Conceptos y operaciones fundamentales en Matemáticas

*Iván Cabria Álvaro (*PTUN*)*
ivan.cabria@uva.es

*Alejandra Granja Del Río (*PAYUD*)*
alejandra.granja@uva.es

Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica
Facultad de Ciencias
Universidad de Valladolid
Paseo Belén 7
Campus Miguel Delibes
47011 Valladolid

Última actualización: 3 de noviembre de 2025

CC BY-NC-SA 4.0 Este trabajo se distribuye bajo la licencia **Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)**. https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Copyright © 2025 Iván Cabria Álvaro y Alejandra Granja Del Río

Este material se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0).

CC BY-NC-SA 4.0

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Índice general

Conceptos y operaciones fundamentales en Matemáticas. 5

1 Los números reales y sus notaciones. 5

2 Categorías de las cantidades matemáticas según su naturaleza. 5

3 Relaciones matemáticas: igualdad, identidad y ecuación. 6

4 Magnitud o valor absoluto de una cantidad o un número 6

5 Concepto y representación de una función. 7

6 Errores frecuentes en el razonamiento algebraico. 7

7 Determinante de matrices. 8

8 Logaritmo natural. 9

9 Principales relaciones geométricas. 9

10 Elipse. 10

11 Conceptos básicos de trigonometría. 11

12 Descomposición de fracciones. 12

13 Vectores. 13

14 Multiplicación escalar de vectores. 14

15 El producto vectorial, producto vectorial de Gibbs o producto cruz. 14

16 Introducción a los diferenciales. 15

17 Representaciones de la derivada. 15

18 Valor de la derivada en un punto. 16

CC BY-NC-SA 4.0

19 Aplicación de la regla de la cadena. 16
20 Derivadas respecto a varias variables. 16
21 Derivadas parciales de funciones multivariables. 16
22 Integral indefinida. 17
23 Integral definida. 17
24 Integrales de $1/x$. 18
25 Integrales de la función $1/(x-a)$. 18
26 Integrales de la función $1/(x^2-a^2)$. 19
27 Integración en dos dimensiones. 20
28 Cálculo de integrales de superficies. 20
29 Cálculo de integrales a lo largo de una curva. 21
30 Gradiente de una función escalar. 21
31 El operador rotacional de un vector. 22
32 Laplaciano de funciones escalares. 22
33 Sistema de coordenadas cartesianas. 22
34 Diferenciales en el sistema cartesiano. 23
35 Sistema de coordenadas polares 23
36 Diferenciales en coordenadas polares. 25
37 Sistemas de coordenadas cilíndricas. 26
38 Diferenciales en coordenadas cilíndricas. 27
39 Sistemas de coordenadas esféricas. 28
40 Diferenciales en coordenadas esféricas. 29
41 Determinación de límites de integración en distintos sistemas de coordenadas: polares, cilíndricas y esféricas. 31

CC BY-NC-SA 4.0

Conceptos y operaciones fundamentales en Matemáticas.

Estas notas se elaboraron dentro del Proyecto de Innovación Docente «Taller de matemáticas para estudiantes de nuevo ingreso» de la Universidad de Valladolid. Su finalidad es ofrecer un material de apoyo adaptado al nivel y las necesidades detectadas entre los participantes del taller. El documento reúne explicaciones breves, ejemplos y recordatorios sobre distintos contenidos matemáticos que suelen resultar problemáticos para los estudiantes al comenzar sus estudios universitarios en Ciencias e Ingeniería. No pretende ser un temario completo ni sustituir los manuales de matemáticas, sino servir como una ayuda práctica para repasar conceptos esenciales y reforzar destrezas básicas. Los temas incluidos se seleccionaron a partir de los resultados del examen diagnóstico y de los comentarios del propio alumnado. Se abordan cuestiones que con frecuencia generan dudas o errores, tanto de repaso del Bachillerato como de iniciación universitaria. El material no sigue una secuencia fija. Cada apartado puede consultarse de manera independiente, según las necesidades de estudio o repaso de cada estudiante. En definitiva, estas notas son el resultado del trabajo conjunto del equipo docente del PID, orientado a reforzar la base matemática de los nuevos estudiantes y facilitar su adaptación a las exigencias académicas de los primeros cursos universitarios.

1 Los números reales y sus notaciones.

En los textos y programas de distintos países, la escritura de los números reales no siempre es la misma. A veces se utiliza la coma para separar la parte decimal y en otros casos el punto. También puede variar la forma de separar los miles: con puntos, comas, espacios o sin separación.

En estas notas se empleará el punto como separador decimal y, salvo en casos necesarios por claridad, no se separarán los grupos de tres cifras. Por ejemplo, se escribirá 9.5 en lugar de 9,5.

Es importante fijarse bien al leer un número, porque notaciones distintas pueden llevar a confusión: 9.000 puede interpretarse como «nueve mil» o como «nueve con tres decimales» que son ceros. En estas notas se entenderá como nueve con tres decimales, es decir, el mismo valor que el número 9.

Para evitar errores, solo se añadirán decimales cuando sea necesario, por ejemplo, para expresar medidas o resultados con un número de cifras significativas determinado.

2 Categorías de las cantidades matemáticas según su naturaleza.

En matemáticas se puede distinguir, de forma general, tres tipos de cantidades: escalares, vectores y matrices.

Un escalar es un solo valor numérico o una expresión que representa una cantidad única como 7.2, x o $x^2 + 1$.

CC BY-NC-SA 4.0

Un vector es una lista ordenada de varios valores o expresiones. Por ejemplo, (2,-1,4), (-0.5,3.1) o (-1, 4, 2) son vectores distintos. El orden de los elementos es importante.

Una matriz organiza números en m filas y n columnas, de tamaño m x n. Los vectores pueden considerarse un caso particular de matriz, con una sola fila o una sola columna.

3 Relaciones matemáticas: igualdad, identidad y ecuación.

a) Igualdad.

Una igualdad indica que dos expresiones formadas por números y letras representan el mismo valor. Por ejemplo, $2+3=5$ o $x^2-1=0$. El símbolo = expresa esa relación de equivalencia entre los dos lados. Cada lado puede tener uno o varios términos separados por + o −.

b) Identidad numérica.

Una identidad numérica es una igualdad válida entre números, como $1+2=3$ o $3{,}5+4{,}1=7{,}6$.

c) Identidad algebraica.

Se llama identidad a una igualdad que es cierta para cualquier valor de las variables implicadas. Por ejemplo, $(y+z)^2 = y^2+2yz+z^2$ o $(y-1)(y+1) = y^2-1$. En algunos textos se usa el símbolo ≡ para indicar identidad o definición.

d) Ecuación algebraica. Una ecuación solo se cumple para determinados valores de sus incógnitas. Por ejemplo: $y^2-9=0$ tiene como soluciones $y=\pm 3$. También puede tener como incógnita una función, por ejemplo: $g(y)^2-y+1=0$.

e) Ecuación diferencial.

Una ecuación diferencial relaciona una función con sus derivadas y la solución es una función. Por ejemplo, $f''(x)+f(x)=0$ tiene como soluciones combinaciones de $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$.

f) Aproximación numérica.

Cuando dos valores son casi iguales, se utiliza el símbolo ≈. Por ejemplo, $\pi \approx 3{,}1416$.

g) Coherencia en las igualdades.

Ambos lados de una igualdad deben ser del mismo tipo: ambos escalares, vectores o matrices. No tiene sentido igualar un número a un vector, por ejemplo $\vec{F}=5$. En cambio, la expresión $\vec{F}=q\vec{E}$ sí es coherente, ya que ambos lados son vectores (la fuerza eléctrica es igual a la carga por el campo eléctrico).

h) Implicación o inferencia lógica.

De una ecuación o varias ecuaciones se pueden deducir nuevas igualdades o resultados mediante razonamiento lógico. Este proceso se simboliza con ⇒, indicando que lo de la derecha se obtiene a partir de lo de la izquierda, esto es $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$.

4 Magnitud o valor absoluto de una cantidad o un número

El valor absoluto de una cantidad x se representa como $|x|$ y expresa su magnitud, es decir, la distancia al cero sin tener en cuenta el signo. Por definición:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

El resultado del valor absoluto siempre es un número no negativo. Por ejemplo:

$$|7{,}2| = 7{,}2, \quad |-4{,}5| = 4{,}5, \quad |-2x^3| = 2|x|^3.$$

5 Concepto y representación de una función.

a) Argumento de una función.

En una función $f(x)$, la variable x recibe el nombre de *argumento*. Puede ser un número, una cantidad o una expresión. Por ejemplo: el argumento de $f(2{,}71)$ es 2,71, el de $f(x^2+1)$ es x^2+1, y en $\cos(x)$, el argumento es x. La notación $f(x)$ fue introducida por Euler en 1734.

b) Representación gráfica.

Una función suele representarse en el plano cartesiano, usando dos ejes o dos dimensiones: el horizontal (X o de abscisas) para la variable y el vertical (Y o de ordenadas) para los valores de la función. Se escribe normalmente como $y = f(x)$.

c) Incremento o variación de una función.

El incremento, cambio o variación de una cantidad mide la diferencia entre dos valores. Se representa con la letra griega Δ. Por ejemplo:

$$\Delta v = v_f - v_i, \quad \Delta f = f(x_2) - f(x_1).$$

donde v_i y v_f son las velocidades inicial y final de un cuerpo.

6 Errores frecuentes en el razonamiento algebraico.

En esta sección se muestran ejemplos de operaciones que carecen de sentido matemático y se explica brevemente por qué.

a) Igualdades entre magnitudes no comparables.

No es correcto igualar cantidades de distinta naturaleza, como un vector y una magnitud escalar. Por ejemplo, la expresión $\cancel{\vec{F} = m}$ no tiene sentido, ya que $\vec{F}$ es un vector y m es un número. En cambio, sí tendría sentido escribir $\vec{F} = m\vec{A}$, porque ambos lados son vectores. Si un vector es nulo, se escribe $\vec{b} = \vec{0}$.

b) Alteraciones indebidas de signo en una ecuación.

En una deducción algebraica, no puede alterarse el signo de un término sin modificar los pasos previos. Por ejemplo, pasar de

$$x + 3y = 7 \quad \text{a} \quad -x + 3y = 7$$

sin justificación conduce a resultados incoherentes. Un cambio de signo requiere revisar el razonamiento anterior, no simplemente reescribir la ecuación. Es necesario, revisar el sentido físico de los resultados.

c) Signos inconsistentes en las expresiones algebraicas.

Si a, b y c son positivos, la expresión $\cancel{a = -b/c}$ carece de sentido, pues iguala una cantidad positiva con una negativa. Del mismo modo, la relación $\cancel{E = -mc^2}$ es incorrecta, ya que tanto la masa m como la velocidad de la luz c son positivas, y la energía no puede ser negativa en este contexto.

d) Manipulación incorrecta de signos dentro de raíces.

CC BY-NC-SA 4.0

No se puede introducir un signo negativo dentro de una raíz cuadrada real. La igualdad

$$\cancel{-\sqrt{9-x^2} = \sqrt{-(9-x^2)}}$$

no es válida, porque el signo menos altera la naturaleza del número: uno de los términos sería real y el otro imaginario.

7 Determinante de matrices.

El determinante permite asociar un número a una matriz cuadrada. Para una matriz 2×2, se calcula como:

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr. \tag{1}$$

En el caso de una matriz 3×3:

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ m & n & o \end{vmatrix} \tag{2}$$

puede obtenerse por diferentes métodos, siendo los más comunes las reglas de Sarrus y de Laplace.

a) Regla de Sarrus.

Para calcular el determinante de una matriz 3×3 mediante un procedimiento gráfico, se puede usar la siguiente idea. Sea la matriz:

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix} \tag{3}$$

Primero se duplican las dos primeras filas debajo de la matriz original, formando cinco filas. Luego, identificamos las diagonales: tres diagonales principales que bajan de izquierda a derecha y tres diagonales secundarias que suben de izquierda a derecha.

$$\begin{matrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \\ p & q & r \\ s & t & u \end{matrix} \tag{4}$$

El determinante se obtiene sumando los productos de las diagonales descendentes y restando los productos de las diagonales ascendentes:

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{vmatrix} = (p\,t\,x + s\,w\,r + v\,q\,u) - (v\,t\,r + p\,w\,u + s\,q\,x)\ . \tag{5}$$

CC BY-NC-SA 4.0

Este método es rápido y permite calcular de manera visual el determinante, aunque solo es aplicable a matrices 3×3.

b) Regla de Laplace.

El desarrollo por la primera fila da:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{vmatrix} &= p\begin{vmatrix} t & u \\ w & x \end{vmatrix} - q\begin{vmatrix} s & u \\ v & x \end{vmatrix} + r\begin{vmatrix} s & t \\ v & w \end{vmatrix} \\ &= p(tx - uw) - q(sx - uv) + r(sw - tv) \\ &= ptx + quv + rsw - (puw + qsx + rtv)\ .\end{aligned}$$

Este procedimiento puede aplicarse a matrices de cualquier tamaño. Ambos métodos conducen al mismo resultado.

8 Logaritmo natural.

El *logaritmo natural* o logaritmo neperiano de una cantidad x se denota por $ln(x)$ y se define como el exponente al que debe elevarse el número e para obtener x:

$$e^{ln(x)} = x.$$

De esta definición se deduce que $ln(1) = 0$ y $ln(e) = 1$. Por ejemplo, se considera el valor del logaritmo natural de 1, $\ln(1)$. ¿Qué potencia de e da 1? Como $e^0 = 1$, se obtiene que $\ln(1) = 0$.

La función $\ln(x)$ solo está definida para valores positivos de x. No existen expresiones como $\cancel{\ln(0)}$, $\cancel{\ln(-|y|)}$, $\cancel{\ln(-b^2)}$ o $\cancel{\ln(-c)}$ con $b, c \geq 0$.

Algunas propiedades útiles son:

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(xyz) = \ln(x) + \ln(y) + \ln(z)$
- $\ln(u^v) = v\ln(u)$
- $\ln(u^v w^t r^s) = v\ln(u) + t\ln(w) + s\ln(r)$

donde $x, y, z, u, w, r > 0$ y v, t, s son cualquier número real.

Estas relaciones sólo son válidas cuando los argumentos de los logaritmos son positivos. Por ejemplo, $\ln(2) - \ln(5) = \ln(2/5)$ es correcto, pero expresiones como $\cancel{\ln(-3)}$ o $\cancel{\ln(-2) - \ln(-7)}$ carecen de sentido matemático.

9 Principales relaciones geométricas.

- La longitud de un arco de radio r y ángulo ϕ (en radianes) es $l = r\phi$.
- La circunferencia completa mide $l = 2\pi r$.

CC BY-NC-SA 4.0

- El área de un círculo es $A = \pi r^2$.
- El área lateral de un cilindro de radio r y altura h es $A = 2\pi r h$.
- Su volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$.
- La superficie de una esfera de radio r es $A = 4\pi r^2$.
- El volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

La ecuación de una circunferencia centrada en (x_c, y_c) y radio r es:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

Y la de una esfera centrada en (x_c, y_c, z_c) y radio r es:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2.$$

Los planos paralelos al plano XY se expresan como $z =$ constante. Por ejemplo, $z = 0$ representa el plano XY habitual.

10 Elipse.

La elipse es un conjunto de puntos en el plano cuya forma depende de dos ejes: el mayor ($2a$) y el menor ($2b$).

Definición geométrica: La suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse a los focos F y F' es constante (Ver la Figura 1):

$$d + d' = 2a\ .$$

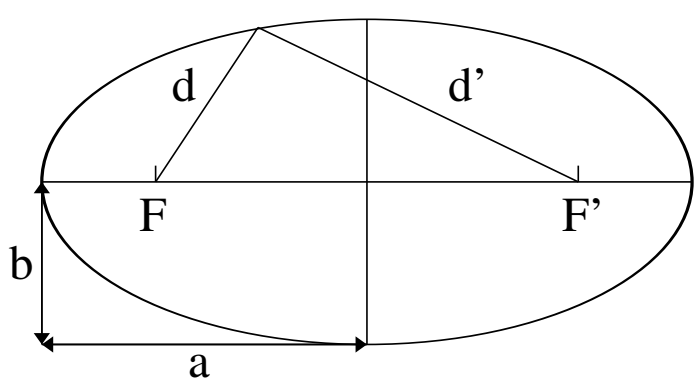

Figura 1: Representación de la elipse según las distancias d y d' y los semiejes a (mayor) y b (menor)

Definición en coordenadas cartesianas: Centrada en (x_c, y_c), la elipse cumple (Ver la Figura 2 centrada en (0,0))

$$\left(\frac{x - x_c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_c}{b}\right)^2 = 1\ .$$

CC BY-NC-SA 4.0

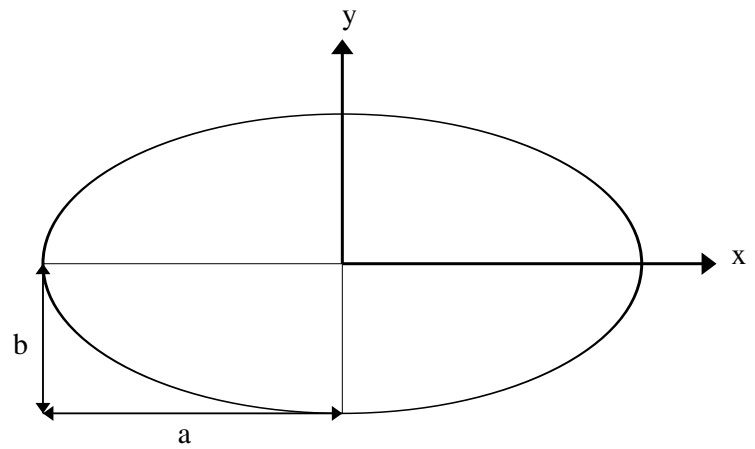

Figura 2: Elipse en el plano cartesiano XY, con centro en el origen $(0,0)$.

Definición en coordenadas polares: Con un foco en el origen, un punto de la elipse cumple (Ver Figura 3)

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\,, \tag{6}$$

donde $e = c/a$ es la excentricidad ($0 \leq e < 1$) y c es la distancia del centro a uno de los focos, F.

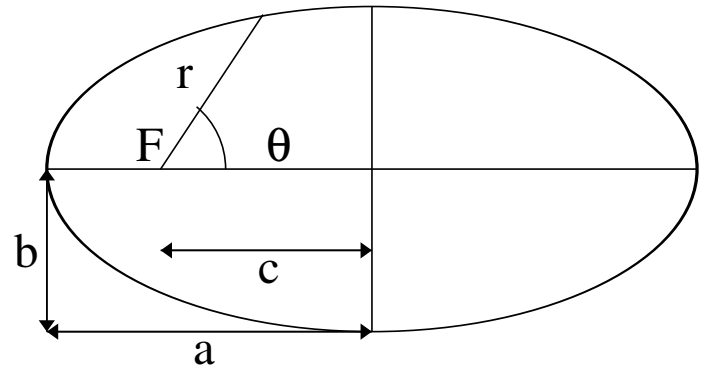

Figura 3: Representación de la elipse en coordenadas polares.

11 Conceptos básicos de trigonometría.

a) Orientación de un ángulo en el plano. Un ángulo α es positivo si se mide desde el eje X en sentido contrario a las agujas del reloj, y negativo en sentido horario β (Ver Figura 4).

CC BY-NC-SA 4.0

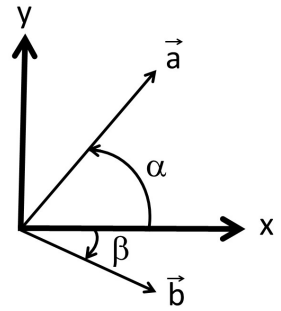

Figura 4: Ejemplo de ángulos con signo positivo y negativo.

b) Relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo: Para un triángulo rectángulo con hipotenusa h, cateto opuesto o y cateto contiguo c (Ver Figura 5):

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{o}{h}, \quad \cos(\theta) = \frac{c}{h}, \quad \tan(\theta) = \frac{o}{c} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

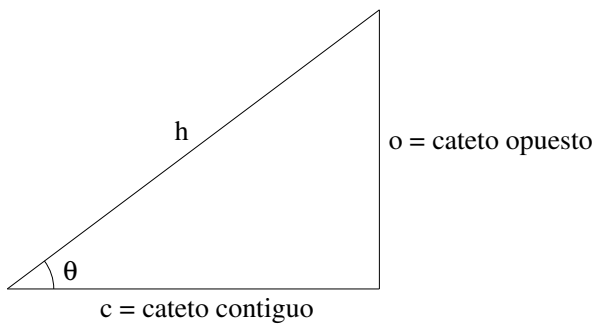

Figura 5: Triángulo rectángulo con hipotenusa y catetos.

c) Teorema de Pitágoras: Del teorema de Pitágoras: $c^2 + o^2 = h^2$ y de las definiciones de seno y coseno del apartado b)se obtiene:

$$(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 = \operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta).$$

Algunas propiedades:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta), \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta), \quad \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}(\theta), \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta).$$

12 Descomposición de fracciones.

La fracción $\dfrac{1}{x^2 - a^2}$ se puede separar en fracciones simples usando la identidad $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

donde x es la variable y a es una cantidad numérica concreta. Multiplicando ambos lados por $x^2 - a^2$:

$$1 = A(x+a) + B(x-a) = (A+B)x + (A-B)a.$$

donde A y B son constantes que hay que calcular.

Como la igualdad debe cumplirse para todo x, se obtiene:

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A, \quad (A-B)a = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a},\ B = -\frac{1}{2a}.$$

Por tanto, la descomposición final es:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

13 Vectores.

Definición: Un vector es un conjunto ordenado de números o expresiones, llamados componentes, que tienen magnitud, dirección y sentido. Por ejemplo, $\vec{b} = (2, 3, -4)$ o $\vec{b} = 2\vec{u}_x + 3\vec{u}_y - 4\vec{u}_z$.

Módulo: El módulo de $\vec{b} = b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z$ es $|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$. El módulo del vector -$\vec{b}$ es igual a $\sqrt{(-b_x)^2 + (-b_y)^2 + (-b_z)^2}$. Este módulo es igual que el módulo de $\vec{b}$.

Vector unitario: Tiene módulo 1 y no posee unidades. Si $\vec{r}$ es un vector de posición, el vector unitario según la coordenada a es

$$\vec{u}_a = \frac{\partial\vec{r}/\partial a}{|\partial\vec{r}/\partial a|}.$$

Notación de vectores unitarios:

En cartesianas:

$$\vec{u}_x = \vec{i} = \hat{x},\ \vec{u}_y = \vec{j} = \hat{y},\ \vec{u}_z = \vec{k} = \hat{z}$$

En polares:

$$\vec{u}_\rho = \hat{\rho},\ \vec{u}_\varphi = \hat{\varphi}$$

En cilíndricas:

$$\vec{u}_\rho = \hat{\rho},\ \vec{u}_\varphi = \hat{\varphi},\ \vec{u}_z = \hat{z}$$

En esféricas:

$$\vec{u}_r = \hat{r},\ \vec{u}_\varphi = \hat{\varphi},\ \vec{u}_\theta = \hat{\theta}$$

Direcciones y sentidos: - Perpendiculares: $\vec{a} \perp \vec{b}$ - Paralelos/antiparalelos (misma dirección, pero distinto sentido): $\vec{a} \parallel \vec{b}$ - Vectores perpendiculares al plano: hacia fuera $\odot$, hacia dentro $\otimes$.

CC BY-NC-SA 4.0

Comparación: No se pueden comparar vectores directamente. Sí se pueden comparar módulos: $|\vec{F}_A| > |\vec{F}_B| > |\vec{F}_C|$.

Limitaciones: No existe división de vectores ni vectores en denominador. Por ejemplo, expresiones como $\vec{u}/\vec{b}$ o $(\vec{p}+\vec{q})/(3+\vec{r})$ carecen de sentido matemático.

Descomposición en 2D: Un vector $\vec{r}$ de magnitud r y ángulo φ se descompone en

$$\vec{r} = r\cos\varphi\,\vec{u}_x + r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{u}_y$$

como se muestra en la Figura 6.

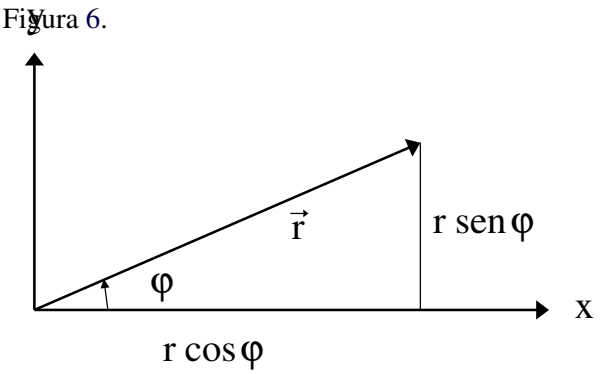

Figura 6: Descomposición de un vector en las direcciones X y Y.

14 Multiplicación escalar de vectores.

El producto escalar de $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ se define como

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3.$$

Ejemplos: $(3,-2,1)\cdot(4,0,-5) = 3\cdot 4 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot(-5) = 7$. $(1,2,-3)\cdot(-2,0,4) = 1\cdot(-2) + 2\cdot 0 + (-3)\cdot 4 = -14$.

Propiedades:

- Conmutativo: $\vec{p}\cdot\vec{q} = \vec{q}\cdot\vec{p}$.
- Producto de vector por sí mismo: $\vec{p}\cdot\vec{p} = |\vec{p}|^2$.
- Relación con el ángulo: $\vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\vec{p}$ y $\vec{q}$.

15 El producto vectorial, producto vectorial de Gibbs o producto cruz.

El producto vectorial de $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ se denota $\vec{p}\times\vec{q}$ o $\vec{p}\wedge\vec{q}$ y es un vector perpendicular al plano formado por $\vec{p}$ y $\vec{q}$.

Se calcula como determinante:

$$\vec{p}\times\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = (p_2q_3 - p_3q_2)\vec{u}_x - (p_1q_3 - p_3q_1)\vec{u}_y + (p_1q_2 - p_2q_1)\vec{u}_z.$$

El determinante se puede resolver por la regla de Sarrus o la de Laplace.

CC BY-NC-SA 4.0

Para conocer hacia dónde apunta el vector resultante se utiliza la **regla del pulgar derecho:** el vector resultante apunta en la dirección del pulgar al colocar índice y medio según $\vec{p}$ y $\vec{q}$, respectivamente. El pulgar derecho indica la dirección y sentido del vector $\vec{r} = \vec{p} \times \vec{q}$.

Propiedades:

- Anticonmutativo: $\vec{p} \times \vec{q} = -(\vec{q} \times \vec{p})$.
- Producto con sí mismo o vectores paralelos: $\vec{p} \times \vec{p} = \vec{0}$.
- Si los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son paralelos o antiparalelos $\rightarrowtail \vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$
- Módulo: $|\vec{p} \times \vec{q}| = |\vec{p}||\vec{q}| \operatorname{sen}\theta$ con θ ángulo entre ellos.

Ejemplo: $(2,-1,3) \times (1,4,-2) = -10\vec{u}_x + 7\vec{u}_y + 9\vec{u}_z$.

Ejemplo adicional: $(0,2,1) \times (3,-1,2) = 5\vec{u}_x - 3\vec{u}_y - 6\vec{u}_z$.

16 Introducción a los diferenciales.

Un diferencial o infinitésimo es un cambio extremadamente pequeño de una variable o cantidad, mayor o igual a cero pero menor que cualquier número real positivo. Se representa con símbolos como dx, dt, dV, dS, df, etc.

- dx: cambio infinitesimal de x.
- dt: cambio infinitesimal de tiempo.
- dl: cambio infinitesimal de una longitud.
- $dS = dx\,dy$: cambio infinitesimal de superficie.
- $dV = dx\,dy\,dz$: cambio infinitesimal de volumen.
- df: cambio infinitesimal de una función $f(x)$.
- $d\vec{r}$: cambio infinitesimal de un vector $\vec{r}$.

Los diferenciales se usan en Física y Matemáticas: por ejemplo, para un objeto que se mueve a velocidad v,

$$x(t+dt) = x(t) + v\,dt.$$

Reglas importantes:

- No se puede igualar un diferencial a un número finito: $dt \neq 7$.
- Se puede combinar con otro infinitésimo: $dx = 5\,dt$ o $dl = r\,d\varphi$.
- Siempre se aplica a cambios infinitesimales: $dF = I\,dl\,B$ (no $F = IdlB$).

17 Representaciones de la derivada.

Existen varias formas de escribir la derivada de $f(x)$:

- **Leibniz:** $\dfrac{df}{dx}, \dfrac{d^2f}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^nf}{dx^n}$.
- **Lagrange:** $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$.
- **D o Euler/Argobast:** $Df, D^2f, \ldots, D^nf$.
- **Newton:** $\dot{f}, \ddot{f}, \dddot{f}, \ldots, \overset{n}{\dot{f}}$ (para derivadas respecto al tiempo t).

Todas estas notaciones son equivalentes; por ejemplo:

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = Df \quad , \quad \frac{df(t)}{dt} = f'(t) = Df(t) = \dot{f}(t).$$

CC BY-NC-SA 4.0

18 Valor de la derivada en un punto.

La derivada de una función $f(x)$ es otra función, $f'(x)$ o df/dx. Para indicar la derivada de $f(x)$ en $x = b$ se usan:

$$f'(b) \quad \text{o} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=b}.$$

Primero se calcula la derivada general $f'(x)$ y luego se evalúa en $x = b$. **Ejemplo:** $h(x) = 4x^3 - 5x \implies h'(x) = 12x^2 - 5, \quad$ entonces $h'(1) = 7$.

19 Aplicación de la regla de la cadena.

Si $y = \operatorname{sen}(x)$ y $x = t^3 + 2t$, la derivada de y respecto de t se calcula con la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x), \quad \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \cos(x) \cdot (3t^2 + 2) = (3t^2 + 2)\cos(t^3 + 2t).$$

También se puede derivar directamente $y = \operatorname{sen}(t^3 + 2t)$ para obtener el mismo resultado.

20 Derivadas respecto a varias variables.

Para funciones de varias variables se usan derivadas parciales, indicadas con el símbolo ∂.
Notación habitual (Legendre) para derivadas parciales respecto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}.$$

Derivada mixta respecto a x e y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

21 Derivadas parciales de funciones multivariables.

La derivada parcial se aplica a funciones con varias variables. Derivar $f(x, y, z)$ respecto de x significa diferenciar solo en x, tratando y y z como constantes. En notación de Legendre de la derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ejemplo 1: $f(x, y) = 5x^2y + 2xy^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10xy + 2y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x^2 + 6xy^2.$$

Ejemplo 2: $f(x, y, z) = xy^2 + yz + 2xz^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y + 4xz.$$

CC BY-NC-SA 4.0

22 Integral indefinida.

La integral indefinida de $f(x)$ se escribe como publicó Leibniz en 1675: $\int$. La integral indefinida de $f(x)$ se simboliza mediante:

$$\int f(x)\,dx,$$

donde $f(x)$ es el integrando y x la variable de integración. El resultado es una función más una constante C:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \text{con } \frac{dF}{dx} = f(x).$$

Ejemplos:

$$\int 1\,dx = x, \quad \int (2x+3)\,dx = x^2 + 3x, \quad \int (4x^2 - x)\,dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2}.$$

23 Integral definida.

La actual notación de la integral definida es la que Fourier publicó en 1819-1820: $\int_a^b$. La integral definida de $f(x)$ entre a y b se escribe como

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

y su resultado es un número, no una función. Se calcula usando una integral indefinida $F(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

donde $F'(x) = f(x)$.

Ejemplos:

$$\int_1^4 (2u+1)\,du = \left[u^2 + u\right]_1^4 = (16+4) - (1+1) = 18$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(\theta)\,d\theta = [-\cos(\theta)]_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2$$

$$\int_{-1}^2 (3v^2 - v)\,dv = \left[v^3 - \frac{v^2}{2}\right]_{-1}^2 = (8-2) - (-1-0{,}5) = 6 + 1{,}5 = 7{,}5$$

$$\int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

CC BY-NC-SA 4.0

24 Integrales de 1/x.

La integral de $1/x$ requiere cuidado según el signo de x. La integral indefinida se expresa como:

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(x), & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0, \end{cases}$$

o, de manera general, $\int dx/x = \ln|x|$, válida para $x \neq 0$.

Ejemplo positivo ($x > 0$):

$$\int_2^5 \frac{dx}{x} = \ln(5) - \ln(2) \approx 0{,}9163.$$

Cálculo de la integral ($x < 0$) usando cambio de variable $y = -x$:

$$\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x} = \int_5^2 \frac{dy}{y} = \ln(2) - \ln(5) \approx -0{,}9163.$$

Otra forma para $x < 0$, usando $\ln(-x)$ o la función general $\ln|x|$:

$$\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x} = \ln(-(-2)) - \ln(-(-5)) = \ln(2) - \ln(5) \approx -0{,}9163.$$

25 Integrales de la función 1/(x − a).

La integral indefinida de la función $\dfrac{1}{x-a}$ se expresa como:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

válida para todo $x \neq a$.

Ejemplo con $x > a$:

$$\int_3^7 \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2|\Big|_3^7 = \ln(5) - \ln(1) = \ln(5) \approx 1{,}6094.$$

Ejemplo con $x < a$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3|\Big|_0^1 = \ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0{,}4055.$$

Alternativamente, puede obtenerse el mismo resultado con el cambio de variable $y = 3 - x$, que transforma la integral en:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-3} = -\int_3^2 \frac{dy}{y} = \ln(2) - \ln(3) \approx -0{,}4055.$$

Nota: No es correcto aplicar directamente $\ln(x-a)$ en intervalos donde $x - a < 0$, ni realizar operaciones con logaritmos de números negativos, ya que no tienen sentido real.

CC BY-NC-SA 4.0

26 Integrales de la función $1/(x^2 - a^2)$.

Para integrar $\dfrac{1}{x^2-a^2}$, se descompone la fracción en términos parciales:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

La integral indefinida se calcula así:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Ejemplo con $x > a$: Sea $a = 3$, integrar desde $x = 4$ hasta $x = 6$:

$$\int_4^6 \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Bigg|_4^6.$$

Primero evaluamos en $x = 6$:

$$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{6-3}{6+3}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{3}{9}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{3}\right).$$

Luego en $x = 4$:

$$\frac{1}{6}\ln\left(\frac{4-3}{4+3}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{7}\right).$$

Por lo tanto:

$$\int_4^6 \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{1/3}{1/7}\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{7}{3}\right).$$

Ejemplo con $x < a$: Integrar desde $x = -5$ hasta $x = -2$:

$$\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Bigg|_{-5}^{-2}.$$

Evaluando en $x = -2$:

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{-2-3}{-2+3}\right| = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{1}{6}\ln(5).$$

Evaluando en $x = -5$:

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{-5-3}{-5+3}\right| = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{8}{2}\right) = \frac{1}{6}\ln(4).$$

Por lo tanto:

$$\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln(5) - \frac{1}{6}\ln(4) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

Este procedimiento permite usar directamente $\ln|x \pm a|$ sin preocuparse por el signo del intervalo.

CC BY-NC-SA 4.0

27 Integración en dos dimensiones.

Una *integral doble* permite calcular el valor acumulado de una función de dos variables $f(x,y)$ en una región del plano. Su forma general es:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy.$$

Cada integración se realiza respecto a una variable, y el resultado es independiente del orden si los límites son constantes.

Si la función es *separable*, es decir $f(x,y) = g(x)h(y)$, la integral se descompone como:

$$\iint g(x)h(y)\,dx\,dy = \left(\int g(x)\,dx\right)\left(\int h(y)\,dy\right).$$

Ejemplo:

$$\int_0^3\int_1^2 (2x)(3y)\,dy\,dx = \left(\int_0^3 2x\,dx\right)\left(\int_1^2 3y\,dy\right) = \left[x^2\right]_0^3\left[\frac{3y^2}{2}\right]_1^2 = 9\cdot\frac{9}{2} = \frac{81}{2}.$$

28 Cálculo de integrales de superficies.

La *integral de superficie* de una función $f(x,y,z)$ sobre una superficie S se expresa como:

$$\int_S f(x,y,z)\,dS.$$

Si la superficie es cerrada, se usa el símbolo $\oint_S$, indicando integración sobre una superficie completa (como una esfera), en contraste con una superficie abierta (como un plano).

El integrando $f(x,y,z)$ y el diferencial dS deben expresarse según la forma que adopten en la superficie considerada.

Ejemplo 1. Superficie abierta. Sea $f(x,y,z) = x^2yz$ y la superficie S el plano $z = 5$, con $1 \le x \le 2$ y $0 \le y \le 1$. En S, $f(x,y,z) = 5x^2y$ y $dS = dx\,dy$:

$$\int_S f(x,y,z)\,dS = \int_1^2\int_0^1 5x^2y\,dy\,dx = 5\left(\int_1^2 x^2\,dx\right)\left(\int_0^1 y\,dy\right) = 5\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{35}{6}.$$

Ejemplo 2. Superficie cerrada. Sea un campo $\vec{F}$ tal que:

$$\vec{F} = \begin{cases} 0, & r < R_0, \\ \dfrac{2R_0^3\rho_0}{r^2\epsilon_0}\,\vec{u}_r, & r \ge R_0. \end{cases}$$

Para una esfera de radio $r < R_0$, $\vec{F}\cdot d\vec{S} = 0$, por tanto:

$$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0.$$

CC BY-NC-SA 4.0

Si $r > R_0$, entonces:

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{2R_0^3\rho_0}{\epsilon_0} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

y la integral de superficie resulta:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{2R_0^3\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8\pi R_0^3\rho_0}{\epsilon_0}.$$

29 Cálculo de integrales a lo largo de una curva.

La *integral de línea* de una función $f(x,y,z)$ a lo largo de un camino C se define como:

$$\int_C f(x,y,z)\, dl.$$

Esta integral se evalúa siguiendo la trayectoria C, que puede ser recta, curva, abierta o cerrada, y puede encontrarse en un plano o en el espacio. Durante el cálculo, tanto el integrando $f(x,y,z)$ como el diferencial dl deben expresarse en función de las coordenadas del propio camino.

Ejemplo 1. Camino recto. Sea $f(x,y,z) = x^2 y$ y el camino la recta $x \in [0,2]$, con $y = 2$ y $z = 1$. Entonces $f = 4x^2$ y $dl = dx$:

$$\int_C f\, dl = \int_0^2 4x^2\, dx = \frac{4x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{32}{3}.$$

Ejemplo 2. Camino compuesto. Sea $f(x,y,z) = xy^2 z$ y el camino formado por dos tramos:

$$C_1:\ x \in [1,2],\ y = 1,\ z = 2, \qquad C_2:\ y \in [1,3],\ x = 2,\ z = 2.$$

En C_1, $f = 2x$ y $dl_1 = dx$; en C_2, $f = 4y^2$ y $dl_2 = dy$. La integral total es:

$$\int_C f\, dl = \int_{C_1} 2x\, dx + \int_{C_2} 4y^2\, dy = \left[x^2\right]_1^2 + \left[\frac{4y^3}{3}\right]_1^3 = 3 + \frac{104}{3} = \frac{113}{3}.$$

Ejemplo 3. Camino circular. Sea $f(x,y,z) = x^2 y$ y el camino C una circunferencia en el plano $z = 2$, de radio R. En coordenadas polares $x = R\cos\varphi$, $y = R\operatorname{sen}\varphi$, y $dl = R\, d\varphi$:

$$\int_C f\, dl = \int_0^{2\pi} R^3 \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 0.$$

30 Gradiente de una función escalar.

El *gradiente* de una función escalar $V(x,y,z)$, denotado por $\vec{\nabla} V$, es un vector que indica la dirección de máximo crecimiento de V y cuya magnitud representa la tasa de variación en esa dirección:

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z.$$

CC BY-NC-SA 4.0

Así, una función escalar genera un campo vectorial al aplicar el operador $\vec{\nabla}$. Es decir, la función $V(x,y,z)$ es un escalar y su gradiente es un vector.

Ejemplo. Sea $V(x,y,z) = xy^2 + z\,\mathrm{sen}(x) - yz^2$. Aplicando el operador $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} V = \left(y^2 + z\cos(x)\right)\vec{u}_x + \left(2xy - z^2\right)\vec{u}_y + (\mathrm{sen}(x) - 2yz)\,\vec{u}_z.$$

31 El operador rotacional de un vector.

Sea $\vec{B} = B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z$ un campo vectorial. El *rotacional* de $\vec{B}$, representado por $\nabla\times\vec{B}$, es otro vector que mide la tendencia del campo a girar alrededor de un punto:

$$\nabla\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Al desarrollar el determinante, se obtiene:

$$\nabla\times\vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x - \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z.$$

Ejemplo. Para el campo $\vec{B} = x^2y\,\vec{u}_x + xy^2z\,\vec{u}_y + xz^2\,\vec{u}_z$, se tiene:

$$\nabla\times\vec{B} = (2xz - y^2)\,\vec{u}_x - (0 - 2xy)\,\vec{u}_y + (2xy - 0)\,\vec{u}_z = (2xz - y^2)\,\vec{u}_x + 2xy\,\vec{u}_y + 2xy\,\vec{u}_z.$$

32 Laplaciano de funciones escalares.

El *laplaciano* de una función escalar $f(x,y,z)$ es también un escalar. Representa la suma de las segundas derivadas parciales respecto a cada coordenada:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Ejemplo. Para $U(x,y,z) = x^3y - y^2z + xz^2$, se calcula:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 6x + (-2) + 2 = 6x.$$

33 Sistema de coordenadas cartesianas.

En el espacio tridimensional, la posición de un punto puede expresarse en distintos sistemas de coordenadas: cartesianas, cilíndricas o esféricas. En el sistema *cartesiano*, se utilizan las variables x, y y z.

El vector de posición tridimensional $\vec{r}$ se escribe como (Ver la Figura 7):

$$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z\ ,$$

CC BY-NC-SA 4.0

o de forma abreviada, $\vec{r} = (x, y, z)$.

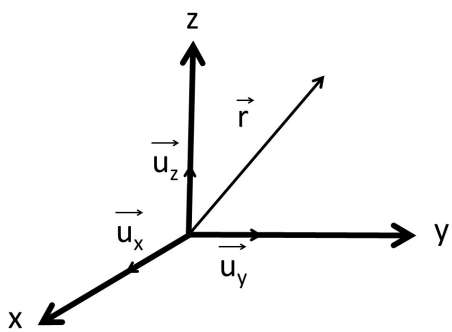

Figura 7: Representación en coordenadas cartesianas.

Los vectores unitarios $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ y $\vec{u}_z$ son mutuamente perpendiculares y cumplen:

$$\vec{u}_x = \vec{u}_y \times \vec{u}_z, \qquad \vec{u}_y = \vec{u}_z \times \vec{u}_x, \qquad \vec{u}_z = \vec{u}_x \times \vec{u}_y.$$

El módulo del vector de posición en coordenadas cartesianas es:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

34 Diferenciales en el sistema cartesiano.

En coordenadas cartesianas, los incrementos infinitesimales de longitud en las tres direcciones se representan por dx, dy y dz.

El vector diferencial de superficie en el plano XY es perpendicular a dicho plano, y se expresa como:

$$dS = dx\,dy, \qquad \vec{dS} = \pm dx\,dy\,\vec{u}_z.$$

De manera análoga, para los planos YZ y XZ:

$$\vec{dS} = \pm dy\,dz\,\vec{u}_x, \qquad \vec{dS} = \pm dx\,dz\,\vec{u}_y.$$

El signo depende de la orientación; en una superficie cerrada, $\vec{dS}$ apunta hacia el exterior.

El diferencial de volumen correspondiente al elemento cúbico es:

$$dV = dx\,dy\,dz.$$

35 Sistema de coordenadas polares

En el plano XY, un punto puede expresarse mediante coordenadas cartesianas (x, y) o mediante coordenadas polares (ρ, φ). En este sistema, ρ es la distancia desde el origen hasta el punto y φ es el ángulo que forma el vector de posición con el eje X (Ver la Figura 8). Las relaciones entre ambos sistemas son:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

CC BY-NC-SA 4.0

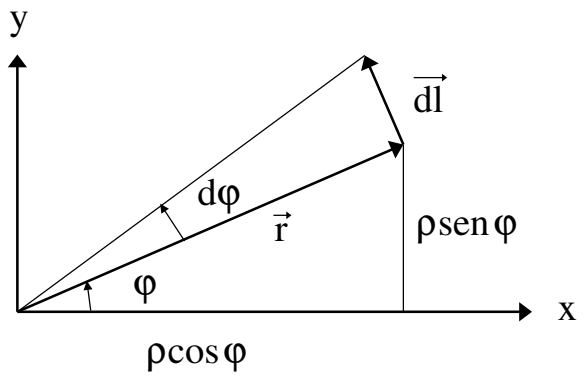

Figura 8: Sistema de coordenadas polares en el plano XY.

El vector de posición del punto se puede escribir en coordenadas cartesianas como:

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y.$$

Sustituyendo x e y en función de ρ y φ, obtenemos:

$$\vec{r} = \rho\cos\varphi\,\vec{u}_x + \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{u}_y = \rho\vec{u}_\rho.$$

Los vectores unitarios polares, $\vec{u}_\rho$ y $\vec{u}_\varphi$, permiten expresar cualquier vector en términos de la dirección radial y tangencial (Ver Figura 9):

$$\vec{u}_\rho = \cos\varphi\,\vec{u}_x + \mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{u}_y, \quad \vec{u}_\varphi = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{u}_x + \cos\varphi\,\vec{u}_y.$$

Estos vectores son perpendiculares y forman un sistema ortonormal en el plano:

$$\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\varphi = 0, \quad \vec{u}_\rho \times \vec{u}_\varphi = \vec{u}_z.$$

El módulo del vector de posición es simplemente la distancia radial:

$$|\vec{r}| = \rho.$$

En coordenadas polares, el vector de posición puede descomponerse completamente usando los vectores unitarios:

$$\vec{r} = \rho\vec{u}_\rho.$$

Este sistema facilita el cálculo de integrales y operaciones vectoriales en el plano cuando las funciones dependen de la distancia al origen o del ángulo respecto a un eje fijo.

CC BY-NC-SA 4.0

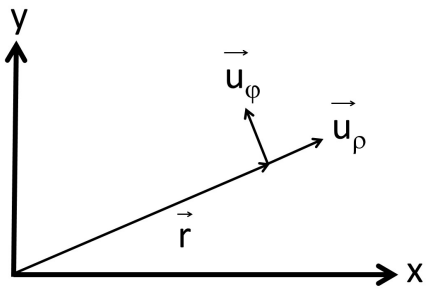

Figura 9: Vectores unitarios en coordenadas polares.

36 Diferenciales en coordenadas polares.

En coordenadas polares, cada punto del plano XY se define mediante (ρ, φ). A partir de estas coordenadas se pueden definir los diferenciales de longitud, que son segmentos infinitesimales a lo largo de la dirección radial (hacia fuera desde el origen) y a lo largo de la dirección angular (perpendicular a la radial).

Diferencial radial: este diferencial apunta en la dirección del vector unitario $\vec{u}_\rho$ y su longitud es simplemente $d\rho$:

$$\overrightarrow{dl}_\rho = d\rho\, \vec{u}_\rho, \qquad dl_\rho = |\overrightarrow{dl}_\rho| = d\rho.$$

Diferencial angular: se encuentra a lo largo del arco de radio ρ, perpendicular a la dirección radial, y su módulo depende del ángulo $d\varphi$ (Ver Figura 10):

$$\overrightarrow{dl}_\varphi = \rho\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi = \rho\, d\varphi\, (-\operatorname{sen}\varphi\, \vec{u}_x + \cos\varphi\, \vec{u}_y), \qquad dl_\varphi = |\overrightarrow{dl}_\varphi| = \rho\, d\varphi.$$

A partir de estos diferenciales de longitud se puede definir el **diferencial de superficie** en coordenadas polares como el área de un rectángulo infinitesimal en el plano XY, con lados dl_ρ y dl_φ:

$$dS = dl_\rho\, dl_\varphi = \rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{7}$$

El vector diferencial de superficie se orienta perpendicular al plano, siguiendo la regla de la mano derecha para coordenadas polares en el plano XY:

$$\overrightarrow{dS} = dS\, \vec{u}_z = \rho\, d\rho\, d\varphi\, \vec{u}_z. \tag{8}$$

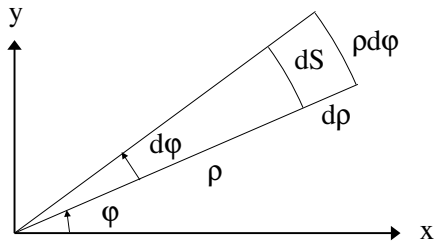

Figura 10: Elementos diferenciales de longitud radial, angular y de superficie en el plano polar.

CC BY-NC-SA 4.0

Estos diferenciales son fundamentales para el cálculo de integrales de línea y de superficie en regiones circulares o sectores angulares, ya que permiten expresar fácilmente la geometría del plano en términos de ρ y φ.

37 Sistemas de coordenadas cilíndricas.

En espacio tridimensional, las coordenadas cilíndricas combinan la polar en el plano XY con la altura z. Se representan como (ρ, φ, z), donde ρ es la distancia al eje Z, φ el ángulo respecto al eje X y z la altura:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

El vector de posición se expresa como:

$$\vec{r} = \rho\cos\varphi\,\vec{u}_x + \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z, \tag{9}$$

donde los vectores unitarios cilíndricos son:

$$\vec{u}_\rho = \cos\varphi\,\vec{u}_x + \mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{u}_y, \quad \vec{u}_\varphi = -\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{u}_x + \cos\varphi\,\vec{u}_y, \quad \vec{u}_z \text{ (igual que cartesiano).}$$

El vector de posición en coordenadas cilíndricas y vectores unitarios cilíndricos (Ver Figura 11) viene dado por:

$$\vec{r} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z\ . \tag{10}$$

Estos vectores son ortogonales entre sí:

$$\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\varphi = \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_\varphi \cdot \vec{u}_z = 0, \quad \vec{u}_\rho \times \vec{u}_\varphi = \vec{u}_z.$$

El módulo del vector de posición se calcula como:

$$|\vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \tag{11}$$

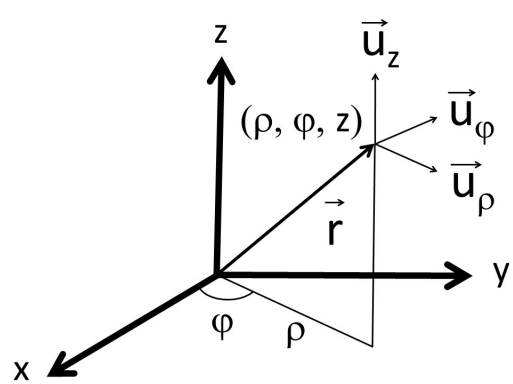

Figura 11: Vector de posición y vectores unitarios en coordenadas cilíndricas.

Los vectores unitarios cilíndricos son mutuamente ortogonales y su producto vectorial cumple:

$$\vec{u}_\rho \times \vec{u}_\varphi = \vec{u}_z, \quad \vec{u}_\varphi \times \vec{u}_z = \vec{u}_\rho, \quad \vec{u}_z \times \vec{u}_\rho = \vec{u}_\varphi.$$

CC BY-NC-SA 4.0

38 Diferenciales en coordenadas cilíndricas.

En coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), los diferenciales de longitud y superficie se expresan de manera natural usando los vectores unitarios cilíndricos $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\varphi$ y $\vec{u}_z$.

El diferencial de longitud perpendicular al eje ρ es:

$$dl = \rho\, d\varphi, \tag{12}$$

mientras que a lo largo del eje z sería dz y a lo largo del radio ρ es $d\rho$.

Diferenciales de superficie. Un cilindro tiene superficie lateral curvada y dos tapas planas.

- Superficie lateral: área de un rectángulo de lados dl y dz (Ver Figura 12):

$$dS = dl\, dz = \rho\, d\varphi\, dz, \qquad \overrightarrow{dS} = \pm dS\, \vec{u}_\rho.$$

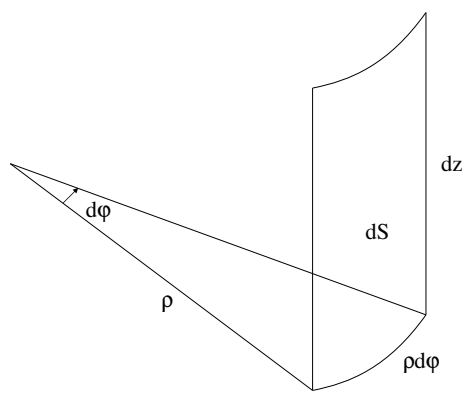

Figura 12: Superficie lateral en coordenadas cilíndricas.

  Este vector es perpendicular a la superficie dS. Su signo depende de las condiciones del problema: si la superficie es cerrada, $\overrightarrow{dS}$ se orienta de modo que apunte hacia el exterior del sólido.

- Tapas planas: área de un rectángulo de lados $d\rho$ y dl:

$$dS = d\rho\, dl = \rho\, d\rho\, d\varphi, \qquad \overrightarrow{dS} = \pm dS\, \vec{u}_z.$$

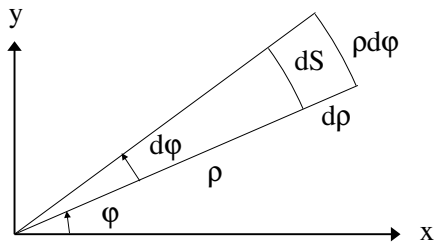

Figura 13: Superficie de una tapa de cilindro.

CC BY-NC-SA 4.0

El vector $\overrightarrow{dS}$ es perpendicular a la tapa y su dirección se define según el sentido del eje Z. En un cilindro, los vectores $\overrightarrow{dS}$ apuntan hacia el exterior: en la tapa superior $\overrightarrow{dS} = +dS\vec{u}_z$ y en la inferior $\overrightarrow{dS} = -dS\vec{u}_z$.

Diferencial de volumen. El volumen de un elemento cilíndrico se obtiene combinando $d\rho$, $d\varphi$ y dz:

$$dV = dS\, d\rho = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \tag{13}$$

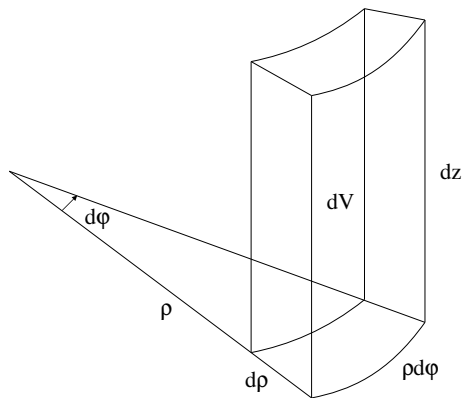

Figura 14: Diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas.

39 Sistemas de coordenadas esféricas.

Las coordenadas esféricas se representan mediante los símbolos r, θ y φ. El valor r indica la distancia desde el origen hasta el punto considerado, es decir, el módulo del vector de posición. El ángulo θ mide la inclinación del vector respecto al eje Z, mientras que φ representa el ángulo formado por la proyección del vector sobre el plano XY con el eje X (Ver Figura 15).

La correspondencia entre las coordenadas cartesianas (x, y, z) y las esféricas (r, θ, φ) es:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z &= r \cos\theta\ . \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

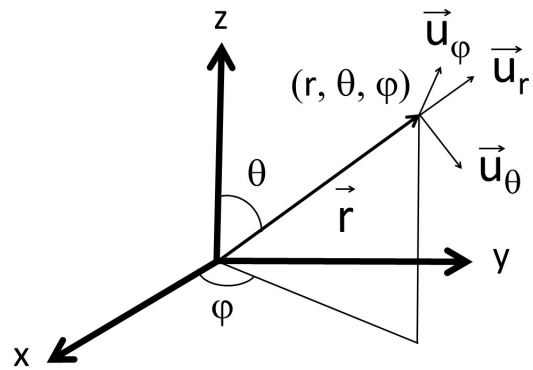

Figura 15: Sistema de coordenadas esféricas y sus vectores unitarios.

En forma vectorial, la posición de un punto se puede expresar como:

$$\vec{r} = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\vec{u}_x + r\,\mathrm{sen}\,\theta sen\varphi\vec{u}_y + r\cos\theta\vec{u}_z\ . \tag{14}$$

Los vectores unitarios en coordenadas esféricas son:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_r &= \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\vec{u}_x + \mathrm{sen}\,\theta sen\varphi\vec{u}_y + \cos\theta\vec{u}_z \\
\vec{u}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\vec{u}_x + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\vec{u}_y - \mathrm{sen}\,\theta\vec{u}_z \\
\vec{u}_\varphi &= -\,\mathrm{sen}\,\varphi\vec{u}_x + \cos\varphi\vec{u}_y\ .
\end{aligned}$$

De este modo, el vector de posición se expresa simplemente como:

$$\vec{r} = r\vec{u}_r\ , \tag{15}$$

y su módulo es:

$$|\vec{r}| = r\ . \tag{16}$$

Los vectores $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ y $\vec{u}_\varphi$ son mutuamente perpendiculares, como se deduce de sus definiciones o de la Figura 15. Además, verifican las siguientes relaciones de producto vectorial:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_r &= \vec{u}_\theta \times \vec{u}_\varphi \\
\vec{u}_\theta &= \vec{u}_\varphi \times \vec{u}_r \\
\vec{u}_\varphi &= \vec{u}_r \times \vec{u}_\theta\ .
\end{aligned}$$

40 Diferenciales en coordenadas esféricas.

En una esfera de radio r, un elemento de superficie dS puede considerarse como un pequeño rectángulo cuyos lados son $r\,d\theta$ y dl, donde dl es la longitud de un arco situado sobre el plano XY (Ver Figura 16):

$$dS = dl\,r\,d\theta\ . \tag{17}$$

CC BY-NC-SA 4.0

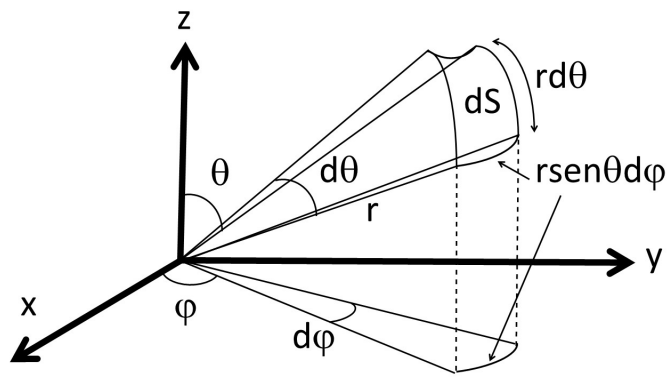

Figura 16: Elemento diferencial de superficie en coordenadas esféricas.

El arco dl tiene radio $r\,\mathrm{sen}\,\theta$ y abarca un ángulo $d\varphi$, por lo que $dl = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\varphi$. Sustituyendo, resulta:

$$dS = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi\ . \tag{18}$$

El vector diferencial de superficie se define como:

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{u}_r\ , \tag{19}$$

dirigido hacia el exterior de la esfera, en la dirección del vector unitario radial $\vec{u}_r$.

El diferencial de volumen se obtiene multiplicando dS por el espesor radial dr:

$$dV = dS\,dr = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\ . \tag{20}$$

Este elemento dV puede interpretarse como el volumen de un pequeño paralelepípedo limitado por dr, $r\,d\theta$ y $r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\varphi$ (Ver Figura 17).

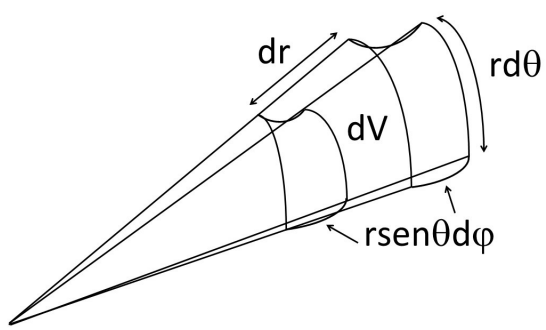

Figura 17: Elemento diferencial de volumen en coordenadas esféricas.

v

CC BY-NC-SA 4.0

41 Determinación de límites de integración en distintos sistemas de coordenadas: polares, cilíndricas y esféricas.

Los límites de integración en un problema físico dependen siempre de la geometría del sistema y de la región de integración. A continuación se muestran algunos ejemplos ilustrativos en los tres sistemas de coordenadas más comunes.

a) Coordenadas polares

El ángulo φ mide la posición del punto respecto al eje X. Para un círculo completo, φ varía de 0 a 2π; para una semicircunferencia, de 0 a π.

Un disco de radio R con densidad superficial uniforme $\sigma = \sigma_0$ contiene una carga total:

$$Q = \int_S \sigma \rho \, d\rho \, d\varphi = \sigma_0 \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \sigma_0 \pi R^2 \, .$$

Si el disco abarca solo un ángulo α, la integración en φ se limita a $0 \leq \varphi \leq \alpha$, y la carga resulta:

$$Q = \sigma_0 \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{\alpha} d\varphi = \sigma_0 \frac{R^2}{2} \alpha \, .$$

Si la densidad sólo existe entre $a \leq \rho \leq b$, se obtiene:

$$Q = \sigma_0 \int_a^b \rho \, d\rho \int_0^{\alpha} d\varphi = \sigma_0 \frac{(b^2 - a^2)}{2} \alpha \, .$$

b) Coordenadas cilíndricas

Para un cilindro de radio R y altura h con densidad volumétrica de carga uniforme $\rho_V = \rho_V(0)$, los límites son:

$$0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

La carga total es:

$$Q = \int_V \rho_V \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi = \rho_V(0) \frac{R^2}{2} h 2\pi = \rho_V(0) \pi R^2 h \, .$$

Si el cilindro sólo ocupa un sector angular α, los límites en φ cambian a $0 \leq \varphi \leq \alpha$, dando:

$$Q = \rho_V(0) \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^h dz \int_0^{\alpha} d\varphi = \rho_V(0) \frac{R^2}{2} h \alpha \, .$$

c) Coordenadas esféricas

El ángulo θ mide la inclinación respecto al eje Z. Para una esfera completa $0 \leq \theta \leq \pi$, y para una semiesfera superior $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Si una esfera de radio R tiene densidad uniforme $\rho = \rho(0)$ entre $r = a$ y $r = b$, la carga total es:

$$Q = \int_V \rho r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \rho(0) \frac{4\pi(b^3 - a^3)}{3} \, .$$

Para una semiesfera con la misma densidad:

$$Q = \rho(0) \int_a^b r^2 dr \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho(0) \frac{2\pi(b^3 - a^3)}{3} \, .$$

Finalmente, para un sector esférico limitado por $0 \leq \theta \leq \alpha$ y $0 \leq \varphi \leq \pi/2$:

$$Q = \rho(0) \int_0^R r^2 dr \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi = \rho(0) \frac{\pi R^3}{6} (1 - \cos\alpha) \, .$$

CC BY-NC-SA 4.0