon}{c\Delta(\varepsilon/c)} \left\| \int_{\frac{t_0}{c}}^{\frac{t_0}{c} + \frac{\Delta(\varepsilon/c)}{\varepsilon}} (c\mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) d\tau \right\| \leq \eta(\varepsilon/c)$$

con $0 \leq t_0 \leq \frac{c}{\varepsilon}(1 - \Delta(\varepsilon/c))$. Si escribimos $\tau_0 = t_0/c$ y multiplicamos la expresión anterior por c , concluimos que

$$\frac{\varepsilon}{\Delta(\varepsilon/c)} \left\| \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \frac{\Delta(\varepsilon/c)}{\varepsilon}} (c\mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) d\tau \right\| \leq c\eta(\varepsilon/c)$$

para $0 \leq \tau_0 \leq \frac{1}{\varepsilon}(1 - \Delta(\varepsilon/c))$, con lo que $(\Delta(\varepsilon/c), c\eta(\varepsilon/c))$ es una tasa de promedio de $c\mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x})$. $\square$

Utilizando la tasa de promedio que proporciona el Lema 3.3.8, podemos aplicar el Teorema 3.3.4 al sistema (3.24) para obtener una cota de la diferencia entre las soluciones para $\tau \in [0, 1/\varepsilon]$. Al deshacer el cambio de escala temporal obtenemos una cota válida en $[0, c/\varepsilon]$. Es decir, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.9. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM y supongamos que existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ está acotada en $[0, \infty)$. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema (3.1) e $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema (3.3). Si $(\Delta(\varepsilon), \eta(\varepsilon))$ es una tasa de promedio de $\mathbf{f}$ en un entorno que contiene la órbita de $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ en tiempo $[0, c/\varepsilon]$, entonces, $\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\max\{\Delta(\varepsilon/c), \eta(\varepsilon/c)\})$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

En particular, si se emplea la tasa de promedio para $\mathbf{f}$ de la Proposición 3.2.3 o la tasa de promedio para funciones periódicas de la Proposición 3.2.4, se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 3.3.10. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM y supongamos que existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ está acotada en $[0, \infty)$. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema (3.1) e $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema (3.3). Si K es un conjunto compacto que contiene un entorno de la condición inicial tal que la órbita de $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ en tiempo $[0, c/\varepsilon]$ está contenida para todo ε , entonces, $\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\sqrt{\delta_K(\varepsilon/c)})$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

Corolario 3.3.11. *Sean $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM periódica, $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema (3.1) e $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema (3.3). Entonces, $\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}_\varepsilon(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

Estos últimos resultados muestran lo general que es la teoría de promedio, ya que no requieren de hipótesis muy exigentes sobre la función $\mathbf{f}$. Sin embargo, al no exigir que $\mathbf{f}$ sea acotada o globalmente lipschitziana, hay que tener en cuenta los problemas que se han puesto de manifiesto en el Ejemplo 3.3.7 en cuanto a la validez de las cotas con respecto al valor de ε o la constante c del intervalo temporal.

Capítulo 4

Intervalos de validez no acotados

En el capítulo anterior siempre hemos tomado la condición inicial en tiempo 0. Ahora nos planteamos si podemos aplicar los resultados del capítulo anterior al siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Este problema de Cauchy es equivalente, por una traslación de la variable temporal, al sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}(t_0 + t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Por tanto, tenemos un nuevo sistema con condición inicial en tiempo 0, pero regido por una nueva función, la trasladada de $\mathbf{f}$, que denotaremos por $\mathbf{f}_{t_0}$.

Proposición 4.0.1. *Dada $\mathbf{f}$ una función KBM, para cualquier $t_0 > 0$, la trasladada $\mathbf{f}_{t_0}$ es una función KBM y su promedio coincide con el de $\mathbf{f}$.*

Demostración. La media en tiempo T para la función trasladada es,

$$\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(t_0 + t, \mathbf{x}) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt,$$

con lo que dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{f}}_{t_0}(\mathbf{x}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t_0 + T}{T} \frac{1}{t_0 + T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0 + T} \left(\int_0^{t_0+T} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt - \int_0^{t_0} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0 + T} \int_0^{t_0+T} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

La continuidad y la propiedad tipo Lipschitz de $\mathbf{f}_{t_0}$ son inmediatas a partir de las propiedades de $\mathbf{f}$. $\square$

La Proposición 4.0.1, justifica que el sistema (4.1) pueda estudiarse con los métodos del capítulo anterior. Sin embargo, esto proporciona cotas válidas en función de cada $t_0 > 0$, y nuestro objetivo es obtener cotas que sean válidas uniformemente en t_0 . Es decir, buscamos conseguir una cota que sea válida independientemente del tiempo en el que se fija la condición inicial. Esto nos permitirá obtener cotas en tiempo $[0, \infty)$ bajo ciertas condiciones.

4.1. Funciones UKBM

Para garantizar la existencia de cotas válidas para todas las trasladadas no es suficiente con que la función $\mathbf{f}$ sea KBM. Aunque las trasladadas sean KBM, la tasa de convergencia de cada trasladada es en general distinta, ya que se toma superior en conjuntos temporales diferentes.

Por tanto, hay que adaptar los conceptos del capítulo anterior para conseguir resultados análogos válidos para toda trasladada. En primer lugar, vamos a definir las funciones uniformemente KBM, que son el objeto fundamental de este capítulo.

Definición 4.1.1. Sea $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función KBM. Se dice que $\mathbf{f}$ es uniformemente KBM, o UKBM, si el límite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

es uniforme en t_0 .

La mayoría de los ejemplos que se estudiaron en el capítulo anterior utilizaban funciones periódicas, que la siguiente proposición prueba que son funciones UKBM. Con lo que, de hecho, la mayoría de funciones interesantes para la teoría de promedio son funciones UKBM.

Proposición 4.1.2. Sea $\mathbf{f}$ una función KBM periódica. Entonces, $\mathbf{f}$ es UKBM.

Demostración. Fijado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, como se justificó en la demostración de la Proposición 3.1.5, existe $M > 0$ de modo que $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq M$ para todo $t \in [0, \infty)$.

Sea T_0 el periodo de $\mathbf{f}$. Dados $T > 0$ y $t_0 > 0$, si $T = kT_0 + \delta$ y $t_0 = k'T_0 + \delta'$ con $0 \leq \delta, \delta' < T_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right\| &= \left\| \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \right\| \\ &= \frac{1}{T} \left\| \int_{\delta'}^{\delta'+T} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt - \frac{T}{T_0} \int_0^{T_0} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \right\| \\ &= \frac{1}{T} \left\| \int_{\delta'}^{\delta'+T} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt - \left(k + \frac{\delta}{T_0} \right) \int_0^{T_0} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \right\| \\ &= \frac{1}{T} \left\| \int_{kT_0}^{\delta'+kT_0+\delta} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt - \int_0^{\delta'} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt - \frac{\delta}{T_0} \int_0^{T_0} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \right\| \\ &\leq \frac{2(\delta' + \delta)M}{T} \leq \frac{4T_0M}{T} \end{aligned}$$

lo que demuestra que el límite es uniforme en t_0 . □

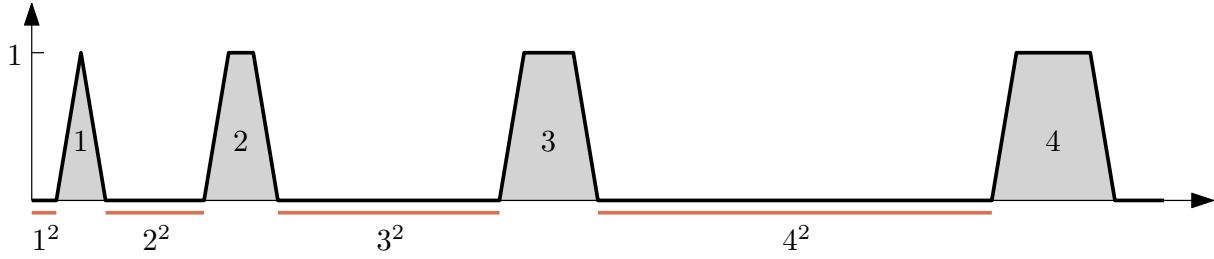


Figura 4.1: Ejemplo de función KBM que no es UKBM.

Además, puesto que la suma y el producto por escalares preserva la convergencia uniforme, de la Proposición 3.1.7 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.1.3. *Las funciones UKBM son un subespacio vectorial de las funciones KBM.*

Puesto que hemos visto muchos ejemplos de funciones UKBM en el anterior capítulo, se presenta a continuación un ejemplo de una función que, siendo KBM, no es UKBM.

Ejemplo 4.1.4. Consideremos una función $f(t)$ como la reflejada en la Figura 4.1. La función toma valor nulo en un intervalo de longitud 1, después crece con pendiente 1 hasta valer 1 y vuelve a bajar con pendiente -1 hasta 0, describiendo una región con área 1. Posteriormente, toma valor nulo en un intervalo de longitud 2^2 , tras lo cual crece con pendiente 1 hasta valer 1, mantiene ese valor en un intervalo de longitud 1 y vuelve a bajar, con lo que describe un trapezoido de área 2. Este proceso se repite indefinidamente, tomando valores nulos en intervalos de longitud k^2 antes de describir una región de área k . Al no depender de $\mathbf{x}$, está claro que se cumple la propiedad tipo Lipschitz, con lo que para ver que es KBM basta comprobar que el promedio existe.

Puesto que

$$\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

dado $T > 0$, si el mayor intervalo donde f es nula que está íntegramente contenido en $[0, T]$ tiene longitud k^2 , se tiene que

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \leq \frac{6k(k+1)}{2k(k+1)(2k+1)} = \frac{3}{2k+1}. \quad (4.2)$$

Por tanto, cuando T tiende a infinito, la desigualdad (4.2) implica que tiene promedio nulo y por tanto es KBM.

Sin embargo, para todo $T > 0$, existe un $t_0 > 0$ de modo que

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = 1 \quad (4.3)$$

con lo que el límite no es uniforme y no es una función UKBM.

Observemos que, puesto que el promedio es nulo y la función no depende de la variable espacial, la tasa de convergencia es

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{T \in [0, 1/\varepsilon]} \varepsilon \left| \int_0^T f(t) dt \right| = \varepsilon \int_0^{1/\varepsilon} f(t) dt,$$

donde se puede aplicar la desigualdad (4.2) para concluir que tiende a cero cuando ε tiende a cero, como sabemos que tiene que ocurrir para una función KBM. Sin embargo, por (4.3), para cada ε existe una trasladada con tasa de convergencia 1.

A continuación se busca generalizar la tasa de convergencia a una tasa de convergencia uniforme para las funciones UKBM, como se hace en el artículo [24].

Definición 4.1.5. Dada $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función UKBM, y un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, se define la tasa de convergencia uniforme en K como

$$\widehat{\delta}_K(\varepsilon) = \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{\substack{t_0 \geq 0 \\ T \in [0, 1/\varepsilon]}} \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\|.$$

Si se evalúa la expresión de la tasa de convergencia uniforme para la función del Ejemplo 4.1.4, se obtiene que, independientemente de ε , toma valor 1. Por tanto, no es un infinitésimo y no proporcionaría ninguna cota interesante. Por eso la definición se enuncia únicamente para funciones UKBM, y no para funciones KBM. Vamos a ver que, para una función UKBM, la tasa de convergencia uniforme es un infinitésimo.

Lema 4.1.6. Sea $\mathbf{f}$ una función UKBM. Dados un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ y $\alpha > 0$, existe un $T_0 > 0$ de modo que

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| < \alpha$$

para todo $\mathbf{x} \in K, T \geq T_0$ y $t_0 \geq 0$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{f}$ es UKBM, y sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Se define la familia de funciones continuas en K

$$\mathcal{F} = \{\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}: T \in [T_0, \infty), t_0 \in [0, \infty)\}.$$

Fijado $\mathbf{x}_0 \in K$, si $R = \|\mathbf{x}_0\|$, para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, d)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}_0)\| &\leq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)\| dt \\ &\leq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} L_{R+d} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = L_{R+d} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \quad \forall T \in (0, \infty), t_0 \in [0, \infty), \end{aligned}$$

con lo que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua.

Además, para ese $\mathbf{x}_0$ y cualquier $\mathbf{x} \in K, T > 0$, se tiene que

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x})\| \leq \|\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}_0)\| + \|\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}_0) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\| + \|\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\|.$$

Podemos acotar el primer sumando como

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}_0)\| \leq 2r L_r \quad \forall T \in (0, \infty), t_0 \in [0, \infty),$$

donde $r = \max_{\mathbf{x} \in K} \|\mathbf{x}\|$ y se ha usado el carácter Lipschitziano de $\mathbf{f}$ como en la demostración del Lema 3.1.12. En cuanto al segundo sumando, por la convergencia uniforme en t_0 de las medias, fijado un $\alpha > 0$ existe un T_0 de modo que

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}_0) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\| < \alpha \quad \forall T \in [T_0, \infty), t_0 \in [0, \infty).$$

Por tanto, la familia $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada y es relativamente compacta por el Teorema de Arzelà-Ascoli.

Demostramos ahora el lema por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $\alpha > 0$ de modo que para $j \in \mathbb{N}$, existen $T_j \geq j$ y $t_j \in [0, \infty)$ de modo que

$$\|\hat{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{f}}_{t_j, T_j}\|_\infty \geq \alpha.$$

Existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $T_0 < j_0$. Entonces, la sucesión $\{\hat{\mathbf{f}}_{t_j, T_j}\}_{j=j_0}^\infty$ está contenida en $\mathcal{F}$. Por tanto, como la familia es relativamente compacta, la sucesión admite una subsucesión convergente cuyo límite, por la Proposición 4.0.1, debe ser $\hat{\mathbf{f}}$, lo que contradice la desigualdad. $\square$

Proposición 4.1.7. *Si $\mathbf{f}$ es una función UKBM tal que existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ está acotada en $[0, \infty)$, entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{\delta}_K(\varepsilon) = 0$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Recíprocamente, si $\mathbf{f}$ es tal que existe $\hat{\mathbf{f}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de manera que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{\substack{t_0 \geq 0 \\ T \in [0, 1/\varepsilon]}} \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| = 0$$

para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\hat{\mathbf{f}}_{t_0, T}$ converge a $\hat{\mathbf{f}}$ uniformemente en t_0 y uniformemente en los compactos de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{f}$ es UKBM, y sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, entonces

$$\hat{\delta}_K(\varepsilon) = \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{\substack{t_0 \geq 0 \\ T \in [0, 1/\varepsilon]}} \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| = \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{\substack{t_0 \geq 0 \\ T \in [0, 1/\varepsilon]}} \varepsilon T \left\| \hat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right\|.$$

Sea $\alpha > 0$. Por el lema previo, existe un $T_0 > 0$ de modo que $\|\hat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| < \alpha$ para todo $\mathbf{x} \in K, T \in [T_0, \infty)$ y $t_0 \in [0, \infty)$. Entonces, para todo $T \in [T_0, 1/\varepsilon]$, se tiene que

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in K \\ t_0 \geq 0}} \varepsilon T \left\| \hat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right\| < \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \alpha = \alpha.$$

Además, por el Lema 3.3.2, existe $M > 0$ de modo que $\mathbf{f}$ está acotada por M en $[0, \infty) \times K$. Entonces, para cualquier $t_0 \in [0, \infty), T \in (0, \infty), \mathbf{x} \in K$ se tiene que

$$\frac{1}{T} \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt \right\| \leq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} M dt = M$$

y tomando límites se concluye que $\|\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| \leq M$, con lo que

$$\left\| \hat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right\| \leq 2M.$$

para todo $T < T_0$. En consecuencia, para $\alpha > 0$, y todo $\varepsilon < \frac{\alpha}{2T_0M}$,

$$\hat{\delta}_K(\varepsilon) = \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{\substack{t_0 \geq 0 \\ T \in [0, 1/\varepsilon]}} \varepsilon T \left\| \hat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \right\| < \alpha,$$

con lo que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta_K(\varepsilon) = 0$.

Recíprocamente, si existe $\widehat{\mathbf{f}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de modo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{\substack{t_0 \geq 0 \\ T \in [0, 1/\varepsilon]}} \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| = 0$$

para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces,

$$\sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{\substack{t_0 \geq 0 \\ T \in [0, 1/\varepsilon]}} \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \geq \|\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, 1/\varepsilon}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| \quad \forall t_0 \in [0, \infty),$$

con lo que $\widehat{\mathbf{f}}$ es el límite de $\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}$ cuando T tiende a infinito, y es uniforme en t_0 y en los compactos de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Una vez probado que el límite cuando ε tiende a cero es nulo, para demostrar que la tasa de convergencia uniforme es un infinitésimo hay que verificar que sea continua.

Proposición 4.1.8. *Sean $\mathbf{f}$ una función UKBM tal que existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)$ está acotada en $[0, \infty)$ y $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto. Entonces la tasa de convergencia uniforme $\widehat{\delta}_K$ es una función uniformemente continua en $[\varepsilon_0, 1]$ para todo $\varepsilon_0 \in (0, 1)$. En particular, es continua en $(0, 1)$.*

Demostración. Por el Lema 3.3.2, existe una constante $M > 0$ de manera que $\mathbf{f}$ está acotada en $[0, \infty) \times K$ por M . Entonces, para todo $T > 0$, se tiene que

$$\|\widehat{\mathbf{f}}_T(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| dt \leq M$$

para todo $\mathbf{x} \in K$, y tomando límite cuando T tiende a infinito, se concluye que el promedio está igualmente acotado en K por M . Por tanto, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ está acotada por $2M$ en $[0, \infty) \times K$. En consecuencia,

$$\int_{t_0+1/\varepsilon_2}^{t_0+1/\varepsilon_1} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| dt \leq 2(1/\varepsilon_1 - 1/\varepsilon_2)M$$

para cualquier $t_0 > 0$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Sean $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, y $\alpha > 0$. Por la continuidad uniforme de la función $\varepsilon \mapsto 1/\varepsilon$ en el intervalo $[\varepsilon_0, 1]$, existe $\beta > 0$ de modo que para todo $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ con $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ y $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \leq \beta$, se tiene que, para todo $t_0 > 0$,

$$\int_{t_0+1/\varepsilon_2}^{t_0+1/\varepsilon_1} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| dt \leq \alpha.$$

Entonces, dados t_1, t_2 con $1/\varepsilon_2 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1/\varepsilon_1$, se tiene que

$$\int_{t_0+t_1}^{t_0+t_2} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| dt \leq \int_{t_0+1/\varepsilon_2}^{t_0+1/\varepsilon_1} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| dt \leq \alpha. \quad (4.4)$$

Por definición de superior, existen $T \in [0, 1/\varepsilon_2]$, $t_0 \geq 0$ y $\mathbf{x} \in K$ de modo que

$$\widehat{\delta}_K(\varepsilon_2) \leq \alpha + \varepsilon_2 \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| = \alpha + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \varepsilon_1 \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\|.$$

Ahora, puesto que $T \in [0, 1/\varepsilon_2] \subset [0, 1/\varepsilon_1]$, se deduce que

$$\widehat{\delta}_K(\varepsilon_2) \leq \alpha + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \widehat{\delta}_K(\varepsilon_1)$$

con lo que

$$\widehat{\delta}_K(\varepsilon_2) - \widehat{\delta}_K(\varepsilon_1) \leq \alpha + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \widehat{\delta}_K(\varepsilon_1).$$

Análogamente, existen $T \in [0, 1/\varepsilon_1]$, $t_0 \geq 0$ y $\mathbf{x} \in K$ de modo que

$$\widehat{\delta}_K(\varepsilon_1) \leq \alpha + \varepsilon_1 \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\|.$$

La integral se puede acotar separando el intervalo como

$$\left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \left\| \int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{\varepsilon_2}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| + \left\| \int_{t_0+\frac{1}{\varepsilon_2}}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\|,$$

de modo que el primer término queda acotado por $\delta_K(\varepsilon_2)/\varepsilon_2$ y el segundo por la desigualdad (4.4). Concluimos entonces que

$$\widehat{\delta}_K(\varepsilon_1) \leq \alpha + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \widehat{\delta}_K(\varepsilon_2) + \varepsilon_1 \alpha$$

con lo que, como $\varepsilon_1 \leq 1$,

$$\widehat{\delta}_K(\varepsilon_1) - \widehat{\delta}_K(\varepsilon_2) \leq 2\alpha + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \widehat{\delta}_K(\varepsilon_2).$$

Por lo tanto, se tiene que

$$|\widehat{\delta}_K(\varepsilon_2) - \widehat{\delta}_K(\varepsilon_1)| \leq 2\alpha + \left| \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right| \max\{\widehat{\delta}_K(\varepsilon_1), \widehat{\delta}_K(\varepsilon_2)\},$$

con lo que para concluir la prueba basta probar que $\widehat{\delta}_K$ está acotada. La acotación de $\widehat{\delta}_K$ es una consecuencia inmediata de la acotación de $\|\widehat{\mathbf{f}}_{t_0, T}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\|$ que ya se probó en la demostración de la Proposición 4.1.7. $\square$

Con la Proposición 4.1.7 y la Proposición 4.1.8 queda probado el siguiente resultado, análogo al Corolario 3.1.19 para funciones KBM.

Corolario 4.1.9. *Sean $\mathbf{f}$ una función UKBM y $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto. Entonces, la tasa de convergencia uniforme $\widehat{\delta}_K$ es un infinitésimo.*

Al igual que la tasa de convergencia, la tasa de convergencia uniforme proporcionará cotas para la diferencia de las soluciones de un sistema con la solución de su promediado. Sin embargo, al ser una cota más general, puesto que vale para cualquier tiempo inicial, hereda las limitaciones que ya probamos en el capítulo anterior.

Proposición 4.1.10. *Sean $\mathbf{f}$ una función UKBM y $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto. Si la tasa de convergencia uniforme verifica que $\widehat{\delta}_K(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, entonces $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}}$ para todo $\mathbf{x} \in K$.*

Demostración. Por definición, para todo ε se tiene que $\delta_K(\varepsilon) \leq \widehat{\delta}_K(\varepsilon)$, con lo que si $\widehat{\delta}_K(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ se tiene que $\delta_K(\varepsilon) = o(\varepsilon)$. El resultado se obtiene, por tanto, como consecuencia de la Proposición 3.1.20. $\square$

Por tanto, de nuevo, el caso más favorable es cuando $\widehat{\delta}_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. En el capítulo anterior vimos que las funciones de primitiva acotada verificaban que $\delta_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. La siguiente proposición muestra que tenemos un resultado análogo para funciones UKBM.

Proposición 4.1.11. *Sea $\mathbf{f}$ una función UKBM de primitiva acotada en $[0, \infty)$. Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, su tasa de convergencia uniforme en K verifica que $\widehat{\delta}_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.*

Demostración. Sea $k > 0$ de modo que $K \subset \overline{B}(\mathbf{0}, k)$, entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_K(\varepsilon) &= \sup_{\mathbf{x} \in K} \sup_{\substack{t_0 \geq 0 \\ T \in [0, 1/\varepsilon]}} \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \\ &\leq \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq k} \sup_{T \in [0, \infty)} \varepsilon \left\| \int_0^T (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq M_k \varepsilon \end{aligned}$$

con lo que $\widehat{\delta}_K(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. $\square$

En particular, al igual que se tenía para la tasa de convergencia, la Proposición 4.1.11 demuestra que las funciones periódicas tienen tasa de convergencia uniforme que es $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Por tanto, se trata de funciones cuyas medias no solo convergen rápidamente al promedio, sino que convergen rápidamente uniformemente para todo t_0 .

4.2. Aproximación de soluciones en $[0, \infty)$

Nuestro propósito a continuación es demostrar que, bajo ciertas condiciones, la cota para la diferencia entre la solución de (3.1) y (3.3) es válida en $[0, \infty)$. Para ello, vamos a generalizar los resultados de tasa de promedio que se probaron en el anterior capítulo a una versión uniforme respecto al tiempo en que se fija la condición inicial. Con esto, se busca conseguir una cota para la diferencia entre las soluciones que no dependa del tiempo de la condición inicial.

Definición 4.2.1. Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función UKBM y $\widehat{\mathbf{f}}$ su promedio. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, se dice que $(\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon))$ es una tasa de promedio uniforme de $\mathbf{f}$ en X si $\widehat{\Delta}(\varepsilon)$ es un infinitésimo, $\widehat{\eta}(\varepsilon)$ es un infinitésimo o idénticamente nulo y verifican que

$$\frac{\varepsilon}{\widehat{\Delta}(\varepsilon)} \left\| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\widehat{\Delta}(\varepsilon)}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \widehat{\eta}(\varepsilon)$$

para todo $\mathbf{x} \in X$ y $t_0 \geq 0$, es decir, cuando el intervalo de integración está contenido en el intervalo $[0, \infty)$.

El siguiente resultado muestra que para cualquier función UKBM es posible obtener una tasa de promedio uniforme a partir de la tasa de convergencia uniforme. Por tanto, toda función UKBM admite una tasa de promedio uniforme. Obsérvese que no se puede emplear la tasa de convergencia puesto que solo proporciona cotas en intervalos temporales acotados para cada ε fijo.

Proposición 4.2.2. Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función UKBM. Dado un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, si $\widehat{\delta}_K(\varepsilon)$ es la tasa de convergencia uniforme en K , entonces $(\widehat{\delta}_K(\varepsilon)^\alpha, \widehat{\delta}_K(\varepsilon)^{1-\alpha})$ es una tasa de promedio uniforme en K para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Demostración. Por la Proposición 4.1.7, existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que $\widehat{\delta}_K(\varepsilon) < 1$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Dados $\mathbf{x} \in K$, $\alpha \in (0, 1)$ y $t_0 \geq 0$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, se tiene que

$$\varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\widehat{\delta}_K(\varepsilon)^\alpha}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \widehat{\delta}_K(\varepsilon).$$

Dividiendo por $\widehat{\delta}_K(\varepsilon)^\alpha$ a ambos lados de la desigualdad se obtiene el resultado buscado. $\square$

Sin embargo, la Proposición 3.2.4 no requiere en ningún momento que el intervalo temporal esté acotado, sino que se basa en una propiedad de las funciones periódicas que es válida para cualquier tiempo. Por tanto, la misma prueba justifica que, de hecho, la tasa de promedio de las funciones periódicas es una tasa de promedio uniforme.

Proposición 4.2.3. Si $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función periódica de periodo T , entonces $(\varepsilon T, 0)$ es una tasa de promedio uniforme en $\mathbb{R}^n$.

Una vez desarrollado el concepto de tasa de promedio uniforme, es inmediato obtener cotas para la diferencia entre las soluciones con condición inicial en un tiempo distinto de cero. Se puede aplicar el Teorema 3.2.7 a las trasladadas utilizando la tasa de promedio uniforme, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 4.2.4. Sean $\mathbf{f}$ una función UKBM, $X \subset \mathbb{R}^n$ y $(\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon))$ una tasa de promedio uniforme de $\mathbf{f}$ en X . Entonces, para todo $t_0 \geq 0$, $(\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon))$ es una tasa de promedio de la trasladada $\mathbf{f}_{t_0}$.

Demostración. Dados $t_0 \geq 0$, $\mathbf{x} \in X$ y $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{\varepsilon}(1 - \widehat{\Delta}(\varepsilon))$, por ser $(\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon))$ una tasa de promedio uniforme de $\mathbf{f}$ se tiene que

$$\frac{\varepsilon}{\widehat{\Delta}(\varepsilon)} \left\| \int_{t_0+t_1}^{t_0+t_1+\frac{\widehat{\Delta}(\varepsilon)}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \widehat{\eta}(\varepsilon).$$

Por un cambio de variable, se obtiene

$$\int_{t_0+t_1}^{t_0+t_1+\frac{\widehat{\Delta}(\varepsilon)}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt = \int_{t_1}^{t_1+\frac{\widehat{\Delta}(\varepsilon)}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t_0+t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt$$

de lo que se sigue el resultado. $\square$

Sin embargo, para obtener cotas válidas en $[0, \infty)$, vamos a necesitar cotas independientes del tiempo de la condición inicial y válidas en intervalos de la forma $[t_0, t_0 + c/\varepsilon]$ con c no necesariamente igual a 1. Por tanto, antes de enunciar el equivalente al Teorema 3.2.7 en su versión uniforme, vamos a reescalar la variable temporal como hicimos para probar el Teorema 3.3.9.

Además, en el caso de la tasa de promedio uniforme, resulta más natural reescalar el tiempo que en el Lema 3.3.8, ya que la definición no depende de un intervalo temporal específico como en la Definición 3.2.2.

Lema 4.2.5. Sean $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función UKBM y $X \subset \mathbb{R}^n$. Dada $(\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon))$ una tasa de promedio uniforme de $\mathbf{f}$ en X , se tiene que $(\widehat{\Delta}(\varepsilon)/c, c\widehat{\eta}(\varepsilon))$ es una tasa de promedio uniforme de $c\mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x})$ en X .

Demostración. Para todo $\mathbf{x} \in X$ y $0 \leq t_0$ se tiene

$$\frac{\varepsilon}{\widehat{\Delta}(\varepsilon)} \left\| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\widehat{\Delta}(\varepsilon)}{\varepsilon}} (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq \widehat{\eta}(\varepsilon),$$

que, aplicando el Teorema del Cambio de Variable, se puede reescribir en tiempo τ como

$$\frac{\varepsilon}{\widehat{\Delta}(\varepsilon)} \left\| \int_{\frac{t_0}{c}}^{\frac{t_0}{c} + \frac{\widehat{\Delta}(\varepsilon)}{c\varepsilon}} (c\mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) d\tau \right\| \leq \widehat{\eta}(\varepsilon).$$

Multiplicando por c a ambos lados, y denotando $\tau_0 = t_0/c$, se concluye que

$$\frac{c\varepsilon}{\widehat{\Delta}(\varepsilon)} \left\| \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \frac{\widehat{\Delta}(\varepsilon)}{c\varepsilon}} (c\mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) d\tau \right\| \leq c\widehat{\eta}(\varepsilon)$$

para $0 \leq \tau_0$, con lo que $(\widehat{\Delta}(\varepsilon)/c, c\widehat{\eta}(\varepsilon))$ es una tasa de promedio uniforme de $c\mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x})$. $\square$

Entonces, dado que si $\mathbf{f}$ es globalmente lipschitziana con constante $L > 0$ y acotada por $M > 0$ entonces también les ocurre lo mismo a todas las trasladadas, se puede aplicar el Teorema 3.2.7 con la tasa de promedio que proporciona el Lema 4.2.5. Al igual que se hizo para la prueba del Teorema 3.3.9, estas cotas válidas en intervalos de longitud $1/\varepsilon$ en tiempo reescalado se transforman en cotas válidas en intervalos de longitud c/ε . Por tanto, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.2.6. Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función UKBM, globalmente lipschitziana con constante $L > 0$ y acotada por $M > 0$. Sea $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (4.5)$$

y sea $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \varepsilon \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Sea $(\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon))$ una tasa de promedio uniforme en un conjunto que contenga a $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + c/\varepsilon]$. Entonces, dado $c > 0$, se tiene que

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)\| \leq e^{2L}((L+2)M\widehat{\Delta}(\varepsilon)/c + c\widehat{\eta}(\varepsilon)) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + c/\varepsilon].$$

La cota que proporciona la Proposición 4.2.6, es válida en un intervalo de longitud c/ε a partir del tiempo de la condición inicial t_0 , donde las soluciones tienen que coincidir. Para extender la cota para la diferencia entre la solución de (3.1) y la solución de (3.3) a todo $[0, \infty)$ vamos a definir una partición de $[0, \infty)$ en intervalos de longitud $[0, c/\varepsilon]$ y

trabajaremos con soluciones de (4.6) que coincidan en el extremo inferior de los intervalos con la solución de (3.1).

Esto nos proporciona cotas para la diferencia entre las soluciones de (4.6) y la solución de (3.1) en cada uno de los intervalos de la partición. Sin embargo, puesto que necesitamos una cota para la solución de (3.3), necesitamos una hipótesis adicional sobre la ecuación $\mathbf{y}' = \varepsilon \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y})$ que nos permita obtener cotas entre soluciones con condiciones iniciales próximas.

Para ello, vamos a enunciar un lema basado en el Teorema de Poincaré-Lyapunov que se enuncia a continuación y cuya demostración se puede encontrar en [27].

Teorema 4.2.7. (*Poincaré-Lyapunov*) *Consideremos el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = (A + B(t))\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (4.7)$$

donde A es una matriz $n \times n$ tal que todos sus autovalores tienen parte real negativa, $B(t)$ es una matriz $n \times n$ con dependencia continua en t y de modo que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$, y $\mathbf{g}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y de clase $\mathcal{C}^1$ respecto a la variable espacial en un entorno de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tal que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{g}(t, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}$$

uniformemente en t . Entonces, existen constantes $C, \mu, \tau > 0$ y un entorno U de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de modo que la solución de (4.7) $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ está definida y verifica para todo $t \geq t_0$ que

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in U \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq Ce^{-\mu(t-t_0)}\|\mathbf{x}_0\|$$

para todo $t_0 > \tau$ (o todo $t_0 \in \mathbb{R}$ si $B(t) = 0$) y $\mathbf{x}_0 \in U$.

Utilizando el Teorema de Poincaré-Lyapunov, el siguiente lema demuestra que, bajo ciertas condiciones, para un sistema autónomo, como es el sistema promediado, existe un tiempo a partir del cual el flujo es exponencialmente contractivo. Es decir, que la diferencia entre dos soluciones con condiciones iniciales distintas disminuye exponencialmente.

Lema 4.2.8. *Sean $\mathbf{f}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, es decir, un punto tal que $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Si todos los autovalores de $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ tienen parte real negativa, existe un entorno U de $\mathbf{a}$ en D tal que para todo $\mathbf{x}_0 \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, la solución $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ está definida y verifica que $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in U$ para todo $t \in [t_0, \infty)$, y existen constantes $C, \mu, \tau > 0$ de modo que si $\mathbf{x}_1$ es otro punto de U , entonces*

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_1) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in U, \quad t \in [t_0, \infty)$$

y

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_1) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq Ce^{-\mu(t-t_0)}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (4.8)$$

para todo $t_0 > \tau$.

Demostración. En primer lugar, sea $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{a}$. Entonces

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{x}'(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t))$$

donde $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{y}$ es el resto de Taylor al desarrollar $\mathbf{f}$ en torno a $\mathbf{a}$ y, por tanto, es $\mathcal{C}^1$ y verifica que

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} = \mathbf{0}.$$

Es decir, $\mathbf{y}(t)$ es la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{a}, \end{cases}$$

que verifica las hipótesis del Teorema 4.2.7. Como consecuencia del teorema, existe un entorno de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de modo que, si la condición inicial $\mathbf{y}(t_0)$ está en dicho entorno, la solución $\mathbf{y}(t)$ tiende a cero exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$. Equivalentemente, existe un entorno U_1 de $\mathbf{a}$ de modo que si $\mathbf{x}_0 \in U_1$ la solución $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ está definida para todo $t \geq t_0$ y se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{a}$$

para todo $\mathbf{x}_0 \in U_1$.

Ahora, sea $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_1) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{x}'(t; t_0, \mathbf{x}_1) - \mathbf{x}'(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_1)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \\ &= \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_1) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_1) - \mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{f}'(\mathbf{a})\mathbf{z}(t) + \mathbf{g}'(\mathbf{y}(t))\mathbf{z}(t) + \mathbf{h}(t, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{h}(t, \mathbf{z}) = \mathbf{g}(\mathbf{z} + \mathbf{y}(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{g}'(\mathbf{y}(t))\mathbf{z}$ es el resto de Taylor al desarrollar $\mathbf{g}$ en torno a $\mathbf{y}(t)$. Por tanto, $\mathbf{z}(t)$ es solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = (\mathbf{f}'(\mathbf{a}) + \mathbf{g}'(\mathbf{y}(t)))\mathbf{z} + \mathbf{h}(t, \mathbf{z}) \\ \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (4.9)$$

Vamos a comprobar que el sistema (4.9) verifica las hipótesis del Teorema 4.2.7.

Se tiene que $\mathbf{g}'(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{f}'(\mathbf{y}(t) + \mathbf{a}) - \mathbf{f}'(\mathbf{a})$ es una función continua con $\mathbf{g}'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Por tanto, como $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}'(\mathbf{y}(t))\| = 0$. La función $\mathbf{h}$ es continua respecto a t y derivable con derivada continua respecto de la variable espacial. Además, por el Teorema del Valor Medio, podemos escribir $\mathbf{h}$ como

$$\mathbf{h}(t, \mathbf{z}) = (\mathbf{g}'(\mathbf{c}_{t,z}) - \mathbf{g}'(\mathbf{y}(t)))\mathbf{z}$$

con $\mathbf{c}_{t,z}$ un punto en el segmento que une $\mathbf{z} + \mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$. Ahora bien, puesto que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$, se tiene que $\mathbf{y}(t)$ está acotada en $[t_0, \infty)$. Sea K un entorno compacto de este conjunto. Puesto que $\mathbf{g}'$ es continua, es uniformemente continua en K , es decir, dado $\alpha > 0$, se tiene que existe $\beta > 0$ de modo que si $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in K$ son tales que $\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\| < \beta$, entonces $\|\mathbf{g}'(\mathbf{y}_2) - \mathbf{g}'(\mathbf{y}_1)\| < \alpha$. Ahora, si $\|\mathbf{z}\| < \beta$ y $\mathbf{z} \in K$ se tiene que $\|\mathbf{c}_{t,z} - \mathbf{y}(t)\| < \|\mathbf{z}\| < \beta$ con lo que

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{c}_{t,z}) - \mathbf{g}'(\mathbf{y}(t))\| < \alpha.$$

Acabamos de probar que $\mathbf{g}'(\mathbf{c}_{t,z}) - \mathbf{g}'(\mathbf{y}(t))$ tiende a cero cuando $\mathbf{z}$ tiende a cero, uniformemente en t , con lo que

$$\lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{h}(t, \mathbf{z})}{\|\mathbf{z}\|} = \mathbf{0}$$

uniformemente en t .

Por tanto, aplicando el Teorema 4.2.7, existen constantes $C, \mu, \tau > 0$ y un entorno U_2 de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de modo que

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_1) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq C_2 e^{-\mu_2(t-t_0)} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (4.10)$$

siempre que $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \in U_2$ y $t_0 > \tau$.

Sea U un entorno de $\mathbf{a}$ contenido en U_1 de modo que para todo par de puntos de U , su diferencia esté en U_2 . Dados $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in U$, se puede aplicar (4.10) y se tiene el resultado buscado. $\square$

El Lema 4.2.8 requiere que las condiciones iniciales de las dos soluciones estén en un entorno U para poder aplicar la desigualdad (4.8). Sin embargo, en la demostración del teorema de la cota para la diferencia entre soluciones en $[0, \infty)$ se busca aplicar el lema a soluciones de las que no se sabe si las condiciones iniciales están en U , pero sí se sabe que ambas soluciones terminan en U .

El último lema antes de presentar el teorema nos permitirá asegurar que las condiciones iniciales están en U para ε suficientemente pequeño, ya que proporciona una cota para la diferencia entre la solución de (4.5) y la solución de (4.6) cuando en vez de evolucionar hacia el futuro se hace hacia el pasado.

Lema 4.2.9. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función UKBM, globalmente lipschitziana con constante $L > 0$ y acotada por $M > 0$. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon$ la solución del problema (4.5) e $\mathbf{y}_\varepsilon$ la solución del problema (4.6). Si $(\hat{\Delta}(\varepsilon), \hat{\eta}(\varepsilon))$ una tasa de promedio uniforme en un conjunto que contenga a $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ para todo $t \in [t_0 - c/\varepsilon, t_0]$ y $0 < c/\varepsilon \leq t_0$, se tiene que*

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)\| \leq e^{2L}((L+2)M\hat{\Delta}(\varepsilon)/c + c\hat{\eta}(\varepsilon)) \quad \forall t \in [t_0 - c/\varepsilon, t_0].$$

Demostración. En primer lugar, podemos extender $\mathbf{f}$ a una función definida en $(-\infty, \infty)$ por simetría, definiendo $\mathbf{f}(-t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ para todo $t \geq 0$. Entonces, se tiene que $\mathbf{f}(-t, \mathbf{x})$ es una función UKBM, globalmente lipschitziana con constante $L > 0$ y acotada por $M > 0$, y $(\hat{\Delta}(\varepsilon), \hat{\eta}(\varepsilon))$ es una tasa de promedio uniforme de $\mathbf{f}(-t, \mathbf{x})$. Con estas consideraciones, además, se tiene que la demostración de la Proposición 4.0.1 es válida para $t_0 < 0$, con lo que todas las trasladadas, tanto de $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ como de $\mathbf{f}(-t, \mathbf{x})$ son funciones KBM con promedio $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$.

Las soluciones $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ e $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ en $[t_0 - c/\varepsilon, t_0]$ son equivalentes a las soluciones $\mathbf{x}_\varepsilon(t_0 - ct)$ e $\mathbf{y}_\varepsilon(t_0 - ct)$ en $[0, 1/\varepsilon]$ de los problemas

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mathbf{y}' = \varepsilon \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

donde $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = -c\mathbf{f}(t_0 - ct, \mathbf{x})$. Entonces, si se demuestra que $(\hat{\Delta}(\varepsilon)/c, c\hat{\eta}(\varepsilon))$ es una tasa de promedio para $\mathbf{g}$ habríamos acabado la demostración.

Dado $\mathbf{x} \in K$, para todo $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\hat{\Delta}(\varepsilon)}{c}\right)$, haciendo el cambio de variable $\tau = -t + t_0/c$, se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_1 + \frac{\hat{\Delta}(\varepsilon)}{c\varepsilon}} (\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) - \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x})) dt = - \int_{\frac{t_0}{c} - t_1 - \frac{\hat{\Delta}(\varepsilon)}{c\varepsilon}}^{\frac{t_0}{c} - t_1} (c\mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) d\tau.$$

Puesto que, por el Lema 4.2.5, $(\widehat{\Delta}(\varepsilon)/c, c\widehat{\eta}(\varepsilon))$ es una tasa de promedio uniforme para $c\mathbf{f}(c\tau, \mathbf{x})$, y $t_1 + \frac{\widehat{\Delta}(\varepsilon)}{c\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{t_0}{c}$, se tiene que $\frac{t_0}{c} - t_1 - \frac{\widehat{\Delta}(\varepsilon)}{c\varepsilon} \geq 0$ y

$$\frac{c\varepsilon}{\widehat{\Delta}(\varepsilon)} \left\| \int_{t_1}^{t_1 + \frac{\widehat{\Delta}(\varepsilon)}{c\varepsilon}} (\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{x})) dt \right\| \leq c\widehat{\eta}(\varepsilon).$$

Por tanto, el resultado es consecuencia del Teorema 3.2.7. $\square$

Finalmente, estamos en condiciones de enunciar el teorema fundamental de este capítulo. Es posible extender la cota para la diferencia entre la solución de (3.1) y la solución de (3.3) a todo el intervalo $[0, \infty)$ si la función $\mathbf{f}$ es UKBM y estamos en las proximidades de un punto donde la derivada del promediado tiene todos sus autovalores con parte real negativa.

Teorema 4.2.10. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función UKBM, globalmente lipschitziana y acotada. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ la solución del problema (3.1) e $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ la solución del problema (3.3). Supongamos que $\widehat{\mathbf{f}}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema (3.3) tal que todos los autovalores de $\widehat{\mathbf{f}}'(\mathbf{a})$ tienen parte real negativa. Si U es el entorno que proporciona el Lema 4.2.8 y la condición inicial de ambas soluciones es $\mathbf{x}_0 \in U$, dada una tasa de promedio uniforme $(\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon))$ en un conjunto que contenga a U , se tiene que*

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\max\{\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon)\}) \text{ en } [0, \infty).$$

Demostración. Consideremos la ecuación en tiempo lento

$$\frac{d\mathbf{y}}{ds} = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}).$$

Por el Lema 4.2.8, existe un entorno U y constantes $C, \mu, \tau > 0$ de modo que para todo par de puntos $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \in U$ y todo $s_0 > \tau$ se tiene que

$$\|\mathbf{y}(s; s_0, \mathbf{y}_1) - \mathbf{y}(s; s_0, \mathbf{y}_0)\| \leq Ce^{-\mu(s-s_0)} \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0\|, \quad s \in [s_0, \infty).$$

Tomamos $c > s_0$ de modo que $k = Ce^{-\mu c} < 1$. Entonces, en tiempo rápido, si $\mathbf{y}_\varepsilon(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ es la solución de (3.3), se verifica que

$$\|\mathbf{y}(t_0 + c/\varepsilon; t_0, \mathbf{y}_1) - \mathbf{y}(t_0 + c/\varepsilon; t_0, \mathbf{y}_0)\| \leq k \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0\| \quad (4.11)$$

para todo $t_0 > c/\varepsilon$.

Particionamos el intervalo $[0, \infty)$ en los intervalos $I_m = [mc/\varepsilon, (m+1)c/\varepsilon]$, y denotamos $\mathbf{y}_{\varepsilon,m}(t)$ a la solución de la ecuación $\mathbf{y}' = \varepsilon \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y})$ con condición inicial $\mathbf{y}(mc/\varepsilon) = \mathbf{x}_\varepsilon(mc/\varepsilon)$, que, por la Proposición 2.1.4, está definida en todo $[0, \infty)$. Además, en cada intervalo I_m de longitud c/ε se puede emplear la Proposición 4.2.6 para obtener la cota

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_{\varepsilon,m}(t)\| \leq e^{2L}((L+2)M\widehat{\Delta}(\varepsilon)/c + c\widehat{\eta}(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon), \quad t \in I_m. \quad (4.12)$$

Por el Lema 4.2.8 se tiene que $\mathbf{y}_\varepsilon(t) \in U$ para todo $t \in [0, \infty)$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}_\varepsilon(t) = \mathbf{a}$. Por tanto, U contiene a un compacto K que contiene a $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ para todo $t \in [0, \infty)$. Entonces, existe ε_0 de modo que para todo punto $\mathbf{x} \in K$

$$B\left(\mathbf{x}, \left(\frac{2+k}{1-k} + 1\right)\delta(\varepsilon)\right) \subset U, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad (4.13)$$

Vamos a probar por inducción en m que, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, se tiene que

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)\| \leq (2+k)\delta(\varepsilon)(1+k+\cdots+k^m), \quad t \in \bigcup_{j=0}^m I_j. \quad (4.14)$$

Para $I_0 \cup I_1$, se puede aplicar la Proposición 4.2.6 para probar que

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)\| \leq e^{2L}((L+2)M\widehat{\Delta}(\varepsilon)/(2c) + 2c\widehat{\eta}(\varepsilon)) \leq 2\delta(\varepsilon), \quad t \in I_0 \cup I_1$$

con lo que se tiene (4.14) para $m = 1$.

Supongamos que se tiene (4.14) para $m - 1$, entonces se tiene que

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon((m-1)c/\varepsilon) - \mathbf{y}_\varepsilon((m-1)c/\varepsilon)\| \leq (2+k)\delta(\varepsilon)(1+k+\cdots+k^{m-1}).$$

Además, por el Lema 4.2.9,

$$\|\mathbf{y}_{\varepsilon,m}((m-1)c/\varepsilon) - \mathbf{x}_\varepsilon((m-1)c/\varepsilon)\| \leq \delta(\varepsilon).$$

Por tanto, concluimos que

$$\|\mathbf{y}_{\varepsilon,m}((m-1)c/\varepsilon) - \mathbf{y}_\varepsilon((m-1)c/\varepsilon)\| \leq ((2+k)(1+\cdots+k^{m-1})+1)\delta(\varepsilon) \leq \left(\frac{2+k}{1-k} + 1\right)\delta(\varepsilon),$$

con lo que por (4.13), $\mathbf{y}_{\varepsilon,m}((m-1)c/\varepsilon) \in U$ y se puede aplicar el Lema 4.2.8. Entonces, por (4.11), se tiene que para todo $t \in I_{m-1}$,

$$\|\mathbf{y}_{\varepsilon,m}(t+c/\varepsilon) - \mathbf{y}_\varepsilon(t+c/\varepsilon)\| \leq k\|\mathbf{y}_{\varepsilon,m}(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)\|.$$

En particular, si denotamos por $\|\cdot\|_{I_m}$ a la norma del supremo en I_m , se tiene que

$$\|\mathbf{y}_{\varepsilon,m} - \mathbf{y}_\varepsilon\|_{I_m} \leq k\|\mathbf{y}_{\varepsilon,m} - \mathbf{y}_\varepsilon\|_{I_{m-1}}. \quad (4.15)$$

Combinando las desigualdades (4.12) y (4.15), por la desigualdad triangular, se deduce que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{y}_\varepsilon\|_{I_m} &\leq \delta(\varepsilon) + k\|\mathbf{y}_{\varepsilon,m} - \mathbf{y}_\varepsilon\|_{I_{m-1}} \\ &\leq \delta(\varepsilon) + k\|\mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{y}_{\varepsilon,m}\|_{I_{m-1}} + k\|\mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{y}_\varepsilon\|_{I_{m-1}} \\ &\leq (1+k)\delta(\varepsilon) + k\|\mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{y}_\varepsilon\|_{I_{m-1}}. \end{aligned}$$

Entonces, por hipótesis de inducción, concluimos que

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{y}_\varepsilon\|_{I_m} \leq (2+k)\delta(\varepsilon) + k(2+k)\delta(\varepsilon)(1+k+\cdots+k^{m-1}) = (2+k)\delta(\varepsilon)(1+k+\cdots+k^m)$$

y, tomando límite cuando m tiende a infinito en la expresión (4.14), concluimos que

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_{\varepsilon,m}(t)\| \leq \frac{2+k}{1-k}\delta(\varepsilon), \quad t \in [0, \infty),$$

con lo que el resultado se deduce de que $\delta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\max\{\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon)\})$. □

Al igual que en el capítulo anterior, las hipótesis sobre $\mathbf{f}$ de acotación y ser globalmente lipschitziana se imponen para facilitar la demostración, pero no son necesarias. Sea U el entorno que proporciona el Lema 4.2.8, que se puede tomar compacto sin pérdida de generalidad. Si $\varphi(\mathbf{x})$ es una función de soporte compacto que vale 1 en U , es inmediato a partir de la Proposición 3.3.3 que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ es UKBM y verifica las hipótesis del Teorema 4.2.10. Puesto que la solución del sistema promediado acondicionado se mantiene en U para todo $t \in [0, \infty)$, para ε suficientemente pequeño podemos garantizar que la solución del sistema original acondicionado también está siempre en U , con lo que son también soluciones de los sistemas sin acondicionar. Esto demuestra el siguiente resultado.

Teorema 4.2.11. *Sea $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función UKBM. Sean $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ la solución del problema (3.1) e $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ la solución del problema (3.3). Supongamos que $\widehat{\mathbf{f}}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema (3.3) tal que todos los autovalores de $\widehat{\mathbf{f}}'(\mathbf{a})$ tienen parte real negativa. Si U es el entorno que proporciona el Lema 4.2.8 y la condición inicial de ambas soluciones es $\mathbf{x}_0 \in U$, dada una tasa de promedio uniforme $(\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon))$ en un conjunto que contenga a U , se tiene que*

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\max\{\widehat{\Delta}(\varepsilon), \widehat{\eta}(\varepsilon)\}) \text{ en } [0, \infty).$$

Sin embargo, no se pueden relajar las hipótesis sobre los autovalores del sistema promediado. Las propiedades dinámicas del sistema promediado son necesarias para combinar la información en cada intervalo. No es suficiente con disponer de las cotas independientes de la condición inicial que proporciona la Proposición 4.2.6.

Ejemplo 4.2.12. Consideremos de nuevo la ecuación de Van der Pol del Ejemplo 3.3.1. La función del sistema en forma estándar es periódica, y por tanto, UKBM por la Proposición 4.1.2.

La función promediada es

$$\widehat{\mathbf{f}}(\bar{r}, \bar{\theta}) = \left(\bar{r} \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{r}^2}{8} \right), 0 \right)$$

con lo que su derivada es

$$\widehat{\mathbf{f}}'(\bar{r}, \bar{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\bar{r}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, en el punto crítico $\bar{r} = 2$ y $\bar{\theta} = 0$, tiene como autovalores -1 y 0 . En consecuencia, no verifica las hipótesis del Teorema 4.2.11, puesto que un autovalor tiene parte real nula.

En la Figura 4.2, se han representado la solución del sistema original y la del sistema promediado en las mismas condiciones que en la Figura 3.6, durante un intervalo temporal mayor. Como se puede apreciar, la diferencia entre las fases de las soluciones del sistema original y promediado parece incrementarse linealmente con el tiempo, con lo que no parece admitir una cota válida en todo $[0, \infty)$. Esto es debido al autovalor nulo, que hace que el flujo no sea exponencialmente contractivo.

Sin embargo, observemos que la amplitud sí verifica el Lema 4.2.8. Puesto que podemos aplicar la Proposición 4.2.6 y el Lema 4.2.9 a las componentes de las soluciones, es sencillo adaptar la demostración del Teorema 4.2.10 para demostrar que la diferencia entre la amplitud de la solución del problema original y la amplitud de la solución del problema promediado es $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en $[0, \infty)$, por la tasa de promedio uniforme de la Proposición 4.2.3.

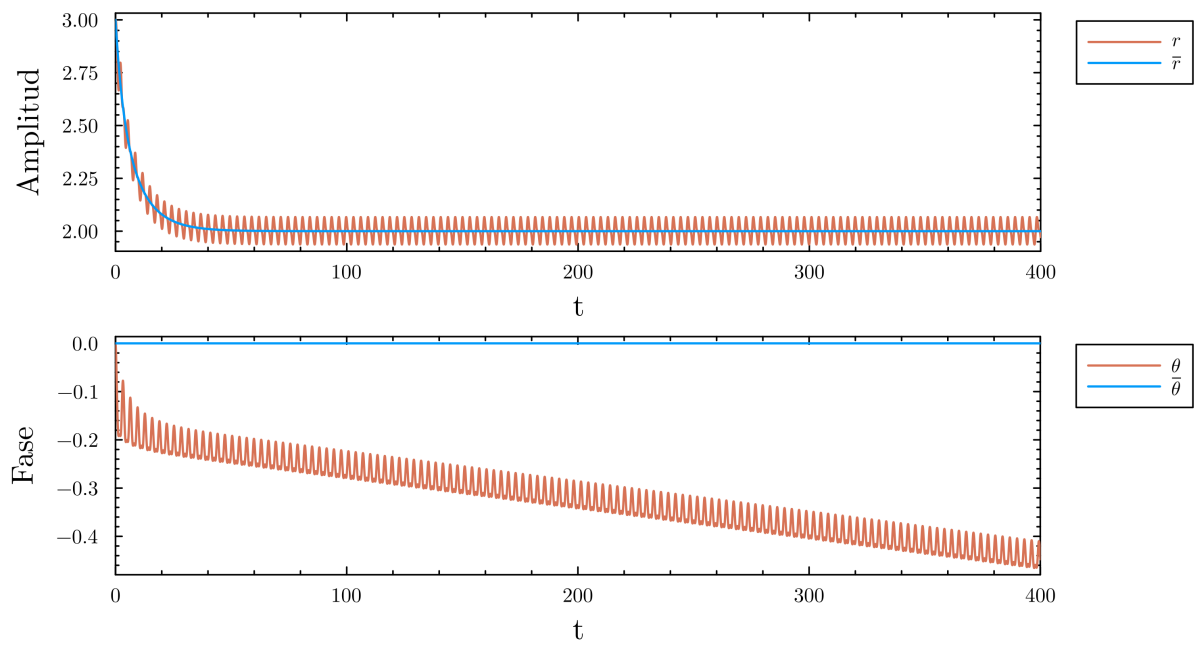


Figura 4.2: Solución exacta y promediada para la ecuación de Van der Pol.

Como se aprecia en el ejemplo, aunque se esté en condiciones de estabilidad y la función sea UKBM, o incluso periódica, si no se tiene la estabilidad asintótica que necesita el Teorema 4.2.10, no se puede garantizar una cota en intervalos no acotados.

Capítulo 5

Teoría de promedio para funciones periódicas

En el Capítulo 3 se ha visto cómo a partir del promedio se puede obtener un problema de Cauchy autónomo que proporciona una aproximación a la solución del problema de Cauchy original en condiciones muy generales. Sin embargo, es en el caso periódico cuando la teoría de promedio proporciona mejores resultados, alcanzando la cota óptima de $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

El propósito de este capítulo es probar esa misma cota para el caso periódico mediante una demostración diferente. La demostración que aquí se recoge es anterior a la que se proporcionó en el Capítulo 3 y se basa en el trabajo de Bogolyubov [4]. Es específica para funciones periódicas, se puede generalizar para orden mayor y permite entender la teoría de promedio de una forma alternativa.

5.1. Aproximación de primer orden

Consideremos la ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon). \quad (5.1)$$

con $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ continuas, periódicas de periodo T , y localmente lipschitzianas en la variable espacial. Supongamos además que $\mathbf{f}_1$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y que tanto la función como sus derivadas son globalmente lipschitzianas en la variable espacial y acotadas, y que $\mathbf{f}_2$ es acotada. Aunque puedan parecer hipótesis muy fuertes, al igual que hicimos en los capítulos anteriores, comprobaremos más adelante cómo pueden relajarse acondicionando el problema.

En el Capítulo 3 ya comprobamos que, en estas condiciones, $\mathbf{f}_1$ es KBM y tiene sentido considerar la ecuación diferencial $\mathbf{y}' = \varepsilon \widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{y})$. Nos planteamos ahora si existe una transformación $\mathbf{x} = \mathbf{U}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ de modo que la ecuación original (5.1) se transforme en una de la forma

$$\mathbf{z}' = \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{z}) + \varepsilon^2 \mathbf{g}_2(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \quad (5.2)$$

donde $\mathbf{g}_1$ es el promedio de $\mathbf{f}_1$. En estas condiciones nos referiremos a la ecuación (5.2) como ecuación promediada total.

Sin embargo, la ventaja de la ecuación promediada tal y como la planteábamos en el Capítulo 3 era que se obtenía una ecuación autónoma. Estamos interesados, por tanto, en la ecuación

$$\mathbf{y}' = \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{y}). \quad (5.3)$$

a la que nos referiremos como ecuación promediada truncada. Es esta ecuación con la que nos interesa comparar la solución del problema original, y con la que hemos estado trabajando en el Capítulo 3. La particularidad de esta demostración es trabajar con la ecuación promediada total como paso intermedio, a la que queremos llegar a través de un cambio de variable.

En primer lugar vamos a introducir la noción de una transformación próxima a la identidad.

Definición 5.1.1. Una transformación próxima a la identidad es una aplicación $\mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ de clase $\mathcal{C}^1$ definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0]$ de la forma

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \varepsilon),$$

con $\mathbf{u}$ acotada.

Se tiene que, para ε nulo, la transformación es la identidad y, en general, se tiene que $\mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) - \mathbf{x} = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Es decir, para ε pequeño, la transformación se asemeja a la identidad, de ahí el nombre.

A lo largo de esta sección usamos la transformación próxima a la identidad

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x} + \varepsilon \int_0^t \left(\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}) \right) ds. \quad (5.4)$$

En efecto, $\mathbf{U}$ es $\mathcal{C}^1$ por serlo $\mathbf{f}_1$, y el segundo término está acotado por estarlo $\mathbf{f}_1$, como se deduce del Capítulo 3. El objetivo es probar que la transformación $\mathbf{z} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ está bien definida y que convierte la ecuación original (5.1) en la ecuación promediada total (5.2).

A través de los siguientes resultados, vamos a ver que la relación $\mathbf{z} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ define un cambio de coordenadas. Para ello se tiene que comprobar que la correspondencia entre las variables $\mathbf{x}$ y $\mathbf{z}$ es invertible.

Lema 5.1.2. Sea $\mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ la transformación definida en (5.4). Entonces, $\mathbf{U}$ es periódica de periodo T y $\mathbf{u}$ es globalmente lipschitziana en la variable $\mathbf{x}$.

Demostración. En primer lugar, vamos a ver que $\mathbf{u}$ es periódica de periodo T , con lo que también lo es $\mathbf{U}$. Dado $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t+T, \mathbf{x}) &= \int_0^{t+T} \left(\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}) \right) ds \\ &= \int_0^T \left(\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}) \right) ds + \int_T^{T+t} \left(\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}) \right) ds. \end{aligned}$$

Sin embargo, como $\mathbf{f}_1$ es periódica de periodo T , por la Proposición 3.1.5, se tiene que

$$\int_0^T \left(\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}) \right) ds = T\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}) - \int_0^T \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}) ds = 0$$

Por tanto, por la periodicidad de $\mathbf{f}_1$ concluimos que

$$\mathbf{u}(t+T, \mathbf{x}) = \int_T^{T+t} \left(\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}) \right) ds = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}).$$

Veamos ahora la propiedad lipschitziana. Sea $L > 0$ la constante de Lipschitz para $\mathbf{f}_1$, dados $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, y $t \in \mathbb{R}$, que podemos suponer en $[0, T]$ por periodicidad, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{u}(t, \mathbf{x}_2)\| &\leq \int_0^t \left(\|\mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}_2)\| + \|\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}_1) - \widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}_2)\| \right) ds \\ &\leq \int_0^t \|\mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}_2)\| ds + \frac{t}{T} \int_0^T \|\mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}_2)\| ds \\ &\leq \int_0^T 2\|\mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}_2)\| ds \leq 2LT\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \end{aligned}$$

como queríamos probar. $\square$

Proposición 5.1.3. *Dado $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, existe $\varepsilon_0 > 0$ y una función $\mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ definida en $\mathbb{R} \times D \times [0, \varepsilon_0]$, periódica de periodo T y de clase $\mathcal{C}^1$ de modo que*

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{z}$$

y tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ fijos, la aplicación $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ es inyectiva en D . Además, $\mathbf{V}$ tiene la forma

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{z} + \varepsilon \mathbf{v}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$$

con $\mathbf{v}$ acotada.

Demostración. Consideremos la función $\mathbf{W}$ dada por

$$\mathbf{W}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{z}$$

definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^1$ y periódica de periodo T . Para cada punto se tiene que $\mathbf{W}(t, \mathbf{z}, \mathbf{z}, 0) = 0$ y que la derivada parcial $\mathbf{W}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{z}, \mathbf{z}, 0)$ es la matriz identidad. Por tanto, aplicando el Teorema de la Función Implícita en cada punto $\xi = (t, \mathbf{z}, 0)$ con $(t, \mathbf{z}) \in [0, T] \times \overline{D}$, se tiene que existe un entorno de ξ , $A_\xi \times B_\xi \times C_\xi$, con $A_\xi \subset \mathbb{R}$, $B_\xi \subset \mathbb{R}^n$ y $C_\xi \subset \mathbb{R}$ abiertos, y una única función de clase $\mathcal{C}^1$, $\mathbf{V}_\xi$, definida en $A_\xi \times B_\xi \times C_\xi$ con llegada en $\mathbb{R}^n$ de modo que $\mathbf{W}(t, \mathbf{V}_\xi(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \mathbf{z}, \varepsilon) = 0$. Es decir,

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{V}_\xi(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{V}_\xi(t, \mathbf{z}, \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{u}(t, \mathbf{V}_\xi(t, \mathbf{z}, \varepsilon)) = \mathbf{z}$$

para todo $(t, \mathbf{z}, \varepsilon) \in A_\xi \times B_\xi \times C_\xi$. Puesto que $[0, T] \times \overline{D}$ es compacto, existen $\xi_1, \dots, \xi_r$ de modo que

$$[0, T] \times \overline{D} \subset (A_{\xi_1} \times B_{\xi_1}) \cup \dots \cup (A_{\xi_r} \times B_{\xi_r}).$$

En particular, si denotamos $A = A_{\xi_1} \cup \dots \cup A_{\xi_r}$ y $B = B_{\xi_1} \cup \dots \cup B_{\xi_r}$, se tiene que $[0, T] \subset A$ y $D \subset B$.

Tomamos $\varepsilon_0 < 1/(2LT)$ de modo que $[0, \varepsilon_0] \subset C_{\xi_1} \cap \dots \cap C_{\xi_r}$. Dados $t \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, vamos a ver que la aplicación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ es inyectiva. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, se tiene que

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}_1, \varepsilon) = \mathbf{x}_1 + \varepsilon \mathbf{u}(t, \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2 + \varepsilon \mathbf{u}(t, \mathbf{x}_2) = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_2, \varepsilon)$$

y aplicando el lema previo concluimos que

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \varepsilon 2LT \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| < \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$

Por tanto, la aplicación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ es inyectiva y existe una inversa $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ definida en la imagen $\mathbf{U}(t, \mathbb{R}^n, \varepsilon)$. A continuación, vamos a probar que la inversa global $\mathbf{V}$ coincide con las inversas locales $\mathbf{V}_{\xi_i}$ en los entornos correspondientes. Por la periodicidad de $\mathbf{U}$, se tiene que $\mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{V}(t + T, \mathbf{z}, \varepsilon)$, con lo que es periódica de periodo T y podemos restringirnos a tiempos en $[0, T]$.

Dados $t \in [0, T]$, $\mathbf{z} \in D$, existe ξ_i de modo que $t \in A_{\xi_i}$ y $\mathbf{z} \in B_{\xi_i}$. Como $[0, \varepsilon_0] \subset C_{\xi_i}$, concluimos que

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{V}_{\xi_i}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{z} \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

con lo que $\mathbf{z} \in \mathbf{U}(t, \mathbb{R}^n, \varepsilon)$ y por la unicidad de la inversa, $\mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{V}_{\xi_i}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Concluimos que la función $\mathbf{V}$ está definida en $\mathbb{R} \times D \times [0, \varepsilon_0]$ y coincide localmente con las funciones $\mathbf{V}_{\xi_i}$. Por tanto, $\mathbf{V}$ es de clase $\mathcal{C}^1$.

Finalmente, puesto que $\mathbf{W}(t, \mathbf{z}, \mathbf{z}, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}, \mathbf{z} \in D$, se tiene que $\mathbf{V}(t, \mathbf{z}, 0) = \mathbf{z}$. Puesto que $\mathbf{V}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ podemos desarrollar en potencias de ε hasta orden 1 y concluimos que $\mathbf{V}$ tiene la forma

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{z} + \varepsilon \mathbf{v}(t, \mathbf{z}, \varepsilon).$$

Además, para cada t y ε fijos, se tiene que $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ es la inversa de $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$, con lo que

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{U}(t, \mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{z} + \varepsilon \mathbf{v}(t, \mathbf{z}, \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{u}(t, \mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon))$$

con lo que la acotación de $\mathbf{v}$ se deduce de la de $\mathbf{u}$. □

Por tanto, la relación $\mathbf{z} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ define un cambio de coordenadas cuya inversa se comporta de nuevo como una transformación próxima a la identidad. A continuación, vamos a ver que esta relación nos transforma la ecuación en otra autónoma hasta orden 1.

Proposición 5.1.4. *La transformación $\mathbf{z} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ transforma la ecuación original (5.1) en la ecuación promediada total (5.2). Además, con las condiciones impuestas a $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$, se tiene que $\mathbf{g}_2$ es acotada.*

Demostración. Derivando con respecto al tiempo la expresión $\mathbf{z} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$, y reemplazando $\mathbf{x}'$ usando (5.1), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{x}' + \varepsilon \mathbf{u}_t(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}_x(t, \mathbf{x}) \mathbf{x}' \\ &= \varepsilon (\mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}_t(t, \mathbf{x})) + \varepsilon^2 (\mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) + \mathbf{u}_x(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}_x(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Usando la transformación inversa, $\mathbf{x} = \mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$. El segundo sumando ya es de orden dos al sustituir $\mathbf{x}$ en función de $\mathbf{z}$, con lo que nos centramos en el primer sumando. Por ser $\mathbf{f}_1$ de clase $\mathcal{C}^1$, se puede desarrollar en potencias de ε hasta orden 1, de modo que se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon (\mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}_t(t, \mathbf{x})) &= \varepsilon (\mathbf{f}_1(t, \mathbf{z} + \varepsilon \mathbf{v}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)) + \mathbf{u}_t(t, \mathbf{z} + \varepsilon \mathbf{v}(t, \mathbf{z}, \varepsilon))) \\ &= \varepsilon (\mathbf{f}_1(t, \mathbf{z}) + \mathbf{u}_t(t, \mathbf{z})) + \varepsilon^2 \mathbf{h}(t, \mathbf{z}, \varepsilon) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{h}$ es la suma de los restos de Taylor de $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{u}_t$, y por tanto acotada por serlo $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{u}_t$. Ahora, como

$$\mathbf{u}_t(t, \mathbf{z}) = \widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{z}) - \mathbf{f}_1(t, \mathbf{z})$$

los sumandos $\mathbf{f}_1(t, \mathbf{z})$ se cancelan y el término de orden 1 es $\widehat{\mathbf{f}}_1$. Entonces, la transformación nos lleva la ecuación original (5.1) a una de la forma (5.2) con $\mathbf{g}_2$ igual a la suma de los restos de Taylor $\mathbf{h}$ y el resto de términos de orden mayor que 1 que aparecían antes.

Falta probar que $\mathbf{g}_2$ es acotada. Para ello, puesto que sabemos que $\mathbf{h}$ es acotada, vamos a comprobar que la suma

$$\mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) + \mathbf{u}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})\mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{u}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})\mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$$

lo es. Por hipótesis, $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ son acotadas, con lo que si probamos que $\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$ es acotada habremos terminado.

En primer lugar, observemos que las derivadas de $\mathbf{f}_1$ son globalmente lipschitzianas por hipótesis y periódicas de periodo T por serlo $\mathbf{f}_1$. En virtud de la Proposición 3.1.5, se tiene entonces que las derivadas de $\mathbf{f}_1$ son KBM. Por tanto, concluimos a partir del Corolario 3.1.14 que $\widehat{\mathbf{f}}_1$ es de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces, podemos aplicar el Teorema de Derivación Bajo el Signo de Integral (véase [2]) y concluimos que

$$\mathbf{u}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \left(\widehat{\mathbf{f}}_{1,\mathbf{x}}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_{1,\mathbf{x}}(s, \mathbf{x}) \right) ds$$

ya que la Proposición 3.1.13 nos permite afirmar que el promedio de las parciales de $\mathbf{f}_1$ coincide con las parciales del promedio.

Ahora bien, de la acotación de las parciales de $\mathbf{f}_1$ se deduce la acotación de la función $\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$, ya que entonces el integrando está acotado y si $M > 0$ es una cota para este, por la periodicidad de $\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$, se tiene que TM es una cota de la función para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\mathbf{u}_{\mathbf{x}}$ está acotada, y concluimos que $\mathbf{g}_2$ también. $\square$

Hemos conseguido un cambio de variables que convierte la ecuación (5.1) en la ecuación (5.2). Esta elección no es única, sin embargo, hay una particularidad que hace a la transformación (5.4) interesante. Observemos que $\mathbf{U}(0, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x}$ y como $\mathbf{U}$ es periódica de periodo T , se tiene que $\mathbf{U}(kT, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, se tiene que las soluciones de (5.1) y (5.2) con mismo dato inicial coinciden en múltiplos del periodo. Esto recibe el nombre de propiedad estroboscópica y nos referiremos a los múltiplos del periodo, donde coinciden las soluciones, como tiempos estroboscópicos.

A continuación, vamos a comprobar el teorema de la cota de error. Para ello primero vamos a demostrar una cota entre la solución de la ecuación promediada total y la promediada truncada.

Lema 5.1.5. *Sea $\mathbf{y}_{\varepsilon}(t)$ la solución de la ecuación promediada truncada (5.3) y $\mathbf{z}_{\varepsilon}(t)$ la solución de la ecuación promediada total (5.2), ambas con misma condición inicial. Se tiene que $\mathbf{y}_{\varepsilon}(t) - \mathbf{z}_{\varepsilon}(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

Demostración. Sea $\mathbf{x}_0$ la condición inicial, se tiene que

$$\mathbf{y}_{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \int_0^t \widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{y}_{\varepsilon}(s)) ds$$

y

$$\mathbf{z}_{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \int_0^t \left(\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{z}_{\varepsilon}(s)) + \varepsilon \mathbf{g}_2(s, \mathbf{z}_{\varepsilon}(s), \varepsilon) \right) ds.$$

Si M es una cota para $\mathbf{g}_2$, entonces,

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon \int_0^t \|\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{y}_\varepsilon(s)) - \widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{z}_\varepsilon(s))\| + \varepsilon^2 M t.$$

Ahora, como $\mathbf{f}_1$ es lipschitziana con constante $L > 0$, se tiene que $\widehat{\mathbf{f}}_1$ es lipschitziana con constante $L > 0$ y concluimos que

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon L \int_0^t \|\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| + \varepsilon^2 M t.$$

Por tanto, aplicando el Corolario 2.3.3 se deduce que

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon \frac{M}{L} (\exp(\varepsilon L t) - 1).$$

con lo que

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon \frac{M}{L} (e^L - 1) \quad \forall t \in [0, 1/\varepsilon],$$

es decir, $\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} . $\square$

Finalmente estamos en condiciones de volver a enunciar el teorema fundamental de la teoría de promedio para funciones periódicas para la aproximación de primer orden.

Teorema 5.1.6. *Sea $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ la solución de la ecuación original (5.3) y $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ la solución de la ecuación promediada truncada (5.3), ambas con la misma condición inicial. Se tiene que $\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

Demostración. Sea $\mathbf{y}(s)$ la solución de la ecuación promediada truncada en tiempo lento, la cual sabemos que no depende de ε . Al ser $\mathbf{y}(s)$ una función continua, se tiene que la órbita $\{\mathbf{y}(s) \in \mathbb{R}^n, s \in [0, 1]\}$ es compacta. Por tanto, existe un conjunto abierto y acotado D que la contiene. En particular, se tiene que $\mathbf{y}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}(t\varepsilon) \in D$ para todo $\varepsilon \in [0, 1/\varepsilon]$.

Por el lema previo, existe un $\varepsilon'_0 > 0$ suficientemente pequeño para el cual $\mathbf{z}_\varepsilon(t)$ está contenido en D para todo $t \in [0, 1/\varepsilon]$ siempre que $\varepsilon \in [0, \varepsilon'_0]$. Para este conjunto D , el cambio de variable dado por $\mathbf{U}$ está bien definido, en virtud de la Proposición 5.1.3, para $\varepsilon \in [0, \varepsilon''_0]$. Por tanto, tomando $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon'_0, \varepsilon''_0\}$, se tiene que

$$\mathbf{z}_\varepsilon(t) = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t), \varepsilon) = \mathbf{x}_\varepsilon(t) + \varepsilon \mathbf{u}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t)) \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

y como la función $\mathbf{u}$ es acotada, se tiene que $\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en $\mathbb{R}$.

Por la desigualdad triangular se tiene que

$$\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)\| \leq \|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| + \|\mathbf{z}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)\|.$$

y el teorema se deduce de la cota del otro término que proporciona el lema previo. $\square$

Como se puede ver se trata de un resultado muy similar al Corolario 3.2.9, y más adelante veremos cómo se pueden relajar las hipótesis de acotación de carácter Lipschitziano global acondicionando el problema igual que en el capítulo anterior. Sin embargo, lo que es intrínseco y necesario de esta demostración es el carácter derivable de la función. Aunque en el capítulo anterior vimos que no es necesario para el resultado, con las técnicas de transformaciones próximas a la identidad es necesario para garantizar que los cambios de variables estén bien definidos.

En la siguiente sección vamos a ver que es precisamente la regularidad de la función lo que nos permite construir aproximaciones mejores.

5.2. Aproximaciones de mayor orden

Consideremos en este caso la ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}) + \cdots + \varepsilon^k \mathbf{f}_k(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^{k+1} \mathbf{f}_{k+1}(t, \mathbf{x}, \varepsilon). \quad (5.5)$$

con $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_{k+1}$ continuas, periódicas de periodo T , y localmente lipschitzianas en la variable espacial. Supongamos además que para $i = 1, \dots, k$, se tiene que $\mathbf{f}_i$ es de clase $\mathcal{C}^{k+1-i}$ y que tanto la función como sus derivadas son globalmente lipschitzianas en la variable espacial y acotadas. Exigimos también que la función $\mathbf{f}_{k+1}$ sea acotada. Aunque puedan parecer unas hipótesis bastante artificiales, veremos en la siguiente sección que surgen de manera natural en muchos problemas.

El objetivo en esta sección es generalizar los resultados de la sección previa para esta nueva ecuación. Es decir, queremos encontrar un cambio de variable

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}_1(t, \mathbf{x}) + \cdots + \varepsilon^k \mathbf{u}_k(t, \mathbf{x}) \quad (5.6)$$

que sea una transformación próxima a la identidad y que transforme la ecuación original (5.5) en una ecuación promediada total de la forma

$$\mathbf{z}' = \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{z}) + \cdots + \varepsilon^k \mathbf{g}_k(\mathbf{z}) + \varepsilon^{k+1} \mathbf{g}_{k+1}(t, \mathbf{z}, \varepsilon). \quad (5.7)$$

De nuevo, como en el caso de orden 1, la ecuación promediada total no es autónoma, por tanto, interesa estudiar la ecuación promediada truncada

$$\mathbf{y}' = \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{y}) + \cdots + \varepsilon^k \mathbf{g}_k(\mathbf{y}). \quad (5.8)$$

El objetivo es encontrar expresiones para $\mathbf{g}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{g}_i, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{g}_k, \mathbf{u}_k$, en ese orden. Para ello, vamos a deducir ecuaciones que relacionen las funciones con las anteriores o derivadas de estas, que en primera instancia supondremos que existen. Posteriormente, comprobaremos que todos los pasos realizados están debidamente justificados.

Partiendo de la ecuación del cambio de variable

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \mathbf{u}_i(t, \mathbf{x})$$

y derivando respecto al tiempo, se tiene que

$$\mathbf{z}' = \mathbf{x}' + \sum_{i=1}^k \varepsilon^i (\mathbf{u}_{i,t}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}_{i,\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{x}').$$

A continuación, reemplazamos $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{z}'$ utilizando las ecuaciones (5.5) y (5.7), obteniendo

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \mathbf{g}_i(\mathbf{z}) + \varepsilon^{k+1} \mathbf{g}_{k+1}(t, \mathbf{z}, \varepsilon) \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \left(\mathbf{f}_i(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}_{i,t}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}_{i,\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \sum_{j=1}^{k-i} \varepsilon^j \mathbf{f}_j(t, \mathbf{x}) \right) + \varepsilon^{k+1} \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$ agrupa todos los términos con orden en ε mayor que k . Si ahora utilizamos el cambio de variable en el lado izquierdo de la ecuación y desarrollamos en potencias ε , concluimos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \left(\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{g}'_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{k-i} \varepsilon^j \mathbf{u}_j(t, \mathbf{x}) \right) + \varepsilon^{k+1} \tilde{\mathbf{g}}_{k+1}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \left(\mathbf{f}_i(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}_{i,t}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}_{i,\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \sum_{j=1}^{k-i} \varepsilon^j \mathbf{f}_j(t, \mathbf{x}) \right) + \varepsilon^{k+1} \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{g}}_{k+1}$ agrupa todos los términos con orden en ε mayor que k , así como los restos de los desarrollos de Taylor.

Por tanto, igualando por potencias de ε deducimos que para $r = 1, \dots, k$, se verifican las igualdades

$$\mathbf{g}_r(\mathbf{x}) + \sum_{i+j=r} \mathbf{g}'_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_r(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}_{r,t}(t, \mathbf{x}) + \sum_{i+j=r} \mathbf{u}_{i,\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}_j(t, \mathbf{x}).$$

Definimos las funciones

$$\mathbf{G}_r(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_r(t, \mathbf{x}) + \sum_{i+j=r} \mathbf{u}_{i,\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}_j(t, \mathbf{x}) - \sum_{i+j=r} \mathbf{g}'_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j(t, \mathbf{x}) \quad (5.10)$$

de modo que se verifica la siguiente ecuación, que recibe el nombre de ecuación homológica

$$\mathbf{g}_r(\mathbf{x}) - \mathbf{G}_r(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_{r,t}(t, \mathbf{x}). \quad (5.11)$$

Observemos que, dado que los índices i, j toman valores entre 1 y $r-1$, la definición de $\mathbf{G}_r$ depende de las funciones $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r$, de $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r-1}$ y sus parciales respecto a $\mathbf{x}$ y de las derivadas de $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{r-1}$. Por lo tanto, podemos construir de manera recurrente las funciones $\mathbf{g}_r$ como el promedio $\mathbf{G}_r$

$$\mathbf{g}_r(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{G}}_r(\mathbf{x}) \quad (5.12)$$

y $\mathbf{u}_r$, a partir de la ecuación homológica, como la integral del lado izquierdo de la ecuación (5.11)

$$\mathbf{u}_r(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \left(\widehat{\mathbf{G}}_r(\mathbf{x}) - \mathbf{G}_r(s, \mathbf{x}) \right) ds. \quad (5.13)$$

Por ejemplo, de la ecuación (5.10) se tiene que $\mathbf{G}_1(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x})$ con lo que de las ecuaciones (5.12) y (5.13) se tiene que $\mathbf{g}_1$ es el promedio de $\mathbf{f}_1$ y

$$\mathbf{u}_1(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \left(\widehat{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_1(s, \mathbf{x}) \right) ds, \quad (5.14)$$

exactamente igual que en el caso de aproximaciones de primer orden que estudiamos en la sección anterior.

La ecuación (5.13) no es la única solución de la ecuación homológica, ya que se podría sumar una función que únicamente dependiera de $\mathbf{x}$ y se obtendría otra función que verifica la ecuación (5.11). Sin embargo, la elección de (5.13) no es arbitraria, como veremos más adelante, nos proporcionará la misma propiedad estroboscópica que teníamos en el caso de primer orden.

Una vez obtenido un candidato para la transformación, vamos a repetir los pasos del caso de primer orden para comprobar que la transformación $\mathbf{U}$ está bien definida y determina un cambio de variable apropiado.

Lema 5.2.1. *Las funciones $\mathbf{G}_r$ y $\mathbf{u}_r$, definidas según (5.10) y (5.13) respectivamente, son periódicas de periodo T .*

Demostración. Razonamos por inducción. El caso $r = 1$ es inmediato pues ya hemos visto que las expresiones se reducen al caso de primer orden que hemos estudiado en el Lema 5.1.2.

Supongamos que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r-1}$ y $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_{r-1}$ son periódicos de periodo T , entonces, a partir de la ecuación (5.10) se deduce que $\mathbf{G}_r$ es periódica de periodo T puesto que $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ lo son y también $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r-1}$ por hipótesis de inducción, lo que a su vez implica que sus parciales respecto a las variables temporales lo son también. Ahora, se prueba que $\mathbf{u}_r$ es periódica de periodo T a partir de la ecuación (5.13) igual que se hizo en la demostración del Lema 5.1.2. $\square$

Lema 5.2.2. *Las funciones $\mathbf{G}_r, \mathbf{g}_r$ y $\mathbf{u}_r$, definidas según (5.10), (5.12) y (5.13), son de clase $\mathcal{C}^{k+1-r}$, y tanto las funciones como sus derivadas son globalmente lipschitzianas en la variable espacial y acotadas.*

Demostración. De nuevo, razonamos por inducción. En el caso $r = 1$, $\mathbf{G}_1 = \mathbf{f}_1$, con lo que es de clase $\mathcal{C}^k$ y por hipótesis tanto la función como sus derivadas tienen las propiedades requeridas. Puesto que todas las derivadas de $\mathbf{G}_1$ son periódicas y globalmente lipschitzianas, son KBM. Entonces, por el Corolario 3.1.14, concluimos que su promedio, $\mathbf{g}_1$ es de clase $\mathcal{C}^k$. Además, sabemos que las parciales de $\mathbf{g}_1$ son los promedios de las parciales de $\mathbf{G}_1$, luego de la acotación y la propiedad Lipschitziana de las derivadas de $\mathbf{G}_1$ se deducen las propiedades de las derivadas de $\mathbf{g}_1$. Para concluir el caso $r = 1$ estudiemos ahora $\mathbf{u}_1$. Es inmediato que es de clase $\mathcal{C}^k$ puesto que el integrando en (5.14) es una suma de funciones $\mathcal{C}^k$. Además, por el Teorema de Derivación Bajo el Signo de Integral, al derivar en la expresión (5.14), se tiene que

$$\frac{\partial^j \mathbf{u}_1}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}}(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \left(\left(\widehat{\frac{\partial^j \mathbf{f}_1}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}}} \right)(\mathbf{x}) - \frac{\partial^j \mathbf{f}_1}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}}(s, \mathbf{x}) \right) ds.$$

Por tanto, las propiedades sobre las derivadas de la función $\mathbf{u}_1$ se deducen a partir de las propiedades de las derivadas de la función $\mathbf{f}_1$.

Supongamos ahora que $\mathbf{G}_i, \mathbf{g}_i$ y $\mathbf{u}_i$ son de clase $\mathcal{C}^{k+1-i}$ para todo $i \in \{1, \dots, r-1\}$ y todas las funciones, así como sus derivadas son globalmente lipschitzianas y acotadas. En la expresión (5.10) se tiene que $\mathbf{f}_r$ es de clase $\mathcal{C}^{k+1-r}$, $\mathbf{u}_{i,x}$ es $\mathcal{C}^{k-i}$, $\mathbf{f}_j$ es $\mathcal{C}^{k+1-j}$, $\mathbf{g}'_i$ es $\mathcal{C}^{k-i}$ y $\mathbf{u}_j$ es $\mathcal{C}^{k+1-j}$. Por tanto, las funciones con menor regularidad involucradas en la expresión son $\mathbf{u}_{r-1,x}$ y $\mathbf{g}'_{r-1}$, que son de clase $\mathcal{C}^{k+1-r}$. Por tanto, $\mathbf{G}_r$ es de clase $\mathcal{C}^{k+1-r}$ por ser producto y suma de funciones con al menos esa regularidad. Además, puesto que las derivadas de $\mathbf{G}_r$ están dadas como suma y producto de las derivadas de las funciones $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_{r-1}$, $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{r-1}$ y $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r-1}$, todas ellas acotadas, necesariamente son también acotadas. En cuanto a la propiedad lipschitziana, teniendo en cuenta que todas las funciones involucradas en la expresión de las derivadas de $\mathbf{G}_r$ son acotadas y globalmente lipschitzianas, deducimos que también lo son las derivadas de $\mathbf{G}_r$.

Las propiedades de las funciones $\mathbf{g}_r$ y $\mathbf{u}_r$ se deducen inmediatamente a partir de las de $\mathbf{G}_r$ igual que en el caso $r = 1$. Por tanto, por inducción, queda probado para todo $r \in \{1, \dots, k\}$. $\square$

Lema 5.2.3. Sea $\mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ donde

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{u}_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}_2(t, \mathbf{x}) + \cdots + \varepsilon^{k-1} \mathbf{u}_k(t, \mathbf{x})$$

y $\mathbf{u}_r$ está definido de acuerdo con el procedimiento recursivo descrito anteriormente, y según la ecuación (5.13). Entonces, la aplicación $\mathbf{U}$ es una transformación próxima a la identidad, periódica de periodo T y además, fijado ε_0 , la función $\mathbf{u}$ está definida en $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0]$ y es globalmente lipschitziana en la variable espacial.

Demostración. Puesto que todos los términos en la expresión de $\mathbf{u}$ son al menos de clase $\mathcal{C}^1$, periódicos de periodo T y acotados, concluimos que $\mathbf{u}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, periódica de periodo T y acotada. Por tanto, $\mathbf{U}$ es una transformación próxima a la identidad periódica de periodo T .

Además, puesto que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ son globalmente lipschitzianas y las potencias de ε están acotadas en el intervalo $[0, \varepsilon_0]$, concluimos que la función $\mathbf{u}$ es globalmente lipschitziana. $\square$

El Lema 5.2.3 muestra que la transformación $\mathbf{U}$ así definida tiene las mismas propiedades que en el caso de orden 1, que se probaron en el Lema 5.1.2. Aunque en este caso $\mathbf{u}$ es también función de ε , se puede repetir la demostración de la Proposición 5.1.3 para concluir que, dado $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ la aplicación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ admite una inversa de clase $\mathcal{C}^1$ inyectiva en D que llamaremos $\mathbf{V}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ como en el caso de primer orden. Por tanto, la relación $\mathbf{z} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ define un cambio de coordenadas.

Finalmente estamos en condiciones de afirmar que la aplicación $\mathbf{U}$ es el cambio de coordenadas que nos interesa, como se enuncia en la siguiente proposición, análoga a la Proposición 5.1.4 del caso de primer orden.

Proposición 5.2.4. La transformación $\mathbf{z} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ transforma la ecuación original (5.5) en la ecuación promediada total (5.7). Además, con las condiciones impuestas a $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_{k+1}$, se tiene que $\mathbf{g}_{k+1}$ es acotada.

Demostración. Los cálculos que se hicieron al principio de la sección para construir las funciones $\mathbf{G}_r, \mathbf{g}_r$ y $\mathbf{u}_r$ muestran que el cambio de variable transforma la ecuación original (5.5) en la ecuación promediada total (5.7).

Para probar la acotación de $\mathbf{g}_{k+1}$ basta observar que en la ecuación (5.9) todos los términos salvo $\mathbf{g}_{k+1}$ y $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$ son acotados, ya sea por hipótesis o por el Lema 5.2.2. En consecuencia, basta probar que $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$ es acotada para terminar la demostración. Por definición, se tiene que

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{f}_{k+1}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=k-i+1}^k \varepsilon^{i+j-k+1} \mathbf{u}_{i,\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}_j(t, \mathbf{x}).$$

Puesto que todos los términos son acotados por hipótesis o por el Lema 5.2.2, concluimos que $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}$, y por tanto $\mathbf{g}_{k+1}$, son acotadas. $\square$

Como en el caso de primer orden, la periodicidad de la transformación se traduce en una propiedad estroboscópica para las soluciones de (5.5) y (5.7). Se tiene que $\mathbf{U}(kT, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, es decir, las variables $\mathbf{z}$ y $\mathbf{x}$ coinciden en los tiempos

estroboscópicos. Esta propiedad resultará fundamental en la aplicación numérica de estos resultados.

A continuación, vamos a probar los resultados de cota de error de las soluciones. Buscamos una cota de error que sea $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$. La cota de error entre la solución de la ecuación promediada truncada y la promediada total se recoge en el siguiente lema, análogo al Lema 5.1.5.

Lema 5.2.5. *Sea $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ la solución de la ecuación promediada truncada (5.8) y $\mathbf{z}_\varepsilon(t)$ la solución de la ecuación promediada total (5.7), ambas con misma condición inicial. Se tiene que $\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^k)$ en escala de tiempo ε^{-1} .*

Demostración. Sea $\mathbf{x}_0$ la condición inicial, se tiene que

$$\mathbf{y}_\varepsilon(t) = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \int_0^t (\mathbf{g}_1(\mathbf{y}_\varepsilon(s)) + \cdots + \varepsilon^{k-1} \mathbf{g}_k(\mathbf{y}_\varepsilon(s))) ds$$

y

$$\mathbf{z}_\varepsilon(t) = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \int_0^t (\mathbf{g}_1(\mathbf{z}_\varepsilon(s)) + \cdots + \varepsilon^{k-1} \mathbf{g}_k(\mathbf{z}_\varepsilon(s)) + \varepsilon^k \mathbf{g}_{k+1}(s, \mathbf{z}_\varepsilon(s), \varepsilon)) ds.$$

Fijamos $\varepsilon_0 > 0$, entonces, si $L_i > 0$ es una constante de Lipschitz para $\mathbf{g}_i$, se tiene que $L = L_1 + \varepsilon_0 L_2 + \cdots + \varepsilon_0^{k-1} L_k > 0$ es una constante de Lipschitz para $\mathbf{g}_1 + \cdots + \varepsilon^{k-1} \mathbf{g}_k$ siempre que $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Sea $M > 0$ una cota para $\mathbf{g}_{k+1}$, entonces

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon L \int_0^t \|\mathbf{y}_\varepsilon(s) - \mathbf{z}_\varepsilon(s)\| ds + \varepsilon^{k+1} M t$$

y aplicando el Corolario 2.3.3 concluimos que

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon^k \frac{M}{L} (\exp(\varepsilon L t) - 1).$$

Por tanto,

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon^k \frac{M}{L} (e^L - 1) \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], t \in [0, 1/\varepsilon],$$

es decir, $\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^k)$ en escala de tiempo ε^{-1} . $\square$

Sin embargo, a diferencia del caso de primer orden, la aproximación de la solución no nos la proporciona la ecuación promediada truncada (5.8). Puesto que

$$\mathbf{z}_\varepsilon(t) = \mathbf{x}_\varepsilon(t) + \varepsilon \mathbf{u}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t), \varepsilon),$$

a priori tan solo podemos garantizar que $\mathbf{z}_\varepsilon(t)$ es una aproximación de primer orden a $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$. Por tanto, aunque $\mathbf{y}_\varepsilon(t)$ sea una aproximación de orden k a $\mathbf{z}_\varepsilon(t)$, no podemos garantizar que lo sea para la solución original. Para obtener una aproximación adecuada tenemos que deshacer el cambio de variable.

Lema 5.2.6. *Sea*

$$\tilde{\mathbf{U}}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}_1(t, \mathbf{x}) + \cdots + \varepsilon^{k-1} \mathbf{u}_{k-1}(t, \mathbf{x}).$$

Dado $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, existe $\varepsilon_0 > 0$ y $\tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ definida en $\mathbb{R} \times D \times [0, \varepsilon_0]$, periódica de periodo T , de clase $\mathcal{C}^1$ y globalmente lipschitziana en la variable $\mathbf{z}$, de modo que para cada $t \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ la aplicación $\mathbf{z} \mapsto \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ es inyectiva en D y se verifica que $\tilde{\mathbf{U}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{z}$.

Demostración. La aplicación $\tilde{\mathbf{U}}$, al igual que $\mathbf{U}$, por el Lema 5.2.3, es una transformación próxima a la identidad y periódica de periodo T . Además, definiendo

$$\tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{u}_1(t, \mathbf{x}) + \cdots + \varepsilon^{k-2} \mathbf{u}_{k-1}(t, \mathbf{x}),$$

se tiene que $\tilde{\mathbf{U}}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x} + \varepsilon \tilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ con $\tilde{\mathbf{u}}$, definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0]$, y globalmente lipschitziana en la variable espacial. Sabemos que, en estas condiciones, dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, existe un $\varepsilon_0 > 0$ y una función $\tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ definida en $\mathbb{R} \times D \times [0, \varepsilon_0]$, periódica de periodo T y de clase $\mathcal{C}^1$ de modo que

$$\tilde{\mathbf{U}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{z} \quad (5.15)$$

y con las condiciones enunciadas, salvo por la propiedad lipschitziana. Para demostrar que $\tilde{\mathbf{V}}$ es globalmente lipschitziana en la variable $\mathbf{z}$, puesto que es de clase $\mathcal{C}^1$, basta probar que las derivadas direccionales están acotadas. Es decir, vamos a comprobar que la norma matricial de la derivada, $\|\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)\|$, está acotada en $\mathbb{R} \times D \times [0, \varepsilon_0]$.

Derivando respecto de $\mathbf{z}$ en la ecuación (5.15), se tiene que

$$\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon) \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{I},$$

donde $\mathbf{I}$ denota la matriz identidad de rango n . Además, sabemos que

$$\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon) = \mathbf{I} + \varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon),$$

donde $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon)$ es una matriz con entradas acotadas por el Lema 5.2.2 y, por tanto, tiene norma acotada. En consecuencia, tomando ε_0 suficientemente pequeño se puede garantizar que

$$\|\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon)\| = \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon)\| < 1$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{z} \in D$ y $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Es un resultado conocido de teoría de operadores que, en este caso, se tiene que

$$\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon) \right)^i.$$

Se puede encontrar una demostración en [19].

Puesto que la inversa es precisamente $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$, concluimos que

$$\|\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left\| \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon) \right\|^i = \frac{1}{1 - \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}, \varepsilon), \varepsilon)\|}.$$

En consecuencia, las derivadas direccionales de $\tilde{\mathbf{V}}$ están acotadas y la función es globalmente lipschitziana en la variable espacial. $\square$

Es la función $\tilde{\mathbf{V}}$ la que vamos a emplear para deshacer el cambio de variable y obtener la aproximación que buscamos. Si definimos

$$\boldsymbol{\xi}_{\varepsilon}(t) = \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{y}_{\varepsilon}(t), \varepsilon), \quad (5.16)$$

se tiene el siguiente teorema de cota de error.

Teorema 5.2.7. *Sea $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ la solución de la ecuación original (5.5) y sea $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(t)$ la aproximación construida a partir de la solución de la ecuación promediada truncada (5.8), con misma condición inicial, y transformada por la ecuación (5.16). Entonces,*

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{\xi}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^k)$$

en escala de tiempo ε^{-1} .

Demostración. Sea $\mathbf{y}(s/\varepsilon)$ la solución de la ecuación $\mathbf{y}' = \mathbf{g}_1(\mathbf{y})$, es decir, la solución del primer término de la ecuación promediada en tiempo lento. Puesto que la función $\mathbf{g}_1$ es globalmente lipschitziana, la solución está definida en todo $\mathbb{R}$, en particular, está definida en $[0, 1]$. Al ser $\mathbf{y}$ continua, la órbita $\{\mathbf{y}(s) \in \mathbb{R}^n, s \in [0, 1]\}$ es compacta. Tomamos un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado que contenga la órbita de la solución.

Nuestro objetivo, como en el Teorema 5.1.6, es demostrar que, para ε suficientemente pequeño, las órbitas de las soluciones de las ecuaciones (5.5), (5.7) y (5.8) están contenidas en D . En primer lugar, consideremos las soluciones de la ecuación promediada truncada. En tiempo lento, se tiene que $\mathbf{y}_\varepsilon(s/\varepsilon)$ es solución de la ecuación

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}_1(\mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{g}_2(\mathbf{y}) + \cdots + \varepsilon^{k-1} \mathbf{g}_k(\mathbf{y}).$$

Por tanto, por la Proposición 2.4.7, se tiene que $\mathbf{y}(s/\varepsilon) - \mathbf{y}_\varepsilon(s/\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo 1. En tiempo rápido, se tiene que $\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} .

Se tiene que

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\| \leq \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t)\| + \|\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t)\|$$

donde el primer término es $\mathcal{O}(\varepsilon)$ y el segundo término es $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ por el Lema 5.2.5. En consecuencia, $\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} .

En consecuencia, existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que $\mathbf{y}_\varepsilon(t), \mathbf{z}_\varepsilon(t) \in D$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ y $t \in [0, 1/\varepsilon]$. Supongamos además que tanto las transformaciones inversas $\mathbf{V}$ y $\tilde{\mathbf{V}}$ están bien definidas en $\mathbb{R} \times D \times [0, \varepsilon_0]$, lo cual es posible si se toma ε_0 suficientemente pequeño, como se hizo en la demostración del Lema 5.1.6.

Para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, se tiene que

$$\mathbf{z}_\varepsilon(t) = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t), \varepsilon)$$

y, al ser $\tilde{\mathbf{V}}$ la inversa de $\tilde{\mathbf{U}}$, se da la igualdad

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \tilde{\mathbf{V}}(t, \tilde{\mathbf{U}}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t), \varepsilon), \varepsilon).$$

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{\xi}_\varepsilon(t)\| &= \|\tilde{\mathbf{V}}(t, \tilde{\mathbf{U}}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t), \varepsilon), \varepsilon) - \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{y}_\varepsilon(t), \varepsilon)\| \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{V}}(t, \tilde{\mathbf{U}}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t), \varepsilon), \varepsilon) - \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{U}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t), \varepsilon), \varepsilon)\| + \|\tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{z}_\varepsilon(t), \varepsilon) - \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{y}_\varepsilon(t), \varepsilon)\|. \end{aligned}$$

Ahora bien, $\mathbf{z}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^k)$ por el Lema 5.2.5, y

$$\|\mathbf{U}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t), \varepsilon) - \tilde{\mathbf{U}}(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t), \varepsilon)\| = \varepsilon^k \|\mathbf{u}_k(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t))\|$$

con $\mathbf{u}_k$ acotado, luego es $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ en $\mathbb{R}$. Puesto que, por el Lema 5.2.6, $\tilde{\mathbf{V}}$ es lipschitziana en la variable espacial, concluimos que $\|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{\xi}_\varepsilon(t)\|$ está acotado por una suma de términos que son $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ en escala de tiempo ε^{-1} . En consecuencia, $\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{\xi}_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^k)$ en escala de tiempo ε^{-1} . $\square$

En el caso de primer orden, cuando $k = 1$, la transformación $\tilde{\mathbf{U}}$ es la identidad, con lo que $\tilde{\mathbf{V}}$ también lo es y $\boldsymbol{\xi}_\varepsilon(t) = \mathbf{y}_\varepsilon(t)$. Por tanto, el Teorema 5.1.6 es un caso particular del Teorema 5.2.7 para $k = 1$.

Capítulo 6

Aplicaciones

En este capítulo, vamos a estudiar dos aplicaciones de la teoría desarrollada hasta ahora. En primer lugar realizaremos un estudio teórico del péndulo de Kapitza, un péndulo invertido sometido a una rápida vibración de su eje, obteniendo su sistema promediado de segundo orden. Posteriormente, estudiaremos cómo se pueden integrar de manera eficiente este tipo de sistemas por métodos numéricos que no requieren calcular analíticamente el sistema promediado.

6.1. El péndulo de Kapitza

Consideremos la situación representada en la Figura 6.1. Se trata de un péndulo formado por una barra rígida con una masa en su extremo en la que el punto de apoyo se mueve de acuerdo a una función del tiempo $y_0(t)$.

En primer lugar, vamos a deducir las ecuaciones que describen el movimiento del péndulo de acuerdo con la mecánica newtoniana y estudiar si la teoría de promedio para funciones periódicas es aplicable a este caso. Posteriormente, se ejecutarán algunas simulaciones para ciertos valores de los parámetros involucrados, con el fin de estudiar el comportamiento de las cotas dadas en el capítulo anterior cuando ε disminuye.

La posición del extremo es

$$(x, y) = (l \sin(\theta), y_0(t) + l \cos(\theta)),$$

con lo que la velocidad es

$$(x', y') = (l \cos(\theta)\theta', y_0'(t) - l \sin(\theta)\theta')$$

y la aceleración

$$(x'', y'') = (l \cos(\theta)\theta'' - l \sin(\theta)(\theta')^2, y_0''(t) - l \sin(\theta)\theta'' - l \cos(\theta)(\theta')^2).$$

Las fuerzas que actúan sobre el extremo del péndulo son la gravedad y la tensión de la barra F_t . Además, puesto que la barra es rígida, no hay aceleración en el sentido de esta, con lo que necesariamente $F_t = mg \cos(\theta)$. Por tanto, la fuerza total que actúa en el extremo de la barra es

$$(F_t \sin(\theta), F_t \cos(\theta) - mg) = mg \sin(\theta)(\cos(\theta), -\sin(\theta))$$

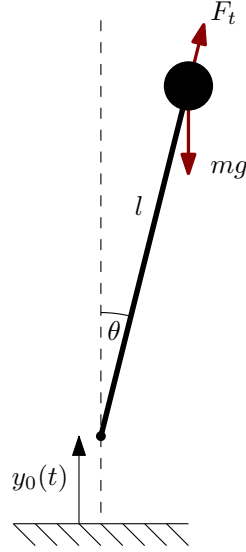


Figura 6.1: Péndulo de Kapitza

Si suponemos la masa de la barra despreciable frente a la masa en el extremo, las ecuaciones del movimiento, de acuerdo con la mecánica newtoniana, estarán dadas por la fuerza total que actúa en la masa del extremo igualada a la masa por la aceleración. En consecuencia, simplificando la masa, las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} l \cos(\theta) \theta'' - l \sin(\theta) (\theta')^2 &= g \sin(\theta) \cos(\theta) \\ y_0''(t) - l \sin(\theta) \theta'' - l \cos(\theta) (\theta')^2 &= -g \sin(\theta)^2. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por $\cos(\theta)$ y la segunda por $\sin(\theta)$ y restando ambas se obtiene

$$l \theta'' = (g + y_0''(t)) \sin(\theta). \quad (6.1)$$

La ecuación (6.1) describe por completo el comportamiento del péndulo, que está perfectamente determinado por el valor del ángulo θ .

Cuando la aceleración de la base del péndulo es nula, es decir, cuando el péndulo se mueve en un marco de referencia inercial, el movimiento no se ve afectado y el sistema se comporta como un péndulo simple. En este caso, el sistema es autónomo y sabemos que el punto $\theta = 0$ se corresponde con un punto de equilibrio inestable. Consideremos ahora la situación $y_0(t) = A f(\omega t)$, donde f es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ periódica que toma valor máximo 1, y A y ω son constantes positivas. En esta situación estamos sometiendo el punto de apoyo del péndulo a una oscilación de periodo T con amplitud A y frecuencia ω . En estas condiciones, Kapitza [18] estudió la estabilidad del equilibrio $\theta = 0$. Es por esto que el sistema representado en la Figura 6.1 se conoce usualmente como péndulo de Kapitza.

Sin embargo, resulta más realista suponer que existe rozamiento en el punto de giro del péndulo. Un buen modelo es asumir este rozamiento proporcional a la velocidad de giro, con lo que la ecuación del movimiento resultaría ser

$$l \theta'' = (g + y_0''(t)) \sin(\theta) - \lambda \theta', \quad (6.2)$$

con λ una constante positiva. Vamos a ver, utilizando teoría de promedio, que el péndulo de Kapitza con rozamiento permanece próximo a la posición vertical para amplitud A suficientemente pequeña y frecuencia de las oscilaciones ω suficientemente grande.

En primer lugar, puesto que estamos interesados en variar la frecuencia de las oscilaciones, nos interesa escribir la ecuación (6.2) en tiempo $\tau = \omega t$. Entonces, (6.2) se transforma en

$$l \frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \left(\frac{g}{\omega^2} + A f''(\tau) \right) \sin(\theta) - \frac{\lambda}{\omega} \frac{d\theta}{d\tau}$$

y el término que depende del tiempo tiene periodo T independientemente de las constantes involucradas. Por tanto, esta es la escala natural de tiempo para el problema, y a partir de ahora se denotará en un abuso de notación la derivada respecto de τ igual que la derivada respecto de t , entendiendo en todo momento que estamos trabajando en la nueva escala de tiempo. Además, si denotamos $\varepsilon = A/l$, $k^2 = gl/(\omega^2 A^2)$ y $\gamma = \lambda/(\omega A)$, la ecuación a estudiar es

$$\theta'' = (\varepsilon^2 k^2 + \varepsilon f''(\tau)) \sin(\theta) - \varepsilon \gamma \theta'. \quad (6.3)$$

A continuación, para aplicar la teoría de promedio, tenemos que reescribir la ecuación (6.3) como un sistema de primer orden. Denotando $\theta' = \varepsilon p$, se tiene que

$$\begin{cases} \theta' = \varepsilon p \\ p' = (\varepsilon k^2 + f''(\tau)) \sin(\theta) - \varepsilon \gamma p \end{cases} \quad (6.4)$$

es un sistema de primer orden equivalente a (6.3). Como es habitual en teoría de promedio, hay que pensar en ε como un parámetro que toma valores pequeños. Por tanto, conviene notar que, de hecho, la pequeña vibración del punto de apoyo del péndulo no actúa como una pequeña perturbación del sistema sino que, en este ejemplo, predomina sobre el movimiento natural del péndulo, que es el que está multiplicado por ε .

Como veremos más adelante, para que el péndulo se estabilice, es necesario que el valor de ω sea grande, por lo que, aunque $y_0(t)$ sea pequeño, el término $y_0''(t) = A\omega^2 f''(\omega t)$ en la ecuación (6.2) domina sobre g .

Para pasar el sistema (6.4) a forma estándar, empleamos el cambio de variable

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi + \varepsilon f(\tau) \sin(\varphi) \\ p &= \Omega + f'(\tau) \sin(\varphi), \end{aligned} \quad (6.5)$$

como sugiere Bogolyubov en su libro [4], y que está bien definido como se comprueba de manera similar a como se hizo con la Proposición 5.1.3.

Derivando la primera ecuación de (6.5) e igualando con la primera ecuación de (6.4), se obtiene

$$\theta' = \varepsilon p = \varphi' + \varepsilon f'(\tau) \sin(\varphi) + \varepsilon f(\tau) \cos(\varphi) \varphi'.$$

Sustituyendo la expresión para p de (6.5) y reordenando la expresión se obtiene que

$$\varphi' = \frac{\varepsilon \Omega}{1 + \varepsilon f(\tau) \cos(\varphi)}.$$

Siempre que $\varepsilon < 1$, podemos desarrollar en serie de potencias la fracción anterior y se tiene que

$$\varphi' = \varepsilon \Omega \sum_{i=0}^{\infty} (-\varepsilon f(\tau) \cos(\varphi))^i. \quad (6.6)$$

Para obtener una expresión para Ω' , derivamos la segunda ecuación de (6.5) e igualamos con la segunda ecuación de (6.4). Haciendo esto, se llega a la igualdad

$$p' = (\varepsilon k^2 + f''(\tau)) \sin(\theta) - \varepsilon \gamma p = \Omega' + f''(\tau) \sin(\varphi) + f'(\tau) \cos(\varphi) \varphi'.$$

Sustituyendo las expresiones para θ y p dadas por (6.5), y desarrollando por Taylor en torno a $\varepsilon = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}\Omega' &= f''(\tau)(\sin(\theta) - \sin(\varphi)) + \varepsilon k^2 \sin(\theta) - f'(\tau) \cos(\varphi) \varphi' - \varepsilon \gamma (\Omega + f'(\tau) \sin(\varphi)) \\ &= (f''(\tau) + \varepsilon k^2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \sin^{(i)}(\varphi) (\varepsilon f(\tau) \sin(\varphi))^i + \varepsilon k^2 \sin(\varphi) \\ &\quad - f'(\tau) \cos(\varphi) \varepsilon \Omega \sum_{i=0}^{\infty} (-\varepsilon f(\tau) \cos(\varphi))^i - \varepsilon \gamma (\Omega + f'(\tau) \sin(\varphi)).\end{aligned}\tag{6.7}$$

Como se puede observar, el sistema en las variables (φ, Ω) está en forma estándar. Además, puesto que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$, periódica y acotada, todos los términos del lado derecho de las ecuaciones (6.6) y (6.7) son $\mathcal{C}^\infty$, acotados y globalmente lipschitzianos, así como sus derivadas. Por tanto, tomando suficientes sumandos, se pueden obtener aproximaciones de orden tan alto como se quiera siguiendo el procedimiento descrito anteriormente.

Vamos a obtener la ecuación diferencial que proporciona la aproximación de primer orden. Sabemos que estará dada por el promedio de los términos que son de orden 1 en ε . Por tanto, el sistema promediado de primer orden estará dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} \bar{\varphi}' = \varepsilon \bar{\Omega} \\ \bar{\Omega}' = \varepsilon (a \sin(\bar{\varphi}) \cos(\bar{\varphi}) + k^2 \sin(\bar{\varphi}) - b(\cos(\bar{\varphi}) \bar{\Omega} + \sin(\bar{\varphi})) - \gamma \bar{\Omega}), \end{cases}$$

donde a es el promedio de $f(\tau)f''(\tau)$ y b es el promedio de $f'(\tau)$. Ahora bien,

$$b = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S f'(\tau) d\tau = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{f(S) - f(0)}{S},$$

y como f está acotada, concluimos que $b = 0$.

En consecuencia, el sistema promediado truncado, que proporciona la aproximación de primer orden es

$$\begin{cases} \bar{\varphi}' = \varepsilon \bar{\Omega} \\ \bar{\Omega}' = \varepsilon (a \sin(\bar{\varphi}) \cos(\bar{\varphi}) + k^2 \sin(\bar{\varphi}) - \gamma \bar{\Omega}), \end{cases}\tag{6.8}$$

que se puede escribir también como

$$\bar{\varphi}'' = \varepsilon^2 (k^2 + a \cos(\bar{\varphi})) \sin(\bar{\varphi}) - \varepsilon \gamma \bar{\varphi}'.$$

Es decir, la función promediada es

$$\widehat{\mathbf{f}}_1(\bar{\varphi}, \bar{\Omega}) = \begin{pmatrix} \bar{\Omega} \\ a \sin(\bar{\varphi}) \cos(\bar{\varphi}) + k^2 \sin(\bar{\varphi}) - \gamma \bar{\Omega} \end{pmatrix}.\tag{6.9}$$

Por tanto, con independencia del valor de a , el sistema promediado (6.8) tiene un punto crítico en $\bar{\varphi} = \bar{\Omega} = 0$. Además, puesto que

$$\widehat{\mathbf{f}}_1'(\bar{\varphi}, \bar{\Omega}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a \cos^2(\bar{\varphi}) - a \sin^2(\bar{\varphi}) + k^2 \cos(\bar{\varphi}) & -\gamma \end{pmatrix},$$

los autovalores de $\widehat{\mathbf{f}}'(0, 0)$ son

$$-\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + k^2 + a},$$

con lo que ambos tienen parte real negativa si y solo si

$$k^2 + a < 0. \quad (6.10)$$

En esta situación, el Lema 4.2.8 permite garantizar que el punto $\bar{\varphi} = \bar{\Omega} = 0$ es asintóticamente estable para el sistema promediado (6.8) y, por el Teorema 4.2.11, se puede afirmar también que, para ε suficientemente pequeño, tanto φ como Ω permanecen en un entorno de cero. En consecuencia, a partir de (6.5), se tiene que el péndulo, en estas condiciones, se mantiene en posición vertical.

Vamos a ver que la condición (6.10) se puede satisfacer para cualquier ε siempre que se tome ω suficientemente grande. En primer lugar, puesto que $k^2 > 0$, la condición no podrá satisfacerse si $a \geq 0$. Vamos a ver que no puede ser el caso. En efecto, recordemos que a es el promedio de $f(\tau)f''(\tau)$, con lo que integrando por partes se tiene que

$$a = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau)f''(\tau)d\tau = \frac{1}{T} f(\tau)f'(\tau) \Big|_0^T - \frac{1}{T} \int_0^T f'(\tau)^2 d\tau$$

y, como tanto $f(\tau)$ como $f'(\tau)$ son periódicas de periodo T , se tiene que

$$a = -\frac{1}{T} \int_0^T f'(\tau)^2 d\tau < 0.$$

En consecuencia, puesto que $k^2 = gl/(\omega^2 A^2)$, para cada ε fijo, se puede tomar ω suficientemente grande como para que $k^2 < -a$. En esta situación, como se ha justificado antes, se tiene garantizado que para condiciones iniciales suficientemente cercanas a la posición vertical, el péndulo no caerá en el futuro.

Esto justifica el comportamiento cualitativo que se observa para este sistema físico en la realidad, pero no permite decir nada acerca de la estabilidad del punto crítico del sistema original, que es no autónomo. En general, nada de lo que hemos estudiado en este trabajo permite justificar que las propiedades de estabilidad del sistema promediado se hereden en el sistema original. De hecho, como vimos en el Ejemplo 4.2.12, un sistema promediado puede presentar un punto de equilibrio estable y, sin embargo, la solución del sistema original con una condición inicial próxima puede no estar acotada.

La estabilidad del péndulo de Kapitza es un problema ampliamente estudiado en la literatura y, aunque no es el objetivo de este trabajo, merece la pena mencionar algunas referencias concretas donde se aborda este problema. Para estudiar la estabilidad del péndulo de Kapitza con rozamiento se puede utilizar teoría de promedio junto con argumentos de soluciones periódicas, como se hace en [28]. También es posible estudiar la estabilidad de la ecuación linealizada utilizando teoría de Floquet o resultados sobre la ecuación de Hill y concluir la estabilidad del sistema original por el método de la primera aproximación de Lyapunov [29]. En el caso del péndulo de Kapitza sin rozamiento, para concluir la estabilidad del sistema original a partir del sistema linealizado se pueden utilizar resultados de la teoría KAM, como se detalla en [9] o en [23].

A continuación, vamos a realizar algunas simulaciones numéricas para comprobar cómo la solución del sistema (6.8) aproxima la solución del sistema dado por las ecuaciones (6.6)

y (6.7). Puesto que las ecuaciones (6.6) y (6.7) están escritas en función de sumatorios con infinitos términos, no es posible integrar con métodos convencionales el sistema en las variables φ y Ω en el ordenador. Por tanto, para integrar numéricamente el sistema original se emplea el siguiente sistema de cuatro ecuaciones en cuatro variables, que se obtiene combinando las ecuaciones diferenciales (6.4) para las variables θ y p con las ecuaciones diferenciales que satisfacen las variables φ y Ω antes de hacer los desarrollos de Taylor,

$$\begin{cases} \theta' = \varepsilon p \\ p' = (\varepsilon k^2 + f''(\tau)) \sin(\theta) - \varepsilon \gamma p \\ \varphi' = \frac{\varepsilon \Omega}{1 + \varepsilon f(\tau) \cos(\varphi)} \\ \Omega' = f''(\tau)(\sin(\theta) - \sin(\varphi)) + \varepsilon k^2 \sin(\theta) \\ \quad - \frac{\varepsilon f'(\tau) \cos(\varphi) \Omega}{1 + \varepsilon f(\tau) \cos(\varphi)} - \varepsilon \gamma (\Omega + f'(\tau) \sin(\varphi)). \end{cases} \quad (6.11)$$

Tomamos como valores de los parámetros $l = 0,16$, $A = 0,04$, $g = 9,81$, $\omega = 60$ y $\lambda = 0,12$, con lo que $\varepsilon = 0,25$, $k^2 = 0,2725$ y $\gamma = 0,05$. Para simular la evolución del péndulo de Kapitza supondremos que $f(\tau) = \sin(\tau)$, que es el caso en el que se centraron tanto Kapitza en [18] como Bogolyubov en [4]. En este caso, el valor de la constante a es

$$a = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\tau) d\tau = -\frac{\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2}$$

y la condición de estabilidad (6.10) es $\omega^2 A^2 > 2gl$, o $k^2 < 1/2$, con lo que con esta elección de parámetros, el sistema promediado es estable.

Para integrar el sistema (6.11) se ha empleado el algoritmo Vern9 con una tolerancia de 10^{-8} y un tiempo de integración $\frac{6\pi}{\varepsilon \sqrt{1/2 - k^2}}$, que se corresponde con aproximadamente 3 oscilaciones completas del sistema promediado. En la Figura 6.2 se representan los resultados de la integración numérica del sistema (6.11), con condición inicial $\theta(0) = 0,1$, $p(0) = 0$, $\varphi(0) = 0,1$ y $\Omega(0) = -\sin(0,1)$, donde las condiciones iniciales para las variables φ y Ω se han obtenido a partir de las condiciones iniciales de θ y p mediante el cambio de variable (6.5). En la gráfica superior se representan las variables de posición θ (en azul) y φ (en naranja), mientras que en la gráfica inferior se representan las variables de momento p (en azul) y Ω (en naranja). Puesto que el sistema en las variables φ y Ω está en forma estándar, este es el sistema al que podemos aplicar teoría de promedio.

A continuación integramos el sistema promediado (6.8), con las mismas condiciones iniciales y usando también el algoritmo Vern9 con una tolerancia de 10^{-8} y el mismo tiempo de integración. Los resultados de integrar el sistema promediado se representan, junto con la solución en las variables φ y Ω del sistema original, en la parte izquierda de la Figura 6.3. A su derecha, en escala doblemente logarítmica, aparece la diferencia entre las soluciones del sistema original y del promediado en el intervalo $[0, \frac{6\pi}{\varepsilon \sqrt{1/2 - k^2}}]$, estimada por evaluaciones cada $2\pi/10$ unidades (es decir, 10 evaluaciones por cada periodo de f), para ε tomando valores 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} y 10^{-1} , donde, a medida que el valor de ε disminuye, el valor de ω se aumenta de modo que el producto ωA y, en consecuencia, los valores de k^2 y γ se mantienen constantes. Se ha representado también la recta de pendiente 1 en línea discontinua, como en otras gráficas, para visualizar mejor el comportamiento de la diferencia cuando ε tiende a 0.

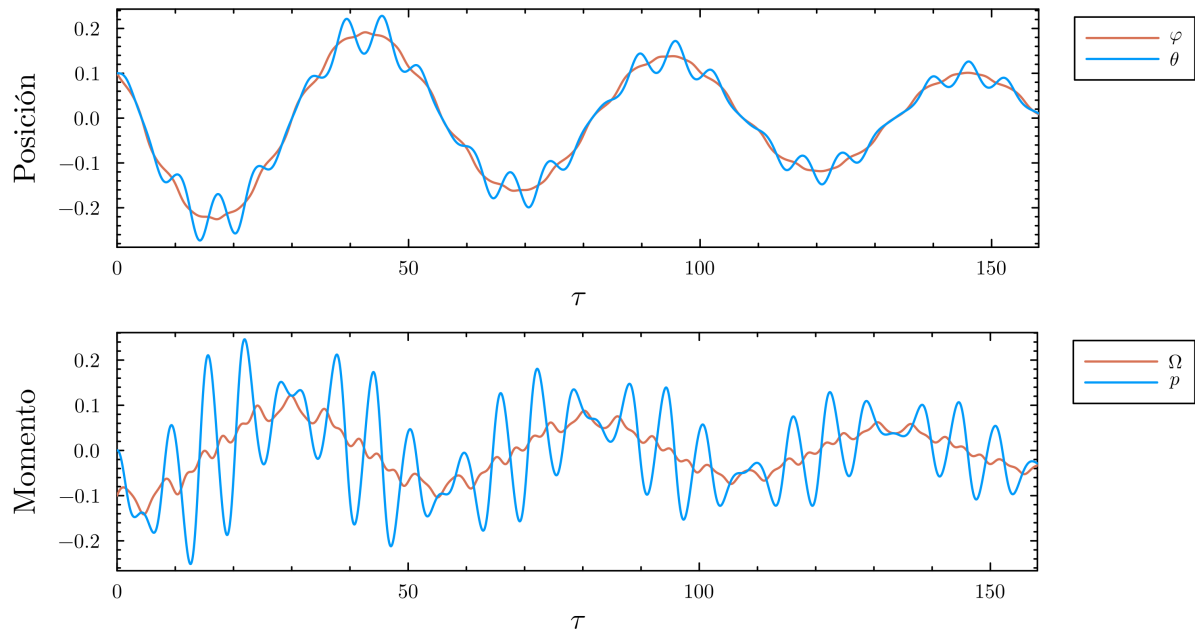


Figura 6.2: Solución del sistema (6.11) con $\varepsilon = 0,25$.

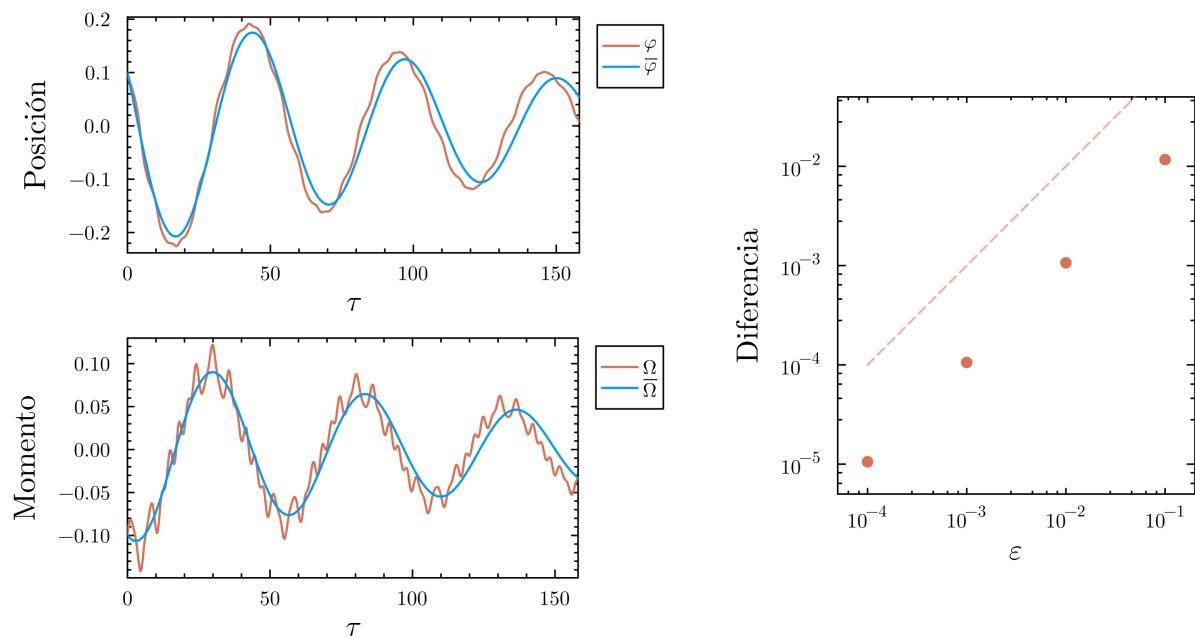


Figura 6.3: A la izquierda, solución del sistema dado por las ecuaciones (6.6) y (6.7) (naranja) y del sistema promediado (6.8) (azul) para $\varepsilon = 0,25$. A la derecha, diferencia entre las soluciones de ambos sistemas en función de ε en escala de tiempo ε^{-1} .

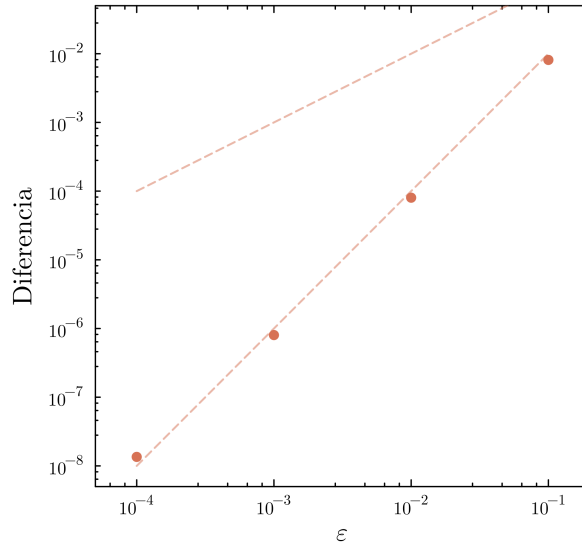


Figura 6.4: Diferencia entre la solución del sistema dado por las ecuaciones (6.6) y (6.7) y la del sistema (6.8) en función de ε en escala de tiempo ε^{-1} en los tiempos estroboscópicos.

Como se aprecia en la Figura 6.3, la diferencia entre las soluciones es $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} , como hemos demostrado a lo largo del trabajo, ya que estamos tratando con funciones periódicas.

Consideremos ahora las diferencias entre las soluciones en el mismo intervalo pero cuando se realizan evaluaciones cada 2π unidades, es decir, cuando se evalúan las soluciones únicamente en los tiempos estroboscópicos. En este caso, la diferencia entre las soluciones para ε tomando valores 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} y 10^{-1} aparece representada en la Figura 6.4. Puesto que para $\varepsilon = 10^{-4}$ la diferencia es comparable a la tolerancia 10^{-8} que se ha estado usando, para el cálculo de las soluciones en este caso se ha empleado tolerancia 10^{-10} . La figura parece indicar que en este caso la diferencia es $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ en escala de tiempo ε^{-1} y se aprecia claramente cómo la diferencia decrece según la recta de pendiente 2 representada en línea discontinua, en lugar de ser paralela a la de pendiente 1 como ocurría en la Figura 6.3.

Para justificar este comportamiento, observemos que, por el Lema 5.2.5, y dado que la solución del sistema original $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ coincide con $\mathbf{z}_\varepsilon(t)$ en los tiempos estroboscópicos, la diferencia entre las soluciones de los sistemas (5.5) y (5.8) es $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ en los tiempos estroboscópicos en escala de tiempos ε^{-1} . Por tanto, una posible explicación es que el sistema (6.8) es, de hecho, el sistema que proporciona la aproximación de orden 2. Para ello, adoptando las notaciones del capítulo anterior, basta probar que $\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Puesto que sabemos que $\mathbf{g}_1$ es el promedio de $\mathbf{f}_1$, se tiene que $\mathbf{g}_1$ es (6.9), con lo que $\mathbf{u}_1$ viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(\tau, \varphi, \Omega) &= \int_0^\tau \begin{pmatrix} 0 \\ (a - f(\sigma)f''(\sigma)) \sin(\varphi) \cos(\varphi) + f'(\sigma) \cos(\varphi) \Omega + \gamma f'(\sigma) \sin(\varphi) \end{pmatrix} d\sigma \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \sin(2\tau) \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \sin(\tau) (\cos(\varphi) \Omega + \gamma \sin(\varphi)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathbf{u}_{1,\mathbf{x}}(\tau, \varphi, \Omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\sin(2\tau)\cos(2\varphi) - \sin(\tau)(\sin(\varphi)\Omega + \gamma\cos(\varphi)) & \sin(\tau)\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{G}_2$ es la suma de

$$\mathbf{f}_2(\tau, \varphi, \Omega) = \begin{pmatrix} -\sin(\tau)\cos(\varphi)\Omega \\ \frac{1}{2}\sin^3(\tau)\sin^3(\varphi) + \frac{1}{2}k^2\sin(\tau)\sin(2\varphi) - \frac{1}{2}\sin(2\tau)\cos^2(\varphi)\Omega \end{pmatrix},$$

y de los términos $\mathbf{u}_{1,\mathbf{x}}(\tau, \varphi, \Omega)\mathbf{f}_1(\tau, \varphi, \Omega)$ y $-\mathbf{g}'_1(\varphi, \Omega)\mathbf{u}_1(\tau, \varphi, \Omega)$. Como los tres términos tienen promedio nulo, se tiene que $\mathbf{g}_2(\varphi, \Omega) = \widehat{\mathbf{G}}_2(\tau, \varphi, \Omega) = \mathbf{0}$, lo que demuestra que la ecuación (6.8) es, de hecho, la ecuación promediada truncada de orden 2, como anticipaba la Figura 6.4.

La Figura (6.4) sugiere que el término $\mathbf{g}_3$ es no nulo, pero podríamos calcularlo utilizando el método descrito en el capítulo anterior para conseguir un mayor ajuste en los tiempos estroboscópicos. De hecho, puesto que todos los términos que aparecen en los sumatorios de las ecuaciones (6.6) y (6.7) son de clase $\mathcal{C}^\infty$, el desarrollo del capítulo anterior justifica que podemos encontrar una ecuación autónoma que proporciona una solución cuya diferencia con la solución original en los tiempos estroboscópicos es $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ en escala de tiempo ε^{-1} , con k tan grande como se quiera.

En la siguiente sección vamos a ver cómo se puede aprovechar esta propiedad para implementar métodos numéricos que integren de manera eficiente sistemas como el del péndulo de Kapitza sin necesidad de conocer explícitamente las expresiones de las funciones $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k$.

6.2. Métodos numéricos de promediado estroboscópico

El propósito de esta sección es describir el método numérico de promediado estroboscópico o SAM, por sus siglas en inglés (*stroboscopic averaging method*), introducido en [7], y aplicarlo al péndulo de Kapitza. En el artículo el método se formula para sistemas en tiempo lento donde en lugar de interpretar ε como un parámetro que regula una pequeña perturbación, se entiende $1/\varepsilon$ como la frecuencia de una oscilación rápida. En esta sección, vamos a desarrollar SAM en tiempo rápido puesto que es como se ha estado trabajando principalmente a lo largo del trabajo.

Como vimos en el capítulo anterior, si tenemos la ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) \tag{6.12}$$

donde

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}) + \dots + \varepsilon^{k-1} \mathbf{f}_k(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^k \mathbf{f}_{k+1}(t, \mathbf{x}, \varepsilon),$$

con $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{k+1}$ funciones periódicas y suficientemente regulares, entonces existe una ecuación diferencial autónoma

$$\mathbf{y}' = \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}, \varepsilon) \tag{6.13}$$

con

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \varepsilon) = \mathbf{g}_1(\mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{g}_2(\mathbf{y}) + \dots + \varepsilon^{k-1} \mathbf{g}_k(\mathbf{y})$$

que proporciona una solución aproximada. El objetivo de SAM es integrar numéricamente la ecuación (6.13) sin calcular previamente las funciones $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k$, que, como vimos en el

capítulo anterior, no son fácilmente calculables. Es decir, queremos integrar numéricamente la ecuación (6.13) sin disponer de una expresión analítica de $\mathbf{F}$. Los valores de la función $\mathbf{F}$ que sean requeridos por el método numérico que se utilice para integrar (6.13) serán estimados numéricamente como se muestra a continuación.

Las ecuaciones (6.12) y (6.13) en tiempo lento vienen dadas por

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{f}(s/\varepsilon, \mathbf{x}, \varepsilon) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{y}}{ds} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, \varepsilon), \quad (6.14)$$

y se podría calcular $\mathbf{F}$ a partir de la derivada de la solución de la ecuación promediada en tiempo lento. Más precisamente, dado $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, si conociéramos la solución de (6.14) con condición inicial $\mathbf{y}_0$, denotada por $\mathbf{y}_\varepsilon(s; 0, \mathbf{y}_0)$, podríamos calcular $\mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ como la derivada de dicha solución en $s = 0$, es decir,

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \varepsilon) = \frac{d\mathbf{y}_\varepsilon(s; 0, \mathbf{y}_0)}{ds}(0).$$

No conocemos la solución $\mathbf{y}_\varepsilon(s; 0, \mathbf{y}_0)$, con lo que no es posible calcular $\mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ de manera exacta, pero si podemos calcular o estimar el valor de dicha solución para ciertos tiempos discretos, podríamos utilizar derivación numérica para obtener una aproximación de $\mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$. Vamos a ver que podemos conseguir esto a partir de integraciones numéricas del sistema original (6.12), para el que sí se conoce la expresión explícita de $\mathbf{f}$.

Recordemos que la diferencia entre las soluciones de (6.12) y de (6.13), si no se realiza el cambio de variable (5.16) para la solución del promediado, es en general $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en escala de tiempo ε^{-1} . Sin embargo, en los tiempos estroboscópicos sabemos que, por el Lema 5.2.5, la diferencia es $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ en escala de tiempo ε^{-1} . Por tanto, la diferencia entre las soluciones de las dos ecuaciones de (6.14) en los tiempos estroboscópicos es $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ en intervalos acotados. En consecuencia, si, por ejemplo, utilizamos la fórmula de la diferencia central de segundo orden para aproximar la derivada de $\mathbf{y}_\varepsilon(s; 0, \mathbf{y}_0)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \varepsilon) &= \frac{d\mathbf{y}_\varepsilon(s; 0, \mathbf{y}_0)}{ds}(0) = \frac{1}{2\varepsilon T} (\mathbf{y}_\varepsilon(\varepsilon T; 0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_\varepsilon(-\varepsilon T; 0, \mathbf{y}_0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon T} (\mathbf{x}_\varepsilon(\varepsilon T; 0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{x}_\varepsilon(-\varepsilon T; 0, \mathbf{y}_0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^k) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde T es el periodo de la función $\mathbf{f}$ (y, por tanto, los tiempos estroboscópicos en tiempo lento son los múltiplos enteros de εT). Aquí radica la importancia de los tiempos estroboscópicos, que dan nombre al método. Nos permiten obtener información acerca de la función $\mathbf{F}$ a partir de integraciones numéricas del sistema original (6.12) en intervalos de tiempo cortos, para el que solo es preciso conocer $\mathbf{f}$.

Si la función tiene la regularidad suficiente, se puede tomar k suficientemente grande como para que la diferencia $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ resulte despreciable frente al error cometido en la derivación numérica. Por tanto, el error de la aproximación de la función $\mathbf{F}$ mediante la ecuación (6.15) viene dado por el error de la fórmula de derivación numérica.

Puesto que queremos integrar la ecuación (6.13), conviene reescribir la ecuación (6.15) en tiempo rápido. Si denotamos por $\mathbf{x}(t)$ la solución en tiempo rápido de (6.12) con condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_0$, se tiene que $\varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ es

$$\frac{1}{2T} (\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}(-T)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (6.16)$$

Si en lugar de la diferencia central de orden 2 se emplea la diferencia central de orden 4 o de orden 6, cuyas fórmulas se pueden encontrar en [10] se obtienen las fórmulas

$$\frac{1}{12T} (-\mathbf{x}(2T) + 8\mathbf{x}(T) - 8\mathbf{x}(-T) + \mathbf{x}(-2T)) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (6.17)$$

y

$$\frac{1}{60T} (\mathbf{x}(3T) - 9\mathbf{x}(2T) + 45\mathbf{x}(T) - 45\mathbf{x}(-T) + 9\mathbf{x}(-2T) - \mathbf{x}(-3T)) + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \quad (6.18)$$

que permiten aproximar $\varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ para $\mathbf{y}_0$ arbitrario con un error que disminuye más rápido con respecto a ε .

Utilizando las fórmulas (6.16), (6.17) y (6.18), se puede estimar la función $\mathbf{F}$ mediante integración del sistema (6.12) en intervalos centrados en cero. En el caso de la fórmula de orden 2 se necesitan conocer los valores de la solución en $-T$ y en T , con lo que es necesario integrar entre 0 y T y entre 0 y $-T$. Para la fórmula de orden 4 se necesitan también los valores en $-2T$ y en $2T$, con lo que se necesita integrar entre 0 y $2T$ y entre 0 y $-2T$ y para la de orden 6, al necesitar los valores en $-3T$ y en $3T$, se necesita integrar entre 0 y $3T$ y entre 0 y $-3T$. Es decir, las fórmulas de mayor orden proporcionan una mayor precisión en la estimación de $\mathbf{F}$ a costa de integraciones en intervalos más largos, y son, por lo tanto, más costosas.

SAM consiste en integrar numéricamente el sistema (6.13) utilizando el procedimiento que acabamos de describir para estimar $\mathbf{F}$, sin necesidad de calcular su expresión analítica. Por tanto, emplea dos tipos de integraciones numéricas. Por un lado, utiliza un método numérico para integrar el sistema promediado (6.13), que llamaremos macrointegrador, pero por otro lado, cada vez que el macrointegrador necesita evaluar la función $\mathbf{F}$, se tiene que recurrir a otro método numérico para integrar el sistema original (6.12) en el intervalo que corresponda en función de la fórmula de derivación numérica elegida. Este segundo método, conocido en la literatura como microintegrador, puede coincidir con el macrointegrador o ser distinto. Además, tanto el macrointegrador como el microintegrador se pueden implementar con paso fijo o con paso variable.

Este proceso se ilustra en la Figura 6.5, donde se han representado en naranja las soluciones del sistema original (6.12) y en azul las soluciones del sistema promediado (6.13). Cuando el macrointegrador utilizado para aproximar la solución de (6.13) necesita evaluar la función $\mathbf{F}$ en un punto $\mathbf{y}_0$, representado en la figura por un punto negro, se realiza una microintegración del sistema original (6.12) con condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_0$ para posteriormente aplicar alguna de las fórmulas de derivación numérica anteriores para estimar $\varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$. El instante de tiempo en el que el macrointegrador está estimando la solución no tiene por qué coincidir con uno de los tiempos estroboscópicos ni tiene por qué estar en el intervalo de validez del Lema 5.2.5, ya que la microintegración se realiza siempre en el mismo intervalo temporal centrado en el origen.

Para la implementación del método, supongamos que el microintegrador es un método Runge-Kutta de orden p con paso fijo h y que el macrointegrador es un método Runge-Kutta de orden P con paso fijo H . Puesto que el error global para el microintegrador en un intervalo fijo ($[0, \pm T]$, $[0, \pm 2T]$ o $[0, \pm 3T]$, dependiendo del orden de la fórmula de derivación numérica utilizada) es $\mathcal{O}(h^p)$, si denotamos por $\varepsilon \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ al valor que se obtiene al reemplazar las evaluaciones $\mathbf{x}(3T), \mathbf{x}(2T), \dots$ en las fórmulas (6.16), (6.17) y (6.18) por sus aproximaciones numéricas $\tilde{\mathbf{x}}(3T), \tilde{\mathbf{x}}(2T), \dots$ obtenidas por el microintegrador, se tiene que, $\varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \varepsilon) - \varepsilon \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}_0, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^q + h^p)$, donde q denota el orden de la fórmula de

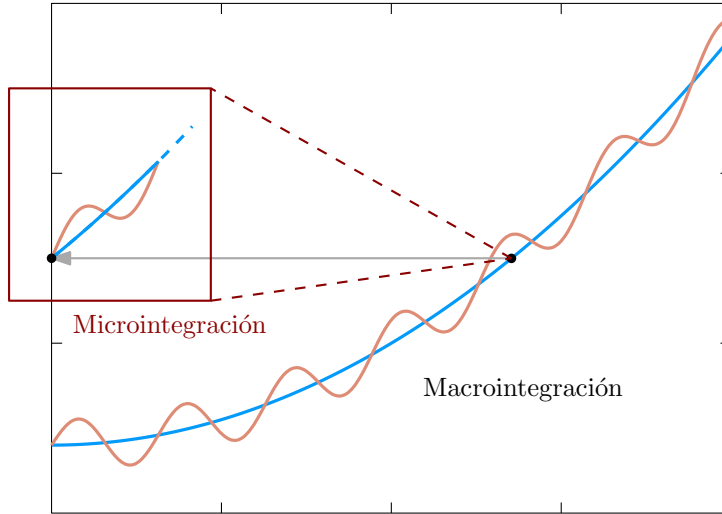


Figura 6.5: Esquema del funcionamiento de SAM.

derivación numérica utilizada. La estabilidad del macrointegrador hace que los errores de la evaluación de $\varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ se traduzcan en errores del mismo orden en la solución numérica de (6.13).

A continuación, vamos a calcular el error que introduce el macrointegrador al integrar el sistema $\mathbf{y}' = \varepsilon \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, \varepsilon)$. Las ecuaciones para avanzar un paso de longitud H con un método Runge-Kutta explícito de r etapas aplicado a la ecuación autónoma $\mathbf{y}' = \varepsilon \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, \varepsilon)$ son [16]

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= \mathbf{y}_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} H(\varepsilon \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}_j, \varepsilon)), \quad i = 1, \dots, r \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \sum_{j=1}^r b_j H(\varepsilon \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}_j, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Las ecuaciones (6.19) coinciden con las ecuaciones del mismo método Runge-Kutta aplicado al sistema en tiempo lento $d\mathbf{y}/ds = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, \varepsilon)$ pero con paso εH . Por tanto, el error global del método Runge-Kutta al integrar $\mathbf{y}' = \varepsilon \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, \varepsilon)$ en intervalos de longitud proporcional a ε^{-1} con paso H es el mismo que el que se tiene al integrar $d\mathbf{y}/ds = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{y}, \varepsilon)$ en intervalos acotados con paso εH . En resumen, SAM produce una aproximación de la solución de (6.13) con un error

$$\mathcal{O}(\varepsilon^q + h^p + (\varepsilon H)^P) \quad (6.20)$$

en intervalos de longitud proporcional a ε^{-1} . Si en lugar de utilizarse un método de paso fijo, se emplea uno de paso variable, el análisis del error sigue siendo válido. En este caso se tomaría h y H como el valor máximo de las longitudes de paso en cada uno de los integradores, y la cota (6.20) sigue siendo válida.

En [6] puede encontrarse el análisis del error de SAM cuando se formula en tiempo lento, para ecuaciones de la forma (6.14). Se trata de una fórmula similar pero, al aplicarse el microintegrador y el macrointegrador a los sistemas en tiempo lento, las longitudes de paso están en otra escala. En este caso, la longitud de paso del microintegrador se suele tomar proporcional a ε y, como las longitudes de los intervalos en los que hay que micro-

integrar también son proporcionales a ε , el costo computacional de cada microintegración es independiente de ε .

A continuación, vamos a ver qué resultados proporciona SAM al aplicarlo al péndulo de Kapitza. Puesto que las ecuaciones (6.6) y (6.7) son de la forma (5.5), con sumandos de clase $\mathcal{C}^\infty$ (con lo que las funciones se pueden acondicionar como hemos hecho en otros capítulos), podemos aplicar todos los resultados del capítulo anterior con k tan grande como queramos. Obsérvese que, sin embargo, en el capítulo anterior siempre se ha tratado con sumas finitas, y, aunque en este caso sea posible construir la serie dada por los $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k, \dots$, la convergencia de esta serie no está garantizada [8]. Basta, como se ha explicado antes, que se pueda aplicar la teoría a un k mayor que el orden con el que se aproxima la derivada.

Puesto que el sistema tiene que estar en forma estándar, pero el ordenador no puede trabajar con un sumatorio infinito, encontramos el mismo problema que en la sección anterior al integrar las ecuaciones (6.6) y (6.7). El microintegrador no puede integrarlas utilizando únicamente las variables φ y Ω , y optamos por emplear el sistema (6.11) en las variables θ, p, φ y Ω . Por tanto, en este caso, dados φ_0 y Ω_0 cualesquiera, el procedimiento para aproximar el valor de $\varepsilon \mathbf{F}(\varphi_0, \Omega_0, \varepsilon)$ es el siguiente. En primer lugar, definimos

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \varphi_0 + \varepsilon f(0) \sin(\varphi_0) \\ p_0 &= \Omega_0 + f'(0) \sin(\varphi_0)\end{aligned}$$

según el cambio de variable (6.5). Entonces, $(\theta_0, p_0, \varphi_0, \Omega_0)$ se toman como condiciones iniciales del sistema (6.11), que se integra numéricamente con el microintegrador elegido desde 0 hasta $\pm 2\pi, \pm 4\pi$ o $\pm 6\pi$ en función de la fórmula de derivación numérica elegida. Finalmente, se estima $\varepsilon \mathbf{F}(\varphi_0, \Omega_0, \varepsilon)$ utilizando las ecuaciones (6.16), (6.17) o (6.18) en las componentes 3 y 4 de la solución numérica calculada.

Utilizando Vern9 con tolerancia 10^{-8} tanto para el microintegrador como para el macrointegrador, la fórmula de derivación numérica de orden 6 (6.18) y las mismas condiciones iniciales y parámetros que en la Figura 6.3, SAM proporciona la solución representada en la Figura 6.6 en color gris. Como se aprecia en la figura, la solución obtenida con SAM aproxima mucho mejor a la solución del sistema original que la solución del sistema promediado construido en la sección anterior. Recordemos que SAM no está integrando la ecuación promediada (6.8) de orden 1 (u orden 2 en el caso del péndulo de Kapitza), sino que está integrando ecuaciones promediadas de mayor orden que no hemos calculado analíticamente debido, por una parte, a la complejidad de los cálculos y, por otra, a que no es necesario disponer de la expresión analítica.

En la Figura 6.7 se ha representado la diferencia máxima entre la solución del sistema original (6.11) y el resultado proporcionado por SAM en los tiempos estroboscópicos del intervalo $[0, \frac{6\pi}{\varepsilon\sqrt{1/2-k^2}}]$ cuando ε toma valores $1/2^3, 1/2^4, \dots, 1/2^8$ y para las diferentes fórmulas de derivación numérica, cuando se integra con Vern9 y tolerancia 10^{-10} (tanto para la integración del sistema original, como para el macrointegrador, y el microintegrador). Se han representado los resultados que proporciona la fórmula de derivación numérica de orden 2 con puntos naranjas, los resultados de la de orden 4 con puntos azules y los resultados de la de orden 6 con puntos grises. En el mismo color y en línea discontinua, se han representado rectas de pendiente 2, 4 y 6, respectivamente. Como se aprecia en la figura, los puntos de un mismo color describen rectas paralelas a las líneas discontinuas, salvo los dos puntos grises obtenidos con los dos valores más pequeños de ε .

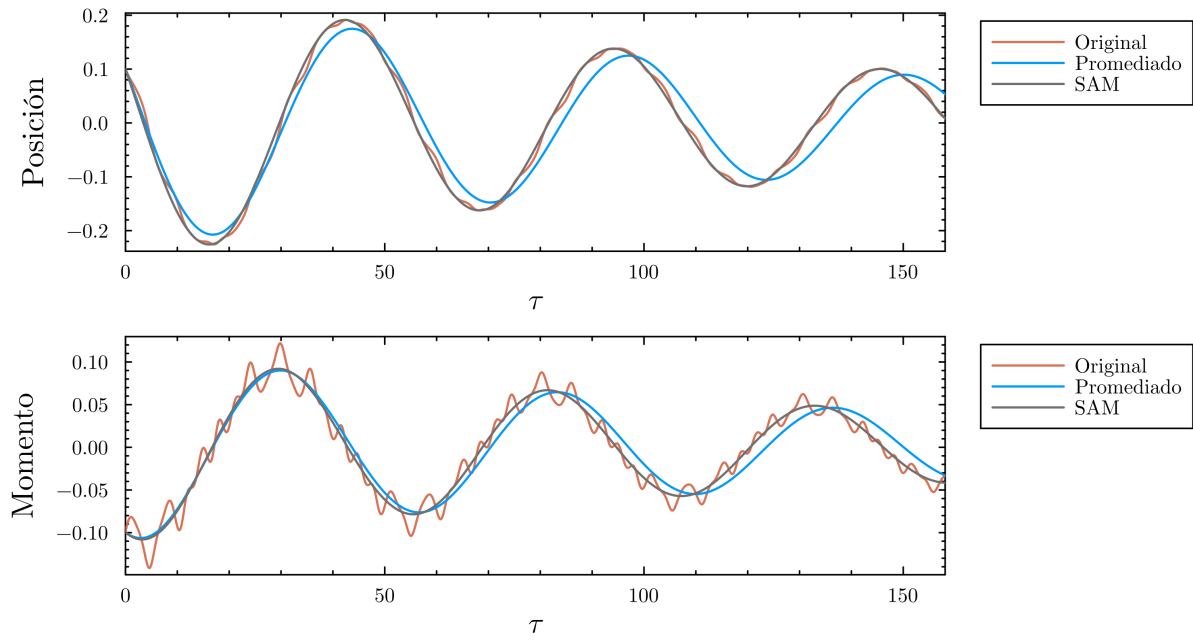


Figura 6.6: Solución del sistema dado por las ecuaciones (6.6) y (6.7) (naranja), del sistema promediado (6.8) (azul) y solución numérica por SAM (gris).

Estos resultados son consistentes con el análisis del error anterior y la expresión (6.20). Al tomar tolerancia 10^{-10} tanto con el microintegrador como con el macrointegrador, los términos h^p y $(\varepsilon H)^P$, permanecen despreciables frente a la contribución del término dominante ε^q para los valores de ε que estamos tomando. Por tanto, las pendientes que se aprecian en la Figura 6.7 se corresponden con q , el orden de la fórmula de derivación numérica utilizada en cada caso.

La excepción son los dos puntos con ε igual a $1/2^7$ y $1/2^8$ y la fórmula (6.18) de orden 6. En este caso, el término ε^6 es bastante menor que los términos de error debidos a la integración numérica, y la principal contribución a la diferencia es debida a la tolerancia empleada con Vern9 que, según se ha indicado antes, es 10^{-10} .

A continuación, vamos a analizar los resultados obtenidos con SAM para ver la influencia que tienen el valor de ε o el orden de la fórmula de derivación, en las longitudes de paso que toma el macrointegrador. En la Figura 6.8 se muestra el valor εH (siendo H la longitud de paso utilizada por el macrointegrador) frente al tiempo lento $\varepsilon\tau$. Para construir la gráfica se tomaron los instantes τ_n en los que el macrointegrador evalúa la solución y se trazó $\varepsilon H_n = \varepsilon(\tau_{n+1} - \tau_n)$ en función de $\varepsilon\tau_n$. Este procedimiento se repitió para dos valores de ε , $1/2^3$ y $1/2^8$, y para las diferentes fórmulas de diferenciación numérica empleadas en la Figura 6.7. Como se aprecia en la figura, el valor de εH no depende de ε ni del orden de derivación numérica empleado. Es decir, un algoritmo de paso variable como es Vern9 toma la longitud de paso del macrointegrador proporcional a $1/\varepsilon$, con lo que el coste computacional al integrar en intervalos de longitud proporcional a $1/\varepsilon$ es aproximadamente el mismo independientemente de ε .

En la Tabla 6.1 se recogen el número de evaluaciones de $\mathbf{f}$ requeridas por SAM para integrar el sistema promediado para los distintos valores de ε , tolerancias y fórmulas de derivación numérica utilizados y, en efecto, se ve que el número de evaluaciones que emplea SAM para distintos valores de ε es del mismo orden para tolerancia y orden de

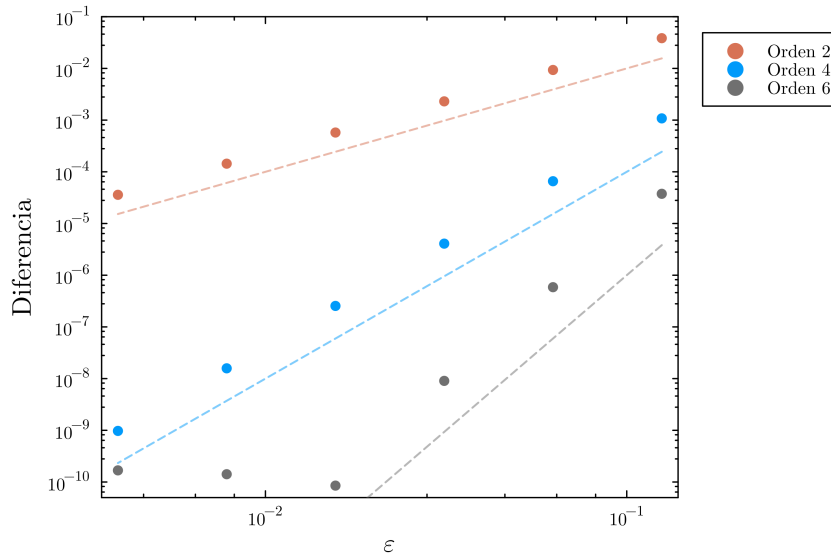


Figura 6.7: Diferencia entre la solución del sistema original y el resultado proporcionado por SAM con tolerancia 10^{-10} en los tiempos estroboscópicos en el intervalo $[0, \frac{6\pi}{\varepsilon\sqrt{1/2-k^2}}]$ en función de ε para fórmula de derivación numérica de orden 2 (naranja), de orden 4 (azul) y de orden 6 (gris).

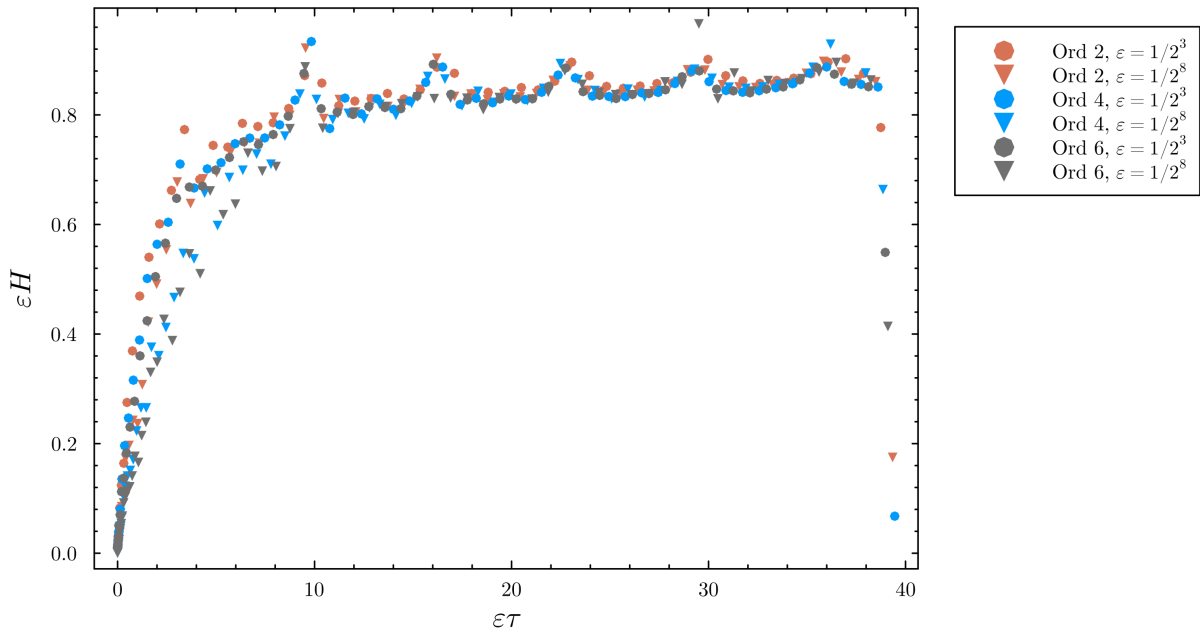


Figura 6.8: Longitudes de paso empleadas por el macrointegrador en función del tiempo de integración, con ambos ejes multiplicados por ε , para las distintas fórmulas de derivación numérica y para $\varepsilon = 1/2^3$ (círculos) y $\varepsilon = 1/2^8$ (triángulos).

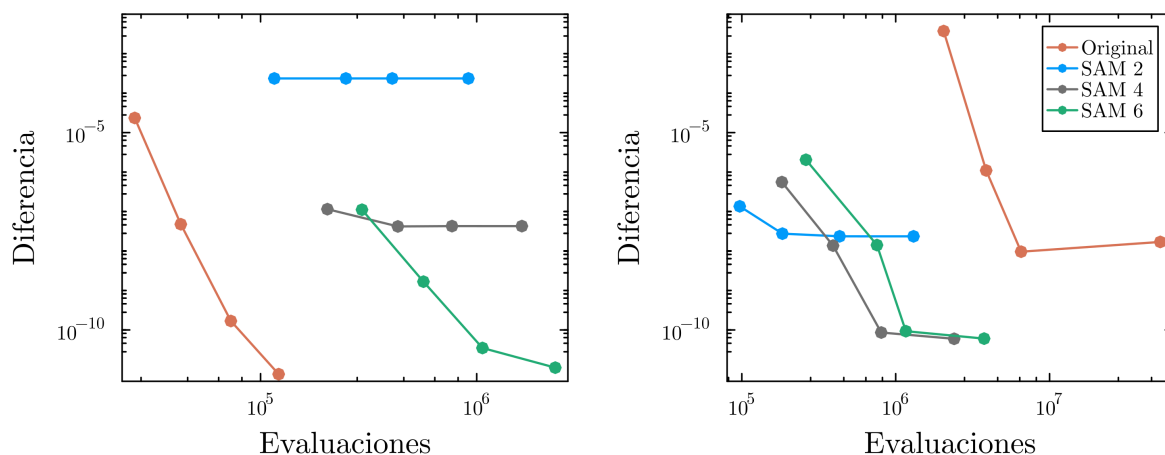


Figura 6.9: Diferencia de la solución con respecto a la solución de referencia en función del número de evaluaciones de $\mathbf{f}$ realizadas en la integración para ε igual a 10^{-2} (izquierda) y 10^{-4} (derecha).

derivación numérica fijos. Por el contrario, el número de evaluaciones al integrar con Vern9 la ecuación original, recogido en la primera columna de la tabla, es aproximadamente proporcional a la longitud del intervalo de integración. En consecuencia, existe un valor de ε a partir del cuál es menos costoso integrar el sistema promediado en un intervalo de longitud proporcional a $1/\varepsilon$ con SAM que integrar directamente el sistema original. Esta situación se ha reflejado en la Tabla 6.1 escribiendo en verde el número de evaluaciones de función que requiere SAM cuando es menor que el número de evaluaciones de $\mathbf{f}$ necesarias para integrar el sistema original. Precisamente, SAM resulta útil desde un punto de vista computacional en estos casos, cuando ε es lo suficientemente pequeño como para que se integre más rápidamente el sistema promediado por este método que el sistema original.

Por otro lado, recordemos que la diferencia entre la solución promediada y la solución original en los tiempos estroboscópicos es pequeña. Entonces, si se necesita conocer el valor de la solución del problema original en un cierto instante temporal alejado, se puede integrar utilizando SAM el sistema promediado hasta el tiempo estroboscópico más próximo y, tomando el valor obtenido como condición inicial, integrar el sistema original únicamente desde el tiempo estroboscópico hasta el instante que nos interesa. Puesto que para ε pequeño es más rápido integrar hasta el tiempo estroboscópico utilizando SAM que integrar el sistema original, si el error de SAM en los tiempos estroboscópicos es pequeña, esta técnica resulta una buena alternativa a la integración directa del sistema original.

En la Figura 6.9, se han representado en una gráfica de eficiencia las diferencias de la Tabla 6.1 entre la solución y la solución de referencia, calculada con Feagin12 [12], un método Runge-Kutta de orden 12, con longitud de paso $2\pi/7$. Se han representado los resultados para ε igual a 10^{-2} y 10^{-4} para la integración utilizando la ecuación original (naranja), SAM de orden 2 (azul), de orden 4 (gris) y de orden 6 (verde). Como se puede ver, en el caso de $\varepsilon = 10^{-2}$, la integración directa de la ecuación original resulta menos costosa y proporciona mejores resultados. Sin embargo, cuando $\varepsilon = 10^{-4}$, los resultados obtenidos con SAM no solo son menos costosos que la integración de la ecuación original, sino que, de hecho, obtienen mejores aproximaciones para tolerancias bajas.

Recordemos que la cota de error que proporciona la expresión (6.20) es válida en

ε	Tol.	Original		SAM Ord. 2		SAM Ord. 4		SAM Ord. 6	
		Eva.	Diferencia	Eva.	Diferencia	Eva.	Diferencia	Eva.	Diferencia
10^{-1}	10^{-6}	3794	9,72034e-7	103024	2,43290e-2	174104	4,35358e-4	246416	9,90207e-6
	10^{-8}	6114	1,54345e-8	219632	2,43290e-2	383704	4,35346e-4	543248	9,89037e-6
	10^{-10}	9858	1,86273e-11	447616	2,43290e-2	791240	4,35346e-4	1118800	9,89030e-6
	10^{-12}	16130	4,59420e-12	999968	2,43290e-2	1844584	4,35346e-4	2562640	9,89030e-6
10^{-2}	10^{-6}	26178	2,34921e-5	115808	2,35521e-4	203800	1,14736e-7	294656	1,11100e-7
	10^{-8}	42770	4,76190e-8	248160	2,35409e-4	431736	4,19362e-8	567056	1,67204e-9
	10^{-10}	72898	1,68439e-10	406640	2,35407e-4	768408	4,27447e-8	1063056	3,48914e-11
	10^{-12}	121282	7,57891e-12	914896	2,35407e-4	1617768	4,27213e-8	2309072	1,10862e-11
10^{-3}	10^{-6}	240034	1,85075e-5	96048	2,50911e-6	215672	2,56225e-7	308176	3,35536e-7
	10^{-8}	395538	2,91021e-7	223312	2,35791e-6	447464	2,49856e-9	658368	3,89119e-9
	10^{-10}	661138	3,87285e-10	421040	2,35321e-6	764568	4,55116e-11	1065040	3,84026e-11
	10^{-12}	1173698	3,23225e-10	923536	2,35317e-6	1630696	8,83102e-12	2373920	4,97430e-12
10^{-4}	10^{-6}	2050034	3,73696e-3	96912	1,35535e-7	182104	5,57384e-7	261008	2,04897e-6
	10^{-8}	3872098	1,09760e-6	183536	2,75043e-8	391528	1,36851e-8	755456	1,41247e-8
	10^{-10}	6529986	9,60697e-9	432128	2,35614e-8	805496	8,60058e-11	1164080	9,29502e-11
	10^{-12}	52407362	1,69778e-8	1305680	2,35304e-8	2397544	5,97007e-11	3754848	6,03444e-11

Tabla 6.1: Número de evaluaciones de función requeridas para integrar el sistema original (6.11) para distintos valores de ε utilizando Vern9 para distintas tolerancias, junto con el número de evaluaciones que emplea SAM con las fórmulas de derivación numérica de orden 2, 4 y 6 para integrar el sistema promediado. También se recoge el valor máximo de la diferencia en los tiempos estroboscópicos de las soluciones respecto de una solución de referencia de la ecuación original calculada con Feagin12 [12] con longitud de paso $2\pi/7$. El número de evaluaciones de función efectuadas por SAM se escribe en verde cuando es inferior al número de evaluaciones requeridas para integrar el sistema original.

intervalos de longitud proporcional a $1/\varepsilon$, pero el error global de la integración directa depende de la longitud del intervalo. Este efecto se aprecia muy bien en la columna de la Tabla 6.1 de diferencias de las soluciones obtenidas integrando la ecuación original. Para tolerancia 10^{-12} , la diferencia calculada está un par de órdenes por encima de la tolerancia fijada. De hecho, para tolerancia 10^{-12} , la integración directa por Vern9 proporciona una diferencia mayor que para tolerancia 10^{-10} , y el número de evaluaciones se dispara, lo que parece indicar que la precisión que puede proporcionar el algoritmo está al límite.

Por tanto, SAM resulta una técnica más eficiente y precisa cuando se trabaja con valores de ε pequeños, no solo para integrar el sistema promediado, sino también para proporcionar aproximaciones de la solución original en tiempos grandes.

La Tabla 6.1 y la Figura 6.9 también muestran la importancia de elegir adecuadamente la fórmula de derivación numérica en función del valor de ε o del problema de estudio. Puesto que la longitud de los intervalos de microintegración depende del orden de la fórmula de derivación, si el problema original es muy costoso de integrar puede ser más eficiente utilizar fórmulas de orden más bajo. Este es el caso de $\varepsilon = 10^{-4}$, donde, en la Figura 6.9 se ve que utilizar la fórmula de orden 4 es más eficiente que utilizar la de orden 6.

Otro ejemplo donde la elección de la fórmula de derivación es importante es la integración del péndulo de Kapitza con un coeficiente de rozamiento muy grande. En este caso, la solución evoluciona rápidamente a cero, por lo que las microintegraciones en intervalos de la forma $[0, mT]$, con $m \in \mathbb{N}$ son sencillas. Pero, las microintegraciones hacia atrás, entre 0 y $-mT$, se vuelven extremadamente costosas, puesto que la solución crece muy rápidamente. Entonces, las fórmulas (6.16), (6.17) y (6.18) proporcionan muy malos resultados. Para implementar SAM en este caso conviene recurrir a fórmulas de diferencias progresivas [10] como

$$\frac{1}{2T}(-\mathbf{x}(2T) + 16\mathbf{x}(T) - 3\mathbf{x}(0))$$

o

$$\frac{1}{12T}(-3\mathbf{x}(4T) + 16\mathbf{x}(3T) - 36\mathbf{x}(2T) + 48\mathbf{x}(T) - 25\mathbf{x}(0))$$

si se necesita mayor orden.

Cuando se formula SAM en tiempo lento, como se hace en [6], SAM proporciona aproximaciones de la solución original en tiempos fijos, pero para sistemas altamente oscilatorios, donde integrar directamente el sistema original requeriría longitudes de paso muy pequeñas.

Como hemos visto en las ecuaciones (6.19), considerar SAM en tiempo rápido o en tiempo lento no supone cambios significativos a nivel matemático. De hecho, en vez de estudiar el péndulo de Kapitza como un sistema en tiempo rápido, se puede considerar un modelo ligeramente distinto y tomar $\varepsilon = 1/\omega$ para formularlo como un sistema en tiempo lento. En este caso, en [6] se prueba que se puede aplicar SAM sin necesidad de realizar un cambio a forma estándar, microintegrando el sistema original (6.4).

Bibliografía

- [1] P. Agarwal. *Fixed Point Theory in Metric Spaces. Recent Advances and Applications*. Springer, 2018.
- [2] T. M. Apostol. *Análisis matemático*. Reverte Editorial, 1976.
- [3] Z. Artstein. «Averaging of time-varying differential equations revisited». *Journal of Differential Equations* 243.2 (2007), págs. 146-167.
- [4] N. N. Bogolyubov e Y. A. Mitropolsky. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. Gordon and Breach, 1985.
- [5] I. Bright. «Tight estimates for general averaging applied to almost-periodic differential equations». *Journal of Differential Equations* 246.7 (2009), págs. 2922-2937.
- [6] M. P. Calvo, P. Chartier, A. Murua y J. M. Sanz-Serna. «Numerical stroboscopic averaging for ODEs and DAEs». *Applied Numerical Mathematics* 61.10 (2011), págs. 1077-1095.
- [7] M. P. Calvo, P. Chartier, A. Murua y J. M. Sanz-Serna. «A Stroboscopic Numerical Method for Highly Oscillatory Problems». *Numerical Analysis of Multiscale Computations*. Springer, 2011, págs. 71-85.
- [8] P. Chartier, A. Murua y J. M. Sanz-Serna. «A formal series approach to averaging: Exponentially small error estimates». *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 32.9 (2012), págs. 3009-3027.
- [9] C. Chicone. *Ordinary differential equations with applications*. Springer, 2024.
- [10] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. Release 1.2.4 of 2025-03-15. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.
- [11] P. Fatou. «Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période». *Bulletin de la Société Mathématique de France* 2 (1928), págs. 98-139.
- [12] T. Feagin. «High-order explicit Runge-Kutta methods using m -symmetry». *Neural Parallel Sci. Comput.* 20.3-4 (2012), págs. 437-458.
- [13] C. Fernández Pérez. *Ecuaciones Diferenciales I: Ecuaciones lineales*. Pirámide, 1996.
- [14] C. Fernández Pérez y J. M. Vegas Montaner. *Ecuaciones diferenciales II: Ecuaciones no lineales*. Pirámide, 1996.
- [15] M. Guzmán. *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control*. Alhambra, 1975.

- [16] E. Hairer, S. P. Nørsett y G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer, 2009.
- [17] D. W. Jordan y P. Smith. *Nonlinear ordinary differential equations. An introduction for scientists and engineers*. Oxford Univ. Press, 2011.
- [18] P. Kapitza. «Маятник с вибрирующим подвесом». *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* 44.5 (1951), págs. 7-20.
- [19] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley, 1989.
- [20] N. M. Krylov y N. N. Bogoliubov. *Introduction to Non-Linear Mechanics*. Princeton University Press, 1943.
- [21] J. L. Lagrange. *Analytical Mechanics*. Springer, 1997.
- [22] P. S. Laplace, H. Gordon y J. Gordon. *Traité de mécanique céleste*. De L’Imprimerie de Crapelet: Chez J.B.M. Duprat, 1798.
- [23] M. Levi. «Stability of the Inverted Pendulum—A Topological Explanation». *SIAM Review* 30.4 (1988), págs. 639-644.
- [24] I. P. Longo, R. Obaya y A. M. Sanz. «Nonautonomous modelling in Energy Balance Models of climate. Limitations of averaging and climate sensitivity». *arXiv* 2503.03771 (2025).
- [25] C. Rackauckas y Q. Nie. «DifferentialEquations.jl – A Performant and Feature-Rich Ecosystem for Solving Differential Equations in Julia». *Journal of Open Research Software* 5.1 (2017), pág. 15.
- [26] J. A. Sanders y F. Verhulst. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Springer, 1985.
- [27] J. A. Sanders, F. Verhulst y J. A. Murdock. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Springer, 2007.
- [28] P. R. Sethna. «An extension of the method of averaging». *Quarterly of Applied Mathematics* 25.2 (1967), págs. 205-211.
- [29] A. A. Seyranian y A. P. Seyranian. «The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point». *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 70.5 (2006), págs. 754-761.
- [30] F. Verhulst. *A Toolbox of Averaging Theorems. Ordinary and Partial Differential Equations*. Springer, 2023.
- [31] F. Verhulst. *Methods and applications of singular perturbations. Boundary layers and multiple timescale dynamics; with 26 illustrations*. Springer, 2005.
- [32] J. H. Verner. «Numerically optimal Runge–Kutta pairs with interpolants». *Numerical Algorithms* 53.2-3 (2010), págs. 383-396.