



Universidad de Valladolid

**Podando resoluciones conocidas para
obtener las sizigias de algunos ideales
de aristas**

Alejandro Melero Santos

17 de septiembre de 2025

**COTUTORES : PHILIPPE GIMENEZ
ELVIRA PÉREZ CALLEJO**

**TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
MÁSTER EN MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS**

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar el algoritmo de poda descrito por Margherita Barile y Antonio Macchia en su artículo de 2020 “Minimal cellular resolutions of the edge ideals of forests”, en el cual se describen una serie de pasos para obtener una resolución libre graduada minimal de los ideales de aristas de bosques, partiendo de resoluciones libres ya conocidas, como la de Lyubeznik o la de Taylor. También compararemos este algoritmo con el algoritmo de poda de la resolución de Taylor mencionado en [11] y [2].

Se usarán como referencias principales del trabajo el artículo de Barile y Macchia antes mencionado ([3]) y el artículo de Batzies y Welkers “Discrete Morse Theory for cellular resolutions” ([4]).

Palabras clave

Resoluciones libres de ideales, Ideales de aristas, Ideales Monomiales, Sizigias, Teoría de Morse Discreta.

Índice

Introducción	4
1. Conceptos básicos	6
1.1. Anillos y módulos graduados	6
1.2. Complejos simpliciales	10
1.3. Resolución libre de un ideal	12
1.4. Números de Betti	16
2. Resolución de Taylor. La poda del complejo simplicial	20
2.1. Construcción de la resolución de Taylor	20
2.2. Poda de la resolución de Taylor	24
3. La poda de los ideales de aristas.	30
3.1. Teoría de grafos	30
3.2. La resolución de Lyubeznik.	35
3.3. Construcción de la resolución minimal	36
3.4. Prueba de la minimalidad	44
3.5. Ejemplos.	51
Bibliografía	56

Introducción

Contexto histórico

El estudio de las resoluciones libres de ideales es una rama relativamente reciente de las matemáticas, cuyo origen se podría establecer a mediados del siglo XIX. Fue entonces cuando Arthur Cayley (1821-1895) usó el término “sizigias” para referirse a la relación lineal que cumplen los menores de una matriz 2x3:

$$a \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0.$$

La palabra sizigia ganó popularidad en 1890 cuando David Hilbert (1862-1943) la empleó en el artículo que contiene 3 de los teoremas más importantes sobre polinomios: El Teorema de la Base de Hilbert, El Teorema de las Sizigias de Hilbert y el Teorema de los Ceros de Hilbert (más conocido por su nombre en alemán: “Nullstellensatz”). Una de las cuestiones más importantes que resuelve Hilbert es que la construcción de sucesivos módulos de sizigias es un proceso finito cuando el módulo inicial es finitamente generado. Sin embargo, surge la cuestión de como encontrar una sucesión de estos módulos que sea lo más pequeña posible.

A mediados del siglo XX se desarrolla el álgebra homológica a manos de matemáticos como Eilenberg (1913-1998) y Koszul (1921-2018). Esto sentó las bases para que, en los años 70, David Buchsbaum (1929-2021) y David Eisenbud (1947-) relacionaran los complejos de cadenas con las resoluciones libres de ideales, introduciendo el criterio de exactitud de Buchsam-Eisenbud, que se emplea para comprobar cuándo un complejo de cadenas es también una resolución libre. Una década antes, Diana Taylor (1941-2016) había dado una construcción explícita de una resolución libre para ideales monomiales, la cual hoy lleva su nombre. En 1988, Gennady Lyubeznik (1957-) dio un algoritmo que mejoraba la construcción creada por Taylor, obteniendo resoluciones libres más cercanas a la minimal.

En 1995, Eisenbud publica el libro “Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry” ([6]), en el cual se naturalizan las resoluciones libres como herramientas en las áreas del álgebra commutativa y la geometría. Es entonces cuando se vuelve habitual el estudio de resoluciones libres de

ideales monomiales mediante objetos como complejos simpliciales y politopos, surgiendo nuevas aplicaciones para teorías ya desarrolladas como la fórmula de Hochster o la teoría de Stanley-Reisner.

En los años más recientes, se han caracterizado las formas que pueden tener las tablas de Betti de las resoluciones libres cuando los anillos son anillos de polinomios, y se han dado más construcciones explícitas de resoluciones libres minimales para ciertos tipos de ideales. En particular, se ha resuelto el caso de ideales de aristas de bosques mediante el uso de la teoría de Morse discreta, como veremos en este trabajo.

Estructura

En el Capítulo 1 repasaremos los conceptos de anillo y módulo graduados e introduciremos el concepto de resolución libre graduada de un ideal. Veremos también la forma principal de almacenar información sobre estas resoluciones, empleando los números y diagramas de Betti.

El Capítulo 2 está dedicado a la construcción de la resolución de Taylor y al algoritmo de poda descrito en [2].

Para terminar, en el Capítulo 3 se trata el caso de los ideales de aristas y se presenta el algoritmo descrito en [3].

1. Conceptos básicos

En este primer capítulo introduciremos los objetos que emplearemos a lo largo de este trabajo. Nos centraremos especialmente en los ideales monomiales y el concepto de resoluciones libres graduadas de estos ideales. Abordaremos también la comparativa entre las versiones algebraicas y combinatorias de estos objetos, usando, por ejemplo, los números de Betti. Consideraremos un cuerpo \mathbb{K} y el anillo de polinomios en n variables sobre dicho cuerpo, $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Como trataremos con ideales en el anillo A , cabe recordar que el Teorema de la base de Hilbert afirma que A es un anillo noetheriano, y por lo tanto todo ideal suyo es finitamente generado.

1.1. Anillos y módulos graduados

Definición 1.1. El *grado* de un monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \in A$ es:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Y el grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo conforman.

Definición 1.2. Un *ideal monomial* en A es un ideal $I \subseteq A$ que posee un sistema de generadores cuyos miembros son todos monomios.

Un monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \subset A$ se denomina *libre de cuadrados* si $\alpha_i \in \{0, 1\}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Naturalmente, si los generadores (monomios) de un ideal monomial son todos libres de cuadrados, el ideal también se denomina *libre de cuadrados*.

Sea A_i el \mathbb{K} -espacio vectorial generado por los monomios de grado i . La graduación estándar de A se define como $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Definición 1.3. Decimos que un polinomio $f \in A$ es *homogéneo* de grado k si todos los monomios que lo forman tienen grado k . O lo que es lo mismo, $f \in A_k$ para la graduación estándar de A .

Nota 1.4. Con esto dado, solo tenemos que comprobar que $A_i A_j \subset A_{i+j}$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$ para deducir que A es un *anillo graduado*. Pero esta condición equivale a decir que el producto de polinomios homogéneos es un polinomio homogéneo cuyo grado es igual a la suma de los grados de los factores, lo cual es cierto.

Definición 1.5. En la graduación estándar, los A_i se denominan *componentes homogéneas i -ésimas* (de A).

A los elementos de A_i los llamaremos *elementos homogéneos* de grado i .

Un ideal $J \subseteq A$ es *homogéneo* si posee un sistema de generadores formado exclusivamente por polinomios homogéneos.

Evidentemente, todos los ideales monomiales son ideales homogéneos.

Es fácil ver que todo polinomio $f \in A$ se puede expresar como una suma finita de sus componentes, agrupadas por grado. Es decir, $f = \sum f_i$, donde $f_i \in A_i$. Cada f_i recibe el nombre de *componente homogénea de grado i de f* .

Veamos ahora una forma de determinar si un ideal posee un sistema de generadores homogéneos:

Proposición 1.6.

Sea I un ideal de $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. Si $f \in I$, entonces $f_i \in I$, para toda componente homogénea f_i de f .
2. $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} I_i$, siendo $I_i = I \cap A_i$.
3. I está generado por sus elementos homogéneos.
4. I tiene un sistema de generadores homogéneos.

Demostración. La cadena $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ es trivial, luego solo quedaría probar la implicación $4 \Rightarrow 1$:

Tomamos un sistema homogéneo de generadores de I : $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Sea $f \in I$. Podemos escribir $f = \sum_i a_i f_i$, con a_i elementos de A . Al ser A un anillo graduado, podemos escribir, para todo i , $a_i = \sum_j a_{ij}$, donde ahora $a_{ij} \in A_j$

es homogéneo. Por lo tanto, $f = \sum_{i,j} a_{i,j} f_i$. Agrupamos ahora los sumandos del mismo grado y obtenemos $f = \sum_k c_k$, con:

$$c_k = \sum_{\deg(a_{i,j} f_i) = k} a_{i,j} f_i \in A_k, \quad \text{con } 0 \leq k \leq \deg(f)$$

f queda descompuesto en sus componentes homogéneas. Por hipótesis, $f_i \in I$, luego el producto $a_{i,j} f_i$ también pertenece al ideal, y por lo tanto c_k , que es la suma de estos productos, es un elemento de I . Esto completa la implicación $4 \Rightarrow 1$. \square

Recordamos de la nota 1.4 que un anillo A es *graduado* si se puede descomponer como suma numerable de ciertos subgrupos ($A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$), bajo la condición $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$, para todos $i, j \in \mathbb{N}$. Esta definición se extiende fácilmente a los módulos:

Definición 1.7. Sea $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ un anillo graduado y M un A -módulo. Entonces diremos que M es *graduado* si existen subgrupos $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq M$ tales que:

1. $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$, y
2. $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$, para todos $i, j \in \mathbb{N}$.

De forma idéntica al caso de los ideales, la Proposición 1.6 tiene una versión análoga para los módulos, y en particular:

Proposición 1.8.

Si M es un A -módulo graduado, entonces posee un sistema de generadores homogéneos. Dicho sistema es finito si M es finitamente generado.

Definición 1.9. Recordemos que una base de un A -módulo M es un sistema de generadores linealmente independiente. Los módulos que no tienen una base se denominan *módulos de torsión*, mientras que los que sí poseen base se denominan *módulos libres*.

Definición 1.10. Sea $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$ un A -módulo graduado. La *graduación desplazada* de M se define como $M(p) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_{i+p}$. Se da entre M y $M(p)$ la siguiente relación: $M(p)_i = M_{p+i}$. Al entero p se le denomina *desfase* de la graduación (o *shift* en inglés).

Definición 1.11 (Multigraduación). De la graduación que hemos visto sobre \mathbb{N} podemos pasar a otra más fina sobre \mathbb{N}^n . Los conceptos vistos se extienden a esta nueva graduación con sencillez:

- Un monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ se dice que tiene *multigrado* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- Un polinomio $f \in A$ es *homogéneo de multigrado* α si $f = cx^\alpha$, con $c \in \mathbb{K}$.
- El anillo A es \mathbb{N}^n -graduado, y sus componentes graduadas son:

$$A_\alpha := \begin{cases} \mathbb{K}x^\alpha & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}_+^n. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Un A -módulo M es \mathbb{N}^n -graduado si $M = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} M_\alpha$ y se cumple que $A_\alpha M_\beta \subseteq M_{\alpha+\beta}$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.
- La *multigraduación desplazada* de M se define como $M(\alpha) = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}^n} M_{\alpha+\beta}$. El elemento α se denomina *desfase*.

Definición 1.12. Sean M, N dos A -módulos graduados. Dado $i \in \mathbb{N}$, diremos que un homomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ es *graduado de grado* i si lleva elementos homogéneos en elementos homogéneos y cumple que $\deg(\phi(f)) = i + \deg(f)$, para todo $f \in M$ homogéneo y con $f \notin \text{Ker}(\phi)$. En el caso $i = 0$, diremos simplemente que ϕ es *graduado*.

Teorema 1.13 (Ver [10, Teorema 1.19]).

Si M es un A -módulo libre graduado finitamente generado, y $\mathcal{M} = \{m_1, \dots, m_r\}$ es un sistema minimal de generadores homogéneos de M , entonces:

- \mathcal{M} es una base de M .

- Si denotamos $p_i = \deg(m_i), \forall i = 1, \dots, r$, la aplicación:

$$\phi : A(-p_1) \oplus \dots \oplus A(-p_r) \rightarrow M$$

dada por $\phi(e_i) = m_i$, con e_i el i -ésimo elemento de la base canónica de $A(-p_1) \oplus \dots \oplus A(-p_r)$, es un isomorfismo graduado.

1.2. Complejos simpliciales

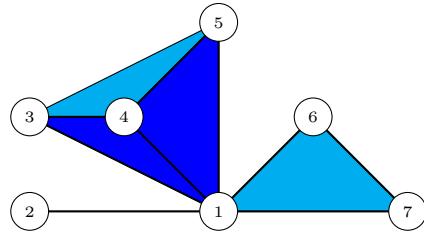
Definición 1.14. Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto finito. Un *complejo simplicial* Δ sobre V es un subconjunto de $\mathcal{P}(V)$ tal que:

- $\{v_i\} \in \Delta$ para $i = 1, \dots, n$.
- Si $F \in \Delta$ y $G \subseteq F$, entonces G también pertenece a Δ .

Los elementos de Δ reciben el nombre de *caras*. Algunos tipos de caras son:

- Las caras de la forma $\{v_i\}$ se denominan *vértices*.
- Las caras de la forma $\{v_i, v_j\}$, con $i \neq j$, se denominan *aristas*.
- Las caras maximales para la inclusión en Δ se denominan *facetas* o *caretas*.
- Las caras de cardinal n se denominan n -caras.

Ejemplo 1.15. El complejo simplicial representado por:



esta compuesto por:

- Los vértices numerados del 1 al 7.
- Las aristas: (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (3,4), (3,5), (4,5) y (6,7).
- Las 3-caras: (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (3, 4, 5) y (1, 6, 7).
- La 4-cara: (1, 3, 4, 5).

De entre todas ellas, las caras (1, 3, 4, 5), (1, 6, 7) y (1, 2) son las facetas de este complejo simplicial.

Definición 1.16. Dado un complejo simplicial Δ sobre $V = \{v_1, \dots, v_n\}$:

- Sea $W \subseteq V$. El subcomplejo Δ_W se define como:

$$\Delta_W := \{F \in \Delta \mid F \subseteq W\}.$$

- La dimensión de una cara F es $\dim(F) = |F| - 1$.
- La dimensión de Δ es:

$$\dim(\Delta) = \max_{F \in \Delta} (\dim(F)) = \max\{\dim(G) \mid G \text{ es faceta de } \Delta\}.$$

- Un complejo simplicial es *puro* si todas sus facetas tienen la misma dimensión.
- Denotamos el número de caras de dimensión i de Δ por $f_i(\Delta)$, y llamamos f -vector de Δ a:

$$f(\Delta) = (f_0(\Delta), f_1(\Delta), \dots, f_{\dim(\Delta)}(\Delta)).$$

- Llamamos $(n - 1)$ -símplex de Δ al complejo simplicial Δ_{n-1} , formado por todos los subconjuntos de V .

Si asociamos cada uno de los vértices de Δ a una variable $(v_i \rightarrow x_i)$, se crea una relación entre el conjunto de complejos simpliciales y el conjunto de ideales monomiales libres de cuadrados. De esta forma, la cara $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_l}\}$ del complejo simplicial se corresponde con el monomio $x_{i_1} \cdots x_{i_l}$ en el ideal.

Introducimos algo de notación: Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Para cada subconjunto $V' \subseteq V$:

- $P_{V'} \subseteq A$ denotará el ideal generado por las variables correspondientes a los elementos de V' . $P_{V'} = x_i|v_i \in V'$.
- $\underline{x}^{V'} \in A$ es el monomio producto de las variables correspondientes a elementos de V' , es decir: $\underline{x}^{V'} = \prod_{v_i \in V'} x_i$.

Definición 1.17. Sea Δ un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$. Sea $A(\Delta) = K[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables, siendo K un cuerpo.

El *ideal de Stanley-Reisner* de Δ , denotado como $I(\Delta)$, es el ideal de $A(\Delta)$ generado por todos los monomios libres de cuadrados $x_{i_1} \dots x_{i_j}$ tales que ninguna cara de Δ contiene a todos los vértices v_{i_1}, \dots, v_{i_j} , es decir:

$$I(\Delta) = \langle \underline{x}^{V'} | V' \subseteq V \text{ y } V' \notin \Delta \rangle.$$

El *anillo de Stanley-Reisner* de Δ se define como el anillo cociente:

$$K[\Delta] = R(\Delta)/I(\Delta).$$

Tenemos que todo ideal de Stanley-Reisner es libre de cuadrados, pero también podemos ver el recíproco, que todo ideal libre de cuadrados es el ideal de Stanley-Reisner de algún complejo simplicial: Si I es un ideal monomial libre de cuadrados en A , entonces tomamos $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y escribimos I en función de su sistema minimal de generadores monomiales. Cada uno de estos monomios se corresponde con \underline{x}^{V_t} para algún $V_t \subseteq V$, luego tendremos $I = \langle \underline{x}^{V_1}, \dots, \underline{x}^{V_d} \rangle$. Ahora bien, consideremos el complejo simplicial $\Delta = \{V' | V_t \not\subseteq V', \forall t \in \{1, \dots, d\}\}$. Su ideal de Stanley-Reisner es:

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \langle \underline{x}^{V'} | V' \subseteq V \text{ y } V' \notin \Delta \rangle = \langle \underline{x}^{V'} | V' \subseteq V \text{ y } \exists t \in \{1, \dots, d\}, V_t \subseteq V' \rangle \\ &= \langle \underline{x}^{V'} | V' \subseteq V \text{ y } \underline{x}^{V'} \in I \rangle = I. \end{aligned}$$

1.3. Resolución libre de un ideal

Definiremos ahora la construcción principal de este trabajo: la resolución libre de un módulo. A partir de ella definiremos la resolución libre minimal graduada de un módulo o ideal homogéneo.

Definición 1.18. Sea M un A -módulo. Llamamos *resolución libre de M* a cualquier sucesión de módulos libres:

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0,$$

que sea exacta, es decir, tal que $\text{Ker}(\varphi_i) = \text{Im}(\varphi_{i+1})$. Diremos que una resolución libre es *graduada* si A es un anillo graduado, M es un A -módulo graduado, y se cumplen las siguientes condiciones:

- Los \mathcal{F}_i son módulos libres graduados.
- Cada φ_i es homogénea y de grado 0.

En el caso en el que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}_i = 0$ para todo $i > j$ y $\mathcal{F}_i \neq 0$ para todo $i \leq j$, diremos que la resolución libre es *finita* de longitud j .

A la hora de escribir resoluciones libres graduadas, omitiremos con frecuencia la sección “ $M \rightarrow 0$ ”.

Definición 1.19. Dos resoluciones libres graduadas

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\varphi_{n+1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_0 \\ \dots &\xrightarrow{\psi_{n+1}} \mathcal{G}_n \xrightarrow{\psi_n} \dots \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{G}_0 \end{aligned}$$

son *isomorfas* si existen isomorfismos graduados $\phi_k : \mathcal{F}_k \rightarrow \mathcal{G}_k$ tales que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{k+1} & \xrightarrow{\varphi_k} & \mathcal{F}_k \\ \phi_{k+1} \downarrow & & \downarrow \phi_k \\ \mathcal{G}_{k+1} & \xrightarrow{\psi_k} & \mathcal{G}_k \end{array}$$

es comutativo para todo k .

Nos interesa precisar el caso en el que la resolución libre graduada posee la menor longitud posible, pues ese es el objetivo de los algoritmos que presentaremos.

Definición 1.20. Dada una resolución libre graduada de un A -módulo M :

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_0,$$

diremos que es *minimal* si es la resolución de M de menor longitud y tal que cualquier otra resolución libre graduada de M :

$$\dots \xrightarrow{\psi_{m+1}} \mathcal{G}_m \xrightarrow{\psi_m} \dots \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{G}_0$$

cumple que si $\mathcal{F}_i = A^t$, entonces $\mathcal{G}_i = A^r$, con $r \geq t$.

Proposición 1.21 ([12, Lema 1.24]).

La resolución libre graduada minimal de un A -módulo M es única salvo isomorfismos.

Definición 1.22. Dado M un A -módulo y $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ un sistema de generadores de M , llamamos *sizigia* a cualquier elemento $\{a_1, \dots, a_t\}$ de A^t tal que

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_t f_t = 0.$$

El conjunto de todas las sizigias de F constituye un A -módulo, y se denomina el *1.er módulo de sizigias de F* , abreviado como $Siz_1(F)$ o simplemente, $Siz(F)$. En particular, si I es un ideal de A y $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ es un sistema de generadores de I , el primer módulo de sizigias de I es $Siz(G)$. Cabe destacar que estas construcciones pueden depender del sistema de generadores escogido para I . Por abuso de notación, hablaremos habitualmente del primer módulo de sizigias de I , y lo denotaremos por $Siz(I)$, si es esencialmente único (salvo isomorfismo graduado).

Con el módulo de sizigias construido, podemos llegar al primer paso de una resolución libre graduada, veámoslo por partes:

Recordemos primero que el Teorema de la Base de Hilbert nos indica que el anillo de polinomios con coeficientes en un anillo noetheriano es también noetheriano. La aplicación reiterada de este resultado nos permite afirmar que $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es noetheriano, luego cualquier submódulo de A^t , y en concreto, cualquier ideal de A , son finitamente generados.

$Siz(F)$ es un A -módulo, más concretamente, es un submódulo de A^t , por lo que, por el Teorema de la Base de Hilbert, es finitamente generado. Definimos $\phi : A^t \rightarrow M$, que lleva e_i en f_i para $i = 1, \dots, t$. Destaquemos que $\text{Ker}(\phi) = Siz(F)$.

De la misma manera en la que se prueba el Teorema 1.13, se puede obtener que si los grados de f_1, \dots, f_t son p_1, \dots, p_t , entonces $\phi : A(-p_1) \oplus \dots \oplus$

$A(-p_t) \rightarrow M$ es un homomorfismo graduado de grado 0 y por lo tanto $Siz(F)$ es un A -módulo graduado. Además es finitamente generado, por ser un submódulo de A^t .

La aplicación ϕ se corresponde así con la antes denominada φ_0 , y tenemos el primer paso de una resolución libre graduada de M :

$$\dots \xrightarrow{\varphi_1} A(-p_1) \oplus \dots \oplus A(-p_t) \xrightarrow{\phi=\varphi_0} M \rightarrow 0,$$

donde $\text{Im}(\varphi_1) = \text{Ker}(\varphi_0) = Siz(F) \subseteq A(-p_1) \oplus \dots \oplus A(-p_t)$.

Este proceso se puede iterar, tomando un sistema de generadores de este nuevo módulo para construir el llamado *2.º módulo de sizigias*, ($Siz_2(F)$) y así sucesivamente. El siguiente teorema afirma que este procedimiento termina:

Teorema 1.23 (Teorema de las sizigias de Hilbert, [8]).

Sea $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Todo A -módulo graduado que sea finitamente generado tiene una resolución libre finita graduada de longitud igual o menor que n , el número de variables del anillo.

Este teorema nos dice que las resoluciones libres graduadas de un ideal $I \subseteq A$ son de la forma:

$$0 \rightarrow A^{b_p} \xrightarrow{\varphi_p} \dots \xrightarrow{\varphi_1} A^{b_0} \xrightarrow{\varphi_0} I \rightarrow 0,$$

donde en cada paso se cumple $\text{Im}(\varphi_j) = \text{Ker}(\varphi_{j-1}) = Siz_j(I)$. La resolución libre graduada construida en este proceso iterativo no tiene por qué ser minimal, de hecho, el sistema original de generadores, F , puede no serlo.

Nota 1.24. Podemos relacionar las resoluciones libres graduadas de un ideal I y del cociente A/I visto como A -módulo. Consideramos la resolución libre graduada de I :

$$0 \rightarrow A^{b_p} \xrightarrow{\varphi_p} \dots \xrightarrow{\varphi_2} A^{b_1} \xrightarrow{\varphi_1} A^{b_0} \xrightarrow{\varphi_0} I \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

Entonces, la siguiente resolución:

$$0 \rightarrow A^{b_p} \xrightarrow{\varphi_p} \dots \xrightarrow{\varphi_2} A^{b_1} \xrightarrow{\varphi_1} A^{b_0} \xrightarrow{\varphi_0} A \xrightarrow{\pi} A/I \xrightarrow{\varepsilon} 0,$$

donde π denota la aplicación de paso al cociente, es una resolución libre graduada de A/I . Veámoslo: la parte izquierda cumple las condiciones de la

definición, por lo que solo quedaría comprobar: $\text{Im}(\varphi_0) = \text{Ker}(\pi)$?

Como π es paso al cociente, $\text{Ker}(\pi) = I$. Por otra parte, de la resolución libre graduada de I vemos que, efectivamente, $I = \text{Im}(\varphi_0) = \text{Ker}(\varepsilon)$. Deducimos que teniendo una de las dos resoluciones la otra resulta trivial. Sin embargo, la longitud de la resolución del cociente A/I es una unidad mayor que la longitud de su contraparte, y los módulos y aplicaciones comunes presentan también una unidad de desplazamiento. Por lo tanto, se debe especificar la resolución con la que se esté trabajando en cada situación.

1.4. Números de Betti

Los números de Betti son el principal método para guardar la información sobre una resolución libre graduada. Se definen varios tipos de números de Betti en función de la graduación empleada, que llamaremos *graduados*, *multigraduados*, y *globales*. En el caso de que la resolución a tratar sea la resolución libre graduada minimal de un ideal I o un A -módulo M , hablaremos de los números de Betti de dicho ideal o módulo, pues el teorema 1.23 afirma que la resolución es única salvo isomorfismos.

Daremos las definiciones siguientes para un ideal I , pero son completamente idénticas para el caso de A -módulos graduados, excepto la primera, que sólo se define para el caso en el que I es un ideal monomial. Consideraremos únicamente el caso de resoluciones libres graduadas minimales, pues en los casos no minimales las definiciones son prácticamente idénticas.

Definición 1.25. Sea $I \subseteq A$ un ideal monomial. Sean $i \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Se define el i -ésimo número de Betti *multigraduado* de multigrado α , y se denota $\beta_{i,\alpha}(I)$, al número de generadores de multigrado α que aparecen en el i -ésimo paso de la resolución libre graduada minimal de I .

Definición 1.26. Sea $I \subseteq A$ un ideal homogéneo. Sean $i, j \in \mathbb{N}$. Se define el i -ésimo número de Betti *graduado* de grado j , y se denota $\beta_{i,j}(I)$, al número de generadores de grado j que aparecen en el i -ésimo paso de la resolución libre graduada minimal de I .

En el caso en el que I sea un ideal monomial, se cumple $\beta_{i,j}(I) = \sum_{|\alpha|=j} \beta_{i,\alpha}(I)$.

Definición 1.27. Sea $I \subseteq A$ un ideal homogéneo. Sea $i \in \mathbb{N}$. Se define el i -ésimo número de Betti *global*, y se denota $\beta_i(I)$, al número de generadores

que aparecen en el i -ésimo paso de la resolución libre graduada minimal de I .

De la definición anterior deducimos que $\beta_i(I) = \sum_j \beta_{i,j}(I)$.

Proposición 1.28 (Consecuencia de [6, pg.46]).

Sea I un ideal homogéneo de A , y sean β_i los números de Betti globales asociados a la resolución libre graduada minimal de A/I . Entonces se cumple:

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \beta_i = 0,$$

donde p es la longitud de la resolución.

Recordemos que hemos relacionado la resolución libre graduada minimal de un ideal I con la del cociente A/I . De igual manera, los números de Betti de ambas resoluciones están relacionados:

Proposición 1.29.

Sean I un ideal monomial, $i \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Entonces:

$$\beta_{i,\alpha}(I) = \beta_{i+1,\alpha}(A/I).$$

Si I es un ideal homogéneo y $j \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\beta_{i,j}(I) = \beta_{i+1,j}(A/I),$$

y por lo tanto, los números de Betti globales de ambas resoluciones cumplen:

$$\beta_i(I) = \beta_{i+1}(A/I).$$

Podemos aplicar estas relaciones entre números de Betti a la Proposición 1.28 para deducir el siguiente resultado:

Proposición 1.30.

Si I es un ideal homogéneo de A y β_i son los números de Betti de una resolución libre graduada minimal de I , entonces:

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \beta_i = 1,$$

donde p es la longitud de la resolución.

El siguiente tema a tratar es el almacenamiento y/o presentación de los números de Betti graduados y globales de un A -módulo M . Al estar tratando con dos índices, la primera intuición puede ser construir una tabla o matriz, escribiendo en la posición $a_{i,j}$ al número de Betti graduado $\beta_{i,j}(M)$. Sin embargo, como veremos a continuación, esto se puede hacer de una forma más eficiente.

Si una resolución libre graduada es minimal, entonces los A -módulos de dicha resolución cumplen que las imágenes de sus bases son conjuntos minimales de generadores de los módulos siguientes. El Lema de Nakayama (que podemos encontrar, por ejemplo, en [5]) nos permite afirmar:

$$\text{Im}(\varphi_i) \subset (x_1, \dots, x_n) \left(\bigoplus_j A(-j)^{\beta_{i-1,j}} \right).$$

Y como consecuencia, obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.31 (Prop. 1.9, [7]).

Sea I un ideal homogéneo y $\{\beta_{i,j}\}$ los números de Betti graduados de I (asociados a su res. libre. grad. minimal). Sea i un índice cualquiera. Si existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_{i,j} = 0$ para todo $j < J$, entonces $\beta_{i+1,j+1} = 0$, $\forall j < J$.

Ahora podemos reducir el tamaño de la tabla que almacena los números de Betti: las columnas denotarán el paso de la resolución libre graduada minimal, y almacenaremos en la posición $a_{j,i}$ el número de Betti graduado $\beta_{i,i+j}$. Los rangos de los índices son $0 \leq i \leq p$, con p el número de pasos de la resolución y $0 \leq j \leq r$, donde r es la última fila de la tabla con alguna entrada no nula. Añadiendo una última fila que represente la suma de cada columna, obtenemos los números de Betti globales. La tabla resultante se denomina *diagrama de Betti* de I :

	0	...	i	...	p
0	$\beta_{0,0}$...	$\beta_{i,i}$...	$\beta_{p,p}$
...
j	$\beta_{0,j}$...	$\beta_{i,i+j}$...	$\beta_{p,p+j}$
...
r	$\beta_{0,r}$...	$\beta_{i,i+r}$...	$\beta_{p,p+r}$
Globales	β_0	...	β_i	...	β_p

Nota 1.32. En el caso de tratar con una resolución libre graduada general de I (no minimal), la proposición anterior no se cumple, luego para representar los números de Betti podría ser necesario el uso de filas correspondientes a índices negativos.

2. Resolución de Taylor. La poda del complejo simplicial

En este capítulo presentaremos un primer algoritmo de poda aplicable a una de las resoluciones más conocidas: la llamada resolución de Taylor. El cálculo de ésta resolución es bastante simple, y si bien el algoritmo de poda no ofrece siempre una resolución minimal, nos es útil para sentar las bases del algoritmo que veremos en el siguiente capítulo.

La resolución de Taylor es una resolución libre graduada del anillo cociente A/I , donde I es un ideal monomial de A . Asociada a esta resolución hay un complejo simplicial cuya construcción es aplicable a cualquier ideal monomial, en contraposición con la necesidad de tener un ideal libre de cuadrados, como ocurría en el caso de complejos simpliciales asociados a ideales de Stanley-Reisner.

2.1. Construcción de la resolución de Taylor

Consideramos $I \subset A$ un ideal monomial, y sea $\{x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_t}\}$ un sistema minimal de generadores monomiales de I . Definimos, para cada subconjunto $J \subseteq \{1, \dots, t\}$:

$$m_J = \text{mcm} (x^{\alpha_i} \mid i \in J)$$

Así quedan definidos un total de 2^t monomios. Llamaremos $\boldsymbol{\alpha}_J$ al exponente de m_J . Consideramos el conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_{2^t}\}$, los cuales etiquetamos con los $\boldsymbol{\alpha}_J$. La poda, como veremos más adelante, utiliza la posibilidad de que dos vértices distintos posean la misma etiqueta, es decir, que $\boldsymbol{\alpha}_J = \boldsymbol{\alpha}_{J'}$, con J y J' subconjuntos distintos de I .

Tomamos \mathcal{F}_s el A -módulo libre con base conformada por los elementos e_J , siendo $J \subseteq \{1, \dots, t\}$, con $|J| = s$.

Ahora, tomamos todos los subconjuntos de $\{1, \dots, t\}$ y para cada par de ellos J, K , con $J = \{j_1, \dots, j_s\}$ ordenado, definimos:

$$c_{J,K} = \begin{cases} (-1)^k \frac{m_J}{m_K} & \text{si } K = J \setminus \{j_r\} \text{ para algún } r, \\ 0 & \text{en el resto de casos.} \end{cases}$$

Una vez definido este coeficiente, se define el complejo de Taylor de I , $T(I)$, como el complejo simplicial formado por los vértices V y las aristas que unen los vértices m_J y m_K , si $c_{J,K} \neq 0$. Por definición de $c_{J,K}$, estas aristas unen elementos de \mathcal{F}_s con elementos de \mathcal{F}_{s-1} , y nos incita a construir la aplicación:

$$\varphi_s : \mathcal{F}_s \rightarrow \mathcal{F}_{s-1},$$

definida como:

$$\varphi_s(e_J) = \sum_K c_{J,K} \cdot e_K.$$

Y obtenemos la siguiente sucesión de módulos:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_t \xrightarrow{\varphi_t} \dots \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\varphi_0} A/I \rightarrow 0.$$

Esta es la llamada resolución de Taylor, que como se puede ver en [6, Ejercicio 17.11], es una resolución libre graduada de A/I .

Como hemos dicho antes, la resolución de Taylor no suele ser minimal. El complejo de Taylor que hemos definido almacena la información de la resolución en sus vértices y aristas: cada uno de los 2^t vértices representa un elemento de la base de uno de los módulos F_i , siendo el elemento asociado al vértice m_J un miembro de la base de $\mathcal{F}_{|J|}$. Diremos que las aristas que unen vértices de \mathcal{F}_s con vértices de \mathcal{F}_{s-1} *corresponden a la dirección* s o que *corresponden a la dirección dada por el generador* x^{α_s} .

Se puede apreciar que la resolución de Taylor contiene un exceso de información en las aristas, pues aquellas que unen elementos con la misma etiqueta representan información redundante.

Nota 2.1. La resolución de Taylor permite probar la Proposición 1.28 para el caso que estamos tratando, resoluciones libres graduadas de A/I con I un ideal monomial. En primer lugar, tengamos en cuenta que cada módulo \mathcal{F}_s tiene un total de $\binom{t}{s}$ elementos, es decir:

$$\beta_s = \binom{t}{s}.$$

Realizando ahora la suma alternada y aplicando la formula del binomio de Newton, tenemos:

$$\sum_{i=0}^t (-1)^i \beta_i = \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} 1^{t-i} (-1)^i = (1-1)^t = 0.$$

Además, en el caso de obtenerse otra resolución libre graduada a partir de la resolución de Taylor, el resultado se mantiene. Esto se debe a que eliminar un generador innecesario de \mathcal{F}_s implica que uno de los generadores de \mathcal{F}_{s+1} puede ser suprimido, al poder escribirse como combinación lineal del resto de generadores. En los nuevos números (globales) de Betti de la resolución resultante, encontraríamos que dos de ellos, consecutivos, se han visto reducidos en una unidad. Esto no afecta a la suma alternada, que sigue siendo 0.

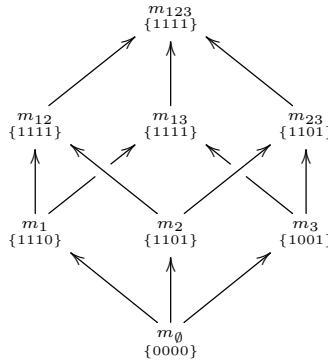
Nota 2.2. Se suele escribir la resolución de Taylor como:

$$0 \rightarrow A^{(t)} \xrightarrow{\varphi_t} A^{(t-1)} \xrightarrow{\varphi_{t-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_1} A^{(0)} \xrightarrow{\varphi_0} A/I \rightarrow 0.$$

Ejemplo 2.3. Tomamos el ideal $I = \langle x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_4 \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$. En primer lugar, calculamos los elementos m_J , con $J \subseteq \{1, 2, 3\}$, y sus correspondientes etiquetas:

$ J $	J	m_J	Etiqueta
0	\emptyset	1	$\{0000\}$
1	1	$x_1x_2x_3$	$\{1110\}$
	2	$x_1x_2x_4$	$\{1101\}$
	3	x_1x_4	$\{1001\}$
2	1, 2	$x_1x_2x_3x_4$	$\{1111\}$
	1, 3	$x_1x_2x_3x_4$	$\{1111\}$
	2, 3	$x_1x_2x_4$	$\{1101\}$
3	1, 2, 3	$x_1x_2x_3x_4$	$\{1111\}$

Y su complejo de Taylor es de la forma siguiente:



Los números de Betti graduados de la resolución de Taylor se obtienen mediante el conteo de unos en las etiquetas:

	0	1	2	3
0	1	—	—	—
1	—	1	1	1
2	—	2	2	—
Globales	1	3	3	1

Y por tanto la resolución de Taylor del ideal A/I es:

$$0 \rightarrow A \rightarrow A^3 \rightarrow A^3 \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0.$$

O, de forma más precisa:

$$0 \rightarrow A(-4) \rightarrow A(-4)^2 \oplus A(-3) \rightarrow A(-3)^2 \oplus A(-2) \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0.$$

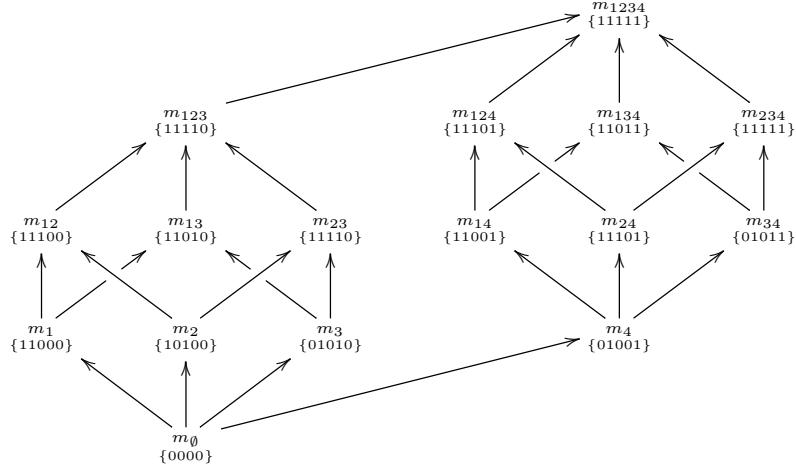
Ejemplo 2.4. Consideremos ahora el ideal:

$$I = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_2x_4, x_2x_5 \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_7]$$

La tabla resultante es:

$ J $	J	m_J	Etiqueta
0	\emptyset	1	$\{00000\}$
1	$\{1\}$	x_1x_2	$\{11000\}$
	$\{2\}$	x_1x_3	$\{10100\}$
	$\{3\}$	x_2x_4	$\{01010\}$
	$\{4\}$	x_2x_5	$\{01001\}$
2	$\{1, 2\}$	$x_1x_2x_3$	$\{11100\}$
	$\{1, 3\}$	$x_1x_2x_4$	$\{11010\}$
	$\{1, 4\}$	$x_1x_2x_5$	$\{11001\}$
	$\{2, 3\}$	$x_1x_2x_3x_4$	$\{11110\}$
	$\{2, 4\}$	$x_1x_2x_3x_5$	$\{11101\}$
	$\{3, 4\}$	$x_2x_4x_5$	$\{01011\}$
3	$\{1, 2, 3\}$	$x_1x_2x_3x_4$	$\{11110\}$
	$\{1, 2, 4\}$	$x_1x_2x_3x_5$	$\{11101\}$
	$\{1, 3, 4\}$	$x_1x_2x_4x_5$	$\{11011\}$
	$\{2, 3, 4\}$	$x_1x_2x_3x_4x_5$	$\{11111\}$
4	$\{1, 2, 3, 4\}$	$x_1x_2x_3x_4x_5$	$\{11111\}$

Y su complejo de Taylor es de la forma:



Donde cada vértice del cubo izquierdo se supone conectado a su análogo en el cubo derecho.

El diagrama de Betti de este complejo es:

	0	1	2	3	4
0	1	—	—	—	—
1	—	4	4	3	1
2	—	—	2	1	—
Globales	1	4	6	4	1

La resolución de Taylor es, por tanto:

$$0 \rightarrow A \rightarrow A^4 \rightarrow A^6 \rightarrow A^4 \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0.$$

O alternativamente:

$$0 \rightarrow A(-5) \rightarrow A(-5) \oplus A(-4)^3 \rightarrow A(-4)^2 \oplus A(-3)^4 \rightarrow A(-2)^4 \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0.$$

2.2. Poda de la resolución de Taylor

En esta sección presentamos un algoritmo que elimina información redundante de la resolución de Taylor empleando el complejo de Taylor asociado. La

resolución libre graduada resultante es, de forma general, menor que otras resoluciones libres graduadas conocidas, como la de Lyubeznik, la cual veremos en el siguiente capítulo. El algoritmo es el siguiente:

Sea I un ideal monomial y $\{x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_t}\}$ un conjunto minimal de generadores monomiales de I .

Entrada: Conjunto de Aristas del Complejo de Taylor $\mathbf{T}(I)$.

para s **desde** 1 **hasta** t **hacer**

para toda arista E en la dirección de s **hacer**

si E une dos vértices con la misma etiqueta **entonces**

 Suprimir E ;

 Suprimir los vértices conectados por E ;

 Suprimir toda arista que estuviera conectada a los vértices suprimidos;

fin

fin

fin

Salida: Complejo de Taylor podado, sin aristas que unan vértices con la misma etiqueta.

Ahora, consideramos los vértices m_J no podados. El A -módulo libre generado por los m_J tales que $|J| = k$ recibe el nombre de M_k . Todos estos A -módulos constituyen una resolución libre graduada de A/I de la forma siguiente:

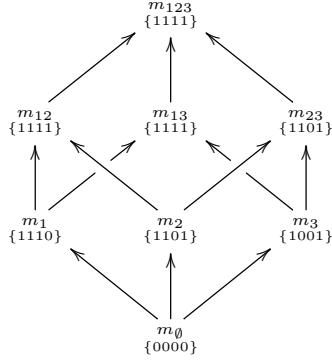
$$0 \rightarrow M_k \rightarrow M_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_0 \rightarrow A/I \rightarrow 0.$$

Y la forma en la que se gradúa es análoga a la resolución de Taylor.

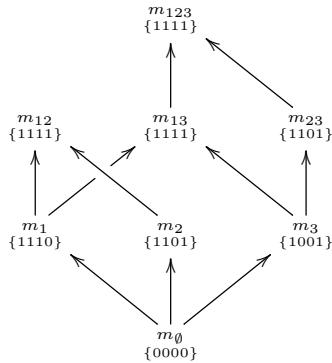
La resolución que se obtiene tiene un total de r pasos, donde r es el máximo número de elementos que tienen los subconjuntos J asociados a los vértices no podados.

Nota 2.5. El orden en el que se realiza la poda es importante. Se podrían obtener resoluciones distintas según que variable se asocie a que dirección.

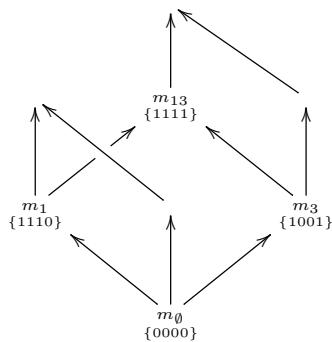
Ejemplo 2.6. Consideramos el ideal del ejemplo 2.3. El complejo de Taylor que obtuvimos es el siguiente:



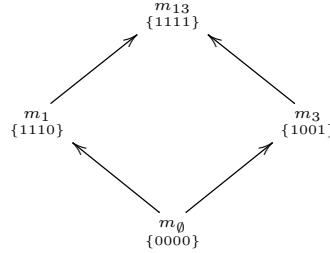
Podando en la dirección 3, es decir, las aristas paralelas a $\{m_0, m_3\}$ (esta es la dirección en la que se podan más aristas en el primer paso), obtenemos:



Ahora descartamos los vértices que estaban unidos por estas aristas:



Y en ultimo lugar, descartamos las aristas sin algún vértice:



Los vértices restantes no son afectados por la poda en otras direcciones (tienen etiquetas distintas), por lo que el algoritmo termina y este es el complejo resultante. Con este complejo, podemos construir el nuevo diagrama de Betti de la resolución:

	0	1	2	3
0	1	—	—	—
1	—	1	—	—
2	—	1	1	—
Globales	1	2	1	—

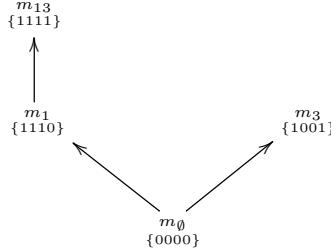
Obteniéndose la resolución:

$$0 \rightarrow A(-4) \rightarrow A(-3) \oplus A(-2) \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0.$$

Que como podemos observar con el siguiente código en *CoCoA*, coincide con la resolución libre graduada minimal de A/I .

```
# use A ::= QQ[x1,x2,x3,x4]; I := ideal(x1*x2*x3, x1*x2*x4, x1*x4);
# PrintBettiDiagram(A/I);
      0      1      2
-----
0:    1      -      -
1:    -      1      -
2:    -      1      1
-----
Tot:   1      2      1
# PrintRes(A/I);
0 --> R[-4] --> R[-2] (+) R[-3] --> R
```

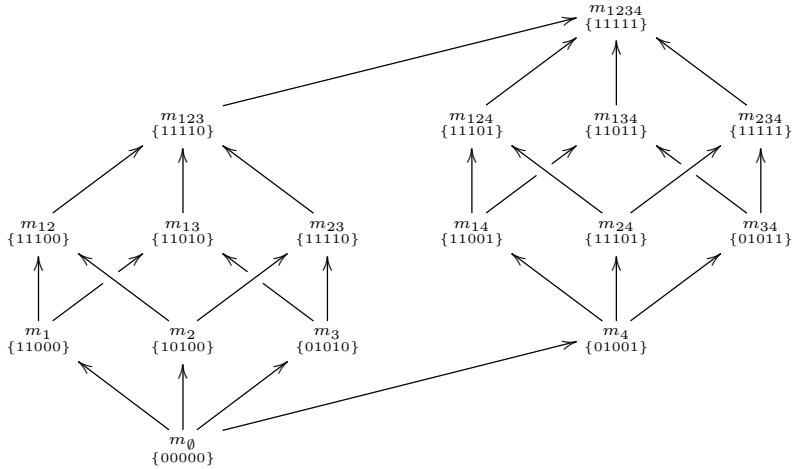
Supongamos ahora que la poda hubiese comenzado en la dirección del generador 2, $x_1x_2x_4$. En ese caso habríamos obtenido el siguiente complejo podado:



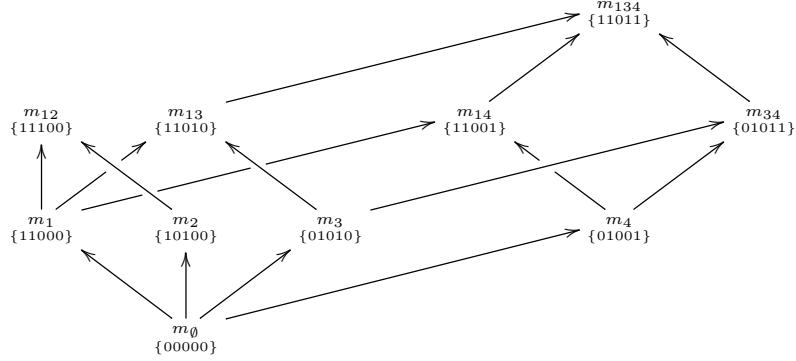
Si bien el diagrama de Betti correspondiente y la resolución extraída son idénticos al caso anterior, para otros ideales podríamos haber obtenido una resolución distinta.

Ejemplo 2.7. Empleamos el algoritmo para podar la resolución de Taylor del ideal del ejemplo 2.4.

Tenemos $I = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_2x_4, x_2x_5 \rangle$, y el complejo de Taylor asociado a la resolución de Taylor es:



Podamos en la dirección del primer generador:



Y podar en el resto de direcciones no modifica el complejo. El diagrama de Betti resultante es:

	0	1	2	3
0	1	—	—	—
1	—	4	4	1
2	—	—	—	—
Globales	1	4	4	1

Y la resolución obtenida es:

$$0 \rightarrow A(-4) \rightarrow A(-3)^4 \rightarrow A(-2)^4 \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0.$$

Comparamos con *CoCoA* para confirmar que esta resolución también es minimal:

```

# use A::=QQ[x1,x2,x3,x4,x5]; I:=ideal(x1*x2,x1*x3,x2*x4,x2*x5);
# PrintBettiDiagram(A/I);
      0      1      2      3
-----
0:  1      -      -      -
1:  -      4      4      1
-----
Tot:  1      4      4      1
# PrintRes(A/I);
0 --> R[-4] --> R[-3]^4 --> R[-2]^4 --> R

```

3. La poda de los ideales de aristas.

En este capítulo estudiaremos el algoritmo descrito por Barile y Macchia en [3] para construir resoluciones libres graduadas minimales para ciertos ideales monomiales, los llamados ideales de aristas de bosques. La conexión que tienen estos ideales monomiales con los grafos nos permitirá representarlos de forma sencilla, y una poda inteligente de las sucesiones de vértices de estos grafos nos dará los generadores de los módulos de la resolución minimal.

3.1. Teoría de grafos

La mayor parte de las definiciones y nociones siguientes están extraídas del libro “Introduction to Graph Theory” de Robin J. Wilson ([13]).

Definición 3.1. Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de vértices. Un grafo sobre V es un par ordenado $G = (V, E)$, donde $E \subset V \times V$ es el conjunto de *aristas* de G .

Si el conjunto de aristas se considera ordenado hablaremos de grafos *dirigidos*, mientras que en el caso contrario diremos que el grafo es *no dirigido*.

Para el caso que nos concierne, supondremos que todo grafo mencionado de ahora en adelante es no dirigido.

Definición 3.2. Sea $G = \{V, E\}$ un grafo.

Sea $e = (v_i, v_j)$ una arista; v_i y v_j se denominan *puntos finales* o *extremos* de e .

Dos vértices $v_i, v_j \in V$ son *adyacentes* si hay una arista e tal que $e = (v_i, v_j)$.

Un *camino* en G es una sucesión de vértices $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_t}\}$ tal que $(v_{i_{j-1}}, v_{i_j}) \in E$ para todo $j = 1, \dots, t$.

Un *ciclo* es un camino $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_t}\}$ en el cual $v_{i_0} = v_{i_t}$ y $v_{i_j} \neq v_{i_k}$ si $j, k \in \{1, \dots, t-1\}$ con $j \neq k$.

Definición 3.3. Un grafo es:

- *Conexo*: Si para todo par de vértices $\{v_i, v_j\}$ existe un camino de la forma $\{v_i, \dots, v_j\}$.
- *Cíclico*: Si el grafo constituye un ciclo. En el caso en el que ni el grafo ni ningún subgrafo suyo sean cíclicos, diremos que es un grafo *acíclico*.
- *Completo*: Si todo par de vértices está conectado por una única arista.
- *Árbol*: Si es conexo y acíclico. La unión disjunta de árboles se denomina *bosque* (equivalentemente, un bosque es un grafo acíclico no conexo).

Ejemplo 3.4. Tomemos el conjunto de vértices: $V = \{v_1, \dots, v_5\}$.

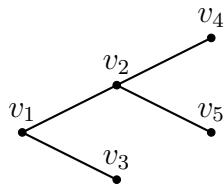


Figura 1: Un grafo conexo y acíclico (un árbol) en V

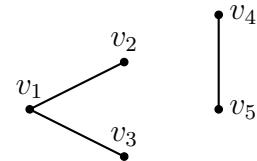


Figura 2: Un grafo acíclico no conexo (un bosque) en V

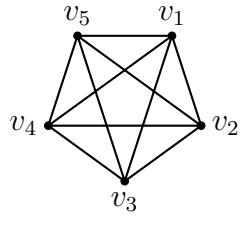


Figura 3: Un grafo completo (el único posible) en V

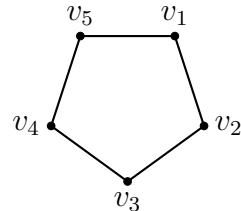


Figura 4: Un grafo cíclico en V

Como trataremos con árboles, resaltaremos algunas de las propiedades que tienen este tipo particular de grafos. En primer lugar, damos una definición:

Definición 3.5. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Dado un camino $\{v_1, \dots, v_h\}$ en G , diremos que v_i es un *vértice redundante* en el camino si existe otro índice j distinto de i tal que $v_i = v_j$.

Proposición 3.6.

Sea T un árbol. Entonces, entre dos vértices cualesquiera existe un único camino sin vértices redundantes.

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Sean v_1, v_2 dos vértices de T cualesquiera. Como los árboles son casos particulares de grafos conexos, pueden ocurrir tres situaciones:

1. Entre v_1 y v_2 hay un único camino sin vértices redundantes.
2. Entre v_1 y v_2 hay más de un camino sin vértices redundantes. En este caso podemos tomar dos de ellos y componerlos de forma que tengamos un camino $\{v_1, \dots, v_2, \dots, v_1\}$. Entonces o bien este camino (si el único vértice redundante en la composición es v_1) o bien un subcamino suyo (en el caso en el que exista otro vértice redundante distinto de v_1) son un ciclo, lo cual es absurdo pues T es acíclico por hipótesis.
3. Entre v_1 y v_2 solo hay caminos con vértices redundantes. Sea entonces $\{v_1, w_1, \dots, w_h, v_2\}$ uno de estos caminos. Tomemos $\{w_i, \dots, w_k\}$ un subcamino del original de forma que $w_i = w_k$ y ningún vértice interno esté repetido. Según la longitud de este subcamino tenemos que:
 - Si la longitud del subcamino es igual a 3, estamos recorriendo la misma arista en direcciones opuestas de forma seguida. Podemos entonces “comprimir” esta sección, dejando sólo el vértice w_i en el lugar que ocupaba el subcamino en el camino original. Volvemos a tener un camino entre v_1 y v_2 , de longitud dos unidades menor que el original. Si sigue habiendo vértices redundantes en el nuevo camino, volvemos al inicio de la situación 3.
 - Si la longuitud del subcamino es 4 o superior, entonces cumple las condiciones de un ciclo, pero esto es absurdo, pues el árbol es acíclico por definición.

Este proceso acaba o bien hallando un ciclo o bien encontrando un camino sin vértices redundantes entre v_1 y v_2 . Ambos casos son absurdos, el primero al estar trabajando en un grafo acíclico y el segundo por hipótesis del caso 3. De cualquier manera, concluimos que entre dos vértices cualesquiera de un árbol existe un único camino sin vértices redundantes. \square

A todo grafo se le puede asignar un ideal monomial sobre el anillo de polinomios en tantas variables como vértices tenga dicho grafo. Este ideal se conoce como *ideal de aristas del grafo* G y se define de la forma siguiente:

Definición 3.7. El ideal de aristas de un grafo $G = \{V = \{v_1, \dots, v_n\}, E\}$, denotado por I_G , es el ideal generado por los monomios dados por las aristas de G :

$$I_G = \langle \{x_i x_j \mid (v_i, v_j) \in E\} \rangle \subseteq A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

Este ideal es, por definición, monomial y libre de cuadrados. Notemos también que dado un ideal monomial libre de cuadrados I , se puede construir un grafo G de forma que $I = I_G$. Por ejemplo, para el caso del ideal $I = \langle x_1 x_2, x_1 x_3, x_2, x_4, x_2 x_5 \rangle$, tenemos:

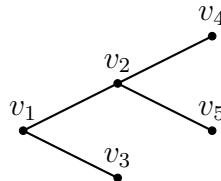


Figura 5: El grafo asociado a I

De ahora en adelante consideraremos los ideales de aristas de bosques. Nombraremos a los vértices como las variables para simplificar la notación.

Definición 3.8. El *Grafo Lineal* de un grafo G , denotado $L(G)$, es el grafo construido de la siguiente manera:

1. Se etiquetan las aristas de G como e_1, \dots, e_r y se construye un conjunto de r vértices w_1, \dots, w_r cada uno asociado a una arista.
2. Si las aristas asociadas a los vértices w_i, w_j , comparten un vértice, entonces (w_i, w_j) es una arista del grafo $L(G)$.

Consideramos T un árbol sobre el conjunto de vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$. Sean $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $I = I_T$ el ideal de aristas de T .

Fijemos un vértice cualquiera, por ejemplo x_1 , y llamamos d a la máxima distancia (longitud de un camino) que puede haber entre x_1 y cualquier otro vértice. Para $i = 0, \dots, d$, llamamos $x_1^{(i)}, \dots, x_{s(i)}^{(i)}$ a los vértices que estén a distancia i de x_1 . Diremos que estos vértices tienen rango i .

Tomemos ahora el grafo lineal de T , $L(T)$. En él, sea $((i)_p, (i+1)_q)$ el vértice que corresponde a la arista $(x_p^{(i)}, x_q^{(i+1)})$ de T . Todos los vértices de $L(T)$ de la forma $((i)_p, -)$ o $(-, (i)_p)$ conforman un subgrafo completo de $L(T)$, correspondiente con el conjunto de aristas de T que tienen a $x_p^{(i)}$ como uno de sus extremos. A estos subgrafos completos les damos el nombre de K -subgrafos de $L(T)$, los representaremos como $K_p^{(i)}$, y diremos que tienen índice $(i)_p$.

Ejemplo 3.9. Sea T el grafo de la figura 5, que es un árbol. Fijando $x_1 = x^{(0)}_1$, tenemos que este grafo y su grafo lineal $L(T)$ quedan etiquetados como:

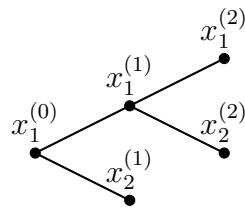


Figura 6: El árbol T

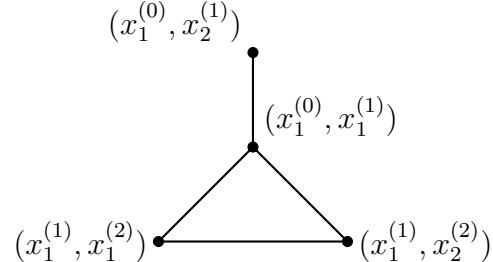


Figura 7: El grafo lineal de T ; $L(T)$

Proposición 3.10.

Sea $i \geq 0$. Para cada índice $(i+1)_q$ existe exactamente un índice de la forma $(i)_p$ tal que $((i)_p, (i+1)_q)$ es un vértice de $L(T)$. Diremos que $x_p^{(i)}$ es el único predecesor de $x_q^{(i+1)}$.

Demuestração. El caso $i = 0$ resulta trivial, pues el único vértice de rango 0 es $x_1^{(0)}$, por lo que los vértices de rango 1 solo pueden tener un predecesor. Si $i > 0$, supongamos que $x_q^{(i+1)}$ es el vértice de menor rango que tiene dos predecesores, denotados por $x_{i,1}^{(i)}$ y $x_{i,2}^{(i)}$. Sean $\{x_1^{(0)}, x_{1,1}^{(1)}, \dots, x_{j,1}^{(j)}, \dots, x_{i,1}^{(i)}\}$ y

$\{x_1^{(0)}, x_{1,2}^{(1)}, \dots, x_{j,2}^{(j)}, \dots, x_{i,2}^{(i)}\}$ los caminos que conectan $x_1^{(0)}$ con los dos vértices predecesores de $x_q^{(i+1)}$. Entonces, recorriendo un camino en el sentido natural y el otro en sentido inverso, tenemos que

$$\{x_1^{(0)}, x_{1,1}^{(1)}, \dots, x_{j,1}^{(j)}, \dots, x_{i,1}^{(i)}, x_q^{(i+1)}, x_{i,2}^{(i)}, \dots, x_{j,2}^{(j)}, \dots, x_{1,2}^{(1)}, x_1^{(0)}\}$$

es un ciclo en T , pues todos los vértices son distintos a excepción de los extremos. Esto es absurdo, pues si T es un árbol, es acíclico. Por lo tanto, todo vértice tiene un único predecesor. \square

Fijamos el siguiente orden lexicográfico sobre las variables de A :

$$x_1^{(0)} > x_1^{(1)} > \dots x_{s_1}^{(1)} > x_1^{(2)} > \dots x_{s_2}^{(2)} > \dots x_{s_d}^{(d)}.$$

La sucesión $\{x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_{s_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_{s_2}^{(2)}, \dots, x_{s_d}^{(d)}\}$ es la llamada *sucesión de generadores*.

Nota 3.11. Bajo el orden lexicográfico, al comparar dos monomios, lo que hacemos es comparar sus variables más grandes, y, si éstas son iguales, pasar a la siguiente variable más grande.

3.2. La resolución de Lyubeznik.

El primer paso para construir la resolución libre graduada minimal que buscamos es construir una resolución libre intermedia llamada *resolución de Lyubeznik*. Esta resolución es a su vez un refinamiento de la resolución de Taylor, pero en general sigue sin ser minimal.

Sea S la sucesión de generadores de I . Las subsucesiones de S se denominan *símbolos*.

Dado un símbolo $u = (u_1, \dots, u_r)$, r recibe el nombre de *longitud* de u , y se denota $|u|$. Toda subsucesión de u se dice que es un *subsímbolo* de u . Diremos también que u_1, \dots, u_r son *elementos* de u , o que *pertenecen* a u . Supondremos siempre que u es un conjunto ordenado. Por último, denotaremos $\text{lcm}(u) := \text{lcm}(u_1, \dots, u_r)$.

Lyubeznik dió en [9] la siguiente definición para ideales monomiales generales, y en ella se basa la resolución que lleva su nombre.

Definición 3.12. Un símbolo $u = (u_1, \dots, u_r)$ se denomina *L-admissible* si u_q no divide a $\text{lcm}(u_{i_h}, u_{i_{h+1}}, \dots, u_{i_t})$ para ningún $h < t$ tal que $q < i_h$. Diremos que u es *reducido* si u no divide a $\text{lcm}(u_1, \dots, \widehat{u}_q, \dots, u_r)$ para ningún $1 \leq q \leq r$, donde \widehat{u}_q denota que el monomio u_q es suprimido.

Nota 3.13. En el caso que estamos tratando, al ser I un ideal generado por monomios libres de cuadrado de grado 2, podemos reformular la *L-admisibilidad*: u es *L-admissible* si u_q no divide a ningún producto $u_{i_h}u_{i_k}$ para todos los pares h, k con $h < k \leq t$ y $q < i_h$.

De forma análoga, la condición de ser *reducido* se puede simplificar: u es *reducido* si u_q no divide a ningún producto $u_{i_h}u_{i_k}$ para todos los pares h, k con $q \neq i_h$ y $q \neq i_k$. Por lo tanto, ser *reducido* implica ser *L-admissible*.

Pasamos a construir la resolución de Lyubeznik, empezando por los módulos que la conforman. En primer lugar, tomamos $L_0 = A$, y para $r = 1, \dots, |S|$, definimos L_r como el A -módulo libre generado por todos los símbolos *L-admisibles* de longitud r . Ahora, sea $\delta_r : L_r \rightarrow L_{r-1}$ la aplicación:

$$\delta_r((u_{i_1}, \dots, u_{i_r})) = \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \frac{\text{lcm}((u_{i_1}, \dots, u_{i_r}))}{\text{lcm}((u_{i_1}, \dots, \widehat{u}_{i_j}, \dots, u_{i_r}))} (u_{i_1}, \dots, \widehat{u}_{i_j}, \dots, u_{i_r}).$$

Entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.14.

$$0 \rightarrow L_s \xrightarrow{\delta_s} L_{s-1} \xrightarrow{\delta_{s-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} L_0 \xrightarrow{\delta_0} 0$$

es una resolución libre de A/I .

La resolución anterior se conoce como resolución de Lyubeznik. Es una de las resoluciones que se pueden encontrar “dentro” de la resolución de Taylor.

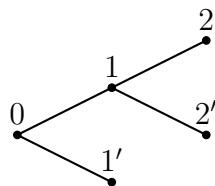
3.3. Construcción de la resolución minimal

Ahora nuestro objetivo es determinar unos submódulos F_r de los módulos L_r de forma que la resolución resultante sea minimal cuando I es el ideal de aristas de un árbol. Para ello determinaremos los generadores de cada F_r , que serán una categoría especial de símbolos, a los cuales daremos el nombre de *F-admisibles*. Los primeros pasos para seleccionar estos símbolos son:

- (I) Escogemos una sucesión $(i_1)_{p_1}, \dots, (i_j)_{p_j}$ descendiente (para el orden antes definido) de índices de forma que ningún par de ellos correspondan a vértices adyacentes de T o, dicho de otra manera, que ninguna pareja de índices forme una arista de $L(T)$. De ahora en adelante, llamaremos a estas sucesiones de índices *sucesiones compatibles*.
- (II) Elegimos todos los monomios de aristas correspondientes a los vértices de los K -subgrafos $K_{p_j}^{(i_j)}$.
- (III) En el símbolo formado por estos monomios, eliminamos los monomios m que cumplan la siguiente condición: m corresponde a un vértice de $K_{p_j}^{(i_j)}$ y no es coprimo con un elemento ν del símbolo correspondiente a un vértice de $K_{p_h}^{(i_h)}$, para algún $h > j$.
- (IV) Consideramos todos los subsímbolos de los símbolos obtenidos.

Los símbolos obtenidos tras estos primeros 4 pasos se denominan *casi F -admisibles*. El conjunto de monomios de un símbolo u casi F -admisible que son divisibles por $x_{p_j}^{(i_j)}$ se denomina el $(i_j)_{p_j}$ -*bloque de u* .

Ejemplo 3.15. Vamos a obtener los símbolos casi F -admisibles para el ideal $I = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_2x_4, x_2x_5 \rangle \subset A = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$, del ejemplo 2.4. El orden sobre los vértices es $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$. Esto corresponde con la asignación de índices $x_1^{(0)} > x_1^{(1)} > x_2^{(1)} > x_1^{(2)} > x_2^{(2)}$. Para simplificar, escribiremos $0 > 1 > 1' > 2 > 2'$, es decir, $x_p^{(i)}$ es reemplazado por el número i seguido de $p - 1$ apóstrofes. Continuaremos con esta notación en el resto de ejemplos. Redibujamos el grafo para visualizar esta notación.



En primer lugar, consideramos todas las sucesiones según el paso (I) del algoritmo. Estas son: $0, 1, 1', 2, 2', 0 - 2, 0 - 2', 1 - 1', 1' - 2$ y $1' - 2'$. Ahora consideramos, para cada sucesión, el símbolo formado por todos los monomios de aristas de los K -subgrafos correspondientes:

$0 : 01, 01'$	$0 - 2 : 01, 01', 12$
$1 : 01, 12, 12'$	$0 - 2' : 01, 01', 12'$
$1' : 01'$	$1 - 1' : 01, 01', 12, 12'$
$2 : 12$	$1' - 2 : 01', 12$
$2' : 12'$	$1' - 2' : 01', 12'$

Realizamos ahora las eliminaciones indicadas en el paso (III) y obtenemos:

$0 : 01, 01'$	$0 - 2 : 01, 01', 12$
$1 : 01, 12, 12'$	$0 - 2' : 01, 01', 12'$
$1' : 01'$	$1 - 1' : 01, 01', 12, 12'$
$2 : 12$	$1' - 2 : 01', 12$
$2' : 12'$	$1' - 2' : 01', 12'$

Y consideramos todos los subsímbolos de estos, como indica el paso (IV). Así obtenemos los símbolos casi F -admisibles, que ordenamos por longitud:

Longitud	1	2	3
Símbolos	01	01, 01'	01, 12, 12'
	01'	01, 12	01', 12, 12'
	12	01, 12'	
	12'	01', 12	
		01', 12'	
		12, 12'	

Nota 3.16. La sucesión de índices asignados a los bloques de un símbolo casi F -admissible no siempre es única. Consideramos por ejemplo el caso de un símbolo u formado por un único monomio, $x_p^{(i)} x_q^{(i+1)}$, que no corresponda a una arista terminal de T (es decir, ambos vértices conectados por esta arista son vértices de alguna otra arista): u se puede considerar parte del $(i)_p$ -bloque o del $(i+1)_q$ -bloque.

Nota 3.17. La eliminación realizada en el paso (III) del algoritmo nos muestra que los monomios de un símbolo casi F -admisible que pertenezcan a bloques distintos son coprimos. Por lo tanto, deducimos que si 2 o más monomios de un símbolo casi F -admisible son divisibles por $x_p^{(i)}$, todos ellos deben pertenecer al $(i)_p$ -bloque del símbolo.

Establecido esto, podemos relacionar los símbolos casi F -admisibles con los conceptos anteriores de L -admisibilidad y símbolo reducido:

Proposición 3.18.

Todo símbolo casi F -admisible es L -admisible. De hecho, es reducido.

Demostración. Sea u un símbolo casi F -admisible. Consideramos uno de los monomios de aristas que lo conforman, $\mu = x_p^{(i)} x_q^{(i+1)}$. Si pertenece al $(i)_p$ -bloque de u , entonces la Nota 3.17 estipula que el resto de monomios de u que pertenezcan a otros bloques son coprimos con μ , en particular no son divisibles por $x_q^{(i+1)}$. El único monomio del $(i)_p$ -bloque (y, por consiguiente, de u) divisible por $x_q^{(i+1)}$ es el propio μ . El razonamiento es completamente análogo si μ pertenece al $(i+1)_q$ -bloque de u , y deducimos que μ no divide a ningún producto de monomios de u que no tenga al propio μ como factor. Por lo tanto, u es reducido, como queríamos probar. \square

Los 4 primeros pasos del algoritmo no son suficientes para construir una resolución minimal.

Definición 3.19. Sean a, b, c, d cuatro vértices de T de forma que ab y cd son elementos de un mismo símbolo u , con $ab > cd$ para el orden establecido. Si el monomio ac pertenece a I , diremos que ac es el *puente* entre ab y cd . Además, diremos que ab y cd forman un *hueco* en u si $ac \notin u$, cd es el único monomio de u divisible por d y ningún monomio que sea más pequeño que cd es divisible por b . El monomio ac se llama el *puente* del hueco.

Nota 3.20. En las condiciones de la definición anterior, si u es un símbolo reducido, la condición $ac \notin u$ siempre se cumple.

Proposición 3.21.

Si $ab, bc, cd \in I$ y $ab > cd$, entonces $a > c$.

Demostración. Si $a > b$, entonces $c > a$ implicaría $cd > ab$, lo cual es absurdo. Sin embargo, si $b > a$, b es el único predecesor de a y por tanto, $ac \in I$ implica que $a > c$. \square

Dada la definición de *hueco*, el último paso de la poda es:

(V) Descartamos todos los símbolos que contengan un hueco.

Definición 3.22. Los símbolos resultantes tras este quinto paso se denominan *F-admisibles*.

Proposición 3.23.

Un símbolo es F-admisible si y solo si es reducido y no tiene huecos.

Demostración. Si un símbolo es *F-admisible*, entonces es un monomio casi *F-admisible* que ha no descartado en el paso (V) de la poda, es decir, que no tenía huecos. Por la Proposición 3.18, al ser casi *F-admisible*, también es reducido.

Supongamos ahora que u es un símbolo reducido y sin huecos. Veamos que cumple las condiciones de los pasos (I) y (III), y que por lo tanto no será descartado en el proceso de poda (Notemos que si no es descartado tras el paso (III), entonces es uno de los monomios considerados en el paso (IV) y al no tener huecos no es eliminado en el paso (V)). En primer lugar asumamos que los elementos de u son coprimos dos a dos. Entonces u cumple la condición del paso (III). Sean ahora a, b, c, d cuatro vértices de T de forma que ab y cd sean dos elementos distintos de u que cumplen $ab > cd$. Entonces ninguno de los vértices a o b es adyacente ni a c ni a d , lo que implica que se cumple la condición del paso (I). De no ser así, uno de los monomios ac, ad, bc o bd sería un monomio de arista que conforma un *puente* entre los monomios ab y cd , en contra de los que suponíamos.

Supongamos que para una indeterminada $a = x_p^{(i)}$, u posee dos monomios distintos divisibles por a , digamos ab y ac . Deducimos que ningún otro monomio de u puede ser divisible por b o c , ya que si no, u no sería reducido. Probaremos ahora que, salvo por cambios en la asignación de bloques a los monomios de u , ningún monomio de u que pertenezca a un bloque anterior al $(i)_p$ -bloque es divisible por a . Razonemos por reducción al absurdo: supongamos

que existe un monomio de u divisible por a y que pertenezca al $(i')_{p'}$ -bloque de u , con $(i')_{p'} > (i)_p$. Denotamos $b = x_{p'}^{(i')}$. Entonces $ab \in u$, y ningún otro monomio de u es divisible por b , ya que si no u sería reducido. Luego podemos reasignar ab al $(i)_p$ -bloque de u , suprimiendo el $(i')_{p'}$ -bloque. Si aplicamos repetidamente esta transformación al resto de bloques de u yendo de izquierda a derecha, tras un número finito de pasos la condición del paso (III) se cumple, y todos los monomios de bloques distintos resultan coprimos.

Ahora, supongamos que en la sucesión de índices de los bloques de u hay dos índices $(i')_{p'} > (i)_p$ que correspondan a vértices consecutivos a y c (Es decir, la sucesión no cumple la condición del paso (I)). Sean ab y cd monomios del $(i')_{p'}$ -bloque y del $(i)_p$ -bloque respectivamente. Entonces ningún otro monomio de u es divisible por b o d , por lo que ab y cd conforman un hueco. Sin embargo, esto contradice nuestra suposición inicial, por lo que la sucesión de índices cumple la condición del paso (I), luego si un símbolo es reducido y no tiene huecos, entonces es F -admisible. \square

Los símbolos F -admisibles son los generadores de los módulos de una resolución libre graduada. Como veremos en el teorema 3.31, cuando el grafo es un árbol, la resolución es la minimal.

Ejemplo 3.24. Continuamos con el ejemplo 3.15, calculando los símbolos F -admisibles. Recordemos que la tabla de símbolos casi F -admisibles es:

Longitud	1	2	3
Símbolos	01	01, 01'	01, 12, 12'
	01'	01, 12	01', 12, 12'
	12	01, 12'	
	12'	01', 12	
		01', 12'	
		12, 12'	

Eliminaremos los símbolos que presenten huecos, que son:

Símbolo	Hueco
01', 12, 12'	01
01', 12	01
01', 12'	01

Y la tabla de símbolos F -admisibles es, por lo tanto:

Longitud	1	2	3
Símbolos	01	01, 01'	01, 12, 12'
	01'	01, 12	
	12	01, 12'	
	12'	12, 12'	

A continuación, escribimos los cinco pasos del algoritmo seguidos:

Entrada: Ideal de aristas de un árbol $T = \{V, E\}$, con los vértices indexados y ordenados.

para toda s sucesión de índices compatible **hacer**

```

si algún par de elementos de  $s$  está en  $E$  entonces
| Descartar  $s$ 
en otro caso
|  $\mu[s] \leftarrow$  Monomios de aristas de los  $K$ -subgrafos con índices en
|  $s$ ;
|  $l[s] \leftarrow \text{length}(\mu[s])$ ; * (Numeramos  $\mu[s] = \mu_1, \dots, \mu_l$ )*
| para  $i$  desde 1 hasta  $l[s] - 1$  hacer
|   para  $j$  desde  $i + 1$  hasta  $l[s]$  hacer
|     si  $\text{lcm}(\mu_i, \mu_j) \neq \mu_i \mu_j$  &&  $\text{Indsup}(\mu_i) < \text{Indsup}(\mu_j)$ 
|       entonces
|         |  $\mu[s] \leftarrow \mu[s] \setminus \mu_i$ ;
|         |  $l[s] \leftarrow l[s] - 1$ ;
|       fin
|     fin
|   fin
| fin
|  $\nu[s][p] \leftarrow$  Subsímbolos de  $\mu[s]$ ; * ( $p = 1, \dots, 2^{l[s]} - 1$ )*
| para  $p$  desde 1 hasta  $2^{l[s]} - 1$  hacer
|   si  $\nu[s][p]$  tiene un hueco entonces
|     | Eliminar  $\nu[s][p]$ ;
|   fin
| fin
| fin
fin

```

Salida: Todo $\nu[s][p]$ restante.

El A -módulo libre generado por los símbolos F -admisibles de longitud

r se denota por F_r , y probaremos más adelante que cada módulo F_r es el módulo que aparece en el r -ésimo paso de la resolución libre minimal de A/I . La graduación se atribuye en función del mínimo común múltiplo de cada símbolo. Así, si F_r está generado por k símbolos u_1, \dots, u_k de forma que $\text{lcm}(u_i) = p_i$, escribimos:

$$F_r = \bigoplus_i A(-p_i),$$

y agrupando los símbolos con el mismo grado obtenemos:

$$F_r = \bigoplus_j A(-g_j)^{k_j}.$$

Ejemplo 3.25. Culminamos los ejemplos 3.15 y 3.24 construyendo la resolución libre graduada minimal de A/I . Para ello construimos una tabla agrupando los símbolos F -admisibles por longitud y peso:

Peso \ Longitud	1	2	3
1	—	—	—
2	01 01' 12 12'	—	—
3	—	01, 01' 01, 12 01, 12' 12, 12'	—
4	—	—	01, 12, 12'
Correspondencia con F_i	$A(-2)^4$	$A(-3)^4$	$A(-4)$

Por lo que la resolución libre graduada minimal de A/I es:

$$0 \rightarrow A(-4) \rightarrow A(-3)^4 \rightarrow A(-2)^4 \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0.$$

Y el diagrama de Betti es el mismo que el obtenido para la poda de Taylor en el ejemplo 2.7:

	0	1	2	3
0	1	—	—	—
1	—	4	4	1
Globales	1	4	4	1

3.4. Prueba de la minimalidad

Empezaremos relacionando un tipo concreto de espacios topológicos con los complejos de Taylor vistos en el capítulo 2. Luego nos apoyaremos en el trabajo realizado por Batzies y Welkers en [4] para mostrar que los módulos resultantes del algoritmo que hemos descrito, junto con unas aplicaciones que describiremos a continuación, constituyen una resolución libre graduada minimal de A/I .

Definición 3.26. Decimos que un espacio topológico es una d -celda abierta (o una celda abierta de dimensión d) si es homeomorfo a la bola abierta unidad \mathring{B}^d :

$$\mathring{B}^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_i x_i^2 < 1\}.$$

Definición 3.27. Un espacio topológico X se dice que es un CW -complejo si existe una colección de celdas abiertas y disjuntas $X^{[*]} = \{\sigma_i \mid i \in J\}$, con

$$X = \bigcup_{i \in J} \sigma_i,$$

y de forma que:

1. X es Haussdorff.
2. Para cada d -celda abierta σ existe una aplicación continua:

$$f_\sigma : B^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_i x_i^2 \leq 1\} \rightarrow X,$$

de forma que su restricción a la bola abierta es un homeomorfismo f_σ° entre \mathring{B}^d y σ de forma que $f_\sigma^\circ(S^{d-1})$ tiene intersección no vacía con una cantidad finita de celdas, todas ellas de dimensión a lo sumo $d-1$.

3. Un subconjunto $Y \subset X$ es cerrado en X si y solo si $A \cap \bar{\sigma}$ es cerrado en $\bar{\sigma}$ para toda $\sigma \in X^{[*]}$.

f_σ se denomina la aplicación característica de σ . Cuando se tiene que las aplicaciones características son homomorfismos, decimos que el CW -complejo

es *regular*. Se puede ver que el complejo de Taylor es un *CW*-complejo regular \mathbb{Z}^n -graduado (representado como el par (X, gr) , donde X es el *CW*-complejo y gr la graduación), de la forma siguiente:

Para cada índice d , las d -celdas son los símbolos de longitud d , y la multi-graduación se define como:

$$gr(\mu_1, \dots, \mu_d) = \sum_{k=1}^s e_{j_k}, \text{ cuando } \text{lcm}(\mu_1, \dots, \mu_d) = \prod_{k=1}^s x_{j_k},$$

dónde e_j es el j -ésimo elemento de la base canónica de \mathbb{Z}^n . Por ejemplo, si estamos trabajando en $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$, tenemos $gr(x_1x_4, x_1x_2, x_2x_4) = [1, 1, 0, 1]$.

Ahora definimos el grafo dirigido G_X (cuyos vértices son los elementos de X , es decir, el conjunto de todos los símbolos), considerando el conjunto de aristas A_X conformado por las aristas dirigidas $u \rightarrow u'$, de forma que $u' \subset u$ y la longitud de u' es una unidad menor que la longitud de u . Consideramos el conjunto de símbolos que contienen un hueco o no son reducidos, es decir, los no F -admisibles.

Dado un símbolo u que contenga el hueco $ab > cd$ con puente ac , diremos que un puente λ de u *sigue* a este hueco si $ac > \lambda$. Vamos a clasificar los símbolos en dos tipos:

- Un símbolo es *de tipo 1* si contiene un hueco que no es seguido por ningún puente.
- Un símbolo es *de tipo 2* si es no F -admisible y no es de tipo 1.

Tengamos en cuenta que si un símbolo es de tipo 2 entonces o bien no tiene huecos, o bien contiene un puente que sigue a todos sus huecos. En cualquier caso, contiene un puente. Sea B el conjunto de aristas dirigidas $u \rightarrow u'$ de forma que u' es de tipo 1 y u se obtiene insertando el puente más pequeño de los huecos de u' . A esta operación la llamaremos *inserción de puente*.

Lema 3.28.

Con la notación anterior, las aristas de B se cumplen las siguientes propiedades:

- 1) u es de tipo 2 (luego u nunca es el vértice inicial de una arista de B).
- 2) u' se obtiene quitando el puente más pequeño de u , por lo que es el vértice inicial de una única arista de B .
- 3) Si un símbolo es de tipo 2, se puede obtener mediante inserción de puente en un símbolo de tipo 1 (y por tanto, todo símbolo de tipo 2 aparece como vértice final en una arista de B).

Demostración. Recordemos que obtenemos u insertando a u' el puente más pequeño de uno de sus huecos. Denotemos el hueco por $xy > zw$ y el puente por xz .

- 1) Razonemos por contradicción. Supongamos que u no es de tipo 2, por lo que posee un hueco $ab > cd$, cuyo puente es bc , de forma que ningún otro puente sigue a este hueco. Entonces debe darse que $xz > bc$. Por definición de *hueco*, ningún monomio de la forma de (con $d > e$) puede pertenecer a u . Si tanto ab como cd pertenecieran a u' , entonces conformarían un hueco también presente en u' , llegando a contradicción con el hecho de que u' es de tipo 1. Por lo tanto xz es o bien ab o bien cd . Pero $cd \neq xz$, ya que $ab > cd$ implica que $bc > cd$. Deducimos que $cd \in u'$ y entonces $ab = xz$. Luego $b = x$ o $b = z$. Por la Proposición 3.21 tenemos las relaciones de orden $x > z > w$ y $b > c > d$. Si $b = x$, y por lo tanto $bc = xc$, entonces $ab = xz > xc = bc$ implica $z > c$, por lo tanto $zw > cd$ y, por definición del hueco $xy > zw$, ningún monomio que contenga a y puede seguir a cd . Es decir, $xy > cd$ es un hueco en u' . Pero esto es absurdo, ya que el puente de este hueco es xc , que es más pequeño que xz . Ahora bien, si $b = z$, y por lo tanto $bc = zc$, se da que $xz > zc$. Como $x > z$, entonces $z > c$. Por consiguiente, $zw > cd$ es un hueco en u' cuyo puente zc es más pequeño que xz , llegando a contradicción. Por tanto, deducimos que u es de tipo 2.
- 2) Por hipótesis, el monomio xz es más pequeño que todos los puentes de u' . Nuestro objetivo es probar que es más pequeño que todos los monomios de u' que son puentes en u pero no en u' . La operación de inserción del puente xz produce nuevos puentes, ya que algún monomio de u' de la forma ax o az se podría convertir en un puente entre un monomio $ab \in u'$ y el recién insertado xz . Probemos que, en ese caso, este nuevo puente,

que llamaremos μ , cumple $\mu > xz$. Supongamos $\mu = az$. En primer lugar, $a \neq w$, ya que por definición zw es el único monomio de u' que contiene a w , y ab también pertenece a u' . Pero entonces az ya es un puente en u' , que conecta zw y ab . Supongamos ahora que $\mu = ax$. Si $a \neq y$, entonces ax es un puente en u' entre xy y ab . Luego asumamos que $a = y$ (es decir, $\mu = xy$). Si $x > y$, entonces $y > b$. De nuevo, por definición de hueco (aplicado a $xy > zw$), tenemos $yb > zw$, lo que implica $y > z$, y por lo tanto $\mu = xy > xz$. En el caso en que $y > x$, como $x > z$ tenemos $y > z$ y de nuevo $\mu = xy > xz$, finalizando la prueba de este apartado.

- 3) Probemos que si eliminamos el puente más pequeño (xz , puente entre xy y zw) en un símbolo u de tipo 2, en el símbolo resultante u' los monomios xy y zw forman un hueco al que no sigue ningún puente. Para ello, probemos que se cumplen las dos condiciones siguientes:
 - I) u no posee ningún otro monomio de la forma wb . Razonamos por contradicción: si $wb \in u$, entonces zw es el puente entre xz y wb . Pero $xz > zw$, por lo que xz no es minimal, y llegamos un absurdo.
 - II) u no contiene ningún monomio de la forma ya que sea más pequeño que zw . Supongamos que $ya \in u$, y veamos que $ya > zw$. Si $y > x$, entonces $x > z$ implica $y > z$ y por tanto $ya > zw$. Veamos que ocurre si $x > y$. Al ser xy el puente entre xz y ya , tenemos $xy > xz$ y entonces $y > z$. Esto implica que $ya > zw$, como queríamos probar. \square

Proposición 3.29.

El grafo G_X^B dado por el conjunto de aristas:

$$A_X^B = (A_X \setminus B) \cup \{u' \rightarrow u \mid u \rightarrow u' \in B\}$$

no contiene ningún ciclo dirigido.

Demostración. Las aristas (dirigidas) de A_X^B pueden clasificarse en dos tipos:

- a) Las aristas $u_1 \rightarrow u_2$ que no pertenecen a B , en las que u_2 se obtiene suprimiendo un monomio de u_1 .
- b) Las aristas $u' \rightarrow u$ donde u' es de tipo 1, u es de tipo 2 y u' se obtiene aplicando inserción de puente a u' .

Con la notación anterior, tenemos $|u_2| = |u_1| - 1$ y $|u| = |u'| + 1$. Evaluando el cardinal de todos los vértices del grafo, deducimos que todo ciclo dirigido en G_X^B debe contener al menos una arista de cada tipo. De hecho, ya que cada arista de tipo b) finaliza en un vértice de tipo 2, la arista siguiente debe ser de tipo a), por lo que todo ciclo dirigido en G_X^B debe estar compuesto por una secuencia alternante de aristas de tipo a) y tipo b), y por tanto, la secuencia de vértices alterna entre vértices de tipo 1 y tipo 2.

Además, $gr(u') = gr(u)$, y $gr(u_1) \geq gr(u_2)$, y la igualdad se da si y solo si u_2 se obtiene eliminando un puente de u_1 . Por lo que en los ciclos dirigidos, todos los vértices tienen el mismo grado y los vértices consecutivos difieren en un único puente.

Sea C un ciclo dirigido en G_X^B . Tomemos $u' \rightarrow u$ una arista dirigida (de tipo b)) de C , donde u se obtiene insertando el puente xz en el hueco $xy > zw$ de u' . De hecho, asumamos que esta arista es tal que dicho xz sea máximo bajo el orden parcial. Este ciclo C también contiene una arista $v \rightarrow u'$ de tipo a), donde u se obtiene insertando a u' un puente distinto de xz (ya que $v \neq u$). En particular, tenemos que $xz \notin v$. Esto implica que en algún punto del camino dirigido entre u y v se suprime el puente xz . La primera arista de este camino, $u \rightarrow u_1$, es de tipo a), y como $u_1 \neq u'$, u_1 es de tipo 1 y $xz \in u_1$. Es decir, en u_1 hay dos monomios que conforman un hueco, $ab > cd$, cuyo puente más pequeño bc cumple $bc < xz$. Como tenemos $bc > cd$, también tenemos $cd \neq xz$, de donde concluimos $cd \in u'$, ya que $cd \in u_1 \subset u$.

Además, como ya hemos visto en el primer apartado del lema 3.28, $ab = xz$ si y solo si xz no es el más pequeño de los puentes de los huecos de u' . Luego tanto ab como cd pertenecen a u' , donde no conforman un hueco, ya que $xz > bc$. Como $u' \subset u$ (y por tanto, $ab, cd \in u$), razonamos también que $bc \notin u$ (ya que constituiría un puente de u menor que xz), lo que resulta en $bc \notin u'$. Por ello, el impedimento por el cual $ab > cd$ no forme un hueco en u' debe deberse a que en u' exista o un monomio $\mu = de$, con $d > e$, o un monomio $\mu = af$ más pequeño que cd .

Ya que $\mu \notin u_1$, μ debe haber sido suprimido en el camino de u a u_1 , por lo que μ es un puente en u y cumple $\mu > xz > bc$. Esto es incompatible con $\mu = de$, luego $\mu = af$, con $cd > af$. En este caso, tenemos que $c > a$, así que $b > a$ y $a > f$, por lo que $\mu = af < bc$, y tenemos una contradicción. Por tanto, en G_X^B no hay ciclos dirigidos. \square

El conjunto B se denomina un *agrupamiento* (o *emparejamiento*) *acíclico* en G_X . Como consecuencia de [4, Proposición 1.2], existe un *CW-complejo* \mathbb{Z}^n -graduado que tiene las dos propiedades siguientes:

1. Sus d -celdas abiertas están en biyección con las d -celdas de X que no pertenezcan a ninguna arista de B , es decir, con los símbolos F -admisibles de longitud d .
2. Es homotópicamente equivalente a la resolución de Taylor.

Este complejo, llamado *complejo de Morse*, constituye una resolución libre minimal de A/I . En primer lugar veremos la minimalidad, y luego describiremos las aplicaciones entre los módulos.

Lema 3.30.

Sean u y v símbolos F -admisibles distintos. Entonces sus grados también son distintos.

Demostración. Ambos símbolos son reducidos, por lo que si uno estuviera contenido en el otro, el grado del primero sería estrictamente menor que el grado del segundo. Por lo tanto, suponemos que u y v son incomparables por inclusión. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $gr(u) \geq gr(v)$, o lo que es lo mismo, $\text{lcm}(v) \mid \text{lcm}(u)$. Para cada monomio ab de u , con $a > b$, decimos que b es un sucesor en u . Ya que cada vértice de T tiene a lo sumo un predecesor, todos los monomios conformados por un sucesor de u y su predecesor en T pertenecen a u . Lo mismo se puede decir de v . Como u no está contenido en v , existe un sucesor de u que no es sucesor de v . Sea b , con predecesor a , el sucesor más pequeño de u que no es sucesor de v . Entonces $ab \in u$ y $ab \notin v$. Si probamos que ab no divide a $\text{lcm}(v)$, tendremos el resultado.

Supongamos que $ab \mid \text{lcm}(v)$. Como $b \mid \text{lcm}(v)$, deducimos $bc \in v$ para algún $c < b$. Como $\text{lcm}(v) \mid \text{lcm}(u)$, c también divide a $\text{lcm}(u)$. Si $bc \notin u$, entonces $cd \in u$ para algún $d < c$. Ya que $ab > cd$ y estos monomios no constituyen un hueco en u , tenemos $de \in u$ para un $e < d$. Ya que d y e son sucesores de u más pequeños que b , tanto cd como de pertenecen a v . Pero esto, junto con el hecho de que $bc \in v$, implicaría que v no es reducido. Por lo tanto deducimos que $bc \in u$. Por otra parte, $a \mid \text{lcm}(v)$, es decir, $xa \in v$ para algún $x \neq b$. Independientemente de la relación de orden entre los vértices x y a

tenemos que $xa > bc$. Estos monomios no forman un hueco en v , por lo que tenemos uno de los casos siguientes:

- I) $cd \in v$, para algún $d < c$. En ese caso razonamos como lo hicimos para el caso ($ab \in u$, $bc \in v$) aplicado a ($bc \in u$, $cd \in v$). Concluimos que $cd \in u$, pero entonces ab , bc y cd pertenecen a u , lo cual es absurdo.
- II) $b > x$ (y por lo tanto $a > x$) y $xy \in v$ para algún $y < x$. Entonces u contiene algún monomio divisible por x , o bien ax o bien xz con $z < x$. Si $ax \in u$, deducimos por razonamientos idénticos a los anteriores que $xy \in u$, lo cual se contradice con el hecho de que $ab \in u$. Supongamos así que $xz \in u$. Al tener $ab > xz$, y estos monomios no forman un hueco en u , tenemos que $zw \in u$ para algún $w < z$. Ya que tanto z como w son sucesores en u más pequeños que b , razonamos que ambos xz y zw pertenecen a v . Al tener $ax \in v$, esto implicaría que v no es reducido, lo cual va en contra de la hipótesis.

En cualquier caso, llegamos a contradicción, por lo que $ab \not\in \text{lcm}(v)$, y por tanto $gr(u) \neq gr(v)$. \square

Vamos ahora a describir las aplicaciones entre símbolos F -admisibles. En primer lugar, introducimos algo de notación. Para cada par (u, u') de símbolos F -admisibles, con $d = |u| = |u'| + 1$, denotamos por $[u : u']$ al coeficiente de u' en $\delta_d(u)$. Si la arista dirigida $u \rightarrow u'$ pertenece a B , definimos $m(\{u, u'\}) = -[u : u']$, y en caso contrario $m(\{u, u'\}) = [u : u']$. Dado un camino dirigido $P : u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_t$ en G_X^B (lo que se denomina un *camino gradiente*), denotamos $m(P) = \prod_{i=0}^{t-1} m(\{u_i, u_{i+1}\})$. Tengamos en cuenta que $gr(u_0) \geq gr(u_t)$. Podemos definir las aplicaciones $\partial_d : F_d \rightarrow F_{d-1}$ de la resolución. Para cada símbolo F -admissible de longitud d , definimos, de acuerdo a [4, Lema 7.7]:

$$\partial_d(u) = \sum_{\substack{u' \subset u \\ |u'|=d-1}} [u : u'] \sum_{\substack{u'' \text{ } F\text{-admissible, } P \text{ camino gradiente} \\ |u''|=d-1}} \sum_{\substack{\text{de } u' \text{ a } u''}} m(P) \underline{x}^{gr(u)-gr(u'')} u'',$$

donde, si $b = \sum_{k=1}^s e_{j_k}$, $\underline{x}^b := \prod_{j=1}^s x_{j_k}$ Y concluimos el siguiente teorema:

Teorema 3.31.

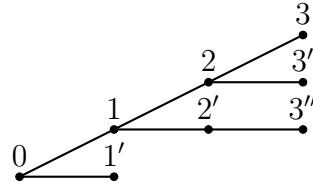
La resolución que constituyen los módulos y aplicaciones (F_d, ∂_d) es una resolución minimal libre graduada de A/I .

Demostración. La minimalidad viene dada por el lema 3.30, de la forma siguiente: de acuerdo con [4, Corolario 7.6] y [4, Proposición 7.3], basta probar $gr(u) \neq gr(v)$ para todos los símbolos F -admisibles u y v tales que $|u| = |v| + 1$ y o bien $v \subset u$ o bien existe un camino gradiente desde $u' \subset u$ a v de longitud $|v|$. \square

3.5. Ejemplos.

Escribimos a continuación un par de ejemplos. El primer ejemplo tiene el fin de mostrar un caso más complejo que el visto durante el capítulo. El segundo ejemplo, para el que omitiremos los cálculos, es una muestra de que, a diferencia de el algoritmo visto en este capítulo, la poda de Taylor no siempre resulta en una resolución libre graduada minimal para los ideales de aristas si no se elige bien el orden de los generadores.

Ejemplo 3.32. Tomemos el ideal $I = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_3x_5, x_2x_6, x_6x_7, x_1x_8 \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]$. Su grafo asociado es:



Las sucesiones descendientes admisibles son: $0, 1, 2, 2', 0 - 2, 0 - 2'$ y $2 - 2'$. Tras el paso (III) obtenemos los símbolos:

$$\begin{array}{lll}
 0 : 01, 01' & 2' : 12', 2'3'' & 2 - 2' : 12, 12', 23, 23', 2'3'' \\
 1 : 01, 12, 12' & 0 - 2 : 01, 01', 12, 23, 23' & \\
 2 : 12, 23, 23' & 0 - 2' : 01, 01', 12', 2'3'' &
 \end{array}$$

Ordenamos ahora todos los posibles subsímbolos de estos, y suprimimos aquellos que posean un hueco. Los visualizamos en la siguiente tabla, en la cual denotamos con un asterisco que hay símbolos que ya han sido considerados en una columna anterior:

	0	1	2	$2'$
r=3		01, 12, 12'	12, 23, 23'	
r=2	01, 01'	01, 12	12, 23	
		01, 12'	12, 23'	
r=1	01 01'	12	23	
		12'	23'	(*)

	0 – 2	0 – 2'	2 – 2'
r=5			12, 12', 23, 23', 2'3''
r=4	01', 12, 23, 23'		12, 12', 23, 23' 12, 12', 23, 2'3'' 12, 12', 23', 2'3'' 12, 23, 23', 2'3'' 12', 23, 23', 2'3''
			12, 12', 23 12, 12', 23' 12, 12', 2'3'' 12, 23, 2'3'' 12, 23', 2'3'' 12', 23, 23' 12', 23, 2'3'' 12', 23', 2'3'' 23, 23', 2'3''
r=3	(*) 01', 12, 23 01', 12, 23' 01', 23, 23'	01', 12', 2'3''	(*) 12, 12', 23 12, 12', 23' 12, 12', 2'3'' 12, 23, 2'3'' 12, 23', 2'3'' 12', 23, 23' 12', 23, 2'3'' 12', 23', 2'3'' 23, 23', 2'3''
r=2	(*) 01', 12 01', 23 01', 23'	(*) 01', 12' 01', 23'	(*) 12, 2'3'' 12', 23 12', 23' 23, 2'3'' 23', 2'3''

Si agrupamos los símbolos restantes por peso, obtenemos:

- Longitud 1: 7 símbolos de peso 2.
- Longitud 2: 8 símbolos de peso 3 y 5 símbolos de peso 4.
- Longitud 3: 2 símbolos de peso 4, 7 símbolos de peso 5 y 2 símbolos de peso 6.

- Longitud 4: 2 símbolos de peso 6 y 3 símbolos de peso 7.
- Longitud 5: 1 símbolo de peso 8.

Por lo tanto, el diagrama de Betti de la resolución libre graduada minimal de A/I es:

	0	1	2	3	4	5
0	1	—	—	—	—	—
1	—	7	8	2	—	—
2	—	—	5	7	2	—
3	—	—	—	2	3	1
Globales	1	7	13	11	5	1

Y la resolución libre graduada minimal tiene la forma:

$$0 \rightarrow A(-8) \rightarrow A(-6)^2 \oplus A(-7)^3 \rightarrow A(-4)^2 \oplus A(-5)^7 \oplus A(-6)^2 \rightarrow \\ \rightarrow A(-3)^8 \oplus A(-4)^5 \rightarrow A(-2)^7 \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0.$$

Ejemplo 3.33. Sea $I = \langle x_2x_3, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5, x_3x_6, x_4x_7, x_4x_8, x_5x_9, x_1x_{10} \rangle \subset A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{10}]$. Su grafo correspondiente es un árbol, por lo que podemos aplicarle la poda correspondiente para obtener la resolución libre graduada minimal. Ya que el proceso es excesivamente largo para mostrarlo aquí, nos ayudamos de *CoCoA* para obtener el diagrama de Betti y el aspecto de la resolución:

```
# use R::=QQ[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10];
# I := ideal(x2*x3,x1*x3,x1*x4,x2*x5,x3*x6,x4*x7,x4*x8,x5*x9,x1*x10);
# PrintBettiDiagram(R/I);
      0   1   2   3   4   5   6
-----
0:   1   -   -   -   -   -   -
1:   -   9   11   3   -   -   -
2:   -   -   14   29   19   4   -
3:   -   -   -   2   5   4   1
-----
Tot:  1   9   25  34   24   8   1
```

```

# PrintRes(R/I);
0 --> R[-9] --> R[-7]^4(+)R[-8]^4 --> R[-6]^19(+)R[-7]^5 -->
--> R[-4]^3(+)R[-5]^29(+)R[-6]^2 --> R[-3]^11(+)R[-4]^14 -->
--> R[-2]^9 --> R

```

Sin embargo, al aplicar la poda de Taylor considerando el orden de generadores dado al inicio del ejemplo, obtenemos el siguiente resultado (ejecutado en Matlab, empleando el código en [11, Anexo]):

```

M= [0 1 1 0 0 0 0 0 0;
     1 0 1 0 0 0 0 0 0;
     1 0 0 1 0 0 0 0 0;
     0 1 0 0 1 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 1 0 0 0;
     0 0 0 1 0 0 1 0 0;
     0 0 0 1 0 0 0 1 0;
     0 0 0 0 1 0 0 0 1;
     1 0 0 0 0 0 0 0 1];
% Esta matriz codifica los generadores en sus filas.

```

```

[cubo, orden, minimo]=ResolucionTaylor(M);
AlgoritmoDePoda(M, cubo, orden, minimo)
T =

```

4×7 table

	0	1	2	3	4	5	6
	-	-	--	--	--	-	-
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	9	11	3	0	0	0
2	0	0	14	29	19	6	1
3	0	0	0	2	7	5	1

```

glob =
1      9      25      34      26      11      2

```

Por lo que en este caso, la resolución resultante de la poda de Taylor no es minimal. Con tan solo cambiar el orden de los generadores, obtenemos, sin embargo:

```

M= [1 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
     1 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
     1 0 0 0 0 0 0 0 0 1;
     0 1 1 0 0 0 0 0 0 0;
     0 1 0 0 1 0 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 1 0 0 0 0;
     0 0 0 1 0 0 1 0 0 0;
     0 0 0 1 0 0 0 1 0 0;
     0 0 0 0 1 0 0 0 1 0];

[cubo, orden, minimo]=ResolucionTaylor(M);
AlgoritmoDePoda(M, cubo, orden, minimo)

T =

```

4×7 table

	0	1	2	3	4	5	6
0	-	-	--	--	--	-	-
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	9	11	3	0	0	0
3	0	0	14	29	19	4	0
	0	0	0	2	5	4	1

```

glob =

```

1	9	25	34	24	8	1
---	---	----	----	----	---	---

Y en este caso si se obtiene la resolución minimal.

Bibliografía

- [1] J. ABBOTT, A. M. BIGATTI, AND L. ROBBIANO, *CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra*. Disponible en <http://cocoa.dima.unige.it>.
- [2] J. ALVAREZ MONTANER, O. FERNÁNDEZ-RAMOS, AND P. GIMENEZ, *Pruned cellular free resolutions of monomial ideals*, Journal of Algebra, 541 (2020), pp. 126–145.
- [3] M. BARILE AND A. MACCHIA, *Minimal cellular resolutions of the edge ideals of forests*, The Electronic Journal of Combinatorics, 27 (2020), pp. 2–47.
- [4] E. BATZIES AND V. WELKERS, *Discrete morse theory for cellular resolutions*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 543 (2002), pp. 147–168.
- [5] D. A. COX, J. LITTLE, AND D. O’SHEA, *Using Algebraic Geometry*, Springer New York, NY, 2005.
- [6] D. EISENBUD, *Commutative Algebra*, Springer New York, NY, 1995.
- [7] D. EISENBUD, *The Geometry of Syzygies*, Springer New York, NY, 2005.
- [8] HILBERT, *Ueber die theorie der algebraischen formen*, Mathematische Annalen, 36 (1890), pp. 473–534.
- [9] G. LYUBEZNIK, *A new explicit finite free resolution of ideals generated by monomials in an r-sequence*, Journal of Pure and Applied Algebra, 51 (1988), pp. 193–195.
- [10] U. MARTÍNEZ PEÑAS, *Una introducción a la teoría de las sicigias*, trabajo de fin de grado, Universidad de Valladolid, 2013.
- [11] E. PÉREZ CALLEJO, *Diagramas de betti de ideales de aristas*, trabajo de fin de máster, Universidad de Valladolid, 2020.
- [12] D. ROGALSKI, *An introduction to noncommutative projective geometry*, 2014.

[13] R. J. WILSON, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall/Pearson, 2010.