



Trabajo Fin de Máster

Máster en Física

Mención en Física Matemática

**Estudio y construcción de espacio-tiempos
no conmutativos y modelos de gravedad cuántica**

Autor:

Álvaro Salazar Cuadros

Tutores:

Javier Negro Vadillo

Iván Gutiérrez Sagredo

Resumen

Se construyen seis espacios homogéneos de Poisson coisótropos (2+1)-dimensionales y diez (3+1)-dimensionales de (Anti-)de Sitter mediante la clasificación de deformaciones Lie-algebraicas triangulares de los grupos de Poincaré y su posterior generalización al caso de constante cosmológica no nula. La condición de que la matriz r de las deformaciones sea triangular —esto es, solución de la CYBE— garantiza que los espacios (2+1)-dimensionales se pueden extender al caso (3+1)-dimensional, donde la coordenada adicional actúa como elemento central. Adicionalmente, se construye en (3+1)D el nuevo espacio-tiempo no conmutativo κ -(A)dS *lightlike* cuantizando su contraparte semiclásica en función de coordenadas ambiente. Este es la única generalización posible del ya conocido espacio-tiempo de κ -Poincaré *lightlike* dada la condición de que su matriz r sea solución de la CYBE.

Índice

1. Introducción	1
2. Fundamento matemático	2
2.1. Grupos de Lie, álgebras de Lie y espacios homogéneos Lorentzianos	2
2.1.1. Grupos de Poincaré y (Anti-)de Sitter	3
2.1.2. Álgebras de Poincaré y (Anti-)de Sitter	4
2.1.3. Espacio-tiempos de Minkowski y (Anti-)de Sitter	5
2.2. Grupos de Poisson-Lie, biálgebras de Lie y espacios homogéneos de Poisson . . .	6
2.2.1. Grupos de Poisson-Lie	6
2.2.2. Biálgebras de Lie y la ecuación clásica de Yang Baxter	7
2.2.3. Espacios homogéneos de Poisson coisótropos	9
2.3. Un ejemplo sencillo: el EHP coisótropo de Minkowski en $(1+1)\text{D}$	9
3. Espacio-tiempos no conmutativos en $(2+1)\text{D}$	11
3.1. Estructuras de Poisson-Lie triangulares en $(2+1)\text{D}$	11
3.2. Espacios homogéneos de Poisson coisótropos en $(2+1)\text{D}$	13
4. Espacio-tiempos no conmutativos en $(3+1)\text{D}$	19
4.1. Estructuras de Poisson-Lie triangulares en $(3+1)\text{D}$	19
4.2. Espacios homogéneos de Poisson coisótropos en $(3+1)\text{D}$	21
5. El espacio-tiempo no conmutativo $\kappa\text{-(A)dS lightlike}$	31
5.1. La deformación $\kappa\text{-(A)dS lightlike}$	31
5.2. El espacio-tiempo no conmutativo $\kappa\text{-(A)dS lightlike}$	34
6. Conclusiones y trabajo futuro	36
A. Clasificación de matrices r para $\text{iso}(2,1)$	37
B. Clasificación de matrices r para $\text{iso}(3,1)$	38

1. Introducción

La Relatividad General es, a día de hoy, la teoría física mediante la que entendemos la gravedad. En ella, el espacio-tiempo es un ente dinámico y la gravedad es una manifestación de la curvatura en este, provocada por la presencia de materia. Se trata además de una teoría clásica, ya que ignora los efectos de la Mecánica Cuántica. Sin embargo, es precisamente mediante la Mecánica Cuántica que entendemos cómo se comporta la materia a nivel fundamental, por lo que es natural buscar una descripción de la gravedad que concilie ambas teorías. A pesar de los grandes esfuerzos dedicados a esta tarea, aún no disponemos de una teoría cuántica de la gravedad.

Uno de los efectos esperados de la Gravedad Cuántica es la presencia de una escala de longitud mínima [1, 2]: la longitud de Planck l_P , cuyo valor viene dado por [3]

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,616255(18) \times 10^{-35} \text{ m}, \quad (1.1)$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck reducida, G la constante de Newton y c la velocidad de la luz en el vacío. La existencia de esta escala se puede intuir del hecho de que un fotón cuya longitud de onda alcance el valor l_P tendría una densidad de energía concentrada en una región tan pequeña que colapsaría en un agujero negro, haciendo así imposible resolver longitudes más pequeñas a esta.

Esta incertidumbre, en principio intrínseca a la teoría, se puede describir de manera efectiva mediante unas relaciones de conmutación no nulas entre unos operadores de coordenadas espacio-temporales $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \neq 0$, idea propuesta originalmente por Heisenberg (ver [2]) y llevada a cabo por primera vez por Snyder en [4] para regularizar divergencias en teorías de campos. Así, una geometría no conmutativa daría lugar a relaciones de incertidumbre, de forma análoga a lo que sucede en Mecánica Cuántica con el Principio de incertidumbre de Heisenberg

$$[\hat{x}^a, \hat{p}_b] = i\hbar\delta_b^a \implies \Delta x^a \Delta p_b \geq \frac{\hbar}{2}\delta_b^a \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

La presencia de geometrías no conmutativas en distintos acercamientos a Gravedad Cuántica [1, 3] ha aumentado el interés por estas en las últimas décadas.

En particular, una manera consistente de construir espacio-tiempos no conmutativos es imponiendo que sean covariantes bajo la acción de un grupo cuántico de simetrías [3]. El ejemplo más conocido es el espacio-tiempo de κ -Minkowski [5], covariante bajo el grupo cuántico de κ -Poincaré [6, 7]. El uso de técnicas de geometría de Poisson para construir versiones semiclásicas y posterior cuantización es un enfoque que ha resultado especialmente fructífero [8, 9], similarmente a cómo del límite clásico de (1.2) recuperamos los corchetes de Poisson de la Mecánica Clásica

$$\frac{[\hat{x}^a, \hat{p}_b]}{i\hbar} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \{x^a, p_b\} = \delta_b^a. \quad (1.3)$$

Es en este contexto donde se sitúa el presente trabajo, centrándonos en la construcción de las versiones de Poisson de los espacio-tiempos no conmutativos: los espacios homogéneos de Poisson.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. El Capítulo 2 explica las bases del fundamento matemático y la metodología seguida, dando además ejemplo para ilustrar los cálculos realizados más adelante. Empezamos con los resultados en el Capítulo 3, donde construimos espacios homogéneos de Poisson en (2+1)D y los generalizamos al espacio-tiempo curvo de (Anti-)de Sitter. A continuación, en el Capítulo 4 obtenemos los resultados en (3+1)D análogos a los anteriores en (2+1)D, discutiendo la relación entre ellos. Llegamos entonces al Capítulo 5 donde se construye el espacio-tiempo no conmutativo κ -(A)dS *lightlike*, producido por la única generalización de la deformación κ -Poincaré *lightlike*, considerada por primera vez en [10], al grupo de (Anti-)de Sitter. Concluimos el trabajo en el Capítulo 6 con unas consideraciones finales sobre la relevancia de los resultados obtenidos y trabajo futuro a realizar.

2. Fundamento matemático

El objetivo de este Capítulo es introducir y explicar los conceptos y técnicas geométricas que son necesarios para el desarrollo de este trabajo, dando las definiciones y resultados relevantes de forma concisa. Con el fin de no extenderse demasiado, se priorizará transmitir las ideas fundamentales frente a un rigor excesivo, por lo que se omitirán algunos detalles que no son centrales para el presente trabajo. En caso de que se quiera profundizar en el tema, nos referimos a la bibliografía seguida [11, 12, 13, 14].

La primera sección 2.1 está dedicada a repasar los conceptos básicos de la teoría de grupos y álgebras de Lie y cómo estos están relacionados. En ella, se definen los grupos de Lie que usaremos en este trabajo: los grupos de Poincaré, de Sitter y Anti-de Sitter. Comentaremos su significado físico y detallaremos sus respectivas álgebras de Lie. Por último, introducimos la noción de espacio homogéneo, construcción que garantiza que un determinado espacio-tiempo se covariante bajo la acción de un determinado grupo de simetrías.

A continuación, la sección 2.2 introduce las herramientas de geometría de Poisson necesarias para la construcción de los espacio-tiempos no conmutativos. La idea principal es dotar de una estructura de Poisson adicional a los objetos de la sección anterior. Así, con un grupo de Lie obtenemos un grupo de Poisson-Lie, que en cierto sentido deforma la simetría del grupo. A nivel de álgebra de Lie también introduce una estructura adicional, conocida como biálgebra de Lie, donde además destacamos la importancia de la ecuación clásica de Yang-Baxter y mencionamos algunos ejemplos importantes de matrices r . Es entonces cuando por fin llegamos a los objetos centrales de este trabajo: los espacios homogéneos de Poisson. Estos no son más que espacios homogéneos covariantes bajo la acción de un grupo de Poisson-Lie y se entienden como una versión semiclásica de un espacio-tiempo cuántico.

Finalmente, en la sección 2.3 se desarrolla con todo detalle la construcción de un espacio-tiempo no conmutativo en $(1+1)D$ a modo de ejemplo. La intención de este último apartado es aplicar las técnicas matemáticas introducidas en el Capítulo a un grupo sencillo como es el de Poincaré en $(1+1)D$ explicando el proceso de construcción paso a paso, poniendo el foco de este modo en la metodología seguida en el resto del trabajo.

2.1. Grupos de Lie, álgebras de Lie y espacios homogéneos Lorentzianos

Empezamos recordando las nociones básicas de geometría diferencial y teoría de grupos, estableciendo la notación que se usará a lo largo del Capítulo.

La base de la geometría diferencial son las *variedades diferenciables*, a las que denotamos como M . Intuitivamente, las variedades son la generalización del concepto de superficie a dimensión arbitraria. Cuando la dotamos de una estructura diferenciable adicional, podemos tener funciones con cierta noción de suavidad o diferenciabilidad, y es entonces cuando tenemos entonces una variedad diferenciable. Al conjunto de funciones f diferenciables de la variedad en $\mathbb{R}$ las denotamos como $C^\infty(M)$. Además, podemos tener aplicaciones $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades M y N que también respeten la noción de diferenciabilidad. Del mismo modo en cada punto de una superficie tenemos planos tangentes a esta, en cada punto p de una variedad M tenemos un espacio vectorial de la misma dimensión que la variedad, al que llamamos *espacio tangente de M en p* y escribimos como $T_p M$. La unión de todos los espacios tangentes define el *fibrado tangente* TM , a cuyas secciones $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ las llamamos *campos vectoriales* y sus elementos $X \in \mathfrak{X}(M)$ actúan como derivaciones sobre funciones $f \mapsto Xf$.

La siguiente estructura que necesitamos presentar describe la noción de simetría y es de naturaleza algebraica. Un *grupo* G es un conjunto (finito o infinito) de elementos con una operación binaria μ llamada *multiplicación del grupo* que es cerrada, es decir, $(g, h) \mapsto \mu(g, h) \equiv gh \in G$

para cualquier par de elementos $g, h \in G$. Esta multiplicación debe satisfacer:

- (i) para todos los $g_1, g_2, g_3 \in G$ tenemos que $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ (asociatividad),
- (ii) existe un $e \in G$ tal que para cada $g \in G$ tenemos que $eg = ge = g$ (existencia la identidad),
- (iii) para cada $g \in G$ existe un g^{-1} tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ (existencia del inverso).

Dicho esto, estamos en disposición de dar la primera definición.

Definición 2.1. Un *grupo de Lie* es un grupo G con estructura de variedad diferenciable, de modo que la multiplicación del grupo

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned} \tag{2.1}$$

es una aplicación diferenciable. Un *subgrupo de Lie* H de G es un subgrupo de G que es además una subvariedad de este.

Los grupos de Lie describen entonces las simetrías continuas, como las rotaciones o traslaciones. Al dotar de estructura de variedad diferenciable al grupo, podemos estudiar cómo se comporta la multiplicación en un entorno muy cercano a la identidad, lo que sería una transformación infinitesimal del grupo. Estas transformaciones definen una estructura de álgebra de Lie.

Definición 2.2. Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ es espacio vectorial equipado con una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ llamada *paréntesis de Lie* donde $\otimes$ denota el producto tensorial, que satisface:

- (i) $[X, Y] = -[Y, X]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ (antisimetría),
- (ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ (identidad de Jacobi).

El paréntesis de Lie de dos elementos cualesquiera del álgebra se puede expresar mediante una combinación lineal $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$ para $X_i, X_j, X_k \in \mathfrak{g}$, donde usamos el convenio de suma de Einstein para índices repetidos, que mantendremos de aquí en adelante. Los coeficientes c_{ij}^k son las *constantes de estructura* y a los elementos de $\mathfrak{g}$ también los llamamos *generadores*.

Para un grupo G identificamos su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ con el espacio tangente en la identidad $T_e G$ y con el conmutador de campos vectoriales $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ como paréntesis de Lie. La estructura de álgebra de Lie de un grupo de Lie determina completamente el comportamiento local del grupo a través de la operación de *exponenciación* $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$. De este modo, a partir de la derivación de la multiplicación en G obtenemos su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, el cual codifica el comportamiento local de G y exponenciando los generadores recuperamos los elementos de G . Damos ahora una definición que necesitaremos para cálculos futuros.

Definición 2.3. Los *campos vectoriales invariantes por la izquierda* X_i^L y por la derecha X_i^R son un subconjunto de los campos vectoriales en el grupo $\mathfrak{X}(G)$, que se calculan como

$$(X_i^L f)(h) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(h e^{tT_i}), \quad (X_i^R f)(h) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(e^{tT_i} h), \tag{2.2}$$

con $f \in C^\infty(G)$ y $T_i \in \mathfrak{g}$, en el elemento del grupo $h \in G$.

2.1.1. Grupos de Poincaré y (Anti-)de Sitter

Definidos los conceptos más generales, pasamos a considerar ejemplos concretos que tienen aplicación directa en el trabajo. Definimos ahora la siguiente familia de grupos matriciales.

Definición 2.4. El *grupo especial ortogonal* $SO(p, q)$ es el grupo de matrices $n \times n$ con $n = p + q$ de determinante 1 que dejan invariantes la forma cuadrática $I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, siendo I_m la

matriz identidad $m \times m$:

$$SO(p, q) := \{Q \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det Q = 1 \mid Q^T I_{p,q} Q = I_{p,q}\}. \quad (2.3)$$

A partir de él, definimos el *grupo especial ortogonal inhomogéneo* $ISO(p, q)$ mediante el producto semidirecto $ISO(p, q) := \mathbb{R}^{p+q} \rtimes SO(p, q)$ con la multiplicación de grupo dada por

$$(a, Q) \cdot (a', Q') = (a + Qa', QQ'); \quad (2.4)$$

con a, a' vectores en $\mathbb{R}^{p+q}$ y Q, Q' matrices en $SO(p, q)$.

Los grupos de Lie con los que vamos a trabajar, que llamaremos *grupos de Lie Lorentzianos*, son casos particulares de grupos especiales ortogonales (inhomogéneos). Esos son:

- *grupo de Lorentz* en d dimensiones al grupo $SO(d-1, 1)$,
- *grupo de Poincaré* en d dimensiones al grupo $ISO(d-1, 1)$,
- *grupo de de Sitter (dS)* en d dimensiones al grupo $SO(d, 1)$,
- *grupo de anti-de Sitter (AdS)* en d dimensiones al grupo $SO(d-1, 2)$.

Estos grupos¹ son importantes en física, pues describen simetrías del espacio-tiempo. En particular, el grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ en (3+1)D está formado por tres rotaciones y tres *boosts*, que son las transformaciones que dejan invariante la *métrica de Minkowski* $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Añadiendo tres traslaciones espaciales y una temporal, obtenemos el grupo de Poincaré $ISO(3, 1)$ en (3+1)D. El grupo de (Anti-)de Sitter, de aquí en adelante (A)dS, es una generalización de este último en el caso de un espacio-tiempo con curvatura constante positiva (negativa) introducida por la presencia de una *constante cosmológica* $\Lambda > 0 (< 0)$, lo que resulta en que las traslaciones no conmuten. La interpretación de los respectivos grupos en (2+1)D es análoga, en los que claramente tendremos un menor número de simetrías.

2.1.2. Álgebras de Poincaré y (Anti-)de Sitter

Habiendo definido los grupos Lorentzianos en (3+1)D, el siguiente paso es escribir sus álgebras de Lie en la *base cinemática*. Esta está formada por $\{P_0, P_a, K_a, J_a\}$ ($a = 1, 2, 3$), que son los generadores de las traslaciones temporales, traslaciones espaciales, *boosts* y rotaciones; respectivamente. Las relaciones de conmutación de estas álgebras de Lie se pueden expresar conjuntamente en función de la constante cosmológica Λ como

$$\begin{aligned} [J_a, J_b] &= \varepsilon_{abc} J_c, & [J_a, P_b] &= \varepsilon_{abc} P_c, & [J_a, K_b] &= \varepsilon_{abc} K_c, \\ [K_a, P_0] &= P_a, & [K_a, P_b] &= \delta_{ab} P_0, & [K_a, K_b] &= -\varepsilon_{abc} J_c, \\ [P_0, P_a] &= -\Lambda K_a, & [P_a, P_b] &= \Lambda \varepsilon_{abc} J_c, & [P_0, J_a] &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

con $a, b, c = 1, 2, 3$. Tenemos aquí, en (3+1)D, el álgebra de Lie de Poincaré $\mathfrak{iso}(3, 1)$ para $\Lambda = 0$, de Sitter $\mathfrak{so}(4, 1)$ para $\Lambda > 0$ y anti-de Sitter $\mathfrak{so}(3, 2)$ para $\Lambda < 0$. Aunque hayamos escrito los conmutadores conjuntamente, es importante aclarar que estas tres álgebras de Lie no son isomorfas. Tomando únicamente los generadores $\{P_0, P_1, P_2, K_1, K_2, J_3\}$, podemos observar en (2.5) que estos cierran subálgebras, que son las álgebras de Lie análogas en (2+1)D.

¹Si bien el grupo de Lorentz en d dimensiones es isomorfo al grupo de dS en $d-1$, nos referimos a ellos de forma distinta por sus diferentes interpretaciones físicas.

2.1.3. Espacio-tiempos de Minkowski y (Anti-)de Sitter

En este apartado vamos a explicar cómo un grupo de Lie actúa sobre una variedad, lo que se traducirá en cómo las simetrías de los grupos Lorentzianos actúan sobre el espacio-tiempo.

Definición 2.5. Sea G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Una *acción de G en M* es una aplicación $\alpha : G \times M \rightarrow M$ que toma un elemento g del grupo y un punto p en la variedad y lo traslada a otro punto $\alpha(g, p)$ siendo un homomorfismo respecto de G .

Intuitivamente, una acción es una función que toma puntos en M y los transforma suavemente a otros puntos de la variedad, de modo que esas transformaciones respetan la multiplicación del grupo. Dado un subgrupo de Lie H de G , podemos construir una variedad mediante el cociente G/H donde decimos que g y g' son equivalentes si están relacionados mediante un elemento $h \in H$, es decir, $g \sim g' \iff g' = gh$. Si además tenemos una acción de G en G/H , decimos que el cociente G/H es un *espacio homogéneo* y H es un *subgrupo de isotropía*.

Un espacio homogéneo nos habla entonces de cómo ciertas transformaciones dejan este espacio invariante. En nuestro caso, el subgrupo de isotropía es el grupo de Lorentz y los espacios homogéneos son los distintos espacio-tiempos, covariantes bajo la acción de este grupo. Llamaremos:

- *espacio-tiempo de Minkowski* en d dimensiones al cociente $ISO(d-1, 1)/SO(d-1, 1)$,
- *espacio-tiempo de de Sitter* en d dimensiones al cociente $SO(d, 1)/SO(d-1, 1)$,
- *espacio-tiempo de anti-de Sitter* en d dimensiones al cociente $SO(d-1, 2)/SO(d-1, 1)$.

En el espacio-tiempo de Minkowski en (3+1)D usaremos las *coordenadas locales* $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, donde x^0 es la coordenada en la dirección temporal. Cuando estemos en una dimensión menor, usaremos coordenadas (x^0, x^1, x^2) .

En el espacio-tiempos de (A)dS en (3+1)D es natural usar *coordenadas ambiente* $(s^4, s^0, s^1, s^2, s^3)$ que están sujetas a la condición

$$(s^4)^2 - \Lambda[(s^0)^2 - (s^1)^2 - (s^2)^2 - (s^3)^2] = 1. \quad (2.6)$$

Estas se relacionan con las coordenadas locales como

$$\begin{aligned} s^4 &= \cos(\eta x^0) \cosh(\eta x^1) \cosh(\eta x^2) \cosh(\eta x^3), & s^2 &= \frac{\sinh(\eta x^2)}{\eta} \cosh(\eta x^3), \\ s^0 &= \frac{\sinh(\eta x^0)}{\eta} \cosh(\eta x^1) \cosh(\eta x^2) \cosh(\eta x^3), & s^3 &= \frac{\sinh(\eta x^3)}{\eta}, \\ s^1 &= \frac{\sinh(\eta x^1)}{\eta} \cosh(\eta x^2) \cosh(\eta x^3), \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde $\eta^2 = -\Lambda$. En el límite de constante cosmológica nula, $\eta \rightarrow 0$ y las coordenadas ambiente se reducen a las coordenadas locales usuales: $(s^4, s^\mu) \rightarrow (1, x^\mu)$. En el caso (2+1)-dimensional, usamos las coordenadas ambiente (s^4, s^0, s^1, s^2) definidas como

$$\begin{aligned} s^4 &= \cos(\eta x^0) \cosh(\eta x^1) \cosh(\eta x^2), & s^0 &= \frac{\sinh(\eta x^0)}{\eta} \cosh(\eta x^1) \cosh(\eta x^2), \\ s^1 &= \frac{\sinh(\eta x^1)}{\eta} \cosh(\eta x^2), & s^2 &= \frac{\sinh(\eta x^2)}{\eta}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

que son (2.7) restringidas al plano $s^3 = 0$ y cuando $\eta \rightarrow 0$ tenemos $(s^4, s^0, s^1, s^2) \rightarrow (1, x^0, x^1, x^2)$.

2.2. Grupos de Poisson-Lie, biálgebras de Lie y espacios homogéneos de Poisson

Nos trasladamos ahora al terreno de la geometría de Poisson, donde introducimos las herramientas y técnicas usadas en este trabajo. La idea principal es construir la versión de Poisson de los objetos geométricos de la sección 2.1. Por este motivo, exponemos los conceptos en un orden análogo, buscando un paralelismo entre ambas secciones.

En primer lugar, vamos a dotar a las variedades diferenciables con una estructura de Poisson. **Definición 2.6.** Una *variedad de Poisson* $(M, \{\cdot, \cdot\})$ es una variedad diferenciable M equipada con una aplicación $\mathbb{R}$ -bilineal $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ llamada *corchete de Poisson* que satisface:

- (i) $\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}$ (antisimetría),
- (ii) $\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0$ (identidad de Jacobi),
- (iii) $\{f_1, f_2 f_3\} = f_2 \{f_1, f_3\} + \{f_1, f_2\} f_3$ (regla de Leibniz)

para todas las funciones $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$. Además, llamamos *función de Casimir* a la función $C \in C^\infty(M)$ que cumple $\{C, f\} = 0$ para toda $f \in C^\infty(M)$.

Las dos primeras condiciones nos dicen que $\{\cdot, \cdot\}$ define un álgebra de Lie de funciones en la variedad, mientras que (iii) dice que el corchete actúa como una derivación². Definimos ahora una condición de compatibilidad entre las funciones diferenciables y el corchete de Poisson.

Definición 2.7. Sean $(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$ y $(N, \{\cdot, \cdot\}_N)$ dos variedades de Poisson y $\varphi : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable entre ellas. Decimos que φ es una *aplicación de Poisson* si para cualquier par de funciones $f_1, f_2 \in C^\infty(N)$ cumple

$$\{f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi\}_M = \{f_1, f_2\}_N \circ \varphi. \quad (2.9)$$

2.2.1. Grupos de Poisson-Lie

Buscamos ahora construir la versión de Poisson de un grupo de Lie G . Sabemos que la multiplicación del grupo (2.1), vista como aplicación entre variedades de $G \times G$ en G , es diferenciable. Así, lo más natural es pedir que sea también una aplicación de Poisson.

Definición 2.8. Un *grupo de Poisson-Lie* $(G, \{\cdot, \cdot\})$ es un grupo de Lie G dotado de una estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ que es además compatible con la multiplicación del grupo (2.1) de modo que esta es una aplicación de Poisson

$$\{f_1, f_2\}_G \circ \mu(g, h) = \{f_1 \circ \mu, f_2 \circ \mu\}_{G \times G}(g, h) \quad (2.10)$$

para todas las funciones $f_1, f_2 \in C^\infty(G)$ y g, h en el grupo G .

En la expresión (2.10), tenemos que $G \times G$ y G juegan respectivamente los papeles de las variedades M y N en la Definición 2.7 y la estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{G \times G}$ está dada por

$$\{F_1, F_2\}_{G \times G}(g, h) = \{F_1(\cdot, h), F_2(\cdot, h)\}_G(g) + \{F_1(g, \cdot), F_2(g, \cdot)\}_G(h), \quad (2.11)$$

con $F_1, F_2 \in C^\infty(G \times G)$.

²Se puede dar una definición alternativa de estructura de Poisson en términos de un *bivector de Poisson* $\pi \in \Gamma(TM \wedge TM)$ donde la identidad de Jacobi es equivalente a $[\pi, \pi] = 0$, con $[\cdot, \cdot]$ el llamado *corchete de Schuten-Nijenhuis* [15].

2.2.2. Biálgebras de Lie y la ecuación clásica de Yang Baxter

Del mismo modo que a nivel infinitesimal un grupo de Lie G está descrito por su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, un grupo de Poisson-Lie tiene una contraparte tangente en la que el corchete introduce una estructura adicional al álgebra de Lie.

Definición 2.9. Una *biálgebra de Lie* $(\mathfrak{g}, \delta)$ es un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ junto con una aplicación $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ llamada *coconmutador*, que satisface:

- (i) $\delta(X) \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ (antisimetría),
- (ii) $\sum_{\text{cicl.}} (\delta \otimes 1) \circ \delta(X) = 0$ (condición de co-Jacobi),
- (iii) $\delta([X, Y]) = \text{ad}_X \delta(Y) - \text{ad}_Y \delta(X)$ (condición de cociclo),

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. También nos referiremos a las biálgebras de Lie como deformaciones.

Recordemos que el producto cuña $\wedge$ se define como $u \wedge v = u \otimes v - v \otimes u$, y la *acción adjunta* $\text{ad}_X : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ que aparece en la condición (iii) es la aplicación que envía $t \mapsto [X \otimes 1 + 1 \otimes X, t]$, para todo $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Las condiciones (i) y (ii) son equivalentes a decir que la aplicación dual del coconmutador ${}^t\delta : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ define una estructura de álgebra de Lie en el espacio dual $\mathfrak{g}^*$, de ahí el nombre de biálgebra de Lie.

Los grupos de Poisson-Lie y biálgebras de Lie guardan una relación análoga a la de grupos de Lie y álgebras de Lie. Más adelante detallaremos cómo a partir de una biálgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \delta)$ obtenemos una estructura de Poisson-Lie $(G, \{\cdot, \cdot\})$ en el grupo. Antes de ello, necesitamos unas definiciones más.

Definición 2.10. Dado un elemento $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, definimos el *corchete de Schouten algebraico*

$$[[r, r]] = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}], \quad (2.12)$$

donde los tres sumandos se calculan como

$$\begin{aligned} [r_{12}, r_{13}] &= r^{ij} r^{kl} [X_i, X_k] \otimes X_j \otimes X_l, \\ [r_{12}, r_{23}] &= r^{ij} r^{kl} X_i \otimes [X_j, X_k] \otimes X_l, \\ [r_{13}, r_{23}] &= r^{ij} r^{kl} X_i \otimes X_k \otimes [X_j, X_l]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Definición 2.11. Dado $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, definimos la *ecuación clásica de Yang-Baxter (CYBE)* como

$$[[r, r]] = 0. \quad (2.14)$$

Definimos también la *ecuación clásica de Yang-Baxter modificada (mCYBE)*

$$\text{ad}_X [[r, r]] := [X \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes X \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes X, [[r, r]]] = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \quad (2.15)$$

A un elemento $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ antisimétrica lo llamamos matriz r clásica *cuasitriangular* si es solución de la mCYBE. Si además es solución de la CYBE, decimos que es *triangular*.

Podemos reescribir la CYBE (2.14) usando coordenadas, lo cual es útil para poder implementar el corchete de Schouten herramientas de cálculo simbólico. Sea $r = r^{ij} X_i \wedge X_j$ una matriz r antisimétrica ($r^{ij} = -r^{ji}$), entonces:

$$[[r, r]] = 0 \iff r^{lj} r^{mk} c_{lm}^i + r^{il} r^{mk} c_{lm}^j + r^{il} r^{jm} c_{lm}^k = 0. \quad (2.16)$$

Definimos ahora una clase particular de biálgebras de Lie, que son precisamente las que aparecen en este trabajo.

Definición 2.12. Decimos que un coconmutador (cociclo) $\delta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ es un *coborde* si es de la forma

$$\delta(X) = [X \otimes 1 + 1 \otimes X, r], \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \text{ cuasitriangular.} \quad (2.17)$$

Así, decimos que una biálgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \delta)$ es coborde si su coconmutador δ lo es. Del mismo modo, un grupo de Poisson-Lie es coborde si su biálgebra de Lie también lo es.

Tenemos dos razones principales para interesarnos por las biálgebras cobordes. La primera es que estas definen una estructura de Poisson canónica sobre su grupo de Lie, que lo vemos en la siguiente Proposición.

Proposición 2.1. [16] Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Sea también r una matriz antisimétrica $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ que define una biálgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \delta)$ coborde. Entonces, existe un único grupo de Poisson-Lie $(G, \{\cdot, \cdot\})$ con biálgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \delta)$ cuya estructura de Poisson está dada por el corchete de Sklyanin:

$$\{f_1, f_2\} = r^{ij} (X_i^L f_1 X_j^L f_2 - X_i^R f_1 X_j^R f_2) \quad (2.18)$$

para todas las funciones $f_1, f_2 \in C^\infty(G)$.

En la fórmula para el corchete de Sklyanin (2.18), r^{ij} son las componentes de la matriz r y X_i^L, X_i^R son los campos vectoriales invariantes definidos en (2.2). El otro motivo del interés por las biálgebras cobordes es el siguiente resultado, con implicación directa en este trabajo.

Teorema 2.1. [17] Sea el grupo $ISO(p, q)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{iso}(p, q)$. Sea también $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ una matriz r . Entonces, para $p + q > 2$

- i) la aplicación $r \mapsto [\cdot \otimes 1 + 1 \otimes \cdot, r]$ es inyectiva,
- ii) todo coconmutador $\delta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ es un coborde.

En particular, este Teorema nos dice que todas las estructuras de Poisson-Lie en los grupos de Poincaré de $(2+1)D$ y $(3+1)D$ están en correspondencia uno a uno con matrices r , motivo por el cual nos referiremos a ellas también como deformaciones. Así, dar con una clasificación de estas matrices r equivale a clasificar todas las estructuras de Poisson-Lie sobre dichos grupos.

Antes de finalizar este apartado, vamos a introducir una importante familia de matrices r en el grupo de Poincaré en $(3+1)D$, que son conocidas como *deformaciones* κ debido a que se suelen escribir multiplicadas por un factor $1/\kappa$ que se presupone proporcional a la longitud de Planck [18, 5]. Estas matrices están parametrizadas por un cuadvivector a^μ y se pueden escribir en notación covariante como [17, 19, 20]

$$r = a^\mu \eta^{\nu\rho} P_\rho \wedge M_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, 3; \quad (2.19)$$

donde $\eta^{\nu\rho}$ son las componentes de la inversa de la métrica de Minkowski y los generadores P_ρ son los de las traslaciones y los $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ se corresponden con los del sector de Lorentz mediante

$$M_{a0} = K_a, \quad M_{ab} = \varepsilon_{abc} J_c, \quad a, b, c = 1, 2, 3. \quad (2.20)$$

Según la norma de Minkowski del cuadvivector $\eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$, este puede ser *timelike* (>0), *spacelike* (<0) o *lightlike* ($=0$). Distinguimos los tres casos:

- *Timelike*, donde podemos elegir $a^\mu = (1, 0, 0, 0)^T$ y tenemos la deformación cuasitriangular

$$r_{\text{time}}^{3+1} = P_1 \wedge K_1 + P_2 \wedge K_2 + P_3 \wedge K_3. \quad (2.21)$$

- *Spacelike*, donde podemos elegir $a^\mu = (0, 1, 0, 0)^T$ y tenemos la deformación cuasitriangular

$$r_{\text{space}}^{3+1} = P_0 \wedge K_1 - P_2 \wedge J_3 + P_3 \wedge J_2. \quad (2.22)$$

- *Lightlike*, donde podemos elegir $a^\mu = (1, 1, 0, 0)^T$ y tenemos

$$r_{\text{light}}^{3+1} = (P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2). \quad (2.23)$$

Esta última deformación es triangular y será especialmente importante en el trabajo, donde además aparecen sus versiones en $(1+1)\text{D}$ y $(2+1)\text{D}$, también triangulares

$$r_{\text{light}}^{1+1} = (P_0 + P_1) \wedge K_1, \quad (2.24)$$

$$r_{\text{light}}^{2+1} = (P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3). \quad (2.25)$$

2.2.3. Espacios homogéneos de Poisson coisótropos

Después de haber introducido todos los conceptos necesarios, finalmente estamos en disposición de definir el objeto central de estudio en este trabajo: los espacios homogéneos de Poisson. Al igual que sucede con el resto de conceptos de la sección, estos son la versión de Poisson de los espacios homogéneos definidos en 2.5.

Definición 2.13. Un *espacio homogéneo de Poisson (EHP)* sobre el grupo G como un espacio homogéneo G/H con una estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{G/H}$ compatible con la acción del grupo.

En vista a introducir estas estructuras de Poisson a los espacio-tiempos Lorentzianos, nos interesan los EHP que se obtienen a partir del cociente G/H donde además $(G, \{\cdot, \cdot\})$ es un grupo de Poisson-Lie. Para que estos estén bien definidos, no es necesario que el subgrupo de isotropía H sea un subgrupo de Poisson-Lie. De hecho, la condición necesaria y suficiente se da a nivel de biálgebra, que llamamos *condición de coisotropía* [21, 22] y

$$\delta(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h} \wedge \mathfrak{g}, \quad (2.26)$$

donde $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$. Cuando esta condición se cumple, se demuestra [22] que la estructura de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{G/H}$ en el EHP G/H está dada por la proyección canónica del corchete de Sklyanin (2.18).

La importancia física de los EHP coisótropos radica en que, si G/H es un espacio-tiempo, este adquiere una estructura de Poisson que se puede escribir mediante el corchete de sus coordenadas $\{x^\mu, x^\nu\}$, donde recordemos que son funciones de G/H como variedad. Una vez se cuenta con esta estructura bien definida (lo cual está garantizado siempre que se realice la construcción como se ha descrito), podemos promover las funciones coordenadas x^μ a un álgebra no conmutativa de operadores $\hat{x}^\mu$, de manera que las relaciones de los corchetes son ahora relaciones de conmutación $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]$. A este proceso lo llamamos *cuantización* y ahora las coordenadas $\hat{x}^\mu$ son funciones en un *espacio-tiempo no conmutativo*.

Cabe mencionar un caso particular de EHP coisótropos del grupo de Poincaré, que son aquellos en los que la matriz r es el producto de generadores de traslaciones con el sector de Lorentz, es decir, $r \in \mathfrak{h} \wedge \mathfrak{t}$. En esta clase de deformaciones, los corchetes $\{x^\mu, x^\nu\}$ cierran un álgebra de Lie de las coordenadas [6], que al ser lineal su cuantización es directa.

2.3. Un ejemplo sencillo: el EHP coisótropo de Minkowski en $(1+1)\text{D}$

El objetivo de esta última sección es explicar la metodología usada en el trabajo para la construcción de los EHP coisótropos. A pesar de la potencial complejidad del fundamento matemático, la construcción de los EHP es sistemática y sigue un procedimiento bien definido. Vamos a ilustrar esto usando como ejemplo el grupo $G = \text{ISO}(1, 1)$ o de Poincaré en $(1+1)\text{D}$.

En primer lugar, escribimos las relaciones de su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{iso}(1, 1)$, que no son más que (2.5) con $\Lambda = 0$ restringidas a los generadores $\{P_0, P_1, K_1\}$. Renombrando $K \equiv K_1$, tenemos

$$[P_0, P_1] = 0, \quad [K, P_0] = P_1, \quad [K, P_1] = P_0. \quad (2.27)$$

Consideramos la representación matricial del álgebra de Lie $\varrho : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$\varrho(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varrho(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varrho(K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Exponenciando generadores (2.28) de la representación, obtenemos un elemento genérico g del grupo parametrizado por (x^0, x^1, ξ) , cuya expresión es

$$g(x^0, x^1, \xi) = \exp x^0 \varrho(P_0) \exp x^1 \varrho(P_1) \exp \xi \varrho(K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^0 & \cosh \xi & \sinh \xi \\ x^1 & \sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

El orden elegido factoriza el grupo $G = T \cdot H$ de forma que podemos interpretar las coordenadas (x^0, x^1) como aquellas del espacio-tiempo de Minkowski G/H , siendo $H = SO(1, 1)$ el subgrupo de Lorentz. Además, de (2.29) calculamos los campos vectoriales invariantes (2.2), que son

$$\begin{aligned} X_{P_0}^L &= \cosh \xi \partial_{x^0} + \sinh \xi \partial_{x^1}, & X_{P_0}^R &= \partial_{x^0}, \\ X_{P_1}^L &= \sinh \xi \partial_{x^0} + \cosh \xi \partial_{x^1}, & X_{P_1}^R &= \partial_{x^1}, \\ X_K^L &= \partial_\xi, & X_K^R &= x^1 \partial_{x^0} + x^0 \partial_{x^1} + \partial_\xi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

El siguiente paso es ver qué deformaciones triangulares tenemos en el álgebra. Para ello, tomamos un elemento en $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ arbitrario $r = aP_0 \wedge P_1 + bP_0 \wedge K + cP_1 \wedge K$, al que imponemos la CYBE (2.14), resultando en las siguientes soluciones

$$0 = [[r, r]] = (b^2 - c^2)P_0 \wedge P_1 \wedge K \iff b = \pm c. \quad (2.31)$$

Podemos relacionar ambas mediante el automorfismo $P_1 \rightarrow -P_1, K \rightarrow -K$; por lo que definen la misma deformación. Por simplicidad, nos restringiremos al caso $a = 0$ y renombramos $b = c \equiv \alpha$,

$$r = \alpha(P_0 + P_1) \wedge K. \quad (2.32)$$

Esta matriz r da lugar a una biálgebra de Lie con coconmutador (2.17)

$$\delta(P_0) = -\delta(P_1) = -\alpha P_0 \wedge P_1, \quad \delta(K) = \alpha(P_0 + P_1) \wedge K. \quad (2.33)$$

El último paso es la construcción del EHP coisótropo. Vemos en (2.33) que el coconmutador satisface la condición de coisotropía (2.26), por lo que la estructura de Poisson será la dada por el corchete de Sklyanin (2.18) con los campos vectoriales (2.30). Así, tenemos el siguiente EHP coisótropo de Minkowski, que reaparecerá posteriormente en el trabajo

$$\{x^0, x^1\} = -\alpha(x^0 - x^1). \quad (2.34)$$

Para generalizar este EHP coisótropo al caso de (A)dS o con $\Lambda \neq 0$, hay que repetir los mismos pasos que se han seguido hasta calcular los respectivos campos vectoriales invariantes. Dado que (2.32) sigue teniendo un corchete de Schouten nulo para el álgebra de (A)dS, su generalización es directa, resultando en la estructura de Poisson con

$$\{x^0, x^1\} = -\alpha \left[\frac{\sin(\eta x^0)}{\eta} - \frac{\tanh(\eta x^1)}{\eta} \right], \quad \eta = \sqrt{-\Lambda}. \quad (2.35)$$

3. Espacio-tiempos no conmutativos en (2+1)D

En este Capítulo se van a estudiar en detalle algunos de los espacios homogéneos de Poisson resultantes de las estructuras de Poisson definidas sobre el grupo de Poincaré $ISO(2,1)$ en dimensión $d = 3$, dando lugar a un espacio-tiempo de Minkowski cuántico y sus correspondientes generalizaciones para los espacio-tiempos cuánticos de (Anti-)de Sitter. Más concretamente, nos vamos a restringir a seis casos, que son aquellos en los que la matriz r que genere la deformación cumple dos condiciones: es solución de la CYBE y pertenece al subespacio $\mathfrak{h} \wedge \mathfrak{t}$, siendo $\mathfrak{h}$ la subálgebra de Lorentz y $\mathfrak{t}$ el sector de traslaciones. La primera condición implica que las matrices r tienen corchete de Schouten nulo, lo que garantiza que las deformaciones que aparezcan en este Capítulo en el que nos restringimos a (2+1)D lo vuelvan a hacer en los espacios de (3+1)D. Por otra parte, la segunda condición tiene como consecuencia corchetes de Poisson de las coordenadas definan un álgebra de Lie. Esto último permite su clasificación directa, pues la clasificación de todas las álgebras de Lie de dimensión 3 (que son las que aparecen en este Capítulo) y sus Casimires es conocida [23]. Además, el hecho de que la estructura de Poisson resultante en el espacio homogéneo sea de tipo álgebra de Lie en las coordenadas locales (x^0, x^1, x^2) permite una cuantización directa a operadores $(\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2)$ pues no hay problemas de ordenamiento.

Los resultados principales de este Capítulo son dos. En primer lugar, la construcción de los seis espacio-tiempos de Minkowski no conmutativos mencionados anteriormente como espacios homogéneos de Poisson (EHP). Los corchetes de Poisson en términos de las coordenadas locales (x^0, x^1, x^2) se dan explícitamente, lo que permite clasificar el álgebra de Lie de dimensión 3 al que dan lugar y calcular sus Casimires. Todo esto se encuentra resumido en la Tabla 3.1 al final del Capítulo. En segundo lugar, se ha conseguido generalizar todos estos espacios homogéneos junto a sus respectivos Casimires al caso de constante cosmológica no nula, que corresponden a los grupos de (Anti-)de Sitter en (2+1)D. Paralelamente al caso de Minkowski, se obtienen las expresiones de los corchetes de Poisson en función de las coordenadas locales (x^0, x^1, x^2) ; recuperándose el resultado para los espacios cuánticos de Minkowski en el límite $\Lambda \rightarrow 0$. Adicionalmente, se calculan los corchetes de Poisson en términos de las coordenadas ambiente (s^4, s^0, s^1, s^2) , también resumidos en la Tabla 3.2 al final del Capítulo.

Teniendo en mente este objetivo de generalizar el espacio-tiempo de Minkowski ($\Lambda = 0$) a aquellos con $\Lambda \neq 0$, denotamos las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\Lambda = \text{Lie}(G_\Lambda)$ de sus correspondientes grupos Lorentzianos G_Λ siguiendo la notación:

- Grupo de Poincaré $G_0^{2+1} \equiv ISO(2,1)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0^{2+1} \equiv \mathfrak{iso}(2,1)$, para $\Lambda = 0$.
- Grupo de de Sitter (dS) $G_\Lambda^{2+1} \equiv SO(3,1)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\Lambda^{2+1} \equiv \mathfrak{so}(3,1)$, para $\Lambda > 0$.
- Grupo de anti-de Sitter (AdS) $G_\Lambda^{2+1} \equiv SO(2,2)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\Lambda^{2+1} \equiv \mathfrak{so}(2,2)$, para $\Lambda < 0$.

Recordemos que estas álgebras de Lie están dadas por el subconjunto de generadores en (2+1)D $\{P_0, P_1, P_2, K_1, K_2, J_3\}$ en (2.5), donde denotaremos $J \equiv J_3$.

En lo que queda de Capítulo, se va a omitir el superíndice que especifica la dimensión ya que no habrá lugar a confusión.

3.1. Estructuras de Poisson-Lie triangulares en (2+1)D

Los espacios homogéneos de Poisson que vamos a construir en este trabajo se construyen mediante el cociente G_Λ/H de un grupo Lorentziano de Poisson-Lie $(G_\Lambda, \{\cdot, \cdot\})$ respecto a un subgrupo H de isotropía. Por tanto, previo a la construcción de dichos espacios cociente, es necesario estudiar las estructuras de Poisson definidas en los grupos de Poincaré G_0 y (anti-)de Sitter G_Λ que dan lugar a grupos de Poisson-Lie.

Como ya se ha mencionado en el Teorema 2.1, todas las estructuras de Poisson-Lie en el grupo $G_0 = ISO(2, 1)$ son coborde [17] y, por consecuencia, están en correspondencia uno a uno con matrices r , lo que permite clasificar las estructuras de Poisson-Lie sobre el grupo G_0 a partir de estas matrices. La clasificación completa de las soluciones de la mCYBE para $ISO(2, 1)$, y por tanto de estructuras de Poisson-Lie fue realizada por Stachura en [24]. De estas matrices, nos vamos a restringir a aquellas que son triangulares, es decir, son solución de la CYBE (2.14). Expresando el álgebra de Lie como producto semidirecto $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t} \ltimes \mathfrak{h}$, con $\mathfrak{h} = \text{span}\{K_1, K_2, J\}$ y $\mathfrak{t} = \text{span}\{P_0, P_1, P_2\}$, una matriz r se puede descomponer como

$$r = a + b + c; \quad a \in \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t}, \quad b \in \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{h}, \quad c \in \mathfrak{h} \wedge \mathfrak{h}. \quad (3.1)$$

Tenemos entonces el siguiente resultado,

Lema 3.1. [24] *Para las matrices $r \in \mathfrak{g}_0 \wedge \mathfrak{g}_0$ cuasitriangulares, el espacio generado por el corchete de Schouten*

$$[[r, r]] = 2[[a, b]] + (2[[a, c]] + [[b, b]]) + 2[[b, c]] + [[c, c]] \quad (3.2)$$

correspondiente a la descomposición

$$\bigwedge^3 \mathfrak{g}_0 = \left(\bigwedge^3 \mathfrak{t} \right) \oplus \left(\bigwedge^2 \mathfrak{t} \otimes \mathfrak{h} \right) \oplus \left(\mathfrak{t} \otimes \bigwedge^2 \mathfrak{h} \right) \oplus \left(\bigwedge^3 \mathfrak{h} \right) \quad (3.3)$$

tiene dimensión 2 y está generado por los elementos $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{t} \otimes \mathfrak{h}$ y $\tilde{\eta} \in \bigwedge^3 \mathfrak{t}$.

Entonces, las matrices r cuasitriangulares deben satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} [[a, b]] &= p\tilde{\eta}, \quad 2[[a, c]] + [[b, b]] = \mu\omega, \quad p, \mu \in \mathbb{R}. \\ [[b, c]] &= 0, \quad [[c, c]] = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Las soluciones triangulares son aquellas con $\mu = p = 0$. Además, aquellas en las que $a = c = 0$, es decir,

$$r \in \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{h}, \quad (3.5)$$

los espacios homogéneos de Poisson resultantes dan lugar a un álgebra de Lie en las coordenadas (x^0, x^1, x^2) [25].

Para estas últimas matrices, de la forma (3.5), se ha realizado una clasificación de las clases de equivalencia bajo automorfismos del álgebra de Lie. La notación³ empleada para denominar a cada clase es $X(d)$, donde X es una letra del alfabeto latino que es distinta para cada clase, y d especifica la dimensión de la deformación.

A continuación, se muestra una lista de dicha clasificación:

$$\mathbf{A(2)} \quad r = \alpha(P_0 + P_1) \wedge K_1, \quad \text{con } \alpha > 0.$$

$$\mathbf{B(3)} \quad r = \rho P_1 \wedge K_2, \quad \text{con } \rho > 0.$$

$$\mathbf{C(3)} \quad r = \rho P_0 \wedge J, \quad \text{con } \rho > 0.$$

$$\mathbf{D(3)} \quad r = \alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J)] + \rho(P_0 + P_1) \wedge, \quad \text{con } \alpha, \rho > 0.$$

$$\mathbf{E(3)} \quad r = \alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J)], \quad \text{con } \alpha > 0.$$

$$\mathbf{F(3)} \quad r = \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J), \quad \text{con } \rho > 0.$$

³Ver Apéndice A para comparar la notación usada en este trabajo con la original de Stachura.

Podemos reconocer que la clase A(2) se trata de la matriz r_{light}^{1+1} de la expresión (2.24) que coincide también con la del ejemplo (2.32). Esta deforma la subálgebra de Poincaré en (1+1)D, y de ahí que se denote con $d = 2$. Además, la matriz de la clase E(3), que también aparece en D(3) se corresponde con la matriz r_{light}^{2+1} en (2.25).

Finalmente, con un cálculo directo se puede comprobar que las matrices de esta clasificación para Poincaré también satisfacen la CYBE para (A)dS, así que generalizan directamente al caso $\Lambda \neq 0$. Esto facilita la generalización de los EHP coisótropos para constante cosmológica no nula, pues la matriz r que aparece en la expresión del corchete de Sklyanin (2.18) es la misma en ambos casos. En el Capítulo 4 veremos que no tendremos esta facilidad en (3+1)D.

3.2. Espacios homogéneos de Poisson coisótropos en (2+1)D

En vista a la construcción espacios cociente G_Λ/H con una estructura de Poisson bien definida, las matrices r clasificadas en la sección anterior deben cumplir la llamada condición de coisotropía

$$\delta(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h} \wedge \mathfrak{g}_\Lambda, \quad (3.6)$$

donde $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$, siendo H un subgrupo de isotropía. En nuestro caso, tenemos que el subgrupo de isotropía H es el grupo de Lorentz $SO(2, 1)$ en (2+1)D, tanto para el grupo de Poincaré G_0 como para (Anti-)de Sitter G_Λ . De este modo, la condición (3.6) es suficiente para que los EHP estén bien definidos para cualquier valor de la constante cosmológica Λ .

Según la descomposición (3.1), imponer coisotropía es equivalente a poner $a = 0$ tanto en Poincaré como en (A)dS. Por tanto, todas las soluciones de la clasificación presentada son coisótropas y dan lugar a espacios homogéneos bien definidos [26].

Ahora, la construcción de los EHP coisótropos es directa, pues están dados por el cociente G_Λ/H y la estructura de Poisson se calcula mediante el ya definido corchete de Sklyanin

$$\{f, g\} = r^{ij} (X_i^L f X_j^L g - X_i^R f X_j^R g), \quad f, g \in C^\infty(G_\Lambda), \quad (3.7)$$

siendo r^{ij} las componentes de la matriz r correspondiente, y X_i^L y X_i^R los campos vectoriales invariantes por la izquierda y por la derecha, respectivamente, definidos en (2.2). Las expresiones de estos campos vectoriales invariantes, que omitiremos por brevedad, han sido obtenidos para los grupos de Poincaré y (A)dS mediante un largo cálculo asistido por computadora usando Mathematica [27]. Además, en (2+1)D la matriz r es la misma para los tres EHP que construiremos, ya que como hemos probado en la sección anterior, en (2+1)D todas las soluciones de la CYBE del grupo de Poincaré son también soluciones en (A)dS.

Detallamos ahora los EHP coisótropos para el grupo de Poincaré y sus respectivas generalizaciones para los grupos de (A)dS. Para estos últimos, todas las estructuras de Poisson comparten como Casimir la pseudoesfera

$$\Sigma_\Lambda^{2+1} = (s^4)^2 - \Lambda[(s^0)^2 - (s^1)^2 - (s^2)^2], \quad (3.8)$$

como Casimir, en los que usamos las coordenadas ambiente (s^4, s^0, s^1, s^2) definidas en (2.8).

A(2) $r = \alpha(P_0 + P_1) \wedge K_1$.

Esta matriz da lugar a la deformación del espacio de Minkowski, caracterizado por los siguientes corchetes

$$\{x^0, x^1\} = -\alpha(x^0 - x^1), \quad \{x^2, \cdot\} = 0. \quad (3.9)$$

Como ya se ha mencionado en la sección anterior, esta deformación es intrínsecamente bidimensional, por lo que las únicas coordenadas con corchetes no nulos son x^0, x^1 , con la

tercera coordenada x^2 siendo el único Casimir: $\mathcal{C}_0 = x^2$. Se trata por tanto de una extensión central de (2.34).

Introduciendo $\eta^2 = -\Lambda$, la generalización de este EHP coisótropo para (A)dS es

$$\{x^0, x^1\} = -\alpha \left[\frac{\text{sen}(\eta x^0)}{\eta} - \frac{\tanh(\eta x^1)}{\eta} \right], \quad \{x^2, \cdot\} = 0, \quad (3.10)$$

donde no es sorpresa que se trate de una extensión central de (2.35). Obsérvese además que tomando el límite $\eta \rightarrow 0$ ($\Lambda \rightarrow 0$), estos corchetes reducen a los del caso de Minkowski (3.9). Los corchetes de las coordenadas ambiente dan lugar a un álgebra cuadrática

$$\begin{aligned} \{s^0, s^1\} &= -\alpha(s^0 - s^1)s^4, & \{s^0, s^4\} &= -\alpha\eta^2(s^0 - s^1)s^1, \\ \{s^2, \cdot\} &= 0, & \{s^1, s^4\} &= -\alpha\eta^2 s^0(s^0 - s^1), \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde nuevamente el Casimir es $\mathcal{C}_\Lambda = s^2$ y da lugar a una extensión central que generaliza al de Minkowski.

B(3) $r = \rho P_1 \wedge K_2$.

La matriz de esta clase es un *twist*, por lo que trivialmente satisface la CYBE. La deformación del espacio de Minkowski a la que da lugar está caracterizada por los corchetes

$$\{x^0, x^1\} = \rho x^2, \quad \{x^0, x^2\} = 0, \quad \{x^1, x^2\} = -\rho x^0. \quad (3.12)$$

Reconocemos aquí el álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(1, 1)$, que es la del grupo de Poincaré en (1+1)D. Aquí, la coordenada x^1 se comporta como el generador del *boost* y el resto hacen el papel de traslaciones. El Casimir es

$$\mathcal{C}_0 = (x^0)^2 - (x^2)^2. \quad (3.13)$$

La generalización de este espacio a (A)dS resulta en los corchetes

$$\begin{aligned} \{x^0, x^1\} &= \rho \frac{\tanh(\eta x^2)}{\eta} \left[\frac{\cos^2(\eta x^0)}{\cosh(\eta x^1)} - \text{sen}^2(\eta x^0) \text{senh}(\eta x^1) \tanh(\eta x^1) \right], \\ \{x^0, x^2\} &= \rho \text{sen}^2(\eta x^0) \frac{\text{senh}(\eta x^1)}{\eta}, \\ \{x^1, x^2\} &= -\rho \cosh(\eta x^1) \frac{\text{sen}(2\eta x^0)}{2\eta}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Reescribiendo la estructura de Poisson en función de las coordenadas ambiente, se obtiene la siguiente álgebra cuadrática

$$\begin{aligned} \{s^0, s^1\} &= \rho s^2 s^4, & \{s^0, s^2\} &= 0, & \{s^1, s^2\} &= -\rho s^0 s^4, \\ \{s^0, s^4\} &= \rho \eta^2 s^1 s^2, & \{s^1, s^4\} &= 0, & \{s^2, s^4\} &= \rho \eta^2 s^0 s^1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

que además tiene como Casimir

$$\mathcal{C}_\Lambda = (s^0)^2 - (s^2)^2, \quad (3.16)$$

que tiene claramente como límite $\Lambda \rightarrow 0$ a (3.13).

C(3) $r = \rho P_0 \wedge J$.

Esta deformación, considerada en [25], es la que más se ha estudiado de las presentadas en este Capítulo. Recientemente, se ha considerado en contextos de localizabilidad [28, 29], teorías escalares y teorías *gauge* [30, 31] e incluso en física de agujeros negros [32, 33]. De igual manera que la clase anterior, esta matriz se trata de un *twist*, y da lugar a la deformación conocida en la literatura como ρ -Minkowski

$$\{x^0, x^1\} = \rho x^2, \quad \{x^0, x^2\} = -\rho x^1, \quad \{x^1, x^2\} = 0. \quad (3.17)$$

El álgebra de Lie que cierran las coordenadas es la del grupo euclídeo en 2D, $\mathfrak{iso}(2)$, haciendo x^0 el papel de generador de las rotaciones en el plano y siendo el Casimir

$$\mathcal{C}_0 = (x^1)^2 + (x^2)^2. \quad (3.18)$$

Este EHP se puede generalizar para obtener el espacio-tiempo ρ -(A)dS, donde tenemos la estructura de Poisson dada por

$$\{x^0, x^1\} = \rho \cosh(\eta x^1) \frac{\tanh(\eta x^2)}{\eta}, \quad \{x^0, x^2\} = -\rho \frac{\sinh(\eta x^1)}{\eta}, \quad \{x^1, x^2\} = 0. \quad (3.19)$$

Expresándolo en función de las coordenadas ambiente, se tiene la siguiente álgebra cuadrática

$$\begin{aligned} \{s^0, s^1\} &= \rho s^2 s^4, & \{s^0, s^2\} &= -\rho s^1 s^4, & \{s^1, s^2\} &= 0, \\ \{s^0, s^4\} &= 0, & \{s^1, s^4\} &= \rho \eta^2 s^0 s^2, & \{s^2, s^4\} &= -\rho \eta^2 s^0 s^1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

con el Casimir

$$\mathcal{C}_\Lambda = (s^1)^2 + (s^2)^2, \quad (3.21)$$

que también tiene como límite el de ρ -Minkowski cuando $\Lambda \rightarrow 0$.

D(3) $r = \alpha [(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J)] + \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J)$.

Antes de calcular el EHP, nos damos cuenta de que se trata de la suma de las matriz de la clase E(3), que es la deformación κ -*lightlike* en (2+1)D de la expresión (2.25), con la clase F(3), que es el *twist* $(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J)$. De hecho, vamos a estudiar estas tres clases conjuntamente, pues los casos E(3) y F(3) se corresponden con los límites $\rho \rightarrow 0$ y $\alpha \rightarrow 0$ de la clase D(3), respectivamente. Los EHP coisótropos que producen estas tres deformaciones son

$$\{x^0, x^1\} = -\alpha(x^0 - x^1), \quad \{x^0, x^2\} = \alpha x^2 - \rho(x^0 - x^1), \quad \{x^1, x^2\} = \alpha x^2 - \rho(x^0 - x^1). \quad (3.22)$$

Si bien se han escrito los corchetes de forma conjunta, el caso $\alpha, \rho \neq 0$ y los límites $\rho \rightarrow 0$ y $\alpha \rightarrow 0$ dan lugar a álgebras de Lie distintas (ver Tabla 3.1), relacionadas mediante una contracción de álgebras de Lie [11]. El Casimir del EHP de la clase D(3) es

$$\mathcal{C}_0^{\alpha, \rho} = 2\rho \log x^- + \alpha \frac{x^2}{x^-}, \quad (3.23)$$

con $x^- = (x^0 - x^1)/2$. Esta expresión tiene bien definidos los límites

$$\mathcal{C}_0^{\alpha, 0} := \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{C}_0^{\alpha, \rho} = \alpha \frac{x^2}{x^-}, \quad \mathcal{C}_0^{0, \rho} := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{C}_0^{\alpha, \rho} = 2\rho \log x^-, \quad (3.24)$$

que son los Casimires de las álgebras de Lie generadas por las matrices de las clases E(3) y F(3), respectivamente.

Se ha conseguido generalizar estos tres EPH coisótropos en (A)dS, donde también escribimos conjuntamente sus corchetes en coordenadas locales

$$\begin{aligned}
\{x^0, x^1\} &= -\alpha \left[\frac{\text{sen}(\eta x^0) - \tanh(\eta x^1)}{\eta \cosh^2(\eta x^2)} \right] \\
&\quad - \rho \left[\text{sen}(\eta x^0) - \tanh(\eta x^1) \right]^2 \cosh(\eta x^1) \frac{\tanh(\eta x^2)}{\eta}, \\
\{x^0, x^2\} &= \alpha \left[1 - \text{sen}(\eta x^0) \tanh(\eta x^1) \right] \frac{\tanh(\eta x^2)}{\eta} \\
&\quad - \rho \left[\frac{\text{sen}(\eta x^0)}{\eta} \cosh(\eta x^1) - \left(1 + \text{sen}^2(\eta x^0) - \text{sen}(\eta x^0) \tanh(\eta x^1) \right) \frac{\text{senh}(\eta x^1)}{\eta} \right], \\
\{x^1, x^2\} &= \alpha \cos(\eta x^0) \frac{\tanh(\eta x^2)}{\eta} - \rho \cos(\eta x^0) \left[\frac{\text{sen}(\eta x^0)}{\eta} \cosh(\eta x^1) - \frac{\text{senh}(\eta x^1)}{\eta} \right];
\end{aligned} \tag{3.25}$$

y en coordenadas ambiente, dando lugar a un álgebra cuadrática

$$\begin{aligned}
\{s^0, s^1\} &= -\alpha(s^0 - s^1)s^4, & \{s^0, s^4\} &= \alpha\eta^2[(s^2)^2 - (s^0 - s^1)s^1] - \rho\eta^2(s^0 - s^1)s^2, \\
\{s^0, s^2\} &= \alpha s^2 s^4 - \rho(s^0 - s^1)s^4, & \{s^1, s^4\} &= \alpha\eta^2[(s^2)^2 - s^0(s^0 - s^1)] - \rho\eta^2(s^0 - s^1)s^2, \\
\{s^1, s^2\} &= \alpha s^2 s^4 - \rho(s^0 - s^1)s^4, & \{s^2, s^4\} &= \alpha\eta^2(s^0 - s^1)s^2 - \rho\eta^2(s^0 - s^1)^2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

También se han generalizado los Casimires (3.23), (3.24); que tienen las siguientes expresiones para el caso de $\Lambda \neq 0$

$$C_{\Lambda}^{\alpha, \rho} = 2\rho \log s^- + \alpha \frac{s^2}{s^-}, \tag{3.27}$$

$$C_{\Lambda}^{\alpha, 0} := \lim_{\rho \rightarrow 0} C_{\Lambda}^{\alpha, \rho} = \alpha \frac{s^2}{s^-}, \quad C_{\Lambda}^{0, \rho} := \lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{\Lambda}^{\alpha, \rho} = 2\rho \log s^-, \tag{3.28}$$

con $s^- = (s^0 - s^1)/2$ y que claramente recuperan el límite apropiado para $\Lambda \rightarrow 0$.

En resumen, los EHP coisótropos de Minkowski en (2+1)D que hemos estudiado dan lugar a álgebras de Lie de las coordenadas, que no tienen problemas de ordenamiento y permiten su cuantización directa en cada uno de los casos. También se ha dado la expresión de los Casimires C_0 para cada una de estas estructuras. En particular, los EHP resultantes de las clases E(3) y F(3) se obtienen como contracción de álgebras de Lie de la clase D(3), donde el Casimir tiene ambos límites bien definidos. Cabe añadir que ninguna de las clases de matrices r aparece en la Tabla 2 de [34], que lista las estructuras de doble de Drinfel'd del grupo de Poincaré en (2+1)D.

Se ha encontrado además que todos estos EHP coisótropos generalizan al caso de constante cosmológica $\Lambda = -\eta^2$ no nula, habiéndose calculado explícitamente los corchetes de la estructura de Poisson, así como los Casimires C_{Λ} , donde η actúa como un parámetro de deformación. En todos los casos, se obtiene que los corchetes en función de las coordenadas locales (x^0, x^1, x^2) dan lugar a estructuras de Poisson altamente no lineales, mientras que usando coordenadas ambiente (s^4, s^0, s^1, s^2) cierran álgebras cuadráticas que son, a lo sumo, cuadráticas en el parámetro η . Finalmente, estos espacios (A)dS recuperan los corchetes y Casimires de Minkowski tomando el límite $\Lambda \rightarrow 0$. Estos resultados se pueden consultar de forma resumida en las tablas 3.1 y 3.2, al final de este Capítulo.

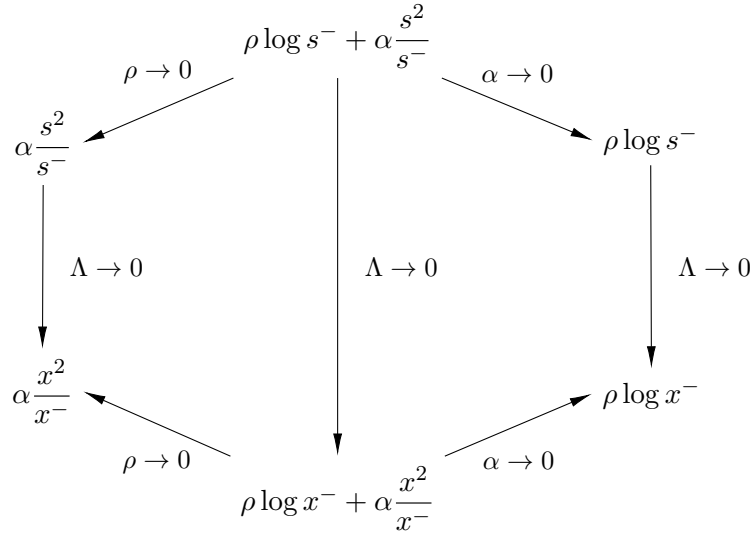


Figura 3.1: Diagrama que representa cómo se relacionan los Casimires de las clases D(3), E(3) y F(3), y cómo se recuperan los de Minkowski a partir de los de (A)dS en el límite $\Lambda \rightarrow 0$.

Tabla 3.1: Clasificación de los EHP coisótropos para el grupo de Poincaré en (2+1)D. La primera y segunda columna indican la expresión de la matriz de la deformación (salvo automorfismos) y su clase, respectivamente. La siguiente columna muestra explícitamente los corchetes en función de la base usual de coordenadas (x^0, x^1, x^2) para las clases B(3) y C(3) y de la base de cono de luz (x^+, x^-, x^2) en las demás. La cuarta columna indica qué álgebra de Lie cierran las coordenadas, y en la última aparecen sus Casimires.

Matriz r	Clase	$\{x^\mu, x^\nu\} \neq 0$	$\mathfrak{g}$ [23]	Casimires
$\alpha r_{\text{light}}^{(1+1)}$	A(2)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-$	$A_{2,1} \oplus A_{1,1}$	x^2
$\rho P_1 \wedge K_2$	B(3)	$\{x^0, x^1\} = \rho x^2$, $\{x^1, x^2\} = -\rho x^0$	$A_{3,4}$	$(x^0)^2 - (x^2)^2$
$\rho P_0 \wedge J$	C(3)	$\{x^0, x^1\} = \rho x^2$, $\{x^0, x^2\} = -\rho x^1$	$A_{3,6}$	$(x^1)^2 + (x^2)^2$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J)$ $+\alpha r_{\text{light}}^{(2+1)}$	D(3)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-$, $\{x^+, x^2\} = \alpha x^2 - 2\rho x^-$	$A_{3,2}$	$2\rho \log x^- + \alpha \frac{x^2}{x^-}$
$\alpha r_{\text{light}}^{(2+1)}$	E(3)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-$, $\{x^+, x^2\} = \alpha x^2$	$A_{3,3}$	$\alpha \frac{x^2}{x^-}$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J)$	F(3)	$\{x^+, x^2\} = -2\rho x^-$	$A_{3,1}$	$2\rho \log x^-$

Tabla 3.2: Generalización para (A)dS en (2+1)D de los EHP coisótopos de Minkowski. La primera columna indica la expresión de la matriz de la deformación (salvo automorfismos), mientras que la segunda a qué clase pertenece. La siguiente columna muestra explícitamente los corchetes de Poisson no nulos en coordenadas ambiente, donde por brevedad se ha empleado la base usual de coordenadas (s^4, s^0, s^1, s^2) en las clases B(3) y C(3) mientras que se ha usado la base de cono de luz (s^4, s^+, s^-, s^2) en las demás. La última columna indica sus Casimires, donde se observa que todas las estructuras comparten el Casimir Σ_Λ^{2+1} que define la pseudoesfera (3.8).

Matriz r	Clase	$\{s^a, s^b\} \neq 0$	Casimires
$\alpha r_{\text{light}}^{(1+1)}$	A(2)	$\{s^+, s^-\} = \alpha s^- s^4$ $\{s^+, s^4\} = -2\alpha\eta^2 s^+ s^-$ $\{s^-, s^4\} = 2\alpha\eta^2 (s^-)^2$	$\Sigma_\Lambda^{2+1},$ s^2
$\rho P_1 \wedge K_2$	B(3)	$\{s^0, s^1\} = \rho s^2 s^4$ $\{s^1, s^2\} = -\rho s^0 s^4$ $\{s^0, s^4\} = \rho\eta^2 s^1 s^2$ $\{s^2, s^4\} = \rho\eta^2 s^0 s^1$	$\Sigma_\Lambda^{2+1},$ $(s^0)^2 - (s^2)^2$
$\rho P_0 \wedge J$	C(3)	$\{s^0, s^1\} = \rho s^2 s^4$ $\{s^0, s^2\} = -\rho s^1 s^4$ $\{s^1, s^4\} = \rho\eta^2 s^0 s^2$ $\{s^2, s^4\} = -\rho\eta^2 s^0 s^1$	$\Sigma_\Lambda^{2+1},$ $(s^1)^2 + (s^2)^2$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J)$ $+\alpha r_{\text{light}}^{(2+1)}$	D(3)	$\{s^+, s^-\} = \alpha s^- s^4$ $\{s^+, s^2\} = \alpha s^2 s^4 - 2\rho s^- s^4$ $\{s^-, s^4\} = 2\alpha\eta^2 (s^-)^2$ $\{s^2, s^4\} = 2\alpha\eta^2 s^- s^2 - 4\rho\eta^2 (s^-)^2$ $\{s^+, s^4\} = \alpha\eta^2 [(s^2)^2 - 2s^+ s^-] - 2\rho\eta^2 s^- s^2$	$\Sigma_\Lambda^{2+1},$ $2\rho \log s^- + \alpha s^2/s^-$
$\alpha r_{\text{light}}^{(2+1)}$	E(3)	$\{s^+, s^-\} = \alpha s^- s^4$ $\{s^+, s^2\} = \alpha s^2 s^4$ $\{s^-, s^4\} = 2\alpha\eta^2 (s^-)^2$ $\{s^2, s^4\} = 2\alpha\eta^2 s^- s^2$ $\{s^+, s^4\} = \alpha\eta^2 [(s^2)^2 - 2s^+ s^-]$	$\Sigma_\Lambda^{2+1},$ $\alpha s^2/s^-$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J)$	F(3)	$\{s^+, s^2\} = -2\rho s^- s^4$ $\{s^2, s^4\} = -4\rho\eta^2 (s^-)^2$ $\{s^+, s^4\} = -2\rho\eta^2 s^- s^2$	$\Sigma_\Lambda^{2+1},$ $2\rho \log s^-$

4. Espacio-tiempos no conmutativos en (3+1)D

El objetivo de este Capítulo es extender los resultados del Capítulo anterior al caso de Minkowski en $d = 4$, estudiando en detalle catorce espacio-tiempos no conmutativos. Del mismo modo, vamos a restringirnos a EHP coisótropos obtenidos mediante el cociente G_Λ/H , donde el grupo Lorentziano G_Λ tiene definida una estructura de Poisson triangular. También vamos a considerar únicamente matrices $r \in \mathfrak{h} \wedge \mathfrak{t}$, para las que los corchetes de las coordenadas locales (x^0, x^1, x^2, x^3) dan lugar a álgebras de Lie de dimensión 4, ya conocidas y clasificadas junto a sus Casimires [23].

Los resultados presentados en este Capítulo son análogos a aquellos del anterior, y por tanto ambos siguen la misma estructura. Primeramente, la construcción de los catorce espacio-tiempos cuánticos de Minkowski, entendidos como EHP coisótropos, calculando explícitamente los corchetes de Poisson de las coordenadas y sus Casimires. Entre estos catorce EHP, por un lado aparecen las extensiones centrales de los seis estudiados en el Capítulo anterior (ver Tabla 4.1), mientras que por otro lado aparecen otros ocho resultantes de deformaciones puramente (3+1)-dimensionales (ver Tabla 4.2). Seguidamente, se ha logrado generalizar diez de los catorce EHP de Minkowski a los espacios de (A)dS: seis que se corresponden con las respectivas extensiones centrales de los estudiados en el Capítulo 3 y otros cuatro que son generalizaciones de las deformaciones puramente (3+1)-dimensionales. Se detalla la expresión de los corchetes de las coordenadas locales (x^0, x^1, x^2, x^3) y de los Casimires conjuntamente al caso de Minkowski, recuperándose este último como límite de constante cosmológica nula. Además, se expresan estos corchetes en función de las coordenadas ambiente $(s^4, s^0, s^1, s^2, s^3)$, que vienen resumidos en las tablas 4.3 y 4.4.

Denotamos en este Capítulo las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\Lambda = \text{Lie}(G_\Lambda)$ de sus correspondientes grupos de Lie Lorentzianos G_Λ siguiendo la notación:

- Grupo de Poincaré $G_0^{3+1} \equiv ISO(3, 1)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0^{3+1} \equiv \mathfrak{iso}(3, 1)$, para $\Lambda = 0$.
- Grupo de de Sitter (dS) $G_\Lambda^{3+1} \equiv SO(4, 1)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\Lambda^{3+1} \equiv \mathfrak{so}(4, 1)$, para $\Lambda > 0$.
- Grupo de anti-de Sitter (AdS) $G_\Lambda^{3+1} \equiv SO(3, 2)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\Lambda^{3+1} \equiv \mathfrak{so}(3, 2)$, para $\Lambda < 0$.

En lo que resta de Capítulo, siempre que no haya confusión, omitiremos el superíndice que especifica la dimensión.

4.1. Estructuras de Poisson-Lie triangulares en (3+1)D

Antes de proceder con la construcción de los espacios cociente G_Λ/H , necesitamos clasificar las estructuras de Poisson-Lie triangulares en el grupo de Poincaré G_0 y cuáles de ellas generalizan a los grupos de (anti-)de Sitter G_Λ con $\Lambda \neq 0$.

Al igual que sucede con el caso (2+1)-dimensional, todas las estructuras de Poisson-Lie en $G_0 = ISO(3, 1)$ son coborde, resultado que fue probado por Zakrzewski en [17] (ver Teorema 2.1), donde además dio una clasificación completa de soluciones de la CYBE para el grupo de Poincaré. Como consecuencia, nos basta con estudiar las matrices r clásicas, restringiéndonos a aquellas que son solución de la CYBE.

Escribiendo el álgebra de Lie de Poincaré $\mathfrak{g}_0$ como el producto semidirecto $\mathfrak{t} \ltimes \mathfrak{h}$ del sector de Lorentz $\mathfrak{h} = \text{span}\{K_1, K_2, K_3, J_1, J_2, J_3\}$ y el sector de traslaciones $\mathfrak{t} = \text{span}\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$, una matriz r admite la descomposición

$$r = a + b + c; \quad a \in \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t}, \quad b \in \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{h}, \quad c \in \mathfrak{h} \wedge \mathfrak{h}. \quad (4.1)$$

Tenemos entonces el siguiente lema,

Lema 4.1. [17] Para las matrices $r \in \mathfrak{g}_0 \wedge \mathfrak{g}_0$ cuasitriangulares, el espacio generado por el corchete de Schouten

$$[[r, r]] = 2[[a, b]] + (2[[a, c]] + [[b, b]]) + 2[[b, c]] + [[c, c]] \quad (4.2)$$

correspondiente a la descomposición

$$\bigwedge^3 \mathfrak{g}_0 = \left(\bigwedge^3 \mathfrak{t} \right) \oplus \left(\bigwedge^2 \mathfrak{t} \otimes \mathfrak{h} \right) \oplus \left(\mathfrak{t} \otimes \bigwedge^2 \mathfrak{h} \right) \oplus \left(\bigwedge^3 \mathfrak{h} \right) \quad (4.3)$$

tiene dimensión 1 y está generado por un elemento $\Omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{t} \otimes \mathfrak{h}$.

Entonces, las matrices r cuasitriangulares deben satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2[[a, c]] + [[b, b]] &= \mu\Omega, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ [[a, b]] &= [[b, c]] = [[c, c]] = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

siendo las soluciones triangulares aquellas con $\mu = 0$. En particular, las matrices r con $a = c = 0$, es decir, $r \in \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{h}$, dan lugar a EHP en las que las coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) cierran un álgebra de Lie.

Usando la misma notación que en el Capítulo anterior, mostramos ahora una clasificación de las matrices r descritas:

- A(2)** $r = \alpha(P_0 + P_1) \wedge K_1$, con $\alpha > 0$.
- B(3)** $r = \rho P_1 \wedge K_2$, con $\rho > 0$.
- C(3)** $r = \rho P_0 \wedge J_3$, con $\rho > 0$.
- D(3)** $r = \alpha r_{\text{light}}^{2+1} + \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$, con $\alpha, \rho > 0$.
- E(3)** $r = \alpha r_{\text{light}}^{2+1} = \alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3)]$, con $\alpha > 0$.
- F(3)** $r = \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$, con $\rho > 0$.
- G(4)** $r = \rho P_3 \wedge J_3$, con $\rho > 0$.
- H(4)** $r = \rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$, con $\rho > 0$.
- I(4)** $r = \alpha(P_0 + P_1) \wedge K_1 + \rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$, con $\alpha, \rho > 0$.
- J(4)** $r = \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3) + \beta P_2 \wedge (K_3 + J_2)$, con $\beta > 0$ y $\rho \geq 0$.
- K(4)** $r = \alpha r_{\text{light}}^{2+1} + \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3) + \beta P_2 \wedge (K_3 + J_2)$, con $\alpha, \beta > 0$ y $\rho \geq 0$.
- L(4)** $r = \alpha r_{\text{light}}^{3+1} = \alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2)]$, con $\alpha > 0$.
- M(4)** $r = \alpha r_{\text{light}}^{3+1} + \rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$, con $\alpha, \rho > 0$.
- N(4)** $r = \alpha r_{\text{light}}^{3+1} + \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$, con $\alpha, \rho > 0$.

Se pueden reconocer las deformaciones del grupo de Poincaré en (2+1)D discutidas en el Capítulo 3 en las seis primeras clases, por lo que el caso (3+1)-dimensional hereda aquellas de una dimensión menor. Esto podría parecer evidente, pero en realidad sucede debido a que nos hemos restringido a deformaciones triangulares, que tienen un corchete de Schouten $[[r, r]]$ nulo.

Si, por el contrario, hubiésemos requerido la condición más débil de que sean deformaciones que solamente cumplan la mCYBE, tendríamos que $\text{ad}_X[[r, r]] = 0$, para todo X en la subálgebra

(2+1)-dimensional de Poincaré $\mathfrak{g}_0^{2+1}$. Sin embargo, esto no garantiza que la acción adjunta de otro elemento $Y \in \mathfrak{g}_0^{3+1}$ pero fuera de dicha subálgebra sea también nula. Uno puede comprobar que, como ejemplo de esto, tenemos la matriz $r = P_1 \wedge K_1 + P_2 \wedge K_2$.

Por último, a diferencia de lo que sucede en el Capítulo anterior, no todas las matrices r de la clasificación satisfacen la CYBE para las álgebras de (A)dS. Las seis primeras clases ya vimos que sí eran triangulares para (A)dS en el capítulo 3; lo mismo sucede con las clases G(4)-J(4) de matrices puramente (3+1)-dimensionales. No obstante, las clases K(4)-N(4) no son matrices cuasitriangulares para (A)dS y como consecuencia no definen estructuras de Poisson-Lie en los grupos G_Λ con $\Lambda \neq 0$. En efecto, el corchete de Schouten de la clase K(4) resulta en

$$[[r, r]]_\Lambda = \frac{\alpha\beta\eta^2}{3!} K_1 \wedge (K_2 - L_3) \wedge (K_3 + J_2), \quad (4.5)$$

y los de las clases L(4), M(4) y N(4) toman el mismo valor

$$[[r, r]]_\Lambda = \frac{\alpha\eta^2}{3!} J_1 \wedge (K_2 - L_3) \wedge (K_3 + J_2). \quad (4.6)$$

Vemos entonces que estas cuatro matrices tienen $[[r, r]]_\Lambda \in \bigwedge^3 \mathfrak{h}$, y por el Lema 4.1 concluimos que no son solución de la mCYBE. Nótese que se ha dejado indicado con un subíndice Λ que el corchete de Schouten $[[\cdot, \cdot]]_\Lambda$ es el del álgebra de (A)dS, distinto al de Poincaré $[[\cdot, \cdot]]_0$. Esta diferencia se puede apreciar claramente en la expresión (2.16) usando coordenadas, donde aparecen las constantes de estructura c_{ij}^k , que son distintas para las álgebras de Poincaré y (A)dS (2.5).

4.2. Espacios homogéneos de Poisson coisótropos en (3+1)D

Recordemos que para que los EHP coisótropos G_Λ/H estén bien definidos, las matrices r deben satisfacer la ya mencionada condición de coisotropía (2.26). En lo referente a este Capítulo, el subgrupo de isotropía H es el grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ tanto para el espacio de Minkowski como los de (A)dS. Dado que todas las matrices de la clasificación presentada son coisótropas, podemos calcular explícitamente la estructura de Poisson en todos los EHP coisótropos de Minkowski mediante el corchete de Sklyanin (2.18). Las expresiones de los campos vectoriales invariantes X_i^L y X_i^R , que omitiremos por brevedad, han sido obtenidos para los grupos de Poincaré y (A)dS mediante un cálculo bastante usando Mathematica [27].

En primer lugar, las deformaciones de las clases A(2)-F(3) dan lugar a extensiones centrales de los EHP discutidos en el Capítulo anterior. Esto significa que dan lugar al mismo espacio no conmutativo (2+1)-dimensional, en el que se añade una cuarta coordenada x^3 cuyo corchete de Poisson con el resto de coordenadas es nulo, por lo que tendríamos un Casimir $\mathcal{C}'_0 = x^3$ adicional al anterior $\mathcal{C}_0$ que ya había. Si en (2+1)D teníamos álgebras de Lie $\mathcal{A}$ tridimensional de las coordenadas (x^0, x^1, x^2) , ahora tenemos álgebras de Lie de dimensión 4 en las coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) dado por la suma directa $\mathcal{A} \oplus A_{1,1}$ donde $A_{1,1}$ es el álgebra de Lie unidimensional [23]. La generalización a (A)dS es completamente análoga, siendo x^3 y por tanto s^3 coordenadas centrales. Dicho esto, escribir de nuevo los corchetes de estos EHP sería redundante, por lo que para su estudio en detalle nos referimos a la sección 3.2.

A continuación, discutimos los EHP coisótropos originados a partir de las deformaciones G(4)-J(4) junto con sus respectivas generalizaciones cuando $\Lambda \neq 0$. En el caso de estas generalizaciones, su construcción es sencilla una vez se tienen calculados los campos invariantes, puesto que la matriz r que aparece en el corchete de Sklyanin (2.18) es la misma que la del caso de Minkowski. Además, todas las estructuras de Poisson en (A)dS tienen como Casimir

$$\Sigma_\Lambda^{3+1} = (s^4)^2 - \Lambda[(s^0)^2 - (s^1)^2 - (s^2)^2 - (s^3)^2], \quad (4.7)$$

que es la pseudoesfera que define estos espacios de (A)dS en (3+1)D.

G(4) $r = \rho P_3 \wedge J_3$.

Esta matriz es un *twist* que genera una deformación en el sector espacial, caracterizada por los corchetes del álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(2)$ en las coordenadas espaciales

$$\{x^0, \cdot\} = 0, \quad \{x^1, x^2\} = 0, \quad \{x^1, x^3\} = -\rho x^2, \quad \{x^2, x^3\} = \rho x^1, \quad (4.8)$$

donde la coordenada temporal es un elemento central. Tenemos en conjunto una extensión central de $\mathfrak{iso}(2)$, con los Casimires

$$\mathcal{C}_0 = x^0, \quad \mathcal{C}'_0 = (x^1)^2 + (x^2)^2. \quad (4.9)$$

El motivo de que la coordenada temporal x^0 sea central es debido a que tenemos una matriz $r \in \bigwedge^2 \mathfrak{iso}(3)$, que deforma únicamente el subgrupo $ISO(3) \subset ISO(3,1)$.

La generalización de los corchetes (4.8) a (A)dS es

$$\begin{aligned} \{x^0, x^1\} &= -\rho \frac{\sinh(\eta x^0) \tanh(\eta x^2)}{\eta \cosh(\eta x^2)} \tanh(\eta x^3), & \{x^0, x^2\} &= \rho \frac{\sinh(\eta x^0) \tanh(\eta x^1)}{\eta \cosh(\eta x^2)} \tanh(\eta x^3), \\ \{x^1, x^3\} &= \rho \cos(\eta x^0) \cosh^2(\eta x^1) \frac{\sinh(\eta x^2)}{\eta}, & \{x^0, x^3\} &= 0, \\ \{x^1, x^2\} &= \rho \cos(\eta x^0) \left[\frac{\sinh^2(\eta x^1)}{\eta \cosh(\eta x^2)} + \cosh^2(\eta x^1) \sinh(\eta x^2) \frac{\tanh(\eta x^2)}{\eta} \right] \tanh(\eta x^3), \\ \{x^2, x^3\} &= \rho \cos(\eta x^0) \cosh(\eta x^1) \frac{\sinh(\eta x^1)}{\eta} \cosh(\eta x^2), \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde la coordenada temporal x^0 deja de ser central y claramente recuperan aquellos del caso de Minkowski como el límite $\Lambda \rightarrow 0$. Expresando esta estructura de Poisson usando coordenadas ambiente, obtenemos el álgebra cuadrática

$$\begin{aligned} \{s^1, s^3\} &= -\rho s^2 s^4, & \{s^2, s^3\} &= \rho s^2 s^4, & \{s^1, s^4\} &= -\rho \eta^2 s^2 s^3, \\ \{s^2, s^4\} &= \rho \eta^2 s^1 s^3, & \{s^0, \cdot\} &= \{s^1, s^2\} = \{s^3, s^4\} = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por último, se obtiene también la generalización de ambos Casimires

$$\mathcal{C}_\Lambda = s^0, \quad \mathcal{C}'_\Lambda = (s^1)^2 + (s^2)^2, \quad (4.12)$$

que tienen los límites bien definidos para constante cosmológica nula y coinciden con los de Minkowski.

H(4) $r = \rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$.

Esta clase se trata de otro *twist*, que da lugar al EHP coisótropo de Minkowski con corchetes

$$\begin{aligned} \{x^0, x^1\} &= 0, & \{x^0, x^2\} &= \rho x^3, & \{x^0, x^3\} &= -\rho x^2, \\ \{x^1, x^2\} &= \rho x^3, & \{x^1, x^3\} &= -\rho x^2, & \{x^2, x^3\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

y que tiene como Casimires

$$\mathcal{C}_0 = x^-, \quad \mathcal{C}'_0 = (x^2)^2 + (x^3)^2. \quad (4.14)$$

Esta estructura de Poisson generaliza al caso de (A)dS con los corchetes:

$$\begin{aligned}
\{x^1, x^2\} &= \rho \cos(\eta x^0) \cosh(\eta x^2) \frac{\tanh(\eta x^3)}{\eta}, & \{x^0, x^1\} &= 0, \\
\{x^1, x^3\} &= -\rho \cos(\eta x^0) \frac{\sinh(\eta x^2)}{\eta}, & \{x^2, x^3\} &= 0, \\
\{x^0, x^2\} &= \rho (1 - \sin(\eta x^0) \tanh(\eta x^1)) \cosh(\eta x^2) \frac{\tanh(\eta x^3)}{\eta}, \\
\{x^0, x^3\} &= -\rho (1 - \sin(\eta x^0) \tanh(\eta x^1)) \frac{\sinh(\eta x^2)}{\eta}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

o, escribiéndolos en función de coordenadas ambiente,

$$\begin{aligned}
\{s^0, s^2\} &= \rho s^3 s^4, & \{s^0, s^3\} &= -\rho s^2 s^4, & \{s^1, s^2\} &= \rho s^3 s^4, \\
\{s^1, s^3\} &= -\rho s^2 s^4, & \{s^2, s^4\} &= \rho \eta^2 (s^0 - s^1) s^3, & \{s^3, s^4\} &= -\rho \eta^2 (s^0 - s^1) s^2, \\
\{s^0, s^1\} &= \{s^2, s^3\} = \{s^0, s^4\} = \{s^1, s^4\} = 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

De forma similar a la clase anterior, los Casimires son formalmente idénticos a aquellos de Minkowski, que son el límite para $\Lambda \rightarrow 0$, pero en coordenadas ambiente.

$$\mathcal{C}_\Lambda = s^-, \quad \mathcal{C}'_\Lambda = (s^2)^2 + (s^3)^2. \tag{4.17}$$

I(4) $r = \alpha(P_0 + P_1) \wedge K_1 + \rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$.

La matriz de esta deformación es la suma de r_{light}^{1+1} de la clase A(2) y el *twist* de la clase H(4) discutida anteriormente. Esto se refleja en que los corchetes del EHP de Minkowski son la suma de sus respectivos espacios

$$\begin{aligned}
\{x^0, x^1\} &= -\alpha(x^0 - x^1), & \{x^0, x^2\} &= \rho x^3, & \{x^0, x^3\} &= -\rho x^2, \\
\{x^1, x^2\} &= \rho x^3, & \{x^1, x^3\} &= -\rho x^2, & \{x^2, x^3\} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Se trata de un EHP distinto a los anteriores, aunque relacionado con ellos mediante contracciones de álgebras de Lie. De hecho, este álgebra es un caso particular de una familia denotada como $A_{4,9}^{ab}$ parametrizada por $a > 0, b \geq 0$ de la clasificación de Patera [23], donde tenemos que con $b = 0$ y los dos únicos invariantes que se dan degeneran a un único Casimir

$$\mathcal{C}_0 = (x^2)^2 + (x^3)^2. \tag{4.19}$$

No obstante, sabemos que las foliaciones simplécticas de las variedades de Poisson son de dimensión par, así que tiene que haber necesariamente otro Casimir. Efectivamente, se puede comprobar que

$$\mathcal{C}'_0 = x^3 \cos\left(\frac{\rho}{\alpha} \log x^-\right) + x^2 \sin\left(\frac{\rho}{\alpha} \log x^-\right) \tag{4.20}$$

es el otro Casimir, que es funcionalmente independiente a (4.19) y no aparece en la clasificación de Patera.

La generalización de estos EHP coisótropos para $\Lambda \neq 0$ tiene como corchetes

$$\begin{aligned}
\{x^1, x^2\} &= \rho \cos(\eta x^0) \cosh(\eta x^2) \frac{\tanh(\eta x^3)}{\eta}, & \{x^1, x^3\} &= -\rho \cos(\eta x^0) \frac{\sinh(\eta x^2)}{\eta}, \\
\{x^0, x^1\} &= -\alpha \left[\frac{\sin(\eta x^0)}{\eta} - \frac{\tanh(\eta x^1)}{\eta} \right], & \{x^2, x^3\} &= 0, \\
\{x^0, x^2\} &= \rho (1 - \sin(\eta x^0) \tanh(\eta x^1)) \cosh(\eta x^2) \frac{\tanh(\eta x^3)}{\eta}, \\
\{x^0, x^3\} &= -\rho (1 - \sin(\eta x^0) \tanh(\eta x^1)) \frac{\sinh(\eta x^2)}{\eta};
\end{aligned} \tag{4.21}$$

que equivalentemente y de forma más sencilla se pueden escribir como la siguiente álgebra cuadrática en las coordenadas ambiente

$$\begin{aligned}
\{s^0, s^1\} &= -\alpha(s^0 - s^1)s^4, & \{s^0, s^2\} &= \rho s^3 s^4, & \{s^0, s^3\} &= -\rho s^2 s^4, \\
\{s^1, s^2\} &= \rho s^3 s^4, & \{s^1, s^3\} &= -\rho s^2 s^4, & \{s^2, s^3\} &= 0, \\
\{s^0, s^4\} &= -\alpha \eta^2 (s^0 - s^1)s^1, & \{s^1, s^4\} &= -\alpha \eta^2 s^0 (s^0 - s^1), & \{s^2, s^4\} &= \rho \eta^2 (s^0 - s^1)s^3, \\
\{s^3, s^4\} &= -\rho \eta^2 (s^0 - s^1)s^2.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Además, los Casimires generalizan como

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\Lambda &= (s^2)^2 + (s^3)^2, \\
\mathcal{C}'_\Lambda &= s^3 \cos\left(\frac{\rho}{\alpha} \log s^-\right) + s^2 \sin\left(\frac{\rho}{\alpha} \log s^-\right).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

J(4) $r = \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3) + \beta P_2 \wedge (K_3 + J_2).$

Esta clase es la resultante de sumar el término $P_2 \wedge (K_3 + J_2)$ con el *twist* de la clase F(3), y da lugar al EHP coisótropo de Minkowski con las siguientes relaciones entre sus coordenadas

$$\begin{aligned}
\{x^0, x^1\} &= 0, & \{x^0, x^2\} &= -\rho(x^0 - x^1) + \beta x^3, & \{x^0, x^3\} &= 0, \\
\{x^2, x^3\} &= -\beta(x^0 - x^1), & \{x^1, x^2\} &= -\rho(x^0 - x^1) + \beta x^3, & \{x^1, x^3\} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

que definen un álgebra de Lie de dimensión 4 con Casimires

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_0 &= x^-, \\
\mathcal{C}'_0 &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^3)^2 + 4\frac{\rho}{\beta} x^3 x^-.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

La generalización de este espacio-tiempo cuántico (de Poisson) a los de (A)dS es

$$\begin{aligned}
\{x^0, x^1\} &= -\rho [\text{sen}(\eta x^0) - \tanh(\eta x^1)]^2 \cosh(\eta x^1) \frac{\tanh(\eta x^2)}{\eta} \\
&\quad + \beta \left[\frac{\text{sen}(\eta x^0) - \tanh(\eta x^1)}{\eta \cosh(\eta x^2)} \right] \tanh(\eta x^2) \tanh(\eta x^3), \\
\{x^0, x^2\} &= \rho \left[-\frac{\text{sen}(\eta x^0)}{\eta} \cosh(\eta x^1) + \frac{\text{senh}(\eta x^1)}{\eta} (1 + \text{sen}^2(\eta x^0) - \text{sen}(\eta x^0) \tanh(\eta x^1)) \right] \\
&\quad + \beta \left[\frac{\cos^2(\eta x^0)}{\cosh(\eta x^2)} - \text{sen}(\eta x^0) (\text{sen}(\eta x^0) - \tanh(\eta x^1)) \text{senh}(\eta x^2) \tanh(\eta x^2) \right] \frac{\tanh(\eta x^3)}{\eta}, \\
\{x^0, x^3\} &= \beta \text{sen}(\eta x^0) \left[\frac{\text{sen}(\eta x^0) - \tanh(\eta x^1)}{\eta} \right] \text{senh}(\eta x^2), \\
\{x^1, x^2\} &= -\rho \cos(\eta x^0) \left[\frac{\text{sen}(\eta x^0)}{\eta} \cosh(\eta x^1) - \text{senh}(\eta x^1) \right] \\
&\quad + \beta \cos(\eta x^0) \left[\frac{2 \cosh^2(\eta x^1)}{\cosh(\eta x^2)} - \frac{\text{sen}(\eta x^0) \text{senh}(2\eta x^1)}{\cosh(\eta x^2)} \right. \\
&\quad \left. + (2 \text{senh}^2(\eta x^1) - \text{sen}(\eta x^0) \text{senh}(2\eta x^1)) \text{senh}(\eta x^2) \tanh(\eta x^2) \right] \frac{\tanh(\eta x^3)}{2\eta} \\
\{x^1, x^3\} &= \beta \cos(\eta x^0) \left[\frac{\text{sen}(\eta x^0)}{\eta} \cosh(\eta x^1) - \frac{\text{senh}(\eta x^1)}{\eta} \right] \text{senh}(\eta x^1) \text{senh}(\eta x^2), \\
\{x^2, x^3\} &= -\beta \cos(\eta x^0) \left[\frac{\text{sen}(\eta x^0)}{\eta} \cosh(\eta x^1) - \frac{\text{senh}(\eta x^1)}{\eta} \right] \cosh(\eta x^1) \cosh(\eta x^2).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

De igual forma a lo hecho hasta ahora, escribimos esta estructura de Poisson en términos de las coordenadas ambiente

$$\begin{aligned}
\{s^0, s^1\} &= 0, & \{s^0, s^2\} &= -\rho(s^0 - s^1)s^4 + \beta s^3 s^4, \\
\{s^0, s^3\} &= 0, & \{s^1, s^2\} &= -\rho(s^0 - s^1)s^4 + \beta s^3 s^4, \\
\{s^1, s^3\} &= 0, & \{s^2, s^3\} &= -\beta(s^0 - s^1)s^4, \\
\{s^0, s^4\} &= -\rho\eta^2(s^0 - s^1)s^2 + \beta\eta^2 s^2 s^3, & \{s^1, s^4\} &= -\rho\eta^2(s^0 - s^1)s^2 + \beta\eta^2 s^2 s^3, \\
\{s^2, s^4\} &= -\rho\eta^2(s^0 - s^1)^2, & \{s^3, s^4\} &= \beta\eta^2(s^0 - s^1)s^2,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

de la que se puede comprobar que las siguientes funciones son los Casimires que generalizan a los de la expresión (4.25)

$$C_\Lambda = s^-, \quad C'_\Lambda = (s^0)^2 - (s^1)^2 - (s^3)^2 + 4\frac{\rho}{\beta} s^3 s^- . \tag{4.28}$$

Finalmente, discutimos los últimos cuatro EHP coisótopos de Minkowski de las clases K(4)-N(4). Al igual que los anteriores, estos se construyen a partir del cociente G_0/H de los grupos de Poisson-Lie de Poincaré con las estructuras de Poisson correspondientes. Sin embargo, hemos visto las matrices r de estas deformaciones no son cuasitriangulares para los grupos de (A)dS, por lo que no es posible construir su generalización simplemente usando los campos vectoriales invariantes de dichos grupos en el corchete de Sklyanin (2.18) como se ha hecho hasta ahora. Como consecuencia, para estas últimas clases nos limitamos a escribir explícitamente los corchetes de las coordenadas en el caso de Minkowski.

$$\mathbf{K}(4) \quad r = \alpha r_{\text{light}}^{2+1} + \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3) + \beta P_2 \wedge (K_3 + J_2).$$

Esta matriz se puede entender como la suma del término $P_2 \wedge (K_3 + J_2)$ a la matriz de la clase D(3). Alternativamente, es la resultante de sumarle la matriz r_{light}^{2+1} de la clase E(3) a aquella de la clase J(4). Así, los corchetes de Poisson de las coordenadas son la suma de estos dos EHP

$$\begin{aligned} \{x^0, x^1\} &= -\alpha(x^0 - x^1), & \{x^0, x^2\} &= \alpha x^2 - \rho(x^0 - x^1) + \beta x^3, & \{x^0, x^3\} &= 0, \\ \{x^2, x^3\} &= -\beta(x^0 - x^1), & \{x^1, x^2\} &= \alpha x^2 - \rho(x^0 - x^1) + \beta x^3, & \{x^1, x^3\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

De forma similar a lo que sucede con otros casos ya comentados, el álgebra de Lie que cierran las coordenadas no es isomorfa a las de las clases E(3) ni J(4), sino que están relacionadas mediante una contracción. Esta estructura de Poisson no admite ningún Casimir.

$$\mathbf{L}(4) \quad r = \alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2)].$$

La deformación generada por esta matriz r_{light}^{3+1} es la conocida como κ -lightlike o *null-plane*, introducida por primera vez en [10]. El espacio-tiempo no conmutativo al que da lugar ya es conocido [35, 20], y a nivel de Poisson está caracterizado por los corchetes

$$\begin{aligned} \{x^0, x^1\} &= -\alpha(x^0 - x^1), & \{x^0, x^2\} &= \alpha x^2, & \{x^0, x^3\} &= \alpha x^3, \\ \{x^1, x^2\} &= \alpha x^2, & \{x^1, x^3\} &= \alpha x^3, & \{x^2, x^3\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

que son una extensión no central del álgebra de Lie (3.22) con $\rho = 0$. Tenemos además los dos Casimires

$$\mathcal{C} = \alpha \frac{x^2}{x^-}, \quad \mathcal{C}' = \alpha \frac{x^3}{x^-}. \quad (4.31)$$

$$\mathbf{M}(4) \quad r = \alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2)] + \rho(P_0 + P_1) \wedge J_1.$$

Esta matriz es el resultado de sumar la r_{light}^{3+1} de la clase L(4) con el *twist* de la H(4), y genera el EHP coisótropo de Minkowski con los siguientes corchetes de coordenadas

$$\begin{aligned} \{x^0, x^1\} &= -\alpha(x^0 - x^1), & \{x^0, x^2\} &= \alpha x^2 + \rho x^3, & \{x^0, x^3\} &= \alpha x^3 - \rho x^2, \\ \{x^1, x^2\} &= \alpha x^2 + \rho x^3, & \{x^1, x^3\} &= \alpha x^3 - \rho x^2, & \{x^2, x^3\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Al igual que en casos anteriores, estos corchetes son la suma de aquellos de las clases H(4) y L(4), pero las tres clases dan lugar a álgebras de Lie distintas relacionadas mediante contracción. Esta estructura de Poisson cuenta con los Casimires

$$\mathcal{C} = \frac{(x^2)^2 + (x^3)^2}{(x^-)^2}, \quad \mathcal{C}' = \alpha \tan^{-1} \left(\frac{2x^2 x^3}{(x^2)^2 - (x^3)^2} \right) + 2\rho \log x^-. \quad (4.33)$$

$$\mathbf{N}(4) \quad r = \alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2)] + \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3).$$

Esta última clase se obtiene sumando la matriz r_{light}^{3+1} de la L(4) con el *twist* de la F(3), dando lugar al EHP que definen los corchetes

$$\begin{aligned} \{x^0, x^1\} &= -\alpha(x^0 - x^1), & \{x^0, x^2\} &= \alpha x^2 - \rho(x^0 - x^1), & \{x^0, x^3\} &= \alpha x^3, \\ \{x^1, x^2\} &= \alpha x^2 - \rho(x^0 - x^1), & \{x^1, x^3\} &= \alpha x^3, & \{x^2, x^3\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Análogamente al caso anterior, las tres clases F(3), L(4) y N(4) no producen álgebras de Lie isomorfas, pero se pueden relacionar por medio de una contracción de álgebras de Lie. Por último, tenemos los Casimires

$$\mathcal{C} = 2\rho \log x^- + \alpha \frac{x^2}{x^-}, \quad \mathcal{C}' = \alpha \frac{x^3}{x^-}. \quad (4.35)$$

En definitiva, se han estudiado en detalle un total de catorce EHP coisótropos, de los cuales seis son extensiones centrales de los que aparecían en el Capítulo 3, que son las clases A(2)-F(3). En particular, se han dado explícitamente los corchetes de Poisson de las coordenadas, así como las expresiones de los Casimires $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}'_0$ para cada una de estas estructuras. Estos EHP coisótropos de Minkowski cierran álgebras de Lie de las coordenadas locales, por lo que su cuantización es directa al no haber problemas de ordenamiento.

A la hora de buscar extender estos espacios al caso de constante cosmológica no nula, podemos distinguir dos situaciones:

Por una parte, las matrices de clases A(2)-J(4) satisfacen la CYBE para los grupos de (A)dS y se pueden generalizar los EHP de manera directa. Esto se ha realizado, dando la expresión explícita los corchetes de Poisson en función de las coordenadas locales (x^0, x^1, x^2, x^3) , que son una deformación no lineal de sus análogos de Minkowski en términos del parámetro η . Adicionalmente, se han calculado los Casimires $\mathcal{C}_\Lambda, \mathcal{C}'_\Lambda$ y los corchetes de las coordenadas ambiente $(s^4, s^0, s^1, s^2, s^3)$, que cierran álgebras cuadráticas.

En cambio, las deformaciones de las clases K(4)-L(4) no son cuasitriangulares para (A)dS y nos hemos limitado a estudiar el caso de Minkowski. La generalización de estos cuatro EHP coisótropos requiere el paso adicional de encontrar otras matrices r distintas, (cuasi)triangulares para los grupos de (A)dS y que tuvieran como límite cuando $\Lambda \rightarrow 0$ a aquellas de la clasificación. Este es el acercamiento que se seguirá en el siguiente Capítulo, donde se ha encontrado una nueva deformación que es la que generaliza a la clase L(4), también conocida como κ -lightlike.

Tabla 4.1: EHP coisótropos heredados del caso (2+1)D, que son las extensiones centrales de aquellos de la Tabla 3.1, cuya organización de los contenidos es idéntica a la de esta.

Matriz r	Clase	$\{x^\mu, x^\nu\} \neq 0$	$\mathfrak{g}$ [23]	Casimires
$\alpha r_{\text{light}}^{(1+1)}$	A(2)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-$	$A_{2,1} \oplus 2A_{1,1}$	$\frac{x^2}{x^3}$
$\rho P_1 \wedge K_2$	B(3)	$\{x^0, x^1\} = \rho x^2,$ $\{x^1, x^2\} = -\rho x^0$	$A_{3,4} \oplus A_{1,1}$	$\frac{(x^0)^2 - (x^2)^2}{x^3}$
$\rho P_0 \wedge J_3$	C(3)	$\{x^0, x^1\} = \rho x^2,$ $\{x^0, x^2\} = -\rho x^1$	$A_{3,6} \oplus A_{1,1}$	$\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{x^3}$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$ $+\alpha r_{\text{light}}^{(2+1)}$	D(3)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-,$ $\{x^+, x^2\} = \alpha x^2 - 2\rho x^-$	$A_{3,2} \oplus A_{1,1}$	$2\rho \log x^- + \alpha \frac{x^2}{x^-},$ $\frac{x^2}{x^3}$
$\alpha r_{\text{light}}^{(2+1)}$	E(3)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-,$ $\{x^+, x^2\} = \alpha x^2$	$A_{3,3} \oplus A_{1,1}$	$\frac{\alpha x^2}{x^3} / x^-,$ $\frac{x^2}{x^3}$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$	F(3)	$\{x^+, x^2\} = -2\rho x^-$	$A_{3,1} \oplus A_{1,1}$	$\frac{2\rho \log x^-}{x^3},$ $\frac{x^2}{x^3}$

Tabla 4.2: EHP coisótropos puramente (3+1)-dimensionales. La primera y segunda columna indican la expresión de la matriz de la deformación (salvo automorfismos) y su clase, respectivamente. La siguiente columna muestra explícitamente los corchetes en función de la base usual de coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) para la clase G(4) y de la base de cono de luz (x^+, x^-, x^2, x^3) en las demás. La cuarta columna indica qué álgebra de Lie de dimensión 4 cierran las coordenadas, y en la última aparecen sus Casimires.

Matriz r	Clase	$\{x^\mu, x^\nu\} \neq 0$	$\mathfrak{g}$ [23]	Casimires
$\rho P_3 \wedge J_3$	G(4)	$\{x^1, x^3\} = -\rho x^2,$ $\{x^2, x^3\} = \rho x^1$	$A_{3,6} \oplus A_{1,1}$	$x^0,$ $(x^1)^2 + (x^2)^2$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$	H(4)	$\{x^+, x^2\} = \rho x^3,$ $\{x^+, x^3\} = -\rho x^2$	$A_{3,6} \oplus A_{1,1}$	$x^-,$ $(x^2)^2 + (x^3)^2$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$ $+\alpha r_{\text{light}}^{(1+1)}$	I(4)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-,$ $\{x^+, x^2\} = \rho x^3,$ $\{x^+, x^3\} = -\rho x^2$	$A_{4,6}^0$	$(x^2)^2 + (x^3)^2,$ $x^3 \cos\left(\frac{\rho}{\alpha} \log x^-\right)$ $+x^2 \sin\left(\frac{\rho}{\alpha} \log x^-\right)$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$ $+\beta P_2 \wedge (K_3 + J_2)$	J(4)	$\{x^+, x^2\} = -2\rho x^- + \beta x^3,$ $\{x^2, x^3\} = -2\beta x^-$	$A_{4,1}$	$x^-,$ $(x^0)^2 - (x^1)^2$ $-(x^3)^2 + 4\frac{\rho}{\beta} x^3 x^-$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$ $+\beta P_2 \wedge (K_3 + J_2)$ $+\alpha r_{\text{light}}^{(2+1)}$	K(4)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-,$ $\{x^+, x^2\} = \alpha x^2 - 2\rho x^- + \beta x^3,$ $\{x^2, x^3\} = -2\beta x^-$	$A_{4,9}^0$	$\nexists$
$\alpha r_{\text{light}}^{(3+1)}$	L(4)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-,$ $\{x^+, x^2\} = \alpha x^2,$ $\{x^+, x^3\} = \alpha x^3$	$A_{4,5}^{1,1}$	$\alpha x^2/x^-,$ $\alpha x^3/x^-$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$ $+\alpha r_{\text{light}}^{(3+1)}$	M(4)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-,$ $\{x^+, x^2\} = \alpha x^2 + \rho x^3,$ $\{x^+, x^3\} = \alpha x^3 - \rho x^2$	$A_{4,6}^{\frac{\alpha}{\rho}, \frac{\alpha}{\rho}}$	$\frac{(x^2)^2 + (x^3)^2}{(x^-)^2},$ $\alpha \tan^{-1}\left(\frac{2x^2 x^3}{(x^2)^2 - (x^3)^2}\right)$ $+2\rho \log x^-$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$ $+\alpha r_{\text{light}}^{(3+1)}$	N(4)	$\{x^+, x^-\} = \alpha x^-,$ $\{x^+, x^2\} = \alpha x^2 - 2\rho x^-,$ $\{x^+, x^3\} = \alpha x^3$	$A_{4,2}^1$	$2\rho \log x^- + \alpha x^2/x^-,$ $\alpha x^3/x^-$

Tabla 4.3: Generalización para (A)dS de los EHP coisótopos de Minkowski de las clases A(2)-F(3), heredados del caso (2+1)D. Se trata por tanto de extensiones centrales de aquellos de la Tabla 3.2, cuya organización de los contenidos es idéntica a la de esta. Nótese que las seis clases comparten como Casimires la pseudoesfera Σ_{Λ}^{2+1} y la coordenada central s^3 .

Matriz r	Clase	$\{s^a, s^b\} \neq 0$	Casimires
$\alpha r_{\text{light}}^{(1+1)}$	A(2)	$\{s^+, s^-\} = \alpha s^- s^4$ $\{s^+, s^4\} = -2\alpha\eta^2 s^+ s^-$ $\{s^-, s^4\} = 2\alpha\eta^2 (s^-)^2$	$\Sigma_{\Lambda}^{2+1}, s^3, s^2$
$\rho P_1 \wedge K_2$	B(3)	$\{s^0, s^1\} = \rho s^2 s^4$ $\{s^1, s^2\} = -\rho s^0 s^4$ $\{s^0, s^4\} = \rho\eta^2 s^1 s^2$ $\{s^2, s^4\} = \rho\eta^2 s^0 s^1$	$\Sigma_{\Lambda}^{2+1}, s^3, (s^0)^2 - (s^2)^2$
$\rho P_0 \wedge J_3$	C(3)	$\{s^0, s^1\} = \rho s^2 s^4$ $\{s^0, s^2\} = -\rho s^1 s^4$ $\{s^1, s^4\} = \rho\eta^2 s^0 s^2$ $\{s^2, s^4\} = -\rho\eta^2 s^0 s^1$	$\Sigma_{\Lambda}^{2+1}, s^3, (s^1)^2 + (s^2)^2$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3) + \alpha r_{\text{light}}^{(2+1)}$	D(3)	$\{s^+, s^-\} = \alpha s^- s^4$ $\{s^+, s^2\} = \alpha s^2 s^4 - 2\rho s^- s^4$ $\{s^-, s^4\} = 2\alpha\eta^2 (s^-)^2$ $\{s^2, s^4\} = 2\alpha\eta^2 s^- s^2 - 4\rho\eta^2 (s^-)^2$ $\{s^+, s^4\} = \alpha\eta^2 [(s^2)^2 - 2s^+ s^-] - 2\rho\eta^2 s^- s^2$	$\Sigma_{\Lambda}^{2+1}, s^3, 2\rho \log s^- + \alpha s^2 / s^-$
$\alpha r_{\text{light}}^{(2+1)}$	E(3)	$\{s^+, s^-\} = \alpha s^- s^4$ $\{s^+, s^2\} = \alpha s^2 s^4$ $\{s^-, s^4\} = 2\alpha\eta^2 (s^-)^2$ $\{s^2, s^4\} = 2\alpha\eta^2 s^- s^2$ $\{s^+, s^4\} = \alpha\eta^2 [(s^2)^2 - 2s^+ s^-]$	$\Sigma_{\Lambda}^{2+1}, s^3, \alpha s^2 / s^-$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$	F(3)	$\{s^+, s^2\} = -2\rho s^- s^4$ $\{s^2, s^4\} = -4\rho\eta^2 (s^-)^2$ $\{s^+, s^4\} = -2\rho\eta^2 s^- s^2$	$\Sigma_{\Lambda}^{2+1}, s^3, 2\rho \log s^-$

Tabla 4.4: Generalización para de (A)dS de los cuatro EHP coisótropos de Minkowski de las clases G(4)-J(4). La primera y segunda columna indican la expresión de la matriz de la deformación (salvo automorfismos) y su clase, respectivamente. La siguiente columna muestra explícitamente los corchetes en función de coordenadas ambiente usuales $(s^4, s^0, s^1, s^2, s^3)$ para la clase G(4) y de las coordenadas ambiente de cono de luz $(s^4, s^+, s^-, s^2, s^3)$ en las demás. La última columna indica sus Casimires, donde se observa que todas las estructuras comparten el Casimir Σ_Λ^{3+1} que define la pseudoesfera (4.7).

Matriz r	Clase	$\{s^a, s^b\} \neq 0$	Casimires
$\rho P_3 \wedge J_3$	G(4)	$\{s^1, s^3\} = -\rho s^2 s^4,$ $\{s^2, s^3\} = \rho s^1 s^4,$ $\{s^1, s^4\} = -\rho \eta^2 s^2 s^3,$ $\{s^2, s^4\} = \rho \eta^2 s^1 s^3$	$\Sigma_\Lambda^{3+1}, s^0,$ $(s^1)^2 + (s^2)^2$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$	H(4)	$\{s^+, s^2\} = \rho s^3 s^4,$ $\{s^+, s^3\} = -\rho s^2 s^4,$ $\{s^2, s^4\} = 2\rho \eta^2 s^- s^3,$ $\{s^3, s^4\} = -2\rho \eta^2 s^- s^2$	$\Sigma_\Lambda^{3+1}, s^-,$ $(s^2)^2 + (s^3)^2$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$ $+\alpha r_{\text{light}}^{(1+1)}$	I(4)	$\{s^+, s^-\} = \alpha s^- s^4,$ $\{s^+, s^2\} = \rho s^3 s^4,$ $\{s^+, s^3\} = -\rho s^2 s^4,$ $\{s^+, s^4\} = -2\alpha \eta^2 s^+ s^-,$ $\{s^-, s^4\} = 2\alpha \eta^2 (s^-)^2,$ $\{s^2, s^4\} = 2\rho \eta^2 s^- s^3,$ $\{s^3, s^4\} = -2\rho \eta^2 s^- s^2$	$\Sigma_\Lambda^{3+1}, (s^2)^2 + (s^3)^2,$ $s^3 \cos\left(\frac{\rho}{\alpha} \log s^-\right)$ $+s^2 \sin\left(\frac{\rho}{\alpha} \log s^-\right)$
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$ $+\beta P_2 \wedge (K_3 + J_2)$	J(4)	$\{s^+, s^2\} = -2\rho s^- s^4 + \beta s^3 s^4,$ $\{s^2, s^3\} = -2\beta s^- s^4,$ $\{s^+, s^4\} = -2\rho \eta^2 s^- s^2 + \beta \eta^2 s^2 s^3,$ $\{s^2, s^4\} = -4\rho \eta^2 (s^-)^2,$ $\{s^3, s^4\} = 2\beta \eta^2 s^- s^2$	$\Sigma_\Lambda^{3+1}, s^-,$ $(s^0)^2 - (s^1)^2$ $-(s^3)^2 + 4\frac{\rho}{\beta} s^3 s^-$

5. El espacio-tiempo no conmutativo κ -(A)dS *lightlike*

En el Capítulo anterior hemos visto que hay cuatro clases de matrices (3+1)-dimensionales que dejan de cumplir la mCYBE cuando consideramos el caso $\Lambda \neq 0$, por lo que no dan lugar a estructuras de Poisson-Lie bien definidas sobre los grupos de (A)dS. Entre ellas, se encuentra la matriz r_{light}^{3+1} de la clase L(4), que ya ha sido estudiada como deformación del álgebra de Poincaré [10], se han construido sus los espacio-tiempos cuánticos [35] y sus espacios no conmutativos de geodésicas [20]. En este aspecto, esta deformación presenta la particularidad de que es la única deformación κ que permite simultáneamente la construcción de los EHP de geodésicas nulas, tipo espacio y tipo tiempo [36, 37]. Resulta entonces natural buscar una estructura de Poisson-Lie de los grupos de (A)dS que generalice a la deformación κ -Poincaré *lightlike*, así como la construcción de su EHP coisótropo asociado. Este acercamiento ya ha sido seguido con la conocida deformación κ -Poincaré *timelike* en [38, 39] y nuestro objetivo es proceder análogamente para encontrar una deformación que generalice a la κ -Poincaré *lightlike*.

Los resultados de este Capítulo son precisamente estos dos objetivos que hemos planteado. En primer lugar, se encuentra la única matriz r triangular que generaliza la estructura de Poisson-Lie del grupo de Poincaré de la clase L(4), a la que llamamos κ -(A)dS *lightlike*, detallando paso a paso el procedimiento seguido. Esta matriz depende explícitamente del parámetro $\eta = \sqrt{-\Lambda}$, de modo que recuperamos la matriz r_{light}^{3+1} en el límite de constante cosmológica nula. Se estudia la estructura de biálgebra de Lie que genera esta matriz escribiéndola explícitamente en términos de su coconmutador (2.17). A continuación, se emplea la misma construcción descrita en el resto del trabajo para obtener el nuevo EHP coisótropo κ -(A)dS *lightlike*, calculando explícitamente sus corchetes en función de las coordenadas locales y coordenadas ambiente de cono de luz. Finalmente, se cuantiza esta versión de Poisson, resultando en un álgebra cuadrática, no conmutativa pero asociativa de operadores ($\hat{s}^4, \hat{s}^+, \hat{s}^-, \hat{s}^2, \hat{s}^3$) y que definen el espacio-tiempo no conmutativo κ -(A)dS *lightlike*. Este espacio-tiempo, que es covariante bajo la acción del grupo cuántico de (A)dS, es la única generalización posible del ya conocido [35, 20] espacio-tiempo no conmutativo κ -Minkowski *lightlike*.

En lo que resta de Capítulo, al no estar considerando otras deformaciones, vamos a denotar la matriz κ -Poincaré *lightlike* (clase L(4) de nuestra clasificación) como

$$r_0 \equiv \frac{1}{\kappa} r_{\text{light}}^{3+1} = \frac{1}{\kappa} [(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2)], \quad (5.1)$$

donde hemos cambiado el parámetro de deformación a $\kappa = 1/\alpha$, que presuponemos que es proporcional a la masa de Planck [18, 5]. Además, denotamos como $[[\cdot, \cdot]]_0$ el corchete de Schouten del álgebra de Poincaré y como $[[\cdot, \cdot]]_\Lambda$ el de las álgebras de de Sitter y Anti-de Sitter, definidas conjuntamente en (2.5) con $\Lambda = 0$, $\Lambda > 0$ y $\Lambda < 0$, respectivamente.

5.1. La deformación κ -(A)dS *lightlike*

Como ya sabemos, la matriz r_0 se corresponde con la clase L(4) discutida en el Capítulo 4 y es una solución de la CYBE. Esta es una característica que la distingue de las otras deformaciones κ consideradas en la literatura [40], tales como la κ -Poincaré *spacelike* (2.22) obtenida en [41] o la ampliamente estudiada κ -Poincaré *timelike* (2.21) [5, 6, 19].

La deformación que consideramos aquí define una estructura de biálgebra de Lie $(\mathfrak{g}_0, \delta)$ trian-

gular, con coconmutador

$$\begin{aligned}
\delta(J_1) &= 0, & \delta(P_0) &= -\delta(P_1) = -\frac{1}{\kappa}P_0 \wedge P_1, \\
\delta(P_2) &= \frac{1}{\kappa}(P_0 + P_1) \wedge P_2, & \delta(P_3) &= \frac{1}{\kappa}(P_0 + P_1) \wedge P_3, \\
\delta(K_1) &= \frac{1}{\kappa}[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2)], & (5.2) \\
\delta(K_2) &= \delta(J_3) = \frac{1}{\kappa}(P_0 \wedge K_2 + P_1 \wedge J_3 - P_3 \wedge J_1), \\
\delta(K_3) &= -\delta(J_2) = \frac{1}{\kappa}(P_0 \wedge K_3 - P_1 \wedge J_2 + P_2 \wedge J_1).
\end{aligned}$$

De estas relaciones se observa que los generadores del conjunto $\{P_0 + P_1, J_1, K_2 - J_3, K_3 + J_2\}$ son primitivos, es decir, su coconmutador es nulo. También podemos notar que la imagen de K_1 es precisamente la matriz de la deformación, esto es, $\delta(K_1) = r_0$.

Si queremos encontrar una matriz r_Λ antisimétrica que deforme el álgebra de (A)dS, a la que llamaremos κ -(A)dS *lightlike*, y generalice a r_0 , lo más natural es imponer que cumpla las condiciones:

- Es solución de la CYBE (2.14) para (A)dS: $[[r_\Lambda, r_\Lambda]]_\Lambda = 0$.
- Tiene la matriz κ -Poincaré *lightlike* (5.1) como límite de constante cosmológica nula, es decir, $\lim_{\Lambda \rightarrow 0} r_\Lambda = r_0$.
- Da lugar a un EHP coisótropo: $\delta(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}_\Lambda \wedge \mathfrak{h}$.

Para que esta generalización que recupere el límite adecuado, partimos de la matriz r_0 que es la suma de 6 términos, a la que le sumamos los términos distintos en $\mathfrak{g}_\Lambda \wedge \mathfrak{g}_\Lambda$. Dado que el objetivo final es la construcción de su EHP coisótropo, imponemos previamente la condición de coisotropía (2.26) que nos elimina los términos en $\mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t}$. Esto, junto a la condición de antisimetría, nos deja con una matriz con 33 parámetros libres. Imponiendo ahora la CYBE, llegamos a que la solución compatible con estas condiciones debe ser de la forma

$$\begin{aligned}
r_\Lambda &= \frac{1}{\kappa}[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2)] \\
&\quad + J_1 \wedge [\alpha_1(K_3 + J_2) + \alpha_2(K_2 - J_3)] \\
&\quad + (P_0 + P_1) \wedge [\beta_1(K_3 + J_2) + \beta_2(K_2 - J_3)] \\
&\quad + \gamma(K_2 - J_3) \wedge (K_3 + J_2),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

donde los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ deben cumplir las relaciones

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0, \quad (\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 = \left(\frac{\eta}{\kappa}\right)^2. \tag{5.4}$$

Geométricamente, vemos que esta familia de soluciones está parametrizada por un escalar $\gamma \in \mathbb{R}$ y un par de vectores en $\mathbb{R}^2$: (α_1, α_2) en la circunferencia de radio η/κ y otro vector (β_1, β_2) perpendicular al primero. Reconocemos el término $\gamma(K_2 - J_3) \wedge (K_3 + J_2)$ como una deformación triangular de la subálgebra de Lorentz que aparece en la clasificación de Zakrzewski [17] y, dado que γ es independiente del valor de la constante cosmológica y nos estamos restringiendo a deformaciones de Poincaré con $r_0 \in \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{h}$, debemos imponer $\gamma = 0$ si queremos recuperar la matriz (5.1). Notamos además que el vector (β_1, β_2) parametriza los términos *twist* que aparecen en la clase N(4) (ver Tabla 4.2).

Resolviendo las ecuaciones (5.4) obtenemos

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{\kappa} \cos \theta, \quad \alpha_2 = \frac{\eta}{\kappa} \sin \theta, \quad \beta_1 = -\rho \sin \theta, \quad \beta_2 = \rho \cos \theta, \quad (5.5)$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$, $\rho \geq 0$, por lo que nuestra solución (5.3) toma la forma

$$\begin{aligned} r_\Lambda = & \frac{1}{\kappa} [(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2)] \\ & + \frac{\eta}{\kappa} J_1 \wedge [\cos \theta (K_3 + J_2) + \sin \theta (K_2 - J_3)] \\ & + \rho (P_0 + P_1) \wedge [-\sin \theta (K_3 + J_2) + \cos \theta (K_2 - J_3)]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Podemos eliminar un último grado de libertad considerando el automorfismo

$$\begin{aligned} P_2 & \longrightarrow \cos \theta P_2 + \sin \theta P_3, & P_3 & \longrightarrow -\sin \theta P_2 + \cos \theta P_3, \\ K_2 & \longrightarrow \cos \theta K_2 + \sin \theta K_3, & K_3 & \longrightarrow -\sin \theta K_2 + \cos \theta K_3, \\ J_2 & \longrightarrow \cos \theta J_2 + \sin \theta J_3, & J_3 & \longrightarrow -\sin \theta J_2 + \cos \theta J_3, \end{aligned} \quad (5.7)$$

que se corresponde con una rotación de ángulo θ en el plano $X^2 X^3$ y, aplicándolo a la matriz (5.3), llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} r_\Lambda = & \frac{1}{\kappa} [(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2) + \eta J_1 \wedge (K_3 + J_2)] \\ & + \rho (P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Esto significa que podemos simplemente tomar $\theta = 0$ en (5.3). Como buscamos generalizar (5.1) que no tiene término *twist*⁴, lo anulamos imponiendo $\rho = 0$

$$r_\Lambda = \frac{1}{\kappa} [(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2) + \eta J_1 \wedge (K_3 + J_2)]. \quad (5.9)$$

Llegamos entonces a la única solución que generaliza la matriz (5.1) de la clase L(4) y define la deformación κ -(A)DS *lightlike*.

Finalmente, escribimos explícitamente el coconmutador (2.17) de la estructura de biálgebra de Lie definida por esta nueva deformación

$$\begin{aligned} \delta(P_0) &= -\delta(P_1) = -\frac{1}{\kappa} P_0 \wedge P_1 + \frac{\eta}{\kappa} P_3 \wedge J_1 - \frac{\eta^2}{\kappa} (K_2 \wedge J_3 - K_3 \wedge J_2), \\ \delta(P_2) &= \frac{1}{\kappa} (P_0 + P_1) \wedge P_2 - \frac{\eta}{\kappa} P_3 \wedge (K_3 + J_2) + \frac{\eta^2}{\kappa} [K_1 \wedge (K_2 - J_3) - J_1 \wedge (K_3 + J_2)], \\ \delta(P_3) &= \frac{1}{\kappa} (P_0 + P_1) \wedge P_3 + \frac{\eta}{\kappa} [(P_0 + P_1) \wedge J_1 + P_2 \wedge (K_3 + J_2)] \\ & \quad + \frac{\eta^2}{\kappa} [K_1 \wedge (K_3 + J_2) + J_1 \wedge (K_2 - J_3)], \\ \delta(K_1) &= \frac{1}{\kappa} [(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3) + P_3 \wedge (K_3 + J_2) + \eta J_1 \wedge (K_3 + J_2)], \\ \delta(K_2) &= \delta(J_3) = \frac{1}{\kappa} (P_0 \wedge K_2 + P_1 \wedge J_3 - P_3 \wedge J_1) - \frac{\eta}{\kappa} K_3 \wedge J_2, \\ \delta(K_3) &= \frac{1}{\kappa} (P_0 \wedge K_3 - P_1 \wedge J_2 + P_2 \wedge J_1) + \frac{\eta}{\kappa} [K_1 \wedge J_1 + K_2 \wedge (K_3 + J_2)], \\ \delta(J_1) &= -\frac{\eta}{\kappa} J_1 \wedge (K_2 - J_3), \\ \delta(J_2) &= -\frac{1}{\kappa} (P_0 \wedge K_3 - P_1 \wedge J_2 + P_2 \wedge J_1) - \frac{\eta}{\kappa} J_3 \wedge (K_3 + J_2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

⁴Nótese que la matriz (5.8) con $\rho \neq 0$ es la que generaliza la deformación N(4) de la Tabla 4.2, que sí tiene el mismo término *twist*.

Esta biálgebra generaliza (5.2) y es a lo sumo cuadrática en el parámetro η , que se puede entender como un parámetro de deformación del caso de κ -Poincaré *lightlike*. Observamos además que el generador $P_0 + P_1$ sigue siendo primitivo, mientras que la subálgebra definida por los generadores $\{J_1, K_2 - J_3, K_3 + J_2\}$ cierran una sub-biálgebra de Lie con coconmutador

$$\begin{aligned}\delta(J_1) &= -\frac{\eta}{\kappa} J_1 \wedge (K_2 - J_3), \quad \delta(K_2 - J_3) = 0, \\ \delta(K_3 + J_2) &= \frac{\eta}{\kappa} (K_2 - J_3) \wedge (K_3 + J_2),\end{aligned}\tag{5.11}$$

que deja de ser trivial cuando tenemos constante cosmológica no nula. Por último, notamos que el coconmutador del generador K_1 es la matriz de esta nueva deformación $\delta(K_1) = r_\Lambda$, análogamente a lo que sucede en el caso de Poincaré en (5.2).

5.2. El espacio-tiempo no conmutativo κ -(A)dS *lightlike*

El EHP coisótropo de Minkowski construido a partir de la matriz r_0 de la clase L(4) tiene la estructura de Poisson dada por los corchetes (4.30). Expresando estas relaciones en coordenadas de cono de luz (x^+, x^-, x^2, x^3) , los únicos corchetes no nulos son:

$$\{x^+, x^-\} = \frac{1}{\kappa} x^-, \quad \{x^+, x^2\} = \frac{1}{\kappa} x^2, \quad \{x^+, x^3\} = \frac{1}{\kappa} x^3,\tag{5.12}$$

donde recordemos que $x^\pm = (x^0 \pm x^1)/2$ y hemos renombrado $\alpha = 1/\kappa$. Al ser (5.12) un álgebra lineal en las coordenadas no hay problemas de ordenamiento y su cuantización es directa, dando lugar al ya conocido espacio-tiempo no conmutativo κ -Minkowski *lightlike*

$$[\hat{x}^+, \hat{x}^-] = \frac{1}{\kappa} \hat{x}^-, \quad [\hat{x}^+, \hat{x}^2] = \frac{1}{\kappa} \hat{x}^2, \quad [\hat{x}^+, \hat{x}^3] = \frac{1}{\kappa} \hat{x}^3.\tag{5.13}$$

Detallamos ahora la construcción del único espacio-tiempo no conmutativo que generaliza (5.13). Primeramente, calculamos el EHP coisótropo generado a partir de la matriz r_Λ en (5.9) como el cociente G_Λ/H siempre que la deformación sea coisótropa respecto a la subálgebra de Lorentz. En efecto, el coconmutador (5.10) satisface la condición de coisotropía por construcción, luego el EHP coisótropo tendrá la estructura de Poisson dada por el corchete de Sklyanin (2.18), donde los campos vectoriales invariantes ya han sido previamente obtenidos para el cálculo de los EHP del Capítulo 4. Esta estructura de Poisson da lugar a los siguientes corchetes de las coordenadas locales

$$\begin{aligned}\{x^0, x^1\} &= -\frac{1}{\kappa} \frac{\sin(\eta x^0) - \tanh(\eta x^1)}{\eta \cosh^2(\eta x^2) \cosh^2(\eta x^3)}, \\ \{x^0, x^2\} &= \frac{1}{\kappa} \left[\frac{1 - \sin(\eta x^0) \tanh(\eta x^1)}{\eta \cosh^2(\eta x^3)} \right] \tanh(\eta x^2) - \frac{1}{\kappa} \frac{\cos(\eta x^0) \tanh^2(\eta x^3)}{\eta \cosh(\eta x^1)}, \\ \{x^0, x^3\} &= \frac{1}{\kappa} \left[\frac{1 - \sin(\eta x^0) \tanh(\eta x^1)}{\eta} + \frac{\cos(\eta x^0) \tanh(\eta x^2)}{\eta \cosh(\eta x^1)} \right] \tanh(\eta x^3), \\ \{x^1, x^2\} &= \frac{1}{\kappa} \frac{\cos(\eta x^0) \cosh^2(\eta x^1) \tanh(\eta x^2)}{\eta \cosh^2(\eta x^3)} - \frac{1}{\kappa} \frac{\cosh(\eta x^1) \tanh^2(\eta x^3)}{\eta} \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\sin(\eta x^0) \tanh^2(\eta x^3)}{\eta} - \frac{\cos(\eta x^0) \sinh(\eta x^1) \tanh(\eta x^2)}{\eta \cosh^2(\eta x^3)} \right] \sinh(\eta x^1), \\ \{x^1, x^3\} &= \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\cos(\eta x^0)}{\eta} + \frac{\cosh(\eta x^1) \tanh(\eta x^2)}{\eta} - \frac{\sin(\eta x^0) \sinh(\eta x^1) \tanh(\eta x^2)}{\eta} \right] \tanh(\eta x^3), \\ \{x^2, x^3\} &= \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\sin(\eta x^0) \cosh(\eta x^1)}{\eta} - \frac{\sinh(\eta x^1)}{\eta} \right] \tanh(\eta x^3).\end{aligned}\tag{5.14}$$

Al igual que sucede con los EHP en (A)dS estudiados en los Capítulos 3 y 4, este se puede entender como una deformación altamente no lineal en términos del parámetro η de los corchetes (4.30), estructura que recuperamos cuando tomamos el límite $\eta \rightarrow 0$.

Teniendo en mente el objetivo de realizar una cuantización de la estructura de Poisson (5.14), resulta más conveniente expresarla en función de las coordenadas ambiente de cono de luz $(s^4, s^+, s^-, s^2, s^3)$, que definen la siguiente álgebra cuadrática

$$\begin{aligned}
\{s^+, s^-\} &= \frac{1}{\kappa} s^- s^4, & \{s^+, s^2\} &= \frac{1}{\kappa} s^2 s^4 - \frac{\eta}{\kappa} (s^3)^2, \\
\{s^+, s^3\} &= \frac{1}{\kappa} s^3 s^4 + \frac{\eta}{\kappa} s^2 s^3, & \{s^-, s^2\} &= 0, \\
\{s^-, s^3\} &= 0, & \{s^2, s^3\} &= \frac{2\eta}{\kappa} s^- s^3, \\
\{s^+, s^4\} &= \frac{\eta^2}{\kappa} (-2s^+ s^- + (s^2)^2 + (s^3)^2), & \{s^-, s^4\} &= \frac{2\eta^2}{\kappa} (s^-)^2, \\
\{s^2, s^4\} &= \frac{2\eta^2}{\kappa} s^- s^2, & \{s^3, s^4\} &= \frac{2\eta^2}{\kappa} s^- s^3.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Este EHP coisótropo se puede entender como una versión semiclásica (de Poisson) del verdadero espacio-tiempo cuántico, que es covariante bajo la acción del grupo cuántico de (A)dS.

Para realizar la cuantización completa de los corchetes de Poisson (5.15), buscamos construir un álgebra no conmutativa de operadores $(\hat{s}^4, \hat{s}^+, \hat{s}^-, \hat{s}^2, \hat{s}^3)$ que sea asociativa, es decir, que satisfaga las identidades de Jacobi. Esta tarea no es trivial ya que en (5.15) hay términos cuadráticos de las coordenadas ambiente que no conmutan, por lo que se debe tener cuidado con el orden en el que aparecen. Tras un largo cálculo, se puede comprobar que los siguientes conmutadores cuadráticos

$$\begin{aligned}
[\hat{s}^+, \hat{s}^-] &= \frac{1}{\kappa} \hat{s}^- \hat{s}^4, & [\hat{s}^+, \hat{s}^2] &= \frac{1}{\kappa} \hat{s}^2 \hat{s}^4 - \frac{\eta}{\kappa} (\hat{s}^3)^2, \\
[\hat{s}^+, \hat{s}^3] &= \frac{1}{\kappa} \hat{s}^3 \hat{s}^4 + \frac{\eta}{\kappa} \hat{s}^2 \hat{s}^3, & [\hat{s}^-, \hat{s}^2] &= 0, \\
[\hat{s}^-, \hat{s}^3] &= 0, & [\hat{s}^2, \hat{s}^3] &= \frac{2\eta}{\kappa} \hat{s}^- \hat{s}^3, \\
[\hat{s}^+, \hat{s}^4] &= \frac{\eta^2}{\kappa} \hat{\mathcal{S}}_{\eta/\kappa}, & [\hat{s}^-, \hat{s}^4] &= \frac{2\eta^2}{\kappa} (\hat{s}^-)^2, \\
[\hat{s}^2, \hat{s}^4] &= \frac{2\eta^2}{\kappa} \hat{s}^- \hat{s}^2, & [\hat{s}^3, \hat{s}^4] &= \frac{2\eta^2}{\kappa} \hat{s}^- \hat{s}^3,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

donde el operador $\hat{\mathcal{S}}_{\eta/\kappa}$ es la pseudoesfera cuántica

$$\hat{\mathcal{S}}_{\eta/\kappa} = -2\hat{s}^+ \hat{s}^- + (\hat{s}^2)^2 + (\hat{s}^3)^2 + \frac{2\eta}{\kappa} \hat{s}^- \hat{s}^2, \tag{5.17}$$

satisfacen la asociatividad, lo que se puede comprobar considerando los monomios ordenados $(\hat{s}^+)^k (\hat{s}^-)^l (\hat{s}^2)^m (\hat{s}^3)^n (\hat{s}^4)^j$. Con esto, hemos logrado cuantizar completamente la estructura de Poisson (5.15), obteniendo unas relaciones de conmutación (5.16) que definen el espacio-tiempo no conmutativo κ -(A)dS *lightlike*.

6. Conclusiones y trabajo futuro

Hasta ahora, el estudio de espacio-tiempos cuánticos en escenarios con constante cosmológica no nula ha sido escasamente investigado en la literatura (ver [42, 43, 44] para algunos resultados que consideran algunas deformaciones concretas, y [45] para un análisis más general pero solamente a nivel de biálgebra de Lie). Por este motivo, la contribución novedosa de este trabajo ha consistido en la construcción de este tipo de espacios como generalización de distintos espacio-tiempos no conmutativos de Minkowski. Más concretamente, se han generalizado distintos espacios homogéneos de Poisson coisótrofos de Minkowski al caso de (A)dS, que entendemos como una versión semiclásica o a primer orden de la cuantización completa de estos espacio-tiempos.

Esto se ha realizado construyendo y clasificando en primer lugar diez EHP de Minkowski en (2+1)D y catorce en (3+1)D generados a partir de deformaciones triangulares ya conocidas [24, 17]. El hecho de que sean triangulares garantiza que aquellas estructuras de Poisson en (2+1)D sean heredadas cuando consideramos (3+1)D. Los corchetes de Poisson de coordenadas, así como las álgebras de Lie que definen y sus Casimires se ha recopilado en las tablas 3.1, 4.1 y 4.2. A partir de esta clasificación, se encuentra que todas las estructuras de Poisson en (2+1)D generalizan trivialmente a los grupos de (A)dS, mientras que en el caso (3+1)-dimensional esto solo sucede con las clases A(2)-J(4) de la clasificación. Para estas deformaciones, se obtienen sus respectivos EHP coisótrofos de (A)dS, cuyos corchetes y Casimires generalizan a los de sus respectivos espacios de Minkowski. Estos EHP de (A)dS no eran conocidos hasta la fecha, y su construcción y estudio constituye uno de los principales resultados de este trabajo, que se encuentra resumido en las tablas 3.2, 4.3 y 4.4.

La otra aportación relevante de este trabajo es la generalización de la ya conocida deformación κ -Poincaré *lightlike* correspondiente a la clase L(4), así como de su espacio-tiempo no conmutativo definido en (5.13). Se encuentra que la única posible generalización de esta estructura de Poisson que mantiene un corchete de Schouten nulo es la generada por la matriz (5.9), cuyo coconmutador define una sub-biálgebra de Lie (5.11) que trivializa cuando tomamos el límite $\eta \rightarrow 0$. Por último, se procede con la construcción del EHP coisótrofo asociado y su posterior cuantización en términos de las coordenadas ambiente (5.16), al que llamamos espacio-tiempo no conmutativo κ -(A)dS *lightlike*.

Como comentarios finales, merece la pena mencionar qué investigaciones se pueden realizar a partir de los resultados aquí presentados. En primer lugar, la cuantización completa de los EHP coisótrofos de (A)dS construidos en los Capítulos 3 y 4, así como la obtención de sus operadores de Casimir cuánticos. Alternativamente a la construcción de espacios-tiempos, se pueden usar las deformaciones estudiadas aquí para construir los EHP de geodésicas, que también admiten una descripción como espacios homogéneos construidos a partir de cocientes G_Λ/H_i con subgrupo de isotropía H_i [46, 47]. En este aspecto, pueden ser especialmente interesantes los EHP de geodésicas de la matriz κ -(A)dS *lightlike*, ya que su deformación análoga de Poincaré es la única conocida que permite la construcción simultánea de los tres tipos de espacios de geodésicas [36, 37]. Tanto para el caso de los espacio-tiempos como para los espacios de geodésicas cuánticos así construidos, sería interesante estudiar sus límites no relativistas y ultrarrelativistas empleando técnicas de contracción de biálgebras de Lie, de forma similar a lo realizado en [48, 49]. En otra línea, se pueden estudiar implicaciones fenomenológicas de estos modelos de espacio-tiempos cuánticos, como ya se ha hecho con otras deformaciones en contextos de teorías de campos, relaciones de dispersión modificadas, localizabilidad, etc. Analizar los posibles efectos de la presencia de una constante cosmológica en los distintos espacios-tiempos no conmutativos aquí construidos puede ayudarnos a entender mejor cómo la curvatura del espacio-tiempo afecta a la descripción cuántica de este, ganando así nuevas intuiciones sobre la naturaleza de la Gravedad Cuántica.

A. Clasificación de matrices r para $\mathfrak{iso}(2, 1)$

La primera clasificación completa de clases de equivalencia bajo automorfismos de matrices r antisimétricas para el álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(2, 1)$ fue dada por Stachura en [24]. En ella, utiliza una base de generadores $\{e_1, e_2, e_3, k_1, k_2, k_3\}$ distinta a la usada en este trabajo $\{P_0, P_1, P_2, K_1, K_2, J\}$, relacionadas mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} e_1 &= P_0, & e_2 &= -P_1, & e_3 &= -P_2, \\ k_1 &= J, & k_2 &= -K_2, & k_3 &= K_1. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Además, Stachura parametriza las familias de soluciones con $a \in \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t}$ arbitrario y parámetros $\alpha = 0, 1$; $\rho \geq 0$ con $\alpha^2 + \rho^2 \neq 0$ (ver [24]).

Tabla A.1: Diccionario entre clasificaciones de las matrices r para el álgebra de Poincaré en $(2+1)D$.

Matriz r	Clase aquí	Clase de Stachura [24]
$\alpha(P_0 + P_1) \wedge K_1$	A(2)	IIIa ($a = 0$)
$\rho P_1 \wedge K_2$	B(3)	IIa ($\alpha = 0, a = 0$)
$\rho P_0 \wedge J$	C(3)	IIb ($\alpha = 0, a = 0$)
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J)$ $+\alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J)]$	D(3)	IIc ($\alpha = 1, \rho \neq 0, a = 0$)
$\alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J)]$	E(3)	IIc ($\alpha = 1, \rho = 0, a = 0$)
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J)$	F(3)	IIc ($\alpha = 0, \rho \neq 0, a = 0$)

B. Clasificación de matrices r para $\mathfrak{iso}(3,1)$

La primera clasificación de clases de matrices r antisimétricas para el álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(3,1)$ fue dada por Zakrzewski en [17], en la que aparecen todas las deformaciones triangulares. Los generadores que se emplean en dicha clasificación se pueden escribir en función de los de nuestra base a través del isomorfismo:

$$\begin{aligned} e_0 &= P_0, & e_1 &= P_2, & e_2 &= P_3, \\ e_3 &= P_1, & e_{\pm} &= P_0 \pm P_1, & H &= K_1, \\ JH &= J_1, & X_{\pm} &= K_2 \mp J_3, & JX_{\pm} &= \pm K_3 + J_2. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Además, Zakrzewski parametriza las familias de soluciones con $a \in \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t}$ arbitrario y parámetros $\sigma = 0, \pm 1$; $\beta \geq 0$ (ver [17]).

Tabla B.1: Diccionario entre clasificaciones de las matrices r para el álgebra de Poincaré en $(3+1)\text{D}$.

Matriz r	Clase aquí	Clase de Zakrzewski [17]
$\alpha(P_0 + P_1) \wedge K_1$	A(2)	17 ($a = 0$)
$\rho P_1 \wedge K_2$	B(3)	16 ($a = 0$)
$\rho P_0 \wedge J_3$	C(3)	13 ($a = 0$)
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$ $+\alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3)]$	D(3)	9 ($\beta = 0, \sigma = 1, a = 0$)
$\alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3)]$	E(3)	9 ($\beta = 0, \sigma = 0, a = 0$)
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$	F(3)	12 ($a = 0$)
$\rho P_3 \wedge J_3$	G(4)	14 ($a = 0$)
$\rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$	H(4)	15 ($a = 0$)
$(P_0 + P_1) \wedge (\alpha K_1 + \rho J_1)$	I(4)	18 ($\beta \neq 0, a = 0$)
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$ $+\beta P_2 \wedge (K_3 + J_2)$	J(4)	10 ($a = 0$)
$\rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$ $+\alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3)]$ $+\beta P_2 \wedge (K_3 - J_2)$	K(4)	9 ($\beta \neq 0, \sigma = 1, a = 0$)
$\alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3)$ $+P_3 \wedge (K_3 + J_2)]$	L(4)	7 ($\beta = 0, a = 0$)
$\alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3)$ $+P_3 \wedge (K_3 + J_2)] + \rho(P_0 + P_1) \wedge J_1$	M(4)	7 ($\beta \neq 0, a = 0$)
$\alpha[(P_0 + P_1) \wedge K_1 + P_2 \wedge (K_2 - J_3)$ $+P_3 \wedge (K_3 + J_2)] + \rho(P_0 + P_1) \wedge (K_2 - J_3)$	N(4)	8 ($\beta \neq 0, a = 0$)

Referencias

- [1] L. J. Garay, “Quantum gravity and minimum length,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 10, no. 02, pp. 145–165, 1995.
- [2] S. Hossenfelder, “Minimal length scale scenarios for quantum gravity,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 16, no. 1, p. 2, 2013.
- [3] A. Addazi, J. Alvarez-Muniz, R. A. Batista, G. Amelino-Camelia, V. Antonelli, M. Arzano, M. Asorey, J.-L. Atteia, S. Bahamonde, F. Bajardi, *et al.*, “Quantum gravity phenomenology at the dawn of the multi-messenger era—a review,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 125, p. 103948, 2022.
- [4] H. S. Snyder, “Quantized space-time,” *Physical Review*, vol. 71, no. 1, p. 38, 1947.
- [5] S. Majid and H. Ruegg, “Bicrossproduct structure of κ -Poincaré group and non-commutative geometry,” *Physics Letters B*, vol. 334, no. 3-4, pp. 348–354, 1994.
- [6] J. Lukierski, H. Ruegg, A. Nowicki, and V. N. Tolstoy, “q-deformation of Poincaré algebra,” *Physics Letters B*, vol. 264, no. 3-4, pp. 331–338, 1991.
- [7] J. Lukierski, A. Nowicki, and H. Ruegg, “New quantum Poincaré algebra and κ -deformed field theory,” *Physics Letters B*, vol. 293, no. 3-4, pp. 344–352, 1992.
- [8] S. Zakrzewski, “Poisson homogeneous spaces,” *arXiv preprint hep-th/9412101*, 1994.
- [9] P. Etingof and D. Kazhdan, “Quantization of Poisson algebraic groups and Poisson homogeneous spaces,” *arXiv preprint q-alg/9510020*, 1995.
- [10] A. Ballesteros, F. Herranz, M. Del Olmo, and M. Santander, “A new “null-plane” quantum Poincaré algebra,” *Physics Letters B*, vol. 351, no. 1-3, pp. 137–145, 1995.
- [11] R. Gilmore, *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*. Courier Corporation, 2006.
- [12] I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*. Springer Basel AG, 1994.
- [13] V. Chari and A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [14] I. Gutierrez-Sagredo, *Lorentzian Poisson homogeneous spaces, quantum groups and noncommutative spacetimes*. PhD thesis, University of Burgos, 2019.
- [15] A. Nijenhuis, “Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. ii,” in *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, vol. 58, pp. 398–403, Elsevier BV, 1955.
- [16] V. Chari and A. N. Pressley, *A guide to quantum groups*. Cambridge university press, 1995.
- [17] S. Zakrzewski, “Poisson structures on the Poincaré group,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 185, pp. 285–311, 1997.
- [18] P. Maslanka, “The n -dimensional κ -Poincaré algebra and group,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 26, p. L1251, 1993.
- [19] J. Lukierski, “Kappa-deformations: historical developments and recent results,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 804, p. 012028, IOP Publishing, 2017.
- [20] A. Ballesteros, I. Gutierrez-Sagredo, and F. J. Herranz, “The noncommutative space of light-like worldlines,” *Physics Letters B*, vol. 829, p. 137120, 2022.

- [21] V. G. Drinfeld, “On Poisson homogeneous spaces of Poisson-Lie groups,” *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 95, no. 2, pp. 524–525, 1993.
- [22] A. Ballesteros, C. Meusburger, and P. Naranjo, “AdS Poisson homogeneous spaces and Drinfel’d doubles,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 50, no. 39, p. 395202, 2017.
- [23] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, and H. Zassenhaus, “Invariants of real low dimension Lie algebras,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 17, no. 6, pp. 986–994, 1976.
- [24] P. Stachura, “Poisson-Lie structures on Poincaré and Euclidean groups in three dimensions,” *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 31, no. 19, pp. 4555–4564, 1998.
- [25] J. Lukierski and M. Woronowicz, “New Lie-algebraic and quadratic deformations of Minkowski space from twisted Poincaré symmetries,” *Physics Letters B*, vol. 633, no. 1, pp. 116–124, 2006.
- [26] A. Ballesteros, I. Gutierrez-Sagredo, and F. Mercati, “Coisotropic Lie bialgebras and complementary dual Poisson homogeneous spaces,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 54, no. 31, p. 315203, 2021.
- [27] W. R. Inc., “Mathematica, Version 14.2.” Champaign, IL, 2024.
- [28] F. Lizzi and P. Vitale, “Time discretization from noncommutativity,” *Physics Letters B*, vol. 818, p. 136372, 2021.
- [29] F. Lizzi, L. Scala, and P. Vitale, “Localization and observers in ρ -Minkowski spacetime,” *Physical Review D*, vol. 106, no. 2, p. 025023, 2022.
- [30] K. Hersent and J.-C. Wallet, “Field theories on ρ -deformed Minkowski space-time,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2023, no. 7, pp. 1–19, 2023.
- [31] V. Maris and J.-C. Wallet, “Gauge theory on ρ -Minkowski space-time,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2024, no. 7, pp. 1–21, 2024.
- [32] M. D. Ćirić, N. Konjik, and A. Samsarov, “Noncommutative scalar quasinormal modes of the Reissner–Nordström black hole,” *Classical and quantum gravity*, vol. 35, no. 17, p. 175005, 2018.
- [33] M. Dimitrijević Ćirić, N. Konjik, and A. Samsarov, “Noncommutative scalar field in the nonextremal reissner-nordström background: Quasinormal mode spectrum,” *Physical Review D*, vol. 101, no. 11, p. 116009, 2020.
- [34] A. Ballesteros, I. Gutierrez-Sagredo, and F. J. Herranz, “The Poincaré group as a Drinfel’d double,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 36, no. 2, p. 025003, 2018.
- [35] A. Ballesteros, F. Herranz, and C. Perena, “Null-plane quantum universal R-matrix,” *Physics Letters B*, vol. 391, no. 1-2, pp. 71–77, 1997.
- [36] A. Ballesteros, I. Gutierrez-Sagredo, and F. J. Herranz, “All noncommutative spaces of κ -Poincaré geodesics,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 55, no. 43, p. 435205, 2022.
- [37] I. Gutierrez-Sagredo, A. Ballesteros, and F. J. Herranz, “Noncommutative spaces of geodesics with light-like κ -Poincaré covariance,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2912, p. 012046, IOP Publishing, 2024.
- [38] Á. Ballesteros, F. J. Herranz, F. Musso, and P. Naranjo, “The κ -(A)dS quantum algebra in $(3+1)$ dimensions,” *Physics Letters B*, vol. 766, pp. 205–211, 2017.

- [39] A. Ballesteros, I. Gutierrez-Sagredo, and F. J. Herranz, “The κ -(A)dS noncommutative spacetime,” *Physics Letters B*, vol. 796, pp. 93–101, 2019.
- [40] A. Borowiec, A. Pachoł, *et al.*, “ κ -deformations and extended κ -Minkowski spacetimes,” *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, vol. 10, p. 107, 2014.
- [41] A. Ballesteros, F. Herranz, M. Del Olmo, and M. Santander, “Four-dimensional quantum affine algebras and space–time q-symmetries,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 35, no. 9, pp. 4928–4940, 1994.
- [42] A. Ballesteros, G. Gubitosi, I. Gutierrez-Sagredo, and F. J. Herranz, “Curved momentum spaces from quantum groups with cosmological constant,” *Phys. Lett. B*, vol. 773, pp. 47–53, 2017.
- [43] A. Ballesteros, I. Gutierrez-Sagredo, F. J. Herranz, C. Meusburger, and P. Naranjo, “Quantum groups and noncommutative spacetimes with cosmological constant,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 880, no. 1, p. 012023, 2017.
- [44] A. Ballesteros, I. Gutierrez-Sagredo, and F. J. Herranz, “Noncommutative (A)dS and Minkowski spacetimes from quantum Lorentz subgroups,” *Class. Quantum Gravity*, vol. 39, p. 015018, jan 2022.
- [45] I. Gutierrez-Sagredo and F. J. Herranz, “Cayley–Klein Lie Bialgebras: Noncommutative Spaces, Drinfel’d Doubles and Kinematical Applications,” *Symmetry (Basel)*, vol. 13, no. 7, p. 1249, 2021.
- [46] A. Ballesteros, I. Gutierrez-Sagredo, and F. J. Herranz, “Noncommutative spaces of worldlines,” *Physics Letters B*, vol. 792, pp. 175–181, 2019.
- [47] P. Stachura, “A quantum space of Euclidean lines,” *arXiv preprint arXiv:2411.15977*, 2024.
- [48] A. Ballesteros, G. Gubitosi, I. Gutierrez-Sagredo, and F. J. Herranz, “The κ -Newtonian and κ -Carrollian algebras and their noncommutative spacetimes,” *Phys. Lett. B*, vol. 805, p. 135461, 2020.
- [49] A. Ballesteros, G. Gubitosi, I. Gutierrez-Sagredo, and F. J. Herranz, “ κ -Galilean and κ -Carrollian noncommutative spaces of worldlines,” *Phys. Lett. B*, vol. 838, p. 137735, mar 2023.