Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Matemáticas

EL MÉTODO DE INMERSIÓN HOLOMORFA PARA EL PROBLEMA DE FLUJO DE CARGAS

Autor: Álvaro Gutiérrez Sánchez
Tutores: Álvaro Samperio Valdivieso y Javier Sanz Gil
Año 2025

Resumen

Uno de los problemas centrales en el ámbito de las redes eléctricas de corriente alterna es el problema de flujo de carga. Este problema consiste en obtener la solución compleja físicamente factible de un sistema de ecuaciones no lineales para obtener el valor del voltaje en los nodos de la red, si existe. Existen diversos métodos que se han propuesto para resolver este problema, incluyendo métodos iterativos como el de Newton-Raphson o de Gauss-Seidel, métodos algebraicos basados en bases de Groebner y homotopías polinómicas. Sin embargo, estos problemas tienen problemas de convergencia o de alto coste computacional en algunos casos.

Como alternativa a estos métodos se desarrolla el método de inmersión holomorfa propuesto en [23]. Este método consiste en realizar una modificación del problema añadiendo una variable auxiliar, resolver dicha modificación para un cierto valor de la variable auxiliar y realizar una continuación analítica de esa solución para obtener la solución del problema original. Este método tiene buenas propiedades de convergencia cuando el ideal generado por los polinomios que definen el sistema de ecuaciones modificado cumple una determinada propiedad algebraica, que está relacionada con la existencia de cierta curva algebraica. Matemáticamente, se trata de un método multidisciplinar, basado en técnicas de análisis complejo y geometría algebraica computacional.

Abstract

One of the central problems in the field of alternating-current power networks is the load-flow problem. It consists in obtaining, if it exists, the physically admissible complex solution of a nonlinear system of equations in order to determine the voltage at the network nodes. Various methods have been proposed to solve this problem, including iterative methods such as Newton–Raphson and Gauss–Seidel, and algebraic methods based on Groebner bases and polynomial homotopies. However, these methods can exhibit convergence difficulties or high computational cost in certain cases.

As an alternative to these approaches, the holomorphic embedding method proposed in [23] is developed. This method modifies the problem by introducing an auxiliary variable, solves the modified system for a certain value of that variable, and then performs an analytic continuation of that solution to recover the solution of the original problem. The method enjoys favorable convergence properties when the ideal generated by the polynomials defining the modified system satisfies a specific algebraic condition, which is related to the existence of a certain algebraic curve. Mathematically, it is a multidisciplinary method grounded in techniques from complex analysis and computational algebraic geometry.

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es la descripción del denominado método de inmersión holomorfa para la resolución del problema de flujo de cargas. Este es un asunto central en el estudio de las redes eléctricas, y consiste en resolver un sistema de ecuaciones no lineales en varias variables complejas que relacionan el voltaje y la potencia inyectada en cada nodo de una red eléctrica.

Consideraremos en este trabajo redes de corriente alterna (CA). Este tipo de redes se tratan de sistemas eléctricos que transportan y distribuyen energía mediante voltajes y corrientes que varían periódicamente en el tiempo describiendo una función sinusoidal. En la práctica, podemos representar estas funciones sinusoidales dependientes del tiempo mediante números complejos.

Para modelar redes de corriente alterna (CA) existen diferentes alternativas, dependiendo de las características de la red. En este trabajo, se estudia el caso de redes trifásicas balanceadas en las que todas las líneas son inductivas y “cortas” (es decir, su longitud es menor a 80 km).

En ese caso, la susceptancia a tierra (pérdida de energía hacia la tierra) de las líneas puede despreciarse y el modelo matemático de la red es un grafo en el que cada conexión física entre un par de vértices j y k se representa mediante una única arista $\{jk\}$ caracterizada por un peso complejo $a_{j,k}$ con parte real no negativa y parte imaginaria no positiva, llamado *admitancia*.

Si consideramos una red eléctrica de $n+1$ nodos las variables de estado que describen la red son los voltajes V_j y las potencias inyectadas S_j en cada nodo $j \in \{0, \ldots, n\}$.

Las ecuaciones de flujo de cargas se formulan igualando la suma de las corrientes que salen de un nodo a través de todas las líneas que lo conectan con la potencia total inyectada S_j en el nodo j. El resultado es un sistema de $n+1$ ecuaciones en variables y coeficientes complejos, una para cada nodo.

Para resolver las ecuaciones de flujo de cargas clasicamente se han utilizado métodos numéricos iterativos. [11] Por un lado, el método de Gauss-Seidel es un algoritmo que destaca por su fácil implementación y bajo costo computacional, sin embargo, su convergencia hacia la solución es lenta. El método de Newton-Raphson también es iterativo, pero tiene convergencia cuadrática cerca de la solución, lo que le permite alcanzar el resultado con muchas menos iteraciones que el método de Gauss-Seidel, siendo por ello el método estándar en la industria para la resolución del problema de flujo de cargas. Ambos métodos requieren de una buena aproximación inicial del valor de los voltajes para asegurar la convergencia. Además, estos métodos pueden fallar cuando existen soluciones múltiples pues no existe una forma de seleccionar hacia qué solución de las ecuaciones de flujo de cargas se quiere converger y no todas sus soluciones son físicamente factibles.

Existen también métodos no iterativos para resolver el problema de flujo de cargas. En particular, el método de continuación polinómica homotópica numérica (NPHC) obtiene las soluciones de las ecuaciones de flujo de carga a través de una deformación continua (homotopía) entre un modelo polinómico simple y el sistema de ecuaciones de flujo de carga real. Por otro lado, existen métodos algebraicos basados en la utilización de bases de Groebner para reestructurar las las ecuaciones de flujo de carga en una forma triangular a través de técnicas de eliminación polinómica, [12], [13]. La limitación fundamental de los métodos no iterativos es el elevado costo computacional que conllevan, siendo posible utilizar estas técnicas de resolución para redes con número reducido de nodos.

El método de inmersión holomorfa para el problema de flujo de cargas, llamdo HELM por sus siglas en inglés, se propone como un alternativa a los métodos clásicos de resolución, superando las limitaciones teóricas de los métodos iterativos y las prácticas de los métodos no iterativos. El HELM fue inicialmente propuesto por Antonio Trias en [23] en el año 2012. El método propone sumergir el sistema de ecuaciones de flujo de carga en una familia paramétrica de sistemas que denominaremos *inmersión*, añadiendo un parámetro complejo ξ, de forma que la solución del sistema en un estado de referencia que se obtiene para un valor del parámetro $\xi = \xi_0$, sea sencilla de calcular. Esta solución corresponde al funcionamiento de la red eléctrica en caso de no haber inyección de potencia en los nodos. Una vez obtenida esta solución de referencia, el método espera ser capaz de extender esta solución más allá de las condiciones de referencia y obtener a partir de esta la solución del problema original.

Es aquí donde entra en juego el concepto de holomorfía: si las ecuaciones de la inmersión definen funciones holomorfas en un entorno de la solución en el estado de referencia y se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita, podremos expresar el voltaje en cada nodo, V_j, como función holomorfa de ξ en un entorno del estado de referencia. En un abuso de notación denotaremos a estas funciones implícitas por $V_j(\xi)$. Así, la forma de obtener la solución al sistema original será prolongar analíticamente cada una de estas funciones hasta el valor del parámetro $\xi = \xi_1$ que haga recuperar sistema el original. En el capítulo 2, se estudian las características que debe tener una inmersión holomorfa de las ecuaciones de flujo de cargas para poder recuperar la solución al problema de flujo de carga a partir de la solución del problema inmerso en ξ_1. Una de las condiciones suficientes que se deduce es $\xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}$. Además, es necesario realizar la prolongación analítica hasta ξ_1 a lo largo del intervalo $[\xi_0, \xi_1] \subset \mathbb{R}$. Típicamente, $\xi_0 = 0$ y $\xi_1 = 1$.

El sistema tendrá soluciones múltiples en el estado de referencia. Sin embargo, existe una única solución de referencia tal que $V_j(\xi_0) \neq 0$ para cada $0 \leq j \leq n$, es decir, tal que el voltaje en cada nodo sea no nulo en ausencia de inyección de potencia. Sea $\boldsymbol{z^0} \in \mathbb{C}^{n+1}$ esta solución. El HELM propone realizar la prolongación analítica de las funciones $V_j(\xi)$ con $V_j(\xi_0) = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{0}}_j$ para cada $0 \leq j \leq n$.

Puesto que el voltaje en cada nodo, V_j, se expresa como función holomorfa de ξ en un entorno del estado de referencia, podemos calcular el desarrollo de Taylor de estas funciones ímplicitas, en torno a este punto,

$$V_j(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{j,r}\,(\xi - \xi_0)^r, \quad j = 0, \ldots, n, \tag{0.0.1}$$

El cálculo de los coeficientes $c_{j,r}$ se efectuará a través de relaciones de recurrencia deducidas de la expresión de la inmersión holomorfa de las ecuaciones de flujo de cargas, hasta un orden d. Normalmente la región de convergencia de la serie (0.0.1) es menor que $|\xi_1-\xi_0|$, en consecuencia, debemos prolongar analíticamente la función $V_j(\xi)$ para obtener la solución $V_j(\xi_1)$ para cada $1 \leq j \leq n$. Para esto, utilizaremos la técnica de aproximación de Padé. Fijado un nodo j los aproximantes de Padé de orden (ℓ, m) a la función implícita $V_j(\xi)$ en el punto $\xi = \xi_0$ se tratan de funciones racionales,

$$[\ell/m]_{V_j}(\xi) = \frac{P_\ell(\xi)}{Q_m(\xi)},$$

con P_ℓ y Q_m polinomios complejos en la variable ξ de grado a lo sumo ℓ y m, respectivamente, tales que

$$V_j(\xi) - [\ell/m]_{V_j}(\xi) = \mathcal{O}((\xi-\xi_0)^{\ell+m+1}), \quad \xi \to \xi_0. \tag{0.0.2}$$

Es decir, los desarrollos de Taylor en torno al punto ξ_0 de las funciones $[\ell/m]_{V_j}$ y V_j coinciden hasta orden $\ell + m$. Al aumentar ℓ y m aumenta el orden de interpolación a la función implícita $V_j(\xi)$. Conocidos los coeficientes $c_{j,r}$, $r \geq 0$ del desarrollo de Taylor de la función V_j, se deriva de la condición de interpolación (0.0.2) un sistema de ecuaciones lineales que podemos resolver para obtener los coeficientes de los polinomios P_ℓ y Q_m. Así, podemos obtener el valor de $V_j(\xi_1)$ como

$$\lim_{\ell,m\to\infty} [\ell/m]_{V_j}(\xi_1), \tag{0.0.3}$$

en caso de que dicho límite exista. Si $\ell+m = d$ y $V_{j,d} = [\ell/m]_{V_j}(\xi_1)$, numéricamente, hemos de fijar una tolerancia $\epsilon > 0$ y aumentar el orden de aproximación de los aproximantes de Padé, para lo que es necesario calcular primero un nuevo coeficiente $c_{j,r}$ de la serie de potencias (0.0.1), hasta que sustituyendo en las ecuaciones de flujo de carga el valor del voltaje en cada nodo por la aproximación $V_{j,d}$, el módulo del error sea menor que la tolerancia, ϵ.

La parte más técnica del trabajo consiste en asegurar cuándo existe el límite (0.0.3). La función implícita $V_j(\xi)$ es analítica y univaluada en un entrono de ξ_0, sin embargo, si tratamos de prolongarla analíticamente en $\widehat{\mathbb{C}}$, podemos encontrarnos con puntos de ramificación. Si conociéramos la expresión de la función implícita $V_j(\xi)$ en todo el plano complejo para preservar el carácter univaluado de $V_j(\xi)$ uniríamos sus puntos de ramificación a través de un conjunto de arcos Γ y trataríamos de prolongar analíticamente la función a $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$. Sin embargo, solamente conocemos el desarrollo en serie de potencias hasta orden d de la función V_j en un entorno de ξ_0. En este sentido, el resultado clave del trabajo es el *teorema de Stahl*. Este teorema establece que

1. Existe una elección de cortes de rama Γ que garantiza el carácter univaluado de V_j, de modo que el dominio resultante $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$, es el mayor posible. La medida precisa de esta maximalidad se establece mediante el concepto de la *capacidad logarítmica*. En otras palabras, este resultado afirma que existe una única elección de cortes Γ con capacidad logarítmica mínima.

2. La sucesión de aproximantes de Padé $\{[\ell_d/m_d]_{V_j}\}_{d=1}^{\infty}$ converge en capacidad hacia la función en el dominio extremal D^*, para cualquier sucesión de índices que satisfaga

$$\ell_d + m_d \to \infty \quad \text{y} \quad \frac{\ell_d}{m_d} \to 1 \quad \text{cuando } d \to \infty.$$

En caso de que este conjunto de cortes de rama Γ de capacidad logarítmica mínima no interfiera con el segmento del eje real $[\xi_0, \xi_1]$, podremos calcular la solución al problema de flujo de carga a través del método de inmersión holomorfa.

En este sentido, cabe plantearse en que situaciones tendremos "controladas" las singularidades de la función $V_j(\xi)$. Es conocido que si $V_j(\xi)$ es una función algebraica, el conjunto de singularidades de $V_j(\xi)$ es finito. En consecuencia, resulta interesante para la aplicación del método que las funciones implícitas $V_j(\xi)$ tengan la propiedad de ser algebraicas. En el caso particular de realizar una inmersión polinómica en las ecuaciones de flujo de cargas, daremos una condición suficiente desarrollada en [26] que nos permitirá conocer cuando las funciones $V_j(\xi)$ van a ser algebraicas con solamente calcular una base de Groebner del ideal polinómico generado por las ecuaciones de flujo de carga.

La exposición anterior de los pasos del método de inmersión holomorfa no se corresponde exactamente con el planteamiento inicial de Trias. El escaso rigor matemático presente a la hora de justificar la validez teórica del método, ha suscitado correcciones al planteamiento inicial de Trias por parte de otros autores como Wang y Hsiao-Dong en sus artículos [25] y [26]. Este trabajo pretende aunar todos estos esfuerzos y ser una guía de la formalización teórica y el estado de desarrollo del método hasta la fecha.

En el primer capítulo, se detalla la modelización matemática de una red eléctrica a través de la teoría de grafos. Asimismo, se introducen los espacios de funciones sobre conjuntos finitos para representar los valores del voltaje, la potencia inyectada en cada nodo. El laplaciano de la red eléctrica, que se introduce como un operador entre estos espacios, puede utilizarse para describir las leyes físicas que regulan la transmisión de la corriente en una red eléctrica. Además, se presenta el problema de flujo de cargas en estos términos y se discuten las posibles soluciones en el estado de referencia del problema, identificando así, a partir de qué soluciones de referencia es posible trabajar para obtener la solución al problema original.

En el segundo capítulo se introduce la inmersión holomorfa en las ecuaciones de flujo de cargas. Se lleva a cabo un estudio de las características que debe tener una inmersión holomorfa de las ecuaciones de flujo de cargas para poder recuperar la solución al problema de flujo de carga a partir de la solución del problema inmerso en ξ_1. En particular se estudiará la inmersión polinómica, la más utilizada en la práctica, para posteriormente desarrollar la condición suficiente para que las funciones implícitas $V_j(\xi)$ sean algebraicas que se ha introducido anteriormente.

El tercer capítulo está dedicado a la aproximación de Padé. Los aproximantes de Padé de una función f suelen organizarse en una tabla de dimensión $\ell \times m$ en la que la entrada (ℓ, m) es el aproximante de Padé $[\ell, m]_f$, conocida como tabla de Padé. En este capítulo se estudian propiedades relativas a la estructura de la tabla de Padé, que resultan fundamentales para el estudio de la convergencia de estos aproximantes. Además, se detalla el procedimiento a seguir para el cálculo de los coeficientes $c_{j,r}$ de la serie de Taylor de $V_j(\xi)$ hasta orden d de forma recurrente y se explica como calcular posteriormente los aproximantes de Padé a V_j en el punto $\xi_0 = 0$ de orden (ℓ, m) con $\ell + m = d$.

En el cuarto capítulo se introducen los conceptos necesarios para comprender el teorema de Stahl. La teoría en la que se enmarca este teorema es muy variada, y en general, de alto nivel en análisis complejo. Los conceptos de capacidad logarítmica y medida de equilibrio, clásicos de la teoría del potencial en el plano complejo, permiten comprender la distribución los polos de los aproximantes de Padé que se acumulan en curvas o conjuntos de mínima capacidad logarítmica que unen las singularidades de la función, permitiendo la convergencia de los aproximantes de Padé $[\ell/m]_{V_j}$ hacia la función $V_j(\xi)$ en un conjunto de capacidad logarítmica máximo.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a las redes eléctricas. El problema de flujo de cargas

En este primer capítulo, fijaremos la notación y los conceptos fundamentales de la modelización matemática de una red eléctrica. Con este fin, utilizaremos una potente herramienta matemática: la teoría de grafos. En primer lugar, daremos una recopilación de los conceptos de la teoría de grafos necesarios para abordar nuestro problema, que podemos encontrar en detalle en [6] y [19]. Finalmente, explicaremos en qué consiste el problema de flujo de cargas, para abordar su solución en los capítulos posteriores.

1.1. Fundamentos de la teoría de grafos.

En este capítulo X denotará un conjunto finito de cardinal $|X|$. Denotaremos como $[X]^k$ al conjunto de subconjuntos de X de cardinal k. De esta forma, si $|X| = n$, se tiene que $|[X]^k| = \binom{n}{k}$. Por ejemplo, si $X = \{1, 2, 3\}$, tenemos que $[X]^2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Definición 1.1.1. Un *grafo* es un par $G = (X, E)$ donde X es un conjunto finito no vacío y $E \subseteq [X]^2$. Es decir, los elementos de E son subconjuntos de dos elementos de X. Para evitar ambigüedades supondremos siempre que $X \cap E = \emptyset$. Llamamos *vértices* o *nodos* a los elementos de X y *aristas, líneas* o *ejes* a los elementos de E.

Diremos que dos vértices $x, y \in X$ son *adyacentes* o *vecinos* en el grafo dado y escribimos $x \sim y$ si $\{x, y\} \in E$.

Diremos que un vértice $x \in X$ y una línea $e \in E$ son *incidentes* si $x \in e$. Los dos vértices $x, y \in X$ incidentes con el eje $e \in E$ se denominarán *extremos de la línea* e y diremos que e es la línea que une los vértices x e y, denotando esta línea por e_{xy} o, simplemente, xy.

Por último, diremos que dos aristas, $e, f \in E$ son *adyacentes* si tienen un extremo $x \in X$ en común.

Definición 1.1.2. Sea $G = (X, E)$ un grafo. Un *subgrafo* de G es un grafo $G' = (X', E')$ con $X' \subseteq X$ y $E' \subseteq E$. Análogamente, diremos que G es un *supergrafo* de G' y lo denotaremos por $G' \subseteq G$.

Un *camino* en G es un subgrafo $P = (X', E')$ de la forma

$$X' = \{x_0, x_1, ..., x_k\}, \qquad E' = \{e_{x_0x_1}, e_{x_1x_2}, ..., e_{x_{k-1}x_k}\},$$

En este caso, diremos que los vértices x_0 y x_k están unidos por el camino P y los llamaremos *extremos* de P. El resto de vértices, de X', $x_1, ..., x_{k-1}$, serán denominados *vértices internos* de P.

Diremos que G es *conexo* si dados dos vértices cualesquiera de G existe un camino en G uniendo ambos vértices.

1.2. Espacios de funciones sobre conjuntos finitos

Consideremos de nuevo un conjunto finito X, el cual podemos identificar con el conjunto de vértices de un grafo.

Sobre X podemos considerar sendos espacios de funciones reales y complejas, denotados por

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) = \{u : X \longrightarrow \mathbb{K}\},$$

para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ respectivamente. Definimos las operaciones de suma y multiplicación en $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ como

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) \quad \text{y} \quad uv(x) = u(x)v(x),$$

para cada $u, v \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ y $x \in X$. Estas operaciones dotan al espacio $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ de una estructura de álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Además,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}(X, \mathbb{K})) = |X|.$$

En consecuencia, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{|X|}$.

Definimos el *soporte* de $u \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ como el conjunto $supp(u) = \{x \in X : u(x) \neq 0\}$.

Dado $u \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ podemos escribir $u = \mathrm{Re}(u) + i\mathrm{Im}(u)$, donde $\mathrm{Re}(u), \mathrm{Im}(u) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ son las *partes reales e imaginarias* de u, e i denota la unidad imaginaria. Por tanto considerando $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ como un álgebra sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(V, \mathbb{R})$ es una subálgebra de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ constituida por las funciones con parte imaginaria nula. Además, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(X, \mathbb{C})) = 2|X|$.

Análogamente se definen sobre $X \times X$ los espacios de funciones $\mathcal{F}(X \times X, \mathbb{K})$ para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, los cuales constituyen sendas álgebras sobre $\mathbb{K}$, con

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}(X \times X, \mathbb{K})) = |X|^2.$$

De nuevo $\mathcal{F}(X \times X, \mathbb{R})$ es una subálgebra de $\mathcal{F}(X \times X, \mathbb{C})$ y el soporte de $a \in \mathcal{F}(X \times X, \mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ es el conjunto $supp(a) = \{(x, y) \in X \times X : a(x, y) \neq 0\}$. Definimos también el espacio $\mathcal{F}(X \times X, \mathbb{R}^+) = \{a : X \times X \to [0, \infty)\}$.

1.3. Redes eléctricas. El problema de flujo de cargas

Definición 1.3.1. Una *red eléctrica* es un par $\Gamma = (X, a)$ donde X es un conjunto finito al que llamaremos *conjunto de nodos* y a es un elemento de $\mathcal{F}(X \times X, \mathbb{C})$, que denominaremos *función de admitancia*, cumpliendo las siguientes propiedades:

1. $a = c - ib$ donde c y $b \in \mathcal{F}(X \times X, \mathbb{R}^+)$.
2. c y b son simétricas y $c(x,x) = b(x,x) = 0$, para cada $x \in X$.

Una red eléctrica $\Gamma = (X, a)$ tiene un grafo asociado $G(\Gamma) = (X, E(\Gamma))$, donde

$$E(\Gamma) = \{e_{xy} : (x,y) \in supp(a)\},$$

que se llama *topología de la red*. Notemos que $E(\Gamma)$ está bien definido, pues por la simetría de la función de admitancia, $a(x,y) \neq 0$ si y solo si $a(y,x) \neq 0$. Además, $G(\Gamma)$ se trata de un grafo simple pues por hipótesis $a(x,x) = 0$ para cada $x \in V$. Se dice que una red eléctrica es conexa si su grafo asociado es conexo. En este trabajo solamente trataremos con redes eléctricas conexas, a no ser que se indique lo contrario. Para cada $e_{xy} \in E(\Gamma)$, denominamos *admitancia de la línea xy* al valor

$$a(e_{xy}) = a(x,y) = a(y,x) \neq 0.$$

Definición 1.3.2. Sea $\Gamma = (X, a)$ una red eléctrica. El *laplaciano de* Γ es el endomorfismo de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ definido por

$$\mathfrak{L}(u)(x) = \sum_{y \in X} a(x,y)\big(u(x) - u(y)\big).$$

Observación 1.3.3. Tras fijar un orden $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en el conjunto de vértices X de una red eléctrica $\Gamma = (X, a)$, podemos identificar el espacio de endomorfismos de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ con el espacio de las matrices cuadradas de dimensión n con coeficientes complejos, $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Denotamos por Y a la matriz asociada con el laplaciano de Γ. Si $a_{jk} \equiv a(x_j, x_k)$, Y será la matriz simétrica definida por

$$Y_{jk} = \begin{cases} -a_{jk}, & \text{si } \{x_j, x_k\} \in E, \\ \displaystyle\sum_{t \neq j} a_{jt}, & \text{si } j = k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Un resultado clásico en este ámbito establece que si $\Gamma = (X, a)$ es una red eléctrica con n nodos y d componentes conexas, el rango de la matriz del laplaciano es $n - d$. [8, p. 279]. En el caso de redes conexas, que será el caso de estudio de este trabajo, el rango de la matriz del laplaciano es $n - 1$ y en consecuencia el 0 es un autovalor simple de la matriz Y. Además, por construcción los autovectores asociados al 0 son los vectores constantes.

La matriz Y será un elemento fundamental en la descripción de la topología y el funcionamiento de una red eléctrica y la denominaremos *matriz de admitancias*.

En una red eléctrica $\Gamma = (X, a)$ cada nodo tiene asociados tres parámetros complejos, el *voltaje o potencial*, *la corriente inyectada* y la *potencia inyectada*. El valor de cada uno de estos parámetros en toda la red puede representarse por las funciones $u, \psi, s \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$

respectivamente. Llamamos *potencia activa* en el nodo $x \in X$ al valor $p(x) = \mathrm{Re}(s(x))$, mientras que $q(x) = \mathrm{Im}(s(x))$, es la *potencia reactiva.* Además, el valor $I(x, y)$ con $I \in \mathcal{C}(X \times X, \mathbb{C})$ representa la corriente que circula del nodo x al nodo y a través de la línea xy.

Las leyes físicas que rigen la transmisión de corriente en una red eléctrica pueden describirse a través de su laplaciano.

Si $x, y \in X$, la ley de Ohm establece que

$$I(x, y) = a(x, y)\big(u(x) - u(y)\big).$$

Asimismo, la ley de Kirchoff establece que la corriente inyectada en un nodo $x \in X$ es la suma de las corrientes que van desde dicho nodo al resto de nodos, es decir,

$$\psi(x) = \sum_{y \in X} I(x, y) = \sum_{y \in X} a(x, y)\big(u(x) - u(y)\big) = \mathfrak{L}(u)(x). \tag{1.3.1}$$

Por tanto, el laplaciano del voltaje en un nodo representa con la corriente inyectada en dicho nodo. Además, el teorema de Gauss, establece que la suma total de las corrientes inyectadas en cada uno de los nodos es nula, es decir,

$$\sum_{x \in X} \mathfrak{L}(u)(x) = 0.$$

Por otro lado, producto del voltaje y el conjugado de la corriente inyectada en un nodo coincide con la potencia inyectada en dicho nodo, es decir,

$$s(x) = u(\mathfrak{L}(u))^*(x), \quad x \in X. \tag{1.3.2}$$

donde el símbolo $()^*$ denota el conjugado complejo. Esta notación para el conjugado complejo, es la más habitual en la literatura existente sobre este problema, por lo que hemos decidido mantenerla en este trabajo.

La resolución de la ecuación (1.3.2) en el sentido de encontrar $u \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ satisfaciendo dicha igualdad para cada $x \in X$, se conoce como *problema de flujo de cargas.*

A la hora de resolver el problema (1.3.2) se deja libre el valor de la potencia inyectada en uno de los nodos $x_0 \in X$ y se fija el valor de la potencia inyectada en el resto de los nodos y el valor del voltaje $u(x_0) = 1$, en unidades adecuadas. El nodo x_0 recibe el nombre de *nodo slack.* Así el problema (1.3.2) se formula como

$$\begin{cases} u(\mathfrak{L}(u))^*(x) = s(x), & x \in X \setminus \{x_0\}, \\ u(x_0) = 1, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

y el valor de la potencia en el nodo slack se determinará cuando conozcamos el valor $u(x)$ para cada $x \in X$.

En los métodos de resolución del problema de flujo de cargas, en particular en el método de inmersión holomorfa, es común preocuparse inicialmente por las soluciones del problema en un estado de de referencia, sin potencia inyectada en los nodos de $X \setminus \{x_0\}$, es decir,

$$\begin{cases} u(\mathfrak{L}(u))^*(x) = 0, & x \in X \setminus \{x_0\}. \\ u(x_0) = 1. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Si $x \in X \setminus \{x_0\}$ y $u\overline{\mathfrak{L}(u)}(x) = 0$ se satisface que $u(x) = 0$ o $\overline{\mathfrak{L}(u)}(x) = 0$, o bien, ambas condiciones a la vez. Por tanto, para cada subconjunto propio $E \subset X$ con $x_0 \notin E$ las soluciones $u \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ del problema

$$\mathfrak{L}(u) = 0 \quad \text{en} \;\; E, \qquad u = \delta_{x_0} \quad \text{en} \;\; E^c, \tag{1.3.5}$$

donde $\delta_{x_0} \in \mathcal{F}(E^c, \mathbb{C})$ es la función definida como $\delta_{x_0}(x_0) = 1$, $\delta_{x_0}(x) = 0$ si $x \neq x_0$, serán soluciones del problema (1.3.4). El problema (1.3.5) es clásico en el ámbito de las redes eléctricas y se denomina *problema de Dirichlet*, en analogía con el famoso problema diferencial de valores frontera en el caso continuo. Es conocido (ver [18, Corolario 1.4.5]) que el problema de Dirichlet (1.3.5) tiene solución única. De esta forma, para cada subconjunto $E \subset X$ con $x_0 \notin E$ obtenemos una solución del problema de referencia (1.3.4).

Como hemos visto, si permitimos que el voltaje sea nulo en algunos nodos, el problema en el estado de referencia (1.3.4) posee múltiples soluciones. Sin embargo, estas soluciones en el estado de referencia se corresponden con un funcionamiento de la red físicamente inestable. Por otro lado, si requerimos que $u(x) \neq 0$ para cada $x \in X$, tendremos una solución físicamente factible a la que Trias denomina en [23] *white solution*. Para calcular esta solución, se considera el problema de Dirichlet

$$\mathfrak{L}(u) = 0 \quad \text{en} \;\; X \setminus x_0, \qquad u(x_0) = 1. \tag{1.3.6}$$

Veamos que la solución a este problema cumple la condición $u(x) \neq 0$, $x \in X$ y por tanto es la white solution del problema (1.3.4). Por el teorema de Gauss,

$$\sum_{x \in X} \mathfrak{L}(u)(x) = \sum_{x \in X \setminus \{x_0\}} \mathfrak{L}(u)(x) + \mathfrak{L}(u)(x_0) = 0,$$

de donde se sigue que también $\mathfrak{L}(u)(x_0) = 0$, luego $\mathfrak{L}(u) \equiv 0$ en X. Puesto que los autovectores asociados al cero del endomorfismo $\mathfrak{L}$ son los vectores constantes, se sigue que la única solución de (1.3.6) es $u \equiv 1$ en X.

Además de estas consideraciones hemos de distinguir entre dos tipos de nodo.

Un nodo $x \in X$ es de tipo PQ, si conocemos el valor de la potencia inyectada en dicho nodo, $s(x) = p(x) + iq(x) \in \mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{PQ}$ al conjunto de nodos de tipo PQ de una red eléctrica.

Un nodo $x \in X$ es de tipo PV, si conocemos el valor de la potencia activa inyectada, $p(x) = \mathrm{Re}(x) \in \mathbb{R}$ y el módulo del voltaje $|u(x)| = u_{sp}$ en dicho nodo. Denotamos por $\mathcal{PV}$ al conjunto de nodos de tipo PV de una red eléctrica.

Con esta clasificación se forma una partición disjunta del conjunto de nodos, $X = \{x_0\} \sqcup \mathcal{PQ} \sqcup \mathcal{PV}$.

Si $|X| = n+1$ fijamos un orden $\{x_0, x_1, \dots x_n\}$ en X y denotamos al nodo x_j simplemente por j. Así, $X = \{0, 1, \dots, n\}$ y escribimos $u(x_j) = V_j$ y $s(x_j) = S_j$ para denotar los valores del voltaje y la potencia inyectada en el nodo j para cada $0 \leq j \leq n$. Además en el caso de los nodos de tipo PV, escribiremos y $u_{sp}(x_j) = V_{j,sp}$. Recordemos que fijado el orden $\{0, 1, \dots, n\}$ en X la matriz de admitancias $Y = (Y_{jk})_{j,k}$, es la matriz asociada al laplaciano. Supongamos además que el nodo 0 es el nodo slack. En estos términos, la ecuación de flujo de carga para un nodo $j \in \mathcal{PQ}$ resulta

$$V_j^* \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k = S_j^*,$$

mientras que para un nodo $j \in \mathcal{PV}$, la ecuación resulta

$$\begin{cases} |V_j| - V_{j,\text{pv}} = 0 \\ P_j = \text{Re}\left(V_j \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* V_k^*\right), \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Por último, es usual imponer cotas superiores e inferiores al módulo de los voltajes en cada nodo, V_{min} y V_{max}, para evitar eventos indeseables o peligrosos en la red, como sobrevoltajes o caídas de tensión. Así añadiremos a las ecuaciones anteriores la condición

$$V_{min} < |V_j| < V_{max},$$

para cada $0 \leq j \leq n$.

En la práctica, se obtendrá el valor de los voltajes resolviendo las ecuaciones de flujo de carga y posteriormente se analizará si estos cumplen las cotas deseadas o no.

Capítulo 2

La inmersión holomorfa. Soluciones algebraicas

Como vimos en el capítulo anterior, en los métodos no iterativos de es usual preocuparse inicialmente por la solución del problema en un estado de referencia, sin inyección de potencia en los nodos,

$$\begin{cases} u\overline{\mathfrak{L}(u)}(x) = 0, \quad x \in X \setminus \{x_0\}. \\ u(x_0) = 1, \end{cases} \tag{2.0.1}$$

para posteriormente tratar de "continuar"la solución obtenida hasta un estado objetivo, que coincide con el problema original. En el caso del HELM, se propone realizar una inmersión de las ecuaciones de flujo de carga originales

$$V_j^* \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k = S_j^*, \quad \text{si} \;\; j \in \mathcal{PQ},$$

$$\begin{cases} |V_j| - V_{j,\text{pv}} = 0 \\ P_j = \text{Re}\left(V_j \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* V_k^* \right), \quad \text{si} \;\; j \in \mathcal{PV}. \end{cases} \tag{2.0.2}$$

en una extensión funcional holomorfa, que nos permita relacionar el estado de referencia (2.0.1) con el estado objetivo del sistema. Gracias a la holomorfía de la extensión funcional, la forma de "continuar"la solución es a través del conocido proceso de la prolongación analítica.

2.1. Inmersiones holomorfas

El concepto de inmersión holomorfa en este contexto fue introducido originalmente por Trias en [23], de manera preliminar y mediante una explicación intuitiva, sin llegar a ofrecer una caracterización rigurosa. Posteriormente, en [25] se presenta una formalización del concepto llevando a cabo un estudio detallado de sus propiedades. A partir de este estudio proponemos la siguiente definición.

Definición 2.1.1. Sea $\boldsymbol{H} : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ un campo vectorial complejo. Estamos interesados en calcular las soluciones de la ecuación

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m. \tag{2.1.1}$$

Una *inmersión* del problema (2.1.1) se trata de un campo vectorial $\boldsymbol{G} : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^m$ que se obtiene tras introducir en la ecuación original (2.1.1) una variable auxiliar $\xi \in \mathbb{C}$, de forma que

1. Existe $\xi_0 \in \mathbb{C}$ al que llamaremos *estado de referencia* tal que la soluciones del sistema de ecuaciones $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}, \xi_0) = \boldsymbol{0}$ son conocidas o sencillas de calcular.

2. Existe $\xi_1 \in \mathbb{C}$ al que llamaremos *estado objetivo*, tal que

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}, \xi_1) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}), \quad \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n.$$

Sea $\boldsymbol{z_0}$ una solución del sistema en el estado de referencia. Si la inmersión satisface la condición

3. Existen entornos $\Omega_0 \subseteq \mathbb{C}$ del punto ξ_0 y $V_0 \subseteq \mathbb{C}^m$ del punto $\boldsymbol{z_0}$ y una única función $\boldsymbol{\varphi} : \Omega_0 \longrightarrow V_0$ holomorfa en Ω_0 tal que para cada $\xi \in \Omega_0$ existe un único $\boldsymbol{z} \in V_0$ con $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\varphi}(\xi)$ y $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\varphi}(\xi), \xi) = \boldsymbol{0}$ para cada $\xi \in \Omega_0$,

es decir, si podemos despejar de forma analítica la variable $\boldsymbol{z}$ como función de la variable ξ en un entorno de ξ_0, diremos que $\boldsymbol{G}$ es una *inmersión holomorfa* del sistema (2.1.1).

Observación 2.1.2.

1. Notemos que la condición de holomorfía de una inmersión no es otra cosa que la tesis del teorema de las función implícita para funciones de varias variables complejas (pg. 24 [9]). En consecuencia, es suficiente comprobar que la inmersión propuesta cumple las hipótesis de dicho teorema para garantizar que efectivamente se trata de una inmersión holomorfa. En particular, la inmersión debe cumplir los siguientes asertos:

   a) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z_0}, \xi_0) = \boldsymbol{0}$.

   b) Cada componente del campo, $G_j(\boldsymbol{z_0}, \xi_0)$, con $j = 1, ..., m$, es una función holomorfa de $\boldsymbol{z}$ y ξ en un entorno del punto $(\boldsymbol{z}_0, \xi_0)$.

   c) La matriz cuadrada

   $$\nabla_{\boldsymbol{z}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}, \xi) = \left[\frac{\partial G_j}{\partial z_k}(\boldsymbol{z}, \xi) \right]_{1 \leq j,\, k \leq m},$$

   es regular en el punto $(\boldsymbol{z}_0, \xi_0)$.

   En caso de que la inmersión verifique las condiciones anteriores, para expresar la dependencia de la variable $\boldsymbol{z}$ respecto de la variable ξ, en un abuso de notación, sustituiremos la función $\boldsymbol{\varphi}$ de la condición 3 de la definición anterior, por la expresión

$$\boldsymbol{z}(\xi) = (z_1(\xi), z_2(\xi), ..., z_m(\xi)), \quad \xi \in \Omega_0,$$

donde Ω_0 es el entorno del estado de referencia ξ_0 en el que se puede garantizar dicha dependencia analítica. En este sentido cuando se haya probado la holomorfía de una inmersión, se denotará como

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}(\xi), \xi), \quad \xi \in \Omega_0.$$

Si la función $\boldsymbol{z}(\xi)$ puede extenderse de forma analítica a un abierto Ω con $\Omega_0 \subseteq \Omega$, escribimos $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}(\xi), \xi)$, $\xi \in \Omega$.

2. Una vez realizada la inmersión holomorfa, el camino a seguir para obtener la solución al problema (2.1.1) es natural: puesto que tenemos cada variable $z_1, z_2, ..., z_m$, expresada como función holomorfa de ξ en un entorno Ω_0 de ξ_0, si podemos continuar analíticamente cada una de estas funciones hasta el punto ξ_1, tendremos que la solución al problema (2.1.1) es

$$\boldsymbol{z}(\xi_1) = (z_1(\xi_1), z_2(\xi_1), ..., z_m(\xi_1)).$$

En lo siguiente supongamos que tenemos una red eléctrica de $n+1$ nodos, $\{x_0, \dots, x_n\}$. Recordemos que en función de los datos que fijemos en las ecuaciones para resolver el problema, tenemos una partición del conjunto de nodos de la forma, $\{x_0\} \cup \mathcal{PQ} \cup \mathcal{PV}$, donde x_0 es el nodo slack, es decir, el nodo en el que se fija el voltaje $V_0 = 1$ y se determina la potencia, $\mathcal{PQ}$ es el conjunto de los nodos en los que se fija la parte real y la parte imaginaria de la potencia, $\mathcal{PV}$ es el conjunto de los nodos en los que se fija la parte real de la potencia, P y el módulo del voltaje. Como vimos en el capítulo anterior, tras fijar el primero de estos nodos como nodo slack, es decir, fijar su voltaje, $V_0 = 1$, las ecuaciones de flujo de cargas son

$$V_j^* \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k = S_j^*, \quad j \in \mathcal{PQ}, \tag{2.1.2a}$$

$$\begin{cases} |V_j| - V_{j,\text{sp}} = 0, \\ P_j = \operatorname{Re}\left(V_j \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* V_k^* \right), \end{cases} \quad j \in \mathcal{PV}. \tag{2.1.2b}$$

donde S_j es un valor conocido en el caso de nodos PQ y $V_{j,\text{sp}}$ y P_j son valores conocidos para el caso de nodos $\mathcal{PV}$. El problema (2.1.2) tiene n incógnitas, el voltaje en los nodos $\{x_1, \dots, x_n\}$, que denotamos por $\boldsymbol{V} = (V_1, \dots, V_n)$.

Nuestro objetivo es construir una inmersión holomorfa que nos permita obtener la solución al problema de flujo de cargas. Antes de realizar esta inmersión, hemos de modificar el sistema (2.1.2). En primer lugar, que la ecuación (2.1.2a) no define una función holomorfa, pues la función $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2^*$ no es holomorfa en ningún punto de $\mathbb{C}^2$. Para solventar este problema, Trias propone en [23] el cambio de variable $W_j = V_j^*$ para cada $1 \leq j \leq n$. Se considera así cada variable V_j^* como una nueva variable independiente de V_j obteniendo un sistema de ecuaciones con $2n$ incógnitas. Entonces para cada nodo $j \in \mathcal{PQ}$ la ecuación (2.1.2a) resulta

$$W_j \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k = S_j^*. \tag{2.1.3}$$

Además, para cada nodo $j \in \mathcal{PQ}$ se añade al sistema la ecuación

$$V_j \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* W_k = S_j, \tag{2.1.4}$$

llegando así a un sistema de $2n$ incógnitas en $2n$ variables. Notemos que añadir esta última ecuación no excluye ninguna de las soluciones originales de (2.1.2) al obtenerse conjugando la ecuación (2.1.3).

Por otro lado, las ecuaciones (2.1.2b) que aparecen en el caso de los nodos de tipo PV, tampoco resultan holomorfas pues las funciones reales de variable compleja,

$$z \mapsto |z| \quad \text{y} \quad z \mapsto \mathrm{Re}(z),$$

no son holomorfas en ningún punto del plano complejo. Sin embargo, recordando las igualdades

$$|z| = zz^* \quad \text{y} \quad 2\mathrm{Re}(z) = z + z^*, \quad z \in \mathbb{C},$$

podemos reescribir dichas ecuaciones como

$$\begin{cases} V_j W_j - V_{j,\mathrm{sp}}^2 = 0, \\ 2P_j = V_j \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* W_k + W_j \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k, \quad j \in \mathcal{PV}. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

las cuales resultan holomorfas, por ser polinómicas.

Tras estos cambios, obtenemos un sistema no lineal de $2n$ ecuaciones polinómicas en $2n$ variables $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ con $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}]^T$, donde $\boldsymbol{V} = (V_1, ..., V_n)^T \in \mathbb{C}^n$ y $\boldsymbol{W} = (W_1, ..., W_n)^T \in \mathbb{C}^n$, definido por

$$\begin{aligned} &\begin{cases} W_j \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k - S_j^* = 0, \\ V_j \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* W_k - S_j = 0, \qquad j \in \mathcal{PQ}, \end{cases} \\ &\begin{cases} V_j W_j - V_{j,\mathrm{sp}}^2 = 0, \\ V_j \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* W_k + W_j \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k - 2P_j = 0, \quad j \in \mathcal{PV}, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

al que llamaremos *sistema ampliado*. Por tratarse de ecuaciones polinómicas, cada una de ellas define una función entera en $\mathbb{C}^{2n}$. Se trata de calcular la solución del sistema ampliado $\boldsymbol{z_1} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^T$ para obtener la solución del sistema original como $\boldsymbol{A}$. Para que una solución del sistema ampliado proporcione una solución del sistema original necesariamente debe cumplir la igualdad

$$B_j = A_j^*, \qquad j = 1, ..., n. \tag{2.1.7}$$

El siguiente paso es realizar una inmersión en el sistema ampliado $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$, es decir, añadir una variable $\xi \in \mathbb{C}$ al sistema $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ y obtener un sistema inmerso $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}, \xi) = \boldsymbol{0}$ de forma que en el estado de referencia, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}, \xi_0) = \boldsymbol{0}$, se corresponda con el estado (2.0.1) del problema de flujo de carga y sus soluciones sean sencillas de calcular.

En el caso del problema de flujo de carga, sabemos que el sistema posee soluciones múltiples en el estado de referencia. Surge entonces la pregunta: ¿que solución del sistema en el estado de referencia hemos de escoger? En [23] Trias propone que la solución físicamente factible de las ecuaciones de flujo de carga es la continuación analítica hasta el estado objetivo de la única solución en el estado de referencia en la que todos los voltajes son no nulos, la llamada white solution, si es que esta continuación analítica es posible.

Una vez elegida solución en el estado de referencia, $\boldsymbol{z_0}$ se comprueba si la inmersión $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}, \xi)$ es holomorfa, es decir, si satisface las hipótesis del teorema de la función implícita en el punto $(\boldsymbol{z_0}, \xi_0)$ y en consecuencia se pueden despejar de forma analítica la variable $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}]^T$ respecto de ξ en un entorno Ω_0 del estado de referencia ξ_0. En caso de ser holomorfa pasamos a denotar la inmersión por

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}(\xi), \xi) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{W}(\xi), \xi), \quad \xi \in \Omega_0.$$

La solución del sistema ampliado (2.1.6) se obtiene como

$$\boldsymbol{z}(\xi_1) = [\boldsymbol{V}(\xi_1), \boldsymbol{W}(\xi_1)]^T,$$

en caso de que sea posible continuar analíticamente esta solución hasta el estado objetivo ξ_1. Además, si esta solución satisface la condición (2.1.7), que en términos de la inmersión holomorfa del sistema tema ampliado, resulta

$$W_j(\xi_1) = (V_j(\xi_1))^*, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2.1.8}$$

la solución del problema de flujo de cargas (2.1.2) es

$$\boldsymbol{V}(\xi_1) = (V_1(\xi_1), V_2(\xi_1), \ldots, V_n(\xi_1))^T.$$

Observación 2.1.3.

1. La notación $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}]^T$ no contradice la notación introducida en la definición 2.1.1, pues simplemente se trata de dividir el vector $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{2n}$ en dos vectores de $\mathbb{C}^n$, escribiendo en caso de una inmersión holomorfa, $\boldsymbol{z}(\xi) = [\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{W}(\xi)]^T$, $\xi \in \Omega_0$.

2. En caso de haber construido una inmersión holomorfa para (2.1.6), asegurar la propiedad (2.1.8) de la solución no es trivial en absoluto, pues, en la mayoría de ocasiones no conoceremos la expresión de las funciones implícitas $V_j(\xi)$ y $W_j(\xi)$, $j = 1, ..., n$, en el punto ξ_1, sino el desarrollo de Taylor de hasta cierto orden de dichas funciones en un entorno $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ del estado de referencia, ξ_0, y tendremos que asegurar que la continuación analítica de estas funciones a lo largo de un camino γ que una los puntos ξ_0 y ξ_1 (en caso de existir dicha continuación) satisface la propiedad (2.1.8). En consecuencia, el razonamiento más natural es estudiar en que condiciones podemos asegurar que

$$W_j(\xi_0) = (V_j(\xi_0))^*, \qquad j = 1, 2, ..., n, \tag{2.1.9}$$

y tratar de extender esta condición al punto ξ_1. Una primera, idea parece ser imponer que

$$W_j(\xi) = V_j^*(\xi), \qquad \xi \in \Omega_0, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

sin embargo, las funciones V_j y W_j deben ser holomorfas en un entorno de ξ_0 para $j = 1, 2, ..., n$, pero la función $z \mapsto z^*$, no es holomorfa en ningún punto del plano complejo, lo que impide que las funciones V_j y V_j^* lo sean simultáneamente. Sin embargo, imponiendo ciertas condiciones cualitativas a la estructura de la inmersión y a los parámetros ξ_0 y ξ_1, un resultado clásico en en análisis complejo basado en el principio de reflexión de Schwarz (ver [4, p. 210]) nos permiten garantizar las propiedades de holomorfía y conjugación simultaneamente.

Proposición 2.1.4. [4, p. 210] Sean Ω un abierto del plano complejo, f una función definida en Ω y $\Omega^* = \{z^* : z \in \Omega\}$. La función $f^\diamond : \Omega^* \to \mathbb{C}$ definida por $f^\diamond(z) = f^*(z^*)$ es holomorfa en Ω^* si y solo si la función f es holomorfa en Ω.

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$. Si f es holomorfa en z_0 entonces es analítica en dicho punto, es decir, existe $r > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

si $|z - z_0| < r$. Claramente $z^*, z_0^* \in \Omega^*$ y $|z^* - z_0^*| < r$, para cada $z \in B(z_0, r)$. En consecuencia,

$$f^\diamond(z^*) = f^*((z^*)^*) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* (z^* - z_0^*)^n,$$

para cada $z^* \in B(z_0^*, r)$. Por tanto, $f^\diamond$ es analítica en z_0^*, luego es holomorfa en dicho punto. Por la arbitrariedad del punto z_0 escogido, se sigue que si f es holomorfa en Ω entonces $f^\diamond$ es holomorfa en Ω^*. Para probar el recíproco, basta notar que $(\Omega^*)^* = \Omega$ y $(f^\diamond)^\diamond(z) = f(z)$ y aplicar el razonamiento anterior a la función $f^\diamond$ en el conjunto Ω^*. $\square$

Observación 2.1.5. Por el resultado anterior, para que una inmersión holomorfa

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{W}(\xi), \xi), \quad \xi \in \Omega_0,$$

pueda satisfacer la condición de conjugación (2.1.8), es suficiente que cumpla los siguientes requisitos:

1. Los estados de referencia y objetivo, ξ_0, ξ_1, deben ser números reales. (En la mayoría de inmersiones estos parámetros son $\xi_0 = 0$ y $\xi_1 = 1$).

2. Debe cumplirse que

   $$W_j(\xi) = V_j^\diamond(\xi), \quad \xi \in \Omega_0', \quad 1 \leq j \leq n,$$

   donde el conjunto Ω_0' es un abierto simétrico respecto a la recta real con $\xi_0 \in \Omega_0'$ y $\Omega_0' \subseteq \Omega_0$. Es decir, la inmersión debe ser de la forma $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{V}^\diamond(\xi), \xi)$, $\xi \in \Omega_0$, donde $\boldsymbol{V}^\diamond(\xi) = (V_1^\diamond(\xi), \ldots, V_n^\diamond(\xi))$.

Notemos que si $\xi_0 \in \mathbb{R}$ siempre es posible encontrar un conjunto Ω_0'.

Los requisitos anteriores aseguran que

$$W(\xi_0) = V^\diamond(\xi_0) = V^*(\xi_0^*) = V^*(\xi_0).$$

Además, si es posible continuar analíticamente estas funciones hasta el punto ξ_1, tendremos que

$$W(\xi_1) = V^{\diamond}(\xi_1) = V^*(\xi_1^*) = V^*(\xi_1).$$

Recordemos que las funciones $V_j(\xi)$ y $W_j(\xi)$, $1 \leq j \leq n$, no son más que las funciones implícitas que nos permiten expresar las variables V_j y W_j, $1 \leq j \leq n$, en función de la variable ξ en un entorno de ξ_0, y no tenemos, a priori, ninguna garantía de que estas funciones satisfagan la condición 2 de la observación anterior. En este sentido, la siguiente proposición establece condiciones suficientes, en términos de la estructura del sistema inmerso, que permiten garantizar que su solución satisfaga dicho requisito.

Proposición 2.1.6. [25] Sean $\mathbf{G} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2n}$, un campo vectorial complejo y $(\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{W}_0, \xi_0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ un punto que satisface las condiciones 1, 2 y 3 del teorema de las funciones implícitas. Supongamos que además se cumplen las siguientes condiciones:

1. El punto $(\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{W}_0, \xi_0)$ satisface que $\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{W}_0^*$ y $\xi_0 \in \mathbb{R}$.
2. Para cada $1 \leq d \leq 2n$, existe un único $1 \leq q_d \leq 2n$ tal que se cumplen las siguientes igualdades

$$G_d^{\diamond}(\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{W}(\xi), \xi) = G_{q_d}(\boldsymbol{W}^{\diamond}(\xi), \boldsymbol{V}^{\diamond}(\xi), \xi),$$
$$G_{q_d}^{\diamond}(\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{W}(\xi), \xi) = G_d(\boldsymbol{W}^{\diamond}(\xi), \boldsymbol{V}^{\diamond}(\xi), \xi), \tag{2.1.10}$$

para todo $\xi \in \Omega_0'$, donde el conjunto Ω_0' es un abierto simétrico respecto a la recta real con $\xi_0 \in \Omega_0'$ y $\Omega_0' \subseteq \Omega_0$. Además,

$$G_d^{\diamond}(\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{W}(\xi), \xi) := \left(G_d(\boldsymbol{V}(\xi^*), \boldsymbol{W}(\xi^*), \xi^*)\right)^*.$$

Entonces se tiene que

$$\boldsymbol{V}(\xi) = \boldsymbol{W}^{\diamond}(\xi) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{W}(\xi) = \boldsymbol{V}^{\diamond}(\xi),$$

para cada $\xi \in \Omega_0'$.

Demostración. En primer lugar, por la condición 1 del enunciado,

$$\boldsymbol{V}^{\diamond}(\xi_0) = \big(\boldsymbol{V}(\xi_0)\big)^* = \boldsymbol{V}_0^* = \boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{W}(\xi_0),$$
$$\boldsymbol{W}^{\diamond}(\xi_0) = \big(\boldsymbol{W}(\xi_0)\big)^* = \boldsymbol{W}_0^* = \boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{V}(\xi_0),$$

cumpliéndose así la condición de conjugación en el estado de referencia ξ_0. Además, por ser el conjunto Ω_0' simétrico respecto de la recta real se tiene que $\left(\Omega_0'\right)^* = \Omega_0'$, por lo que, en virtud de la proposición 2.1.4, las funciones $\boldsymbol{V}^{\diamond}$ y $\boldsymbol{W}^{\diamond}$ son holomorfas en Ω_0' por serlo $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$. Por la condición 2 del enunciado,

$$G_d(\boldsymbol{W}^{\diamond}(\xi), \boldsymbol{V}^{\diamond}(\xi), \xi) = G_{q_d}^{\diamond}(\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{W}(\xi), \xi) = 0,$$

para cada $\xi \in \Omega_0'$ y para cada $1 \leq d \leq 2n$. En consecuencia, el par $(\boldsymbol{W}^{\diamond}(\xi), \boldsymbol{V}^{\diamond}(\xi))$ es una solución de la ecuación $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \xi) = \boldsymbol{0}$ para cada $\xi \in \Omega_0$, satisfaciendo que $(\boldsymbol{W}^{\diamond}(\xi_0), \boldsymbol{V}_{\mathbf{0}}^{\diamond}(\xi)) = (\boldsymbol{V}_0^*, \boldsymbol{W}_0^*)$. Por el teorema de las funciones implícitas, sabemos que este par de funciones es único, de donde se sigue que

$$\boldsymbol{V}(\xi) = \boldsymbol{W}^{\diamond}(\xi) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{W}(\xi) = \boldsymbol{V}^{\diamond}(\xi),$$

para cada $\xi \in \Omega_0'$. $\square$

Observación 2.1.7. La proposición anterior es un resultado de carácter local, pues solamente establece la propiedad $W_j(\xi) = V_j^\diamond(\xi)$ en Ω_0'. Si Ω es un abierto conexo, simétrico respecto de la recta real con $\Omega_0' \subseteq \Omega$ y las funciones $\boldsymbol{V}(\xi)$, $\boldsymbol{W}(\xi)$, $\boldsymbol{V}^\diamond(\xi)$ y $\boldsymbol{W}^\diamond(\xi)$ son holomorfas en Ω, una sencilla aplicación del principio de identidad (sección 8.1 [17]) nos permite concluir que

$$\boldsymbol{V}(\xi) = \boldsymbol{W}^\diamond(\xi) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{W}(\xi) = \boldsymbol{V}^\diamond(\xi), \quad \xi \in \Omega.$$

Supongamos que es posible prolongar analíticamente las funciones anteriores desde el estado de referencia ξ_0 hasta el estado objetivo ξ_1 a través del segmento $[\xi_0, \xi_1]$. Sea (V_j, Ω_0') el germen de partida. Es posible hacer esta continuación analítica a través de una familia de elementos de función meromorfa $\{(V_{j,p}, D_p) : 1 \le p \le m\}$ con D_p un disco centrado en un punto del segmento $[\xi_0, \xi_1]$ para cada $1 \le p \le m$. Puesto que $D_{p-1} \cap D_p \subseteq D_p$ es un abierto simétrico respecto de la recta real para cada $1 \le p \le m$ y las funciones $V_j(\xi)$ y $V_j^\diamond(\xi)$ se extienden de forma analítica a todo D_p, podemos utilizar el razonamiento anterior para extender la propiedad $W_j(\xi) = V_j^\diamond(\xi)$ a todo D_p. En particular, cuando $p = m$ habremos extendido dicha propiedad hasta un entorno del estado de referencia ξ_1. Por tanto, basta calcular

$$\boldsymbol{V}(\xi_1) = (V_1(\xi_1), \dots, V_n(\xi_1)),$$

para obtener la solución del problema de flujo de cargas (2.1.2).

2.1.1. La inmersión polinómica

Las inmersiones más utilizadas se tratan de inmersiones polinómicas, esto es, inmersiones en las que la ecuación G_j, es una ecuación polinómica en las variables $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ y ξ para cada $1 \le j \le 2n$. Si las ecuaciones de una inmersión polinómica satisfacen una determinada condición algebraica, que presentaremos más adelante, las funciones implícitas $V_j(\xi)$ resultarán algebraicas. Considerando el sistema (2.1.6), podemos hacer la siguiente inmersión polinómica.

$$\begin{cases} W_j \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k = \xi S_j^*, \\ V_j \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* W_k = \xi S_j, \qquad j \in \mathcal{PQ}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \qquad V_j W_j = 1 + \xi (V_{j,\text{sp}}^2 - 1), \\ V_j \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* W_k + W_j \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k = 2\xi P_j, \quad j \in \mathcal{PV}, \end{cases} \tag{2.1.11}$$

donde los estados de referencia y objetivo son $\xi_0 = 0$ y $\xi_1 = 1$ respectivamente.

Efectivamente, el sistema (2.1.11) está formado por $2n$ ecuaciones polinómicas en las variables $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ y ξ, y por tanto enteras en $\mathbb{C}^{2n+1}$. Además, si imponemos que en el estado de referencia $\xi_0 = 0$, se cumpla la condición

$$V_j, W_j \neq 0, \quad 1 \le j \le n,$$

es decir, seleccionamos la llamada "white branch", la solución del sistema en este estado será

$$V_j = W_j = 1, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Para asegurar el carácter holomorfo de la inmersión basta comprobar si la matriz

$$\nabla_{\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \xi) = \left[\left[\frac{\partial G_j(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \xi)}{\partial V_k} \right]_{2n \times n}, \left[\frac{\partial G_j(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \xi)}{\partial W_k} \right]_{2n \times n} \right], \tag{2.1.12}$$

es regular en el punto $(\boldsymbol{V_0}, \boldsymbol{W_0}, \xi_0) = (1, \ldots, 1, 0) \in \mathbb{C}^{2n+1}$, lo que en la práctica suele estudiarse mediante técnicas numéricas o herramientas de derivación simbólica. En caso de regularidad, es a partir de este momento cuando podemos escribir $V_j(\xi), Wj(\xi), \quad 1 \leq j \leq n$, como funciones implícitas y asegurar su holomorfía en un entorno Ω_0 de $\xi_0 = 0$.

Por otro lado, esta inmersión verifica las condiciones de la proposición 2.1.6. Sea $\Omega_0' \subseteq \Omega_0$ un abierto simétrico respecto del eje real. Las funciones $\boldsymbol{V}(\xi)$, $\boldsymbol{W}(\xi)$, $\boldsymbol{V}^\diamond(\xi)$ y $\boldsymbol{W}^\diamond(\xi)$ están definidas y son holomorfas en Ω_0'. Sean G_d con $1 \leq d \leq 2n$ la ecuación $d-$ésima del sistema (2.1.11). Si G_d es una ecuación asociada a un nodo $j \in \mathcal{PQ}$ entonces, la ecuación G_{q_d} que satisface la condición (2.1.10) de la proposición 2.1.6 es la otra ecuación asociada a dicho nodo. Efectivamente, si

$$G_d(\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{W}(\xi), \xi) = W_j(\xi) \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k(\xi) - \xi S_j^*,$$

y

$$G_{d+1}(\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{W}(\xi), \xi) = V_j(\xi) \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* W_k(\xi) - \xi S_j.$$

con $\xi \in \Omega_0'$, entonces, se tiene que

$$G_d^\diamond(\boldsymbol{V}(\xi), \boldsymbol{W}(\xi), \xi) = (G_j(\boldsymbol{V}(\xi^*), \boldsymbol{W}(\xi^*), \xi^*))^* = \left(W_j(\xi^*) \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k(\xi^*) - \xi^* S_j^* \right)^*$$

$$= W_j^*(\xi^*) \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* V_k^*(\xi^*) - (\xi^* S_j^*)^* = W_j^\diamond(\xi) \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* V_k^\diamond(\xi) - \xi S_j = G_{d+1}(\boldsymbol{W}^\diamond(\xi), \boldsymbol{V}^\diamond(\xi), \xi).$$

Por otro lado, G_d es una ecuación asociada a un nodo $j \in \mathcal{PV}$ basta observar su simetría para deducir que la ecuación G_{q_d} satisfaciendo las hipótesis (2.1.10) de la proposición 2.1.6 es ella misma.

Suponiendo que la matriz (2.1.12) es regular en el punto $(1, \ldots, 1, 0) \in \mathbb{C}^{2n+1}$, escribiremos el sistema (2.1.11) como

$$\begin{cases} V_j^\diamond(\xi) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k(\xi) = \xi S_j^* \\ V_j(\xi) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* V_k^\diamond(\xi) = \xi S_j, \quad j \in \mathcal{PQ}, \end{cases} \tag{2.1.13a}$$

$$\begin{cases} V_j(\xi) V_j^\diamond(\xi) = 1 + \xi \left(V_{j,sp}^2 - 1 \right), \quad j \in \mathcal{PV}, \\ V_j^\diamond(\xi) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_k(\xi) + V_j(\xi) \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* V_k^\diamond(\xi) = 2\xi P_j. \end{cases} \tag{2.1.13b}$$

Ejemplo 2.1.8. Consideramos una red eléctrica de 3 nodos, $\{0, 1, 2\}$ de los cuales el nodo 0 será el nodo slack, y los nodos 1 y 2 serán nodos de tipo PQ y PV respectivamente. Los datos de la red a la hora de plantear el problema de flujo de cargas serán los siguientes:

1. La matriz de admitancias será

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 4-2i & -3+i & -1+i \\ -1+2i & 2-3i & -1+i \\ -1+i & -1+i & 2-2i \end{bmatrix}$$

2. En el nodo PQ la potencia será

$$S_1 = -0{,}5 - 0{,}2i.$$

3. En el nodo PV la potencia activa y el modulo del voltaje serán

$$P_2 = 0{,}4 \quad \text{y} \quad V_{2,\text{sp}} = 1,05.$$

Sustituyendo en estos datos en (2.1.11), el sistema inmerso resulta

$$\begin{aligned} W_1 \sum_{k=0}^{2} Y_{1k} V_k &= \xi(-0{,}5 + 0{,}2i) \\ V_1 \sum_{k=0}^{2} Y_{1k}^* W_k &= \xi(-0{,}5 - 0{,}2i) \\ V_2 W_2 &= 1 + \xi(0,1025) \\ V_2 \sum_{k=0}^{2} Y_{2k}^* W_k + W_2 \sum_{k=0}^{2} Y_{2k} V_k &= 0,8\xi \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

y calculando el jacobiano con MATLAB,

$$\mathcal{J}_{\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}} \boldsymbol{H}(1, \ldots, 1, 0) = \det \left[\nabla_{\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}} \boldsymbol{H}(1, \ldots, 1, 0)\right] = -44i \neq 0.$$

En consecuencia, la inmersión (2.1.14) se trata de una inmersión holomorfa, por lo que podremos despejar las variables V_j y $V_j^\diamond$ para cada $1 \leq j \leq n$, como funciones holomorfas de ξ en un entorno Ω_0 del estado de referencia ξ_0.

2.2. Soluciones algebraicas. Curvas BAP

Recordemos que si la inmersión (2.1.11) es holomorfa, satisface las condiciones de la proposición 2.1.6 y, además, las funciones V_j y $V_j^\diamond$ pueden prolongarse analíticamente hasta ξ_1, el problema de flujo de cargas (2.1.2) se resuelve simplemente evaluando el vector

$$\mathbf{V}(\xi_1) = (V_1(\xi_1), \ldots, V_n(\xi_1)).$$

El reto práctico radica en que solo conocemos los desarrollos de Taylor de las funciones $V_j(\xi)$ y $V_j^\diamond(\xi)$ alrededor del entorno simétrico respecto al eje real Ω_0', lo que dificulta verificar directamente posibilidad de hacer una prolongación analítica hasta el punto ξ_1 a través del segmento $[\xi_0, \xi_1]$.

En esta sección introduciremos una condición en las funciones $V_j(\xi)$ y $V_j^\diamond(\xi)$, $1 \leq j \leq n$, que podrá ser deducida directamente del sistema inmerso, sin necesidad de conocer la expresión de estas funciones y permitirá garantizar su holomorfía y, por tanto, la posibilidad de ser continuadas analíticamente, salvo en un número finito de puntos del plano complejo: que sean funciones algebraicas.

Definición 2.2.1. Sea Ω un abierto del plano complejo, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y $z = f(\xi)$. Se dice que la función f es *algebraica* si satisface una ecuación $\mathfrak{B}(z, \xi) = 0$, donde

$$\mathfrak{B}(z, \xi) := \sum_{k=0}^{n} \zeta_k(\xi)\, z^{n-k},$$

es un polinomio no trivial en dos variables complejas cumpliendo que $n \geq 1$ y $\zeta_k(\xi) \in \mathbb{C}[\xi]$ para $0 \leq k \leq n$, con $\zeta_0(\xi) \not\equiv 0$. La aplicación $\mathfrak{B} : f(\Omega) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se denomina *polinomio aniquilador bivariante* de f, y es común entre la literatura referirse a ella por sus siglas en inglés, *BAP*.

Es conocido que el conjunto de singularidades de una función algebraica es finito, por tanto, si las funciones $V_j(\xi)$ y $V_j^\diamond(\xi)$, con $1 \leq j \leq n$, son algebraicas, serán holomorfas en $\mathbb{C}$ salvo un conjunto finito. Nuestro objetivo es entonces estudiar en qué condiciones podemos asegurar que las funciones $V_k(\xi)$ y $V_k^\diamond(\xi)$, con $1 \leq k \leq n$, sean algebraicas, o equivalentemente en qué condiciones existe una curva BAP para cada una de las variables V_k y W_k, con $1 \leq k \leq n$.

2.2.1. Existencia de curvas BAP

Consideremos el sistema (2.1.11), formado por $2n$ ecuaciones polinómicas

$$P_1 = \cdots = P_{2n} = 0,$$

en las $2n + 1$ variables $V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n, \xi$. Tomando $m = 2n$ y renombrando las variables anteriores de la forma

$$z_j = V_j \quad \text{y} \quad z_{n+j} = W_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.2.1}$$

resulta el sistema

$$P_j(z_m, \ldots, z_1, \xi) = 0, \quad 1 \leq j \leq m,$$

donde $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{C}[z_m, \ldots, z_1, \xi]$ son las ecuaciones polinómicas originales del sistema tras el cambio de variable (2.2.1).

Tratemos de construir una curva BAP para cada una de las variables $z_m, \ldots, z_1$.

Sea I el ideal $I = \langle P_1, \ldots, P_m \rangle \subset \mathbb{C}[z_m, \ldots, z_1, \xi]$. Supongamos que $I \cap \mathbb{C}[\xi] = \{0\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que queremos construir una curva BAP para la variable z_1. Consideremos el orden lexicográfico con las variables ordenadas de la forma $z_m >_{\text{lex}} \ldots >_{\text{lex}} z_1 >_{\text{lex}} \xi$. En virtud del corolario A.1.14 sabemos que existe una base de Groebner $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ de I para el orden lexicográfico fijado. Por el teorema de eliminación, (teorema A.2.2) sabemos que si

$$I_\ell = I \cap \mathbb{C}[z_{m-\ell}, \ldots, z_1, \xi] \neq \{0\},$$

el conjunto $G_\ell = G \cap \mathbb{C}[z_{m-\ell}, \ldots, z_1, \xi]$ es una base de Groebner de I_ℓ. En consecuencia, si

$$I_{m-1} = I \cap \mathbb{C}[z_1, \xi] \neq \{0\},$$

existe un polinomio $g \in G_{m-1} \subset I \cap \mathbb{C}[z_1, \xi]$, siendo la curva

$$\mathfrak{B}_1(z_1, \xi) = g(z_1, \xi)$$

una curva BAP para z_1.

Observación 2.2.2.

1. Notemos que en el razonamiento anterior, la hipótesis $I \cap \mathbb{C}[\xi] = \{0\}$ es necesaria, pues si no, podría ocurrir que $\mathfrak{B}_1 \in \mathbb{C}[\xi]$ y no sería una curva BAP para z_1.

2. El elemento $g \in G_{m-1}$ no tiene porque ser único. Sin embargo, cada elemento de este conjunto es una curva BAP para z_1, sin importar cuál seleccionemos.

3. Para construir una curva BAP para otra variable z_k con $1 \leq k \leq m$, basta considerar el orden lexicográfico ordenando las variables de la forma

$$z_m >_{\text{lex}} \ldots >_{\text{lex}} z_{k+1} >_{\text{lex}} z_{k-1} \ldots >_{\text{lex}} z_1 >_{\text{lex}} z_k >_{\text{lex}} \xi,$$

   y repetir el razonamiento anterior. Por tanto, para construir una curva BAP para cada variable $z_1, \ldots, z_m$, si existe, es necesario calcular m bases de Groebner distintas, utilizando un orden lexicográfico en el cual la variable de interés, z_k, ocupa la segunda posición de menor prioridad, lo que comporta un elevado coste computacional. En contrapartida, una vez tengamos calculadas las m bases de Groebner necesarias podemos comprobar la existencia de una curva BAP para cada variable, es decir, comprobar si

$$I \cap \mathbb{C}[z_k, \xi] \neq \{0\}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

   por inspección y en caso afirmativo, obtener su expresión, sin hacer cuentas adicionales.

En los primeros artículos escritos sobre el método de inmersión holomorfa por Antonio Trias, [23] y [24], se desarrolla el estudio del HELM para el caso particular en el que todos los nodos son de tipo PQ. La inmersión holomorfa que propone originalmente Trias es la inmersión (2.1.11), que para el caso de tener únicamente nodos de tipo PQ, tras fijar un nodo slack, resulta

$$\begin{aligned} Y_{10} z_{n+j} + z_{n+j} \sum_{k=1}^{n} Y_{jk} z_k &= \xi S_j^*, \\ Y_{10}^* z_j + z_j \sum_{k=1}^{n} Y_{jk}^* W_k &= \xi S_j, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

En estos artículos, Trias afirma la existencia de una curva BAP para cada una de las variables $z_m, \ldots, z_1$, en el caso general del problema con nodods PQ. Para tratar de justificar esta afirmación, Trias alude a resultados y procedimientos generales de álgebra conmutativa, como bases de Groebner, técnicas de eliminación, resultantes, etc, pero sin explicar realmente el procedimiento o razonamiento en el que se basa para asegurar que se puede hacer una eliminación de variables en las ecuaciones (2.2.2) y obtener una curva BAP para cada una de las variables $z_m, \ldots, z_1$. Sin embargo, esta afirmación es falsa en general, pues según hemos visto, para que se pueda construir una curva BAP para una de las variables z_k, necesariamente $I \cap \mathbb{C}[z_k, \xi] \neq \{0\}$, lo que no tiene por qué ocurrir en el caso general. Como contraejemplo, se considera el siguiente sistema de ecuaciones polinómicas

$$\begin{aligned} P_1 &= 2(1+i)z_1z_3 + (1-i)z_2z_3 - (1+i)\xi = 0, \\ P_2 &= (1-i)z_1z_4 + 3(1+i)z_2z_4 - (1+i)\xi = 0, \\ P_3 &= 2(1-i)z_1z_3 + (1+i)z_1z_4 - (1-i)\xi = 0, \\ P_4 &= (1+i)z_2z_3 + 3(1-i)z_2z_4 - (1-i)\xi = 0. \end{aligned}$$

Sea $I = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle \subseteq \mathbb{C}[z_4, z_3, z_2, z_1, \xi]$. Fijemos el orden lexicográfico con $z_4 >_{\text{lex}} z_3 >_{\text{lex}} z_2 >_{\text{lex}} z_1 >_{\text{lex}} \xi$. Utilizando la función `gbasis` de MATLAB, obtenemos la siguiente base de Groebner $G = \{g_1, \ldots, g_6\}$ de I.

$$\begin{aligned} g_1 &= 3z_2z_4 + 2z_1z_3 - 2\xi \\ g_2 &= z_1z_4 - 2iz_1z_3 + i\xi \\ g_3 &= 3\xi z_4 - 14iz_1z_3^2 + 8i\xi z_3 \\ g_4 &= z_2z_3 + 2iz_1z_3 - i\xi \\ g_5 &= 14z_1^2z_3 - 3i\xi z_2 - 8\xi z_1 \\ g_6 &= 3\xi z_2^2 - 2i\xi z_1z_2 + 2\xi z_1^2 \end{aligned}$$

En virtud del teorema de eliminación A.2.2, los ideales de eliminación son $I_1 = I \cap \mathbb{C}[z_3, z_2, z_1, \xi] = \langle g_4, g_5, g_6 \rangle$, $I_2 = I \cap \mathbb{C}[z_2, z_1, \xi] = \langle g_6 \rangle$ y $I_3 = I \cap \mathbb{C}[z_1, \xi] = \{0\}$. Por tanto, no existe una curva BAP para la variable z_1.

El siguiente teorema permite detectar la existencia de una curva BAP para cada variable z_k para $1 \leq k \leq m$, calculando una única base de Groebner del ideal $I = \langle P_1, \ldots, P_m \rangle$, con un orden prefijado en sus variables.

Teorema 2.2.3. [26] Sea $I \subset \mathbb{C}[z_m, \ldots, z_1, \xi]$ un ideal no trivial cumpliendo que $I \cap \mathbb{C}[\xi] = \{0\}$. Fijemos el orden lexicográfico $z_m >_{\text{lex}} \cdots >_{\text{lex}} z_1 >_{\text{lex}} \xi$. Sea $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ es una base de Groebner arbitraria para I. Entonces, son equivalentes

1. Para cada $1 \leq k \leq m$, existe un polinomio $\tilde{p}_k \in I \cap \mathbb{C}[z_k, \xi]$, de la forma

$$\tilde{p}_k(z_k, \xi) = \zeta_0^{(k)}(\xi) z_k^{m_k} + \zeta_1^{(k)}(\xi) z_k^{m_k - 1} + \cdots + \zeta_{m_k}^{(k)}(\xi), \tag{2.2.3}$$

   para algún $m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, donde $\zeta_j^{(k)} \in \mathbb{C}[\xi]$ para cada $j = 0, \ldots, m_k$, y $\zeta_0^{(k)} \not\equiv 0$. Es decir, existe una curva BAP para la cada variable z_k con $1 \leq k \leq m$.

2. Para todo $1 \leq k \leq m$, existen enteros $q'_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $m'_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tales que

$$\xi^{q'_k} z_k^{m'_k} = \text{LM}(g_{t_k}) \quad \text{para algún } g_{t_k} \in G.$$

   Aquí, $\text{LM}(\cdot)$ y $\text{LT}(\cdot)$ denotan el monomio líder y el término líder, respectivamente, de un polinomio, tal como se define en el apéndice A.

Demostración. Probemos en primer lugar que si se verifica la condición 2 del enunciado existe un polinomio $\tilde{p}_k \in I \cap \mathbb{C}[z_k, \xi]$ de grado positivo en z_k, para cada $1 \leq k \leq m$. Para ello, razonamos por inducción sobre k. Comenzamos analizando el caso $k = 1$. Por hipótesis, existen enteros $q_1' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $m_1' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tales que $\mathrm{LM}(g_{t_1}) = \xi^{q_1'} z_1^{m_1'}$ para algún índice $1 \leq t_1 \leq t$. Puesto que

$$\mathrm{LM}(g_{t_1}) >_{\mathrm{lex}} \mathrm{LM}(g_{t_1} - \mathrm{LT}(g_{t_1})),$$

y $\mathrm{LT}(g_{t_1}) \in \mathbb{C}[z_1, \xi]$, por ser z_1 y ξ las variables más pequeñas para el orden fijado, necesariamente,

$$(g_{t_1} - \mathrm{LT}(g_{t_1})) \in \mathbb{C}[z_1, \xi],$$

y por tanto, $g_{t_1} \in \mathbb{C}[z_1, \xi]$. Por hipótesis, este término tiene grado positivo en z_1, luego basta tomar el polinomio $\tilde{p}_1 = g_{t_1}$.

Supongamos que para cada $1 \leq k \leq k'$, con $k' \leq m$ existe un polinomio $\tilde{p}_k \in I \cap \mathbb{C}[z_k, \xi]$ de grado positivo en z_k. De la condición 2 del enunciado, seguimos que para $k = k' + 1$, existen enteros $q_k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $m_k' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tales que

$$\mathrm{LM}(g_{t_k}) = \xi^{q_k'} z_k^{m_k'} \in \mathbb{C}[z_k, \xi], \tag{2.2.4}$$

para algún elemento $g_{t_k} \in G$. A continuación, probaremos la existencia de un polinomio $\tilde{p}_k \in I \cap \mathbb{C}[z_k, \xi]$, con grado positivo en la variable z_k, para $k = k' + 1$. Para ello construiremos recursivamente una secuencia de polinomios $\{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_{\ell^*}\}$ en términos de resultantes, donde el último elemento de la secuencia servirá para definir el polinomio $\tilde{p}_k$ cuando $k = k' + 1$.

Definimos el primer elemento de la sucesión como $\mathcal{R}_0 = g_{t_k}$.

Sea k_0 el menor entero $\tilde{k}$ con $0 \leq \tilde{k} \leq k'$ tal que $\mathcal{R}_0 \in \mathbb{C}[z_k, z_{\tilde{k}}, \ldots, z_1, \xi]$. En virtud del teorema A.3.3, sabemos que

$$\mathcal{R}_1 = \mathrm{Res}(R_0, \tilde{p}_{k_0}, z_{k_0}) \in I \cap \mathbb{C}[z_k, z_{k_0 - 1}, \ldots, z_1, \xi].$$

Repitiendo la operación anterior obtenemos una sucesión decreciente de enteros $k_0 > k_1 > \cdots > k^* = 0$, podemos construir recursivamente una sucesión de polinomios $\{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_{\ell^*}\}$ de la forma

$$\mathcal{R}_{\ell+1} = \mathrm{Res}(\mathcal{R}_\ell, \tilde{p}_{k_\ell}, z_{k_\ell}) = \det(\mathrm{Syl}(\mathcal{R}_\ell, \tilde{p}_{k_\ell}, z_{k_\ell})) \in I,$$

para $0 \leq \ell \leq \ell^* - 1$, y donde k_ℓ es el menor entero $\tilde{k}$ tal que

$$0 \leq \tilde{k} < k_{\ell-1} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_\ell \in \mathbb{C}[z_k, z_{\tilde{k}}, \ldots, z_1, \xi], \quad \ell \geq 1.$$

Por construcción, el último elemento de la secuencia, $\mathcal{R}_{\ell^*}$, pertenece a $\mathbb{C}[z_k, \xi]$. Para concluir, basta probar que $\mathcal{R}_{\ell^*}$ tiene grado positivo en la variable z_k. En primer lugar, notemos que puesto que $\mathcal{R}_0 \in \mathbb{C}[z_k, z_{k_0}, \ldots, z_1, \xi]$, podemos escribir este polinomio como

$$\mathcal{R}_0 = g_{t_k} = \phi_0^{(0)} z_{k_0}^{n_0} + \phi_1^{(0)} z_{k_0}^{n_0 - 1} + \cdots + \phi_{n_0}^{(0)}, \tag{2.2.5}$$

donde $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ y $\phi_j^{(0)} \in \mathbb{C}[z_k, z_{k_0 - 1}, \ldots, z_1, \xi]$ para cada $0 \leq j \leq n_0$. A partir de esto y de la condición (2.2.4), seguimos que

$$\mathrm{LM}(\mathcal{R}_0) = \xi^{q_k'} z_k^{m_k'} = \mathrm{LM}(\phi_{n_0}^{(0)}),$$

pues por (2.2.4), z_{k_0} no es un factor de $\mathrm{LM}(\mathcal{R}_0)$, luego, $\mathrm{LM}(\mathcal{R}_0)$ debe ser un monomio de $\phi_{n_0}^{(0)}$.

Recordemos ahora la expresión,

$$\tilde{p}_{k_0} = \zeta_0^{(k_0)} z_{k_0}^{n_0} + \zeta_1^{(k_0)} z_{k_0}^{n_0-1} + \cdots + \zeta_{n_0}^{(k_0)}. \tag{2.2.6}$$

De las expresiones (2.2.5) y (2.2.6), se sigue que

$$\begin{aligned} \mathrm{LM}(\mathcal{R}_1) &= \mathrm{LM}\left(\mathrm{Res}\left((\mathcal{R}_0, \tilde{p}_{k_0}, z_{k_0})\right)\right) \\ &= \mathrm{LM}\left(\left(\phi_{n_0}^{(0)}\right)^{m_{k_0}} \cdot \left(\zeta_0^{(k_0)}(\xi)\right)^{n_0}\right) = \xi^{\tau_1} z_k^{m_{k_0} m_k} \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

con $\tau_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, donde se ha utilizado la fórmula de Leibnitz para el cálculo del determinante. En consecuencia, el elemento $\mathcal{R}_{\ell^*} \in \mathbb{C}[z_k, s]$, tiene grado positivo en z_k, luego basta tomar $\tilde{p}_k = \mathcal{R}_{\ell^*}$.

Para probar el recíproco, supongamos que para cada $1 \leq k \leq m$ existe un polinomio $\tilde{p}_k \in I \cap \mathbb{C}[z_k, \xi]$, de grado positivo en la variable z_k. Por hipótesis, $\mathrm{LC}(\tilde{p}_k) \neq 0$ para cada $1 \leq k \leq m$, y

$$\mathrm{LM}(\tilde{p}_k) = \mathrm{LM}(\zeta_0^{(k)}(\xi) z_k^{m_k}) = \xi^{q_k} z_k^{m_k},$$

donde $q_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Puesto que $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ es una base de Groebner de I, se cumple que

$$\xi^{q_k} z_k^{m_k} = \mathrm{LM}(\tilde{p}_k) = \frac{\mathrm{LT}(\tilde{p}_k)}{\mathrm{LC}(\tilde{p}_k)} \in \langle \mathrm{LT}(\tilde{p}_k) \rangle \subseteq \langle \mathrm{LT}(I) \rangle = \langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t) \rangle.$$

Puesto que $\langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t) \rangle$ es un ideal monomial, en virtud del lema A.1.8 existe un t_k con $1 \leq t_k \leq t$ tal que el monomio $\xi^{q_k} z_k^{m_k}$ es divisible entre $\mathrm{LM}(g_{t_k})$, es decir, existen enteros q'_k y m'_k con $0 \leq q'_k \leq q_k$ y $0 \leq m'_k \leq m_k$, de modo que $\mathrm{LM}(g_{t_k}) = \xi^{q'_k} z_1^{m'_k}$.

Para concluir basta ver que $m'_k \geq 1$, pero esto es claro, pues si $m'_k = 0$, es decir, $\mathrm{LM}(g_{t_k}) = \xi^{q'_k}$, por ser ξ el menor elemento para el orden lexicografico que hemos fijado se tiene que $g_{t_k} \in \mathbb{C}[\xi]$, en contra de que $I \cap \mathbb{C}[\xi] = \{0\}$. □

Observación 2.2.4.

1. Como ya se ha mencionado, la ventaja principal que ofrece este teorema radica en que para comprobar la existencia de una curva BAP para cada una de las variables $z_1, \ldots, z_m$, solamente es necesario calcular una base de Groebner, frente a las m bases de Groebner distintas que se deben calcular si se sigue el razonamiento expuesto al inicio de la sección. Además, para verificar la condición 2 del teorema, solamente es necesario atender a los monomios líderes de la base de Groebner, $\mathrm{LM}(g_1), \ldots, \mathrm{LM}(g_t)$, y esta verificación no requiere cálculos adicionales.

2. Notemos que a diferencia del razonamiento inicial, el teorema anterior no aporta un método de cálculo para la expresión de las curvas BAPs, simplemente ofrece una condición suficiente computacionalmente menos costosa para determinar su existencia. Sin embargo, esto es suficiente para nuestras pretensiones, pues no estamos interesados en el cálculo de las curvas BAPs, si no en garantizar el carácter algebraico de las funciones $z = z(\xi)$ como consecuencia de su existencia.

Ejemplo 2.2.5. Recordemos el ejemplo 2.1.8. Habíamos visto que la inmersión (2.1.11) se trata de una inmersión holomorfa polonómica para las ecuaciones de flujo de carga de este sistema. Sean $z_0 = z_3 = 1$. Las ecuaciones polinómicas del sistema son

$$P_1(z_4, z_3, z_2, z_1, \xi) = Y_{10}z_3 + z_3 \sum_{k=1}^{2} Y_{1k}z_k - \xi(-0{,}5 + 0{,}2i),$$
$$P_2(z_4, z_3, z_2, z_1, \xi) = Y_{10}^* z_1 + \sum_{k=1}^{2} Y_{1k}^* z_{k+2} - \xi(-0{,}5 - 0{,}2i),$$
$$P_3(z_4, z_3, z_2, z_1, \xi) = z_2z_4 - 1 - \xi(0, 1025),$$
$$P_4(z_4, z_3, z_2, z_1, \xi) = Y_{20}^* z_2 + z_2 \sum_{k=1}^{2} Y_{2k}^* z_{k+2} + Y_{20}^* z_4 + z_4 \sum_{k=1}^{2} Y_{2k}z_k - 0, 8\xi.$$

Fijemos el orden lexicográfico con $z_4 >_{\text{lex}} z_3 >_{\text{lex}} z_2 >_{\text{lex}} z_1 >_{\text{lex}} \xi$ y calculemos una base de Groebner del ideal $I = \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle \subseteq \mathbb{C}[z_4, z_3, z_2, z_1, \xi]$, usando la función `gbasis` de MATLAB. Obtenemos una base de Groebner del ideal I formada por 7 elementos, $G = \{g_1, \ldots, g_7\}$, con

$$g_1 = (-1{,}69 + 1{,}25i)z_4 + \sum_{p=0}^{5}\sum_{q=0}^{5-p} a_{p,q}^{(1)} z_1^p \xi^q + \sum_{p=0}^{2}\sum_{q=0}^{4-p} b_{p,q}^{(1)} z_2^p \xi^q + \sum_{q=0}^{4} c_q^{(1)} \xi^q + d_1$$

$$g_2 = (4{,}20 - 1{,}92i)z_3 + \sum_{p=0}^{5}\sum_{q=0}^{5-p} a_{p,q}^{(2)} z_1^p \xi^q + \sum_{p=0}^{2}\sum_{q=0}^{4-p} b_{p,q}^{(2)} z_2^p \xi^q + \sum_{q=0}^{4} c_q^{(2)} \xi^q + d_2$$

$$g_3 = (5{,}00 + 6{,}78i)z_2^3 + \sum_{p=0}^{5}\sum_{q=0}^{5-p} a_{p,q}^{(3)} z_1^p \xi^q + \sum_{p=0}^{3}\sum_{q=0}^{4-p} b_{p,q}^{(3)} z_2^p \xi^q + \sum_{q=0}^{4} c_q^{(3)} \xi^q + d_3$$

$$g_4 = (0{,}731 - 0{,}196i)z_2^2\xi + \sum_{p=0}^{5}\sum_{q=0}^{5-p} a_{p,q}^{(4)} z_1^p \xi^q + \sum_{p=0}^{2}\sum_{q=0}^{4-p} b_{p,q}^{(4)} z_2^p \xi^q + \sum_{q=0}^{4} c_q^{(4)} \xi^q + d_4$$

$$g_5 = (2{,}29 - 3{,}47i)z_1^5\xi + \sum_{p=0}^{4}\sum_{q=0}^{5-p} a_{p,q}^{(5)} z_1^p \xi^q + \sum_{p=0}^{2}\sum_{q=0}^{4-p} b_{p,q}^{(5)} z_2^p \xi^q + \sum_{q=0}^{4} c_q^{(5)} \xi^q + d_5$$

$$g_6 = (1360{,}0 - 1430{,}0i)z_1^5\xi + \sum_{p=0}^{4}\sum_{q=0}^{5-p} a_{p,q}^{(6)} z_1^p \xi^q + \sum_{p=0}^{2}\sum_{q=0}^{4-p} b_{p,q}^{(6)} z_2^p \xi^q + \sum_{q=0}^{5} c_q^{(6)} \xi^q + d_6$$

$$g_7 = (-258{,}0 - 213{,}0i)z_1^6 + \sum_{p=0}^{5}\sum_{q=0}^{6-p} a_{p,q}^{(7)} z_1^p \xi^q + \sum_{q=0}^{3} c_q^{(7)} \xi^q + d_7$$

Notemos que se verifica la condición 2 del teorema 2.2.3. Efectivamente, $\text{LM}(g_1) = z_4$, $\text{LM}(g_2) = z_3$, $\text{LM}(g_3) = z_2^3$ y $\text{LM}(g_5) = z_1^5\xi$. Por tanto, podemos asegurar la existencia de una curva BAP para cada una de las variables z_4, z_3, z_2 y z_1, de donde se sigue que las funciones $z_4(\xi), z_3(\xi), z_2(\xi)$ y $z_1(\xi)$ son algebraicas.

Capítulo 3

La continuación analítica

En este capítulo estudiaremos cómo prolongar analíticamente las funciones implícitas obtenidas en el capítulo anterior. Si trabajamos con una inmersión holomorfa, partimos de los desarrollos de Taylor de las funciones V_j en torno al origen,

$$V_j(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{j,r}\, \xi^r, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.0.1}$$

obtenidos en un entorno del estado de referencia, $\xi_0 = 0$. Si además las funciones V_j son algebraicas, la expresión (3.0.1) es en realidad una rama de una curva algebraica definida en toda la esfera de Riemann, excepto en un conjunto finito de puntos de ramificación, cada serie describe el *germen* de la llamada *rama blanca* a lo largo de la cual Trias propone continuar analíticamente las funciones V_j. Recordemos que esta rama se selecciona imponiendo la condición física $V_j(0) \neq 0$ en todos los nodos.

Por otro lado, el radio de convergencia de las series es normalmente bastante menor que 1, luego no podremos obtener el valor $V_j(1)$ como suma de la serie de potencias (3.0.1) en $\xi_1 = 1$. Para solventar este problema utilizaremos una herramienta típica en este tipo de situaciones: los aproximantes de Padé. Estos se tratan de funciones racionales con la capacidad de reproducir los polos de la función a la que aproximan.

El teorema de Stahl, cuyo estudio en mayor profundidad desarrollaremos en el próximo capítulo, garantiza la existencia de un dominio extremal $D^* \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$, donde Γ es el sistema óptimo de arcos que une todos los puntos de ramificación de la función V_j, (óptimo en el sentido de la *capacidad logarítmica*), donde la función V_j resulta univaluada. Además, cualquier sucesión cuasi diagonal de aproximantes de Padé converge *en capacidad* a V_j en todo D^*.

En consecuencia, si el arco real $0 \leq \xi \leq 1$ queda dentro de D^*, la evaluación de los aproximantes de Padé de la diagonal principal en $\xi_1 = 1$ proporciona la solución del problema de flujo de carga.

3.1. Aproximantes de Padé

La idea de aproximar funciones mediante cocientes de polinomios (en lugar de series de potencias) surgió a finales del siglo XIX. El matemático francés Henri Padé desarrolló sistemáticamente esta técnica en su tesis doctoral presentada en 1892, bajo la dirección de Charles Hermite. En ella introdujo lo que hoy conocemos como aproximantes de Padé: fracciones racionales cuya serie de Taylor en torno al origen coincide con la serie de Taylor de una función dada hasta cierto orden. Las referencias fundamentales en esta parte son [2] y [3].

Definición 3.1.1. Sea f una función analítica en un entorno del origen,

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r.$$

Se denomina *aproximante de Padé de orden* (ℓ, m) *asociado a* f *en el punto* $z = 0$ y se denota por $[\ell/m]_f$ a la función racional

$$[\ell/m]_f(z) = \frac{P_\ell(z)}{Q_m(z)}$$

donde

$$P_\ell(z) = \sum_{r=0}^{\ell} p_r z^r \quad \text{y} \quad Q_m(z) = \sum_{r=0}^{m} q_r z^r$$

son polinomios en $\mathbb{C}[z]$ de grado a lo sumo ℓ y m respectivamente, con $q_0 = 1$, satisfaciendo

$$f(z) - [\ell/m]_f(z) = \mathcal{O}(z^{\ell+m+1}), \quad z \to 0. \tag{3.1.1}$$

En otras palabras, la condición (3.1.1) quiere decir que los desarrollos de Taylor en torno al origen de las funciones $[\ell/m]_f$ y f coinciden hasta orden $\ell + m$.

Padé colocó estos aproximantes en una tabla doblemente infinita conocida como *tabla de Padé*

$$\begin{array}{ccccc}
[0/0]_f & [1/0]_f & [2/0]_f & [3/0]_f & \cdots \\
[0/1]_f & [1/1]_f & [2/1]_f & [3/1]_f & \cdots \\
[0/2]_f & [1/2]_f & [2/2]_f & [3/2]_f & \cdots \\
[0/3]_f & [1/3]_f & [2/3]_f & [3/3]_f & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Sean $\ell, m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ destacamos tres sucesiones de la tabla de Padé de distinta naturaleza:

- $\{[\ell/m]\}_{\ell=0}^{\infty}$, m fijo (filas).
- $\{[\ell/m]\}_{m=0}^{\infty}$, ℓ fijo (columnas).
- $\{[\ell + s/\ell]\}_{\ell=0}^{\infty}$ (diagonales).

Notemos que la primera fila de la tabla de Padé es la sucesión de polinomios de Taylor.

Notemos que la condición (3.1.1) se escribe de forma equivalente como

$$Q_m(z) f(z) - P_\ell(z) = \mathcal{O}\big(z^{\ell+m+1}\big), \quad z \to 0, \tag{3.1.2}$$

de donde se sigue que P_ℓ es el polinomio de Taylor de orden $\ell+m+1$ en $z=0$ de la función $Q_m f$. En consecuencia, P_ℓ está unívocamente determinado por Q_m. Además, los coeficientes de $Q_m f$ que acompañan a las potencias $z^{\ell+1}, z^{\ell+2}, \ldots, z^{\ell+m}$, deben ser nulos. Este análisis conduce al siguiente sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes de P_ℓ y de Q_m

$$\begin{aligned} c_0 &= p_0, \\ c_1 + q_1 c_0 &= p_1, \\ c_2 + q_1 c_1 + q_2 c_0 &= p_2, \\ &\vdots \\ c_\ell + q_1 c_{\ell-1} + q_2 c_{\ell-2} + \cdots + q_\ell c_0 &= p_\ell, \\ c_{\ell+1} + q_1 c_\ell + q_2 c_{\ell-1} + \cdots + q_{\ell+1} c_0 + \cdots + q_m c_{\ell-m+1} &= 0, \\ c_{\ell+2} + q_1 c_{\ell+1} + q_2 c_\ell + \cdots + q_{\ell+2} c_0 + \cdots + q_m c_{\ell-m+2} &= 0, \\ &\vdots \\ c_{\ell+m} + q_1 c_{\ell+m-1} + q_2 c_{\ell+m-2} + \cdots + q_m c_\ell &= 0, \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

donde por consistencia en la notación se entiende que $c_r = 0$ si $r < 0$. El sistema (3.1.3) se trata de un sistema $\ell+m+1$ ecuaciones en las $\ell+m+1$ incógnitas $(p_0, \ldots, p_\ell, q_1, \ldots, q_m)$. Notemos que las $\ell+1$ primeras ecuaciones del sistema (3.1.3) proporcionan los coeficientes de P_ℓ en función de los de Q_m, por tanto, para que el sistema (3.1.3) tenga solución, es suficiente que el sistema

$$\begin{pmatrix} c_\ell & c_{\ell-1} & c_{\ell-2} & \cdots & c_{\ell-m+1} \\ c_{\ell+1} & c_\ell & c_{\ell-1} & \cdots & c_{\ell-m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\ell+m-2} & c_{\ell+m-3} & c_{\ell+m-4} & \cdots & c_{\ell-1} \\ c_{\ell+m-1} & c_{\ell+m-2} & c_{\ell+m-3} & \cdots & c_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{m-1} \\ q_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{\ell+1} \\ c_{\ell+2} \\ \vdots \\ c_{\ell+m-1} \\ c_{\ell+m} \end{pmatrix} \tag{3.1.4}$$

tenga solución. En caso de que la matriz del sistema anterior sea invertible, el problema (3.1.2) tiene solución única.

La existencia y unicidad del aproximante de Padé $[\ell/m]$ depende de la invertibilidad de la matriz del sistema (3.1.4). En este sentido, puede estudiarse del determinante de dicha matriz para cada $\ell, m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, que denotaremos por $C(\ell/m)$, y de forma análoga a la tabla de aproximantes de Padé, se construye la denominada C-tabla, en la que se coloca el valor $C(\ell/m)$ en la posición (ℓ, m). Así, se obtiene un criterio exhaustivo para decidir, en cada par de índices (ℓ, m), si el aproximante de Padé $[\ell/m]$ existe y es único. Cuando $C(\ell/m) \neq 0$, la matriz asociada al sistema (3.1.4) posee rango completo; en consecuencia, $[\ell/m]$ existe, es único y los polinomios P_ℓ y Q_m alcanzan exactamente los grados ℓ y m. Por el contrario, si $C(\ell/m) = 0$, la dimensión del núcleo de la matriz del sistema (3.1.4) es $d \geq 1$ y su rango es $m - d$. En este caso podemos encontrarnos con 2 situaciones:

En primer lugar, si podemos resolver el sistema (3.1.4), será compatible indeterminado y tendrá d grados de libertad, en consecuencia, perdemos d condiciones de interpolación en la ecuación (3.1.2), y por tanto,

$$f(z) - [\ell/m]_f(z) = \mathcal{O}(z^{\ell+m-d+1}), \quad z \to 0.$$

y por la unicidad de los aproximantes de Padé,

$$[\ell/m] = [\ell+s/m+t] \quad \text{para cada} \quad s+t \leq d-1, s \geq 0, t \geq 0.$$

En segundo lugar, si $C(\ell/m) = 0$ y el sistema (3.1.4) no tiene solución, el aproximante $[\ell/m]$ no existe.

A mayores del razonamiento anterior, la tabla de aproximantes de Padé encierra una estructura mucho más rica. En su tesis doctoral, Padé abordó de manera sistemática el estudio de la disposición de los ceros de la C-tabla y obtuvo una descripción global y geométrica de la tabla de aproxiamntes de Padé, que podemos encontrar en [3, p. 20].

Teorema 3.1.2. (Padé) La tabla de Padé puede dividirese completamente en bloques de dimensión $d \times d$, $d \geq 1$. Sea $[\ell/m]$ el único aproximante de Padé de dicho bloque que hace $\ell + m$ mínimo. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $[\ell/m]$ existe y su numerador y denominador son de rango ℓ y m respectivamente.
2. $C(\ell + s/m + t) = 0$ para cada $1 \geq s \geq d - 1$ y $1 \geq t \geq d - 1$ y $C(\ell/m) \neq 0$ en caso contrario.
3. $[\ell/m] = [\ell + s/m + t]$ para cada $s + t \leq d - 1$, $s \geq 0, t \geq 0$.
4. $[\ell/m] = [\ell + s/m + t]$ no existe para cada $s + t \geq d$, $d - 1 \geq s \geq 1$ o $d - 1 \geq t \geq 1$.

El teorema de Padé establece que los ceros de los determinantes $C(\ell/m)$ particionan la tabla de Padé en bloques rectangulares disjuntos de dimensión $d \times d$. En cada bloque está situado en la esquina inferior izquierda el aproximante $[\ell/m]$, con $\ell + m$ mínimo, cuyo numerador y denominador, P_ℓ y Q_m, alcanzan exactamente los grados ℓ y m. Para las casillas internas que satisfacen $s + t \leq d - 1$ (desplazamientos $[\ell + s \,/\, m + t]$ dentro del bloque) el determinante se anula, pero el sistema sigue siendo compatible, sin embargo, al perder condiciones de interpolación el aproximante de Padé será $[\ell/m]$. En cambio, cuando los desplazamientos cumplen $s+t \geq d$ con $1 \leq s, t \leq d-1$, el rango del sistema disminuye hasta hacer las ecuaciones incompatibles, y el aproximante no existe, dejando la casilla vacía. Fuera de los bloques todos los determinantes son no nulos y cada entrada produce un nuevo aproximante coprimo; así, la tabla completa aparece como una alternancia de regiones activas, donde surgen aproximantes inéditos, y bloques de repetición que señalan el agotamiento de la información aportada por la serie.

Recordemos que nuestro objetivo en este capítulo es calcular los valores $V_j(1)$ para cada $1 \leq j \leq n$ como límite de una sucesión de aproximantes de Padé. Ahora bien, dichos aproximantes no tienen por qué existir para todos los órdenes. Surge entonces la siguiente pregunta: ¿podemos hacer que la sucesión avance indefinidamente, o existe un índice a partir del cual deja de existir cualquier nuevo aproximante? El siguiente teorema debido a Baker en 1973 da respuesta a esta pregunta.

Teorema 3.1.3. [3, p. 24] Sea $f(z) = \sum_{r \geq 0} c_r z^r$ una serie de potencias formal con $c_0 \neq 0$. Entonces:

- Para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo existe una sucesión de enteros no negativos $\{\ell_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que el aproximante $[\ell_j/m]$ existe para cada $j \in \mathbb{N}$.
- Para cada $\ell \in \mathbb{Z}^+$ fijo existe una sucesión $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ tal que el aproximante $[\ell/m_j]$ existe para cada $j \in \mathbb{N}$.
- Para cada $J \in \mathbb{Z}^+$ fijo existe una sucesión $\{\ell_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que el aproximante $[\ell_j + J/\ell_j]$ existe para cada $j \in \mathbb{N}$.

3.2. Cálculo de los aproximantes de Padé asociados al problema de flujo de carga

En [25] se propone el siguiente método de recurrencia para calcular los coeficientes de los desarrollos de Taylor de las funciones $V_j(\xi)$ en un entorno del estado de referencia ξ_0. En este artículo, el procedimiento se detalla solamente para nodos de tipo PQ. Nuestra contribución en este ámbito, ha sido extender y detallar este procedimiento para nodos de tipo PV.

Recordemos que en la inmersión holomorfa (2.1.13) de las ecuaciones de flujo de carga aparecen dos ecuaciones.

$$V_j^{\diamond}(\xi)\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}V_k(\xi) = \xi S_j^*, \tag{3.2.1a}$$

$$V_j(\xi)\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* V_k^{\diamond}(\xi) = \xi S_j, \tag{3.2.1b}$$

por cada nodo $j \in \mathcal{PQ}$ y dos ecuaciones

$$V_j(\xi)V_j^{\diamond}(\xi) = 1 + \xi\left(V_{j,sp}^2 - 1\right), \tag{3.2.2a}$$

$$V_j^{\diamond}(\xi)\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}V_k(\xi) + V_j(\xi)\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^* V_k^{\diamond}(\xi) = 2\xi P_j, \tag{3.2.2b}$$

por cada nodo $j \in \mathcal{PV}$.

Por tratarse de una inmersión holomorfa, podemos desarrollar en serie de potencias en torno al punto $\xi_0 = 0$ las funciones V_j y $V_j^{\diamond}$ para cada $1 \le j \le n$. En particular, existe $\rho > 0$ con $B(0,\rho) \subseteq \Omega_0'$ tal que

$$V_j(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{j,r}\xi^r \quad \text{y} \quad V_j^{\diamond}(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{j,r}^*\xi^r \quad \text{si} \quad |\xi| < \rho, \quad 1 \le j \le n. \tag{3.2.3}$$

En primer lugar, es claro que

$$c_{j,0} = V_j(0) = 1, \quad 1 \le j \le n. \tag{3.2.4}$$

Además, puesto que $V_0 = 1$, podemos suponer que $c_{0,0} = 1$ y $c_{0,r} = 0$ para cada $r \ge 1$.

Sustituyendo las funciones V_j y $V_j^{\diamond}$ para cada $1 \le j \le n$ por su desarrollo en serie de potencias en la ecuación (3.2.1a) y utilizando el producto de Cauchy para series, se tiene que

$$V_j^{\diamond}(\xi)\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}V_k(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{r} c_{j,q}^*\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,r-q}\right)\xi^r = \xi S_j^*, \quad |\xi| < \rho, \quad j \in \mathcal{PQ}. \tag{3.2.5}$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado de la ecuación anterior se sigue que

$$\begin{aligned} c_{j,0}^*\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,1} \;+\; c_{j,1}^*\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,0} \;&=\; S_j^*, \quad r = 1,\\ \sum_{q=0}^{r} c_{j,q}^*\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,r-q} &= 0, \quad r \ge 2, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

para cada nodo $j \in \mathcal{PQ}$. De manera similar, sustituyendo las funciones V_j y $V_j^\diamond$ para cada $1 \leq j \leq n$ por su desarrollo en serie de potencias en las ecuaciones (3.2.2a) se obtiene la igualdad

$$V_j(\xi)\, V_j^\diamond(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{r} c_{j,q}\, c_{j,r-q}^* \right) \xi^r = 1 + \xi \left(V_{j,\text{sp}}^2 - 1 \right), \quad |\xi| < \rho, \quad j \in \mathcal{PV},$$

e igualando los coeficientes de los términos de mismo grado,

$$\begin{aligned} c_{j,0}\, c_{j,1}^* \;+\; c_{j,1}\, c_{j,0}^* &= V_{j,\text{sp}}^2 - 1, \quad r = 1, \\ \sum_{q=0}^{r} c_{j,q}\, c_{j,r-q}^* &= 0, \quad r \geq 2. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Por último, repitiendo el razonamiento con la ecuación (3.2.2b) para cada nodo $j \in \mathcal{PV}$, se obtienen las relaciones.

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^{1} \left(c_{j,q}^* \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,1-q} \;+\; c_{j,q} \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^*\, c_{k,1-q}^* \right) &= 2P_j, \quad r = 1, \\ \sum_{q=0}^{r} \left(c_{j,q}^* \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,r-q} \;+\; c_{j,q} \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^*\, c_{k,r-q}^* \right) &= 0, \quad r \geq 2. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Estas relaciones nos permitirán obtener de forma recurrente los coeficientes. En primer lugar, si $r = 1$, sustituyendo $c_{j,0} = 1$ para cada $0 \leq j \leq n$ en la ecuación (3.2.1a) obtenemos la relación lineal

$$\sum_{k=1}^{n} Y_{jk} c_{k,1} = S_j^*, \quad j \in \mathcal{PQ}, \tag{3.2.9}$$

pues el término $c_{j,1}^* \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} \cdot 1 = 0$ ya que $\sum_{k=0}^{n} Y_{jk} = 0$ para cada $1 \leq j \leq n$. A la vista de lo anterior, consideramos la matriz $Y_{red} \in \mathfrak{M}_\mathfrak{n}(\mathbb{C})$ que es la matriz que se obtiene de la matriz de admitancias eliminando la primera fila y columna. Escribimos

$$Y_{red} = G + iB \quad \text{con} \quad G, B \in \mathfrak{M}_\mathfrak{n}(\mathbb{R}).$$

Además,

$$c_{j,r} = x_{j,r} + i y_{j,r} \quad \text{con} \quad x_{j,r}, y_{j,r} \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad r \geq 0.$$

Separando la ecuación (3.2.9) en partes reales e imaginarias se obtienen para cada $j \in \mathcal{PQ}$ las ecuaciones reales

$$\text{Re} \left(\sum_{k=1}^{n} Y_{jk} c_{k,1} \right) = \sum_{k=1}^{n} G_{jk} x_{k,1} - \sum_{k=1}^{n} B_{jk} y_{k,1} = P_j,$$

y

$$\text{Im} \left(\sum_{k=1}^{n} Y_{jk} c_{k,1} \right) = \sum_{k=1}^{n} G_{jk} x_{k,1} + \sum_{k=1}^{n} B_{jk} y_{k,1} = -Q_j,$$

donde $S_j = P_j + iQ_j$.

Por otro lado, la ecuación (3.2.2a) determina completamente la parte real de los coeficientes $c_{j,1}$ para cada $j \in \mathcal{PV}$. Efectivamente, sustituyendo $c_{j,0} = 1$ en dicha ecuación

$$c_{j,0}c_{j,1}^* + c_{j,1}c_{j,0}^* = c_{j,1}^* + c_{j,1} = 2\mathrm{Re}(c_{j,1}) = V_{j,\mathrm{sp}}^2 - 1,$$

luego

$$x_{j,1} = \mathrm{Re}(c_{j,1}) = \frac{V_{j,\mathrm{sp}}^2 - 1}{2}, \quad j \in \mathcal{PV}.$$

Por último, si llamamos

$$\Phi_q = \left(c_{j,q}^* \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,1-q} \right),$$

el lado izquierdo de la ecuación (3.2.2b) resulta

$$\sum_{q=0}^{1} \left(\Phi_q + \Phi_q^*\right) = \sum_{q=0}^{1} 2\mathrm{Re}(\Phi_q) = 2\mathrm{Re}\left(\sum_{q=0}^{1} \Phi_q\right) = 2P_j.$$

de donde obtenemos una nueva ecuación real para cada nodo $j \in \mathcal{PV}$.

Si $|\mathcal{PQ}| = \ell$ y $G_\ell, B_\ell \in \mathfrak{M}_{\ell\times n}(\mathbb{R})$ son las matrices formadas por las ℓ primeras filas de G y B respectivamente, las ecuaciones obtenidas se representan de forma matricial como

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{b_1}, \tag{3.2.10}$$

donde la matriz $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$ y los vectores $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{b_1} \in \mathbb{R}^{2n}$ son

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} G_\ell & -B_\ell \\ B & G \\ 2I_{n-\ell} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{1,n} \\ y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{1,n} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_\ell \\ \vdots \\ P_n \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_\ell \\ V_{n-\ell,sp}^2 - 1 \\ \vdots \\ V_{n,sp}^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Si $r \geq 2$, despejando y sustituyendo los valores $c_{j,0}, c_{j,1}, \ldots, c_{j,r-1}$ que han sido calculados anteriormente en la ecuación (3.2.6) se llega a la igualdad

$$\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,r-q} = -\sum_{q=1}^{r-1} c_{j,q}^* \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,r-q}, \tag{3.2.11}$$

para cada nodo $j \in \mathcal{PQ}$, y haciendo lo mismo en las ecuaciones (3.2.7) y (3.2.8) se obtienen para cada $j \in \mathcal{PV}$ las igualdades

$$2\mathrm{Re}(c_{j,r}) = -\sum_{q=1}^{r-1} c_{j,q}\, c_{j,r-q}^*, \tag{3.2.12}$$

y

$$\sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,r-q} \;+\; \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^{*}\, c_{k,r-q}^{*} = -\sum_{q=1}^{r-1}\left(c_{j,q}^{*} \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}\, c_{k,r-q} \;+\; c_{j,q} \sum_{k=0}^{n} Y_{jk}^{*}\, c_{k,r-q}^{*} \right). \quad (3.2.13)$$

Recalcamos que el lado derecho de las ecuaciones (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13) es conocido, pues se trata de sumas y productos de los términos $c_{j,0}, c_{j,1}, \ldots, c_{j,r-1}$ que han sido calculados anteriormente. Por otro lado, el lado izquierdo de las ecuaciones anteriores se mantiene constante para cada $r = 1, 2, \ldots$, por tanto, al separar estas ecuaciones en partes reales e imaginarias se genera un sistema de ecuaciones

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x_r} = \boldsymbol{b_r} \quad (3.2.14)$$

cuya matriz $\boldsymbol{A}$ es constante para cada $r \geq 1$, el vector $\boldsymbol{x}_r = (x_{r,1}, \ldots, x_{r,n}, y_{r,1}, \ldots, y_{r,n})^T$ y $\boldsymbol{b}_r$ es el vector resultante de separar en partes reales e imaginarias el lado derecho de las igualdades (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13) y ordenar los términos resultantes con la misma estructura con la que se construyó el vector $\boldsymbol{b}_1$. En consecuencia, si la matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible, podremos obtener los coeficientes del desarrollo de Taylor en torno al origen de las funciones V_j hasta orden cualquiera. En términos del coste computacional, el procedimiento se basa en resolver r sistemas lineales, cuya matriz permanece constante, por tanto, es suficiente con calcular la factorización de la matriz A una única vez. En definitiva, hemos construido un proceso para obtener recursivamente el valor de los coeficientes $c_{j,q}$ siguiendo el esquema

$$V_j(0) \xleftrightarrow{(3.2.4)} c_{j,0} \xrightarrow{(3.2.10)} c_{j,1} \xrightarrow{(3.2.14)} c_{j,2} \xrightarrow{(3.2.14)} \cdots \xrightarrow{(3.2.14)} c_{j,d}$$

Una vez obtenidos los coeficientes $c_{j,0}, c_{j,1}, \ldots, c_{j,d}$, podemos expresar las funciones V_j como

$$V_j(\xi) = \sum_{r=0}^{d} c_{j,r}\xi^r + o(\xi^d), \quad \xi \to 0,$$

para cada $1 \leq j \leq n$.

El aproximante de Padé de orden (ℓ_d, m_d) asociado a la función V_j en el origen es la fracción racional

$$[\ell_d/m_d]_{V_j}(\xi) = \frac{p_{j,0} + p_{j,1}\xi + \ldots + p_{j,\ell}\xi^{\ell_d}}{1 + q_{j,1}\xi + \ldots + q_{j,m}\xi^{m_d}}. \quad (3.2.15)$$

con $\ell_d + m_d = d$, y

$$V_j(\xi) - [\ell/m]_{V_j}(\xi) = \mathcal{O}(\xi^{d+1}), \quad \xi \to 0. \quad (3.2.16)$$

La elección más habitual para los grados de los polinomios que definen la fracción $[\ell_d/m_d]_{V_j}$ es $\ell_d = \lceil d/2 \rceil$ y $m_d = d - \ell$, donde $\lceil . \rceil$ denota la parte entera de un número real. Esta elección genera aproximantes situados en la diagonal o subdiagonal principal de la tabla de aproximantes de Padé, lo que permite utilizar el teorema de Stahl para asegurar que $V_j(1)$ es el límite de la sucesión $[\ell_d/m_d]_{V_j}(1)$ cuando $d \to \infty$. Llamaremos *aproximantes cuasidiagonales* a los aproximantes de Padé definidos de esta forma.

Para el calculo de los aproximantes (3.2.15), debemos resolver la ecuación (3.1.4) para obtener el valor de los coeficientes $q_{j,1}, q_{j,2}, \ldots, q_{j,m}$ y posteriormente obtener $p_{j,0}, p_{j,1}, \ldots, p_{j,\ell}$ resolviendo las ℓ primeras ecuaciones del sistema (3.1.3). Es posible que en este proceso topemos con valores de d (y por lo tanto de ℓ_d y m_d) para los cuales el sistema (3.1.4) no tenga solución, sin embargo, el teorema 3.1.3 garantiza la posibilidad de encontrar un valores de d para los cuales exista el aproximante $[\ell_d/m_d]_{V_j}$ a medida que $d \to \infty$. En cada uno de los pasos en los que el sistema (3.1.4) tiene solución obtendremos una aproximación al valor de $V_j(1)$,

$$V_{j,d} = [\ell_d/m_d]_{V_j}(1).$$

La pregunta es entonces, ¿cuántos coeficientes en el desarrollo de Taylor de V_j y respectivos aproximantes hemos de calcular para obtener una aproximación a V_j lo suficientemente fiable?, es decir, ¿hasta qué valor de d debemos obtener el coeficiente $c_{j,d}$ y el aproximante $[\ell_d/m_d]_{V_j}$?

Numéricamente, utilizaremos el siguiente criterio: fijado $\epsilon > 0$ para cada $d \in \mathbb{N}$ calculamos el valor

$$\begin{aligned} \eta_d = \text{máx} \Bigg\{ & \max_{j \in \mathcal{PQ} \cup \mathcal{PV}} \left| \operatorname{Re}\left(V_{j,d}^* \left(\sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_{k,d} - S_j^* \right) \right) \right|, \\ & \max_{j \in \mathcal{PQ}} \left| \operatorname{Im}\left(V_{k,d}^* \sum_{k=0}^{n} Y_{jk} V_{k,d} - S_j^* \right) \right| \Bigg\} \end{aligned}$$

Si $\eta_d < \epsilon$ tomaremos $V_{1,d}, \ldots, V_{n,d}$ como la solución al problema de flujo de carga, si no, repetiremos el proceso anterior incrementando el valor de d en una unidad, es decir calcularemos un nuevo término del desarrollo de Taylor de la función V_j y un nuevo aproximante de Padé que aumente el orden de interpolación a la función V_j en una unidad.

Capítulo 4

El teorema de Stahl

4.1. Teoría del potencial en el plano complejo

La teoría del potencial desempeña un papel esencial en la teoría de la aproximación. Su marco variacional permite describir la distribución óptima de nodos y ceros en problemas de interpolación y polinomios ortogonales, mediante las llamadas medidas de equilibrio. Además, conceptos como la capacidad logarítmica proporcionan herramientas precisas para estimar la velocidad de convergencia y los errores de aproximación polinómica y racional, en particular en la aproximación de Padé.

Quizá la manera más sencilla de describir los aspectos principales de la teoría del potencial sea a través de su interpretación electrostática. Concretamente, imaginemos el problema de encontrar la distribución de equilibrio de una carga unitaria sobre un conductor. Consideremos el conductor como un conjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$, y supongamos que la carga se distribuye como una medida de probabilidad μ sobre E. Puesto que la repulsión entre cargas es inversamente proporcional a su distancia, en ausencia de campo externo la energía total de la distribución de carga puede representarse por

$$\iint \frac{1}{\log|z-w|}\, d\mu(z)\, d\mu(w). \tag{4.1.1}$$

Encontrar la distribución de equilibrio significa entonces encontrar la medida μ que minimiza la expresión (4.1.1).

En esta sección formalizaremos los aspectos matemáticos fundamentales sobre la teoría del potencial.

4.1.1. Teoría del potencial y capacidad logarítmica

Definición 4.1.1. Sea μ una medida de Borel finita en $\mathbb{C}$ con soporte compacto. Su *potencial* es la función $p_\mu : \mathbb{C} \to$ definida por

$$p_\mu(z) := \int \frac{1}{\log|z-w|}\, d\mu(w), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Su *energía*, $I(\mu)$, se define como

$$I(\mu) := \iint \frac{1}{\log|z-w|}\, d\mu(z)\, d\mu(w) = \int p_\mu(z)\, d\mu(z).$$

Se dice que un subconjunto $E \subset \mathbb{C}$ es *polar* si

$$I(\mu) = +\infty$$

para cada medida de Borel μ finita y no idénticamente nula, cuyo soporte, $\operatorname{supp}\mu$, sea un conjunto compacto contenido en E.

Se dice que una propiedad se cumple *en casi todas partes* de un conjunto $U \subseteq \mathbb{C}$ si se cumple en $U \setminus E$, con E un conjunto polar.

Los conjuntos polares son entonces aquellos que solamente soportan medidas de energía infinita. Estos conjuntos verifican las siguientes propiedades:

- Los subconjuntos de un conjunto polar son polares.
- Los conjuntos unipuntuales son polares. Además, las uniones numerables de conjuntos polares son polares.
- La propiedad de ser polar es invariante bajo transformaciones conformes.

Como cabe esperar, en la teoría del potencial el concepto de conjunto polar sirve para representar un papel de "conjuntos despreciables" de una forma similar a los conjuntos de medida nula en teoría de la medida. De hecho, se puede probar que si un subconjunto $E \subset \mathbb{C}$ es polar entonces tiene medida de Lebesgue nula. Sin embargo el recíproco en general no es cierto, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. El intervalo cerrado $E = [a, b]$ es un conjunto de medida planar de Lebesgue nula pero no es polar.

En efecto, consideremos la medida de Lebesgue restringida al intervalo, es decir $d\mu = |dz|$. La energía asociada a esta medida es

$$I(\mu) = -\int_a^b \int_a^b \log|z-w|\, dz\, dw.$$

Mediante el cambio de variables $x = z - w$, $y = w$, se obtiene

$$I(\mu) = -\int_a^b \int_{a-b}^{b-a} \log|x|\, dx\, dy < +\infty,$$

pues la función $\log|x|$ es localmente integrable en torno al 0. Concluimos que ningún intervalo de la recta real es un conjunto polar, y en consecuencia, $\mathbb{R}$ tampoco es un conjunto polar.

Definición 4.1.3. Sea $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto compacto y $\mathcal{P}(K)$ el conjunto de las medidas de probabilidad de Borel sobre K. Si existe una medida $\omega_K \in \mathcal{P}(K)$ tal que

$$\omega_K = \inf_{\mu \in \mathcal{P}(K)} I(\mu)$$

se dice que ω_K es la *medida de equilibrio* de K.

En [16, p. 58] se prueba que para cada compacto $K \subset \mathbb{C}$ existe una medida de equilibrio ω_K. Además si K no es polar esta es única y su soporte se encuentra contenido en la frontera distinguida del conjunto, $\omega_{\mathrm{K}} \subset \partial_e K$.

La definición de conjunto polar no resulta eficaz a la hora de identificar cuando un conjunto es polar o no. Además, resulta conveniente tener una forma de cuantificar “cuanto de cerca está un conjunto de ser polar”. Con este objetivo se desarrolla el siguiente concepto, que será fundamental en el resto del capítulo.

Definición 4.1.4. La *capacidad logarítmica* de un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ se define como

$$\operatorname{cap}(K) = e^{-I(\omega_K)}.$$

donde ω_K es medida de equilibrio de K.

En la definición anterior se entiende que $e^{-\infty} = 0$, de modo que $\operatorname{cap}(E) = 0$ precisamente cuando E es polar.

Proposición 4.1.5. (Propiedades de la capacidad logarítmica).

1. Si $K_1 \subset K_2$, entonces $\operatorname{cap}(K_1) \leq \operatorname{cap}(K_2)$.
2. Si $K \subset \mathbb{C}$, entonces

$$\operatorname{cap}(\alpha K + \beta) = |\alpha| \operatorname{cap}(K), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Demostración. La propiedad 1 se siguen inmediatamente de la definición 4.1.4.

Para probar la propiedad 2, consideremos la transformación afín del plano complejo $T(z) = \alpha z + \beta$ y la medida transportada $\mu \circ T^{-1}$. Entonces $\operatorname{supp} \mu \subset K$ si y sólo si

$$\operatorname{supp} \mu T^{-1} \subset \alpha K + \beta,$$

y además, la energía de esta medida será

$$I(\mu \circ T^{-1}) = -\iint \log|T(z) - T(w)|\, d\mu(z)\, d\mu(w).$$

Como $|T(z)-T(w)| = |\alpha||z-w|$, la integral anterior resulta

$$-\iint \log|T(z)-T(w)|\,d\mu(z)\,d\mu(w) = -\iint \log\big(|\alpha||z-w|\big)\,d\mu(z)\,d\mu(w)$$
$$= -\iint \log|z-w|\,d\mu(z)\,d\mu(w) - \log|\alpha| \iint d\mu(z)\,d\mu(w).$$

Por ser μ una medida de probabilidad, la integral doble del término constante es igual a 1, y por tanto se concluye que

$$I(\mu\circ T^{-1}) = I(\mu) - \log|\alpha|. \tag{4.1.2}$$

Por ser K y $\alpha K+\beta$ conjuntos compactos podemos considerar sus respectivas medidas de equilibrio, ω_k y $\omega_{\alpha K+\beta}$. De la igualdad (4.1.2) se sigue que

$$\omega_{\alpha K+\beta} = \omega_K - \log|\alpha|$$

Basta tomar exponenciales negativas en la igualdad anterior para concluir el resultado. $\square$

La capacidad logarítmica de un conjunto da información sobre el tamaño de este. Por ejemplo:

- Si K es un disco de radio r, entonces $\operatorname{cap}(K) = r$.
- Si K es un intervalo de longitud h, entonces $\operatorname{cap}(K) = h/4$.

Además, a partir de formas de otras formas de cuantificar el tamaño de un conjunto compacto se pueden hacer algunas estimaciones de su capacidad logarítmica, por ejemplo:

- Si K es conexo
$$\frac{\operatorname{diam}(K)}{4} \le \operatorname{cap}(K) \le \frac{\operatorname{diam}(K)}{2}.$$
- Si K es una curva rectificable de longitud l, entonces $\operatorname{cap}(K) \le l/4$.
- Si K es un subconjunto del círculo unitario de medida de arco a, entonces
$$\operatorname{cap}(K) \ge \sin(a/4).$$

4.1.2. Funciones de Green

La teoría del potencial no solamente está conectada con la teoría de la aproximación, también está estrechamente ligada a la solución del problema de Dirichlet. Recordamos que este problema de ecuaciones en derivadas parciales consiste en construir una solución de la ecuación de Laplace en el disco, sujeta a condiciones frontera predeterminadas. En concreto, la teoría del potencial resulta útil a la hora de resolver este problema en un dominio genérico del plano complejo Ω. Esta teoría se desarrolla de manera exhaustiva en [16, Cap. 4]. En este caso, el problema se trata de encontrar una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{C})$ satisfaciendo

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, & z\in\Omega, \\ \lim_{z\to\zeta} u(z) = \varphi(\zeta), & \zeta \in E \subseteq \partial\Omega\setminus F, \end{cases} \tag{4.1.3}$$

donde φ es una función continua en E, un subconjunto adecuado del borde del dominio. En este contexto, al igual que en el problema de Dirichlet clásico, surge el concepto de *función de Green* como forma de obtener representaciones explícitas de las funciones armónicas en términos de los datos frontera. A su vez esta función nos será de utilidad en la caracterización geométrica del sistema óptimo de arcos analíticos en el que se acumularán los ceros de los aproximantes de Padé a medida que aumentamos su orden.

Definición 4.1.6. Sea Ω un subdominio propio de $\widehat{\mathbb{C}}$. Una *función de Green* para Ω es una aplicación $g_\Omega : \Omega \times \Omega \to (-\infty, \infty]$, tal que, para cada $w \in \Omega$

1. $g_\Omega(\cdot, w)$ es armónica en $\Omega \setminus \{w\}$ y acotada fuera de cada entorno de w.
2. $g_\Omega(w, w) = \infty$, y cuando $z \to w$ se tiene que

$$g_\Omega(z, w) = \begin{cases} \log|z| + O(1), & w = \infty, \\ -\log|z - w| + O(1), & w \neq \infty. \end{cases}$$

3. $g_\Omega(z, w) \to 0$ cuando $z \to \zeta$, para casi todo $\zeta \in \partial\Omega$.

Por ejemplo, si $\Omega = B(0, 1)$, entonces la función

$$g_\Omega(z, w) := \log\left|\frac{1 - z\overline{w}}{z - w}\right|$$

es una función de Green para Ω.

En [16, p.106-111] se realiza un estudio detallado de las propiedades de estas funciones. En particular, la función g_Ω existe si y solo si $\operatorname{cap}(\partial\Omega) > 0$ y en ese caso es única. Además, g_Ω es simétrica en sus dos variables.

4.2. El teorema de Stahl

El objeto fundamental de esta sección es proporcionar el teorema de Stahl, siguiendo principalmente [20]. El marco de esta sección será la esfera de Riemann, $\widehat{\mathbb{C}}$. Puesto que la propiedad de ser polar es invariante bajo transformaciones conformes, podemos extender la noción de capacidad nula a $\widehat{\mathbb{C}}$. Recordemos que si $R > 0$ y f es una función definida y holomorfa en el disco $B(0, R) \subset \mathbb{C}$ entonces la función

$$g(w) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/R\}$ y se dice que g es *holomorfa en el infinito*. Notemos que si

$$[\ell/m]_f(z) = \frac{P_\ell(z)}{Q_m(z)}$$

es el aproximante de Padé de orden (ℓ, m) asociado a la función f en el punto $z = 0$, también es el aproximante de Padé de orden (ℓ, m) asociado a g en el punto $z = \infty$, pues tras el cambio de variable $w = 1/z$ la condición interpolatoria

$$Q_m(z)f(z) - P_\ell(z) = \mathcal{O}\big(z^{\ell+m+1}\big), \quad z \to 0,$$

es equivalente a la condición

$$Q_m(w)g(w) - P_\ell(w) = \mathcal{O}\big(w^{\ell+m+1}\big), \quad z \to \infty.$$

Así, de ahora en adelante supondremos que la función f es holomorfa en el infinito y desarrollaremos el estudio de la convergencia de los aproximantes de Padé en torno a este punto. Además, supondremos que todas las singularidades de f se encuentran contenidas en un conjunto compacto $K \subset \widehat{\mathbb{C}}$ con $\operatorname{cap}(K) = 0$. Introducimos la notación $\mathcal{G}$ para denotar la clase de funciones que satisfacen las dos hipótesis anteriores.

Observación 4.2.1. La clase de funciones $\mathcal{G}$ se trata de una clase bastante amplia. En particular, incluye todas las funciones algebraicas analíticas en el infinito, pues el conjunto de singularidades de una función algebraica es finito, y por tanto polar. Por ejemplo, sea f definida por

$$f(z) = \sqrt{1 - \frac{2}{z^2} + \frac{9}{z^4}}. \tag{4.2.1}$$

Veamos que f es algebraica y por tanto $f \in \mathcal{G}$. En primer lugar, para probar que f es holomorfa en el infinito hacemos el cambio de variable $w = 1/z$ y definimos $g(w) = f(1/z)$. Entonces

$$g(w) = \sqrt{1 - 2w^2 + 9w^4}.$$

La función g define dos gérmenes de función holomorfa en torno al origen, de acuerdo con la determinación de la raíz cuadrada que se adopte; cualquiera de ellos induce un germen holomorfo en torno al punto del infinito al deshacer el cambio.

Para probar que f es algebraica basta encontrar un polinomio $P \in \mathbb{C}[z, \zeta]$ tal que $P(z, f(z)) = 0$.

Elevando al cuadrado y multiplicando por z^4, ambos lados de la igualdad (4.2.1) se obtiene

$$z^4 f(z)^2 = z^4 - 2z^2 + 9$$

de donde se sigue que f satisface la ecuación

$$P(z, f) = z^4 f^2 - z^4 + 2z^2 - 9 = 0,$$

luego f es una función algebraica.

Por otro lado, la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-2^n}, \quad |z| > 1,$$

no pertenece a la clase $\mathcal{G}$. Efectivamente, por tratarse de una serie lacunar no es posible prolongar analíticamente esta función más allá de su frontera, la circunferencia unitaria ∂D. Este conjunto se convierte en la frontera natural para la continuación analítica de f, por tanto, todos los puntos de ∂D son singularidades para f y $\operatorname{cap}(\partial D) = 1 > 0$.

El objeto fundamental de este capítulo es el estudio de la convergencia de los aproximantes de Padé hacia las funciones de la clase $\mathcal{G}$. Pese a que el teorema de Stahl es el resultado clave de este capítulo, un teorema anterior, el teorema de Nutall-Pomerenke (1973) representa un primer paso hacia nuestro objetivo.

Teorema 4.2.2. (Teorema de Nuttall–Pommerenke)[14],[15]. Sean $f \in \mathcal{G}$ y univaluada en $\mathbb{C} \setminus E$ y $[\ell/m]_f$ el aproximante de Padé de orden (ℓ, m) asociado a f en $z = \infty$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, y para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus E$, se tiene que

$$\lim_{\ell,m\to\infty} \operatorname{cap}\left\{z \in K : \left|f(z) - [\ell/m]_f(z)\right| \geq \varepsilon^{\ell+m}\right\} = 0,$$

donde la sucesión de índices $(\ell, m) \in \mathbb{N}^2$ debe satisfacer

$$\delta\ell \leq m \leq \frac{\ell}{\delta} \quad \text{cuando } \ell, m \to \infty. \tag{4.2.2}$$

Motivados por el teorema de Nuttall–Pommerenke, se introduce la noción de *convergencia en capacidad*, análoga a la de convergencia en medida.

Definición 4.2.3. Sean D un dominio del plano complejo y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en D. Se dice que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge en capacidad a la función f en los compactos de D* si para cada subsconjunto compacto $K \subseteq D$ y para cada $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{cap}\big(\{z \in K : |f(z) - f_n(z)| > \varepsilon\}\big) = 0.$$

Con esta definición, el teorema de Nuttall-Pomerenke establece que los aproximantes de Padé de una función $f \in \mathcal{G}$ univaluada, que cumplen la condición (4.2.2) convergen en capacidad hacia f en las regiones donde f es analítica salvo en un conjunto polar. Así, la convergencia en capacidad es compatible con la divergencia puntual.

En el caso en el que la función $f \in \mathcal{G}$ es multivaluada, como la mayoría de funciones algebraicas, el teorema de Nuttall-Pomerenke no es suficiente. Es en esta situación cuando resulta interesante el teorema de Stahl (1997). Antes de enunciar este teorema de introducimos dos conceptos que resultarán necesarios.

Definición 4.2.4. Si $P \in \mathbb{C}[z]$ con P no idénticamente nulo. La *medida contadora de ceros de P* es la medida de $\widehat{\mathbb{C}}$ que a cada subconjunto $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ le asigna el valor positivo

$$\chi_P(A) = \sum_{\{z\in A : P(z)=0\}} \delta_z,$$

donde δ_z denota la multiplicidad de z como cero de P. Es decir, la medida cuya masa en cada punto es el orden de dicho punto como cero de P.

Definición 4.2.5. Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de medidas. Se dice que la sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente * hacia una medida μ y se denota por $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ si

$$\int \phi \, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \phi \, d\mu$$

para cada función ϕ continua en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Recordemos además que denotamos por ω_K a la medida de equilibrio de un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$.

Teorema 4.2.6. (Teorema de Stahl) Sea $f \in \mathcal{G}$ y $\{[\ell_d/m_d]_f\}_{d=1}^{\infty}$ la sucesión de aproximantes de Padé de orden (ℓ_d, m_d) asociados a f en el punto $z = \infty$. Existe un dominio $D_f^* \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$, con $\infty \in D_f^*$, único salvo en un conjunto de capacidad nula, tal que

1. La función f admite continuación analítica univaluada y la sucesión $\{[\ell_d/m_d]_f\}_{d=1}^{\infty}$ converge en capacidad hacia f en el dominio D_f^*, para cualquier sucesión de índices $\{(\ell_d, m_d)\}_{d=1}^{\infty}$ que satisfaga

$$\ell_d + m_d \to \infty, \qquad \frac{\ell_d}{m_d} \to 1 \quad \text{cuando } d \to \infty. \tag{4.2.3}$$

2. Si $D \supsetneq D_f^*$ es un dominio con $\operatorname{cap}(D \setminus D_f^*) > 0$, entonces f no admite continuación analítica univaluada en D y ninguna sucesión de aproximantes de Padé $\{[\ell_d/m_d]_f\}_{d=1}^{\infty}$ que satisfaga las condiciones (4.2.3) converge en capacidad hacia f en todo el dominio D.

3. Sea $F = \mathbb{C} \setminus D_f^*$. Si f es multivaluada, y $[\ell_d/m_d]_f = P_{\ell_d}/Q_{m_d}$ para cada $d \in \mathbb{N}$ entonces
$$\frac{1}{\ell_d}\,\chi(Q_{m_d}),\ \frac{1}{\ell_d}\,\chi(P_{\ell_d}) \ \xrightarrow[d\to\infty]{*} \ \omega_F.$$

Observación 4.2.7.

1. Notemos que la condición (4.2.3) incluye la sucesión de aproximantes de Padé cuasidiagonales construidos en el capítulo anterior.

2. El apartado 3 muestra que, salvo un número finito, la mayoría de los polos y ceros de los aproximantes de Padé $[\ell_d/m_d]_f, d \in \mathbb{N}$, se acumulan en el conjunto $F = \mathbb{C} \setminus D_f^*$. En este conjunto, se distribuyen asintóticamente de acuerdo con la distribución de equilibrio sobre F.

3. El apartado 2 establece que bajo las hipótesis del teorema de Stahl el dominio D_f^* es maximal en el sentido de la capacidad logarítmica. Es común entre la literatura referirse a él como *dominio extremal*. Recíprocamente, el conjunto $F = \mathbb{C} \setminus D_f^*$ es de capacidad logarítmica mínima entre todos los cortes posibles que hacen a f univaluada. En estas condiciones, F recibe el nombre de *conjunto de Stahl*.

Nos centramos en describir la estructura del conjunto de Stahl. Recordemos que si $[a, b]$ es un intervalo de la recta real, un *arco* o *curva analítica* se trata de una aplicación $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de clase $\mathcal{C}^1$.

Teorema 4.2.8. Sean $f \in \mathcal{G}$ y D_f^* el dominio extremal descrito en el teorema anterior.

Entonces el conjunto $F = \mathbb{C} \setminus D_f^*$ tiene interior vacío y posee la estructura

$$F = F_0 \cup \bigcup_{j \in I} J_j,$$

donde $F_0 \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto compacto con $\operatorname{cap}(F_0) = 0$, $F_0 \setminus E$ consiste en un conjunto de puntos aislados, y los J_j, $j \in I$, son arcos analíticos.

La familia $\{J_j\}_{j\in I}$ es finita si y solo si la función f tiene un número finito de puntos de ramificación.

Observación 4.2.9.

1. Si la función f es univaluada en $\mathbb{C} \setminus E$, entonces $I = \emptyset$ y $F_0 = E$.
2. Si la función f no es univaluada en $\mathbb{C} \setminus E$, entonces, $I \neq \emptyset$ y $\operatorname{cap}(J_j) > 0$ para cada $j \in I$.

El siguiente resultado estableceuna propiedad de simétria de la función de Green del dominio extremal D_f^*, que se utiliza en la demostración del teorema de Stahl.

Teorema 4.2.10. Sean la función f, el dominio $D = D_f^*$ y su complementario F los mismos que en el teorema 4.2.8. Supongamos además que el conjunto de puntos de ramificación de f es no vacío.

La función de Green $g_D(z, \infty)$ posee la propiedad de simetría

$$\frac{\partial}{\partial n^+} g_D(z,\infty) \;=\; \frac{\partial}{\partial n^-} g_D(z,\infty), \quad \forall z \in J_j,\ j \in I, \tag{4.2.4}$$

donde $\partial/\partial n^+$ y $\partial/\partial n^-$ denotan las derivadas normales desde ambos lados de los arcos J_j.

En la prueba del teorema de Stahl se hace uso de todas las herramientas introducidas en este capítulo y en el ápendice B. Teoría del potencial, funciones de Green, superficies de Riemann y una amplia gama de conceptos de nivel avanzado en Análisis Complejo. Son varias las demostraciones que se han dado de este teorema. La primera de ellas, debida naturalmente a Stahl en 1997, se desarrolla en [20]. En artículos posteriores [22], [21], [10], se desarrollan nuevos argumentos variacionales para caracterizar el conjunto de Stahl y estudiar sus propiedades. Sin embargo, cualquiera de estas demostraciones resulta demasiado exigente desde el punto de vista técnico y requiere un conjunto de herramientas tan amplio que excede el alcance de este trabajo.

Apéndice A

Elementos de álgebra conmutativa y computacional

Este apéndice pretende ser una recopilación de los conceptos y resultados del álgebra conmutativa y computacional que utilizaremos en el trabajo. Para las demostraciones de los resultados puede consultarse [5].

A.1. Bases de Groebner

Sea $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ un multi-índice, y sea $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto ordenado de n variables. Un *monomio* en las variables $x_1, ..., x_n$ es un producto de la forma:

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

El *grado total* del monomio $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ es el grado del multi-índice $\boldsymbol{\alpha}$, esto es, la suma $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Un *polinomio* P en las variables $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una combinación lineal finita (con coeficientes en $\mathbb{K}$) de monomios. Esto es,

$$P = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} a_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad a_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{K},$$

donde la suma se extiende a un número finito de multi-índices, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. El *grado total* de un polinomio P, que se denota por $\deg(P)$, es el máximo $|\boldsymbol{\alpha}|$ con $a_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0$ en la suma anterior. Denotaremos por $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ al anillo de polinomios en las variables $x_1, ..., x_n$ con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$.

Recordemos que un subconjunto $I \subset \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ es un *ideal* si satisface as siguientes condiciones

- $0 \in I$.
- Si $f, g \in I$, entonces $f + g \in I$.
- Si $f \in I$ y $h \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ entonces $hf \in I$.

Si $f_1, ..., f_s \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$, el conjunto

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \Big\{ \textstyle\sum_{i=1}^{s} h_i\, f_i \ : \ h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \Big\}.$$

es un ideal de $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$, al que denominaremos *ideal generado por* $f_1, ..., f_s$.

Además, denotaremos por $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_s)$ a la variedad afín generada por $f_1 \ldots, f_s$, esto es,

$$\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_j(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ para todo } 1 \leq j \leq s\}.$$

Si $I = \langle f_1, ..., f_s \rangle$, diremos que $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_s)$ es la variedad afín generada por el ideal I y la denotaremos también por $\mathcal{V}(I)$.

Decimos que un ideal I es *finitamente generado* si existen polinomios $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$, y decimos que $f_1, \ldots, f_s$ forman una *base* de I.

A diferencia del caso unidimensional, no existe a priori una forma natural de ordenar totalmente los monomios de un polinomio $P \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. No obstante, la introducción de un orden total en los monomios de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, que además cumpla ciertas propiedades convenientes, abre un amplio abanico de posibilidades operativas y computacionales.

Observación A.1.1. Cualquier monomio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, puede ser reconstruido a partir de el multi-índice de exponentes, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Esto establece una correspondencia unívoca entre los monomios de $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ y los elementos de $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Así un orden $\succ$ en el conjunto $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ genera de forma natural un orden en el conjunto de monomios de $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$: si $\alpha \succ \beta$ en $(\mathbb{Z}^n_{\geq 0}, \succ)$ entonces $\boldsymbol{x}^{\alpha} \succ \boldsymbol{x}^{\beta}$.

Definición A.1.2. Se llama *orden monomial* en $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ a cualquier relación de orden $\succ$ sobre $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, o equivalentemente, a cualquier relación sobre el conjunto de monomios $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ con $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, que cumpla:

1. $\succ$ es un orden total en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.
2. Si $\boldsymbol{\alpha} \succ \boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, entonces $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} > \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$.
3. $\succ$ es un *buen orden* en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$; es decir, todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ posee un elemento minimal con respecto a $\succ$.

En función de nuestros intereses, podemos definir y trabajar con distintos ordenes monomiales. En particular, el orden que mejor se adapta a nuestros propósitos es el *orden lexicográfico*, que denotaremos por $>_{\text{lex}}$.

Definición A.1.3. Sean $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Decimos que $\boldsymbol{\alpha}$ es mayor que $\boldsymbol{\beta}$ en *orden lexicográfico* y escribimos, $\boldsymbol{\alpha} >_{\text{lex}} \boldsymbol{\beta}$ si, en la diferencia de multi-índices $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Z}^n$, la primera componente no nula desde la izquierda es positiva. Escribimos $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} >_{\text{lex}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ si $\boldsymbol{\alpha} >_{\text{lex}} \boldsymbol{\beta}$.

Ejemplo A.1.4.

- $(1, 2, 3, 4) >_{\text{lex}} (0, 3, 4, 5)$.

- $x^2yz >_{\text{lex}} xy^2z^2$.

Se puede probar que el orden lexicográfico en $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ efectivamente induce un orden monomial en $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Definición A.1.5. Sea $f = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} a_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ un polinomio no trivial de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y sea $\succ$ un orden monomial

- El *multigrado* de f es
$$multideg(f) = \text{máx}\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : a_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0\},$$
donde el máximo se toma respecto del orden monomial $\succ$.
- El *coeficiente líder* de f es
$$LC(f) = a_{multideg(f)} \in \mathbb{K}.$$
- El *monomio líder* de f es
$$LM(f) = x^{multideg(f)}.$$
- El *término líder* de f es
$$LT(f) = LC(f) \cdot LM(f).$$

Definición A.1.6. Un ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es un *ideal monomial* si existe un subconjunto $A \subset \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ (posiblemente infinito) tal que I está formado por los polinomios
$$P = \sum_{\alpha \in A} h_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha, \quad \text{donde} \quad h_\alpha \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n].$$
y la suma anterior es finita. En este caso, escribimos
$$I = \langle \boldsymbol{x}^\alpha : \boldsymbol{\alpha} \in A \rangle.$$

Ejemplo A.1.7. El ideal $I = \langle x^4y^2, x^3y^4, x^2y^5 \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$ es monomial.

Lema A.1.8. Sea $I = \{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\alpha} \in A \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal monomial. Entonces, un monomio $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ pertenece a I si y solo si existe un $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tal que $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ es divisible entre $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$.

Teorema A.1.9. (Lema de Dickson). Sea $I = \langle \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\alpha} \in A \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal monomial. Entonces, I puede escribirse de la forma
$$I = \langle \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}(s)} \rangle,$$
donde $\boldsymbol{\alpha}(1), \ldots, \boldsymbol{\alpha}(s) \in A$. En particular, I tiene una base finita y por tanto, es finitamente generado.

Definición A.1.10. Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal con $I \neq \{0\}$. Denotamos por $LT(I)$ al conjunto de los términos líderes de los elementos de I. Es decir,

$$LT(I) = \{c\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} : \text{existe } f \in I \text{ tal que } LT(f) = c\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\}.$$

Denotamos por $\langle LT(I) \rangle$ al ideal generado por los elementos de $LT(I)$.

Proposición A.1.11. Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal.

1. $LT(I)$ es un ideal monomial.
2. Existen $g_1, \ldots, g_t \in I$ tales que
$$LT(I) = \langle LT(g_1), \ldots, LT(g_t) \rangle.$$

Teorema A.1.12. (Teorema de la base de Hilbert). Todo ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tiene un conjunto finito de generadores, es decir, $I = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$ para ciertos $g_1, \ldots, g_t \in I$.

Definición A.1.13. Supongamos que hemos fijado un orden monomial $\succ$ en $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Sea I un ideal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Un subconjunto finito $G = \{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ es una *base de Groebner* de I si

$$\langle LT(g_1), \ldots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle.$$

Corolario A.1.14. Supongamos que hemos fijado un orden monomial. Entonces todo ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ no trivial tiene una base de Groebner. Además, cualquier base de Groebner de I es una base de I, es decir, un conjunto de generadores.

A.2. Teoría de eliminación

La teoría de eliminación estudia métodos sistemáticos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas. Estos métodos, constan de dos etapas: la eliminación sucesiva de variables y la posterior resolución en forma triangular (extensión). En este sentido, los dos teoremas principales de esta teoría son de los teoremas de eliminación y extensión. Para cubrir nuestros propósitos en este trabajo, será suficiente con centrarnos en la primera etapa, la etapa de eliminación.

Definición A.2.1. Sea $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal. El ℓ-ésimo ideal de eliminación I_l es el ideal de $\mathbb{K}[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ definido por

$$I_\ell = I \cap \mathbb{K}[x_{l+1}, \ldots, x_n].$$

En estas condiciones I_ℓ es un ideal de $\mathbb{K}[x_{l+1}, \ldots, x_n]$. Notemos que al variar la forma de ordenar las variables $x_1, \ldots x_n$ también varían los ideales de eliminación que vamos obteniendo.

Supongamos que queremos resolver un sistema de ecuaciones polinómicas $f_1 = \cdots = f_s = 0$ con $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Para abordar este problema podemos considerar el ideal $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y tratar de ir eliminando variables. Así, eliminar las variables $x_1, \ldots, x_\ell$, significa encontrar un polinomio no trivial en el ideal de eliminación I_ℓ. Entonces, la etapa de eliminación se solventaría dando un proceso sistemático para encontrar elementos no triviales de I_ℓ. Eligiendo un orden monomial adecuado, las bases de Groebner nos dan una solución instantánea a este problema.

Teorema A.2.2. (Teorema de la eliminación). Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal y sea G una base de Groebner de I con respecto al orden lexicográfico donde $x_1 >_{\text{lex}} x_2 >_{\text{lex}} \cdots >_{\text{lex}} x_n$. Entonces, para cada $0 \leq \ell \leq n$, el conjunto

$$G_\ell = G \cap \mathbb{K}[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$$

es una base de Groebner del ℓ-ésimo ideal de eliminación, I_ℓ.

Observación A.2.3. Notemos que si conocemos una base de Groebner del ideal original I, podemos obtener una base de Groebner G_ℓ de cada uno de los ideales de eliminación I_ℓ, siempre que estos sean no triviales, sin hacer ningún cálculo adicional. En consecuencia, si tenemos un ideal $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y una base de Groebner $G = \langle g_1 \ldots, g_t \rangle$ de dicho ideal, podemos determinar de forma inmediata cuando es posible llevar a cabo el proceso de eliminación completo del sistema $f_1 = \cdots = f_s = 0$. Basta comprobar que $G \cap I_\ell \neq \{0\}$ para cada $0 \leq \ell \leq s$.

A.3. Resultantes de polinomios

Empezaremos abordando el concepto de resultante dos polinomios. Esta herramienta algebraica, tradicionalmente se introduce a la hora de determinar los factores comunes de dos polinomios del anillo $\mathbb{K}[x]$, sin embargo, también juega un papel importante en la teoría de eliminación y sus aplicaciones.

Definición A.3.1. Sean $f, g \in \mathbb{K}[x]$ dos polinomios de grado positivo. Pueden escribirse de la siguiente forma

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \cdots + a_n, \quad \text{con } a_0 \neq 0,$$

$$g = b_0 x^m + b_1 x^{n-1} \cdots + b_m, \quad \text{con } b_0 \neq 0.$$

La *matriz de Sylvester* [5, p.158] de f y g respecto a la variable x, que se denota como $\mathrm{Syl}(f, g, x)$, es una matriz cuadrada de dimensión $(n + m)$ que se construye a partir de los coeficientes de ambos polinomios. Concretamente, se obtiene organizando las sucesivas traslaciones de los vectores de coeficientes de f y g, rellenando los huecos con ceros. Su estructura es la siguiente

$$\mathrm{Syl}(f,g,x) = \begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ a_n & \cdots & a_1 & a_0 & \vdots & \ddots & \ddots & b_0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & b_m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & a_n & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \cdots & b_m & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

donde los coeficientes de f se repiten m veces y los de g se repiten n veces. La *resultante* de f y g respecto a x, que denotamos $\mathrm{Res}(f,g,x)$, se define como el determinante de la matriz de Sylvester

$$\mathrm{Res}(f,g,x) = \det(\mathrm{Syl}(f,g,x)).$$

Proposición A.3.2. Dados $f,g \in \mathbb{K}[x]$, polinomios de grado positivo, su resultante, $\mathrm{Res}(f,g,x) \in \mathbb{K}$, es un polinomio entero en los coeficientes de f y g. Además, f y g tienen un factor común en $\mathbb{K}[x]$ si y solo si $\mathrm{Res}(f,g,x) = 0$.

Notemos que el concepto de resultante se puede generalizar al caso de polinomios en varias variables. Si $f,g \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$, podemos escribir ambos polinomios como

$$f = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} \cdots + a_n, \quad \text{con } a_0 \neq 0,$$

$$g = b_0 x_1^m + b_1 x_1^{n-1} \cdots + b_m, \quad \text{con } b_0 \neq 0.$$

donde $a_j, b_s \in \mathbb{K}[x_2,\ldots,x_n]$ para cada $0 \leq j \leq n$ y cada $0 \leq s \leq m$. De la forma análoga a como se hizo en el caso unidimensional, se construye la matriz de Sylvester de f y g respecto de x_1, cuyas entradas esta vez serán polinomios del anillo $\mathbb{K}[x_2,\ldots,x_n]$ y se define la resultante de f y g respecto de la variable x_1 como

$$\mathrm{Res}(f,g,x_1 = \det(\mathrm{Syl}(f,g,x_1)).$$

Proposición A.3.3. Sean $f,g \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ dos polinomios de grado positivo en la variable x_1. Entonces

1. Su resultante respecto a la variable x_1, $\mathrm{Res}(f,g,x_1)$, pertenece al primer ideal de eliminación del ideal $\langle f,g\rangle \subset \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$, es decir,

$$\mathrm{Res}(f,g,x_1) \in \langle f,g\rangle \cap \mathbb{K}[x_2,\ldots,x_n].$$

2. Se tiene que $\mathrm{Res}(f,g,x_1) = 0$ si y solo si f y g tienen un factor común de grado positivo en x_1.

Apéndice B

Funciones analíticas multiformes

Este apéndice pretende ser una introducción elemental y práctica al estudio de las funciones analíticas multiformes. El lector interesado puede profundizar en [7] y [1]. Podemos dar una definición intuitiva de función analítica multiforme de la siguiente forma: Sea Ω un abierto del plano complejo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que f es *uniforme* o *monovaluada* en Ω si a cada punto $z \in \Omega$ le corresponde una única imagen $w = f(z)$. En caso contrario, se dice que f es *multiforme* o *multivaluada*.

Los ejemplos de funciones multiformes más habituales son $\arg z$, $\log z$ y $z^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$.

En el análisis de estas funciones se advierte que, de manera local, pueden identificarse con funciones meromorfas univaluadas. Surge entonces la cuestión de cómo representarlas de forma uniforme, lo cual requiere redefinirlas en un dominio apropiado. En la construcción de dichos dominios desempeñan un papel esencial los conceptos de *elemento de función meromorfa* y de *prolongación analítica* de tales elementos.

B.1. Continuación analítica

Definición B.1.1. Un *elemento de función meromorfa* se define como un par (f, D), donde D representa un disco abierto en $\mathbb{C}$ y f es una función meromorfa en dicho dominio.

Diremos que dos elementos de función meromorfa (f, D) y (g, G) constituyen una *prolongación analítica directa* uno del otro cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1. La intersección $D \cap G$ no es vacía.
2. Se verifica que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D \cap G$.

Definición B.1.2. Sean (f, D) y (g, G) dos elementos de función meromorfa, y sea γ una curva en $\mathbb{C}$. Diremos que el elemento (g, G) es una *prolongación analítica* del elemento (f, D) a lo largo de la curva γ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\gamma(0) \in D$ y $\gamma(1) \in G$.
2. Existe un número finito de elementos de función meromorfa

$$(f_1, D_1), (f_2, D_2), \ldots, (f_n, D_n), \quad n \geq 1,$$

junto con una partición del intervalo $[0, 1]$,

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1,$$

tales que:

a) $\gamma(0) \in D_1$ y $f(z) = f_1(z)$ para todo $z \in D \cap D_1$.

b) $\gamma(1) \in D_n$ y $g(z) = f_n(z)$ para todo $z \in G \cap D_n$.

c) $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset D_j$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$.

d) $f_j(z) = f_{j+1}(z)$ para todo $z \in D_j \cap D_{j+1}$, con $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

En estas condiciones, el conjunto

$$\{(f_1, D_1), (f_2, D_2), \ldots, (f_n, D_n)\}$$

se denomina *cadena que une* (f, D) con (g, G) a lo largo de la curva γ.

Sea ahora (f, D) un elemento de función meromorfa y γ una curva en $\mathbb{C}$. Diremos que (f, D) es *prolongable analíticamente* a lo largo de γ si existe un elemento (g, G) que constituye una prolongación analítica de (f, D) a lo largo de dicha curva.

Finalmente, sea Ω un dominio (es decir, un abierto conexo) de $\mathbb{C}$ y (f, D) un elemento de función meromorfa con $D \subset \Omega$. Diremos que (f, D) es *prolongable en* Ω *a lo largo de cualquier curva* (o que es *arbitrariamente prolongable en* Ω) si para toda curva $\gamma \subset \Omega$ con $\gamma(0) \in D$, el elemento (f, D) resulta prolongable analíticamente a lo largo de γ.

Teorema B.1.3. Sean (f, D), (g, G) y (h, H) tres elementos de función meromorfa, y sea γ una curva en $\mathbb{C}$.

Si tanto (g, G) como (h, H) son prolongaciones analíticas del elemento (f, D) a lo largo de la curva γ, entonces se cumple que

$$g(z) = h(z) \quad \text{para todo } z \in G \cap H.$$

B.2. Superficies de Riemann

Esta sección esta dedicada a presentar de forma breve el concepto de superficie de Riemann. Históricamente, las superficies de Riemann aparecen a raíz del intento de hacer uniformes (monovaluadas) las funciones multiformes. Como veremos en la tercera sección, la idea original de Riemann consiste en "coser" varias copias del plano complejo de manera ordenada, formando una nueva superficie en la que cada valor de la función queda en una hoja distinta.

Definición B.2.1. Sea X un espacio topológico Hausdorff y conexo. Una *carta* en X es un par (U, φ) donde U es un abierto de X y φ es un homeomorfismo de U en un abierto V de $\mathbb{C}$.

Dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) en X tales que $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ se dicen *analíticamente compatibles* si la aplicación de cambio de carta

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset V_1 \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset V_2$$

es biholomorfa.

Un *atlas analítico* en X es una familia de cartas

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i = X$.
2. Si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, entonces las cartas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) son analíticamente compatibles.

Dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ sobre el mismo espacio X se dicen *analíticamente equivalentes* si, para todo par de cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$ tales que $U \cap V \neq \varnothing$, dichas cartas son analíticamente compatibles.

No es difícil comprobar que la noción de atlas analíticamente equivalentes define una relación de equivalencia en el conjunto de los atlas de un mismo espacio X. Una *estructura analítica* en X es una clase de equivalencia para la relación anterior.

Definición B.2.2. Una *superficie de Riemann* es un par (X, Σ), donde X es un espacio topológico Hausdorff y conexo y Σ es una estructura analítica en X.

B.3. Funciones multiformes. Puntos de ramificación

B.3.1. Gérmenes de función meromorfa

El estudio en discos de $\widehat{\mathbb{C}}$ resulta insuficiente al analizar un punto concreto, ya que los dominios de los elementos de función meromorfa pueden no coincidir. Para resolverlo, se introduce el concepto de germen, entendido como clase de equivalencia de elementos centrados en un mismo punto.

Definición B.3.1. Sea $a \in \mathbb{C}$. Denotamos por F_a al conjunto de todos los elementos de función meromorfa (f, D) tales que $a \in D$.

En F_a se introduce la relación $\sim_a$ definida de la siguiente manera: si $(f, D), (g, G) \in F_a$, escribimos

$$(f, D) \sim_a (g, G) \quad \Longleftrightarrow \quad f \equiv g \text{ en } D \cap G.$$

Es inmediato comprobar que $\sim_a$ es una relación de equivalencia en F_a. El conjunto cociente se denotará por $\mathcal{M}_a$, y sus elementos reciben el nombre de *gérmenes de función meromorfa en el punto a*.

Si $(f, D) \in F_a$, la clase de equivalencia correspondiente puede representarse indistintamente como

$$(f, D)_a \quad \text{o bien} \quad (a, [f]_a).$$

El punto a se denomina *soporte* del germen $(a, [f]_a)$. Se dice que un germen $(f, D)_a$ es *analítico* si $f(a) \neq \infty$.

Finalmente, el conjunto de todos los gérmenes de funciones meromorfas se denotará por $\mathcal{M}$ y recibe el nombre de *haz de gérmenes de funciones meromorfas.*

Las nociones de prolongación analítica se trasladan de forma natural a los gérmenes, obteniéndose resultados como el teorema de unicidad. Además, sobre el conjunto de gérmenes se define una topología que localmente se identifica con los abiertos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Esto permite dotar a dichos conjuntos de estructura de superficie de Riemann, en la cual la aplicación que evalúa un germen en su punto de soporte resulta ser meromorfa.

Definición B.3.2. Sean $(a, [f]_a)$ y $(b, [g]_b)$ dos gérmenes de funciones meromorfas y sea γ una curva en $\mathbb{C}$. Decimos que el germen $(b, [g]_b)$ es una *prolongación analítica* del germen $(a, [f]_a)$ a lo largo de la curva γ si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones

1. $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.
2. Existe una familia de gérmenes de función meromorfa

$$\{(\gamma(t), [f_t]_{\gamma(t)}) : t \in [0, 1]\}$$

   tal que si para cada $t \in [0, 1]$, se cumple que $(f_t, D_t)_{\gamma(t)} = (\gamma(t), [f_t]_{\gamma(t)})$, entonces

   a) $(a, [f]_a) = (a, [f_0]_a)$.

   b) $(b, [g]_b) = (b, [f_1]_b)$.

   c) Para todo $t \in [0, 1]$ existe un $\delta = \delta(t) > 0$ tal que, si $s \in [0, 1]$ con $|t - s| < \delta$, entonces $\gamma(s) \in D_t$ y se cumple que $f_s(z) = f_t(z)$ para todo $z \in D_s \cap D_t$.

Es inmediato comprobar que esta definición no depende de los representantes (f_t, D_t) elegidos para los gérmenes $(\gamma(t), [f_t]_{\gamma(t)})$, $t \in [0, 1]$.

Sean $(a, [f]_a)$ y $(b, [g]_b)$ dos gérmenes de función meromorfa tales que $(b, [g]_b)$ resulta ser una prolongación analítica de $(a, [f]_a)$ a lo largo de la curva γ. Si la familia $\{(\gamma(t), [f_t]_{\gamma(t)}) : t \in [0, 1]\}$ satisface las condiciones de la definición anterior, diremos que dicha familia *une* a $(a, [f]_a)$ con $(b, [g]_b)$ a lo largo de γ.

Dado un germen $(a, [f]_a)$ de función meromorfa y una curva γ en $\mathbb{C}$, decimos que $(a, [f]_a)$ es *prolongable analíticamente* a lo largo de γ si existe un germen $(b, [g]_b)$ que sea una prolongación analítica de $(a, [f]_a)$ a lo largo de dicha curva.

Finalmente, si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $(a, [f]_a)$ un germen de función meromorfa con $a \in \Omega$, diremos que $(a, [f]_a)$ es *arbitrariamente prolongable en* Ω si, para toda curva γ contenida en Ω con $\gamma(0) = a$, el germen $(a, [f]_a)$ es prolongable analíticamente a lo largo de γ.

Por último, también se tiene el teorema de unicidad para los gérmenes de función meromorfa.

Teorema B.3.3 (Unicidad de la prolongación analítica)**.** Sean $(a, [f]_a)$, $(b, [g]_b)$ y $(c, [h]_c)$ tres gérmenes de función meromorfa, y sea γ una curva en $\mathbb{C}$. Si los gérmenes $(b, [g]_b)$ y

$(c, [h]_c)$ son prolongaciones analíticas del germen $(a, [f]_a)$ a lo largo de γ, entonces

$$(b, [g]_b) = (c, [h]_c).$$

B.3.2. Topología en $\mathcal{M}$

Consideremos ahora para cada cada elemento de función meromorfa (f, D), el conjunto de gérmenes

$$V(f, D) = \{\, (a, [f]_a) \in \mathcal{M} : a \in D \,\}.$$

Estos conjuntos constituyen una base de abiertos de una topología en el haz $\mathcal{M}$, a la que denotaremos por τ, con las siguientes propiedades

- Los conjuntos $V(f, D)$ resultan abiertos en τ.
- La topología τ es separada.
- La proyección $\rho : M \to \mathbb{C}$ definida por

  $$\rho(z, [f]_z) = z$$

  es localmente un homeomorfismo. En particular, cada conjunto $V(f, D)$ es homeomorfo al disco D.
- La topología τ es localmente compacta y localmente conexa.
- La aplicación de valoración $\Phi : M \to \mathbb{C}$ dada por

  $$\Phi(z, [f]_z) = f(z)$$

  es continua.

Además, esta topología permite dotar a las componentes conexas de $\mathcal{M}$ de la estructura de superficie de Riemann, como veremos en la siguiente proposición.

Sea C un abierto conexo de $\mathcal{M}$. Se considera la familia de pares

$$\mathcal{A} = \{\, (V(f, D), \varphi_{(f,D)}) \,\},$$

donde (f, D) es un elemento de función meromorfa tal que, para todo $z \in D$, se cumple que

$$(f, D)_z = (z, [f]_z) \in C,$$

y $\varphi_{(f,D)}$ es la aplicación de $V(f, D)$ en C definida de la forma siguiente

- Si $D \subset C$, entonces $\varphi_{(f,D)}$ es la restricción de la aplicación proyección ρ a $V(f, D)$.
- Si $\infty \in D$, entonces $\varphi_{(f,D)}$ es la composición de la restricción de la proyección ρ a $V(f, D)$ con la aplicación

  $$z \in D \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}.$$

Proposición B.3.4. En las condiciones anteriores, $\mathcal{A}$ constituye un atlas analítico en C. Con la correspondiente estructura analítica, las restricciones a C de las aplicaciones ρ y Φ resultan ser meromorfas.

B.3.3. Puntos de ramificación

Definición B.3.5. Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y R un conjunto de gérmenes de función meromorfa. Se dice que R es una función meromorfa (general) en Ω si se verifica:

1. Todo elemento de R tiene su soporte en Ω.
2. Dos elementos cualesquiera de R son prolongación analítica uno del otro a lo largo de una curva en Ω.
3. Todo germen con soporte en Ω que sea prolongación analítica a lo largo de una curva en Ω de un elemento de R, también está en R.

Si R es una función meromorfa (general) en Ω, el conjunto $\rho(R)$ se llama *dominio de R* y se denotará por

$$\mathrm{Dom}(R).$$

Se verifica que $\mathrm{Dom}(R)$ es un abierto conexo de $\mathbb{C}$, contenido obviamente en Ω.

Definición B.3.6. Sea R una función meromorfa general en el abierto Ω. Se dice que un punto $z_0 \in \Omega$ es un *punto de ramificación* de la función R si al prolongar analíticamente un germen $(a, [f]_a)$ de R, a lo largo de una curva γ que rodee el punto z_0, se obtiene un nuevo germen $(b, [g]_b)$. Si son necesarias n vueltas alrededor de z_0 para recuperar el germen de partida, el orden de z_0 como punto de ramificación de R es $n-1$.

Un *corte de ramificación* es una curva en Ω que une puntos de ramificación de R.

En el caso de tener puntos de ramificación, una función meromorfa general es una función multiforme. Una *rama* es una determinación univaluada y holomorfa de la función multiforme en $\Omega \setminus \Gamma$ donde Γ es un conjunto de cortes de ramificación adecuado.

Para fijar ideas, consideremos $w = z^{1/3}$. Escribiendo $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, al rodear una vez el origen ($\theta \mapsto \theta + 2\pi$) el valor de w cambia a $r^{1/3}e^{i(\theta+2\pi)/3} \neq r^{1/3}e^{i\theta/3}$. Tras tres vueltas ($\theta \mapsto \theta + 6\pi$) se recupera el valor inicial. Esto se corresponde con la existencia de *tres ramas* (cada una univaluada sobre un dominio adecuado). En particular,

$$f(z) = \begin{cases} w_1 = f_1(z) = r^{1/3}e^{i\theta/3}, & 0 \leq \theta < 2\pi, \\ w_2 = f_2(z) = r^{1/3}e^{i(\theta+2\pi)/3}, & 2\pi \leq \theta < 4\pi, \\ w_3 = f_3(z) = r^{1/3}e^{i(\theta+4\pi)/3}, & 4\pi \leq \theta < 6\pi. \end{cases}$$

Ejemplo B.3.7 (Rama principal de un logaritmo compuesto)**.** Sea $f(z) = \log(iz-1)$, donde log denota la rama principal del logaritmo ($-\pi < \arg w \leq \pi$), cuyo corte está en el semieje real negativo del plano w. El corte correspondiente en el plano z se obtiene imponiendo $iz - 1 \in (-\infty, 0]$, lo que equivale a $\{\, x+iy : \ x = 0, \ y \geq 1 \,\}$. La función f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{x+iy : \ x = 0, \ y \geq 1\}$.

Bibliografía

[1] Lars Valerian Ahlfors and Lars V Ahlfors. *Complex analysis*, volume 3. McGraw-Hill New York, 1979.

[2] G.A. Baker and P. Graves-Morris. *Padé Approximants*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2010.

[3] George A Baker Jr. *Essentials of Padé approximants*. Academic Press, 1975.

[4] John B. Conway. *Functions of one complex variable I*. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer New York, New York, 2nd edition, 1978.

[5] David. Cox, John. Little, and DONAL. OSHEA. *Ideals, Varieties, and Algorithms : An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, New York, 2nd edition, 1997.

[6] Reinhard Diestel. *Graph theory*. Graduate Texts in Mathematics, 173. Springer, Berlin, Germany, 5th edition, 2018.

[7] Félix López Fernández-Asenjo, Félix Galindo Soto, and Luis Alberto Tristán Vega. *Funciones analíticas multiformes: una introducción a las superficies de Riemann*. Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Valladolid, 1996.

[8] Chris. Godsil and Gordon F. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics, 207. Springer, New York, 1st edition, 2001.

[9] Lars Hormander. *An introduction to complex analysis in several variables*. Elsevier, 1973.

[10] Andrei Martínez-Finkelshtein, Evguenii A Rakhmanov, and Sergey P Suetin. Variation of the equilibrium energy and the s-property of stationary compact sets. *Sbornik: Mathematics*, 202(12):1831, 2011.

[11] Dhagash Mehta, Daniel K Molzahn, and Konstantin Turitsyn. Recent advances in computational methods for the power flow equations. pages 1753–1765. IEEE, 2016.

[12] Antonio Montes. Algebraic solution of the load-flow problem for a 4-nodes electrical network. *Mathematics and Computers in Simulation*, 45(1-2), 1998.

[13] Antonio Montes and Jordi Castro. Solving the load flow problem using gröbner basis. *ACM SIGSAM Bulletin*, 29(1):1–13, 1995.

[14] J Nuttall. The convergence of Padé approximants of meromorphic functions. *J. Math. Anal. Appl*, 31(1):147–153, 1970.

[15] Ch Pommerenke. Padé approximants and convergence in capacity. *J. Math. Anal. Appl*, 41(3):775–780, 1973.

[16] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*. Number 28. Cambridge university press, 1995.

[17] Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*, volume 122. Springer Science & Business Media, 1991.

[18] Alvaro Samperio. Some inverse problems on finite networks. 2024.

[19] Daniel Spielman. Graphs, vectors, and matrices. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54(1):45–61, 2017.

[20] Herbert Stahl. The convergence of padé approximants to functions with branch points. *Journal of Approximation Theory*, 91(2):139–204, 1997.

[21] Herbert R Stahl. Sets of minimal capacity and extremal domains. *arXiv preprint arXiv:1205.3811*, 2012.

[22] Sergey P Suetin. A direct proof of Stahl's theorem for a generic class of algebraic functions. *arXiv preprint arXiv:2108.00339*, 2021.

[23] Antonio Trias. The holomorphic embedding load flow method. In *2012 IEEE power and energy society general meeting*, pages 1–8. IEEE, 2012.

[24] Antonio Trias. Fundamentals of the holomorphic embedding load-flow method. *arXiv preprint arXiv:1509.02421*, 2015.

[25] Tao Wang and Hsiao-Dong Chiang. On the holomorphic and conjugate properties for holomorphic embedding methods for solving power flow equations. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(4):2506–2515, 2019.

[26] Tao Wang and Hsiao-Dong Chiang. Theoretical study of non-iterative holomorphic embedding methods for solving nonlinear power flow equations: Algebraic property. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(4):2934–2945, 2020.