



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Matemáticas

El abanico de Gröbner y sus aplicaciones

Autor: Pedro Fidalgo Martínez

Tutor: Santiago Encinas Carrión

Valladolid, abril 2025

Abstract

A polyhedral cone σ in affine space is a cone defined by hyperplanes with rational coefficients. It is well known that these cones are generated by a finite number of rays. A polyhedral fan Σ is a complex formed by cones. Given an polynomial ideal I , we can associate it to a fan $\text{GF}(I)$, called the Gröbner fan, such that the rational points of a given cone σ correspond to monomial orders that share the same Gröbner basis of the ideal.

This work aims to study these fans [FJT] and an application to toric geometry. Some computations of Gröbner fans will also be carried out using the program [Gfan] to provide examples.

The concept of a non-degenerate Newton equation is well known in the literature, and its extension to any ideal is used in [AGS] to prove that such ideals admit a resolution of singularities called a toric modification. This morphism can be constructed thanks to a local version of the Gröbner fan $\Sigma(I)$.

Resumen

Un cono poliédrico σ del espacio afín es un cono definido por hiperplanos con coeficientes racionales. Es bien conocido que que estos conos están generados por un número finito de rayos. Un abanico poliédrico Σ es un complejo formado por conos. Dado un ideal de polinomios I podemos asociarle un abanico $\text{GF}(I)$ llamado abanico de Gröbner tal que los puntos racionales de un mismo cono σ corresponden a órdenes monomiales que comparten la misma base de Gröbner del ideal.

Este trabajo pretende estudiar estos abanicos [FJT] y una aplicación a la geometría tórica. También se realizará algún cálculo de abanicos de Gröbner con el programa [Gfan] para dar ejemplos.

El concepto de ecuación Newton no degenerada es bien conocido en la literatura, su extensión a un ideal cualquiera se utiliza en [AGS] para probar que dichos ideales admiten una resolución de singularidades llamada modificación tórica. Este morfismo se puede construir gracias a una versión local del abanico de Gröbner $\Sigma(I)$.

Índice general

Introducción	1
1. El abanico de Gröbner	3
1.1. Conos y abanicos	3
1.2. Bases de Gröbner	6
1.3. El abanico de Gröbner es abanico	11
2. Aplicaciones en geometría tórica	21
2.1. Conos regulares	22
2.2. Abanicos regulares	26
2.3. Poliedro de Newton	30
2.4. Transformaciones monomiales	35
2.5. Modificación tórica	36
2.6. Hipersuperficies Newton no degeneradas	39
2.7. Abanico local de ideales no principales	41
2.8. Variedades Newton no degeneradas	42
Bibliografía	44

Introducción

El objetivo de este Trabajo Fin de Máster es conocer el abanico de Gröbner y sus posibles aplicaciones. Especialmente veremos una aplicación en geometría tórica. También se pretende dar algún ejemplo de cálculo de dicho abanico, aunque no se darán detalles de cómo funciona el algoritmo. Para la definición y demostración de las propiedades principales del abanico de Gröbner se va a seguir la primera parte del artículo [FJT]. Después, con el objetivo de conocer una aplicación del abanico de Gröbner, se va a seguir el artículo [AGS]. Se utilizará el programa [Gfan] a través de [SageMath] para calcular algún ejemplo concreto.

El abanico de Gröbner aparece por primera vez en 1988, en un artículo de Mora y Robbiano [MR]. La idea es encapsular la información de los ideales iniciales de un ideal dado en un objeto combinatorio como es un abanico racional. A cada ideal inicial le corresponde un cono del abanico. Sin embargo, los autores anteriores no dan una demostración general, ya que se centran en ideales homogéneos. Cuando no lo son, estudian propiedades de la homogeneización del ideal. Por este motivo, en lugar de consultar la fuente original se va a trabajar con el artículo [FJT], donde se exponen de manera ordenada y clara todas las propiedades y demostraciones necesarias.

La segunda parte del artículo de Fukuda, Jensen y Thomas trata sobre el estudio de algoritmos para el cálculo del abanico de Gröbner, pero esto se sale de los objetivos del trabajo. Eso sí, para realizar algún cálculo de ejemplo se utilizará a través de [SageMath] el programa [Gfan] desarrollado por Jensen, uno de los autores de dicho artículo. Otra de las referencias principales del primer capítulo es el libro [Sturmfels], muy citado cuando se trata este tema.

El segundo capítulo de la memoria se centra en estudiar una aplicación del abanico de Gröbner. Como el abanico nos da información sobre los ideales iniciales respecto de un orden monomial (global) de un ideal dado, podemos generalizarlo al mundo local para el estudio de singularidades. De esta manera, al igual que ocurre con el poliedro de Newton (que tiene relación con el abanico de Gröbner como ya veremos), un objeto combinatorio nos va a

dar la información necesaria para construir una resolución de cierto tipo de singularidades: las Newton no degeneradas.

Las singularidades Newton no degeneradas son conocidas desde los años setenta. Antes del artículo [AGS] ya existían estrategias para resolverlas utilizando geometría tórica. La novedad que aporta este artículo es una forma de generalizar el caso de hipersuperficies y el de intersección completa a cualquier ideal que sea *Newton no degenerado*, sin depender del sistema de generadores. Para ello, en vez de utilizar el poliedro de Newton se hace uso del abanico de Gröbner. En este artículo también hay una parte de geometría tropical que no va a ser estudiada en este trabajo, por ser una teoría que requiere más tiempo, y este se ha dedicado a entender la base de la geometría tórica de textos como [CLS] y [Ewald].

Al mismo tiempo que se explica la teoría sobre el abanico de Gröbner y la resolución de singularidades Newton no degeneradas, se ha intentado incluir un número adecuado de ejemplos. De esta manera los conceptos se entienden mejor y se ponen en práctica. Destaco los siguientes:

- Contraejemplo 1.1.7 no todos los conjuntos C_ω son conos convexos.
- Ejemplo de abanicos de Gröbner en dos (1.3.2) y tres dimensiones (1.3.13) utilizando [Gfan].
- Refinamiento regular de un cono mediante subdivisión estrella (2.2.7).
- Dado un ideal principal, la relación entre el abanico de Gröbner local y global, y el poliedro y politopo de Newton asociados (2.3.9).
- Ejemplo de modificación tórica: la explosión del plano en un punto (2.5.4).

Este Trabajo Fin de Máster se ha realizado entre los cursos 2023 – 2024 y 2024 – 2025 del Programa de Doble Titulación Oficial: Máster en Matemáticas y MUPES. Durante el curso 23 – 24 se ha disfrutado de la beca de colaboración en el departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, del Ministerio de Educación.

Capítulo 1

El abanico de Gröbner

En este primer capítulo se define el abanico de Gröbner asociado a un ideal de polinomios y se exponen las principales propiedades. En particular se demuestra que el abanico de Gröbner es un abanico poliédrico. Durante el proceso se van a estudiar propiedades sobre los órdenes monomiales, las formas iniciales y la geometría convexa.

La sección 1.1 introduce los conceptos fundamentales que se van a utilizar durante todo este trabajo: conos, abanicos, órdenes monomiales y formas iniciales.

Después, en la sección 1.2 nos centramos en las bases de Gröbner. Nos interesan especialmente las bases de Gröbner reducidas, ya que se utilizarán frecuentemente en las demostraciones posteriores. La referencia principal aquí, a diferencia del resto del capítulo, es el libro de [Sturmfels].

La sección 1.3 es la última y la más larga del capítulo. Aquí se verán paso a paso las demostraciones de las propiedades del abanico de Gröbner. También daremos algunos ejemplos.

1.1. Conos y abanicos

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y llamemos $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ al anillo de polinomios en n variables. Seguiremos el artículo [FJT] de Fukuda, Jensen y Thomas.

Definición 1.1.1. Diremos que un *poliedro* P de $\mathbb{R}^n$ es una región $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ definida por una matriz A y un vector b . Si P está acotado diremos que es un *politopo*. Cuando $b = \mathbf{0}$ se dice que el conjunto es un *cono poliédrico*. Definimos la *dimensión* de un poliedro $\dim P$ como la dimensión del menor subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ que contenga a P .

Diremos que C es una cara de P o que $C \leq P$ si existe un $\omega \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$C = \text{Cara}_\omega(P) := \{x \in P : \langle \omega, x \rangle = \max_{y \in P} \langle \omega, y \rangle\}.$$

Un *abanico* es un complejo poliédrico compuesto por conos. Veamos cómo se define un complejo poliédrico.

Definición 1.1.2. Un *complejo poliédrico* Δ es un conjunto de poliedros de $\mathbb{R}^n$ tal que:

- Si $P \in \Delta$ y $C \leq P$ no es vacía, entonces $C \in \Delta$.
- Dados $P, Q \in \Delta$ tales que $P \cap Q \neq \emptyset$, entonces $P \cap Q$ es cara de P y de Q .

El *soporte* de un complejo poliédrico es el conjunto $|\Delta| = \bigcup_{P \in \Delta} P$.

Ahora pasemos a recordar la noción de orden monomial sobre los monomios $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ de R , con $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Extenderemos la relación de orden monomial a todos los términos $a\mathbf{x}^\alpha$ de R .

Definición 1.1.3. Un *orden monomial (global)* $\prec$ en R es una relación de orden total sobre $\mathbb{N}_0^n$, es decir, sobre los monomios $\{\mathbf{x}^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ de R . Esta relación debe cumplir las siguientes propiedades:

- Para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n - \{\mathbf{0}\}$ se tiene $1 \prec \mathbf{x}^\alpha$ (es decir $\mathbf{0} \prec \alpha$).
- Para cualquier $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathbf{x}^\alpha \prec \mathbf{x}^\beta$ implica que $\mathbf{x}^\alpha \mathbf{x}^\gamma \prec \mathbf{x}^\beta \mathbf{x}^\gamma$ (es decir $\alpha \prec \beta$ implica $\alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$).

Dado un orden monomial $\prec$ y un vector $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es fácil comprobar que podemos definir un nuevo orden monomial como

$$\mathbf{x}^\alpha \prec_\omega \mathbf{x}^\beta \Leftrightarrow \langle \omega, \alpha \rangle < \langle \omega, \beta \rangle \quad \text{o} \quad \langle \omega, \alpha \rangle = \langle \omega, \beta \rangle \text{ y } \mathbf{x}^\alpha \prec \mathbf{x}^\beta.$$

Gracias a los órdenes monomiales y a los vectores de pesos podemos definir cuál es la parte inicial de los polinomios de R . Pero antes, dado un polinomio $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in R$ definimos su *conjunto de exponentes* o *soporte* como $\varepsilon(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : c_\alpha \neq 0\}$ y su ω -grado como $\text{gr}_\omega(f) = \max_{\alpha \in \varepsilon(f)} \langle \omega, \alpha \rangle$.

Definición 1.1.4. Llamaremos *término inicial* de un polinomio $f \in R$ respecto del orden monomial $\prec$ al término $\text{in}_\prec(f) = c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ del monomio maximal $\alpha = \max_\prec \varepsilon(f)$, que existe y es único dado que $\varepsilon(f)$ es finito y $\prec$ es total. También definimos la forma inicial de f respecto de $\omega \in \mathbb{R}^n$

$$\text{in}_\omega(f) = \sum_{\langle \omega, \alpha \rangle = \text{gr}_\omega(f)} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha,$$

que no tiene por qué ser un único término. Definimos para ideales

$$\text{in}_{\prec} I = \langle \text{in}_{\prec} f : f \in I \rangle, \quad \text{in}_{\omega} I = \langle \text{in}_{\omega} f : f \in I \rangle.$$

Nótese que $\text{in}_{\prec} I$ es un ideal monomial pero $\text{in}_{\omega} I$ no tiene por qué serlo.

Definimos ahora lo que serán los conos del abanico de Gröbner. Luego probaremos que realmente estos conjuntos son conos poliédricos.

Definición 1.1.5. Dado un ideal I de R , un vector $\omega \in \mathbb{R}^n$ y un orden monomial $\prec$, definimos:

$$C_{\prec}(I) = \overline{\{v \in \mathbb{R}^n : \text{in}_v I = \text{in}_{\prec} I\}}$$

$$C_{\omega}(I) = \overline{\{v \in \mathbb{R}^n : \text{in}_v I = \text{in}_{\omega} I\}}.$$

Es decir, estos conjuntos son las adherencias de las clases de equivalencia de la relación dada por

$$u \sim_I v \Leftrightarrow \text{in}_u(I) = \text{in}_v(I).$$

Definición 1.1.6. Definimos el *abanico de Gröbner* de $I \subseteq R$ como el abanico $\text{GF}(I)$ formado por los conos $C_{\prec}(I)$ tales que su interior relativo corta el primer ortante $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, y todas las caras de estos. Llamaremos *región de Gröbner* $\text{GR}(I)$ de I al soporte de $\text{GF}(I)$.

Ejemplo 1.1.7 (Existen conjuntos $C_{\omega}(I)$ no convexos). Hemos definido el abanico de Gröbner utilizando los conos $C_{\prec}(I)$ que cortan el ortante positivo. Vamos a ver en este ejemplo que existen «conos» de la forma $C_{\omega}(I)$ no convexos, por lo que no son realmente conos y no todos los $C_{\omega}(I)$ nos van a servir.

Sea el ideal maximal $I = \langle x+1, y+1 \rangle$ en el anillo $\mathbb{R}[x, y]$. En este caso el abanico de Gröbner es fácil de calcular. Veamos primero las formas iniciales respecto de órdenes monomiales. Como suponemos que los órdenes $\prec$ son globales, tenemos que $1 \prec x$ y $1 \prec y$. Por lo que $\text{in}_{\prec} I = \langle x, y \rangle$.

Sean $\alpha, \beta > 0$. Vamos a calcular todos los posibles conos de I asociados a un vector de pesos.

- $\text{in}_{(\alpha, \beta)} I = \langle x, y \rangle$.
- $\text{in}_{(-\alpha, \beta)} I = \text{in}_{(-\alpha, -\beta)} I = \text{in}_{(\alpha, -\beta)} I = \langle 1 \rangle$.
- $\text{in}_{(-\alpha, 0)} I = \text{in}_{(0, -\beta)} I = \langle 1 \rangle$.
- $\text{in}_{(\alpha, 0)} I = \langle x, y+1 \rangle$.
- $\text{in}_{(0, \beta)} I = \langle x+1, y \rangle$.

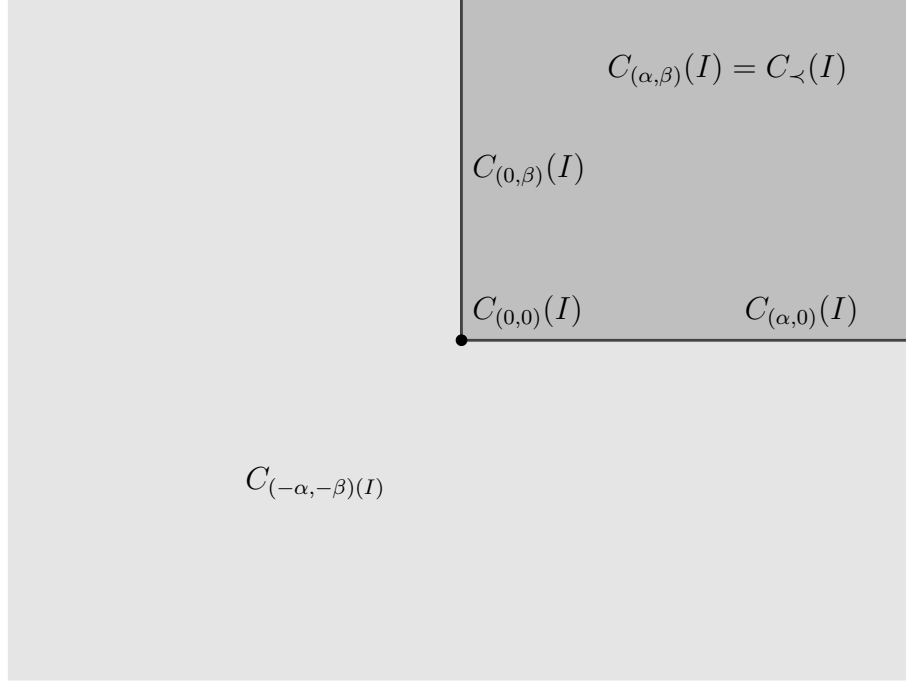


Figura 1.1: Los conos y no conos de I .

- $\text{in}_{(0,0)} I = \langle x + 1, y + 1 \rangle$.

Como se puede ver en la figura 1.1, el conjunto $C_{(-1,-1)}(I)$ no es convexo, ya que $u = (-1, 2), v = (2, -1) \in C_{(-1,-1)}(I)$ pero $u + v = (1, 1)$ no pertenece a $C_{(1,1)}(I)$. Por otro lado, el único cono asociado a órdenes monomiales es $C_{(1,1)}(I)$. Luego el abanico de Gröbner de I es

$$\text{GF}(I) = \{C_{(0,0)}(I), C_{(1,0)}(I), C_{(0,1)}(I), C_{(1,1)}(I)\}.$$

En las próximas dos secciones se demostrará que el abanico de Gröbner de un ideal es en efecto un abanico poliédrico formado por finitos conos poliédricos.

1.2. Bases de Gröbner

En esta sección seguiremos las definiciones de [CLO] y las demostraciones de [Sturmfels]. Vamos a utilizar las bases de Gröbner para enunciar unas propiedades necesarias a la hora de entender la estructura del abanico de Gröbner. Empecemos recordando la definición y las propiedades básicas de las bases de Gröbner.

Definición 1.2.1. Dado un ideal I de R y un orden monomial $\prec$, decimos que el conjunto de generadores $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m\}$ de I es una *base de Gröbner* con respecto del orden $\prec$ si

$$\text{in}_\prec I = \langle \text{in}_\prec(g_1), \dots, \text{in}_\prec(g_m) \rangle.$$

Al realizar el algoritmo de división [CLO, Proposición 2.6.1] de f entre una base de Gröbner $\mathcal{G}$ llamaremos al resto la forma normal reducida $\bar{f}^\mathcal{G}$.

La condición de que $\mathcal{G}$ genere I es prescindible, ya que por [CLO, corolario 2.5.6] tenemos que aunque no supongamos que una base de Gröbner genera el ideal, igualmente es un sistema de generadores de este.

El algoritmo de Buchberger garantiza la existencia de bases de Gröbner finitas dado un ideal y un orden monomial. Además, dada una base de Gröbner podemos hacer que todos sus polinomios tengan coeficiente 1 en su término inicial. También podemos eliminar los elementos $g \in \mathcal{G}$ tales que $\text{in}_\prec g \in \langle \text{in}_\prec(\mathcal{G} - \{g\}) \rangle$. De esta forma tenemos una base de *Gröbner minimal*.

Los términos iniciales de una base de Gröbner minimal $\text{in}_\prec \mathcal{G}$ son un sistema de monomios generadores minimal de $\text{in}_\prec I$, que es ideal monomial. Y como consecuencia del lema de Dickson tenemos que el conjunto $\text{in}_\prec \mathcal{G}$ es el mismo para cualquier base minimal [CLO, proposición 2.4.7]. Pero las bases minimales no son únicas. Podemos exigir una condición más fuerte que garantice la unicidad.

Definición 1.2.2. Una base minimal de Gröbner $\mathcal{G}$ de $I \subseteq R$ respecto de $\prec$ se dice que es *reducida* si para todo $g \in \mathcal{G}$ se cumple que ningún término de g está en $\langle \text{in}_\prec(\mathcal{G} - \{g\}) \rangle$.

Dado $I \subseteq R$ y un orden monomial $\prec$ sabemos que existe una única base de Gröbner reducida [CLO, teorema 2.7.5], que denotaremos $\mathcal{G}_\prec(I)$. Nuestro próximo objetivo es probar que el abanico de Gröbner tiene un número finito de conos.

Definición 1.2.3. Llamamos *monomios estándar* a los monomios que no pertenecen al ideal monomial $\text{in}_\prec I$. Denotaremos por $\text{St}_\prec I$ al conjunto de los monomios estándar.

Proposición 1.2.4. Dados un ideal $I \subseteq R$ y un orden monomial $\prec$, las imágenes de los monomios estándar por $\pi : R \rightarrow R/I$ forman una base de R/I como $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ una base de Gröbner para I respecto de $\prec$. Dado un polinomio $f \in R$, sea $r = \bar{f}^\mathcal{G} \in R$ su forma normal reducida, que es única

por [CLO, proposición 2.6.1]. De hecho, por este resultado sabemos que existe $g \in I$ tal que $f = g + r$ y que todos los monomios de r están en $\text{St}_\prec I$. Luego $\pi(f) = \pi(r)$ es $\mathbb{K}$ -combinación lineal de elementos de $\pi(\text{St}_\prec I)$. De esta manera tenemos que $\pi(\text{St}_\prec I)$ genera R/I .

Solo falta ver que $\pi(\text{St}_\prec I)$ es linealmente independiente. Si tenemos una combinación lineal de imágenes de monomios estándar nula $\pi(r) = 0 \in R/I$, entonces esta proviene de un $r = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in I$ con $\varepsilon(r) \subset \text{St}_\prec I$. Estas dos condiciones implican que $r = \bar{r}^G = 0$ y tenemos que $c_\alpha = 0$ para todo α . $\square$

Teorema 1.2.5. Un ideal $I \subseteq R$ tiene solo un número finito de ideales iniciales distintos respecto a órdenes monomiales.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que el conjunto Σ_0 de ideales iniciales de I respecto a órdenes monomiales es infinito. Acabaremos construyendo una cadena infinita de ideales estrictamente creciente. Tomemos $f_1 = \sum_{\alpha \in \varepsilon(f_1)} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in I$ no nulo, siendo $\varepsilon(f_1)$ claramente finito.

Para cada $\text{in}_\prec I \in \Sigma_0$ existen $\alpha \in \varepsilon(f_1)$ y $f \in I$ tales que $\mathbf{x}^\alpha = \text{in}_\prec f$. Esto se logra tomando $f = \frac{1}{c_\alpha} f_1$ para conseguir $\text{in}_\prec f = \mathbf{x}^\alpha$. Como Σ_0 es infinito y $\varepsilon(f_1)$ es finito debe existir algún $\alpha_1 \in \varepsilon(f_1)$ tal que

$$\Sigma_1 = \{\text{in}_\prec I \in \Sigma_0 : \mathbf{x}^{\alpha_1} \in \text{in}_\prec I\} \text{ es infinito.}$$

Ya tenemos el primer ideal de la cadena $\langle \mathbf{x}^{\alpha_1} \rangle$. Busquemos el siguiente paso. Necesitamos repetir el paso anterior con unos α_2, f_2, Σ_2 . Pero los monomios del nuevo polinomio f_2 no pueden estar en $\langle \mathbf{x}^{\alpha_1} \rangle$, así garantizamos la contención estricta.

Dado que Σ_1 es infinito sabemos que existe un orden monomial $\prec$ tal que $\langle \mathbf{x}^{\alpha_1} \rangle \subsetneq \text{in}_\prec I$. Por la proposición 1.2.4 los monomios que no están en $\langle \mathbf{x}^{\alpha_1} \rangle$ son $\mathbb{K}$ -linealmente dependientes módulo I , ya que no todos son estándar respecto a $\text{in}_\prec I$. Tomemos una relación de dependencia lineal $f_2 \in I$ no nula. El polinomio f_2 es tal que sus monomios no pertenecen a $\langle \mathbf{x}^{\alpha_1} \rangle$.

Como Σ_1 es infinito y $\varepsilon(f_2)$ es finito debe existir algún $\alpha_2 \in \varepsilon(f_2)$ tal que

$$\Sigma_2 = \{\text{in}_\prec I \in \Sigma_1 : \mathbf{x}^{\alpha_2} \in \text{in}_\prec I\} \text{ es infinito.}$$

Ahora podemos encontrar un orden $\prec$ tal que $\langle \mathbf{x}^{\alpha_1} \rangle \subsetneq \langle \mathbf{x}^{\alpha_1}, \mathbf{x}^{\alpha_2} \rangle \subsetneq \text{in}_\prec I$. Y por lo tanto deducir que existen unos f_3, α_3 y Σ_3 infinito. Lo que da lugar a una cadena de ideales estrictamente creciente

$$\langle \mathbf{x}^{\alpha_1} \rangle \subsetneq \langle \mathbf{x}^{\alpha_1}, \mathbf{x}^{\alpha_2} \rangle \subsetneq \langle \mathbf{x}^{\alpha_1}, \mathbf{x}^{\alpha_2}, \mathbf{x}^{\alpha_3} \rangle \subsetneq \dots$$

Como R es noetheriano, esta contradicción implica que Σ_0 debe ser finito. $\square$

Corolario 1.2.6. Para un ideal $I \subseteq R$ solo hay un número finito de conjuntos $C_{\prec}(I)$ diferentes.

El objetivo final de esta sección es probar que todos los conjuntos $C_{\prec}(I)$ son de la forma $C_{\omega}(I)$ para algún $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Para conseguirlo vamos a necesitar varios resultados previos.

Lema 1.2.7. Si $I \subseteq J$ son ideales de R tales que $\text{in}_{\prec} I = \text{in}_{\prec} J$, entonces $I = J$.

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ es una base de Gröbner de I respecto de $\prec$. Entonces tenemos que $\text{in}_{\prec} J = \text{in}_{\prec} I = \langle \text{in}_{\prec} g : g \in \mathcal{G} \rangle$. Y por [CLO, corolario 2.5.6] tenemos que $\mathcal{G}$ genera J , luego es base de Gröbner del ideal. Como $\mathcal{G}$ genera I y J tenemos la igualdad $I = J$ que buscábamos. $\square$

Proposición 1.2.8. Sean $\omega \in \mathbb{R}^n$ y $\prec$ orden monomial de R . Para cualquier ideal I de R tenemos que $\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} I) = \text{in}_{\prec_{\omega}} I$.

Demostración. Tomemos cualquier polinomio $f \in R$. Por la definición del orden monomial $\prec_{\omega}$ tenemos que $\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} f) = \text{in}_{\prec_{\omega}} f$. Ya que para escoger el término $\text{in}_{\prec_{\omega}} f$ primero tomamos su forma inicial $\text{in}_{\omega} f$, que son los términos con mayor ω -grado, y después elegimos de entre ellos el mayor término respecto de $\prec$. Por lo tanto los ideales monomiales $\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} I)$ y $\text{in}_{\prec_{\omega}} I$ están generados por los mismos términos. $\square$

Para probar la próxima proposición necesitaremos utilizar el lema de Farkas, resultado fundamental de la programación lineal que se enuncia sin demostración (ver [Schrijver, sección 7.8]).

Lema 1.2.9 (de Farkas). Dados $A \in \mathfrak{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ entonces una y solamente una de las siguientes afirmaciones se cumple:

- Existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^t \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle < 0$.

Proposición 1.2.10. Dados un orden monomial $\prec$ y un ideal $I \subseteq R$, existe $\omega \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $\text{in}_{\omega} I = \text{in}_{\prec} I$.

Demostración. Sea $\mathcal{G}_{\prec}(I) = \{g_1, \dots, g_r\}$ la base de Gröbner reducida de I respecto a $\prec$. Denotamos sus términos como $g_i = \sum_{j=0}^{J_i} c_{i,j} \mathbf{x}^{\alpha_{i,j}}$ tal que $\text{in}_{\prec}(g_i) = c_{i,0} \mathbf{x}^{\alpha_{i,0}}$. Definimos el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &:= \{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : \text{in}_{\omega}(g_i) = c_{i,0} \mathbf{x}^{\alpha_{i,0}}, i = 1, \dots, r\} \\ &= \{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : \langle \omega, (\alpha_{i,0} - \alpha_{i,j}) \rangle > 0, i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, J_i\}. \end{aligned}$$

1.2. BASES DE GRÖBNER

Supongamos que $\mathcal{C} = \emptyset$ para llegar a una contradicción. Si $\mathcal{C}$ es vacío, entonces para cada vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^J$ con $J = \sum J_i$ tenemos que el sistema anterior $\langle \mathbf{x}, (\alpha_{i,0} - \alpha_{i,j}) \rangle = b_{i,j}$ no tiene solución en $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Por el lema de Farkas 1.2.9 deben existir $\mathbf{y} = -(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{r,J_r}) \in \mathbb{R}^J$ tal que $\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle < 0$. Esto obliga a que $\lambda_{i,j} \geq 0$ y alguno de ellos no sea nulo. El lema de Farkas 1.2.9 también implica que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{J_i} \lambda_{i,j} (\alpha_{i,0} - \alpha_{i,j}) \in \mathbb{R}_{\leq 0}^n.$$

Ahora pasando a los monomios y utilizando las propiedades de definición de un orden monomial tenemos que

$$\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{J_i} \mathbf{x}^{\lambda_{i,j} \alpha_{i,j}} \succeq \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{J_i} \mathbf{x}^{\lambda_{i,j} \alpha_{i,0}}.$$

Dado que hemos supuesto que $\mathbf{x}^{\alpha_{i,j}} \prec \mathbf{x}^{\alpha_{i,0}}$ para todo $j \neq 0$, tenemos la contradicción que buscábamos:

$$\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{J_i} (\mathbf{x}^{\alpha_{i,j}})^{\lambda_{i,j}} \prec \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{J_i} (\mathbf{x}^{\alpha_{i,0}})^{\lambda_{i,j}}.$$

Ahora que hemos visto que el cono abierto $\mathcal{C}$ es no vacío, podemos tomar $\omega \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{N}_0^n$. Concluimos que $\text{in}_{\prec} I = \text{in}_{\omega} I$ por el lema 1.2.12 sabiendo que por la definición de ω tenemos $\text{in}_{\prec} g_i = \text{in}_{\omega} g_i$ para todo $i = 1, \dots, r$. $\square$

Corolario 1.2.11. Dados un orden monomial $\prec$ y un ideal $I \subseteq R$, existe $\omega \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $C_{\prec}(I) = C_{\omega}(I)$.

El lema 1.2.12 termina la prueba de la proposición 1.2.10.

Lema 1.2.12. Dado un orden monomial $\prec$ un ideal $I \subseteq R$ y un vector $\omega \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\text{in}_{\prec}(I) = \text{in}_{\omega}(I) \Leftrightarrow \text{in}_{\prec} g = \text{in}_{\omega} g, \forall g \in \mathcal{G}_{\prec}(I).$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $\text{in}_{\prec}(I) = \text{in}_{\omega}(I)$, luego $\text{in}_{\omega}(I)$ es ideal monomial. Como $\mathcal{G}_{\prec}(I)$ es base reducida, dado un elemento g tenemos que $\text{in}_{\prec} g \in \text{in}_{\prec}(I)$ y el resto de términos de g son estándar. Como $\text{in}_{\omega} g \in \text{in}_{\omega}(I) = \text{in}_{\prec}(I)$, todos sus términos están en el ideal. Luego la forma inicial $\text{in}_{\omega} g$ solo puede tener un término: $\text{in}_{\prec} g$. Y así tenemos la igualdad $\text{in}_{\prec} g = \text{in}_{\omega} g$.

◀◀ Supongamos para acabar la segunda condición del lema. Como $\text{in}_\prec g = \text{in}_\omega g \in \text{in}_\omega I$ para todo $g \in \mathcal{G}_\prec(I)$, sabemos que $\text{in}_\prec(I) = \langle \text{in}_\prec(\mathcal{G}_\prec) \rangle \subseteq \text{in}_\omega I$. Para la otra inclusión basta con probar que $\text{in}_\omega f \in \text{in}_\prec(I)$ para todo $f \in I$. Dado $f \in I$, tenemos que $\bar{f}^{\mathcal{G}_\prec(I)} = 0$ y tras aplicar el algoritmo de división podemos escribir

$$f = m_1 g_{i_1} + \cdots + m_r g_{i_r},$$

siendo los $m_j = c_j \mathbf{x}^{\alpha_j}$ términos y $g_{i_j} \in \mathcal{G}_\prec(I)$. Por el teorema de división [CLO, teorema 2.3.3] tenemos que $m_j \text{in}_\prec g_{i_j} = \text{in}_\prec(m_j g_{i_j}) \preceq \text{in}_\prec f$. Veamos que ocurre lo mismo en el caso de los ω -grados. En cada etapa del algoritmo le estamos restando a f un polinomio $m_j g_{i_j}$ donde los monomios tienen ω -grado igual o menor a $\text{gr}_\omega(m_j \text{in}_\omega g_{i_j}) = \text{gr}_\omega(m_j \text{in}_\prec g_{i_j})$. Además f tiene un término proporcional a $m_j \text{in}_\prec g_{i_j}$, luego tenemos que $\text{gr}_\omega f \geq \text{gr}_\omega(m_j \text{in}_\omega g_{i_j})$. Esta desigualdad garantiza que dado el conjunto de índices $J = \{j \in \{1, \dots, r\} : \text{gr}_\omega f = \text{gr}_\omega(m_j \text{in}_\omega g_{i_j})\}$ tenemos que

$$\text{in}_\omega f = \sum_{j \in J} m_j \text{in}_\omega g_{i_j} = \sum_{j \in J} m_j \text{in}_\prec g_{i_j}.$$

Y esto es justo lo que necesitamos para probar que $\text{in}_\omega f \in \text{in}_\prec I$. ◻

1.3. El abanico de Gröbner es abanico

En esta sección vamos a seguir la estructura de [FJT] y demostrar que el abanico de Gröbner es realmente un abanico poliédrico. Gracias al lema 1.2.12 de la sección anterior podemos caracterizar los conos $C_\prec(I)$ utilizando la base de Gröbner reducida $\mathcal{G}_\prec(I)$.

Corolario 1.3.1. Dado un orden monomial $\prec$ y dado un vector $\omega \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\omega \in C_\prec(I) \Leftrightarrow \text{in}_\prec \text{in}_\omega g = \text{in}_\prec g, \forall g \in \mathcal{G}_\prec(I).$$

Demostración. Por el lema 1.2.12 tenemos que ω pertenece al interior de $C_\prec(I)$ si y solo si $\text{in}_\prec g_i = c_{i,0} \mathbf{x}^{\alpha_{i,0}} = \text{in}_\omega g$ para todo $g \in \mathcal{G}_\prec(I)$. Es decir, el cono abierto $\text{Int}(C_\prec(I)) = \mathcal{C}$ (según la notación en la prueba de la proposición 1.2.10) está definido por las desigualdades

$$\langle \omega, \alpha_{i,0} \rangle > \langle \omega, \alpha_{i,j} \rangle, \forall i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, J_i,$$

siguiendo la notación de la proposición 1.2.10. Para definir la adherencia $C_\prec(I)$ tenemos que sustituir las desigualdades estrictas por « $\geq$ ». Y estas desigualdades equivalen a que $\text{in}_\prec \text{in}_\omega g = \text{in}_\prec g$, para todo $g \in \mathcal{G}_\prec(I)$. ◻

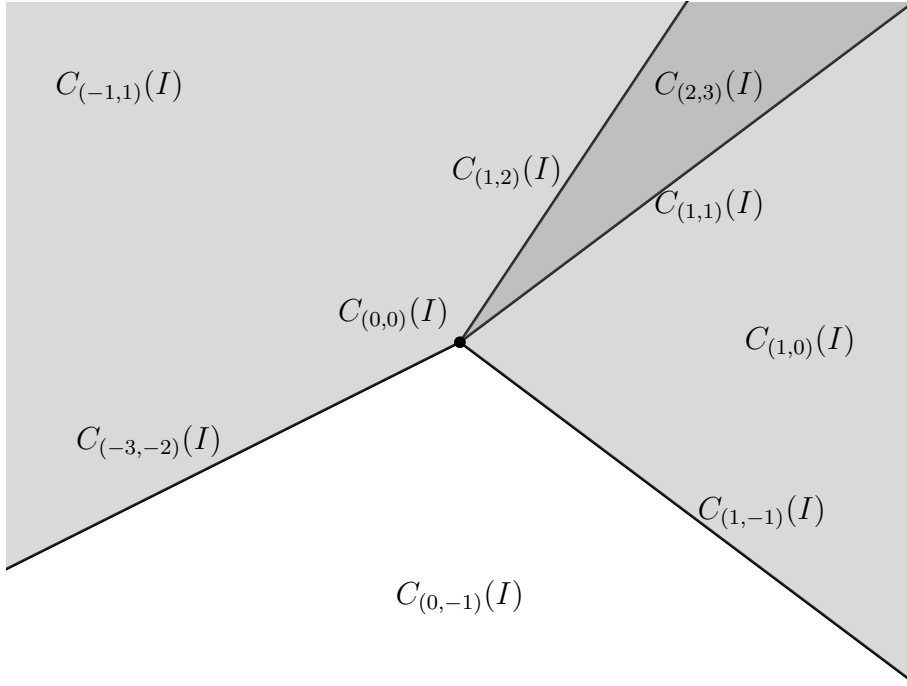
Ejemplo 1.3.2. Veamos un ejemplo de las inecuaciones que aparecen en la demostración anterior. Tomemos el ideal principal $I = \langle x^3y - x^2y^2 + y^3 - x^2 \rangle$ en $\mathbb{R}[x, y]$. Sea $\omega = (\alpha, \beta)$. Calculemos primero los conos asociados a ideales iniciales monomiales dando inecuaciones sobre ω . Estos pueden ser los siguientes:

- $\langle x^3y \rangle$: debe darse $\text{in}_\omega f = x^3y$. Luego tenemos las inecuaciones $3\alpha + \beta > 2\alpha + 2\beta$, $3\alpha + \beta > 3\beta$, $3\alpha + \beta > 2\alpha$. Que son equivalentes a las dos inecuaciones $\alpha > -\beta$, $\alpha > \beta$. Un representante es $\omega = (1, 0)$.
- $\langle x^2y^2 \rangle$: ω debe satisfacer $\text{in}_\omega f = -x^2y^2$, que en inecuaciones es $2\alpha + 2\beta > 3\alpha + \beta$, 3β , 2α . Lo que nos da las inecuaciones del cono abierto $\beta > \alpha$, $2\alpha > \beta$. Un ejemplo es $\omega = (2, 3)$.
- $\langle y^3 \rangle$: Con el mismo razonamiento deducimos las inecuaciones $\beta > 2\alpha$, $3\beta > 2\alpha$ para ω . Una solución es $(-1, 1)$.
- $\langle x^2 \rangle$: Por último tenemos que $C_{(0,-1)}(I)$ tiene como inecuaciones para su interior relativo $2\alpha > 3\beta$, $-\alpha > \beta$.

Estos cuatro conos cubren el plano, veamos los ideales iniciales en los conos de dimensión 1:

- El cono generado por $(1, 1)$ es la solución a las ecuaciones $\alpha \geq \beta$, $\beta \geq \alpha$, $\alpha \geq -\beta$, $2\alpha \geq \beta$. Es decir, $C_{(1,0)}(I) \cap C_{(2,3)}(I) = C_{(1,1)}(I)$. Las inecuaciones se simplifican y nos queda $\alpha = \beta$, $\alpha \geq 0$. Por lo tanto el ideal inicial es $\text{in}_{(1,1)} I = \langle x^3y - x^2y^2 \rangle$.
- $C_{(2,3)}(I) \cap C_{(-1,1)}(I)$ nos da otras cuatro inecuaciones que se simplifican en $2\alpha = \beta$, $\beta \geq 0$. Es decir, es el cono $C_{(1,2)}(I)$. Luego $\text{in}_{(1,2)} I = \langle y^3 - x^2y^2 \rangle$.
- $C_{(0,-1)}(I) \cap C_{(-1,1)}(I) = \{\omega \in \mathbb{R}^2 : 2\alpha = 3\beta, \beta \leq 0\} = C_{(-3,-2)}(I)$. Luego $\text{in}_{(-3,-2)} I = \langle y^3 - x^2 \rangle$.
- $C_{(0,-1)}(I) \cap C_{(1,0)}(I) = \{\omega \in \mathbb{R}^2 : \alpha = -\beta, \alpha \geq 0\} = C_{(1,-1)}(I)$. Luego $\text{in}_{(1,-1)} I = \langle x^3y - x^2 \rangle$.

Gracias al corolario 1.3.3 que veremos a continuación, sabemos que $\text{GF}(I)$ está formado por todos los conos de la figura 1.2 excepto $C_{(0,-1)}(I)$. Podemos comprobar que los cálculos realizados son correctos utilizando el programa Gfan [Gfan] a través de [SageMath].


 Figura 1.2: Los conos de I .

```

R.<x,y>=QQ[]
I=R.ideal([x^3*y-x^2*y^2+y^3-x^2])
GFI=I.groebner_fan()
PF=GFI.polyhedralfan()
PF.rays()
    
```

```

[[-3, -2], [1, -1], [1, 1], [1, 2]]
    
```

Corolario 1.3.3. Los conjuntos de la forma $C_{\prec}(I)$ con $\prec$ orden monomial cubren el ortante positivo $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$.

Demostración. Tomemos $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Para un orden monomial $\prec$ cualquiera tenemos que $\prec_{\omega}$ es también orden monomial. Dado que en la proposición 1.2.8 vimos que $\text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} f = \text{in}_{\prec_{\omega}} f$ para todo $f \in R$, tenemos que para todo $g \in \mathcal{G}_{\prec_{\omega}}(I)$ se cumple que $\text{in}_{\prec_{\omega}} g = \text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} g = \text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega}(\text{in}_{\omega} g) = \text{in}_{\prec_{\omega}} \text{in}_{\omega} g$. Luego el corolario 1.3.1 nos dice que $\omega \in C_{\prec_{\omega}}(I)$. $\square$

Gracias al corolario 1.3.3 y al corolario 1.2.6 tenemos información sobre los conjuntos $C_{\prec}(I)$: para un ideal I de R solo hay finitos conjuntos $C_{\prec}(I)$, que de hecho recubren $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, además la proposición 1.2.10 dice que todos los conjuntos $C_{\prec}(I)$ son de la forma $C_{\omega}(I)$ para algún $\omega \in \mathbb{N}_0^n$. Nuestro próximo objetivo es conseguir más información sobre los conjuntos $C_{\omega}(I)$.

Lema 1.3.4. Los polinomios $f \in \text{in}_\omega I$ se pueden escribir como $f = \sum_i \text{in}_\omega h_i$, con $h_i \in I$ y tales que $\text{gr}_\omega h_i \neq \text{gr}_\omega h_j$ si $i \neq j$.

Demostración. El ideal $\text{in}_\omega I$ está generado por polinomios ω -homogéneos. Por lo tanto todas las componentes ω -homogéneas de f pertenecen a $\text{in}_\omega I$. Tomemos f_i como la suma de todos los términos de f con el mismo ω -grado fijo. Si probamos que existe $h_i \in I$ tal que $\text{in}_\omega h_i = f_i$, hemos acabado.

Podemos escribir f_i como $\sum_j \text{in}_\omega a_j$ con $a_j \in I$, ya que $f_i = \sum_k p_k \text{in}_\omega q_k$ con $q_k \in I$, $p_k \in R$ y al separar cada término $c\mathbf{x}^\alpha$ de p_k tenemos que $c\mathbf{x}^\alpha \text{in}_\omega q_k = \text{in}_\omega(c\mathbf{x}^\alpha q_k) = \text{in}_\omega(a_i)$. Ahora como f_i es ω -homogéneo podemos escribir $f_i = \sum_j \text{in}_\omega a_j = \text{in}_\omega(\sum_j a_j) = \text{in}_\omega h_i$, lo que termina la prueba. $\square$

Lema 1.3.5. Sea I un ideal de R y $\prec$ un orden monomial. Si $\omega \in C_\prec(I)$, entonces $\text{in}_\prec \text{in}_\omega I = \text{in}_\prec I$.

Demostración. Sea $\omega \in C_\prec(I)$ y $g \in \mathcal{G}_\prec(I)$. Entonces por el corolario 1.3.1 tenemos que $\text{in}_\prec g = \text{in}_\prec \text{in}_\omega g$. Esto implica que $\text{in}_\prec I = \langle \{\text{in}_\prec g\}_{g \in \mathcal{G}_\prec(I)} \rangle = \langle \{\text{in}_\prec \text{in}_\omega g\}_{g \in \mathcal{G}_\prec(I)} \rangle \subseteq \text{in}_\prec \text{in}_\omega I$. Solo queda ver la otra contención.

Basta con ver que si $f \in \text{in}_\omega(I) - \{0\}$, entonces $\text{in}_\prec f \in \text{in}_\prec I$. Por el lema 1.3.4 podemos escribir f como $\sum_{i=1}^r \text{in}_\omega h_i$ tales que $h_i \in I$ y $\text{gr}_\omega h_i \neq \text{gr}_\omega h_j$ para todos $i \neq j$. Por lo tanto no hay cancelaciones en la suma y existe un i tal que $\text{in}_\prec f = \text{in}_\prec \text{in}_\omega h_i$. Veamos que $\text{in}_\prec \text{in}_\omega h_i \in \text{in}_\prec I$.

Dividiendo h_i entre $\mathcal{G}_\prec(I)$ respecto de $\prec$ tenemos una expresión como en el final de la demostración del lema 1.2.12

$$h_i = \sum_{j=1}^k m_j g_{i_j}.$$

Donde los m_j son términos y $g_{i_j} \in \mathcal{G}_\prec(I)$. Sea $\text{gr}_\omega h_i = d$, en cada paso del algoritmo vamos a reducir h_i hasta llegar a 0 y su ω -grado bajará o se quedará igual, porque estamos restando un polinomio de igual grado. Y como en la prueba del lema 1.2.12, podemos decir que

$$\text{in}_\omega h_i = \sum_{\text{gr}_\omega(m_j g_{i_j})=d} \text{in}_\omega(m_j g_{i_j}). \quad (1.1)$$

Queremos tomar los términos iniciales pero primero hay que notar que por la forma de ir construyendo los $m_j g_{i_j}$ en el algoritmo de división se garantiza que los términos iniciales $\text{in}_\prec(m_j g_{i_j})$ tienen monomios distintos, ya que hemos eliminado ese monomio inicial del resto provisional. Esto nos da que el término maximal respecto de $\prec$ no se cancela en la suma (1.1). Además,

como $\omega \in C_{\prec}(I)$, el corolario 1.3.1 implica que $\text{in}_{\prec}(m_j g_{i_j}) = m_j \text{in}_{\prec} g_{i_j} = m_j \text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} g_{i_j} = \text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega}(m_j g_{i_j})$. Por lo tanto podemos escribir

$$\text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} h_i = \sum_{j \in J} \text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega}(m_j g_{i_j}) = \sum_{j \in J} \text{in}_{\prec}(m_j g_{i_j}).$$

Así queda probado que $\text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} h_i \in \text{in}_{\prec} I$, que es lo que queríamos. $\square$

Corolario 1.3.6. Dados I un ideal de R , $\prec$ un orden monomial y $\omega \in C_{\prec}(I)$, entonces

$$\mathcal{G}_{\prec}(\text{in}_{\omega} I) = \{\text{in}_{\omega} g : g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)\}.$$

Demostración. Dado que $\omega \in C_{\prec}(I)$, el corolario 1.3.1 implica que $\text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} g = \text{in}_{\prec} g$ para todo $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$. Luego $\text{in}_{\prec} I = \langle \{\text{in}_{\prec} g\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)} \rangle$ coincide con $\langle \{\text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} g\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)} \rangle$. Ahora por el lema 1.3.5, $\text{in}_{\prec} I = \text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} I$. Por lo tanto se satisface la definición de base de Gröbner: $\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} I) = \langle \{\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} g)\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)} \rangle$.

Veamos que esta base de Gröbner es reducida por serlo $\mathcal{G}_{\prec}(I)$. El conjunto $\{\text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} g\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)} = \{\text{in}_{\prec} g\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)}$ es un sistema de términos generadores minimal del ideal monomial $\text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} I = \text{in}_{\prec} I$, los términos iniciales $\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} g) = \text{in}_{\prec} g$ tienen coeficiente 1 y ningún término de $\text{in}_{\omega} g_i$ pertenece a $\langle \{\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} g)\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I) - \{g_i\}} \rangle = \langle \{\text{in}_{\prec} g\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I) - \{g_i\}} \rangle$ ya que lo mismo ocurre con todos los términos de g_i . $\square$

La siguiente proposición caracteriza las clases de equivalencia de $\sim_I$ dentro de la región de Gröbner $\text{GR}(I)$ como conos abiertos. Como corolario tendremos un resultado análogo para sus adherencias, que son los conos $C_{\omega}(I)$.

Proposición 1.3.7. Sea I un ideal de R , sea $\prec$ un orden monomial y tomemos $\omega \in C_{\prec}(I)$. Dado $u \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\text{in}_{\omega} I = \text{in}_u I \Leftrightarrow \text{in}_{\omega} g = \text{in}_u g, \forall g \in \mathcal{G}_{\prec}(I).$$

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Dadas las igualdades $\text{in}_{\omega} g = \text{in}_u g$ también tenemos las igualdades $\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} g) = \text{in}_{\prec}(\text{in}_u g)$. Por el corolario 1.3.1 tenemos que $\text{in}_{\prec} g = \text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} g$. Luego también se da que $\text{in}_{\prec} g = \text{in}_{\prec} \text{in}_u g$ y nuevamente por el corolario 1.3.1 tenemos que $u \in C_{\prec}(I)$. Ahora por el corolario 1.3.6 tenemos que $\mathcal{G}_{\prec}(\text{in}_u I) = \{\text{in}_u g\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)}$. Y como es la misma base reducida que $\{\text{in}_{\omega} g\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)} = \mathcal{G}_{\prec}(\text{in}_{\omega} I)$, tenemos que $\text{in}_{\omega} I = \text{in}_u I$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$. Queremos ver que $\text{in}_{\omega} g = \text{in}_u g$. Como $\mathcal{G}_{\prec}(I)$ es reducida, solo el término $\text{in}_{\prec} g$ de g pertenece a $\text{in}_{\prec} I$. Veamos que este término está en $\text{in}_{\omega} g$ y en $\text{in}_u g$. Por el corolario 1.3.1 tenemos que $\text{in}_{\prec} g = \text{in}_{\prec} \text{in}_{\omega} g$, por lo que $\text{in}_{\prec} g$ es un término de $\text{in}_{\omega} g$. Por otra parte, el lema 1.3.5 nos da que

$$\text{in}_{\prec}(\text{in}_u g) \in \text{in}_{\prec}(\text{in}_u I) = \text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} I) = \text{in}_{\prec}(I).$$

Como solamente un término de g está en $\text{in}_{\prec} I$, tenemos que $\text{in}_{\prec}(\text{in}_u g) = \text{in}_{\prec} g$. Ya hemos visto que $\text{in}_{\prec} g$ es un término de $\text{in}_{\omega} g$ y de $\text{in}_u g$. Si suponemos que $\text{in}_{\omega}(g) - \text{in}_u(g) \in \text{in}_{\omega} I = \text{in}_u I$ es no nulo llegaremos a una contradicción. Esto es porque ningún término de $\text{in}_{\omega}(g) - \text{in}_u(g)$ puede pertenecer a $\text{in}_{\prec} I = \text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} I)$, ya que se estaría contradiciendo que solo el término $\text{in}_{\prec} g$ de g pertenece a $\text{in}_{\prec} I$. Si $\text{in}_{\omega}(g) - \text{in}_u(g)$ es no nulo tenemos que por lo menos $\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega}(g) - \text{in}_u(g))$ es un término en el ideal $\text{in}_{\prec}(\text{in}_{\omega} I)$. Así deducimos la igualdad $\text{in}_{\omega} g = \text{in}_u g$ que queríamos. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar que los conjuntos $C_{\omega}(I)$ son conos poliédricos si $\omega \in \text{GR}(I)$, la región de Gröbner. Esto hace que en particular los conos $C_{\prec}(I)$ también queden estudiados, gracias la proposición 1.2.10.

Corolario 1.3.8. Sean I un ideal de R , $\prec$ un orden monomial y $\omega \in C_{\prec}(I)$. Lo que quiere decir que $\omega \in \text{GR}(I)$. Entonces la clase de equivalencia $\sim_I$ de ω es un cono poliédrico relativamente abierto y convexo. Su adherencia $C_{\omega}(I)$ es un cono poliédrico.

Demostración. Por la proposición 1.3.7 tenemos que

$$u \sim_I \omega \Leftrightarrow \text{in}_u I = \text{in}_{\omega} I \Leftrightarrow \text{in}_u g = \text{in}_{\omega} g, \forall g \in \mathcal{G}_{\prec}(I).$$

La última condición se traduce como un sistema finito de ecuaciones e inecuaciones estrictas, todas ellas lineales. Esto nos define un cono poliédrico que es (relativamente) abierto. Su adherencia es $C_{\omega}(I)$, y se puede describir sustituyendo las desigualdades estrictas por las versiones no estrictas. La proposición 1.3.7 nos permite escribir la pertenencia a la adherencia sustituyendo las desigualdades estrictas por su versión no estricta:

$$u \in C_{\omega}(I) \Leftrightarrow \text{in}_{\omega} g = \text{in}_{\omega} \text{in}_u g, \forall g \in \mathcal{G}_{\prec}(I). \quad (1.2)$$

$\square$

Ahora aplicaremos el corolario anterior a todos los conos del abanico de Gröbner $\text{GF}(I)$, ya que no todos tienen por qué ser de la forma $C_{\prec}(I)$, pero sí de la forma $C_{\omega}(I)$.

Proposición 1.3.9. El interior relativo de un cono de Gröbner de $\text{GF}(I)$ es una clase de equivalencia $\sim_I$ de algún $u \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Por definición, todo cono de Gröbner es cara (puede que no propia) de la adherencia de una clase de equivalencia $\sim_I$ de un $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Dado $\prec'$ orden monomial, definimos el orden $\prec = \prec'_{\omega}$. Por la prueba del corolario 1.3.3 tenemos que $\omega \in C_{\prec}(I)$. Por la ecuación (1.2) del corolario 1.3.8,

tenemos que $C_\omega(I) \subseteq C_{\prec}(I)$. Además, la ecuación (1.2) nos da un sistema de ecuaciones e inecuaciones no estrictas, todas ellas lineales, que definen el cono cerrado $C_\omega(I)$. Para describir el interior relativo de cualquier cara de $C_\omega(I)$ hay que sustituir algunas inecuaciones por su versión estricta y el resto convertirlas en ecuaciones. Sea u perteneciente a uno de estos interiores relativos de una cara de $C_\omega(I)$. Dado que $u \in C_\omega(I) \subseteq C_{\prec}(I)$, la proposición 1.3.7 nos dice que un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es equivalente $v \sim_I u$ si y solo si satisface el sistema lineal del interior relativo de la cara de $C_\omega(I)$. Es decir $v \sim_I u$ si y solo si pertenecen al mismo interior relativo de una cara. $\square$

Veamos que la intersección no vacía de dos conos es una cara común a los dos. Antes necesitamos un resultado previo.

Corolario 1.3.10. Dado $\mathcal{C}$ un cono de Gröbner de $\text{GF}(I)$ y $u \in \mathcal{C}$ no nulo, entonces para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\text{in}_v I = \text{in}_u I \Rightarrow v \in \mathcal{C}.$$

Demostración. El vector $u \in \mathcal{C}$ pertenece al interior relativo de una de las caras de $\mathcal{C}$. Por definición, esta cara también pertenece al abanico de Gröbner. Por la proposición 1.3.9, v pertenece a la misma clase de equivalencia, es decir, al mismo interior relativo. Luego tenemos que $v \in \mathcal{C}$. $\square$

Proposición 1.3.11. Dados $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ conos de Gröbner tales que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ es cara de $\mathcal{C}_1$. Lo mismo ocurre con $\mathcal{C}_2$.

Demostración. La intersección de dos conos poliédricos es un cono poliédrico. El corolario 1.3.10 nos dice que los conos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ son uniones de clases de equivalencia, que son disjuntas. La clase de cualquier $\omega \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ está contenida en $\mathcal{C}_1$, en $\mathcal{C}_2$ y por tanto en $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Luego tenemos que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ es unión de clases de equivalencia.

Sea $\omega \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. La clase de equivalencia de ω está contenida en $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$. Luego la clase de ω está contenida en el interior relativo de una cara $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}_1$. Por definición $\mathcal{C}$ es un cono de $\text{GF}(I)$ y entonces la proposición 1.3.9 nos dice que el interior relativo $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ es exactamente la clase de equivalencia $\sim_I$ de ω . Con lo que concluimos que cada clase de equivalencia de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ es el interior relativo de una cara de $\mathcal{C}_1$, y su adherencia es la cara en cuestión.

Veamos que solo puede haber una clase de equivalencia C en $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ tal que su $\mathbb{R}$ -espacio vectorial generado $\mathfrak{L}(C)$ tiene dimensión maximal. Si existieran dos de estas clases C, C' en $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, entonces $C \cup C'$ está contenida en $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ y $\mathfrak{L}(C \cup C')$ tiene una dimensión mayor que $\mathfrak{L}(C)$ y $\mathfrak{L}(C')$, llegando a una contradicción.

Sea C la clase de equivalencia contenida en $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ tal que $\mathfrak{L}(C)$ es de dimensión maximal. Veamos que $\overline{C} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Como $C \subseteq \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ y esta intersección es un cerrado tenemos que $\overline{C} \subseteq \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Tomemos $\omega \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 - \overline{C}$. Sea E la envolvente convexa de $\overline{C} \cup \{\omega\}$. Entonces $E - C$ tiene dimensión igual o superior a $\overline{C}$. Como C es la única clase de equivalencia de dimensión maximal de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, E no puede ser cubierto por finitas clases de equivalencia en $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Esta contradicción prueba que $\overline{C} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Como $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ es la adherencia de una de las clases de equivalencia de $\mathcal{C}_1$, por el razonamiento anterior tenemos que es una cara de $\mathcal{C}_1$. $\square$

Hemos llegado al resultado principal que se quería probar en esta sección. Vamos a utilizar todos los resultados vistos de manera directa o indirecta.

Teorema 1.3.12. El abanico de Gröbner $\text{GF}(I)$ es un complejo poliédrico formado por conos, luego es un abanico.

Demostración. La proposición 1.3.9 afirma que todos los conos de Gröbner son de la forma $C_\omega(I)$. Estos conjuntos son realmente conos poliédricos gracias al corolario 1.3.8. Además solo puede haber un número finito de estos por lo que dice el corolario 1.2.6.

Dado un cono de Gröbner $\mathcal{C} \in \text{GF}(I)$, por definición todas sus caras son conos de Gröbner. La segunda condición de complejo poliédrico se cumple por la proposición 1.3.11. $\square$

Ejemplo 1.3.13. Veamos un ejemplo del abanico de Gröbner en tres dimensiones con la ayuda del programa **Gfan** [Gfan] a través de [SageMath]. Tomemos el ideal

$$I = \langle xz^2 - y^2, x^5y^3z - xy^3z, x^4y^3z - xyz^4 \rangle.$$

```
R.<x,y,z>=QQ[]
I=R.ideal([x*z^2-y^2,x^5*y^3*z-x*y^3*z,x^4*y^3*z-x*y*z^4])
GF=I.groebner_fan()
PF=GF.polyhedralfan()
PF.rays()
[[0, 0, 1],[0, 1, 0],[0, 1, 1],[0, 1, 2],
 [1, 0, 0],[2, 1, 0],[2, 1, 4],[2, 5, 8],[2, 9, 8]]
PF.maximal_cones()
{3: [[1, 2, 8],[0, 4, 6],[0, 3, 6, 7],[1, 5, 8],
      [2, 3, 7, 8],[4, 5, 6],[5, 6, 7],[5, 7, 8]]}
```

En las líneas de código anteriores se calcula el objeto *abanico de Gröbner de I* y se transforma en objeto *abanico poliédrico*. Después se obtienen los

rayos del abanico, que son los conos de dimensión 1. Por último se imprimen los conos de dimensión 3. El formato es el siguiente: los números asociados a cada cono son los índices de los rayos dentro de la lista anterior. Por ejemplo, el cono $[0, 4, 6]$ es el generado por los vectores $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$ y $(2, 1, 4)$.

Con esta información podemos ver que $\text{GR}(I) = \mathbb{R}_{\geq 0}^3$. También tenemos que todos los conos de dimensión maximal están generados por tres vectores (son simpliciales) salvo por $[0, 3, 6, 7]$ y $[2, 3, 7, 8]$.

```
D=GF.render()
D.axes(false)
D
GF.maximal_total_degree_of_a_groebner_basis()
GF.minimal_total_degree_of_a_groebner_basis()
```

(13, 8)

Podemos generar un dibujo del abanico con Sage. En la figura 1.3 se ve la intersección del abanico con el plano $\{x + y + z = 1\}$, generada con los comandos anteriores. Los colores varían entre verde y naranja, se corresponden de menor (8) a mayor (13) con el grado máximo que tienen las bases de Gröbner reducidas en cada cono.

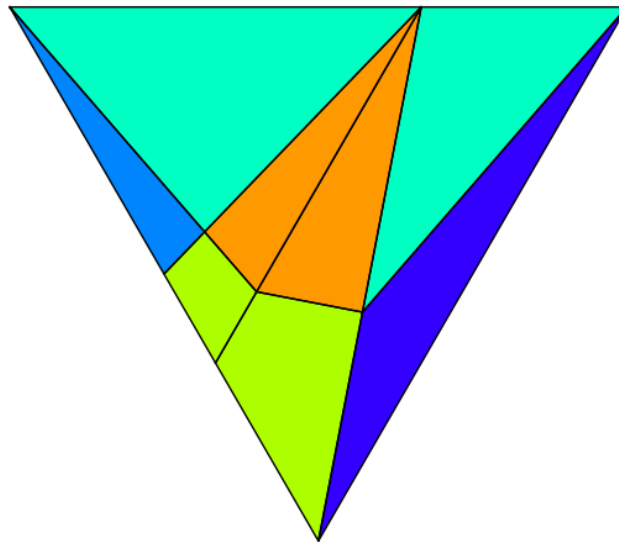


Figura 1.3: $\text{GF}(I) \cap \{x + y + z = 1\}$ donde los ejes son: x derecho, y izquierdo, z inferior.

1.3. EL ABANICO DE GRÖBNER ES ABANICO

Capítulo 2

Aplicaciones en geometría tórica

En este capítulo se pretende exponer una aplicación del abanico de Gröbner. Seguiremos el artículo [AGS] donde gracias a una generalización del abanico de Gröbner se da una resolución para un tipo especial de singularidad: las singularidades Newton no degeneradas. Lo novedoso de este artículo es que parte del caso ya conocido de ideales principales y lo generaliza a ideales no principales, sin la necesidad de trabajar con la intersección completa como se venía haciendo anteriormente.

Empezamos el capítulo estudiando lo que significa que un cono o un abanico sean regulares (secciones 2.1 y 2.2). Este concepto es de gran importancia, ya que implica que la variedad tórica asociada también va a ser regular. Por eso demostramos con detalle que todo abanico admite un refinamiento regular.

En la sección 2.3 veremos las primeras propiedades del poliedro de Newton y su relación con el abanico de Gröbner. En particular, definiremos el concepto de abanico de Gröbner local para ideales principales. El abanico de Gröbner local nos dará el punto de partida para construir la resolución que queremos.

Después, en las secciones 2.4 y 2.5 se explica la construcción de la modificación tórica asociada a un abanico regular. Este morfismo nos dará la resolución de singularidades Newton no degeneradas. Primero lo vemos en el caso de ideales principales (sección 2.6). Luego generalizamos el concepto de abanico de Gröbner local al caso no principal en la sección 2.7. Por último, en la sección 2.8 probamos el teorema de resolución referenciando algún detalle que escapa el rango de este trabajo.

2.1. Conos regulares

Vamos a introducir más terminología sobre conos y abanicos poliédricos. Hemos definido el cono poliédrico dado por una matriz $A \in \mathfrak{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ como el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle -\mathbf{a}_i, x \rangle \geq 0, i = 1, \dots, m\} = \bigcap_{i=1}^m H_i.$$

Donde $A = (\mathbf{a}_1 | \dots | \mathbf{a}_m)$ está dada por filas y H_i es el semiespacio dado por la inecuación $\langle -\mathbf{a}_i, x \rangle \geq 0$. También podemos definir un cono a partir de unos vectores generadores $\{u^{(1)}, \dots, u^{(k)}\}$ como

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i u^{(i)} : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, i = 1, \dots, k \right\}.$$

Estas dos definiciones son equivalentes [Ewald, teorema v.1.2]. Escribiremos $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle M \rangle$ si expresamos los generadores en forma de matriz $M = (u^{(1)} | \dots | u^{(k)})$. En este caso la dimensión del cono $\dim \sigma = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{L}(\sigma)$ es el rango de la matriz generadora $\text{rg}(M)$.

Definición 2.1.1. Dado un cono σ en $\mathbb{R}^n$ definimos su *cono dual* como

$$\check{\sigma} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u \rangle \geq 0, \forall u \in \sigma\}.$$

El cono dual es un cono poliédrico ya que si $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle M \rangle$, entonces $\check{\sigma} = \{x \in \mathbb{R}^n : M^t x \geq 0\}$. Una consecuencia directa de la definición es que $\check{\check{\sigma}} = \sigma$. Veamos ahora una relación entre el cono dual y las matrices unimodulares, es decir, las matrices de entradas enteras que admiten inversa con entradas enteras.

Lema 2.1.2. Sea $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ una matriz unimodular y $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle M \rangle$ el cono que genera. Entonces $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle (M^{-1})^t \rangle$.

Demostración. $\boxed{\supseteq}$ Supongamos que tenemos $v \in \mathbb{R}_{\geq 0} \langle (M^{-1})^t \rangle$. Entonces existe un $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ tal que $v = (M^{-1})^t \mu$, mientras que todos los $u \in \sigma$ son de la forma $u = M\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Por lo tanto tenemos que

$$\langle v, u \rangle = v^t u = \mu^t M^{-1} M \lambda = \mu^t \lambda \geq 0.$$

Luego se cumple que $v \in \check{\sigma}$.

$\boxed{\subseteq}$ Si ahora suponemos que $v \notin \mathbb{R}_{\geq 0} \langle (M^{-1})^t \rangle$, esto implica que la ecuación $(M^{-1})^t x = v$ con $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ no tiene solución. Luego por el lema de Farkas 1.2.9 existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $M^{-1}y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ y $\langle v, y \rangle < 0$. Con estos datos podemos decir que $MM^{-1}y = y$ es un vector de σ para el que v falla la condición de pertenencia a $\check{\sigma}$. Y así concluimos que $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle (M^{-1})^t \rangle$. $\square$

Definición 2.1.3. Diremos que un cono σ es *racional* si existen vectores $u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \in \mathbb{Z}^n$ tales que $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle$. Por otro lado, diremos que σ es *fuertemente convexo* si no contiene espacios vectoriales no triviales, es decir, si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

Lema 2.1.4. Las caras de los conos racionales son también racionales.

Demostración. Sea $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle$ en $\mathbb{R}^n$ con generadores en $\mathbb{Z}^n$. Dada una cara $\tau \leq \sigma$, tenemos que existe $\omega \in \mathbb{R}^n$ tal que $\tau = \text{Cara}_\omega(\sigma) = \{v \in \sigma : \langle \omega, v \rangle = 0\}$. Está claro que $\tau = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle T \rangle$, donde $T = \{u^{(i)} : \langle \omega, u^{(i)} \rangle = 0\}$. Por lo tanto τ es racional, incluyendo el caso especial $\{0\} =: \mathbb{R}_{\geq 0} \langle \emptyset \rangle$. $\square$

Lema 2.1.5. Un cono poliédrico $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene dimensión maximal si y solo si $\check{\sigma}$ es fuertemente convexo.

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que $\check{\sigma}$ no es fuertemente convexo. Entonces existe un vector $v \in \check{\sigma} - \{0\}$ tal que $\lambda v \in \check{\sigma}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, ya que $\check{\sigma}$ contiene un espacio vectorial no trivial. Esto quiere decir que para todo $u \in \sigma$ se tiene que $\langle v, u \rangle \geq 0$ y también $\langle -v, u \rangle \geq 0$. Es decir, σ está contenido en el hiperplano $\{v\}^\perp$ y no puede ser de dimensión maximal.

$\Leftarrow$ Por el argumento anterior, un cono σ de dimensión no maximal está contenido en un hiperplano H de $\mathbb{R}^n$. Esto garantiza que $\check{\sigma}$ no es fuertemente convexo, pues contiene la recta ortogonal al hiperplano H . $\square$

Definición 2.1.6. Un vector $u \in \mathbb{Z}^n$ es *primitivo* si el máximo común divisor de sus coordenadas es 1. Diremos que los vectores $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ son los *vértices* del cono racional fuertemente convexo σ si:

1. $u^{(i)} \in \mathbb{Z}^n$ es primitivo para todo $i = 1, \dots, k$.
2. Los vectores $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ generan σ .
3. $\mathbb{R}_{\geq 0} \langle \{u^{(1)}, \dots, u^{(k)}\} - \{u^{(i)}\} \rangle \subsetneq \sigma$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Escribimos $\sigma = \text{Cono}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ o $\text{Cono}(M)$ cuando queremos remarcar que el cono está generado por sus vértices.

Proposición 2.1.7. El conjunto de vértices de un cono poliédrico racional fuertemente convexo σ existe y es único.

Demostración. Los conos fuertemente convexos tienen como sistema minimal de generadores único (salvo escalares) el conjunto formado por un vector de cada cara de dimensión 1 [BG, proposición 1.20]. Además, estas caras son racionales por el lema 2.1.4. Por esta razón podemos seleccionar en cada cara de dimensión 1 los vectores primitivos y deducir la existencia y unicidad en el caso de conos racionales fuertemente convexos. $\square$

2.1. CONOS REGULARES

Definición 2.1.8. Un cono $\sigma = \text{Cono}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ racional y fuertemente convexo es *regular* si sus vértices son una $\mathbb{Z}$ -base de $\mathfrak{L}(\sigma) \cap \mathbb{Z}^n$. Diremos que σ es *simplicial* si sus vértices son una $\mathbb{R}$ -base de $\mathfrak{L}(\sigma)$.

Dado $\sigma = \text{Cono}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ regular, como sus vértices son $\mathbb{Z}$ -linealmente independientes, también son $\mathbb{Q}$ -linealmente independientes y $\mathbb{R}$ -linealmente independientes. Por lo que σ es simplicial.

Teorema 2.1.9. [Ewald, teorema v.2.10] Si σ es un cono racional (resp. regular) entonces $\check{\sigma}$ también lo es.

Proposición 2.1.10. Un cono $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimensión maximal es regular si y solo si $\sigma = \text{Cono}(M)$ con M unimodular.

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Si $\sigma = \text{Cono}(M)$ de dimensión maximal y $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, entonces existe $N \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ tal que $MN = NM = I_n$. Llamemos $M = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ y $N = (n_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Dado que $MN = (e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$ tenemos que $e^{(j)} = \sum_{k=1}^n n_{kj} u^{(k)}$. Luego $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\langle e^{(1)}, \dots, e^{(n)} \rangle$ está generado también por $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$, de lo que deducimos que estos vectores son $\mathbb{Z}$ -base del grupo abeliano $\mathfrak{L}(\sigma) \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n$. Esta es la definición de la regularidad de σ .

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\sigma = \text{Cono}(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) = \text{Cono}(M)$ es regular de dimensión maximal tenemos que $\{u^{(1)}, \dots, u^{(n)}\}$ es $\mathbb{Z}$ -base de $\mathbb{Z}^n = \mathfrak{L}(\sigma) \cap \mathbb{Z}^n$. Por lo tanto existen n_{ij} enteros tales que $e^{(j)} = \sum_{k=1}^n n_{kj} u^{(k)}$ para $j = 1, \dots, n$. Sea $N = (n_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, entonces $MN = I_n$ y $|M||N| = 1$ donde $|M|$ y $|N|$ son enteros. Por lo tanto $|M|$ vale 1 o -1 y hemos deducido que M es unimodular. $\square$

Proposición 2.1.11. Sea $\sigma = \text{Cono}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ un cono regular. Entonces todas sus caras son regulares y son exactamente todos los conos de la forma $\tau = \text{Cono}(u^{(i_1)}, \dots, u^{(i_r)})$ para $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$.

Demostración. Está claro que los conos de la forma $\tau = \text{Cono}(u^{(i_1)}, \dots, u^{(i_r)})$ son regulares: si $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}$ es $\mathbb{Z}$ -base de $\mathfrak{L}(\sigma) \cap \mathbb{Z}^n$, entonces $u^{(i_1)}, \dots, u^{(i_r)}$ es $\mathbb{Z}$ -base de $\mathfrak{L}(\tau) \cap \mathbb{Z}^n$.

Para comprobar la segunda afirmación (y como consecuencia la primera) basta con ver que el cono $\tau = \text{Cono}(u^{(1)}, \dots, u^{(k-1)})$ es una cara de σ si $k > 1$. En el caso $k = 2$ es obvio pero en general hay que argumentar un paso más. Como σ y τ son regulares sabemos que $\dim \sigma = \dim \tau + 1$. Luego existe un hiperplano H de $\mathfrak{L}(\sigma)$ que contiene a τ . Sea $\omega \in H^\perp$ en $\mathfrak{L}(\sigma)$ tal que $\langle \omega, u^{(k)} \rangle < 0$. Entonces llegamos a que $\tau = \sigma \cap H = \text{Cara}_\omega(\sigma)$, ya que si $u \in \tau$, entonces $\langle \omega, u \rangle = 0$ y si $u \in \sigma - \tau$ con $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i u^{(i)}$ y $\lambda_k > 0$, entonces $\langle \omega, u \rangle = \lambda_k \langle \omega, u^{(k)} \rangle < 0$. $\square$

La definición de la multiplicidad de un cono nos va a dar una forma de medir lo lejos que está un cono simplicial de ser regular.

Definición 2.1.12. Dado $\sigma = \text{Cono}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ un cono simplicial definimos su *multiplicidad* como $\text{mult } \sigma = [\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma) : \mathbb{Z}\langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle]$, el índice del subgrupo abeliano libre $\mathbb{Z}\langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle$ en el grupo $\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma)$.

Gracias a la definición de multiplicidad de un cono podemos caracterizar la regularidad de conos simpliciales.

Proposición 2.1.13. Un cono simplicial σ es regular si y solo si $\text{mult } \sigma = 1$.

Demostración. Un cono simplicial es regular si y solo si sus k vértices $\mathbb{R}$ -linealmente independientes son $\mathbb{Z}$ -base del grupo abeliano libre $\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma)$, de rango k . Esto ocurre si y solo si el grupo generado por los vértices $\mathbb{Z}\langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle$ coincide con $\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma)$ (no es subgrupo propio). Lo que a su vez es equivalente a que $\text{mult } \sigma = 1$ (es decir, no es mayor que 1). $\square$

Para la siguiente proposición definimos el conjunto de puntos enteros dentro del paralelepípedo dado por los vértices de un cono simplicial $\sigma = \text{Cono}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ como

$$P_\sigma = \mathbb{Z}^n \cap \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i u^{(i)} : 0 \leq \lambda_i < 1, i = 1, \dots, r \right\}.$$

Proposición 2.1.14. Sea $\sigma = \text{Cono}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ un cono racional simplicial. Dada una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ de $\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma)$, tenemos $u^{(j)} = \sum_{i=1}^k a_{ij} v_i$ y definimos la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{Z})$. Entonces los siguientes números coinciden:

$$\text{mult } \sigma = |\det A| = \#P_\sigma.$$

Demostración. Es un resultado conocido [DFX, página 129] que dado un grupo abeliano libre finitamente generado $\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma)$ y un subgrupo $\mathbb{Z}\langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle$ con el mismo rango (σ es simplicial), existe una base $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ de $\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma)$ y unos enteros positivos $d_1, \dots, d_k$ tales que $\mathfrak{B}' = \{d_1 b_1, \dots, d_k b_k\}$ es base de $\mathbb{Z}\langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle$. Sea B la matriz que expresa $\mathfrak{B}'$ en base $\mathfrak{B}$, es decir, B es diagonal con entradas $d_1, \dots, d_k$. De la misma manera habíamos definido A como la expresión de $\{u^{(1)}, \dots, u^{(k)}\}$ en una base $\{v_1, \dots, v_k\}$. Ahora podemos realizar cambios de base $V, W \in \text{GL}_k(\mathbb{Z})$ tales que $B = WAV$. Como sabemos que los cambios de base en $\text{GL}_k(\mathbb{Z})$ tienen determinante 1 o -1 llegamos a que $|\det A| = |\det B| = d_1 \cdots d_k$.

2.2. ABANICOS REGULARES

Por otro lado $\mathbb{Z}\langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle$ es subgrupo normal de $\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma)$, luego $\text{mult } \sigma$ es el orden del grupo cociente $\frac{\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma)}{\mathbb{Z}\langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle}$. Además, gracias a las bases $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ sabemos que $\frac{\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma)}{\mathbb{Z}\langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle} \simeq \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}/d_i \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\text{mult } \sigma = |\frac{\mathbb{Z}^n \cap \mathfrak{L}(\sigma)}{\mathbb{Z}\langle u^{(1)}, \dots, u^{(k)} \rangle}| = d_1 \cdots d_k = |\det A|$. Por último, dado que existe una biyección entre el grupo cociente y el conjunto $\{\sum_{i=1}^k n_i b_i : n_i = 0, \dots, d_i - 1\} = P_\sigma$ tenemos que $\#P_\sigma = d_1 \cdots d_k = \text{mult } \sigma$. $\square$

Corolario 2.1.15. Si $\tau \subseteq \sigma$ son conos simpliciales entonces $\text{mult } \tau \leq \text{mult } \sigma$.

Demostración. Como consecuencia del teorema 2.1.14 tenemos que $P_\tau \subseteq P_\sigma$ y por lo tanto $\text{mult } \tau \leq \text{mult } \sigma$. $\square$

2.2. Abanicos regulares

Ahora pasaremos a tratar propiedades de los abanicos poliédricos. El objetivo es probar la existencia de refinamientos regulares para los abanicos racionales.

Definición 2.2.1. Diremos que un abanico es *regular* si todos sus conos lo son. Un abanico Σ' es un *refinamiento* del abanico Σ si para cada cono $\sigma \in \Sigma$ existen $\sigma'_1, \dots, \sigma'_k \in \Sigma'$ tales que $\sigma = \bigcup_{i=1}^k \sigma'_i$.

Definición 2.2.2. Sea Σ un abanico poliédrico racional y sea $v \in |\Sigma| \cap \mathbb{Z}^n$ un vector no nulo. Llamamos *subdivisión estrella* de Σ por v al abanico

$$\Sigma(v) = \{\sigma \in \Sigma : v \notin \sigma\} \cup \{\sigma(v) = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle \sigma, v \rangle : \sigma \leq \tau \in \Sigma, v \in \tau - \sigma\}.$$

Ejemplo 2.2.3. Veamos cómo funciona la subdivisión estrella en el caso de un abanico Σ formado por un cono fuertemente convexo $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}^n \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ y todas sus caras $\tau \leq \sigma$. Estas caras se pueden describir con la notación $\tau_J = \mathbb{R}_{\geq 0}^n \langle u_j : j \in J \rangle$, donde $J \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Aunque no todo J da lugar a una cara de σ , por no ser este último simplicial.

El abanico Σ consiste en un cono de dimensión 0 ($\tau_\emptyset = \{\mathbf{0}\}$), cuatro conos de dimensión 1 (τ_j), cuatro conos de dimensión 2 ($\tau_{1,2}, \tau_{2,3}, \tau_{3,4}, \tau_{1,4}$) y un cono de dimensión 3 (σ).

Si tomamos un vector $v \in \mathring{\sigma}$, entonces el abanico resultante es

$$\Sigma(v) = \{\tau\}_{\tau < \sigma} \cup \{\tau(v)\}_{\tau < \sigma}.$$

Donde el cono σ tridimensional ha sido sustituido por un cono de dimensión 1 ($\tau_\emptyset(v)$), cuatro conos de dimensión 2 ($\tau_j(v)$) y cuatro conos de dimensión

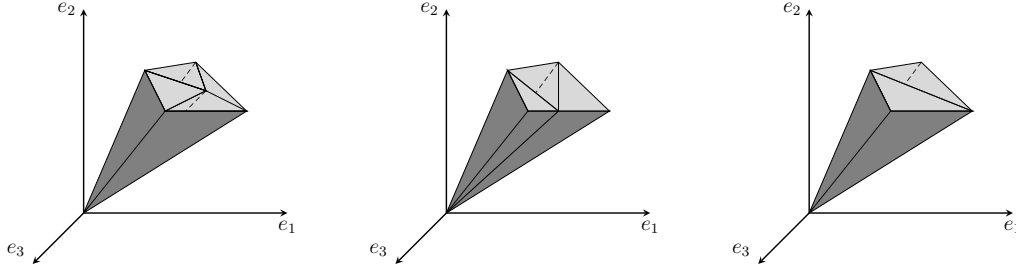


Figura 2.1: Varias subdivisiones estrella $\sigma(v)$ de σ al variar v .

3 (ver figura 2.1). Si en cambio el vector v está en el interior relativo de $\tau_{1,2}$ la subdivisión estrella es

$$\Sigma(v) = \{\tau \in \Sigma - \{\sigma, \tau_{1,2}\}\} \cup \{\tau(v) : \tau \in \Sigma - \{\sigma, \tau_{1,2}\}\}.$$

Donde el cono $\tau_{1,2}$ se ha dividido en los conos bidimensionales $\tau_1(v)$, $\tau_2(v)$ y el cono $\tau_\emptyset(v)$ de dimensión 1. Por su parte el cono σ ha sido reemplazado por los conos $\tau_3(v)$, $\tau_4(v)$ de dimensión 2 y los conos $\tau_{2,3}(v)$, $\tau_{3,4}(v)$, $\tau_{1,4}(v)$ de dimensión 3. La última opción es que v esté en uno de los rayos generadores de σ . Por ejemplo en τ_1 . La subdivisión estrella sería en este caso

$$\Sigma(v) = \{\tau \in \Sigma - \{\sigma, \tau_{1,2}, \tau_{1,4}, \tau_1\}\} \cup \{\tau(v) : \tau \in \Sigma - \{\sigma, \tau_{1,2}, \tau_{1,4}, \tau_1\}\}.$$

A pesar de la expresión anterior, $\Sigma(v)$ es una subdivisión sencilla. Solo se ha eliminado el cono σ para añadir los conos $\tau_{2,3}(v)$, $\tau_{3,4}(v)$ y $\tau_3(v)$. Hay algunos conos que tras la subdivisión han cambiado de nombre pero son los mismos como $\tau_\emptyset(v) = \tau_1$ o $\tau_2(v) = \tau_{1,2}$.

Proposición 2.2.4. Si Σ es un abanico poliédrico racional y $v \in |\Sigma| \cap \mathbb{Z}^n$ es un vector no nulo entonces $\Sigma(v)$ es un refinamiento racional de Σ . Además se cumple que $|\Sigma(v)| = |\Sigma|$ y $\dim \sigma(v) = \dim \sigma + 1$ para todo $\sigma(v) \in \Sigma(v)$.

Demostración. Empecemos probando que $\Sigma(v)$ es un conjunto finito de conos poliédricos. Esto es porque dejamos intactos los conos σ de Σ que no contienen a v y sustituimos los conos $\tau \in \Sigma$ que sí lo contienen por los conos $\sigma(v)$ para todas las caras σ de τ que no contienen v . Por cómo está definido, $\sigma(v)$ es un cono poliédrico y dado que $v \notin \sigma$ tenemos que $\dim \sigma(v) = \dim \sigma + 1$.

Veamos ahora que $|\Sigma| = |\Sigma(v)|$. Basta con probar que si $v \in \tau \in \Sigma$, entonces tenemos que $\tau = \cup_{v \notin \sigma < \tau} \sigma(v)$. Está claro que $\tau \supseteq \sigma(v)$ ya que σ y v están en el cono convexo τ . Para ver « $\subseteq$ », si $u \in \mathfrak{L}(v) \cap \tau$ entonces u está en el cono $\mathbb{R}_{\geq 0} \langle \mathbf{0} \rangle(v)$. En el caso contrario tenemos el vector u en $\tau - \mathfrak{L}(v)$. Veamos qué casos se pueden presentar:

- Supongamos que u está en el interior relativo de τ . Definimos $\lambda = \max\{\mu > 0 : u - \mu v \in \tau\}$. Sabemos que λ existe porque estamos suponiendo que los conos son fuertemente convexos, luego $-\mu v \notin \tau$ y no puede darse que $u - \mu v \in \tau$ para todo $\mu > 0$. Por lo que $u - \lambda v$ está en la frontera de τ , que es unión de las caras propias de τ . Veamos que la cara $\sigma < \tau$ tal que $u - \lambda v \in \sigma$ no contiene a v . Esto es porque $\lambda v + (u - \lambda v) = u$ está en el interior relativo de τ y no en la cara σ , por lo que v y $u - \lambda v$ no pueden estar en la misma cara de τ . Ahora que sabemos que $v \notin \sigma$ concluimos que $u \in \sigma(v)$.
- Si el vector $u \in \sigma < \tau$ está en la frontera de τ y $v \notin \sigma$, entonces es fácil concluir que $u \in \sigma \subset \sigma(v)$.
- Si $u \in \sigma < \tau$ pero $v \in \sigma$, entonces repetimos el razonamiento de los dos puntos anteriores, donde σ es ahora τ .

Solo queda demostrar que $\Sigma(v)$ es abanico ya que por lo que acabamos de ver se cumple la condición de que sea refinamiento. Empezamos por ver que dado $\sigma \in \Sigma(v)$, todas sus caras están en $\Sigma(v)$. El caso sencillo es cuando $v \notin \sigma$ ya que entonces el vector v tampoco pertenece a ninguna cara $\tau \in \Sigma$ y por lo tanto $\tau \in \Sigma(v)$. Si suponemos por el contrario que $v \in \sigma$, entonces $\sigma = \varsigma(v)$ con $\varsigma \in \Sigma$ y cualquier cara $\tau \leq \sigma$ es de la forma $\text{Cara}_\omega(\sigma) = \sigma \cap \omega^\perp$. Tenemos dos posibilidades:

- Si $\langle \omega, v \rangle = 0$ entonces $v \in \tau$. Luego $\tau = [\text{Cara}_\omega(\varsigma)](v) \in \Sigma(v)$, ya que $v \notin \text{Cara}_\omega(\varsigma)$.
- Si $\langle \omega, v \rangle < 0$ entonces $v \notin \tau$. Luego $\tau = \text{Cara}_\omega(\varsigma) \in \Sigma(v)$.

Para acabar hay que probar que la intersección no vacía de conos $\sigma, \tau \in \Sigma(v)$ es cara de ambos. Hay tres casos que se pueden dar:

- Si $v \notin \sigma \cup \tau$ entonces σ, τ y $\sigma \cap \tau$ son conos de Σ . Luego $\sigma \cap \tau$ es cara de los dos conos y pertenece a $\Sigma(v)$.
- Si $v \in \sigma - \tau$ entonces $\tau \in \Sigma$ y existen $\varsigma < \sigma' \in \Sigma$ tales que $v \in \sigma' - \varsigma$ y $\sigma = \varsigma(v) \subseteq \sigma'$. Veamos que $\sigma \cap \tau = \varsigma \cap \tau \in \Sigma$, así deduciremos que $\sigma \cap \tau$ está en $\Sigma(v)$ y es cara de los dos conos. Está claro que $\sigma \cap \tau \supseteq \varsigma \cap \tau$, falta probar « $\subseteq$ ». Sea $u \in \sigma \cap \tau$ y tomemos $\lambda \geq 0$ tal que $u - \lambda v \in \varsigma$. Sabemos que λv y $u - \lambda v$ están en σ' . También sabemos que $\sigma' \cap \tau$ es una cara de σ' en Σ . Como $\lambda v + (u - \lambda v) = u \in \sigma' \cap \tau$, tenemos que también λv y $u - \lambda v$ están en $\sigma' \cap \tau$. Pero estamos suponiendo que v no está en τ por lo que $\lambda = 0$. Con esto probamos que $u - \lambda v = u \in \varsigma$ y acabamos este caso.

- Supongamos por último que $v \in \sigma \cap \tau$. Entonces existen σ' y τ' en Σ tales que $\sigma = \sigma'(v)$ y $\tau = \tau'(v)$. Veamos que $\sigma \cap \tau = [\sigma' \cap \tau'](v) \in \Sigma(v)$. Es inmediato comprobar que $\sigma \cap \tau \supseteq [\sigma' \cap \tau'](v)$. Solo nos queda verificar « $\subseteq$ ». Sea $u \in \sigma \cap \tau$ y sean $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $u - \lambda v \in \sigma'$ y $u - \mu v \in \tau'$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\lambda \geq \mu$, entonces tenemos que $u - \mu v = (u - \lambda v) + (\lambda - \mu)v \in \tau' \cap \sigma = \sigma' \cap \tau'$. Nótese que la última igualdad es lo que hemos demostrado en el caso anterior. Con esta información deducimos lo que buscábamos: $u = \mu v + (u - \mu v) \in [\sigma' \cap \tau'](v)$.

□

Teorema 2.2.5. [Ewald, teorema v.4.2] Todo abanico Σ racional se puede refinar a un abanico racional Σ' donde todos los conos son simpliciales.

Teorema 2.2.6. Todo abanico racional admite un refinamiento regular.

Demostración. Supondremos que los abanicos con los que trabajaremos son (o han sido refinados a) abanicos simpliciales, por el teorema 2.2.5. Por ser los conos σ simpliciales, nuestra preocupación será conseguir que $\text{mult } \sigma = 1$ (proposición 2.1.13). El corolario 2.1.15 asegura que al refinar sucesivamente, la multiplicidad de los conos se reduce o se mantiene igual, por lo que buscamos un refinamiento de conos hasta conseguir la regularidad.

Sea $\sigma = \text{Cono}(u^{(1)}, \dots, u^{(k)}) \in \Sigma$ tal que $\text{mult } \sigma > 1$. Supondremos que es un cono no regular de mínima dimensión en Σ , una vez refinado a uno regular podremos ocuparnos de los de dimensión mayor en finitos pasos. Tomemos un vector $v \in P_\sigma$ con $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u^{(i)} \neq 0$, es decir $0 < \lambda_i < 1$ para todo i , ya que v no puede pertenecer a ninguna cara propia de σ por ser regulares.

Esto garantiza que v no está en ninguna arista de σ . Lo que significa que todos los conos en $\{\tau(v)\}_{v \notin \tau < \sigma}$ son subconjuntos propios de σ . Dado $\sigma_i = \text{Cono}(u^{(j)} : j \neq i) < \sigma$ tal que $v \notin \sigma_i$, entonces

$$\begin{aligned} \text{mult } \sigma_i(v) &= \det(u^{(1)}, \dots, v, \dots, u^{(k)}) = \det(u^{(1)}, \dots, \sum \lambda_i u^{(i)}, \dots, u^{(k)}) \\ &= \det(u^{(1)}, \dots, \lambda_i u^{(i)}, \dots, u^{(k)}) = \lambda_i \text{mult } \sigma. \end{aligned}$$

Como $0 < \lambda_i < 1$ tenemos que $\text{mult } \sigma_i(v) = \lambda_i \text{mult } \sigma < \text{mult } \sigma$. Dado que $\sigma = \bigcup_{v \notin \sigma_i} \sigma_i(v)$, sabemos que hemos dividido σ en conos $\sigma_i(v)$ de multiplicidad estrictamente menor. En un número finito de pasos llegamos a un abanico que subdivide σ , en el que los conos de dimensión k son regulares y sus caras también. Iterando en los conos no regulares de dimensión mínima llegamos a un abanico regular que refina a Σ . □

2.3. POLIEDRO DE NEWTON

Ejemplo 2.2.7. [Ewald, Ejercicio v.3.1] Sage permite hacer cálculos con conos y abanicos racionales, por lo que resuelve rápidamente cuestiones como la siguiente: *Refina $\sigma = \text{Cono}((1, 0, 2), (1, 1, 3), (0, 2, 5))$ en conos regulares.*

Está claro que σ no es regular ya que aunque es simplicial, su multiplicidad es $|\det(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})| = 3 = \#P_\sigma$.

```
cono = Cone([(0,0,0),(1,0,2),(0,2,5),(1,1,3)])
fan=Fan([cono])
fan.is_smooth()

False
```

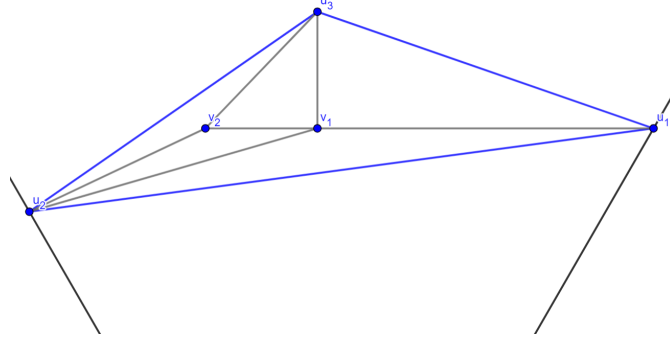


Figura 2.2: Abanico del refinamiento $\sigma(v_1)(v_2)$ en $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ cortado con el plano $x + y + z = 1$.

Podemos calcular los puntos de P_σ a mano o con Sage. Los 3 puntos son: $(0, 0, 0)$, $v_1 = (1, 1, 4)$ y $v_2 = (1, 2, 6)$. Realizando subdivisiones estrella $\sigma(v_1)$, $[\sigma(v_1)](v_2)$ llegamos a un abanico regular.

```
fan=Fan([cono])
fan1=fan.subdivide(new_rays=[(1,1,4)])
fan2=fan1.subdivide(new_rays=[(1,2,6)])
[fan1.is_smooth(), fan2.is_smooth()]

[False, True]
```

2.3. Poliedro de Newton

A partir de ahora supondremos que $\mathbb{K}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. Vamos a definir el concepto de poliedro de Newton de un polinomio.

Definición 2.3.1. Dado $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = R$ con soporte $\varepsilon(f) \subseteq \mathbb{N}_0^n$, el *poliedro de Newton* de f , $\text{NP}(f)$, es la envolvente convexa del conjunto $\bigcup_{\alpha \in \varepsilon(f)} \alpha + \mathbb{R}_{\geq 0}^n$. No debe confundirse con el *politopo de Newton*, $\text{New}(f)$, que es la envolvente convexa de $\varepsilon(f)$.

Dada una cara C del poliedro de Newton de f , definimos la *restricción* de f a la cara C como

$$f|_C = \sum_{\alpha \in C \cap \varepsilon(f)} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha.$$

A partir de estas definiciones podemos comprobar inmediatamente que $\text{NP}(f)$ tiene varias propiedades importantes.

Proposición 2.3.2. Dado $f \in R$ se cumple que:

1. $\text{NP}(f)$ es un poliedro no acotado contenido en $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$.
2. $\text{NP}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ si y solo si $f(0) \neq 0$.
3. $\text{NP}(f)$ tiene un único vértice α si y solo si $f = a\mathbf{x}^\alpha \cdot g$, con $g \in R$ tal que $g(0) = 1$.
4. Si $C = \text{Cara}_\omega \text{NP}(f)$ es una cara, entonces $f|_C = \text{in}_\omega f$.
5. Si $\sigma = \text{Cono}(e^{(1)}, \dots, e^{(s)})$, entonces $f|_\sigma = f(x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0)$.

Recordemos que al tomar unos pesos $\omega \in \mathbb{R}^n$, hemos definido la cara Cara_ω de un poliedro y la forma inicial in_ω de un polinomio buscando maximizar el producto por ω . Pero para calcular las caras del poliedro de Newton con vector de pesos $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ tenemos que minimizar ω , es decir, maximizar $-\omega$. Teniendo esta cuestión en cuenta definimos los siguientes conceptos.

Definición 2.3.3. Sea $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$. El ω -orden del polinomio $f \in R$ se define como $\nu_\omega(f) = \min_{\alpha \in \varepsilon(f)} \langle \omega, \alpha \rangle$. Podría decirse que $\nu_\omega(f) = \text{gr}_{-\omega}(f)$. Por otro lado definimos el *hiperplano de soporte* $\pi_\omega(f) = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, u \rangle = \nu_\omega(f)\}$. De esta manera las caras del poliedro de Newton se pueden describir como $\text{Cara}_\omega(f) := \pi_\omega(f) \cap \text{NP}(f)$, es decir, $\text{Cara}_\omega(f) = \text{Cara}_{-\omega} \text{NP}(f)$.

Dada una cara C de $\text{NP}(f)$ definimos el *cono normal* a C como el conjunto $\sigma_C = \{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : C \subseteq \text{Cara}_\omega(f)\}$ y el *abanico de Gröbner local* de f como la colección $\Sigma(f) = \{\sigma_C\}_{C \subseteq \text{NP}(f)}$.

Lema 2.3.4. [Ewald, Lema III.1.4] El *abanico normal* $\Sigma(P) = \{\sigma_C(P)\}_{C \subseteq P}$ de un politopo P dado por los *conos normales*

$$\sigma_C(P) = \{\omega \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \text{Cara}_\omega(P)\}$$

es un abanico poliédrico cuyo soporte es $\mathbb{R}^n$.

2.3. POLIEDRO DE NEWTON

Definición 2.3.5. Diremos que el *refinamiento común* de dos abanicos es $\Sigma \wedge \Sigma' := \{\sigma \cap \sigma'\}_{\sigma \in \Sigma, \sigma' \in \Sigma'}$. De hecho es de nuevo un abanico [Ewald, III.2.7].

Teorema 2.3.6. Dado un polinomio $f \in R$, el abanico de Gröbner local $\Sigma(f)$ es un abanico poliédrico porque coincide con el abanico $\mathbb{R}_{\geq 0}^n \wedge -\Sigma(\text{New}(f))$ dado por el refinamiento común al ortante positivo y el abanico normal al politopo de Newton escalado por -1 .

Demostración. Sabemos que $\mathbb{R}_{\geq 0}^n \wedge -\Sigma(\text{New}(f))$ es un abanico poliédrico por los resultados citados anteriormente. Falta ver la igualdad entre estos dos abanicos.

El abanico normal $\Sigma(\text{New}(f))$ al politopo de Newton tiene por soporte todo el espacio $\mathbb{R}^n$. Luego el soporte del refinamiento común $\mathbb{R}_{\geq 0}^n \wedge -\Sigma(\text{New}(f))$ es $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, igual que el de $\Sigma(f)$.

Tomemos un cono $\sigma_C \in \Sigma(f)$ dado por una cara $C \leq \text{NP}(f)$. Recordemos que este cono es $\sigma_C = \{\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : C \subseteq \text{Cara}_\omega(f)\}$. La cara C también es una cara del politopo de Newton $P = \text{New}(f)$. Y tenemos que el cono normal al politopo $\sigma_C(P) = \{\omega \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \text{Cara}_\omega(P)\}$ es un cono del abanico normal $\Sigma(P)$ al politopo. Como $\text{Cara}_\omega(f) = \text{Cara}_{-\omega} \text{NP}(f)$ tenemos, por definición de estos conjuntos, que $-\sigma_C(P) \cup \mathbb{R}_{\geq 0}^n = \sigma_C$.

Las caras de P que no hemos tomado todavía son las que cumplen que todos sus vectores normales están fuera del ortante $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Estas caras no son caras del poliedro $\text{NP}(f)$. Y sus conos normales $\sigma_C(P)$ no están contenidos en $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, por lo que quedan descartados del abanico $\mathbb{R}_{\geq 0}^n \wedge -\Sigma(P)$. $\square$

Nota. Para evitar confundir los conceptos introducidos hasta ahora vamos a remarcar su carácter local o global. En el estudio de singularidades necesitamos analizar las propiedades locales de un ideal $\langle f \rangle$, es decir, el ω -orden ν_ω , el poliedro de Newton $\text{NP}(f)$ y el abanico de Gröber local $\Sigma(f)$.

Por otro lado, al trabajar con bases de Gröbner y problemas de división o pertenencia a ideales se suelen trabajar con propiedades globales (aunque también con locales), como son el ω -grado, los órdenes monomiales, el politopo de Newton $\text{New}(f)$ y el abanico de Gröbner $\text{GF}(I)$, que en el caso de ideales principales $I = \langle f \rangle$ es de hecho un subconjunto del abanico normal $\Sigma(\text{New}(f))$.

Definición 2.3.7. Diremos que un cono σ es *bueno* para f si está contenido en un cono de $\Sigma(f)$. Dado un cono bueno para f , podemos definir la σ -cara de f como $\text{Cara}_\sigma(f) = \text{Cara}_\omega(f)$ con ω en el interior relativo de σ . Sabemos que las σ -caras están bien definidas porque en los interiores relativos de los conos de $\Sigma(f)$, $\text{Cara}_\omega(f)$ no varía.

Proposición 2.3.8. Las aplicaciones $C \mapsto \sigma_C$ y $\sigma \mapsto \text{Cara}_\sigma(f)$ son biyecciones que invierten el orden (una es inversa de la otra) entre los conjuntos $\{C \leq \text{NP}(f)\} \leftrightarrow \Sigma(f)$.

Demostración. Ya hemos visto que $C \mapsto \sigma_C$ y $\sigma \mapsto \text{Cara}_\sigma(f)$ son aplicaciones bien definidas. Falta ver que $C = \text{Cara}_{\sigma_C}(f)$ para comprobar la biyectividad. Tomemos un vector ω dentro del interior relativo del cono σ_C . Por definición tenemos que $\text{Cara}_{\sigma_C}(f) = \text{Cara}_\omega(f)$. Y dado que $\omega \in \sigma_C$ se cumple que $\text{Cara}_\omega(f) = C$.

Solo queda comprobar que esta biyección invierte el orden. Tomemos dos caras $F < C$ en $\text{NP}(f)$. Tenemos que $\dim F < \dim C$, que son las dimensiones del menor subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ que las contienen. Es conocido que las dimensiones de sus complementos ortogonales son exactamente $n - \dim F > n - \dim C$, y estas a su vez son las dimensiones de los conos asociados σ_F y σ_C . Por lo tanto $\sigma_F > \sigma_C$. $\square$

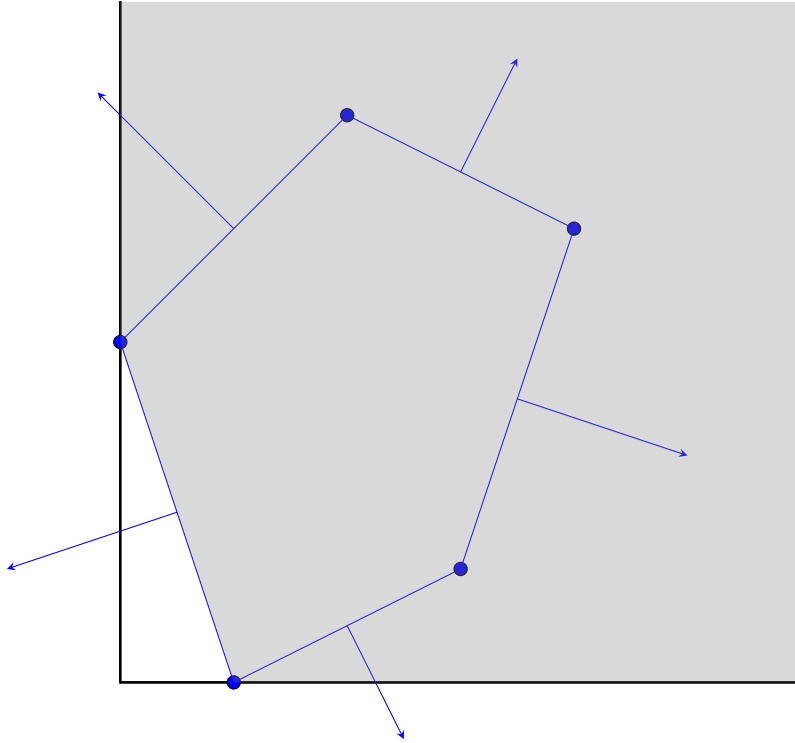


Figura 2.3: El polígono de Newton $\text{NP}(f)$ y el politopo de Newton $\text{New}(f)$.

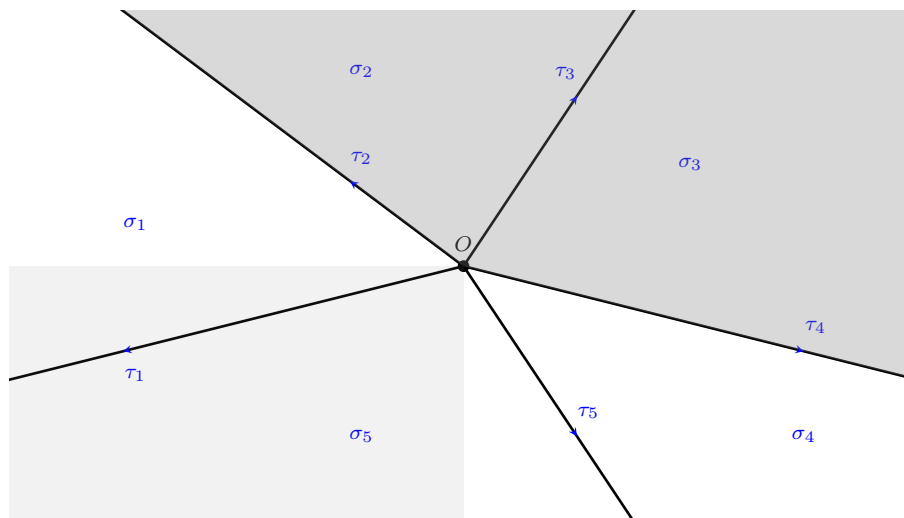


Figura 2.4: Abanico de Gröbner $GF(\langle f \rangle)$ sombreado.

Ejemplo 2.3.9. Veamos un ejemplo de los conceptos vistos en esta sección. Dado un polinomio en dos variables $x + x^3y - y^3 + x^2y^5 - x^4y^4$, podemos dibujar su poliedro y politopo de Newton en la figura 2.3.

Para calcular el abanico de Gröbner de $\langle f \rangle$ utilizamos el programa Gfan en Sage.

```
R.<x,y>= QQ[]
I = R.ideal([x+x^3*y-y^3+x^2*y^5-x^4*y^4])
GF = I.groebner_fan()
PF = GF.polyhedralfan()
PF.rays()
PF.maximal_cones()
TI = GF.tropical_intersection()
TI.rays()

[[-1, 1], [1, 2], [3, -1]]
{2: [[0, 1], [1, 2]]}
[[-3, -1], [-1, 1], [1, -2], [1, 2], [3, -1]]
```

En la figura 2.4 podemos ver que efectivamente el abanico de Gröbner $GF(\langle f \rangle)$ de un ideal principal es un subconjunto del abanico normal $\Sigma(\text{New}(f))$. Por último, en la figura 2.5 tenemos el abanico de Gröbner local de f .

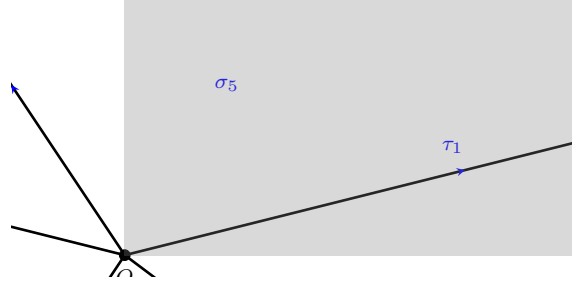


Figura 2.5: El abanico de Gröbner local $\Sigma(f)$.

2.4. Transformaciones monomiales

Las demostraciones de esta sección se omiten por ser elementales. Se da la referencia del artículo [AGS]. Gracias a estas propiedades podremos manejar la modificación tórica en el resto del capítulo.

Definición 2.4.1. Para una matriz $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ definimos el morfismo asociado

$$\begin{aligned} \phi_M : (\mathbb{K}^*)^n &\rightarrow (\mathbb{K}^*)^n \\ z &\mapsto (z^{m^{(1)}}, \dots, z^{m^{(n)}}) \end{aligned}$$

dado por los vectores columna de M y denotaremos por L_M a la aplicación $\mathbb{R}$ -lineal asociada a M .

Proposición 2.4.2. [AGS, sección 5] El morfismo $\phi_M : (\mathbb{K}^*)^n \rightarrow (\mathbb{K}^*)^n$ es birregular en el toro algebraico $(\mathbb{K}^*)^n \rightarrow (\mathbb{K}^*)^n$ y birracional $\mathbb{K}^n \dashrightarrow \mathbb{K}^n$. Además se cumplen las siguientes igualdades:

1. $\phi_M \circ \phi_N = \phi_{NM}$.
2. $(\phi_M)^{-1} = \phi_{M^{-1}}$.
3. $\phi_M(\mathbf{x})^\mu = \mathbf{x}^{L_M(\mu)}$.
4. $f \circ \phi_M(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \varepsilon(f)} c_\alpha \mathbf{x}^{L_M(\alpha)}$, con $f = \sum_{\alpha \in \varepsilon(f)} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in R$.
5. $\varepsilon(f \circ \phi_M) = L_M(\varepsilon(f))$.
6. $f \circ \phi_M|_{L_M(\pi) \cap \text{NP}(f \circ \phi_M)} = f|_{\pi \cap \text{NP}(f)} \circ \phi_M$, siendo $\pi = \pi_\omega(f)$.
7. $L_M(\text{Cono}(M^t)^\vee) = \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, siendo M unimodular.

Proposición 2.4.3. [AGS, proposición 5.2] Si $\sigma = \text{Cono}(M^t)$ es bueno para $f \in R$, entonces $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es bueno para $f \circ \phi_M$, es decir, $\text{NP}(f \circ \phi_M)$ tiene un único vértice.

Proposición 2.4.4. [AGS, proposición 5.3] Sea $\sigma = \text{Cono}(M)$ bueno para f y $\tau \leq \sigma$ una cara dada por $\tau = \text{Cono}(m^{(j)} : j \in I)$. Entonces si $\mathbf{v}$ es el único vértice de $\text{NP}(f \circ \phi_{M^t})$ tenemos que

$$f|_{\text{Cara}_\tau(f)} \circ \phi_{M^t} = f \circ \phi_{M^t}|_{\mathbf{v} + \text{Cono}(e^{(j)} : j \notin I)}.$$

2.5. Modificación tórica

Vamos a describir el proceso de construcción de una variedad tórica (y un morfismo o explosión) asociada a un abanico regular Σ con soporte contenido en $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Se va a seguir el artículo de [AGS] y para más detalles se ha consultado [CLS].

Definición 2.5.1. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de los conos de Σ de dimensión maximal. A cada cono $\sigma \in \mathcal{M}$ le asociamos la *variedad tórica afín* $U_\sigma = \mathbb{K}^n$. La razón de esta elección puede verse en la construcción general de variedad algebraica afín tórica normal asociada a un cono [CLS, Ejemplo 1.1.20].

Dado que suponemos que Σ es regular, para cada $\sigma \in \mathcal{M}$ (dado por $\sigma = \text{Cono}(M)$) consideramos el morfismo $\phi_{(M^{-1})^t} : (\mathbb{K}^*)^n \rightarrow U_\sigma$. Además a cada par de conos maximales $\sigma = \text{Cono}(M)$, $\tau = \text{Cono}(N)$ le asociamos el morfismo $\phi_{\sigma, \tau} = \phi_{(N^{-1})^t} \circ \phi_{(M^{-1})^t}^{-1} = \phi_{M^t(N^{-1})^t}$, que es birracional de U_σ a U_τ .

Definimos la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en la unión disjunta $\coprod_{\sigma \in \mathcal{M}} U_\sigma$ como

$$u\mathcal{R}v \iff \phi_{\sigma, \tau}(u) = v, \text{ para algunos } u \in U_\sigma, v \in U_\tau, \sigma, \tau \in \mathcal{M}.$$

Definición 2.5.2. El cociente $X_\Sigma = \coprod_{\sigma \in \mathcal{M}} U_\sigma / \mathcal{R}$ es una variedad algebraica regular [CLS, Teorema 3.1.19] que llamaremos *variedad tórica asociada a Σ* . Llamamos *carta* a cada aplicación $\phi_{(M^{-1})^t}$ asociada a un $\sigma \in \mathcal{M}$.

Para cada cono $\sigma \in \mathcal{M}$ tenemos un morfismo regular

$$\begin{aligned} \pi|_{U_\sigma} : U_\sigma &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto \phi_{M^t}(x) \end{aligned}$$

compatible con el pegado: $\pi|_{U_\sigma} = \pi|_{U_\tau} \circ \phi_{\sigma, \tau}$ por las propiedades básicas de estas aplicaciones (proposición 2.4.2).

Definición 2.5.3. Dada la variedad X_Σ y los morfismos compatibles con el pegado construimos un morfismo $\pi : X_\Sigma \rightarrow \mathbb{K}^n$ llamado *modificación tórica*.

Veamos como ejemplo de modificación tórica un morfismo que resultará conocido a cualquier lector.

Ejemplo 2.5.4. Sea Σ el abanico regular dado por los conos regulares $\sigma_1 = \text{Cono}(e^{(1)}, e^{(1)} + e^{(2)})$, $\sigma_2 = \text{Cono}(e^{(2)}, e^{(1)} + e^{(2)})$ y todas sus caras. Las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nos dan los morfismos

$$\phi_{(M_1^{-1})^t}(\mathbf{z}) = (z_1 z_2^{-1}, z_2), \phi_{(M_2^{-1})^t}(\mathbf{z}) = (z_2 z_1^{-1}, z_1), \phi_{\sigma_1, \sigma_2}(\mathbf{z}) = (z_1^{-1}, z_1 z_2)$$

y las restricciones de la modificación tórica

$$\pi|_{U_{\sigma_1}}(\mathbf{z}) = (z_1 z_2, z_2), \pi|_{U_{\sigma_2}}(\mathbf{z}) = (z_2, z_1 z_2).$$

Esta modificación tórica es uno de los morfismos más conocidos de la Geometría Algebraica, se trata de la explosión del origen en el plano $\mathbb{A}^2$. Podemos ver X_Σ como $Y = \{(x_1, x_2, [y_1, y_2]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 : x_1 y_2 = x_2 y_1\}$ mediante el siguiente isomorfismo $\psi : X_\Sigma \rightarrow Y$. Sean V_j los abiertos de Y dados por $y_j \neq 0$. Es decir

$$V_1 = \left\{ \left(x_1, \frac{y_2}{y_1} x_1, \left[1, \frac{y_2}{y_1} \right] \right) \right\}, V_2 = \left\{ \left(\frac{y_1}{y_2} x_2, x_2, \left[\frac{y_1}{y_2}, 1 \right] \right) \right\} \subseteq Y.$$

Al restringirnos a dichos abiertos tenemos el isomorfismo

$$\begin{array}{ll} \psi|_{U_{\sigma_1}} : U_{\sigma_1} \rightarrow V_1 & \psi|_{U_{\sigma_2}} : U_{\sigma_2} \rightarrow V_2 \\ (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1 z_2, [1, z_1]) & (z_1, z_2) \mapsto (z_1 z_2, z_2, [z_1, 1]) \end{array}$$

que es compatible con el pegado ya que $\psi|_{U_{\sigma_1}}(\mathbf{z}) = \psi|_{U_{\sigma_2}} \circ \phi_{\sigma_1, \sigma_2}(\mathbf{z})$. De esta forma la modificación tórica $\pi : X_\Sigma \rightarrow \mathbb{K}^2$ es la proyección de la explosión $\pi_0(x_1, x_2, [y_1, y_2]) = (x_1, x_2)$, ya que $\pi = \pi_0 \circ \psi$.

Definición 2.5.5. Dada una variedad V en $\mathbb{K}^n$ y una modificación tórica $\pi : X_\Sigma \rightarrow \mathbb{K}^n$, llamamos la *transformada total* de V por π a $\pi^{-1}(V)$.

Definición 2.5.6. Si a V le quitamos los puntos en los hiperplanos coordenados $V^* = V - V(x_1 x_2 \cdots x_n)$, definimos la *transformada estricta* de V por π como $\tilde{V} = \pi^{-1}(V^*)$. Donde la adherencia se toma considerando la topología de Zariski.

2.5. MODIFICACIÓN TÓRICA

Definición 2.5.7. Por otro lado, al tomar un cono $\sigma \in \mathcal{M}$ tenemos una *acción natural del toro* $(\mathbb{K}^*)^n$ sobre U_σ

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}^*)^n \times U_\sigma &\rightarrow U_\sigma \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) &\mapsto (\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_n z_n) \end{aligned}$$

que es compatible con el pegado de X_Σ , ya que $\phi_{\sigma, \tau}(\lambda \cdot \mathbf{z}) = \phi_{\sigma, \tau}(\lambda) \cdot \phi_{\sigma, \tau}(\mathbf{z})$. Como el toro $(\mathbb{K}^*)^n$ está contenido en todas las cartas U_σ y el pegado lo identifica consigo mismo tenemos que es un abierto de Zariski T_Σ de X_Σ que actúa sobre toda la variedad. Esta propiedad concuerda con la definición más general de variedad tórica [CLS, 3.1.1].

Tomemos un cono del abanico $\tau \leq \sigma \in \mathcal{M}$. Por la proposición 2.1.11 sabemos que existen unos índices J tales que $\tau = \text{Cono}(u^{(j)} : j \in J)$, siendo $u^{(j)}$ vértices de σ .

Definición 2.5.8. La *órbita* asociada a τ se define como un toro de dimensión $n - \#J$

$$\mathcal{O}(\tau) = \{(x_1, \dots, x_n) \in U_\sigma : x_j = 0 \text{ si } j \in J, x_j \neq 0 \text{ si } j \notin J\}.$$

Este conjunto está bien definido en X_Σ porque no depende del cono σ del cual es cara τ . Además las órbitas de la acción del toro sobre X_Σ son exactamente estos conjuntos.

Ejemplo 2.5.9. Volviendo al ejemplo anterior, en la figura 2.6 tenemos que los conos bidimensionales σ_1 (en azul) y σ_2 (en verde) dan lugar a dos puntos en X_Σ . Los conos de dimensión 1 generados por los vectores $e^{(1)}$ (en naranja), $e^{(2)}$ (en rojo) y $e^{(1)} + e^{(2)}$ (en negro) se corresponden con órbitas tóricas de dimensión 1. Por último, el ápice del abanico (gradiente azul-amarillo) se corresponde con el toro $\mathcal{O}(\text{Cono}(\emptyset))$ maximal de X_Σ .

Sea $V(f) = V(x^3 - y^2)$ la cúspide en el plano afín $\mathbb{K}^2$. La transformada total por la modificación tórica (la explosión del plano en el origen) es $\pi^{-1}(V)$. En U_{σ_1} , dado que $\pi|_{U_{\sigma_1}}(\mathbf{z}) = (z_1 z_2, z_2)$ tenemos que

$$\pi|_{U_{\sigma_1}}^{-1}(V) = \{(z_1, z_2) \in U_{\sigma_1} : f \circ \pi|_{U_{\sigma_1}}(\mathbf{z}) = z_2^2(z_1^3 z_2 - 1) = 0\}.$$

Mientras que en U_{σ_2} , donde $\pi|_{U_{\sigma_2}}(\mathbf{z}) = (z_2, z_1 z_2)$ tenemos que

$$\pi|_{U_{\sigma_2}}^{-1}(V) = \{(z_1, z_2) \in U_{\sigma_2} : f \circ \pi|_{U_{\sigma_2}}(\mathbf{z}) = z_2^2(z_2 - z_1^2) = 0\}.$$

Luego la transformada estricta es $\tilde{V} \cap U_{\sigma_1} = \{(z_1, z_2) : z_1^3 z_2 - 1 = 0\}$ y $\tilde{V} \cap U_{\sigma_2} = \{(z_1, z_2) : z_2 - z_1^2 = 0\}$.

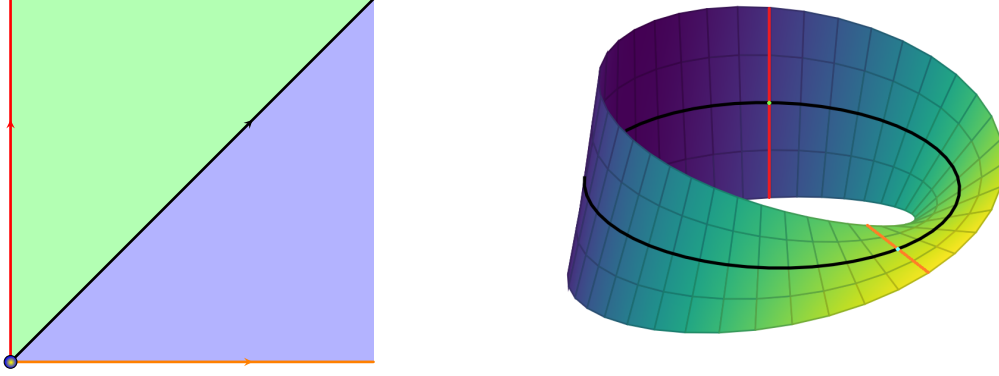


Figura 2.6: Órbitas correspondientes a conos.

Antes de concluir esta sección, veamos una propiedad importante de las órbitas.

Lema 2.5.10. Si τ es la cara de $\sigma \in \mathcal{M}$ dada por los primeros s vértices, tomamos $\rho = \text{Cono}(e^{(s)}, \dots, e^{(n)})$ y $h : U_\sigma \cap X_\Sigma \rightarrow \mathbb{K}$ es una función regular, entonces tenemos que $h|_{\mathcal{O}(\tau) \cap U_\sigma} = h|_\rho$.

Demostración. Se deduce de la proposición 2.3.2. □

2.6. Hipersuperficies Newton no degeneradas

En esta sección veremos cómo se pueden resolver singularidades en hipersuperficies Newton no degeneradas utilizando el abanico de Newton local. Seguiremos el artículo de [AGS], aunque este es un resultado conocido anteriormente.

Definición 2.6.1. Diremos que $0 \in V = V(f)$ es una singularidad *Newton no degenerada* de la hipersuperficie afín V si para toda cara C del poliedro de Newton $\text{NP}(f)$ la hipersuperficie $V(f|_C)$ no tiene singularidades fuera de los hiperplanos coordenados.

Teorema 2.6.2. Sea $0 \in V = V(f)$ una singularidad Newton no degenerada y sea Σ un refinamiento regular del abanico de Gröbner local $\Sigma(f)$. Entonces

la transformada estricta $\tilde{V}$ de V por la modificación tórica $\pi : X_\Sigma \rightarrow \mathbb{K}^n$ es no singular.

Demostración. Sea Σ un refinamiento regular del abanico de Gröbner local $\Sigma(f)$, que sabemos que existe por el teorema 2.2.6. Veamos que $\tilde{V}$ es no singular.

Ya sabemos que los puntos $y \in \tilde{V}$ tales que $\pi(y) \in (\mathbb{K}^*)^n$ son regulares, ya que V es Newton no degenerada y por definición $V = V(f|_{\text{NP}(f)})$ no tiene singularidades en $(\mathbb{K}^*)^n$.

Tomemos ahora un punto $y \in \tilde{V}$ que se proyecte sobre algún hiperplano coordinado. Por lo tanto alguna coordenada de $\pi(y)$ se anula. Como $\pi|_{U_\sigma}$ es una transformación monomial y sabiendo que alguna coordenada de $\pi(y)$ se anula, tenemos que también se anula alguna coordenada de y en algún abierto afín U_σ al que pertenezca. Podemos elegir el orden de los generadores de $\sigma = \text{Cono}(M) \in \mathcal{M}$ para que tengamos que

$$y = (0, \dots, 0, y_{s+1}, \dots, y_n) \in U_\sigma, \text{ con } y_j \neq 0.$$

Sea $\tau \leq \sigma$ la cara que cumple que $y \in U_\sigma \cap \mathcal{O}(\tau)$. Sabemos que $\tau \neq \{0\}$ porque $\pi(y) \notin (\mathbb{K}^*)^n$.

Recordemos que σ es un cono bueno para f porque es un cono de Σ , que es refinamiento regular de $\Sigma(f)$ y entonces σ debe estar contenido en un cono de $\Sigma(f)$. Por la proposición 2.4.3 tenemos que $\text{NP}(f \circ \phi_{M^t})$ tiene un único vértice α . Por lo tanto podemos escribir $f \circ \phi_{M^t} = \mathbf{x}^\alpha h$ con $h(0) \neq 0$. Como $\pi|_{U_\sigma} = \phi_{M^t}$ tenemos que $\tilde{V} \cap U_\sigma = V(h)$. Además $\tau \neq \sigma$ porque $0 \notin V(h)$ y entonces $\{0\} = \mathcal{O}(\sigma) \cap U_\sigma$ tiene intersección vacía con $\tilde{V} \cap \mathcal{O}(\tau)$.

Si definimos $\rho = \text{Cono}(e^{(s+1)}, \dots, e^{(n)})$, tenemos que $h|_{\mathcal{O}(\tau) \cap U_\sigma} = h|_\rho$ gracias al lema 2.5.10. Además, por la proposición 2.3.2 concluimos que $h|_\rho = h(0, \dots, 0, x_{s+1}, \dots, x_n)$. Como este polinomio solo depende de las últimas variables podemos escribir $h(y) = h|_\rho(1, \dots, 1, y_{s+1}, \dots, y_n)$.

Ahora vamos a terminar la prueba. Gracias a la proposición 2.4.4 tenemos que

$$\mathbf{x}^\alpha \cdot h|_\rho = (\mathbf{x}^\alpha h)|_{\alpha+\rho} = f \circ \phi_{M^t}|_{\alpha+\rho} = f|_{\text{Cara}_\tau(f)} \circ \phi_{M^t}.$$

Por definición de Newton no degenerada sabemos que $V(f|_{\text{Cara}_\tau(f)})$ no tiene singularidades fuera de los hiperplanos coordinados de $\mathbb{K}^n$. Además, ϕ_{M^t} es birregular fuera de los hiperplanos coordinados (proposición 2.4.2). Por lo tanto $V(h|_\rho)$ no puede ser singular en el punto $(1, \dots, 1, y_{s+1}, \dots, y_n)$ ya que está en $(\mathbb{K}^*)^n \cap U_\sigma$. Es decir, existe un $j > s$ (por depender $h|_\rho$ solo de las últimas variables) tal que

$$\frac{\partial h|_\rho}{\partial x_j}(1, \dots, 1, y_{s+1}, \dots, y_n) \neq 0.$$

De donde concluimos que el punto $y \in \tilde{V}$ no es singular dado que

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(y) = \frac{\partial h|_\rho}{\partial x_j}(y) = \frac{\partial h|_\rho}{\partial x_j}(1, \dots, 1, y_{s+1}, \dots, y_n) \neq 0.$$

□

2.7. Abanico local de ideales no principales

Antes de la sección final de este capítulo vamos a dar la definición de abanico de Gröbner local para ideales no principales.

Definición 2.7.1. Siguiendo la notación de [AGS] dado $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ definimos la *parte ω -inicial* de un polinomio $\mathfrak{In}_\omega(f) = \sum_{\alpha \in \varepsilon: \langle \omega, \alpha \rangle = \nu_\omega(f)} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ y de un ideal $\mathfrak{In}_\omega(I) = \langle \mathfrak{In}_\omega(f) : f \in I \rangle$. Desde este punto de vista local definimos los *conos de Gröbner* como

$$\mathfrak{C}_\omega(I) = \overline{\{u \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{In}_u(I) = \mathfrak{In}_\omega(I)\}}.$$

De hecho se tiene que $\mathfrak{In}_\omega f = f|_{\text{Cara}_\omega(f)} = f|_{\text{Cara}_{-\omega} \text{NP}(f)} = \text{in}_{-\omega}(f)$.

Podemos definir el *abanico de Gröbner local* de I como el refinamiento común $\Sigma(I) = \mathbb{R}_{\geq 0}^n \wedge \{\mathfrak{C}_\omega(I)\}_{\omega \in \mathbb{R}^n}$. Se puede ver que $\Sigma(I)$ es un abanico poliédrico por un razonamiento similar al que se ha seguido con $\text{GF}(I)$, el abanico global.

Proposición 2.7.2. Dado un polinomio no nulo, tenemos que $\Sigma(f) = \Sigma(\langle f \rangle)$.

Demostración. Recordemos que hemos definido $\Sigma(f)$ en 2.3.3 y vimos que es un abanico en el teorema 2.3.6. Basta con probar la igualdad entre los conos de Gröbner $\sigma_{\text{Cara}_\omega(f)} = \mathfrak{C}_\omega\langle f \rangle$ de cada abanico.

Por la proposición 2.3.8, tenemos que $u \in \sigma_{\text{Cara}_\omega(f)}$ si y solo si $\text{Cara}_\omega(f) \subseteq \text{Cara}_u(f)$. Lo que equivale a que todos los términos de $\mathfrak{In}_\omega(f)$ están en $\mathfrak{In}_u(f)$. Esto a su vez equivale a que $\mathfrak{In}_\omega(f) = \mathfrak{In}_\omega(\mathfrak{In}_u(f))$. Por último, de forma análoga a lo visto en (1.2) tenemos que la igualdad anterior es equivalente a que $u \in \mathfrak{C}_\omega\langle f \rangle$. □

Vamos a definir la versión local de las formas iniciales vistas anteriormente para órdenes monomiales globales.

Definición 2.7.3. Dados un orden monomial $\prec$ y un polinomio $f \in R$, el *término inicial* de f (en el contexto local) es el mínimo término que tiene f y lo denotamos $\mathfrak{In}_\prec f$. Dado un ideal I definimos

$$\mathfrak{In}_\prec(I) = \{\mathfrak{In}_\prec f : f \in I\} \text{ y } \mathfrak{C}_\prec(I) = \overline{\{u \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{In}_u(I) = \mathfrak{In}_\prec(I)\}}.$$

Definición 2.7.4. En el contexto local diremos que un cono τ es *bueno* para $I \subseteq R$ si está contenido en un cono $\mathfrak{C}_\omega(I)$. Dado un cono bueno τ para I tiene sentido definir

$$\mathfrak{Jn}_\tau I = \mathfrak{Jn}_v I \text{ para cualquier } v \in \tau.$$

Al igual que vimos en el corolario 1.2.11 se puede probar que todos los conos $\mathfrak{C}_\omega(I)$ son de la forma $\mathfrak{C}_\omega(I)$. Para acabar esta sección se enuncia una proposición que dejaremos sin probar.

Proposición 2.7.5. [AGS, proposición 9.3] Sea $I \subseteq R$ un ideal y sea σ un cono bueno para I de dimensión maximal. Existe un sistema de generadores $G_\sigma = \{g_1, \dots, g_r\}$ de I que cumple las siguientes propiedades:

- σ es un cono bueno para todo $g \in G_\sigma$.
- $\mathfrak{Jn}_\omega I = \langle \mathfrak{Jn}_\omega g_1, \dots, \mathfrak{Jn}_\omega g_r \rangle$ para todo $\omega \in \sigma$.

2.8. Variedades Newton no degeneradas

La novedad del artículo [AGS] es extender la resolución de singularidades para variedades dadas por un ideal *Newton no degenerado* cualquiera a través de una modificación tórica asociada al abanico de Gröbner. Vamos a exponer la demostración omitiendo algún detalle que se sale del rango de este TFM.

Definición 2.8.1 (Caso intersección completa). Dada una variedad afín $V(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathbb{K}^n$ de dimensión $n - k$, decimos que es *Newton no degenerada* si para todo $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ se tiene que la variedad

$$V(\mathfrak{Jn}_\omega f_1, \dots, \mathfrak{Jn}_\omega f_k)$$

es de dimensión $n - k$ y no tiene singularidades en $(\mathbb{K}^*)^n$.

Entre las limitaciones de esta definición está el hecho de que solo es válida para variedades de intersección completa. Además, la propiedad de ser variedad Newton no degenerada depende de los generadores del ideal, no solo de la variedad.

Definición 2.8.2 (Caso general). Sea $I \subseteq R$ un ideal. Decimos que la singularidad $0 \in V(I)$ es *Newton no degenerada* o que el ideal es *Newton no degenerado* si para cada $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, la variedad dada por $\mathfrak{Jn}_\omega(I)$ no tiene singularidades fuera de los hiperplanos coordenados.

Teorema 2.8.3. Sean $I \subseteq R$ un ideal y Σ un refinamiento regular del abanico de Gröbner local $\Sigma(I)$. Si $0 \in V = V(I)$ es una singularidad Newton no degenerada, entonces el transformado estricto $\tilde{V}$ por la modificación tórica asociada a Σ es no singular.

Demostración. Como ocurre en la demostración del teorema 2.6.2, el caso sencillo se da para los puntos $y \in \tilde{V}$ con $\pi(y)$ fuera de los hiperplanos coordenados. Es decir, $y \in \tilde{V} \cap \mathcal{O}(\tau)$ donde $\tau = \{0\} \in \Sigma$ y $\mathcal{O}(\tau)$ es el toro maximal en X_Σ . Sabemos que y es no singular ya que por definición de Newton no degenerada $\pi(y)$ no es singular, dado que está en $V \cap (\mathbb{K}^*)^n = V(\mathfrak{I}_{\mathbf{n}_\omega} I) \cap (\mathbb{K}^*)^n$ donde $\omega = 0$.

Falta comprobar el caso $\tau \neq \{0\}$, $\dim \tau = s$. Es decir, $y \in \tilde{V} \cap \mathcal{O}(\tau) \cap U_\sigma$ con $\tau \leq \sigma$, $y = (0, \dots, 0, y_{s+1}, \dots, y_n)$, $y_i \neq 0$ para $i = s+1, \dots, n$, eligiendo un orden adecuado de los generadores del cono σ maximal. Llamemos $y' = (1, \dots, 1, y_{s+1}, \dots, y_n)$ al punto que también se utilizó en la demostración del caso de ideales principales. Sabemos que $y' \in U_\sigma \cap (\mathbb{K}^*)^n \subseteq \mathcal{O}(\{0\})$.

Queremos aplicar el criterio jacobiano (ver por ejemplo [GP, corolario 5.6.14]) en y' , que es un punto no singular como se vio en el caso anterior. Antes queremos ver que el jacobiano en y' es el mismo que en y . Tomemos un sistema de generadores $G_\sigma = \{g_i\}_{i=1}^r$ de I asociado a σ que cumpla la proposición 2.7.5.

Dado un elemento $g \in G_\sigma$ y la matriz M de generadores de σ tenemos que σ es bueno para g por la proposición 2.7.5. Aplicando la proposición 2.4.3 y la proposición 2.3.2 tenemos que $g \circ \phi_{M^t} = \mathbf{x}^\alpha h$ con $h(0) \neq 0$, siendo α el único vértice de $\text{NP}(g \circ \phi_{M^t})$. Definimos el conjunto de los h asociados a G_σ

$$H_{G_\sigma} = \{h \in R : h(0) \neq 0, g \circ \phi_{M^t} = \mathbf{x}^\alpha h \text{ para } g \in G_\sigma, \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n\}.$$

Veamos que este conjunto $H_{G_\sigma} = \{h_i\}_{i=1}^r$ cumple que $\tilde{V} \cap U_\sigma = V(h_1, \dots, h_r)$. Es más sencillo probar que en la carta U_σ tenemos $V(H_{G_\sigma}) \cap (\mathbb{K}^*)^n = \pi^{-1}(V) \cap (\mathbb{K}^*)^n$. Esto es porque si z está en $\pi^{-1}(V) \cap (\mathbb{K}^*)^n$ sabemos que $g_i \circ \pi|_{U_\sigma}(z) = 0$ para todo $i = 1, \dots, r$. Como, por definición, $\pi|_{U_\sigma} = \phi_{M^t}$ en las coordenadas del abierto afín, tenemos que $g_i \circ \phi_{M^t}(z) = \mathbf{z}^{\alpha_i} h_i(z) = 0$. Claramente $\mathbf{z}^{\alpha_i} \neq 0$ dado que sabemos que $z \in (\mathbb{K}^*)^n$. Luego tenemos $h_i(z) = 0$. La contención opuesta es inmediata. Por lo tanto podemos tomar las adherencias a ambos lados de $V(H_{G_\sigma}) \cap (\mathbb{K}^*)^n = \pi^{-1}(V) \cap (\mathbb{K}^*)^n$ y deducir que $\tilde{V} \cap U_\sigma = V(h_1, \dots, h_r)$ en U_σ .

Ahora trabajaremos en $V(H_{G_\sigma})$. Procediendo como en el caso de ideales principales definimos el cono $\rho = \text{Cono}(e^{(s+1)}, \dots, e^{(n)})$. Gracias al lema 2.5.10 tenemos que $h_i|_{U_\sigma \cap \mathcal{O}(\tau)} = h_i|_\rho$ para cada i . Es decir, en $U_\sigma \cap \mathcal{O}(\tau)$ las funciones h_i no dependen de las primeras s variables, y por lo tanto $h_i(y) = h_i|_\rho(y) = h_i|_\rho(y')$.

Por la proposición 2.4.4 tenemos que para cada i

$$\mathbf{x}^{\alpha_i} h_i|_{\rho} = g_i \circ \phi_{M^t}|_{\alpha_i+\rho} = \mathfrak{In}_{\tau} g_i \circ \phi_{M^t}. \quad (2.1)$$

Ahora, por [AGS, proposición 10.6] y [AGS, proposición 12.1] que omitiremos en esta memoria tenemos que

$$\dim V = \dim V(\mathfrak{In}_{\tau} g_1, \dots, \mathfrak{In}_{\tau} g_r) = \dim V(h_1|_{\rho}, \dots, h_r|_{\rho}).$$

Por las propiedades que cumple G_{σ} y la definición de singularidad Newton no degenerada sabemos que $V(\mathfrak{In}_{\tau} g_1, \dots, \mathfrak{In}_{\tau} g_r)$ no tiene singularidades fuera de los hiperplanos coordenados. El punto $y' \in V(h_1|_{\rho}, \dots, h_r|_{\rho})$, que está en el toro maximal $U_{\sigma} \cap (\mathbb{K}^*)^n$, es no singular ya que queda proyectado sobre $\pi(y') \in V(\mathfrak{In}_{\tau} g_1, \dots, \mathfrak{In}_{\tau} g_r) \cap (\mathbb{K}^*)^n$ por (2.1).

Ahora aplicamos el criterio jacobiano. Como las funciones no dependen de las primeras s coordenadas tenemos que $\dim V = \operatorname{rg} \left(\frac{\partial h_j|_{\rho}}{\partial x_i} \right) (y') = \operatorname{rg} \left(\frac{\partial h_j|_{\rho}}{\partial x_i} \right)_{i=s+1, \dots, r} (y')$. Nótese que se tienen las siguientes igualdades

$$\left(\frac{\partial h_j|_{\rho}}{\partial x_i} \right)_{i=s+1, \dots, r} (y') = \left(\frac{\partial h_j|_{\rho}}{\partial x_i} \right)_{i=s+1, \dots, r} (y) = \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right)_{i=s+1, \dots, r} (y).$$

Gracias a lo anterior hemos probado que los puntos y de $V(H_{G_{\sigma}})$ son no singulares, porque tampoco es singular el punto y' asociado. Recordemos que $\tilde{V} \cap U_{\sigma} = V(H_{G_{\sigma}})$, por lo tanto $\tilde{V}$ es no singular. $\square$

Bibliografía

- [AGS] AROCA, Fuensanta, Mirna GÓMEZ, y Khurram SHABBIR. «Toric Modification of Newton non-degenerate ideals.» *RACSAM*, 107, (2012), 221–239. URL <https://doi.org/10.1007/s13398-012-0100-8>.
- [BG] BRUNS, W., y J. GUBELADZE. *Polytopes, Rings, and K-Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer New York, 2009. URL <https://doi.org/10.1007/b105283>.
- [CLO] COX, David A., John B. LITTLE, y Donal O’SHEA. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, tomo 124 de *Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer Cham, 2011, 4^a ed^{ón}. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16721-3>.
- [CLS] COX, David A., John B. LITTLE, y Henry K. SCHENCK. *Toric varieties*, tomo 124 de *Graduate Studies in Mathematics*. AMS, Providence, RI, 2011. URL <https://doi.org/10.1090/gsm/124>.
- [DFX] DELGADO, Félix, Concha FUERTES, y Sebastián XAMBÓ. *Introducción al Álgebra*. Editorial Paraninfo, Madrid, 2021. Segunda edición.
- [Ewald] EWALD, G. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1992. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4044-0>.
- [FJT] FUKUDA, Komei, Anders N. JENSEN, y Rekha R. THOMAS. «Computing Gröbner Fans.» *Math. Comp.*, 76, n^o 260, (2007), 2189–2212. URL <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-07-01986-2>.

BIBLIOGRAFÍA

- [GP] GREUEL, Gert-Martin, y Gerhard PFISTER. *A Singular Introduction to Commutative Algebra*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2007, 2^a ed^{ón}.
- [Jensen] JENSEN, Anders N. «A Non-Regular Grobner Fan.» *Discrete Comput. Geom.*, 37, (2007), 443–453. URL <https://doi.org/10.1007/s00454-006-1289-0>.
- [Gfan] —. «Gfan, a software system for Gröbner fans and tropical varieties. Version 0.6.» Disponible en <http://home.imf.au.dk/jensen/software/gfan/gfan.html>, 2017.
- [MR] MORA, Teo, y Lorenzo ROBBIANO. «The Gröbner fan of an ideal.» *J. Symbolic Comput.*, 6, n^o 2, (1988), 183–208. URL [https://doi.org/10.1016/S0747-7171\(88\)80042-7](https://doi.org/10.1016/S0747-7171(88)80042-7).
- [SageMath] SAGE DEVELOPMENT TEAM. *Sage 10.3 Reference Manual: Groebner Fans*. Última consulta: 16/06/2024, URL https://doc.sagemath.org/html/en/reference/discrete_geometry/sage/rings/polynomial/groebner_fan.html.
- [Schrijver] SCHRIJVER, Alexander. *Theory of linear and integer programming*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1986. A Wiley-Interscience Publication.
- [Sturmfels] STURMFELS, B. *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, tomo 8 de *University lecture series*. American Mathematical Society, 1996.