Universidad de Valladolid
Trabajo Fin de Máster

Teoremas de limitación y caos

Estudiante: Álvar Daza Esteban

Tutores: Adán Sus Durán y Enrique Alonso González

Índice

1. Resumen

El caos supone una limitación respecto a nuestra capacidad predictiva de los sistemas dinámicos no lineales, a pesar de ser sistemas completamente deterministas. Los teoremas de limitación de Gödel y Turing también revelaron fuertes restricciones respecto a nuestro conocimiento sobre cuestiones fundamentales en lógica y matemáticas. En este trabajo analizamos las conexiones entre estos dos fenómenos, sus similitudes y diferencias tanto históricas como metodológicas y de contenido. Para ello, primero exponemos una breve introducción tanto a los trabajos de Gödel y Turing como a la teoría del caos a fin de proporcionar las herramientas necesarias para comprender la segunda parte. Después, hacemos una pequeña exploración de la literatura existente en la intersección de estas disciplinas bajo diferentes enfoques. Finalmente, discutimos las implicaciones que estos resultados tienen para la filosofía, la ciencia y la tecnología.

Abstract

Chaos represents a fundamental limitation on our ability to predict the behavior of nonlinear dynamical systems, despite their fully deterministic nature. Similarly, Gödel's and Turing's limitation theorems revealed profound constraints on what can be known or proven in logic and mathematics. In this work, we explore the connections between these two phenomena, examining their similarities and differences from historical, methodological, and conceptual perspectives. To that end, we begin with a brief introduction to Gödel's and Turing's results, as well as to chaos theory, in order to provide the necessary background for the discussion that follows. We then present a small survey of the existing literature at the intersection of these fields, considering a variety of approaches. Finally, we reflect on the broader implications of these findings for philosophy, science, and technology.

2. Palabras clave

- Incompletitud
- Indecibilidad
- Dinámica no lineal
- Fractal
- Gödel
- Turing
- Mandelbrot
- Yorke
- Complejidad
- Computación
- Determinismo
- Lógica matemática

3. Introducción

Los límites del conocimiento humano suponen uno de los problemas más antiguos en filosofía. En el s. XX, diferentes revoluciones en el campo de las matemáticas y de la física trajeron consigo avances no solo en el conocimiento científico, sino también en los límites de dicho conocimiento. En concreto, en este trabajo se van a estudiar la teoría del caos y los teoremas de limitación introducidos por Gödel y Turing.

Tanto la teoría del caos como los teoremas de limitación en lógica han protagonizado un papel curioso en la historia de la ciencia reciente. A pesar de que la ciencia trata de iluminarnos con su conocimiento, estas teorías señalan las sombras que dicho conocimiento proyecta. Quizá sea precisamente ese papel antagonista el que ha hecho que estos conceptos tan abstractos hayan gozado de cierta popularidad no solamente entre los especialistas, sino también entre el gran público.

La teoría del caos se ha colado en el acervo colectivo con imágenes tan icónicas como la mariposa que provoca tornados a distancia. Las historias del caos han llegado a ocupar las listas de best sellers (Gleick, 1987) y sus ideas se han colado en películas taquilleras[1]. En el caso de la lógica, los profundos logros de figuras como Gödel o Turing también han sido popularizados en textos de divulgación e incluso en cómics (Doxiadis, 1992; Doxiadis & Papadimitriou, 2009). Sus cautivadoras ideas y sus fascinantes vidas también han sido llevadas a la gran pantalla[2], convirtiendo a sus protagonistas en íconos del pensamiento moderno.

No obstante, la notoriedad de estas teorías no implica en absoluto la comprensión de las mismas. De hecho, debido a la incesante especialización, muchos de los investigadores de la teoría del caos podrían decir poco acerca de los resultados de Gödel y Turing, y probablemente lo mismo ocurriría con los lógicos a quienes se les pidiera entrar en detalles acerca del caos determinista. El que escribe estas líneas puede atestiguar desde la experiencia que, ni en un máster dedicado al caos se habló de los resultados de Gödel o Turing, ni en el desarrollo de otro máster dedicado a lógica y filosofía se mencionó el caos determinista. Esto no deja de ser sorprendente ya que, como se explicará a continuación, ambas áreas del conocimiento comparten mucho más que espacio en las carteleras. En este trabajo exploraremos precisamente los diferentes tipos de incertidumbre que suponen, sus relaciones y diferencias.

Es justo admitir que hoy en día han divergido tanto sus caminos que resulta difícil identificar las similitudes entre estos dos mundos. Los teoremas de limitación se suelen adscribir a la esfera de las matemáticas y del razonamiento puramente abstracto.

[1] Películas como "Jurassic Park" (1993) o "The butterfly effect" (2004) hacen fuertes referencias a conceptos propios del caos como la sensibilidad a las condiciones iniciales.

[2] Algunos ejemplos de películas que han popularizado el legado de Gödel y Turing son "Gödel Incomplete" (2004), "Breaking the Code" (1996) o "The Imitation Game" (2014).

De hecho, a menudo son reconocidos como algunas de las teorías más elevadas que ha concebido la mente humana. La teoría del caos, sin embargo, suele presentarse a través de sus aplicaciones prácticas en física, tales como la cinemática de aparatos mecánicos o la predicción del tiempo meteorológico. Es más, el caos impregna también ámbitos aún más alejados del razonamiento abstracto y centrados en su aplicación, como la economía o la medicina, y a menudo se pone gran énfasis en su multidisciplinariedad.

Aunque el caos y la lógica parezcan estar hoy día separados por distancias abismales, también es posible reconocer numerosas conexiones. Desde el punto de vista histórico, nombres como Cantor, Von Neumann o Turing aparecen a menudo en ambos contextos. Desde un punto de vista conceptual, los teoremas se deducen aplicando normas sin ambigüedades, del mismo modo que una trayectoria en un sistema dinámico se calcula a través de reglas deterministas. Esto implica una diferencia fundamental con respecto a la mecánica cuántica o la física estadística, por ejemplo, en las que existe una imperfección del conocimiento *a priori*. Además, tanto en caos como en el estudio de los teoremas de limitación, se repiten sin cesar palabras clave como complejidad e incertidumbre. Existe, pues, un interés común por temas semejantes y a menudo se emplean enfoques similares. Uno de nuestros objetivos fundamentales será analizar estas relaciones y su alcance.

El presente trabajo puede dividirse en dos partes. En la primera parte, se realiza una breve introducción a los teoremas de limitación de Gödel y Turing por un lado, y a la teoría del caos por otro. La idea es proporcionar al lector una base con la que poder abordar después el análisis comparativo. Dichas páginas podrían considerarse unos apuntes para estudiantes de máster, de tal modo que tanto un filósofo como un físico o un matemático pudieran seguirlos sin demasiada dificultad. Así, cada sección comienza con un brevísimo contexto histórico, que sirve para encuadrar la relevancia de las respectivas teorías y para dejar entrever las conexiones existentes entre los diferentes autores y sus ideas. Después, se definen los conceptos fundamentales utilizando un tono accesible más que técnico, aunque tratando de mantener el rigor en todo momento. La idea es que el trabajo sea autocontenido en su esencia, aunque por supuesto se ofrezcan referencias que sirvan como ampliación. Se incluyen ejemplos sencillos y representativos y se emplean imágenes para ilustrarlos. Este estilo puede resultar sorprendente en algunos contextos, pero como vehículo pedagógico resulta sumamente útil.

En la segunda parte del presente trabajo, se comparan los teoremas de limitación de Gödel y Turing con conceptos provenientes de la dinámica no lineal y la teoría del caos. Si bien existen conexiones muy ricas entre la incertidumbre que comporta cada una de las teorías y las conexiones entre sus objetos de estudio son numerosas, este vínculo no puede resumirse en una tesis sencilla. A día de hoy, carecemos de una teoría global que sintetice estas relaciones y en la que podamos focalizar nuestro análisis. Por ello, esta comparativa se aborda desde diferentes ángulos y perspectivas, tratando de incluir una muestra de trabajos de investigación extensa aunque no exhaustiva, ya que sería imposible en el espacio propio de un trabajo fin de máster. De esta manera, se sacrifica algo de profundidad por una mayor amplitud, aunque ciertos temas que puedan resultar especialmente interesantes por diferentes motivos sí se tratan con más detalle. En definitiva, el principal objetivo de este trabajo es ofrecer un panorama más o menos general sobre las investigaciones en la intersección entre los teoremas de limitación y la teoría del caos. Creo firmemente que esta frontera se trata de un terreno fértil y sumamente hermoso, aunque inusualmente poco transitado en comparación con otros senderos en las lindes entre física, filosofía y matemáticas.

4. Gödel

4.1. Contexto histórico y relevancia

La geometría euclídea fue durante siglos uno de los mayores paradigmas de teoría matemática, hasta que en el s. XIX la irrupción de geometrías no euclídeas puso en cuestión la propia noción de teoría y la fundamentación misma de las matemáticas. David Hilbert, probablemente el matemático más influyente del s. XX, se propuso hacer frente a esta crisis mediante el llamado programa de Hilbert. Su objetivo consistía en axiomatizar las matemáticas y probar la solidez de sus cimientos, lo cual podía reducirse en último término a probar que la aritmética era una teoría sin contradicciones en la que es posible demostrar la veracidad o no de cualquier proposición.

Kurt Gödel (1906-1978) nació y creció en el seno del Imperio Austrohúngaro, desarrollando el trabajo que nos ocupa durante su período en Viena. La actual capital austriaca era un verdadero caldo de cultivo filosófico y científico durante el primer tercio del s. XX. Los físicos Ernst Mach y Ludwig Boltzmann fueron los primeros catedráticos de filosofía de la ciencia en la Universidad de Viena. Años después, el Círculo de Viena congregaba a algunos de los más grandes pensadores de su época. El propio Gödel estaba en estrecho contacto con el círculo y, aunque consideraba a sus integrantes como pensadores algo toscos (Sigmund, 2023), esa atmósfera le permitió conocer de primera mano las ideas de filósofos y científicos de renombre, tales como Ludwig Wittgenstein, Karl Popper, Albert Einstein, Carl Menger o John von Neumann[3]. El interés de Gödel en la metalógica y la fundamentación de las matemáticas le llevó a demostrar el llamado teorema de completitud de Gödel durante el desarrollo de su tesis doctoral. El teorema de completitud establece que, en lógica de primer orden, toda fórmula que es verdadera es también demostrable. Sin embargo, Gödel pasaría a la historia por los llamados teoremas de *incompletitud*, que supusieron un golpe fatídico para el programa formalista de Hilbert y una tremenda conmoción en la comunidad matemática. Hasta ese momento, la mayoría de los matemáticos daban por hecho que todas las "verdades matemáticas" debían poder demostrarse a partir de ciertos axiomas y reglas de inferencia. No obstante, como veremos a continuación, los trabajos de Gödel pusieron de manifiesto que esa asunción implícita no solo no estaba justificada, sino que era falsa.

4.2. Definiciones previas

Los números naturales se encuentran en los cimientos de las matemáticas y apuntalar una teoría que los estudie era objetivo central del programa de Hilbert. Aunque existen diferentes formulaciones de la aritmética, suele tomarse la aritmética de

[3]Von Neumann de hecho estuvo a punto de adelantarse a Gödel en la publicación de sus teoremas de incompletitud.

Peano como referencia.
Los axiomas de la aritmética de Peano pueden resumirse informalmente de la siguiente forma:

1. El 0 es un número natural.
2. Ningún número tiene al 0 como sucesor y si dos números tienen el mismo sucesor significa que son iguales.
3. Principio de inducción: si una fórmula es cierta para 0, y la validez de dicha fórmula para un número cualquiera implica la validez para su sucesor, entonces la fórmula es válida para todos los naturales.

El deseo de Hilbert puede resumirse en demostrar que la aritmética era una teoría sin contradicciones y suficientemente fuerte como para derivar todas las verdades matemáticas mediante métodos finitos.

Definición 1 *Consistencia: se dice que una teoría es consistente cuando no es posible demostrar una fórmula y su negación en dicha teoría.*

Como veremos a continuación, la consistencia de la aritmética de Peano está estrechamente ligada con su completitud.

Definición 2 *Completitud: una teoría es completa si, para cualquier fórmula cerrada[4], o bien ella o su negación son teoremas de dicha teoría.*

4.3. Teoremas de incompletitud de Gödel

Hoy en día, podemos enunciar el primer teorema de incompletitud de Gödel de la siguiente forma:

Teorema 1 *(Primer teorema de incompletitud de Gödel) Si la aritmética de Peano es consistente, entonces no puede ser completa; es decir, existen fórmulas verdaderas en su lenguaje que no pueden ser demostradas dentro de ella.*

Teniendo en cuenta el papel fundacional de la aritmética, otra manera de enunciar el primer teorema de Gödel que pone de relieve sus profundas implicaciones para las matemáticas es la siguiente:

Teorema 2 *(Primer teorema de incompletitud de Gödel, versión alternativa) Nunca se podrá encontrar un sistema axiomático que sea capaz de demostrar todas las verdades matemáticas y ninguna falsedad.*

[4]Una fórmula cerrada es aquella cuyo valor es fijo y está determinado.

La prueba del primer teorema de Gödel puede dividirse en tres partes. En la primera se define la llamada numeración de Gödel, que asigna a cada fórmula de la teoría un código numérico. En la segunda parte se construye una fórmula que permite verificar si un número de Gödel es prueba (se demuestra a partir de los axiomas y las reglas de inferencia) de otro número de Gödel. En el último paso se genera una proposición con una autorreferencia al estilo de la paradoja del mentiroso, diciendo "esta proposición no se puede probar". Al analizar las consecuencias de esta proposición se llega a la conclusión de que o bien la aritmética de Peano es incompleta o bien es inconsistente. Explicaciones más detalladas de la prueba de Gödel y las técnicas que en ella se utilizan pueden consultarse en (Boolos et al., 2002; Smith, 2013).

El segundo teorema de incompletitud de Gödel está estrechamente relacionado con el primero, reforzando y ampliando el alcance de sus consecuencias.

Teorema 3 *(Segundo teorema de incompletitud de Gödel) Si una teoría consistente contiene la aritmética de Peano, entonces no es posible demostrar su consistencia dentro de la propia teoría.*

Para demostrar este teorema, se puede definir una fórmula $Cons$ tal que exprese la consistencia de una teoría T que incluya la aritmética de Peano (o cualquier otra aritmética recursiva). Gödel demostró que $Cons(T) \rightarrow G$ es un teorema de dicha teoría. Por lo tanto, $Cons(T)$ no puede ser un teorema, ya que si lo fuera, se deduciría que G es demostrable, en contradicción con el enunciado del primer teorema de incompletitud.

Aunque es imposible demostrar la consistencia dentro de la propia teoría, en principio, sería posible mostrar su inconsistencia. Para ello, bastaría con deducir de sus axiomas alguna contradicción. No obstante, hasta la fecha no se ha producido tal evento, y es el sentir de la mayoría de los lógicos y matemáticos que nunca se producirá. En cualquier caso, dicho deseo es imposible de sustentar lógicamente tal y como acabamos de ver que demostró Gödel.

5. Turing

5.1. Antecedentes históricos y relevancia

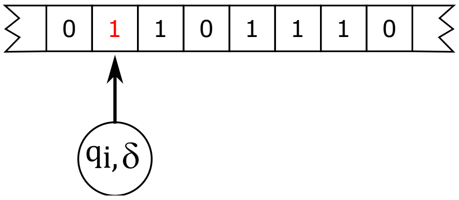
El programa de Hilbert planteaba cuestiones respecto a la fundamentación de las matemáticas relacionadas con la consistencia, completitud y decidibilidad. Como hemos visto, los teoremas de Gödel demostraron fuertes limitaciones en cuanto a las dos primeras, pero aún quedaba la cuestión de la decibilidad: ¿existe algún método mecánico capaz de decidir si una proposición de lógica de primer orden[5] es verdadera o falsa? Alan Turing (1912-1954), junto con su director de tesis Alonzo Church, abordó el problema de la decibilidad introduciendo técnicas y conceptos que sentarían las bases teóricas de toda la computación. Es más, durante la II Guerra Mundial Turing trabajó con unas máquinas electromecánicas que pueden considerarse antecesores de los computadores a fin de descifrar los códigos nazis de la Máquina Enigma. También son conocidos sus trabajos pioneros en biología teórica que introdujeron conceptos fundamentales de las modernas ciencias de la complejidad, estrechamente relacionadas con la teoría del caos. Los modelos de reacción-difusión y los llamados patrones de Turing permiten entender la morfogénesis a través de mecanismos de ruptura de la simetría y autoorganización.

5.2. Conceptos relacionados

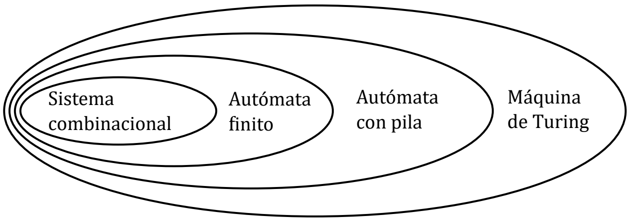
Uno de los grandes logros de Turing fue el de definir en términos matemáticos precisos la noción abstracta de "método mecánico" presente en la pregunta original de Hilbert acerca de la decibilidad. Previamente el matemático estadounidense Alonzo Church había realizado una definición equivalente mediante las funciones recursivas y el cálculo lambda, pero fue el propio Church el primero en reconocer el valor del trabajo de Turing y acuñar el término máquina de Turing para referirse a los sistemas de computación definidos por el inglés. Hoy en día se consideran las máquinas de Turing como el origen teórico de la computación. Igual que con Gödel, aquí daremos una descripción moderna (sin ceñirnos a los trabajos originales de Turing) que nos permita comprender su funcionamiento sin entrar en demasiados detalles técnicos. Para una exposición más completa, se recomienda consultar (Davis, 2013; Sipser, 2012).

Definición 3 *Máquina de Turing: Se trata de un modelo de computación determinista (sin ambigüedades) compuesto por los siguientes elementos: una cinta infinita dividida en celdas que pueden contener un símbolo cada una escogido entre un alfabeto finito, un cabezal que se desplaza por la cinta y puede leer y escribir símbolos en ella, y una lista finita de instrucciones que determina las acciones que debe realizar el cabezal según su estado actual. La Fig. 1a proporciona una representación esquemática.*

[5] La aritmética de Peano es un ejemplo de sistema expresado en lógica de primer orden.



(a)



(b)

Figura 1: (a) Representación de una máquina de Turing. La cinta infinita tiene en cada celda uno de los dos símbolos (0,1) disponibles. El cabezal está representado por una circunferencia con una flecha que indica su posición sobre la cinta. El cabezal puede moverse a izquierda y derecha, leer y escribir contenido en la cinta. Además, la máquina de Turing se encuentra en el estado interno q_i y tiene unas reglas de transición δ que determinan completamente las acciones que debe realizar en cada paso. (b) Jerarquía de autómatas deterministas según su capacidad computacional. Esta jerarquía se puede relacionar con la jerarquía de lenguajes de Chomsky.

Así pues, podemos caracterizar una máquina de Turing mediante los siguientes datos[6]:

1. El contenido de la cinta.
2. La posición (celda) del cabezal de lectura.
3. El estado interno actual q_i de la máquina.
4. La función de transición δ, que indica los movimientos de la máquina en función de los datos anteriores.

Toda la información de una máquina de Turing en un instante dado puede codificarse como un número natural M. La posición del cabezal puede definirse con respecto a la posición inicial, indicando cuántas celdas a la izquierda o a la derecha de la celda original se ha movido. El estado interno actual q_i será uno de una lista finita. Además, la función de transición δ está definida sobre un conjunto finito de estados y símbolos, por lo que también es finita. Finalmente, para cualquier tiempo finito, solo un número finito de posiciones de la cinta es relevante.

Otro de los grandes avances de Turing fue darse cuenta de que las máquinas de Turing pueden combinarse de forma modular, tal y como un sistema operativo combina diferentes programas. En particular, una máquina de Turing puede recibir como entrada la descripción de otra máquina de Turing y así simularla, lo que da origen al concepto de máquina de Turing universal.

Definición 4 *Máquina de Turing Universal: Es una máquina de Turing capaz de simular cualquier otra máquina de Turing al recibir como entrada la descripción de dicha máquina y su respectiva cinta.*

[6]Esta formulación se conoce como descripción instantánea y es la manera más común de definir una máquina de Turing particular.

Teorema 4 *Teorema de existencia de máquinas de Turing universales: Dada una máquina de Turing cualquiera $\mathbb{M}$, que puede describirse mediante un número M, y dada una cinta de entrada i, existe una máquina de Turing universal $\mathbb{U}$ tal que $\mathbb{U}$ es capaz de simular el comportamiento de $\mathbb{M}$ cuando se le proporciona la entrada i. En otras palabras:* $\mathbb{U}(<M, i>) = \mathbb{M}(i)$.

La existencia de máquinas de Turing universales no es trivial, pero podemos entender cómo podrían construirse pensando en una máquina de Turing de tres cintas. Así, la primera cinta se usaría para almacenar la máquina de Turing de entrada, sus datos y la salida; la segunda cinta se emplearía como área de trabajo para manipular los datos; y la tercera cinta contendría una representación del estado de la máquina simulada. Finalmente, es fácil demostrar que una máquina de Turing de tres cintas puede ser simulada por una máquina de una sola cinta, ya que tanto la cardinalidad de una cinta como la de tres cintas es la del infinito numerable.

Tesis 1 *Tesis de Church-Turing: toda función que puede ser calculada mediante un algoritmo (es decir, un procedimiento efectivo y finito que produce un resultado bien definido para cualquier entrada) puede ser calculada por una máquina de Turing.*

La tesis de Church-Turing se trata de una afirmación aceptada de manera prácticamente universal, aunque no es algo demostrable. No obstante, en principio sí se podría mostrar su falsedad si se descubriera un algoritmo que no se pudiera implementar mediante una máquina de Turing. Su valor radica en que establece la equivalencia entre función computable y máquina de Turing.

Además de las máquinas de Turing existen otros autómatas (modelos de computación deterministas) con diferente capacidad computacional, aunque las máquinas de Turing ocupan el lugar más alto en la jerarquía, tal y como se puede ver en el esquema de la Fig. 1b. Por tanto, los otros autómatas pueden verse como casos particulares de máquinas de Turing en los que se han restringido sus capacidades. También existen ciertas variaciones de las máquinas de Turing tales como las máquinas de Turing no deterministas o las multicinta, pero su capacidad de cómputo es equivalente a las de las máquinas de Turing.

5.3. El problema de decisión (Entscheidungsproblem)

Como hemos visto, Hilbert perseguía la fundamentación de las matemáticas, lo que, siguiendo el sueño leibniziano de realizar una máquina para el buen razonamiento, le llevó a plantear la siguiente cuestión en 1928: ¿Existe un algoritmo que tome un lenguaje formal y cualquier enunciado lógico en ese lenguaje, y que devuelva "Verdadero" o "Falso", dependiendo del valor de verdad del enunciado? Tal y como mostramos en la sección anterior, el trabajo de Turing proporcionó una definición precisa del término algoritmo, lo que le permitió reducir el problema de decisión al problema de la parada: ¿Existe una máquina de Turing que, usando como entrada otro programa, sea capaz de decidir si ese programa se parará (es decir, terminará su ejecución) o continuará ejecutándose indefinidamente?

Teorema 5 *Teorema de indecidibilidad de Turing: No existe una máquina de Turing capaz de resolver el problema de la parada.*

La demostración del teorema se realiza por reducción al absurdo y utiliza argumentos y técnicas similares a los del primer teorema de incompletitud de Gödel. En particular, se utiliza la autorreferencia al estilo de la paradoja del mentiroso y la diagonalización. Aunque se refieren a ámbitos distintos, las semejanzas entre los resultados de Turing y los teoremas de incompletitud de Gödel son notables. Un avance conceptual clave de Turing consiste en identificar un procedimiento mecánico con un proceso determinista, pero sin que necesariamente sepamos si ha de parar o no.

6. Caos

6.1. Antecedentes históricos y relevancia

Varios afluentes contribuyeron a generar el concepto de caos (Sanjuán, 2016). Históricamente, el origen del caos se establece normalmente en los trabajos de Henri Poincaré sobre el problema de los tres cuerpos. A finales del s. XIX, el rey de Noruega y Suecia Oscar II, celebró un concurso científico en el que se planteaba la cuestión de la estabilidad del sistema solar. Poincaré participó y ganó dicho concurso, aunque tras su proclamación como ganador se dio cuenta de un fallo en su trabajo y decidió cambiarlo por completo. Irónicamente, ese error dio comienzo a la llamada teoría del caos[7].

La línea iniciada por Poincaré quedó prácticamente dormitando mientras se sucedían los nacimientos de la cuántica y la relatividad. De este modo los siguientes grandes hitos del caos no aparecerían hasta la segunda mitad del s. XX. Primero fue el teorema KAM, que debe su nombre a Kolmogorov, Arnold y Moser y constituye uno de los pilares fundamentales del caos hamiltoniano[8]. En 1963, un famoso artículo del matemático y meteorólogo Edward Lorenz puso de manifiesto la sensibilidad a las condiciones iniciales de un modelo atmosférico muy simplificado, dando a luz al icónico efecto mariposa (Lorenz, 1963). Cuatro años después, Stephen Smale describió mediante un sencillo mecanismo topológico la manera en que se engendraba la complejidad del caos. En 1975, Li y Yorke escribieron un influyente trabajo titulado "Period three implies chaos" con el que bautizaron el fenómeno (Li & Yorke, 1975). El desarrollo de los ordenadores modernos y la geometría fractal de Benoît Mandelbrot impulsaron la disciplina.

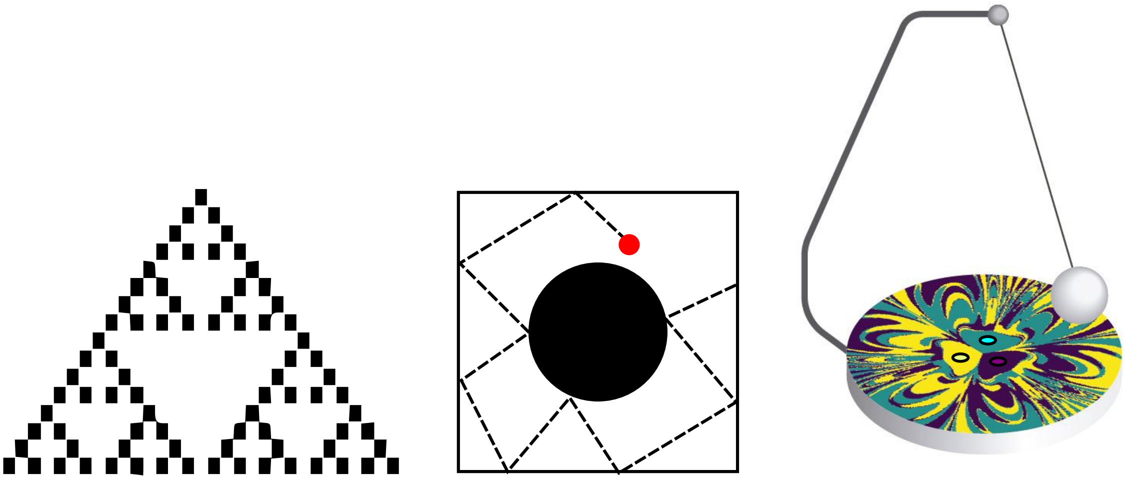
Desde entonces, el caos y su metodología se han estudiado no solamente en el contexto de la física y las matemáticas, sino también en biología, medicina, economía y una gran variedad de ramas del conocimiento. La llamada ciencia de la complejidad, que propone un cambio de paradigma respecto al reduccionismo imperante en física y otros ámbitos científicos, está estrechamente ligada al surgimiento del caos. Algunos filósofos afirman que el caos supuso una revolución científica a la altura de la cuántica o la relatividad general, aunque se trata de un tema controvertido (Leiber, 1998).

6.2. Sistemas dinámicos y su comportamiento

El caos determinista aparece al estudiar los llamados sistemas dinámicos no lineales.

[7]El término teoría del caos no se refiere a una teoría axiomática como la cuántica o la relatividad general, si no que es más bien una amalgama de conceptos, técnicas y resultados matemáticos relacionados entre sí.

[8]Los sistemas hamiltonianos son de gran importancia en física clásica y cuántica, ya que aquellos problemas en que se conserva la energía suelen modelizarse usando el formalismo hamiltoniano.



(a) (b) (c)

Figura 2: Representación de tres sistemas dinámicos paradigmáticos. (a) Autómata celular (tiempo y espacio discretos) siguiendo la llamada regla 90 de Wolfram (Wolfram, 2002), que produce una estructural fractal tipo triángulo de Sierpinski. (b) El billar de Sinai, en el que una partícula (en rojo) rebota en una caja con un disco duro, puede modelizarse mediante un mapa (tiempo discreto y espacio continuo). (c) El péndulo magnético oscila hasta detenerse en uno de los tres imanes en función de la posición inicial desde la que se suelta, lo cual determina sus tres cuencas de atracción fractales (amarilla, verde y morada). Puede modelizarse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, lo que le convierte en un ejemplo de sistema dinámico con tiempo continuo y espacio continuo.

Definición 5 *Sistema dinámico: consiste en un espacio de fases o de estados abstracto, cuyas coordenadas describen el estado del sistema para cualquier instante, y una regla que especifica el futuro inmediato de todas las variables de estado conocidos sus valores presentes.*

Si la regla de evolución es determinista hablamos de sistemas dinámicos deterministas (en este trabajo nos referiremos a ellos simplemente como sistemas dinámicos).

Definición 6 *Sistema dinámico no lineal: se dice que un sistema dinámico es no lineal cuando los efectos que provocan los cambios en las variables no son proporcionales a dichos cambios, y por tanto no cumplen con el principio de superposición*[9].

Aunque las condiciones precisas bajo las cuales aparece caos no se conocen (y no se pueden conocer de antemano, como explicaremos más adelante), hay ciertas condiciones necesarias para su existencia. La no linealidad es una de ellas y es por eso que se denomina dinámica no lineal a la disciplina encargada del estudio del caos

[9]Por ejemplo, para una fórmula lineal como $y = 3x$, dos pares de números que la cumplen como $x_1 = 1, y_1 = 3$ y $x_2 = 2, y_1 = 6$ pueden sumarse para generar un nuevo par de valores que satisfagan la fórmula $x_3 = x_1 + x_2 = 3, y_3 = y_1 + y_2 = 9$. Esto no sucede en el caso no lineal, como por ejemplo $y = x^2$.

determinista.

Existen muchos tipos de sistemas dinámicos, aquí nos limitamos a presentar los más relevantes para la discusión posterior. En el siguiente cuadro aparece una clasificación de los sistemas dinámicos en función del tipo de tiempo y espacio de estados que utilizan.

Tiempo / Espacio	**Discreto (Alfabeto numerable)**	**Continuo ($\mathbb{R}^n$)**
Discreto ($\mathbb{N}$)	Dinámica simbólica (e.g. autómatas celulares, desplazamiento de Bernoulli)	Mapas (e.g. mapa logístico, mapa estándar)
Continuo ($\mathbb{R}$)	Poco habitual en sistemas deterministas (sistemas híbridos)	Flujos (e.g. atractor de Lorenz, péndulo magnético)

Cuadro 1: Clasificación de sistemas dinámicos según tipo de tiempo y tipo de espacio de estados.

En la Fig. 2 pueden encontrarse representaciones esquemáticas de un autómata celular, un billar que puede ser representado por un mapa, y un péndulo magnético que puede modelizarse utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias.

A continuación se ofrece una clasificación general de los diferentes tipos de comportamientos acotados que puede mostrar un sistema dinámico.

Definición 7 *Equilibrio: cuando las variables que describen un sistema dinámico no varían en el tiempo, decimos que se encuentra en equilibrio.*

Definición 8 *Movimiento periódico: cuando las variables que describen un sistema dinámico se repiten de forma regular al cabo de un tiempo finito, decimos que el movimiento es periódico.*

Definición 9 *Caos: comportamiento aperiódico y acotado de las variables de estado de un sistema dinámico determinista.*

La Fig. 3 muestra series temporales de los distintos comportamientos dinámicos para el mapa logístico. Este sistema dinámico paradigmático se define como

$$x_{n+1} = r \cdot x_n(1 - x_n) \tag{1}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ es la variable temporal, $x \in \mathbb{R}$ es la variable dinámica o de estado y el parámetro $r \in \mathbb{R}$ produce diferentes dinámicas al tomar diferentes valores.

La definición anterior de caos no es única, y de hecho la definición precisa de caos es un tema escurridizo y controvertido (Brown & Chua, 1996; Hunt & Ott, 2015). El

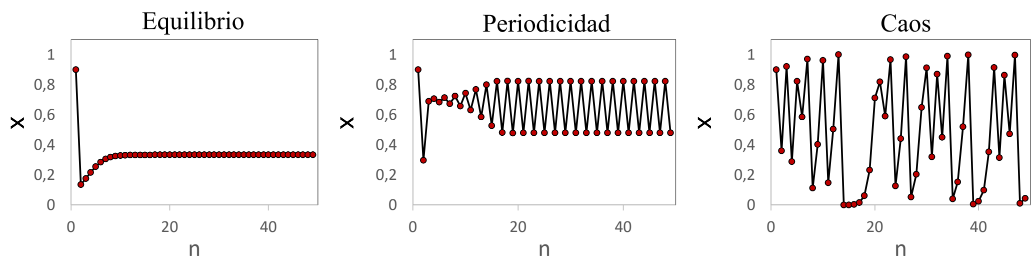


Figura 3: Series temporales del mapa logístico de la Ec. 1 mostrando diferentes tipos de dinámica para una misma condición inicial x_0 y diferentes valores del parámetro r. Para $r = 1{,}5$ la trayectoria tiende al equilibrio, para $r = 3{,}3$ la trayectoria realiza una órbita de periodo dos, y para $r = 4$ la trayectoria se vuelve caótica.

caos se manifiesta de formas diversas, tiene muchas facetas (Sander & Yorke, 2015). Una de ellas es la sensibilidad a las condiciones iniciales, que se manifiesta cuando en un sistema dinámico hay trayectorias cercanas que divergen a un ritmo exponencial o más rápido. Se puede cuantificar mediante los llamados exponentes de Lyapunov, de tal modo que un exponente de Lyapunov positivo indica caos. Otra de las facetas más reconocibles del caos, no completamente independiente de la sensibilidad a las condiciones iniciales, es la aparición de estructuras fractales.

6.3. Caos y fractales

Si las geometrías no euclidianas supusieron una revolución matemática por poner en cuestión la naturaleza del espacio, los fractales cambiaron la concepción de los entes que pueblan dicho espacio. En lugar de considerar objetos suaves como esferas o triángulos, los fractales son objetos rugosos, con complejidad a diferentes escalas. Igual que con el caos, la definición de fractal no es única. Benoît Mandelbrot, quien acuñó el término fractal por significar roto, define los fractales como objetos que tienen una dimensión topológica estrictamente menor que su dimensión de Hausdorff (Mandelbrot, 1982). La dimensión topológica se refiere al concepto habitual de dimensión, que es el número mínimo de coordenadas para definir un punto en un objeto geométrico (1 para una curva, 2 para una superficie, etc.). La dimensión de Hausdorff generaliza la noción de dimensión topológica, dando una medida de cómo llena el espacio un determinado objeto geométrico, y no tiene por qué tomar un valor entero. Así, por ejemplo, la dimensión fractal del llamado conjunto de Cantor[10] es $d = \log(2)/\log(3) \approx 0{,}631$, lo cual indica que llena más el espacio que un punto pero menos que una recta. A menudo, los fractales poseen propiedades sorprendentes, que parecen ir en contra de nuestra intuición. En el caso del con-

[10] Una construcción sencilla del conjunto de Cantor es la siguiente. Cojamos el intervalo cerrado $[0, 1]$ y quitemos el tercio central $(1/3, 2/3)$, quedándonos con los dos intervalos restantes. En la siguiente iteración, quitaremos el tercio central de cada uno de estos intervalos, obteniendo cuatro intervalos de longitud $1/9$ cada uno. Llevando este proceso hasta el infinito obtenemos el llamado conjunto de Cantor, tal y como se muestra en la Fig. 4a.

junto de Cantor, llama la atención que posee la cardinalidad del continuo, aunque se trata de un conjunto de puntos disconexo. Precisamente para estudiar la cardinalidad, el genial matemático alemán ideó la llamada diagonalización de Cantor que, a pesar de aplicarse a un ámbito diferente, comparte importantes similitudes con los procesos de diagonalización que se utilizan en las pruebas de Gödel y Turing.

Para entender la relación de los fractales con el caos, es conveniente pensar en un ejemplo sencillo, como el péndulo magnético de la Fig. 2c. En este sistema, un péndulo oscila erráticamente hasta detenerse en uno de tres imanes colocados sobre la plataforma. Si se busca predecir el comportamiento del sistema, es necesario calcular el conjunto de condiciones iniciales que conducen a un determinado atractor, i.e., uno de los tres imanes. Estos conjuntos coloreados en amarillo, verde y azul en la Fig. 2c se denominan cuencas de atracción, y las fronteras que los separan son curvas fractales. Puesto que las curvas fractales llenan el espacio más que una recta o una curva suave, dada una incertidumbre inicial en la posición del péndulo, es más difícil determinar el atractor final del sistema. En concreto, dado un cierto error en la determinación de las condiciones iniciales ε, la fracción de condiciones iniciales impredecibles en el espacio de estados viene dada por $f \sim \varepsilon^{\alpha}$, donde $\alpha = D - d$ es el exponente de incertidumbre que resulta de la diferencia entre la dimensión topológica del espacio de estados D y la dimensión de Hausdorff d de la frontera (Grebogi et al., 1983). En casos donde la frontera es suave, se tiene que $\alpha = 1$, lo que implica que el número de condiciones impredecibles disminuye proporcionalmente al reducir ε. Sin embargo, si la frontera es fractal se tiene que $\alpha < 1$, por lo que al reducir ε, la fracción de condiciones iniciales que es impredecible no se reduce proporcionalmente. En casos extremos se puede tener $\alpha = 0$, lo que significa que independientemente del valor de ε, la fracción de condiciones iniciales impredecibles permanece constante (Alexander et al., 1992). En resumen, podemos ver que las fronteras fractales hacen que el sistema sea en cierto modo impredecible (Daza et al., 2024). Esto es una manifestación del caos (en concreto de caos transitorio), pero existen muchos otros aspectos del caos que están directamente relacionados con los fractales.

Una conexión fundamental entre el caos y los fractales es la herradura de Smale, que puede considerarse la estructura topológica que sustenta el caos. En su búsqueda de la esencia de la dinámica caótica, Smale ideó una construcción sencilla que recoge la acción de los sistemas caóticos sobre el espacio de estados, tal y como se ilustra en la Fig. 4b. En la herradura de Smale, el espacio de estados se estira y después se pliega de forma similar a como un panadero realiza la masa para hojaldre. Si pensamos en un par de condiciones iniciales muy próximas, como un grano de sal y otro de pimienta dispuestos en la masa del panadero, podemos ver que, debido al proceso de estirado y doblado, al cabo de unas pocas iteraciones siguen caminos completamente diferentes. A pesar de encontrarse dentro de la misma región del espacio de estados, es decir, en la misma masa del panadero, y de haber empezado muy próximas, las trayectorias del grano de sal y el grano de pimienta divergen rápidamente en

(a) (b)

Figura 4: (a) Esquema de la construcción iterativa (de arriba hacia abajo) del conjunto de Cantor, un ejemplo paradigmático de objeto fractal. En cada paso se retira el tercio central de un segmento, siendo el conjunto de Cantor el límite en el infinito. Imagen adaptada de (Wikipedia contributors, 2024). (b) De izquierda a derecha, las tres primeras iteraciones de la herradura de Smale. El espacio de estados inicial está representado por un cuadrado, que tras estirarse y doblarse queda en forma de herradura. Al aplicarse sucesivamente la misma operación se termina obteniendo una estructura hojaldrada tipo Cantor. La herradura de Smale recoge las operaciones básicas del caos y sirve para entender el fenómeno de sensibilidad a las condiciones iniciales en sistemas acotados.

cuanto caen en capas distintas. Esto es posible gracias a la complejidad del espacio de fases fractal, es decir, a los infinitos vericuetos de la herradura de Smale o a las infinitas capas que conforman el hojaldre del panadero. El mecanismo de la herradura de Smale, propio de la dinámica caótica, puede leerse como una manifestación geométrica de la autorreferencia y la recursividad. Aunque en dominios distintos, esta estructura recuerda a la paradoja del mentiroso, cuyas raíces conceptuales se reflejan en los teoremas de Gödel y Turing.

7. Comparativa teoremas limitación y caos

7.1. Un diccionario interdisciplinar

Hasta el presente apartado, en este trabajo se ha hablado de lógica y fundamentación matemática por un lado, y de caos por otro. Aunque una lectura atenta revela ciertas similitudes, tanto históricas como conceptuales y metodológicas, la posible conexión entre estas áreas no resulta en absoluto evidente. De hecho, es claro que existen diferencias importantes entre la incertidumbre asociada al caos y la incertidumbre asociada a la indecibilidad. En el caos se introduce una incertidumbre externa, ya sea de índole numérica o experimental, y luego se estudia la sensibilidad del sistema dinámico a dicha incertidumbre. Si la incertidumbre crece suficientemente deprisa (exponente de Lyapunov positivo), podemos decir que existe caos. Sin embargo, la indecibilidad del problema de la parada, por ejemplo, no contiene ningún tipo de incertidumbre externa. En un sistema determinista y sin ningún tipo de incertidumbre interna, surge una pregunta que es imposible de contestar con certeza en general. Así pues, y dando por sentado que se tratan de obstáculos al conocimiento de naturaleza diferente, cabe preguntarse si existe alguna conexión entre ambos mundos. En lo que sigue, intentaremos establecer y analizar algunas de dichas relaciones.

Como punto de partida para esta sinergia tomaremos los trabajos de John L. Casti, científico y divulgador del Instituto de Santa Fe (uno de los centros pioneros y más prestigiosos en ciencias de la complejidad) y del Instituto Técnico de Viena (pareciera que se cierra el círculo). Casti organizó unos talleres interdisciplinares celebrados a finales de los años ochenta en una estación científica de la Real Academia Sueca de Ciencias en Abisko, más al norte del círculo polar, cerca de las fronteras noruega y finlandesa, donde se trataban temas situados en "las fronteras entre diferentes disciplinas" (Chaitin, 2002). A estas reuniones acudían pensadores de renombre, líderes en sus respectivas áreas del conocimiento. Así, en la lista de nombres ilustres, los investigadores del caos reconocerían rápidamente a Otto Rössler, cuyo apellido se utiliza hoy día para referirse a uno de los sistemas caóticos más paradigmáticos. Por otro lado, los estudiosos de Gödel y Turing probablemente identificarían a Gregory Chaitin, quien puede ser considerado el sucesor de ambos por sus célebres resultados en el ámbito de la lógica-matemática y la computación. Fruto de estas interacciones, Casti editó un libro en el que se recopilan algunas de las ideas discutidas en Abisko (Casti, 2018), y en el que el propio Casti afirma lo siguiente:

"En particular, mis argumentos aquí están dirigidos a mostrar que existen algunas conexiones muy interesantes entre la noción de un atractor extraño, el fundamento sobre el cual se sostiene la revolución del caos, y las ideas de Gödel, Turing y, más recientemente, Chaitin, relacionadas con la verdad y la demostración. Mi afirmación básica es que existe una cadena de conexión directa que vincula la existencia de atractores extraños, los resultados de Chaitin sobre la complejidad algorítmica y el

Teorema de la Incompletitud de Gödel, y que un lógico o científico de la computación lo suficientemente perspicaz podría haber terminado siendo el padre del caos, al igual que el meteorólogo Edward Lorenz.”

En el mismo texto, Casti llega a afirmar que la dinámica, la lógica, la computación y la complejidad son diferentes caras de la misma moneda, e incluso sostiene que, en cierto modo, el teorema de Gödel se deriva de la existencia de atractores caóticos (Casti, 2018). Para apoyar su argumentación, Casti ofrece la siguiente tabla conectando los conceptos propios del estudio de sistemas formales con el estudio de sistemas dinámicos:

Sistema formal	**Sistema dinámico**
Alfabeto de símbolos	Espacio de estados
Cadena de símbolos	Estado
Gramática	Ligadura
Axiomas	Condición inicial
Reglas de inferencia	Campo vectorial
Secuencia de demostración	Trayectoria
Teorema	Atractor

Cuadro 2: Comparación entre un sistema formal y un sistema dinámico, extraída de (Casti, 2018) (traducción propia).

Aunque no lo desarrolla explícitamente, en base a su texto cabe formular la analogía que traza Casti como sigue. De la misma manera que un sistema dinámico toma como entrada un conjunto de números (condiciones iniciales), un sistema formal toma como entrada un conjunto de axiomas. Este estado inicial evoluciona según las reglas del sistema dinámico, o según las reglas de inferencia del sistema formal. El proceso finaliza al llegar a un atractor en el caso de los sistemas dinámicos y al llegar a un teorema en el caso de los sistemas formales. En su trabajo, Casti llega a afirmar que los teoremas de un sistema formal, el output de una máquina de Turing universal y el atractor de un sistema dinámico son completamente equivalentes y es posible “traducir fielmente entre cualquiera de ellos” (Casti, 2018).

No obstante, y a pesar del entusiasmo expresado por Casti en su texto divulgativo, estas identificaciones distan de ser triviales y es preciso ir con cuidado al moverse de un lado a otro de las fronteras interdisciplinares. Por ejemplo, tal y como vimos en el Cuadro 1, el espacio de estados o de fases de muchos sistemas dinámicos tiene la cardinalidad del continuo. De este modo, tanto las condiciones iniciales como los atractores de un sistema dinámico no pueden en general ser expresados utilizando la numeración de Gödel. Es más, los atractores caóticos, al ser fractales, están compuestos por un infinito no numerable de puntos, como se ha mencionado con el ejemplo del conjunto de Cantor en la Sec. 6.2. Otro aspecto criticable de este paralelismo es que en los sistemas dinámicos en realidad no se alcanzan nunca los atractores. En rigor, las trayectorias de los sistemas dinámicos se acercan tanto como se quiera a sus atractores, pero sin llegar nunca a alcanzarlos. Si se eligieran unas condiciones iniciales pertenecientes a un atractor, el sistema permanecería en dicho atractor, de la misma manera que si el péndulo magnético empieza encima de uno de los imanes no se mueve a ningún sitio. Aunque puede haber atractores más complicados que un punto fijo, como atractores periódicos o caóticos, en cierto modo un sistema dinámico que se encuentra en un atractor no evoluciona, ya que se encuentra todo el rato en el mismo atractor. Sin embargo, los teoremas juegan un papel diferente en los sistemas formales. A través de las reglas de inferencia sí que llegamos a alcanzar dichos teoremas, no nos acercamos asintóticamente a ellos. Además, los teoremas pueden ser utilizados como puntos de partida para posteriores deducciones aplicando las reglas de inferencia, a diferencia de lo que ocurre con los atractores, en los que la dinámica no evoluciona hacia nuevos atractores. Quizá esto último pueda estar relacionado con que las leyes que hacen evolucionar al sistema dinámico son siempre las mismas, mientras que las reglas de inferencia que aplicamos para pasar de un teorema a otro son en general distintas y el orden en que se aplican también varía.

A pesar de las imprecisiones del texto de Casti, es indudable que contiene intuiciones y preguntas interesantes que merece la pena explorar más a fondo. En las siguientes secciones abordaremos algunas de ellas apoyándonos en la literatura existente.

7.2. Indecibilidad e incompletitud en sistemas dinámicos

Para empezar a explorar las conexiones entre caos y teoremas de limitación, podemos plantearnos si existen preguntas indecidibles en los sistemas dinámicos. Los trabajos de Cristopher Moore (Moore, 1990, 1991), investigador a caballo entre la física y la computación y afiliado al instituto de Santa Fe, demuestran que en efecto es posible construir sistemas dinámicos con propiedades indecidibles. En concreto, Moore propone un sistema dinámico que puede interpretarse como un billar clásico en el que una partícula rebota, parecido al descrito en la Fig. 2b, y demuestra que no hay algoritmos que puedan calcular sus cuencas de atracción, ni tampoco el conjunto de órbitas periódicas, ni decidir si la dinámica asintótica es caótica, ni ninguna otra característica de interés. Aunque es perfectamente posible calcular las trayectorias a tiempos finitos, es imposible saber lo que ocurrirá asintóticamente (a tiempo infinito) con la dinámica de los sistemas de Moore. Esto es análogo a lo que ocurre con el problema de la parada: tenemos capacidad para calcular cada paso que realiza una máquina de Turing, pero no existe un algoritmo que nos permita decidir si dicho programa parará asintóticamente o no. En cierto sentido, esto supone un grado mayor de incertidumbre que el propio caos, puesto que como el mismo Moore expone, puede pensarse en la computación de un punto de una cuenca de atracción como la demostración de un teorema arbitrario[11]. No obstante, también conviene remarcar que la indecibilidad hace referencia a una incertidumbre asintótica, mientras que el caos hace referencia a un tipo de incertidumbre que afecta en cada instante a la evolución del sistema. De hecho, la sensibilidad a las perturbaciones de los sistemas puramente caóticos es mayor que la de los sistemas que mezclan caos y periodicidad como el de Moore. Es decir, para tiempos cortos, los sistemas de Moore pueden considerarse más predecibles que los sistemas puramente caóticos.

Poco después de los trabajos de Moore, dos lógicos matemáticos colaboradores de Chaitin, Newton C.A. Da Costa y Francisco A. Doria, exploraron la cuestión más básica aún de si existe un método general para comprobar que un sistema dinámico presenta caos. Puede resultar impactante descubrir que la respuesta que dan da Costa y Doria es negativa (Da Costa & Doria, 1991b). Para ser más precisos, demuestran que no existe un algoritmo general para probar que un sistema hamiltoniano sea integrable por cuadraturas, ni que un flujo tenga herradura de Smale, o que sea ergódico, o que sea un flujo de Bernoulli, aunque afirman que la indecibilidad del caos es independiente del método de caracterización escogido (Chaitin et al., 2012). Da Costa y Doria van incluso un paso más allá y demuestran lo que llaman el teorema de Gödel en mecánica clásica (Da Costa & Doria, 1991b). Es decir, no solamente demuestran que el caos es indecidible, sino que también demuestran que, asumiendo que la aritmética de Peano es consistente, entonces existen sistemas que son caóticos pero que tal cosa no puede demostrarse.

Conviene recordar que estos resultados no significan que sea imposible demostrar que un sistema dinámico sea caótico, de igual modo que la indecibilidad que aparece en el problema de la parada no significa que sea imposible demostrar que un algoritmo se detiene al cabo de un número finito de pasos. De hecho, existen pruebas rigurosas de la existencia de caos en diferentes sistemas dinámicos como el billar de Sinai que mostrábamos en la Fig. 2b. No obstante, lo que no existe ni existirá jamás, es un método general para separar los sistemas caóticos de los que no lo son. Como apunta Moore (Moore, 1990), estos resultados pueden interpretarse a la luz del teorema de Rice, que *grosso modo* dice que cualquier propiedad semántica no trivial[12] es indecidible. De hecho, el teorema de Rice se ha aplicado en diversos sistemas dinámicos como los autómatas celulares (Guillon & Richard, 2010; Kari, 1994).

7.3. Caos para computar

Los resultados expuestos en la sección anterior apuntan a que es posible estudiar los sistemas dinámicos empleando herramientas y resultados propios de la computación.

[11]Moore en su artículo de 1990 habla de la demostración del último teorema de Fermat, que fue demostrado pocos años después.

[12]Una propiedad semántica es aquella que pregunta sobre el comportamiento del programa, a diferencia de una propiedad sintáctica que se refiere a cuestiones como ¿posee algún bucle el programa? Que sea no trivial significa que no es siempre verdadera o siempre falsa.

Al considerar los sistemas dinámicos como sistemas de computación, podemos analizar el papel que juega el caos en la capacidad de computación de dichos sistemas. Cuesta imaginar que un sistema lineal, como un oscilador armónico, pueda utilizarse para computar o que pueda tener propiedades indecidibles, pero tampoco resulta evidente cómo el caos puede contribuir a aumentar la capacidad computacional de un sistema. Un posible camino para relacionar la capacidad computacional con la dinámica consiste en buscar los requisitos mínimos que ha de tener un sistema dinámico para realizar ciertas tareas de computación. Este análisis también permite realizar una conexión inmediata con respecto a los teoremas de limitación, ya que los límites propios de algunos sistemas de computación aparecerán inevitablemente en aquellos sistemas dinámicos que los emulen.

Hoy en día, todo tipo de aplicaciones emplean sistemas dinámicos no lineales como sistemas de computación. De hecho, la revolución de la inteligencia artificial se cimienta sobre redes de sistemas dinámicos no lineales acoplados. Estas redes son a su vez sistemas dinámicos de muy alta dimensión y fuertemente no lineales, y poseen unas capacidades computacionales extraordinarias. No obstante, otras redes más sencillas, como un conjunto de mapas logísticos acoplados (como los de la Ec. 1), también son capaces de llevar a cabo tareas de computación tales como reproducir puertas lógicas, almacenar números e incluso realizar operaciones aritméticas (Sinha & Ditto, 1998). Para conseguir transformar estos sistemas dinámicos en sistemas de computación, a menudo se utiliza la aparición de órbitas periódicas para diferentes valores de los parámetros, cosa que no sería posible conseguir con un sistema aleatorio. Así, la no linealidad y el determinismo son requisitos fundamentales para estos esquemas de computación (Prusha & Lindner, 1999).

También es un hecho ampliamente conocido que algunos autómatas celulares, como el juego de la vida (Grey, 2016; Rendell, 2002) o las famosas reglas 110, 124, 137 y 193 de Wolfram (Chua et al., 2004; Cook et al., 2004), tienen un poder de computación equivalente al de las máquinas de Turing universales, y por tanto son capaces de simularse a sí mismos, tal y como se ilustra en la Fig. 5a. Sin embargo, y a pesar de la innegable utilidad de los autómatas celulares, existen algunos problemas cuando se trata de relacionar los tipos de dinámicas existentes en los autómatas celulares con los tipos de dinámicas descritos en la Sec. 6.2. El propio Casti estableció una relación entre autómatas celulares y flujos (Casti, 2018) que ha sido criticada por otros autores (Prokopenko et al., 2019). Estas conexiones entre autómatas celulares y dinámica caótica llevaron a algunos investigadores a apuntar que la computación universal era propia del llamado eje del caos, una situación cercana al caos pero que no es tal. No obstante, este punto también ha sido criticado y existen trabajos que demuestran que la dinámica caótica (no solamente la dinámica en el eje del caos) puede dar lugar a computación universal (Prokopenko et al., 2019). Además, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, los autómatas celulares son sistemas peculiares y su conexión con la física no es tan evidente como la que puedan tener otros sistemas dinámicos como los flujos o los mapas. Por ello, quizá resulte más interesante averiguar que algunos sistemas dinámicos sencillos y de baja dimensión, como flujos tridimensionales o mapas bidimensionales, son también capaces de computación universal (Branicky, 1995).

Una de las lecciones fundamentales de la teoría del caos es que sistemas sencillos en su formulación (e.g. el mapa logístico) pueden dar lugar a dinámicas muy complejas. Esta idea parece encontrar su equivalente en términos de computación, ya que sistemas dinámicos sencillos son capaces de actuar como máquinas de Turing universales. En concreto, es posible demostrar que mapas 2D y flujos 3D pueden emplearse como máquinas de Turing universales (Bournez & Campagnolo, 2008). En cierto modo, estos sistemas dinámicos son en realidad más potentes que una máquina de Turing, en cuanto a que tienen un estado de espacios continuo. No obstante, se suele discretizar reinterpretando el valor de las variables dinámicas, de modo que por ejemplo si superan cierto umbral se traducen por 1 y de lo contrario se traducen por 0. En realidad, esta manera de proceder se parece mucho a cómo se simulan estos sistemas numéricamente debido a la capacidad finita de los ordenadores en la práctica. Utilizando esta interpretación, los sistemas dinámicos se pueden construir de tal modo que el comportamiento dinámico de sus variables emule puertas lógicas y así construir cualquier máquina de Turing. Finalmente la evolución del sistema coincidirá con las iteraciones de dicha máquina de Turing.

Siguiendo esta línea de razonamiento reduccionista, cabe preguntarse hasta qué punto es posible simplificar la dinámica y seguir obteniendo sistemas de computación Turing completos (equivalentes a máquinas de Turing universales). En ese sentido, es interesante observar que la dinámica simbólica de los sistemas caóticos, como la descrita por el desplazamiento de Bernoulli, puede demostrarse equivalente a las máquinas de estado finito, una versión menos potente computacionalmente de las máquinas de Turing, tal y como se muestra en el diagrama de la Fig. 1b. Por un lado, la dinámica simbólica supone una simplificación con respecto a la dinámica del sistema caótico original. Al discretizar el espacio de fases, las distancias entre las trayectorias dejan de ser relevantes, de tal modo que solamente importa la topología. Esta metodología fue empleada por autores como Smale y Sinai para probar rigurosamente propiedades de los sistemas caóticos. Por otro lado, una máquina de estado finito puede entenderse como una máquina de Turing con restricciones, en concreto que su cabezal solo pueda moverse en una dirección y que solamente pueda realizar la operación de leer la cinta (pero no puede escribir sobre ella). Resulta curioso que estas limitaciones aparentemente tan diferentes puedan estar relacionadas.

7.4. Caos en lógica y computación

En las secciones precedentes hemos explorado los sistemas dinámicos desde el punto de vista de los sistemas formales y la computación, prestando especial atención a los temas relacionados con la indecibilidad y la incompletitud. Ahora es el turno de intercambiar los papeles y estudiar la lógica y los sistemas de computación utilizando las herramientas propias de la dinámica no lineal y, en particular, los efectos del caos.

Algunos de los trabajos más sugerentes en este sentido son los llevados a cabo por Kunihiko Kaneko y sus colaboradores (Saito & Kaneko, 1998, 2001). Kaneko explora la idea de considerar una máquina de Turing como un sistema dinámico, para tratar de estudiar la geometría de la indecibilidad mediante cuencas de atracción. En efecto, la indecibilidad que vimos en la Sec. 5.3 surge de preguntarse si un determinado sistema de computación se detendrá o no en función de la entrada proporcionada. Esta dicotomía recuerda a muchas situaciones en dinámica no lineal, tales como decidir en cuál de dos posibles atractores terminará un sistema dinámico en función de sus condiciones iniciales. Tal y como vimos en la Sec. 6.2, una de las señas de identidad del caos transitorio es la presencia de cuencas de atracción fractales. La sensibilidad a las condiciones iniciales se manifiesta en estos casos en la forma de fronteras fractales que dividen los posibles destinos del sistema en el espacio de fases (Daza et al., 2024). Lo que busca Kaneko precisamente es ver si las cuencas de atracción del problema de la parada poseen propiedades fractales.

De entrada, hay un obstáculo inevitable con el enfoque de Kaneko respecto a las cuencas de atracción. Si denominamos B a la cuenca de atracción de los programas que se detienen en un tiempo finito, y $\hat{B}$ a los que no se detienen nunca, nos encontramos que en principio podemos calcular los elementos que pertenecen a B, pero no los que pertenecen a $\hat{B}$. Esta es precisamente la esencia de la indecibilidad del problema de la parada. No obstante, situaciones similares ocurren a menudo en el estudio de sistemas dinámicos no lineales, en los que nunca podemos garantizar completamente haber llegado a un atractor determinado o haber descubierto todos los posibles atractores del sistema (Dudkowski et al., 2016). Lo que propone Kaneko es realizar un estudio numérico del conjunto de programas que se paran y ver cómo dicho conjunto varía al aumentar el tiempo máximo que se permite correr al programa. El conjunto de programas que nunca paran se supone que será el complementario del anterior, aunque en rigor solo puede estudiarse el conjunto de los que sí paran. Quizá algunos matemáticos consideren el método poco riguroso, pero lo cierto es que proporciona información notable, como veremos más adelante.

La segunda dificultad del enfoque de Kaneko es lo que el investigador japonés denomina el problema de la codificación. En su analogía, la cinta de entrada de la máquina de Turing vendría a ser la condición inicial del sistema dinámico. Para representar las cuencas de atracción en un plano, lo que hace es dividir la cinta en tres partes: una celda en la que se sitúa inicialmente el cabezal, y luego las partes a la izquierda y derecha de este, que Kaneko identifica respectivamente con las coordenadas x e y del plano. En esta transformación, x e y en principio podrían ser números naturales, pero Kaneko los identifica con números reales. En cualquier caso, nuevamente la situación es muy parecida a la que se da al realizar computaciones numéricas en la práctica, en las que los números reales son sustituidos por aproximaciones que puedan almacenarse en los ordenadores. Es decir, en teoría, x e y podrían ser números naturales, pero el proceso de computación de las cuencas de atracción que describe Kaneko es completamente análogo en la práctica al que se sigue en sistemas continuos, como el péndulo magnético, debido a las limitaciones computacionales. Una vez aceptada esta convención, el siguiente desafío consiste en decidir qué número en concreto corresponde a una cinta concreta. Por ejemplo, si tenemos un alfabeto con dos símbolos para la cinta de la máquina de Turing, podríamos asumir que el contenido de la cinta se corresponde con un cierto número real en su representación binaria. El problema es que existen diferentes formas en las que esta asignación se puede hacer en la práctica y conducen a resultados distintos. Es fácil ver que podríamos codificar todos los códigos en números únicamente en el intervalo $[0, 0{,}5]$ en lugar de en el intervalo $[0, 1]$, ya que ambos tienen la misma cardinalidad, o realizar alguna otra asignación no uniforme. Esto tiene importantes consecuencias, ya que esta elección puede modificar el valor de la dimensión fractal de las cuencas de atracción.

A priori, la arbitrariedad introducida por la codificación es problemática porque Kaneko justamente lo que busca es medir la dimensión del conjunto de parada de una máquina de Turing. Sin embargo, lo que ocurre es justo lo contrario: independientemente de la codificación elegida[13], el conjunto de parada para una máquina de Turing universal es tal que llena el espacio, como puede apreciarse en la Fig. 5b. De hecho, Kaneko sugiere que este hecho puede tomarse como definitorio para el conjunto de parada, ya que, por ejemplo, no ocurre así con las cuencas de atracción de los sistemas caóticos, cuya dimensión cambia según la codificación. Si nos paramos a analizar este resultado, casi resulta obvio, pues de lo contrario existirían codificaciones que nos permitirían mejorar nuestra capacidad predictiva (reducir la dimensión de la frontera del conjunto de parada) con respecto a un problema indecidible. No obstante, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, esta propiedad no resulta trivial. Kaneko aplica su misma metodología a un sistema que exhibe las denominadas *cuencas agujereadas* (Alexander et al., 1992), cuya frontera llena todo el espacio de un modo que recuerda a lo visto con el problema de la parada. Sin embargo, en este caso, el resultado es que la dimensión de estas cuencas sí que cambia al modificar la codificación.

Además de la dimensión fractal del conjunto de parada, Kaneko investiga los llamados tiempos de escape, es decir, el número de pasos de las trayectorias antes de poder

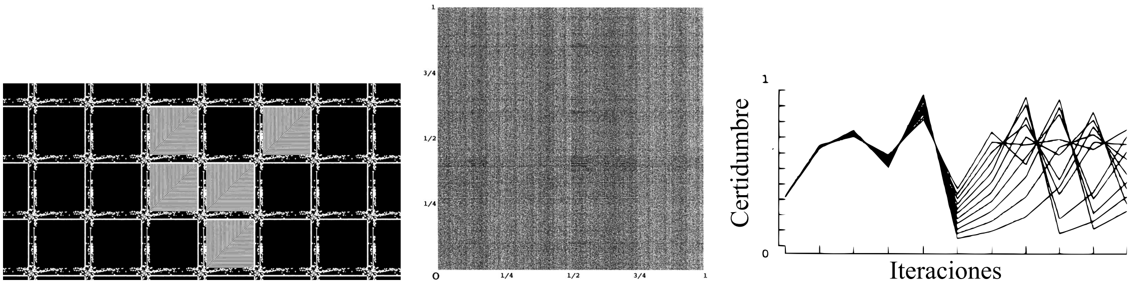
[13] Hay que puntualizar que Kaneko exige una serie de propiedades razonables a las codificaciones a considerar.

ser clasificadas como pertenecientes a una cuenca o, en este caso, pertenecientes al conjunto de parada de la máquina de Turing universal. Curiosamente, la distribución de estos tiempos sigue una tendencia tipo ley de potencias, parecida a la que ocurre en el caos hamiltoniano y diferente de la que ocurre en el caos disipativo[14], donde la tendencia es exponencial. La explicación de esta tendencia en el caso del caos hamiltoniano está relacionada con su espacio de estados mixto, en el que existe una gran zona caótica salpicada por regiones periódicas (islas KAM). Algo parecido ocurre en los sistemas dinámicos con propiedades indecidibles propuestos por Moore que mencionábamos antes (Moore, 1990), en los que las condiciones iniciales no divergen a un ritmo exponencial constante. Como explica Moore, esto puede interpretarse como que sus sistemas no están regidos por una ley de escalas como pueda ser el caso de sistemas con un espacio de estados completamente caótico. Esto apunta a que la indecibilidad en sistemas dinámicos no es consecuencia únicamente de la capacidad de estos de presentar caos. Más bien, pareciera que la indecibilidad necesitara de la coexistencia de diferentes tipos de comportamientos dinámicos, como por ejemplo que el sistema pueda alternar entre caos y periodicidad. En cualquier caso, este escenario mixto requiere que el sistema dinámico sea no lineal. Por otro lado, este razonamiento refuerza la hipótesis anteriormente mencionada de que resulta poco probable que un sistema dinámico lineal posea propiedades indecidibles, ya que la alternancia de comportamientos dinámicos resulta imposible en dichos sistemas.

Tras la propuesta de Kaneko y compañía de considerar las máquinas de Turing como sistemas dinámicos, es posible ir más allá y considerar la propia lógica como un sistema dinámico. Para ello, volvemos a recurrir a la paradoja del mentiroso. A ojos de un investigador en dinámica no lineal, la paradoja del mentiroso y su alternancia entre dos posibles estados de verdad recuerda a un movimiento periódico. La lógica clásica pone fin a este vaivén clasificando la paradoja como contradicción, pero las lógicas no clásicas ofrecen posibilidades mucho más ricas. Por ejemplo, utilizando lógica temporal es fácil capturar este comportamiento oscilatorio en los términos sugeridos anteriormente. Una vez abierta esta puerta, podemos preguntarnos si es posible encontrar el equivalente de las trayectorias caóticas en lógica.

Una opción natural para introducir el caos en lógica es utilizar la lógica difusa, tal y como hicieron Patrick Grim y Gary R. Mar (Grim, 1993; Grim et al., 1998; Mar & Grim, 1991). La paradoja del mentiroso alterna de forma binaria entre los estados absolutos de certidumbre de la lógica clásica: verdadero y falso. Sin embargo, en la lógica difusa existe todo un continuo de estados de certidumbre, que podríamos identificar con el intervalo $[0,1]$, donde 0 sería completamente falso y 1 completamente verdadero, y los números intermedios pueden interpretarse como *algo* cierto, *bastante* cierto, *muy* falso, etc. Grim y Mar estudian diferentes versiones de la paradoja del mentiroso, como el mentiroso modesto “Esta proposición es un poco falsa”

[14]En el caos disipativo no se conserva la energía, a diferencia de lo que suele ocurrir en el caos hamiltoniano.



(a) (b) (c)

Figura 5: (a) El juego de la vida, famoso autómata celular ideado por Conway, puede emplearse como máquina de Turing universal y simularse a sí mismo usando metapíxeles (píxeles hechos de conjuntos de píxeles) (Grey, 2016; Prokopenko et al., 2019). (b) Representación del conjunto de parada de una máquina de Turing universal en la que se observa que llena el espacio, adaptado de (Saito & Kaneko, 2001). (c) Sensibilidad a las condiciones iniciales al estudiar la certidumbre de oraciones del tipo "Esta proposición es tan verdadera como falsa" empleando lógica difusa, adaptado de (Grim, 1993).

o el mentiroso enfático "Esta proposición es muy falsa" y analizan su dinámica, es decir, analizan su grado de veracidad o certidumbre bajo diferentes supuestos. Grim demuestra que el mentiroso modesto produce oscilaciones decrecientes en el grado de certidumbre que acaban en un punto fijo, mientras que el mentiroso enfático conduce a oscilaciones crecientes hasta llegar a la amplitud total de 1 (alternancia entre verdad y falsedad absolutas). Por otro lado, la oración "Esta proposición es cierta", tiene el problema en lógica difusa de que su valor de certidumbre es arbitrario. Modificaciones como "Esta proposición es muy cierta" o "Esta proposición es poco cierta" conducen a puntos fijos de verdad y falsedad respectivamente. Pero lo realmente interesante de este enfoque, es que construcciones del tipo "Esta proposición es tan cierta como falsa"[15] o "El valor de verdad de esta proposición es muy diferente del de su negación"[16], pueden presentar órbitas caóticas en los estados de certidumbre. De hecho, este tipo de proposiciones presentan sensibilidad a las condiciones iniciales, en el sentido de que pequeñas diferencias en el grado de certidumbre inicial conducen a trayectorias cuya certidumbre diverge rápidamente, tal y como se muestra en la Fig. 5c. También es posible construir sistemas de varias proposiciones que se referencien entre sí, igual que se construyen mapas de varias dimensiones, y así reconstruir prácticamente cualquier sistema dinámico en términos semánticos.

Mar y Grim, haciendo uso de lo que ellos denominan semántica dinámica encuentran estructuras fractales por doquier. Por ejemplo, demuestran que el triángulo de Sierpinski, objeto fractal paradigmático representado en la Fig. 2a, aparece al estudiar las tautologías de las tablas de verdad de ciertas conectivas (Grim et al., 1998).

[15]Según Grim esta se corresponde con la aplicación tienda de campaña, una modificación del mapa logístico.

[16]Según Grim esta proposición se corresponde con el mapa logístico descrito por la Ec. 1.

Es más, de forma independiente a los resultados que ya hemos comentado de Doria y da Costa (Da Costa & Doria, 1991b), Mar y Grim proponen una demostración alternativa de la indecibilidad del caos. En su marco de lógica difusa, introducen la oración "Esta proposición tiene un valor semántico caótico o es tan verdadera como se estima que es falsa". En base a esta oración, construyen una prueba por contradicción en la que demuestran la imposibilidad de la existencia de un algoritmo que permita distinguir las proposiciones caóticas de las que no lo son. Bien es cierto que, para aceptar esta demostración, hay que asumir el marco teórico de lógica difusa que ellos proponen, pero en cualquier caso su resultado apoya la idea de que el caos es en sí mismo una propiedad indecidible.

7.5. Implicaciones para la filosofía, la ciencia y la tecnología

En las secciones anteriores hemos visto algunas interconexiones entre el caos, la lógica y la teoría de la computación. Quizá, sin embargo, hemos pasado por alto el factor común más evidente entre estas teorías, a saber, la reacción que producen en la mayoría de las personas y que no es otra que preguntar acerca de la utilidad de estas teorías abstractas. Si estas ideas por separado producen a menudo este efecto, cabe esperar que se produzca incluso con mayor intensidad al considerar su intersección. En este apartado, discutiremos algunas de las implicaciones de los resultados anteriores para la filosofía, la ciencia y la tecnología.

Empecemos por el plano filosófico. La aparición de caos en la semántica, como la propuesta por Mar y Grim (Grim et al., 1998), puede parecer un tanto artificial. Sin embargo, en ciertos ámbitos como la economía, la sociología o algunos problemas de la biología, resulta razonable atribuir grados de certidumbre relativos a ciertas informaciones. Además, es natural establecer redes relacionales entre diferentes agentes, ya que la veracidad de cierta afirmación puede depender en gran medida de la veracidad de otra, y así sucesivamente. La aparición de caos en modelos sencillos de teoría de juegos (Grim et al., 1998) es inquietante cuando consideramos la lógica difusa, ya que lleva a cuestionarse la validez de los razonamientos llevados a cabo en escenarios donde la lógica difusa parece adecuada (Medel-Ramírez et al., 2023). En ámbitos donde la información es a menudo parcial, como en sociología o en economía, quizá algunos planteamientos acierten de vez en cuando por puro azar debido a la acción del caos. Si bien es cierto que no todos los sistemas son caóticos, la realidad es que el caos es la norma y no la excepción dentro de la dinámica no lineal. Probablemente sería conveniente adoptar en estas disciplinas algunos enfoques propios de la dinámica no lineal e introducir nociones relacionadas con la incertidumbre y el caos. Tal y como afirman Mar y Grim, vivir sin ignorancia está más allá de nuestras posibilidades; lo mejor que podemos hacer es tratar de manejar nuestra inevitable ignorancia con cierto éxito (Grim et al., 1998).

Otra cuestión filosófico-científica que se ve afectada por los resultados aquí descritos es la del determinismo. El demonio de Laplace apuntaba a que, si las ecuaciones de la mecánica clásica eran correctas, la predicción solamente se encontraba limitada por cuestiones "prácticas". Por un lado, por la dificultad de determinar con suficiente precisión las condiciones iniciales y, por otro lado, por las complicaciones a la hora de realizar todos los cálculos correspondientes. Ambos escollos, sin embargo, parecieran abordables a través de esfuerzos técnicos. Como hemos visto, el caos demuestra que en muchos casos el más mínimo error numérico o experimental puede conducir a predicciones divergentes. No obstante, en ausencia de dichos errores y con poder de computación ilimitado, las predicciones en teoría deberían seguir siendo exactas. Sin embargo, los resultados introducidos en las secciones anteriores muestran la aparición de una incertidumbre insalvable en sistemas dinámicos debido a la presencia de indecibilidad. Es decir, incluso con perfecto conocimiento de las condiciones iniciales y con todo el poder computacional concebible, existen cuestiones fundamentales que son irresolubles en mecánica clásica. Este resultado contrasta con la tesis expresada por el célebre físico-matemático Roger Penrose de que no hay nada incomputable en física clásica (Penrose, 1989), tal y como se encargan de apuntar Doria y Da Costa (Da Costa & Doria, 1991a).

En el plano científico, los resultados recopilados en este trabajo son de gran importancia. En primer lugar, la presencia de indecibilidad en sistemas físicos es una cuestión de actualidad (Perales-Eceiza et al., 2024). Cabe recordar que la indecibilidad es propia de los modelos que utilizamos para representar los sistemas físicos, no de dichos sistemas en sí mismos. No obstante, la indecibilidad puede indicar la presencia de fenómenos físicos inexplorados. Algo semejante ocurre con el caos a nivel cuántico. La mecánica cuántica se rige por ecuaciones lineales, por lo que en principio no puede presentar caos. Sin embargo, en virtud del principio de correspondencia, debe haber un reflejo del caos a nivel cuántico. Esto se manifiesta en multitud de fenómenos que a veces se han reunido bajo el nombre de *caología* (Berry, 1987). Así pues, tanto el caos como la indecibilidad abren nuevas vías para la exploración de los sistemas físicos.

En cuanto a metodología científica, ambas áreas de conocimiento trajeron consecuencias revolucionarias. Por ejemplo, el caos demostró que en ocasiones debemos conformarnos con estudiar los sistemas dinámicos desde un punto de vista más cualitativo que cuantitativo. Muy a menudo nos vemos obligados a utilizar esquemas de integración numérica para resolver los sistemas dinámicos no lineales. Estos métodos, inevitablemente introducen un cierto error numérico, por lo que los resultados no se corresponden con la trayectoria "real" de nuestro sistema, es decir, con la órbita que inicialmente queríamos estudiar. Afortunadamente, para la mayoría de los casos, se cumplen los llamados teoremas de sombreado (Pilyugin, 2006). Estos teoremas demuestran que aunque la trayectoria simulada no sea la deseada inicialmente, existe otra trayectoria con condiciones iniciales muy próximas a las introducidas que se aproxima a la trayectoria simulada. En definitiva, no podemos confiar en simulaciones individuales en presencia de caos, pero podemos estudiar las propiedades del sistema en su conjunto. Así, las simulaciones con ordenador son algo cotidiano en el estudio de los sistemas no lineales y, de hecho, fue la revolución informática la que propició el florecimiento de la teoría del caos. En cuanto a los teoremas de limitación, a pesar de su importancia en el edificio de las matemáticas, no han cambiado fundamentalmente la manera de hacer matemáticas de la mayoría. En vista de la inevitable incertidumbre que vive en el corazón de las matemáticas, Chaitin propone convertir a las matemáticas en una ciencia más empírica (Chaitin, 2002). Así, si algunos resultados dependen de la veracidad de alguna conjetura por demostrar, cabe seguir haciendo matemáticas suponiendo esa conjetura como hipótesis, ya que quizá se trate de una de las verdades indemostrables con que amenazan los resultados de Gödel y compañía. En ambos casos, vemos que la incertidumbre que introducen el caos y los teoremas de limitación llevan a abogar por una cierta relajación con respecto a la excesiva rigidez que a veces los científicos se autoimponen llevando al extremo sus sistemas formales.

El estudio de estos formalismos tan abstractos también tiene consecuencias tecnológicas significativas. En muchas aplicaciones, la aleatoriedad no siempre es algo indeseable. Para diversas cuestiones rutinarias en ciencia y tecnología se hace necesario generar números aleatorios. En este sentido, conviene mencionar que la definición más extendida hoy en día con respecto a número aleatorio es referida a la compresión de la información. Informalmente, podemos decir que un número aleatorio es aquel cuya información no puede comprimirse (Chaitin, 2002; Chaitin et al., 2012). Es decir, la manera más corta de expresar un número aleatorio es escribiendo dicho número aleatorio. No obstante, mediante sistemas caóticos sencillos es posible generar números pseudo-aleatorios (Naik & Singh, 2024; Yu et al., 2019). Estos números no son aleatorios en el sentido de compresión de información, ya que proceden de un algoritmo que puede ser tan sencillo como la iteración del mapa logístico. Sin embargo, los números así generados poseen características prácticamente indistinguibles de las de un número aleatorio ideal, tales como una correlación casi nula entre ellos, o una entropía asociada que es máxima. Por tanto, podemos decir que los sistemas no lineales comprimen gran cantidad de información: una expresión sencilla puede dar origen a trayectorias sumamente aleatorias. Sería interesante ver si algunos de los esquemas dinámicos que hemos mencionado aquí, como el de Moore (Moore, 1991) o el de Kaneko (Saito & Kaneko, 2001), pueden utilizarse para mejorar aún más estos generadores pseudo-aleatorios gracias a la presencia de indecibilidad o si, por el contrario, estos sistemas son menos eficientes a la hora de producir números pseudo-aleatorios debido a esa mezcla de diferentes dinámicas que mencionábamos antes.

Finalmente, en plena revolución de la inteligencia artificial (I.A.) parece obligado hacer una breve mención a su relación con lo expuesto anteriormente. En cierto sentido el paradigma de la I.A. es completamente opuesto al de la máxima compresión de la información. Los modelos de aprendizaje automático poseen una cantidad desorbitada de parámetros que les permiten realizar predicciones realmente asombrosas. Sin embargo, uno de los mayores inconvenientes relacionados con la I.A. precisamente consiste en que no comprendemos bien sus mecanismos (Sanjuán, 2021). La I.A. es una especie de caja negra que funciona de manera extraordinaria para multitud de aplicaciones, pero que apenas nos permite profundizar en nuestro conocimiento. Es famosa la proposición atribuida a Von Neumann de que con cuatro parámetros es posible construir una función que pinte un elefante, y con cinco hacer que mueva la trompa (Mayer et al., 2010). La inteligencia artificial es capaz de realizar tareas increíbles, pero en sí misma no genera comprensión porque no comprime la información. De hecho, la I.A. a menudo se utiliza para generar contenido que promueve la desinformación (Aımeur et al., 2023). Los sistemas no lineales son especialmente eficientes en estas tareas, ya que, de la misma forma que comprimen mucha información en forma de sencillas ecuaciones, pueden utilizarse para generar mucha información mediante dichas ecuaciones sencillas. Así, aunque obviamente se utiliza I.A. en el contexto de la dinámica no lineal y de los sistemas formales de forma provechosa, pareciera que en el sentido anterior su espíritu fuera prácticamente antagónico.

8. Conclusiones

En este trabajo se han estudiado las conexiones entre caos y teoremas de limitación. A pesar de parecer dos áreas disjuntas, hemos comprobado que existen multitud de paralelismos, tanto históricos, como metodológicos y también de contenido. En general, y permitiéndonos la autorreferencia, podemos decir que la frontera entre caos e indecibilidad pareciera fractal por las muchas complejidades y recovecos que presenta. A continuación se van a enumerar ciertas conclusiones a fin de aclarar algunos puntos importantes de lo anteriormente expuesto:

1. Conviene tener claro que, si bien el caos y los teoremas de limitación suponen incertidumbre con respecto a los sistemas en los que se aplican, esta incertidumbre es de naturaleza muy diferente. El caos está relacionado con la sensibilidad a las condiciones iniciales y para manifestarse normalmente se asume alguna incertidumbre inicial, ya sea en la determinación de las condiciones iniciales, el esquema de integración numérica o de otra índole. La incertidumbre asociada a los teoremas de limitación surge incluso en ausencia de ninguna incertidumbre práctica.

2. El caos puede aparecer en sistemas de baja dimensión y formulación sencilla, aunque su dinámica sea complicada. Muchos de estos sistemas poseen una capacidad de computación equivalente a la de una máquina de Turing universal. Por tanto, no es de extrañar que aparezcan multitud de cuestiones indecidibles en su estudio.

3. El mismo caos es indecidible. De la misma manera que los matemáticos no saben a priori si podrán demostrar un teorema, los investigadores del caos desconocen si podrán determinar algunas de las características fundamentales de un sistema dinámico no lineal como su dinámica asintótica. Esto puede parecer algo negativo, pero en realidad asegura que el trabajo que desempeñan los investigadores de ambas disciplinas no podrá ser reemplazado jamás por un algoritmo.

4. Las herramientas del caos pueden utilizarse para estudiar sistemas de computación. Normalmente las demostraciones de las limitaciones de los sistemas de computación se realizan por reducción al absurdo. No obstante, la dinámica no lineal ofrece otra perspectiva más experimental y una gran caja de herramientas con la que investigar este tipo de sistemas.

5. Algunas lógicas no clásicas pueden presentar caos. Esto supone un punto importante a la hora de realizar predicciones en aquellos contextos donde este tipo de lógica se aplique, tales como la economía o la sociología.

6. El estudio del caos y los teoremas de limitación pudiera en ocasiones parecer un asunto de interés puramente académico, orientado a la incertidumbre en lugar

de a la creación de conocimiento científico. De hecho, el caos puede considerarse como una patología propia de la mecánica clásica, que en cierto modo se diluye en la mecánica cuántica. A su vez, la indecibilidad puede entenderse como un problema asociado a ciertos modelos, pero dicho problema desaparece en la realidad física. Sin embargo, el estudio de sistemas cuánticos cuya versión clásica es caótica permitió descubrir algunos fenómenos físicos impensables desde un punto de vista puramente cuántico. Del mismo modo, la presencia de indecibilidad en un modelo puede indicar la existencia de nuevos fenómenos físicos. Así pues, explorar los límites de nuestro conocimiento nos permite acceder a nuevo conocimiento.

Todo lo anterior apoya la tesis de que la colaboración entre dinámica no lineal, lógica y teoría de la computación puede ser tremendamente fructífera y de gran relevancia para el futuro de la ciencia y la filosofía.

Referencias

Aımeur, E., Amri, S., & Brassard, G. (2023). Fake news, disinformation and misinformation in social media: a review. *Social Network Analysis and Mining*, *13*(1), 30.

Alexander, J., Yorke, J. A., You, Z., & Kan, I. (1992). Riddled basins. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, *2*(04), 795-813.

Berry, M. V. (1987). Quantum chaology (the Bakerian lecture). En *A Half-Century of Physical Asymptotics and Other Diversions: Selected Works by Michael Berry* (pp. 307-322). World Scientific.

Boolos, G. S., Burgess, J. P., & Jeffrey, R. C. (2002). *Computability and logic.* Cambridge University Press.

Bournez, O., & Campagnolo, M. L. (2008). A survey on continuous time computations. En *New computational paradigms: Changing conceptions of what is computable* (pp. 383-423). Springer.

Branicky, M. S. (1995). Universal computation and other capabilities of hybrid and continuous dynamical systems. *Theoretical computer science*, *138*(1), 67-100.

Brown, R., & Chua, L. O. (1996). Clarifying chaos: Examples and counterexamples. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, *6*(02), 219-249.

Casti, J. L. (2018). Chaos, Gödel, and truth. En *Beyond Belief* (pp. 280-328). CRC Press.

Chaitin, G. J. (2002). *Conversations with a Mathematician: Math, Art, Science and the Limits of Reason.* Springer.

Chaitin, G. J., Da Costa, N. C. A., & Doria, F. A. (2012). *Gödel's Way.* CRC Press.

Chua, L. O., Sbitnev, V. I., & Yoon, S. (2004). a Nonlinear Dynamics Perspective of Wolfram's New Kind of Science Part Iii: Predicting the Unpredictable. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, *14*(11), 3689-3820.

Cook, M., et al. (2004). Universality in elementary cellular automata. *Complex systems*, *15*(1), 1-40.

Da Costa, N. C. A., & Doria, F. A. (1991a). Classical physics and Penrose's thesis. *Foundations of Physics Letters*, *4*, 363-373.

Da Costa, N. C. A., & Doria, F. A. (1991b). Undecidability and incompleteness in classical mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, *30*, 1041-1073.

Davis, M. (2013). *Computability and unsolvability.* Courier Corporation.

Daza, Á., Wagemakers, A., & Sanjuán, M. A. F. (2024). Multistability and unpredictability. *Physics Today*, *77*(11), 44-50.

Doxiadis, A. (1992). *El tío Petros y la conjetura de Goldbach.* Ediciones B.

Doxiadis, A., & Papadimitriou, C. H. (2009). *Logicomix: An Epic Search for Truth.* Bloomsbury USA.

Dudkowski, D., Jafari, S., Kapitaniak, T., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A., & Prasad, A. (2016). Hidden attractors in dynamical systems. *Physics Reports*, *637*, 1-50.

Gleick, J. (1987). *Caos: la creación de una ciencia.* Seix Barral.

Grebogi, C., McDonald, S. W., Ott, E., & Yorke, J. A. (1983). Final state sensitivity: an obstruction to predictability. *Physics Letters A*, *99*(9), 415-418.

Grey, C. (2016). The Rules for Rulers [Última consulta 7/11/2024]. https://www.youtube.com/watch?v=xP5-iIeKXE8%5C&t=4s

Grim, P. (1993). Self-reference and chaos in fuzzy logic. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, *1*(4), 237-253.

Grim, P., Mar, G., & Denis, P. S. (1998). *The philosophical computer: Exploratory essays in philosophical computer modeling* (Vol. 1). Mit Press.

Guillon, P., & Richard, G. (2010). Revisiting the rice theorem of cellular automata. *arXiv preprint arXiv:1001.0253*.

Hunt, B. R., & Ott, E. (2015). Defining chaos. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *25*(9).

Kari, J. (1994). Rice's theorem for the limit sets of cellular automata. *Theoretical computer science*, *127*(2), 229-254.

Leiber, T. (1998). On the impact of deterministic chaos on modern science and the philosophy of science: Implications for the philosophy of technology? *Society for Philosophy and Technology Quarterly Electronic Journal*, *4*(2), 93-110.

Li, T. Y., & Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, *82*(10), 985-992.

Lorenz, E. N. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, *20*(2), 130-141.

Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman; Company.

Mar, G., & Grim, P. (1991). Pattern and chaos: new images in the semantics of paradox. *Nous*, *25*(5), 659-693.

Mayer, J., Khairy, K., & Howard, J. (2010). Drawing an elephant with four complex parameters. *American Journal of Physics*, *78*(6), 648.

Medel-Ramírez, C., Medel-López, H., & Lara-Mérida, J. (2023). Navigating information and uncertainty: A fuzzy logic model to approach transparency, democracy and social wellbeing. *arXiv preprint arXiv:2311.14696*.

Moore, C. (1990). Unpredictability and undecidability in dynamical systems. *Physical Review Letters*, *64*(20), 2354.

Moore, C. (1991). Generalized shifts: unpredictability and undecidability in dynamical systems. *Nonlinearity*, *4*(2), 199.

Naik, R. B., & Singh, U. (2024). A review on applications of chaotic maps in pseudorandom number generators and encryption. *Annals of Data Science*, *11*(1), 25-50.

Penrose, R. (1989). *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*. Oxford University Press.

Perales-Eceiza, Á., Cubitt, T., Gu, M., Pérez-García, D., & Wolf, M. M. (2024). Undecidability in Physics: a Review. *arXiv preprint arXiv:2410.16532*.

Pilyugin, S. Y. (2006). *Shadowing in dynamical systems*. Springer.

Prokopenko, M., Harré, M., Lizier, J., Boschetti, F., Peppas, P., & Kauffman, S. (2019). Self-referential basis of undecidable dynamics: From the Liar paradox and the halting problem to the edge of chaos. *Physics of life reviews*, *31*, 134-156.

Prusha, B. S., & Lindner, J. F. (1999). Nonlinearity and computation: implementing logic as a nonlinear dynamical system. *Physics Letters A*, *263*(1-2), 105-111.

Rendell, P. (2002). Turing universality of the game of life. En *Collision-based computing* (pp. 513-539). Springer.

Saito, A., & Kaneko, K. (1998). Geometry of undecidable systems. *Progress of theoretical physics*, *99*(5), 885-890.

Saito, A., & Kaneko, K. (2001). Inaccessibility and undecidability in computation, geometry, and dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, *155*(1-2), 1-33.

Sander, E., & Yorke, J. A. (2015). The many facets of chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, *25*(04), 1530011.

Sanjuán, M. A. F. (2016). Dinámica no lineal, teoría del caos y sistemas complejos: una perspectiva histórica. *Rev R Acad Cienc Exact Fís Nat*, *109*(1-2), 107-126.

Sanjuán, M. A. F. (2021). Artificial intelligence, chaos, prediction and understanding in science. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, *31*(11), 2150173.

Sigmund, K. (2023). *El Sueño del Círculo de Viena: La historia de cómo unas mentes excepcionales se embarcaron en la búsqueda de una verdad racional mientras a su alrededor avanzaba la oscuridad y la sinrazón.* Shackleton Books.

Sinha, S., & Ditto, W. L. (1998). Dynamics based computation. *physical review Letters*, *81*(10), 2156.

Sipser, M. (2012). *Introduction to the Theory of Computation* (3rd). Cengage Learning.

Smith, P. (2013). *An introduction to Gödel's theorems*. Cambridge University Press.

Wikipedia contributors. (2024). Cantor set — Wikipedia, The Free Encyclopedia [Última consulta 22/06/2025]. https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Wolfram Media.

Yu, F., Li, L., Tang, Q., Cai, S., Song, Y., & Xu, Q. (2019). A survey on true random number generators based on chaos. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, *2019*(1), 2545123.