

Trazado de rayos a través de esferas

Bachillerato de excelencia 2025-2026

9 de diciembre de 2025

1 La ecuación de ondas

La ecuación de ondas expresa de manera matemática el fenómeno de la propagación a través de un medio en equilibrio, material o no, de una perturbación producida en algún punto del mismo. Esta ecuación aparece en multitud de situaciones en la Física, como la propagación del sonido o de la luz, y tiene siempre la misma forma. Si se llama ϕ a la magnitud que se propaga, entonces la ecuación de ondas se escribe en la forma

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano que, en coordenadas cartesianas, se escribe en la forma $\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$, y v es lo que se conoce como velocidad de fase. En el caso de las ondas electromagnéticas, como la luz, se obtiene que los campos eléctrico y magnético asociados a estas ondas se propagan de acuerdo con esta ecuación, con una velocidad de fase que toma el valor conocido como $c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dado que la obtención de la ecuación de ondas para las ondas electromagnéticas requiere la manipulación de las conocidas como ecuaciones de Maxwell[1], aquí la justificación de dicha ecuación se hará mediante un sistema más sencillo, como el mostrado en la figura 1. Este sistema es-

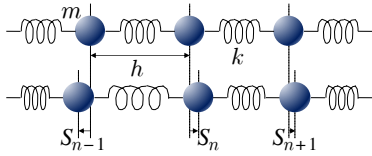


Figura 1: Recreación de la propagación de una onda en un sistema unidimensional.

tá formado por una cadena unidimensional de muelles, de constante recuperadora k , y de masas, de valor m , entre los muelles. En equilibrio, todos los muelles poseen la misma elongación y todas las masas son equidistantes respecto de la anterior y la posterior, siendo la distancia entre ellas de valor h . En un determinado instante, las masas pueden sacarse de la situación de equilibrio, de modo que cada una de ellas

esté desplazada respecto de dicha posición una cierta distancia. Llamaremos S_n a esas distancias, donde n enumera todas las masas del sistema. Como consecuencia, los muelles ejercen una fuerza recuperadora sobre cada masa dando lugar a una dinámica que, teniendo en cuenta la *ley de Hooke*[2], se expresa mediante la ecuación

$$m \frac{d^2 S_n}{dt^2} = -k(S_n - S_{n-1}) - k(S_n - S_{n+1}). \quad (2)$$

Esta expresión puede llevarse al límite para obtener la ecuación de ondas en un medio continuo, por ejemplo, una barra de material caracterizado por un módulo de elasticidad* de valor E . Dicho valor se define como el cociente entre la tensión T aplicada al material, definida como la fuerza F aplicada por unidad de sección transversal A del material, y la deformación relativa que ésta provoca, definida como el cociente entre la elongación s y la longitud del material h . De este modo, $E = \frac{F}{\frac{s}{h}} = \frac{Fh}{As}$. Si se recolocan los términos de esta definición, se tiene entonces que $F = \frac{EA}{h}s$, es decir, la ley de Hooke, donde $k = \frac{EA}{h}$. Adicionalmente, si se considera que la masa está repartida uniformemente en la barra, con una densidad de masa ρ , entonces una longitud h de la barra posee una masa $m = \rho Ah$.

Manipulando ahora (2), y llevándola al límite continuo haciendo $h \rightarrow 0$ y definiendo la elongación en forma local, es decir, $S_n = s(x)$, puede escribirse

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{m}{Ah} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = E \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h, t) - 2s(x, t) + s(x-h, t)}{h^2}, \quad (3)$$

donde se ha tenido en cuenta el resultado (A.2) que se muestra en el apéndice al final de este texto y se han cambiado las derivadas totales por derivadas parciales para tener en cuenta que la elongación local depende de la posición y del tiempo. De esta manera, se llega finalmente a que

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

que corresponde a la expresión de la ecuación de ondas con una velocidad de fase $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ para las ondas de deformación a lo largo de la barra.

*También conocido como módulo de Young.

Tal y como se discute en el apéndice A, una segunda derivada en el espacio y, en general, el operador laplaciano, lo que vienen es a dar cuenta de una diferencia entre el valor de la función en un punto y el valor medio de la función en el entorno de ese punto. Así, el sistema permanece en equilibrio cuando esa diferencia es nula ($\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$). Sin embargo, si el sistema es sacado del equilibrio, provocando que en alguno de esos puntos esa diferencia no sea nula, aparece una fuerza recuperadora que trata de llevar ese punto a su situación de equilibrio. El principio de acción y reacción hace que esa fuerza recuperadora saque del equilibrio a los puntos del entorno y, dado que el sistema no posee ningún mecanismo de disipación de energía, el resultado será la propagación de esa perturbación en la forma que se conoce como un frente de onda. Así, en el caso unidimensional, cualquier función en la forma $s(x \pm vt)^{\dagger}$ puede ser solución de la ecuación de ondas. Un caso particular de esta solución es aquél en el que la perturbación es de tipo armónico, es decir, una vibración de una única frecuencia f . En ese caso, todos los puntos del medio van a vibrar con esa frecuencia, pero con un desfase que va a depender de la distancia en longitudes de onda λ que haya desde ese punto a aquél donde se ha producido la perturbación. Frecuencia y longitud de onda están entonces relacionadas a través de la velocidad de fase v en la forma $v = \lambda f$. El estado de vibración de cada punto se expresa entonces a través de la expresión matemática $\cos(kx - \omega t + \varphi_0)^{\ddagger}$, donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de ondas y $\omega = 2\pi f$ la pulsación angular (o, simplemente, frecuencia). φ_0 es simplemente un término de fase asociado al estado inicial del sistema, y es, en muchos casos, un valor irrelevante. Así se habla de frentes de onda al conjunto de puntos que se encuentran en el mismo estado de vibración, típicamente un máximo, es decir, $kx - \omega t + \varphi_0 = 2\pi n$ con $n \in \mathbb{N}$. De este modo, cada punto del medio de propagación que ha sido alcanzado por un frente de ondas se comporta a su vez como una fuente secundaria de ondas, según el *principio de Huygens*[3], principio que se ilustra en la figura 2. Cada frente de ondas se obtiene así como la envolvente de los frentes secundarios producidos por las fuentes secundarias, y la dirección de propagación será la perpendicular en cada punto al frente de ondas que pase por ese punto.

Mediante este principio pueden justificarse, en particular, los comportamientos de la luz de carácter oscilatorio, como la reflexión y refracción en la frontera entre dos medios en

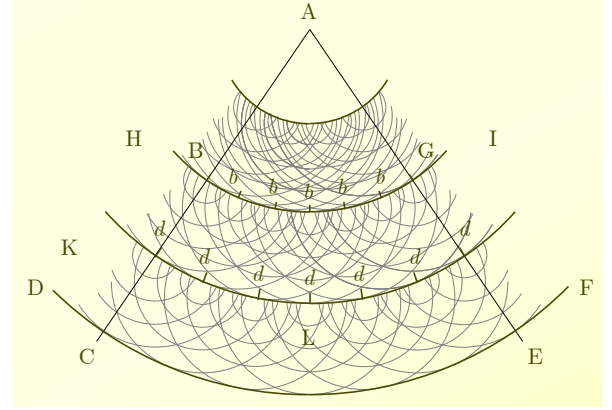


Figura 2: Recreación de un grabado de Christian Huygens ilustrando el principio que lleva su nombre. Cada punto del medio de propagación alcanzado por un frente se convierte a su vez en una fuente de ondas secundarias.

los que el índice de refracción n es distinto, índice que, para la luz, se define como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío c y la velocidad de propagación v en el medio, es decir, $n = \frac{c}{v} \geq 1$.

2 Leyes de Snell

§2.1 Leyes de Snell a partir del principio de Huygens

El cambio de dirección de un rayo al pasar de un medio a otro[4] puede deducirse de manera sencilla considerando la diferente velocidad de propagación de los frentes de onda de la luz en cada medio, de acuerdo con el principio de Huygens. La figura 3 muestra la construcción geométrica para el cálculo. Dado que el tiempo que tarda en recorrer el extremo superior del haz la distancia $d \sin \alpha$ marcada en el dibujo es el mismo tiempo que tarda su extremo inferior en recorrer la distancia $d \sin \alpha'$, se obtiene que $\frac{d \sin \alpha}{v} = \frac{d \sin \alpha'}{v'}$, siendo v y v' las respectivas velocidades de propagación en cada medio. Sin más que multiplicar por la velocidad de la luz en el vacío c en ambos lados de la igualdad, la relación anterior se convierte en la conocida como ley de Snell de la refracción, es decir,

$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha'. \quad (5)$$

En el caso de la reflexión, resulta inmediato obtener que el ángulo incidente coincide con el reflejado, ya que, al no haber cambio de medio, las velocidades de propagación del haz incidente y reflejado son las mismas. Ambos rayos son, por tanto, simétricos respecto de la dirección normal a la superficie de separación de los medios. Es importante notar que los rayos incidente, transmitido y reflejado están contenidos en el mismo plano, conocido como *plano de incidencia*.

[†]Basta tener en cuenta que, en este caso, la función es de la forma $s(u)$ con $u = x \pm vt$, de modo que $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v$. Se obtiene así que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = v^2 \frac{d^2 f}{du^2}$.

[‡]Siempre referido al caso unidimensional.

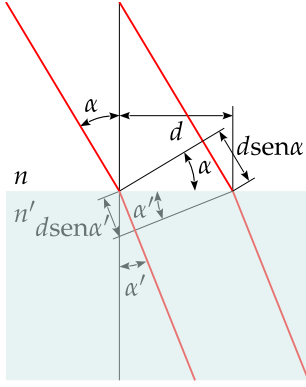


Figura 3: Construcción geométrica del fenómeno de la refracción. Un haz de luz pasa de un medio con índice de refracción n a otro cuyo índice es n' . Mediante esta construcción se establece la relación entre el ángulo de incidencia α y el de transmisión α' .

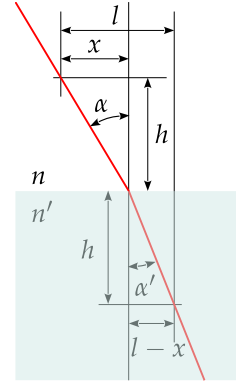


Figura 4: Trazado de un rayo desde entre dos puntos en el espacio situados cada uno en diferentes medios caracterizados por índices de refracción n y n' . El principio de Fermat permite determinar la relación entre el ángulo de incidencia α y el de transmisión α' .

§2.2 Ley de Snell de la refracción a partir del principio de Fermat

El principio de Fermat establece que el camino que sigue un rayo que parte de un punto hasta llegar a un segundo punto es el que minimiza el camino óptico (tiempo) entre ambos. El camino óptico se calcula como la distancia recorrida por el rayo multiplicado por el índice de refracción del medio. Sobre la figura 4 puede verse el resultado de aplicar este principio cuando un rayo atraviesa la superficie de separación de dos medios con índices de refracción distintos n y n' . Sin pérdida de generalidad, se pueden considerar dos puntos separados una distancia l en horizontal y una altura $2h$ en vertical, cada uno dentro de un medio distinto. El rayo trazado atraviesa la interfaz entre los dos medios en una posición, en principio arbitraria, a una distancia x en horizontal y h en vertical del punto inicial. El camino óptico seguido por este rayo viene dado por el valor $\tau(x)$:

$$\tau(x) = n\sqrt{x^2 + h^2} + n'\sqrt{(l-x)^2 + h^2}. \quad (6)$$

El camino se hace mínimo para un cierto x tal que $\frac{d\tau}{dx} = 0$, por lo tanto, si

$$\tau'(x) = n \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} - n' \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + h^2}} = 0, \quad (7)$$

y dado que $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$ y $\sin \alpha' = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + h^2}}$, entonces se vuelve a obtener de nuevo $n \sin \alpha = n' \sin \alpha'$.

Con este principio, Fermat puede considerarse como pionero a la hora de plantear que la Naturaleza obedece algún tipo de principio de optimización.

3 Transmisión de rayos a través de una esfera

En primer lugar, se examina la transmisión de un rayo a través de una esfera, mostrada en la figura 5. En este caso, el punto de entrada del rayo en la esfera se encuentra a una altura z respecto de su eje, es decir, el llamado parámetro de impacto[5], el punto de salida del rayo transmitido a través de la esfera se encuentra a una altura $z' = R \sin \theta$, siendo R el radio de la esfera. El ángulo θ queda determinado teniendo en cuenta que el rayo a través de la esfera dibuja una cuerda que define un ángulo isósceles, siendo el ángulo opuesto a dicha cuerda igual a $\pi - 2\alpha'$. De este modo, $\alpha + \pi - 2\alpha' + \theta = \pi$ y, entonces, $\theta = 2\alpha' - \alpha$. Adicionalmente, el ángulo γ que determina la dirección del rayo transmitido puede obtenerse considerando la igualdad $\theta + \pi - \alpha + \gamma = \pi$, luego $\gamma = \alpha - \theta = 2(\alpha - \alpha')$. Otro cálculo que puede hacerse es la distancia respecto del centro de la esfera a la que el rayo transmitido cruza el eje de ésta, es decir, la distancia $x = R \cos \theta + \frac{z'}{\tan \gamma}$. Dicha distancia se obtiene como

$$x = R \left[\cos(2\alpha' - \alpha) + \frac{\sin(2\alpha' - \alpha)}{\tan 2(\alpha - \alpha')} \right]. \quad (8)$$

Haciendo uso de la ley de Snell, los ángulos α y α' se relacionan en la forma $\sin \alpha = n \sin \alpha'$, siendo n el índice de refracción del material de la esfera. De este modo, $\alpha = \arcsin \frac{z}{nR}$ y $\alpha' = \arcsin \frac{z'}{nR}$ lo cual permite relacionar la distancia x con el parámetro de impacto z .

La dependencia con el parámetro de impacto z de la distancia x respecto del centro de la esfera a la que el rayo transmitido cruza el eje se presenta en la gráfica de la figura 6. Puede comprobarse que la distancia es máxima para los rayos que atraviesan más próximos al eje, y esta máxima distancia depende del índice de refracción del material de la esfera.

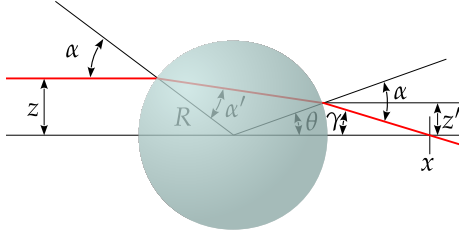


Figura 5: Trazado de rayos a través de la esfera. Se indica el ángulo γ que define la orientación del rayo transmitido y la posición x , referida al centro de la esfera, en la que el rayo transmitido cruza su eje.

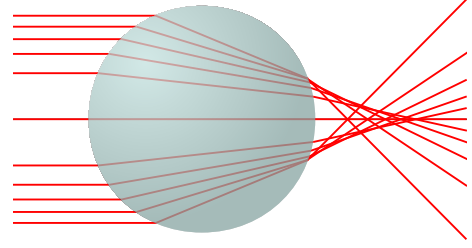


Figura 7: Trazado de rayos a través de la esfera: formación de una cáustica a partir de un haz de rayos paralelos. La distribución de rayos considerada corresponde a un haz cuya distribución de potencia a través del área transversal al haz es uniforme (ver texto).

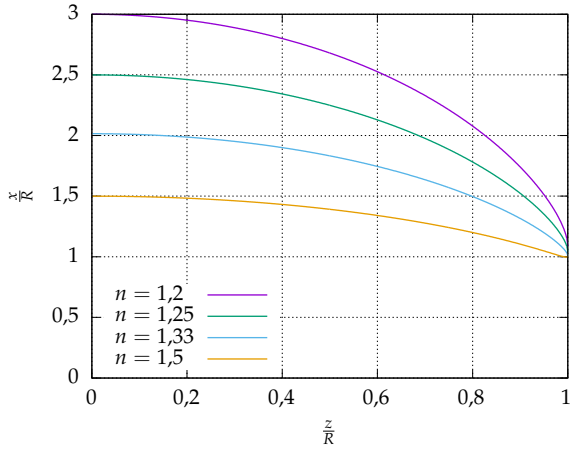


Figura 6: Dependencia con el parámetro de impacto z de la distancia x respecto del centro de la esfera a la que el rayo transmitido cruza el eje dada por (8), con el índice de refracción n del material de la esfera como parámetro. Debe notarse que para $n = 1,5$ el rayo no se transmite al exterior para $z \approx R$.

Si se considera ahora entonces un haz de rayos paralelos atravesando la esfera, estos tenderán a concentrarse formando lo que se conoce como una *cáustica* justo detrás de la esfera, como muestra la figura 7. Para determinar las dimensiones de esta cáustica, basta calcular la distancia x para rayos muy próximos al eje. Mediante las aproximaciones $\sin \varepsilon \approx \varepsilon \approx \tan \varepsilon$ y $\cos \varepsilon \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2$, para pequeños valores de ε , se obtiene que $x \approx \left[\frac{n}{n-1} - \frac{z^2}{R^2} \left(\frac{2-n}{n} \right)^2 \right] \frac{R}{2}$ para $z \approx 0$. La distancia $\frac{n}{n-1} \frac{R}{2}$, de hecho, constituye la posición del foco en lo que se conoce como *aproximación paraxial* en la óptica geométrica.

El foco es el punto donde la potencia tiende a concentrarse si la esfera es iluminada de manera uniforme, como puede intuirse sobre la gráfica de la figura 6 y se refleja en la figura 7. Si la iluminación es uniforme, se obtiene que la potencia P de la luz se distribuye en el haz según la función $\frac{dP}{dz} = \frac{2P_0}{R^2} z$, siendo P_0 la potencia total, tal y como se demuestra en el apéndice C. Teniendo en cuenta la relación decreciente entre

x y z , si $dx = x'(z) dz$, entonces $\frac{dP}{dx} = -\frac{2P_0}{R^2} \frac{z}{x'(z)}$, distribución que se representa en la figura 8 para diferentes índices de refracción. Se comprueba cómo la distribución de potencia crece hacia el punto donde se sitúa el foco en cada caso, también conocido como la *focal*. En la gráfica de la figura 8, para los índices de refracción considerados $n = 1,2, 1,25, 1,33$ y $1,5$, las focales se sitúan en las posiciones $x = 3R, 2,5R, 2R$ y $1,5R$, respectivamente.

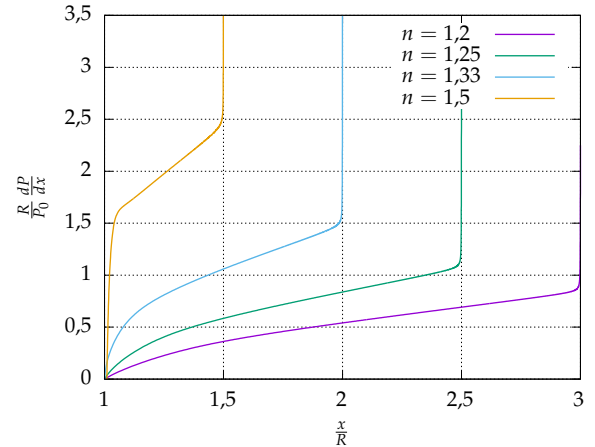


Figura 8: Distribución de la potencia en función de la distancia x respecto del centro de la esfera con el índice de refracción n del material de la esfera como parámetro. Puede comprobarse que la distribución es creciente con la distancia x , crecimiento que se agudiza en el punto focal.

4 Reflexión en el interior de una esfera

Los rayos trazados en el interior de la esfera, además de transmitirse hacia el exterior, como se ha visto en el apartado anterior, sufren una reflexión que los confina en el interior de la esfera hasta que alcanzan un nuevo punto de su superficie, como ilustra la figura 9. Es ahora la transmisión en estos nuevos puntos la que va a motivar el siguiente cálculo. En particular, interesa conocer el ángulo δ indicado en la figura,

y que determina la dirección de los rayos reflejados por el sistema respecto de la dirección de los rayos incidentes. Puede comprobarse en este caso la relación $\frac{1}{2}\delta + \alpha + \pi - 2\alpha' = \pi$, de modo que $\delta = 4\alpha' - 2\alpha$. En términos del parámetro de impacto z , el ángulo δ puede escribirse entonces como

$$\delta(z) = 4 \arcsin\left(\frac{z}{nR}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{z}{R}\right). \quad (9)$$

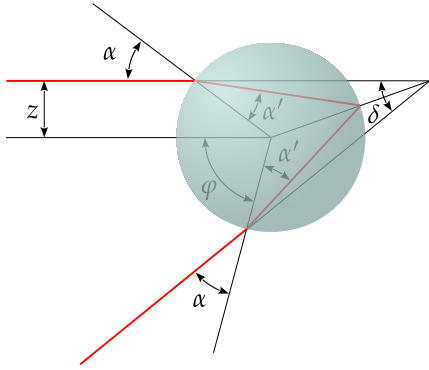


Figura 9: Trazado de rayos a través de la esfera para el caso de la primera reflexión interna. Se indica el ángulo δ que define la orientación del rayo reflejado. A modo de ayuda, también se indica el ángulo $\varphi = 4\alpha' - \alpha$ que especifica la orientación de la normal en el punto de la esfera donde el rayo se trasmite de nuevo al exterior tras la primera reflexión. El cálculo de este ángulo es sencillo sin más que tener en cuenta el resultado del Apéndice B

En la gráfica de la figura 10 se representa la dependencia de δ con el parámetro de impacto z . Puede comprobarse que el ángulo crece hasta alcanzar un máximo, a partir del que el ángulo disminuye bruscamente. El ángulo máximo puede obtenerse como $\left.\frac{d\delta}{dz}\right|_{\delta=\Delta} = 0$. De este modo, resulta

$$\Delta(n) = 4 \arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} - 2 \arcsin\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}. \quad (10)$$

La gráfica interior de la figura 10 muestra la dependencia de este ángulo máximo con el índice de refracción, estando en un valor cercano a 36° para un índice de refracción $n \approx 1,38$.

La expresión (10) permite, en particular, dibujar el trazado de rayos a través de la esfera para el caso de la primera reflexión en su interior. El trazado de rayos mencionado se muestra en la figura 11 donde, al igual que en la figura 7, se ha tenido en cuenta la distribución de potencia luminosa con el parámetro de impacto z de cada uno de los rayos. Puede comprobarse sobre este trazado una mayor concentración de rayos reflejados según la dirección del ángulo Δ obtenido en (10).

De nuevo, la concentración de rayos en la dirección dada por el ángulo Δ formará una cáustica. Esta cáustica que se produce, por ejemplo, al incidir la luz del sol sobre las gotas de lluvia en el aire, es la que se observa como el arco iris que

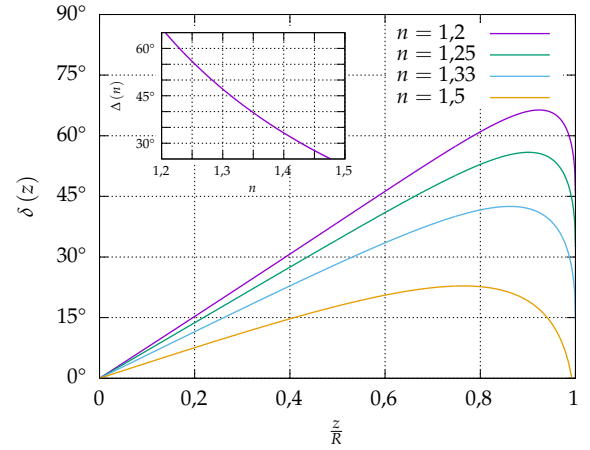


Figura 10: Dependencia del ángulo δ que forma el rayo reflejado con el rayo incidente tras la reflexión en el interior de la esfera en función del parámetro de impacto z del rayo incidente, según (9). La gráfica interior representa el máximo ángulo alcanzado Δ en función del índice de refracción n del medio, dada por (10).

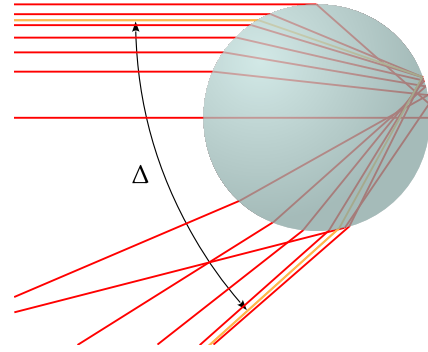


Figura 11: Trazado de rayos a través de la esfera para el caso de la primera reflexión interna. La distribución de rayos considerada corresponde a un haz cuya distribución de potencia a través del área transversal al haz es uniforme (ver texto). Se indica el ángulo Δ que corresponde al mayor ángulo de desvío entre el rayo incidente y el reflejado internamente en la esfera.

se conoce como primario, y es resultado de la dependencia del índice de refracción con la longitud de onda de la luz que se describe a continuación. Es importante notar que en el interior de una gota se pueden producir sucesivas reflexiones de rayos. Este efecto se aprecia en la imagen de la figura 12 en la que se aprecian las sucesivas reflexiones (hasta seis) en el interior de un recipiente de vidrio lleno de agua de la luz procedente de un puntero láser que incide sobre el recipiente.

5 Dependencia del índice de refracción con la longitud de onda de la luz.

Se da la circunstancia de que los materiales ofrecen una respuesta distinta que depende de la longitud de onda[6], lo

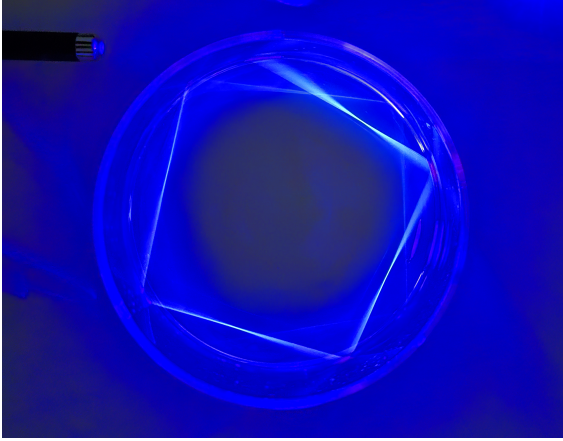


Figura 12: Fotografía de un rayo de luz procedente de un puntero láser en el interior de un recipiente de vidrio lleno de agua. Pueden apreciarse en la imagen hasta seis reflexiones internas.

que se refleja en una variación del índice de refracción para cada color. Una primera aproximación analítica a esta dependencia viene dada por lo que se conoce como fórmula de Cauchy, y que consiste en un desarrollo en serie de potencias de la inversa del cuadrado de la longitud de onda, en la forma

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (11)$$

Es importante notar que, en esta expresión, λ es la longitud de onda de la luz calculada en el vacío, y que para la luz visible varía entre los 380 nm para el violeta y los 750 nm del rojo. Se trata, por tanto, de una expresión empírica, de modo que los coeficientes que en ella aparecen se determinan de manera experimental. En el caso del agua a 20 °C, por ejemplo, se obtiene que $A = 1,322$, $B = 1,504 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$ y $C = 2,4 \cdot 10^{-28} \text{ m}^4$.

En la figura 13, se presenta de manera gráfica la aplicación de la fórmula de Cauchy en el caso particular mencionado del agua a 20 °C. Puede observarse cómo el índice de refracción decrece con la longitud de onda de manera que, para el espectro visible, varía desde un valor de aproximadamente 1,35 para el rojo hasta 1,44 para el violeta. Esta diferencia en índices de refracción para cada color es la que provoca, por lo tanto, la dispersión de la luz solar en los diferentes colores que forman el arco iris.

6 Composición espectral de la luz solar

La figura 14 presenta superpuestas diferentes gráficas. La gráfica en amarillo corresponde a la irradiancia espectral de la luz solar, donde se muestra cómo dicha luz es una distribución continua de longitudes de onda que van desde el ultravioleta extremo (de unas decenas de nanómetros) a

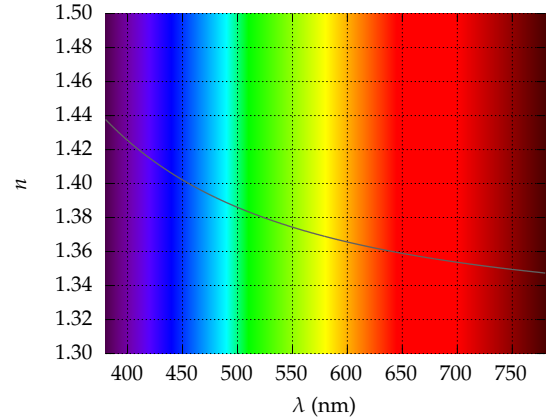


Figura 13: Dependencia del índice de refracción n con la longitud de onda de la luz en el vacío λ para el agua a 20°C, según la fórmula de Cauchy expresada en (11), y considerados los parámetros indicados en el texto. La curva se ha superpuesto sobre la gama de colores que corresponde a cada longitud de onda para facilitar relacionar cada color con el índice de refracción correspondiente.

longitudes casi en la banda del infrarrojo medio (3000 nm). De acuerdo con la teoría de Planck sobre la radiación del cuerpo negro[7], esta irradiancia puede ajustarse a la curva de emisión de un cuerpo a una temperatura alrededor de los 5500 K, es decir, la curva gris de la gráfica. Según la ley de desplazamiento de Wien[§], el máximo de la curva a esa temperatura se encuentra para una longitud de onda $\lambda_{max} \approx 527 \text{ nm}$, que corresponde al color verde. Finalmente, la curva en rojo presenta la irradiancia a nivel del mar. Esta curva es el resultado de descontar de la irradiancia sobre la exosfera el efecto de los diferentes mecanismos de dispersión y absorción que se producen por los gases de la atmósfera, fundamentalmente el vapor de agua. Estos mecanismos dan lugar a una distribución más o menos uniforme de colores en la composición de la luz solar visible. La mezcla de todos los colores se aprecia por el ojo humano como luz *blanca*.

7 Formación de los arcoiris

Cuando un haz de luz procedente del sol atraviesa una gota de agua, la primera reflexión en el interior de la gota provoca que cada color forme una cáustica según una dirección distinta. Estas direcciones vienen dadas por el valor Δ obtenido en (10), que, en el caso del agua, irían desde $\Delta_{violeta} \approx 29^\circ$ hasta $\Delta_{rojo} \approx 40^\circ$. La luz procedente de esa primera reflexión forma un cono como el que se recrea en la imagen de la figura 15. Puede apreciarse el tono blanquecino

[§]Esta ley permite estimar la longitud de onda λ_{max} del pico de la curva de irradiancia a una cierta temperatura T a partir de la aproximación $\lambda_{max} T \approx 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

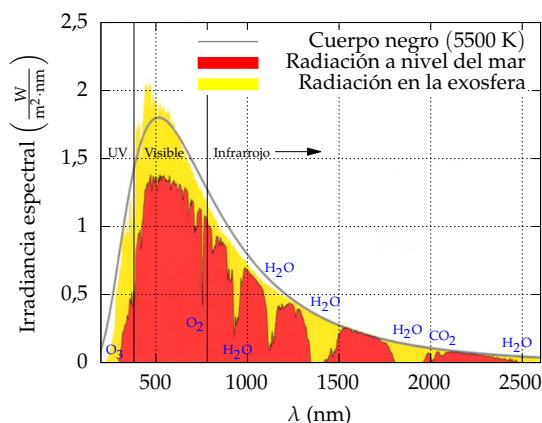


Figura 14: Irradiancia solar para cada longitud de onda. Tomando la temperatura del sol en el entorno de los 5500 K, puede comprobarse que la irradiancia medida en la exosfera coincide aproximadamente con el espectro de emisión del cuerpo negro a esa temperatura[8]. La absorción en la atmósfera por gases como el ozono (O_3), el oxígeno (O_2), el dióxido de carbono (CO_2) y el vapor de agua (H_2O) se refleja en diferentes cortes en la gráfica correspondiente a la irradiancia al nivel del mar. Imagen adaptada de [9].

de la luz en el interior del cono, pero también la iridiscencia justo en su borde. Esta iridiscencia se debe a las diferentes direcciones que toman las cáusticas de cada color. Teniendo en cuenta la mayor intensidad de la luz en las direcciones de las cáusticas, el color correspondiente a cada cáustica predomina sobre rayos de otros colores fuera de sus correspondientes cáusticas y, por tanto, mucho menos intensos. La superposición de esos rayos menos intensos son los que dan el mencionado tono blanquecino al interior del cono.

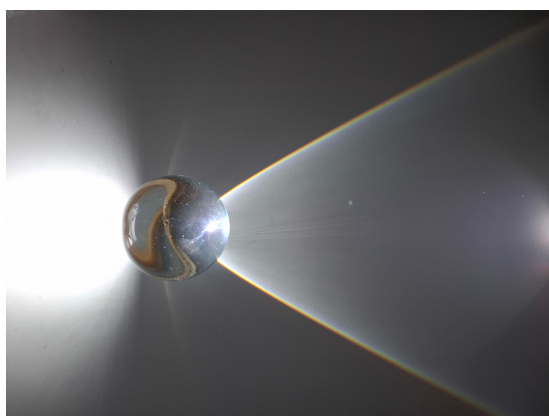


Figura 15: Primera reflexión de un haz de luz blanca en el interior de una esfera de cristal. Puede apreciarse la forma cónica del haz reflejado, fundamentalmente blanco, pero con una iridiscencia justo en el borde.

La proyección de este cono sobre una pantalla daría lugar a una forma circular, blanquecina en el centro, pero con la mencionada iridiscencia en el borde, de modo que el color rojo quedaría en la zona más exterior y el violeta en el in-

terior. Sería, por tanto, el resultado de generar una imagen de revolución a partir de la gama de colores de mostrada en el interior de la gráfica de la figura 16. Esta gama está construida por superposición, considerando la distribución de potencia en función del ángulo δ para todo el espectro de colores, la cual se muestra en la gráfica para distintos colores, considerando el correspondiente índice de refracción. Debe notarse en dicha gráfica como la potencia crece bruscamente hacia el ángulo correspondiente a la cáustica.

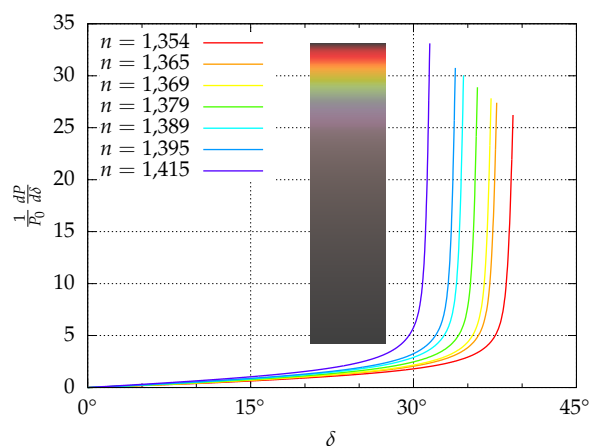


Figura 16: Distribución de intensidad de luz para diferentes colores tras la primera reflexión en función del ángulo de salida obtenida de acuerdo con (9) y la distribución de potencia del haz de luz blanca incidente. En el interior se muestra la gama de colores resultante de la superposición de las curvas de intensidad de cada color.

Por lo tanto, el arco iris principal, el más visible, es el resultado de esta primera reflexión en el interior de cada gota suspendida en la atmósfera. Es una apreciación subjetiva del observador, de modo que el centro del arco iris se sitúa sobre el eje que une la fuente de luz (el sol) y su cabeza. Según eleve la vista respecto de este eje, el observador verá el reflejo blanquecino del interior de los conos producidos por las gotas en su línea de visión, posteriormente la cáustica del color con menor ángulo $\Delta\mathbb{I}$, es decir, el violeta, a unos 30° y, a partir de ahí las demás cáusticas del resto de colores. Y, una vez superados los 40° , aproximadamente, el ojo no verá reflejada ninguna luz procedente de las gotas en esa línea de visión. Esto se muestra de manera esquemática en la figura 17. Si el observador mira a la gota 1, verá el reflejo blanquecino del interior del cono. Si mira la gota 2, verá el color de la cáustica formada a unos 34° , es decir, el color verde. Y, finalmente, de la gota 3, en la parte más alta, no recibirá reflejo ninguno. Esta banda oscura que se forma encima del arco iris primario recibe el nombre de *banda de Alejandro*¹¹.

¹¹ Mayor índice de refracción.

¹¹ Nombrada así por Alejandro de Afrodiasias, quien la describiera por primera vez hacia el año 200AC

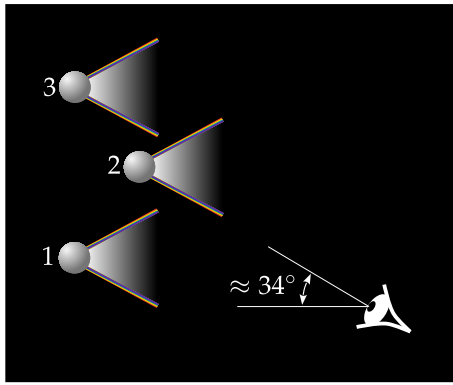


Figura 17: Esquema representativo de la percepción subjetiva del arco iris. Dependiendo de la altura de las gotas de agua, el observador verá un reflejo blanquecino para las gotas más bajas, una cáustica del color correspondiente al ángulo de la línea de visión si éste es de unos 34° o no recibirá luz reflejada de las gotas situadas más altas.

Como indica su nombre, la banda de Alejandro se corresponde con una zona oscura entre el arco iris primario y el llamado arco iris secundario, por encima del primario, y con el orden de colores invertido respecto de éste. De hecho, tal y como se mostraba en la figura 12, en el interior de una gota son posibles múltiples reflexiones. Los rayos transmitidos al exterior después de haberse reflejado varias veces en el interior de cada gota forman sucesivos arco iris, aunque cada vez más tenues.

8 Polarización y ángulo de Brewster

Dado el carácter de onda electromagnética de la luz, este tipo de ondas llevan asociados un campo eléctrico y un campo magnético en cada punto del espacio. Estos campos, de tipo vectorial, vibran en cada uno de estos puntos con la frecuencia de la onda. En el caso considerado, en el que se produce propagación libre a través de diferentes medios, las direcciones de estos campos son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. En particular, si el campo eléctrico vibra en todos los puntos atravesados por el rayo luminoso siempre con la misma orientación, se dice que la onda está linealmente polarizada^{**}. Se suelen considerar tres tipos de polarización para la luz: lineal, circular y elíptica. Salvo la actuación de dispositivos, conocidos como *polarizadores*, la luz generada por cualquier fuente está, en general, despolarizada. El uso de estos polarizadores proporciona entonces luz cuyos campos eléctrico y magnético toman direcciones que pueden describirse perfectamente en cada punto del espacio.

^{**}El campo magnético asociado a la onda vibrará en una tercera dirección, perpendicular tanto al campo eléctrico como a la dirección de propagación.

Ocurre que la reflexión de la luz en la superficie de separación de dos medios distintos puede dar lugar a que el haz reflejado quede linealmente polarizado. De este modo, el campo eléctrico de la luz reflejada se orienta dentro del plano que define la interfaz entre los dos medios, es decir, perpendicular al plano de incidencia. El mecanismo físico que lo explica puede entenderse cualitativamente a partir de la forma en que las cargas eléctricas de la estructura del medio responden a la componente del campo eléctrico de la luz en el plano de incidencia. El campo eléctrico de la luz que incide sobre la interfaz entre los dos medios acelera las cargas eléctricas en esta superficie, siendo la luz a su vez reemitida por dichas cargas, dando así lugar a los rayos reflejado y transmitido. El campo eléctrico asociado a estos dos rayos debe ser perpendicular a la dirección de propagación. Si se da la situación mostrada en la figura 18, la componente en el plano de polarización del campo eléctrico sólo puede propagarse con el rayo transmitido ya que posee la misma dirección que el rayo reflejado. Esto se debe a que ambos haces forman un ángulo recto. De este modo, el rayo reflejado sólo tiene componente del campo eléctrico normal al plano de incidencia y queda, por tanto, linealmente polarizado^{††}. Teniendo en cuenta las leyes de Snell, existe un ángulo de incidencia para el cual se cumple que los rayos reflejado y transmitido formen un ángulo recto. Este ángulo de incidencia recibe el nombre de *ángulo de Brewster*, por ser este físico escocés el descubridor de este fenómeno.

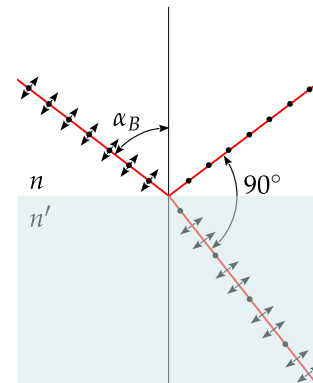


Figura 18: Reflexión y refracción en el caso de incidencia según el ángulo de Brewster (α_B). La componente en el plano de incidencia del rayo reflejado debe desaparecer para que sea compatible con la condición de que los campos sean perpendiculares a la dirección de propagación. Esta circunstancia se da cuando los rayos reflejado y transmitido forman un ángulo recto.

La demostración rigurosa de este condición se obtiene a través de las llamadas *ecuaciones de Fresnel* que, teniendo en cuenta la orientación de los campos, establecen las relacio-

^{††}El uso de polarizadores en cámaras fotográficas permite, por ejemplo, eliminar la luz reflejada en las superficies cuando se hace una fotografía.

nes entre las componentes de los campos eléctrico y magnético para los rayos incidente, reflejado y transmitido, y, por lo tanto, determinan la proporción entre la intensidad de los haces reflejado y transmitido en función del ángulo de incidencia y de los índices de refracción de los medios[10]. La condición que determina el ángulo de Brewster (α_B) es entonces la de que la componente en el plano de incidencia del campo eléctrico de la onda reflejada se anule, la cual viene dada por la expresión (que no se demostrará aquí) $n' \cos \alpha_B = n \cos \alpha'_B$, siendo α'_B el ángulo que forma el rayo transmitido para una incidencia según el ángulo de Brewster.

Esta condición es totalmente equivalente a la de que el ángulo reflejado y el transmitido formen un ángulo de 90° . Cuando el ángulo de incidencia coincide con el ángulo de Brewster α_B se tiene entonces la relación $\alpha_B + \frac{\pi}{2} + \alpha'_B = \pi$, es decir, $\alpha'_B = \frac{\pi}{2} - \alpha_B$ y, por tanto, $\sin \alpha'_B = \cos \alpha_B$. Por la ley de Snell, de lo anterior se deduce que $\frac{n^2}{n'^2} \sin^2 \alpha_B = \cos^2 \alpha_B$ y, de forma inmediata,

$$\alpha_B = \arctg \frac{n'}{n}. \quad (12)$$

En consecuencia, esta es la expresión que permite determinar α_B conocida la proporción entre los índices de refracción de los medios, donde n representa el índice de refracción para el rayo incidente (y reflejado) y n' el índice de refracción del medio para el rayo transmitido. Por ejemplo, en el caso de la reflexión de luz verde incidiendo desde el aire sobre la superficie del agua ($n' \approx 1,38$) se tiene que $\alpha_B \approx 54^\circ$. Si la incidencia es, sin embargo, al revés, es decir, desde el agua hacia el aire ($\frac{1}{n'} \approx 0,72$), entonces $\alpha_B \approx 36^\circ$. Este es el caso que va a ocupar ahora la siguiente discusión, es decir, la reflexión interna en el medio de índice de refracción n' . En la gráfica de la figura 19 presenta la dependencia de α_B con la relación entre los índices de refracción de los medios cuando la luz atraviesa la interfaz desde el medio de índice de refracción n' , por ejemplo, una gota de agua, hacia el medio de índice de refracción n , el aire, en este caso^{††}. La misma gráfica presenta también el ángulo α'_Δ , es decir, el ángulo de incidencia en el interior del medio cuando se produce la cáustica^{§§}. Se da la circunstancia de que ambos ángulos α_B y α'_Δ coinciden para una relación de índices de refracción $\frac{n}{n'} \approx 0,72$, es decir, para la cáustica del color verde en el caso de las gotas de agua. Esto significa que la luz procedente de la primera reflexión, y que da lugar al arco iris primario, está fuertemente polarizada. Esto puede comprobarse haciendo uso de un po-

larizador lineal, de modo que, según esté orientado éste, la luz del arco iris será visible o no a través del polarizador.

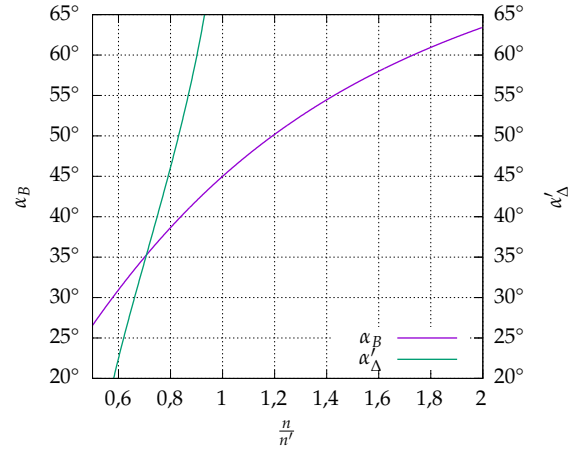


Figura 19: Ángulo de Brewster (α_B) en función de la relación de índices de refracción. Aquí se está considerando la reflexión interna en el medio de índice de refracción n' . En la misma gráfica se presenta el ángulo α'_Δ que marca la orientación del ángulo de incidencia en el interior del medio para el que se produce la cáustica.

9 Resultados experimentales

§9.1 Foco de un disco de material transparente

En este primer apartado se trata de obtener la posición de la focal de un disco de un material transparente, como es el metacrilato, de radio $R = 20$ cm. Para ello se ilumina el disco mediante una linterna y se comprueba cómo se forma una cáustica al otro lado del disco. Esto es lo que se muestra en la figura 20. De acuerdo con la discusión realizada en la sección 3, el foco de encuentra a una distancia del centro dada por la expresión $\frac{n}{n-1} \frac{R}{2}$. Medida esa distancia, puede estimarse el índice de refracción del medio. En este caso, la distancia del foco al centro del disco es de unos 7 cm, de lo que resulta un índice de refracción $n \approx 1,42$, un valor relativamente próximo al de este tipo de plásticos, que ronda el 1,5. El error puede deberse a que, dadas las dimensiones del disco, no se ha podido encontrar una fuente suficientemente plana para realizar el experimento.

§9.2 Curvas de primera reflexión

Tal y como se discutió en la sección 4, el ángulo δ con el que se refleja un rayo mediante una esfera depende del parámetro de impacto z . En este apartado tratará de medirse dicho ángulo. Para ello se considerará el mismo disco de metacrilato del apartado anterior. Este disco se ha situado a una distancia $d = 43$ cm de una regla graduada que permite me-

^{††}La expresión (12) se escribiría en esta situación como en $\alpha_B = \arctg \frac{n}{n'}$.

^{§§}Es decir, el valor de α' para el que $\delta = \Delta$ según la discusión de la sección 4.

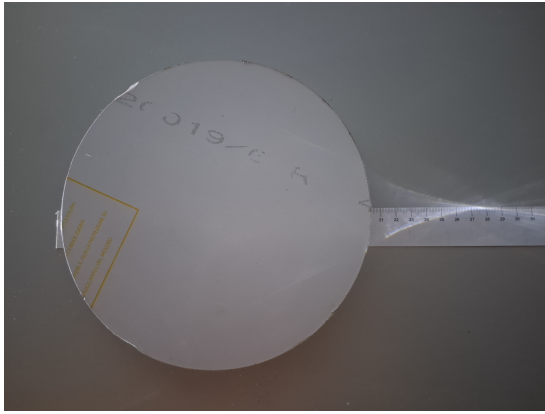


Figura 20: Cáustica formada al atravesar un haz de luz un disco de metacrilato. Los rayos de luz convergen marcando el punto focal del disco.

dir el parámetro de impacto. Sobre la regla desliza un dispositivo que permite acoplar diferentes punteros láser, de tres colores diferentes: rojo, verde y azul. Dado que el ángulo δ no es sencillo de medir, lo que se hará es comprobar este ángulo de manera indirecta, determinando la posición y sobre la regla graduada en la que incide el rayo reflejado. Según la imagen de la figura 21, esta posición puede calcularse como $y = l \tan \delta + R \sin \varphi$, donde $l = d + R(1 - \cos \varphi)$ y los ángulos φ y δ se obtuvieron en su momento como $\varphi = 4\alpha' - \alpha$ y $\delta = 4\alpha' - 2\alpha$, por lo que $\varphi = \delta + \alpha$. De acuerdo con la discusión del apéndice D, se obtiene la dependencia de y con z a través del ángulo δ como aparece en (D.2), es decir, $y = (d + R) \tan \delta + \frac{z}{\cos \delta}$.

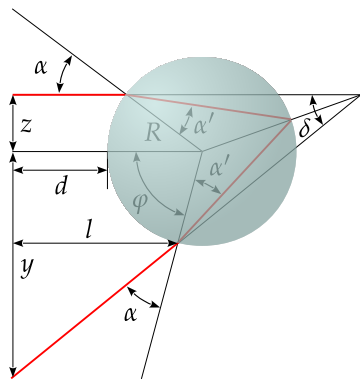


Figura 21: Cálculo del punto de incidencia y para un rayo reflejado por una esfera, obtenido para un cierto parámetro de impacto z .

En la gráfica de la figura 22 se presentan los resultados experimentales obtenidos junto con un ajuste teórico de dichos datos. Aunque se observan leves discrepancias, el resultado es, en general, bastante satisfactorio, pudiéndose observar como el índice de refracción decrece con la longitud de onda de la luz aplicada, siendo, por tanto menor para el co-

lor rojo y mayor para el azul, quedando la curva del color verde entre ambas.

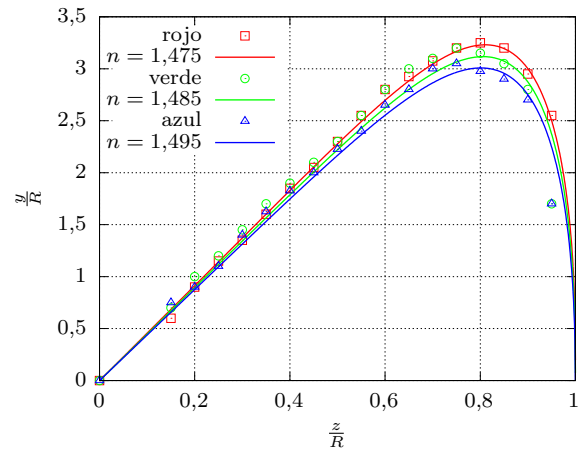


Figura 22: Resultados experimentales de la medida del punto de incidencia y en función del parámetro de impacto z y ajuste de los resultados a la curva de dependencia especificada en el texto.

§9.3 Polarización de la luz reflejada

En la sección 8 se justificó el hecho de que la luz que forma el arco iris primario es luz polarizada, debido a que el ángulo de incidencia en el interior de las gotas para la cáustica es aproximadamente igual al ángulo de Brewster para la interfaz agua-aire. Para comprobar esta situación se ha utilizado un recipiente de vidrio esférico lleno de agua sobre el que se ha hecho incidir un haz de luz blanca procedente de un proyector de imágenes. Se ha estudiado en este caso la cáustica que forma la luz de la primera reflexión, la cual se ha hecho pasar a través de un polarizador lineal. El polarizador se ha situado en dos posibles posiciones, bien horizontal, o bien vertical. La imagen en el primer caso es la que aparece en la figura 23a en la que se comprueba que el polarizador permite el paso de la luz reflejada. La segunda situación se muestra en la figura 23b donde el efecto del polarizador situado en esta segunda posición es la de atenuar de manera muy notable el brillo de la cáustica. Esto demuestra que, efectivamente, la luz procedente de esta primera reflexión está fundamentalmente polarizada, con polarización lineal.

§9.4 Trazado de rayos

Para complementar el trabajo experimental se ha implementado código sobre la plataforma *p5.js*. Tal y como indica esta plataforma, «p5.js es una herramienta amigable para aprender a programar y hacer arte. Es una biblioteca de JavaScript libre y de código abierto.»^{¶¶} Dada la versatilidad

^{¶¶} Ver <https://p5js.org/es/about/>



(a) Imagen de la luz reflejada en el interior de una esfera de vidrio conteniendo agua. La imagen ha sido tomada con el polarizador en la posición denominada como horizontal.



(b) Imagen de la luz reflejada en el interior de una esfera de vidrio conteniendo agua. La imagen ha sido tomada con el polarizador en la posición denominada como vertical.

Figura 23: Comprobación de la polarización de la luz reflejada en el interior de una esfera conteniendo agua.

de esta herramienta, resulta relativamente sencillo presentar el trazado de rayos a través de una esfera tanto para el estudio de la focal de la misma como de la primera reflexión en su interior y obtener las correspondientes cáusticas en cada caso, todo ello en función del índice de refracción relativo entre la esfera y su entorno. En el caso de la formación de la focal, se puede obtener una imagen como la de la figura 24. El código implementado para realizar esta imagen se presenta a continuación.

```
1 var labsizex      = 1024;
2 var labsizey      = 704;
3 var panely        = 64;
4 var sliderheight  = 30;
5 var xcenter       = 0.9*labsizex/2;
6 var ycenter       = labsizey/2;
7
8 var img;
9 var imagex        = 406;
10 var imagey        = 470;
11 var R              = imagex/2;
12 var n              = 4/3;
13 var nmin           = 1.2;
14 var nmax           = 1.414213562;
15 var nray           = 10;
16 var sray;
17
18 var rslider;
```

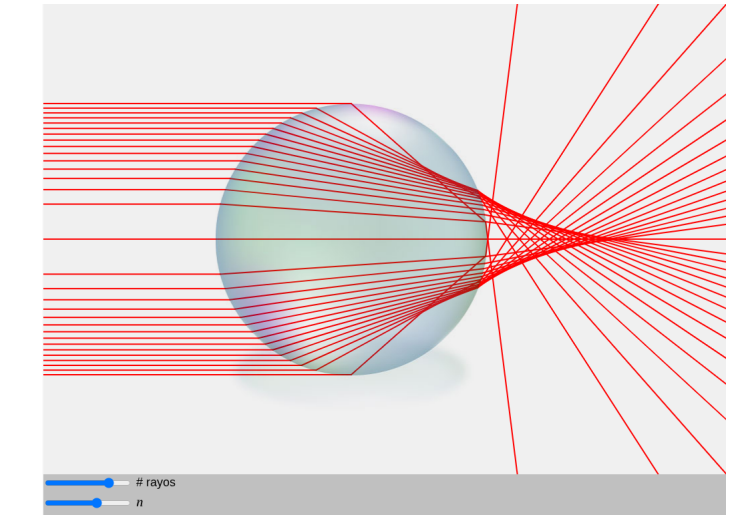


Figura 24: Imagen generada por el código escrito para realizar el trazado de rayos a través de una esfera.

```
19 var nslider;
20
21 var fontMath;
22
23 function preload()
24 {
25   img = loadImage('assets/ball.png');
26 }
27
28
29 function setup() {
30   fontMath = loadFont('/assets/Cambria.ttf');
31   createCanvas(labsizex, labsizey+panely);
32   this.bkcolor = 240;
33   this.panelcolor = 192;
34
35   noStroke();
36
37   sray = new ray();
38   rslider = createSlider(2,20,nray,1);
39   rslider.position(0,labsizey+0.1*sliderheight)
40   nslider = createSlider(0,255,(n-nmin)/(nmax-
41     nmin)*255);
42   nslider.position(0,labsizey+1.1*sliderheight)
43 }
44
45 function draw() {
46   fill(bkcolor);
47   rect(0,0,labsizex,labsizey);
48
49   translate(xcenter, ycenter);
50
51   nray = rslider.value();
52   n = nslider.value()/255*(nmax-nmin)+nmin;
53   for (let k = 0; k < nray; k += 1) {
54     sray.display(R*sqrt(k/(nray-1)));
55     sray.display(-R*sqrt(k/(nray-1)));
56   }
```

```

57
58   image(img,-R,-R,imagex,imagey);
59
60   translate(-xcenter, -ycenter);
61
62   fill(panelcolor);
63   rect(0,labsizey,labsize,panely);
64   fill(0);
65   textSize(18);
66   textFont('Arial');
67   text("# rayos",rslider.width+10,labsizey+rslider.
        height+2);
68   textSize(20);
69   textFont(fontMath);
70   text("n",rslider.width+10,labsizey+rslider.height
        +2+sliderheight);
71
72 }
73
74 class ray
75 {
76   constructor(){}
77   alfa(z)
78   {
79     return asin(z/R);
80   }
81   alfap(z)
82   {
83     return asin(z/R/n);
84   }
85   theta(z)
86   {
87     return 2*this.alfap(z)-this.alfa(z);
88   }
89   gamma(z)
90   {
91     return 2*(this.alfa(z)-this.alfap(z));
92   }
93   display(z)
94   {
95     push();
96     stroke(255,0,0);
97     strokeWeight(2);
98     line(-xcenter,-z,-R*cos(this.alfa(z)), -z);
99     line(-R*cos(this.alfa(z)), -z, R*cos(this.theta(z)),
        -R*sin(this.theta(z)));
100    line(R*cos(this.theta(z)), -R*sin(this.theta(z)),
        R*cos(this.theta(z))+labsize*cos(this.
        gamma(z)), -R*sin(this.theta(z))+labsize*
        sin(this.gamma(z)));
101    pop();
102  }
103
104 }

```

Respecto del caso de la primera reflexión, una de las imágenes obtenidas se muestra en la figura 25, y para ello se ha implementado el código que se aparece a continuación.

```

1 var labsizeX      = 1024;
2 var labsizeY      = 704;

```

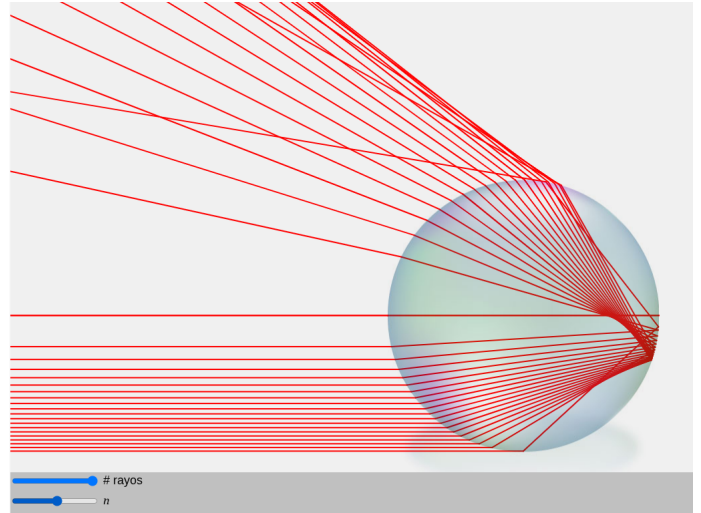


Figura 25: Imagen generada por el código escrito para realizar el trazado de rayos a través de una esfera tras la primera reflexión en su interior.

```

3 var panely        = 64;
4 var sliderheight  = 30;
5 var xcenter       = 3*labsizeX/4;
6 var ycenter       = 2*labsizeY/3;
7
8 var img;
9 var imagex        = 406;
10 var imagey        = 470;
11 var R             = imagex/2;
12 var n             = 4/3;
13 var nmin          = 1.2;
14 var nmax          = 1.5;
15 var nray          = 10;
16 var sray;
17
18 var rslider;
19 var nslider;
20
21 var fontMath;
22
23 function preload()
24 {
25   img = loadImage('assets/ball.png');
26 }
27
28
29 function setup() {
30   fontMath = loadFont('/assets/Cambria.ttf');
31   createCanvas(labsizeX, labsizeY+panely);
32   this.bkcolor    = 240;
33   this.panelcolor = 192;
34
35   noStroke();
36
37   sray = new ray();
38   rslider = createSlider(2,20,nray,1);
39   rslider.position(0,labsizeY+0.1*sliderheight)
40   nslider = createSlider(0,255,(n-nmin)/(nmax-

```

```

nmin)*255);
41  nslider.position(0,labsizey+1.1*sliderheight)
42 }
43 }
44
45 function draw() {
46   fill(bkcolor);
47   rect(0,0,labsize,labsizey);
48
49   translate(xcenter, ycenter);
50
51   nray = rslider.value();
52   n = nslider.value()/255*(nmax-nmin)+nmin;
53   for (let k = 0; k < nray; k += 1) {
54     sray.display(-R*sqrt(k/(nray-1)));
55 //    sray.display(-R*sqrt(k/(nray-1)));
56   }
57
58   image(img,-R,-R,imagex,imagey);
59
60   translate(-xcenter, -ycenter);
61
62   fill(panelcolor);
63   rect(0,labsizey,labsize,panely);
64   fill(0);
65   textSize(18);
66   textFont('Arial');
67   text("# rayos",rslider.width+10,labsizey+rslider.
68     height+2);
69   textFont(fontMath);
70   text("n",rslider.width+10,labsizey+rslider.height
71     +2+sliderheight);
72
73 class ray
74 {
75   constructor(){}
76   alfa(z)
77   {
78     return asin(z/R);
79   }
80   alfap(z)
81   {
82     return asin(z/R/n);
83   }
84   theta(z)
85   {
86     return 2*this.alfap(z)-this.alfa(z);
87   }
88   gamma(z)
89   {
90     return (4*this.alfap(z)-this.alfa(z));
91   }
92   delta(z)
93   {
94     return (4*this.alfap(z)-2*this.alfa(z));
95   }
96   display(z)
97   {

```

```

98   push();
99   stroke(255,0,0);
100  strokeWeight(2);
101  line(-xcenter,-z,-R*cos(this.alfa(z)),-z);
102  line(-R*cos(this.alfa(z)),-z,R*cos(this.theta(z))
103    ),-R*sin(this.theta(z)));
104  line(R*cos(this.theta(z)),-R*sin(this.theta(z))
105    ,-R*cos(this.gamma(z)),R*sin(this.gamma(z))
106    );
107  line(-R*cos(this.gamma(z)),R*sin(this.gamma(z))
108    ,-R*cos(this.gamma(z))-labsize*cos(this.
109    delta(z)),R*sin(this.gamma(z))+labsize*sin

```

Apéndices

A Significado de la segunda derivada de una función

En este apéndice se pretende mostrar el significado matemático de la segunda derivada de una función. Es sobradamente conocido que la derivada de una función determina la pendiente de la recta tangente a la función en cada punto de la misma. La figura 26 muestra tal resultado. Si se considera un intervalo de anchura h para una función continua y derivable, según el teorema del valor medio[11] se tiene que la recta secante que pasa por los dos puntos de la función marcados en la gráfica tiene la misma pendiente que la tangente a la función en un punto intermedio del intervalo. De este modo, reduciendo el tamaño del intervalo ($h \rightarrow 0$) se encuentra que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}. \quad (\text{A.1})$$

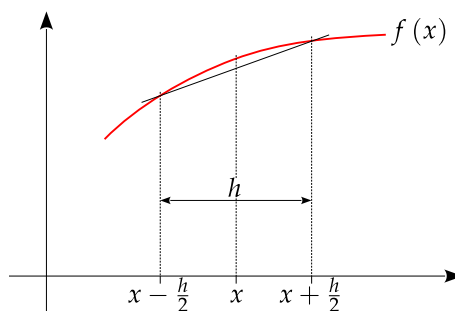


Figura 26: Cálculo de la derivada de una función.

Este resultado permite expresar la segunda derivada de la función también mediante un límite, es decir,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x + \frac{h}{2}) - f'(x - \frac{h}{2})}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Es interesante ahora pararse a pensar qué significa el resultado anterior, en particular, bajo que circunstancias la derivada segunda de una función se hace cero. Esto ocurre si, para h suficientemente pequeño, se cumple que

$$f(x) = \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2}, \quad (\text{A.3})$$

es decir, cuando el valor de la función en ese punto coincide con el valor medio de la función en los puntos adyacentes. Como ejemplo de esta situación se tiene cuando la función varía linealmente en el entorno de ese punto.

B Un resultado trigonométrico

Un resultado necesario para los cálculos de ángulos en las reflexiones internas se muestra en la figura 27. Considerada una cuerda sobre una circunferencia, puede determinarse una relación sencilla entre el ángulo opuesto a esa cuerda en el triángulo que forman los extremos de la cuerda y el centro de la circunferencia y el ángulo opuesto a esa cuerda en el triángulo que forman los extremos de la cuerda y cualquier otro punto sobre la circunferencia. Llamando $\alpha = \angle RSP$ a este segundo ángulo, se tiene según el dibujo que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Por otro lado, todos los triángulos con vértice en el centro de la circunferencia son triángulos isósceles, por lo que se cumple que $\angle SRO = \angle OSR = \alpha_1$ y $\angle SPO = \angle OSP = \alpha_2$. De este modo, para el triángulo $\triangle RSP$ se puede escribir la suma de sus ángulos internos como $\alpha + (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) = \pi$, es decir, $2\alpha + \beta_1 + \beta_2 = \pi$, que coincide con la suma de los ángulos internos de $\triangle ROP$, por lo que $\angle ROP = 2\angle RSP = 2\alpha$.

C Distribución de potencia de una haz de luz de intensidad uniforme y sección circular

Si se considera un haz de luz de intensidad uniforme cuya potencia luminosa viene dada por un cierto valor P_0 , y dicho haz tiene sección circular, entonces la intensidad del haz puede expresarse como $\frac{P_0}{\pi R^2}$. Esto significa que un anillo del haz de radio interior z_k y radio exterior z_{k+1} (ver figura 28)

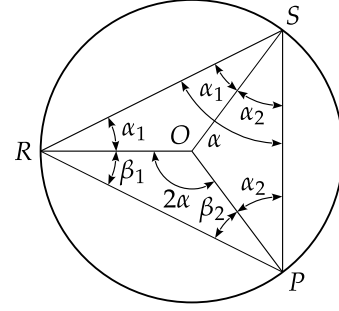


Figura 27: Considerada la cuerda \overline{PR} sobre la circunferencia, el ángulo $\angle POR$, donde O es el centro de la circunferencia, es el doble que el ángulo $\angle PSR$, donde S es un punto arbitrario sobre la circunferencia.

transporta una potencia total $\frac{P_0}{R^2} (z_{k+1}^2 - z_k^2)$. Si el haz se quiere dividir en anillos que transporten la misma potencia, por ejemplo, el anillo con radio interior z_k y radio exterior z_{k+1} y el anillo con radio interior z_{k-1} y radio exterior z_k , deberá cumplirse la relación $\frac{P_0}{R^2} (z_{k+1}^2 - z_k^2) = \frac{P_0}{R^2} (z_k^2 - z_{k-1}^2)$, es decir, $z_{k+1}^2 = 2z_k^2 - z_{k-1}^2$. En particular, el círculo interior, de radio z_1 , define la potencia transportada en cada uno de esos anillos, de valor $\frac{P_0}{R^2} z_1^2$, de modo que el radio exterior del primer anillo deberá cumplir que $z_2^2 - z_1^2 = z_1^2$, es decir, $z_2 = \sqrt{2}z_1$. Por inducción completa, se obtiene entonces que $z_k = \sqrt{k}z_1$.

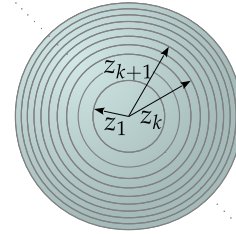


Figura 28: División de un círculo en anillos de igual área. Se cumple que $z_k = \sqrt{k}z_1$.

En términos matemáticos se define lo que se conoce como una función de distribución, en este caso, de la potencia. Una fracción ΔP de la potencia se transporta dentro de un anillo de anchura Δz , de modo que $\Delta P = \frac{P_0}{R^2} [(z + \Delta z)^2 - z^2] = \frac{P_0}{R^2} [2z\Delta z + (\Delta z)^2]$. Se obtiene entonces que $\frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{P_0}{R^2} (2z + \Delta z)$. La función de distribución se define como:

$$\frac{dP}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{2P_0}{R^2} z, \quad (\text{C.1})$$

y se dice que $dP = \frac{2P_0}{R^2} z dz$ es la potencia que atraviesa cada anillo de anchura dz . Si, por ejemplo, ahora se quiere deter-

minar la potencia que atraviesa un anillo de radio interior z_k y radio exterior z_{k+1} está resultará de resolver la integral $\int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{2P_0}{R^2} z dz = \frac{P_0}{R^2} (z_{k+1}^2 - z_k^2)$.

D Cálculo del punto de impacto y en función del ángulo δ

Dada la complejidad de este cálculo, se abre aquí este apéndice para desglosarlo con detalle. Como se indicó en la sección 9.2, se tiene que $y = l \operatorname{tg} \delta + R \operatorname{sen} \varphi$, donde $l = d + R(1 - \cos \varphi)$, con $\varphi = \delta + \alpha$. De este modo, $l \operatorname{tg} \delta = (d + R) \operatorname{tg} \delta - R \operatorname{tg} \delta \cos(\delta + \alpha)$. Si se considera el último término, se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta \cos(\delta + \alpha) &= \operatorname{tg} \delta (\cos \alpha \cos \delta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \delta) = \\ &= \operatorname{sen} \delta \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \frac{\operatorname{sen}^2 \delta}{\cos \delta} = \\ &= \operatorname{sen} \delta \cos \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \delta} + \operatorname{sen} \alpha \cos \delta = \\ &= \operatorname{sen}(\delta + \alpha) - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \delta}. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Usando este resultado, puede escribirse

$$\begin{aligned} l &= (d + R) \operatorname{tg} \delta - R \left[\operatorname{sen}(\delta + \alpha) - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \delta} \right] + \\ &\quad + R \operatorname{sen}(\delta + \alpha) = \\ &= (d + R) \operatorname{tg} \delta + R \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \delta} = \\ &= (d + R) \operatorname{tg} \delta + \frac{z}{\cos \delta}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Referencias

- [1] Paul A. Tipler y Gene Mosca. “Física”. En: 6.^a ed. Editorial Reverté, 2012. Cap. 30.3.
- [2] Paul A. Tipler y Gene Mosca. “Física”. En: 6.^a ed. Editorial Reverté, 2012. Cap. 4.5.
- [3] David Halliday, Robert Resnick y Jearl Walker. “Fundamentals of Physics”. Inglés. En: 12.^a ed. Vol. 2. John Wiley & Sons, Inc., 2021. Cap. 35.1.
- [4] Paul A. Tipler y Gene Mosca. “Física”. En: 6.^a ed. Editorial Reverté, 2012. Cap. 31.
- [5] H. Moysés Nussenzveig. “Teoría del arco iris”. En: *Temas*. Vol. 6. Barcelona: Investigación y Ciencia, oct. de 1996, págs. 2-14.
- [6] Eugene Hecht. “Optics”. Inglés. En: 5.^a ed. Pearson, 2017. Cap. 3.
- [7] Hugh D. Young y Roger A. Freedman. “Física Universitaria con Física Moderna 2. Sears y Zemanski”. En: 1.^a ed. Pearson, 2018. Cap. 39.5.
- [8] John D. Cutnell y Kenneth W. Johnson. “Introduction to Physics”. Inglés. En: 11.^a ed. John Wiley & Sons, Inc., 2018. Cap. 29.2.
- [9] Wikimedia Commons. *File:Solar Spectrum.png* — *Wikimedia Commons, the free media repository*. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Solar_Spectrum.png&oldid=962951841. [Online; accessed 16-September-2025]. 2024.
- [10] Eugene Hecht. “Optics”. Inglés. En: 5.^a ed. Pearson, 2017. Cap. 4.6.2.
- [11] Howard Anton, Irl Bivens y Stephen Davis. “Calculus”. Inglés. En: 10.^a ed. John Wiley & Sons, Inc., 2012. Cap. 3.8.