



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE MÁSTER**

**Máster en Matemáticas**

**MÉTODOS LINEALES MULTIPASO PARTICIONADOS**

**Autor: Melquiades Rodríguez Gutiérrez**

**Tutora: Begoña Cano Urdiales**

**Año 2025**



## Resumen

El objetivo de este trabajo es realizar un estudio exhaustivo sobre métodos lineales multipaso particionados. En el primer capítulo se dará la definición y propiedades básicas como convergencia, cero-estabilidad y consistencia, demostrándose al igual que con métodos lineales multipaso estándar, características y propiedades que relacionan todas estas definiciones. Además se estudia la simetría de estos métodos, demostrándose también una sencilla caracterización. En el segundo capítulo se realiza un estudio detallado sobre el desarrollo asintótico del error global de métodos lineales multipaso particionados, tanto para fuertemente estables como débilmente estables. En el tercer capítulo se analiza el comportamiento del error y la conservación del hamiltoniano a partir de los resultados obtenidos del anterior capítulo. En el último capítulo se aplican los resultados anteriores al caso de pequeñas oscilaciones del doble péndulo, que es un problema no separable, estudiando el error y realizando experimentos numéricos que permiten comprobar las ventajas de utilizar ciertos métodos simétricos particionados.

## Abstract

The aim of this work is to conduct a comprehensive study on partitioned linear multistep methods. In the first chapter, the definition and basic properties such as convergence, zero-stability, and consistency will be presented, demonstrating, as with standard linear multistep methods, the characteristics and properties that relate all these definitions. Additionally, the symmetry of these methods will be studied, and a simple characterization will also be demonstrated. In the second chapter, a detailed study of the asymptotic development of the global error of partitioned linear multistep methods is carried out, both for strongly stable and weakly stable cases. In the third chapter, the behavior of the error on the preservation of the Hamiltonian is analyzed based on the results obtained in the previous chapter. In the final chapter, the previous results are applied to the case of small oscillations of the double pendulum, which is a non-separable problem, analyzing the error and performing numerical experiments to verify the advantages of using certain symmetric partitioned methods.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Conceptos básicos sobre métodos lineales multipaso particionados</b>	<b>7</b>
1.1. Preliminares . . . . .	7
1.1.1. Descripción de un método lineal multipaso particionado	7
1.1.2. Formulación como método de un solo paso . . . . .	11
1.2. Convergencia, cero-estabilidad y consistencia . . . . .	12
1.2.1. Convergencia . . . . .	12
1.2.2. Consistencia . . . . .	14
1.2.3. Cero - estabilidad . . . . .	22
1.3. Simetría . . . . .	27
<b>2. Desarrollo asintótico del error global</b>	<b>31</b>
2.1. Métodos fuertemente estables . . . . .	37
2.2. Métodos débilmente estables . . . . .	51
<b>3. Crecimiento del error con el tiempo</b>	<b>65</b>
3.1. Comportamiento de los coeficientes del desarrollo asintótico . .	65
3.1.1. Coeficientes asociados a las raíces comunes de módulo unidad. . . . .	66
3.1.2. Coeficientes asociados a las raíces no comunes de mó- dulo unidad . . . . .	66
3.2. Comportamiento en problemas hamiltonianos . . . . .	68
3.2.1. Parte suave de la solución numérica . . . . .	68
3.2.2. Solución numérica completa cuando $m = 1$ . . . . .	71

<b>4. Péndulo doble</b>	<b>73</b>
4.1. Error en el hamiltoniano asociado a la parte suave de la solución numérica . . . . .	75
4.1.1. MLMPs simétricos . . . . .	75
4.1.2. MLMPs no simétricos . . . . .	76
4.2. Error en el hamiltoniano asociado a las raíces no comunes de módulo unidad . . . . .	79
4.3. Experimentos numéricos . . . . .	80
<b>Conclusiones</b>	<b>89</b>

# Introducción

Los integradores geométricos han demostrado ser herramientas fundamentales en la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias con estructuras específicas [8], [11], [13]. En particular, la simplécticidad y la simetría son propiedades muy interesantes, especialmente cuando se quieren conservar propiedades del sistema que queremos integrar. Por ejemplo, los métodos simplécticos son muy buenos en la integración de sistemas hamiltonianos y los simétricos en la integración de sistemas reversibles.

Un tipo de integrador geométrico muy utilizado es el Runge-Kutta. Para ciertos sistemas específicos, como aquellos de segundo orden sin dependencia de la derivada primera o problemas separables, existen versiones explícitas de estos métodos, como los métodos Runge-Kutta-Nyström y los métodos Runge-Kutta particionados [13]. Sin embargo, cuando queremos crear métodos Runge-Kutta simplécticos, aplicables a sistemas totalmente generales de primer orden, esto implicar tener que usar de métodos implícitos. Esto hace que para sistemas generales de primer orden no separables los métodos Runge-Kutta simplécticos sean costosos de implementar.

Otros integradores geométricos también muy utilizados son los métodos lineales multipaso, cuya gran ventaja sobre los Runge-Kutta es que cuando son implícitos requieren una sola evaluación por iteración y cuando son explícitos una sola evaluación por paso. Sin embargo, los métodos lineales multipaso no pueden ser simplécticos [5], pero para aquellos que son simétricos esta garantizado que su método de un solo paso asociado es conjugado-simpléctico [6]. Esto es relevante porque los métodos lineales multipaso pueden ser simultáneamente explícitos y simétricos, lo que ha motivado numerosos estudios teóricos y aplicaciones prácticas. A pesar de sus ventajas, los resultados positivos obtenidos para la integración a largo plazo se han limitado a casos

concretos, como sistemas de segundo orden sin dependencia de la derivada primera o sistemas hamiltonianos separables, donde los métodos simétricos ofrecen beneficios en términos de propagación del error y conservación de invariantes [2], [4]. Los métodos lineales multipaso aplicados a problemas de primer orden conducen normalmente a un crecimiento exponencial del error.

El presente trabajo tiene como objetivo realizar un análisis exhaustivo de la convergencia y la simetría de los métodos lineales multipaso particionados, viendo qué relación guarda con la simetría y la convergencia de los dos métodos lineales multipaso que componen el particionado. Con estos métodos, diferentes partes del sistema diferencial serán integradas con distintos métodos lineales multipaso, sin asumir que el sistema sea separable. Se analizará el comportamiento de estos métodos en la integración de problemas generales y se estudiará su influencia en la propagación del error y la conservación del hamiltoniano. Para ello, se realizarán experimentos numéricos con el problema del doble péndulo, un sistema hamiltoniano no separable, con el objetivo de justificar, en la medida de lo posible, el comportamiento observado en términos del crecimiento del error en el hamiltoniano. Se espera que este análisis permita comprender mejor el funcionamiento de los métodos lineales multipaso particionados en otros problemas más complicados.



# Capítulo 1

## Conceptos básicos sobre métodos lineales multipaso particionados

### 1.1. Preliminares

#### 1.1.1. Descripción de un método lineal multipaso particionado

Consideremos el siguiente sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias (o problema de valores iniciales) de dimensión  $n \geq 2$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(y(t)), & t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

En dicho sistema se pueden dividir el conjunto de  $n$  variables en dos subconjuntos de tamaños  $d$  y  $n - d$  respectivamente, pudiéndose escribir como

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = f(p(t), q(t)), & p(t_0) = p_0, \\ \dot{q}(t) = g(p(t), q(t)), & q(t_0) = q_0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

con  $p_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $q_0 \in \mathbb{R}^{n-d}$ ,  $y_0 = (p_0, q_0)$  y la función

$$F(y(t)) = (f(p(t), q(t)), g(p(t), q(t))),$$

con

$$\begin{aligned} p &: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ q &: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}. \end{aligned}$$

Enunciamos ahora, sin demostrar, el siguiente resultado que es una adaptación del teorema de Picard-Lindelöf a problemas de valores iniciales particionados.

**Teorema 1.1.** *Sean  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  y  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  funciones definidas y continuas en un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , para las cuales existen dos constantes  $L_f, L_g > 0$  tales que:*

$$\|f(x) - f(x^*)\| \leq L_f \|x - x^*\|$$

$$\|g(x) - g(x^*)\| \leq L_g \|x - x^*\|$$

para todo  $x, x^* \in \Omega$ . Entonces para cada  $p_0 \in \mathbb{R}^d$  y  $q_0 \in \mathbb{R}^{n-d}$  existe una única solución  $y(t) = (p(t), q(t))$ , tal que  $f, g \in C^1(\Omega)$ , para el problema de valores iniciales particionado (1.1.1), con condiciones iniciales  $p_0$  y  $q_0$ . ■

A pesar de que el teorema 1.1 nos garantice la existencia de una única solución para (1.1.1), es difícil, incluso a veces imposible, encontrar su solución exacta. Se sabe que se requieren métodos numéricos para aproximar la solución de (1.1.1) en una discretización del intervalo  $[t_0, T]$ , es decir, una sucesión  $\{t_n\}_{n=0}^N \subset [t_0, T]$ , con  $t_{n+1} = t_n + h$ , y  $n = 0, 1, \dots, N$ , donde  $N = (T - t_0)/h$  y  $h > 0$  es la longitud de paso. Pero dado como tenemos escrito el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, nos interesa cómo es de útil y ventajoso aplicar métodos numéricos distintos a cada parte del problema de valores iniciales particionado (1.1.1).

En este trabajo intentaremos integrar cada parte del sistema diferencial autónomo (1.1.1) con métodos lineales multipaso distintos. Es decir, consideraremos el método determinado a partir de los dos siguientes sistemas en diferencias.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k_p} \alpha_j^p p_{n+j} &= h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_j^p f(p_{n+j}, q_{n+j}), \\ \sum_{j=0}^{k_q} \alpha_j^q q_{n+j} &= h \sum_{j=0}^{k_q} \beta_j^q g(p_{n+j}, q_{n+j}). \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

A partir de este momento denotaremos como MLM a los métodos lineales multipaso usuales. A los métodos de la forma (1.1.2) se les conoce como *métodos lineales multipaso particionados*, que a partir de este momento los denotaremos como MLMP.

Los valores de  $p_n$  y  $q_n$  son aproximaciones por (1.1.2) de  $p(t_n)$  y  $q(t_n)$ , respectivamente en  $t_n = t_0 + nh$ , siendo  $h > 0$  la longitud de paso de los MLMP y  $\alpha_j^p, \beta_j^p, \alpha_j^q, \beta_j^q$  los coeficientes de los dos MLM que componen (1.1.2) tales que

$$\alpha_{k_p}^p, \alpha_{k_q}^q \neq 0, \quad |\alpha_0^p| + |\beta_0^p| > 0, \quad |\alpha_0^q| + |\beta_0^q| > 0.$$

Las dos primeras condiciones se dan para que se pueda calcular  $p_{n+k_p}$  y  $q_{n+k_q}$  al dar el  $n + k_p$  y  $n + k_q$  paso en los dos MLM que componen el MLMP. Las dos últimas condiciones se dan para que los MLM que componen el MLMP sean de  $k_p$  y  $k_q$  pasos respectivamente.

Consideremos los polinomios característicos de los dos MLMs que componen el MLMP (1.1.2)

$$\begin{aligned} \rho_p(x) &= \alpha_{k_p}^p x^{k_p} + \cdots + \alpha_0^p, & \sigma_p(x) &= \beta_{k_p}^p x^{k_p} + \cdots + \beta_0^p, \\ \rho_q(x) &= \alpha_{k_q}^q x^{k_q} + \cdots + \alpha_0^q, & \sigma_q(x) &= \beta_{k_q}^q x^{k_q} + \cdots + \beta_0^q, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

donde  $(\rho_p(x), \rho_q(x))$  son los *primeros polinomios característicos del MLMP* y  $(\sigma_p(x), \sigma_q(x))$  los *segundos polinomios característicos del MLMP*.

Así podemos escribir el MLMP dado de la siguiente forma:

$$\rho_p(E)p_n = h\sigma_p(E)f(p_n, q_n),$$

$$\rho_q(E)q_n = h\sigma_q(E)g(p_n, q_n),$$

donde  $E$  es el operador que avanza  $h$  unidades de tiempo.

Notemos que si en (1.1.2) se tiene por ejemplo, y sin pérdida de generalidad que  $k_q > k_p$ , podemos calcular  $p_{k_p}$  a partir de  $p_0, \dots, p_{k_p-1}, q_0, \dots, q_{k_p-1}$ . Si  $k_q > k_p + 1$ , podemos calcular  $p_{k_p+1}$  a partir de  $p_1, \dots, p_{k_p}, q_1, \dots, q_{k_p}$ . Y así sucesivamente hasta obtener los valores de arranque  $p_0, \dots, p_{k_q-1}, q_0, \dots, q_{k_q-1}$ .

Por lo tanto a partir de ahora y a lo largo de esta sección y la siguiente se considerarán en los desarrollos de las demostraciones MLMP tales que sus

MLM que lo componen tenga el mismo número de pasos  $k = \max\{k_p, k_q\}$ . Mas concretamente, escribiremos (1.1.2) como

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j^{p,*} p_{n+j} &= h \sum_{j=0}^k \beta_j^{p,*} f(p_{n+j}, q_{n+j}), \\ \sum_{j=0}^k \alpha_j^q q_{n+j} &= h \sum_{j=0}^k \beta_j^q g(p_{n+j}, q_{n+j}), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

con  $\alpha_0^{p,*} = \dots = \alpha_{k_q-k_p-1}^{p,*} = \beta_0^{p,*} = \beta_{k_q-k_p-1}^{p,*} = 0$  y  $\alpha_l^{p,*} = \alpha_{l-k_q+k_p}^p$ ,  $\beta_l^{p,*} = \beta_{l-k_q+k_p}^p$  para  $l = k_q - k_p, \dots, k_q$

Los valores de arranque del nuevo MLMP son  $p_0, \dots, p_{k_q-1}, q_0, \dots, q_{k_q-1}$ , donde  $p_{k_p+1}, \dots, p_{k_q-1}$  se obtienen de (1.1.2).

Una vez considerados los  $k$  valores de arranque obtenidos por (1.1.2), podemos reescribir (1.1.4) con sus polinomios característicos que por la forma en la que hemos construido este método son

$$\begin{aligned} \rho_p^*(x) &= x^{k_q-k_p} \rho_p(x), & \rho_q^*(x) &= \rho_q(x), \\ \sigma_p^*(x) &= x^{k_q-k_p} \sigma_p(x), & \sigma_q^*(x) &= \sigma_q(x). \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Por comodidad y por simplicidad de notación, a lo largo de esta sección y la siguiente denotaremos por  $\rho_p$  y  $\sigma_p$  a  $\rho_p^*$  y  $\sigma_p^*$  y a  $\alpha_l^p$  y  $\beta_l^p$ , para  $l = 0, \dots, k$  a  $\alpha_l^{p,*}$  y  $\beta_l^{p,*}$ .

Decimos que un MLMP es explícito si se puede calcular  $y_n = (p_n, q_n)$  de manera explícita, es decir, obtener las soluciones proporcionadas por el método sin resolver un sistema no lineal, para cualquier  $f$  y  $g$ . En caso contrario, diremos que el MLMP es implícito. Al igual que un MLM, el simple hecho de resolver este tipo de sistemas hace que los MLMP implícitos sean más costosos de implementar que los MLMP explícitos. Es obvio que un MLMP es implícito si y solo si al menos uno de los dos MLM que lo componen es implícito, y que un MLMP es explícito si y solo si los dos MLM que lo componen son explícitos. Ahora daremos una caracterización de MLMP explícitos e implícitos, cuya demostración es inmediata.

**Corolario 1.2.** *Un MLMP es explícito si y sólo si  $\beta_{k_p}^p = \beta_{k_q}^q = 0$ , donde  $\beta_{k_q}^q, \beta_{k_p}^p$  son los coeficientes de los segundos polinomios característicos en (1.1.3). Un MLMP es implícito si y solo si  $\beta_{k_p}^p \neq 0$  o  $\beta_{k_q}^q \neq 0$ .*

### 1.1.2. Formulación como método de un solo paso

Al igual que los MLM, los MLMP pueden reescribirse también como métodos de un solo paso en un espacio de dimensión superior, que resultará de gran utilidad para demostraciones posteriores. Consideremos en esta sección un MLMP de la forma (1.1.4), para el problema de valores iniciales (1.1.1). Para reescribir un MLMP como método de un solo paso necesitamos definir

$$\begin{aligned}\psi_p(p_0, \dots, p_{k-1}, q_0, \dots, q_{k-1}) &= \sum_{j=0}^k \frac{\beta_j^p}{\alpha_k^p} f(p_j, q_j), \\ \psi_q(p_0, \dots, p_{k-1}, q_0, \dots, q_{k-1}) &= \sum_{j=0}^k \frac{\beta_j^q}{\alpha_k^q} g(p_j, q_j),\end{aligned}$$

donde los vectores  $p_k$  y  $q_k$  vienen definidos implícitamente como

$$\begin{aligned}p_k &= - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j^p}{\alpha_k^p} p_j + h\psi_p(p_0, \dots, p_k, q_0, \dots, q_k), \\ q_k &= - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j^q}{\alpha_k^q} q_j + h\psi_q(p_0, \dots, p_k, q_0, \dots, q_k).\end{aligned}$$

Trabajaremos con el supervector

$$Y_i = (p_{i+k-1}, p_{i+k-2}, \dots, p_i, q_{i+k-1}, q_{i+k-2}, \dots, q_i)^T, Y_i \in \mathbb{R}^{nk}, \quad i \geq 0$$

siendo  $n$  la dimensión de la ecuación diferencial (1.1.1). El MLMP (1.1.4) puede escribirse como

$$Y_{i+1} = (A \otimes I)Y_i + h\Phi(Y_i), \quad i \geq 0, \quad (1.1.6)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{k-1}^p}{\alpha_k^p} & -\frac{\alpha_{k-2}^p}{\alpha_k^p} & \dots & -\frac{\alpha_0^p}{\alpha_k^p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{\alpha_{k-1}^q}{\alpha_k^q} & -\frac{\alpha_{k-2}^q}{\alpha_k^q} & \dots & -\frac{\alpha_0^q}{\alpha_k^q} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1.7)$$

$\Phi(Y) = (\psi_p(p_0, \dots, p_{k-1}, q_0, \dots, q_{k-1}), 0, \dots, 0, \psi_q(p_0, \dots, p_{k-1}, q_0, \dots, q_{k-1}), 0, \dots, 0)$  y, por abuso de notación,  $A \otimes I$  corresponde a la matriz diagonal por bloques tal que el primer bloque es  $S_p \otimes I_d$ , donde

$$S_p = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{k-1}^p}{\alpha_k^p} & -\frac{\alpha_{k-2}^p}{\alpha_k^p} & \dots & -\frac{\alpha_0^p}{\alpha_k^p} \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1.8)$$

y el segundo bloque es  $S_q \otimes I_{n-d}$ , donde

$$S_q = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_{k-1}^q}{\alpha_k^q} & -\frac{\alpha_{k-2}^q}{\alpha_k^q} & \dots & -\frac{\alpha_0^q}{\alpha_k^q} \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1.9)$$

y las matrices  $I_d$  e  $I_{n-d}$  son las matrices identidades de tamaños  $d$  y  $n-d$  respectivamente.

## 1.2. Convergencia, cero-estabilidad y consistencia

### 1.2.1. Convergencia

Ya habíamos comentado que el problema de valores iniciales (1.1.1) tiene una única solución.

Nos planteamos comparar, en un instante de tiempo  $t_n = t_0 + nh$ , para una longitud de paso  $h$ , el valor de la solución exacta  $\mathbf{y}(t_n)$  con la solución numérica  $\mathbf{y}_n$  proporcionada por el MLMP (1.1.4). Para hacer esta comparación lo que hacemos es observar si la solución  $\{y_n\}$  dada por (1.1.4) se aproxima a la solución exacta  $y(t_n)$  cuando  $h \rightarrow 0$ , o equivalentemente  $n \rightarrow \infty$ , manteniendo fijo  $t_n = t_0 + nh$ .

Más concretamente, se dice que un MLMP de  $k$  pasos es convergente si siempre que los valores de arranque  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$  satisfacen

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (p_j - p(t + jh)) &= 0, \quad \text{para } j = 0, \dots, k-1, \\ \lim_{h \rightarrow 0} (q_j - q(t + jh)) &= 0, \quad \text{para } j = 0, \dots, k-1, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

se verifica que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t_n = t_0 + nh}} y_n = y(t_n).$$

Tengamos en cuenta que la definición solamente depende del método, luego es aplicable a cualquier problema de valores iniciales particionado (1.1.1).

Diremos que una matriz  $A$  cuadrada de tamaño  $n$  cumple *la condición de los autovalores* si todos los autovalores de la matriz  $A$  son de módulo menor o igual que 1 y los de módulo 1 tienen multiplicidad geométrica  $m = 1$ . Gracias a la convergencia, podemos garantizar que la matriz  $A$  (1.1.7) cumple la condición de los autovalores.

**Teorema 1.3.** *Si un MLMP es convergente entonces la matriz  $A$  del MLMP, reescrito como método de un solo paso, cumple la condición de los autovalores.*

*Demostración.* Supongamos que existe un autovalor de  $A$ ,  $\lambda$ , tal que  $|\lambda| > 1$ . Por la estructura en bloques de  $A$  en (1.1.7), esto implica que o bien  $\lambda$  es autovalor de  $S_p$  o bien es autovalor de  $S_q$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\lambda$  es autovalor de  $S_p$ . Consideremos ahora el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = 0, & p(0) = 0, \\ \dot{q}(t) = 0, & q(0) = 0, \end{cases}$$

cuya solución es

$$(p(t), q(t)) = (0, 0).$$

Para los valores de arranque  $y_0 = (0, 0)$ ,  $y_1 = (h\lambda, 0)$ ,  $\dots$ ,  $y_{k-1} = (h\lambda^{k-1}, 0)$  tenemos que la solución del MLMP es

$$y_n = (p_n, q_n) = (h\lambda^n, 0).$$

Esto se debe a que el vector  $(p_{k-1}, \dots, p_0, 0, \dots, 0)$  es un autovector de  $A$ .

Tenemos que

$$\|p_n\| = h|\lambda|^{n(h)},$$

donde  $n(h)$  es tal que  $t_n = t_0 + nh$ . Como  $n(h) \rightarrow \infty$  cuando  $h \rightarrow 0$  y  $|\lambda| > 1$ , se tiene que:

$$\|p_n\| \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad h \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, el MLMP no es convergente.

Supongamos que hay un autovalor de  $A$ ,  $\lambda^*$ , tal que  $|\lambda^*| = 1$  y es de multiplicidad geométrica  $m \geq 2$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\lambda^*$  es autovalor de multiplicidad geométrica  $m \geq 2$  de  $S_p$ . (Notemos que no puede haber ningún autovalor  $\lambda$  de  $A$  con multiplicidad geométrica 2 tal que sea autovalor de  $S_p$  y  $S_q$  pero con multiplicidad geométrica 1. Esto se debe a que por la estructura por bloques de  $A$ ,  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = 2$ .) Para los valores de arranque  $y_0^* = (0, 0)$ ,  $y_1^* = (h\lambda^*, 0)$ ,  $\dots$ ,  $y_{k-1}^* = ((k-1)\lambda^{*(k-1)}h, 0)$ , se tiene que la solución de (1.1.4) es  $y_n = (n\lambda^{*n}h, 0)$  ya que el vector  $(p_{k-1}^*, \dots, p_0^*, 0, \dots, 0)$  es autovector de  $A$ , donde  $y_n^* = (p_n^*, q_n^*)$  para  $n \in \mathbb{N}$ , debido a que la multiplicidad geométrica de  $\lambda^*$  como autovalor de  $S_p$  es  $m \geq 2$ .

Tenemos que

$$\|p_n^*\| = nh|\lambda^*|^{n(h)} = t_n.$$

que no tiende a 0, para  $t_n \neq 0$ , cuando  $h \rightarrow 0$ . Esto contradice el hecho de que el MLMP sea convergente.  $\square$

Demos ahora una caracterización de convergencia de un MLMP, que probaremos al final de esta sección.

**Teorema 1.4.** *Un MLMP es convergente si y solo si los dos MLM que lo componen son convergentes.*

**Observación 1.1.** *Puesto que los valores de arranque de (1.1.4) son obtenidos a partir de los de (1.1.2), se cumple la condición (1.2.1) de los valores de arranque para la convergencia del MLMP (1.1.4) si y solo si se cumple para los valores de arranque de (1.1.2) y las ecuaciones (1.1.2) se satisfacen en la solución exacta salvo en términos que tiendan a 0 cuando  $h \rightarrow 0$ .*

### 1.2.2. Consistencia

A veces comprobar de forma directa si un MLMP es convergente es una tarea demasiado difícil. Nos preguntamos qué condiciones debe satisfacer un MLMP para que sea convergente. Una de esas condiciones podría ser que sea una representación lo suficientemente precisa del sistema diferencial (1.1.1).

Para medir la precisión del MLMP de  $k$  pasos en (1.1.1), estudiaremos el valor del residuo  $R_{n+k}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , también conocido como error de truncación



local, dado por

$$R_{n+k} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^k \alpha_j^p p(t_{n+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j^p \dot{p}(t_{n+j}) \\ \sum_{j=0}^k \alpha_j^q q(t_{n+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j^q \dot{q}(t_{n+j}) \end{pmatrix},$$

donde  $y(t) = (p(t), q(t))$  es la solución de (1.1.1), con  $p \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^d)$  y  $q \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^{n-d})$ .

Una primera idea para ver si el MLMP se adapta al sistema de ecuaciones diferenciales (1.1.1) sería comprobar si  $R_{n+k} \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Sin embargo, al calcular el límite vemos que

$$R_{n+k} \rightarrow \begin{pmatrix} p(t_n) \sum_{j=0}^k \alpha_j^p \\ q(t_n) \sum_{j=0}^k \alpha_j^q \end{pmatrix}$$

y por tanto, la condición  $R_{n+k} \rightarrow 0$  solo pone una restricción en los coeficientes  $\alpha_j^p$  y  $\alpha_j^q$  de los dos MLM que componen el MLMP. Esto hace que se puedan tomar  $\beta_j^p$  y  $\beta_j^q$  arbitrarios en un MLMP con  $\alpha_j^p$  y  $\alpha_j^q$  cumpliendo la restricción. Parece claro que esto puede no proporcionar una buena aproximación a (1.1.1). Es por ello que estudiaremos si  $R_{n+k}/h \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$  con  $nh$  fijo.

Diremos que un MLMP es consistente si para todo problema de valores iniciales que satisface las hipótesis del teorema 1.4, se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} R_{n+k} = 0.$$

Al igual que en la convergencia, la consistencia solamente depende del método, luego es aplicable a cualquier problema de valores iniciales (1.1.1).

También nos interesa ver cómo de bien se adapta el MLMP a (1.1.1), es decir, cómo de rápido converge  $R_{n+k}/h$  a 0 cuando  $h \rightarrow 0$ . Diremos que un MLMP tiene orden de consistencia  $r > 0$  si  $R_{n+k} = \mathcal{O}(h^{r+1})$ .

Ahora demos una caracterización de consistencia para MLMP.

**Lema 1.5.** *Un MLMP es consistente de orden  $r > 0$  si y solo si los dos MLM que lo componen son consistentes de orden  $r$ .*

*Demostración.* Un MLMP es consistente de orden  $r > 0$ , si y solo si para cualquier problema de valores iniciales suficientemente regular se tiene que el error de truncación local

$$L(p(t), q(t), h) = \begin{bmatrix} \rho_p(E)p(t) \\ \rho_q(E)q(t) \end{bmatrix} - h \begin{bmatrix} \sigma_p(E)\dot{p}(t) \\ \sigma_q(E)\dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

es  $\mathcal{O}(h^{r+1})$ , donde  $E$  es el operador que avanza  $h$  unidades de tiempo y  $(\rho_p, \sigma_p)$ ,  $(\rho_q, \sigma_q)$  son los polinomios característicos asociados a cada uno de los MLM que componen el MLMP. Se tiene, por tanto, que existe  $C > 0$  constante independiente de  $h$  tal que

$$\|L(p(t), q(t), h)\|_{\mathbb{R}^n} \leq Ch^{r+1},$$

para  $h$  suficientemente pequeño, donde  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$  es la norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ . Por definición de norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$\max(\|\rho_p(E)p(t) - h\sigma_p(E)\dot{p}(t)\|_{\mathbb{R}^d}, \|\rho_q(E)q(t) - h\sigma_q(E)\dot{q}(t)\|_{\mathbb{R}^{n-d}}) \leq Ch^{r+1}.$$

Luego, los dos MLM son consistentes de orden  $r$ .

Ahora supongamos que los MLM que componen el MLMP son consistentes de orden  $r$ . Existen  $C_p, C_q > 0$  constantes independientes de  $h$ , tales que

$$\|\rho_p(E)p(t) - h\sigma_p(E)\dot{p}(t)\|_{\mathbb{R}^d} \leq h^{r+1}C_p, \quad \|\rho_q(E)q(t) - h\sigma_q(E)\dot{q}(t)\|_{\mathbb{R}^{n-d}} \leq h^{r+1}C_q,$$

para  $h$  suficientemente pequeño. De aquí se tiene que

$$\|L(p(t), q(t), h)\|_{\mathbb{R}^n} \leq C_ph^{r+1} + C_qh^{r+1} \leq (C_p + C_q)h^{r+1},$$

y por tanto el MLMP es consistente de orden  $r$ .  $\square$

**Observación 1.2.** Usando el desarrollo de Taylor de  $p(t + jh)$ ,  $\dot{p}(t + jh)$ ,  $q(t + jh)$  y  $\dot{q}(t + jh)$  tenemos que

$$\begin{aligned} p(t + jh) &= p(t) + jh\dot{p}(t) + \frac{(jh)^2}{2!}\ddot{p}(t) + \cdots, \\ \dot{p}(t + jh) &= \dot{p}(t) + jh\ddot{p}(t) + \frac{(jh)^2}{2!}p^{(??)}(t) + \cdots, \\ q(t + jh) &= q(t) + jh\dot{q}(t) + \frac{(jh)^2}{2!}\ddot{q}(t) + \cdots, \\ \dot{q}(t + jh) &= \dot{q}(t) + jh\ddot{q}(t) + \frac{(jh)^2}{2!}q^{(??)}(t) + \cdots. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Si sustituimos (1.2.3) en (1.2.2) tenemos

$$L(y(t); h) = \begin{pmatrix} d_0^p p(t) + h d_1^p p'(t) + \cdots + h^j d_j^p p^{(j)}(t) + \cdots \\ d_0^q q(t) + h d_1^q q'(t) + \cdots + h^j d_j^q q^{(j)}(t) + \cdots \end{pmatrix}, \quad (1.2.4)$$

donde  $d_0^p, d_0^q, \dots, d_j^p, d_j^q, \dots$  son los coeficientes que se obtienen de los desarrollos de Taylor en (1.2.3).

A partir de (1.2.2) y (1.2.3) tenemos que un MLMP tiene orden de consistencia  $r > 0$ , y no orden de consistencia  $r + 1$ , si y solo si

$$d_0^p = d_0^q = 0, \dots, d_r^p = d_r^q = 0, d_{r+1}^q \neq 0 \text{ o } d_{r+1}^p \neq 0, \quad (1.2.5)$$

donde

$$\begin{aligned} d_0^p &= \sum_{j=0}^k \alpha_j^p = \rho_p(1), \\ d_0^q &= \sum_{j=0}^k \alpha_j^q = \rho_q(1), \\ d_1^p &= \sum_{j=0}^k (j \alpha_j^p - \beta_j^p) = \rho'_p(1) - \sigma_p(1), \\ d_1^q &= \sum_{j=0}^k (j \alpha_j^q - \beta_j^q) = \rho'_q(1) - \sigma_q(1), \\ &\vdots \\ d_j^p &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{j!} i^j \alpha_i^p - \frac{1}{(j-1)!} \beta_i^p, \quad j = 2, 3, \dots \\ d_j^q &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{j!} i^j \alpha_i^q - \frac{1}{(j-1)!} \beta_i^q, \quad j = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Otra forma de expresar el error de truncación local es

$$L(y(t); h) = \begin{pmatrix} \sigma_p(E) \left( \sum_{l=r}^{J-1} c_l^p h^{l+1} p^{(l+1)}(t) \right) \\ \sigma_q(E) \left( \sum_{l=r}^{J-1} c_l^q h^{l+1} q^{(l+1)}(t) \right) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^{J+1}), \quad (1.2.6)$$

donde  $c_l^p$  y  $c_l^q$  son distintos de  $d_l^p$  y  $d_l^q$ . Esta expresión nos será de gran utilidad en el siguiente capítulo. Solo haremos la prueba para MLMP convergentes, que son los que utilizaremos en el siguiente capítulo.

Consideremos un MLMP con polinomios característicos  $\rho_p, \rho_q, \sigma_p, \sigma_q$ , luego necesariamente  $\sigma_p(1) \neq 0$  y  $\sigma_q(1) \neq 0$ . Las ecuaciones de (1.2.6) las podemos escribir de la siguiente forma

$$L(y(t); h) = \left( \frac{\sum_{l=r}^{J-1} c_l^p h^{l+1} \left( \sum_{j=0}^k \beta_j^p p^{(l+1)}(t + jh) \right)}{\sum_{l=r}^{J-1} c_l^q h^{l+1} \left( \sum_{j=0}^k \beta_j^q q^{(l+1)}(t + jh) \right)} \right) + \mathcal{O}(h^{J+1}).$$

Haciendo el desarrollo de Taylor de  $y^{(l+1)}(t + nh)$ , para  $l = r, \dots, J-1$  y  $n = 1, \dots, k$ , de orden  $J-l-1$  en torno a  $t$ , tenemos que la anterior ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned} & \sum_{l=r}^{J-1} c_l^p h^{l+1} \left( \sum_{j=0}^k \beta_j^p \left( p^{(l+1)}(t) + jh p^{(l+2)}(t) + \dots + \frac{(jh)^{J-l-1}}{(J-l-1)!} p^{(J)}(t) \right) \right), \\ & \sum_{l=r}^{J-1} c_l^q h^{l+1} \left( \sum_{j=0}^k \beta_j^q \left( q^{(l+1)}(t) + jh q^{(l+2)}(t) + \dots + \frac{(jh)^{J-l-1}}{(J-l-1)!} q^{(J)}(t) \right) \right). \end{aligned}$$

Reordenando las anteriores ecuaciones según la potencia de  $h$  e igualando los coeficientes con los de (1.2.4), tenemos para cada  $l = r, \dots, J-1$ .

$$\begin{aligned} d_{l+1}^p &= c_l^p \sigma_p(1) + c_{l-1}^p \sigma'_p(1) + \sum_{i=2}^{l-r} c_{l-i}^p \sigma_{p,i}, \\ d_{l+1}^q &= c_l^q \sigma_q(1) + c_{l-1}^q \sigma'_q(1) + \sum_{i=2}^{l-r} c_{l-i}^q \sigma_{q,i}, \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_{p,i} &= \sum_{j=1}^k \beta_j^p \frac{j^i}{i!}, \\ \sigma_{q,i} &= \sum_{j=1}^k \beta_j^q \frac{j^i}{i!}, \quad i = 2, \dots, r. \end{aligned}$$

En (1.2.7) tenemos dos sistemas de  $J - r$  ecuaciones con  $J - r$  incógnitas cuyas matrices asociadas son matrices triangulares inferiores invertibles, luego existe solución y es única.

A partir del lema 1.5 y teniendo en cuenta que un MLM con polinomios característicos  $(\rho, \sigma)$  es consistente si y solo si

$$\rho(1) = 0, \quad \sigma(1) = \rho'(1),$$

podemos dar otra caracterización de un MLMP consistente.

**Teorema 1.6.** *Tomemos un MLMP con polinomios característicos  $\rho_p(x), \sigma_p(x)$  y  $\rho_q(x), \sigma_q(x)$ . Un MLMP es consistente si y sólo si*

$$\begin{aligned} \rho_p(1) &= 0, & \sigma_p(1) &= \rho'_p(1), \\ \sigma_q(1) &= 0, & \sigma_q(1) &= \rho'_q(1). \end{aligned}$$

**Observación 1.3.** *Notemos que en el caso en el que  $k_p < k_q$ , da igual imponer la condición sobre  $(\rho_p, \sigma_p)$  y  $(\rho_q, \sigma_q)$  en (1.1.3) que sobre  $(\rho_p^*, \sigma_p^*)$  y  $(\rho_q^*, \sigma_q^*)$  en (1.1.5). Por ello, el MLMP (1.1.2) es consistente si y solo si (1.1.4) también lo es.*

También, al igual que para MLM de  $k$  pasos, se cumple que si un MLMP es convergente, entonces podemos garantizar su consistencia.

**Teorema 1.7.** *Si un MLMP es convergente, entonces es consistente.*

*Demostración.* Podemos realizar esta demostración con el MLMP (1.1.4) gracias a la observación 1.3. Apliquemos este MLMP con valores de arranque  $p_0 = q_0 = 1, \dots, p_{k-1} = q_{k-1} = 1$  al siguiente problema de valores iniciales particionado

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = 0, & p(0) = 1, \\ \dot{q}(t) = 0, & q(0) = 1, \end{cases}$$

cuya solución exacta es  $y(t) = (p(t), q(t)) = (1, 1)$ . Sustituyendo  $f(p(t), q(t)) = g(p(t), q(t)) = 0$  en (1.1.4) tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_k^p p_{n+k} + \alpha_{k-1}^p p_{n+k-1} + \dots + \alpha_0^p p_n &= 0, \\ \alpha_k^q q_{n+k} + \alpha_{k-1}^q q_{n+k-1} + \dots + \alpha_0^q q_n &= 0, \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

con  $n \geq 0$ , donde  $\alpha_k^p, \dots, \alpha_0^p, \alpha_k^q, \dots, \alpha_0^q$  son los coeficientes de los dos polinomios característicos  $\rho_p$  y  $\rho_q$  de los MLM que componen el MLMP.

Como dicho método es convergente se tiene que las sucesiones  $\{p_{k+n}^{h_n}\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{q_{k+n}^{h_n}\}_{n=0}^{\infty}$  convergen a la solución  $y(t_k) = (p(t_k), q(t_k)) = (1, 1)$ , donde  $y_{k+n}^{h_n}$  es la solución del MLMP (1.2.8) con longitud de paso  $h_n = kh/(n+k)$ , con  $h > 0$ .

Como (1.2.8) no depende de la longitud de paso, se tiene que

$$\{p_{k+n}^{h_n}\}_{n=0}^{\infty} = \{p_{k+n}^h\}_{n=0}^{\infty}$$

y

$$\{q_{k+n}^{h_n}\}_{n=0}^{\infty} = \{q_{k+n}^h\}_{n=0}^{\infty}.$$

Por tanto las sucesiones

$$\{p_{k+n}^h\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{q_{k+n}^h\}_{n=0}^{\infty}$$

convergen a 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ . Haciendo  $n \rightarrow \infty$  en (1.2.8) se tiene que  $\rho_p(1) = \rho_q(1) = 0$ .

Ahora probaremos que  $\rho'_p(1) = \sigma_p(1)$  y  $\rho'_q(1) = \sigma_q(1)$  pero notemos que por el teorema 1.3 se tiene que 1 no puede ser raíz doble de  $\rho_p$  y  $\rho_q$ , luego  $\rho'_p(1) \neq 1$  y  $\rho'_q(1) \neq 1$ .

Apliquemos (1.1.4) con valores de arranque  $p_0 = q_0 = 0, \dots, p_{k-1} = C_p(k-1)h$ ,  $q_{k-1} = C_q(k-1)h$ , donde  $C_p = \sigma_p(1)/\rho'_p(1)$  y  $C_q = \sigma_q(1)/\rho'_q(1)$ , al siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = 1 & p(0) = 0, \\ \dot{q}(t) = 1 & q(0) = 0, \end{cases} \quad (1.2.9)$$

cuya solución exacta es  $y(t) = (t, t)$  y donde  $h$  es la longitud de paso del MLMP.

Por (1.2.9) y los valores de arranque que hemos tomado, tenemos que (1.1.4) es

$$\begin{aligned} \alpha_k^p p_k + \alpha_{k-1}^p C_p(k-1)h + \dots + \alpha_1^p C_p h &= h\sigma_p(1), \\ \alpha_k^q q_k + \alpha_{k-1}^q C_q(k-1)h + \dots + \alpha_1^q C_q h &= h\sigma_q(1), \end{aligned}$$

que podemos ponerlo como

$$\begin{aligned}\alpha_k^p p_k &= h \left[ \sigma_p(1) - C_p \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l^p l \right], \\ \alpha_k^q q_k &= h \left[ \sigma_q(1) - C_q \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l^q l \right].\end{aligned}$$

Sumando y restando a las ecuaciones anteriores  $\alpha_k^p k h C_p$  y  $\alpha_k^q k h C_q$  respectivamente se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha_k^p p_k &= h \left( \sigma_p(1) - C_p \sum_{l=0}^k \alpha_l^p l + C_p \alpha_k^p k \right), \\ \alpha_k^q q_k &= h \left( \sigma_q(1) - C_q \sum_{l=0}^k \alpha_l^q l + C_q \alpha_k^q k \right).\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{l=0}^k \alpha_l^p l = \rho'_p(1)$$

y

$$\sum_{l=0}^k \alpha_l^q l = \rho'_q(1)$$

se tiene que  $\alpha_k^p p_k = \alpha_k^p h k C_p$  y  $\alpha_k^q q_k = \alpha_k^q h k C_q$ , luego

$$y_k = (p_k, q_k) = (h k C_p, h k C_q).$$

Razonando por inducción se tiene que  $y_n = (p_n, q_n) = (h n C_p, h n C_q)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Como el MLMP (1.1.4) es convergente, necesariamente

$$C_p = \sigma_p(1)/\rho'_p(1) = 1 \quad \text{y} \quad C_q = \sigma_q(1)/\rho'_q(1) = 1.$$

□

### 1.2.3. Cero - estabilidad

Sabemos que si un MLMP es convergente entonces es consistente, pero el recíproco no tiene por qué ser cierto. Puede ocurrir que el sistema en diferencias (1.1.4) aplicado a un problema de valores iniciales (1.1.1) sufra inestabilidad, es decir, que sea muy sensible a perturbaciones originadas en (1.1.4) y en los valores de arranque. Esto impide que (1.1.4) pueda converger. El MLMP perturbado sería entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^k \alpha_j^p p_{n+j} &= h \sum_{j=0}^k \beta_j^p f(p_{n+j}, q_{n+j}) + h \gamma_{n+k}^p, \\ \sum_{j=0}^k \alpha_j^q q_{n+j} &= h \sum_{j=0}^k \beta_j^q g(p_{n+j}, q_{n+j}) + h \gamma_{n+k}^q,\end{aligned}$$

con condiciones iniciales  $p_\mu^* = p_\mu + \gamma_\mu^p$ ,  $q_\mu^* = q_\mu + \gamma_\mu^q$  perturbadas, para  $\mu = 0, \dots, k-1$ .

Sean  $\gamma_n^p, \gamma_n^q, n = 0, 1, \dots, N$  y  $\gamma_n^{p,*}, \gamma_n^{q,*}, n = 0, 1, \dots, N$ , dos perturbaciones de un MLMP y sean

$$\{y_n, n = 0, \dots, N\} \quad \text{y} \quad \{y_n^*, n = 0, \dots, N\}$$

las dos soluciones de los sistemas en diferencias perturbados respectivamente.

Si para cada  $\epsilon > 0$  existe una constante real  $b > 0$  y  $h_0 > 0$  tales que para cada  $h \in [0, h_0]$  se verifica que:

$$\|y_n - y_n^*\| \leq \epsilon \quad \text{para} \quad 0 \leq n \leq N,$$

cuando

$$\max(\|\gamma_n^{p,*} - \gamma_n^p\|, \|\gamma_n^{q,*} - \gamma_n^q\|) < b, \quad 0 \leq n \leq N,$$

entonces decimos que el MLMP es cero-estable.

Comprobar la cero-estabilidad de un MLMP a partir de la definición suele ser una tarea a veces complicada. Por lo tanto probaremos que la condición de los autovalores sobre la matriz  $A$  (1.1.7), utilizada para reescribir un MLMP como método de un solo paso, es equivalente a que dicho método sea cero-estable.



La condición de los autovalores de  $A$  junto con la consistencia de un MLMP nos permitirá probar la convergencia de manera más asequible que aplicando la definición literal de cero-estabilidad. Pero antes enunciaremos un lema importante para demostrar este resultado.

**Lema 1.8.** *Supongamos que un MLMP es 0-estable. Entonces existe una norma vectorial tal que la matriz  $A$  del MLMP formulado como método de un paso satisface*

$$\|A \otimes I\| \leq 1$$

*en la norma matricial subordinada.*

La demostración de este lema es igual que la realizada en [8] para MLM. Lo único que importa para esta demostración son las características de los autovalores, que son iguales a la unión de los autovalores de las matrices de [8] asociadas a  $\rho_p$  y  $\rho_q$  en la reconstrucción de un MLM como método de un paso.

Ahora sí pasemos a la demostración del teorema que posteriormente nos podrá garantizar que la cero-estabilidad y la consistencia son condiciones necesarias y suficientes para que un MLMP sea convergente.

**Teorema 1.9.** *Un MLMP de  $k$  pasos (1.1.4) es convergente si y solo si es consistente y la matriz  $A$  que se utiliza para reescribir el MLMP como método de un paso cumple la condición de los autovalores.*

*Demostración.* Ya ha sido probado en el teorema 2.6 que si un MLMP es convergente entonces es consistente. También se probó en el teorema 1.3 que si un MLMP es convergente entonces la matriz  $A$  cumple la condición de los autovalores.

Veamos ahora la otra implicación. Supongamos que el MLMP (1.1.2) es consistente y tal que la matriz de dicho método reescrito como método de un paso cumple la condición de los autovalores. Consideremos un problema de valores iniciales lo suficientemente regular. Es inmediato probar que la función  $\phi(Y_i)$  satisface la condición de Lipschitz.

Consideremos los errores cometidos en los valores de arranque

$$p(t_i) = p_i + \sigma_i^p, \quad q(t_i) = q_i + \sigma_i^q, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Sustituyamos en el MLMP los valores aproximados por la solución en (1.1.1), teniendo en cuenta los errores de truncación local

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^k \alpha_l^p p(t_{n+l}) &= h \sum_{l=0}^k \beta_l^p f(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) + \sigma_{n+k}^p, \\ \sum_{l=0}^k \alpha_l^q q(t_{n+l}) &= h \sum_{l=0}^k \beta_l^q g(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) + \sigma_{n+k}^q.\end{aligned}\quad (1.2.10)$$

Restando a las ecuaciones (1.2.10) las ecuaciones de MLMP tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^k \alpha_l^p (p(t_{n+l}) - p_{n+l}) &= h \sum_{l=0}^k \beta_l^p (f(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) - f(p_{n+l}, q_{n+l})) + \sigma_{n+k}^p, \\ \sum_{l=0}^k \alpha_l^q (q(t_{n+l}) - q_{n+l}) &= h \sum_{l=0}^k \beta_l^q (g(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) - g(p_{n+l}, q_{n+l})) + \sigma_{n+k}^q.\end{aligned}$$

Consideremos el vector que contiene  $k$  errores de discretización global para  $p$  y  $q$ . Más concretamente,

$$E_n = \begin{bmatrix} p(t_{n+k-1}) - p_{n+k-1} \\ \vdots \\ p(t_n) - p_n \\ q(t_{n+k-1}) - q_{n+k-1} \\ \vdots \\ q(t_n) - q_n \end{bmatrix}$$

y  $\sigma_{n+k} \in \mathbb{R}^{nk}$  tal que sus  $d$  primeras coordenadas son  $\sigma_{n+k}^p / \alpha_k^p$  y las coordenadas que van de  $dk+1$  a  $dk+n-d$  son  $\sigma_{n+k}^q / \alpha_k^q$ . Las restantes coordenadas son nulas.

Se tiene que

$$E_{n+1} = (A \otimes I)E_n + h(\phi(Y(t_n)) - \phi(Y_n)) + \sigma_{n+k}.$$

Denotamos por  $L$  a la constante de la condición de Lipschitz de  $\phi$ . Sabemos por el lema 1.8 que, para cierta norma,  $\|A \otimes I\| \leq 1$  y además  $\|(A \otimes I)^n\| \leq \|(A \otimes I)\|^n \leq 1$ . Entonces tenemos que

$$\|E_1\| \leq \|E_0\| + hL\|Y_0 - Y_0(t_0)\| + \|\sigma_k\| = \|\sigma_k\| + (1 + hL)\|E_0\|.$$

Para  $n = 2$  tenemos

$$\begin{aligned} E_2 &= (A \otimes I)E_1 + h(\phi(Y(t_1)) - \phi(Y_1)) + \sigma_{k+1} \\ &= (A \otimes I)^2 E_0 + h(A \otimes I)(\phi(Y(t_0)) - \phi(Y_0)) + (A \otimes I)\sigma_k \\ &\quad + h(\phi(Y(t_1)) - \phi(Y_1)) + \sigma_{k+1}, \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Acotando de nuevo con la norma del lema 1.8 tenemos que

$$\begin{aligned} \|E_2\| &\leq \|E_0\| + hL\|E_0\| + hL\|E_1\| + \|\sigma_k\| + \|\sigma_{k+1}\| \\ &\leq (1 + hL)^2\|E_0\| + (1 + hL)\|\sigma_k\| + \|\sigma_{k+1}\|. \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Razonando por inducción sobre  $n$  llegamos a que

$$\begin{aligned} \|E_n\| &\leq (1 + hL)^n\|E_0\| + (1 + hL)^{n-1}\|\sigma_k\| + \dots \\ &\quad + (1 + hL)\|\sigma_{n+k-2}\| + \|\sigma_{n+k-1}\|. \end{aligned}$$

Esto nos permite probar que

$$\|E_n\| \leq (1 + hL)^n\|E_0\| + Ch^{r+1}[(1 + hL)^{n-1} + \dots + 1],$$

para cierta constante  $C$  y donde  $r$  es el orden de consistencia del MLMP.

Debido a la fórmula para sumas geométricas y a que  $(1+hL)^n \leq \exp(nhL)$  se tiene

$$\|E_n\| \leq \|E_0\| \exp(nhL) + Ch^r \frac{\exp(nhL) - 1}{L}.$$

La convergencia del MLMP es ahora inmediata por esta desigualdad cuando  $h \rightarrow 0$ . También se observa que como el método tiene orden de consistencia  $r$  podemos garantizar que la convergencia es de orden  $r$  siempre que los errores en los valores de arranque sean de orden  $r$ .  $\square$

Demos ahora una caracterización de MLMP cero-estable cuya demostración es similar a la realizada en el teorema 1.9.

**Teorema 1.10.** *Un MLMP es cero-estable si y solo si la matriz asociada (1.1.7) cumple la condición de los autovalores.*

Gracias a los teoremas 2.9 y 2.10 podemos garantizar el siguiente resultado:

**Teorema 1.11.** *Un MLMP es convergente si y solo si es cero-estable y consistente.*

También podemos dar otra caracterización de MLMPs relacionada con la cero-estabilidad de los dos MLM que lo componen.

**Teorema 1.12.** *Un MLMP es cero-estable si y solo si los dos MLM que lo componen son cero-estables.*

*Demostración.* Recordemos que un MLM con polinomio característico  $\rho(x) = \alpha_k x^k + \dots + \alpha_0$  puede escribirse como método de un solo paso de la siguiente forma

$$Y_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} & \dots & -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} & -\frac{\alpha_0}{\alpha_k} \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} \\ y_{k-2} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} + h\phi(Y_{k-1}),$$

donde  $\phi(Y_k)$  es una combinación lineal de la función  $f$  del problema de valores iniciales suficientemente regular que integra el MLM. Los MLM son cero-estables si y solo si los autovalores de la matriz de la ecuación anterior son de módulo  $\leq 1$  y los de módulo 1 son simples, que es equivalente a que el MLM cumpla la condición de la raíz.

Consideremos el MLMP reescrito como método de un solo paso con matriz  $A$ . Sabemos que  $A$  es una matriz por bloques, es decir,

$$A = \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & S_q \end{bmatrix}, \quad (1.2.13)$$

donde  $S_p$  y  $S_q$  son las matrices que aparecen en (1.1.8) y (1.1.9). Por la forma de  $A$ , los autovalores de  $A$  son los mismos que los de  $S_p$  y  $S_q$ , luego la equivalencia del teorema es inmediata gracias al teorema 1.10.  $\square$

Por el anterior teorema, el lema 2.5 y el teorema 1.11 se prueba de forma inmediata el teorema 1.4.

### 1.3. Simetría

Sea  $\Psi_h$  una función que define el MLMP. Al igual que los MLM, un MLMP de  $k$  pasos es simétrico si y sólo si, siempre que

$$y_{n+k} = \Psi_h(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1})$$

se tiene que

$$y_n = \Psi_{-h}(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \dots, y_{n+1}).$$

Recordemos que en la asignatura '*Integración Geométrica*' del máster de Matemáticas se tenía que un MLM de  $k$  pasos convergente es simétrico si y solo si los coeficientes del primer y segundo polinomio característico cumplen

$$\alpha_j = -\alpha_{k-j}, \quad \beta_j = \beta_{k-j}.$$

Consideremos el MLMP (1.1.2) escrito como

$$(p_k, q_k) = \phi_h(p_0, \dots, p_{k_p} - 1, q_0, \dots, q_{k_q-1}). \quad (1.3.1)$$

Demostremos ahora una caracterización de un MLMP simétrico:

**Lema 1.13.** *Un MLMP convergente es simétrico si y solo si los dos MLM que lo componen son simétricos.*

*Demostración.* Un MLMP de  $k$  pasos es simétrico siempre que

$$(p_k, q_k) = \phi_h(p_0, \dots, p_{k_p-1}, q_0, \dots, q_{k_q-1})$$

implique que

$$\phi_{-h}(p_k, \dots, p_{k-k_p+1}, q_k, \dots, q_{k-k_q+1}) = (p_0, q_0). \quad (1.3.2)$$

Supongamos que cada uno de los MLM que componen el MLMP son simétricos, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_j^p &= -\alpha_{k_p-j}^p, & \beta_j^p &= \beta_{k_p-j}^p, \\ \alpha_j^q &= -\alpha_{k_q-j}^q, & \beta_j^q &= \beta_{k_q-j}^q. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

donde estos coeficientes corresponden al método (1.1.2). También supongamos sin pérdida de generalidad que  $k_p \leq k$ , siendo  $k = \max(k_q, k_p) = k_q$ . Tenemos que, si suponemos (1.3.1), que es equivalente a

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{k_p} \alpha_j^p p_j &= h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_j^p f(p_j, q_j), \\
 \sum_{j=0}^{k_p} \alpha_j^p p_{j+1} &= h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_j^p f(p_{j+1}, q_{j+1}), \\
 &\vdots \\
 \sum_{j=0}^{k_p} \alpha_j^p p_{j+k-k_p} &= h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_j^p f(p_{j+k-k_p}, q_{j+k-k_p}), \\
 \sum_{j=0}^{k_q} \alpha_j^q q_j &= h \sum_{j=0}^{k_q} \beta_j^q g(p_j, q_j),
 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

reordenando los sumandos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{k_p} \alpha_{k_p-j}^p p_{k_p-j} &= h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_{k_p-j}^p f(p_{k_p-j}, q_{k_p-j}), \\
 \sum_{j=0}^{k_p} \alpha_{k_p-j}^p p_{k_p-j+1} &= h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_{k_p-j}^p f(p_{k_p-j+1}, q_{k_p-j+1}), \\
 &\vdots \\
 \sum_{j=0}^{k_p} \alpha_{k_p-j}^p p_{k-j} &= h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_{k_p-j}^p f(p_{k-j}, q_{k-j}), \\
 \sum_{j=0}^{k_q} \alpha_{k-j}^q q_{k-j} &= h \sum_{j=0}^{k_q} \beta_{k_q-j}^q g(p_{k-j}, q_{k-j}),
 \end{aligned}$$

y utilizando (1.3.3), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{k_p} \alpha_j^p p_{k_p-j} &= -h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_j^p f(p_{k_p-j}, q_{k_p-j}), \\
 \sum_{j=0}^{k_p} \alpha_j^p p_{k_p-j+1} &= -h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_j^p f(p_{k_p-j+1}, q_{k_p-j+1}), \\
 &\vdots \\
 \sum_{j=0}^{k_p} \alpha_j^p p_{k-j} &= -h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_j^p f(p_{k-j}, q_{k-j}), \\
 \sum_{j=0}^{k_q} \alpha_j^q q_{k-j} &= -h \sum_{j=0}^{k_q} \beta_j^q g(p_{k-j}, q_{k-j}), \tag{1.3.5}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos la simetría del MLMP.

Supongamos ahora que el MLMP es simétrico. Por definición de simetría, si se cumple (1.3.4), se cumple (1.3.5). Particularizando al sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{p} &= f(p), \\
 \dot{q} &= g(q),
 \end{aligned}$$

y partiendo de  $p_0, \dots, p_{k_p-1}$ , el hecho de que

$$\sum_{j=0}^{k_p} \alpha_j^p p_j = h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_j^p f(p_j),$$

es equivalente a la primera ecuación de (1.3.4). Tomemos entonces  $p_{k_p+1}, \dots, p_k$ , de manera que se cumplen el resto de ecuaciones de (2.3.4).

Por la primera de las ecuaciones de (1.3.5), que en este caso se escribe como

$$\sum_{j=0}^{k_p} \alpha_j^p p_{k_p-j} = -h \sum_{j=0}^{k_p} \beta_j^p f(p_{k_p-j}),$$

se tiene que cuando damos el paso  $-h$  desde  $p_{k_p}, \dots, p_1$ , se llega a  $p_0$ , por tanto el primer MLM  $(\rho_p, \sigma_p)$  es simétrico.

Razonando de manera análoga pero con menor dificultad, se justifica que el MLM  $(\rho_q, \sigma_q)$  es simétrico.  $\square$

Gracias al anterior lema y a que un MLM de  $k$ -pasos convergente con polinomios característicos  $(\rho(x), \sigma(x))$  es simétrico si y solo si

$$\rho(x) = -x^k \rho(1/x) \quad \text{y} \quad \sigma(x) = x^k \sigma(1/x),$$

podemos dar otra caracterización de MLMP simétrico.

**Lema 1.14.** *Un MLMP convergente es simétrico si y solo si los polinomios característicos  $\rho_p(x), \rho_q(x), \sigma_p(x)$  y  $\sigma_q(x)$  en (1.1.3) cumplen que*

$$\begin{aligned} \rho_p(x) &= -x^{k_p} \rho_p(1/x), & \rho_q(x) &= -x^{k_q} \rho_q(1/x), \\ \sigma_p(x) &= x^{k_p} \sigma_p(1/x), & \sigma_q(x) &= x^{k_q} \sigma_q(1/x). \end{aligned}$$



## Capítulo 2

# Desarrollo asintótico del error global

El objetivo de este capítulo será realizar un estudio de tipo cuantitativo sobre el error de discretización global. En concreto nos interesará el comportamiento del error para valores de  $h > 0$  suficientemente pequeños, limitándonos a estudiar expresiones del error de discretización global que contienen potencias de  $h$ , para  $j < 2r$ , donde  $r > 0$  es el orden del método. Para ello, al igual que en los MLM, probaremos el desarrollo asintótico del error para MLMP, cuya demostración está basada en la realizada en [1], pero antes de probar dicho desarrollo, daremos una serie de conceptos importantes y demostraremos una modificación del lema 5.6 de [9] para métodos lineales multipaso no particionados. Para probar este lema necesitaremos probar este otro, ya probado en [9].

**Lema 2.1.** *Sea  $\rho(\xi) = \alpha_k \xi^k + \alpha_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + \alpha_0$  un polinomio que satisface la condición de cero-estabilidad, y sean  $\gamma_l$  (con  $l = 0, 1, 2, \dots$ ) coeficientes tales que*

$$\frac{1}{\hat{\rho}(\xi)} = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \xi^2 + \dots \quad (2.0.1)$$

donde  $\hat{\rho}(\xi) = \alpha_k + \alpha_{k-1} \xi + \dots + \alpha_0 \xi^k$ . Entonces,

$$\Gamma = \sup\{|\gamma_l| : l \in \mathbb{N}\} < \infty \quad (2.0.2)$$

*Demostración.* Tenemos que  $\hat{\rho}(\xi) = \xi^k \rho(\xi^{-1})$  y por tanto las raíces de  $\hat{\rho}$  son las inversas de las raíces de  $\rho$ . Como  $\rho$  cumple la condición de cero-estabilidad,  $\rho$  no tiene raíces de módulo mayor que 1, luego  $\hat{\rho}(\xi)$  no se anula dentro del disco abierto  $B(0, 1) \subset \mathbb{C}$ . Por tanto,  $1/\hat{\rho}(\xi)$  es holomorfa en  $|\xi| < 1$ .

Sabemos por resultados ilustrados en la asignatura "*Variable Compleja*" del grado de Matemáticas que si tenemos un polinomio  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  con raíces  $z_1, \dots, z_m$  con multiplicidad  $l_1, l_2, \dots, l_m$ , se tiene que existen coeficientes  $b_{1,1}, \dots, b_{1,l_1}, b_{2,1}, \dots, b_{m,1}, \dots, b_{m,l_m}$  tales que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(z)} &= \frac{b_{1,1}}{(z - z_1)} + \frac{b_{1,2}}{(z - z_1)^2} + \dots + \frac{b_{1,l_1}}{(z - z_1)^{l_1}} + \dots + \frac{b_{m,1}}{(z - z_m)} \\ &\quad + \frac{b_{m,2}}{(z - z_m)^2} + \dots + \frac{b_{m,l_m}}{(z - z_m)^{l_m}}. \end{aligned}$$

Las raíces de  $\rho(\xi)$  de módulo 1,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  son simples, porque  $\rho$  cumple la condición de estabilidad. Por tanto existen constantes  $A_1, \dots, A_n$  de forma que la función

$$f(\xi) = \frac{1}{\hat{\rho}(\xi)} - \left( \frac{A_1}{\xi - z_1} + \dots + \frac{A_n}{\xi - z_n} \right),$$

es holomorfa en  $\overline{B}(0, 1)$  y por consiguiente está acotada en el mismo disco. Usando las fórmulas de diferenciación de Cauchy, vistas también en la asignatura "*Variable Compleja*", podemos concluir que los coeficientes del desarrollo de Taylor de  $f$  en 0 están acotados. Como los coeficientes del desarrollo de Taylor de  $A_\mu/(\xi - z_\mu)$  también están acotados para  $\mu = 0, \dots, n$ , se cumple (2.0.2).  $\square$

**Observación 2.1.** *Vemos que a partir de este lema se obtiene la siguiente igualdad:*

$$\alpha_k \gamma_l + \alpha_{k-1} \gamma_{l-1} + \dots + \alpha_0 \gamma_{l-k} = \begin{cases} 1, & \text{si } l = 0 \\ 0, & \text{si } l > 0 \end{cases}$$

donde  $\gamma_l$  son los coeficientes del anterior lema para  $l \geq 0$  y para  $l < 0$ ,  $\gamma_l = 0$ . Esto se debe a que si multiplicamos ambos lados de la ecuación (2.0.1) por  $\alpha_k + \alpha_{k-1}\zeta + \dots + \alpha_0\zeta^k$ , obtenemos por la derecha un polinomio con variable  $\zeta$  y por la izquierda 1. Basta igualar los coeficientes de  $\zeta^j$  para obtener el resultado, para  $j \in \mathbb{N}$ .

El siguiente lema establece cómo crecen las soluciones de estas dos ecuaciones en diferencias no homogéneas acopladas.

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{k_p}^p z_{m+k_p} + \dots + \alpha_0^p z_m \\
 &= h \left[ \beta_{k_p, m}^{pp} z_{m+k_p} + \dots + \beta_{0, m}^{pp} z_m + \beta_{k_p, m}^{pq} w_{m+k_p} + \dots + \beta_{0, m}^{pq} w_m \right] + \lambda_m^p, \\
 & \alpha_{k_q}^q w_{m+k_q} + \dots + \alpha_0^q w_m \\
 &= h \left[ \beta_{k_q, m}^{qp} z_{m+k_q} + \dots + \beta_{0, m}^{qp} z_m + \beta_{k_q, m}^{qq} w_{m+k_q} + \dots + \beta_{0, m}^{qq} w_m \right] + \lambda_m^q. \tag{2.0.3}
 \end{aligned}$$

**Lema 2.2.** Sean  $\rho_p(\xi) = \alpha_{k_p}^p \xi^{k_p} + \dots + \alpha_0^p$  y  $\rho_q(\xi) = \alpha_{k_q}^q \xi^{k_q} + \dots + \alpha_0^q$  polinomios que satisfacen la condición de cero-estabilidad. Sean  $\beta_{pp}^*$ ,  $\beta_{pq}^*$ ,  $\beta_{qp}^*$ ,  $\beta_{qq}^*$ ,  $\beta_{pp}$ ,  $\beta_{pq}$ ,  $\beta_{qp}$ ,  $\beta_{qq}$ ,  $\lambda_p$  y  $\lambda_q$  constantes tales que para  $n = 0, 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}
 |\beta_{k_p, n}^{pp}| + \dots + |\beta_{0, n}^{pp}| &\leq \beta^{*, pp}, \\
 |\beta_{k_q, n}^{qp}| + \dots + |\beta_{0, n}^{qp}| &\leq \beta^{*, qp}, \\
 |\beta_{k_p, n}^{pq}| + \dots + |\beta_{0, n}^{pq}| &\leq \beta^{*, pq}, \\
 |\beta_{k_q, n}^{qq}| + \dots + |\beta_{0, n}^{qq}| &\leq \beta^{*, qq}, \tag{2.0.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\beta_{k_p, n}^{pp}| &\leq \beta^{pp}, & |\beta_{k_p, n}^{pq}| &\leq \beta^{pq}, \\
 |\beta_{k_q, n}^{qp}| &\leq \beta^{qp}, & |\beta_{k_q, n}^{qq}| &\leq \beta^{qq}, \\
 |\lambda_n^p| &\leq \lambda^p, & |\lambda_n^q| &\leq \lambda^q, \tag{2.0.5}
 \end{aligned}$$

y sea, para  $\beta^p = 2 \max(\beta^{pp}, \beta^{pq})$  y  $\beta^q = 2 \max(\beta^{qp}, \beta^{qq})$ ,  $h$  tal que

$$0 < h < \frac{1}{2} \min \left( \frac{|\alpha_{k_p}^p|}{\beta^p}, \frac{|\alpha_{k_q}^q|}{\beta^q} \right). \tag{2.0.6}$$

Entonces, toda solución de (2.0.3) para la cual

$$|z_n| \leq z^p, \quad n = 0, 1, \dots, k_p - 1 \quad y \quad |w_n| \leq z^q, \quad n = 0, 1, \dots, k_q - 1, \quad (2.0.7)$$

cumple

$$|z_n| \leq K^* e^{nhL^*}, \quad |w_n| \leq K^* e^{nhL^*}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (2.0.8)$$

donde  $L^* = \Gamma^* B^*$ ,  $K^* = \Gamma^*(N\Lambda + ZKA)$  y

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= 2 \max \left( \frac{\Gamma^p}{1 - h|\alpha_{k_p}^p|^{-1}\beta^p}, \frac{\Gamma^q}{1 - h|\alpha_{k_q}^q|^{-1}\beta^q} \right), \\ B^* &= 2 \max(\beta^{*,pp}, \beta^{*,pq}, \beta^{*,qp}, \beta^{*,qq}), \\ \Lambda &= \max(\lambda^p, \lambda^q), \\ A &= \max \left( |\alpha_{k_p}^p| + \dots + |\alpha_0^p|, \dots, |\alpha_{k_q}^q| + \dots + |\alpha_0^q| \right), \\ Z &= \max(z^p, z^q), \\ k &= \max(k_p, k_q). \end{aligned} \quad (2.0.9)$$

*Demostración.* Sean  $\gamma_\ell^p$  y  $\gamma_{\ell'}^q$  los coeficientes que se obtienen del lema 3.1 para los polinomios  $\rho_p(\zeta)$  y  $\rho_q(\zeta)$  respectivamente. Para  $\ell = 0, 1, \dots, n - k_p$  y  $\ell' = 0, 1, \dots, n - k_q$ , vamos a ir multiplicando a las ecuaciones de (2.0.3) por  $\gamma_\ell^p$  y  $\gamma_{\ell'}^q$  respectivamente, donde  $m = n - k_p - \ell$  (resp.  $m = n - k_q - \ell'$ ). Sumando todas las ecuaciones obtenidas para cada  $\ell$  (resp.  $\ell'$ ), tenemos a la izquierda

$$\begin{aligned} S_n^p &= (\alpha_{k_p}^p z_n + \dots + \alpha_0^p z_{n-k_p})\gamma_0^p + (\alpha_{k_p}^p z_{n-1} + \dots + \alpha_0^p z_{n-k_p-1})\gamma_1^p + \dots \\ &\quad + (\alpha_{k_p}^p z_{k_p} + \dots + \alpha_0^p z_0)\gamma_{n-k_p}^p, \end{aligned} \quad (2.0.10)$$

$$\begin{aligned} S_n^q &= (\alpha_{k_q}^q w_n + \dots + \alpha_0^q w_{n-k_q})\gamma_0^q + (\alpha_{k_q}^q w_{n-1} + \dots + \alpha_0^q w_{n-k_q-1})\gamma_1^q + \dots \\ &\quad + (\alpha_{k_q}^q w_{k_q} + \dots + \alpha_0^q w_0)\gamma_{n-k_q}^q. \end{aligned} \quad (2.0.11)$$

Reordenando dichas sumas tenemos

$$\begin{aligned} S_n^p &= \alpha_{k_p}^p \gamma_0^p z_n + (\alpha_{k_p}^p \gamma_1^p + \alpha_{k_p-1}^p \gamma_0^p) z_{n-1} + \dots + \alpha_0^p \gamma_{n-k_p}^p z_0, \\ S_n^q &= \alpha_{k_q}^q \gamma_0^q w_n + (\alpha_{k_q}^q \gamma_1^q + \alpha_{k_q-1}^q \gamma_0^q) w_{n-1} + \dots + \alpha_0^q \gamma_{n-k_q}^q w_0. \end{aligned}$$

Usando la igualdad (2.0.3), podemos simplificar estas expresiones a

$$S_n^p = z_n + (\alpha_{k_p-1}^p \gamma_{n-k_p}^p + \dots + \alpha_0^p \gamma_{n-2k_p+1}^p) z_{k_p-1} + \dots + \alpha_0^p \gamma_{n-k_p}^p z_0, \quad (2.0.12)$$

$$S_n^q = w_n + (\alpha_{k_q-1}^q \gamma_{n-k_q}^q + \cdots + \alpha_0^q \gamma_{n-2k_q+1}^q) w_{k_q-1} + \cdots + \alpha_0^q \gamma_{n-k_q}^q w_0. \quad (2.0.13)$$

Haciendo ahora la suma del lado derecho de las ecuaciones de (2.0.3), multiplicadas por sus respectivos coeficientes  $\gamma_\ell^p$  y  $\gamma_{\ell'}^q$ , por separado, tenemos que:

$$\begin{aligned} S_n^p = & h \left[ \beta_{k_p, n-k_p}^{pp} \gamma_0^p z_n + \left( \beta_{k_p-1, n-k_p}^{pp} \gamma_0^p + \beta_{k_p, n-k_p-1}^{pp} \gamma_1^p \right) z_{n-1} + \cdots \right. \\ & + \left( \beta_{0, n-k_p}^{pp} \gamma_0^p + \cdots + \beta_{k_p, n-2k_p}^{pp} \gamma_{k_p}^p \right) z_{n-k_p} + \cdots + \beta_{0,0}^{pp} \gamma_{n-k_p}^p z_0 \\ & + \beta_{k_p, n-k_p}^{pq} \gamma_0^p w_n + \left( \beta_{k_p-1, n-k_p}^{pq} \gamma_0^p + \beta_{k_p, n-k_p-1}^{pq} \gamma_1^p \right) w_{n-1} + \cdots \\ & + \left( \beta_{0, n-k_p}^{pq} \gamma_0^p + \cdots + \beta_{k_p, n-2k_p}^{pq} \gamma_{k_p}^p \right) w_{n-k_p} + \cdots + \beta_{0,0}^{pq} \gamma_{n-k_p}^p w_0 \\ & \left. + \lambda_{n-k_p,0}^p \gamma_0^p + \lambda_{n-k_p-1,1}^p \gamma_1^p + \cdots + \lambda_{n-k_p}^p \gamma_{n-k_p}^p \right], \quad (2.0.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^q = & h \left[ \beta_{k_q, n-k_q}^{qp} \gamma_0^q z_n + \left( \beta_{k_q-1, n-k_q}^{qp} \gamma_0^q + \beta_{k_q, n-k_q-1}^{qp} \gamma_1^q \right) z_{n-1} + \cdots \right. \\ & + \left( \beta_{0, n-k_q}^{qp} \gamma_0^q + \cdots + \beta_{k_q, n-2k_q}^{qp} \gamma_{k_q}^q \right) z_{n-k_q} + \cdots + \beta_{0,0}^{qp} \gamma_{n-k_q}^q z_0 \\ & + \beta_{k_q, n-k_q}^{qq} \gamma_0^q w_n + \left( \beta_{k_q-1, n-k_q}^{qq} \gamma_0^q + \beta_{k_q, n-k_q-1}^{qq} \gamma_1^q \right) w_{n-1} + \cdots \\ & + \left( \beta_{0, n-k_q}^{qq} \gamma_0^q + \cdots + \beta_{k_q, n-2k_q}^{qq} \gamma_{k_q}^q \right) w_{n-k_q} + \cdots + \beta_{0,0}^{qq} \gamma_{n-k_q}^q w_0 \\ & \left. + \lambda_{n-k_q}^q \gamma_0^q + \lambda_{n-k_q-1}^q \gamma_1^q + \cdots + \lambda_{n-k_q}^q \gamma_{n-k_q}^q \right]. \quad (2.0.15) \end{aligned}$$

Supongamos que  $|z_n| \geq |w_n|$ . Igualando (2.0.14) y (3.0.10) y utilizando (2.0.9) y las desigualdades (2.0.4) y (2.0.7) obtenemos

$$\begin{aligned} |z_n| \leq & h \beta^{pp} (\alpha_{k_p}^p)^{-1} |z_n| + h \beta^{pq} (\alpha_{k_p}^p)^{-1} |z_n| + h \Gamma^p \beta^{*,pp} \sum_{m=0}^{n-1} |z_m| \\ & + h \Gamma^q \beta^{*,pq} \sum_{m=0}^{n-1} |w_m| + N \Gamma^p \lambda^p + A \Gamma^p Z k_p. \quad (2.0.16) \end{aligned}$$

Por definición de  $\beta^p$  y  $\beta^q$  tenemos

$$\begin{aligned} |z_n| \leq & h\beta^p(\alpha_{k_p}^p)^{-1}|z_n| + h\Gamma^p\beta^{*,pp}\sum_{m=0}^{n-1}|z_m| \\ & + h\Gamma^q\beta^{*,pq}\sum_{m=0}^{n-1}|w_m| + N\Gamma^p\lambda^p + A\Gamma^p Zk_p. \end{aligned} \quad (2.0.17)$$

(En caso de que  $|z_n| < |w_n|$ , se razonaría de manera similar, igualando las ecuaciones (2.0.1) y (2.0.15)). Entonces, despejando  $|z_n|$  y utilizando (2.0.9) y las desigualdades (2.0.4) y (2.0.7) tenemos

$$|z_n| \leq \frac{hL^*}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (|z_m| + |w_m|) + \frac{K^*}{2}. \quad (2.0.18)$$

(La misma desigualdad tendríamos para  $|w_n|$  si suponemos que  $|z_n| < |w_n|$ ). Por otro lado,  $A\Gamma_p \geq 1$  por (2.0.4) y  $\Gamma^* \geq 2\Gamma_p$  ya que

$$0 < \left(1 - h|\alpha_{k_p}^p|^{-1}\beta^p\right) < 1$$

Esto implica que  $K^* \geq 2Z$  y, por tanto, tenemos por (2.0.5) para los valores de arranque que:

$$|z_m| + |w_m| \leq K^*(1 + hL^*)^m, \quad m = 0, 1, \dots, k-1.$$

Razonemos ahora por inducción para probar esta misma desigualdad para todo  $n$  tal que  $k \leq n \leq N$ . Supongamos que la desigualdad es cierta para  $m = 0, 1, \dots, n-1$ . Utilizando (2.0.18) para  $|z_n|$  y  $|w_n|$ , tenemos que

$$|z_n| + |w_n| \leq hL^*K^*\frac{(1 + hL^*)^n - 1}{hL^*} + K^* \quad (2.0.19)$$

$$= K^*(1 + hL^*)^n \quad (2.0.20)$$

Utilizando que  $1 + hL^* \leq e^{hL^*}$ , ya tenemos probado (2.0.8).  $\square$

Tal y como esta definido en [1], un MLM cero-estable es fuertemente estable cuando el primer polinomio característico  $\rho$  tiene al 1 como única raíz de módulo unidad. En caso contrario, el MLM es débilmente estable. Diremos que un MLMP es fuertemente estable cuando los dos MLM que lo componen son fuertemente estables. Un MLMP es débilmente estable cuando al menos uno de los dos MLM que lo componen es débilmente estable.

## 2.1. Métodos fuertemente estables

Probemos primero el desarrollo asintótico del error global para MLMPs fuertemente estables.

**Teorema 2.3.** *Consideremos un MLMP fuertemente estable de orden  $r > 0$  y de la forma (1.1.4), aplicado a (1.1.1), tal que sus valores de arranque  $p_0, \dots, p_{k-1}, q_0, \dots, q_{k-1}$  satisfacen*

$$\begin{aligned} p_i - p(t_i) &= \mathcal{O}(h^r), \\ q_i - q(t_i) &= \mathcal{O}(h^r), \quad \text{para } i = 0, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} p_n &= p(t_n) + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^p(t_n) + \mathcal{O}(h^{2r}), \\ q_n &= q(t_n) + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^q(t_n) + \mathcal{O}(h^{2r}). \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

donde  $t_n = t_0 + nh$ ,  $p_n, q_n$  son las soluciones del método con longitud de paso  $h$ , al dar el  $n$ -ésimo paso y  $e_j^p, e_j^q$ , para  $j = r, \dots, 2r$ , son funciones de clase  $C^\infty$ , que verifican las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias respectivamente

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_j^p(t) \\ \dot{e}_j^q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_p(p(t), q(t)) & f_q(p(t), q(t)) \\ g_p(p(t), q(t)) & g_q(p(t), q(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j^p(t) \\ e_j^q(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_j^p p^{(j+1)}(t) \\ c_j^q q^{(j+1)}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.1.3)$$

donde las constantes  $c_j^p, c_j^q$  son las dadas en (1.2.6) y las funciones  $f$  y  $g$  son las funciones del problema de valores iniciales particionado en el que estamos aplicando nuestro MLMP. Además, la constante en los residuos de (2.1.2) puede tomarse uniforme en intervalos compactos de la forma  $(t_0 + \epsilon, T]$ , con  $\epsilon > 0$ .

*Demostración.* (A) Sean  $\epsilon_n$  y  $\delta_n$  los siguientes residuos

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= p_n - p(t_n) - \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^p(t_n), \\ \delta_n &= q_n - q(t_n) - \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^q(t_n), \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

donde  $\{e_j^p\}$  y  $\{e_j^q\}$ ,  $j = r, \dots, 2r-1$ , son funciones por determinar.

Como el MLMP considerado en el enunciado del teorema es de orden  $r$ , y teniendo en cuenta el comentario hecho al final de la demostración del teorema 1.9, se tiene que  $p_n - p(t_n)$  y  $q_n - q(t_n)$  son  $\mathcal{O}(h^r)$ , luego por (2.1.4),  $\epsilon_n$  y  $\delta_n$  también lo son. El objetivo de esta parte de la demostración es ver qué condiciones deben de cumplir las funciones  $\{e_j^p\}$  y  $\{e_j^q\}$ ,  $j = r, \dots, 2r-1$ , para que  $\epsilon_n$  y  $\delta_n$  sean  $\mathcal{O}(h^{2r})$  para  $t_n = t_0 + nh$  fijo, y además la convergencia sea uniforme en intervalos de tiempo compactos  $[\epsilon + t_0, T]$ , con  $\epsilon > 0$ .

Por (2.1.4) tenemos que

$$\begin{aligned} f(p_n, q_n) &= f\left(p(t_n) + \epsilon_n + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^p(t_n), q(t_n) + \delta_n + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^q(t_n)\right), \\ g(p_n, q_n) &= g\left(p(t_n) + \epsilon_n + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^p(t_n), q(t_n) + \delta_n + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^q(t_n)\right). \end{aligned}$$

Haciendo el desarrollo de Taylor de orden 1 en las anteriores expresiones en  $p(t_n)$  y  $q(t_n)$  respectivamente tenemos que

$$\begin{aligned} f(p_n, q_n) &= f(p(t_n), q(t_n)) + f_p(p(t_n), q(t_n)) \left(\epsilon_n + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^p(t_n)\right) \\ &\quad + f_q(p(t_n), q(t_n)) \left(\delta_n + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^q(t_n)\right) + \mathcal{O}(h^{2r}), \\ g(p_n, q_n) &= g(p(t_n), q(t_n)) + g_p(p(t_n), q(t_n)) \left(\epsilon_n + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^p(t_n)\right) \\ &\quad + g_q(p(t_n), q(t_n)) \left(\delta_n + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^q(t_n)\right) + \mathcal{O}(h^{2r}). \end{aligned}$$

Sabiendo que  $p_n$  y  $q_n$  son soluciones del MLMP y teniendo en cuenta lo



anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
 0 &= \rho_p(E)p_n - h\sigma_p(E)f(p_n, q_n) \\
 &= \rho_p(E)p(t_n) - h\sigma_p(E)f(p(t_n), q(t_n)) \\
 &\quad + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j [\rho_p(E)e_j^p(t_n) - h\sigma_p(E)f_p(p(t_n), q(t_n))e_j^p(t_n) \\
 &\quad \quad - h\sigma_p(E)f_q(p(t_n), q(t_n))e_j^q(t_n)] + \rho_p(E)\epsilon_n \\
 &\quad - h\sigma_p(E)(f_p(p(t_n), q(t_n))\epsilon_n + f_q(p(t_n), q(t_n))\delta_n + O(h\|\epsilon_n\|^2)). \\
 0 &= \rho_q(E)q_n - h\sigma_q(E)g(p_n, q_n) \\
 &= \rho_q(E)q(t_n) - h\sigma_q(E)g(p(t_n), q(t_n)) \\
 &\quad + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j [\rho_q(E)e_j^q(t_n) - h\sigma_q(E)g_p(p(t_n), q(t_n))e_j^q(t_n) \\
 &\quad \quad - h\sigma_q(E)g_q(p(t_n), q(t_n))e_j^q(t_n)] + \rho_q(E)\epsilon_n \\
 &\quad - h\sigma_q(E)(g_p(p(t_n), q(t_n))\epsilon_n + g_q(p(t_n), q(t_n))\delta_n + O(h\|\epsilon_n\|^2)).
 \end{aligned}$$

Como el error de truncación local, que aparece en el primer sumando del último miembro de ambas expresiones, puede escribirse en la forma (1.2.6), las ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{j=0}^{2r-1} h^j [\rho_p(E)e_j^p(t_n) - h\sigma_p(E)[f_p(p(t_n), q(t_n))e_j^p(t_n) \\
 &\quad + f_q(p(t_n), q(t_n))e_j^p(t_n) - c_j^p p^{(j+1)}(t_n)] \\
 &\quad + \rho_p(E)\epsilon_n - h\sigma_p(E)(f_p(p(t_n), q(t_n))\epsilon_n + f_q(p(t_n), q(t_n))\delta_n + O(h^{2r+1})). \\
 0 &= \sum_{j=0}^{2r-1} h^j [\rho_q(E)e_j^q(t_n) - h\sigma_q(E)[g_p(p(t_n), q(t_n))e_j^q(t_n) \\
 &\quad + g_q(p(t_n), q(t_n))e_j^q(t_n) - c_j^q q^{(j+1)}(t_n)] \\
 &\quad + \rho_q(E)\delta_n - h\sigma_q(E)(g_p(p(t_n), q(t_n))\epsilon_n + g_q(p(t_n), q(t_n))\delta_n + O(h^{2r+1})).
 \end{aligned}$$

Puesto que el MLMP es de orden  $r$ ,

$$\begin{aligned}
 \rho_p(E)e_j^p(t_n) - h\sigma_p(E)\dot{e}_j^p(t_n) &= \mathcal{O}(h^{r+1}), \\
 \rho_q(E)e_j^q(t_n) - h\sigma_q(E)\dot{e}_j^q(t_n) &= \mathcal{O}(h^{r+1}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se cumple (2.1.3), se tendrá que

$$\begin{aligned}\rho_p(E)\epsilon_n - h\sigma_p(E)(f_p(p(t_n), q(t_n))\epsilon_n + f_q(p(t_n), q(t_n))\delta_n) &= \mathcal{O}(h^{2r+1}) \\ \rho_q(E)\delta_n - h\sigma_q(E)(g_q(p(t_n), q(t_n))\delta_n + g_p(p(t_n), q(t_n))\epsilon_n) &= \mathcal{O}(h^{2r+1})\end{aligned}$$

y por consiguiente se podrá aplicar el lema 2.2 y garantizar que  $\epsilon_n$  y  $\delta_n$  son  $\mathcal{O}(h^{2r})$ , siempre que

$$\begin{aligned}\epsilon_\nu &= \mathcal{O}(h^{2r}), \quad \nu = 0, 1, \dots, k-1. \\ \delta_\nu &= \mathcal{O}(h^{2r}), \quad \nu = 0, 1, \dots, k-1.\end{aligned}$$

Por las condiciones impuestas sobre los valores de arranque en el enunciado del teorema, tenemos que

$$\begin{aligned}p_\nu &= p(t_\nu) + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j s_\nu^{(j)p} + \mathcal{O}(h^{2r}), \\ q_\nu &= q(t_\nu) + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j s_\nu^{(j)q} + \mathcal{O}(h^{2r}), \quad \nu = 0, 1, \dots, k-1, \quad (2.1.5)\end{aligned}$$

para ciertas constantes  $s_\nu^{(j)p}, s_\nu^{(j)q}$ . Podemos escribir  $\epsilon_\nu$  y  $\delta_\nu$  como

$$\begin{aligned}\epsilon_\nu &= \sum_{j=r}^{2r-1} h^j [s_\nu^{(j)p} - e_j^p(t_\nu)] + \mathcal{O}(h^{2r}), \\ \delta_\nu &= \sum_{j=r}^{2r-1} h^j [s_\nu^{(j)q} - e_j^q(t_\nu)] + \mathcal{O}(h^{2r}), \quad \nu = 0, 1, \dots, k-1. \quad (2.1.6)\end{aligned}$$

Haciendo el desarrollo de Taylor de  $e_j^p(t_\nu)$  y  $e_j^q(t_\nu)$  en  $t_0$  para  $j = r, \dots, 2r-1$ , puede observarse que  $\epsilon_\nu$  y  $\delta_\nu$  son  $\mathcal{O}(h^{2r})$  si y solo si

$$\begin{aligned}s_\nu^{(j)p} &= \sum_{l=0}^{j-r} \frac{\nu^l}{l!} e_{j-l}^{p(l)}(t_0), \\ s_\nu^{(j)q} &= \sum_{l=0}^{j-r} \frac{\nu^l}{l!} e_{j-l}^{q(l)}(t_0), \quad \nu = 0, 1, \dots, k-1, \quad j = r, \dots, 2r-1, \quad (2.1.7)\end{aligned}$$

ya que de esta forma conseguiríamos que los corchetes que aparecen en (2.1.6) se anularan.

Teniendo en cuenta (2.1.3), tendríamos en (2.1.5) un sistema de  $2kr$  ecuaciones con  $2r$  incógnitas  $e_j^p(t_0), e_j^q(t_0)$  para cada  $j = r, \dots, 2r - 1$ . Esto significa que para  $k > 1$  lo más probable es que no exista solución del sistema. Es por ello que necesitamos introducir otros términos en el desarrollo asintótico de orden  $O(h^{2r})$  para aumentar el número de variables y fijar los valores de  $e_j^p(t_0)$  y  $e_j^q(t_0)$  a partir de valores de arranque cualesquiera.

Supondremos a partir de ahora, para facilitar el desarrollo de la demostración, que las raíces distintas de 1 de los polinomios característicos  $\rho_p$  y  $\rho_q$  son simples. Además, las denotaremos como  $x_{i,p}$  y  $x_{i,q}$  para  $i = 2, \dots, k$ . Los casos de raíces múltiples requieren cambios fáciles en la siguiente parte de la demostración.

(B) Para justificar los términos que introduciremos en el desarrollo asintótico, consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \lambda_1 p + \lambda_2 q, & p(t_0) &= p_0, \\ \dot{q} &= \mu_1 p + \mu_2 q, & q(t_0) &= q_0.\end{aligned}$$

Por comodidad nos restringiremos a considerar la primera potencia de  $h$  que aparece en la expresión del desarrollo asintótico del error global. Debido a que hay que introducir unos nuevos términos  $P_n$  y  $Q_n$  en el desarrollo asintótico del error, tenemos que los nuevos residuos son

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_n &= p_n - p(t_n) - h^r e_r^p(t_n) - P_n, \\ \tilde{\delta}_n &= q_n - q(t_n) - h^r e_r^q(t_n) - Q_n.\end{aligned}\tag{2.1.8}$$

Por la parte (A) de la demostración tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_p(E)(p_n - p(t_n) - h^r e_r^p(t_n)) - h\sigma_p(E)[\lambda_1(p_n - p(t_n) - h^r e_r^p(t_n)) \\ + \lambda_2(q_n - q(t_n) - h^r e_r^q(t_n))] = \mathcal{O}(h^{r+2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_q(E)(q_n - q(t_n) - h^r e_r^q(t_n)) - h\sigma_q(E)[\mu_2(q_n - q(t_n) - h^r e_r^q(t_n)) \\ + \mu_1(p_n - p(t_n) - h^r e_r^p(t_n))] = \mathcal{O}(h^{r+2}),\end{aligned}\tag{2.1.9}$$

siempre que

$$\begin{pmatrix} e_r^p(t_n) \\ e_r^q(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r^p(t_n) \\ e_r^q(t_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_r^p p^{(r+1)}(t_n) \\ c_r^q q^{(r+1)}(t_n) \end{pmatrix}.$$

Necesitamos imponer condiciones sobre  $P_n$  y  $Q_n$  para conseguir que

$$\begin{aligned} \rho_p(E)\tilde{\epsilon}_n - h\sigma_p(E)(\lambda_1\tilde{\epsilon}_n + \lambda_2\tilde{\delta}_n) &= \mathcal{O}(h^{r+2}), \\ \rho_q(E)\tilde{\epsilon}_n - h\sigma_q(E)(\mu_1\tilde{\epsilon}_n + \mu_2\tilde{\delta}_n) &= \mathcal{O}(h^{r+2}), \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

y así poder aplicar un razonamiento como en (A) para justificar que  $\tilde{\epsilon}_n$  y  $\tilde{\delta}_n$  son  $\mathcal{O}(h^{r+1})$  uniformemente en  $[t_0, T]$ .

Escribamos

$$\begin{aligned} P_n &= A_n^p h^r + B_n^p h^{r+1} + \mathcal{O}(h^{r+2}), \\ Q_n &= A_n^q h^r + B_n^q h^{r+1} + \mathcal{O}(h^{r+2}), \end{aligned}$$

donde  $A_n^p, A_n^q, B_n^p$  y  $B_n^q$  sean funciones de  $n$ . Se tiene por (2.1.9) que

$$\begin{aligned} &\rho_p(E)\tilde{\epsilon}_n - h\sigma_p(E)[\lambda_1\tilde{\epsilon}_n + \lambda_2\tilde{\delta}_n] \\ &= -h^r \rho_p(E)A_n^p + h^{r+1} \left[ \sigma_p(E)[\lambda_1 A_n^p + \lambda_2 A_n^q] - \rho_p(E)B_n^p \right] \\ &\quad + h^{r+2} \sigma_p(E)[\lambda_1 B_n^p + \lambda_2 B_n^q] + O(h^{r+2}), \\ &\rho_q(E)\tilde{\delta}_n - h\sigma_q(E)[\mu_1\tilde{\epsilon}_n + \mu_2\tilde{\delta}_n] \\ &= -h^r \rho_q(E)A_n^q + h^{r+1} \left[ \sigma_q(E)[\mu_1 A_n^p + \mu_2 A_n^q] - \rho_q(E)B_n^q \right] \\ &\quad + h^{r+2} \sigma_q(E)[\mu_1 B_n^p + \mu_2 B_n^q] + O(h^{r+2}), \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Necesitamos que los coeficientes asociados a las potencias  $h^r$  y  $h^{r+1}$  de la anterior expresión se anulen. Para las coeficientes en  $h^r$  basta tomar

$$\begin{aligned} A_n^p &= \sum_{i=2}^k a_i^p x_{i,p}^n, \\ A_n^q &= \sum_{i=2}^k a_i^q x_{i,q}^n, \end{aligned}$$

donde  $x_{i,p}$  y  $x_{i,q}$  son las raíces de  $\rho_p$  y  $\rho_q$  respectivamente y  $a_i^p, a_i^q$  coeficientes cualesquiera que determinaremos posteriormente. Como necesitamos que los coeficientes asociados a la potencia  $h^{r+1}$  de (2.1.11) también se anulen, basta tomar

$$\begin{aligned} B_n^p &= \sum_{i=2}^k b_i^p(n) x_{i,p}^n + \sum_{i=m+1}^k d_i^p x_{i,q}^n, \\ B_n^q &= \sum_{i=2}^k b_i^q(n) x_{i,q}^n + \sum_{i=m+1}^k d_i^q x_{i,p}^n, \end{aligned}$$

donde  $x_{i,q}$  para  $i = m+1, \dots, k$  son las raíces de  $\rho_q(x)$  que no son raíces de  $\rho_p(x)$  y  $x_{i,p}$  para  $i = m+1, \dots, k$  son las raíces de  $\rho_p(x)$  que no son raíces de  $\rho_q(x)$ , entendiendo que  $x_1, \dots, x_m$  son las raíces comunes. Veremos cómo deben ser las funciones  $b_i^p(n), b_i^q(n)$  para que tal cosa ocurra. Necesitamos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=2}^m x_{i,p}^n [(\lambda_1 a_i^p + \lambda_2 a_i^q) \sum_{l=0}^k \beta_l^p x_{i,p}^l - \sum_{l=0}^k \alpha_l^p x_{i,p}^l b_i^p(n+l)] \\ &\quad + \sum_{i=m+1}^k x_{i,p}^n \left[ \lambda_1 a_i^p \sum_{l=0}^k \beta_l^p x_{i,p}^l - \sum_{l=0}^k \alpha_l^p x_{i,p}^l b_i^p(n+l) \right] \\ &\quad + \sum_{i=m+1}^k x_{i,q}^n [\lambda_2 a_i^q \sum_{l=0}^k \beta_l^p x_{i,q}^l - d_i^p \sum_{l=0}^k \alpha_l^p x_{i,q}^l], \\ 0 &= \sum_{i=2}^m x_{i,q}^n [(\mu_1 a_i^p + \mu_2 a_i^q) \sum_{l=0}^k \beta_l^q x_{i,q}^l - \sum_{l=0}^k \alpha_l^q x_{i,q}^l b_i^q(n+l)] \\ &\quad + \sum_{i=m+1}^k x_{i,q}^n \left[ \mu_2 a_i^q \sum_{l=0}^k \beta_l^q x_{i,q}^l - \sum_{l=0}^k \alpha_l^q x_{i,q}^l b_i^q(n+l) \right] \\ &\quad + \sum_{i=m+1}^k x_{i,p}^n [\mu_1 a_i^p \sum_{l=0}^k \beta_l^q x_{i,p}^l - d_i^q \sum_{l=0}^k \alpha_l^q x_{i,p}^l]. \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

De aquí podemos extraer ecuaciones en diferencias no homogéneas de

coeficientes constantes

$$\begin{aligned}\rho_{p,i,p}(E)b_i^p(n) &= (\lambda_1 a_i^p + \lambda_2 a_i^q) \sigma_{p,i,p}(1), \\ \rho_{q,i,q}(E)b_i^q(n) &= (\mu_1 a_i^p + \mu_2 a_i^q) \sigma_{q,i,q}(1), \quad i = 2, \dots, m, \\ \rho_{p,i,p}(E)b_i^p(n) &= \lambda_1 a_i^p \sigma_{p,i,p}(1), \\ \rho_{q,i,q}(E)b_i^q(n) &= \mu_2 a_i^q \sigma_{q,i,q}(1), \quad i = m+1, \dots, k,\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

donde

$$\rho_{p,i,p}(x) = \rho_p(x_{i,p}x) \quad \rho_{q,i,q}(x) = \rho_q(x_{i,q}x).$$

Tal y como se comenta en [12], existe una única solución con valores de arranque dados y dicha solución estará generada por una solución particular y la solución general del homogéneo, que será combinación lineal de  $r_{1,i,p}^n, \dots, r_{k,i,p}^n, r_{1,i,q}^n, \dots, r_{k,i,q}^n$ , donde  $r_{1,i,p}, \dots, r_{k,i,p}, r_{1,i,q}, \dots, r_{k,i,q}$  son las raíces de los polinomios característicos  $\rho_{p,i,p}$  y  $\rho_{q,i,q}$ . Notemos que 1 es raíz simple de ambos polinomios, por lo tanto  $\rho'_{p,i,p}(1) \neq 0$  y  $\rho'_{q,i,q}(1) \neq 0$ . Veamos que podemos encontrar soluciones de las ecuaciones en diferencias (2.1.13) que sean polinomios de grado 1. Para ello, consideremos

$$b_i^p(n) = \bar{B}_i^p n, \quad b_i^q(n) = \bar{B}_i^q n.$$

Notemos que (2.1.13) es equivalente a

$$\begin{aligned}\rho'_{p,i,p}(1)\bar{B}_i^p &= (\lambda_1 a_i^p + \lambda_2 a_i^q) \sigma_{p,i,p}(1), \quad i = 2, \dots, m, \\ \rho'_{q,i,q}(1)\bar{B}_i^q &= (\mu_1 a_i^p + \mu_2 a_i^q) \sigma_{q,i,q}(1), \\ \rho'_{p,i,p}(1)\bar{B}_i^p &= \lambda_1 a_i^p \sigma_{p,i,p}(1), \\ \rho'_{q,i,q}(1)\bar{B}_i^q &= \mu_2 a_i^q \sigma_{q,i,q}(1), \quad i = m+1, \dots, k,\end{aligned}\tag{2.1.14}$$

de donde despejando se obtienen  $\bar{B}_i^p$  y  $\bar{B}_i^q$ .

Para que los corchetes de los segundos sumatorios de las ecuaciones de (2.1.12) también se anulen, necesitamos que

$$\begin{aligned}d_i^p &= \lambda_2 a_i^q \frac{\sigma_p(x_{i,q})}{\rho_p(x_{i,q})} \quad i = m+1, \dots, k, \\ d_i^q &= \mu_1 a_i^p \frac{\sigma_q(x_{i,p})}{\rho_q(x_{i,p})} \quad i = m+1, \dots, k.\end{aligned}\tag{2.1.15}$$

## CAPÍTULO 2. DESARROLLO ASINTÓTICO DEL ERROR GLOBAL 45

---

Los denominadores que aparecen en las fracciones son no nulos ya que  $x_{i,q}$  y  $x_{i,p}$  son raíces no comunes de ambos polinomios.

Para aplicar el lema 2.2, necesitamos que

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_\nu &= \mathcal{O}(h^{r+1}), \\ \tilde{\delta}_\nu &= \mathcal{O}(h^{r+1}), \quad \nu = 0, 1, \dots, k-1.\end{aligned}\tag{2.1.16}$$

Al igual que en (A), podemos escribir los valores de arranque de la siguiente forma

$$\begin{aligned}p_\nu &= p(t_\nu) + h^r s_\nu^{(r),p} + \mathcal{O}(h^{r+1}), \\ q_\nu &= q(t_\nu) + h^r s_\nu^{(r),q} + \mathcal{O}(h^{r+1}).\end{aligned}$$

Los residuos  $\tilde{\epsilon}_\nu$  y  $\tilde{\delta}_\nu$  pueden escribirse como

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_\nu &= h^r (s_\nu^{(r),p} - e_r^p(t_\nu) - \sum_{i=2}^k x_{i,p}^\nu a_i^p) + \mathcal{O}(h^{r+1}), \\ \tilde{\delta}_\nu &= h^r (s_\nu^{(r),q} - e_r^q(t_\nu) - \sum_{i=2}^k x_{i,q}^\nu a_i^q) + \mathcal{O}(h^{r+1}).\end{aligned}$$

Al igual que en (A), las condiciones necesarias para que  $\tilde{\epsilon}_\nu$  y  $\tilde{\delta}_\nu$  sean  $\mathcal{O}(h^{r+1})$  son

$$\begin{aligned}s_\nu^{(r),p} &= e_r^p(t_0) + \sum_{i=2}^k a_i^p x_{i,p}^\nu, \\ s_\nu^{(r),q} &= e_r^q(t_0) + \sum_{i=2}^k a_i^q x_{i,q}^\nu, \quad \nu = 0, \dots, k-1.\end{aligned}\tag{2.1.17}$$

Considerando las incógnitas  $e_r^p(t_0), a_2^p, \dots, a_k^p, e_r^q(t_0), a_2^q, \dots, a_k^q$ , tenemos dos sistemas de  $k$  ecuaciones con  $k$  incógnitas, cuyas matrices asociadas son de Vandermonde. Luego las ecuaciones (2.1.17) tienen solución única, con lo que para cualesquiera valores de arranque, están determinados los valores de  $e_r^p(t_0)$  y  $e_r^q(t_0)$ .

Como en las expresiones de  $B_n^p, B_n^q$  solo hemos considerado las raíces de módulo menor que 1, tendremos que  $B_n^p \rightarrow 0$  y  $B_n^q \rightarrow 0$  más rápido que

cualquier potencia de  $h$  cuando  $h \rightarrow 0$  con  $nh = t_n - t_0 \geq 0$  fijo, esto es,  $B_n^p$  y  $B_n^q$  son  $\mathcal{O}(h^J)$  para cualquier  $J \in \mathbb{N}$ . Como ocurre lo mismo para  $A_n^p, A_n^q$  y  $n > 0$ , los terminos derechos de (2.1.8), es decir,  $P_n$  y  $Q_n$ , serán  $\mathcal{O}(h^{r+2})$  uniformemente en intervalos compactos  $[t_0 + \epsilon, T]$ , con  $\epsilon > 0$ . De aquí,

$$\begin{aligned} p_n &= p(t_n) + h^r e_r^p(t_n) + \mathcal{O}(h^{r+1}), \\ q_n &= q(t_n) + h^r e_r^q(t_n) + \mathcal{O}(h^{r+1}), \end{aligned}$$

que corresponde al enunciado del teorema si truncamos en  $\mathcal{O}(h^{r+1})$ .

(C) Ahora introduzcamos nuevos términos al desarrollo asintótico del error razonando como en (B) pero para problemas de valores iniciales generales hasta términos que sean  $\mathcal{O}(h^{2r})$ .

Para ello consideremos los siguientes residuos:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_n &= p_n - p(t_n) - \sum_{k=1}^{2r-1} h^k e_k^p(t_n) - \sum_{j=r}^{2r} h^j w_j(n), \\ \tilde{\delta}_n &= q_n - q(t_n) - \sum_{j=1}^{2r-1} h^j e_j^q(t_n) - \sum_{j=r}^{2r} h^j v_j(n), \end{aligned}$$

donde  $e_j^p, e_j^q$  son las funciones del enunciado del teorema que cumplen la ecuación diferencial (2.1.3) y  $w_j, v_j$  funciones en  $n$  tales que:

$$\begin{aligned} w_j(n) &= \sum_{i=2}^k x_{i,p}^n w_{ij}^{pp}(n) + \sum_{j=m+1}^k x_{i,q}^n w_{ij}^{pq}(n), \\ v_j(n) &= \sum_{i=2}^k x_{i,q}^n w_{ij}^{qq}(n) + \sum_{j=m+1}^k x_{i,p}^n w_{ij}^{qp}(n), \end{aligned}$$

siendo  $w_{ij}^{pp}(n), w_{ij}^{pq}(n), w_{ij}^{qp}(n), w_{ij}^{qq}(n)$  polinomios en  $n$ . Veamos qué condiciones deben cumplir estos polinomios para que  $\tilde{\epsilon}_n, \tilde{\delta}_n$  sean  $\mathcal{O}(h^{2r})$  en intervalos de tiempo compactos.



Razonando como se hizo en (A) para los residuos  $\epsilon_n, \delta_n$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 & (\rho_p(E) - h\sigma_p(E)f_p(p(t_n), q(t_n))) \left[ \sum_{i=2}^k \sum_{j=r}^{2r} h^j x_{i,p}^n w_{ij}^{pp}(n) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=m+1}^k \sum_{j=r}^{2r} h^j x_{i,q}^n w_{ij}^{pq}(n) + \tilde{\epsilon}_n \right] \\
 & - h\sigma_p(E)f_q(p(t_n), q(t_n)) \left[ \sum_{i=2}^k \sum_{j=r}^{2r} h^j x_{i,q}^n w_{ij}^{qq}(n) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=m+1}^k \sum_{j=r}^{2r} h^j x_{i,p}^n w_{ij}^{qp}(n) + \tilde{\delta}_n \right] = \mathcal{O}(h^{2r+1}), \\
 & (\rho_q(E) - h\sigma_q(E)g_q(p(t_n), q(t_n))) \left[ \sum_{i=2}^k \sum_{j=r}^{2r} h^j x_{i,q}^n w_{ij}^{qq}(n) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=m+1}^k \sum_{j=r}^{2r} h^j x_{i,p}^n w_{ij}^{qp}(n) + \tilde{\delta}_n \right] \\
 & - h\sigma_q(E)g_p(p(t_n), q(t_n)) \left[ \sum_{i=2}^k \sum_{j=r}^{2r} h^j x_{i,p}^n w_{ij}^{pp}(n) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=m+1}^k \sum_{j=r}^{2r} h^j x_{i,q}^n w_{ij}^{pq}(n) + \tilde{\epsilon}_n \right] = \mathcal{O}(h^{2r+1}),
 \end{aligned}$$

donde los residuos están uniformemente acotados en intervalos de tiempo compactos. Por tanto, para conseguir que

$$\begin{aligned}
 & \rho_p(E)\tilde{\epsilon}_n - h\sigma_p(E)[f_p(p(t_n), q(t_n))\tilde{\epsilon}_n + f_q(p(t_n), q(t_n))\tilde{\delta}_n] = \mathcal{O}(h^{2r+1}), \\
 & \rho_q(E)\tilde{\delta}_n - h\sigma_q(E)[g_p(p(t_n), q(t_n))\tilde{\epsilon}_n + g_q(p(t_n), q(t_n))\tilde{\delta}_n] = \mathcal{O}(h^{2r+1}),
 \end{aligned}$$

y poder aplicar el lema 2.2, necesitamos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=r}^{2r} h^j \left[ \sum_{i=2}^k x_{i,p}^n \left[ \sum_{l=0}^k \alpha_l^p x_{i,p}^l w_{ij}^{pp}(n+l) - h \sum_{l=0}^k \beta_l^p x_{i,p}^l f_p(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) w_{ij}^{pp}(n+l) \right] \right. \\
& + \sum_{i=m+1}^k x_{i,q}^n \left[ \sum_{l=0}^k \alpha_l^p x_{i,q}^l w_{ij}^{pq}(n+l) - h \sum_{l=0}^k \beta_l^p x_{i,q}^l f_p(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) w_{ij}^{pq}(n+l) \right] \\
& - \sum_{i=2}^k x_{i,q}^n \left[ h \sum_{l=0}^k \beta_l^p x_{i,q}^l f_q(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) w_{ij}^{qq}(n+l) \right] \\
& \left. - \sum_{i=m+1}^k x_{i,p}^n \left[ h \sum_{l=0}^k \beta_l^p x_{i,p}^l f_q(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) w_{ij}^{qp}(n+l) \right] \right] = \mathcal{O}(h^{2r+1}). \\
& \sum_{j=r}^{2r} h^j \left[ \sum_{i=2}^k x_{i,q}^n \left[ \sum_{l=0}^k \alpha_l^q x_{i,q}^l w_{ij}^{qq}(n+l) - h \sum_{l=0}^k \beta_l^q x_{i,q}^l g_q(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) w_{ij}^{qq}(n+l) \right] \right. \\
& + \sum_{i=m+1}^k x_{i,p}^n \left[ \sum_{l=0}^k \alpha_l^q x_{i,p}^l w_{ij}^{qp}(n+l) - h \sum_{l=0}^k \beta_l^q x_{i,p}^l g_q(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) w_{ij}^{qp}(n+l) \right] \\
& - \sum_{i=2}^k x_{i,p}^n \left[ h \sum_{l=0}^k \beta_l^q x_{i,p}^l g_p(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) w_{ij}^{pp}(n+l) \right] \\
& \left. - \sum_{i=m+1}^k x_{i,q}^n \left[ h \sum_{l=0}^k \beta_l^q x_{i,q}^l g_p(p(t_{n+l}), q(t_{n+l})) w_{ij}^{pq}(n+l) \right] \right] = \mathcal{O}(h^{2r+1}).
\end{aligned}$$

Haciendo el desarrollo de Taylor de las funciones  $f_p, f_q, g_p$  y  $g_q$  en potencias de  $(n+l)h$  alrededor de  $t_0$  y reordenando las sumas anteriores en potencias de  $h$ , necesitamos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=r}^{2r} h^j \left[ \sum_{i=2}^k x_{i,p}^n \left[ \sum_{l=0}^k \alpha_l^p x_{i,p}^l w_{ij}^{pp}(n+l) - W_{ij}^{ppp}(n) - W_{ij}^{pqq}(n) \right] \right. \\
& + \sum_{i=m+1}^k x_{i,q}^n \left[ \sum_{l=0}^k \alpha_l^p x_{i,q}^l w_{ij}^{pq}(n+l) - W_{ij}^{ppq}(n) - W_{ij}^{qpq}(n) \right] \left. \right] = \mathcal{O}(h^{2r+1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=r}^{2r} h^j \left[ \sum_{i=2}^k x_{i,q}^n \left[ \sum_{l=0}^k \alpha_l^q x_{i,q}^l w_{ij}^{qq}(n+l) - W_{ij}^{qqq}(n) - W_{ij}^{qpp}(n) \right] \right. \\
 & \left. + \sum_{i=m+1}^k x_{i,p}^n \left[ \sum_{l=0}^k \alpha_l^q x_{i,q} w_{ij}^{qp}(n+l) - W_{ij}^{qqp}(n) - W_{ij}^{qpq}(n) \right] \right] = \mathcal{O}(h^{2r+1}),
 \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

donde  $W_{ij}^{ppp}, W_{ij}^{pqq}, W_{ij}^{ppq}, W_{ij}^{pqp}, W_{ij}^{qqq}, W_{ij}^{qpp}, W_{ij}^{qqp}, W_{ij}^{qpq}$  son polinomios en  $n$  que dependen de las derivadas de  $p(t)$  y  $q(t)$  en  $t_0$  y de las derivadas de  $f(p(t), q(t))$  y  $g(p(t), q(t))$  en  $p(t_0)$  y  $q(t_0)$ , y también de los valores de  $w_{ki}^{pp}(n), w_{ki}^{pq}(n), w_{ki}^{qq}(n), w_{ki}^{qp}(n)$ , para  $k < j$ . Por tanto, se tienen que cumplir las ecuaciones en diferencias de los corchetes más interiores en (2.1.18).

Nótese que  $W_{ir}^{ppp}(n) = W_{ir}^{pqq}(n) = W_{ir}^{qqq}(n) = W_{ir}^{qpp}(n) = W_{ir}^{pqp}(n) = W_{ir}^{ppq}(n) = W_{ir}^{qqp}(n) = W_{ir}^{qpq}(n) = 0$ , luego para que  $w_{ir}^{pp}, w_{ir}^{qq}$  sean soluciones de las anteriores ecuaciones en diferencias, pueden ser constantes ya que 1 es raíz de  $\rho_p$  y  $\rho_q$ , mientras que  $w_{ir}^{pq}$  y  $w_{ir}^{qp}$  deben anularse. Por otra parte,  $W_{i,r+1}^{ppp}(n), W_{i,r+1}^{pqq}(n), W_{i,r+1}^{qqq}(n), W_{i,r+1}^{qpp}(n)$ , son constantes que no dependen de  $n$  y  $W_{i,r+1}^{ppq}(n), W_{i,r+1}^{pqp}(n), W_{i,r+1}^{qqp}(n), W_{i,r+1}^{qpq}(n)$  son nulos, luego por lo visto en la parte (B) de la demostración,  $w_{i,r+1}^{pp}, w_{i,r+1}^{qq}$  pueden ser polinomios de grado 1 y  $w_{i,r+1}^{pq}, w_{i,r+1}^{qp}$  pueden ser constantes para ser soluciones de las ecuaciones en diferencias (2.1.18) que resultan de anular los corchetes interiores en las dos ecuaciones. Razonando de manera inductiva,  $w_{ij}^{pp}, w_{ij}^{qq}$  pueden tomarse como polinomios en  $n$  de grado  $j - r$  y  $w_{ij}^{pq}, w_{ij}^{qp}$  como polinomios de grado  $j - r - 1$ .

Para poder aplicar el lema 2.2 necesitamos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\epsilon}_\nu &= \mathcal{O}(h^{2r}), \\
 \tilde{\delta}_\nu &= \mathcal{O}(h^{2r}),
 \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

para  $\nu = 0, \dots, k - 1$ . Ya hemos visto que los residuos pueden escribirse de esta forma

$$\begin{aligned}
 \tilde{\epsilon}_\nu &= \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left[ s_\nu^{(j),p} - e_j^p(t_\nu) - \sum_{i=2}^k x_{i,p}^\nu w_{ij}^{pp}(\nu) - \sum_{i=m+1}^k x_{i,q}^\nu w_{ij}^{pq}(\nu) \right], \\
 \tilde{\delta}_\nu &= \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left[ s_\nu^{(j),q} - e_j^q(t_\nu) - \sum_{i=2}^k x_{i,q}^\nu w_{ij}^{qq}(\nu) - \sum_{i=m+1}^k x_{i,p}^\nu w_{ij}^{qp}(\nu) \right],
 \end{aligned}$$

para  $\nu = 0, \dots, k-1$ .

Al igual que en (A) y (B), una condición necesaria para que se cumpla (2.1.19) es

$$\begin{aligned}
 e_j^p(t_0) + \sum_{i=2}^k x_{i,p}^\nu w_{ij}^{pp}(0) &= s_\nu^{(j),p} - \sum_{l=1}^{j-r} \frac{\nu^l}{l!} e_{j-l}^{p(l)}(t_0) - \sum_{i=2}^k x_{i,p}^\nu (w_{ij}^{pp}(\nu) - w_{ij}^{pp}(0)) \\
 &\quad - \sum_{i=m+1}^k x_{i,q}^\nu w_{ij}^{pq}(\nu). \\
 e_j^q(t_0) + \sum_{i=2}^k x_{i,q}^\nu w_{ij}^{qq}(0) &= s_\nu^{(j),q} - \sum_{l=1}^{j-r} \frac{\nu^l}{l!} e_{j-l}^{q(l)}(t_0) - \sum_{i=2}^k x_{i,q}^\nu (w_{ij}^{qq}(\nu) - w_{ij}^{qq}(0)) \\
 &\quad - \sum_{i=m+1}^k x_{i,p}^\nu w_{ij}^{qp}(\nu).
 \end{aligned}$$

Considerando como incógnitas  $e_j^p(t_0), e_j^q(t_0), w_{ij}^{pp}(0), w_{ij}^{qq}(0)$ , para  $i = 2, \dots, k$ , ya que el resto de coeficientes de los polinomios  $w_{ij}^{pp}, w_{ij}^{qq}$  se determinan resolviendo las ecuaciones en diferencias correspondientes a los corchetes de las dos ecuaciones de (2.1.18), obtenemos para cada  $j = r, \dots, 2r-1$  dos sistemas de  $k$  ecuaciones con  $k$  incógnitas, donde la matriz asociada es de Vandermonde.

Por tanto, aplicando el lema 2.2, se tiene que se cumple (2.1.19). Teniendo en cuenta las definiciones de los residuos,

$$\begin{aligned}
 p_n &= p(t_n) + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^p(t_n) + \sum_{j=r}^{2r} h^j \left[ \sum_{i=2}^k x_{i,p}^n w_{ij}^{pp}(n) + \sum_{j=m+1}^k x_{i,q}^n w_{ij}^{pq}(n) \right] \\
 &\quad + \mathcal{O}(h^{2r}), \\
 q_n &= q(t_n) + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^q(t_n) + \sum_{j=r}^{2r} h^j \left[ \sum_{i=2}^k x_{i,q}^n w_{ij}^{qq}(n) + \sum_{j=m+1}^k x_{i,p}^n w_{ij}^{qp}(n) \right] \\
 &\quad + \mathcal{O}(h^{2r}),
 \end{aligned}$$

Para cada  $t_n > t_0$  fijo,  $x_{i,p}^{\frac{t_n-t_0}{h}} w_{ij}^{pp}(\frac{t_n-t_0}{h}), x_{i,p}^{\frac{t_n-t_0}{h}} w_{ij}^{pq}(\frac{t_n-t_0}{h}), x_{i,q}^{\frac{t_n-t_0}{h}} w_{ij}^{qq}(\frac{t_n-t_0}{h})$  y  $x_{i,q}^{\frac{t_n-t_0}{h}} w_{ij}^{qp}(\frac{t_n-t_0}{h})$  convergen hacia 0 más rápido que cualquier potencia de

$h$ , ya que  $|x_{i,p}|, |x_{i,q}| < 1$ , para  $i = 2, \dots, k$ . Además dicha convergencia es uniforme en intervalos de tiempo compactos que no contengan a  $t_0$ . Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} p_n &= p(t_n) + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^p(t_n) + \mathcal{O}(h^{2r}), \\ q_n &= q(t_n) + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j e_j^q(t_n) + \mathcal{O}(h^{2r}), \end{aligned}$$

uniformemente en intervalos de tiempo compactos de la forma  $[t_0 + \epsilon, T]$ , donde  $\epsilon > 0$ , y donde las funciones  $e_j^p, e_j^q$  satisfacen (2.1.3).  $\square$

## 2.2. Métodos débilmente estables

En esta sección permitiremos que los primeros polinomios característicos  $\rho_p, \rho_q$  tengan raíces de módulo uno distintas de la unidad.

Consideraremos además, aparte de métodos convergentes de orden  $r$ , métodos irreducibles, es decir, métodos donde los pares  $(\rho_p, \sigma_p)$  y  $(\rho_q, \sigma_q)$  sean irreducibles. Esto significa que  $\rho_p$  y  $\sigma_p$  no tenga raíces comunes, ni tampoco  $\rho_q$  y  $\sigma_q$ . En el caso de que algún par fuera reducible, consideraríamos el par irreducible asociado simplificando factores comunes. (La única diferencia estaría en que el rango de valores de arranque posibles sería menor).

En cualquier caso, consideremos entonces métodos donde el número de pasos de cada componente del MLMP puede ser diferente  $(k_p, k_q)$ , tal y como se introdujo en (1.1.2).

Denotaremos en esta sección por  $\{x_i\}_{i=1}^m$  las raíces comunes de módulo uno de  $\rho_p$  y  $\rho_q$  (con  $x_1 = 1$ ). También denotaremos por  $x_{i,p}$  ( $i = m+1, \dots, k'_p$ ) las raíces unitarias de  $\rho_p$  que no son raíces de  $\rho_q$  y por  $x_{i,q}$  ( $i = m+1, \dots, k'_q$ ) las raíces unitarias de  $\rho_q$  que no son raíces de  $\rho_p$ . Nótese que todas estas raíces son simples debido a la supuesta cero-estabilidad de ambos métodos.

Usaremos la notación

$$\rho_{\alpha,i}(x) = \rho_{\alpha}(x_i x), \quad \rho_{\alpha,i,\beta}(x) = \rho_{\alpha}(x_{i,\beta} x), \quad \alpha, \beta \in \{p, q\}, \quad (2.2.1)$$

$$\sigma_{\alpha,i}(x) = \sigma_{\alpha}(x_i x), \quad \sigma_{\alpha,i,\beta}(x) = \sigma_{\alpha}(x_{i,\beta} x), \quad (2.2.2)$$

y definimos

$$\lambda_{p,i} = \frac{\sigma_p(x_i)}{x_i \rho'_p(x_i)}, \quad \lambda_{q,i} = \frac{\sigma_q(x_i)}{x_i \rho'_q(x_i)}. \quad (2.2.3)$$

Dado que los métodos  $(\rho_{\alpha,i}, \sigma_{\alpha,i}/\lambda_{\alpha,i})$ ,  $\alpha = p, q$ , son consistentes, asumimos que los errores de truncación local asociados pueden escribirse como (1.2.6)

$$\begin{aligned} \rho_{p,i}(E)p(t_n) - \frac{h}{\lambda_{p,i}}\sigma_{p,i}(E)\dot{p}(t_n) &= \frac{1}{\lambda_{p,i}}\sigma_{p,i}(E) \left( \sum_{j=1}^{r-1} c_{j,p}^{(i)} h^{j+1} p^{(j+1)}(t_n) \right) \\ &\quad + O(h^{r+1}), \\ \rho_{q,i}(E)q(t_n) - \frac{h}{\lambda_{q,i}}\sigma_{q,i}(E)\dot{q}(t_n) &= \frac{1}{\lambda_{q,i}}\sigma_{q,i}(E) \left( \sum_{j=1}^{r-1} c_{j,q}^{(i)} h^{j+1} q^{(j+1)}(t_n) \right) \\ &\quad + O(h^{r+1}). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Estudiemos ahora el desarrollo asintótico del error de discretización global para MLMP débilmente estables. Se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.4.** *Consideremos un MLMP débilmente estable de orden  $r > 0$  y de la forma (1.1.2) aplicado a (1.1.1), tal que sus valores de arranque  $p_0, \dots, p_{k_p-1}, q_0, \dots, q_{k_q-1}$  satisfacen*

$$\begin{aligned} p_i - p(t_i) &= \mathcal{O}(h^r), \quad i = 0, 1, \dots, k_p - 1, \\ q_i - q(t_i) &= \mathcal{O}(h^r), \quad i = 0, 1, \dots, k_q - 1. \end{aligned}$$

*Entonces, existen funciones suaves  $e_{j,i,\alpha}$ ,  $e_{j,i,\alpha,\beta}$ ,  $\alpha, \beta = p, q$ , tales que, cuando*

$h \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}
 p_n - p(t_n) &= \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left[ \sum_{i=1}^m x_i^n e_{j,i,p}(t_n) + \sum_{i=m+1}^{k'_p} x_{i,p}^n e_{j,i,pp}(t_n) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=m+1}^{k'_q} x_{i,q}^n e_{j,i,pq}(t_n) \right] + O(h^{2r}), \\
 q_n - q(t_n) &= \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left[ \sum_{i=1}^m x_i^n e_{j,i,q}(t_n) + \sum_{i=m+1}^{k'_p} x_{i,p}^n e_{j,i,qp}(t_n) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=m+1}^{k'_q} x_{i,q}^n e_{j,i,qq}(t_n) \right] + O(h^{2r}). \quad (2.2.5)
 \end{aligned}$$

para  $n > 0$ , donde la constante en el residuo puede cogerse uniforme en intervalos compactos de la forma  $[t_0 + \epsilon, T]$ , con  $\epsilon > 0$ .

Además, las funciones  $e_{j,1,\alpha}$ ,  $\alpha = p, q$ ,  $j = r, \dots, 2r-1$ , satisfacen

$$\begin{pmatrix} e_{j,1,p}(t) \\ e_{j,1,q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_p(p(t), q(t)) & f_q(p(t), q(t)) \\ g_p(p(t), q(t)) & g_q(p(t), q(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{j,1,p}(t) \\ e_{j,1,q}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_j^p p^{(j+1)}(t) \\ c_j^q q^{(j+1)}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.2.6)$$

donde  $c_j^p, c_j^q$  son las constantes en (1.2.6) y las funciones  $e_{j,i,\alpha}$ ,  $\alpha = p, q$ ,  $i = 2, \dots, m$ ,  $j = r, \dots, 2r-1$ , son soluciones de

$$\begin{pmatrix} e_{j,i,p}(t) \\ e_{j,i,q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{p,i} f_p & \lambda_{p,i} f_q \\ \lambda_{q,i} g_p & \lambda_{q,i} g_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{j,i,p}(t) \\ e_{j,i,q}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{j,i,p}(t) \\ b_{j,i,q}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.2.7)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 b_{j,i,p}(t) &= - \sum_{l=1}^{j-r} c_{l,p}^{(i)} e_{j-l,i,p}^{(l+1)}(t), \\
 b_{j,i,q}(t) &= - \sum_{l=1}^{j-r} c_{l,q}^{(i)} e_{j-l,i,q}^{(l+1)}(t).
 \end{aligned}$$

Por otro lado, las funciones  $e_{j,i,\alpha\beta}$ , con  $\alpha, \beta \in \{p, q\}$ ,  $i = m+1, \dots, k'_\beta$ ,  $j = r, \dots, 2r-1$ , se determinan de forma recursiva a partir de ciertos sistemas diferenciales. Más concretamente, para  $j = r, r+1, r+2$ , se cumple que

$$e_{r,i,pq}(t) = e_{r,i,qp}(t) = 0, \quad (2.2.8)$$

$$\dot{e}_{r,i,pp}(t) = \lambda_{p,i,p} f_p(p(t), q(t)) e_{r,i,pp}(t), \quad \lambda_{p,i,p} = \frac{\sigma_p(x_{i,p})}{x_{i,p} \rho'_p(x_{i,p})}, \quad (2.2.9)$$

$$\dot{e}_{r,i,qq}(t) = \lambda_{q,i,q} g_q(p(t), q(t)) e_{r,i,qq}(t), \quad \lambda_{q,i,q} = \frac{\sigma_q(x_{i,q})}{x_{i,q} \rho'_q(x_{i,q})}, \quad (2.2.10)$$

$$e_{r+1,i,pq}(t) = \frac{\sigma_p(x_{i,q})}{\rho_p(x_{i,q})} f_q(p(t), q(t)) e_{r,i,qq}(t), \quad (2.2.11)$$

$$e_{r+1,i,qp}(t) = \frac{\sigma_q(x_{i,p})}{\rho_q(x_{i,p})} g_p(p(t), q(t)) e_{r,i,pp}(t), \quad (2.2.12)$$

$$\dot{e}_{r+1,i,pp}(t) = \lambda_{p,i,p} f_p(p(t), q(t)) e_{r+1,i,pp}(t) + b_{r+1,i,pp}(t), \quad (2.2.13)$$

$$\dot{e}_{r+1,i,qq}(t) = \lambda_{q,i,q} g_q(p(t), q(t)) e_{r+1,i,qq}(t) + b_{r+1,i,qq}(t), \quad (2.2.14)$$

donde, omitiendo el argumento  $t$  por simplicidad de notación,

$$\begin{aligned} b_{r+1,i,pp} &= \lambda_{p,i,p} \frac{\sigma_q(x_{i,p})}{\rho_q(x_{i,p})} f_q(p, q) g_p(p, q) e_{r,i,pp} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ x_{i,p} \frac{\rho''_p(x_{i,p})}{\rho'_p(x_{i,p})} + 1 \right] \lambda_{p,i,p} \frac{d}{dt} [f_p(p, q) e_{r,i,pp}] \\ &\quad + \frac{\sigma'_p(x_{i,p})}{\rho'_p(x_{i,p})} \frac{d}{dt} [f_p(p, q) e_{r,i,pp}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{r+1,i,qq} &= \lambda_{q,i,q} \frac{\sigma_p(x_{i,q})}{\rho_p(x_{i,q})} g_p(p, q) f_q(p, q) e_{r,i,qq} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ x_{i,q} \frac{\rho''_q(x_{i,q})}{\rho'_q(x_{i,q})} + 1 \right] \lambda_{q,i,q} \frac{d}{dt} [g_q(p, q) e_{r,i,qq}] \\ &\quad + \frac{\sigma'_q(x_{i,q})}{\rho'_q(x_{i,q})} \frac{d}{dt} [g_q(p, q) e_{r,i,qq}], \end{aligned}$$



$y$

$$e_{r+2,i,pq} = \frac{x_{i,q}}{\rho_p(x_{i,q})} \left[ \sigma'_p(x_{i,q}) - \frac{\rho'_p(x_{i,q})\sigma_p(x_{i,q})}{\rho_p(x_{i,q})} \right] \frac{d}{dt} [f_q(p, q)e_{r,i,qq}] + \frac{\sigma_p(x_{i,q})}{\rho_p(x_{i,q})} f_q(p, q) \left[ \frac{\sigma_p(x_{i,q})}{\rho_p(x_{i,q})} f_p(p, q)e_{r,i,qq} + e_{r+1,i,qq} \right], \quad (2.2.15)$$

$$e_{r+2,i,qp} = \frac{x_{i,p}}{\rho_q(x_{i,p})} \left[ \sigma'_q(x_{i,p}) - \frac{\rho'_q(x_{i,p})\sigma_q(x_{i,p})}{\rho_q(x_{i,p})} \right] \frac{d}{dt} [g_p(p, q)e_{r,i,pp}] + \frac{\sigma_q(x_{i,p})}{\rho_q(x_{i,p})} g_p(p, q) \left[ \frac{\sigma_q(x_{i,p})}{\rho_q(x_{i,p})} g_q(p, q)e_{r,i,pp} + e_{r+1,i,pp} \right]. \quad (2.2.16)$$

$$\dot{e}_{r+2,i,pp} = \lambda_{p,i,p} f_p(p, q)e_{r+2,i,pp} + b_{r+2,i,pp}, \quad (2.2.17)$$

$$\dot{e}_{r+2,i,qq} = \lambda_{q,i,q} g_q(p, q)e_{r+2,i,qq} + b_{r+2,i,qq}, \quad (2.2.18)$$

con

$$\begin{aligned} b_{r+2,i,pp} = & \lambda_{p,i,p} f_p(p, q)e_{r+2,i,qp} + \frac{1}{6} \left[ \frac{3[x_{i,p}\sigma''_p(x_{i,p}) + \sigma'_p(x_{i,p}) - x_{i,p}\rho''_p(x_{i,p})]}{\rho'_p(x_{i,p})} \right. \\ & \left. - x_{i,p}^2 \frac{\rho'''_p(x_{i,p})}{\rho'_p(x_{i,p})} - 1 \right] \frac{d^2}{dt^2} [f_p(p, q)e_{r,i,pp}] \\ & + \left( \frac{\sigma'_p(x_{i,p})}{\rho'_p(x_{i,p})} - \frac{\lambda_{p,i,p}}{2} \left[ x_{i,p} \frac{\rho''_p(x_{i,p})}{\rho'_p(x_{i,p})} + 1 \right] \right) \frac{d}{dt} [f_p(p, q)e_{r+1,i,pp}] \\ & + \frac{\sigma'_p(x_{i,p})}{\rho'_p(x_{i,p})} \frac{d}{dt} [f_q(p, q)e_{r+1,i,qp}] - \frac{\lambda_{p,i,p}}{2} \left[ x_{i,p} \frac{\rho''_p(x_{i,p})}{\rho'_p(x_{i,p})} + 1 \right] \dot{b}_{r+1,i,pp}, \\ b_{r+2,i,qq} = & \lambda_{q,i,q} g_p(p, q)e_{r+2,i,pq} + \frac{1}{6} \left[ \frac{3[x_{i,q}\sigma''_q(x_{i,q}) + \sigma'_q(x_{i,q}) - x_{i,q}\rho''_q(x_{i,q})]}{\rho'_q(x_{i,q})} \right. \\ & \left. - x_{i,q}^2 \frac{\rho'''_q(x_{i,q})}{\rho'_q(x_{i,q})} - 1 \right] \frac{d^2}{dt^2} [g_q(p, q)e_{r,i,qq}] \\ & + \left( \frac{\sigma'_q(x_{i,q})}{\rho'_q(x_{i,q})} - \frac{\lambda_{q,i,q}}{2} \left[ x_{i,q} \frac{\rho''_q(x_{i,q})}{\rho'_q(x_{i,q})} + 1 \right] \right) \frac{d}{dt} [g_q(p, q)e_{r+1,i,qq}] \\ & + \frac{\sigma'_q(x_{i,q})}{\rho'_q(x_{i,q})} \frac{d}{dt} [g_p(p, q)e_{r+1,i,pq}] - \frac{\lambda_{q,i,q}}{2} \left[ x_{i,q} \frac{\rho''_q(x_{i,q})}{\rho'_q(x_{i,q})} + 1 \right] \dot{b}_{r+1,i,qq}. \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales de todos los sistemas (2.2.6), (2.2.7), (2.2.9), (2.2.10), (2.2.13), (2.2.14), (2.2.17) y (2.2.18) están determinadas por el procedimiento inicial. Además, cuando

$$\begin{aligned} p_\nu - p(t_\nu) &= O(h^{r+1}), & \nu &= 0, 1, \dots, k_p - 1, \\ q_\nu - q(t_\nu) &= O(h^{r+1}), & \nu &= 0, 1, \dots, k_q - 1, \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

se tiene que

$$e_{r,i,pp}(t_0) = e_{r,i,qq}(t_0) = 0.$$

Por lo tanto, en este caso

$$e_{r,i,pp}(t) = e_{r,i,qq}(t) = e_{r+1,i,pq}(t) = e_{r+1,i,qp}(t) = b_{r+1,i,pp}(t) = b_{r+1,i,qq}(t) = 0.$$

Sin embargo, valores de arranque más precisos no conducen a la anulación de los valores iniciales de los coeficientes asociados a potencias más altas de  $h$ , por lo que no se pueden obtener más simplificaciones.

*Demostración.* (A) Veamos ahora que no podemos considerar el mismo desarrollo asintótico del error global del teorema 2.3 para MLMP débilmente estables y por tanto necesitamos introducir nuevos términos  $x_i^n e_{j,i,p}(t_n)$ ,  $x_i^n e_{j,i,q}(t_n)$ , para  $i = 2, \dots, m$ ,  $x_{i,p}^n e_{j,i,pp}(t_n)$ ,  $x_{i,p}^n e_{j,i,qp}(t_n)$ , para  $i = m+1, \dots, k'_p$  y  $x_{i,q}^n e_{j,i,pq}(t_n)$ ,  $x_{i,q}^n e_{j,i,qq}(t_n)$ , para  $i = m+1, \dots, k'_q$  donde  $e_{j,i,p}(t_n)$ ,  $e_{j,i,q}(t_n)$ ,  $e_{j,i,pp}(t_n)$ ,  $e_{j,i,qp}(t_n)$ ,  $e_{j,i,pq}(t_n)$ ,  $e_{j,i,qq}(t_n)$  cumplen las condiciones impuestas en el enunciado del teorema. Apliquemos el MLMP al siguiente problema de valores iniciales particionado

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \lambda_1 p + \lambda_2 q, & p(t_0) &= p_0, \\ \dot{q} &= \mu_1 p + \mu_2 q, & q(t_0) &= q_0. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Aplicando el mismo razonamiento que en la parte (B) de la demostración

del teorema 2.3, se tiene que

$$\begin{aligned}
 p_n &= p(t_n) + h^r e_{r,1,p}(t_n) + h^r \left( \sum_{i=2}^{k_p} a_i^p x_{i,p}^n \right) \\
 &\quad + h^{r+1} \left( \sum_{i=2}^m b_i^p(n) x_i^n + \sum_{i=m+1}^{k_p} b_i^p(n) x_{i,p}^n + \sum_{i=m+1}^{k_q} d_i^p x_{i,q}^n \right) + \mathcal{O}(h^{r+1}), \\
 q_n &= q(t_n) + h^r e_{r,1,q}(t_n) + h^r \left( \sum_{i=2}^{k_q} a_i^q x_{i,q}^n \right) \\
 &\quad + h^{r+1} \left( \sum_{i=2}^m b_i^q(n) x_i^n + \sum_{i=m+1}^{k_q} b_i^q(n) x_{i,q}^n + \sum_{i=m+1}^{k_p} d_i^q x_{i,p}^n \right) + \mathcal{O}(h^{r+1}),
 \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

donde  $a_i^p, a_i^q, d_i^p$  y  $d_i^q$  son constantes y  $b_i^p(n), b_i^q(n)$  funciones polinómicas que satisfacen ciertas ecuaciones en diferencias y que pueden escogerse con  $b_i^p(0) = b_i^q(0) = 0$ . A diferencia del caso para MLMPs fuertemente estables, tenemos que hay raíces de módulo 1 distintas de la unidad, luego no se cumple que los terceros y cuartos sumandos de (2.2.21) converjan a 0 más rápido que cualquier potencia  $h$ . A partir de la imposición de ciertas condiciones sobre las funciones coeficientes, veremos cómo podemos garantizar que (2.2.21) sea  $\mathcal{O}(h^{2r})$  y además la constante en el residuo sea uniforme en intervalos de tiempo compactos.

(B) Teniendo en cuenta lo anterior, consideremos los siguientes residuos

$$\begin{aligned}
 \epsilon_n &= p_n - p(t_n) - \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left[ \sum_{i=1}^m x_i^n e_{j,i,p}(t_n) + \sum_{i=m+1}^{k'_p} x_{i,p}^n e_{j,i,pp} + \sum_{i=m+1}^{k'_q} x_{i,q}^n e_{j,i,pq}(t_n) \right], \\
 \delta_n &= q_n - q(t_n) - \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left[ \sum_{i=1}^m x_i^n e_{j,i,q}(t_n) + \sum_{i=m+1}^{k'_q} x_{i,q}^n e_{j,i,qq} + \sum_{i=m+1}^{k'_p} x_{i,p}^n e_{j,i,qp}(t_n) \right].
 \end{aligned}$$

Por la convergencia y el orden de consistencia del MLMP,  $\epsilon_n$  y  $\delta_n$  son  $\mathcal{O}(h^r)$ .

Veamos qué condiciones debemos imponer sobre  $e_{j,i,p}, e_{j,i,q}, e_{j,i,pp}, e_{j,i,pq}, e_{j,i,qq}, e_{j,i,qp}$  para que  $\epsilon_n$  y  $\delta_n$  sean  $\mathcal{O}(h^{2r})$ . Al igual que en la parte (A) de la demostración

del teorema 2.3 se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \rho_p(E)p_n - h\sigma_p(E)f(p_n, q_n) \\
&= \rho_p(E)p(t_n) - h\sigma_p(E)f(p(t_n), q(t_n)) \\
&\quad + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left[ \sum_{i=1}^m \rho_p(E)x_i^n e_{j,i,p}(t_n) \right. \\
&\quad \quad + \sum_{i=m+1}^{k_p} \rho_p(E)x_{i,p}^n e_{j,i,pp}(t_n) + \sum_{i=m+1}^{k_q} \rho_p(E)x_{i,q}^n e_{j,i,pq}(t_n) \\
&\quad \quad - h \left[ \sum_{i=1}^m \sigma_p(E)x_i^n f_p(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,p}(t_n) \right. \\
&\quad \quad \quad + \sum_{i=m+1}^{k_p} \sigma_p(E)x_{i,p}^n f_p(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,pp}(t_n) \\
&\quad \quad \quad + \sum_{i=m+1}^{k_q} \sigma_p(E)x_{i,q}^n f_p(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,pq}(t_n) \\
&\quad \quad \quad + \sum_{i=1}^m \sigma_p(E)x_i^n f_q(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,q}(t_n) \\
&\quad \quad \quad + \sum_{i=m+1}^{k_p} \sigma_p(E)x_{i,p}^n f_q(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,qp}(t_n) \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \sum_{i=m+1}^{k_q} \sigma_p(E)x_{i,q}^n f_q(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,qq}(t_n) \right] \right] \\
&\quad + \rho_p(E)\varepsilon_n - h\sigma_p(E) \left[ f_p(p(t_n), q(t_n))\varepsilon_n + f_q(p(t_n), q(t_n))\delta_n \right] \\
&\quad + O\left(h(\|\varepsilon_n\|^2 + \|\delta_n\|^2)\right) + O(h^{2r+1}). \tag{2.2.22}
\end{aligned}$$

y algo similar para la segunda ecuación. Entonces, utilizando (1.2.6) y la notación en (2.2.1), (2.2.2), se tiene que la anterior ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left[ \rho_p(E) e_{j,1,p}(t_n) - h\sigma_p(E) \left( f_p(p(t_n), q(t_n)) e_{j,1,p}(t_n) \right. \right. \\
 & \left. \left. + f_q(p(t_n), q(t_n)) e_{j,1,q}(t_n) - c_{j,p} p^{(j+1)}(t_n) \right) \right] \\
 & + \sum_{i=2}^m x_i^n \left[ \rho_{p,i}(E) e_{j,i,p}(t_n) - h\sigma_{p,i}(E) \left( f_p(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,p}(t_n) \right. \right. \\
 & \left. \left. + f_q(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,q}(t_n) \right) \right] \\
 & + \sum_{i=m+1}^{k_p} x_{i,p}^n \left[ \rho_{p,i,p}(E) e_{j,i,pp}(t_n) - h\sigma_{p,i,p}(E) \left( f_p(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,pp}(t_n) \right. \right. \\
 & \left. \left. + f_q(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,qp}(t_n) \right) \right] \\
 & + \sum_{i=m+1}^{k_q} x_{i,q}^n \left[ \rho_{p,i,q}(E) e_{j,i,pq}(t_n) - h\sigma_{p,i,q}(E) \left( f_p(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,pq}(t_n) \right. \right. \\
 & \left. \left. + f_q(p(t_n), q(t_n)) e_{j,i,qq}(t_n) \right) \right] \\
 & + \rho_p(E) \varepsilon_n - h\sigma_p(E) \left[ f_p(p(t_n), q(t_n)) \varepsilon_n + f_q(p(t_n), q(t_n)) \delta_n \right] \\
 & + O(h^{2r+1}). \tag{2.2.23}
 \end{aligned}$$

Queremos que

$$\begin{aligned}
 \rho_p(E) \varepsilon_n - h\sigma_p(E) \left[ f_p(p(t_n), q(t_n)) \varepsilon_n + f_q(p(t_n), q(t_n)) \delta_n \right] &= O(h^{2r+1}), \\
 \rho_q(E) \delta_n - h\sigma_q(E) \left[ g_p(p(t_n), q(t_n)) \varepsilon_n + g_q(p(t_n), q(t_n)) \delta_n \right] &= O(h^{2r+1}),
 \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

para poder deducir de aquí por el lema 2.2 que  $\varepsilon_n = O(h^{2r})$  y  $\delta_n = O(h^{2r})$ , tras imponer que  $\varepsilon_\nu = O(h^{2r})$  para  $\nu = 0, 1, \dots, k_p - 1$  y  $\delta_\nu = O(h^{2r})$  para  $\nu = 0, 1, \dots, k_q - 1$ .

Nos centraremos en imponer que la primera ecuación en (2.2.24) se satisfaga, ya que es la relacionada con (2.2.23), pero un argumento análogo es

válido para la segunda ecuación. Para que los términos asociados a la raíz 1 en (2.2.23) sean de orden  $O(h^{2r+1})$ , basta con imponer (2.2.6), teniendo en cuenta que el método  $(\rho_p, \sigma_p)$  se supone que es de orden  $r$ . Por otro lado, para los términos asociados a  $x_i^n$  con  $i = 2, \dots, m$ , considerando (2.2.4), basta con imponer (2.2.7).

Procedemos ahora a ver cómo deben comportarse el resto de términos:

- Para que el término en  $h^r x_{i,q}^n$  en (2.2.23) se anule, dado que  $\rho_p(x_{i,q}) \neq 0$ ,  $\rho_{p,i,q}(1) \neq 0$  y, de manera análoga, usando que  $\rho_{q,i,p}(1) \neq 0$ , debe cumplirse la ecuación (2.2.8).

- Observando el término en  $h^{r+1} x_{i,p}^n$  en la misma suma, se debe cumplir que

$$\rho'_{p,i,p}(1) \dot{e}_{r,i,pp}(t) - \sigma_{p,i,p}(1) f_p(p(t), q(t)) e_{r,i,pp}(t) = 0,$$

lo cual es equivalente a (2.2.9).

- Observando también el término en  $h^{r+1} x_{i,q}^n$  en (2.2.23), se debe cumplir que

$$\rho_{p,i,q}(1) e_{r+1,i,pq}(t_n) - \sigma_{p,i,q}(1) f_q(p(t_n), q(t_n)) e_{r,i,qq}(t_n) = 0, \quad (2.2.25)$$

que es equivalente a (2.2.11).

- Considerando el término en  $h^{r+2} x_{i,p}^n$  en (2.2.23), usando notación abreviada y (2.2.8), se requiere que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ x_i^2 \rho_p''(x_{i,p}) + x_{i,p} \rho_p'(x_{i,p}) \right] \ddot{e}_{r,i,pp} - x_{i,p} \sigma_p'(x_{i,p}) \frac{d}{dt} \left[ f_p(p, q) e_{r,i,pp} \right] \\ & + x_{i,p} \rho_p'(x_{i,p}) \dot{e}_{r+1,i,pp} - \sigma_p(x_{i,p}) \left[ f_p(p, q) e_{r+1,i,pp} + f_q(p, q) e_{r+1,i,qp} \right] = 0, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a (2.2.13).

- Considerando ahora el término en  $h^{r+2} x_{i,q}^n$  en (2.2.23), se tiene que

$$\begin{aligned} & \rho_p(x_{i,q}) e_{r+2,i,pq} + x_{i,q} \rho_p'(x_{i,q}) \dot{e}_{r+1,i,pq} - \sigma_p(x_{i,q}) \left[ f_p(p, q) e_{r+1,i,pq} + f_q(p, q) e_{r+1,i,qq} \right] \\ & - x_{i,q} \sigma_p'(x_{i,q}) \frac{d}{dt} \left[ f_q(p, q) e_{r,i,qq} \right] = 0, \end{aligned}$$

lo cual, usando (2.2.11), es equivalente a (2.2.15).

- Por otro lado, al considerar el término en  $h^{r+3}x_{i,p}^n$  en (2.2.23), se deduce que

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6} \left[ x_{i,p}^3 \rho_p'''(x_{i,p}) + 3\rho_p''(x_{i,p}) + x_{i,p} \rho_p'(x_{i,p}) \right] \ddot{e}_{r,i,pp} \\
 & + \frac{1}{2} \left[ x_{i,p}^2 \rho_p''(x_{i,p}) + x_{i,p} \rho_p'(x_{i,p}) \right] \ddot{e}_{r+1,i,pp} \\
 & + x_{i,p} \rho_p'(x_{i,p}) \dot{e}_{r+2,i,pp} - \frac{1}{2} \left[ x_{i,p}^2 \sigma_p''(x_{i,p}) + x_{i,p} \sigma_p'(x_{i,p}) \right] \frac{d^2}{dt^2} \left[ f_p(p, q) e_{r,i,pp} \right] \\
 & - \sigma_p'(x_{i,p}) x_{i,p} \frac{d}{dt} \left[ f_p(p, q) e_{r+1,i,pp} + f_q(p, q) e_{r+1,i,qp} \right] \\
 & - \sigma_p(x_{i,p}) \left[ f_p(p, q) e_{r+2,i,pp} + f_q(p, q) e_{r+2,i,qp} \right] = 0,
 \end{aligned}$$

lo cual, considerando (2.2.9) y (2.2.13), es equivalente a (2.2.17). Ahora, supongamos que los valores iniciales del MLMP son tales que:

$$\begin{aligned}
 p_\nu &= p(t_\nu) + \sum_{j=r}^{2r-1} s_\nu^{(j)p} h^j + O(h^{2r}), \quad \nu = 0, 1, \dots, k_p - 1, \\
 q_\nu &= q(t_\nu) + \sum_{j=r}^{2r-1} s_\nu^{(j)q} h^j + O(h^{2r}), \quad \nu = 0, 1, \dots, k_q - 1.
 \end{aligned}$$

Dado que  $e_{r,i,pq} = e_{r,i,qp} = 0$ , para que  $\epsilon_\nu$  y  $\delta_\nu$  sean  $O(h^{r+1})$  en los valores anteriores de  $\nu$ , se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
 s_\nu^{(r)p} &= \sum_{i=1}^m x_i^\nu e_{r,i,p}(t_0) + \sum_{i=m+1}^{k_p} x_{i,p}^\nu e_{r,i,pp}(t_0), \quad \nu = 0, 1, \dots, k_p - 1, \\
 s_\nu^{(r)q} &= \sum_{i=1}^m x_i^\nu e_{r,i,q}(t_0) + \sum_{i=m+1}^{k_q} x_{i,q}^\nu e_{r,i,qq}(t_0), \quad \nu = 0, 1, \dots, k_q - 1.
 \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Estos son dos sistemas de Vandermonde que determinan completamente los valores de  $e_{r,i,p}(t_0)$ ,  $e_{r,i,q}(t_0)$  para  $i = 1, \dots, m$ , así como  $e_{r,i,pp}(t_0)$  para  $i = m + 1, \dots, k_p$  y  $e_{r,i,qq}(t_0)$  para  $i = m + 1, \dots, k_q$ .

Por otro lado, para que  $\epsilon_\nu$  y  $\delta_\nu$  sean  $O(h^{r+2})$ , se debe cumplir que

$$\begin{aligned} s_{\nu,p}^{(r+1)} &= \sum_{i=1}^m x_i^\nu \nu \dot{e}_{r,i,p}(t_0) + \sum_{i=1}^m x_i^\nu e_{r+1,i,p}(t_0) \\ &+ \sum_{i=m+1}^{k_p} x_{i,p}^\nu \left[ e_{r+1,i,pp}(t_0) + \nu \dot{e}_{r,i,pp}(t_0) \right] + \sum_{i=m+1}^{k_q} x_{i,q}^\nu e_{r+1,i,pq}(t_0), \\ &\nu = 0, 1, \dots, k_p - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{\nu,q}^{(r+1)} &= \sum_{i=1}^m x_i^\nu \nu \dot{e}_{r,i,q}(t_0) + \sum_{i=1}^m x_i^\nu e_{r+1,i,q}(t_0) \\ &+ \sum_{i=m+1}^{k_q} x_{i,q}^\nu \left[ e_{r+1,i,qq}(t_0) + \nu \dot{e}_{r,i,qq}(t_0) \right] + \sum_{i=m+1}^{k_p} x_{i,p}^\nu e_{r+1,i,qp}(t_0), \\ &\nu = 0, 1, \dots, k_q - 1. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Observamos que estos son nuevamente dos sistemas de Vandermonde. El primero en las incógnitas  $e_{r+1,i,p}(t_0)$  para  $i = 1, \dots, m$ ,  $e_{r+1,i,pp}(t_0)$  para  $i = m+1, \dots, m+k_p$ , y el segundo en  $e_{r+1,i,q}(t_0)$  para  $i = 1, \dots, m$ ,  $e_{r+1,i,qq}(t_0)$  para  $i = m+1, \dots, m+k_q$ . (Observamos que el resto de los términos pueden calcularse a partir de valores que ya han sido determinados a través de (2.2.6), (2.2.7) para  $j = r$  y (2.2.11) y (2.2.12) para  $j = r+1$ .)

Procediendo inductivamente, se pueden determinar las condiciones iniciales para los sistemas diferenciales asociados a los coeficientes de error correspondientes a potencias superiores de  $h$ .

Además, cuando el procedimiento de arranque es de orden  $r+1$ , es claro que

$$s_{\nu,p}^{(r)} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, k_p - 1, \quad s_{\nu,q}^{(r)} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, k_q - 1,$$

de donde los sistemas en (2.2.26) son homogéneos y entonces  $e_{r,i,pp}(t_0) = e_{r,i,qq}(t_0) = 0$ . Sin embargo, el hecho de que

$$s_{\nu,p}^{(r+1)} = s_{\nu,q}^{(r+1)} = 0,$$



no hace que (2.2.27) sea homogéneo porque en general  $\dot{e}_{r,i,p}(t_0)$  y  $\dot{e}_{r,i,q}(t_0)$  no se anulan.

Finalmente, en el desarrollo asintótico, los términos asociados a las potencias  $n$ -ésimas de  $x_i$ ,  $x_{i,p}$  o  $x_{i,q}$  de módulo menor que 1 pueden descartarse, ya que, cuando  $n > 0$ , esas potencias  $n$ -ésimas son de orden  $O(h^{2r})$  para  $t_n$  fijo, donde  $t_n = t_0 + nh$ .  $\square$

**Observación 2.2.** *Cuando el MLMP es simétrico y cero-estable, todas las raíces de  $\rho_p$  y  $\rho_q$  son simples y de módulo 1 por el lema 1.14. Esto implica que, en la fórmula (2.2.5),  $k'_p = k_p$  y  $k'_q = k_q$  y, de hecho, al revisar la demostración del teorema 2.4, puede observarse que el resultado es válido para  $n \geq 0$ .*



## Capítulo 3

# Crecimiento del error con el tiempo

### 3.1. Comportamiento de los coeficientes del desarrollo asintótico

En esta sección se analizará el comportamiento del error con respecto al tiempo a partir de los resultados obtenidos en el Capítulo 2. Analizaremos dicho error para MLMPs débilmente estables, ya que, por lo visto en el anterior capítulo, los términos del error de discretización global de MLMPs fuertemente estables aparecen en el desarrollo asintótico del error de los MLMPs débilmente estables. Distinguiremos los diferentes términos del error según el tipo de raíz de  $\rho_p$  y  $\rho_q$  al que está asociado.

Recordemos que las perturbaciones en las condiciones iniciales del sistema continuo (1.1.1) se propagan en el tiempo en una primera aproximación a través del siguiente sistema

$$\dot{\delta}(t) = \begin{pmatrix} f_p(p(t), q(t)) & f_q(p(t), q(t)) \\ g_p(p(t), q(t)) & g_q(p(t), q(t)) \end{pmatrix} \delta(t). \quad (3.1.1)$$

Al igual que para cualquier otro sistema homogéneo, denotaremos por matriz de transición en  $(t, s)$  a la matriz que lleva  $\delta(s)$  a  $\delta(t)$ . Diremos que dicha matriz está acotada si lo está uniformemente para todo  $s, t \in \mathbb{R}$  cumpliendo  $t_0 \leq s \leq t$ .

### 3.1.1. Coeficientes asociados a las raíces comunes de módulo unidad.

Notemos que el sistema diferencial (2.2.6) asociado a  $e_{j,1,p}$  y  $e_{j,1,q}$ , es decir, los coeficientes asociados a la raíz común  $x_1 = 1$ , está intimamente ligado al sistema diferencial (3.1.1) que describe la propagación de perturbaciones del problema continuo. Más concretamente, coincide la parte homogénea del sistema diferencial.

Sin embargo, para los coeficientes asociados a las otras posibles raíces comunes  $x_i$  ( $i = 2, \dots, m$ ), de manera similar a lo que sucede con los MLMs en [3], la parte homogénea de los sistemas diferenciales en (2.2.7) es diferente de (3.1.1). Esto ocasiona que en muchos problemas, los coeficientes asociados a dichas raíces conduzcan a un crecimiento exponencial del error. Véase en [3] que los MLM simétricos para sistemas diferenciales de primer orden no son recomendados por este motivo. Sin embargo, podemos construir MLMPs de forma que los dos MLM que lo compongan cumplan que la única raíz en común de sus primeros polinomios característicos sea 1, y de esta manera no tendríamos este problema.

### 3.1.2. Coeficientes asociados a las raíces no comunes de módulo unidad

El siguiente resultado justifica el comportamiento de los coeficientes del error de MLMPs, asociados a las raíces de módulo 1 no comunes de los dos MLM que lo componen.

**Teorema 3.1.** *Consideremos un MLMP como el del teorema 2.4, aplicado al problema de valores iniciales (1.1.1). Suponiendo suficiente regularidad, si las matrices de transición asociadas a (2.2.9) y (2.2.10) están acotadas y las componentes del jacobiano del campo vectorial definido en (1.1.1) también, así como sus derivadas temporales, los términos del error asociados a las raíces no comunes de  $\rho_p$  y  $\rho_q$  se comportarán como  $O(h^r)$ , donde la constante en la notación de Landau está acotada para  $t - t_0 = O(h^{-1})$ .*

*Además, si los valores de arranque difieren de los exactos en  $O(h^{r+1})$ , los términos del error asociados a las raíces no comunes de  $\rho_p$  y  $\rho_q$  se comportarán como  $O(h^{r+1})$ , donde la constante en la notación de Landau está acotada para  $t - t_0 = O(h^{-1})$ . Equivalentemente, se comportarán como  $O(h^r)$*

uniformemente en el tiempo para  $t - t_0 = O(h^{-2})$ .

*Demostración.* La acotación de las matrices de transición asociadas a (2.2.9) y (2.2.10) implica que  $e_{r,i,pp}$  y  $e_{r,i,qq}$  están acotadas. Además, a partir de (2.2.11) y (2.2.12) y la acotación de  $e_{r,i,pp}$  y  $e_{r,i,qq}$  se deduce que  $e_{r+1,i,pq}$  y  $e_{r+1,i,qp}$  estarán acotadas cuando  $f_q(p(t), q(t))$  y  $g_p(p(t), q(t))$  están acotadas en el tiempo, y lo mismo ocurre con  $b_{r+1,i,pp}$  y  $b_{r+1,i,qq}$  si  $f_p(p(t), q(t))$ ,  $g_q(p(t), q(t))$  y sus primeras derivadas temporales también están acotadas. Esto implica, usando (2.2.13) y (2.2.14), que  $e_{r+1,i,pp}$  y  $e_{r+1,i,qq}$  crecen a lo sumo linealmente con el tiempo.

Por otro lado, a partir de (2.2.15) y (2.2.16), si las derivadas temporales de  $f_q(p(t), q(t))$  y  $g_p(p(t), q(t))$  también están acotadas en el tiempo, entonces  $e_{r+2,i,pq}$  y  $e_{r+2,i,qp}$  crecen a lo sumo linealmente. El mismo crecimiento lineal se observará para  $b_{r+2,i,pp}$  y  $b_{r+2,i,qq}$  si las segundas derivadas temporales de  $f_p(p(t), q(t))$  y  $g_q(p(t), q(t))$  están acotadas. Esto, junto con (2.2.17) y (2.2.18), implica que  $e_{r+2,i,pp}$  y  $e_{r+2,i,qq}$  crecen a lo sumo cuadráticamente. Podemos razonar de forma inductiva para el resto de los términos.

Finalmente, si los valores de arranque cumplen (2.2.19), por el final del teorema 2.4 se deduce que

$$e_{r,i,pp}(t) = e_{r,i,qq}(t) = b_{r+1,i,pp}(t) = b_{r+1,i,qq}(t) = e_{r+1,i,pq}(t) = e_{r+1,i,qp}(t) = 0.$$

Por lo tanto,  $e_{r+1,i,pp}$  y  $e_{r+1,i,qq}$  están acotadas en el tiempo y, si  $f_q(p(t), q(t))$  y  $g_p(p(t), q(t))$  también lo están, lo mismo ocurre con  $e_{r+2,i,pq}$  y  $e_{r+2,i,qp}$ . Esto implica que, si  $f_p(p(t), q(t))$ ,  $g_q(p(t), q(t))$  y sus primeras derivadas temporales están acotadas, entonces  $b_{r+2,i,pp}$  y  $b_{r+2,i,qq}$  también lo están. Debido a esto,  $e_{r+2,i,pp}$  y  $e_{r+2,i,qq}$  crecen a lo sumo linealmente y, razonando de forma inductiva,  $e_{r+3,i,pp}$  y  $e_{r+3,i,qq}$  crecen a lo sumo cuadráticamente, etc.  $\square$

**Observación 3.1.** Cuando el problema es separable, es decir,

$$f = f(q) \quad g = g(p)$$

entonces no solo las matrices de transición asociadas a (2.2.9) y (2.2.10) están acotadas, sino que, ya que  $f_p = g_q = 0$ , en realidad son la identidad. Esto simplifica las fórmulas (2.2.13)-(2.2.18), pero la conclusión es la misma que en el caso no separable.

**Observación 3.2.** *Como comparación, observamos que el caso separable se estudia en detalle en [4] y nuestras conclusiones son similares a las obtenidas en el artículo: para un procedimiento de arranque lo suficientemente preciso, las componentes del error asociado a las raíces no comunes del primer polinomio característico de módulo unidad están controlados para  $t - t_0 = O(h^{-2})$  (ver el final de la sección 3.5 y las observaciones finales en [4]).*

## 3.2. Comportamiento en problemas hamiltonianos

Sea  $\Omega$  un dominio, es decir, un subconjunto no vacío, abierto y conexo del espacio euclideo  $\mathbb{R}^{2d}$ , donde  $d$  es un entero, y supongamos que para las soluciones de (1.1.1) se cumple  $(p(t), q(t)) \in \Omega$ . Sea  $J$  un intervalo abierto acotado o no. Si tenemos una función  $H = H(p(t), q(t), t)$  suficientemente suave definida en el producto  $\Omega \times J$ , entonces (1.1.1) será un sistema hamiltoniano con hamiltoniano  $H$  si

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, d. \quad (3.2.1)$$

El número entero  $d$  es el número de grados de libertad y  $\Omega$  es el espacio de fases. El producto  $\Omega \times J$  es el espacio de fases extendido.

Es bien sabido que, cuando  $H$  no depende explícitamente de  $t$ , el hamiltoniano se conserva a lo largo de cada solución del espacio de fases. En esta sección estudiaremos el comportamiento de los MLMPs con respecto a la conservación del hamiltoniano en ese caso.

### 3.2.1. Parte suave de la solución numérica

Consideremos la parte 'suave' asociada a la raíz  $x_1 = 1$  del desarrollo asintótico del error global (2.2.5) en el teorema 2.4, y definamos

$$\begin{pmatrix} p_h(t) \\ q_h(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \begin{pmatrix} e_{j,1,p}(t) \\ e_{j,1,q}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.2.2)$$

donde  $(p(t), q(t))$  es la solución de (1.1.1).

**Lema 3.2.** *Supongamos que (1.1.1) es un sistema hamiltoniano autónomo, con función hamiltoniana  $H$ . Entonces,*

$$\frac{d}{dt} \left[ (\nabla H)^T \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \right] + (\nabla H)^T \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p(p(t), q(t)) & f_q(p(t), q(t)) \\ g_p(p(t), q(t)) & g_q(p(t), q(t)) \end{pmatrix} = 0.$$

*Demostración.* Como (1.1.1) es hamiltoniano, entonces

$$\begin{aligned} f &= -H_q = \dot{p}, \\ g &= H_p = \dot{q}. \end{aligned}$$

Por la anterior ecuación y haciendo la derivada con respecto al tiempo de  $f$  y  $g$  (funciones del problema (1.1.1)) se tiene que

$$\frac{d}{dt} (\nabla H)^T = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} H_p \\ H_q \end{pmatrix}^T = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -\dot{p} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} H_{pp}(p, q)\dot{p} + H_{qp}(p, q)\dot{q} \\ H_{pq}(p, q)\dot{p} + H_{qq}(p, q)\dot{q} \end{pmatrix}^T.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\nabla H)^T \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p(p(t), q(t)) & f_q(p(t), q(t)) \\ g_p(p(t), q(t)) & g_q(p(t), q(t)) \end{pmatrix} \\ = (\dot{q}^T, -\dot{p}^T) \begin{pmatrix} -H_{pq} & -H_{qq} \\ H_{pp} & H_{qp} \end{pmatrix} \\ = (-\dot{q}^T H_{pq} - \dot{p}^T H_{pp}, -\dot{q}^T H_{qq} - \dot{p}^T H_{qp}), \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado teniendo en cuenta que  $H_{qp}^T = H_{pq}$ .  $\square$

Pasemos ahora al siguiente resultado:

**Teorema 3.3.** *Considerando las condiciones impuestas en el anterior lema se tiene que*

$$\begin{aligned} H \begin{pmatrix} p_h(t) \\ q_h(t) \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} p_h(t_0) \\ q_h(t_0) \end{pmatrix} = \\ \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left[ c_j^q (p(t)^T q^{(j+1)}(t) - p(t_0)^T q^{(j+1)}(t_0)) \right. \\ \left. - c_j^p \left( \sum_{l=1}^{j+1} (-1)^{l+1} [q^{(l)}(t)^T p^{(j+1-l)}(t) - q^{(l)}(t_0)^T p^{(j+1-l)}(t_0)] \right) \right. \\ \left. + (c_j^p (-1)^j - c_j^q) \int_{t_0}^t p(s)^T q^{(j+2)}(s) ds \right] + \mathcal{O}(h^{2r}). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

*Demostración.* Aplicando el lema anterior, teniendo en cuenta la expresión (3.2.2) y usando (2.2.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H \begin{pmatrix} p_h(t) \\ q_h(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} \left( H \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j (\nabla H)^T \begin{pmatrix} e_{j,1,p}(t) \\ e_{j,1,q}(t) \end{pmatrix} + O(h^{2r}) \right) \\
&= \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left( \frac{d}{dt} (\nabla H)^T \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{j,1,p}(t) \\ e_{j,1,q}(t) \end{pmatrix} + (\nabla H)^T \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_{j,1,p}(t) \\ \dot{e}_{j,1,q}(t) \end{pmatrix} \right) \\
&\quad + O(h^{2r}) \\
&= \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \left[ \frac{d}{dt} (\nabla H)^T \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{j,1,p}(t) \\ e_{j,1,q}(t) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + (\nabla H)^T \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p(p(t), q(t)) & f_q(p(t), q(t)) \\ g_p(p(t), q(t)) & g_q(p(t), q(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{j,1,p}(t) \\ e_{j,1,q}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_j^p p^{(j+1)}(t) \\ c_j^q q^{(j+1)}(t) \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + O(h^{2r}) \\
&= \sum_{j=r}^{2r-1} h^j [c_j^q \dot{p}(t)^T q^{(j+1)}(t) - c_j^p \dot{q}(t)^T p^{(j+1)}(t)] + O(h^{2r}), \tag{3.2.4}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce de (3.2.1). Para  $j$  fijo, aplicando integración por partes se tiene que

$$\int_{t_0}^t \dot{p}^T(s) q^{(j+1)}(s) ds = (p(t)^T q^{(j+1)}(t) - p(t_0)^T q^{(j+1)}(t_0)) - \int_{t_0}^t p(s)^T q^{(j+2)}(s) ds. \tag{3.2.5}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \dot{q}(s)^T p^{(j+1)}(s) ds &= (\dot{q}(t)^T p^{(j)}(t) - \dot{q}(t_0)^T p^{(j)}(t_0)) - \int_{t_0}^t \ddot{q}(s)^T p^{(j)}(s) ds \\
&= \dot{q}(t)^T p^{(j)}(t) - \dot{q}(t_0)^T p^{(j)}(t_0) - (\ddot{q}(t)^T p^{(j-1)}(t) - \ddot{q}(t_0)^T p^{(j-1)}(t_0)) \\
&\quad + \int_{t_0}^t \ddot{q}(s)^T p^{(j-1)}(s) ds \\
&= \sum_{l=1}^{j+1} (-1)^{l+1} [q^{(l)}(t)^T p^{(j+1-l)}(t) - q^{(l)}(t_0)^T p^{(j+1-l)}(t_0)] \\
&\quad + (-1)^{j+1} \int_{t_0}^t q^{(j+2)}(s)^T p(s) ds. \tag{3.2.6}
\end{aligned}$$



Integrando el primer y último miembro de (3.2.4) y después aplicando (3.2.5) y (3.2.6) obtenemos (3.2.3).  $\square$

### Métodos simétricos

Es bien conocido que, cuando los MLMs son simétricos, los coeficientes correspondientes al error de truncación local en (1.2.6) con  $j$  impar se anulan [14]. Tenemos el siguiente resultado que es un caso particular del anterior teorema.

**Corolario 3.4.** *Cuando se integra (3.2.1), con  $H$  autónomo, con un MLMP simétrico se tiene que*

$$\begin{aligned} H \begin{pmatrix} p_h(t) \\ q_h(t) \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} p_h(t_0) \\ q_h(t_0) \end{pmatrix} = \\ \sum_{j=r/2}^{r-1} h^{2j} \left[ c_{2j}^q (p(t)^T q^{(2j+1)}(t) - p(t_0)^T q^{(2j+1)}(t_0)) \right. \\ \left. - c_{2j}^p \left( \sum_{l=1}^{2j+1} (-1)^{l+1} [q^{(l)}(t)^T p^{(2j+1-l)}(t) - q^{(l)}(t_0)^T p^{(2j+1-l)}(t_0)] \right) \right. \\ \left. + (c_{2j}^p - c_{2j}^q) \int_{t_0}^t p(s)^T q^{(2j+2)}(s) ds \right] + \mathcal{O}(h^{2r}). \end{aligned}$$

### 3.2.2. Solución numérica completa cuando $m = 1$

Ahora estudiaremos la solución numérica completa. Como se mencionó en la subsección 4.1.1, los coeficientes del error asociados a las raíces de módulo 1 comunes diferentes de  $x_1 = 1$  conducen normalmente a un crecimiento exponencial del error con el tiempo. Por esta razón, asumiremos de ahora en adelante que tales raíces comunes no existen, es decir,  $m = 1$ . Entonces, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.5.** *Cuando se integra (3.2.1) con  $H$  autónomo con un MLMP*

para el cual  $m = 1$ , se cumple que

$$\begin{aligned}
 H \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = & \\
 \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \nabla H \begin{pmatrix} p(t_n) \\ q(t_n) \end{pmatrix}^T & \left[ \sum_{i=2}^{k'_p} x_{i,p}^n \begin{pmatrix} e_{j,i,pp}(t_n) \\ e_{j,i,qp}(t_n) \end{pmatrix} + \sum_{i=2}^{k'_q} x_{i,q}^n \begin{pmatrix} e_{j,i,pq}(t_n) \\ e_{j,i,qq}(t_n) \end{pmatrix} \right] \\
 \sum_{j=r}^{2r-1} h^j & \left[ c_j^q (p(t)^T q^{(j+1)}(t) - p(t_0)^T q^{(j+1)}(t_0)) \right. \\
 & - c_j^p \left( \sum_{l=1}^{j+1} (-1)^{l+1} [q^{(l)}(t)^T p^{(j+1-l)}(t) - q^{(l)}(t_0)^T p^{(j+1-l)}(t_0)] \right) \\
 & \left. + (c_j^p (-1)^j - c_j^q) \int_{t_0}^t p(s)^T q^{(j+2)}(s) ds \right] \\
 + \sum_{j=r}^{2r-1} h^j \nabla H \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} e_{j,1,p}(t_0) \\ e_{j,1,q}(t_0) \end{pmatrix} + O(h^{2r}). \tag{3.2.7}
 \end{aligned}$$

*Demostración.* La demostración se basa en la siguiente descomposición

$$\begin{aligned}
 H \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = & \left[ H \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} p_h(t_n) \\ q_h(t_n) \end{pmatrix} \right] + \left[ H \begin{pmatrix} p_h(t_n) \\ q_h(t_n) \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} p_h(t_0) \\ q_h(t_0) \end{pmatrix} \right] \\
 & + \left[ H \begin{pmatrix} p_h(t_0) \\ q_h(t_0) \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \right]. \tag{3.2.8}
 \end{aligned}$$

Entonces, el primer término en (3.2.7) se deduce de (2.2.5) con  $m = 1$ , la definición (3.2.2) y la propiedad de que, al evaluar  $\nabla H$ , el vector  $(p_h(t), q_h(t))$  difiere de  $(p(t), q(t))$  en términos de orden  $O(h^r)$ . En cuanto al segundo término, se puede aplicar directamente el teorema 3.3. Finalmente, el último término en (3.2.7) proviene de (3.2.2) en  $t = t_0$ .  $\square$

**Observación 3.3.** Dado que  $x_{i,p}$  y  $x_{i,q}$  tienen módulo 1, el comportamiento temporal de (3.2.7) está determinado por el comportamiento del error en la solución numérica suave, teniendo en cuenta el teorema 3.3, así como el comportamiento de los términos

$$\nabla H \begin{pmatrix} p(t_n) \\ q(t_n) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_{j,i,pp}(t_n) \\ e_{j,i,qp}(t_n) \end{pmatrix}, \quad \nabla H \begin{pmatrix} p(t_n) \\ q(t_n) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_{j,i,pq}(t_n) \\ e_{j,i,qq}(t_n) \end{pmatrix}. \tag{3.2.9}$$

## Capítulo 4

### Péndulo doble

Los resultados anteriores se aplicarán en este capítulo para explicar la integración numérica del problema del péndulo doble con MLMPs. Escalaremos el problema de manera que la aceleración de la gravedad pueda considerarse igual a 1 y, en particular, tomaremos dos masas donde  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 2$  y dos cuerdas inextensibles y sin peso de longitud 1. (Para el caso general, véase [10], aunque las conclusiones con respecto al crecimiento del error con el tiempo serán las mismas siempre que las oscilaciones sean lo suficientemente pequeñas y el cociente de las frecuencias normales asociadas no sea racional). En nuestro caso particular, las energías cinética y potencial están dadas respectivamente por

$$T = \frac{1}{2} \left[ 3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 4\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) \right], \quad V = -(3 \cos(q_1) + 2 \cos(q_2)),$$

donde  $(q_1, q_2)$  denotan los ángulos que ambas cuerdas forman con la línea vertical. Como el lagrangiano es  $L = T - V$ , es bien sabido que los momentos asociados son

$$\begin{aligned} p_1 &= L_{\dot{q}_1} = 3\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1), \\ p_2 &= L_{\dot{q}_2} = 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1 \cos(q_2 - q_1). \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

De esta manera, se tiene la relación matricial

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = M(q_1, q_2) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix},$$

donde la matriz  $M(q_1, q_2)$  está dada por:

$$M(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \cos(q_2 - q_1) \\ 2 \cos(q_2 - q_1) & 2 \end{pmatrix},$$

y la energía cinética puede escribirse como

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2)M(q_1, q_2) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(p_1 \quad p_2)M(q_1, q_2)^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, las ecuaciones diferenciales correspondientes se escriben como un sistema hamiltoniano no separable con hamiltoniano:

$$H = T + V. \quad (4.0.2)$$

Nos interesaremos en pequeñas oscilaciones del péndulo doble, que, de acuerdo con [10], se pueden aproximar a través de la solución del sistema hamiltoniano donde se desprecian todos los términos menores que los asociados a segundas potencias de  $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$ .

De esta manera, surge un sistema lineal que puede resolverse exactamente, dando lugar a

$$\begin{aligned} q_1(t) &= A \cos(\omega_1 t - \delta_1) + B \cos(\omega_2 t - \delta_2), \\ q_2(t) &= A c_+ \cos(\omega_1 t - \delta_1) + B c_- \cos(\omega_2 t - \delta_2), \end{aligned} \quad (4.0.3)$$

donde

$$\omega_1 = 3 \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \right), \quad \omega_2 = 3 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \right),$$

$$c_+ = -\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad c_- = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

y las constantes  $A, B, \delta_1, \delta_2$  se determinan por las condiciones iniciales. De estas expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= -A\omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta_1) - B\omega_2 \sin(\omega_2 t - \delta_2), \\ \dot{q}_2(t) &= -A c_+ \omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta_1) - B c_- \omega_2 \sin(\omega_2 t - \delta_2). \end{aligned} \quad (4.0.4)$$

A partir de (4.0.1) y (4.0.4), tenemos

$$\begin{aligned}
 p_1(t) &= 3 \left[ -A\omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta_1) - B\omega_2 \sin(\omega_2 t - \delta_2) \right] \\
 &\quad + 2 \left[ -Ac_+\omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta_1) - Bc_-\omega_2 \sin(\omega_2 t - \delta_2) \right] \cos(\alpha(t)), \\
 p_2(t) &= 2 \left[ -Ac_+\omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta_1) - Bc_-\omega_2 \sin(\omega_2 t - \delta_2) \right] \\
 &\quad + 2 \left[ -A\omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta_1) - B\omega_2 \sin(\omega_2 t - \delta_2) \right] \cos(\alpha(t)), \quad (4.0.5)
 \end{aligned}$$

donde

$$\alpha(t) = A(c_+ - 1) \cos(\omega_1 t - \delta_1) + B(c_- - 1) \cos(\omega_2 t - \delta_2). \quad (4.0.6)$$

Considerando entonces (4.0.3) como una aproximación suficientemente buena de la solución exacta, justificaremos ahora cómo debería crecer el error en el hamiltoniano asociado a la parte suave de la solución numérica al integrar con distintos tipos de métodos lineales multipasos.

## 4.1. Error en el hamiltoniano asociado a la parte suave de la solución numérica

### 4.1.1. MLMPs simétricos

En primer lugar, cuando el método es un MLMP formado por dos MLMs simétricos, el corolario 3.4 establece cómo se comporta el error en la parte suave de la solución numérica. Teniendo en cuenta la acotación de las derivadas temporales de  $q_1, q_2, p_1, p_2$ , solo nos queda analizar el siguiente término de (3.2.3)

$$\int_{t_0}^t p(s)^T q^{(2k+2)}(s) ds, \quad k = \frac{r}{2}, \dots, r-1.$$

Observamos que las derivadas pares de  $q_1$  y  $q_2$  son una combinación lineal de  $\cos(\omega_1 t - \delta_1)$  y  $\cos(\omega_2 t - \delta_2)$ . Entonces, a partir de (4.0.5), lo que debemos

estudiar es el comportamiento de

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \cos(\omega_i s - \delta_i) \sin(\omega_j s - \delta_j) ds, \\ & \int_{t_0}^t \cos(\omega_i s - \delta_i) \sin(\omega_j s - \delta_j) \cos(\alpha(s)) ds, \quad i, j \in \{1, 2\}, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

donde, de acuerdo con (4.0.6),  $\alpha(s)$  oscila entre  $-|A(c_+ - 1)| - |B(c_- - 1)|$  y  $|A(c_+ - 1)| + |B(c_- - 1)|$ , pero de una manera no periódica debido a que  $\omega_1/\omega_2$  no es racional. Usando identidades trigonométricas, la primera integral en (4.1.1) se puede escribir como

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left[ \sin((\omega_i + \omega_j)s - \delta_i - \delta_j) - \sin((\omega_i - \omega_j)s + \delta_j - \delta_i) \right] ds,$$

la cual tiene una primitiva acotada con  $t$ . El segundo integrando en (4.1.1) es una modulación del primero con una frecuencia que nada tiene que ver con la del primer integrando. Aparece dibujado en la figura 4.1.1, donde se observa que está claramente centrado en 0, lo que hace que la integral en la figura 4.1.2 esté acotada.

#### 4.1.2. MLMPs no simétricos

En el caso no simétrico y de acuerdo con el teorema 3.3, el crecimiento con el tiempo de los coeficientes asociados a las potencias pares de  $h$  se comportará de la misma manera que en los métodos simétricos. Sin embargo, cuando los métodos no son simétricos, dado que  $c_j^q$  y  $c_j^p$  no necesariamente se anulan para  $j$  impar, y una vez que sabemos que todas las derivadas de  $q$  y  $p$  también están acotadas, solo debemos analizar el crecimiento con el tiempo de

$$\int_{t_0}^t q^{(2k+1)}(t)^T p(t) dt, \quad k = r/2, \dots, 2r - 1.$$

A partir de (4.0.3), se puede observar que las derivadas impares de  $q_1$  y  $q_2$  consisten en combinaciones lineales de  $\sin(\omega_i t - \delta_i)$  y  $\sin(\omega_j t - \delta_j)$ . A partir de (4.0.5), la integral anterior contendrá expresiones de la forma:

$$\int_{t_0}^t \sin^2(\omega_i t - \delta_i) dt, \quad i = 1, 2,$$

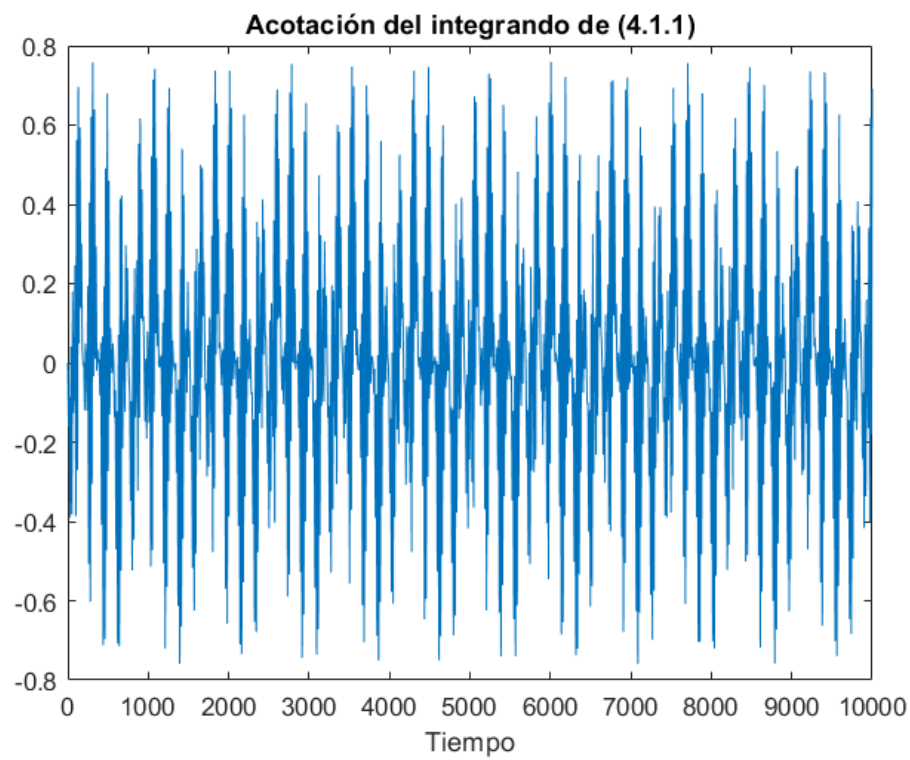


Figura 4.1.1: Representación en Matlab del integrando de la segunda integral de (4.1.1) tomando  $t_0 = 0$  y  $T = 10000$

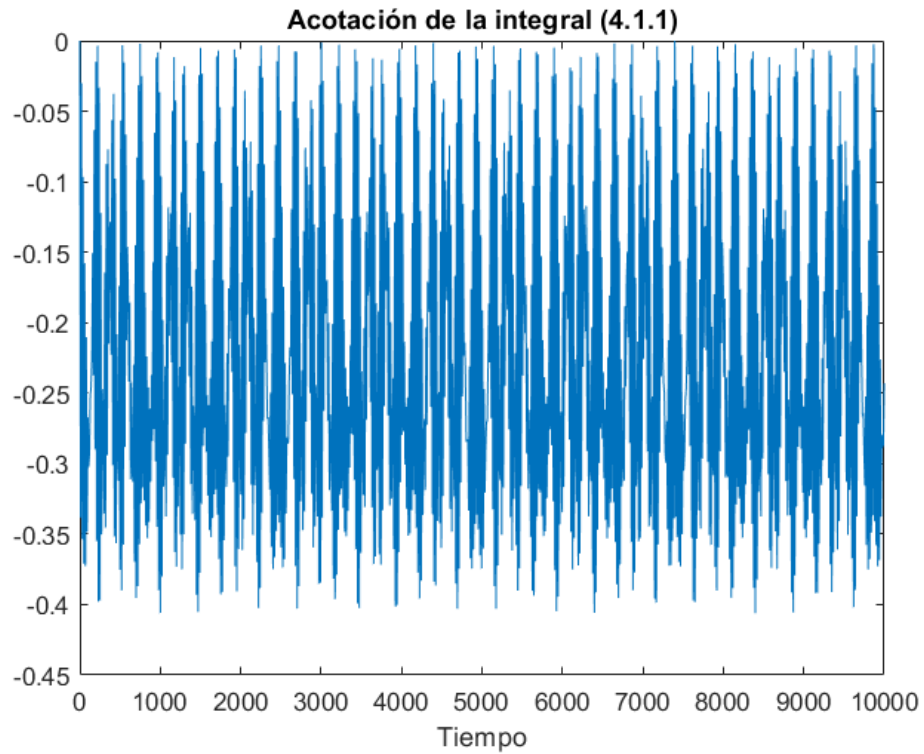


Figura 4.1.2: Representación en Matlab de la segunda integral de (4.1.1) tomando  $t_0 = 0$  y  $T = 10000$ . Para calcular la integral se ha usado la función `int` de Matlab



las cuales obviamente crecen linealmente con el tiempo, ya que  $\sin^2(\omega_i t - \delta_i)$  es una función positiva y periódica con período  $\pi/\omega_i$ . Por lo tanto, la integral es linealmente aditiva en cada periodo.

## 4.2. Error en el hamiltoniano asociado a las raíces no comunes de módulo unidad

A partir de la observación 3.3 y considerando que  $\nabla H(p, q) = (\dot{q}^T, -\dot{p}^T)$ , el cual está acotado en nuestro problema, lo que se debe estudiar es el crecimiento con el tiempo de  $e_{j,i,pp}$ ,  $e_{j,i,pq}$ ,  $e_{j,i,qq}$ ,  $e_{j,i,qp}$ . Para aplicar el teorema 3.1, y justificar que el error asociado a estos coeficientes está controlado, se requiere que las derivadas de  $f$  y  $g$  en  $(p(t), q(t))$  y sus derivadas temporales estén acotadas con el tiempo y que las matrices de transición asociadas a (2.2.9) y (2.2.10) también estén acotadas. Teniendo en cuenta que, en nuestro problema

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2(6 - 4 \cos^2(q_2 - q_1))} (2p_1^2 - 4 \cos(q_2 - q_1)p_1p_2 + 3p_2^2 - 3 \cos(q_1) - 2 \cos(q_2)), \quad (4.2.1)$$

con  $f = -\nabla_q H$  y  $g = \nabla_p H$ , es claro que los componentes del jacobiano de  $(f, g)^T$  en  $(p_1(t), p_2(t), q_1(t), q_2(t))$  y sus derivadas temporales están acotadas. Ahora, analizamos qué ocurre con las matrices de transición de (2.2.9) y (2.2.10). Tras algunos cálculos, se obtiene

$$f_p(p(t), q(t)) = \begin{pmatrix} -a(t) & -b(t) \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix}, \quad g_q(p(t), q(t)) = \begin{pmatrix} a(t) & -a(t) \\ b(t) & -b(t) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{2 \sin(2\alpha(t))}{[1 + 2 \sin^2(\alpha(t))]^2} p_1(t) - \frac{\sin(\alpha(t))[5 - 2 \sin^2(\alpha(t))]}{[1 + 2 \sin^2(\alpha(t))]^2} p_2(t) \\ &= \frac{\sin(2\alpha(t))}{1 + 2 \sin^2(\alpha(t))} \dot{q}_1(t) - \frac{2 \sin(\alpha(t))}{1 + 2 \sin^2(\alpha(t))} \dot{q}_2(t), \\ b(t) &= \frac{3 \sin(2\alpha(t))}{[1 + 2 \sin^2(\alpha(t))]^2} p_2(t) - \frac{\sin(\alpha(t))[5 - 2 \sin^2(\alpha(t))]}{[1 + 2 \sin^2(\alpha(t))]^2} p_1(t) \\ &= -\frac{3 \sin(\alpha(t))}{1 + 2 \sin^2(\alpha(t))} \dot{q}_1(t) + \frac{\sin(2\alpha(t))}{1 + 2 \sin^2(\alpha(t))} \dot{q}_2(t). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Una justificación teórica de que las matrices de transición asociadas a (2.2.9) y (2.2.10) están acotadas para cualquier  $\lambda_{p,i,p}$  y  $\lambda_{q,i,q}$  está dada en [2]. En la siguiente sección lo comprobaremos numéricamente en un caso concreto.

### 4.3. Experimentos numéricos

En esta sección se ilustrarán los resultados de la anterior, relacionados con la aproximación numérica de pequeñas oscilaciones del péndulo doble con MLMPs. Para ello, se utilizarán varios MLM para estudiar el comportamiento del error a lo largo del tiempo en el hamiltoniano (4.0.2):

1. El MLMP simétrico de segundo orden (denominado MLMP2, cf. [4])

$$\begin{aligned}\rho_p(x) &= (x-1)(x+1), & \sigma_p(x) &= 2x, \\ \rho_q(x) &= (x-1)(x^2+1), & \sigma_q(x) &= x^2+x.\end{aligned}\quad (4.3.1)$$

2. El MLM simétrico no particionado

$$\rho_p(x) = \rho_q(x) = (x-1)(x+1), \quad \sigma_p(x) = \sigma_q(x) = 2x. \quad (4.3.2)$$

3. El método de Adams no simétrico y no particionado de tercer orden [7]

$$\begin{aligned}\rho_p(x) &= \rho_q(x) = x^2(x-1), \\ \sigma_p(x) &= \sigma_q(x) = \frac{23}{12}x^2 - \frac{16}{12}x + \frac{5}{12}.\end{aligned}\quad (4.3.3)$$

4. Un MLMP no simétrico donde uno de los métodos es el MLM simétrico en (4.3.2) y el otro es el método de Adams de segundo orden

$$\begin{aligned}\rho_p(x) &= (x-1)(x+1), & \sigma_p(x) &= 2x, \\ \rho_q(x) &= x(x-1), & \sigma_q(x) &= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.\end{aligned}\quad (4.3.4)$$

Para todos los experimentos numéricos, se han considerado las siguientes condiciones iniciales

$$p_1(0) = 0, \quad p_2(0) = 0, \quad q_1(0) = \frac{\pi}{12}, \quad q_2(0) = \frac{\pi}{6}.$$

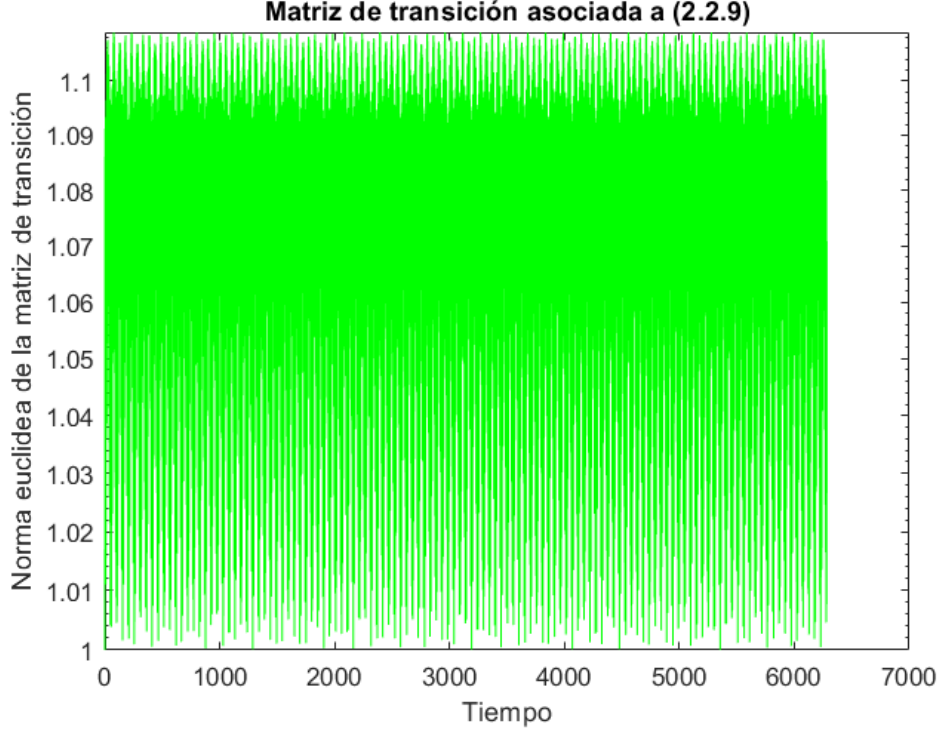


Figura 4.3.1: Acotación de la matriz de transición de (2.2.9)

Además, se han tomado como valores de arranque los valores exactos obtenidos con la subrutina `ode45` en Matlab, con una tolerancia de error de  $10^{-13}$ .

En primer lugar, observamos que en (4.3.1),  $\rho_p$  y  $\rho_q$  no tienen raíces comunes excepto  $x_1 = 1$ . Las raíces no comunes en (4.3.1) son  $x_{1,p} = -1$ ,  $x_{1,q} = i$  y  $x_{2,q} = -i$ , luego

$$\lambda_{p,1,p} = -1 \quad \lambda_{q,1,q} = -\frac{1}{2} \quad \lambda_{q,2,q} = -\frac{1}{2}.$$

En las figuras 4.3.1 y 4.3.2 se observan las acotaciones de la matriz de transición de (2.2.9) y (2.2.10) para el MLMP simétrico (4.3.1). En la figura 4.3.3, se representa el error en el hamiltoniano (4.2.1) a lo largo del tiempo. Se puede observar, tal y como se deduce de la subsección 4.1.1 y de los comentarios hechos en la sección 4.2, que el error en el hamiltoniano permanece acotado durante tiempos muy largos. Sin embargo, cuando se considera el MLM no

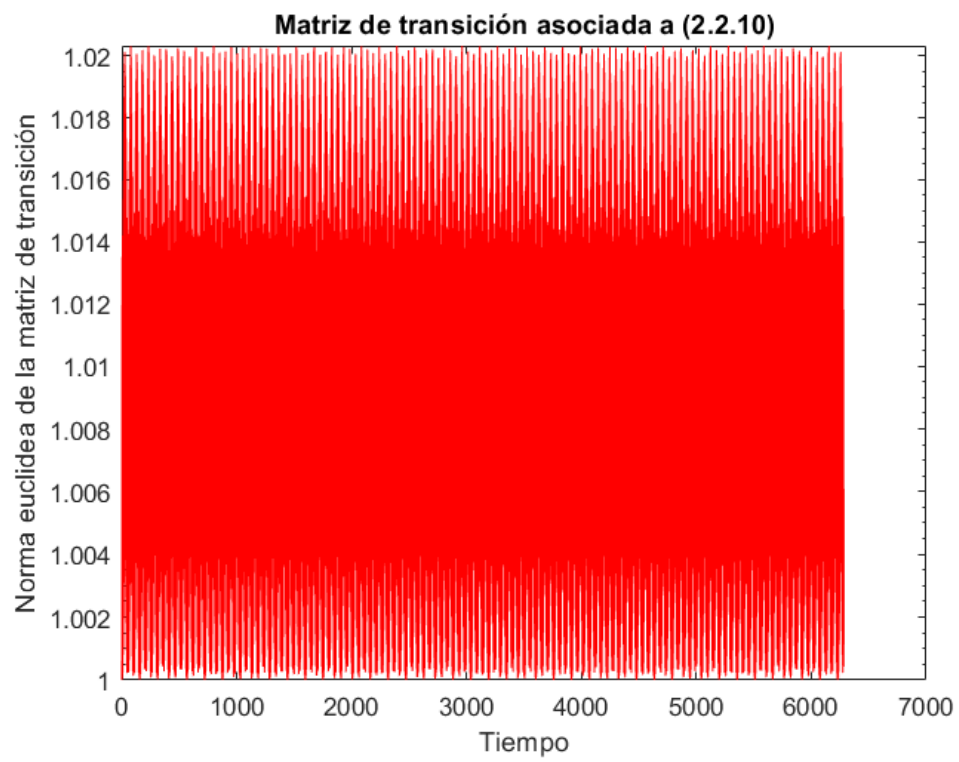


Figura 4.3.2: Acotación de la matriz de transición de (2.2.10)

particionado simétrico (4.3.2), aparece un crecimiento exponencial del error en el hamiltoniano con el tiempo, como se observa en la figura 4.3.4.

Por otro lado, si se toma un MLM no particionado y no simétrico, como el método de Adams, los coeficientes del error en el hamiltoniano asociados a la raíz  $x_1 = 1$  en las potencias pares de  $h$  también estarán acotados en el tiempo. Sin embargo, aquellos asociados a las potencias impares de  $h$  crecerán linealmente con el tiempo. Debido a esto, como el primer polinomio característico del método de Adams solo tiene a  $x_1 = 1$  como raíz de módulo unidad, si el orden es impar, se espera un crecimiento lineal del error con el tiempo, como se observa en la figura 4.3.5 para (4.3.3).

Finalmente, para (4.3.4), se observa que los primeros polinomios característicos no tienen raíces comunes de módulo 1, excepto por  $x_1 = 1$ , y se sabe por los comentarios hechos en la sección 4.2 que el coeficiente del error asociado a la raíz  $x_{2,p} = -1$  de  $\rho_p$  está acotado en el tiempo. Sin embargo, por la subsección 4.1.2, se tiene para el error en el hamiltoniano asociado a la raíz  $x_1 = 1$ , el coeficiente que multiplica a  $h^2$  estará acotado, pero el que multiplica a  $h^3$  crecerá linealmente. Por lo tanto, cuando  $h$  es suficientemente pequeño, el error parece estar acotado al principio, pero a medida que  $t$  crece, el error asociado a  $h^3$  domina y por tanto se produce un crecimiento lineal del error, tal y como se aprecia en la figura 4.3.6.

Concluimos que el error en el hamiltoniano con el MLMP simétrico se comporta bastante mejor con respecto a los errores de los otros tres métodos.

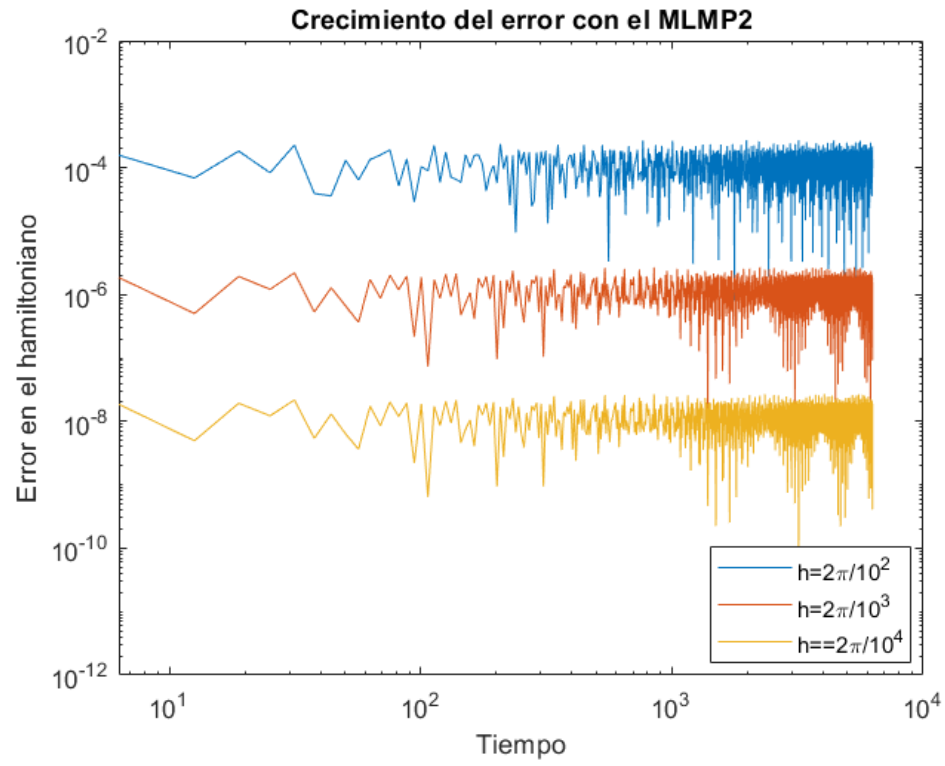


Figura 4.3.3: Error en el hamiltoniano frente al tiempo medido en múltiplos enteros de  $2\pi$  al integrar el problema del doble péndulo con el método simétrico MLMP2 (4.3.1).

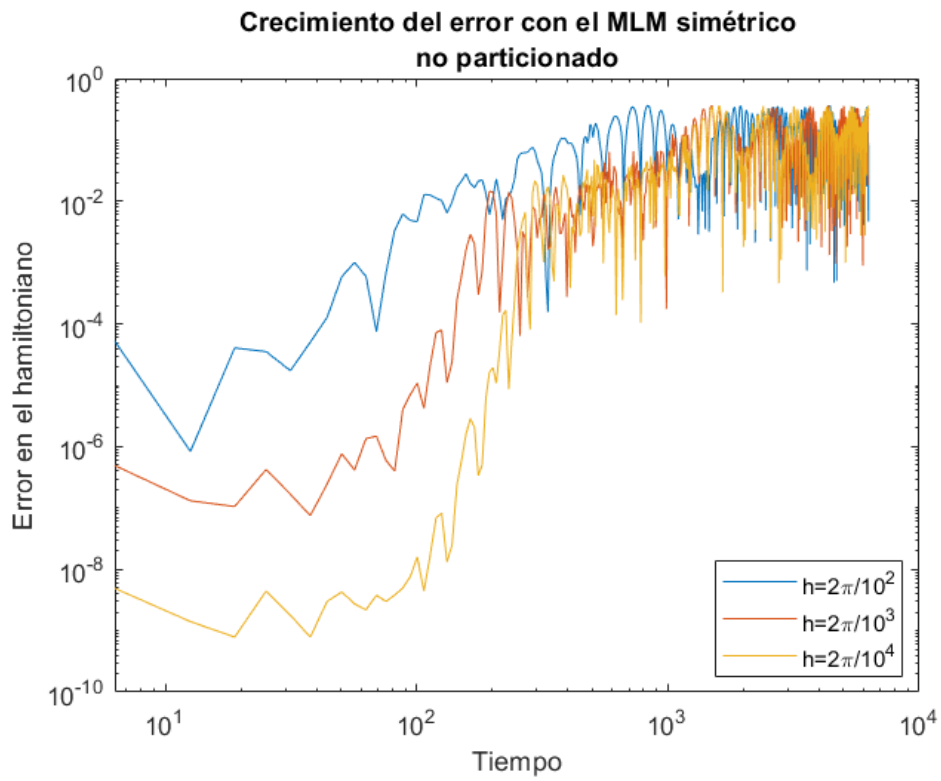


Figura 4.3.4: Error en el hamiltoniano frente al tiempo medido en múltiplos enteros de  $2\pi$  al integrar el problema del doble péndulo con el método simétrico MLM no particionado (4.3.2).

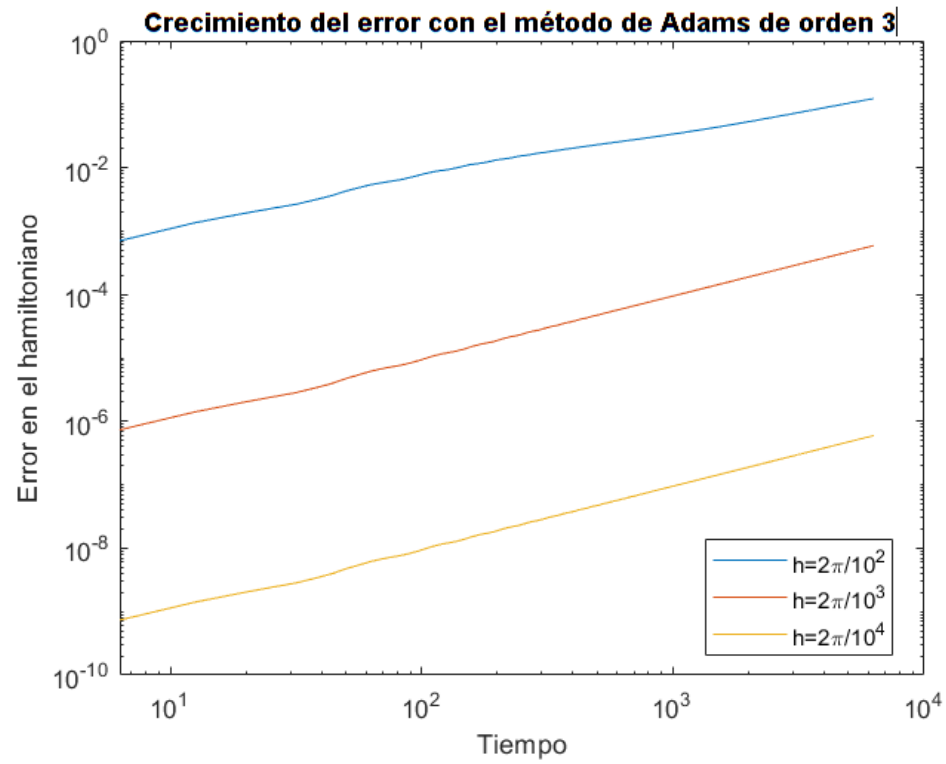


Figura 4.3.5: Error en el hamiltoniano frente al tiempo medido en múltiplos enteros de  $2\pi$  al integrar el problema del doble péndulo con el método de Adams de tercer orden (4.3.3).



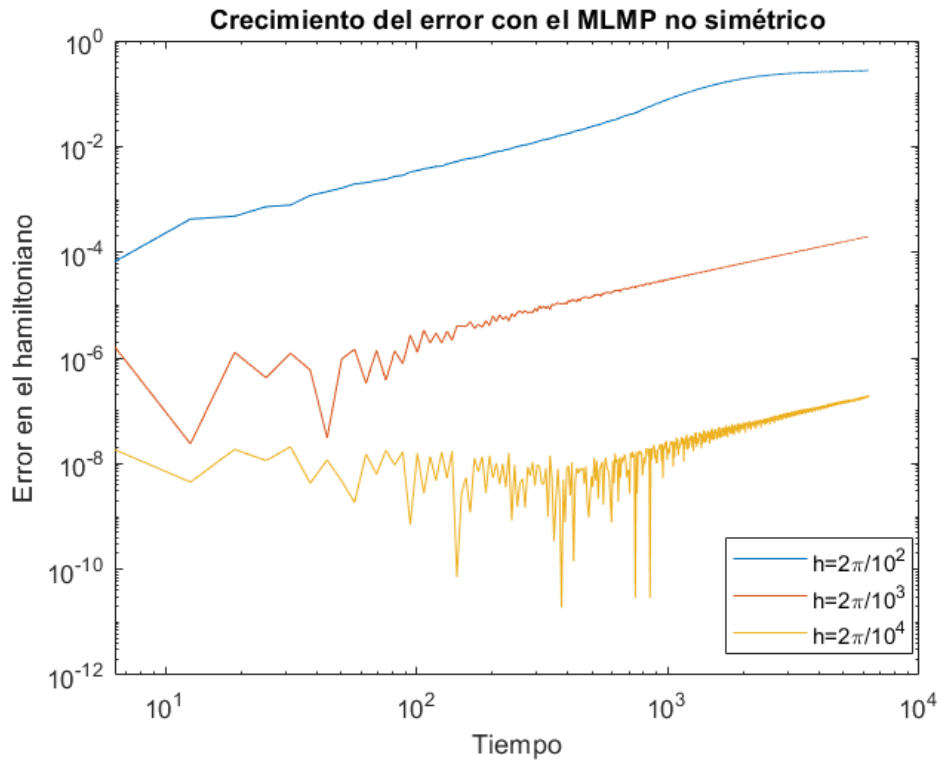


Figura 4.3.6: Error en el hamiltoniano frente al tiempo medido en múltiplos enteros de  $2\pi$  al integrar el problema del doble péndulo con el método MLMP (4.3.4).



# Conclusiones

Las principales aportaciones del trabajo se pueden resumir en los siguientes puntos:

- **Desarrollo asintótico del error global en términos del tamaño de paso:** Se obtiene un desarrollo asintótico que describe cómo se comportan los coeficientes de dicho al usar un MLMP para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de dimensión  $n$ . Esto puede permitir entender cómo el error crece con el tiempo y cómo se comporta respecto a la conservación de ciertas propiedades del sistema, siempre que se disponga de alguna información sobre la solución exacta.
- **Recomendaciones sobre las raíces de los polinomios característicos:** Se desaconseja el uso de métodos cuyo primer polinomio característico tenga raíces comunes distintas de  $x_1 = 1$ , especialmente si estas raíces tienen módulo 1 (es decir, si están en el círculo unitario del plano complejo). Esto se debe a que estos métodos tienden a producir un crecimiento exponencial del error con el tiempo.
- **Ventajas de los MLMPs simétricos sin raíces comunes salvo la unidad:** Los métodos que cumplen esta condición son particularmente eficientes porque su error global se simplifica de manera significativa. En estos casos, los coeficientes asociados a las potencias pares de la longitud de paso en el desarrollo asintótico del error local se anulan, lo que facilita el análisis del error global y el de los invariantes del sistema. Además, aunque estos métodos pueden generar componentes no suaves en la solución numérica, el estudio demuestra que bajo ciertas condiciones, estas componentes pueden mantenerse bajo control, incluso en problemas no separables. Otra ventaja clave es que estos métodos

pueden ser explícitos, lo que los hace computacionalmente más atractivos en comparación con otros integradores geométricos diseñados para problemas separables con cierta estructura.

- **Aplicación al péndulo doble:** Se realiza un análisis detallado en el caso de pequeñas oscilaciones del péndulo doble, lo que permite comprobar las ventajas de los MLMPs simétricos. En particular, se observa que estos métodos controlan mejor el crecimiento del error en la energía (el hamiltoniano) en comparación con otros métodos explícitos multipaso, sean estos simétricos y no particionados, no simétricos y particionados, o no simétricos y no particionados.

# Bibliografía

- [1] B. Cano, *Integración Numérica de Órbitas Periódicas con Métodos Multipaso*, Tesis doctoral, Universidad de Valladolid, 1996.
- [2] B. Cano, A. Durán & M. Rodríguez, *Long-term behaviour of symmetric partitioned linear multistep methods I. Global error and conservation of invariants*, enviado para su publicación.
- [3] B. Cano & J.M. Sanz-Serna, *Error growth in the numerical integration of periodic orbits with application to multistep methods*, IMA J. Num. Anal. 18 (1) (1998), pp. 57-75.
- [4] P. Console & E. Hairer, *Long term stability of symmetric partitioned linear multistep methods*, in Current Challenges in Stability Issues for Numerical Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2082, 2013. Editors: Luca Dieci, Nicola Guglielmi.
- [5] T. Eirola & J. M. Sanz-Serna, *Conservation of integrals and symplectic structure in the integration of differential equations by multistep methods*, Numer. Math. 61 (1992), pp. 281–290.
- [6] E. Hairer, *Conjugate-symplecticity of linear multistep methods*, J. Comp. Math. 26 (5) (2008), pp. 657–659.
- [7] E. Hairer, S. Nørsett & G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*, Second Revised Edition, Springer-Verlag, 2000.
- [8] E. Hairer, C. Lubich & G. Wanner, *Geometric Numerical Integration. Structure Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Second Edition, Springer-Verlag, 2006.

- [9] P. Henrici, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, Wiley, 1962.
- [10] S. M. Lee, *The double-simple pendulum problem*, American Journal of Physics 38(4) (1970), pp. 536–537.
- [11] B. Leimkhuler & S. Reich, *Simulating Hamiltonian Dynamics*, Cambridge University Press, 2004.
- [12] J.M.Sanz-Serna, *Diez Lecciones de Cálculo Numérico*, Universidad de Valladolid.
- [13] J.M.Sanz-Serna & M.P.Calvo, *Numerical Hamiltonian Problems*, Dover Publications, 2018.
- [14] H. J. Stetter, *Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations*, Berlin: Springer, 1973.