CUESTIONES Y PROBLEMAS DE ANÁLISIS DIMENSIONAL, CALCULO DE ERRORES Y CONVERSIÓN DE UNIDADES

*Iván Cabria Álvaro (*PTUN*)*
ivan.cabria@uva.es

*Alejandra Granja Del Río (*PAYUD*)*
alejandra.granja@uva.es

Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica
Facultad de Ciencias
Universidad de Valladolid
Paseo Belén 7
Campus Miguel Delibes
47011 Valladolid

Última actualización: 27 de octubre de 2025

Cuestiones y problemas de análisis dimensional, calculo de errores y conversión de unidades

1. La ecuación del movimiento de un muelle es $\vec{F} = -K\vec{x}$, donde $\vec{F}$ es el vector de la fuerza y $\vec{x}$ es el vector de la posición del borde del muelle con respecto al punto de equilibrio. Calcule la dimensión de K.
Solución: $[K] = MT^{-2}$.

La ecuación $\vec{F} = -K\vec{x}$ implica $F\vec{u}_x = -Kx\vec{u}_x$ y de aquí deducimos $F = -Kx$.

Despejamos K y obtenemos: $K = -F/x$. La dimensión de K será:

$$[K] = [-1][F]/[x] = [F]/[x] = MLT^{-2}/L = \boxed{MT^{-2}} \tag{1}$$

2. La fuerza gravitacional entre las masas M y m es $F = GMm/r^2$, donde r es la distancia entre las masas. Calcule la dimensión de la constante de gravitación universal G.
Solución: $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$.

Partiendo de la ecuación $F = GMm/r^2$, deducimos $G = Fr^2/Mm$.

La dimensión de G es:

$$[G] = \frac{[F][r]^2}{[M][m]}. \tag{2}$$

Las dimensiones de F, r, M y m son $[F] = [ma] = MLT^{-2}$, $[r] = L$, $[M] = M$ y $[m] = M$, respectivamente.

Introducimos las dimensiones de F, r, M y m en la ecuación 2 y obtenemos:

$$[G] = \frac{MLT^{-2}L^2}{MM} = \frac{ML^3T^{-2}}{M^2} = \boxed{M^{-1}L^3T^{-2}}. \tag{3}$$

3. La altura h que alcanza un objeto de masa m lanzado verticalmente es $h = v^i m^j/a^k$, donde v y a son una velocidad y una aceleración, respectivamente. Determine por medio del análisis dimensional los valores de i, j y k.

Solución: i=2, j=0 y k=1.

La ecuación $h = v^i m^j / a^k$ implica

$$[h] = \frac{[v]^i [m]^j}{[a]^k}. \tag{4}$$

Las dimensiones de h, v, m y a son $[h] = L$, $[v] = LT^{-1}$, $[m] = M$ y $[a] = LT^{-2}$. Introducimos estas dimensiones en la ecuación anterior y obtenemos:

$$L = \frac{(LT^{-1})^i M^j}{(LT^{-2})^k}. \tag{5}$$

Hacemos los siguientes cálculos de álgebra para simplificar el lado derecho de la ecuación 5:

$$\frac{(LT^{-1})^i M^j}{(LT^{-2})^k} = \frac{L^i T^{-i} M^j}{L^k T^{-2k}} = L^i T^{-i} M^j L^{-k} T^{2k} = L^{i-k} T^{-i+2k} M^j. \tag{6}$$

De las ecuaciones 5 y 6 deducimos:

$$L = L^{i-k} T^{-i+2k} M^j. \tag{7}$$

La ecuación 7 también se puede escribir de la siguiente manera:

$$LT^0 M^0 = L^{i-k} T^{-i+2k} M^j. \tag{8}$$

Comparamos los exponentes de L, T y M a la izquierda con sus exponentes a la derecha de la ecuación 8 y deducimos:

$$\begin{aligned} 1 &= i - k \\ 0 &= -i + 2k \\ 0 &= j \end{aligned} \tag{9}$$

Hemos obtenido $\boxed{j = 0}$. Para obtener k, hacemos los siguientes cálculos:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= i - k \\ 0 &= -i + 2k \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 + 0 = i - i - k + 2k \Rightarrow \boxed{k = 1} \tag{10}$$

Y para obtener i, hacemos estos otros cálculos:

$$\left.\begin{aligned} &0 = -i + 2k \Rightarrow i = 2k \\ &k = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{i = 2} \tag{11}$$

4. El cambio de la presión atmosférica al variar la altura z sobre la superficie de la Tierra, dP/dz, depende de la presión, la densidad del aire ρ y la aceleración de la gravedad g. Halle mediante el análisis dimensional la

ecuación de dP/dz.
Solución: $\dfrac{dP}{dz} = c\rho g$.

Según el enunciado, la forma matemática más sencilla de dP/dz es:

$$\frac{dP}{dz} = c\rho^{\alpha} g^{\beta} , \tag{12}$$

donde c es una constante y, por tanto, $[c] = 1$. Aplicamos el análisis dimensional a la ecuación 12:

$$\frac{dP}{dz} = c\rho^{\alpha} g^{\beta} \Rightarrow \frac{[dP]}{[dz]} = [c][\rho]^{\alpha}[g]^{\beta} \tag{13}$$

Las dimensiones de dz, ρ, y g son, $[dz] = L$, $[\rho] = M/L^3 = ML^{-3}$ y $[g] = LT^{-2}$, respectivamente. La dimensión de $[dP]$ es:

$$[dP] = [P] = [F]/[S] = [ma]/[S] = MLT^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2} \tag{14}$$

Una presión es una fuerza sobre una superficie. De ahí que escribamos $[P] = [F]/[S]$ en la ecuación anterior.

Observe que la dimensión del diferencial de z, dz, es longitud, L, y que la dimensión del diferencial de presión, dP, es la dimensión de una presión. No es correcto igualar dP a una presión P, pero sí es correcto igualar sus dimensiones: $[dP] = [P]$.

Sustituyendo en la ecuación 13 las dimensiones de las correspondientes magnitudes físicas, se obtiene:

$$\frac{ML^{-1}T^{-2}}{L} = (ML^{-3})^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta} \tag{15}$$

El lado izquierdo de 15 es:

$$\frac{ML^{-1}T^{-2}}{L} = ML^{-2}T^{-2} \tag{16}$$

Simplifiquemos el lado derecho de 15:

$$(ML^{-3})^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta} = M^{\alpha}L^{-3\alpha}L^{\beta}T^{-2\beta} = M^{\alpha}L^{-3\alpha+\beta}T^{-2\beta} \tag{17}$$

Introduciendo 16 y 17 en 15, obtenemos:

$$ML^{-2}T^{-2} = M^{\alpha}L^{-3\alpha+\beta}T^{-2\beta} \tag{18}$$

De la ecuación 18, obtenemos un sistema de tres ecuaciones lineales y dos incógnitas, α y β:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \\ -2 &= -3\alpha + \beta \\ -2 &= -2\beta \end{aligned} \tag{19}$$

Las tres ecuaciones no son independientes. De las ecuaciones superior e inferior se deriva la ecuación central:

$$\left.\begin{aligned} 1 = \alpha \Rightarrow -3 = -3\alpha \\ -2 = -2\beta \Rightarrow 1 = \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow -3+1 = -3\alpha+\beta \Rightarrow -2 = -3\alpha+\beta \tag{20}$$

Por lo tanto, tenemos un sistema de dos ecuaciones independientes y dos incógnitas:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \\ -2 &= -2\beta \end{aligned} \tag{21}$$

De estas ecuaciones deducimos $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. Por lo tanto, la ecuación será:

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = c\rho g}\,. \tag{22}$$

El análisis dimensional no da como resultado el valor concreto de la constante adimensional c. Podría ser un número positivo o negativo. Podría ser un número entero o un número fraccionario que no sea entero, o un número real que no sea fraccionario. En la ecuación exacta, $c = -1$.

5. Dada la ecuación $a^2 = bmv^2 + a$, donde m es una masa y v es una velocidad, determine las dimensiones de a y b.
Solución: $[a] = 1 y [b] = M^{-1}L^{-2}T^2$.

El lado derecho de la ecuación

$$a^2 = bmv^2 + a \tag{23}$$

tiene dos términos: bmv^2 y a. El análisis dimensional aplicado al primer término, bmv^2, nos da:

$$a^2 = bmv^2 + a \Rightarrow [a]^2 = [b][m][v]^2 \tag{24}$$

Y aplicado al segundo término, a, obtenemos:

$$a^2 = bmv^2 + a \Rightarrow [a]^2 = [a] \tag{25}$$

Por otra parte, los dos términos del lado derecho de la ecuación 23 deben tener la misma dimensión. Por tanto:

$$a^2 = bmv^2 + a \Rightarrow [b][m][v]^2 = [a] \tag{26}$$

Esto significa que según el análisis dimensional existen tres ecuaciones: 24-26. La ecuación 25 implica que $\boxed{[a] = 1}$.

Si incluimos las dimensiones de m, v y a en la ecuación 24, entonces obtenemos la dimensión de b:

$$\left.\begin{aligned} [m] &= M \\ [v] &= LT^{-1} \\ [a] &= 1 \\ [a]^2 &= [b][m][v]^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = [b]M(LT^{-1})^2 = [b]ML^2T^{-2} \Rightarrow \boxed{[b] = M^{-1}L^{-2}T^2} \tag{27}$$

6. Deduzca por medio del análisis dimensional una expresión que relacione la presión de un fluido con su densidad y su velocidad de movimiento.
Solución: $P = c\rho v^2$.

Según el enunciado, la forma matemática más sencilla de $P = P(\rho, v)$ es:

$$P = c\rho^{\alpha} v^{2\beta} \,, \tag{28}$$

donde c es una constante y, por tanto, $[c] = 1$. Aplicamos el análisis dimensional a la ecuación 28:

$$P = c\rho^{\alpha} v^{2\beta} \Rightarrow [P] = [c][\rho]^{\alpha}[v]^{2\beta} \,. \tag{29}$$

Las dimensiones de ρ y v son $[\rho] = M/L^3 = ML^{-3}$ y $[v] = LT^{-1}$, respectivamente. La dimensión de $[P]$ es:

$$[P] = [F]/[S] = [ma]/[S] = MLT^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2} \,. \tag{30}$$

Incluimos las dimensiones de P, ρ, v y c en la ecuación 29:

$$\left.\begin{array}{l} [P] = ML^{-1}T^{-2} \\ [c] = 1 \\ [\rho] = ML^{-3} \\ [v] = LT^{-1} \\ [P] = [c][\rho]^{\alpha}[v]^{2\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow ML^{-1}T^{-2} = (ML^{-3})^{\alpha}(LT^{-1})^{2\beta} = M^{\alpha}L^{-3\alpha}L^{2\beta}T^{-2\beta} = M^{\alpha}L^{-3\alpha+2\beta}T^{-2\beta} \tag{31}$$

De la ecuación 31 deducimos un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas, α y β:

$$ML^{-1}T^{-2} = M^{\alpha}L^{-3\alpha+2\beta}T^{-2\beta} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha \\ -1 = -3\alpha + 2\beta \\ -2 = -2\beta \end{cases} \tag{32}$$

La ecuación central se deriva de las ecuaciones superior e inferior:

$$\left.\begin{array}{r} 1 = \alpha \Rightarrow -3 = -3\alpha \\ -2 = -2\beta \Rightarrow 2 = 2\beta \end{array}\right\} \Rightarrow -3 + 2 = -3\alpha + 2\beta \Rightarrow -1 = -3\alpha + 2\beta \tag{33}$$

Por lo tanto, solo tenemos dos ecuaciones lineales independientes y dos incógnitas:

$$1 = \alpha \qquad\qquad -2 = -2\beta \tag{34}$$

Las soluciones son $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. Finalmente, la presión en función de la densidad y la velocidad será:

$$\boxed{P = c\rho v^2} \,. \tag{35}$$

7. Suponemos que el periodo T de un péndulo depende de la longitud l del péndulo, la aceleración de la gravedad g y la masa m del péndulo. Determine mediante el análisis dimensional la ecuación del periodo T del péndulo.

Explique si la masa del péndulo interviene en la ecuación o no.

Solución: $T = c\sqrt{l/g}$.

El periodo del péndulo es una función de l, g y m. La forma más sencilla de esa función es:

$$T = cl^{\alpha} g^{\beta} m^{\gamma} \ , \tag{36}$$

donde c es una constante adimensional, lo que implica que $[c] = 1$. Si aplicamos el análisis dimensional a la ecuación 36, obtenemos:

$$T = cl^{\alpha} g^{\beta} m^{\gamma} \Rightarrow [T] = [c][l]^{\alpha}[g]^{\beta}[m]^{\gamma} \ . \tag{37}$$

Introducimos las dimensiones de T, l, g y m en la ecuación 37:

$$\left.\begin{aligned} &[T] = T \\ &[c] = 1 \\ &[l] = L \\ &[g] = LT^{-2} \\ &[m] = M \\ &[T] = [c][l]^{\alpha}[g]^{\beta}[m]^{\gamma} \ . \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = L^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta} M^{\gamma} = M^{\gamma} L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta} \Rightarrow M^0 L^0 T = M^{\gamma} L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta} \tag{38}$$

Se deducen tres ecuaciones lineales a partir de la ecuación 38:

$$M^0 L^0 T = M^{\gamma} L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \gamma \\ 0 = \alpha + \beta \\ 1 = -2\beta \end{cases} \tag{39}$$

Las soluciones del sistema de tres ecuaciones lineales independientes, ecuación 39, son $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$ y $\gamma = 0$. Por lo tanto, la función será:

$$\boxed{T = cl^{1/2} g^{-1/2} = c\sqrt{\frac{l}{g}}} \tag{40}$$

8. Cuando un fluido de coeficiente de viscosidad η circula por una tubería de sección A, con velocidad $\vec{v}$, la fórmula que relaciona las magnitudes anteriores con la distancia h entre dos capas de un fluido es: $\vec{F} = \eta(\Delta\vec{v}/\Delta h)A$. Calcule las dimensiones del coeficiente de viscosidad η. La sección A es una superficie.
Solución: $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$.

La ecuación del enunciado contiene vectores. Podemos usar los módulos de los vectores o una de las componentes de los vectores. Vamos a usar los módulos: $F = |\vec{F}|$ y $v = |\vec{v}|$. De la ecuación del enunciado del problema, deducimos:

$$\vec{F} = \eta(\Delta\vec{v}/\Delta h)A \Rightarrow F = \eta(\Delta v/\Delta h)A \Rightarrow [F] = [\eta]\frac{[\Delta v]}{[\Delta h]}[A] \ . \tag{41}$$

Despejamos la dimensión de η:

$$[F] = [\eta]\frac{[\Delta v]}{[\Delta h]}[A] \qquad \Rightarrow [F]\frac{[\Delta h]}{[A][\Delta v]} = [\eta] \qquad \Rightarrow [\eta] = [F]\frac{[\Delta h]}{[A][\Delta v]}\ . \tag{42}$$

Introducimos las dimensiones de las magnitudes físicas del lado derecho de la ecuación 42:

$$\left.\begin{array}{l} [F] = [ma] = MLT^{-2} \\ [\Delta h] = L \\ [\Delta v] = LT^{-1} \\ [A] = L^2 \\ [\eta] = [F]\dfrac{[\Delta h]}{[A][\Delta v]}\ . \end{array}\right\} \Rightarrow [\eta] = MLT^{-2}\frac{L}{L^2LT^{-1}} = MLT^{-2}LL^{-3}T = ML^{-1}T^{-1}\ . \tag{43}$$

Por lo tanto, las dimensiones del coeficiente de viscosidad η son:

$$\boxed{[\eta] = ML^{-1}T^{-1}} \tag{44}$$

9. Compruebe si es dimensionalmente correcta o no la ecuación que se propone para describir la velocidad de las ondas superficiales, de longitud de onda λ, en líquidos de densidad ρ y de tensión superficial γ, bajo la influencia de la gravedad g:

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}$$

La tensión superficial γ es una fuerza/longitud.
Solución: La ecuación es dimensionalmente correcta.

La ecuación del enunciado tiene tres términos: Uno a la izquierda y dos a la derecha. Los tres términos deben tener las mismas dimensiones. El primer término es v^2. Sus dimensiones son $[v^2] = L^2T^{-2}$. Los otros dos términos deben tener esas dimensiones. Vamos a calcular las dimensiones del término $g\lambda/2\pi$.

Las dimensiones de g son $[g] = LT^{-2}$. Una longitud de onda tiene dimensión de longitud. Por tanto, $[\lambda] = L$. Las dimensiones de 2π son $[2\pi] = 1$.

Introduciendo las dimensiones de las magnitudes físicas en el término $g\lambda/2\pi$, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} [g] = LT^{-2} \\ [\lambda] = L \\ [2\pi] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{[g][\lambda]}{[2\pi]} = \frac{LT^{-2}L}{1} = L^2T^{-2} \tag{45}$$

La ecuación 45 significa que v^2 y el término $g\lambda/2\pi$ tienen las mismas dimensiones.

Vamos a calcular las dimensiones del término $2\pi\gamma/\rho\lambda$. Las dimensiones de ρ son $[\rho] = ML^{-3}$. La tensión superficial γ es una fuerza/longitud. Por lo tanto, las dimensiones de γ son:

$$[\gamma] = \frac{[F]}{[l]} = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2} \tag{46}$$

Incluimos las dimensiones de las magnitudes físicas en el término $2\pi\gamma/\rho\lambda$:

$$\left.\begin{array}{l}[2\pi] = 1\\ [\gamma] = MT^{-2}\\ [\rho] = ML^{-3}\\ [\lambda] = L\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{[2\pi][\gamma]}{[\rho][\lambda]} = \frac{1MT^{-2}}{ML^{-3}L} = \frac{T^{-2}}{L^{-3}L} = \frac{T^{-2}}{L^{-2}} = L^2T^{-2} \tag{47}$$

La ecuación 47 significa que v^2 y el término $2\pi\gamma/\rho\lambda$ tienen las mismas dimensiones.

Hemos comprobado que los tres términos tienen las misma dimensiones. Esto significa que la ecuación del enunciado del problema $\boxed{\text{es dimensionalmente consistente}}$.

10. El radio R de la onda expansiva de una explosión depende de la energía liberada U, de la densidad ρ del medio en que tiene lugar y del tiempo t. Halle mediante análisis dimensional R=$R(U,\rho,t)$.
Solución: $R = cU^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5}$.

La forma matemática más sencilla de $R(U,\rho,t)$ es:

$$R = cU^\alpha\rho^\beta t^\gamma \tag{48}$$

Aplicando el análisis dimensional a la ecuación 48, obtenemos:

$$R = cU^\alpha\rho^\beta t^\gamma \Rightarrow [R] = [c][U]^\alpha[\rho]^\beta[t]^\gamma \tag{49}$$

Las dimensiones del radio R, la constante c, la energía U, la densidad ρ y el tiempo t son $[R] = L$, $[c] = 1$, $[U] = [F\Delta r] = [mv^2] = ML^2T^{-2}$, $[\rho] = ML^{-3}$ y $[t] = T$, respectivamente. Introducimos estas dimensiones en la ecuación 49 y hacemos algunos cálculos de álgebra:

$$\left.\begin{array}{l}[R] = L\\ [c] = 1\\ [U] = ML^2T^{-2}\\ [\rho] = ML^{-3}\\ [t] = T\\ [R] = [c][U]^\alpha[\rho]^\beta[t]^\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow L = (ML^2T^{-2})^\alpha(ML^{-3})^\beta T^\gamma = M^\alpha L^{2\alpha}T^{-2\alpha}M^\beta L^{-3\beta}T^\gamma \tag{50}$$

Seguimos haciendo cálculos de álgebra en la ecuación 50:

$$L = M^\alpha L^{2\alpha}T^{-2\alpha}M^\beta L^{-3\beta}T^\gamma = M^{\alpha+\beta}L^{2\alpha-3\beta}T^{-2\alpha+\gamma} \Rightarrow M^0L^1T^0 = M^{\alpha+\beta}L^{2\alpha-3\beta}T^{-2\alpha+\gamma} \tag{51}$$

De la ecuación 51 se deducen tres ecuaciones:

$$M^0 L^1 T^0 = M^{\alpha+\beta} L^{2\alpha-3\beta} T^{-2\alpha+\gamma} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha+\beta \\ 1 = 2\alpha-3\beta \\ 0 = -2\alpha+\gamma \end{cases} \tag{52}$$

La ecuación 52 es un sistema de tres ecuaciones lineales independientes. Calculamos el valor de α:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha+\beta \Rightarrow 0 = 3\alpha+3\beta \\ 1 = 2\alpha-3\beta \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 5\alpha \Rightarrow \alpha = +1/5 \tag{53}$$

Calculamos el valor de β:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha+\beta \Rightarrow \beta = -\alpha \\ \alpha = 1/5 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = -1/5 \tag{54}$$

Finalmente, calculamos el valor de γ:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -2\alpha+\gamma \Rightarrow \gamma = 2\alpha \\ \alpha = 1/5 \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma = +2/5 \tag{55}$$

Estos resultados implican que la forma matemática de R es:

$$\boxed{R = cU^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5}} \tag{56}$$

11. Calcule las dimensiones de $\frac{dx}{dt}$, ∇^2, $\nabla^2\rho$, $\frac{\nabla^2\rho}{\rho}$ y $\int \rho(\vec{r})dV$. Calcule las dimensiones de a y de b en las ecuaciones $\rho = ae^{-b/r}$, $\rho = axln(br)$, $\rho = acos(bv^2/l)$ y $\rho = atan(br)$. ρ es una densidad volumétrica de masa, v es una velocidad y x, l y r son distancias.
Solución: $[\frac{dx}{dt}] = LT^{-1}$, $[\nabla^2] = L^{-2}$, $[\nabla^2\rho] = M/L^5$, $[\frac{\nabla^2\rho}{\rho}] = L^{-2}$, $[\int \rho(\vec{r})dV] = M$, $[a] = ML^{-3}$ y $[b] = L$, $[a] = ML^{-4}$ y $[b] = L^{-1}$, $[a] = ML^{-3}$ y $[b] = L^{-1}T^2$, $[a] = ML^{-3}$ y $[b] = L^{-1}$

Los diferenciales dx y dt tienen dimensiones de longitud y tiempo, respectivamente. Por lo tanto, la dimensión de $\frac{dx}{dt}$ será $\boxed{\left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{L}{T} = LT^{-1}}$.

El laplaciano de una función Φ se define como:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{57}$$

El laplaciano es un operador que actúa sobre una función Φ y se define como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{58}$$

La dimensión del laplaciano de Φ es igual a la dimensión de cualquiera de los tres términos del lado derecho de la ecuación 57:

$$[\nabla^2\Phi] = [\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}] = \frac{[\partial^2\Phi]}{[\partial x^2]} \tag{59}$$

Φ y $\partial^2\Phi$ tienen la misma dimensión. La dimensión de ∂x^2 es la misma que la dimensión de x^2. Por otra parte, $[\nabla^2\Phi] = [\nabla^2][\Phi]$, donde ∇^2 es el operador laplaciano, que está definido en la ecuación 58. Introducimos estas dimensiones dentro de la ecuación 59 y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} [\partial^2\Phi] = [\Phi] \\ [\partial x^2] = [x^2] = L^2 \\ [\nabla^2\Phi] = [\nabla^2][\Phi] \\ [\nabla^2\Phi] = \dfrac{[\partial^2\Phi]}{[\partial x^2]} \end{array}\right\} \Rightarrow [\nabla^2][\Phi] = \frac{[\Phi]}{L^2} = [\Phi]L^{-2} \Rightarrow \boxed{[\nabla^2] = L^{-2}} \tag{60}$$

Para calcular la dimensión de $\nabla^2\rho$, sustituimos Φ por ρ en la ecuación 59:

$$[\nabla^2\rho] = [\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}] = \frac{[\partial^2\rho]}{[\partial x^2]} \tag{61}$$

La dimensión de $\partial^2\rho$ es igual que la dimensión de ρ. Introducimos las dimensiones de $\partial^2\rho$, ρ y ∂x^2 en la ecuación 61 y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} [\partial^2\rho] = [\rho] \\ [\rho] = ML^{-3} \\ [\partial x^2] = [x^2] = L^2 \\ [\nabla^2\rho] = [\nabla^2][\rho] \\ [\nabla^2\rho] = \dfrac{[\partial^2\rho]}{[\partial x^2]} \end{array}\right\} \Rightarrow [\nabla^2][\rho] = \frac{ML^{-3}}{L^2} = ML^{-5} \Rightarrow \boxed{[\nabla^2\rho] = ML^{-5}} \tag{62}$$

Calculamos a continuación la dimensión de $\nabla^2\rho/\rho$:

$$\left.\begin{array}{l} [\nabla^2\rho] = ML^{-5} \\ [\rho] = ML^{-3} \\ [\nabla^2\rho/\rho] = [\nabla^2\rho]/[\rho] \end{array}\right\} \Rightarrow [\nabla^2\rho/\rho] = ML^{-5}/(ML^{-3}) = L^{-5+3} = L^{-2} \Rightarrow \boxed{[\nabla^2\rho/\rho] = L^{-2}} \tag{63}$$

Una integral es una suma de cantidades infinitamente pequeñas, también llamadas diferenciales o infinitésimos. El símbolo de la integral representa dicha suma y el integrando es una de esas cantidades infinitamente pequeñas. Una integral es una suma cuyo sumando es precisamente el integrando. La dimensión de una suma es igual a la dimensión de cualquiera de los términos de esa suma o del sumando de esa suma. Por lo tanto, la dimensión de una integral será la dimensión de su integrando. Aplicamos este análisis a la integral del enunciado:

$$\left[\int \rho(\vec{r})dV\right] = [\rho(\vec{r})dV] = [\rho][dV] \tag{64}$$

La dimensión del diferencial de volumen dV es $[dV] = L^3$ y la dimensión de la densidad es $[\rho] = ML^{-3}$. Introducimos estas dimensiones en la ecuación 64:

$$\left.\begin{aligned} &[\rho] = ML^{-3} \\ &[dV] = L^3 \\ &\left[\int \rho(\vec{r})dV\right] = [\rho][dV] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\int \rho(\vec{r})dV\right] = ML^{-3}L^3 = \boxed{M} \tag{65}$$

Calcularemos las dimensiones de a y de b de las funciones del enunciado de este problema. Comenzamos con la función $\rho = ae^{-b/r}$:

$$\left.\begin{aligned} &[\rho] = ML^{-3} \\ &[e^{-b/r}] = 1 \\ &[\rho] = [ae^{-b/r}] = [a][e^{-b/r}] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{[a] = ML^{-3}} \tag{66}$$

El argumento de una función exponencial debe ser adimensional. Por consiguiente, $[-b/r] = 1$, y obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &[r] = L \\ &[-1] = 1 \\ &[-b/r] = 1 \Rightarrow [-1][b]/[r] = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [b]/L = 1 \Rightarrow \boxed{[b] = L} \tag{67}$$

Aplicamos el análisis dimensional a la función $\rho = axln(br)$:

$$\left.\begin{aligned} &[\rho] = ML^{-3} \\ &[x] = L \\ &[ln(br)] = 1 \\ &[\rho] = [axln(br)] \end{aligned}\right\} \Rightarrow ML^{-3} = [a]L \Rightarrow a = ML^{-4} \tag{68}$$

El argumento de una función logaritmo también es adimensional. En este caso, el producto br debe ser adimensional y obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &[r] = L \\ &[br] = 1 \Rightarrow [b][r] = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [b]L = 1 \Rightarrow \boxed{[b] = L^{-1}} \tag{69}$$

Aplicamos el análisis dimensional a la función $\rho = acos(bv^2/l)$:

$$\left.\begin{aligned} &[\rho] = ML^{-3} \\ &[cos(bv^2/l)] = 1 \\ &[\rho] = [acos(bv^2/l)] = [a][cos(bv^2/l)] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{[a] = ML^{-3}} \tag{70}$$

También el argumento de una función trigonométrica es adimensional, en este caso $cos(bv^2/l)$. Por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} &[v] = LT^{-1} \\ &[l] = L \\ &[bv^2/l] = 1 \Rightarrow [b][v]^2/[l] = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [b]L^2T^{-2}/L = 1 \Rightarrow [b]LT^{-2} = 1 \Rightarrow \boxed{[b] = L^{-1}T^2} \tag{71}$$

Finalmente, aplicamos el análisis dimensional a la función $\rho = atan(br)$:

$$\left.\begin{array}{l}[\rho] = ML^{-3}\\ [tan(br)] = 1\\ [\rho] = [atan(br)] = [a][tan(br)]\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{[a] = ML^{-3}} \tag{72}$$

La función tangente también es una función trigonométrica y, por tanto, su argumento es adimensional. Haciendo unos cálculos de álgebra, obtenemos la dimensión de b:

$$\left.\begin{array}{l}[r] = L\\ [br] = 1 \Rightarrow [b][r] = 1\end{array}\right\} \Rightarrow [b]L = 1 \Rightarrow \boxed{[b] = L^{-1}} \tag{73}$$

12. La ecuación de van der Waals de un gas es $(P + n^2a/V^2)(V - nb) = nRT$, donde n es el número de moles, R es la constante de los gases ideales, P es la presión, V es el volumen y T es la temperatura. Sabiendo que esta ecuación es dimensionalmente correcta, calcule las dimensiones de a y b.
Solución: $[a] = ML^5T^{-2}N^{-2}$, $[b] = L^3N^{-1}$.

A la izquierda de la ecuación de van der Waals tenemos un producto de dos factores. El primer factor es una suma: $P + n^2a/V^2$. Los dos términos de esta suma deben tener la misma dimensión. Por tanto:

$$P + n^2a/V^2 \Rightarrow [P] = [n^2a/V^2] = [n]^2[a]/[V]^2 \Rightarrow [a] = [P][V]^2/[n]^2 \tag{74}$$

Teniendo en cuenta la dimensión de la presión, del volumen y del número de moles, obtenemos la dimensión de a:

$$\left.\begin{array}{l}[P] = [F]/[S] = MLT^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2}\\ [V] = L^3\\ [n] = N\\ [a] = [P][V]^2/[n]^2\end{array}\right\} \Rightarrow [a] = ML^{-1}T^{-2}L^6/N^2 \Rightarrow \boxed{[a] = ML^5T^{-2}N^{-2}} \tag{75}$$

El segundo factor es una resta: $V - nb$. Los dos términos de esta resta deben tener la misma dimensión. Por tanto:

$$V - nb \Rightarrow [V] = [nb] = [n][b] \qquad \Rightarrow [b] = [V]/[n] \tag{76}$$

La dimensión de b se calcula a partir de la ecuación 76:

$$\left.\begin{array}{l}[V] = L^3\\ [n] = N\\ [b] = [V]/[n]\end{array}\right\} \Rightarrow [b] = L^3/N \qquad \Rightarrow \boxed{[b] = L^3N^{-1}} \tag{77}$$

1.13 Determine mediante análisis dimensional los tres términos de la ecuación del movimiento rectilíneo del espacio recorrido $s(t)$, sabiendo que depende de $s(0)$, t, $v(0)$ y a.

Solución: $s(t) = c_1 s(0) + c_2 t v(0) + c_3 t^2 a$.

La forma matemática más sencilla de cada uno de los tres términos de $s(t)$ es:

$$c_i s(0)^{\alpha_i} t^{\beta_i} v(0)^{\gamma_i} a^{\delta_i} \ , \tag{78}$$

donde i=1-3. Cada uno de los tres términos debe tener la misma dimensión que $s(t)$ y, por lo tanto:

$$[s(t)] = [c_i][s(0)]^{\alpha_i}[t]^{\beta_i}[v(0)]^{\gamma_i}[a]^{\delta_i} \ , \tag{79}$$

Si tenemos en cuenta las dimensiones de cada magnitud física de la ecuación 79 y que los coeficientes c_i son adimensionales, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &[s(t)] = L \\ &[c_i] = 1 \\ &[s(0)] = L \\ &[t] = T \\ &[v(0)] = LT^{-1} \\ &[a] = LT^{-2} \\ &[s(t)] = [c_i][s(0)]^{\alpha_i}[t]^{\beta_i}[v(0)]^{\gamma_i}[a]^{\delta_i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow L = L^{\alpha_i} T^{\beta_i} (LT^{-1})^{\gamma_i} (LT^{-2})^{\delta_i} \tag{80}$$

Continuamos haciendo cálculos de álgebra, partiendo de la ecuación 80:

$$L = L^{\alpha_i} T^{\beta_i} (LT^{-1})^{\gamma_i} (LT^{-2})^{\delta_i} \Rightarrow L^1 T^0 = L^{\alpha_i+\gamma_i+\delta_i} T^{\beta_i-\gamma_i-2\delta_i} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_i + \gamma_i + \delta_i \\ 0 = \beta_i - \gamma_i - 2\delta_i \end{cases} \tag{81}$$

Hemos deducido un sistema de dos ecuaciones y cuatro incógnitas: α_i, β_i, γ_i y δ_i. La solución de este sistema está indeterminada. Hay infinitas soluciones. Cada solución depende del valor arbitrario que asignemos a dos de las incógnitas. Haremos y explicaremos tres elecciones de las incógnitas α_i y β_i.

Elegimos $\alpha_i = 1$ y $\beta_i = 0$. Esta elección implica:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i = 1 \\ &1 = \alpha_i + \gamma_i + \delta_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1 = 1 + \gamma_i + \delta_i \Rightarrow 0 = \gamma_i + \delta_i \tag{82}$$

$$\left.\begin{aligned} &\beta_i = 0 \\ &0 = \beta_i - \gamma_i - 2\delta_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = 0 - \gamma_i - 2\delta_i \Rightarrow 0 = -\gamma_i - 2\delta_i \tag{83}$$

De las dos últimas ecuaciones, deducimos:

$$\left.\begin{aligned} &0 = \gamma_i + \delta_i \\ &0 = -\gamma_i - 2\delta_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = \gamma_i - \gamma_i + \delta_i - 2\delta_i \Rightarrow 0 = -\delta_i \Rightarrow \delta_i = 0 \tag{84}$$

El exponente γ_i viene dado por:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_i = 0 \\ &0 = \gamma_i + \delta_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma_i = 0 \tag{85}$$

Por lo tanto, el primer término sería:

$$\boxed{c_1 s(0)} \tag{86}$$

La segunda elección consiste en $\alpha_i = 0$ y $\beta_i = 1$. Esta segunda elección implica:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i = 0 \\ 1 = \alpha_i + \gamma_i + \delta_i \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 0 + \gamma_i + \delta_i \Rightarrow 1 = \gamma_i + \delta_i \tag{87}$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_i = 1 \\ 0 = \beta_i - \gamma_i - 2\delta_i \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 1 - \gamma_i - 2\delta_i \Rightarrow -1 = -\gamma_i - 2\delta_i \tag{88}$$

De las ecuaciones 87 y 88 se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \gamma_i + \delta_i \\ -1 = -\gamma_i - 2\delta_i \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -\delta_i \Rightarrow \delta_i = 0 \tag{89}$$

De las ecuaciones 87 y 89 se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_i = 0 \\ 1 = \gamma_i + \delta_i \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_i = 1 \tag{90}$$

Por lo tanto, el segundo término sería:

$$\boxed{c_2 t v(0)} \tag{91}$$

La tercera elección consiste en $\alpha_i = 0$ y $\beta_i = 2$. Esta tercera elección implica:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_i = 2 \\ 0 = \beta_i - \gamma_i - 2\delta_i \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 2 - \gamma_i - 2\delta_i \Rightarrow -2 = -\gamma_i - 2\delta_i \tag{92}$$

Operamos con las ecuaciones 87 y 92 para deducir δ_i:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \gamma_i + \delta_i \\ -2 = -\gamma_i - 2\delta_i \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = -\delta_i \Rightarrow \delta_i = 1 \tag{93}$$

De las ecuaciones 87 y 93 se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_i = 1 \\ 1 = \gamma_i + \delta_i \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \gamma_i + 1 \Rightarrow \gamma_i = 0 \tag{94}$$

Por lo tanto, el tercer término sería:

$$\boxed{c_3 t^2 a} \tag{95}$$

Hemos explicado solamente tres elecciones de las incógnitas α_i y β_i y calculado los correspondientes términos. Existen infinitas elecciones de las incógnitas α_i y β_i que dan lugar a sus correspondientes términos. Por ejemplo, el par $\alpha_i = 1$ y $\beta_i = 1$ da lugar al término $c_4 s(0) t v(0)^{-1} a$.

Por otra parte, también podríamos haber elegido otros pares de incógnitas: α_i y γ_i, α_i y δ_i, β_i y γ_i, β_i y δ_i, y finalmente, γ_i y δ_i. Todo esto significa que el análisis dimensional puede darnos, en este caso, infinitas soluciones que son dimensionalmente consistentes.

14. Escriba cuántas cifras significativas tienen los siguientes números: 6135, 901, 10609, 0.01, 0.0000000456, 2.00, 10.093, 600, 1500, 145.2, 145.20, 0.0014520, 3051, 30050, 0.1, 0.1000.
Solución: 6135 tiene 4 cifras significativas, 901 tiene 3 y los siguientes tienen 5, 1, 3, 3, 5, 1-3, 1500 tiene 2-4, 4, 5, 5, 3051 tiene 4, 30050 tiene 4-5, 1 y 4.

Usaremos la abreviatura c. s. para designar cifra significativa o cifras significativas.

El número 6135 tiene $\boxed{\text{cuatro}}$ c. s. porque todos sus dígitos son diferentes del cero.

El primer y tercer dígitos de 901 son diferentes de cero y por tanto, son cifras significativas. El dígito 0 de 901 está entre dos dígitos diferentes de cero y por lo tanto, también es una cifra significativa. Por consiguiente, el número 901 tiene $\boxed{\text{tres}}$ c. s.

El primer, tercer y quinto dígitos de 10609 son cifras significativas porque son dígitos diferentes de cero. Los dos dígitos 0 de 10609 también son cifras significativas porque están entre dos dígitos diferentes de cero. Por lo tanto, el número 10609 tiene $\boxed{\text{cinco}}$ c. s.

Sobre el número 0.01. El dígito 1 es una c. s. por ser diferente de cero. Los dos dígitos 0 a la izquierda del dígito 1 no son c. s., porque están a la izquierda del primer dígito que no es cero, el dígito 1 en este caso. Por lo tanto, el número 0.01 tiene $\boxed{\text{una}}$ c. s.

Los dígitos 4, 5 y 6 del número 0.0000000456 son c. s. por ser diferentes de cero. Los dígitos 0 a la izquierda del dígito 4 no son c. s., porque están a la izquierda del primer dígito diferente de cero, el 4 en este caso. Por lo tanto, el número 0.0000000456 tiene $\boxed{\text{tres}}$ c. s.

El número 2.00 tiene $\boxed{\text{tres}}$ c. s.: El dígito 2 es una c. s. y los dos dígitos 0 a la derecha del dígito 2 son c. s., porque en un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último dígito diferente de cero, el 2 en este caso, son c. s.

El número 10.093 tiene $\boxed{\text{cinco}}$ c. s., porque los dígitos 1, 9 y 3 son c. s. por ser diferentes de cero y los dos dígitos 0 también son c. s., porque están entre cifras significativas.

El número 600 tiene $\boxed{\text{entre una y tres}}$ c. s.: El dígito 6 es una c. s. al ser diferente de 0. Los dos ceros finales pueden ser o no c. s., porque 600 es un número entero. El número concreto de c. s. se concretará al conocer el error asociado al número 600.

El número 1500 tiene $\boxed{\text{entre dos y cuatro}}$ c. s.: Los dígitos 1 y 5 son c. s. al ser diferentes de 0. Los dos ceros finales pueden ser o no c. s., porque 1500 es un número entero. El número concreto de c. s. se concretará al conocer el error asociado al número 1500.

El número 145.2 tiene $\boxed{\text{cuatro}}$ c. s. porque todos sus dígitos son diferentes de cero y, por tanto, son c. s.

El número 145.20 tiene $\boxed{\text{cinco}}$ c. s.: Los dígitos 1, 4, 5 y 2 son diferentes de cero y por lo tanto, son c. s. y el dígito 0 es una c. s. porque en un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último dígito diferente de cero, el 2 en este caso, son c. s.

Sobre el número 0.0014520. Los dígitos 0 a la izquierda del primero dígito diferente de cero, el 1 en este caso, no son c. s. Los dígitos 1, 4, 5 y 2 son c. s. por ser diferentes de cero. El dígito 0 que va después del dígito 2 es una c. s. porque en un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último dígito diferente de cero, el 2 en este caso, son c. s. Por tanto, el número 0.0014520 tiene $\boxed{\text{cinco}}$ c. s.

Los dígitos 3, 5 y 1 del número 3051 son c. s. al ser diferentes de cero. El dígito 0 está entre cifras significativas y por lo tanto, también es una c. s. Esto significa que el número 3051 tiene $\boxed{\text{cuatro}}$ c. s.

Los dígitos 3 y 5 del número 30050 son c. s. al ser diferentes de cero. Los dígitos 0 que están entre el 3 y el 5 también son c. s. por estar entre cifras significativas. El 0 final puede ser o no una c. s. porque 30050 es un número entero. Por lo tanto, el número 30050 tiene $\boxed{\text{entre cuatro y cinco}}$ c. s.

Sobre el número 0.1. El dígito 1 es una c. s. por ser diferente de cero. Los dígitos 0 a la izquierda del dígito 1 no son c. s., porque están a la izquierda del primer dígito que no es cero, el dígito 1 en este caso. Por lo tanto, el número 0.1 tiene $\boxed{\text{una}}$ c. s.

El número 0.1000 tiene $\boxed{\text{cuatro}}$ c. s.: El dígito 1 es diferente de cero y por lo tanto, es una c. s. y los tres dígitos 0 son c. s. porque en un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último dígito diferente de cero, el 1 en este caso, son c. s.

15. Escriba cuántas cifras significativas tienen las siguientes medidas y cuántas cifras significativas tienen sus errores: 100.0 ± 0.1 m, 3400 ± 100 m, 0.0005670 ± 0.0000001 s, 0.0003004 ± 0.0000001 s, 0.400 ± 0.001 km. Solución: 4, 2, 4, 4 y 3 cifras significativas. Todos los errores tienen una cifra significativa.

Usaremos la abreviatura c. s. para designar cifra significativa o cifras significativas.

Todos los errores tienen una sola cifra significativa.

La medida 100.0 m tiene $\boxed{\text{cuatro}}$ c. s.: El 1 es una c. s. por ser diferente de cero. Los tres dígitos 0 son c. s., porque en un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último dígito diferente de cero, el 1 en este caso, son c. s.

El número 3400 tiene entre 2 y 4 c. s., porque los dígitos 3 y 4 son diferentes de cero y los dos dígitos 0 pueden ser o no c. s. porque están a la derecha de un número entero. Para saber el número exacto, es preciso conocer el error asociado a ese número. La medida 3400 m tiene un error de ± 100 m. Ese error tiene una sola cifra significativa y esa cifra significativa corresponde a las centenas. El dígito 4 de la medida 3400 m corresponde a las decenas. Por lo tanto, solo tienen significado las cifras 3 y 4 de 3400 y esto implica que la medida 3400 m tiene $\boxed{\text{dos}}$ c. s.

Los cuatro primeros dígitos 0 del número 0.0005670 no son c. s. porque están a la izquierda del primer dígito diferente de cero, el 5 en este caso. Los dígitos 1, 4, 5 y 2 son c. s. al ser diferentes de cero. El cero final es una c. s. porque en un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último dígito diferente de cero, el 7 en este caso, son c. s. Por tanto, el número 0.0005670 tiene $\boxed{\text{cuatro}}$ c. s.

Los cuatro primeros dígitos 0 del número 0.0003004 no son c. s. porque están a la izquierda del primer dígito diferente de cero, el 3 en este caso. Los dígitos 3 y 4 son c. s. al ser diferentes de cero. Los dígitos 0 que están entre el 3 y el 4 son c. s. al estar entre cifras significativas. Por tanto, el número 0.0003004 tiene $\boxed{\text{cuatro}}$ c. s.

El primer dígito 0 del número 0.400 no es una c. s. porque está a la izquierda del primer dígito diferente de cero, el 4 en este caso. El dígito 4 es una c. s. al ser diferente de cero. Los dos ceros finales son c. s. porque en un número con dígitos a la derecha del punto decimal, los ceros a la derecha del último dígito diferente de cero, el 4 en este caso, son c. s. Por tanto, el número 0.400 tiene $\boxed{\text{tres}}$ c. s.

16. Escriba correctamente las siguientes medidas y sus errores: 24567 ± 2928 m, 23.463 ± 0.165 s, 345.20 ± 3.10 s, 43 ± 0.06 dm
0.4672 ± 0.00482 m, 464.2413 ± 0.061 dm, 6.03 ± 0.0005 m, 46288 ± 1553 m
3.218 ± 0.124 m, 0.018366 ± 0.00783 m, 0.030 ± 0.00415 m, 25721 ± 1520 m
Solución: 25000 ± 3000 m, 23.5 ± 0.2 s, 345 ± 3 s.
43.00 ± 0.06 dm, 0.467 ± 0.005 m, 464.24 ± 0.06 dm.
6.0300 ± 0.0005 m, 46000 ± 2000 m, 3.2 ± 0.1 m.
0.018 ± 0.008 m, 0.030 ± 0.004 m, 26000 ± 2000 m.

Primero se redondea el error de manera que este tenga una sola cifra significativa. A continuación se redondea la medida de manera que la medida y el error tengan la última cifra significativa en el mismo lugar:

24567 ± 2928 m ⇒ 24567 ± 3000 m ⇒ $\boxed{25000 \pm 3000 \text{m}}$

23.463 ± 0.165 s ⇒ 23.463 ± 0.2 s ⇒ $\boxed{23{,}5 \pm 0{,}2 \text{s}}$

345.20 ± 3.10 s ⇒ 345.20 ± 3 s ⇒ $\boxed{345 \pm 3 \text{s}}$

43 ± 0.06 dm ⇒ 43 ± 0.06 dm ⇒ $\boxed{43{,}00 \pm 0{,}06 \text{dm}}$

0.4672 ± 0.00482 m ⇒ 0.4672 ± 0.005 m ⇒ $\boxed{0{,}467 \pm 0{,}005 \text{m}}$

464.2413 ± 0.061 dm ⇒ 464.2413 ± 0.06 dm ⇒ $\boxed{464{,}24 \pm 0{,}06 \text{dm}}$

6.03 ± 0.0005 m $\Rightarrow$ 6.03 ± 0.0005 m $\Rightarrow$ $\boxed{6{,}0300 \pm 0{,}0005\text{m}}$

46288 ± 1553 m $\Rightarrow$ 46288 ± 2000 m $\Rightarrow$ $\boxed{46000 \pm 2000\text{m}}$

3.218 ± 0.124 m $\Rightarrow$ 3.218 ± 0.1 m $\Rightarrow$ $\boxed{3{,}2 \pm 0{,}1\text{m}}$

0.018366 ± 0.00783 m $\Rightarrow$ 0.018366 ± 0.008 m $\Rightarrow$ $\boxed{0{,}018 \pm 0{,}008\text{m}}$

0.030 ± 0.00415 m $\Rightarrow$ 0.030 ± 0.004 m $\Rightarrow$ $\boxed{0{,}030 \pm 0{,}004\text{m}}$

25721 ± 1520 m $\Rightarrow$ 25721 ± 2000 m $\Rightarrow$ $\boxed{26000 \pm 2000\text{m}}$

Observe que en la resolución de arriba hemos escrito las unidades de cada medida y de cada error.

1.17 Algunos problemas de conversión de unidades. Escriba:
3.15 metros en centímetros 3.25 kilogramos en gramos
1.25 minutos en segundos Un kilómetro en centímetros
Un metro en pulgadas, teniendo en cuenta que una pulgada son 2.54 cm
Un angstrom, Å, en pulgadas, teniendo en cuenta que una pulgada son 2.54 cm y un angstrom son 10^{-10} m
10^5 pascales, Pa, en MPa
50 psi (pounds per square inch= libra-fuerza/pulgada^2) en Pa, teniendo en cuenta que una libra-fuerza son 4.45 newtons y una pulgada son 2.54 cm
Un año-luz en metros
25.7 áreas en metros cuadrados 325.15 hectáreas, ha, en metros cuadrados
35.3 hm^2 en metros cuadrados 35.3 hm^2 en decámetros cuadrados
Las hectáreas de la superficie de un campo de fútbol de 68 m x 105 m.
Solución: 315 cm, 3250 g, 75 s, 100000 cm, 39.37 pulgadas, 3.937 10^{-9} pulgadas, 0.1 MPa, 344875.69 Pa, 9.4673 10^{15} m, 25.7 áreas = 2570 m^2, 325.15 hectáreas = 3251500 m^2, 35.3 hm^2 = 35.3 10^4 m^2, 35.3 hm^2 = 35.3 10^2 Dm^2, 68 x 105 m^2 = 0.714 hectáreas.

1 metro = 100 centímetros $\Rightarrow$ 3.15 m x 100 cm/m = $\boxed{315\text{cm}}$

1 kilogramo = 1000 gramos $\Rightarrow$ 3.25 kg x 1000 g/kg = $\boxed{3250\text{g}}$

1 minuto = 60 segundos $\Rightarrow$ 1.25 minutos x 60 s/minutos = $\boxed{75\text{s}}$

1 km = 1000 m y 1 m = 100 cm $\Rightarrow$ 1 km x 1000 m/km x 100 cm/m = $\boxed{100000\text{cm}}$

1 pulgada = 2.54 cm y 1 m = 100 cm $\Rightarrow$ 1 m x 100 cm/m / (2.54 cm/pulgada) = 100 / 2.54 pulgadas = $\boxed{39{,}37\text{pulgadas}}$

1 Å = 10^{-10} m y 1 m = 100 cm ⇒ 1 Å = 10^{-12} cm

1 Å = 10^{-12} cm y una pulgada = 2.54 cm ⇒ 1 Å = 10^{-12} cm / (2.54 cm/pulgada) = $\boxed{3.937\ 10^{-9}\ \text{pulgadas}}$

1 MPa = 10^6 Pa ⇒ 10^5 Pa = 10^5 Pa / 10^6 Pa/MPa = $\boxed{0{,}1\text{MPa}}$

1 libra-fuerza = 4.45 N ⇒ 50 psi = 50 libra-fuerza/pulgada^2 = 50 libra-fuerza/pulgada^2 x 4.45 N/libra-fuerza = $\boxed{22.25\ \text{N/pulgada}^2}$

1 pulgada = 2.54 cm y 1 cm = 0.01 m ⇒ 1 pulgada = 2.54 cm x 0.01 m/cm = 0.0254 m ⇒ 22.25 N/pulgada^2 = 22.25 N/(pulgada^2 x (0.0254 m/pulgada)^2) = 344875.69 N/m^2 = $\boxed{344875{,}69\text{Pa}}$

Un año-luz es la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un año. La velocidad de la luz en el vacío, c, es 300000 km/s.

1 año = 365.25 días y 1 día = 86400 s ⇒ 1 año = 365.25 días x 86400 s/día = 31557600 s

c = 300000 km/s = 3 10^5 km/s ⇒ c = 3 10^5 km/s x 10^3 m/km = 3 10^8 m/s

1 año-luz = c x 1 año en segundos, c = 3 10^8 m/s y 1 año = 31557600 s ⇒ 1 año-luz = 3 10^8 m/s x 31557600 s = $\boxed{9.4673\ 10^{15}\ \text{m}}$

1 área = 1 Dm^2 y 1 Dm = 10 m ⇒ 1 área = 1 Dm^2 x (10 m/Dm)^2 = 100 m^2 ⇒ 25.7 áreas x 100 m^2 = $\boxed{2570\ \text{m}^2}$

1 hectárea = 100 áreas y 1 área = 100 m^2 ⇒ 1 hectárea = 100 áreas x 100 m^2/área = 10000 m^2 ⇒ 325.15 hectáreas = 325.15 hectáreas x 10000 m^2/hectárea = $\boxed{3251500\ \text{m}^2}$

1 hm = 100 m ⇒ 1 hm^2 = 1 hm^2 x (100 m/hm)^2 = 10000 m^2 ⇒ 35.3 hm^2 = 35.3 hm^2 x 10000 m^2/hm^2 = $\boxed{35.3\ 10^4\ \text{m}^2}$

Existen al menos dos maneras de convertir 35.3 hm^2 en Dm^2. La primera manera es:

1 hm = 100 m y 1 m = 0.1 Dm ⇒ 1 hm = 100 m x 0.1 Dm/m = 10 Dm ⇒ 1 hm^2 = 1 hm^2 x (10 Dm/hm)^2 = 10^2 Dm^2

1 hm^2 = 10^2 Dm^2 ⇒ 35.3 hm^2 = 35.3 hm^2 x 10^2 Dm^2/hm^2 = 35.3 10^2 Dm^2 = $\boxed{3530\ \text{Dm}^2}$

La segunda manera es:

35.3 hm^2 = 35.3 10^4 m^2 y 1 m = 0.1 Dm ⇒ 35.3 hm^2 = 35.3 10^4 m^2 x (0.1 Dm/m)^2 = 35.3 10^2 Dm^2 = $\boxed{3530\ \text{Dm}^2}$

En los cálculos de las conversiones anteriores hemos encontrado: 1 hm^2 = 10000 m^2 y 1 hectárea = 10000 m^2. Por lo tanto, 1 hectárea = 1 hm^2.

El campo de fútbol tiene una superficie de 68 x 105 m^2 = 7140 m^2.

1 hm = 100 m $\Rightarrow$ 1 hm^2 = 10^4 m^2

1 hm^2 = 10^4 m^2 y 1 hectárea = 1 hm^2 $\Rightarrow$ 1 hectárea = 10^4 m^2 $\Rightarrow$ 7140 m^2 = 7140 m^2 / (10^4 m^2/hectárea) = $\boxed{0{,}714 \text{hectáreas}}$

18. Calcule la dimensión del número π.
Solución: $[\pi] = 1$.

Un número es adimensional, por lo tanto la dimensión del número π es $\boxed{[\pi] = 1}$.

19. Calcule la dimensión de π radianes.
Solución: $[\pi] = 1$.

Al indicar las unidades, radianes en este caso, el enunciado indica que se trata del valor numérico de un ángulo plano θ. Se trata de un ángulo plano de π radianes o 180 grados sexagesimales. Los ángulos planos son magnitudes adimensionales. Por lo tanto, $\boxed{[\theta(=\pi)] = 1}$.

20. Calcule las dimensiones de las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, etc.
Solución: $[sen(\alpha)] = 1$, $[cos(\alpha)] = 1$ y $[tan(\alpha)] = 1$.

El seno de un ángulo es el cociente del cateto opuesto y la hipotenusa relacionados con ese ángulo, o/h. Calculamos la dimensión del seno de un ángulo.

$$\left.\begin{aligned} sen\alpha &= o/h \\ [o] &= L \\ [h] &= L \end{aligned}\right\} \Rightarrow [sen\alpha] = [o]/[h] = L/L = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{[sen\alpha] = 1} \tag{96}$$

El coseno de un ángulo es el cociente del cateto contiguo y la hipotenusa relacionados con ese ángulo, c/h. Calculamos la dimensión del coseno de un ángulo.

$$\left.\begin{aligned} cos\alpha &= c/h \\ [c] &= L \\ [h] &= L \end{aligned}\right\} \Rightarrow [cos\alpha] = [c]/[h] = L/L = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{[cos\alpha] = 1} \tag{97}$$

La tangente de un ángulo es el cociente del cateto opuesto y el cateto contiguo relacionados con ese ángulo, o/c.

Calculamos la dimensión de la tangente de un ángulo.

$$\left.\begin{array}{l} tan\alpha = o/c \\ [o] = L \\ [c] = L \end{array}\right\} \Rightarrow [tan\alpha] = [o]/[c] = L/L = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{[tan\alpha] = 1} \tag{98}$$

21. Calcule la dimensión de ϵ_0, la permitividad eléctrica del vacío, a partir de la ley de Coulomb.
Solución: $[\epsilon_0] = Q^2M^{-1}L^{-3}T^2$.

La ley de Coulomb es:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \ , \tag{99}$$

donde F es una fuerza, q y Q son cargas eléctricas y r es la distancia entre las cargas. Despejamos ϵ_0 de la ecuación anterior:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{qQ}{4\pi F r^2} \tag{100}$$

Tenemos en cuenta las dimensiones de la fuerza, las cargas, la distancia y la constante 4π para calcular la dimensión de ϵ_0:

$$\left.\begin{array}{l} [F] = MLT^{-2} \\ [q] = Q \\ [Q] = Q \\ [r] = L \\ [4\pi] = 1 \\ \epsilon_0 = \dfrac{qQ}{4\pi F r^2} \Rightarrow [\epsilon_0] = \dfrac{[q][Q]}{[4\pi][F][r]^2} \end{array}\right\} \Rightarrow [\epsilon_0] = \frac{QQ}{1MLT^{-2}L^2} = \frac{Q^2}{ML^3T^{-2}} = \boxed{Q^2M^{-1}L^{-3}T^2} \tag{101}$$

22. La velocidad de la luz, c, es una función de la permitividad eléctrica del vacío, ϵ_0, y de la permeabilidad magnética del vacío, μ_0. Halle mediante el análisis dimensional cómo es esa dependencia: c=c(ϵ_0,μ_0). La dimensión de ϵ_0 se puede obtener a partir de la ley de Coulomb. La dimensión de μ_0 es MLQ^{-2}.
Solución: $c = \dfrac{a}{\mu_0\epsilon_0}$, a es una constante.

La forma matemática más sencilla de $c = c(\epsilon_0, \mu_0)$ es:

$$c = a\epsilon_0^{\alpha}\mu_0^{\beta} \ , \tag{102}$$

donde a es una constante. En uno de los problemas anteriores hemos calculado la dimensión de ϵ_0 a partir de la ley de Coulomb: $[\epsilon_0] = Q^2M^{-1}L^{-3}T^2$. Teniendo en cuenta las dimensiones de la velocidad c, ϵ_0 y μ_0, hacemos los siguientes cálculos:

$$\left.\begin{array}{l} [c] = LT^{-1} \\ [a] = 1 \\ [\epsilon_0] = Q^2M^{-1}L^{-3}T^2 \\ [\mu_0] = MLQ^{-2} \\ c = a\epsilon_0^{\alpha}\mu_0^{\beta} \Rightarrow [c] = [a][\epsilon_0]^{\alpha}[\mu_0]^{\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow LT^{-1} = 1(Q^2M^{-1}L^{-3}T^2)^{\alpha}(MLQ^{-2})^{\beta} \tag{103}$$

Seguimos haciendo cálculos a partir de la ecuación 103 y obtenemos:

$$LT^{-1} = 1(Q^2M^{-1}L^{-3}T^2)^{\alpha}(MLQ^{-2})^{\beta} = Q^{2\alpha}M^{-\alpha}L^{-3\alpha}T^{2\alpha}M^{\beta}L^{\beta}Q^{-2\beta} \tag{104}$$

De la ecuación 104 obtenemos:

$$LT^{-1} = Q^{2\alpha}M^{-\alpha}L^{-3\alpha}T^{2\alpha}M^{\beta}L^{\beta}Q^{-2\beta} \Rightarrow Q^0M^0L^1T^{-1} = Q^{2\alpha-2\beta}M^{-\alpha+\beta}L^{-3\alpha+\beta}T^{2\alpha} \tag{105}$$

De la ecuación 105 deducimos cuatro ecuaciones:

$$Q^0M^0L^1T^{-1} = Q^{2\alpha-2\beta}M^{-\alpha+\beta}L^{-3\alpha+\beta}T^{2\alpha} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2\alpha - 2\beta \\ 0 = -\alpha + \beta \\ 1 = -3\alpha + \beta \\ -1 = 2\alpha \end{cases} \tag{106}$$

Tenemos cuatro ecuaciones y dos incógnitas. Vamos a comprobar si las cuatro ecuaciones son linealmente independientes o no.

Las dos primeras ecuaciones no son linealmente independientes: La primera es igual a la segunda multiplicada por -2. Por lo tanto, nos quedamos solo con una de ellas, $0 = -\alpha + \beta$. Nos quedan tres ecuaciones: La segunda, tercera y cuarta ecuaciones en la ecuación 106.

La suma de la tercera y cuarta ecuación es igual a la segunda ecuación. Por lo tanto, estas tres ecuaciones no son linealmente independientes. Nos quedamos con la segunda y la cuarta ecuación. Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones linealmente independientes y dos incógnitas:

$$\begin{array}{l} 0 = -\alpha + \beta \\ -1 = 2\alpha \end{array} \tag{107}$$

Resolvemos ese sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -\alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \beta \\ -1 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = -1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = -1/2 \tag{108}$$

Por lo tanto, la dependencia de c es:

$$\boxed{c = a\epsilon_0^{-1/2}\mu_0^{-1/2} = \frac{a}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}} \tag{109}$$

23. Cálculo del error de una medida indirecta. Medimos la distancia recorrida por una gota de aceite en el experimento de Milliken y el tiempo que tarda en recorrer esa distancia: 100.000 μm (cien micras) y 10.3 segundos, respectivamente. Exprese correctamente la medida indirecta de la velocidad de la gota y su error. Solución: 9.71 ± 0.09 μm/s.

La velocidad de la gota es $v = e/t$, donde e es la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo t. El error de esta medida indirecta es:

$$\Delta v = \left|\frac{\partial v}{\partial e}\right|\Delta e + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|\Delta t \tag{110}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$v = e/t \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial e} = 1/t \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -e/t^2 \end{cases} \tag{111}$$

Introducimos las derivadas parciales en la ecuación 110:

$$\Delta v = \Delta e/t + e\Delta t/t^2 \tag{112}$$

El enunciado del problema indica que la distancia recorrida es 100.000 μm y no nos indica explícitamente el error de la distancia. Cuando no se indica explícitamente el error, entonces se entiende que el error es una unidad del orden de magnitud de la última cifra significativa. La última cifra significativa de 100.000 μm es un 0 en el tercer decimal (un 0 en las milésimas de micras). Esto significa que el error es Δe = 0.001 micras. Lo mismo se aplica al caso del tiempo que ha tardado en recorrer esa distancia: La última cifra significativa del tiempo es un 3 en el primer decimal (un 3 en las décimas de segundo). Por tanto, su error implícito es Δt = 0.1 segundos.

Hacemos los siguientes cálculos:

$$\left.\begin{aligned} &e = 100{,}000\mu m \\ &\Delta e = 0{,}001\mu m \\ &t = 10{,}3s \\ &\Delta t = 0{,}1s \\ &\Delta v = \Delta e/t + e\Delta t/t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta v = 0{,}001/10{,}3 + 100{,}0000{,}1/(10{,}3)^2 \mu m/s = 0{,}0943566\mu m/s \tag{113}$$

Redondeamos el error bruto que hemos calculado, 0.0943566 μm, de manera que el error tenga una sola cifra significativa: Δv = 0.09 μm/s.

Calculamos la velocidad medida:

$$v = e/t = 100{,}000\mu m/10{,}3s = 9{,}7087379\mu m/s \tag{114}$$

La última cifra significativa de la medida y de su error deben corresponder al mismo orden de magnitud. En este caso, el error tiene dos decimales, en μm/s. Por lo tanto, redondeamos la medida, 9.7087379 μm/s, para que tenga dos decimales: v = 9.71 μm/s. Finalmente, la expresión correcta de la medida y de su error será:

$$\boxed{v = 9{,}71 \pm 0{,}09\mu m/s} \tag{115}$$

24. Según la definición de magnitud física:

a) Explique qué tienen en común una anchura, una longitud, una distancia y la coordenada z de una molécula en un sistema de coordenadas cartesianas.
Solución: Tienen en común la dimensión.

Las cuatro magnitudes $\boxed{\text{tienen en común la dimensión}}$: longitud, L.

b) Explique qué tienen en común una temperatura de 20 grados Celsius y una de 20 kelvin.
Solución: Tienen en común la dimensión y el valor numérico. Difieren en las unidades.

Las dos magnitudes son temperaturas y por tanto, $\boxed{\text{tienen en común la dimensión}}$, temperatura, Θ. También $\boxed{\text{tienen en común el valor numérico}}$. Sin embargo, difieren en las unidades.

c) Explique qué tienen en común una temperatura de 20 grados Celsius y una de 1000 grados Celsius.
Solución: Tienen en común la dimensión y las unidades.

Las dos magnitudes son temperaturas. Por lo tanto, $\boxed{\text{tienen en común la dimensión}}$. Por otra parte, las dos magnitudes se expresan en grados Celsius y por lo tanto, también $\boxed{\text{tienen en común}}$ $\boxed{\text{las unidades}}$.

25. El kelvin es la unidad de temperatura del Sistema Internacional. Explique por qué la temperatura de la ecuación del gas ideal, PV=nRT, solo puede estar en kelvin y no en grados Celsius, incluso cuando P, V y R se pueden expresar en unidades que no son del Sistema Internacional. La presión P puede estar en pascales, una unidad del SI, o en atmósferas. El volumen V puede estar en m^3, una unidad del SI, o en litros.
Solución resumida: Los factores de conversión de P, V y R se escriben en los dos lados de la ecuación y el efecto neto es que la ecuación no cambia de forma. La conversión de grados Celsius a kelvin y viceversa implica la suma o la resta del factor 273.15. Este factor no se compensa a los dos lados de la ecuación.

Para expresar la presión P, el volumen V y la constante de los gases ideales R en otras unidades se multiplica cada una de esas magnitudes por la correspondiente constante de cambio de unidades o factor de conversión de unidades. Por ejemplo: Una presión de 0.1 MPa se expresa en atm como P(en atm) = 0.1 MPa / (0.1013 MPa/atm) = a P(en MPa), donde a = 1/(0.1013) atm/MPa. En este caso, la constante de cambio de unidades es *a* y el cambio es de MPa a atm.

Si P, V y R están originalmente en unas unidades y cambiamos sus unidades, entonces P'=aP, V'=bV y R'=cR. El cambio de unidades de R debe ser consistente con los cambios de unidades de P y V. La constante R está en unidades de presión x volumen/(cantidad de materia x temperatura). Por ejemplo, R = 0.082 atm L/mol K. El cambio consistente implica que el factor de conversión de R, c, debe ser igual a 1/(a b). Esto a su vez, implica que P'V'=nR'T se transforma en PV=nRT. El cambio de unidades no ha afectado a la temperatura T, que tiene el mismo valor en las dos ecuaciones: PV=nRT y P'V'=nR'T.

El factor de conversión de la presión P se compensa con el factor de conversión de R, porque R tiene dimensión de presión en el numerador. El factor de conversión del volumen V se compensa con el factor de conversión de R, porque R tiene dimensión de volumen en el numerador.

La conversión de grados Celsius a Kelvin no implica a un factor de conversión multiplicador, sino a un factor de conversión aditivo: $T = t_C + 273.15$. Esto significa:

$$\left.\begin{array}{l} T = t_C + 273{,}15 \\ PV = nRT \Rightarrow PV/n = RT \\ PV = nR't_C \Rightarrow PV/n = R't_C \end{array}\right\} \Rightarrow RT = R't_C \Rightarrow R' = RT/t_C = R(t_C + 273{,}15)/t_C = R(1 + 273{,}15/t_C) \quad (116)$$

La constante R' que hemos obtenido no es una constante, ya que depende del valor de la temperatura t_C: Para cada temperatura t_C hay un valor diferente de R'. $\boxed{\text{El factor aditivo de conversión}}$ $\boxed{\text{no se compensa con otros factores}}$.

26. La ecuación del gas ideal, PV=nRT, solo es válida para temperaturas T en kelvin. Calcule una ecuación del gas ideal para temperaturas en grados Celsius. Los resultados deben ser los mismos que usando la ecuación PV=nRT.
Solución: PV = nR(t_C + 273.15).

Una temperatura t_C en grados Celsius se transforma en una temperatura T en kelvins mediante: $T = t_C + 273.15$. Hacemos los cálculos para obtener la ecuación del gas ideal para temperaturas en grados Celsius:

$$\left.\begin{array}{l} T = t_C + 273{,}15 \\ PV = nRT \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{PV = nR(t_C + 273{,}15)} \quad (117)$$

27. Explique qué es más grande, un electrón o un núcleo.

$\boxed{\text{Un núcleo es más grande porque su radio es } 10^{-15} \text{ m, mayor que el radio de un electrón, } 10^{-18} \text{ m.}}$

28. Las unidades de longitud, velocidad lineal y velocidad angular en el SI son m, m/s y rad/s, respectivamente. En un movimiento circular, tenemos la igualdad $v(t) = \omega(t)r$. Las unidades a la izquierda y a la derecha de esta igualdad deberían coincidir y no coinciden: A la izquierda de esta igualdad, las unidades son m/s y a la derecha, las unidades son rad m /s. Explique qué es lo que está mal o falta en estos razonamientos.

Para calcular el vector $\vec{v}(t)$ en un movimiento circular, se deriva el vector $\vec{r}(t)$ respecto del tiempo:

$$\vec{r}(t) = rcos\theta(t)\vec{u}_x + rsen\theta(t)\vec{u}_y \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\frac{dcos\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_x + r\frac{dsen\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_y \quad (118)$$

Si seguimos haciendo cálculos, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}(t) = -r\dfrac{dcos\theta}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_x + r\dfrac{dsen\theta}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_y \\ \omega(t) = \dfrac{d\theta}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}(t) = -r\frac{dcos\theta}{d\theta}\omega(t)\vec{u}_x + r\frac{dsen\theta}{d\theta}\omega(t)\vec{u}_y \tag{119}$$

De la ecuación 119 obtenemos:

$$\vec{v}(t) = -r\frac{dcos\theta}{d\theta}\omega(t)\vec{u}_x + r\frac{dsen\theta}{d\theta}\omega(t)\vec{u}_y \Rightarrow v(t) = |\vec{v}(t)| = r\omega(t)\sqrt{\left(\frac{dcos\theta}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dsen\theta}{d\theta}\right)^2} \tag{120}$$

Las unidades de las derivadas $\frac{dcos\theta}{d\theta}$ y $\frac{dsen\theta}{d\theta}$ son radianes^{-1} = 1/rad, porque son derivadas de funciones trigonométricas, que no tienen unidades, con respecto de un ángulo plano, el cual se mide en radianes en el SI.

Las derivadas $\frac{dcos\theta}{d\theta}$ y $\frac{dsen\theta}{d\theta}$ son, respectivamente, $-sen\theta$ radianes^{-1} y $cos\theta$ radianes^{-1}. Esto implica que la raíz cuadrada $\sqrt{\left(\frac{dcos\theta}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dsen\theta}{d\theta}\right)^2}$ es igual a 1 radián^{-1}. Por lo tanto, las unidades de la raíz cuadrada de la ecuación 120 también son 1/rad y la ecuación 120 se convierte en

$$v(t) = r\omega(t)1/rad \tag{121}$$

Las unidades de $v(t)$, r y $\omega(t)$ de la ecuación 121 son m/s, m y rad/s, respectivamente. Finalmente, las unidades a la izquierda de la ecuación 121 son m/s y las unidades a la derecha son m x rad/s x 1/rad = m/s.

En el razonamiento del enunciado no se tuvo en cuenta las derivadas mencionadas, que las unidades de esas derivadas son 1/rad, que las unidades de la raíz cuadrada de esas derivadas son 1/rad y que la raíz cuadrada de esas derivadas es 1/rad, no simplemente 1.

29. Las unidades de μ_0, la permitividad magnética del vacío, en el SI son newton/amperio^2. Calcule la dimensión de μ_0 partiendo del dato anterior sobre sus unidades en el SI.
Solución: $[\mu_0] = MLQ^{-2}$.

El newton es una unidad de fuerza y el amperio es una unidad de intensidad de corriente. Por lo tanto, el newton/amperio^2 es una unidad de fuerza/(intensidad)^2 y la dimensión de μ_0 es fuerza/(intensidad)^2. Teniendo en cuenta las dimensiones de la fuerza y de la intensidad, hacemos los siguientes cálculos:

$$\left.\begin{array}{l} [fuerza] = MLT^{-2} \\ [intensidad] = \dfrac{Q}{T} = QT^{-1} \\ [\mu_0] = \dfrac{[fuerza]}{[intensidad]^2} \end{array}\right\} \Rightarrow [\mu_0] = \frac{MLT^{-2}}{(QT^{-1})^2} = \frac{MLT^{-2}}{Q^2T^{-2}} = MLQ^{-2} \Rightarrow \boxed{[\mu_0] = MLQ^{-2}} \tag{122}$$

30. La constante de estructura fina α es igual a $\frac{k_e e^2 2\pi}{hc}$, donde k_e es la constante de Coulomb, e es la carga eléctrica del electrón, π es el número pi, h es la constante de Planck y c es la velocidad de la luz. La fuerza entre dos cargas eléctricas Q y q separadas por una distancia r viene dada por $F = k_e Qq/r^2$. La constante de Planck tiene dimensión de momento angular. Calcule la dimensión de α. El símbolo e es la carga eléctrica del electrón, en este problema. No es el número de Euler.
Solución: $[\alpha] = 1$.

A partir de la definición de α, obtenemos:

$$\alpha = \frac{k_e e^2 2\pi}{hc} \Rightarrow [\alpha] = \frac{[k_e][e]^2[2\pi]}{[h][c]} \tag{123}$$

Para calcular la dimensión de α tenemos que calcular las dimensiones de k_e y de h.

Calculamos la dimensión de la constante de Coulomb k_e, a partir de la ley de Coulomb, $F = k_e Qq/r^2$:

$$F = k_e Qq/r^2 \Rightarrow k_e = Fr^2/(Qq) \Rightarrow [k_e] = \frac{[F][r]^2}{[Q][q]} \tag{124}$$

A partir de la ecuación 124 y de las dimensiones de F, r, Q y q:

$$\left.\begin{array}{l} [F] = MLT^{-2} \\ [r] = L \\ [Q] = Q \\ [q] = Q \\ [k_e] = \dfrac{[F][r]^2}{[Q][q]} \end{array}\right\} \Rightarrow [k_e] = \frac{MLT^{-2}L^2}{QQ} = \frac{ML^3T^{-2}}{Q^2} = ML^3T^{-2}Q^{-2} \tag{125}$$

Vamos a calcular la dimensión de la constante de Planck, h. Según el enunciado, h tiene dimensión de momento angular. En el caso de un objeto que se mueve con velocidad $\vec{v}$ y que tiene masa m, su momento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, donde $\vec{p} = m\vec{v}$ es el momento lineal. El módulo de $\vec{L}$ es $|\vec{L}| = rpsen(\theta)$, donde θ es el ángulo que forman entre sí los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$, y el ángulo θ toma valores entre 0 y π radianes. A partir de esta definición podemos obtener la dimensión del momento angular:

$$|\vec{L}| = rpsen(\theta) \Rightarrow [|\vec{L}|] = [r][p][sen(\theta)] \tag{126}$$

Seguimos haciendo cálculos y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} [|\vec{L}|] = [r][p][sen(\theta)] \\ [r] = L \\ [p] = [mv] = [m][v] = MLT^{-1} \\ [sen(\theta)] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow [|\vec{L}|] = LMLT^{-1} = ML^2T^{-1} \tag{127}$$

La constante de Planck tiene dimensión de momento angular y, por tanto, $[h] = ML^2T^{-1}$.

Calculamos, finalmente, la dimensión de la constante de estructura fina α:

$$\left.\begin{array}{l}[k_e] = ML^3T^{-2}Q^{-2}\\ [2\pi] = 1\\ [e] = Q\\ [h] = ML^2T^{-1}\\ [c] = LT^{-1}\\ [\alpha] = \dfrac{[k_e][e]^2[2\pi]}{[h][c]}\end{array}\right\} \Rightarrow [\alpha] = \frac{ML^3T^{-2}Q^{-2}Q^2 1}{ML^2T^{-1}LT^{-1}} = \frac{ML^3T^{-2}}{ML^3T^{-2}} = 1 \Rightarrow \boxed{[\alpha] = 1} \tag{128}$$

31. La conductividad térmica de un gas viene dada por la ecuación $\kappa = 1.25\ \rho c_v \lambda v$, donde λ es el camino libre promedio de las moléculas del gas, v es la velocidad promedio de las moléculas, c_v es el calor específico a volumen constante y ρ es la densidad. El calor específico a volumen constante tiene dimensión de energía/(masa temperatura). Calcule la dimensión de κ.
Solución: $[\kappa] = MLT^{-3}\Theta^{-1}$.

De la definición de conductividad térmica obtenemos:

$$\kappa = 1{,}25\rho c_v \lambda v \Rightarrow [\kappa] = [1{,}25][\rho][c_v][\lambda][v] \tag{129}$$

El calor específico tiene dimensión de energía/(masa temperatura), según el enunciado. Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l}[energía] = [mv^2/2] = [m][v^2][1/2] = ML^2T^{-2}\\ [masa] = M\\ [temperatura] = \Theta\\ [c_v] = \dfrac{[energía]}{[masa][temperatura]}\end{array}\right\} \Rightarrow [c_v] = \frac{ML^2T^{-2}}{M\Theta} = L^2T^{-2}\Theta^{-1} \tag{130}$$

Introducimos las dimensiones de 1.25, ρ, c_v, λ y v en la ecuación 129:

$$\left.\begin{array}{l}[1{,}25] = 1\\ [\rho] = ML^{-3}\\ [c_v] = L^2T^{-2}\Theta^{-1}\\ [\lambda] = L\\ [v] = LT^{-1}\\ [\kappa] = [1{,}25][\rho][c_v][\lambda][v]\end{array}\right\} \Rightarrow [\kappa] = ML^{-3}L^2T^{-2}\Theta^{-1}LLT^{-1} = \boxed{MLT^{-3}\Theta^{-1}} \tag{131}$$

32. La ecuación de la conducción del calor es $\vec{q} = -\kappa\vec{\nabla}T(x,y,z)$, donde $\vec{q}$ es el vector flujo de calor, κ es la conductividad térmica y $T(x,y,z)$ es la temperatura en el punto (x,y,z). Cada componente del vector flujo de calor tiene dimensión de calor/(superficie tiempo). Calcule la dimensión de κ. El gradiente de la temperatura es:

$$\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{u}_z \ .$$

Solución: $[\kappa] = MLT^{-3}\Theta^{-1}$.

Partiendo de la ecuación de la conducción del calor, obtenemos:

$$\vec{q} = -\kappa\vec{\nabla}T(x,y,z) \Rightarrow q_x = -\kappa\frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow [q_x] = [-1][\kappa][\frac{\partial T}{\partial x}] \Rightarrow [\kappa] = \frac{[q_x]}{[-1][\frac{\partial T}{\partial x}]} \tag{132}$$

Calculamos la dimensión de una componente del vector flujo:

$$\left.\begin{aligned} &[calor] = ML^2T^{-2} \\ &[superficie] = L^2 \\ &[tiempo] = T \\ &[q_x] = \frac{[calor]}{[superficie][tiempo]} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [q_x] = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2T} = ML^2T^{-2}L^{-2}T^{-1} = MT^{-3} \tag{133}$$

Introducimos en 132 las dimensiones de q_x, de la constante -1 y de la derivada parcial de la temperatura con respecto de x:

$$\left.\begin{aligned} &[q_x] = MT^{-3} \\ &[-1] = 1 \\ &\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = \frac{\Theta}{L} = \Theta L^{-1} \\ &[\kappa] = \frac{[q_x]}{[-1][\frac{\partial T}{\partial x}]} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [\kappa] = \frac{MT^{-3}}{\Theta L^{-1}} = \boxed{MLT^{-3}\Theta^{-1}} \tag{134}$$

33. La ecuación de Poisson es $\nabla^2\Phi = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0$, donde Φ es el potencial, $\rho(\vec{r})$ es la densidad de carga eléctrica en el punto $\vec{r}$ y ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío. La energía potencial V es $q\Phi$, donde q es una carga eléctrica. Calcule la dimensión de ϵ_0. El laplaciano de Φ es:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Solución: $[\epsilon_0] = Q^2M^{-1}L^{-3}T^2$.

La dimensión del potencial es energía potencial/carga y, por tanto:

$$\left.\begin{aligned} &[energía] = ML^2T^{-2} \\ &[carga] = Q \\ &[\Phi] = [energía]/[carga] \end{aligned}\right\} \Rightarrow [\Phi] = ML^2T^{-2}Q = ML^2T^{-2}Q^{-1} \tag{135}$$

Calculamos la dimensión del laplaciano de Φ:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla^2\Phi = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \Rightarrow [\nabla^2\Phi] = [\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}] = \dfrac{[\Phi]}{L^2} \\ [\Phi] = ML^2T^{-2}Q^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow [\nabla^2\Phi] = \frac{ML^2T^{-2}Q^{-1}}{L^2} = MT^{-2}Q^{-1} \quad (136)$$

De la ecuación de Poisson obtenemos:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow [\nabla^2\Phi] = [-1]\frac{[\rho(\vec{r})]}{[\epsilon_0]} \Rightarrow [\epsilon_0] = [-1]\frac{[\rho(\vec{r})]}{[\nabla^2\Phi]} \quad (137)$$

A partir de las ecuaciones 136 y 137, de la dimensión de la constante -1 y de la dimensión de la densidad de carga, obtenemos la dimensión de ϵ_0:

$$\left.\begin{array}{l} [-1] = 1 \\ [[\rho(\vec{r})] = QL^{-3} \\ [\nabla^2\Phi] = MT^{-2}Q^{-1} \\ [\epsilon_0] = [-1]\dfrac{[\rho(\vec{r})]}{[\nabla^2\Phi]} \end{array}\right\} \Rightarrow [\epsilon_0] = \frac{QL^{-3}}{MT^{-2}Q^{-1}} = QL^{-3}M^{-1}T^2Q = \boxed{M^{-1}L^{-3}T^2Q^2} \quad (138)$$

34. La ecuación de Laplace es $\nabla^2\Phi = 0$. Esta ecuación parece dimensionalmente inconsistente, debido al cero situado en el lado derecho de la ecuación. Explique por qué esta ecuación es dimensionalmente consistente.

La ecuación de Laplace es un caso particular de la ecuación de Poisson (Vea un problema anterior). Se trata del caso en el que la densidad de carga es cero en cualquier punto $\vec{r}$ del espacio.

Ese 0 en el lado derecho, se trata, por tanto, de una densidad de carga igual a cero, es decir, es O culombios/m^3 en el S.I. Ese 0 tiene la misma dimensión y las mismas unidades en el S.I. que tiene $\nabla^2\Phi$. El número 0 es el valor del laplaciano de Φ en cualquier punto $\vec{r}$ del espacio. Por lo tanto, $\boxed{\text{la ecuación es dimensionalmente consistente}}$.

35. La velocidad de una partícula en el S.I. viene dada por v = 5t^2 + 3. Calcule la dimensión de los factores 5 y 3 en la anterior ecuación.
Solución: $[5] = LT^{-3}$ y $[3] = LT^{-1}$.

Una manera de calcular la dimensión de esos factores es la siguiente. La ecuación está en unidades del S.I. Por lo tanto, 3 significa 3 m/s y 5 significa 5 m/s^3. Esto implica que la dimensión del factor 3 es velocidad, $\boxed{[3] = LT^{-1}}$, y que la dimensión del factor 5 es $\boxed{[5] = LT^{-3}}$.

Vamos a calcular de una segunda manera la dimensión de esos factores. Los dos lados de v = 5t^2 + 3 deben tener la misma dimensión. Además, cada término del lado derecho debe tener la misma dimensión. Por lo tanto:

$$v = 5t^2 + 3 \Rightarrow [v] = [5][t^2] = [3] \quad (139)$$

$$\left.\begin{array}{l} [v] = LT^{-1} \\ [t^2] = [t]^2 = T^2 \\ [v] = [5][t^2] \Rightarrow [5] = \dfrac{[v]}{[t^2]} \end{array}\right\} \Rightarrow [5] = \frac{LT^{-1}}{T^2} = \boxed{LT^{-3}} \quad (140)$$

$$\left.\begin{array}{l} [v] = LT^{-1} \\ [v] = [3] \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{[3] = LT^{-1}} \quad (141)$$

36. Se mide la longitud, la anchura, la altura y la masa de un bloque de material con forma de paralelepípedo. Se obtiene una longitud de 1.000 ± 0.001 m (un metro ± 0.001 metros), una anchura de 0.500 ± 0.001 m (medio metro ± 0.001 metros), una altura de 3.000 ± 0.001 m (tres metros ± 0.001 metros) y una masa de 2000.0 ± 0.1 kg. Exprese correctamente la densidad del bloque que se obtiene a partir de estas medidas.
Solución: 1333 ± 5 kg/m^3.

La densidad del bloque no se obtiene de una medida directa, sino de otras medidas. Se trata de una medida indirecta. La densidad del bloque es ρ=m/V, donde m y V son la masa y el volumen del bloque, respectivamente. El volumen V del bloque es V=l a h, donde l, a y h son la longitud, la anchura y la altura, respectivamente, del bloque. El valor numérico de la densidad en las unidades del enunciado es ρ = 2000 kg / (1 x 0.5 x 3 m^3) = 1333.333333 kg/m^3.

La densidad es ρ=m/(l a h) y depende de cuatro magnitudes: m, l, a y h. El error de la medida indirecta de la densidad viene dado por:

$$\Delta\rho = \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|\Delta m + \left|\frac{\partial\rho}{\partial l}\right|\Delta l + \left|\frac{\partial\rho}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial\rho}{\partial h}\right|\Delta h = \left|\frac{1}{lah}\right|\Delta m + \left|\frac{-m}{l^2ah}\right|\Delta l + \left|\frac{-m}{la^2h}\right|\Delta a + \left|\frac{-m}{lah^2}\right|\Delta h =$$
$$\frac{1}{lah}\Delta m + \frac{m}{l^2ah}\Delta l + \frac{m}{la^2h}\Delta a + \frac{m}{lah^2}\Delta h = \frac{m}{lah}\frac{\Delta m}{m} + \frac{m}{lah}\frac{\Delta l}{l} + \frac{m}{lah}\frac{\Delta a}{a} + \frac{m}{lah}\frac{\Delta h}{h} =$$
$$\frac{m}{lah}\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta h}{h}\right) = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta h}{h}\right) \quad (142)$$

Los valores numéricos de los cocientes de la ecuación 142 son $\dfrac{\Delta m}{m}$ = 0.1/2000.0 = 0.00005, $\dfrac{\Delta l}{l}$ = 0.001/1.000 = 0.001, $\dfrac{\Delta a}{a}$ = 0.001/0.500 = 0.002 y $\dfrac{\Delta h}{h}$ = 0.001/3.000 = 0.00033333.

Introducimos los valores numéricos de las magnitudes físicas en la ecuación 142:

$$\Delta\rho = 1333{,}33333\ \text{kg/m}^3(0{,}00005 + 0{,}001 + 0{,}002 + 0{,}00033333) = 4{,}5111\ \text{kg/m}^3 \tag{143}$$

El error debe tener una sola cifra significativa. Por tanto, aproximamos el error: $\Delta\rho = 5$ kg/m^3. Finalmente, la medida y su error deben ser del mismo orden de magnitud, deben tener los mismos decimales. Por lo tanto, la expresión correcta de la densidad y de su error es:

$$\boxed{1333 \pm 5\ \text{kg/m}^3}$$

37. Según la ley de Biot-Savart, el campo magnético en el punto $\vec{r}$, creado por una carga q' situada en el punto $\vec{r}'$ y que se mueve con velocidad $\vec{v}'$, viene dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q'\vec{v}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\ .$$

Según la ley de Lorentz, $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}(\vec{r})$. Calcule la dimensión de μ_0 utilizando la ley de Biot-Savart y la ley de Lorentz.
Solución: $[\mu_0] = MLQ^{-2}$.

Aplicamos el análisis dimensional a la ley de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q'\vec{v}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \Rightarrow B = |\vec{B}(\vec{r})| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q'\vec{v}'\times(\vec{r}-\vec{r}')|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$
$$\Rightarrow [B] = \frac{[\mu_0]}{[4\pi]}\frac{[q'][|\vec{v}'|][|\vec{r}-\vec{r}'|]}{[|\vec{r}-\vec{r}'|3]} \Rightarrow \frac{[B][4\pi][|\vec{r}-\vec{r}'|^3]}{[q'][|\vec{v}'|][|\vec{r}-\vec{r}'|]} = [\mu_0] \tag{144}$$

Conocemos las dimensiones de 4π, $|\vec{r}-\vec{r}'|^3$, q', $|\vec{v}'|$ y $|\vec{r}-\vec{r}'|$. Nos falta conocer la dimensión del campo magnético B. Para obtener la dimensión de B, aplicamos el análisis dimensional a la ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}(\vec{r}) \Rightarrow F = |\vec{F}| = |q||\vec{v}||\vec{B}(\vec{r})|sen(\alpha) \Rightarrow [F] = [|q|][|\vec{v}|][|\vec{B}(\vec{r})|][sen(\alpha)]$$
$$\Rightarrow \frac{[F]}{[|q|][|\vec{v}|][sen(\alpha)]} = [|\vec{B}(\vec{r})|] = [B] \Rightarrow [B] = \frac{[F]}{[|q|][|\vec{v}|][sen(\alpha)]} \tag{145}$$

Incluimos en la ecuación 145 las dimensiones de las magnitudes correspondientes:

$$\left.\begin{array}{l} [F] = MLT^{-2} \\ [|q|] = Q \\ [|\vec{v}|] = LT^{-1} \\ [sen(\alpha)] = 1 \\ [B] = \dfrac{[F]}{[|q|][|\vec{v}|][sen(\alpha)]} \end{array}\right\} \Rightarrow [B] = \frac{MLT^{-2}}{QLT^{-1}} = MLT^{-2}Q^{-1}L^{-1}T = MT^{-1}Q^{-1} \tag{146}$$

Finalmente, introducimos las dimensiones de B y de las otras magnitudes en la ecuación 144 para obtener la dimensión de μ_0:

$$\left.\begin{aligned}
&[B] = MT^{-1}Q^{-1}\\
&[4\pi] = 1\\
&[|\vec{r}-\vec{r}'|^3] = [|\vec{r}-\vec{r}'|]^3 = L^3\\
&[q'] = Q\\
&[|\vec{v}'|] = LT^{-1}\\
&[|\vec{r}-\vec{r}'|] = L\\
&[\mu_0] = \frac{[B][4\pi][|\vec{r}-\vec{r}'|^3]}{[q'][|\vec{v}'|][|\vec{r}-\vec{r}'|]}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow [\mu_0] = \frac{MT^{-1}Q^{-1}L^3}{QLT^{-1}L} = \frac{MT^{-1}Q^{-1}L^3}{QL^2T^{-1}}$$
$$= MT^{-1}Q^{-1}L^3Q^{-1}L^{-2}T = \boxed{MQ^{-2}L} \tag{147}$$

38. La radiancia a la frecuencia ν y a la temperatura absoluta T viene dada por la ecuación

$$B(\nu,T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\ \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}\ ,$$

donde h es la constante de Planck y c es la velocidad de la luz. La dimensión de h es energía multiplicada por tiempo. Calcule la dimensión de $B(\nu,T)$. No es necesario saber qué magnitud física es k_B, ni saber, ni calcular su dimensión para resolver el problema.
Solución: $[B(\nu,T)] = MT^{-2}$.

De la ecuación de la radiancia deducimos:

$$B(\nu,T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\ \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1} \Rightarrow [B(\nu,T)] = \frac{[2][h][\nu^3]}{[c^2]}\ \frac{[1]}{[e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1]} \tag{148}$$

En el denominador tenemos el factor $e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1$. Se trata de la resta de dos términos. Los dos términos y su resta deben tener la misma dimensión. Esto significa que se cumple $[e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1] = [e^{\frac{h\nu}{k_BT}}] = [1]$. La dimensión de la exponencial es 1 y la dimensión de 1, una constante numérica adimensional, también es 1. Por tanto, $[e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1] = 1$.

La dimensión de h es energía por tiempo. Por tanto, $[h] = [E][t] = [Fr][t] = MLT^{-2}LT = ML^2T^{-1}$.

Introducimos las dimensiones de las magnitudes en la ecuación 148:

$$\left.\begin{array}{l} [2] = 1 \\ [h] = ML^2T^{-1} \\ [\nu^3] = [\nu]^3 = (T^{-1})^3 = T^{-3} \\ [c^2] = [c]^2 = (LT^{-1})^2 = L^2T^{-2} \\ [1] = 1 \\ [e^{\frac{h\nu}{k_BT}} - 1] = 1 \\ [B(\nu,T)] = \dfrac{[2][h][\nu^3]}{[c^2]} \dfrac{[1]}{[e^{\frac{h\nu}{k_BT}} - 1]} \end{array}\right\} \Rightarrow [B(\nu,T)] = \frac{ML^2T^{-1}T^{-3}}{L^2T^{-2}} = \frac{MT^{-4}}{T^{-2}} = MT^{-4}T^2 = \boxed{MT^{-2}} \quad (149)$$

39. El periodo T de las oscilaciones de la burbuja de aire producida por una explosión dentro del agua, depende de la presión P, de la densidad ρ y de la energía E liberada durante la explosión. Calcule mediante análisis dimensional T=$T(P,\rho,E)$.
Solución: $T = aP^{-5/6}\rho^{1/2}E^{1/3}$, a es una constante.

La forma matemática más sencilla de $T(P,\rho,E)$ es:

$$T = aP^{\alpha}\rho^{\beta}E^{\gamma} \,, \quad (150)$$

donde a es una constante. Partiendo de la ecuación anterior, obtenemos:

$$T = aP^{\alpha}\rho^{\beta}E^{\gamma} \Rightarrow [T] = [a][P]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[E]^{\gamma} \,. \quad (151)$$

La presión tiene dimensión de fuerza/superficie. Por lo tanto, su dimensión es:

$$[P] = [F]/[S] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} \quad (152)$$

La energía tiene dimensión de fuerza x desplazamiento o de masa x velocidad al cuadrado. Por tanto, su dimensión es:

$$[E] = [m][v^2] = [m][v]^2 = ML^2T^{-2} \quad (153)$$

Las dimensiones del periodo T y de la densidad ρ son $[T] = T$ y $[\rho] = ML^{-3}$, respectivamente. Incluimos las dimensiones de las magnitudes en la ecuación 151:

$$\left.\begin{array}{l} [a] = 1 \\ [T] = T \\ [P] = ML^{-1}T^{-2} \\ [\rho] = ML^{-3} \\ [E] = ML^2T^{-2} \\ [T] = [a][P]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[E]^{\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow T = (ML^{-1}T^{-2})^{\alpha}(ML^{-3})^{\beta}(ML^2T^{-2})^{\gamma} \quad (154)$$

Seguimos haciendo cálculos de álgebra, partiendo de la ecuación 154:

$$T = (ML^{-1}T^{-2})^{\alpha}(ML^{-3})^{\beta}(ML^{2}T^{-2})^{\gamma} \Rightarrow M^0L^0T^1 = M^{\alpha}L^{-\alpha}T^{-2\alpha}M^{\beta}L^{-3\beta}M^{\gamma}L^{2\gamma}T^{-2\gamma}$$
$$\Rightarrow M^0L^0T^1 = M^{\alpha+\beta+\gamma}L^{-\alpha-3\beta+2\gamma}T^{-2\alpha-2\gamma} \quad (155)$$

De la ecuación 155 obtenemos:

$$M^0L^0T^1 = M^{\alpha+\beta+\gamma}L^{-\alpha-3\beta+2\gamma}T^{-2\alpha-2\gamma} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha+\beta+\gamma \\ 0 = -\alpha-3\beta+2\gamma \\ 1 = -2\alpha-2\gamma \end{cases} \quad (156)$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones linealmente independientes y de tres incógnitas. Resolvemos ese sistema. Calculamos β:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha+\beta+\gamma \Rightarrow 0 = 2\alpha+2\beta+2\gamma \\ 1 = -2\alpha-2\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow 0+1 = 2\beta \Rightarrow \beta = 1/2 \quad (157)$$

Calculamos γ:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha+\beta+\gamma \\ 0 = -\alpha-3\beta+2\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -2\beta+3\gamma \Rightarrow 2\beta = 3\gamma \Rightarrow \gamma = 2\beta/3 \quad (158)$$

Introducimos el valor de β y obtenemos el valor de γ:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = 2\beta/3 \\ \beta = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma = 1/3 \quad (159)$$

Calculamos α:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -2\alpha-2\gamma \\ \gamma = 1/3 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = -2\alpha-2/3 \Rightarrow 1+2/3 = -2\alpha \Rightarrow 5/3 = -2\alpha \Rightarrow \alpha = -5/6 \quad (160)$$

Teniendo en cuenta los valores que hemos obtenido de α, β y γ, el periodo es:

$$\boxed{T = aP^{-5/6}\rho^{1/2}E^{1/3}} \quad (161)$$

40. Estructura de la materia. El virus covid-19 tiene un diámetro de unos 500 nanómetros. El virus está compuesto por átomos. El radio de los átomos es, en promedio, 1.5 angstroms. Suponiendo que el virus y los átomos tienen forma esférica, que el virus es compacto, es decir, que el interior del virus no está hueco y que los átomos no solapan entre sí, calcule el número de átomos que forman el virus. Exprese el resultado como un número entero multiplicado por una potencia de 10. Por ejemplo: 3 x 10^8. Volumen de una esfera de radio R: $4\pi R^3/3$.
Solución: 5 x 10^9.

Un nanómetro, nm, son 10^{-9} metros y un angstrom, Å, son 10^{-10} metros. Por tanto, 1 nm = 10 angstroms. El radio r del virus es, según el enunciado, 250 nanómetros = 2500 angstroms.

El volumen del virus, suponiendo que tiene forma de esfera, es $V = 4\pi\ r^3/3$. El volumen de un átomo es $V_a = 4\pi\ r_a^3/3$. El número N de átomos será:

$$N = \frac{V}{V_a} = \frac{4\pi r^3/3}{4\pi r_a^3/3} = \frac{r^3}{r_a^3} = \left(\frac{r}{r_a}\right)^3 \tag{162}$$

Sustituimos los valores numéricos de los dos radios y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{ll} N = \left(\frac{r}{r_a}\right)^3 & r = 2500 \\ r_a = 1{,}5 & \end{array}\right\} \Rightarrow N = \left(\frac{2500}{1{,}5}\right)^3 = 4629629629{,}62963 \approx \boxed{5\text{x}10^9\text{átomos}} \tag{163}$$

41. A partir del principio de Bernoulli se obtiene que la presión de un fluido a través de una tubería tiene la siguiente expresión:

$$P = \left(h + \frac{v^a}{2g}\right)\rho^b g$$

donde h es la altura de la tubería, v es la velocidad del fluido, ρ es la densidad del fluido, y g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.

a) Obtenga los exponentes a y b para que la ecuación sea dimensionalmente consistente.
Solución: a = 2 y b = 1.

b) Si un investigador en el laboratorio obtiene que la altura a la cual está una tubería con agua es h=1.25 ± 0.03 m y la velocidad del agua es v=2.50 ± 0.05 m/s, obtenga y escriba correctamente el valor de la presión y su error, utilizando la ecuación obtenida en el apartado (a). Suponga que g=9.8 m/s^2 y ρ=1000 kg/m^3, sin errores.
Solución: 15400 ± 400 Pa.

Solucionamos primero el apartado a). La ecuación del enunciado tiene un término a la izquierda y dos términos a la derecha. Según el análisis dimensional, los tres términos deben tener la misma dimensión. Por lo tanto, obtenemos:

$$P = \left(h + \frac{v^a}{2g}\right)\rho^b g \Rightarrow \begin{cases} [P] = [h\rho^b g] = [h][\rho]^b[g] \\ [P] = [\frac{v^a}{2g}\rho^b g] = [\frac{v^a}{2}\rho^b] = \frac{[v]^a}{[2]}[\rho]^b \end{cases} \tag{164}$$

Hacemos cálculos con cada una de las dos ecuaciones 164. Comenzamos con $[P] = [h][\rho]^b[g]$:

$$\left.\begin{array}{l} [P] = [F/S] = MLT^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2} \\ [h] = L \\ [\rho^b] = [\rho]^b = (ML^{-3})^b = M^bL^{-3b} \\ [g] = LT^{-2} \\ [P] = [h][\rho]^b[g] \end{array}\right\} \Rightarrow ML^{-1}T^{-2} = LM^bL^{-3b}LT^{-2} = M^bL^{2-3b}T^{-2} \tag{165}$$

De la ecuación 165 deducimos tres ecuaciones:

$$ML^{-1}T^{-2} = M^bL^{2-3b}T^{-2} \Rightarrow \begin{cases} 1 = b \\ -1 = 2-3b \\ -2 = -2 \end{cases} \tag{166}$$

La tercera ecuación es una identidad. La segunda ecuación es, en realidad, igual que la primera: $-1 = 2-3b \Rightarrow -3 = -3b \Rightarrow 1 = b$. Por lo tanto, solo hay una ecuación independiente:

$$1 = b \Rightarrow \qquad \boxed{b = 1} \tag{167}$$

Ahora hacemos cálculos con la segunda ecuación 164, $[P] = \dfrac{[v]^a}{[2]}[\rho]^b$:

$$\left.\begin{array}{l} [P] = [F/S] = MLT^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2} \\ [v]^a = (LT^{-1})^a = L^aT^{-a} \\ [2] = 1 \\ [\rho^b] = [\rho]^b = (ML^{-3})^b = M^bL^{-3b} \\ [P] = \dfrac{[v]^a}{[2]}[\rho]^b \end{array}\right\} \Rightarrow ML^{-1}T^{-2} = \frac{L^aT^{-a}}{1}M^bL^{-3b} = M^bL^{a-3b}T^{-a} \tag{168}$$

De la ecuación 168 se deducen tres ecuaciones:

$$ML^{-1}T^{-2} = M^bL^{a-3b}T^{-a} \Rightarrow \begin{cases} 1 = b \\ -1 = a-3b \\ -2 = -a \end{cases} \tag{169}$$

Estas tres ecuaciones no son linealmente independientes. Solo hay dos ecuaciones linealmente independientes:

$$\begin{array}{l} 1 = b \Rightarrow \boxed{b = 1} \\ -2 = -a \Rightarrow \boxed{a = 2} \end{array} \tag{170}$$

La primera solución, $b = 1$, ya la habíamos obtenido.

Ahora solucionamos el apartado b). La ecuación que usaremos será $P = \left(h + \dfrac{v^2}{2g}\right)\rho g$. Sustituimos los valores numéricos de h, v, g y ρ, en unidades del SI, en la ecuación anterior y obtenemos:

$$P = 1{,}25m + \frac{2{,}5m/s^2}{2x9{,}8m/s^2}1000kg/m^3 = 15375Pa \tag{171}$$

Calculamos el error de esta medida indirecta:

$$\Delta P = \left|\frac{\partial \Delta P}{h}\right| \Delta h + \left|\frac{\partial \Delta P}{v}\right| \Delta v = |\rho g| \Delta h + |v\rho| \Delta v \tag{172}$$

El error de la presión será ΔP = 1000 kg/m^3 x 9.8 m/s^2 0.03 m + 2.5 m/s x 1000 kg/m^3 x 0.05 m/s = 294 Pa + 125 Pa = 419 Pa. El error debe tener una sola cifra significativa. Por tanto, ΔP = 400 Pa. Redondeamos la magnitud medida, 15375 Pa, a 15400 Pa, para que el error y la medida sean del mismo orden de magnitud.

$$\boxed{15400 \pm 400 \text{ Pa}}$$

42. Un objeto de masa 250.3 ± 0.1 gramos se encuentra en reposo. Se aplica una fuerza de 10.21 ± 0.02 newtons sobre dicho objeto durante un intervalo de tiempo. Cuando la fuerza deja de actuar, la velocidad del objeto es 5.32 ± 0.03 m/s. Calcule y escriba correctamente el intervalo de tiempo de aplicación de la fuerza en segundos. Solución: 0.130 ± 0.001 s.

La aceleración imprimida por la fuerza sobre el objeto es a = F/m. Por otra parte, la aceleración imprimida también es a = Δv / Δt, donde Δt es el intervalo de tiempo de aplicación de la fuerza. Por lo tanto, Δt = Δv m / F. Sustituimos los valores númericos y encontramos que Δt = 5.32 m/s 0.2503 kg / 10.21 N = 0.13042076395690502 s.

Calculamos a continuación el error de esta medida indirecta:

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta t) &= \left|\frac{\partial \Delta t}{\Delta v}\right| \Delta(\Delta v) + \left|\frac{\partial \Delta t}{m}\right| \Delta m + \left|\frac{\partial \Delta t}{F}\right| \Delta F = \left|\frac{m}{F}\right| \Delta(\Delta v) + \left|\frac{\Delta v}{F}\right| \Delta m + \left|\frac{-\Delta v m}{F^2}\right| \Delta F = \\ &\frac{m}{F}\Delta(\Delta v) + \frac{\Delta v}{F}\Delta m + \frac{\Delta v m}{F^2}\Delta F = \frac{\Delta v m}{F}\frac{\Delta(\Delta v)}{\Delta v} + \frac{\Delta v m}{F}\frac{\Delta m)}{m} + \frac{\Delta v m}{F}\frac{\Delta F)}{F} = \\ &\frac{\Delta v m}{F}\left(\frac{\Delta(\Delta v)}{\Delta v} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta F}{F}\right) = \Delta t\left(\frac{\Delta(\Delta v)}{\Delta v} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta F}{F}\right)\end{aligned} \tag{173}$$

Los valores numéricos de los cocientes de la ecuación 173 son $\frac{\Delta(\Delta v)}{\Delta v}$ = 0.03/5.32, $\frac{\Delta m}{m}$ = 0.0001/0.2503 y $\frac{\Delta F}{F}$ = 0.02/10.21. Introducimos los valores numéricos en la ecuación 173:

$$\Delta(\Delta t) = 0{,}13042076 \text{ s } (0{,}03/5{,}32 + 0{,}0001/0{,}2503 + 0{,}02/10{,}21) = 0{,}0010430377 \text{ s} \tag{174}$$

El error debe tener una sola cifra significativa. Por lo tanto, $\Delta(\Delta t)$ = 0.001 s. La medida debe tener el mismo número de decimales que el error y, por tanto, Δ t = 0.130 s. Finalmente, la medida y su error correctamente expresados son:

$$\boxed{0.130 \pm 0.001 \text{ s}}$$