



TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Física

Mención en Física Matemática

Cavidades Cuánticas como Mecanismo de Control de Qubits Topológicos

Autor:

Jorge Eduardo Nava Sejas

Tutores:

Fernando J. Gómez-Ruiz

Luis Miguel Nieto Calzada

Índice general

Tabla de Contenidos	II
Lista de Figuras	III
1. Introducción	1
1.1. Computación cuántica topológica	1
1.2. Descripción del contenido	2
2. Modelo de Kitaev	4
2.1. Modelado de nanocables cuánticos	4
2.2. Límites del hamiltoniano de Kitaev	7
2.2.1. Fase trivial	7
2.2.2. Fase topológica	7
2.3. Discusión	9
3. Interacción con la radiación	10
3.1. Modelo de Rabi	10
3.1.1. Cuantización del campo electromagnético	11
3.2. Interacción de una cadena de Kitaev con una cavidad cuántica	11
3.2.1. Interacción bulk en un sitio	12
3.3. Protocolo de fusión	15
3.4. Discusión	18
4. Interacción en dos sitios y braiding	20
4.1. Interacción bulk con dos sitios	20
4.1.1. Estados gato de Majorana-Schrödinger	23
4.2. Protocolo de braiding	24
4.2.1. Fase de Berry	27
4.3. Discusión	27
5. Estructura escalable de Majorana	29
5.1. Descripción del sistema de estudio	29
5.1.1. Sobre el hamiltoniano y primeros niveles de energía del sistema	30
5.2. Estudio de las propiedades del estado fundamental del sistema	32
5.3. Discusión	36
6. Conclusiones	38
A. Aproximación adiabática en el hamiltoniano de Rabi modificado	A-1
B. Aproximación al estado fundamental del hamiltoniano inhomogéneo de dos espines	B-1

C. Cálculo de la fase geométrica para el montaje de interacción con dos sitios C-1

D. Operadores de braiding entre cadenas de Kitaev en la base de fermiones D-1

$\hat{d}$	D-1
D.1. Braiding entre $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{s+1,1}$	D-1
D.2. Braiding entre $\hat{\gamma}_{t-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$	D-2
D.3. Braiding entre $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t-1,2}$	D-3
D.4. Braiding entre $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$	D-4
D.5. Braiding entre $\hat{\gamma}_{s+1,1}$ y $\hat{\gamma}_{t-1,2}$	D-4
D.6. Braiding entre $\hat{\gamma}_{s+1,1}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$	D-5

E. Código en Python E-1

Índice de figuras

2.1.	Representación esquemática de una cadena de Kitaev de longitud N	5
2.2.	Espectro de energías del hamiltoniano de Kitaev en función al potencial químico μ	6
2.3.	Esquema del apareamiento de fermiones de Majorana para una CK con $N = 6$	7
2.4.	Espectro de energías del hamiltoniano de Kitaev en su fase topológica en función a Δ	8
3.1.	Esquema de una CK en la fase topológica interactuando con una cavidad cuántica en un solo sitio	12
3.2.	Espectro de energías para la interacción entre una cavidad cuántica con un sitio de la CK en geometría bulk	13
3.3.	Probabilidad de hallar n fotones en el estado base del sistema, en función a la fuerza de acoplamiento	14
3.4.	Entropía de Von Neumann para el estado fundamental del hamiltoniano (3.11)	15
3.5.	Función de correlación de fermiones $P(s-1, s+1)$	16
3.6.	Función de correlación de fermiones dependiente del tiempo $P(s-1, s+1, t)$, considerando $\lambda = \lambda(t)$	17
3.7.	Función de correlación de fermiones dependiente del tiempo $P(s-1, s+1, t)$, considerando $\phi = \phi(t)$	18
4.1.	Esquema de una CK en la fase topológica interactuando con una cavidad cuántica en dos sitios	21
4.2.	Espectro de energías para el caso bulk de dos sitios	22
4.3.	Estructura del estado fundamental del hamiltoniano (4.4)	23
4.4.	Función de Wigner para los estados gato de Majorana-Schrödinger	24
4.5.	Probabilidad $P(n)$ de observar n fotones en la cavidad en la cavidad cuántica acoplada a dos sitios de la CK	26
4.6.	Paridad fermiónica en el caso de interacción con dos ditios	26
4.7.	Fase de Berry para la evolución cíclica adiabática del acoplamiento del segundo sitio a la cavidad	28
5.1.	Esquema del sistema escalable	30
5.2.	Comparación de los primeros niveles de energía para el sistema escalable	31
5.3.	Valor medio del operador $\langle \hat{a}_j \rangle$ para el sistema escalable	33
5.4.	Población fotónica media $\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle$ para el sistema escalable	34
5.5.	Función de correlación fermiónica para el sistema escalable	35
5.6.	Determinante de la matriz de correlación de Simon $\det C_S$ para el sistema escalable	36
D.1.	Braiding de fermiones de Majorana entre cadenas de Kitaev	D-2

Abstract

Throughout this work, we have carried out a detailed review of the Kitaev chain model, widely used to describe quantum nanowires with potential applications in topological quantum computing. The main objective of this research is to analyze coupling mechanisms with quantum cavities as a means of control tool for qubits based on Majorana modes.

For this purpose, a comprehensive study of the physical properties of the fundamental state of the combined matter-radiation system has been carried out. In particular, the cases where the cavity is locally coupled to one or two sites in the chain are studied, as well as an extended model where two Kitaev chains interact with each other through the coupled-cavity mediated photon exchange. Using numerical techniques, the effect of this configurations on fermionic correlations, the dynamics of the system and the feasibility of implementing quantum operations are evaluated.

The results obtained show that it is possible to locally manipulate the Kitaev chain by coupling it with cavities, allowing operations such as controlled separation of Majorana modes (“topological scissors” effect) and simulations of merging and braiding or exchange protocols. These operations are fundamental for the implementation of topological logic gates and the design of robust quantum architectures.

Finally, the study of the coupled chain model suggest that photonic control can be extended to multipartite systems, opening new possibilities for the construction of controlled quantum gates and the development of new strategies for quantum information processing in hybrid light-matter platforms.

Resumen

A lo largo de este trabajo se ha llevado a cabo un estudio detallado del modelo de la cadena de Kitaev, ampliamente utilizado para describir nanocables cuánticos con potenciales aplicaciones en la computación cuántica topológica. El objetivo principal de esta investigación es analizar mecanismos de acoplamiento con cavidades cuánticas como una herramienta de control para qubits basados en modos de Majorana.

Para ello, se ha realizado un análisis exhaustivo de las propiedades físicas del estado fundamental del sistema combinado de materia y radiación. En particular, se estudian los casos en los que la cavidad se acopla localmente a uno o dos sitios de la cadena, así como un modelo extendido en el que dos cadenas de Kitaev interactúan entre sí a través del intercambio de fotones mediado por cavidades acopladas. Utilizando técnicas numéricas, se evalúa el efecto de estas configuraciones sobre las correlaciones fermiónicas, la dinámica del sistema y la viabilidad de implementar operaciones cuánticas.

Los resultados obtenidos muestran que es posible manipular localmente la cadena de Kitaev mediante el acoplamiento con cavidades, permitiendo operaciones tales como la separación controlada de modos de Majorana (efecto “tijera topológica”) y simulaciones de protocolos de fusión y braiding ó intercambio. Estas operaciones son fundamentales para la implementación de puertas lógicas topológicas y el diseño de arquitecturas cuánticas robustas.

Finalmente, el estudio del modelo de cadenas acopladas sugiere que el control fotónico puede extenderse a sistemas multipartitos, abriendo nuevas posibilidades para la construcción de puertas cuánticas controladas y el desarrollo de nuevas estrategias para el procesamiento de información cuántica en plataformas híbridas materia-luz.

Agradecimientos

Culminar con este trabajo no hubiera sido posible sin la invaluable ayuda y el constante apoyo de muchas personas que me han acompañado a lo largo de este proceso y de mi vida. Por lo que quiero expresarles mi más profundo y sincero agradecimiento.

En primer lugar, expreso mi más profundo agradecimiento a mi familia. Su apoyo incondicional me abrió la puerta para perseguir y realizar mis sueños. Cada una de sus experiencias y su guía han forjado y moldeado gran parte de la persona que soy hoy en día.

A mis amigos, extendiendo mi gratitud por su inquebrantable lealtad y confianza. No solo me han brindado fuerza y ánimo para seguir adelante cuando la necesitaba, sino que también me han ofrecido incontables lecciones de vida, empatía y resiliencia, enriqueciendo mi camino en incontables maneras.

A mis tutores, Fernando y Luis Miguel, les agradezco por su paciencia y dedicación incansable en la dirección de este trabajo y sus consejos. Sus enseñanzas y orientación han sido fundamentales, no solo para la realización de este proyecto, sino también para mi crecimiento intelectual y personal, inspirándome a ver el mundo con una perspectiva más crítica y profunda.

A mis profesores, les agradezco por sembrar la semilla del conocimiento, por su dedicación y por las valiosas enseñanzas que, día a día, contribuyeron a forjar la persona que soy hoy. Su influencia ha sido una luz constante en mi aprendizaje y desarrollo.

Además, un agradecimiento especial al proyecto Q-CAYLE (Comunicaciones Cuánticas Seguras en Castilla y León), que ha hecho posible el desarrollo de este TFM dentro de sus actividades de fomento de la investigación en este campo.

Y a la Fundación Carolina, por darme la oportunidad de realizar este Máster y por su continuo respaldo, que ha sido fundamental en esta etapa.

Capítulo 1

Introducción

En años recientes, la comunidad científica ha sido testigo del surgimiento de la denominada *Segunda Revolución Cuántica*. Esta nueva era está caracterizada por un ambicioso objetivo: realizar la transición del conocimiento teórico que se obtuvo durante la primera revolución cuántica del siglo XX hacia el desarrollo de aplicaciones prácticas y tecnologías innovadoras [1]. Dentro de este proceso de transición, la computación cuántica emerge como uno de los frentes más prometedores.

El origen de esta área de estudio puede trazarse a una conferencia dada por Richard Feynmann en 1982, donde propuso una máquina que trabajase con las leyes de la mecánica cuántica para modelar la física de estos fenómenos [2], pues creía que para simular el mundo cuántico se requería de una máquina cuántica que realice los cálculos [3]. Nace con el objetivo de reemplazar, o más comúnmente, complementar los sistemas computacionales clásicos con componentes (arquitecturas) que aprovechan directamente los principios de la mecánica cuántica. Esta clase de sistemas, en teoría, tienen el potencial de superar significativamente las capacidades de las computadoras convencionales en la resolución de algunos problemas complejos. Sin embargo, la computación cuántica no es solo un proyecto ambicioso, pues a medida que los componentes van reduciendo su tamaño, acercándose a la escala en que los efectos cuánticos tienen efectos importantes [4].

Inicialmente, los avances fueron bastante lentos debido a las limitaciones tecnológicas. No obstante, la gran cantidad de avances que se han dado recientemente, tanto en hardware como algoritmos cuánticos, ha llevado a la computación cuántica a la etapa NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum), donde las computadoras cuánticas aún no son capaces de resolver problemas reales más eficientemente que los clásicos. Para superar la etapa actual de desarrollo, se necesita que los procesadores cuánticos continúen aumentando su número de qubits y que estos sean menos susceptibles al ruido y la decoherencia. Con este objetivo en mente, se han planteado diversas propuestas de arquitecturas cuánticas; en este trabajo nos centraremos en la Computación Cuántica Topológica.

1.1. Computación cuántica topológica

La computación cuántica topológica fue una propuesta de computadora cuántica universal resistente a errores propuesta por primera vez por Alexei Kitaev [5], donde la protección contra errores no viene de protocolos de corrección, si no que viene implementada desde la construcción del hardware. Para lograr esto, se propone almacenar y manipular la información cuántica utilizando un tipo de cuasipartículas exóticas llamadas anyones. Debido a que se tienen un comportamiento estadístico exótico que puede describirse en un espacio topológicamente ordenado, de ahí el nombre de la propuesta [6]. Este es un subespacio degenerado libre de decoherencia, donde la evolución de los estados cuánticos

se produce cuando los anyones se mueven adiabáticamente uno alrededor del otro.

En el contexto de este trabajo, se estudia la propuesta de la realización de computación cuántica topológica utilizando nanocables superconductores. Para modelarlos, se considerarán cadenas de fermiones sin espín llamadas cadenas de Kitaev. Bajo determinadas condiciones, estas son capaces de manifestar un determinado anyon llamado fermión de Majorana; esta cuasipartícula tiene la característica de ser su propia antipartícula. A lo largo de este trabajo, se estudian las propiedades físicas de los fermiones de Majorana, así como la forma de producir evolución de los estados cuánticos de los mismos empleando cavidades cuánticas como mecanismos de control.

1.2. Descripción del contenido

Este trabajo está estructurado en seis capítulos y cinco apéndices; cada uno de los capítulos aborda un aspecto fundamental y progresivo para entender la manipulación de qubits topológicos con cavidades cuánticas. Mientras que los apéndices muestran información complementaria.

En este contexto, el primer capítulo ofrece una introducción general y una contextualización de este trabajo. En él, se proporciona un marco histórico del desarrollo de este campo de conocimiento y se presenta una breve descripción de los temas principales que se abordarán. De esta manera, el capítulo proporciona una visión clara de la estructura y los objetivos de este estudio.

El capítulo 2 se centra en presentar el marco teórico referente al modelo de Kitaev, detallando su formalismo físico y matemático aplicado a las cadenas de Kitaev. Se estudian las condiciones en las que esta cadena adquiere propiedades topológicas manifestando los fermiones de Majorana, las cuasipartículas que dotan de resistencia a los errores y a la decoherencia a los qubits construidos con este enfoque. Este capítulo es de importancia fundamental, ya que estas estructuras son las que se postulan como qubits topológicos, esenciales en el resto de este trabajo. Además, se exploran y analizan sus propiedades físicas mediante desarrollos tanto teóricos como numéricos.

El tercer capítulo introduce el marco teórico fundamental para comprender la interacción de una cadena de Kitaev con la radiación electromagnética. Se inicia con una breve descripción del modelo de Rabi, que describe la interacción entre el campo electromagnético y un sistema de materia de dos niveles. Posteriormente, se analiza la interacción de una cavidad cuántica con un sitio específico de la cadena de Kitaev, demostrando que esta puede reducirse a un modelo de Rabi modificado. Adicionalmente, se caracterizan las propiedades del estado fundamental de este sistema compuesto y se estudia cómo esta interacción actúa como unas *tijeras topológicas* capaces de “cortar” la cadena en dos regiones.

En el capítulo 4, se extiende el modelo de interacción previo, considerando que la cavidad se acopla simultáneamente a dos sitios de la cadena de Kitaev. Mediante la caracterización del estado fundamental resultante, se explora la viabilidad de realizar braiding (intercambios) entre fermiones de Majorana; esta operación es de gran importancia, pues es la que permite construir puertas cuánticas topológicas, que son necesarias en la construcción de un computador cuántico universal. El braiding se logra a través de la regulación precisa del acoplamiento entre la cavidad y cada uno de los sitios, abriendo

nuevas vías para la manipulación topológica con cavidades cuánticas.

El quinto capítulo, se dedica al estudio numérico de los posibles efectos derivados de la interacción entre qubits topológicos en el contexto de la construcción de computadores cuánticos de múltiples qubits. Con este objetivo, se analiza el caso de interacción más sencillo, formado por dos cadenas de Kitaev acopladas con sus dos respectivas cavidades cuánticas. La interacción entre los sistemas se modela mediante el intercambio de fotones entre las cavidades cuánticas. La introducción de este término de interacción entre cavidades cuánticas induce una transición de fase que produce cambios en la paridad de las cadenas de Kitaev, en función de la elección de parámetros de los respectivos qubits. Estos cambios son de gran interés pues tienen implicaciones en la construcción de otras compuertas cuánticas y el desarrollo de nuevas estrategias para el procesamiento de información cuántica en arquitecturas híbridas. Por tanto, se pretende continuar con su estudio, para desarrollar un modelo teórico que permita describir y predecir estos fenómenos de manera más completa.

El último capítulo presenta las consideraciones finales de este trabajo. En él se detallan las conclusiones extraídas de los resultados analizados a lo largo de este trabajo. Además, se hace una recapitulación de las implicaciones que tienen los resultados obtenidos en este campo de estudio. Finalmente, se presentan sugerencias sobre posibles direcciones para continuar con el avance de esta rama de la computación cuántica utilizando lo expuesto en este trabajo.

En cuanto a los apéndices, el Apéndice A, detalla el desarrollo matemático de la aproximación al espectro de energías para un hamiltoniano de Rabi modificado, complementando así los contenidos expuestos en el Capítulo 3.

Los Apéndices B y C están dedicados a complementar el desarrollo del Capítulo 4, presentando respectivamente una aproximación al estado fundamental del sistema acoplado en dos sitios y el cálculo de la fase de Berry.

El Apéndice D ofrece el desarrollo matemático necesario para determinar los operadores de braiding entre dos cadenas de Kitaev, lo que complementa el contenido del Capítulo 5.

Finalmente, el Apéndice E contiene el código fuente escrito en Python utilizado para realizar todos los cálculos presentados a lo largo de este trabajo.

Capítulo 2

Modelo de Kitaev

La computación cuántica actual se encuentra en la etapa denominada NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum, por sus siglas en inglés)[7]. Esta era se caracteriza por procesadores cuánticos con un número moderado de qubits (del orden de decenas a pocos cientos [8]), los cuales aún son altamente susceptibles al ruido y a los errores. Aunque estos dispositivos no cuentan con una corrección de errores cuántica completa, han demostrado ventajas respecto de los sistemas clásicos en ciertas tareas específicas, como la simulación de sistemas físicos y la optimización. Sin embargo, su utilidad práctica sigue siendo limitada en comparación con los algoritmos cuánticos a gran escala previstos para el futuro.

Una de las propuestas más innovadoras para superar las limitaciones del régimen NISQ es la computación cuántica topológica, un enfoque diseñado para ser más robusto frente al ruido y la decoherencia. Uno de los principales impulsores de este paradigma es Microsoft, como demostró con la presentación de Majorana 1 [9, 10, 11]. La computación cuántica topológica se basa en la propuesta de Kitaev, quien demostró que es posible modelar el comportamiento de fermiones de Majorana en estructuras denominadas nanoalambres o nanocables cuánticos.

Un nanoalambre cuántico es un alambre semiconductor a escala nanométrica en el que pueden emerger excitaciones cuánticas denominadas fermiones de Majorana. Estos estados cuánticos aparecen bajo ciertas condiciones clave: un fuerte acople spin-órbita, un campo magnético externo y el contacto con un superconductor. En estas circunstancias, los extremos del nanoalambre pueden albergar modos de Majorana, que son cuasipartículas que actúan como sus propias antipartículas y obedecen estadísticas no abelianas, lo que las hace especialmente prometedoras para la computación cuántica topológica.

En este capítulo, se presenta el formalismo físico y matemático de la propuesta de Kitaev, conocida como cadenas de Kitaev (CK) [12]. A través de este modelo, exploraremos en detalle cómo la interacción entre el acoplamiento spin-órbita, campos magnéticos y superconductividad puede dar lugar a la emergencia de fermiones de Majorana en los extremos de la cadena. Analizaremos las propiedades topológicas de estas excitaciones, su relevancia para la computación cuántica topológica y los desafíos experimentales asociados a su detección y manipulación. Finalmente, discutiremos las implicaciones del modelo de Kitaev en el contexto de la era NISQ y su potencial para allanar el camino hacia una computación cuántica más robusta y tolerante a errores [13].

2.1. Modelado de nanocables cuánticos

En su publicación original [14], Alexei Kitaev propone la construcción de nanocables cuánticos superconductores formados por una cadena de N fermiones sin spin (ver Figura

2.1). Con esto en mente, establece el hamiltoniano del sistema como

$$\hat{H}_{\text{CK}} = -\frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N (2\hat{c}_j\hat{c}_j - 1) - \omega \sum_{j=1}^{N-1} (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j) + \Delta \sum_{j=1}^{N-1} (\hat{c}_j \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j^\dagger). \quad (2.1)$$

Cada uno de los fermiones de esta cadena ocupa un único lugar j y se asocia con un operador de creación y de aniquilación fermiónicos $\hat{c}_j^\dagger$ y $\hat{c}_j$, respectivamente [15]. En este modelo, μ representa el potencial químico de los fermiones que se toma como una constante; ω es la amplitud del gap energético entre fermiones vecinos y Δ es el gap de energía necesaria para inducir la fase superconductora (energía de enlace del par de Cooper). En una cadena de Kitaev (CK), el gap superconductor no solo sirve para describir la energía de la fase superconductora, sino que también protege la fase superconductora topológica y es una propiedad del material con el que se construyen los nano cables cuánticos. Este hamiltoniano puede derivarse a partir del modelo de Ising [16] tomando condiciones de borde abiertas para la cadena.

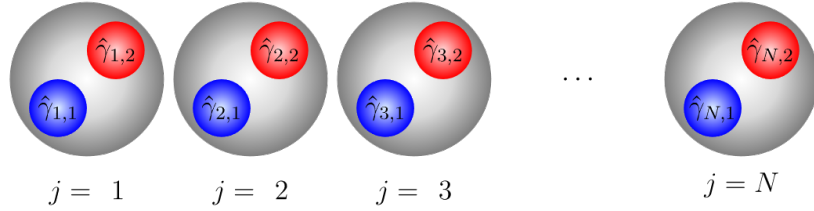


Figura 2.1: Representación esquemática de una cadena de Kitaev de longitud N , en la que los fermiones reales, asociados con los operadores $\hat{c}_j^\dagger, \hat{c}_j$, son representados por un disco de color plomo. A su vez, cada fermión es representado por dos fermiones de Majorana, representados por un disco de color azul $\hat{\gamma}_{j,1}$ y un disco de color rojo $\hat{\gamma}_{j,2}$.

Este Hamiltoniano también puede ser escrito de forma matricial en bloques de matrices:

$$\hat{H}_{\text{CK}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{c}_1^\dagger & \hat{c}_1 & \cdots & \hat{c}_N^\dagger & \hat{c}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B^T & A & B & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B^T & A & B & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & B^T & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1^\dagger \\ \hat{c}_1 \\ \vdots \\ \hat{c}_N^\dagger \\ \hat{c}_N \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Donde las matrices A y B pueden escribirse en términos de los parámetros principales del Hamiltoniano (ver Ec. (2.1)) como $A = -\mu\hat{\sigma}_z$ y $B = -\omega\hat{\sigma}_z - i\Delta\hat{\sigma}_y$ los cuales son bloques de matrices 2×2 y $\hat{\sigma}_\alpha$, con $\alpha = x, y, z$, representando las matrices de Pauli escritas en la base computacional; tal que en esta representación, admite diagonalización de forma exacta, cuyos espectros de energía se pueden ver en la Figura 2.2 [17]. En las figuras 2.2a y 2.2b, se puede ver que a medida que la CK aumenta de tamaño, el número de modos de energía crece de la misma manera. En contraste, al modificar los parámetros Δ y ω , se nota que la transición de la fase topológica a la fase trivial [18] se recorre proporcional al valor de ω , dándose esta transición cuando $|\mu| = 2\omega$.

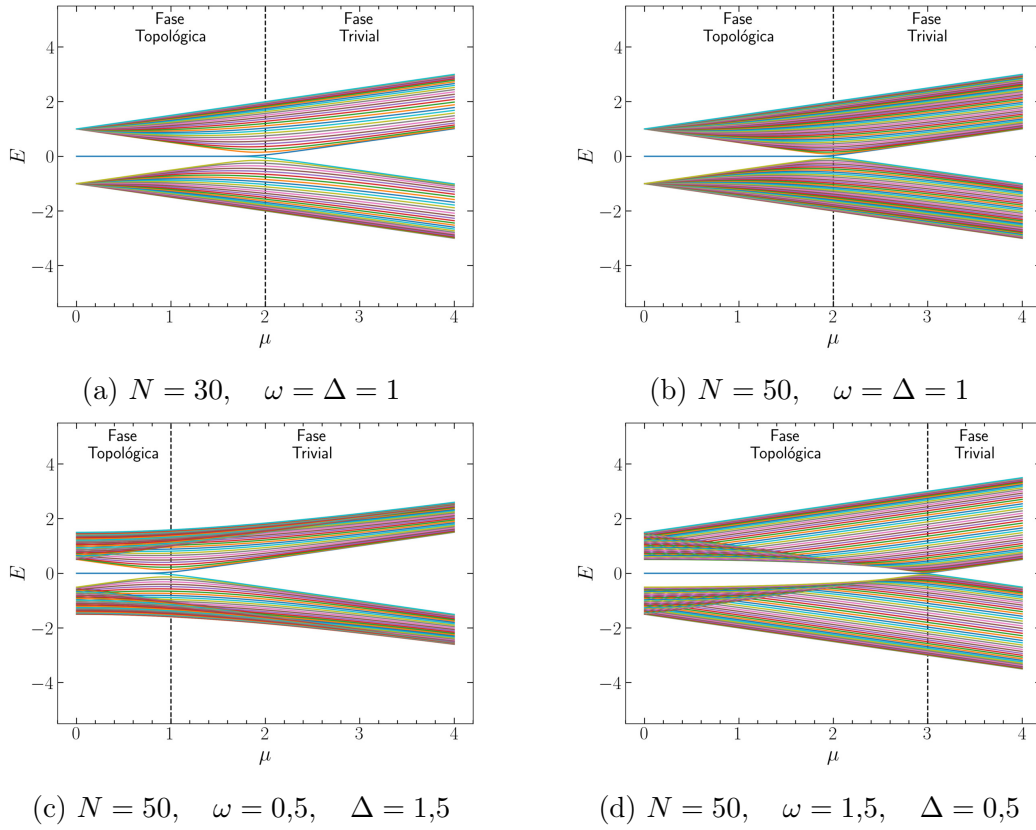


Figura 2.2: Espectro de energías del hamiltoniano de Kitaev en función a μ , variando la longitud de la cadena N , para diferentes valores de Δ y ω , que se obtuvieron por diagonalización exacta de (2.2).

Ahora, este hamiltoniano describe una cadena de fermiones, que no tienen las propiedades que buscamos para usarlos en computación cuántica topológica, de modo que se puede definir de manera conveniente los *operadores de Majorana*

$$\hat{\gamma}_{2j-1} = \hat{c}_j + \hat{c}_j^\dagger, \quad \hat{\gamma}_{2j} = i(\hat{c}_j^\dagger - \hat{c}_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Estos operadores describen las cuasipartículas conocidas como “fermiones de Majorana”, que tienen la característica de ser su propia antipartícula, de modo que sus operadores tienen las relaciones $\hat{\gamma}_j = \hat{\gamma}_j^\dagger$, $(\hat{\gamma}_j)^2 = 1$. Tales que cumplen con las relaciones de anti-conmutación fermiónicas dadas por $\{\hat{\gamma}_j, \hat{\gamma}_k\} = 2\delta_{j,k}$, $\forall j, k = 1, \dots, 2N$. Modelan cada uno de los fermiones reales j como dos fermiones de Majorana $\hat{\gamma}_{2j-1}, \hat{\gamma}_{2j}$ (ver Figura 2.1) y esta representación protege al sistema de los errores de fase.

Escribiendo el hamiltoniano (2.1) en función de los operadores de Majorana definidos en la ecuación (2.3), se puede escribir como:

$$\hat{H}_{\text{CK}} = -i\frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N \hat{\gamma}_{2j-1} \hat{\gamma}_{2j} + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{N-1} [(\omega + \Delta) \hat{\gamma}_{2j} \hat{\gamma}_{2j+1} - (\omega - \Delta) \hat{\gamma}_{2j-1} \hat{\gamma}_{2j+2}]. \quad (2.4)$$

2.2. Límites del hamiltoniano de Kitaev

A partir del hamiltoniano descrito en la ecuación (2.4), se pueden describir dos regímenes, el límite trivial y el límite topológico. La clasificación de estos regímenes se basa en los valores de los parámetros del hamiltoniano. La Figura 2.2 ilustra la variación del espectro de energía de la cadena en función de dichos parámetros, permitiendo distinguir los estados correspondientes a cada fase. La diferencia entre las fases radica en la forma en la que los fermiones de Majorana se aparean entre sí (ver Figura 2.3).

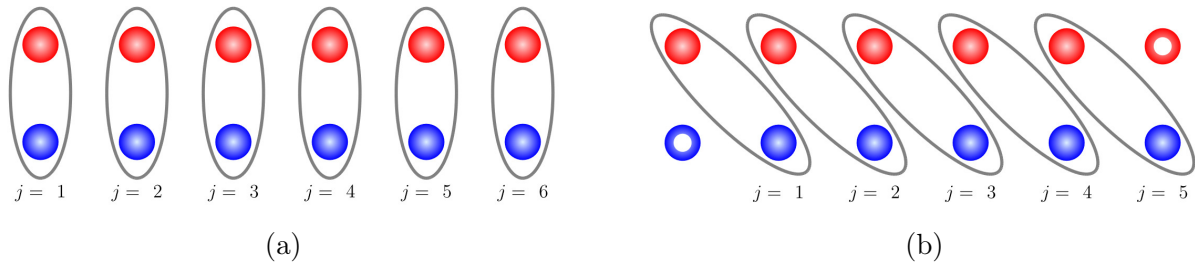


Figura 2.3: Esquema del apareamiento de fermiones de Majorana para una CK con $N = 6$, donde las líneas representan el apareamiento. En el panel izquierdo se muestra el apareamiento trivial de los fermiones de Majorana, en el cuál se aparean en su propio sitio. El panel de la derecha presenta la fase topológica, en la que los fermiones de Majorana ya no se encuentran localizados y los modos de energía cero de Majorana (MZM) se representan con toroides.

2.2.1. Fase trivial

Al considerar que los dos gaps son nulos $\Delta = \omega = 0$ y que el potencial químico de los elementos de la cadena son $\mu < 0$, el hamiltoniano se simplifica a

$$\hat{H}_{\text{CK}} = -i\frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N \hat{\gamma}_{2j-1} \hat{\gamma}_{2j}. \quad (2.5)$$

Este es el hamiltoniano de la fase trivial de la CK. En este límite no existe interacción entre fermiones de Majorana de dos sitios distintos.

2.2.2. Fase topológica

Si se considera que el potencial químico de las componentes de la CK es nulo $\mu = 0$, el hamiltoniano de la CK se reduce a la expresión

$$\hat{H}_{\text{CK}} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{N-1} [(\omega + \Delta) \hat{\gamma}_{2j} \hat{\gamma}_{2j+1} - (\omega - \Delta) \hat{\gamma}_{2j-1} \hat{\gamma}_{2j+2}]. \quad (2.6)$$

En la ecuación (2.6), se puede ver que existe otro tipo de apareamiento entre fermiones de Majorana. Del espectro de la fase topológica (Figura 2.4) se puede ver que en el caso de que $\Delta = \omega$, solo se tiene tres modos de energía, donde uno de ellos tiene energía cero, este

modo es de especial interés, como se verá más adelante. De modo que si se fija $\Delta = \omega > 0$, entonces se llega a la descripción de la fase topológica de la CK, cuyo hamiltoniano es

$$\hat{H}_{\text{CK}} = i\Delta \sum_{j=1}^{N-1} \hat{\gamma}_{2j} \hat{\gamma}_{2j+1}, \quad (2.7)$$

Este hamiltoniano muestra que un fermión de Majorana se empareja con otro fermión de Majorana correspondiente a un fermión real vecino, formando un nuevo fermión llamado fermión no localizado (ver Figura 2.3b). Como se mencionó anteriormente, este modelo se caracteriza por considerar una cadena abierta. En consecuencia, los fermiones de Majorana ubicados en los extremos de la cadena permanecen desemparejados y se denominan modos de energía cero de Majorana (Majorana Zero Energy Modes, MZM). Estos modos son de particular interés debido a su estabilidad frente a perturbaciones, propiedad fundamental para la computación cuántica topológica.

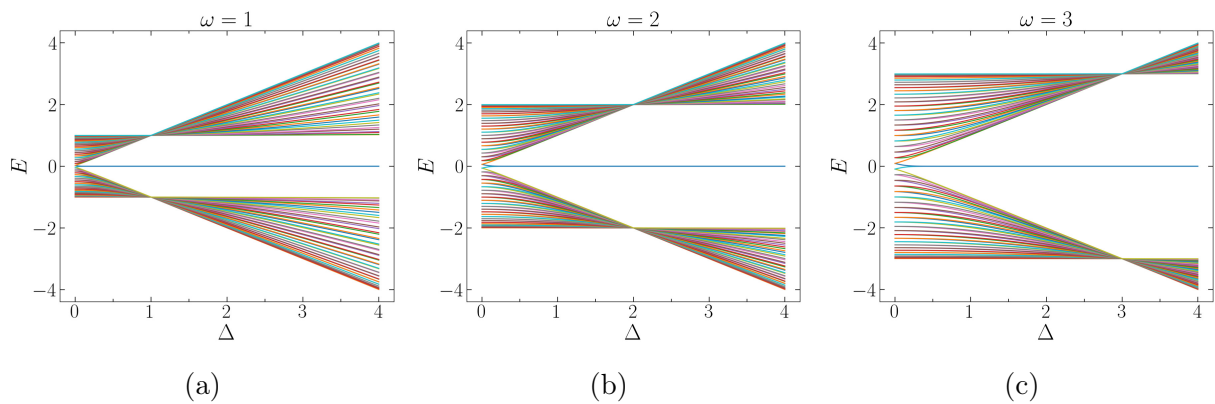


Figura 2.4: Espectro de energías del hamiltoniano de Kitaev en su fase topológica en función a Δ , variando los valores de ω , que se obtuvieron por diagonalización exacta de la Ec. (2.2).

Para describir estos nuevos tipos de apareamientos entre fermiones de Majorana, es conveniente introducir un nuevo conjunto de operadores fermiónicos $\hat{d}_j, \hat{d}_j^\dagger$ cuya expresión está dada por

$$\hat{\gamma}_{2j-1} = i(\hat{d}_{j-1}^\dagger - \hat{d}_{j-1}), \quad \hat{\gamma}_{2j} = \hat{d}_{j-1}^\dagger + \hat{d}_{j-1}, \quad (2.8)$$

que cumplen con las relaciones de conmutación $\{\hat{d}_j, \hat{d}_k^\dagger\} = \delta_{j,k}$, de modo que se puede reducir el hamiltoniano (2.7) a la forma

$$\hat{H}_{\text{CK}} = 2\Delta \sum_{j=1}^{N-1} \left(\hat{d}_j^\dagger \hat{d}_j - \frac{1}{2} \right). \quad (2.9)$$

La estructura de oscilador armónico inherente que adquiere el hamiltoniano permite describir las energías propias de la cadena mediante cuasipartículas fermiónicas no localizadas, representadas por los operadores fermiónicos $\hat{d}_j, \hat{d}_j^\dagger$, no contribuyen a los MZM's. Por otra parte, los fermiones de Majorana desemparejados pueden combinarse para formar un nuevo fermión no localizado $\hat{d}_0 = \frac{1}{2}(i\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_{2N})$ que actúa como un qubit no localizado. Esta división propia de los MZM's implica que la información cuántica del sistema se almacena de forma no local en ambas mitades del modo. De esta manera, incluso si una de las mitades experimenta interferencias, la información cuántica permanece suficientemente preservada en la otra mitad para permitir la continuación de los procesos computacionales [19], logrando así estados cuánticos resistentes a errores y decoherencia.

2.3. Discusión

En este capítulo, se ha presentado el modelo de Kitaev, un sistema que representa una cadena unidimensional que exhibe una fase superconductora topológica capaz de albergar fermiones de Majorana en sus extremos. Al ser partículas de Majorana, son sus propias antipartículas y obedecen estadísticas no abelianas, lo que los convierte en candidatos prometedores para la computación cuántica topológica.

Se ha explorado en detalle el hamiltoniano de la cadena de Kitaev, identificando los parámetros clave que controlan la transición entre la fase topológica y la fase trivial. Se ha discutido cómo la presencia de un gap superconductor protege la fase topológica y cómo los fermiones de Majorana en los extremos de la cadena, conocidos como modos de energía cero de Majorana (MZM), son estables frente a perturbaciones locales, una propiedad esencial para la computación cuántica tolerante a fallos.

Además, se ha analizado la transformación del hamiltoniano a la base de fermiones de Majorana, lo que ha permitido una comprensión más profunda de la naturaleza de las excitaciones en el sistema. Se ha mostrado cómo los MZM's pueden formar un qubit no local, donde la información cuántica se almacena de forma distribuida, ofreciendo así protección contra la decoherencia local.

En comparación con otros enfoques para la computación cuántica, como los qubits superconductores o los qubits de iones atrapados, la computación cuántica topológica basada en fermiones de Majorana ofrece la posibilidad de tener tolerancia a fallos intrínseca [20]. Sin embargo, la realización práctica de esta visión aún requiere superar importantes desafíos científicos y tecnológicos [21].

Capítulo 3

Interacción con la radiación

Para lograr los avances tecnológicos necesarios para superar la etapa NISQ, se requiere desarrollar mecanismos que permitan la manipulación y el control de los qubits topológicos. En este contexto, la radiación, especialmente en forma de microondas o luz; se utiliza con este fin. En algunas aplicaciones, por ejemplo, se pueden usar pulsos de radiación para realizar operaciones cuánticas en los qubits o para leer su estado.

Además, la interacción con la radiación puede utilizarse para generar y detectar fermiones de Majorana, las cuasipartículas características que actúan como qubits topológicos. Experimentalmente, las cavidades cuánticas pueden crear las condiciones necesarias para la aparición de fermiones de Majorana en los bordes de los materiales topológicos.

Por otra parte, este mismo mecanismo es el que describe la interacción con el entorno, que puede causar decoherencia (pérdida) de información cuántica. Es crucial, por lo tanto, entender y controlar esta interacción para proteger la coherencia de los qubits topológicos, permitiendo realizar cálculos cuánticos precisos y diseñar dispositivos cuánticos de mayor fiabilidad. Esto, a su vez, permitiría superar las limitaciones de la etapa NISQ.

En este capítulo, se plantea el formalismo matemático y físico del mecanismo de interacción entre la radiación y una cadena de Kitaev (CK). En particular, se estudiará el caso de la interacción entre una cavidad cuántica y un sitio intermedio de la CK, obteniendo un modelo de interacción descrito por el modelo de Rabi modificado. Discutiremos las propiedades físicas y topológicas de este mecanismo y algunos de los desafíos que se presentan.

3.1. Modelo de Rabi

El modelo cuántico de Rabi describe la interacción entre un campo electromagnético cuantizado y un sistema de dos niveles, como un átomo. Este modelo es de particular interés en el estudio de sistemas de computación cuántica topológica, dado que los qubits son inherentemente sistemas de dos niveles. El sistema se describe mediante el siguiente hamiltoniano

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \hat{H}_f + \hat{H}_a - \hat{d} \cdot \hat{E}. \quad (3.1)$$

El primer término representa el hamiltoniano del campo electromagnético cuantizado, $\hat{H}_a$ representa la energía del sistema de dos niveles y el último término representa la interacción entre los dos subsistemas, esta interacción se produce dipolarmente.

La energía del sistema de dos niveles viene dada por $\Delta_a \hat{\sigma}_z$, donde Δ_a representa el gap de energía entre los dos niveles y $\hat{\sigma}_z$ es la matriz de Pauli escrita en la base computacional.

Para los otros dos términos, es necesario estudiar cuál es la acción de la cuantización sobre el campo electromagnético.

3.1.1. Cuantización del campo electromagnético

Considerando una cavidad de volumen V , que se construye con dos espejos completamente reflectantes separados una distancia L entre sí, en la que se confina ondas electromagnéticas de longitud de onda $\lambda_{\text{foton}} = 2L/n$. Restringiendo a un solo modo en el campo electromagnético, la energía total de la cavidad viene dada por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon_0 |\hat{\vec{E}}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\hat{\vec{B}}|^2 \right) d\tau. \quad (3.2)$$

Reemplazando expresiones apropiadas para los campos magnético $\hat{\vec{B}}$ y eléctrico $\hat{\vec{E}}$ que se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell, se puede demostrar que este hamiltoniano se transforma a

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\omega^2 \hat{q}^2 + \hat{p}^2) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.3)$$

que corresponde al hamiltoniano de un oscilador armónico con frecuencia ω . De modo que se puede escribir el primer término del Hamiltoniano de Rabi (Ec. (3.1)) como $\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$, quitando el término $1/2$ porque es una constante y no afecta a la dinámica del sistema y se asume $\hbar = 1$.

De la misma manera, en la aproximación dipolar $\lambda_{\text{foton}} \gg r_{\text{atomo}}$, en la imagen de Schrödinger, el término de interacción puede escribirse como

$$\hat{\vec{d}} \cdot \hat{\vec{E}} = g \hat{d} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (3.4)$$

Donde el operador dipolo adquiere la forma $\hat{d} = d \hat{\sigma}_x$. Redefiniendo $\lambda = dg$, finalmente se puede escribir el Hamiltoniano de Rabi en su forma típica

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_a \hat{\sigma}_z + \lambda (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{\sigma}_x. \quad (3.5)$$

Un aspecto notable de este Hamiltoniano, es que la parte fotónica del término de interacción se asemeja a la definición de una cuadratura $\hat{X} = (\hat{a}^\dagger + \hat{a})/\sqrt{2}$ del oscilador armónico.

3.2. Interacción de una cadena de Kitaev con una cavidad cuántica

Es importante estudiar cuál es el efecto de la interacción de una CK con la radiación, que puede estar originada por una cavidad cuántica cuya frecuencia característica está dada por ω . En este contexto, la cavidad cuántica actúa como una “tijera topológica”, dividiendo la CK en dos segmentos [22] y generando la formación de nuevos MZM's en los sitios adyacentes a la cavidad.

Al igual que en la sección anterior, al tener un sistema de materia interactuando con la radiación y por tanto, buscamos un hamiltoniano total de la forma

$$\hat{H}_T = \hat{H}_{\text{CK}} + \hat{H}_C + \hat{H}_X, \quad (3.6)$$

donde $\hat{H}_{\text{CK}}$ corresponde al hamiltoniano de la CK dada por la ecuación (2.9), $\hat{H}_C$ es el hamiltoniano de la cavidad y $\hat{H}_X$ es el hamiltoniano de interacción.

Tal como se observó anteriormente, a la cavidad cuántica le corresponde el hamiltoniano de un oscilador armónico $\hat{H}_C = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$, donde ω es la energía cuántica del fotón, el hamiltoniano del sistema de materia es el que se calculó en la ecuación (2.9); y el hamiltoniano de interacción entre la cavidad y la CK, se considera que tiene una cuadratura rotativa tipo homodina (homodyne rotated quadrature, $\hat{X}_{\text{rot}} = (e^{-i\phi_j} \hat{a}^\dagger + e^{i\phi_j} \hat{a})/\sqrt{2}$) [23, 24] que viene dada por

$$\hat{H}_X = \frac{1}{\sqrt{n_{\text{Cav}}}} \sum_{j \in \text{Cav}} \lambda_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j (e^{-i\phi_j} \hat{a}^\dagger + e^{i\phi_j} \hat{a}), \quad (3.7)$$

donde $\lambda_j e^{-i\phi_j} \in \mathbb{C}$ es la fuerza del acoplamiento entre la cavidad y el sitio j de la CK; y Cav es el conjunto de sitios que se encuentran dentro de la cavidad, este conjunto tiene una cardinalidad n_{Cav} .

Dependiendo de la cantidad de sitios que se encuentran dentro de la cavidad, se tendrán diferentes casos; pero en el contexto de este trabajo, solo se considerará el caso en el las posiciones dentro de la cavidad no son las de los extremos, es decir $1 < s < N$; este caso se conoce como casos de simetría en volumen (bulk geometry). A continuación se estudiará la interacción de un sitio de este tipo con la cavidad cuántica.

3.2.1. Interacción bulk en un sitio

El primer caso de estudio, es el que corresponde en el que un solo sitio $j = s$ se encuentra dentro de la cavidad (bulk de un sitio, Fig. 3.1). Tal que el hamiltoniano de este sistema está dado por:

$$\hat{H}_1 = 2\Delta (\hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_s^\dagger \hat{d}_s - 1) + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \lambda \hat{c}_s^\dagger \hat{c}_s (e^{-i\phi} \hat{a}^\dagger + e^{i\phi} \hat{a}). \quad (3.8)$$

Este hamiltoniano depende tanto de los fermiones no locales $\hat{d}$ como los fermiones reales

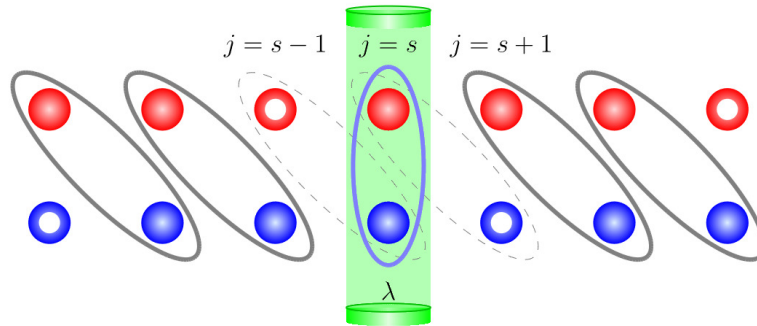


Figura 3.1: Esquema de una CK en la fase topológica interactuando con una cavidad cuántica en un solo sitio, donde las esferas representan los fermiones de Majorana y los toros los MZM, la interacción se produce con un sitio de la CK (caso bulk). Los fermiones de Majorana representados en azul corresponden a $\hat{\gamma}_{i,1}$, mientras que los rojos a $\hat{\gamma}_{i,2}$, con i las posiciones de la CK.

$\hat{c}$, de modo que es necesario llevarlos a la representación de fermiones no locales para

continuar con los cálculos. A partir de la definición de los fermiones no localizados (2.8), se puede deducir las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\hat{d}_j &= \frac{i}{2}(\hat{c}_j^\dagger - \hat{c}_j + \hat{c}_{j+1}^\dagger + \hat{c}_{j+1}) = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{2j} + i\hat{\gamma}_{2j+1}) = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{j,2} + i\hat{\gamma}_{j+1,1}), \\ \hat{d}_j^\dagger &= \frac{i}{2}(\hat{c}_j^\dagger - \hat{c}_j - \hat{c}_{j+1}^\dagger - \hat{c}_{j+1}) = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{2j} - i\hat{\gamma}_{2j+1}) = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{j,2} - i\hat{\gamma}_{j+1,1}),\end{aligned}\quad (3.9)$$

donde por facilidad, se puede hacer el cambio de índice en los operadores de Majorana para facilitar la descripción. Ahora, para el sitio en el interior de la cavidad, se tiene

$$\hat{c}_s^\dagger \hat{c}_s = \frac{1}{2}(1 + i\hat{\gamma}_{s,1}\hat{\gamma}_{s,2}) = \frac{1}{2}(1 + \hat{d}_{s-1}\hat{d}_s + \hat{d}_{s-1}\hat{d}_s^\dagger - \hat{d}_{s-1}^\dagger\hat{d}_s - \hat{d}_{s-1}^\dagger\hat{d}_s^\dagger). \quad (3.10)$$

El hamiltoniano de Kitaev (2.9) tiene como constante de movimiento a la paridad de excitaciones, de modo que la paridad fermiónica debe permanecer constante, de modo que los únicos términos que tienen una contribución al hamiltoniano son $\hat{d}_{s-1}^\dagger\hat{d}_s^\dagger$ y $\hat{d}_{s-1}\hat{d}_s$. En consecuencia, puede escribirse de manera más conveniente usando la base del estado de ocupación de los sitios $s-1$ y s , tal que $|-\rangle_z = |\circ\circ\rangle$, $|+\rangle_z = |\bullet\bullet\rangle = \hat{d}_{s-1}^\dagger\hat{d}_s^\dagger|\circ\circ\rangle$, donde $|\circ\circ\rangle$ representa el vacío, *i.e.* no hay fermiones de tipo d en $j = s-1, s$, esta base es especialmente útil para estudiar la dinámica del sistema si se trabaja en el régimen del acoplamiento débil ($\lambda < \omega \sim \Delta$). El hamiltoniano del sistema se reduce a

$$\hat{H}_1 = -2\Delta\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\lambda}{2}(e^{-i\phi}\hat{a}^\dagger + e^{i\phi}\hat{a})(\mathbb{1}_2 - \hat{\sigma}_x). \quad (3.11)$$

Este hamiltoniano corresponde al modelo de Rabi modificado, en el que la cavidad y la CK entran en resonancia cuando $\omega = 4\Delta$ y el estado fundamental (ver Figura 3.2) en esta base puede escribirse como $|\text{GS}\rangle = |0\rangle \otimes |-\rangle_z$, donde $|0\rangle$ representa el vacío fotónico.

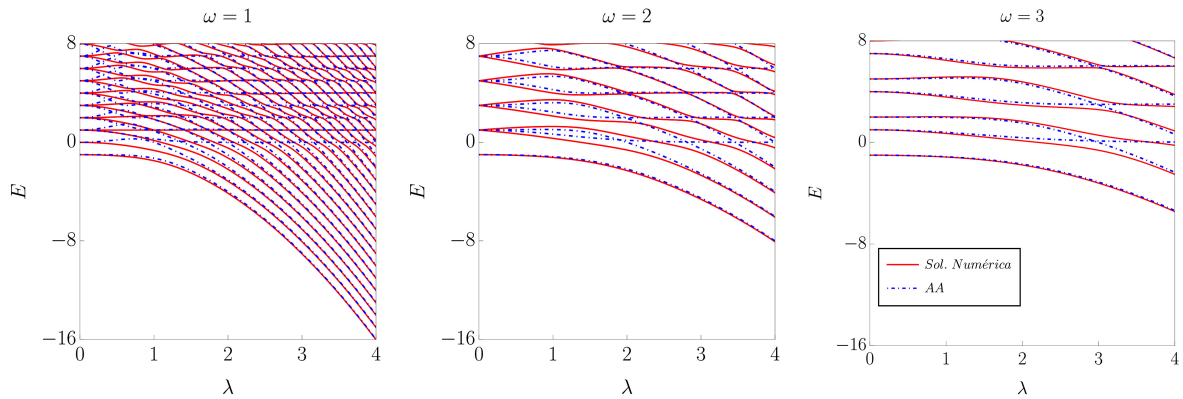


Figura 3.2: Espectro de energías para la interacción con un solo sitio (Ec. (3.11)), considerando $\phi = 0$ y $\Delta = 0,5$ para diferentes valores de frecuencia de la cavidad. El espectro exacto viene representado por líneas solidas rojas y las energías en el régimen de la aproximación adiabática (Ec. (3.12)) con líneas discontinuas azules. Se elige $\phi = 0$ arbitrariamente porque no modifica los estados propios ni el espectro de energías.

Siguiendo el procedimiento descrito en el Apéndice A, se puede obtener el espectro de las energías de esta interacción en la aproximación adiabática (Ec. (A.9))

$$E_{n,\pm}^{\text{AA}} = \frac{1}{2} \left(2n\omega - \frac{\lambda^2}{\omega} \pm \sqrt{\frac{\lambda^4}{\omega^2} + 16\Delta^2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right) L_n\left(\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2} \right). \quad (3.12)$$

En la Figura 3.2, se puede observar que en el régimen del acoplamiento ultra fuerte (Ultra Strong Coupling, USC) ($\lambda > \omega \sim \Delta$), el espectro de energías (3.12) replica de manera bastante fidedigna el espectro de energías, así como los cruces entre niveles de energía que se producen en este.

En este límite, una base mejor adaptada para describir este sistema se puede construir en base al número de ocupación $|n_{L,R}, n_c\rangle$ de un fermión no local $\hat{d}_{L,R} = (\hat{\gamma}_L + i\hat{\gamma}_R)/2$ y un fermión localizado que se encuentra dentro de la cavidad $\hat{c}_s = (\hat{\gamma}_{s,1} + i\hat{\gamma}_{s,2})/2$. Las componentes del fermión no local son los fermiones de Majorana $\hat{\gamma}_L = \hat{\gamma}_{s-1,2}$ ubicado justo a la izquierda de la cavidad y $\hat{\gamma}_R = \hat{\gamma}_{s+1,1}$ ubicado a la derecha de esta. La transformación entre las dos bases se expresa como

$$|\circ\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\circ_{L,R}, \circ_c\rangle - i|\bullet_{L,R}, \bullet_c\rangle), \quad |\bullet\bullet\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\circ_{L,R}, \circ_c\rangle + i|\bullet_{L,R}, \bullet_c\rangle). \quad (3.13)$$

El estado fundamental se escribe como $|GS\rangle \simeq -i|\alpha\rangle \otimes |\bullet_{L,R}, \bullet_c\rangle$, donde $\alpha = -\lambda e^{-i\phi}/\omega$.

Por la forma del estado fundamental, se puede hallar la probabilidad de encontrar n fotones dentro la cavidad. Para los estados coherentes $|\alpha\rangle$, esta se describe mediante una distribución de Poisson, $P(n) = \exp(-|\alpha|^2)|\alpha|^{2n}/n!$. Estas predicciones teóricas muestran concordancia con los resultados numéricos obtenidos, que se muestran en la Fig. 3.3.

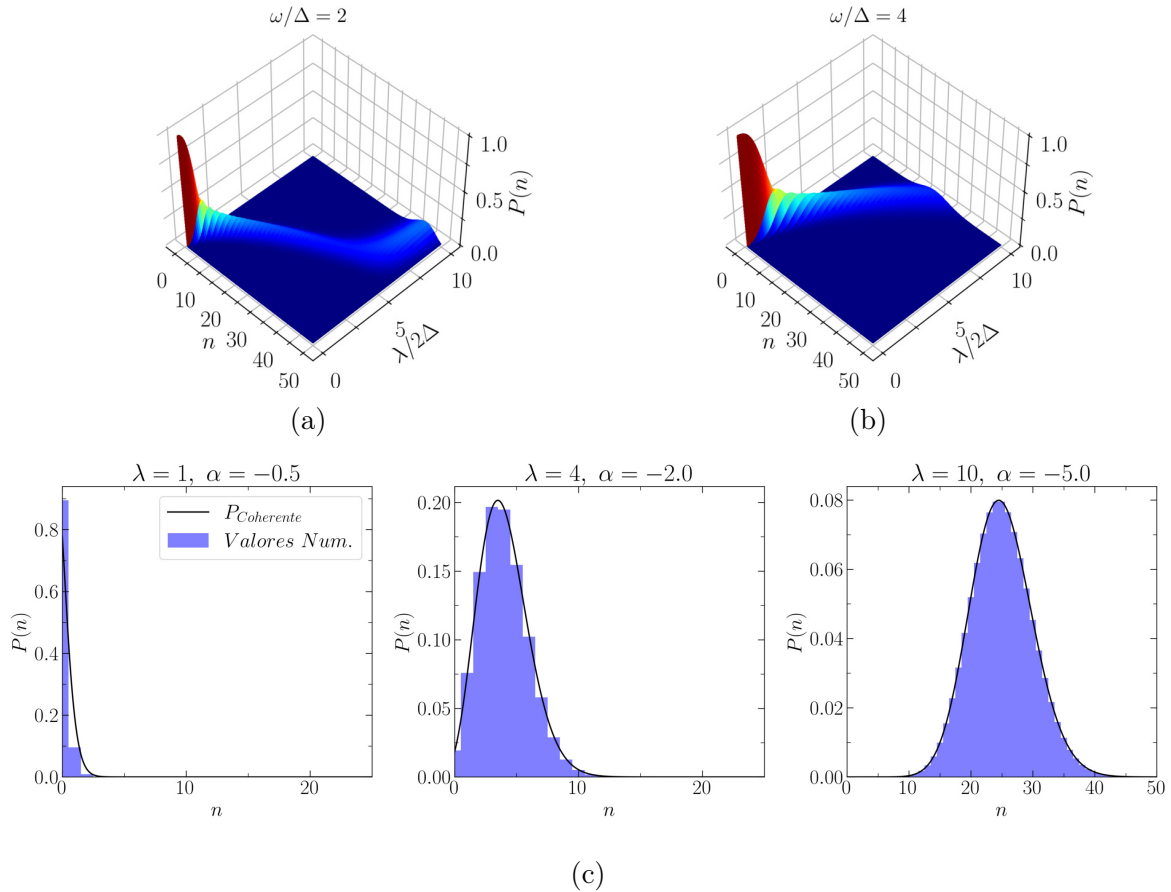


Figura 3.3: Probabilidad $P(n)$, donde n corresponde al número de fotones en el estado base en función a la fuerza de acoplamiento λ , para $\Delta = 0,5$, considerando (a) $\omega/\Delta = 2$, (b) $\omega/\Delta = 4$. Y (c) comparación entre los valores teóricos de la probabilidad para un estado coherente con los resultados numéricos para distintos valores de acoplamiento.

Por otra parte, la entropía de von Neumann,

$$S = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}), \quad (3.14)$$

para la matriz densidad de un determinado estado, sirve para caracterizar algunas de las propiedades cuánticas del sistema de la cadena de Kitaev, especialmente en relación con el entrelazamiento y las fases topológicas. La entropía de von Neumann de una subregión de la cadena puede revelar información sobre el grado de entrelazamiento entre esa subregión y el resto del sistema. En la Figura 3.4, se puede ver como a medida que el acoplamiento entre la CK y la cavidad cuántica aumenta, S se aproxima a 0. Esto indica que en este límite, el estado base del sistema descrito por el hamiltoniano (3.11) efectivamente puede descomponerse como el producto de un estado de materia y un estado coherente de radiación.

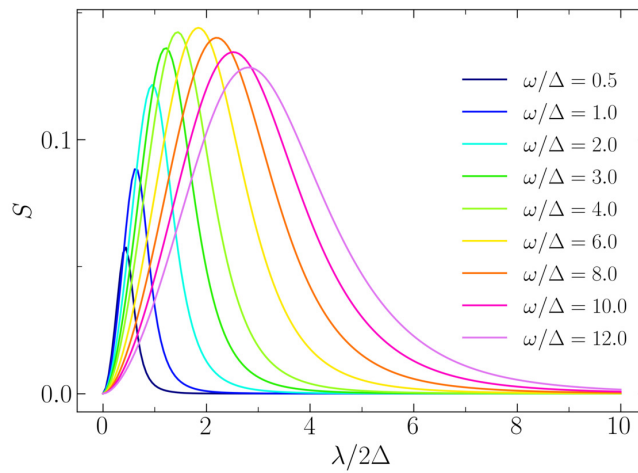


Figura 3.4: Entropía de Von Neumann para el estado fundamental del hamiltoniano (3.11) para distintos valores de frecuencia de la cavidad ω en función al acoplamiento entre la CK y la cavidad λ .

3.3. Protocolo de fusión

Tal como se ilustra en la Figura 3.1, la fusión de dos MZM's, que en este contexto se comportan como anyones de tipo Ising (σ), pueden producir dos posibles estados finales: el vacío (1) o un fermión real de Dirac (Ψ), simbólicamente $\sigma \times \sigma = 1 + \Psi$ [25]. La existencia de dos posibles resultados para la fusión es una manifestación directa de la naturaleza no abeliana de los MZM's. La verificación experimental de esta propiedad no abeliana de las cuasipartículas se realiza a través de protocolos basados en la Regla de Fusión, donde se observan los diferentes resultados posibles de la combinación de los MZM's.

Para investigar numéricamente el escenario no trivial de la fusión de MZM's (a un fermión real), se puede considerar una cadena de Kitaev interactuando con una cavidad cuántica (descrita por la Ec. (3.11)). El protocolo consiste en aumentar adiabáticamente la fuerza del acoplamiento entre la cavidad y la CK λ . Inicialmente, se considera el sistema en su estado fundamental, es decir, $|0\rangle \otimes |-\rangle_z$.

A medida que se activa el acoplamiento entre la cavidad y la CK, la topología del sistema cambia en la vecindad de la cavidad. Como se detalla en la Ref. [22], este acoplamiento induce la formación de dos nuevos MZM's localizados en los sitios de la CK adyacentes a la cavidad (ver Fig. 3.1). Estos nuevos MZM's emergen como consecuencia de la hibridación de los estados electrónicos de la cadena inducida por la presencia del campo electromagnético cuantizado de la cavidad. Tal como se demostró en la sección anterior, una vez que existe acoplamiento entre la cavidad y la CK, en el límite de acoplamiento ultra fuerte (USC, $\lambda > \omega \sim \Delta$), los estados de materia y radiación son separables en la forma $|\Psi\rangle \simeq |\alpha\rangle \otimes |-\rangle_x$, donde $|\alpha\rangle$ es un estado de radiación coherente con $\alpha = -\lambda/\omega$ y los estados de materia cumplen que $\hat{\sigma}_x |-\rangle_x = -|-\rangle_x$.

Una vez que la cavidad y la CK se encuentran fuertemente acopladas, el estado final de materia llega a ser $|-\rangle_x = (|\circ\circ\rangle - |\bullet\bullet\rangle)/\sqrt{2}$, este estado final tiene sentido, pues la paridad fermiónica se conserva con este proceso. La forma del estado tras la interacción, muestra que existe una superposición de estados con igual probabilidad de que no existan fermiones rodeando la cavidad y un estado de que exista un fermión a cada lado de la cavidad. Esto muestra que la fusión provocada por la cavidad tiene un carácter probabilístico y muestra que los anyones tipo Ising son no abelianos, tal como se deseaba.

Se puede mostrar la validez del protocolo de fusión en la interacción con un solo sitio midiendo la función de correlación entre los dos fermiones más próximos a la cavidad $\hat{\gamma}_L = \hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_R = \hat{\gamma}_{s+1,1}$, que se puede definir como

$$\begin{aligned} P(s-1, s+1) &= i\langle \hat{\gamma}_{s-1,2} \hat{\gamma}_{s+1,1} \rangle = -i\langle \hat{\gamma}_{s,2} \hat{\gamma}_{s,1} \rangle, \\ \hat{\gamma}_{s-1,2} \hat{\gamma}_{s+1,1} &= i \left(\hat{d}_{s-1} \hat{d}_s^\dagger + \hat{d}_s \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_s^\dagger - \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_s \right), \\ P(s-1, s+1) &= -\langle \bullet\bullet | \left(\hat{d}_s \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_s^\dagger \right) | \bullet\bullet \rangle - \langle \circ\circ | \left(\hat{d}_s \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_s^\dagger \right) | \circ\circ \rangle \\ &= -\langle \hat{\sigma}_x \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La Figura 3.5, muestra la función de correlación (Ec. (3.15)) como función de la energía de la radiación de la cavidad ω y la fuerza de acoplamiento λ . En esta, se puede verificar que en el límite de acoplamiento fuerte, el protocolo de fusión es válido.

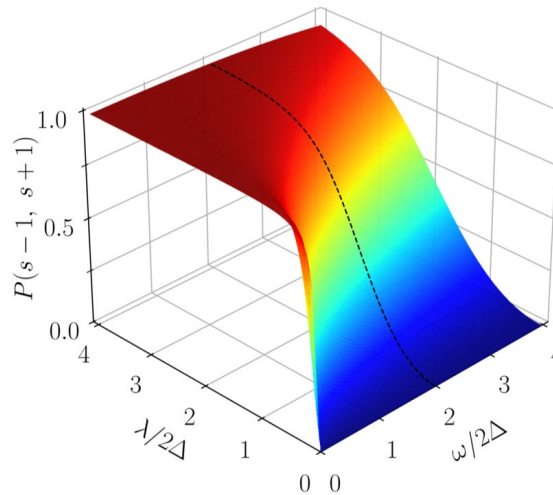


Figura 3.5: Función de correlación de fermiones $P(s-1, s+1)$ para el Protocolo de Fusión para un sistema con interacción en un solo sitio en el estado fundamental. La línea punteada sobre la superficie representa el caso de resonancia $\omega = 4\Delta$.

Es además necesario evaluar la susceptibilidad del protocolo de fusión a errores diabáticos. Para ello, se deben verificar los valores de la función de correlación para casos dependientes del tiempo $P(s-1, s+1, t_f) = \langle \psi(t_f) | \hat{\sigma}_x | \psi(t_f) \rangle$. En este análisis se considera una variación lineal en la fuerza de acoplamiento λ y en la fase ϕ , empleando diferentes velocidades de rampa para estudiar el comportamiento del sistema.

La Figura 3.6 muestra que, al aumentar la fuerza del acoplamiento entre la cavidad y la CK, la función de correlación $P(s-1, s+1)$ exhibe un comportamiento similar al predicho teóricamente, tanto en el caso de resonancia como fuera de él. Esta concordancia entre los resultados se observa incluso fuera del régimen de acoplamiento ultra fuerte, siempre que la velocidad de rampa sea lo suficientemente lenta para garantizar que el proceso sea adiabático.

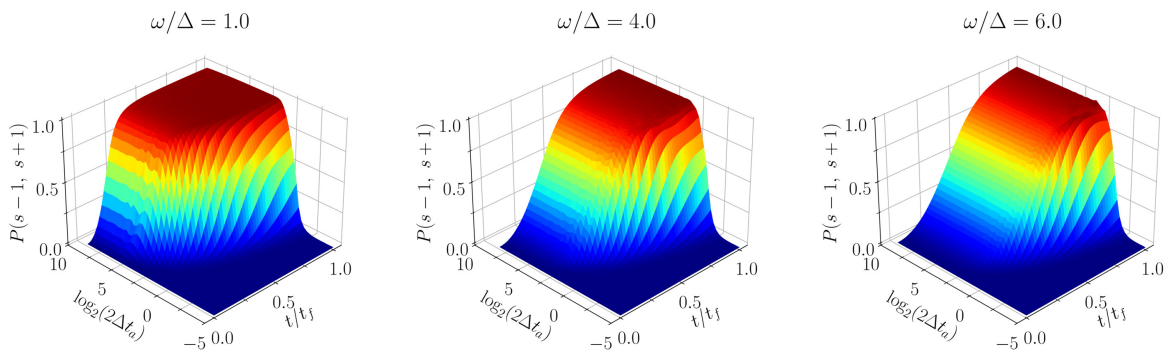


Figura 3.6: Función de correlación de fermiones dependiente del tiempo $P(s-1, s+1, t)$, considerando una variación lineal de la fuerza del acoplamiento $\lambda = t/t_a$, donde la velocidad de rampa es t_a^{-1} y la evolución se realiza en el intervalo $t \in [0, 4t_a]$ para (a) $\omega/\Delta = 1$, (b) el caso en resonancia $\omega/\Delta = 4$ y (c) $\omega/\Delta = 6$.

En el análisis del Hamiltoniano donde la fase del acoplamiento (ϕ) varía temporalmente, se asume que la fuerza del acoplamiento permanece constante. La Figura 3.7 muestra un comportamiento más complejo que en el caso del acoplamiento variable. Para valores bajos en la fuerza de acoplamiento y frecuencias de variación de fase elevados (t_a cortos), el sistema se desvía del comportamiento teórico, mostrando correlaciones negativas o nulas, lo que indica una fusión ineficiente. Sin embargo, al disminuir la frecuencia, se observa que la fusión ocurre de manera periódica, con lo que solo es necesario ajustar la frecuencia de acoplamiento para dirigir el sistema al comportamiento deseado.

Por otro lado, al considerar acoplamientos en el régimen USC, se aprecia que las frecuencias elevadas son las que permiten que el sistema se comporte de manera más estable, mostrando comportamiento cercano al del caso independiente del tiempo. Esto puede interpretarse considerando que, bajo acoplamientos fuertes, la parte bosónica del sistema tiende a comportarse como un estado coherente, donde la fase de acoplamiento ejerce una menor influencia sobre el resultado final del protocolo de fusión. A medida que la frecuencia disminuye, el comportamiento de la fusión recupera un carácter oscilatorio, con oscilaciones que ocurren a una frecuencia mayor que en el caso de acoplamiento débil.

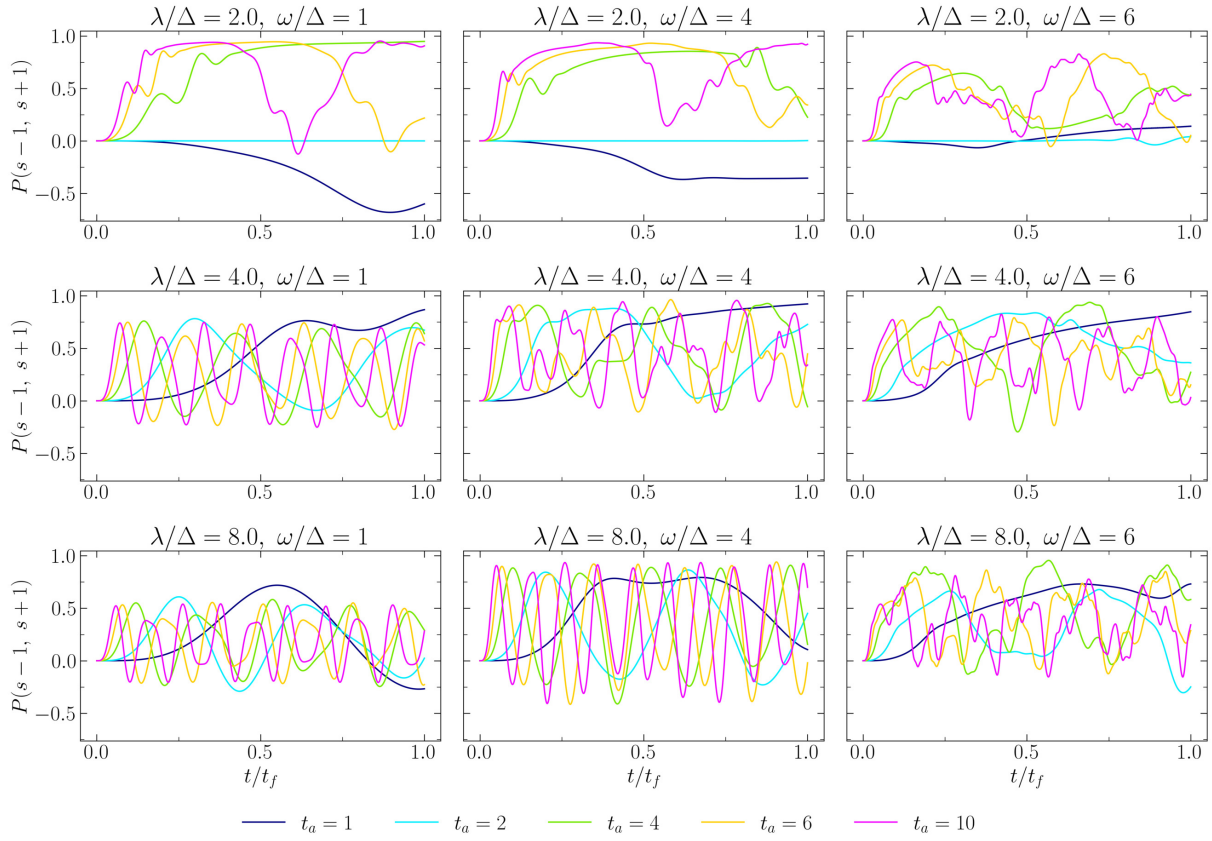


Figura 3.7: Función de correlación de fermiones dependiente del tiempo $P(s-1, s+1, t)$, considerando una variación lineal de la fase de acoplamiento $\phi = t/t_a$, con frecuencia t_a^{-1} , para un intervalo de evolución dado por $t \in [0, 4t_a]$ en el caso de resonancia para diferentes valores de energía de la cavidad ω y fuerza de acoplamiento λ , considerando $\Delta = 0,5$.

3.4. Discusión

En este capítulo, se ha explorado la interacción entre una cadena de Kitaev (CK), el sistema fundamental que estamos considerando para la implementación de qubits topológicos basados en fermiones de Majorana, y la radiación electromagnética. Este estudio resulta crucial en el marco de la computación cuántica topológica, donde la manipulación y el control preciso de los MZM's son esenciales para la realización de operaciones cuánticas tolerantes a fallos.

La introducción del modelo de Rabi permitió establecer las bases teóricas para comprender la interacción entre un qubit (análogo al sistema de dos niveles que puede formarse con los MZM's) y un campo electromagnético cuantizado presente en una cavidad. La derivación del hamiltoniano de Rabi proporcionó una descripción que puede extenderse al caso de la cadena de Kitaev acoplada a la cavidad cuántica.

El análisis de la interacción directa entre la CK y la cavidad cuántica reveló la posibilidad de inducir la formación de nuevos MZM's en las proximidades de la cavidad. Este fenómeno, análogo a la acción de una "tijera topológica", abre nuevas vías para la manipulación y el control de los MZM's, superando así el límite de tenerlos únicamente en los extremos de la cadena.

La exploración del protocolo de fusión, implementado mediante el aumento adiabático de la fuerza de acoplamiento entre la cavidad y la cadena de Kitaev, demostró la viabilidad de manipular los MZM's inducidos por la cavidad. La concordancia observada entre los resultados numéricos y las predicciones teóricas, incluso fuera del régimen de acoplamiento ultrafuerte bajo condiciones adiabáticas, subraya la robustez del protocolo frente a variaciones externas.

El estudio de la dependencia temporal de la fase del acoplamiento reveló una dinámica más compleja. En el régimen de acoplamiento débil, la eficiencia de la fusión se mostró sensible a la frecuencia de variación de la fase, permitiendo ver la necesidad de un control preciso de este parámetro. Por otro lado, en el régimen USC, se observó una mayor estabilidad frente a las variaciones rápidas de la fase, lo que puede atribuirse al comportamiento coherente del campo de la cavidad bajo acoplamientos fuertes.

Capítulo 4

Interacción en dos sitios y braiding

Tras haber establecido el marco fundamental del modelo de Kitaev y las bases de la interacción con la radiación cuando lo hace con un solo sitio, resulta natural extender este análisis a escenarios más complejos que involucren interacciones con múltiples sitios de la CK. En particular, la interacción con dos sitios contiguos, abre la puerta a la implementación de protocolos de braiding (intercambio), una operación fundamental en la computación cuántica topológica.

Como se discutió en capítulos anteriores, los MZM's poseen estadísticas no abelianas, una propiedad que les permite realizar operaciones cuánticas mediante el intercambio de posiciones de estas cuasipartículas. A diferencia de las partículas abelianas, donde el orden de intercambio no afecta el estado final, el braiding de anyones no abelianos se puede traducir en transformaciones unitarias en el espacio de estados degenerado en el que se encuentran los estados. En el contexto de la cadena de Kitaev, el control y la manipulación de múltiples MZM's, se convierte en un objetivo crucial para la implementación de puertas cuánticas topológicas.

A lo largo de este capítulo se adentrará en el estudio de la interacción de una cadena de Kitaev con una cavidad cuántica acoplada a dos sitios contiguos de la cadena. Se explorará cómo esta interacción puede utilizarse para manipular y potencialmente ejecutar el protocolo de braiding de los MZM's. Analizaremos el formalismo teórico necesario para describir este sistema y discutiremos las implicaciones de estos protocolos para la realización de operaciones cuánticas topológicas, incluyendo los desafíos y las perspectivas futuras en este campo. La comprensión de la interacción con múltiples sitios representa un paso fundamental hacia la construcción computadoras cuánticas topológicas más complejas y la explotación de las propiedades únicas de los fermiones de Majorana para la computación cuántica tolerante a fallos.

4.1. Interacción bulk con dos sitios

De manera análoga al capítulo anterior, ahora se considerará el caso en el que la cavidad se acopla a dos sitios físicos adyacentes, en específico los sitios s y $s + 1$. Manteniendo la simetría en bulk, es decir, $2 \leq s \leq N - 2$, esta configuración se ilustra esquemáticamente en la Figura 4.1. El hamiltoniano correspondiente a esta interacción se puede deducir a partir de (3.6) y (3.7), lo que conduce a

$$\hat{H}_2 = \Delta \sum_{r=-1,0,1} \left(2\hat{d}_{s+r}^\dagger \hat{d}_{s+r} - 1 \right) + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1,2} \lambda_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j \left(e^{-i\phi_j} \hat{a}^\dagger + e^{i\phi_j} \hat{a} \right). \quad (4.1)$$

Usando las relaciones de (3.9) para escribirlo en función de los operadores de fermiones no localizados, este hamiltoniano puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 = \Delta \sum_{r=-1,0,1} \left(2\hat{d}_{s+r}^\dagger \hat{d}_{s+r} - 1 \right) + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=0,1} \lambda_{r+1} \left(1 + \hat{d}_{s+r-1} \hat{d}_{s+r} \right. \\ \left. + \hat{d}_{s+r-1} \hat{d}_{s+r}^\dagger - \hat{d}_{s+r-1}^\dagger \hat{d}_{s+r} - \hat{d}_{s+r-1}^\dagger \hat{d}_{s+r}^\dagger \right) (e^{-i\phi_{r+1}} \hat{a}^\dagger + e^{i\phi_{r+1}} \hat{a}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

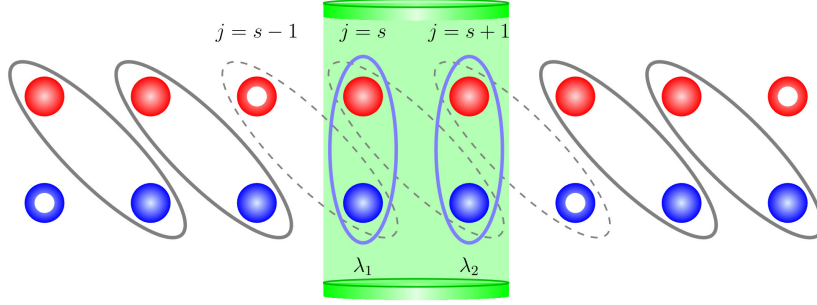


Figura 4.1: Esquema de una CK en la fase topológica interactuando con una cavidad cuántica en dos sitios (two bulk case), donde las esferas representan los fermiones de Majorana y los toros los MZM's.

Al igual que para un sitio, el hamiltoniano conserva la paridad del número de fermiones en la cadena, de modo que los únicos cuatro estados que tendrán contribuciones son $\{|\circ_{s-1} \circ_s \circ_{s+1}\rangle, |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{s+1}\rangle, |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{s+1}\rangle, |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{s+1}\rangle\}$, tal que el hamiltoniano se puede escribir en esta base. Se puede mapear estos estados de la materia a un sistema de dos espines, donde la base se escribe como

$$\begin{aligned} |-, -\rangle_z &= |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{s+1}\rangle, & |-, +\rangle_z &= |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{s+1}\rangle, \\ |+, -\rangle_z &= |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{s+1}\rangle, & |+, +\rangle_z &= |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{s+1}\rangle, \end{aligned} \quad (4.3)$$

que corresponden a la base de vectores propios de un sistema de dos espines en la base z de Pauli.

Escribiendo el hamiltoniano (4.2) en esta base (Ec. (4.3)) e imponiendo que $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 = \phi$, se puede reducir a

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 = -\Delta (\hat{\sigma}_{z,1} + \hat{\sigma}_{z,2} + \hat{\sigma}_{z,1} \hat{\sigma}_{z,2}) + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \lambda_1 (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (1_2 - \hat{\sigma}_{x,1}) \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}} \lambda_2 (e^{-i\phi} \hat{a}^\dagger + e^{i\phi} \hat{a}) (1_2 - \hat{\sigma}_{x,2}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

El hamiltoniano (4.4) corresponde a un modelo inhomogéneo de dos espines de Rabi. Y la información que contenía originalmente el fermión $\hat{d}$ que se encontraba en la cavidad y sus respectivos fermiones de Majorana está descrito en la nueva base y el sistema entra en resonancia cuando se cumple que $\omega = 4\Delta$.

La Figura 4.2 muestra la energía del estado fundamental de este hamiltoniano para diferentes valores de λ_1 y λ_2 . Se puede ver claramente que en cuanto el primer sitio de

la cavidad se acopla en el régimen USC, la energía se divide claramente en tres sectores; el primero que corresponde a $\lambda_2 > 0$, el segundo que corresponde a $-\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ y el tercero que corresponde a $\lambda_1 < -\lambda_2$. Esta división se vera reflejada en la estructura del estado fundamental.

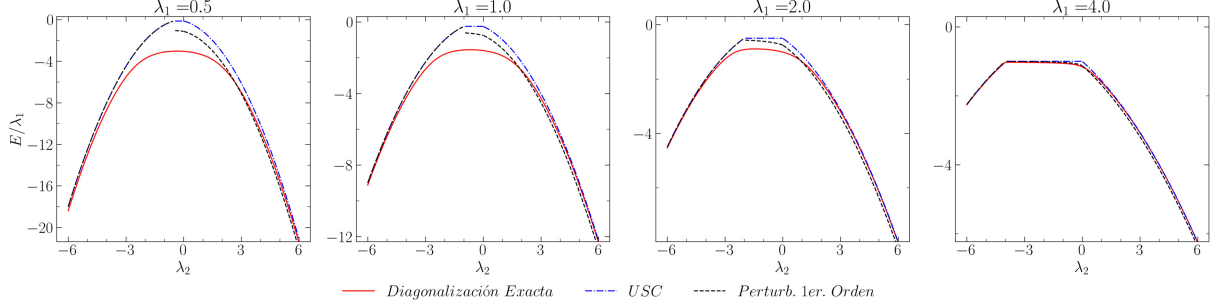


Figura 4.2: Espectro de energías para el caso bulk de dos sitios (Ec. (4.4)), considerando una fase fija controlada dada por $\phi = 0$, $\Delta = 0,5$ en el caso de resonancia $\omega = 4\Delta$ para diferentes valores de acoplamiento entre la cavidad y la CK.

Igual que en el caso de un solo sitio, al alcanzar el régimen de acoplamiento fuerte, la anterior base no es la más adecuada para representar los estados del sistema. De modo que se puede plantear una nueva base en base al número de ocupación $\{|n_{LR}, n_{c_1}, n_{c_2}\rangle\}$, que representan la ocupación del fermión no localizado $\hat{\gamma}_{L,R} = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_L + i\hat{\gamma}_R)$ y los fermiones reales en el interior de la cavidad $\hat{c}_1 = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{s,1} + i\hat{\gamma}_{s,2})$ y $\hat{c}_2 = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{s+1,1} + i\hat{\gamma}_{s+1,2})$. En este caso, los componentes del fermión no local son $\hat{\gamma}_L = \hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_R = \hat{\gamma}_{s+2,1}$. La transformación entre estas dos bases viene dada por

$$\begin{aligned}
 |-, -\rangle_z &= \frac{1}{2} [|\circ_{L,R}\rangle \otimes (|\circ_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle + |\bullet_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle) - i|\bullet_{L,R}\rangle \otimes (|\circ_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle + |\bullet_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle)], \\
 |-, +\rangle_z &= \frac{1}{2} [|\circ_{L,R}\rangle \otimes (|\circ_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle - |\bullet_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle) - i|\bullet_{L,R}\rangle \otimes (|\circ_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle - |\bullet_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle)], \\
 |+, -\rangle_z &= \frac{1}{2} [|\circ_{L,R}\rangle \otimes (|\circ_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle - |\bullet_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle) + i|\bullet_{L,R}\rangle \otimes (|\circ_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle - |\bullet_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle)], \\
 |+, +\rangle_z &= \frac{1}{2} [|\circ_{L,R}\rangle \otimes (|\circ_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle + |\bullet_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle) + i|\bullet_{L,R}\rangle \otimes (|\circ_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle + |\bullet_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle)].
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

En esta base, el estado fundamental en el régimen de USC, se puede escribir como $|\text{GS}\rangle \simeq |n_{L,R}\rangle \otimes |\Psi_{c_1, c_2, \text{fot}}\rangle$, donde el estado compuesto entre los fermiones dentro de la cavidad y los fotones de la misma se pueden escribir como $|\Psi_{c_1, c_2, \text{fot}}\rangle$. Al igual a lo observado en el espectro de la energía de este estado, en la Figura 4.3, se puede apreciar que existen tres regiones de acoplamiento, cuyos espectros pueden ser aproximados al de estados de radiación coherente, esto especialmente cuando el acoplamiento en el primer sitio es fuerte. Por tanto, si se considera positivo $\lambda_1 > 0$, se puede escribir en cada sector como:

$$\begin{aligned}
 |\text{GS}\rangle_{\text{I}} &\simeq |\circ_{L,R}\rangle \otimes |\bullet_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle \otimes |\alpha_{\text{I}}\rangle, & \alpha_{\text{I}} &= -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{2}\omega}, & \lambda_2 &> 0, \\
 |\text{GS}\rangle_{\text{II}} &\simeq i|\bullet_{L,R}\rangle \otimes |\circ_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle \otimes |\alpha_{\text{II}}\rangle, & \alpha_{\text{II}} &= -\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}\omega}, & -\lambda_1 &< \lambda_2 < 0, \\
 |\text{GS}\rangle_{\text{III}} &\simeq i|\bullet_{L,R}\rangle \otimes |\bullet_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle \otimes |\alpha_{\text{III}}\rangle, & \alpha_{\text{III}} &= -\frac{\lambda_2}{\sqrt{2}\omega}, & \lambda_2 &< -\lambda_1.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

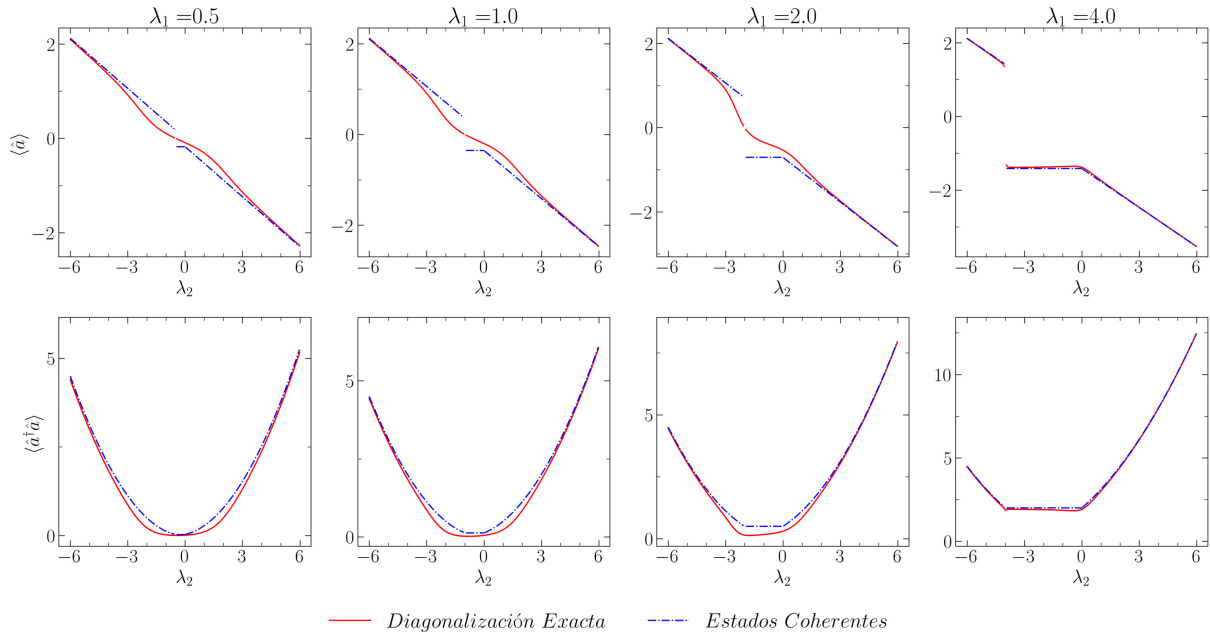


Figura 4.3: Estructura del estado fundamental del hamiltoniano (4.4) en el caso de resonancia $\omega = 4\Delta$, $\Delta = 0,5$ para distintos valores de acoplamiento. En el primer panel, se muestra los valores medios del operador $\hat{a}$ y en el segundo panel para el operador $\hat{a}^\dagger \hat{a}$.

En el análisis que sigue, los estados $|\text{GS}_I\rangle$ y $|\text{GS}_{II}\rangle$ cobran importancia, pues se hace evidente que existe una alternación entre el estado del fermión topológico $|n_{L,R}\rangle$ y el fermión real $|n_{c_1}\rangle$.

En el Apéndice B, se muestra que en el régimen de USC, la energía del estado fundamental puede ser aproximada como un oscilador desplazado, cuya energía viene dada por $E_{\text{GS}} = -\omega|\alpha|^2$, estos resultados teóricos son consistentes con los resultados numéricos obtenidos en la Figura 4.2. Mostrando además que en el régimen perturbativo a primer orden en Δ , se puede obtener una mejor aproximación a este estado.

Considerando que el estado fundamental alrededor de $\lambda_2 = 0$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 |\text{GS}\rangle &= -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\text{GS}_I\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\text{GS}_{II}\rangle, \\
 \tan\theta &= -\frac{4\Delta\omega}{\lambda_2(\lambda_1 + 2\lambda_1)} e^{-\frac{\lambda_2^2}{4\omega^2}},
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

se puede notar que las variaciones en la fuerza de acoplamiento λ_2 determinan el estado en el que el sistema se encontrará. En concreto, cuando $\lambda_2 = 0$ se da una transición entre un estado que con un fermión no localizado $|n_{L,R}\rangle$ y un estado correspondiente al fermión real $|n_{c_1}\rangle$.

4.1.1. Estados gato de Majorana-Schrödinger

Considerando el caso en el que ambos sitios se encuentran acoplados con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y $\phi = \pi$, ocurre un fenómeno interesante, pues el estado fundamental del sistema deja de adquirir el carácter separable que se describió anteriormente. En este límite, el estado

fundamental viene dado por

$$\begin{aligned} |\text{GS}(\pi)\rangle &\simeq 2C |\bullet_{L,R}\rangle \otimes [|\circ_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle \otimes |\alpha\rangle + |\bullet_{c_2}, \circ_{c_1}\rangle \otimes |-\alpha\rangle], \\ &\simeq C |\bullet_{L,R}\rangle \otimes [(|\circ_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle + |\bullet_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle) \otimes (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \\ &\quad + (|\circ_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle - |\bullet_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle) \otimes (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle)], \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $\alpha = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}\omega}$. Este estado es de particular interés, pues contiene la estructura de los estados tipo gato de Schrödinger (Cat States), que suelen escribirse en la forma $|\text{Cat}_{\pm}\rangle = (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)/\sqrt{2(1 \pm \exp(-2|\alpha|^2))}$.

El hecho de que el estado fundamental pueda escribirse en esta forma, muestra que existe entrelazamiento entre la CK y la cavidad. En la Figura 4.4, se muestra la función de Wigner de estos estados tras haber realizado una medida proyectiva sobre los estados de materia $|\Psi_{\pm}\rangle = |\circ_{c_1}, \bullet_{c_2}\rangle \pm |\bullet_{c_1}, \circ_{c_2}\rangle$. La función de Wigner es una distribución de cuasiprobabilidad que proporciona una representación en el espacio de fase de un estado. Es invaluable para analizar las propiedades estadísticas de sistemas cuánticos y para visualizar cómo se comportan. Está definida como

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} \text{Tr} [\hat{\rho} e^{\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}}], \quad (4.9)$$

donde $\hat{\rho}$ representa el operador de densidad de estados. La función de Wigner que se obtiene corresponde totalmente con las esperadas para este tipo de estados bosónicos.

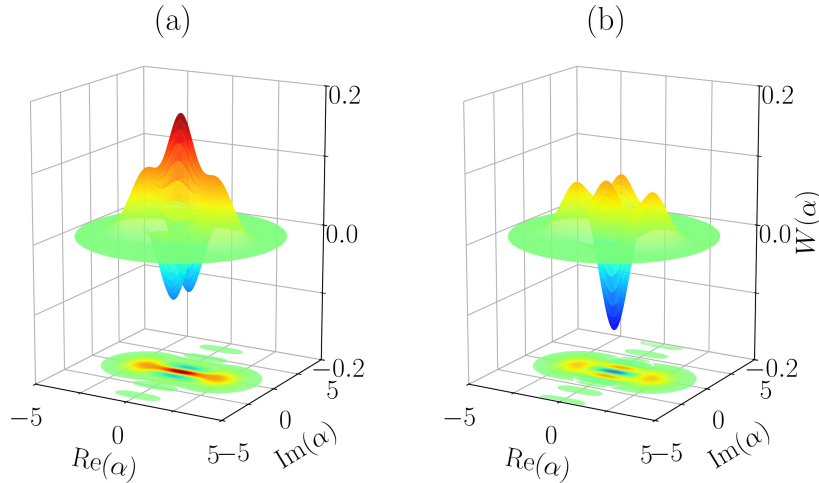


Figura 4.4: Función de Wigner para el estado gato de Majorana-Schrödinger con $\omega = 4\Delta$ (a) par $|\text{Cat}_+\rangle$ e (b) impar $|\text{Cat}_-\rangle$.

4.2. Protocolo de braiding

Como se demostró en secciones anteriores, los MZM's presentan una estadística no abeliana, lo que implica que cuando se produce un intercambio de lugar entre ellos, se produce un efecto no trivial sobre el estado del sistema. A la operación de realizar este

intercambio se la conoce como braiding. En el contexto de la computación cuántica topológica, el braiding de MZM's se usa para construir las puertas cuánticas.

El operador de braiding entre $\hat{\gamma}_L$ y $\hat{\gamma}_R$ en sentido antihorario es

$$\hat{U}_B^{(L,R)} = \exp\left(\frac{\pi}{4}\hat{\gamma}_L\hat{\gamma}_R\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \hat{\gamma}_L\hat{\gamma}_R), \quad (4.10)$$

donde este operador produce el intercambio $\hat{\gamma}_L \rightarrow \hat{\gamma}_R$ y $\hat{\gamma}_R \rightarrow -\hat{\gamma}_L$. Este operador produce una rotación de $\pi/4$ en el estado fundamental del sistema $\hat{U}_B^{(L,R)}|\text{GS}\rangle = e^{i\frac{\pi}{4}}|\text{GS}\rangle$, donde la rotación prueba que el braiding se produjo.

En las siguientes secciones se partirá del hamiltoniano (4.4), en el que el primer sitio dentro la cavidad $j = s$ se encuentra fuertemente acoplado a la cavidad ($\lambda_1 > 0$, $\phi_1 = 0$), mientras que λ_2 y $\phi_2 = \phi$ pueden ser regulables. Como el primer sitio se encuentra fuertemente acoplado, el fermión de Majorana a la izquierda de la cavidad $\hat{\gamma}_L = \hat{\gamma}_{s-1,2}$ siempre es un MZM. Mientras que $\hat{\gamma}_{s+1,1}$ será un MZM solo en el límite $\lambda_2 \rightarrow 0$, en cuanto esta fuerza de acoplamiento llega al régimen USC, $\hat{\gamma}_{s+2,1}$ es el que se convierte en un MZM. De modo que en las siguientes secciones se estudiará el efecto del braiding en ambos casos.

Un cambio de base resulta más conveniente, usando $\{|n_{L,R}, n_c, n_{s+1}\rangle\}$ los números de ocupación del fermión no localizado $\hat{f}_{L,R} = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_L + i\hat{\gamma}_R)$, el fermión real que se forma dentro de la cavidad $\hat{c}_s = \frac{1}{2}(\hat{\gamma}_{s,1} + i\hat{\gamma}_{s,2})$ y el fermión no localizado $\hat{d}_{s+1}$. Tal que la base se transforma como

$$\begin{aligned} |-, -\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\circ_{L,R}, \circ_c\rangle - i|\bullet_{L,R}, \bullet_c\rangle] \otimes |\circ_{s+1}\rangle, \\ |-, +\rangle_z &= \frac{i}{\sqrt{2}} [|\circ_{L,R}, \bullet_c\rangle - i|\bullet_{L,R}, \circ_c\rangle] \otimes |\bullet_{s+1}\rangle, \\ |+, -\rangle_z &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\circ_{L,R}, \circ_c\rangle + i|\bullet_{L,R}, \bullet_c\rangle] \otimes |\circ_{s+1}\rangle, \\ |+, +\rangle_z &= -\frac{i}{\sqrt{2}} [|\circ_{L,R}, \bullet_c\rangle + i|\bullet_{L,R}, \circ_c\rangle] \otimes |\bullet_{s+1}\rangle. \end{aligned} \quad (4.11)$$

En el régimen USC, el estado fundamental del sistema compuesto en la nueva base puede escribirse a partir de los estados de materia $|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bullet_{L,R}, \bullet_c, \circ_{s+1}\rangle \pm |\circ_{L,R}, \bullet_c, \bullet_{s+1}\rangle)$,

$$|\text{GS}_{\pm}\rangle = \begin{cases} -i|\Psi_+\rangle \otimes |\alpha_+\rangle, & \text{para } \phi = 0, \\ i|\Psi_-\rangle \otimes |\alpha_-\rangle, & \text{para } \phi = \pi. \end{cases} \quad (4.12)$$

Donde $\alpha_+ = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{2}\omega}$ y $\alpha_- = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}\omega}$, la Fig. 4.5 muestra que la población de fotones en la cavidad se comporta conforme a lo que se espera para un estado coherente. En esta base, cuando el sistema tiende al caso de interacción en un sitio, $\lambda_2 \rightarrow 0$, el estado fundamental del sistema se transforma en $|\text{GS}\rangle \simeq (|\text{GS}_+\rangle - |\text{GS}_-\rangle)/\sqrt{2} = |\bullet_{L,R}, \bullet_c, \circ_{s+1}\rangle \otimes |\alpha\rangle$, donde $\alpha = -\lambda_1/(\sqrt{2}\omega)$.

En la Figura 4.6a, se muestra la evolución de la paridad entre $\hat{\gamma}_L = \hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_R = \hat{\gamma}_{s+1,1}$ como función del acoplamiento complejo del segundo sitio para $\lambda_2 \leq \lambda_1$. Se puede notar que en el límite de acoplamiento en un solo sitio $\lambda_2 \rightarrow 0$, la paridad $P_{L,R} \approx -1$, lo que coincide con el resultado esperado para el estado fundamental en este caso.

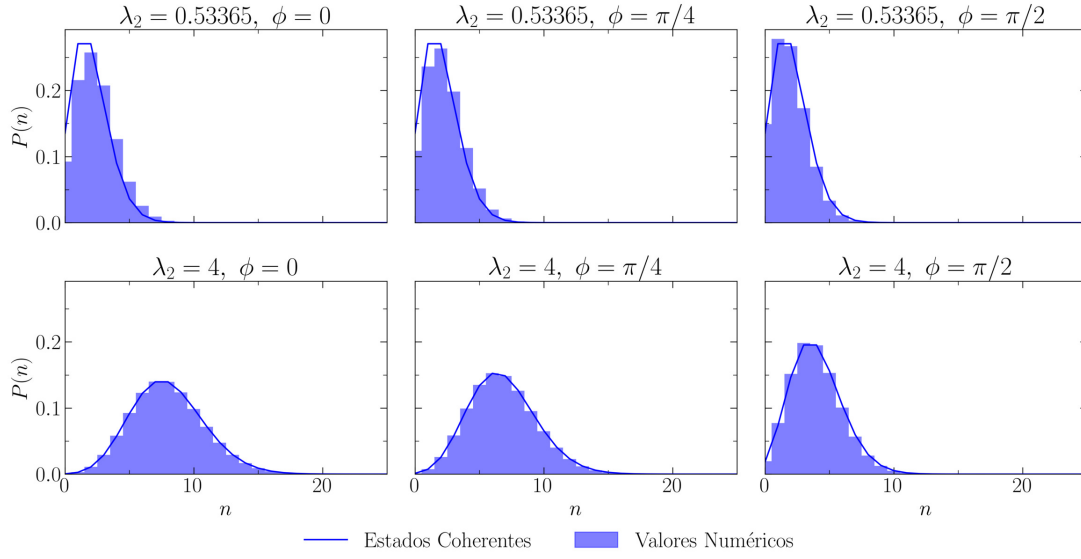


Figura 4.5: Probabilidad $P(n)$ de observar n fotones en la cavidad en la cavidad cuántica acoplada a dos sitios de la CK para distintos valores de λ_2 y ϕ . Donde las barras representan los resultados numéricos y la línea sólida representa los valores teóricos para un estado coherente cuando (a) se produce la firma de braiding y $\alpha = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}\omega}$ y (b) el segundo sitio está fuertemente acoplado con $\alpha = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 e^{i\phi}}{\sqrt{2}\omega}$.

La correlación fermiónica correspondiente a la Figura 4.6 puede calcularse en la base de los fermiones $\hat{d}$. Para el primer caso, este puede escribirse como

$$\langle \hat{\gamma}_L \hat{\gamma}_R \rangle = i \langle \hat{\gamma}_{s-1,2} \hat{\gamma}_{s+1,1} \rangle = \langle \hat{d}_s^\dagger \hat{d}_{s-1} - \hat{d}_s \hat{d}_{s-1}^\dagger - \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_s + \hat{d}_{s-1} \hat{d}_s^\dagger \rangle = \langle \hat{\sigma}_{x,1} \hat{\sigma}_{z,2} \rangle. \quad (4.13)$$

Por otra parte, al realizar la correlación con el fermión a la derecha de la cavidad $\hat{\gamma}_{s+2,1}$,

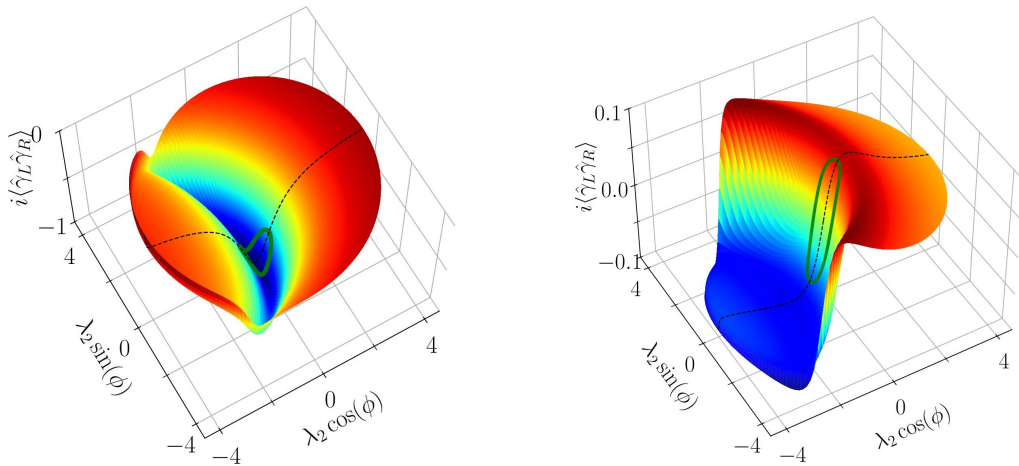


Figura 4.6: Paridad fermiónica entre $\hat{\gamma}_L = \hat{\gamma}_{s-1,2}$ y (a) $\hat{\gamma}_R = \hat{\gamma}_{s+1,1}$ dentro de la cavidad y (b) $\hat{\gamma}_R = \hat{\gamma}_{s+2,1}$ a la derecha de la cavidad, en función de la fuerza del acoplamiento λ_2 y la fase ϕ . La línea punteada muestra el caso en el que el acoplamiento es real y se produce el salto entre el estado positivo y negativo descrito por (4.12). El aro verde sólido muestra la evolución de la paridad cuando se produce el braiding entre $\hat{\gamma}_L$ y $\hat{\gamma}_R$.

se tiene

$$\langle \hat{\gamma}_L \hat{\gamma}_R \rangle = i \langle \hat{\gamma}_{s-1,2} \hat{\gamma}_{s+2,1} \rangle = \left\langle \hat{d}_{s+1}^\dagger \hat{d}_{s-1} - \hat{d}_{s+1} \hat{d}_{s-1} - \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_{s+1} + \hat{d}_{s-1} \hat{d}_{s+1} \right\rangle = - \langle \hat{\sigma}_{y,1} \hat{\sigma}_{y,2} \rangle. \quad (4.14)$$

4.2.1. Fase de Berry

Habiendo analizado cómo la interacción de la cavidad con el segundo sitio modifica el sistema, se debe determinar bajo qué condiciones el sistema descrito puede implementar la rotación de $\pi/4$ requerida para que se produzca el braiding. Para ello, se considera que el sistema ya se encuentra acoplado en el primer sitio y se realiza una evolución cíclica adiabática sobre el segundo sitio, manteniendo $\lambda_2 > 0$ constante, mientras se varía la fase de acoplamiento considerando $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Esta evolución mantiene al sistema en el estado fundamental, lo que indica que induce una fase geométrica que corresponde a la fase de Berry. Dado que la evolución es cíclica, esta fase no puede ser cancelada [26, 27, 28]. La medición de la fase de Berry en sistemas de este tipo es un fenómeno bien estudiado y por tanto es una propiedad que se puede obtener de forma experimental [29].

Al poder escribir el estado fundamental en la base mostrada en (4.12), la evolución adiabática del sistema se encontrará en el subespacio generado por $\{|GS_-\rangle, |GS_+\rangle\}$ y por tanto se puede escribir el estado fundamental como una combinación lineal $|GS(\phi)\rangle = C_+(\phi) |GS_+\rangle + C_-(\phi) |GS_-\rangle$. Donde claramente $|GS_-\rangle$ no depende de ϕ debido a que α_- tampoco lo hace. Este cálculo se muestra a detalle en el Apéndice C. De modo que la fase de Berry viene dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_B &= i \int_0^{2\pi} d\phi \langle GS(\phi) | \frac{\partial}{\partial \phi} | GS(\phi) \rangle \\ &= i \int_0^{2\pi} d\phi \left[C_+^*(\phi) \frac{\partial C_+(\phi)}{\partial \phi} + C_-^*(\phi) \frac{\partial C_-(\phi)}{\partial \phi} + |C_+(\phi)|^2 \langle \alpha_+(\phi) | \frac{\partial}{\partial \phi} | \alpha_+(\phi) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Esta expresión puede reducirse mediante las propiedades de los estados coherentes [30], tal que el módulo de la fase de Berry para la evolución de este sistema viene dada por

$$\varphi_B = \frac{\lambda_2^2}{4\omega^2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{(\lambda_2 + 2\lambda_1 \cos(\phi))^2}{\sqrt{16\Delta^2\omega^2 e^{-\frac{\lambda_2^2}{2\omega^2}} + \lambda_2^2(\lambda_2 + 2\lambda_1 \cos(\phi))^2}} \right) d\phi. \quad (4.16)$$

Observando los resultados numéricos en la Figura 4.7a, se nota que la fase de Berry tiene un claro comportamiento creciente con la fuerza de acoplamiento en el segundo sitio y que para lograr el braiding mediante este montaje el acoplamiento en el segundo sitio debe ser inferior al del primer sitio $\lambda_2 < \lambda_1$.

Al estudiar este sistema en el régimen de acoplamiento ultra fuerte con $\Delta \ll \lambda_2$, la ecuación (4.16) se reduce a $\varphi_B \rightarrow \pi\lambda_2^2/\omega^2 = 2\pi(-\lambda_2/(\sqrt{2}\omega))^2$. Esto coincide exactamente con la fase de Berry para un estado coherente puro con $\alpha = -\lambda_2/(\sqrt{2}\omega)$ al que se somete a una evolución cíclica adiabática [31, 32, 33].

4.3. Discusión

En este capítulo se ha estudiado el efecto de la interacción entre una CK y una cavidad cuántica en dos sitios en medio de la CK. En este sentido, se ha mostrado que el hamilton-

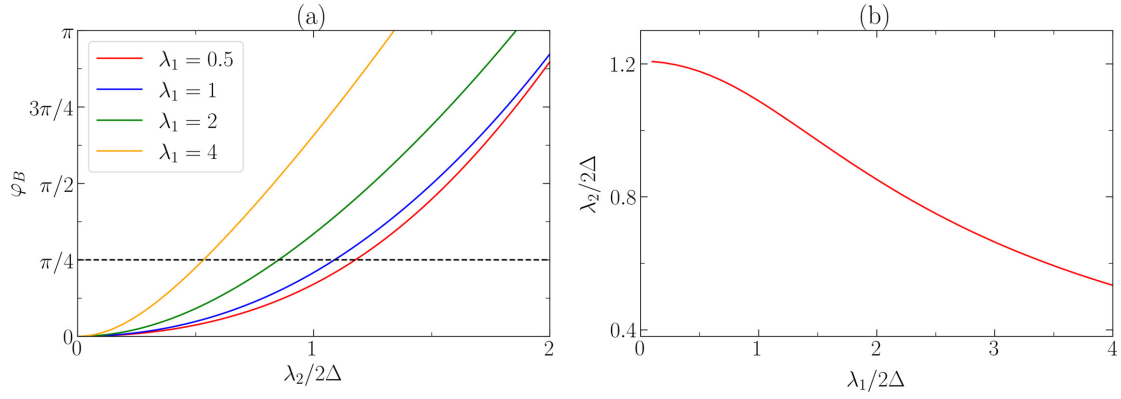


Figura 4.7: Fase de Berry para la evolución cíclica adiabática del acoplamiento del segundo sitio a la cavidad. En el panel (a) se muestra los valores numéricos de la fase de Berry en función a λ_2 para distintos valores de λ_1 y la línea punteada muestra el valor en el que la fase geométrica vale exactamente $\pi/4$. En el panel (b) se muestran los valores que debe adquirir el acoplamiento λ_2 en función de λ_1 para reproducir la firma del braiding.

niano del sistema puede ser escrito en la forma de un modelo de Rabi inhomogéneo, donde los estados del sistema pueden ser escritos como un sistema de dos espines. En el régimen USC, puede mostrarse que el estado fundamental del sistema puede ser aproximado como un oscilador desplazado, donde la energía del estado fundamental puede caracterizarse en tres sectores en base al valor que adquiere el acoplamiento en el segundo sitio comparado a la fuerza de acople del primero.

Una consecuencia interesante de la forma del estado fundamental de este sistema es que puede presentar una estructura de estado tipo gato de Majorana-Schrödinger, donde la interacción entre los fermiones de Majorana y los fermiones reales dentro de la cavidad producen un entrelazamiento entre ambos sistemas. Este entrelazamiento se puede observar mediante la función de Wigner, que muestra la firma de los estados tipo gato.

Por otra parte, se ha mostrado que mediante el sistema descrito, se puede reproducir la firma del braiding entre MZM's mediante la fase de Berry que se produce al evolucionar de manera adiabática el acoplamiento en el segundo sitio. Esta fase puede ser medida experimentalmente y es proporcional al cuadrado del acoplamiento λ_2 . Este resultado cobra una especial importancia, pues realizar el braiding entre MZM's es lo que permite la construcción de puertas lógicas cuánticas en el ámbito de la computación cuántica topológica y por tanto es fundamental a la hora superar los desafíos que trae consigo la era NISQ.

Capítulo 5

Estructura escalable para el encaminamiento cuántico de Majorana

En 2000, DiVinzencio publicó un artículo [34] en el que plantea una serie de siete criterios que la tecnología actual debe alcanzar para lograr una verdadera implementación física de la computación cuántica. El primero de estos criterios tiene que ver con obtener qubits bien caracterizados cuyo sistema físico pueda ser escalable, es decir, crear sistemas de computación cuántica con múltiples qubits.

En los capítulos anteriores se discutió las propiedades físicas que adquiere una cadena de Kitaev en su fase topológica y cómo le afecta interactuar con una cavidad cuántica. Este sistema físico corresponde a un qubit topológico. Al momento de hacer crecer el sistema puede darse el caso de que existan interacciones entre los qubits que puedan llevar a pérdidas de información o algún otro efecto no deseado, de modo que es importante estudiar los posibles efectos físicos que se puedan generar por interacciones a la hora de escalar este sistema.

En este capítulo se estudiará el sistema escalado más sencillo, es decir, un sistema compuesto por dos cadenas de Kitaev y dos cavidades cuánticas, donde la interacción entre los sistemas se modela mediante un intercambio de fotones entre las cavidades. El estudio de este sistema se realizará mediante la exploración numérica de las propiedades del hamiltoniano del sistema y principalmente de su estado fundamental, como se realizó para los casos correspondientes a una única CK. El estudio de las propiedades del estado fundamental de este sistema ante incrementos del parámetro de interacción b muestra que se producen cambios tanto en las cavidades cuánticas como en las CK; los cambios en las CK pueden modularse mediante la elección de parámetros del hamiltoniano.

5.1. Descripción del sistema de estudio

En esta sección, se estudiarán los efectos que puede producir la interacción entre dos de los sistemas descritos en el Capítulo 3. La Figura 5.1 muestra una representación esquemática del sistema a estudiarse, en el que se tienen dos CK separadas, cada una interactuando con una cavidad cuántica en un solo sitio. La interacción entre estos sistemas es modelada mediante el intercambio de fotones entre las cavidades y se modula mediante un parámetro de interacción b . Estas CK y sus respectivas cavidades cuánticas se encuentran lo suficientemente separadas entre sí, de manera que cuando $b = 0$, cada una muestra el comportamiento anteriormente estudiado.

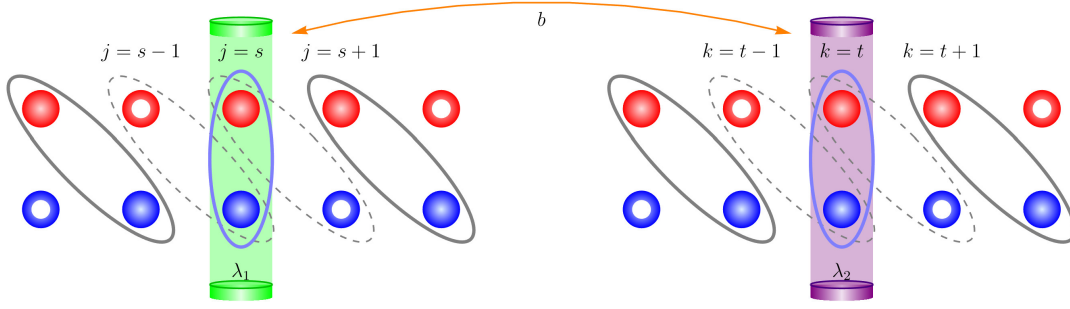


Figura 5.1: Esquema del sistema escalable, en la que se tienen dos CK en la fase topológica, cada una interactuando con una cavidad cuántica en un único sitio, donde las esferas representan fermiones de Majorana y los toros representan MZM's.

5.1.1. Sobre el hamiltoniano y primeros niveles de energía del sistema

El hamiltoniano de este sistema se obtiene simplemente escalando (3.11) y añadiendo el término de interacción

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{\text{int}}, \\
 \hat{H}_1 &= -2\Delta_1 \hat{\sigma}_{z,1} + \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{\lambda_1}{2} \left(e^{-i\phi_1} \hat{a}_1^\dagger + e^{i\phi_1} \hat{a}_1 \right) (1 - \hat{\sigma}_{x,1}), \\
 \hat{H}_2 &= -2\Delta_2 \hat{\sigma}_{z,2} + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\lambda_2}{2} \left(e^{-i\phi_2} \hat{a}_2^\dagger + e^{i\phi_2} \hat{a}_2 \right) (1 - \hat{\sigma}_{x,2}), \\
 \hat{H}_{\text{int}} &= b \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \right).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

No obstante, uno de los motivos por los que este sistema tiene interés de estudio se debe a tener la posibilidad de realizar operaciones con múltiples qubits, generando así las compuertas cuánticas necesarias para la implementación universal de la computación cuántica. Estos son los bloques básicos de la construcción de algoritmos cuánticos, como lo muestran Huang et al. [35] y otros autores.

Tal como se muestra en el Apéndice D, a la hora de implementar los operadores de braiding entre dos CK, la paridad fermiónica total del sistema se conserva, aunque no necesariamente en cada subsistema. A diferencia del análisis realizado en el capítulo 3, no se puede limitar el espacio de estados al subespacio par ($\{|\circ\circ\rangle, |\bullet\bullet\rangle\}$) y se requiere escribir el hamiltoniano en el espacio de estados completo ($\{|\circ\circ\rangle, |\circ\bullet\rangle, |\bullet\circ\rangle, |\bullet\bullet\rangle\}$). Al extender el sistema al subespacio impar, a partir de (3.8), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{\text{int}}, \\
 \hat{H}_1 &= -\Delta_1 (\hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_z^{(1)}) + \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{\lambda_1}{2} \left(e^{-i\phi_1} \hat{a}_1^\dagger + e^{i\phi_1} \hat{a}_1 \right) (1 - \hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(1)}), \\
 \hat{H}_2 &= -\Delta_2 (\hat{\sigma}_z^{(2)} \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)}) + \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\lambda_2}{2} \left(e^{-i\phi_2} \hat{a}_2^\dagger + e^{i\phi_2} \hat{a}_2 \right) (1 - \hat{\sigma}_x^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}), \\
 \hat{H}_{\text{int}} &= b \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \right).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Donde $\hat{H}_1$ representa el hamiltoniano del primer subsistema, $\hat{H}_2$ el del segundo y $\hat{H}_{\text{int}}$ representa el término de interacción entre las cavidades. Del término $\hat{H}_{\text{int}}$, la interacción

entre los sistemas se produce por un intercambio de fotones entre las cavidades. Al tratarse de un *toy model*, se considera que los sistemas son indistinguibles entre sí cuando tienen el mismo conjunto de parámetros y se considera que ambos sistemas se encuentran en su respectiva resonancia, es decir, $\omega_1 = 4\Delta_1$ y $\omega_2 = 4\Delta_2$.

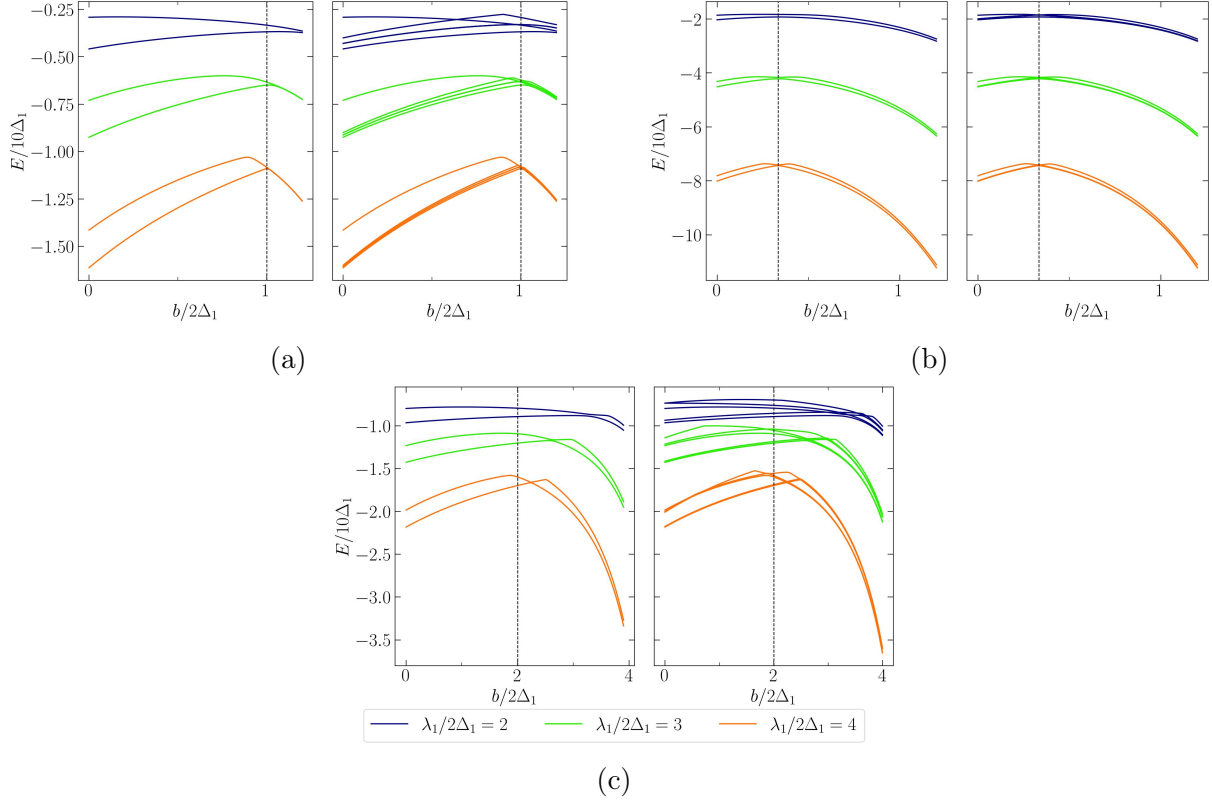


Figura 5.2: Comparación de los primeros niveles de energía para el sistema escalable considerando $\Delta_1 = 0,5$, las líneas sólidas en el panel izquierdo representan los primeros 2 niveles de energía del hamiltoniano limitado al subespacio par (5.1), las líneas solidas en el panel derecho representan los primeros cinco niveles de energía en el espacio completo (5.2) y la línea punteada representa el punto de transición esperado en el régimen de USC descrito por la Ecuación (5.3). Donde (a) los sistemas son idénticos $\Delta_2 = \Delta_1$, $\lambda_2 = \lambda_1$, (b) el segundo subsistema tiene un mayor acoplamiento $\Delta_2 = \Delta_1$, $\lambda_2 = 3\lambda_1$ y (c) el segundo subsistema se encuentra más acoplado y tiene un gap mayor $\Delta_2 = 6\Delta_1$, $\lambda_2 = 3\lambda_1$.

Al analizar las propiedades de los primeros estados de los dos hamiltonianos presentados, se observa que el estado fundamental permanece inalterado, incluso al limitar el espacio de estados al subespacio par. No obstante, en la Figura 5.2 se puede apreciar que, al restringir al subespacio par, se pierde la mitad de los estados disponibles. Esto se evidencia por la ausencia de dos estados intermedios entre el estado fundamental y el primer estado excitado correspondiente al hamiltoniano (5.1).

Un aspecto que debe mencionarse a la hora de estudiar los autoestados de este par de hamiltonianos es que la introducción del término de interacción genera desafíos de convergencia numérica para valores elevados de b en relación con el truncamiento de la base de Fock N_b . Estos errores de convergencia se traducen en una saturación cerca del valor elegido para el truncamiento. La robustez de los resultados se cuantifica mediante el intervalo de confianza de b , el cual varía en función de la elección de los parámetros del

hamiltoniano. Esto se presenta en la Tabla 5.1 para diferentes combinaciones de parámetros, incluidas las utilizadas en la Figura 5.2. En dicha tabla, se observa que el intervalo de confianza aumenta con el valor de Δ_2 , si bien este crecimiento no es directamente proporcional a Δ_2 . Debido a que el estado fundamental no se ve modificado por la elección de la base, en las siguientes secciones se usará el hamiltoniano limitado al subespacio par (Ec. (5.1)) por simplicidad numérica.

Δ_2	λ_2	Intervalo de Confianza de $b/2\Delta_1$
Δ_1	λ_1	$[0, 1,2]$
Δ_1	$2\lambda_1$	$[0, 1,2]$
Δ_1	$3\lambda_1$	$[0, 1,2]$
$2\Delta_1$	λ_1	$[0, 2,3]$
$3\Delta_1$	λ_1	$[0, 2,7]$
$4\Delta_1$	λ_1	$[0, 3,4]$
$6\Delta_1$	$3\lambda_1$	$[0, 4]$

Cuadro 5.1: intervalo de confianza de las soluciones a los Hamiltonianos (5.1) y (5.2) para distintas combinaciones de parámetros, comprobados con truncamientos $N_b \leq 1000$. Donde se considera que el primer subsistema tiene los parámetros fijos Δ_1 y λ_1 y se varían los parámetros del segundo subsistema.

5.2. Estudio de las propiedades del estado fundamental del sistema

Al analizar los estados fundamentales mostrados en la Figura 5.2, se puede notar que cuando los subsistemas alcanzan el régimen de USC, se produce un punto de cruce en el que el espectro de energía se vuelve degenerado, esto señala una transición de fase. Un resultado interesante sobre el valor de b en el que se produce esta transición es que depende de la elección de parámetros del hamiltoniano, tal que se produce en

$$\frac{b}{2\Delta_1} = \frac{\Delta_2 \lambda_1}{\Delta_1 \lambda_2}, \quad (5.3)$$

con lo que se busca comprobar si efectivamente este punto de cruce en el espectro de energía produce alguna modificación en alguno de los sistemas fermiónicos o bosónicos. No obstante, se observa que ninguno de los espectros de energía de la Figura 5.2c entra en degeneración en el punto (5.3). Esto sucede debido al incremento significativo que tiene el gap Δ_2 . Ya que el gap es significativamente mayor, el segundo subsistema no entra en el régimen de USC para las fuerzas de acoplamiento mostradas en la figura, de modo que el punto (5.3) solo es válido cuando todo el sistema está en este régimen.

Conforme a lo estudiado en el Capítulo 3, cuando ambas cavidades se encuentran en el régimen de acoplamiento ultra fuerte y no existe interacción entre las cavidades ($b = 0$), el estado fundamental del sistema puede describirse por $|\Psi\rangle \simeq |\alpha_1\rangle \otimes |-\rangle_{x,1} \otimes |\alpha_2\rangle \otimes |-\rangle_{x,2}$, donde $\alpha_j = -\lambda_j e^{-i\phi}/\omega$.

Al analizar el comportamiento del valor medio del operador de aniquilación $\langle \hat{a}_j \rangle$ de cada cavidad (ver Figura 5.3), se observa que, al alcanzar el régimen de USC en el punto

de transición descrito por la ecuación (5.3), existe un cambio repentino en los valores medidos. Este comportamiento deja de ser lineal, conforme a lo esperado para los estados de radiación coherente, lo que implica que el estado fundamental descrito en el Capítulo 3 ya no es válido para describir la evolución del sistema en esta región.

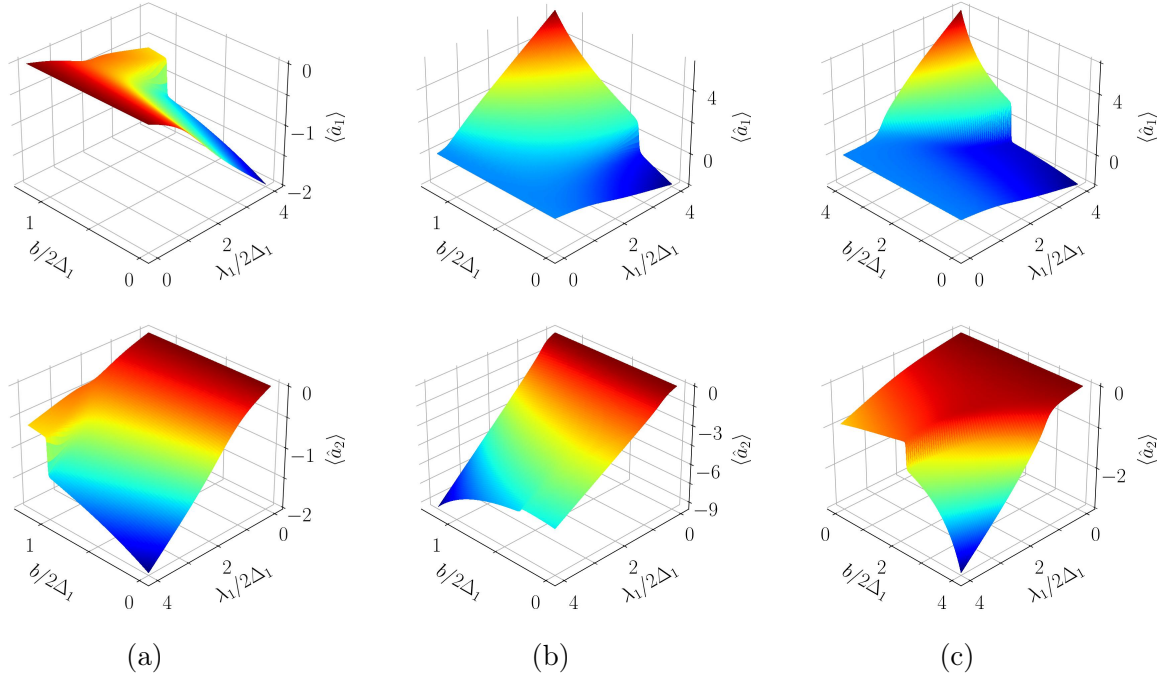


Figura 5.3: Valor medio del operador $\langle \hat{a}_j \rangle$ para el sistema escalable donde el panel superior muestra los valores para el primer subsistema y el panel inferior para el segundo, con $\Delta_1 = 0,5$. Cuando (a) los sistemas son idénticos $\Delta_2 = \Delta_1$, $\lambda_2 = \lambda_1$, (b) el segundo subsistema tiene un mayor acoplamiento $\Delta_2 = \Delta_1$, $\lambda_2 = 3\lambda_1$ y (c) el segundo subsistema tiene un gap mayor y se encuentra acoplado con mayor fuerza $\Delta_2 = 6\Delta_1$, $\lambda_2 = 3\lambda_1$.

Este cambio en la tendencia del operador $\hat{a}_j$, se traduce en un incremento acelerado en la población fotónica de ambas cavidades a medida que el valor del parámetro de interacción b aumenta su valor. La Figura 5.4 ilustra que, en el límite USC existen tres regiones de comportamiento diferentes para el número medio de fotones en cada cavidad.

Previo a la transición, ambas cavidades experimentan una reducción progresiva de su número medio de fotones. El segundo sector, que se manifiesta en torno al punto de transición, muestra un repoblamiento repentino, que viene mediado por la fuerza con la que se encuentra acoplada la cavidad a la CK. Finalmente, el tercer sector es donde se produce una aceleración notable en el crecimiento de la población de fotones. Este crecimiento acelerado para valores elevados de b es el que produce los errores de saturación fuera de los intervalos de confianza mostrados en la Tabla 5.1.

Tras analizar los cambios inducidos en las cavidades por la interacción, la Figura 5.5 muestra la correlación entre los fermiones ubicados inmediatamente fuera de sus respectivas cavidades ($\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{s+1,1}$ en la primera; y $\hat{\gamma}_{t-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$ de la segunda). Al considerar que ambos subsistemas son idénticos y han alcanzado el límite USC, se observa que tras la transición, su correlación cambia repentinamente de 1 a 0. Este hallazgo es particularmente interesante, ya que efectivamente revierte el efecto del protocolo de fusión descrito

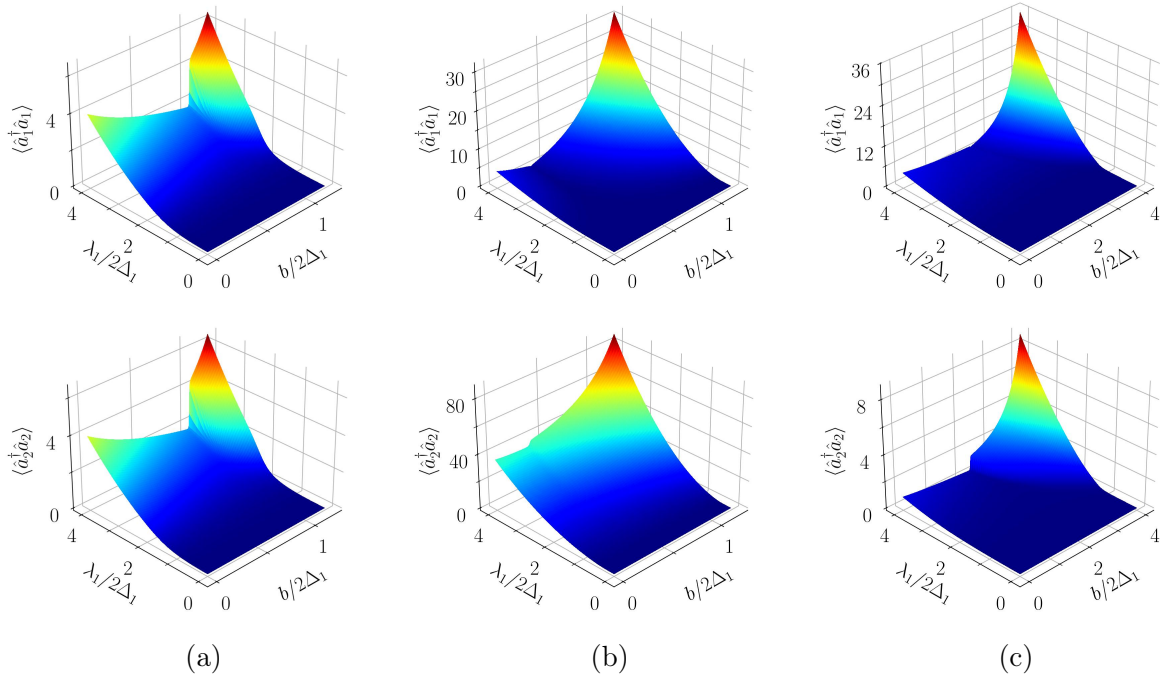


Figura 5.4: Población fotónica media $\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle$ para el sistema escalable donde el panel superior muestra los valores del primer subsistema y el panel inferior para el segundo, para $\Delta_1 = 0,5$. Y se considera que (a) los sistemas son idénticos $\Delta_2 = \Delta_1$, $\lambda_2 = \lambda_1$, (b) el segundo subsistema tiene un mayor acoplamiento $\Delta_2 = \Delta_1$, $\lambda_2 = 3\lambda_1$ y (c) el segundo subsistema tiene un gap mayor y se encuentra acoplado con mayor fuerza $\Delta_2 = 6\Delta_1$, $\lambda_2 = 3\lambda_1$.

en capítulos anteriores, sin embargo, aún mantiene la fuerza de acoplamiento elevada.

No obstante, los comportamientos de mayor interés se manifiestan al producir la interacción entre sistemas con diferentes parámetros. Cuando el segundo subsistema presenta una mayor fuerza de acoplamiento, se aprecia que los valores medios de correlación medidos no se modifican incluso al superar el punto de transición. En contraste, el sistema menos acoplado presenta una inversión en su valor de correlación de de 1 a -1. Esto indica que el sistema que se encuentra más fuertemente acoplado mantiene su paridad frente a incrementos de la fuerza de interacción entre los sistemas, mientras que el sistema con menor acople sufre una inversión en su paridad. Este cambio es similar a los observados mediante los protocolos de fusión y de braiding.

La observación de cambios tanto a nivel de los fotones como a nivel fotónico, inducidos por la interacción entre cavidades, plantea la cuestión fundamental de si esto implica el entrelazamiento entre los estados de las respectivas cavidades. Para investigar esta posibilidad, se propone detectar si estos son estados gaussianos de variable continua entrelazados.

Para este análisis, se emplean dos criterios basados en matrices de correlación; la matriz de correlación de Duan [36], definida por

$$C_D = \begin{pmatrix} 1 & \langle \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

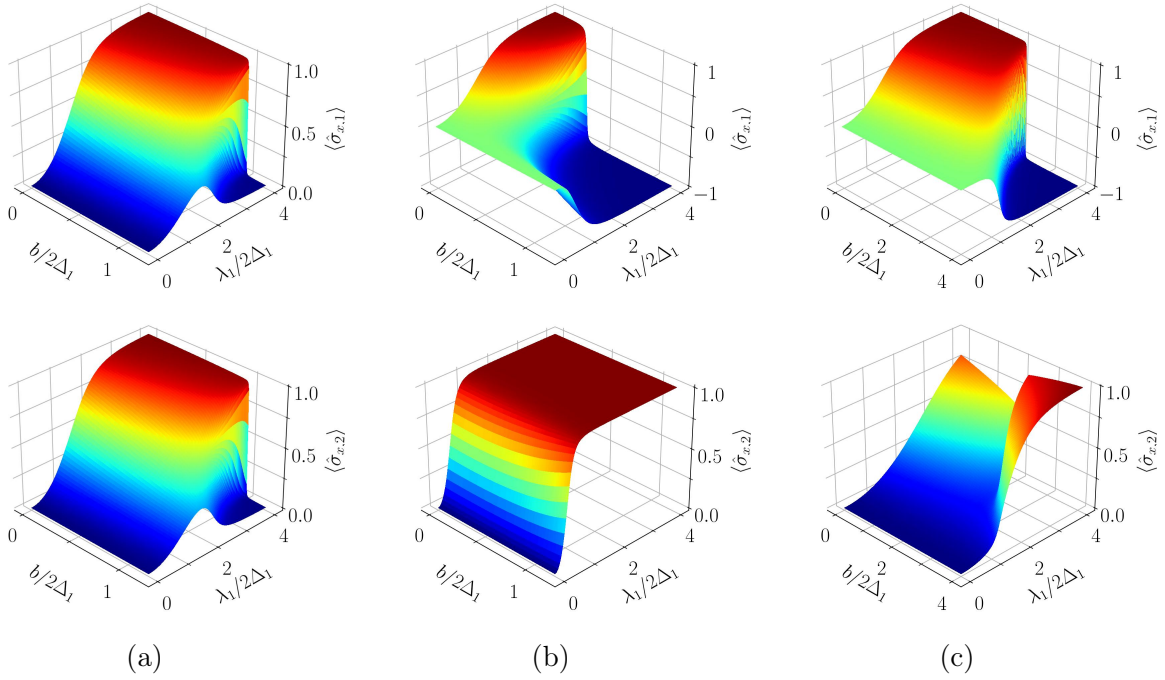


Figura 5.5: Función de correlación fermiónica para el sistema escalable, donde el panel superior muestra la correlación entre $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{s+1,2}$ de la primera CK y el panel inferior para $\hat{\gamma}_{t-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,2}$ correspondientes a la segunda cadena, tomando $\Delta_1 = 0,5$. Y se considera que (a) los sistemas son idénticos $\Delta_2 = \Delta_1$, $\lambda_2 = \lambda_1$, (b) el segundo subsistema tiene un mayor acoplamiento $\Delta_2 = \Delta_1$, $\lambda_2 = 3\lambda_1$ y (c) el segundo subsistema tiene un gap mayor y se encuentra acoplado con mayor fuerza $\Delta_2 = 6\Delta_1$, $\lambda_2 = 3\lambda_1$.

y la matriz de correlación de Simon [37]

$$C_S = \begin{pmatrix} 1 & \langle \hat{a}_1 \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_2 \rangle \\ \langle \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle & \langle (\hat{a}_1^\dagger)^2 \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle \\ \langle \hat{a}_1 \rangle & \langle (\hat{a}_1)^2 \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle \\ \langle \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle & \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle & \langle (\hat{a}_2)^2 \rangle \\ \langle \hat{a}_2^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle & \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle & \langle (\hat{a}_2^\dagger)^2 \rangle & \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \rangle \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Basado en estas matrices, se considera que los estados de radiación de ambas cavidades se encuentran entrelazados cuando se cumple simultáneamente que $\det C_D < 0$ y $\det C_S < 0$.

Al analizar los valores de los determinantes de las matrices de Duan $\det C_D$ y Simon $\det C_S$, se observa que ambos presentan un comportamiento interrelacionado: siempre que uno de ellos adquiere un valor negativo, el otro también lo hace, lo cual indica que los sistemas fotónicos se encuentran entrelazados.

La Figura 5.6 ilustra los valores obtenidos para $\det C_S$, donde se evidencia que para $b > 0$, las cavidades exhiben entrelazamiento cerca del punto de transición para el régimen de acoplamiento ultra fuerte. Sin embargo, al examinar las Figuras 5.6a y 5.6c, se detecta un comportamiento anómalo en torno a dicha transición: las cavidades dejan de estar entrelazadas de manera abrupta para luego volver a entrelazarse repentinamente. Este

cambio brusco en los estados es, de hecho, una signature distintiva de la transición de fase previamente detectada en el espectro de energía para este sistema.

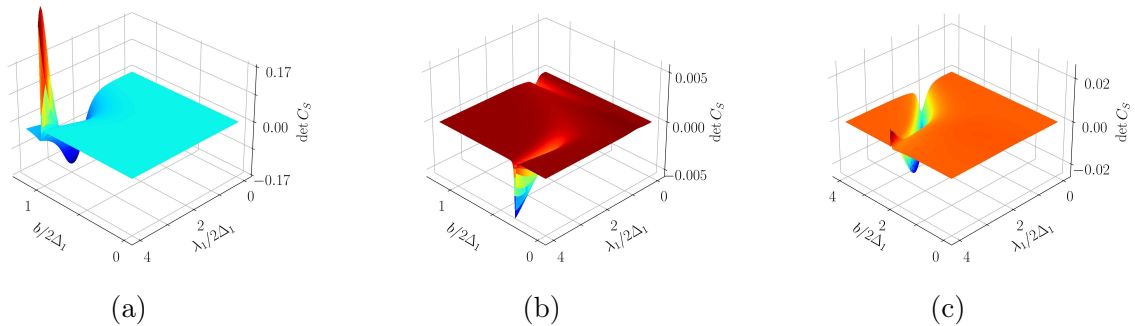


Figura 5.6: Determinante de la matriz de correlación de Simon $\det C_S$ para el sistema escalable. Cuando (a) los sistemas son idénticos $\Delta_2 = \Delta_1$, $\lambda_2 = \lambda_1$, (b) el segundo subsistema tiene un mayor acoplamiento $\Delta_2 = \Delta_1$, $\lambda_2 = 3\lambda_1$ y (c) el segundo subsistema se encuentra más acoplado y tiene un gap mayor $\Delta_2 = 6\Delta_1$, $\lambda_2 = 3\lambda_1$.

5.3. Discusión

En este capítulo, se ha explorado el modelo más sencillo de interacción entre qubits topológicos construidos a partir de cadenas de Kitaev y controlados por cavidades cuánticas, con el objetivo de entender los efectos que se pueden producir. Este estudio se limitó a una exploración numérica del sistema de dos qubits (dos CK y dos cavidades cuánticas), donde las cavidades se encuentran interactuando mediante intercambio de fotones. Mostrando además que un intercambio simple de fotones no afecta la conservación de la paridad fermiónica de cada uno de los subsistemas.

Se pudo evidenciar que este intercambio de fotones induce una transición de fase en el sistema. Se demostró que, en el límite de USC, el punto de transición está bien definido por los parámetros del hamiltoniano del sistema. Además, se observó que el intercambio de fotones pasado el punto de transición produce un efecto de aceleración en el poblamiento de fotones en ambas cavidades. Para valores elevados de b este proceso se da tan rápidamente que se producen errores de saturación en la base de Fock en el análisis numérico del estado fundamental del sistema.

En contraste, al analizar la correlación entre los fermiones a las afueras de cada una de las cavidades, como se realizó para el protocolo de fusión en el Capítulo 3, pudo notarse que la interacción entre las cavidades puede producir dos posibles resultados:

1. Modificar la correlación de ambas CK simultáneamente, obteniendo un resultado inverso al logrado mediante la fusión.
2. Invertir completamente la paridad de una de las CK, mientras que la otra permanece en su estado original previo a la interacción.

La segunda posibilidad es de gran relevancia para continuar con el desarrollo en computación cuántica, ya que en la construcción de puertas cuánticas (especialmente las puertas

controladas), es fundamental poder modificar el estado de un qubit objetivo mientras los qubits de control permanecen inalterados.

Finalmente, al estudiar el entrelazamiento entre los estados de radiación de las cavidades, se confirmó que la introducción del término interactivo efectivamente causa entrelazamiento, particularmente cerca del punto de transición de fase detectado. Además, el hecho de que, para determinadas configuraciones del sistema, existan cambios repentinos en el entrelazamiento es un resultado interesante que debería ser estudiado más a fondo para comprender la magnitud y las implicaciones de estas transformaciones en el sistema.

Capítulo 6

Conclusiones

La construcción de qubits topológicos, que sean inherentemente resistentes a errores y decoherencia, junto con mecanismos para controlarlos es una de las prioridades a nivel de la computación cuántica para superar la etapa actual de desarrollo tecnológico. Por tanto, en las primeras secciones de este Trabajo Fin de Máster, se mostró el desarrollo teórico y reproducción de resultados que muestran que las cavidades cuánticas actuando como fuente de radiación electromagnética permiten realizar cambios en un qubit construido a partir de nanocables cuánticos, los cuales se modelaron utilizando una cadena de Kitaev.

En este sentido, se pudo mostrar que desde un punto de vista teórico, al transformar el hamiltoniano de la cadena de Kitaev a la base de los fermiones de Majorana y mediante la modulación de sus parámetros, emergen naturalmente los modos de energía cero de Majorana (Majorana Zero Modes). Estos modos de energía son fundamentales en la construcción de los qubits topológicos, pues son los que almacenan la información cuántica del sistema, dotándolo de protección ante decoherencia local, pues la información se encuentra distribuida.

A la hora de introducir las cadenas de Kitaev en su fase topológica en el interior de una cavidad cuántica, pudo notarse que los efectos físicos locales variaban en función a la cantidad de sitios de la cadena interactuaban con la radiación. En concreto, cuando se trata de una interacción con un solo sitio, permite reescribir el hamiltoniano del sistema como un modelo de Rabi modificado. Al ser este un modelo bastante estudiado, se pudo obtener aproximaciones a los niveles de energía del sistema en el contexto de la aproximación adiabática. Adicionalmente, se pudo verificar que en el límite de acoplamiento fuerte esta interacción actúa efectivamente como unas *tijeras topológicas*, que puede separar de forma controlada los modos de Majorana de una cadena.

En cuanto a la interacción con dos sitios de la CK, se pudo comprobar que puede modelarse como un modelo de Rabi inhomogéneo para un sistema de dos espines. A la hora de resolver este modelo, se pudo demostrar que el estado fundamental del sistema presenta una estructura de estado tipo gato de Majorana-Schrödinger, lo que muestra que los estados se entrelazan. Además, ante una modulación precisa de la fuerza de acoplamiento en cada sitio permite realizar braiding entre los MZM's que se encuentran junto a la cavidad cuántica. Esta operación es de especial interés, pues la propuesta de puertas cuánticas topológicas es realizada mediante operadores de braiding.

Por otro lado, en este trabajo, proponemos un *toy model* para estudiar la interacción entre qubits topológicos y los cambios que se pueden producir en los estados cuánticos del sistema; esto con el objetivo de buscar un mecanismo de control mediante cavidades que permita la construcción de puertas cuánticas. En concreto, nos concentramos en el modelo

de interacción mediante un intercambio simple de fotones entre las cavidades. Mediante la exploración de las propiedades del estado fundamental del sistema, en la sección 5.2, mostramos que mediante la regulación del gap de energía de Cooper Δ y la fuerza de acoplamiento λ , se consiguen cambios efectivos en un qubit mientras que otro mantiene su estado, mostrando así un comportamiento similar al de una puerta controlada, en el que los qubits de control permanecen inalterados.

A pesar de las limitaciones identificadas, este trabajo abre nuevas y prometedoras direcciones para futuras investigaciones en sistemas multipartitos. Es imperativo que estas se enfoquen en explicar teóricamente los resultados observados y en explorar la construcción de puertas cuánticas utilizando los mecanismos de control propuestos mediante el estudio de la introducción de otros mecanismos de interacción entre qubits.

Apéndice A

Aproximación adiabática en el hamiltoniano de Rabi modificado

En esta sección consideramos el hamiltoniano de Rabi modificado, que viene dado por

$$\hat{H}_{\text{RM}} = -2\Delta\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\lambda}{2} (e^{-i\phi}\hat{a}^\dagger + e^{i\phi}\hat{a}) (1 - \hat{\sigma}_z), \quad (\text{A.1})$$

que describe la interacción entre un sistema de materia de dos niveles (un qubit) y la radiación. En este modelo Δ representa el gap entre los dos niveles del qubit, ω representa la energía de la radiación. Y la intensidad del acoplamiento entre la radiación y la materia como $\lambda e^{-i\phi} \in \mathbb{C}$. A diferencia del modelo de Rabi, se introduce un término $\frac{\lambda}{2} (e^{-i\phi}\hat{a}^\dagger + e^{i\phi}\hat{a})$ que describe un “impulso” [38], lo que modifica el espectro del hamiltoniano.

Siguiendo el procedimiento descrito en la Ref. [39], para obtener el espectro de energías del hamiltoniano en la aproximación adiabática. Se empieza obteniendo el espectro de energías en el límite de la degeneración de los niveles atómicos ($\Delta = 0$), de modo que el hamiltoniano se reduce a

$$\hat{H}^{\Delta=0} = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\lambda}{2} (e^{-i\phi}\hat{a}^\dagger + e^{i\phi}\hat{a}) (\mathbb{1}_2 - \hat{\sigma}_z). \quad (\text{A.2})$$

Este hamiltoniano se escribe en la base $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$, en la que $\hat{\sigma}_x |\pm\rangle_x = \pm |\pm\rangle_x$, lo que permite proyectar el hamiltoniano y obtenerlo en base a operadores de creación y aniquilación desplazado

$$\langle \pm | \hat{H}_{\pm}^{\Delta=0} | \pm \rangle = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\lambda}{2} (e^{-i\phi}\hat{a}^\dagger + e^{i\phi}\hat{a}) (1 \mp 1), \quad (\text{A.3})$$

donde se elige $\lambda_{\pm} = \lambda e^{-i\phi} (1 \mp 1)/2$ por conveniencia, tal que $\lambda_+ = 0$ y $\lambda_- = \lambda e^{-i\phi}$. De modo que se tiene

$$\langle \pm | \hat{H}_{\pm}^{\Delta=0} | \pm \rangle = \omega \left(\hat{a}^\dagger + \frac{\lambda_{\pm}^*}{\omega} \right) \left(\hat{a} + \frac{\lambda_{\pm}}{\omega} \right) - \frac{\lambda_{\pm}^2}{\omega}. \quad (\text{A.4})$$

El hamiltoniano (A.4) se puede diagonalizar mediante el operador desplazamiento $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ con amplitud de desplazamiento $\alpha = -\lambda e^{-i\phi}/\omega$. Las soluciones de este hamiltoniano son los estados propios

$$|n_{\pm}, \pm\rangle_x = |n_{\pm}\rangle \otimes |\pm\rangle_x. \quad (\text{A.5})$$

Donde $|n_{\pm}\rangle = \hat{D}(\lambda_{\pm}/\omega) |n\rangle$ representa la base de estados de Fock desplazados. Tal que la base del hamiltoniano (A.4) es

$$\{|n_{-}\rangle \otimes |-\rangle_x, |n_{+}\rangle \otimes |+\rangle_x\} = \{\hat{D}(\lambda_{-}/\omega) |n\rangle \otimes |-\rangle_x, |n\rangle \otimes |+\rangle_x\}. \quad (\text{A.6})$$

En esta base, el hamiltoniano de la Ec. (A.1), se puede escribir como una matriz diagonal por bloques 2×2 de la forma

$$\hat{H}_n^{\text{AA}} = \begin{pmatrix} n\omega - \frac{\lambda^2}{\omega} & -2\Delta \langle n_- | n_+ \rangle \\ -2\Delta \langle n_+ | n_- \rangle & n\omega \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

donde el solapamiento en los términos fuera de la diagonal viene dado por

$$\begin{aligned} \langle n_- | n_+ \rangle &= \langle n | \hat{D}^\dagger(0) \hat{D}(\alpha) | n \rangle = \langle n | \hat{D}(\alpha) | n \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \langle n | \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) \exp(-\alpha^* \hat{a}) | n \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \langle n | \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^k}{k!} \frac{(-\alpha^* \hat{a})^l}{l!} | n \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^k}{k!} \frac{(-\alpha^*)^l}{l!} \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{(n-l)!}} \langle n-k | n-l \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=0}^n \frac{(-|\alpha|^2)^k}{k!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} L_n(|\alpha|^2). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Reemplazando este resultado en la Ec. (A.7) y resolviendo el problema a valores propios, se obtiene que el espectro de energías propias en la aproximación adiabática viene dada por

$$E_{n,\pm}^{\text{AA}} = \frac{1}{2} \left[2n\omega - \frac{\lambda^2}{\omega} \pm \sqrt{\frac{\lambda^4}{\omega^2} + 16\Delta^2 e^{-|\alpha|^2} L_n^2(|\alpha|^2)} \right], \quad (\text{A.9})$$

donde $L_n(x)$ representa los polinomios de Laguerre convencionales.

Apéndice B

Aproximación al estado fundamental del hamiltoniano inhomogéneo de dos espines

En esta sección, se considera el hamiltoniano de Rabi inhomogéneo considerado para un sistema de dos espines, que viene dado por

$$\begin{aligned} \hat{H} = -\Delta (\hat{\sigma}_{z,1} + \hat{\sigma}_{z,2} + \hat{\sigma}_{z,1}\hat{\sigma}_{z,2}) + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \lambda_1 (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\mathbb{1}_2 - \hat{\sigma}_{x,1}) \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}} \lambda_2 (e^{-i\phi} \hat{a}^\dagger + e^{i\phi} \hat{a}) (\mathbb{1}_2 - \hat{\sigma}_{x,2}), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

que describe la interacción entre dos sistemas de materia de dos niveles cada uno (dos qubits) y algún modo de radiación electromagnética. En este modelo, se considera que los dos qubits son del mismo tipo, de modo que tienen el mismo gap de energía Δ y la radiación tiene una energía ω . Al igual que en el caso descrito en el Apéndice A, se introducen términos de impulso en la intensidad del acoplamiento entre cada uno de los qubits y la radiación.

A diferencia de lo realizado para el modelo de Rabi modificado, solo se busca hallar una aproximación para el estado fundamental $|\text{GS}\rangle$, de modo que en el límite de la degeneración de los niveles de los qubits ($\Delta = 0$), el hamiltoniano puede escribirse como

$$\langle -, - | \hat{H}^{\Delta=0} | -, - \rangle = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_1 (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_2 (e^{-i\phi} \hat{a}^\dagger + e^{i\phi} \hat{a}). \quad (\text{B.2})$$

Considerando que en el texto principal se mostró que se produce una transición en el límite en el caso $\lambda_2 = 0$, de modo que se puede escribir la energía del estado fundamental en el régimen de perturbaciones en el subespacio formado por $\{|\text{GS}_-\rangle, |\text{GS}_+\rangle\}$, estos estados vienen caracterizados por las fuerzas de acoplamiento $\lambda_- = \lambda_1$ y $\lambda_+ = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-i\phi}$. Se puede escribir en base a operadores de creación y aniquilación desplazados.

$$\langle -, - | \hat{H}^{\Delta=0} | -, - \rangle = \omega \left(\hat{a}^\dagger + \frac{\lambda_\pm^*}{\sqrt{2}\omega} \right) \left(\hat{a} + \frac{\lambda_\pm}{\sqrt{2}\omega} \right) - \frac{\lambda_\pm^2}{2\omega}. \quad (\text{B.3})$$

Al tratarse del estado fundamental, es evidente que $n = 0$, de modo que este hamiltoniano puede reducirse a la forma efectiva

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} -\omega |\alpha_{\text{I}}|^2 & \Delta \langle \alpha_{\text{I}} | \alpha_{\text{II}} \rangle \\ \Delta \langle \alpha_{\text{II}} | \alpha_{\text{I}} \rangle & -\omega |\alpha_{\text{II}}|^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

donde se define $\alpha_{\text{I}} = -\frac{\lambda_+}{\sqrt{2}\omega}$ y $\alpha_{\text{II}} = -\frac{\lambda_-}{\sqrt{2}\omega}$. Para escribir este hamiltoniano en efectivo, se usó el hecho de que los estados en torno a los que se realiza la perturbación cumple que

$$\langle \text{GS}_+ | \text{GS}_- \rangle = \langle \alpha_I | \alpha_{II} \rangle \otimes \langle -, - | -, - \rangle.$$

Resolviendo el problema a valores propios, se obtiene que la energía aproximada del estado fundamental viene dado por

$$E_{\text{GS}} \simeq -\frac{1}{2} \left[\omega (\alpha_I^2 + \alpha_{II}^2) + \sqrt{\omega^2 (\alpha_I^2 - \alpha_{II}^2)^2 + 4\Delta^2 |\langle \alpha_I | \alpha_{II} \rangle|^2} \right], \quad (\text{B.5})$$

donde $|\alpha\rangle$ representan estados coherentes de radiación.

Para escribir el estado fundamental de este sistema se puede elegir la forma

$$|\text{GS}\rangle = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\text{GS}_I\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\text{GS}_{II}\rangle. \quad (\text{B.6})$$

De modo que el estado de energía fundamental se escribe como una superposición de los estados entre los que ocurre la transición que se observa en la Figura 4.2, Donde al resolver el problema a valores propios se obtiene que

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 + \sqrt{16e^{-\frac{\lambda_2^2}{2\omega^2}}\Delta^2\omega^2 + \lambda_2^2(2\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\sqrt{16\Delta^2\omega^2 + e^{\frac{\lambda_2^2}{2\omega^2}}\left(2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 + \sqrt{16e^{-\frac{\lambda_2^2}{2\omega^2}}\Delta^2\omega^2 + \lambda_2^2(2\lambda_1 + \lambda_2)^2}\right)^2}} e^{\frac{\lambda_2^2}{4\omega^2}}, \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{4\Delta\omega}{\sqrt{16\Delta^2\omega^2 + e^{\frac{\lambda_2^2}{2\omega^2}}\left(2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 + \sqrt{16e^{-\frac{\lambda_2^2}{2\omega^2}}\Delta^2\omega^2 + \lambda_2^2(2\lambda_1 + \lambda_2)^2}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Mediante propiedades trigonométricas, se puede obtener que el parámetro θ que define esta transición viene dado por

$$\tan\theta = -\frac{4\Delta\omega}{\lambda_2(\lambda_1 + 2\lambda_1)} e^{-\frac{\lambda_2^2}{4\omega^2}}. \quad (\text{B.8})$$

Apéndice C

Cálculo de la fase geométrica para el montaje de interacción con dos sitios

En esta sección, se presenta el desarrollo matemático para obtener el valor de la fase de Berry cuando se produce una evolución cíclica adiabática en la cavidad cuántica que interactúa con dos sitios de una CK. En este montaje, se considera una fuerza de acoplamiento $\lambda_2 \leq \lambda_1$ para cualquier $\lambda_1 > 0$, donde la evolución se realiza para $0 \leq \phi \leq 2\pi$. La evolución adiabática del estado fundamental del sistema de estudio se encuentra contenido en el subespacio bidimensional formado por $\{|\text{GS}_+\rangle, |\text{GS}_-\rangle\}$, donde estos estados fundamentales compuestos vienen descritos por:

$$|\text{GS}_+(\phi)\rangle = -i|\Psi_+\rangle \otimes |\alpha_+(\phi)\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(|\bullet_{L,R}, \bullet_c, \circ_{s+1}\rangle + |\circ_{L,R}, \bullet_c, \bullet_{s+1}\rangle) \otimes |\alpha_+\rangle,$$

$$\alpha_+(\phi) = -\frac{1}{\sqrt{2}\omega}(\lambda_1 + \lambda_2 e^{i\phi}),$$
(C.1)

$$|\text{GS}_-\rangle = i|\Psi_-\rangle \otimes |\alpha_-\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|\bullet_{L,R}, \bullet_c, \circ_{s+1}\rangle - |\circ_{L,R}, \bullet_c, \bullet_{s+1}\rangle) \otimes |\alpha_-\rangle,$$

$$\alpha_- = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}\omega},$$
(C.2)

donde es evidente que $|\text{GS}_-\rangle$ no depende de ϕ .

En este subespacio, la matriz hamiltoniana efectiva para la interacción entre la cavidad y los dos sitios de la CK puede escribirse como:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} -\omega|\alpha_+|^2 & \Delta\langle\alpha_-|\alpha_+(\phi)\rangle \\ \Delta\langle\alpha_+(\phi)|\alpha_-\rangle & -\omega|\alpha_-|^2 \end{pmatrix},$$
(C.3)

de modo que el estado fundamental de este sistema puede hallarse resolviendo el problema a valores propios de esta matriz hamiltoniana, tal que

$$|\text{GS}(\phi)\rangle = C_+(\phi)|\text{GS}_+(\phi)\rangle + C_-(\phi)|\text{GS}_-\rangle,$$

$$C_+(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\Delta^2|\langle\alpha_-|\alpha_+\rangle|^2}{(\delta E + \sqrt{\delta E^2 + 4\Delta^2|\langle\alpha_-|\alpha_+\rangle|^2})^2}}},$$

$$C_-(\phi) = -\frac{2\Delta\langle\alpha_+|\alpha_-\rangle}{\delta E + \sqrt{\delta E^2 + 4\Delta^2|\langle\alpha_-|\alpha_+\rangle|^2}}C_+(\phi),$$
(C.4)

donde se definen los cambio de variable de la diferencia de energías entre los estados

$$\delta E = \omega(|\alpha_+(\phi)|^2 - |\alpha_-|^2) = \lambda_2(\lambda_2 + 2\lambda_1 \cos \phi)/(2\omega),$$
(C.5)

y

$$\langle \alpha_- | \alpha_+ \rangle = \exp \left[-\frac{\lambda_2}{4\omega^2} (\lambda_2 - 2i\lambda_1 \sin \phi) \right], \quad (\text{C.6})$$

representa el solapamiento entre los estados coherentes $|\alpha_+\rangle$ y $|\alpha_-\rangle$.

La fase de Berry correspondiente a la evolución cíclica adiabática de este estado viene dada por la expresión

$$\varphi_B = i \int_0^{2\pi} d\phi \langle \text{GS}(\phi) | \frac{\partial}{\partial \phi} | \text{GS}(\phi) \rangle, \quad (\text{C.7})$$

donde el solapamiento de la integral se puede calcular por sustitución directa como sigue:

$$\begin{aligned} \langle \text{GS}(\phi) | \frac{\partial}{\partial \phi} | \text{GS}(\phi) \rangle &= C_+^*(\phi) \frac{\partial C_+(\phi)}{\partial \phi} \langle \text{GS}_+(\phi) | \text{GS}_+(\phi) \rangle + C_-^*(\phi) \frac{\partial C_+(\phi)}{\partial \phi} \langle \text{GS}_- | \text{GS}_+(\phi) \rangle + \\ &\quad |C_+(\phi)|^2 \langle \text{GS}_+(\phi) | \frac{\partial}{\partial \phi} | \text{GS}_+(\phi) \rangle + C_-^*(\phi) C_+(\phi) \langle \text{GS}_- | \frac{\partial}{\partial \phi} | \text{GS}_+(\phi) \rangle + \\ &\quad C_+^*(\phi) \frac{\partial C_-(\phi)}{\partial \phi} \langle \text{GS}_+(\phi) | \text{GS}_- \rangle + C_-^*(\phi) \frac{\partial C_-(\phi)}{\partial \phi} \langle \text{GS}_- | \text{GS}_- \rangle \\ &= C_+^*(\phi) \frac{\partial C_+(\phi)}{\partial \phi} + C_-^*(\phi) \frac{\partial C_-(\phi)}{\partial \phi} + |C_+(\phi)|^2 \langle \alpha_+(\phi) | \frac{\partial}{\partial \phi} | \alpha_+(\phi) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Para calcular el tercer término de esta expresión, se usa las propiedades de los estados coherentes [40, 41]

$$\begin{aligned} \langle \alpha_+(\phi) | \frac{\partial}{\partial \phi} | \alpha_+(\phi) \rangle &= \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial |\alpha_+(\phi)|^2}{\partial \phi} + \alpha_+^*(\phi) \frac{\partial \alpha_+(\phi)}{\partial \phi} \right) \\ &= i \text{Im} \left(\alpha_+^*(\phi) \frac{\partial \alpha_+(\phi)}{\partial \phi} \right) = i \frac{\lambda_2}{2\omega^2} (\lambda_2 + \lambda_1 \cos \phi). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Reemplazando en el solapamiento dentro de la integral, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \text{GS}(\phi) | \frac{\partial}{\partial \phi} | \text{GS}(\phi) \rangle &= \frac{\lambda_2 \left(2\lambda_1 \delta E \cos \phi + \lambda_2 \left(\delta E + \sqrt{\delta E^2 + 4\Delta^2 |\langle \alpha_- | \alpha_+ \rangle|^2} \right) \right)}{4\omega^2 \sqrt{\delta E^2 + 4\Delta^2 |\langle \alpha_- | \alpha_+ \rangle|^2}} \\ &= \frac{\lambda_2^2}{4\omega^2} \left(1 + \frac{(\lambda_2 + 2\lambda_1 \cos(\phi))^2}{\sqrt{16\Delta^2 \omega^2 e^{-\frac{\lambda_2^2}{2\omega^2}} + \lambda_2^2 (\lambda_2 + 2\lambda_1 \cos(\phi))^2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

de modo que finalmente, la fase de Berry viene dada por

$$\varphi_B = -\frac{\lambda_2^2}{4\omega^2} \int_0^{2\pi} d\phi \left(1 + \frac{(\lambda_2 + 2\lambda_1 \cos(\phi))^2}{\sqrt{16\Delta^2 \omega^2 e^{-\frac{\lambda_2^2}{2\omega^2}} + \lambda_2^2 (\lambda_2 + 2\lambda_1 \cos(\phi))^2}} \right). \quad (\text{C.11})$$

Esta integral no admite una solución analítica, pero se evalúa de manera numérica en el texto principal. Por otra parte, en el texto principal, el resultado que se busca es el módulo de la fase de Berry.

Apéndice D

Operadores de braiding entre cadenas de Kitaev en la base de fermiones $\hat{d}$

En esta sección, se presenta la deducción de los operadores de braiding entre dos MZM's considerando un sistema escalable de Majorana (Capítulo 5) de dos CK y dos cavidades. Para ello se utilizará la definición del operador de braiding

$$\hat{B}_{n,m} = e^{\frac{\pi}{4}\hat{\gamma}_n\hat{\gamma}_m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \hat{\gamma}_n\hat{\gamma}_m), \quad (\text{D.1})$$

donde se considera que el braiding se produce en sentido horario.

En concreto, se estudiarán los operadores de braiding para los 6 casos de la Figura D.1. En las siguientes secciones, se obtendrá las definiciones de los operadores estudiando el efecto que tiene el operador (D.1) sobre los elementos de la base.

D.1. Braiding entre $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{s+1,1}$

Para este intercambio entre los dos fermiones de Majorana de la primera CK (Figura D.1a), viene dado por el operador

$$\begin{aligned} \hat{B}_{s-1,s} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \hat{\gamma}_{s-1,2}\hat{\gamma}_{s+1,1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + i \left(-\hat{d}_s^\dagger \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_s \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_s^\dagger - \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_s \right) \right], \\ \hat{\Gamma}_{s-1,s} &= i \left(-\hat{d}_s^\dagger \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_s \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_s^\dagger - \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_s \right). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Al aplicar este operador sobre los elementos de la base del espacio de estados, se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,s} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

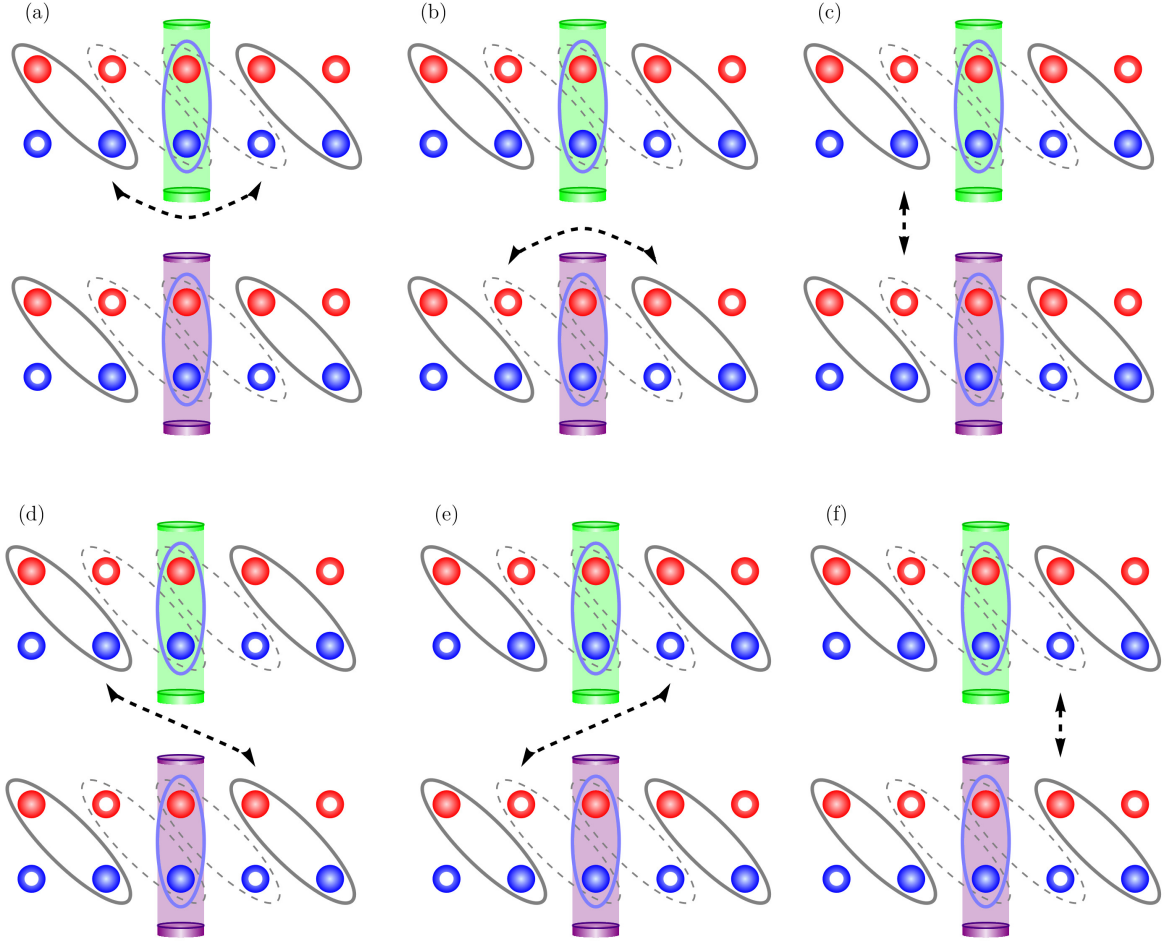


Figura D.1: Braiding de fermiones de Majorana entre cadenas de Kitaev, donde los fermiones s corresponden a la primera CK y t a la segunda. En la figura, las líneas punteadas muestran esquemáticamente el intercambio de fermiones que se realiza. Donde el braiding se produce entre los fermiones (a) $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{s+1,1}$, (b) $\hat{\gamma}_{t-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$, (c) $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t-1,2}$, (d) $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$, (e) $\hat{\gamma}_{s+1,1}$ y $\hat{\gamma}_{t-1,2}$ y (f) $\hat{\gamma}_{s+1,1}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$.

De tal manera que este intercambio escrito en esta base viene mediado por el operador matricial

$$\hat{B}_{s-1,s} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1}_{16} - i\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \mathbb{1}_4). \quad (\text{D.4})$$

D.2. Braiding entre $\hat{\gamma}_{t-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$

El caso del intercambio de los fermiones de la segunda CK viene mediado por el operador de braiding

$$\begin{aligned} \hat{B}_{t-1,t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \hat{\gamma}_{t-1,2} \hat{\gamma}_{t+1,1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + i \left(-\hat{d}_t^\dagger \hat{d}_{t-1} + \hat{d}_t \hat{d}_{t-1} + \hat{d}_{t-1}^\dagger \hat{d}_t^\dagger - \hat{d}_{t-1}^\dagger \hat{d}_t \right) \right], \\ \hat{\Gamma}_{t-1,t} &= i \left(-\hat{d}_t^\dagger \hat{d}_{t-1} + \hat{d}_t \hat{d}_{t-1} + \hat{d}_{t-1}^\dagger \hat{d}_t^\dagger - \hat{d}_{t-1}^\dagger \hat{d}_t \right). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Su efecto sobre la base de este subespacio está definido por

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{t-1,t} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{t-1,t} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{t-1,t} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{t-1,t} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{t-1,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{t-1,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{t-1,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{t-1,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{t-1,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{t-1,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{t-1,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{t-1,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{t-1,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{t-1,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{t-1,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{t-1,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle,
\end{aligned} \tag{D.6}$$

obteniendo un operador similar al del intercambio en la primera CK

$$\hat{B}_{t-1,t} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1}_{16} - i\mathbb{1}_4 \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y). \tag{D.7}$$

D.3. Braiding entre $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t-1,2}$

Pasando al intercambio entre los fermiones de Majorana a la izquierda de sus respectivas cavidades (Figura D.1c), este está mediado por

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{s-1,t-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \hat{\gamma}_{s-1,2} \hat{\gamma}_{t-1,2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \hat{d}_{t-1}^\dagger \hat{d}_{s-1} - \hat{d}_{t-1} \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_{t-1}^\dagger + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_{t-1} \right], \\
\hat{\Gamma}_{s-1,t-1} &= \hat{d}_{t-1}^\dagger \hat{d}_{s-1} - \hat{d}_{t-1} \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_{t-1}^\dagger + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_{t-1}.
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Sobre los elementos de la base, se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= -|\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= -|\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= -|\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= -|\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= -|\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= -|\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= -|\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t-1} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= -|\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle.
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Tal que el operador obtiene la forma

$$\hat{B}_{s-1,t-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1}_{16} - i\hat{\sigma}_y \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \mathbb{1}_2). \tag{D.10}$$

D.4. Braiding entre $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$

Analizando el caso de la Figura D.1d para el intercambio entre $\hat{\gamma}_{s-1,2}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$, se tiene

$$\begin{aligned}\hat{B}_{s-1,t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \hat{\gamma}_{s-1,2} \hat{\gamma}_{t+1,1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + i \left(-\hat{d}_t^\dagger \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_t \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_t^\dagger - \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_t \right) \right], \\ \hat{\Gamma}_{s-1,t} &= i \left(-\hat{d}_t^\dagger \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_t \hat{d}_{s-1} + \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_t^\dagger - \hat{d}_{s-1}^\dagger \hat{d}_t \right),\end{aligned}\tag{D.11}$$

y sobre la base, se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{s-1,t} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= -i |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\ \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= -i |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s-1,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle.\end{aligned}\tag{D.12}$$

Obteniéndose el operador matricial

$$\hat{B}_{s-1,t} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1}_{16} - i \hat{\sigma}_y \otimes \mathbb{1}_4 \otimes \hat{\sigma}_y).\tag{D.13}$$

D.5. Braiding entre $\hat{\gamma}_{s+1,1}$ y $\hat{\gamma}_{t-1,2}$

Para el braiding entre el MZM a la derecha de la primera cavidad y el presente a la izquierda de la cavidad del segundo subsistema, se tiene

$$\begin{aligned}\hat{B}_{s,t-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \hat{\gamma}_{s+1,1} \hat{\gamma}_{t-1,2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + i \left(\hat{d}_s^\dagger \hat{d}_{t-1} + \hat{d}_{t-1} \hat{d}_s + \hat{d}_s^\dagger \hat{d}_{t-1}^\dagger + \hat{d}_{t-1}^\dagger \hat{d}_s \right) \right], \\ \hat{\Gamma}_{s,t-1} &= i \left(\hat{d}_s^\dagger \hat{d}_{t-1} + \hat{d}_{t-1} \hat{d}_s + \hat{d}_s^\dagger \hat{d}_{t-1}^\dagger + \hat{d}_{t-1}^\dagger \hat{d}_s \right),\end{aligned}\tag{D.14}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{s,t-1} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t-1} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t-1} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t-1} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t-1} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t-1} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t-1} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t-1} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t-1} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t-1} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t-1} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t-1} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t-1} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t-1} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t-1} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t-1} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= i |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle.
\end{aligned} \tag{D.15}$$

El operador finalmente obtiene la forma

$$\hat{B}_{s,t-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1}_{16} + i \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \mathbb{1}_2). \tag{D.16}$$

D.6. Braiding entre $\hat{\gamma}_{s+1,1}$ y $\hat{\gamma}_{t+1,1}$

Finalmente, el braiding entre ambos MZM's a la derecha de sus respectivas cavidades está descrito por el operador

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{s,t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \hat{\gamma}_{s+1,1} \hat{\gamma}_{t+1,1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \hat{d}_t^\dagger \hat{d}_s + \hat{d}_t \hat{d}_s - \hat{d}_s^\dagger \hat{d}_t^\dagger + \hat{d}_s^\dagger \hat{d}_t \right], \\
\hat{\Gamma}_{s,t} &= -\hat{d}_t^\dagger \hat{d}_s + \hat{d}_t \hat{d}_s - \hat{d}_s^\dagger \hat{d}_t^\dagger + \hat{d}_s^\dagger \hat{d}_t,
\end{aligned} \tag{D.17}$$

tal que,

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{s,t} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= - |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t} |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= - |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t} |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= - |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\circ_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= - |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t} |\circ_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\circ_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= - |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= - |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t} |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle &= - |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \circ_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \circ_s \circ_{t-1} \circ_t\rangle, \\
\hat{\Gamma}_{s,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle &= - |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle, & \hat{\Gamma}_{s,t} |\bullet_{s-1} \bullet_s \bullet_{t-1} \bullet_t\rangle &= |\bullet_{s-1} \circ_s \bullet_{t-1} \circ_t\rangle.
\end{aligned} \tag{D.18}$$

Y se obtiene finalmente

$$\hat{B}_{s,t} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbb{1}_{16} + i \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_x \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \hat{\sigma}_y). \tag{D.19}$$

Apéndice E

Código en Python

A continuación se presenta el código realizado en Python 3.12.4 utilizado para realizar los cálculos presentados a lo largo de este trabajo. El código presentado se realizó con las siguientes versiones de librerías:

1. NumPy 1.26.4
2. SciPy 1.14.1
3. Xarray 2024.11.0
4. Matplotlib 3.10.1
5. Joblib 1.4.2

```
1 import numpy as np
2 import scipy.sparse as sp
3 import scipy as sc
4 import xarray as xr
5 import math
6
7 def save_complex(dataset, *args, **kwargs):
8     """
9     Dado un dataset de xarray que tenga alguna variable compleja,
10     la guarda en un archivo netcdf separando la parte real e
11     imaginaria en dos variables diferentes.
12
13     Parameters
14     -----
15     dataset : xarray.Dataset
16         Dataset que contiene la variable compleja.
17     *args, **kwargs : optional
18
19     Returns
20     -----
21     bool
22         True si se guardo correctamente el archivo.
23     """
24
25     ds = dataset.expand_dims('ReIm', axis=-1)
26     ds = xr.concat([ds.real, ds.imag], dim='ReIm')
27     ds.to_netcdf(*args, **kwargs)
28
29     return True
30
31
32 def read_complex(*args, **kwargs):
33     """
```

```

34     Lee un archivo netcdf que contiene una variable compleja
35     cuyas partes real e imaginaria estan separadas, los junta
36     y devuelve un dataset de xarray.
37
38     Parameters
39     -----
40     *args, **kwargs : optional
41
42     Returns
43     -----
44     xarray.Dataset
45         Dataset que contiene la variable compleja.
46     """
47
48     ds = xr.open_dataset(*args, **kwargs)
49
50     return ds.isel(ReIm=0) + 1j * ds.isel(ReIm=1)
51
52 def read_complex_multi(*args, **kwargs):
53
54     ds = xr.open_mfdataset(*args, **kwargs)
55
56     return ds.isel(ReIm=0) + 1j * ds.isel(ReIm=1)
57
58 def nFock(n, Nb):
59     """
60     Crea un ket de un estado de Fock con n fotonones en un sistema
61     con cierto truncamiento en el numero de bosones.
62
63     Parameters
64     -----
65     n : int
66         Numero de foton para el estado de Fock.
67     Nb : int
68         Numero maximo de fotones en el sistema.
69
70     Returns
71     -----
72     np.ndarray
73         Ket del estado de Fock.
74     """
75
76     ket = np.zeros(Nb + 1, dtype = complex)
77     ket[n] = 1
78
79     return ket
80
81 def id(dim):
82     """
83     Devuelve la matriz identidad dim*dim en formato sparse.
84
85     Parameters
86     -----
87     dim: int
88         Dimension de la matriz identidad.
89     """
90
91     return sp.identity(dim)

```

```

92
93 def a_op(Nb):
94     """
95     Devuelve el operador de aniquilacion bosonico en formato
96     sparse, considerando un truncamiento en la base de Fock.
97
98     Parameters
99     -----
100     Nb : int
101         Numero maximo de fotones en el sistema.
102
103     Returns
104     -----
105     sp.csr_matrix
106         Operador de aniquilacion bosonico en formato sparse.
107     """
108
109     return sp.diags([np.sqrt(np.arange(1, Nb))], [1], shape=(Nb, Nb))
110
111 def dag(op):
112     """
113     Devuelve el operador adjunto de un operador escrito en forma
114     matricial en formato sparse.
115     """
116
117     return op.transpose().conj()
118
119 def pauliX():
120     """
121     Devuelve la matriz de Pauli X en formato sparse.
122     """
123
124     return sp.csr_matrix([[0, 1], [1, 0]])
125
126 def pauliY():
127     """
128     Devuelve la matriz de Pauli Y en formato sparse.
129     """
130
131     return sp.csr_matrix([[0, -1j], [1j, 0]])
132
133 def pauliZ():
134     """
135     Devuelve la matriz de Pauli Z en formato sparse.
136     """
137
138     return sp.csr_matrix([[1, 0], [0, -1]])
139
140 def sigmaPlus():
141
142     return sp.csr_matrix(0.5*(pauliX() + 1j*pauliY()))
143
144 def sigmaMinus():
145
146     return sp.csr_matrix(0.5*(pauliX() - 1j*pauliY()))
147
148 def ramp_lin(lmax,tau,t):
149     """

```

```

150     Funcion de rampa lineal con pendiente lmax/tau.
151
152     Parameters
153     -----
154     lmax: float
155         Valor maximo de la rampa.
156     tau: float
157         Tiempo caracteristico de la rampa.
158     t: float
159         Tiempo actual.
160
161     Returns
162     -----
163     float
164         Valor de la rampa en el tiempo t.
165     """
166
167     lam = (lmax/tau)*t
168     return lam
169
170 def ramp_triangu(lmax,tau,t):
171     """
172     Funcion de rampa triangular con pendiente lmax/tau.
173     """
174
175     nu = lmax / tau
176
177     if t < tau:
178         lam = nu*t
179
180     elif tau <= t <= 2*tau:
181         lam = -nu*(t-tau)+lmax
182
183     else:
184         lam = 0
185
186     return lam
187
188 def DenMatrix(ket):
189     """
190     Devuelve la matriz densidad de un ket dado.
191     """
192
193     return np.outer(ket, dag(ket))
194
195 def partial_trace(rho, keep, dims, optimize=False):
196     """
197     Calcula la traza parcial
198
199     rho_a = Tr_b(rho)
200
201     Parameters
202     -----
203     rho : 2D array
204         Matriz de entrada que se quiere trazar.
205     keep : array
206         Array de indices de los subespacios a conservar
207         despues de obtener la traza.

```

```

208     Si se trata de un espacio A x B x C x D y se quiere
209     obtener la traza sobre B y D, entonces
210     keep = [0, 2] (es decir, conservar A y C).
211     dims : array
212     Array que indica las dimensiones de cada espacio
213     involucrado en la matriz rho.
214     Si rho es un espacio A x B x C x D,
215     entonces dims = [dim_A, dim_B, dim_C, dim_D].
216
217     Returns
218     -----
219     rho_a : 2D array
220     Matriz de traza parcial sobre los espacios
221     no conservados.
222     """
223     keep = np.asarray(keep)
224     dims = np.asarray(dims)
225     Ndim = dims.size
226     Nkeep = np.prod(dims[keep])
227
228     idx1 = [i for i in range(Ndim)]
229     idx2 = [Ndim+i if i in keep else i for i in range(Ndim)]
230     rho_a = rho.reshape(np.tile(dims,2))
231     rho_a = np.einsum(rho_a, idx1+idx2, optimize=optimize)
232
233     return rho_a.reshape(Nkeep, Nkeep)
234
235 def H1BC(delta, omega, lambd, phi, Nb):
236     """
237     Devuelve la matriz Hamiltoniana para el sistema de interaccion
238     en un solo sitio entre la cavidad cuantica y la KC H1, independiente
239     del tiempo.
240
241     Parameters
242     -----
243     delta : float
244     Gap de energia de la KC.
245     omega : float
246     Frecuencia/energia de la cavidad cuantica.
247     phi : float
248     Fase de la interaccion.
249     lambda : float
250     Fuerza de acoplamiento.
251     Nb : int
252     Numero de truncamiento en la base de Fock.
253
254     Returns
255     -----
256     scipy.sparse.csr_matrix
257     Matriz Hamiltoniana del sistema en formato sparse.
258     """
259
260     a = a_op(Nb+1)
261
262     m = sigmaMinus() + sigmaPlus()
263
264     HField = omega * sp.kron(dag(a)@a, id(2))
265

```

```

266     HQubit = delta * sp.kron(id(Nb + 1), sigmaPlus()@sigmaMinus())
267
268     HInter = 0.5 * lambd * np.exp(-1j * phi) * sp.kron(dag(a), m) + \
269         0.5 * lambd * np.exp(1j * phi) * sp.kron(a, m)
270
271     return HQubit + HField + HInter
272
273 def H1_lamb_t(delta, omega, phi, lambda_max, tau, t, Nb, type = "linear"
274 ):
275     """
276     Devuelve la matriz Hamiltoniana para el sistema de interaccion
277     en un solo sitio entre la cavidad cuantica y la KC H1, considerando
278     una dependencia temporal en la fuerza de acoplamiento (lambda).
279
280     Parameters
281     -----
282     delta : float
283         Gap de energia de la KC.
284     omega : float
285         Frecuencia/energia de la cavidad cuantica.
286     phi : float
287         Fase de la interaccion.
288     lambda_max : float
289         Valor maximo de la fuerza de acoplamiento.
290     tau : float
291         Tiempo caracteristico de la rampa.
292     t : float
293         Tiempo actual.
294     Nb : int
295         Numero de truncamiento en la base de Fock.
296     type : str, optional
297         Tipo de rampa. Puede ser "linear", "triangular" o "constant".
298         Por defecto es "linear". En caso de ser constante, la matriz
299         que se obtiene es igual al de la funcion H1BC.
300
301     Returns
302     -----
303     scipy.sparse.csr_matrix
304         Matriz Hamiltoniana del sistema en formato sparse.
305     """
306
307     a = a_op(Nb+1)
308
309     m = id(2) - pauliX()
310
311     HField = omega * sp.kron(dag(a)@a, id(2))
312     HQubit = -2 * delta * sp.kron(id(Nb + 1), pauliZ())
313
314     if type == "linear":
315         lamb = ramp_lin(lambda_max, tau, t)
316     elif type == "triangular":
317         lamb = ramp_triangular(lambda_max, tau, t)
318     elif type == "constant":
319         lamb = lambda_max
320     else:
321         raise ValueError("Tipo invalido")
322
323     HInter = 0.5 * lamb * np.exp(-1j * phi) * sp.kron(dag(a), m) + \

```

```

323         0.5 * lamb * np.exp(1j * phi) * sp.kron(a, m)
324
325     return HQubit + HField + HInter
326
327 def H1_phi_t(delta, omega, lamb, phi_max, tau, t, Nb, type = "linear"):
328     """
329     Devuelve la matriz Hamiltoniana para el sistema de interaccion
330     en un solo sitio entre la cavidad cuantica y la KC H1, considerando
331     una dependencia temporal en la fase de interaccion (phi).
332
333     Parameters
334     -----
335     delta : float
336         Gap de energia de la KC.
337     omega : float
338         Frecuencia/energia de la cavidad cuantica.
339     lamb : float
340         Fuerza del acoplamiento.
341     phi_max : float
342         Valor maximo de la fase de interaccion.
343     tau : float
344         Tiempo caracteristico de la rampa.
345     t : float
346         Tiempo actual.
347     Nb : int
348         Numero de truncamiento en la base de Fock.
349     type : str, optional
350         Tipo de rampa. Puede ser "linear", "triangular" o "constant".
351         Por defecto es "linear". En caso de ser constante, la matriz
352         que se obtiene es igual al de la funcion H1BC.
353
354     Returns
355     -----
356     scipy.sparse.csr_matrix
357         Matriz Hamiltoniana del sistema en formato sparse.
358     """
359
360     a = a_op(Nb+1)
361
362     m = id(2) - pauliX()
363
364     HField = omega * sp.kron(dag(a)@a, id(2))
365     HQubit = -2 * delta * sp.kron(id(Nb + 1), pauliZ())
366
367     if type == "linear":
368         phi = ramp_lin(phi_max, tau, t)
369     elif type == "triangular":
370         phi = ramp_triangular(phi_max, tau, t)
371     elif type == "constant":
372         phi = phi_max
373     else:
374         raise ValueError("Invalid type")
375
376     HInter = 0.5 * lamb * np.exp(-1j * phi) * sp.kron(dag(a), m) + \
377         0.5 * lamb * np.exp(1j * phi) * sp.kron(a, m)
378
379     return HQubit + HField + HInter
380

```

```

381 def Normalize(vec):
382     """
383     Normaliza un vector dado.
384     """
385
386     return vec/np.linalg.norm(vec)
387
388 def psit0(Nb):
389     """
390     Devuelve el estado inicial del sistema compuesto por una cavidad
391     cuantica y una Cadena de Kitaev interactuando en un solo sitio.
392
393     Parameters
394     -----
395     Nb : int
396         Numero de truncamiento en la base de Fock.
397     """
398     psi = np.zeros(2*(Nb+1), dtype = complex)
399     psi[0] = 1
400
401     return psi
402
403 def TimeDSEH1(delta, omega, phi, lambda_max, tau, t0, tf, dt, Nb, type =
404     "linear"):
405     """
406     Dado el Hamiltoniano dependiente del tiempo H1_lamb_t,
407     resuelve la ecuacion de Schroedinger dependiente del tiempo
408     usando el metodo de Runge-Kutta explicito de orden 8 (DOP853).
409
410     Parameters
411     -----
412     delta : float
413         Gap de energia de la KC.
414     omega : float
415         Frecuencia/energia de la cavidad cuantica.
416     phi : float
417         Fase de la interaccion.
418     lambda_max : float
419         Valor maximo del acoplamiento.
420     tau : float
421         Tiempo caracteristico de la rampa.
422     t0 : float
423         Tiempo inicial.
424     tf : float
425         Tiempo final.
426     Nb : int
427         Numero de truncamiento en la base de Fock.
428     type : str, optional
429         Tipo de rampa. Puede ser "linear", "triangular" o "constant".
430         Por defecto es "linear". En caso de ser constante, la matriz
431         que se obtiene es igual al de la funcion H1BC.
432
433     Returns
434     -----
435     np.ndarray
436         Array de estados psi(t) en el tiempo t.
437     np.ndarray
438         Array de tiempos t.

```

```

438     """
439
440     def fun_Schro(t, psi):
441         psi = Normalize(psi)
442
443         return -1j*H1_lamb_t(delta, omega, phi, lambda_max, tau, t, Nb,
444 type)@psi
445
446     ts = np.linspace(t0, tf, 100)
447
448     sol = sc.integrate.solve_ivp(lambda t, y: fun_Schro(t, y),
449                                t_span = [t0, tf],
450                                y0 = psit0(Nb),
451                                t_eval = ts,
452                                method = "DOP853",
453                                dense_output = True)
454
455     time = sol.t
456     psi_array = sol.y
457
458     return psi_array.T, time
459
460 def solveTD(delta, omega, phi, lambda_max, tau, t0, tf, dt, Nb, type = "
461 linear"):
462
463     psi_t, time = TimeDSEH1(delta, omega, phi, lambda_max, tau, t0, tf,
464 dt, Nb, type)
465
466     sx_o = sp.kron(id(Nb + 1), pauliX())
467     sz_o = sp.kron(id(Nb + 1), pauliZ())
468     a_o = sp.kron(a_op(Nb+1), id(2))
469     n_o = dag(a_o)@a_o
470
471     sx = []
472     sz = []
473     a=[]
474     number = []
475
476     for i in range(len(time)):
477         psi = psi_t[i]
478         sx.append((dag(psi)@sx_o@psi).real)
479         sz.append((dag(psi)@sz_o@psi).real)
480         a.append((dag(psi)@a_o@psi).real)
481         number.append((dag(psi)@n_o@psi).real)
482
483     ds = xr.Dataset({
484         "sx": (["t_idx"], sx),
485         "sz": (["t_idx"], sz),
486         "a": (["t_idx"], a),
487         "number": (["t_idx"], number),
488         "t": (["t_idx"], time),
489     },
490     coords = {
491         "t_idx": range(len(time)),
492         "tau": tau
493     },
494     attrs = {
495         "N": Nb,

```

```

493         "delta": delta,
494         "omega": omega,
495         "lambda_max": lambda_max,
496         "phi": phi
497     })
498
499     return ds
500
501 def TimeDSEH1phi(delta, omega, lamb, phi_max, tau, t0, tf, dt, Nb, type
= "linear"):
502     def fun_Schro(t, psi):
503         psi = Normalize(psi)
504         return -1j*H1_phi_t(delta, omega, lamb, phi_max, tau, t, Nb,
type)@psi
505
506     ts = np.linspace(t0, tf, 1000*tau)
507
508     sol = sc.integrate.solve_ivp(lambda t, y: fun_Schro(t, y),
509                                t_span = [t0, tf],
510                                y0 = psit0(Nb),
511                                t_eval = ts,
512                                method = "DOP853",
513                                dense_output = True)
514
515     time = sol.t
516     psi_array = sol.y
517
518     return psi_array.T, time
519
520 def solveTD_phi(delta, omega, lamb, phi_max, tau, t0, tf, dt, Nb, type =
"linear"):
521
522     psi_t, time = TimeDSEH1phi(delta, omega, lamb, phi_max, tau, t0, tf,
dt, Nb, type)
523
524     sx_o = sp.kron(id(Nb + 1), pauliX())
525     sz_o = sp.kron(id(Nb + 1), pauliZ())
526     a_o = sp.kron(a_op(Nb+1), id(2))
527     n_o = dag(a_o)@a_o
528
529     sx = []
530     sz = []
531     a=[]
532     number = []
533
534     for i in range(len(time)):
535         psi = psi_t[i]
536         sx.append((dag(psi)@sx_o@psi).real)
537         sz.append((dag(psi)@sz_o@psi).real)
538         a.append((dag(psi)@a_o@psi).real)
539         number.append((dag(psi)@n_o@psi).real)
540
541     ds = xr.Dataset({
542         "sx": (["t_idx"], sx),
543         "sz": (["t_idx"], sz),
544         "a": (["t_idx"], a),
545         "number": (["t_idx"], number),
546         "t": (["t_idx"], time),

```

```

547     },
548     coords = {
549         "t_idx": range(len(time)),
550         "tau": tau
551     },
552     attrs = {
553         "N": Nb,
554         "delta": delta,
555         "omega": omega,
556         "phi_max": phi_max,
557         "lambda": lamb
558     })
559
560     return ds
561
562 def __VN_Entropy(rho):
563     """
564     Calcula la entropia de Von Neumann de una matriz densidad dada.
565     Usando la definicion de la entropia de Von Neumann basada en
566     los valores propios de la matriz densidad.
567
568     Parameters
569     -----
570     rho : np.ndarray
571         Matriz densidad del sistema.
572
573     Returns
574     -----
575     float
576         Entropia de Von Neumann del sistema.
577     """
578
579     EV, _ = sc.linalg.eig(rho)
580     ev_list = [x for x in EV.tolist() if x]
581     EV = np.array(ev_list)
582
583     log2_EV = np.matrix(np.log2(EV))
584     EV = np.matrix(EV)
585
586     S = -EV@log2_EV.H
587
588     return S.flat[0]
589
590 def VNentropy(V, Nb, subsystem = 2):
591     """
592     Dado un conjunto de vectores propios de un Hamiltoniano, calcula la
593     entropia de Von Neumann de la matriz densidad asociada a cada vector
594     propio. Se considera un sistema compuesto por bosones y un qubit. Y
595     se realiza la traza parcial sobre el subsistema dado.
596
597     Parameters
598     -----
599     V : np.ndarray
600         Matriz de vectores propios del Hamiltoniano.
601     Nb : int
602         Numero de truncamiento en la base de Fock.
603     subsystem : int, optional
604         Subsistema del que se quiere hacer la traza parcial.

```

```

605         1 para el qubit y 2 para el boson. Por defecto es 2.
606
607     Returns
608     -----
609     np.ndarray
610         Array de entropias de Von Neumann para cada vector propio.
611     """
612     S=[]
613     for i in range(len(V)):
614         S.append(__VN_Entropy(partial_trace(DenMatrix(V[:,i])), [
615 subsystem-1], [Nb+1, 2])).real)
616     return np.array(S)
617
618 def bosonProb(V, Nb):
619     P = []
620     rho = partial_trace(DenMatrix(V), [0], [Nb+1, 2])
621
622     for i in range(Nb+1):
623         P.append(np.trace(DenMatrix(nFock(i, Nb))@rho).real)
624
625     return P
626
627 def solve(delta, omega, lamb, phi, Nb, find_entropy = False, find_prob =
628 False):
629     """
630     Resuelve el Hamiltoniano de interaccion en un solo sitio
631     entre la cavidad cuantica y la Cadena de Kitaev H1BC,
632     independiente del tiempo.
633     Calcula los valores propios y vectores propios del Hamiltoniano,
634     y calcula los valores esperados de a, sx, sz y el numero de bosones
635     en el estado fundamental. Y lo devuelve en un dataset de xarray.
636
637     Parameters
638     -----
639     delta : float
640         Gap de energia de la Cadena de Kitaev.
641     omega : float
642         Frecuencia/energia de la cavidad cuantica.
643     lamb : float
644         Fuerza de acoplamiento entre la cavidad cuantica y la Cadena de
645     Kitaev.
646     phi : float
647         Fase de la interaccion entre la cavidad cuantica y la Cadena de
648     Kitaev.
649     N : int
650         Numero de truncamiento en la base de Fock.
651     find_entropy : bool, optional
652         Si se quiere calcular la entropia de Von Neumann de los estados
653     propios del Hamiltoniano. Por defecto es False. Se consiera
654     opcional
655     debido al costo computacional que implica calcular la entropia.
656     find_prob : bool, optional
657         Si se quiere calcular la probabilidad de encontrar el sistema
658     en cada estado de Fock. Por defecto es False. Se consiera
659     opcional
660     debido al costo computacional que implica calcular la
661     probabilidad.

```

```

656 Returns
657 -----
658 xarray.Dataset
659     Dataset que contiene los valores propios, vectores propios,
660     valores esperados de a, sx, sz y el numero de bosones en el
661     estado
662     fundamental. Si find_entropy es True, tambien se incluye la
663     entropia
664     de Von Neumann.
665     """
666
667 H = H1_lamb_t(delta, omega, phi, lamb, 0, 0, Nb, "constant")
668
669 E, V = sc.linalg.eigh(H.toarray())
670 idx = np.argsort(E)
671 E = E[idx]
672 V = V[:, idx]
673
674 if find_entropy:
675     try:
676         S = VNentropy(V, Nb)
677     except Exception as e:
678         print(f"Error calculating Von Neumann entropy: {e}")
679         S = np.zeros(len(E))
680     else:
681         S = np.zeros(len(E))
682
683 GS = V[:,0]
684 a = sp.kron(a_op(Nb + 1), id(2))
685 sx = (dag(GS)@sp.kron(id(Nb + 1), pauliX()).toarray()@GS).real
686 sz = (dag(GS)@sp.kron(id(Nb + 1), pauliZ()).toarray()@GS).real
687 number = (dag(GS)@(dag(a)@a).toarray()@GS).real
688 aa = (dag(GS)@a.toarray()@GS).real
689
690 if find_prob:
691     try:
692         P = bosonProb(GS, Nb)
693     except Exception as e:
694         print(f"Error calculating boson probabilities: {e}")
695         P = np.zeros(Nb + 1)
696     else:
697         P = np.zeros(Nb + 1)
698
699 ds = xr.Dataset({
700     "E": ([ "idx" ], E),
701     "S": ([ "idx" ], S),
702     "P": ([ "n" ], P),
703     "S": S,
704     "sigma_X": sx,
705     "sigma_Z": sz,
706     "number": number,
707     "a": aa
708 },
709 coords = {
710     "n": np.arange(Nb + 1),
711     "idx": np.arange(len(E)),
712     "lambda": lamb,
713     "omega": omega,

```

```

712         "phi": phi
713     },
714     attrs = {
715         "delta": delta,
716         "Nb": Nb,
717         "prob": find_prob,
718         "entropy": find_entropy
719     })
720     return ds
721
722
723 def H2BC(delta, omega, lambd, phi, Nb):
724     """
725     Devuelve la matriz Hamiltoniana para el sistema de interaccion
726     en dos sitios entre la cavidad cuantica y la Cadena de Kitaev H2,
727     independiente del tiempo.
728
729     Parameters
730     -----
731     delta : float
732         Gap de energia de la Cadena de Kitaev.
733     omega : float
734         Frecuencia/energia de la cavidad cuantica.
735     lambd : list
736         Lista con los valores de lambda en los dos sitios.
737         Debe tener dos elementos, uno para cada sitio.
738     phi : float
739         Fase de la interaccion.
740     Nb : int
741         Numero de truncamiento en la base de Fock.
742
743     Returns
744     -----
745     scipy.sparse.csr_matrix
746         Matriz Hamiltoniana del sistema en formato sparse.
747     """
748
749     try:
750         lambd1, lambd2 = lambd
751     except ValueError:
752         raise ValueError("lambd debe ser una lista de dos elementos")
753
754     a = a_op(Nb + 1)
755
756     m = id(2) - pauliX()
757
758     HField = omega * sp.kron(dag(a)@a, id(4))
759
760     HQubit = - delta * sp.kron(id(Nb + 1), sp.kron(pauliZ(), id(2))) + \
761         sp.kron(id(2), pauliZ()) + \
762         sp.kron(pauliZ(), pauliZ())
763
764     HInter = lambd[0] * sp.kron(dag(a) + a, sp.kron(m, id(2))) + \
765         lambd[1] * (np.exp(-1j * phi) * sp.kron(dag(a), sp.kron(id
766 (2), m)) + \
767         np.exp(1j * phi) * sp.kron(a, sp.kron(id(2), m)
768 ))
769     HInter = HInter / (2*np.sqrt(2))

```

```

768
769     return HField + HQubit + HInter
770
771
772 def solve2BC(delta, omega, lambd, phi, Nb):
773     """
774     Resuelve el Hamiltoniano de interaccion en dos sitios
775     entre la cavidad cuantica y la Cadena de Kitaev H2BC,
776     independiente del tiempo. Y devuelve los valores propios y vectores
777     propios
778     del Hamiltoniano, y calcula los valores esperados de operadores de
779     interes en el estado fundamental. Y lo devuelve en un dataset de
780     xarray.
781
782     Parameters
783     -----
784     delta : float
785         Gap de energia de la Cadena de Kitaev.
786     omega : float
787         Frecuencia/energia de la cavidad cuantica.
788     lambd : list
789         Lista con los valores de lambda en los dos sitios.
790         Debe tener dos elementos, uno para cada sitio.
791     phi : float
792         Fase de la interaccion.
793     Nb : int
794         Numero de truncamiento en la base de Fock.
795
796     Returns
797     -----
798     xarray.Dataset
799         Dataset que contiene los valores propios, vectores propios,
800         y valores esperados para operadores de interes.
801     """
802
803     H = H2BC(delta, omega, lambd, phi, Nb)
804
805     E, V = sc.linalg.eigh(H.toarray())
806
807     idx = np.argsort(E)
808     E = E[idx]
809     V = V[:, idx]
810
811     GS = V[:,0]
812
813     dg = dag(GS)
814
815     a = (dg@sp.kron(a_op(Nb+1), id(4))@GS).real
816     sx1 = (dg@sp.kron(id(Nb+1), sp.kron(pauliX(), id(2))))@GS).real
817     sx2 = (dg@sp.kron(id(Nb+1), sp.kron(id(2), pauliX()))@GS).real
818     sy1 = (dg@sp.kron(id(Nb+1), sp.kron(pauliY(), id(2))))@GS).real
819     sy2 = (dg@sp.kron(id(Nb+1), sp.kron(id(2), pauliY()))@GS).real
820     sz1 = (dg@sp.kron(id(Nb+1), sp.kron(pauliZ(), id(2))))@GS).real
821     sz2 = (dg@sp.kron(id(Nb+1), sp.kron(id(2), pauliZ()))@GS).real
822     sxsx = (dg@sp.kron(id(Nb+1), sp.kron(pauliX(), pauliX()))@GS).real
823     sxsz = (dg@sp.kron(id(Nb+1), sp.kron(pauliX(), pauliZ()))@GS).real
824     sysy = (dg@sp.kron(id(Nb+1), sp.kron(pauliY(), pauliY()))@GS).real
825     number = (dg@sp.kron(dag(a_op(Nb+1))@a_op(Nb+1), id(4))@GS).real

```

```

824
825 P = []
826 rho = partial_trace(DenMatrix(GS), [0], [Nb+1, 2, 2])
827 for i in range(Nb+1):
828     P.append(np.trace(DenMatrix(nFock(i, Nb))@rho).real)
829 P = np.array(P)
830
831 sx = [sx1, sx2]
832 sy = [sy1, sy2]
833 sz = [sz1, sz2]
834
835 ds = xr.Dataset({
836     "E": (["idx"], E),
837     "sx": (["r"], sx),
838     "sy": (["r"], sy),
839     "sz": (["r"], sz),
840     "sxsx": sxsx,
841     "sxsx": sxsx,
842     "sysy": sysy,
843     "number": number,
844     "a": a,
845     "P": (["n"], P)
846 },
847     coords = {
848         "r": np.arange(2),
849         "idx": np.arange(len(E)),
850         "lambda1": lambd[0],
851         "lambda2": lambd[1],
852         "omega": omega,
853         "phi": phi,
854         "n": np.arange(Nb+1),
855     },
856     attrs = {
857         "delta": delta,
858         "Nb": Nb
859     })
860
861 return ds
862
863
864 def alpha_2BC(lambd, omega, zone = None):
865     """
866     Devuelve el valor de alpha para el estado coherente en los
867     tres sectores detectados en el espectro del modelo de interaccion
868     en dos sitios.
869
870     Parameters
871     -----
872     lambd : list
873         Lista con los valores de lambda en los dos sitios.
874     omega : float
875         Frecuencia de la cavidad cuantica.
876     zone : str, optional
877         Sector del espectro en el que se encuentra el estado coherente.
878         Puede ser "I", "II" o "III". Si no se especifica, se devuelve
879         None.
880     """
881     try:

```

```

882     lambd1, lambd2 = lambd
883 except ValueError:
884     raise ValueError("lambd debe ser una lista de dos elementos")
885
886 if lambd2 > 0 or zone == "I":
887     alpha = -(lambd1 + lambd2)/(np.sqrt(2)*omega)
888 elif (lambd2 < 0 and -lambd1 < lambd2) or zone == "II":
889     alpha = -lambd1/(np.sqrt(2)*omega)
890 elif lambd2 < -lambd1 or zone == "III":
891     alpha = -lambd2/(np.sqrt(2)*omega)
892 else:
893     raise ValueError("Zona invalida")
894
895 return alpha
896
897 def EGS_num(lambd, omega):
898     """
899     Devuelve la energia del estado fundamental del sistema
900     de interaccion en dos sitios, considerando que esta dada por
901      $E = -|\alpha|^2 * \omega$ , donde alpha corresponde al estado coherente
902     del sistema.
903     """
904     return -np.abs(alpha_2BC(lambd, omega))**2 * omega
905
906 def __ket_coherent(alpha, Nb):
907     """
908     Crea un ket coherente en la base de Fock para un sistema
909     con un truncamiento dado en el numero de bosones.
910
911     Parameters
912     -----
913     alpha : complex
914         Amplitud del estado coherente.
915     Nb : int
916         Numero maximo de fotones en el sistema.
917
918     Returns
919     -----
920     scipy.sparse.csr_matrix
921         Ket coherente en formato sparse.
922     """
923
924     ket_alpha = np.zeros((Nb + 1, 1), dtype=complex)
925     nn = np.arange(Nb + 1, dtype=float)
926
927     for i in range(Nb + 1):
928         n = nn[i]
929         ket_alpha[i] += (np.exp(-0.5 * np.abs(alpha)**2) * (alpha**n) /
930             np.sqrt(math.gamma(n + 1)))
931
932     return sp.csr_matrix(ket_alpha)
933
934 def E_pert(delta, omega, lambd, Nb):
935     """
936     Calcula la enregia del estado fundamental del sistema de interaccion
937     en dos sitios, en el regimen perturbativo.
938
939     Parameters

```

```

939 -----
940 delta : float
941     Gap de energia de la KC.
942 omega : float
943     Frecuencia de la cavidad cuantica.
944 lambd : list
945     Lista con los valores de lambda en los dos sitios.
946 Nb : int
947     Numero maximo de fotones en el sistema.
948
949 Returns
950 -----
951 float
952     Energia del estado fundamental del sistema de interaccion
953     en dos sitios, en el regimen perturbativo.
954 """
955
956 try:
957     lambd1, lambd2 = lambd
958 except ValueError:
959     raise ValueError("lambd debe ser una lista de dos elementos")
960
961 if lambd[1] < -lambd[0]:
962     return EGS_num(lambd, omega)
963
964 alpha1 = alpha_2BC(lambd, omega, "I")
965 alpha2 = alpha_2BC(lambd, omega, "II")
966
967 k_alpha1 = __ket_coherent(alpha1, Nb)
968 k_alpha2 = __ket_coherent(alpha2, Nb)
969
970 olap = dag(k_alpha1)@k_alpha2
971 olap = np.abs(olap.toarray()[0][0])**2
972
973 E = omega * (np.abs(alpha1)**2 + np.abs(alpha2)**2) + \
974     np.sqrt(omega**2 * (np.abs(alpha1)**2 - np.abs(alpha2)**2)**2 +
975 4*delta**2*olap)
976
977 return -0.5*E
978
979 def H_2Qubits(delta, omega, lambd, phi, b, Nb):
980     """
981     Devuelve la matriz Hamiltoniana del sistema de interaccion entre dos
982     cadenas de Kitaev y dos cavidades cuanticas, considerando
983     una interaccion en un solo sitio entre cada cadena y su respectiva
984     cavidad cuantica. La matriz Hamiltoniana es independiente del tiempo
985     .
986     La interaccion entre los dos sistemas se considera a traves de un
987     intercambio de excitaciones entre las dos cavidades cuanticas.
988
989     Parameters
990     -----
991     delta : list
992         Lista con los gaps de energia de las dos cadenas de Kitaev.
993     omega : list
994         Lista con las frecuencias/energias de las dos cavidades
995     cuanticas.

```

```

994     lambd : list
995         Lista con las fuerzas de acoplamiento de las dos cadenas de
Kitaev.
996     phi : list
997         Lista con las fases de interaccion de las dos cadenas de Kitaev.
998     b : float
999         Fuerza de interaccion entre las dos cavidades cuanticas.
1000     Nb : int
1001         Numero de truncamiento en la base de Fock.
1002
1003     Returns
1004     -----
1005     scipy.sparse.csr_matrix
1006         Matriz Hamiltoniana del sistema de interaccion entre dos
1007         cadenas de Kitaev y dos cavidades cuanticas, en formato sparse.
1008     """
1009
1010     H1 = H1_lamb_t(delta[0], omega[0], phi[0], lambd[0], 0, 0, Nb, "
constant")
1011     H2 = H1_lamb_t(delta[1], omega[1], phi[1], lambd[1], 0, 0, Nb, "
constant")
1012
1013     dim = H1.shape[0]
1014
1015     H1 = sp.kron(H1, id(dim))
1016     H2 = sp.kron(id(dim), H2)
1017
1018     HQubits = H1 + H2
1019
1020     a1 = sp.kron(sp.kron(a_op(Nb+1), id(2)), id(dim))
1021     a2 = sp.kron(id(dim), sp.kron(a_op(Nb+1), id(2)))
1022
1023     HInter = b * (dag(a1)@a2 + dag(a2)@a1)
1024
1025     return HQubits + HInter
1026
1027
1028 def solve2Qubits(delta, omega, lambd, phi, b, Nb):
1029     H = H_2Qubits(delta, omega, lambd, phi, b, Nb)
1030     if lambd[0] == 0 and lambd[1] == 0:
1031         E, V = sp.linalg.eigsh(H, 2, which = "SA", return_eigenvectors=
True, tol = 1e-5)
1032     else:
1033         E, V = sp.linalg.eigsh(H, 2, which = "SA", return_eigenvectors=
True)
1034     idx = np.argsort(E)
1035     E = E[idx]
1036     V = V[:, idx]
1037     GS = V[:,0]
1038     dim = 2*(Nb+1)
1039     o_sx1 = sp.kron(sp.kron(id(Nb+1), pauliX()), id(dim))
1040     o_sx2 = sp.kron(id(dim), sp.kron(id(Nb+1), pauliX()))
1041     o_sy1 = sp.kron(sp.kron(id(Nb+1), pauliY()), id(dim))
1042     o_sy2 = sp.kron(id(dim), sp.kron(id(Nb+1), pauliY()))
1043     o_sz1 = sp.kron(sp.kron(id(Nb+1), pauliZ()), id(dim))
1044     o_sz2 = sp.kron(id(dim), sp.kron(id(Nb+1), pauliZ()))
1045     o_a1 = sp.kron(sp.kron(a_op(Nb+1), id(2)), id(dim))
1046     o_a2 = sp.kron(id(dim), sp.kron(a_op(Nb+1), id(2)))

```

```

1047
1048     a1 = (dag(GS)@o_a1@GS).real
1049     a2 = (dag(GS)@o_a2@GS).real
1050     n1 = (dag(GS)@(dag(o_a1)@o_a1)@GS).real
1051     n2 = (dag(GS)@(dag(o_a2)@o_a2)@GS).real
1052     n12 = (dag(GS)@(dag(o_a1)@o_a2)@GS).real
1053     n21 = (dag(GS)@(dag(o_a2)@o_a1)@GS).real
1054     sx1 = (dag(GS)@o_sx1@GS).real
1055     sx2 = (dag(GS)@o_sx2@GS).real
1056     sy1 = (dag(GS)@o_sy1@GS).real
1057     sy2 = (dag(GS)@o_sy2@GS).real
1058     sz1 = (dag(GS)@o_sz1@GS).real
1059     sz2 = (dag(GS)@o_sz2@GS).real
1060     sxsx = (dag(GS)@(o_sx1@o_sx2)@GS).real
1061     xsxy = (dag(GS)@(1j*o_sx1@o_sy2)@GS).real
1062     xsxz = (dag(GS)@(o_sx1@o_sz2)@GS).real
1063     sysx = (dag(GS)@(1j*o_sy1@o_sx2)@GS).real
1064     sysy = (dag(GS)@(o_sy1@o_sy2)@GS).real
1065     sysz = (dag(GS)@(1j*o_sy1@o_sz2)@GS).real
1066     szsx = (dag(GS)@(o_sz1@o_sx2)@GS).real
1067     szsy = (dag(GS)@(1j*o_sz1@o_sy2)@GS).real
1068     szsz = (dag(GS)@(o_sz1@o_sz2)@GS).real
1069
1070     ds = xr.Dataset({
1071         "E": (["idx"], E.real),
1072         "sx": (["r"], [sx1, sx2]),
1073         "sy": (["r"], [sy1, sy2]),
1074         "sz": (["r"], [sz1, sz2]),
1075         "a": (["r"], [a1, a2]),
1076         "number": (["r"], [n1, n2]),
1077         "n12": n12,
1078         "n21": n21,
1079         "sx_mult": (["dir"], [sxsx, xsxy, xsxz]),
1080         "sy_mult": (["dir"], [sysx, sysy, sysz]),
1081         "sz_mult": (["dir"], [szsx, szsy, szsz])
1082     },
1083     coords = {
1084         "delta": delta[0],
1085         "omega": omega[0],
1086         "lambda(1)": lambd[0],
1087         "lambda(2)": lambd[1],
1088         "phi": phi[0],
1089         "b": b,
1090         "idx": np.arange(len(E)),
1091         "r": np.arange(2),
1092         "dir": np.arange(1, 4)
1093     },
1094     attrs = {
1095         "Nb": Nb
1096     })
1097
1098     return ds
1099
1100
1101 def H10dd(delta, omega, lambd, phi, Nb):
1102     """
1103     Devuelve la matriz Hamiltoniana del sistema de interaccion
1104     en un solo sitio entre la cavidad cuantica y la Cadena de Kitaev,

```

```

1105     donde no se limita al subespacio de estados pares de la cadena.
1106
1107     Parameters
1108     -----
1109     delta : float
1110         Gap de energia de la Cadena de Kitaev.
1111     omega : float
1112         Frecuencia/energia de la cavidad cuantica.
1113     lambd : float
1114         Fuerza de acoplamiento entre la Cadena de Kitaev y la cavidad
1115         cuantica.
1116     phi : float
1117         Fase de la interaccion.
1118     Nb : int
1119         Numero de truncamiento en la base de Fock.
1120
1121     Returns
1122     -----
1123     scipy.sparse.csr_matrix
1124         Matriz Hamiltoniana del sistema de interaccion en formato sparse
1125
1126     """
1127     a = a_op(Nb + 1)
1128
1129     m = id(4) - sp.kron(pauliX(), pauliX())
1130
1131     HField = omega * sp.kron(dag(a)@a, id(4))
1132
1133     HQubit = -delta * sp.kron(id(Nb + 1), (sp.kron(pauliZ(), id(2)) + \
1134                                             sp.kron(id(2), pauliZ())))
1135
1136     HInter = 0.5 * lambd * np.exp(-1j * phi) * sp.kron(dag(a), m) + \
1137              0.5 * lambd * np.exp(1j * phi) * sp.kron(a, m)
1138
1139     return HQubit + HField + HInter
1140
1141 def H2QubitsOdd(delta, omega, lambd, phi, b, Nb):
1142     """
1143     Devuelve la matriz Hamiltoniana del sistema de interaccion entre dos
1144     cadenas de Kitaev y dos cavidades cuanticas, considerando
1145     una interaccion en un solo sitio entre cada cadena y su respectiva
1146     cavidad cuantica. La matriz Hamiltoniana es independiente del tiempo
1147
1148     La interaccion entre los dos sistemas se considera a traves de un
1149     intercambio de excitaciones entre las dos cavidades cuanticas.
1150     Esta funcion no limita al subespacio de estados pares de la cadena.
1151
1152     Parameters
1153     -----
1154     delta : list
1155         Lista con los gaps de energia de las dos cadenas de Kitaev.
1156     omega : list
1157         Lista con las frecuencias/energias de las dos cavidades
1158         cuanticas.
1159     lambd : list
1160         Lista con las fuerzas de acoplamiento de las dos cadenas de
1161         Kitaev.
1162     phi : list

```

```

1159     Lista con las fases de interaccion de las dos cadenas de Kitaev.
1160     b : float
1161         Fuerza de interaccion entre las dos cavidades cuanticas.
1162     Nb : int
1163         Numero de truncamiento en la base de Fock.
1164
1165     Returns
1166     -----
1167     scipy.sparse.csr_matrix
1168         Matriz Hamiltoniana del sistema de interaccion entre dos
1169         cadenas de Kitaev y dos cavidades cuanticas, en formato sparse.
1170     """
1171
1172     H1 = H1Odd(delta[0], omega[0], lambd[0], phi[0], Nb)
1173     H2 = H1Odd(delta[1], omega[1], lambd[1], phi[1], Nb)
1174
1175     dim = H1.shape[0]
1176
1177     H1 = sp.kron(H1, id(dim))
1178     H2 = sp.kron(id(dim), H2)
1179
1180     HQubits = H1 + H2
1181
1182     a1 = sp.kron(sp.kron(a_op(Nb+1), id(4)), id(dim))
1183     a2 = sp.kron(id(dim), sp.kron(a_op(Nb+1), id(4)))
1184
1185     HInter = b * (dag(a1)@a2 + dag(a2)@a1)
1186
1187     return HQubits + HInter

```

Bibliografía

- [1] M. Möller y C. Vuik (2017). On the impact of quantum computing technology on future developments in high-performance scientific computing. *Ethics Inf. Technol.* **19**:253-269. DOI: [10.1007/s10676-017-9438-0](https://doi.org/10.1007/s10676-017-9438-0).
- [2] S. S. Gill, A. Kumar, H. Singh, M. Singh, K. Kaur, M. Usman y R. Buyya (2022). Quantum computing: A taxonomy, systematic review and future directions. *Softw.: Pract. Exper.* **52**(1):66-114. DOI: [10.1002/spe.3039](https://doi.org/10.1002/spe.3039).
- [3] M. H. Freedman, A. Kitaev y Z. Wang (2002). Simulation of Topological Field Theories by Quantum Computers. *Commun. Math. Phys.* **227**(3):587-603. DOI: [10.1007/s002200200635](https://doi.org/10.1007/s002200200635).
- [4] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman y S. Das Sarma (2008). Non-Abelian anyons and topological quantum computation. *Rev. Mod. Phys.* **80** (3):1083-1159. DOI: [10.1103/RevModPhys.80.1083](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1083).
- [5] A. Kitaev (2003). Fault-tolerant Quantum Computation by Anyons. *Ann.Phys.* **303**(1):2-30. DOI: [10.1016/S0003-4916\(02\)00018-0](https://doi.org/10.1016/S0003-4916(02)00018-0).
- [6] A. Roy y D. P. DiVincenzo (2017). Topological Quantum Computing. [URL](#).
- [7] J. W. Z. Lau, K. H. Lim, H. Shrotriya y L. C. Kwek (2022). NISQ computing: where are we and where do we go? *AAPPS Bull.* **32**(1):27. DOI: [10.1007/s43673-022-00058-z](https://doi.org/10.1007/s43673-022-00058-z).
- [8] J. Preskill (2018). Quantum Computing in the NISQ era and beyond. *Quantum.* **2**:79. DOI: [10.22331/q-2018-08-06-79](https://doi.org/10.22331/q-2018-08-06-79).
- [9] D. Castelvecchi (2025). Microsoft claims quantum-computing breakthrough—but some physicists are sceptical. *Nature.* **638**(8052):872-872. DOI: [10.1038/d41586-025-00527-z](https://doi.org/10.1038/d41586-025-00527-z).
- [10] C. Bolgar (2025). El chip Majorana 1 de Microsoft abre un nuevo camino para la computación cuántica - Source LATAM. [URL](#).
- [11] J. Garay (2025). ¿Qué es ese nuevo estado de la materia del chip cuántico Majorana 1 de Microsoft? [URL](#).
- [12] M. Leijnse y K. Flensberg (2012). Introduction to topological superconductivity and Majorana fermions. *Semicond. Sci. Technol.* **27**(12):124003. DOI: [10.1088/0268-1242/27/12/124003](https://doi.org/10.1088/0268-1242/27/12/124003).
- [13] V. Lahtinen y J. Pachos (2017). A Short Introduction to Topological Quantum Computation. *Scipost Phys.* **3**(3). DOI: [10.21468/scipostphys.3.3.021](https://doi.org/10.21468/scipostphys.3.3.021).
- [14] A. Y. Kitaev (2001). Unpaired Majorana fermions in quantum wires. *Phys. Usp.* **44**(10S):131-136. DOI: [10.1070/1063-7869/44/10s/s29](https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10s/s29).
- [15] F. J. Gómez-Ruiz, J. J. Mendoza-Arenas, F. J. Rodríguez, C. Tejedor y L. Quiroga (2018). Universal two-time correlations, out-of-time-ordered correlators, and Leggett-Garg inequality violation by edge Majorana fermion qubits. *Phys. Rev. B.* **97**(23). DOI: [10.1103/physrevb.97.235134](https://doi.org/10.1103/physrevb.97.235134).
- [16] M. Greiter, V. Schnells y R. Thomale (2014). The 1D Ising model and the topological phase of the Kitaev chain. *Ann. Phys.* **351**:1026-1033. DOI: [10.1016/j.aop.2014.08.013](https://doi.org/10.1016/j.aop.2014.08.013).

- [17] C. Li, X. Z. Zhang, G. Zhang y Z. Song (2018). Topological phases in a Kitaev chain with imbalanced pairing. *Phys. Rev. B.* **97**(11). DOI: [10.1103/physrevb.97.115436](https://doi.org/10.1103/physrevb.97.115436).
- [18] S. Manna, N. S. Srivatsa, J. Wildeboer y A. E. B. Nielsen (2020). Quasiparticles as detector of topological quantum phase transitions. *Phys. Rev. Res.* **2**(4). DOI: [10.1103/physrevresearch.2.043443](https://doi.org/10.1103/physrevresearch.2.043443).
- [19] L. Quiroga, F. J. Gómez-Ruiz, I. A. Bocanegra-Garay, F. J. Rodríguez y C. Tejedor (2024). Cavity Control of Topological Qubits: Fusion Rule, Anyon Braiding and Majorana-Schrödinger Cat States. [URL](#).
- [20] M. AbuGhanem y H. Eleuch (2024). NISQ Computers: A Path to Quantum Supremacy. *IEEE Access.* **12**:102941-102961. DOI: [10.1109/access.2024.3432330](https://doi.org/10.1109/access.2024.3432330).
- [21] S. Frolov (2021). Quantum computing's reproducibility crisis: Majorana fermions. *Nature.* **592**(7854):350-352. DOI: [10.1038/d41586-021-00954-8](https://doi.org/10.1038/d41586-021-00954-8).
- [22] F. P. M. Méndez-Córdoba, F. J. Rodríguez, C. Tejedor y L. Quiroga (2023). From edge to bulk: Cavity-induced displacement of topological nonlocal qubits. *Phys. Rev. B.* **107** (12):125104. DOI: [10.1103/PhysRevB.107.125104](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.107.125104).
- [23] M. Rohith, S. Kannan y C. Sudheesh (2023). Homodyne nonclassical area as a nonclassicality indicator. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **56**(5):055501. DOI: [10.1088/1361-6455/acb678](https://doi.org/10.1088/1361-6455/acb678).
- [24] T. Tyc y B. C. Sanders (2004). Operational formulation of homodyne detection. *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**(29):7341-7357. DOI: [10.1088/0305-4470/37/29/010](https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/29/010).
- [25] C.-X. Liu, H. Pan, F. Setiawan, M. Wimmer y J. D. Sau (2023). Fusion protocol for Majorana modes in coupled quantum dots. *Phys. Rev. B.* **108**(8):085437. DOI: [10.1103/PhysRevB.108.085437](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.108.085437).
- [26] C. Kane (2013). Chapter 1 - Topological Band Theory and the Z_2 Invariant. *Topological Insulators*. Ed. por M. Franz y L. Molenkamp. Vol. 6. Contemporary Concepts of Condensed Matter Science. Elsevier, págs. 3-34. DOI: [10.1016/B978-0-444-63314-9.00001-9](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-63314-9.00001-9).
- [27] P. Lévy (2006). Geometric Phases. *Encyclopedia of Mathematical Physics*. Oxford: Academic Press, págs. 528-534. ISBN: 978-0-12-512666-3. DOI: [10.1016/B0-12-512666-2/00321-7](https://doi.org/10.1016/B0-12-512666-2/00321-7).
- [28] Y. B. Band e Y. Avishai (2013). 7 - Approximation Methods. *Quantum Mechanics with Applications to Nanotechnology and Information Science*. Ed. por Y. B. Band e Y. Avishai. Amsterdam: Academic Press, págs. 303-366. ISBN: 978-0-444-53786-7. DOI: [10.1016/B978-0-444-53786-7.00007-1](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53786-7.00007-1).
- [29] S. Gasparinetti, S. Berger, A. A. Abdumalikov, M. Pechal, S. Filipp y A. J. Wallraff (2016). Measurement of a vacuum-induced geometric phase. *Sci. Adv.* **2**(5):e1501732. DOI: [10.1126/sciadv.1501732](https://doi.org/10.1126/sciadv.1501732).
- [30] D. Craig y T. Thirunamachandran (1998). Molecular Quantum Electrodynamics: An Introduction to Radiation-molecule Interactions. Dover Books on Chemistry Series. Dover Publications. ISBN: 9780486402147. [URL](#).
- [31] S. Chaturvedi, M. Sriram y V. Srinivasan (1987). Berry's phase for coherent states. *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**(16):L1071. DOI: [10.1088/0305-4470/20/16/007](https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/16/007).
- [32] K. K. Muminov e Y. Yousefi (2011). Berry phase for coherent states in spin systems. [URL](#).
- [33] S. Berger, M. Pechal, S. Pugnetti, A. Abdumalikov Jr, L. Steffen, A. Fedorov, A. Wallraff y S. Filipp (2012). Geometric phases in superconducting qubits beyond the

- two-level approximation. *Phys. Rev. B.* **85**(22):220502. DOI: [10.1103/PhysRevB.85.220502](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.220502).
- [34] D. P. DiVincenzo (2000). The physical implementation of quantum computation. *Fortschr. Phys.* **48**(9-11):771-783. DOI: [10.1002/1521-3978\(200009\)48:9/11%3C771::AID-PROP771%3E3.0.CO;2-E](https://doi.org/10.1002/1521-3978(200009)48:9/11%3C771::AID-PROP771%3E3.0.CO;2-E).
 - [35] H.-L. Huang, M. Narożniak, F. Liang, Y. Zhao, J. Clark, M. Gong, Y. Wu, S. Wang, J. Lin, Y. Xu et al. (2021). Emulating Quantum Teleportation of a Majorana Zero Mode Qubit. *Phys. Rev. Lett.* **126** (9):090502. DOI: [10.1103/PhysRevLett.126.090502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.090502).
 - [36] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac y P. Zoller (2000). Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems. *Phys. Rev. Lett.* **84** (12):2722-2725. DOI: [10.1103/PhysRevLett.84.2722](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.2722).
 - [37] R. Simon (2000). Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems. *Phys. Rev. Lett.* **84** (12):2726-2729. DOI: [10.1103/PhysRevLett.84.2726](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.2726).
 - [38] Q. Liang, L. Yu, G. Chen y S. Jia (2013). Resonant effect of the strongly-driven Rabi model. *Eur. Phys. J. D.* **67**:1-4. DOI: [10.1140/epjd/e2012-30439-y](https://doi.org/10.1140/epjd/e2012-30439-y).
 - [39] Z.-M. Li y M. Batchelor (2021). Generalized adiabatic approximation to the quantum Rabi model. *Phys. Rev. A.* **104** (3):33712. DOI: [10.1103/PhysRevA.104.033712](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.033712).
 - [40] M. O. Scully y M. S. Zubairy (1997). Quantum Optics. Cambridge University Press. ISBN: 9780511813993. DOI: [10.1017/CB09780511813993](https://doi.org/10.1017/CB09780511813993).
 - [41] M. A. Nielsen e I. L. Chuang (2010). Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press. ISBN: 9781107002173. DOI: [10.1017/CB09780511976667](https://doi.org/10.1017/CB09780511976667).