



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

Análisis límite de pórticos 2D con mecanismo de colapso incompleto. Método cinemático directo

Autor:

Martínez Recio, Javier

Tutor:

Cacho Pérez, Mariano

**Construcciones Arquitectónicas, IT,
y MMC y Teoría de Estructuras**

Valladolid, julio de 2025

Resumen

En este trabajo de Fin de Grado, se estudiará el hecho de la diferenciación de los problemas de cálculo plástico en base al mecanismo que se tenga. Se verá la clara diferencia, cuando nos aparecen mecanismos de colapso incompletos. Por esta cuestión, se realizará una automatización mediante un programa de cálculo, para que se obtenga cualquier tipo de mecanismo que salga.

Palabras clave

Método directo

Mecanismos incompletos

Pórticos

Carga de colapso

Rótulas plásticas

Abstract

In this Final Degree Project, the focus will be on analyzing the differentiation of plastic analysis problems based on the type of mechanism involved. A clear distinction will be observed when incomplete collapse mechanisms appear. For this reason, an automated calculation program will be developed to identify any type of mechanism that may arise.

Keywords

Direct method

Incomplete mechanism

Frames

Collapse load

Plastic hinges

Agradecimientos

No quería empezar esta redacción, sin antes mencionar a las personas que han estado ahí durante este periodo.

En primer lugar, a mi familia, mis padres y mi hermano, los cuales siempre han estado ahí apoyándome en todo momento.

En segundo lugar, a Mariano Cacho, mi tutor, por haberme hecho esta etapa más llevadera y haberme guiado perfectamente en cada paso de ella, estando siempre al tanto de todo.

Y por último a mis amigos, por hacerme desconectar en esos momentos que son necesarios.

Muchas gracias a todos, fue de gran ayuda.

Índice

<i>Resumen.....</i>	3
<i>Palabras clave.....</i>	3
<i>Abstract.....</i>	3
<i>Keywords.....</i>	3
<i>Agradecimientos.....</i>	5
<i>Índice de figuras</i>	10
<i>Índice de ecuaciones.....</i>	11
<i>Índice de tablas</i>	12
CAPITULO 1:.....	13
INTRODUCCION Y OBJETIVOS.....	13
1.1. Introducción.....	15
1.2. Motivación del trabajo	15
1.3. Objetivos.....	15
1.4. Estructura del documento.....	16
CAPITULO 2:.....	17
ESTADO DEL ARTE.....	17
2.1. Introducción.....	19
2.2. Origen y evolución del análisis límite	19
2.3. Aplicaciones a pórticos 2D	21
2.4. Limitaciones y Oportunidades	21
2.4.1. Limitaciones en estudios existentes	22
2.4.2. Oportunidades de desarrollo.....	22
2.5. Conclusión	23
CAPITULO 3:.....	25
TEORIA	25
3.1. Cálculo plástico	27
3.1.1. Cálculo plástico y elástico	27
3.1.2. Objetivo del cálculo plástico.....	27
3.1.3. Comportamiento elastoplástico. Hipótesis	28
3.2. Grado de hiperestaticidad	29

3.2.1. Mecanismo.....	30
3.2.2. Estructura isostática.....	31
3.2.3. Estructura hiperestática	32
3.3. Método directo	32
3.4. Concepto de mecanismo de colapso	35
3.4.1. Mecanismo de colapso completo.....	36
3.4.2. Mecanismo de colapso incompleto.....	36
CAPITULO 4:.....	37
EJEMPLOS BASICOS	37
Ejemplo 1: Pórtico biempotrado con cargas puntuales.....	39
Ejemplo 1.1: Resolución	39
Ejemplo 2: Pórtico biempotrado – caso de carga 2.....	45
Ejemplo 2.1: Resolución	46
Ejemplo 2.1: Comprobación a través de Wolfram Mathematica	51
CAPITULO 5:.....	55
RESULTADOS Y APLICACIONES	55
5.1 Ejemplo 1.....	57
5.1.1: Resolución mediante Wolfram Mathematica	57
5.2. Ejemplo 2.....	58
5.3. Aplicaciones.....	60
5.3.1. Estructura tipo nave industrial.....	60
5.3.2. Pórtico 2D de edificación	64
CAPITULO 6:.....	71
CONCLUSIONES Y LINEAS FUTURAS.....	71
6.1. Conclusiones	73
6.2. Líneas futuras.....	73
CAPITULO 7:.....	77
PRESUPUESTO.....	77
7.1. Introducción.....	79
7.2. Costes directos	79
7.3. Costes indirectos	80
7.4. Costes totales	81

CAPITULO 8:	83
BIBLIOGRAFIA	83
8.1. Referencias bibliográficas	85
CAPITULO 9:	87
ANEXOS	87
Anexo A: Cálculo de mecanismos posibles del ejemplo 1.	89
Anexo B: Cálculo de mecanismos completos posibles del ejemplo 2	90
Anexo C: Cálculo de mecanismos incompletos posibles del ejemplo 2	92
Anexo D: Código de resolución del ejemplo 1	99
Anexo E: Código de resolución nave industrial	109

Índice de figuras

Figura 1: Diagrama tensión-deformación	27
Figura 2: Diagrama elasto-plástico	28
Figura 3: Diagrama tenso-deformación real	29
Figura 4: Diagrama de tenso-deformación modelo ideal	29
Figura 5: Ejemplo de mecanismo	31
Figura 6: Ejemplo de estructura isostática	31
Figura 7: Ejemplo de estructura hiperestática	32
Figura 8: Pórtico biempotrado ejemplo 1	39
Figura 9: Posible mecanismo de colapso 1 del ejemplo 1	40
Figura 10: Posible mecanismo de colapso 2 del ejemplo 1	41
Figura 11: Posible mecanismo de colapso 3 del ejemplo 1	42
Figura 12: Pórtico biempotrado ejemplo 2	46
Figura 13: Posible mecanismo de colapso 1 del ejemplo 2	46
Figura 14: Posible mecanismo de colapso 2 del ejemplo 2	47
Figura 15: Comprobación de $\theta_2=0$ en wolfram mathematica del ejemplo 2	51
Figura 16: Comprobación de $\theta_3=0$ en wolfram mathematica del ejemplo 2	52
Figura 17: Comprobación de $\theta_4=0$ en wolfram mathematica del ejemplo 2	52
Figura 18: Código de definición del ejemplo 1	58
Figura 19: Código de definición del ejemplo 2	58
Figura 20: Código de solución del ejemplo 2	59
Figura 21: Código de comprobación de giros del ejemplo 2	59
Figura 22: Ejemplo de nave a dos aguas	60
Figura 23: Pórtico a dos aguas con cargas puntuales.....	61
Figura 24: Código de definición de la nave industrial	62
Figura 25: Solución de mathematica de la nave a dos aguas	62
Figura 26: Representación gráfica de las rótulas plásticas formadas en la nave industrial	63
Figura 27: Ejemplo pórtico de edificación	64
Figura 28: Pórtico de edificación 2D	65
Figura 29: Código de definición del pórtico 2D de edificación	67
Figura 30: Código de perfiles de barras del pórtico 2D de edificación	68
Figura 31: Representación gráfica de las rótulas plásticas formadas en el pórtico 2D de edificación.....	68
Figura 32: Factor de cargade colapso del pórtico 2D de edificación	68
Figura 33: Comprobación del tipo de mecanismo en el pórtico 2D de edificación	69
Figura 34: Perfil variable.....	74

Índice de ecuaciones

Ecuación 1: GH en vigas	29
Ecuación 2: GH en pórticos.....	30
Ecuación 3: Momento plástico	32
Ecuación 4: Cálculo de ecuaciones de equilibrio	33
Ecuación 5: Ensayo de mecanismo de colapso seguro.....	33
Ecuación 6: Cálculo de las ECs.....	34
Ecuación 7: Cálculo del coeficiente de seguridad	35
Ecuación 8: Mecanismo de colapso completo	36
Ecuación 9: Mecanismo de colapso supercompleto	36
Ecuación 10: Mecanismo de colapso incompleto	36
Ecuación 11: EQ1 del ejemplo 1	41
Ecuación 12: EQ2 del ejemplo 1	42
Ecuación 13: Ecuación del mecanismo 3 asociada a EQ1 del ejemplo 1.....	43
Ecuación 14: Ecuación del mecanismo 3 asociada a EQ2 del ejemplo 1.....	43
Ecuación 15: EC1 del ejemplo 1.....	44
Ecuación 16: EC2 del ejemplo 1.....	44
Ecuación 17: EC3 del ejemplo 1.....	44
Ecuación 18: Ecuación del mecanismo 2 asociada a EQ2 del ejemplo 2.....	48
Ecuación 19: Ecuación 17 sustituyendo los valores de EQ1 del ejemplo 2.....	48
Ecuación 20: EC1 del ejemplo 2.....	50
Ecuación 21: EC2 del ejemplo 2.....	50
Ecuación 22: EC3 del ejemplo 2.....	50

Índice de tablas

Tabla 1: Planteamiento del problema de rótulas plásticas	34
Tabla 2: Planteamiento tabla ejemplo 1.....	44
Tabla 3: Planteamiento tabla ejemplo 2.....	49
Tabla 4: Tabla de valores de perfil variable.....	74
Tabla 5: Horas efectivas trabajadas por año.....	79
Tabla 6: Costes anuales de un trabajador.....	80
Tabla 7: Costes directos y número de horas	80
Tabla 8: Tabla de costes indirectos	81
Tabla 9: Presupuesto final	81

CAPITULO 1:

INTRODUCCION Y OBJETIVOS

1.1. Introducción

Este trabajo de Fin de Grado es una ampliación del problema típico de la asignatura Estructuras y Construcciones Industriales, acerca del cálculo de rótulas plásticas en estructuras de barras esbeltas.

En este caso, se halla el cálculo de rótulas plásticas en mecanismos incompletos, diferenciando así, de los más habituales que son en mecanismos completos o supercompletos. Así, se verán las diferencias, ventajas, desventajas, profundizando en dicho cálculo.

1.2. Motivación del trabajo

En lo que al progreso y estudio de la asignatura respecta, se ha comprobado el hecho de calcular rótulas plásticas con diferentes estructuras, pero con el resultado de mecanismos completos y supercompletos.

Es por ello, que se ha llegado a comprobar cualquier estructura (con determinadas condiciones que se tendrán), cuando resulta un mecanismo incompleto. Esto da lugar a un número mayor de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, además de todos los casos adicionales de estudio que salen.

1.3. Objetivos

El objetivo del TFG es que precisamente toda esa mayor carga de trabajo en forma de más casos a comprobar y de múltiples ecuaciones o sistema de ecuaciones, se pueda automatizar, mediante un programa, el cálculo de los mecanismos de colapso incompletos, valiendo para cualquier estructura con cargas puntuales y mismo tipo de sección.

Para ello se estudiarán 4 ejemplos prácticos; 2 de la misma estructura, pero siendo uno mecanismo completo, y el otro mecanismo incompleto; y los restantes, 2 ejemplos más de diferentes estructuras, que podrán ser mecanismos completos o incompletos, pero que se pueda obtener la solución en ambos casos de forma sistemática.

Siguiendo este método de trabajo, se comprobarán las diferencias y se obtendrá una resolución eficiente y muy aprovechable para futuros cálculos.

1.4. Estructura del documento

Para estructurar el documento, se ha definido una primera parte del origen del cálculo plástico. Además, aplicaciones que ha tenido durante años atrás, limitaciones y posibles opciones de futuro.

Se ha establecido un marco teórico, basado en la teoría de estructuras, para lograr entender ciertos aspectos del cálculo plástico, como el comportamiento de secciones ante diversos esfuerzos. Se ha hecho especial hincapié en los conceptos necesarios para entender este trabajo, basado en los teoremas y métodos de resolución. Estos conceptos son, el grado de hiperestaticidad, con sus diferentes tipos de estructuras dependiendo de su valor, además del método directo, que es el con el que se trabaja para la resolución de los problemas. Por último, los tipos de mecanismos de colapso que se hallarán.

Con posterioridad, se ha querido establecer unos ejemplos básicos para entender toda la metodología llevada a cabo. En él se detallan mediante dos pórticos, el estudio de dos diferentes tipos de mecanismos de colapso, gracias a sus respectivas cargas a las que están sometidos.

Para explicar correctamente los métodos de resolución, se ha obtenido el código mediante Wolfram Mathematica, además de utilizar dos aplicaciones más; una de otro pórtico, pero a dos aguas; y otra de una edificación más compleja.

Para terminar, se han establecido unas conclusiones y líneas futuras, las cuales se podrán seguir investigando en base a determinadas condiciones de cargas, de temperaturas, etc.

CAPITULO 2:

ESTADO DEL ARTE

2.1. Introducción

En este capítulo se va a representar el estado actual del análisis límite de estructuras planas, haciendo una revisión e investigación sobre ello. Además, con énfasis en los mecanismos de colapso incompletos en la aplicación del método directo. Con este estudio, se pretende contextualizar el trabajo realizado, para así, justificar la metodología adoptada.

2.2. Origen y evolución del análisis límite

Se empieza a relacionar estos términos en 1713 con Parent. Fue uno de los pioneros en investigar y proponer que el momento resistente de una viga, se puede calcular considerando que las fibras del material resisten hasta cierto límite. Se podría considerar como el origen del análisis límite.

Posteriormente en 1864, H. Tresca propuso su criterio de plastificación, tras haber investigado la deformación plástica de metales sometidos a compresión.

Más adelante en 1913, R. E. Von Mises publicó su criterio basado en la energía de distorsión, sobre el comportamiento plástico en materiales dúctiles.

Kazinczy en 1914 en Hungría, determina mediante una serie de ensayos sobre vigas de acero, deformaciones en los extremos y en el centro de las vigas. Estos quiebros que se producían, los llamó 'rótulas', concluyendo en que la viga no colapsaba hasta que no se originaban 3 rótulas. Abrió un nuevo camino en cuanto al cálculo estructural. Se determinó una diferencia importante, entre los resultados arrojados por el cálculo elástico y lo que realmente sucedía en la práctica.

Hay numerosos estudios posteriores al de Kazinczy. Ingenieros demostraron en una estructura dúctil, la cual tenga defectos de construcción o fabricación, no se ven afectadas las cargas de colapso. Se empezó a desarrollar el método de los trabajos virtuales para obtener los esfuerzos plásticos. Dentro de estos estudios, se puede nombrar el de Maier-Leibnitz. En él analiza la resistencia de una estructura dúctil, observando que depende de su comportamiento plástico.

J. F. Baker en Inglaterra, comienza una exhaustiva investigación acerca del comportamiento plástico. Un trabajo realizado para el Comité de Investigación de Estructuras Metálicas de la industria británica, sobre estructuras de acero reales. En él concluía, midiendo las tensiones y las deformaciones de edificios, en que las tensiones reales, no coincidían con las medidas mediante métodos elásticos.

A partir de estos teoremas, A. A. Gvozdev en Rusia, demostró los tres Teoremas de la Plasticidad para obtener un mecanismo válido:

1º) *Teorema de la Inseguridad o estático*: debe existir equilibrio para tener seguridad. Si se encuentra un sistema de esfuerzos internos que esté en equilibrio con las cargas externas y no exceda la resistencia plástica, la estructura no colapsará.

2º) *Teorema Cinemático*: con un mecanismo de colapso compatible con las condiciones de la estructura, e igualando el trabajo externo con el interno plástico, la carga de ese mecanismo, es una superior a la carga límite real.

3º) *Teorema de la Unicidad*: la carga de colapso tiene un valor definido gracias al cumplimiento de los tres teoremas fundamentales, es decir, cuando el sistema de esfuerzos es equilibrado y plástico, y el mecanismo de deformación es compatible.

Posteriormente W. Prager en Estados Unidos, demuestra los teoremas fundamentales. Estos son:

1º) El material debe ser dúctil y cumplir con las ecuaciones de equilibrio.

2º) Las tensiones internas no deben superar la tensión límite del material.

3º) Deben producirse algunas rótulas para el colapso de la estructura.

W. Prager y J. F. Baker, se conocieron en un congreso, en el que se concretó una colaboración entre sus respectivas universidades, Brown y Cambridge. La universidad de Brown desarrolla el marco teórico a los avances que producía la universidad de Cambridge.

J. Heyman en 1951 propone en pórticos de acero, una resolución mediante un problema de optimización lineal, que se podría resolver con algoritmos de programación lineal, como hizo Gass en 1969. Realizó una investigación exhaustiva acerca de la historia y desarrollo de la ciencia, además del cálculo de las estructuras, obteniendo una recopilación del origen y evolución del cálculo plástico, nunca antes visto.

A partir de ahí, se fue desarrollando programas informáticos a raíz del incremento de los ordenadores. El primer programa informático fue a cargo de Alfred Zimmer en 1963.

Todos estos estudios, en muchas ocasiones en paralelo, apoyándose y avanzando unos de los otros, dan lugar a las partes fundamentales del cálculo plástico, es decir al cálculo de los estados límite. Esto llega a la conclusión de las denominadas rótulas o los momentos plásticos, como a los criterios fundamentales para obtener el mecanismo de colapso de la estructura.

Podemos observar que, aunque se haya ido evolucionando a lo largo de la historia, los métodos de cálculo, ya sea de, resistencia de materiales, estático o cinemático y trabajos virtuales, se concluye con la precisión de todos ellos, estando unos apoyados en los otros, tanto en el cálculo elástico como en el plástico y aun siendo publicados siglos antes.

2.3. Aplicaciones a pórticos 2D

Este apartado es de aplicaciones para pórticos.

B. G. Neal y B. S. Symonds, desarrollan teorías de cálculo no lineal, tales como, el método de combinación de mecanismos para calcular pórticos complejos.

Neal y Johnson en 1991 o Petry y Clarke en 1994, como se ha comentado, ya habían propuesto formulaciones específicas para pórticos, usando el método directo para generar todos los posibles mecanismos y determinar el crítico.

No obstante, es habitual encontrar situaciones de estructuras con geometrías complejas e irregulares que den lugar a mecanismos de colapso incompletos, en el que el número de rótulas plásticas es menor al mínimo de colapso completo, pero que pueden llevar a una pérdida de capacidad de resistencia local significativa.

Estudios como el de Cashell y Rotter en 2013, han determinado la plastificación progresiva, dependiendo de la interacción entre nudos rígidos, elementos verticales, horizontales, los cuales condicionan la aparición de rótulas plásticas en lugares inesperados, provocando así, mecanismos de colapso. Todo ello llevado a cabo sobre análisis límite en estructuras metálicas.

Se han desarrollado, herramientas computacionales específicas, como algoritmos de búsqueda automática de mecanismos, para la identificación con mayor celeridad de estos en estructuras de varios pisos o vanos.

Por lo tanto, ha evolucionado la aplicación del análisis límite en pórticos 2D, desde estudios con mecanismos completos hacia resultados más realistas y complejos. Los mecanismos incompletos y la secuencia de plastificación juegan un papel fundamental en la seguridad estructural. El método directo en combinación con estas herramientas computacionales, se abordan como una estrategia eficaz para llevar a cabo la problemática de mecanismos complejos.

2.4. Limitaciones y Oportunidades

A pesar de los múltiples avances en el análisis límite enfocado en estructuras tipo pórtico, destacan diversos estudios acerca de ciertas limitaciones, así como oportunidades de mejora en investigaciones futuras, justificando el enfoque de este trabajo.

2.4.1. Limitaciones en estudios existentes

La mayoría de trabajos, se han enfocado en los mecanismos de colapso completos. Esta situación limita la capacidad para descubrir situaciones realistas en la que se presentan mecanismos incompletos, contribuyendo a la inseguridad parcial de la estructura.

A menudo se tiene dependencia de softwares comerciales, tales como SAP2000, OpenSees o ANSYS, los cuales requieren formulaciones numéricas avanzadas y a menudo costosas computacionalmente. Suelen, ofrecer un análisis de colapso completo sin determinar etapas intermedias críticas.

En general, muchos métodos tienen dificultades aún para explorar de forma clara las configuraciones cinemáticamente admisibles en estructuras con múltiples grados de hiperestaticidad.

2.4.2. Oportunidades de desarrollo

El análisis de estructuras que no requieran el colapso completo o que directamente el cálculo es mucho más engorroso a la hora de encontrar el mecanismo de colapso, debido a los múltiples que podría haber, permite la detección de fallos locales o secuenciales, mejorando la evaluación de la seguridad estructural.

El desarrollo de métodos directos más accesibles, que reduzcan la dependencia de software comerciales, serían útiles, por ejemplo, para entornos académicos. Estas metodologías podrían basarse en modelos algebraicos o matriciales sencillos, pero con capacidad para detectar el comportamiento plástico.

El aumento de la disposición y utilización de la inteligencia artificial, podría ser una herramienta eficaz para futuros algoritmos de optimización, mejorando la identificación de mecanismos críticos y acelerando el proceso de análisis en estructuras complejas o con diversas combinaciones de cargas.

Existe la posibilidad de escenarios como los movimientos sísmicos. El análisis de mecanismos incompletos tiene vulnerabilidad en estos dichos escenarios. Esto es debido a que el colapso parcial puede provocar la aparición de un fallo antes del colapso total.

Teniendo en cuenta las limitaciones y posibles desarrollos señalados, el presente trabajo propone una metodología aplicada a pórticos 2D mediante el método cinemático directo, enfocado en la detección de todo tipo de mecanismos, y en concreto, mecanismos de colapso incompletos. Esta aproximación pretende ser una alternativa más eficiente y de estudio, que, además, puede servir de guía y de avance hacia estudios, más avanzados, con diversas situaciones y oportunidades.

2.5. Conclusión

La realización de este apartado, ha servido para la observación de la evolución del cálculo plástico, y las distintas investigaciones acerca de la formación de rótulas plásticas aplicando el método directo que veremos en el siguiente capítulo. No obstante, la escasa aplicación a los mecanismos incompletos y su compleja estructura y resolución, justifican la realización de este proyecto.

CAPITULO 3:

TEORIA

3.1. Cálculo plástico

3.1.1. Cálculo plástico y elástico

Una estructura llega a su estado límite o fallo, si en alguna o varias secciones se alcanza la tensión de fluencia. Esto se da en el cálculo elástico.

Se ha demostrado que, aunque una estructura llegue a ese estado anterior, puede seguir resistiendo cargas. Es importante tomar de referencia una estructura dúctil. En este caso se toma como referencia y estudio de estructura dúctil, el acero.

En la siguiente figura, diagrama de tensión-deformación, se comprobará ese “margen de resistencia” que tienen estas estructuras.

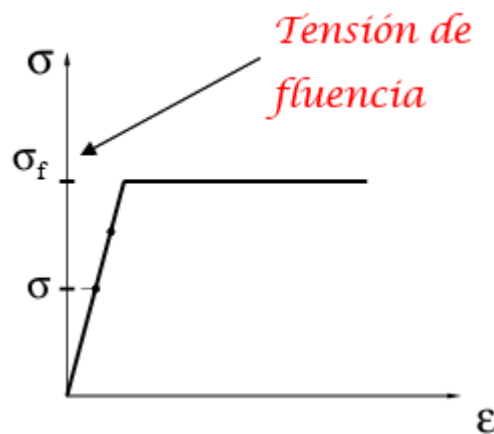


Figura 1: Diagrama tensión-deformación

Como se observa en la Figura 1, llega un momento de no retorno, que sería el de fallo plástico, pero que seguiría teniendo límite plástico. Si se continúa con el proceso de carga, irían apareciendo más puntos en los que se inició la fluencia plástica, hasta llegar al colapso de la estructura.

Esta situación se conoce con el nombre de carga de colapso, la última carga que es realmente capaz de soportar la estructura. Las estructuras hiperestáticas soportan mayor carga que las isostáticas.

3.1.2. Objetivo del cálculo plástico

En este apartado se verá qué objetivo tiene el cálculo plástico.

Para ello, se debe comprobar las cargas que producirían un colapso de la estructura. Podría ser también, una rotura de alguna barra o nudo, o deformaciones y desplazamientos excesivos.

Todo ello, se logrará gracias a la utilización de métodos de cálculo plástico, lo que supondría el conocimiento de cómo conseguir estructuras más acordes para ahorrar en materiales, tanto en peso como en dinero.

Estas estructuras serán tanto metálicas como de hormigón armado, siempre que tengan buena ductilidad.

3.1.3. Comportamiento elastoplástico. Hipótesis

1) Material elastoplástico perfecto

El material es perfectamente elástico hasta alcanzar la tensión de fluencia σ_f . Después el material es perfectamente plástico hasta alcanzar la rotura.

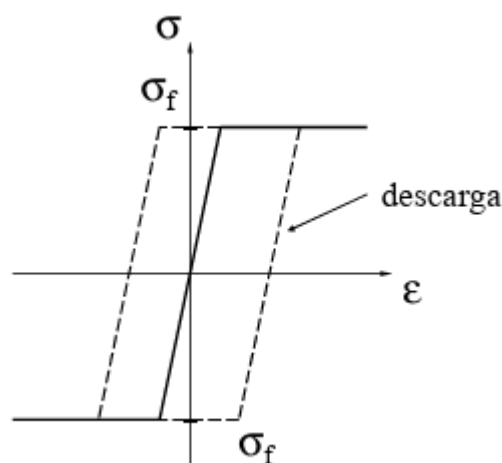


Figura 2: Diagrama elasto-plástico

2) Pequeñas deformaciones

Permanecen en el mismo orden de magnitud tanto las deformaciones elásticas como plásticas, a causa de la compatibilidad de deformaciones entre los elementos de la estructura.

3) Hipótesis de Navier

Las secciones permanecen planas tras la deformación.

Sin embargo, a través del diagrama de tenso-deformación se observan las diferencias entre el modelo real y el ideal.

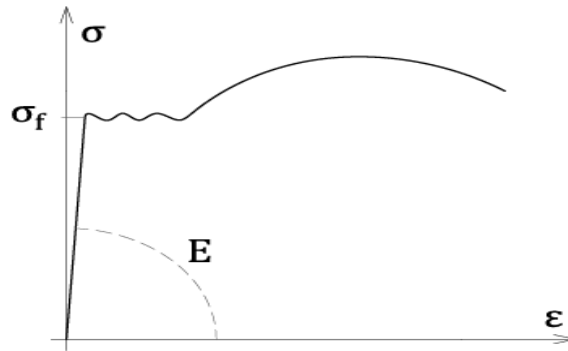


Figura 3: Diagrama tenso-deformación real

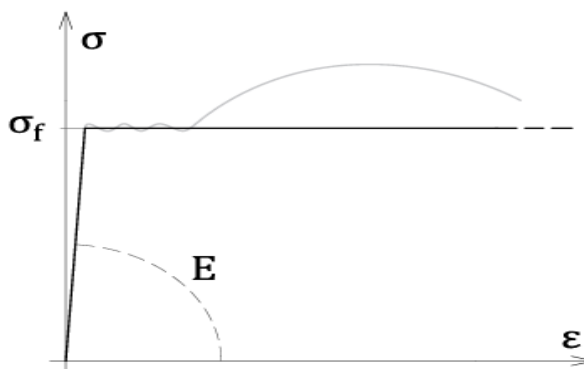


Figura 4: Diagrama de tenso-deformación modelo ideal

3.2. Grado de hiperestaticidad

En este apartado se comprobará la primera parte de un problema de este tipo. Es de gran importancia saber qué valor se tiene para poder abordar correctamente la resolución del problema.

Se define como grado de hiperestaticidad, al número de restricciones que exceden las necesarias para el equilibrio de una estructura, es decir, al número de incógnitas que no se pueden resolver únicamente con las ecuaciones de equilibrio.

Los cálculos necesarios para determinar cada tipo de estructura son:

1) Si la estructura es una viga:

$$GH = R - (2 + L)$$

Ecuación 1: GH en vigas

Siendo:

- L- el número de libertades de la estructura.
- R- el número de reacciones totales.

El número de reacciones va a variar según el tipo de apoyo que tenga cada nodo donde se encuentre el apoyo mencionado. Dicho lo cual, se relacionan de la siguiente manera:

- Si es empotramiento, habrá 3 reacciones por cada uno de ellos (restricción horizontal, vertical y de giro).
- Si es un apoyo fijo, se tendrán 2 reacciones por cada uno de ellos (restricción horizontal y vertical).
- Si es apoyo móvil, solo 1 reacción por cada uno de ellos (longitudinal (horizontal o vertical)).

2) Si la estructura es un pórtico plano:

$$GH = R - (3 + L)$$

Ecuación 2: GH en pórticos

Será el caso de estructura que se estudiará. Es similar al anterior, siendo en ambos casos lo mismo “R” y “L”.

Se clasifican en 3 casos distintos de grado de hiperestaticidad:

- $GH < 0$, sería un mecanismo.
- $GH = 0$, en este caso sería una estructura isostática.
- $GH > 0$, estructura hiperestática.

Se procederá a comentar cada una de ellos.

3.2.1. Mecanismo

Es el caso en el que el grado de hiperestaticidad es negativo, por lo tanto, se obtienen más ecuaciones que incógnitas. La estructura deja de ser estable, es decir puede tener cierto movimiento como sólido rígido.

Un ejemplo de este caso podría ser el siguiente:

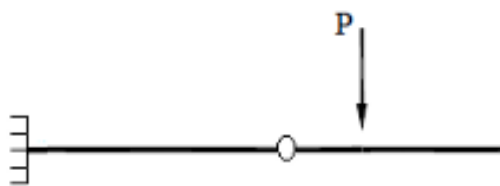


Figura 5: Ejemplo de mecanismo

Se puede apreciar que se tiene una libertad debido a la rótula, y por tanto al estar empotrada-apoyada, el grado de hiperestaticidad es menor que 0, o lo que es lo mismo, es un mecanismo.

Cabe mencionar que hay casos en los que el grado de hiperestaticidad será 0 pero en realidad no será una estructura hiperestática, sino un mecanismo. Esto será debido a las cargas que tenga y si podrá o no equilibrarse, ya sea horizontalmente o verticalmente. El problema es que la fórmula de GH, es condición necesaria, pero no suficiente para todos los casos, y en este sentido se tendría que analizar la estructura más allá de la fórmula y el resultado obtenido de ella.

3.2.2. Estructura isostática

Estas estructuras suceden si el grado de hiperestaticidad es 0. El cálculo se podría hacer solo aplicando las ecuaciones de equilibrio, ya que el número de ecuaciones coincidiría con el número de incógnitas.

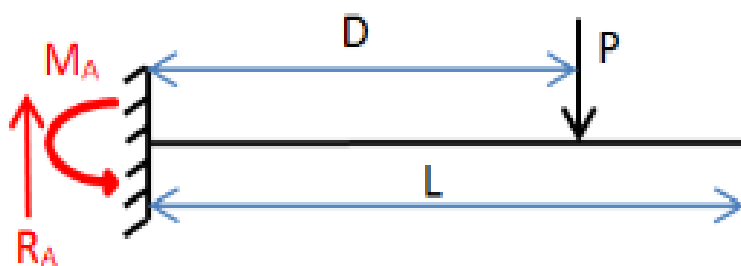


Figura 6: Ejemplo de estructura isostática

Se observa en la Figura 6 que con el empotramiento se tienen 3 incógnitas, las cuales sí se pueden resolver con las ecuaciones de equilibrio.

3.2.3. Estructura hiperestática

Este sería el caso más complejo. El grado de hiperestaticidad es mayor que 0, por tanto, con las ecuaciones de equilibrio solamente, no se puede hallar. Posee más restricciones de las necesarias para estar en equilibrio.

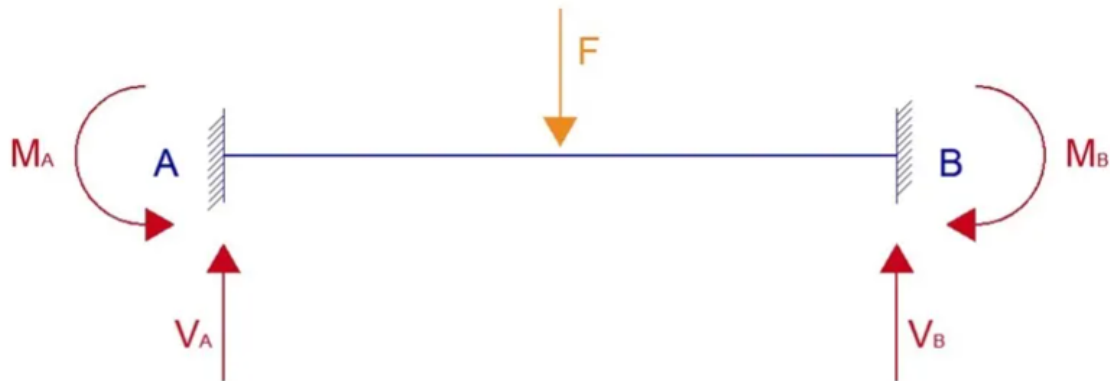


Figura 7: Ejemplo de estructura hiperestática

Además se observa cómo al añadir en este caso dos empotramientos, suman 6 incógnitas a resolver, por lo tanto, no se puede obtener la solución únicamente usando las ecuaciones de equilibrio y es necesario plantear ecuaciones de compatibilidad.

3.3. Método directo

Es el método que se utilizará para la resolución de problemas, en este caso de rótulas plásticas. A continuación, se detallarán los pasos a seguir:

1) Cálculo del momento plástico en cada perfil.

Para este cálculo se necesitará un determinado perfil. Generalmente en flexión se trabaja principalmente con secciones tipo doble-T, como, por ejemplo: IPN, IPE, HEB, HEA, etc.

La ecuación para calcular el momento plástico en cada sección es:

$$M_p = W_{pL} \sigma_e = S \sigma_e$$

Ecuación 3: Momento plástico

2) Simetría de la estructura.

En este caso para determinar el cálculo, se comprueba si tiene algún tipo de simetría, ya sea estructural o de cargas para poder simplificar los cálculos.

3) Cálculo del Grado de Hiperasticidad de la estructura (GH).

Se pudo comprobar en el apartado anterior.

Para vigas se utilizará la Ecuación 1; para los pórticos la Ecuación 2.

4) Cálculo del Número Posible de Rótulas Plásticas (NPR).

Para dicho cálculo se estudiarán las posibles secciones donde se puede formar rótulas plásticas:

- En empotramientos.
- En puntos con cargas puntuales aplicadas.
- En puntos con cambios de dirección en las barras (nodos).
- En secciones intermedias de barras sometidas a carga distribuida.

5) Número de ecuaciones de equilibrio (EQ).

La ecuación para el cálculo del número de ecuaciones de equilibrio es:

$$EQ = NPR - GH$$

Ecuación 4: Cálculo de ecuaciones de equilibrio

6) Ensayar mecanismos para ver si es seguro.

El mecanismo de colapso se determinará en base a esta comprobación. Se debe cumplir que el momento plástico de la rótula o rótulas que no llegan a formarse sea menor que el momento plástico límite en valor absoluto.

$$|M_i| < M_p$$

Ecuación 5: Ensayo de mecanismo de colapso seguro

7) Plantear y resolver la tabla.

Para plantear la siguiente tabla se hace en base a las posibles rótulas plásticas (secciones candidatas a rótulas plásticas), su momento plástico, el giro y el mismo número de ecuaciones de compatibilidad que GH se tenga.

Sección	1	2	3	4	...	n
M_i						
θ_i						
EC1						
EC2						
EC3						
...						
ECN						

Tabla 1: Planteamiento del problema de rótulas plásticas

8) Planteamiento de las ECs

Se plantean tantas ecuaciones de compatibilidad como GH haya.

La expresión de la energía de deformación por flexión de cada barra de la estructura es:

$$L \frac{L}{6EI} \left(m_i (2M_i + M_{i+1}) + m_{i+1} (2M_{i+1} + M_i) \right) + m_i \theta_i + m_{i+1} \theta_{i+1}$$

Ecuación 6: Cálculo de las ECs

Cada símbolo significa lo siguiente:

- L, sigue siendo la longitud de las barras.
- E, es el módulo de elasticidad del material.
- I, es el momento de inercia de la sección transversal de la barra.
- m_i , m_{i+1} , son los momentos virtuales aplicados en los extremos i e i+1.
- M_i , M_{i+1} , son los momentos reales en los extremos i e i+1.
- θ_i , θ_{i+1} , son los giros en los nodos i e i+1.

9) Resolución de las incógnitas

En este paso se formarán varias ecuaciones con, generalmente una incógnita más. Esa incógnita es la de la última rótula plástica en formarse. Ese valor será de 0 para el giro de la sección donde se forma. El problema está en que no se sabe cuál es y se tiene que ir probando hasta llegar a la solución final.

Para comprobar que es la solución del problema de interés, debe de coincidir el signo del giro con el signo de su momento flector (en dicha sección). De esta manera se podrán ir descartando los que no sean, y obtener la solución única.

10) Coeficiente de seguridad

Se pasa a calcular el coeficiente de seguridad de la estructura.

$$\lambda_c = \frac{P_c}{P_e}$$

Ecuación 7: Cálculo del coeficiente de seguridad

Siendo:

- P_c , la carga de colapso plástico.
- P_e , la carga crítica elástica.

11) Cálculo de los desplazamientos pedidos

Siempre es de interés este apartado, es decir, calcular algún desplazamiento y/o giro para comprobar si se cumple la hipótesis de pequeños desplazamientos.

Se resuelve con un desplazamiento unitario donde nos lo piden, y se obtienen los momentos virtuales. Después se aplicaría la ecuación 6 para obtener los desplazamientos pedidos. Comúnmente se suele calcular el desplazamiento, ya sea vertical u horizontal, en una rótula o incluso en zonas donde no haya. También es habitual calcular los giros en las rótulas plásticas.

3.4. Concepto de mecanismo de colapso

Se debe saber el concepto de mecanismo de colapso porque es lo que se trabajará en este tema.

Dicho lo cual, se define a un mecanismo de colapso, como un proceso físico o estructural que propicia el fallo o el colapso de un sistema, material o estructura. Esto puede ser debido a una sobrecarga de uso, a desgaste o a la resultante de diversas cargas aplicadas.

3.4.1. Mecanismo de colapso completo

Dependiendo de las rótulas plásticas formadas, se hallarán varios tipos de mecanismos de colapso. Esto se verá próximamente en diferentes cálculos, con relación al grado de hiperestaticidad que se tenga.

Si se forman las mismas rótulas plásticas que grado de hiperestaticidad, más 1, tenemos un mecanismo de colapso completo, es decir:

$$NR = GH + 1$$

Ecuación 8: Mecanismo de colapso completo

Por otra parte, se pueden representar también los supercompletos, que serían:

$$NR > GH + 1$$

Ecuación 9: Mecanismo de colapso supercompleto

3.4.2. Mecanismo de colapso incompleto

Todos estos cálculos se hallan durante el método cinemático directo. En el caso de los incompletos no será posible por lo general, determinar la seguridad del mecanismo hasta obtener los giros relativos en las rótulas plásticas planteadas.

Será un mecanismo de colapso incompleto cuando:

$$NR < GH + 1.$$

Ecuación 10: Mecanismo de colapso incompleto

CAPITULO 4:

EJEMPLOS BASICOS

Ejemplo 1: Pórtico biempotrado con cargas puntuales

Se empezará a ver el planteamiento y la resolución de un problema de cálculo plástico.

Sabiendo los pasos a realizar para la resolución explicado anteriormente, se procederá por partes.

En primer lugar, es una estructura que no tiene cambio de sección, es decir, se emplea la misma sección para todas las barras. En este caso no asignamos un determinado valor a la sección, porque lo dejaremos indicado en los cálculos.

Lo mismo pasa con respecto a las cargas; se tienen dos cargas del mismo valor, una llamada P_v , porque es una carga vertical y hacia abajo en el centro del dintel (el nodo 3); y una carga P_H horizontal en dirección hacia la derecha aplicada en el nodo 4.

Por tanto, ambas cargas serán de un mismo valor P genérico, al igual que la longitud ' L ' (todos los tramos son de la misma longitud).

Ejemplo 1.1: Resolución

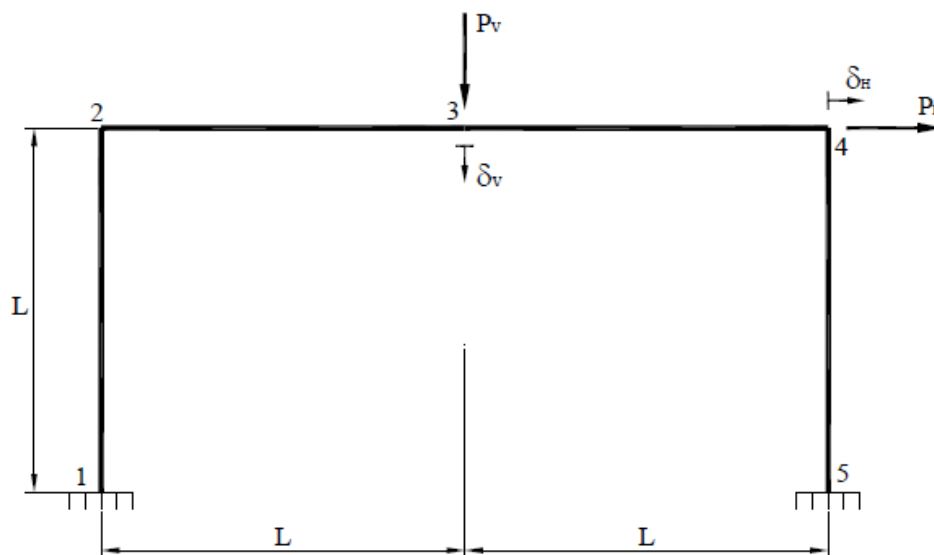


Figura 8: Pórtico biempotrado ejemplo 1

Es un problema con barras de propiedades mecánicas iguales, es decir tienen la misma sección, con lo cual se nombra M_P al momento plástico de cada barra.

En la figura 8 se puede comprobar que es un pórtico, por tanto, se procede a calcular su grado de hiperasticidad (GH).

Aplicando la ecuación 3 sale:

$$GH = r - (3 + L) = 6 - (3 + 0) = 3$$

En este caso la 'r' son 6, ya que hay dos empotramientos con 3 reacciones cada uno y sin libertades 'L'.

Por otro lado, las secciones candidatas a rótula plástica son: 1, 2, 3, 4 y 5.

Con lo cual el número posible de rótulas plásticas es 5.

Con los datos de:

- NPR = 5
- GH = 3

Y la ecuación 4 de las ecuaciones de equilibrio, nos queda:

$$EQ = NPR - GH = 5 - 3 = 2$$

Se va a plantear dos posibles mecanismos de colapso para obtener dos ecuaciones de equilibrio mediante el Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV). En este paso es interesante intentar escoger dos mecanismos los más sencillo posible, ya que se necesitan dos ecuaciones que valdrán para los demás casos, debido a que son combinación lineal unas de otras.

1) Ecuación de equilibrio 1 (EQ1) asociado al mecanismo de colapso (MC1)

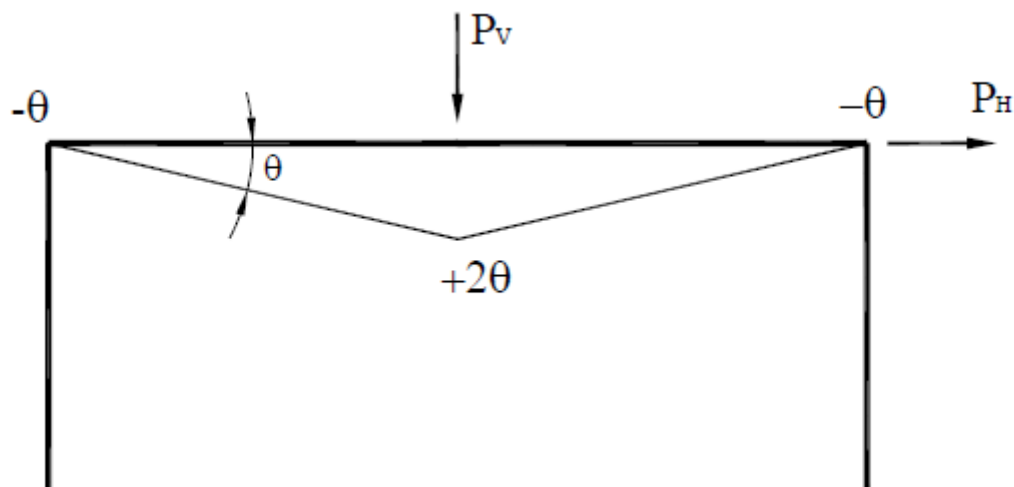


Figura 9: Posible mecanismo de colapso 1 del ejemplo 1

Como se ha ido comentado, la elección más inteligente es proponer dos ejemplos sencillos, los cuales a simple vista se puedan observar. En este caso con la carga vertical y hacia abajo, se mostraría el mecanismo de la Figura 9. Los nodos implicados son el 2, 3 y 4.

Cálculo:

- $M_2 = -M_P$
- $M_3 = M_P$
- $M_4 = -M_P$

Aplicando equilibrio de momentos, se obtiene lo siguiente:

$$PL(\theta) = M_2(-\theta) + M_3(+2\theta) + M_4(-\theta)$$

Y la ecuación queda:

$$PL = -M_2 + 2M_3 - M_4$$

Ecuación 11: EQ1 del ejemplo 1

Despejando se obtiene: $P_{C1} = 4M_P / L \rightarrow$ carga de colapso 1.

El siguiente paso es plantear el segundo posible mecanismo de colapso:

2) Ecuación de equilibrio 2 (EQ2) asociado al mecanismo de colapso 2 (MC2)

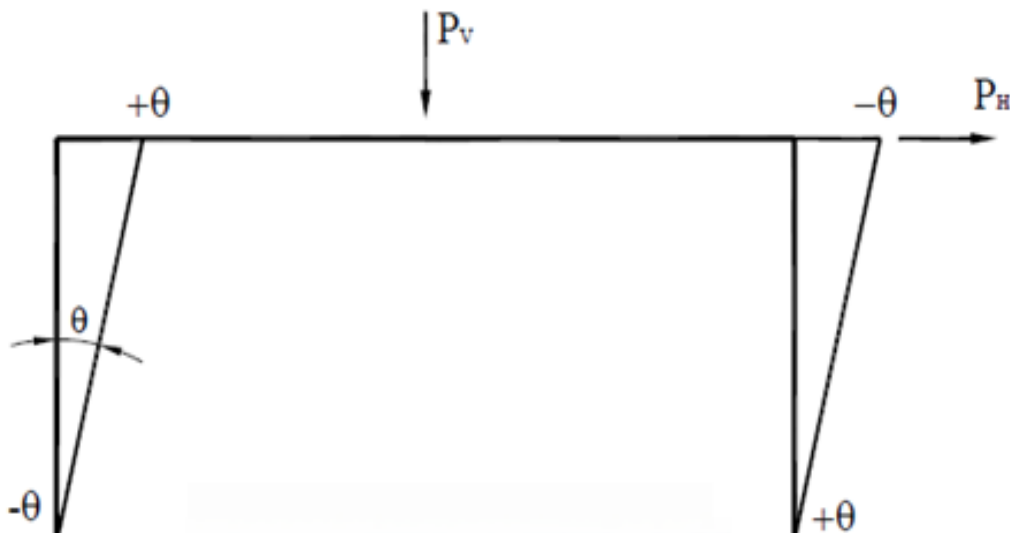


Figura 10: Posible mecanismo de colapso 2 del ejemplo 1

En este mecanismo se tendrá en cuenta la carga horizontal. Los nodos implicados en la consecución del citado mecanismo son el 1, 2, 3 y 4.

Cálculo:

- $M_1 = -M_P$
- $M_2 = M_P$
- $M_4 = -M_P$
- $M_5 = M_P$

De la misma forma, se aplica el equilibrio de momentos:

$$PL(\theta) = M_1(-\theta) + M_2(\theta) + M_4(-\theta) + M_5(+\theta)$$

Con lo cual, la ecuación es:

$$PL = -M_1 + M_2 - M_4 + M_5$$

Ecuación 12: EQ2 del ejemplo 1

Despejando se obtiene: $P_{C2} = 4M_P / L \rightarrow$ carga de colapso 2.

Como se puede apreciar, las dos cargas de colapso son iguales con lo cual habrá que seguir comprobando otros mecanismos hasta saber cuál es el mecanismo de colapso.

➤ Mecanismo de colapso 3 (MC3)

Mecanismo (1, 3, 4 y 5) con ambas cargas actuando.

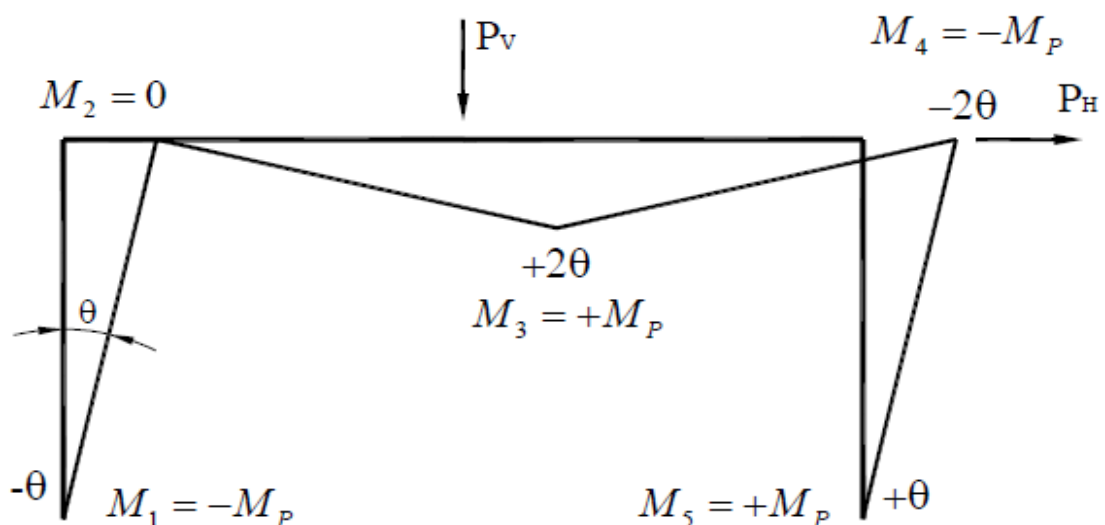


Figura 11: Posible mecanismo de colapso 3 del ejemplo 1

Para el cálculo, con las dos ecuaciones de los dos primeros mecanismos, se puede determinar las cargas de colapso de los posibles mecanismos restantes:

- $M_1 = -M_P$
- $M_3 = M_P$
- $M_4 = -M_P$
- $M_5 = M_P$

Por tanto, aplicando primero la ecuación 11: $PL = -M_2 + 2M_3 - M_4$

Despejando:

$$PL = -M_2 + 2M_P + M_P$$

Ecuación 13: Ecuación del mecanismo 3 asociada a EQ1 del ejemplo 1

En el siguiente paso con la ecuación 12: $PL = -M_1 + M_2 - M_4 + M_5$

Y se tiene:

$$PL = M_P + M_2 + M_P + M_P$$

Ecuación 14: Ecuación del mecanismo 3 asociada a EQ2 del ejemplo 1

Así se observa que hay 2 ecuaciones con 2 incógnitas, por lo que se obtiene.

- $P_{C1} = 3M_P / L$
- $M_2 = 0$

Efectivamente como M_2 es 0, indica que no se forma una rótula plástica en ese nodo, sin formar parte del mecanismo de colapso. En la figura 11, ya viene $M_2 = 0$.

En cuanto a la carga de colapso, es menor que las calculadas anteriormente en los dos primeros mecanismos de colapso propuestos; sumado, a que $M_2 < M_P$ (indica que es seguro), se puede afirmar que este es el mecanismo de colapso.

Dicho mecanismo se puede clasificar como completo (1, 3, 4 y 5), ya que cumple la ecuación 8. Se concluye de esta manera, sin tener que comprobar ningún posible mecanismo más.

En el anexo A se puede comprobar los demás cálculos de los otros mecanismos completos hasta llegar al de colapso.

Tal y como se ha visto en teoría, se llega al siguiente paso: la tabla 1.

A partir del mecanismo de colapso obtenido y con las dos ecuaciones que tenemos, se puede obtener la siguiente Tabla 2:

Sección	1	2	3	4	5
M_i	$-M_P$	0	M_P	$-M_P$	M_P
θ_i	θ_1	0	θ_3	θ_4	θ_5
EC1	1	1	1/2	0	0
EC2	0	0	1/2	1	1
EC3	0	1	1	1	0

Tabla 2: Planteamiento tabla ejemplo 1

A continuación, se muestra el planteamiento de las ECs:

Se calcula la última rótula plástica a partir de plantear las 3 ECs, junto con la ecuación 6:

- Ecuación de compatibilidad 1 (EC1):

$$\frac{-M_P L}{12EI} + \theta_1 + 0,5\theta_3 = 0$$

Ecuación 15: EC1 del ejemplo 1

- Ecuación de compatibilidad 2 (EC2):

$$\frac{M_P L}{12EI} + 0,5\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 0$$

Ecuación 16: EC2 del ejemplo 1

- Ecuación de compatibilidad 3 (EC3):

$$\frac{M_P L}{12EI} + \theta_3 + \theta_4 = 0$$

Ecuación 17: EC3 del ejemplo 1

Teniendo en cuenta estas 3 ecuaciones, se consigue: 3 ecuaciones con 4 incógnitas; por tanto, una incógnita es la última rótula plástica en formarse. Dicha rótula no se sabe cuál es, con lo cual hay que probar hasta dar con ella.

Para ello, se toman las condiciones correspondientes al signo de cada giro, el cual debe coincidir con el de su momento plástico en el instante de colapso.

A simple vista los cálculos más sencillos es que tanto θ_3 , como θ_4 , no pueden ser 0, ya que no concuerdan los signos de los giros restantes con sus respectivos momentos plásticos.

Por otra parte, si θ_5 fuese cero, habría que hacer algunos cálculos más, pero rápidamente, se vería que tampoco puede ser:

$$\frac{M_P L}{12EI} + 0,5\theta_3 + \theta_4 = 0$$

$$\frac{M_P L}{12EI} + \theta_3 + \theta_4 = 0$$

θ_3 saldría 0 también y por tanto θ_1 no coincidiría con su giro y el signo obtenido.

La última rótula plástica en formarse es θ_1 .

- $\theta_1 = 0 \text{ rad}$
- $\theta_3 = \frac{M_P L}{6EI} > 0 \text{ (OK)}$
- $\theta_4 = \frac{-M_P L}{4EI} < 0 \text{ (OK)}$
- $\theta_5 = \frac{M_P L}{12EI} > 0 \text{ (OK)}$

En conclusión, la solución es admisible, segura y compatible, por lo tanto, es la solución del problema planteado. Implica la formación de rótulas plásticas en las secciones 1, 3, 4 y 5, siendo en la 1, donde se forma la última rótula plástica del mecanismo de colapso completo. Así pues, se obtiene lo comentado, con las correspondientes comprobaciones de signo de cada uno de los giros que son distintos de 0 (debido a que se forman antes esas rótulas).

Ejemplo 2: Pórtico biempotrado – caso de carga 2

En este ejemplo se comprobará la misma estructura anterior estudiada, es decir, el mismo pórtico, pero con un cambio en el valor de las cargas que modifica el factor de carga y el mecanismo de colapso. Esta carga diferente, va a ser la aplicada sobre el nodo 4, pasando a ser de valor $P/6$ hacia la derecha. Como se verá, este cambio, afecta en la aparición de las rótulas plásticas, tanto en el orden de formación, como en que se obtengan en diferentes secciones.

En cuanto a la metodología y los cálculos, se comentarán las similitudes sin profundizar en ellas y centrándose en las diferencias.

Ejemplo 2.1: Resolución

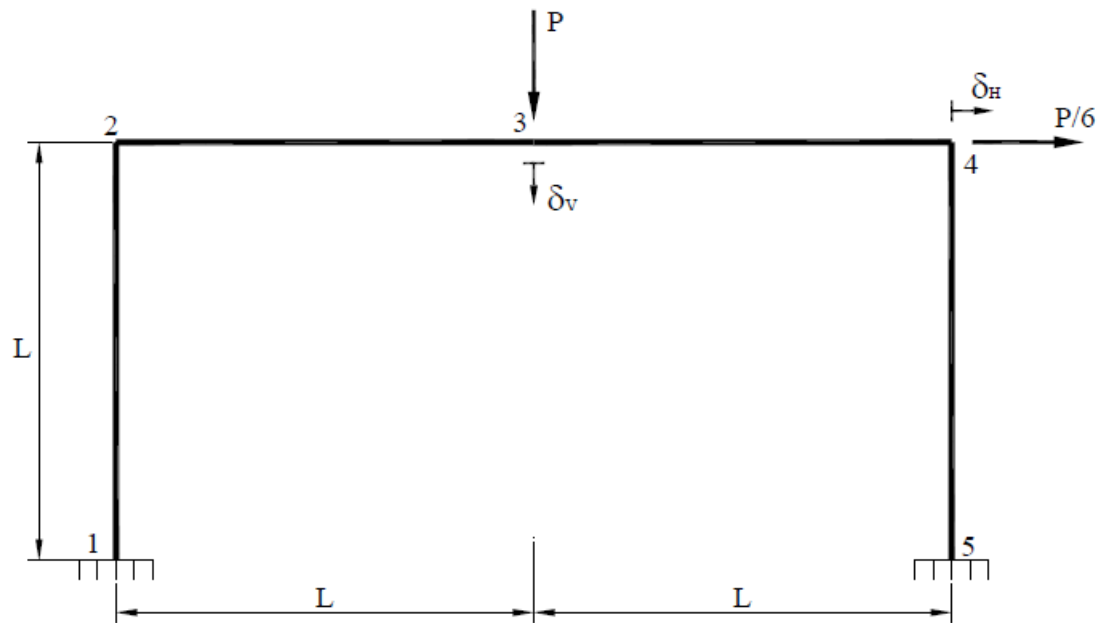


Figura 12: Pórtico biempotrado ejemplo 2

Como se ha comentado, el GH, el NPR y EQ son iguales al ejemplo 1.

1) Ecuación de equilibrio EQ1 asociado al mecanismo de colapso 1 (MC1)

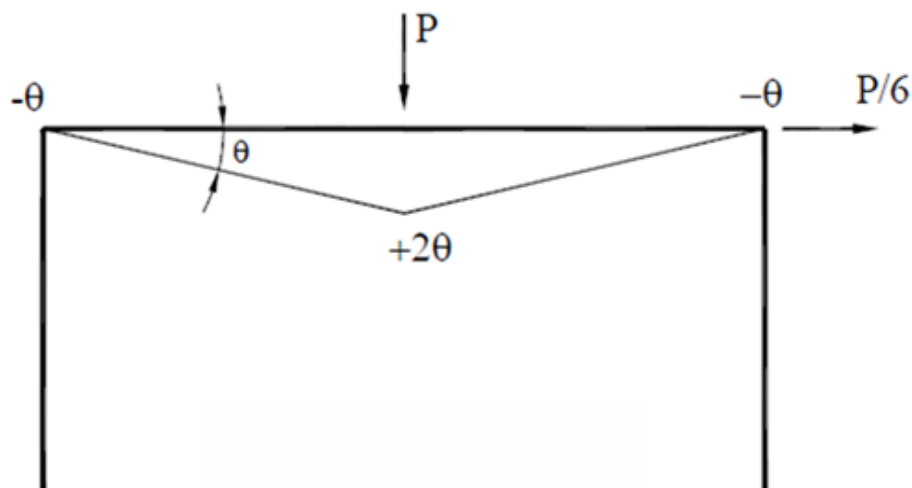


Figura 13: Posible mecanismo de colapso 1 del ejemplo 2

Incluso este primer mecanismo es el mismo ya que solo se tiene en cuenta la carga vertical y hacia abajo P.

Cálculo:

- $M_2 = -M_P$
- $M_3 = M_P$
- $M_4 = -M_P$

$$PL(\theta) = M_2(-\theta) + M_3(+2\theta) + M_4(-\theta)$$

Operando se vuelve a obtener la Ecuación 11 calculada en el anterior ejemplo:

$$PL = -M_2 + 2M_3 - M_4$$

Por tanto, la carga de colapso será la misma también.

Despejando: $P_{C1} = 4M_P / L \rightarrow$ carga de colapso 1.

2) Ecuación de equilibrio 2 (EQ2) asociado al mecanismo de colapso 2 (MC2)

Aquí llega la primera diferencia. Ahora se plantea un segundo mecanismo, el cual va a estar condicionado por la carga horizontal. Dicha carga es la que es diferente en este caso. La carga es $P/6$ hacia la derecha afectando a la resolución.

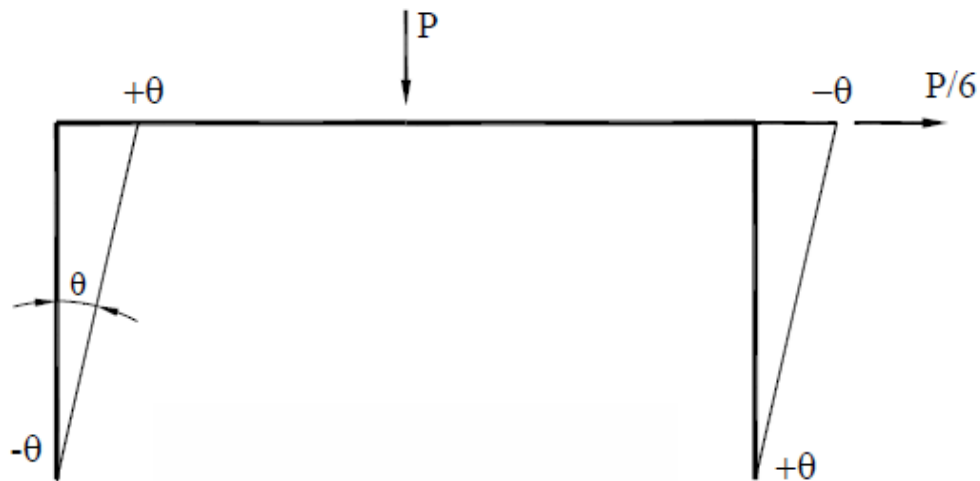


Figura 14: Posible mecanismo de colapso 2 del ejemplo 2

Cálculo:

- $M_1 = -M_P$
- $M_2 = M_P$
- $M_4 = -M_P$
- $M_5 = M_P$

Actuando como se ha ido viendo, se aplica equilibrio de momentos:

$$PL/6(\theta) = M_1(-\theta) + M_2(\theta) + M_4(-\theta) + M_5(+\theta)$$

Se obtiene una nueva ecuación:

$$PL/6 = -M_1 + M_2 - M_4 + M_5$$

Ecuación 18: Ecuación del mecanismo 2 asociada a EQ2 del ejemplo 2

Y despejando: $P_{C2} = 24M_P / L \rightarrow$ carga de colapso 2.

$P_{C1} < P_{C2}$; esto quiere decir que MC1 puede ser el mecanismo de colapso.

Además de la ecuación 17, sustituyendo los valores de los momentos que se tenían de la EQ1, queda:

$$\frac{2M_P}{3} = M_5 - M_1$$

Ecuación 19: Ecuación 17 sustituyendo los valores de EQ1 del ejemplo 2

Solo se necesitan las dos ecuaciones de los dos mecanismos calculados para poder comprobar todos los demás posibles mecanismos de colapso. Es decir, la Ecuación del mecanismo 2 asociada a EQ2 del ejemplo 2 Ecuación 11 y la Ecuación 18.

Se parte calculando los 5 posibles mecanismos completos:

(1, 2, 3 y 4), (1, 2, 3 y 5), (1, 2, 4 y 5), (1, 3, 4 y 5) y (2, 3, 4 y 5).

El (1, 2, 4 y 5) es el MC2 ya calculado.

En el caso de no ser ninguno completo, se comprobarían los mecanismos posibles incompletos:

(1, 2 y 3), (1, 2 y 4), (1, 2 y 5), (1, 3 y 4), (1, 3 y 5), (1, 4 y 5), (2, 3 y 4), (2, 3 y 5), (2, 4 y 5), (3, 4 y 5).

El mecanismo (2, 3 y 4) es el planteado MC1.

Los mecanismos completos son más fáciles de comprobar cómo se puede ver en el anexo B. Solo basta con plantear el mecanismo con las dos ecuaciones de partida, y ver si la carga de colapso es mayor o menor que la que se tenía, y/o la distribución de momentos restante es segura o no.

Dicho lo cual, se ve que ningún mecanismo completo es el de colapso, por lo tanto, se pasaría a comprobar los mecanismos incompletos.

En este caso los cálculos se complican. Se plantean los mecanismos como siempre, pero el problema es que ahora hay más incógnitas que ecuaciones, con lo cual no es posible hallarlo en el primer paso. Ahora, para cada posible mecanismo incompleto, se plantea la tabla correspondiente y se resuelve, es decir, calcular los momentos en las secciones NPR y los giros acumulados en las rótulas plásticas que implique dicho mecanismo. Finalmente, comprobar si la solución es admisible, segura y compatible. Si no es así, no queda otra que seguir comprobando.

Entonces, hay que sacar en este caso, las 3 ecuaciones y plantear un sistema con 6 incógnitas y 5 ecuaciones. Una incógnita es 0 (última rótula plástica en formarse) pero no se sabe cuál es de las 3. Por tanto, habrá que iterar 3 veces, con lo que ello conlleva, ya que es un cálculo con 5 ecuaciones cada vez que se compruebe.

Todo esto, se tendría que hacer para los 10 mecanismos. Por ello, este problema puede llegar a ser muy complejo o demasiado tedioso.

Así, se ve una clara diferencia del ejemplo 1 con el ejemplo 2. Esta es la justificación del trabajo, que todos estos cálculos se puedan ahorrar y con un simple programa, calcular cualquier estructura.

En el anexo B y C se puede seguir y comprobar los cálculos restantes.

En el citado anexo B se calculan los posibles mecanismos completos.

En el caso del anexo C, se detallan los cálculos de los posibles mecanismos incompletos.

Dicho lo cual, en este apartado se incluye el cálculo del mecanismo buscado. Se llega a la conclusión que el mecanismo de colapso es el MC1. Por tanto, el mecanismo es incompleto. Para calcular el valor de los momentos en las secciones donde no se forma rótula plástica, se debe resolver todas las incógnitas de la tabla a la vez, es decir, resolver simultáneamente las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de compatibilidad. Esta simultaneidad, es una diferencia con respecto al ejemplo 1 que se resolvía de inmediato.

A continuación, se plantea la tabla:

Sección	1	2	3	4	5
M_i	M_1	$-M_p$	M_p	$-M_p$	M_5
θ_i	0	θ_2	θ_3	θ_4	0
EC1	1	1	1/2	0	0
EC2	0	0	1/2	1	1
EC3	0	1	1	1	0

Tabla 3: Planteamiento tabla ejemplo 2

- Ecuación de compatibilidad 1 (EC1):

$$\frac{(M_1 - M_P)L}{2EI} + \theta_2 + 0,5\theta_3 = 0$$

Ecuación 20: EC1 del ejemplo 2

- Ecuación de compatibilidad 2 (EC2):

$$\frac{(M_5 - M_P)L}{2EI} + 0,5\theta_3 + \theta_4 = 0$$

Ecuación 21: EC2 del ejemplo 2

- Ecuación de compatibilidad 3 (EC3):

$$\frac{(M_1 + M_5 - 4M_P)L}{6EI} + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$$

Ecuación 22: EC3 del ejemplo 2

Y con la Ecuación 18 que había:

$$\frac{2M_P}{3} = M_5 - M_1$$

Tenemos 4 ecuaciones con 5 incógnitas. Como en el ejemplo 1, una rótula plástica debe ser 0 por ser la última en formarse. En este caso, no es tan intuitivo y hay que iterar más veces haciendo más cálculos.

En el anexo B, están realizados, los distintos casos, con sus correspondientes planteamientos y resultados.

Por tanto: con $\theta_2 = 0$; se plantean las 4 ecuaciones con las 4 incógnitas.

- $\theta_2 = 0$ rad (última rótula en formarse)
- $\theta_3 = \frac{5M_PL}{6EI} > 0 \rightarrow M_3 = +M_P$ (OK)
- $\theta_4 = \frac{-M_PL}{3EI} < 0 \rightarrow M_4 = -M_P$ (OK)
- $M_1 = \frac{M_P}{6} < M_P \rightarrow$ (OK)

$$\triangleright M_5 = \frac{5M_p}{6} < M_p \rightarrow (OK)$$

El MC1 es el mecanismo de colapso, ya que su carga de colapso es menor que las demás y los momentos restantes son seguros siendo menores que el momento plástico de colapso correspondiente.

Ejemplo 2.1: Comprobación a través de Wolfram Mathematica

En este apartado se mostrarán los cálculos a través de Wolfram Mathematica para que sea más sencillo. En este caso, se comprobará qué rótula plástica es la última en formarse. Se puede ver que es mucho más intuitivo y rápido de realizar.

Entonces del mecanismo 2, 3 y 4, se comprueban los giros y momentos plásticos:

$\triangleright$ 1ª comprobación: $\theta_2 = 0$

```
Ec1 = L / 2 EI (M1 - Mp) +  $\theta_2$  +  $\theta_3$  / 2 == 0;
Ec2 = L / 2 EI (M5 - Mp) +  $\theta_3$  / 2 +  $\theta_4$  == 0;
Ec3 = L / 6 EI (M1 + M5 - 4 Mp) +  $\theta_2$  +  $\theta_3$  +  $\theta_4$  == 0;
Ec4 = M5 - M1 == 2 Mp / 3;
Ec5 =  $\theta_2$  == 0;

sol = Solve[{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5}, {M1, M5,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ }]
[resuelve]
```

$$\left\{ \left\{ M_1 \rightarrow \frac{M_p}{6}, M_5 \rightarrow \frac{5M_p}{6}, \theta_2 \rightarrow 0, \theta_3 \rightarrow \frac{5EI L Mp}{6}, \theta_4 \rightarrow -\frac{1}{3} EI L Mp \right\} \right\};$$

Figura 15: Comprobación de $\theta_2=0$ en wolfram mathematica del ejemplo 2

Se puede observar que $M_1 < M_p$ y $M_5 < M_p$, con lo cual es seguro. Por otra parte, los signos de los giros de las rótulas plásticas coinciden con los de sus momentos plásticos, por lo tanto, efectivamente este es el mecanismo de colapso, como ya se ha comentado.

No obstante, se comprueban las otras dos opciones que puede haber, ya que se podría haber comprobado en primera instancia un giro que no fuese el indicado.

- 2ª comprobación: $\theta_3 = 0$

```

Ec1 = L / 2 EI (M1 - Mp) +  $\theta_2$  +  $\theta_3$  / 2 == 0;
Ec2 = L / 2 EI (M5 - Mp) +  $\theta_3$  / 2 +  $\theta_4$  == 0;
Ec3 = L / 6 EI (M1 + M5 - 4 Mp) +  $\theta_2$  +  $\theta_3$  +  $\theta_4$  == 0;
Ec4 = M5 - M1 == 2 Mp / 3;
Ec5 =  $\theta_3$  == 0;

sol = Solve[{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5}, {M1, M5,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ }]

```

$$\left\{ \left\{ M1 \rightarrow \frac{Mp}{6}, M5 \rightarrow \frac{5 Mp}{6}, \theta_2 \rightarrow \frac{5 EI L Mp}{12}, \theta_3 \rightarrow 0, \theta_4 \rightarrow \frac{EI L Mp}{12} \right\} \right\};$$

Figura 16: Comprobación de $\theta_3=0$ en wolfram mathematica del ejemplo 2

En este caso tanto $M_1 < M_P$ y $M_5 < M_P$, sí sería seguro, pero los signos de los giros no coinciden con los de sus momentos plásticos, ya que se puede observar que tanto, θ_2 como θ_4 (positivos ambos), son diferentes de M_2 y M_4 (consultando en la Tabla 3), con lo cual esta no es la última rótula en formarse.

La tercera comprobación de última rótula plástica en formarse, se realizará de la misma forma.

- 3ª comprobación: $\theta_4 = 0$

```

Ec1 = L / 2 EI (M1 - Mp) +  $\theta_2$  +  $\theta_3$  / 2 == 0;
Ec2 = L / 2 EI (M5 - Mp) +  $\theta_3$  / 2 +  $\theta_4$  == 0;
Ec3 = L / 6 EI (M1 + M5 - 4 Mp) +  $\theta_2$  +  $\theta_3$  +  $\theta_4$  == 0;
Ec4 = M5 - M1 == 2 Mp / 3;
Ec5 =  $\theta_4$  == 0;

sol = Solve[{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5}, {M1, M5,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ }]

```

$$\left\{ \left\{ M1 \rightarrow \frac{Mp}{6}, M5 \rightarrow \frac{5 Mp}{6}, \theta_2 \rightarrow \frac{EI L Mp}{3}, \theta_3 \rightarrow \frac{EI L Mp}{6}, \theta_4 \rightarrow 0 \right\} \right\};$$

Figura 17: Comprobación de $\theta_4=0$ en wolfram mathematica del ejemplo 2

Se vuelve a apreciar que $M_1 < M_P$ y $M_5 < M_P$, lo cual serían seguros, pero los signos de los giros no concuerdan ya que θ_2 (sale positivo) y M_2 (es negativo según la Tabla 3).

Así efectivamente está comprobado en este mecanismo los 3 posibles casos de última rótula plástica, siendo $\theta_2 = 0$ como se comentó, la última en formarse.

Este es el mecanismo que interesa. Se ven las operaciones que hay que hacer. Como se ha ido comentado, se tienen 10 posibles mecanismos incompletos que habría que comprobar.

En el peor de los escenarios, la solución de este problema puede conllevar la resolución de 15 mecanismos, 5 de ellos completos y 10 incompletos, si se tiene la mala suerte de comprobar en último lugar el mecanismo (2, 3, 4) buscado. Por tanto, se podría dar esta situación, en la que se halla el mecanismo de colapso, que supone la situación final de la estructura, frente a un incremento proporcional monótono de las cargas aplicadas.

En el anexo C, se pueden comprobar 3 ejemplos del cálculo de posibles mecanismos, en este caso incompletos. No se han comprobado todos debido a la repetitividad de las operaciones y del método similar de cálculo.

CAPITULO 5:

RESULTADOS Y APLICACIONES

5.1 Ejemplo 1

En este apartado se procederá al cálculo de los ejemplos vistos en el capítulo anterior, pero de la forma en la que está orientado este trabajo.

Como se ha podido observar, había claras diferencias entre los dos ejemplos, dependiendo del mecanismo de colapso que se tuviera. Así, el objetivo es conseguir calcular cualquier tipo de mecanismo independientemente de la dificultad.

5.1.1: Resolución mediante Wolfram Mathematica

A continuación, se muestra la resolución del ejemplo 1 (mecanismo completo del anterior apartado), mediante Wolfram Mathematica. Se mostrará todo el código utilizado.

En este caso se han aportado datos como se puede ver al inicio del código. El resultado será numérico a diferencia de como lo calculado en el capítulo 4, pero el objetivo es el mismo.

Perfil IPE 300:

- $I_z = 8360 \text{ cm}^4$
- $A = 53,8 \text{ cm}^2$

Momento plástico, $M_p = S f_y$.

- $S = 628 \text{ cm}^3$
- $F_y = 275 \text{ MPa}$

Cargas P, en este caso se tratará como incógnita.

Datos geométricos del pórtico: la longitud de todas las barras es 5m.

Así pues, se tienen los primeros pasos del código: los datos, nodos, el material, perfil y las barras.

```
datos = {L0 -> 5.0, vE -> 2.1 × 10^11, A -> 10^12 × 53.8 × 10^-4, Iy -> 8360.0 × 10^-8, Sy -> 628 × 10^-6, fy -> 275.0 × 10^6, Mp -> Sy fy, Np -> A fy};

nodos = {{{(0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0)},
  {(0, L0), {"x", "x", "x"}, (0, 0, 0)},
  {(L0, L0), {"x", "x", "x"}, (0, -P, 0)},
  {(2 L0, L0), {"x", "x", "x"}, (P, 0, 0)},
  {(2 L0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0)}}
  } /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)
```

```

barras = {{1, 2}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{2, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{5, 4}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{4, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          } /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez rotacional secciones extremas (kN·m/rad) *)

```

Figura 18: Código de definición del ejemplo 1

Como se puede observar, estos primeros pasos del código, son las definiciones, datos y demás temas de interés, que van a diferenciar cada código.

El código completo se encuentra en el anexo C.

5.2. Ejemplo 2

Se va a proceder con el ejemplo del mecanismo de colapso incompleto. De la misma manera comentada anteriormente, se cambiará únicamente los datos iniciales.

Así pues, quedaría:

```

datos = {L0 → 5.0, vE → 2.1 × 1011, A → 53.8 × 10-4, Iy → 8360.0 × 10-8, Sy → 628 × 10-6, fy → 275.0 × 106, Mp → 172.8 × 103, Np → A fy};

nodos = {{0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
          {{0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},
          {{L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {0, -P, 0}},
          {{2 L0, L0}, {"x", "x", "x"}, {P/6, 0, 0}},
          {{2 L0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
          } /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento *)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)

barras = {{1, 2}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{2, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{3, 4}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{4, 5}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          } /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez rotacional secciones extremas (kN·m/rad) *)

```

Figura 19: Código de definición del ejemplo 2

Según se viene haciendo referencia, la única diferencia con el código anterior, son las cargas. Cambiándolas, se obtiene el cálculo generado de carga de colapso, de rótulas plásticas formadas y de sus giros.

Se va a mostrar la solución del código, ya que en este caso la solución es numérica. En ella se observa la carga de colapso, $P=138,24\text{KN}$; los momentos plásticos de colapso, $M_p=172,8\text{KN m}$; Además tanto en el nodo 1, como en el nodo 5, el momento plástico es menor al de colapso, con lo cual, coincide con lo hallado de forma manual en el capítulo anterior, siendo el mecanismo de colapso incompleto buscado.

En este caso se ha obtenido con valores numéricos y el resultado es el mismo con el mecanismo (2, 3 y 4).

```
sol3 = NMaximize[Join[{P}, eq, ecs, Mij] /. datos, Join[{P}, rM, vθ]] // Quiet
      |maximiza a...| |junta| |silencio|
{138240., {P → 138240., Mz[1] → -115200., Mz[2] → -172800., Mz[3] → 172800.,
Mz[4] → -172800., Mz[5] → 0., θ[1] → 0.0273411, θ[2] → -0.0109364, θ[3] → 0.0492139, θ[4] → 0., θ[5] → 0.}}
```

Figura 20: Código de solución del ejemplo 2

```
(* comprobar *)
Pc = 4 Mp / L0 /. datos
138240.

M1 = Mp / 6 /. datos
M5 = 5 Mp / 6 /. datos
28800.

144000.

θ3 = 5 Mp L / (6 vE Iy) /. datos
0.0410116

θ4 = -Mp L / (3 vE Iy) /. datos
-0.0164046
```

Figura 21: Código de comprobación de giros del ejemplo 2

La solución se determina en base a la carga de colapso comentada, con los momentos plásticos de cada sección. La función NMaximize de Mathematica se utiliza para encontrar el valor máximo numérico de una función, con este caso, las restricciones impuestas por las ecuaciones y momentos plásticos.

Por último, comprueba que el signo de los giros coincide con el de sus momentos plásticos, como ya se vio en el capítulo anterior.

5.3. Aplicaciones

Como se ha ido comentando, el objetivo es que el trabajo tenga varias aplicaciones. Conseguir que con diferentes estructuras se obtengan los resultados esperados.

5.3.1. Estructura tipo nave industrial

Se va a proceder a estudiar una estructura tipo nave industrial. La descripción de esta nave sería a dos aguas, con diferentes cargas de nieve y viento.

Los datos con los que se va a trabajar son:

Perfil IPE 300:

- $I_z = 8360 \text{ cm}^4$
- $A = 53,8 \text{ cm}^2$

Momento plástico, $M_p = 172,7 \text{ KN m}$

Cargas $P = 500\text{N}$

Datos geométricos de la nave:

- $L = 7\text{m}$
- $H = 9,5\text{m}$
- $Luz = 25\text{m}$

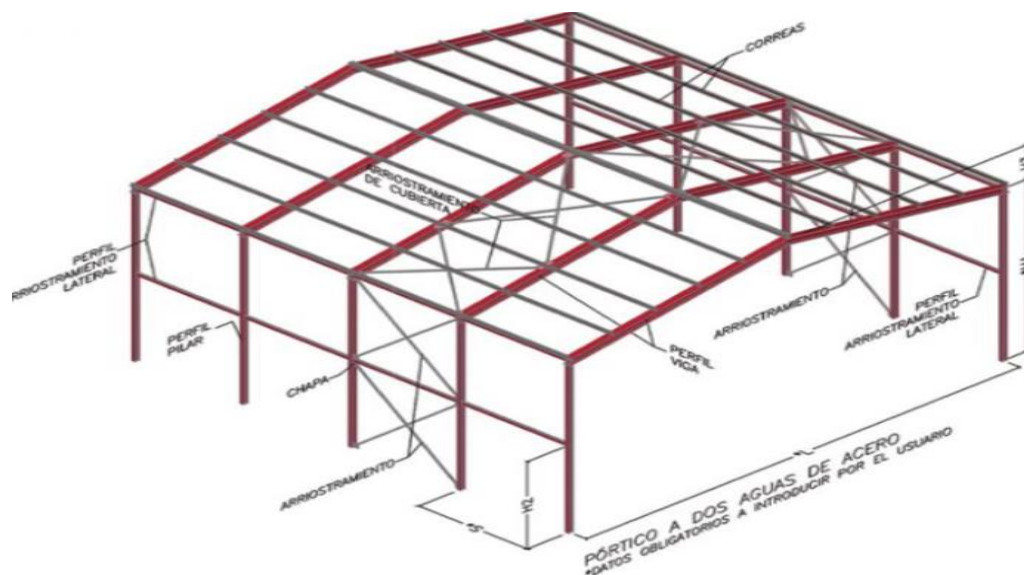


Figura 22: Ejemplo de nave a dos aguas

En la Figura 22 se puede observar un tipo de nave industrial que se asemejaría a la estructura de estudio. En este caso se considera/analiza un pórtico de los representados en la imagen, y además con todas las barras del mismo perfil IPE300,

es decir, tanto las vigas, como los pilares que contiene el pórtico, tendrán la misma sección.

Por tanto, se representa de forma esquemática las siguientes características: líneas medias de las barras, apoyos y cargas del pórtico 2D intermedio tipo a analizar.

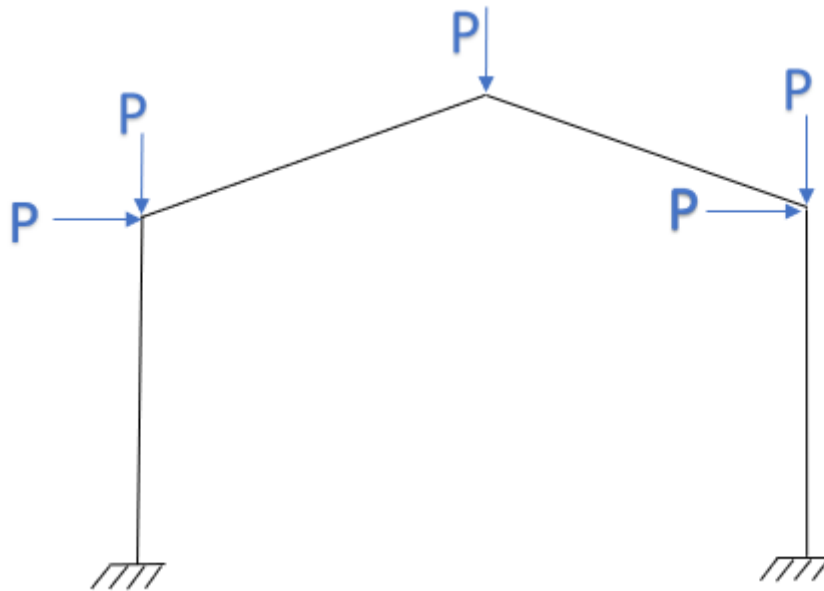


Figura 23: Pórtico a dos aguas con cargas puntuales

En este caso se calculará de forma sistemática como se ha comentado, con Mathematica.

La Figura 23 muestra las cargas verticales y horizontales, es decir cargas por nieve y viento respectivamente. El objetivo del presente trabajo es estudiar los mecanismos de colapso incompletos. Para ello se tiene que ir 'jugando' con esas diferentes cargas hasta conseguir que el mecanismo sea incompleto. Puesto que el programa calcula tanto mecanismos de colapso completos como incompletos, es sencillo iterar con estas cargas hasta hallar uno incompleto.

Con las cargas dispuestas tal que de la manera en la que están en la imagen, se aparece en el programa un mecanismo completo como se verá a continuación. Se ha estado probando hasta conseguir dicho mecanismo de colapso incompleto, pero solo resultaba incompleto para cubierta horizontal, es decir, dinteles en horizontal. Así pues, en este ejemplo se verá con esta distribución y aplicación.

Según se viene haciendo hincapié, simplemente hay que cambiar la parte del código diferente a las demás. Esta es: los datos, la definición de los nodos, el material, el perfil, las cargas y las barras.

```

datos = {Lc → 7.0, H → 9.5, L0 → 25. / 2, vE → 2.1 × 1011, A → 53.8 × 10-4, Iy → 8360.0 × 10-8, Sy → 628 × 10-6, fy → 275.0 × 106,
Mp → 172.8 × 103, Np → A fy, P → 500 λ, q0 → 0};

nodos = {{(0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0)},
        {(0, Lc), {"x", "x", "x"}, {P, -P, 0}},
        {(L0, H), {"x", "x", "x"}, {0, -P, 0}},
        {(2 L0, Lc), {"x", "x", "x"}, {P, -P, 0}},
        {(2 L0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0)}
} /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento *)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Mp}} /. datos; (* una lista por perfil *)

barras = {{(1, 2), (1, 1), (0, 0), {}},
        {(2, 3), (1, 1), (0, 0), {}},
        {(3, 4), (1, 1), (0, 0), {}},
        {(4, 5), (1, 1), (0, 0), {}
} /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez rotacional secciones extremas (kN·m/rad) *)

```

Figura 24: Código de definición de la nave industrial

Como se puede observar los datos son los mencionados al inicio del capítulo. La definición de los nodos, según su ubicación y además la carga en eje 'x' o eje 'y, a las que están sometidas. Por último, las barras de las que se compone el pórtico.

```

{81.502, {λ → 81.502, Mz[1, 1] → -172800., Mz[1, 2] → 52114.3, Mz[2, 2] → 52114.3, Mz[2, 3] → 172800., Mz[3, 3] → 172800.,
Mz[3, 4] → -172800., Mz[4, 4] → -172800., Mz[4, 5] → 172800., Nx[1] → -52130., Nx[2] → -10684.6, Nx[3] → -14213.3, Nx[4] → -70123.1}}

```

Figura 25: Solución de mathematica de la nave a dos aguas

La solución mostrada representa que el nodo 2, es el único en el que no se forma la rótula plástica, al ser menor la carga de colapso a la que está sometido: $52114,3N < 172800N$. Los demás momentos plásticos son de valor 172,8KN m. Además del valor de $\lambda = 81,502$ que representa el factor de carga de colapso (indica por cuanto se puede multiplicar la carga real hasta llegar al colapso) y también están calculados los esfuerzos axiales (N_x) en cada sección, aunque no se utilizarán.

Se ha implementado dentro del código, una parte gráfica, para que se aprecie con más afinidad la estructura y la aparición de las rótulas plásticas.

Así pues, se muestra a continuación esta última parte del código.

En este caso son 4 rótulas plásticas, haciendo un mecanismo completo, los nodos 1, 3, 4 y 5.

5.3.2. Pórtico 2D de edificación

Se plantea otro ejemplo de aplicación. Para este caso se propone un pórtico de edificación del estilo de la siguiente figura:



Figura 27: Ejemplo pórtico de edificación

El objetivo es comprobar otro tipo de estructura y ver cómo se comporta.

A continuación, se mostrarán los datos necesarios de la estructura. Para empezar, se compone de dos perfiles diferentes. El primer perfil va a ser HEB220, el cual será el perfil utilizado para los pilares.

Los datos son:

Perfil HEB220:

- $I_{z1} = 8091 \text{ cm}^4$
- $A_1 = 91 \text{ cm}^2$
- $M_{p1} = 227,425 \text{ KN m}$

Para las vigas se utilizará el mismo perfil que en el ejemplo anterior.

Perfil IPE300:

- $I_{z2} = 8360 \text{ cm}^4$
- $A_2 = 53,8 \text{ cm}^2$
- $M_{p2} = 172,7 \text{ KN m}$

Cargas: $P = 2000\text{N}$. En este caso se simulan cargas por viento.

Datos geométricos de la estructura:

- $L = 8\text{m}$
- $H = 4\text{m}$

Siendo 'L', la distancia entre cada uno de los empotramientos; y 'H', la altura de los pisos. El tipo de estructura que se propone es el siguiente:

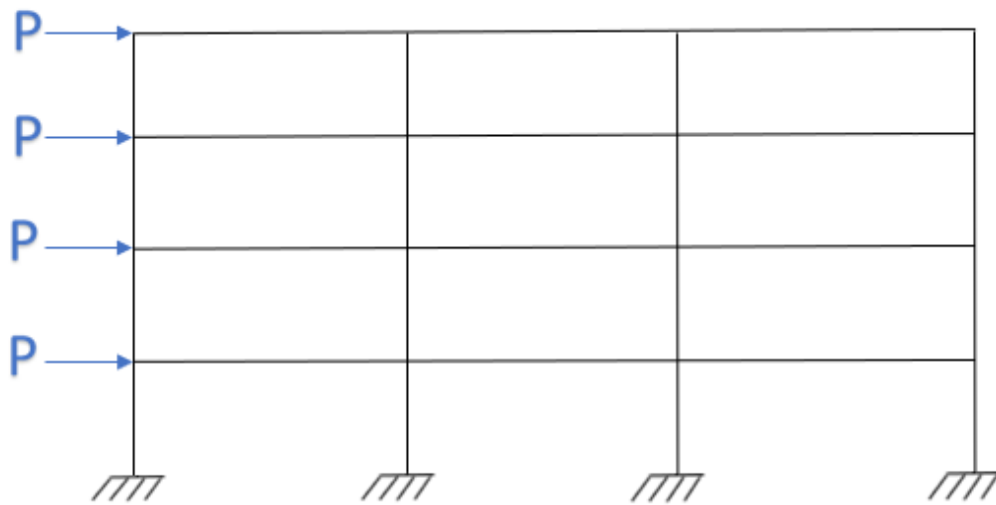


Figura 28: Pórtico de edificación 2D

Como en el ejemplo anterior, con el código que se parte de base, se hacen simplemente unas modificaciones. Dichas modificaciones serán principalmente de las barras, las cuales hay que identificarlas todas, y siendo en este caso un número bastante mayor que en los casos anteriores.

Los datos geométricos se añaden a los relacionados con el perfil, ya que aparece uno más.

También es un cambio significativo, el número de nodos (relacionado con el mayor número de barras). Primero se indica la posición de cada nodo, para posteriormente introducir las cargas, si las hay, que afectan a ese nodo.

A continuación, se mostrará en dicho código:

```
datos = {L1 → 4.0, L2 → 8.0, vE → 2.1×1011, A1 → 91.0×10-4, I1 → 8091.0×10-8, Mp1 → 227.425×103, A2 → 53.8×10-4,  
I2 → 8356.0×10-8, Mp2 → 172.7×103, fy → 275×106, P3 → 2000λ, q0 → 0×5000};
```

```
nodos = {{ {0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},  
          {{L2, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},  
          {{2 L2, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},  
          {{3 L2, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},  
  
          {{0, L1}, {"x", "x", "x"}, {P3, 0, 0}},  
          {{L2, L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
          {{2 L2, L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
          {{3 L2, L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
  
          {{0, 2 L1}, {"x", "x", "x"}, {P3, 0, 0}},  
          {{L2, 2 L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
          {{2 L2, 2 L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
          {{3 L2, 2 L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
  
          {{0, 3 L1}, {"x", "x", "x"}, {P3, 0, 0}},  
          {{L2, 3 L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
          {{2 L2, 3 L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
          {{3 L2, 3 L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
  
          {{0, 4 L1}, {"x", "x", "x"}, {P3, 0, 0}},  
          {{L2, 4 L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
          {{2 L2, 4 L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}},  
          {{3 L2, 4 L1}, {"x", "x", "x"}, {0, 0, 0}}  
} /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)
```

```
material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)  
perfil = {{A1, I1, Mp1}, {A2, I2, Mp2}} /. datos; (* una lista por perfil *)
```

```
barras = {  
  {{1, 5}, {1, 1}, {1, q0}, {}},  
  {{2, 6}, {1, 1}, {0}, {}},  
  {{3, 7}, {1, 1}, {0}, {}},  
  {{4, 8}, {1, 1}, {0}, {}},  
  
  {{5, 6}, {1, 2}, {1, q0}, {}},  
  {{6, 7}, {1, 2}, {1, q0}, {}},  
  {{7, 8}, {1, 2}, {1, q0}, {}},  
  
  {{5, 9}, {1, 1}, {1, q0}, {}},  
  {{6, 10}, {1, 1}, {0}, {}},  
  {{7, 11}, {1, 1}, {0}, {}},  
  {{8, 12}, {1, 1}, {0}, {}},  
}
```

```

{{9, 10}, {1, 2}, {1, q0}, {}},
{{10, 11}, {1, 2}, {1, q0}, {}},
{{11, 12}, {1, 2}, {1, q0}, {}},

{{9, 13}, {1, 1}, {1, q0}, {}},
{{10, 14}, {1, 1}, {0}, {}},
{{11, 15}, {1, 1}, {0}, {}},
{{12, 16}, {1, 1}, {0}, {}},

{{13, 14}, {1, 2}, {1, q0}, {}},
{{14, 15}, {1, 2}, {1, q0}, {}},
{{15, 16}, {1, 2}, {1, q0}, {}},

{{13, 17}, {1, 1}, {1, q0}, {}},
{{14, 18}, {1, 1}, {0}, {}},
{{15, 19}, {1, 1}, {0}, {}},
{{16, 20}, {1, 1}, {0}, {}},

{{17, 18}, {1, 2}, {1, q0}, {}},
{{18, 19}, {1, 2}, {1, q0}, {}},
{{19, 20}, {1, 2}, {1, q0}, {}},
} /. datos; (* nodos/material y perfil/qy (locales)/rigidez rotacional secciones extremas (kN.m/rad) *)

```

Figura 29: Código de definición del pórtico 2D de edificación

Se puede apreciar que las principales diferencias con los ejemplos anteriores son, a la hora de nombrar cada nodo y cada barra, debido al mayor número de ellos.

Como se ha visto en la nave a dos aguas, se había generado una parte gráfica en el código. En este caso, se cambia dentro de dicha parte gráfica, el perfil de las barras, ya que se introduce uno a mayores.

```

(* perfil de las barras *)
g2 = {};
For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada
    i = barras[b][1][1];
    j = barras[b][1][2];
    L = √((xy[j][1] - xy[i][1])^2 + (xy[j][2] - xy[i][2])^2);
    λx = (xy[j][1] - xy[i][1]) / L;
    λy = (xy[j][2] - xy[i][2]) / L;

    k = barras[b][2][2];
    If[k == 1,
|sí
        g2 =
        Join[g2,
        |junta
            {Graphics[{Text[Style["HEB220", Tiny, Bold, Blue], {(xy[j][1] + xy[i][1]) / 2, (xy[j][2] + xy[i][2]) / 2} + 0.3 {1.3 λy, λx},
            |gráfico |texto |estilo |tam... |negrita |azul
                Automatic, {λx, λy}]}]}];
        |automatico
    }
}

```

```

];
If[k == 2,
|si
g2 =
Join[g2,
|junta
{Graphics[{Text[Style["IPE300", Tiny, Bold, Blue], { (xy[[j]][1] + xy[[i]][1]) / 2, (xy[[j]][2] + xy[[i]][2]) / 2} + 0.3 {1.3 λy, λx},
|gráfico |texto |estilo |tam... |negrita |azul
Automatic, {λx, λy}]}]}];
|automático
}
}
];

```

Figura 30: Código de perfiles de barras del pórtico 2D de edificación

En este caso se nombran ambos perfiles, HEB220 e IPE300.

La solución gráfica sería:

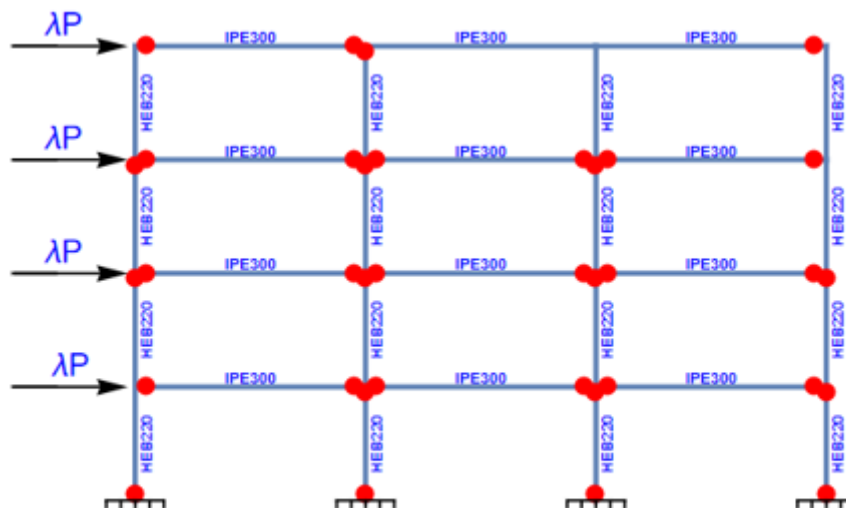


Figura 31: Representación gráfica de las rótulas plásticas formadas en el pórtico 2D de edificación

$$\lambda_c = \lambda / .sol[2]$$

$$50.9929$$

Figura 32: Factor de carga de colapso del pórtico 2D de edificación

Y el factor de carga de colapso de este ejemplo es $\lambda = 50,9929$.

A mayores en este caso, se comprueba el tipo de mecanismo. Ya que, al obtener un mayor número de rótulas plásticas, es de gran ayuda.

```
(* tipo mecanismo *)  
  
= r = 3 × 4;  
  c = 9;  
  l = 0;  
  GH = r + 3 c - (3 + l)  
  
= 36  
  
= nRPs = Dimensions[g1] [[1]]  
           |dimensiones  
  
= 36  
  
(* incompleto *)
```

Figura 33: Comprobación del tipo de mecanismo en el pórtico 2D de edificación

Es un mecanismo de colapso incompleto. Este el objeto de estudio del trabajo, pero se observa que se puede calcular cualquier mecanismo independientemente del que salga.

CAPITULO 6:

CONCLUSIONES Y LINEAS FUTURAS

6.1. Conclusiones

En este trabajo lo que se buscaba desde un inicio, como se ha ido comentando, es crear un método de cálculo sistemático para poder simplificar los problemas que puedan llegar a ser largos y costosos, de análisis límite o cálculo plástico de estructuras 2D de barras esbeltas.

Para ello, ha sido necesario adquirir ciertos conocimientos mediante la asignatura Estructuras y Construcciones Industriales, como el Principio de las Fuerzas Virtuales (PFV), las ecuaciones de equilibrio y aplicar de forma eficiente el método cinemático directo, para hallar el mecanismo de colapso de la estructura.

En este caso, se ha realizado un código en Wolfram Mathematica, en el que se obtienen la carga de colapso, los valores de los momentos flectores en cada nodo de la discretización de la estructura y los giros relativos acumulados en las rótulas plásticas. El trabajo se ha centrado en los mecanismos de colapso incompletos, porque requieren un mayor esfuerzo de cálculo, y por ello, para los que aporta mayor ventaja la sistematización de su análisis plástico. Pero la metodología es general, ya que si el estado final de la estructura al aumentar progresivamente la carga, resulta en un mecanismo de colapso completo, el código de Mathematica también lo resuelve, es decir, independientemente del tipo de mecanismo de colapso: incompleto, completo o supercompleto.

Además, no se trata de ir ensayando mecanismos posibles hasta dar con la solución, que es lo que se suele necesitar hasta encontrar el mecanismo de colapso, si no que, se optimiza mediante los criterios mencionados anteriormente.

Por tanto, se puede observar, que se han realizado diferentes comprobaciones, con estructuras de diversa índole, soportando distintas cargas sobre los nodos. En estas comprobaciones, se ha determinado mecanismos de colapso tanto completos como incompletos, dando lugar a un correcto resultado en ambos casos. Así pues, se llega a la conclusión de que se pueden realizar cálculos de múltiples estructuras relacionadas con la construcción y sometidas a cargas de ámbito diario con las condiciones que se proponen.

A continuación, se proponen otras condiciones que se podrán realizar en un futuro para diferentes estudios.

6.2. Líneas futuras

Los posibles casos o experimentaciones en este sentido, es muy amplio, con lo cual, se verán algunas de ellas.

En este trabajo, se ha experimentado con barras esbeltas de la misma sección, con cargas puntuales y con empotramientos como apoyos. Ahora se plantean otras

opciones para ver qué posibles cambios, modificaciones y nuevas variables se podrían incluir y aportar para futuros trabajos.

1) Cargas distribuidas: en este caso introducir cargas distribuidas también modificaría el código. Se podría hacer aquí un inciso, ya que se pueden ‘intercambiar’ por cargas puntuales. Sería algo más complicado y un cálculo cerca de la exactitud, ya que, al ir aumentando el número de cargas puntuales, se aproximaría aún más a lo equivalente de la carga distribuida. Por tanto, mediante el mismo código generado en este trabajo, se podría implementar una carga distribuida, cambiándola por varias cargas puntuales. Entonces en favor del código producido en este proyecto, se podría aproximar.

2) Perfil variable: el perfil variable podría ser otra línea futura. En este caso se denomina así ya que el perfil tiene una variación lineal del canto, y, por tanto, en las tablas de propiedades y dimensiones de la sección, cambia respecto al mismo tipo de perfil, pero de sección constante.

A continuación, se muestra una tabla de perfil variable y una imagen del perfil:

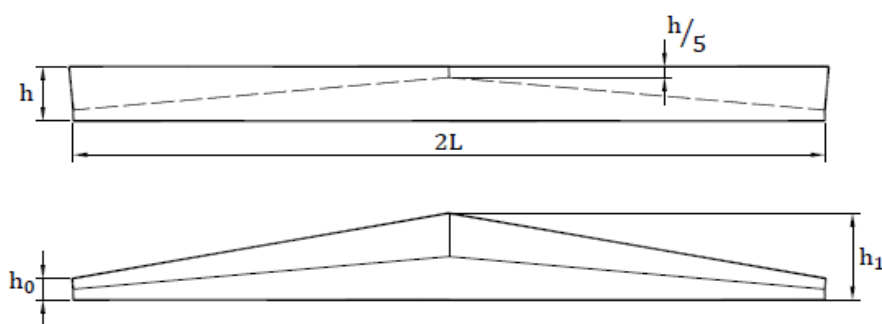


Figura 34: Perfil variable

IPEvar	h_0	h_1	b	e	e_1	$W_{p,0}$	$M_{p,0}$	$W_{p,1}$	$M_{p,1}$
S275	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(cm ³)	(Nm)	(cm ³)	(Nm)
80	32	128	46	3.8	5.2	6.853	1884.79	42.51	11690.8
100	40	160	55	4.1	5.7	11.59	3187.65	71.01	19526.90
120	48	192	64	4.4	6.3	18.19	5002.78	110.28	30326.20
140	56	224	73	4.7	6.9	26.82	7376.64	161.27	44349.10
160	64	256	82	5.0	7.4	37.37	10276.90	223.57	61482.40
180	72	288	91	5.3	8.0	50.75	13955.5	301.87	83013.90
200	80	320	100	5.6	8.5	66.33	18241.20	393.31	108160.00
220	88	352	110	5.9	9.2	86.89	23895.00	511.07	140543.00
240	96	384	120	6.2	9.8	110.42	30365.10	645.88	177617.00
270	108	432	135	6.6	10.2	147.33	40516.40	860.35	236597.00
300	120	480	150	7.1	10.7	192.68	52987.80	1126.53	309797.00
330	132	528	160	7.5	11.5	244.00	67099.10	1428.53	392846.00
360	144	576	170	8.0	12.7	311.61	85692.40	1822.49	501183.00
400	160	640	180	8.6	13.5	394.03	108357.00	2330.30	640832.00
450	180	720	190	9.4	14.6	512.26	140872.00	3078.21	846508.00
500	200	800	200	10.2	16.0	660.77	181712.00	4012.85	1103530.00
550	220	880	210	11.1	17.2	828.11	227729.00	5100.67	1402680.00
600	240	960	220	12.0	19.0	1046.19	287703.00	6483.63	1783000.00

Tabla 4: Tabla de valores de perfil variable

Las diferencias más notorias con respecto a un perfil normal, es tener dos alturas h_0 y h_1 .

3) Deformaciones iniciales: cuando se habla de deformaciones iniciales, se pueden referir a deformaciones debido a la temperatura, es decir que, antes de aplicar las posibles cargas a las que va a estar sometida la estructura, haya sufrido unas pequeñas deformaciones debido a esos cambios de temperatura. También es usual estas deformaciones debido a falta de ajuste. Otro tipo podría ser, el de tensiones residuales, que corresponde al caso de tensiones iniciales no nulas conocidas.

CAPITULO 7:

PRESUPUESTO

7.1. Introducción

En este apartado, se verán cuáles son los costes teóricos que dan lugar a este proyecto.

Para ello primero se ha de determinar qué aportaciones son más importantes, es decir, en este caso, prácticamente no se necesitan materiales en sí, solamente el trabajo humano y las horas trabajadas. Esto es debido a que como se ha visto durante todo el desarrollo del trabajo, es necesario un ordenador, para poder llevar a cabo la resolución del problema de cálculo plástico mediante el programa informático Wolfram Mathematica. Aun así, se desglosará cada coste.

7.2. Costes directos

Los costes directos son los que afectan directamente al cálculo del precio final.

Por un lado, están los costes por mano de obra. La mano de obra en este caso va a ser la del trabajo de un ingeniero.

Para ello, se calcula en base a los días efectivos por año, por tanto:

Días totales en un año	365
Sábados y domingos	104
Días festivos	11
Días laborables de vacaciones	22
Días para asuntos propios	6
Total de días útiles de trabajo	222
	1776
A 8 horas diarias:	horas/año

Tabla 5: Horas efectivas trabajadas por año

El siguiente paso es estimar los costes de tener un trabajador. En este caso se va a tener en cuenta al ingeniero, como junior.

Por tanto, en la siguiente tabla se muestra el desglose de los costes anuales de tener un trabajador:

Sueldo bruto	28000 €/año
--------------	-------------

Prestaciones a la seguridad social (30%)	8400 €/año
Total	36400 €/año
Coste de mano de obra por hora	20,5 €/hora

Tabla 6: Costes anuales de un trabajador

Así, se aplica en base a las horas trabajadas en cada fase y proceso de trabajo, el precio por hora del ingeniero.

	Número de horas	Precio por hora (€)	Total (€)
Investigación	75	20,5	1537,5
Estudio de Wolfram Mathematica	30	20,5	615
Análisis del programa	30	20,5	615
Programación del problema	100	20,5	2050
Validación de resultados con SAP2000	20	20,5	410
Escritura del documento	150	20,5	3075
Presupuesto final			8302,5

Tabla 7: Costes directos y número de horas

Los costes directos del proyecto son ocho mil trescientos dos con cinco céntimos.

7.3. Costes indirectos

Los costes indirectos son los que engloban los gastos de las actividades de una empresa que no se pueden considerar a ninguna otra actividad del proyecto.

Se ha estimado un 15% de los costes directos como costes indirectos, incluyendo medios informáticos, gestión administrativa, servicios generales y costes de documentación y formación.

Entonces se calcula por porcentaje respecto a los costes indirectos, en este caso por cada porcentaje estimado de cada categoría de coste indirecto, se multiplica por 83,025 € que es el 1% del total de los costes indirectos.

Por tanto, se muestra de la siguiente manera:

Categoría	Porcentaje estimado (%)	Coste (€)	Descripción breve
Medios informáticos	5	415,125	Licencias, software, mantenimiento y amortización de equipo
Costes administrativos	4	332,1	Gestión, coordinación, redacción de documentación técnica
Gastos generales de oficina	3	249,075	Suministros (electricidad, internet, impresión, etc.)
Supervisión y control técnico	2	166,05	Revisión de avances, control por parte del tutor académico
Formación y documentación	1	83,025	Revisión bibliográfica, normativa y manuales técnicos
Total costes indirectos	15	1245,38	

Tabla 8: Tabla de costes indirectos

Los costes indirectos del proyecto son mil doscientos cuarenta y cinco con treinta y ocho céntimos.

7.4. Costes totales

Para finalizar el coste económico, se deben sumar los costes directos con los indirectos para hacer la suma total. Además de aplicar el IVA. Se muestra a continuación:

Costes directos	8.302,50 €
Costes indirectos	1.245,38 €
Costes totales	9.547,88 €
+21% IVA	11.552,93 €

Tabla 9: Presupuesto final

Los costes totales del proyecto, aplicando el 21% de IVA, ascienden a once mil quinientos cincuenta y dos euros con noventa y tres céntimos.

CAPITULO 8:

BIBLIOGRAFIA

8.1. Referencias bibliográficas

[1] Carlborg, GR. (2008). Cálculo plástico de estructuras de barras: Teoría, Tercera edición.

[2] OCW. (2013). Teoría de estructuras.

Disponible en: <https://ocw.ehu.eus/course/view.php?id=186&lang=es> (2013)

[3] Editorial Team. (2025). Estructura hiperestática: qué son y cómo resolverlas. *Biblus*. Disponible en:

<https://biblus.accasoftware.com/es/estructura-hiperestatica-que-son-y-como-resolverlas/> (2025)

[4] Corral, C. (2024) Prontubeam.

Disponible en: https://www.prontubeam.com/Pag_inicial_prontuario.php (2024)

[5] Basset Salom, L. (2012). Clasificación estática de las estructuras. Disponible en: <https://riunet.upv.es/handle/10251/16447> (2012)

[6] e-Struc (2018). Cómo calcular los arriostramientos en pórticos. Disponible en: <https://e-struct.com/2018/10/02/como-calcular-los-arriostramientos-en-porticos/> (2022)

[7] Rey Rey, J. (2013). Análisis plástico de estructuras. Escuela técnica superior de arquitectura de Madrid. Disponible en:

<https://1library.co/article/an%C3%A1lisis-pl%C3%A1stico-de-estructuras-estructuras-durante-el-siglo.q5rv5lgz> (2013)

[8] Industriapedia.com. Qué es un mecanismo de colapso. Disponible en: <https://industriapedia.com/que-es-un-mecanismo-de-colapso/>

[9] Magdaleno, A. (2024). Cálculo plástico. Método directo. Universidad de Valladolid.

[10] Magdaleno, A. (2024). Cálculo plástico. Introducción. Universidad de Valladolid

[11] Análisis límite de estructuras de barras. Cálculo plástico. Área de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Escuela de Ingenierías Industriales. Universidad de Valladolid.

[12] Ballesteros, A. (2016). Cálculo plástico: origen, desarrollo y comparativa con el cálculo elástico. Universidad de Alcalá, Escuela de Arquitectura. Disponible en: <https://ebuah.uah.es/dspace/handle/10017/26058> (2016)

[13] Cacho-Pérez, M. Limit analysis of planar steel frames with variable section type and arbitrary loads, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 162, 2024, 104718. Disponible en: doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104718

CAPITULO 9:

ANEXOS

Anexo A: Cálculo de mecanismos posibles del ejemplo 1.

Primero se parte de los posibles mecanismos completos.

Son: (1, 2, 3 y 4), (1, 2, 3 y 5), (1, 2, 4 y 5), (1, 3, 4 y 5) y (2, 3, 4 y 5).

➤ MC 1 (1, 2, 3 y 4):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = -M_P \\ M_2 = M_P \\ M_3 = -M_P \\ M_4 = M_P \end{array} \right.$$

Con las ecuaciones 11 y 12, se calcula:

$$PL = -M_P - 2M_P - M_P \rightarrow P_C = 4M_P/L$$

$$PL = M_P + M_P - M_P + M_5 \rightarrow M_5 = 5M_P > M_P$$

Con lo cual este mecanismo no es.

➤ MC 2 (1, 2, 3 y 5):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = -M_P \\ M_2 = M_P \\ M_3 = -M_P \\ M_5 = M_P \end{array} \right.$$

$$PL = -M_P - 2M_P - M_4 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

$$PL = M_P + M_P - M_4 + M_P \rightarrow$$

No es posible este mecanismo. Se descarta.

➤ MC 3 (1, 2, 4 y 5):

Este mecanismo ya se ha planteado.

Anexo B: Cálculo de mecanismos completos posibles del ejemplo 2

Se plantean primero los mecanismos completos.

Se comprobarán cada mecanismo, con las ecuaciones 11 y 18 obtenidas en el cálculo del ejemplo 2.

➤ MC1 (1, 2, 3, 4):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = -M_P \\ M_2 = M_P \\ M_3 = -M_P \\ M_4 = M_P \end{array} \right.$$

$$PL = -M_P - 2M_P - M_P \rightarrow P_C = 4M_P/L$$

$$PL/6 = M_P + M_P - M_P + M_5 \rightarrow M_5 = -7/3M_P > M_P \text{ (en valor absoluto)}$$

Con lo cual este mecanismo se descarta (no es seguro).

➤ MC 2 (1, 2, 3 y 5):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = -M_P \\ M_2 = M_P \\ M_3 = -M_P \\ M_5 = M_P \end{array} \right.$$

$$PL = -M_P - 2M_P - M_4 \rightarrow P_C = 36M_P/L$$

$$PL/6 = M_P + M_P - M_4 + M_P \rightarrow M_4 = -9/5M_P > M_P$$

Tampoco es el mecanismo de colapso.

➤ MC 3 (1, 2, 4 y 5):

Es el segundo mecanismo planteado.

➤ **MC 4 (1, 3, 4 y 5):**

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = -M_P \\ M_3 = M_P \\ M_4 = -M_P \\ M_5 = M_P \end{array} \right.$$

$$PL = -M_2 - 2M_P + M_P \rightarrow P_C = 36M_P/L$$

$$PL/6 = M_P + M_2 + M_P + M_P \rightarrow M_2 = -9/5M_P > M_P$$

No es el mecanismo de colapso.

➤ **MC 5 (2, 3, 4 y 5):**

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2 = -M_P \\ M_3 = M_P \\ M_4 = -M_P \\ M_5 = M_P \end{array} \right.$$

$$PL = -M_P - 2M_P - M_P \rightarrow P_C = 4M_P/L$$

$$PL/6 = -M_1 + M_P - M_P + M_5 \rightarrow M_1 = 5/3M_P > M_P \text{ (No es seguro)}$$

Con lo cual este mecanismo tampoco es.

La conclusión es que no es ningún mecanismo completo el de colapso.

Se debe comprobar ahora los mecanismos incompletos, con todo lo que ello conlleva.

Anexo C: Cálculo de mecanismos incompletos posibles del ejemplo 2

Se plantea el primer posible mecanismo de colapso incompleto.

Se vuelve a partir de las mismas ecuaciones del ejemplo 2, la 11 y la 18:

➤ **MC 1 (1, 2 y 3):**

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = -M_P \\ M_2 = M_P \\ M_3 = -M_P \end{array} \right.$$

$$PL = -M_P - 2M_P - M_4 \rightarrow M_4 = P_C L + 3M_P$$

$$PL/6 = M_P + M_P - M_4 + M_5 \rightarrow 7P_C L/6 + M_P = M_5$$

Sección	1	2	3	4	5
M_i	$-M_P$	M_P	$-M_P$	M_4	M_5
θ_i	θ_1	θ_2	θ_3	0	0
EC1	1	1	1/2	0	0
EC2	0	0	1/2	1	1
EC3	0	1	1	1	0

-EC1:

$$\frac{(M_4 - M_P)L}{12EI} + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$$

-EC2:

$$\frac{(6M_5 + 11M_4 - 5M_P)L}{12EI} + 0,5\theta_3 = 0$$

-EC3:

$$\frac{(5M_4 + M_5 - 2M_P)L}{6EI} + \theta_2 + \theta_3 = 0$$

Las comprobaciones se generan con Wolfram Mathematica:

Se comprueban los giros y momentos plásticos:

1ª comprobación con θ_1 :

$$Ec1 = L / 12 EI (M4 - Mp) + \theta1 + \theta2 + \theta3 == 0;$$

$$Ec2 = L / 12 EI (11 M4 + 6 M5 - 5 Mp) + \theta3 / 2 == 0;$$

$$Ec3 = L / 6 EI (5 M4 + M5 - 2 Mp) + \theta2 + \theta3 == 0;$$

$$Ec4 = M4 == P L + 3 Mp;$$

$$Ec5 = M5 == (7 P L) / 6 + Mp;$$

$$Ec6 = \theta1 == 0;$$

$$sol = \text{Solve}[\{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5, Ec6\}, \{M4, M5, P, \theta1, \theta2, \theta3\}]$$

$$\left\{ \left\{ M4 \rightarrow \frac{12 Mp}{17}, M5 \rightarrow -\frac{57 Mp}{34}, P \rightarrow -\frac{39 Mp}{17 L}, \theta1 \rightarrow 0, \theta2 \rightarrow -\frac{81}{68} \frac{EI L Mp}{L}, \theta3 \rightarrow \frac{62 EI L Mp}{51} \right\} \right\};$$

$M4 > Mp$ y $M5 > Mp$ (en valor absoluto) con lo cual no es seguro.

2ª comprobación con $\theta_2 = 0$:

$$Ec1 = L / 12 EI (M4 - Mp) + \theta1 + \theta2 + \theta3 == 0;$$

$$Ec2 = L / 12 EI (11 M4 + 6 M5 - 5 Mp) + \theta3 / 2 == 0;$$

$$Ec3 = L / 6 EI (5 M4 + M5 - 2 Mp) + \theta2 + \theta3 == 0;$$

$$Ec4 = M4 == P L + 3 Mp;$$

$$Ec5 = M5 == (7 P L) / 6 + Mp;$$

$$Ec6 = \theta2 == 0;$$

$$sol = \text{Solve}[\{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5, Ec6\}, \{M4, M5, P, \theta1, \theta2, \theta3\}]$$

$$\left\{ \left\{ M4 \rightarrow \frac{93 Mp}{71}, M5 \rightarrow -\frac{69 Mp}{71}, P \rightarrow -\frac{120 Mp}{71 L}, \theta1 \rightarrow \frac{81 EI L Mp}{142}, \theta2 \rightarrow 0, \theta3 \rightarrow -\frac{127}{213} \frac{EI L Mp}{L} \right\} \right\};$$

Se tiene que $M4 > Mp$ por tanto no es seguro; tampoco es.

3ª comprobación con $\theta_3 = 0$:

$$Ec1 = L / 12 EI (M4 - M_P) + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0;$$

$$Ec2 = L / 12 EI (11 M4 + 6 M5 - 5 M_P) + \theta_3 / 2 = 0;$$

$$Ec3 = L / 6 EI (5 M4 + M5 - 2 M_P) + \theta_2 + \theta_3 = 0;$$

$$Ec4 = M4 = P L + 3 M_P;$$

$$Ec5 = M5 = (7 P L) / 6 + M_P;$$

$$Ec6 = \theta_3 = 0;$$

$$sol = \text{Solve}[\{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5, Ec6\}, \{M4, M5, P, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}]$$

[resuelve]

$$\left\{ \left\{ M4 \rightarrow \frac{10 M_P}{9}, M5 \rightarrow -\frac{65 M_P}{54}, P \rightarrow -\frac{17 M_P}{9 L}, \theta_1 \rightarrow \frac{31 EI L M_P}{81}, \theta_2 \rightarrow -\frac{127}{324} EI L M_P, \theta_3 \rightarrow 0 \right\} \right\};$$

$M_4 > M_P$ y $M_5 > M_P$ (en valor absoluto) con lo cual tampoco es seguro.

Por tanto, este no sería el mecanismo de colapso al no cumplir en ningún caso las condiciones.

➤ MC 2 (1, 2 y 4):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = -M_P \\ M_2 = M_P \\ M_4 = -M_P \end{array} \right.$$

$$PL = -M_P + 2M_3 + M_P \rightarrow M_3 = P_C L / 2$$

$$PL/6 = M_P + M_P + M_P + M_5 \rightarrow P_C L / 6 - 3M_P = M_5$$

Sección	1	2	3	4	5
M_i	$-M_P$	M_P	M_3	$-M_P$	M_5
θ_i	θ_1	θ_2	0	θ_4	0
EC1	1	1	1/2	0	0
EC2	0	0	1/2	1	1
EC3	0	1	1	1	0

-EC1:

$$\frac{(3M_3 + M_P)L}{6EI} + \theta_1 + \theta_2 = 0$$

-EC2:

$$\frac{(3M_5 + 3M_3 - 5M_P)L}{6EI} + \theta_4 = 0$$

-EC3:

$$\frac{(6M_3 + M_5 - M_P)L}{6EI} + \theta_2 + \theta_4 = 0$$

1ª comprobación con $\theta_1 = 0$:

$$Ec1 = L / 6 EI (3 M3 + Mp) + \theta1 + \theta2 == 0;$$

$$Ec2 = L / 6 EI (3 M3 + 3 M5 - 5 Mp) + \theta4 == 0;$$

$$Ec3 = L / 6 EI (6 M3 + M5 - Mp) + \theta2 + \theta4 == 0;$$

$$Ec4 = M3 == P L / 2;$$

$$Ec5 = M5 == (P L) / 6 - 3 Mp;$$

$$Ec6 = \theta1 == 0;$$

$$sol = \text{Solve}[\{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5, Ec6\}, \{M3, M5, P, \theta1, \theta2, \theta4\}]$$

[resuelve]

$$\left\{ \left\{ M3 \rightarrow \frac{27 Mp}{2}, M5 \rightarrow \frac{3 Mp}{2}, P \rightarrow \frac{27 Mp}{L}, \theta1 \rightarrow 0, \theta2 \rightarrow -\frac{83}{12} \frac{EI L Mp}{EI L Mp}, \theta4 \rightarrow -\frac{20}{3} \frac{EI L Mp}{EI L Mp} \right\} \right\};$$

Se tiene que $M_3 > M_P$ y $M_5 > M_P$ por tanto no es seguro.

2ª comprobación con $\theta_2 = 0$:

$$Ec1 = L / 6 EI (3 M3 + Mp) + \theta1 + \theta2 == 0;$$

$$Ec2 = L / 6 EI (3 M3 + 3 M5 - 5 Mp) + \theta4 == 0;$$

$$Ec3 = L / 6 EI (6 M3 + M5 - Mp) + \theta2 + \theta4 == 0;$$

$$Ec4 = M3 == P L / 2;$$

$$Ec5 = M5 == (P L) / 6 - 3 Mp;$$

$$Ec6 = \theta2 == 0;$$

$$sol = \text{Solve}[\{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5, Ec6\}, \{M3, M5, P, \theta1, \theta2, \theta4\}]$$

[resuelve]

$$\left\{ \left\{ M3 \rightarrow -\frac{30 Mp}{7}, M5 \rightarrow -\frac{31 Mp}{7}, P \rightarrow -\frac{60 Mp}{7 L}, \theta1 \rightarrow \frac{83 EI L Mp}{42}, \theta2 \rightarrow 0, \theta4 \rightarrow \frac{109 EI L Mp}{21} \right\} \right\};$$

Se tiene que $M_3 > M_P$ y $M_5 > M_P$ (en valor absoluto) con lo cual tampoco es.

3ª comprobación con $\theta_4 = 0$:

(*3ª comprobación con $\theta_4=0$ *)

$$Ec1 = L / 6 EI (3 M_3 + M_P) + \theta_1 + \theta_2 = 0;$$

$$Ec2 = L / 6 EI (3 M_3 + 3 M_5 - 5 M_P) + \theta_4 = 0;$$

$$Ec3 = L / 6 EI (6 M_3 + M_5 - M_P) + \theta_2 + \theta_4 = 0;$$

$$Ec4 = M_3 = P L / 2;$$

$$Ec5 = M_5 = (P L) / 6 - 3 M_P;$$

$$Ec6 = \theta_4 = 0;$$

$$sol = \text{Solve}[\{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5, Ec6\}, \{M_3, M_5, P, \theta_1, \theta_2, \theta_4\}]$$

|resuelve

$$\left\{ \left\{ M_3 \rightarrow \frac{7 M_P}{2}, M_5 \rightarrow -\frac{11 M_P}{6}, P \rightarrow \frac{7 M_P}{L}, \theta_1 \rightarrow \frac{10 EI L M_P}{9}, \theta_2 \rightarrow -\frac{109}{36} EI L M_P, \theta_4 \rightarrow 0 \right\} \right\};$$

(*Vemos que $M_3 > M_P$ y $M_5 > M_P$ (en valor absoluto) con lo cual no es seguro*)

Se tiene que $M_3 > M_P$ y $M_5 > M_P$ (en valor absoluto) no es seguro y tampoco es.

Obviamente tampoco es el mecanismo de colapso al no cumplir en ningún caso las condiciones.

➤ MC 3 (1, 2 y 5):

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = -M_P \\ M_2 = M_P \\ M_5 = -M_P \end{array} \right.$$

$$PL = -M_P + 2M_3 - M_4 \rightarrow M_3 = 5P_C L / 12$$

$$PL/6 = M_P + M_P - M_4 - M_P \rightarrow M_P - P_C L / 6 = M_4$$

Sección	1	2	3	4	5
M_i	$-M_P$	M_P	M_3	M_4	$-M_P$
θ_i	θ_1	θ_2	0	0	θ_5
EC1	1	1	1/2	0	0
EC2	0	0	1/2	1	1
EC3	0	1	1	1	0

-EC1:

$$\frac{(6M_3 + M_4 + 3M_P)L}{12EI} + \theta_1 + \theta_2 = 0$$

-EC2:

$$\frac{(11M_4 + 6M_3 - 5M_P)L}{12EI} + \theta_5 = 0$$

-EC3:

$$\frac{(6M_3 + 5M_4 + 3M_P)L}{6EI} + \theta_2 = 0$$

1ª comprobación con $\theta_1 = 0$:

$$Ec1 = L / 12 EI (6 M3 + M4 + 3 Mp) + \theta1 + \theta2 == 0;$$

$$Ec2 = L / 12 EI (6 M3 + 11 M4 - 5 Mp) + \theta5 == 0;$$

$$Ec3 = L / 6 EI (6 M3 + 5 M4 + 3 Mp) + \theta2 == 0;$$

$$Ec4 = M3 == 5 P L / 12;$$

$$Ec5 = M4 == Mp - P L / 6;$$

$$Ec6 = \theta1 == 0;$$

$$sol = \text{Solve}[\{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5, Ec6\}, \{M3, M4, P, \theta1, \theta2, \theta5\}]$$

[resuelve]

$$\left\{ \left\{ M3 \rightarrow -5 Mp, M4 \rightarrow 3 Mp, P \rightarrow -\frac{12 Mp}{L}, \theta1 \rightarrow 0, \theta2 \rightarrow 2 EI L Mp, \theta5 \rightarrow \frac{EI L Mp}{6} \right\} \right\};$$

Se tiene que $M_3 > M_P$ y $M_4 > M_P$ (en valor absoluto) por tanto no es seguro.

2ª comprobación con $\theta_2 = 0$:

$$Ec1 = L / 12 EI (6 M3 + M4 + 3 Mp) + \theta1 + \theta2 == 0;$$

$$Ec2 = L / 12 EI (6 M3 + 11 M4 - 5 Mp) + \theta5 == 0;$$

$$Ec3 = L / 6 EI (6 M3 + 5 M4 + 3 Mp) + \theta2 == 0;$$

$$Ec4 = M3 == 5 P L / 12;$$

$$Ec5 = M4 == Mp - P L / 6;$$

$$Ec6 = \theta2 == 0;$$

$$sol = \text{Solve}[\{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5, Ec6\}, \{M3, M4, P, \theta1, \theta2, \theta5\}]$$

[resuelve]

$$\left\{ \left\{ M3 \rightarrow -2 Mp, M4 \rightarrow \frac{9 Mp}{5}, P \rightarrow -\frac{24 Mp}{5 L}, \theta1 \rightarrow \frac{3 EI L Mp}{5}, \theta2 \rightarrow 0, \theta5 \rightarrow -\frac{7}{30} EI L Mp \right\} \right\};$$

Se tiene que $M_3 > M_P$ y $M_4 > M_P$ (en valor absoluto) con lo no es seguro.

3ª comprobación con $\theta_5 = 0$:

$$Ec1 = L / 12 EI (6 M3 + M4 + 3 Mp) + \theta1 + \theta2 = 0;$$

$$Ec2 = L / 12 EI (6 M3 + 11 M4 - 5 Mp) + \theta5 = 0;$$

$$Ec3 = L / 6 EI (6 M3 + 5 M4 + 3 Mp) + \theta2 = 0;$$

$$Ec4 = M3 = 5 P L / 12;$$

$$Ec5 = M4 = Mp - P L / 6;$$

$$Ec6 = \theta5 = 0;$$

$$sol = \text{Solve}[\{Ec1, Ec2, Ec3, Ec4, Ec5, Ec6\}, \{M3, M4, P, \theta1, \theta2, \theta5\}]$$

[resuelve]

$$\left\{ \left\{ M3 \rightarrow -\frac{15 Mp}{4}, M4 \rightarrow \frac{5 Mp}{2}, P \rightarrow -\frac{9 Mp}{L}, \theta1 \rightarrow \frac{EI L Mp}{4}, \theta2 \rightarrow \frac{7 EI L Mp}{6}, \theta5 \rightarrow 0 \right\} \right\};$$

Se tiene que $M_3 > M_P$ y $M_4 > M_P$ (en valor absoluto) con lo cual tampoco es.

Anexo D: Código de resolución del ejemplo 1

```

In[*]:= (*definiciones*)

In[*]:= (* unidades: m, N *)

In[*]:= (*matriz de paso: globales → locales*)
T[X_, Y_] := {{X, Y, 0, 0, 0, 0}, {-Y, X, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, X, Y, 0}, {0, 0, 0, -Y, X, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}};
MatrixForm[T[λx, λy]]
|forma de matriz

Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1. & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0. & 1. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1. & 0. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[*]:=

In[*]:= datos = {L0 → 5.0, vE → 2.1 × 1011, A → 1012 × 53.8 × 10-4, Iy → 8360.0 × 10-8, Sy → 628 × 10-6, fy → 275.0 × 106, Mp → Sy fy, Np → A fy};

In[*]:=

In[*]:= nodos = {{(0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0)},
                {(0, L0), {"x", "x", "x"}, (0, 0, 0)},
                {(L0, L0), {"x", "x", "x"}, (0, -P, 0)},
                {(2 L0, L0), {"x", "x", "x"}, (P, 0, 0)},
                {(2 L0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0)}}
                /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Sy}} /. datos; (* una lista por perfil *)

barras = {{(1, 2), (1, 1), (0, 0), {}},
          {(2, 3), (1, 1), (0, 0), {}},
          {(5, 4), (1, 1), (0, 0), {}},
          {(4, 3), (1, 1), (0, 0), {}}}
          /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez rotacional secciones extremas (kN.m/rad) *)

In[*]:= nd = Length[nodos]; (* numero de nudos *)
|longitud

nb = Length[barras]; (* numero de barras *)
|longitud

In[*]:= (*matriz de rigidez elemental (globales)*)
s = 3; (*gdl/nudo, tipo de problema*)
Fe = Table[0, {nb}, {2 s}, {2 s}];
|tabla

xy = Table[nodos[[i]][[1]], {i, nd}];
|tabla

```

```

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
  para cada
  Print["Elemento = ", b];
  describe
  i = barras[[b]][[1]][[1]];
  j = barras[[b]][[1]][[2]];
  L = √((xy[[j]][[1]] - xy[[i]][[1]])^2 + (xy[[j]][[2]] - xy[[i]][[2]])^2);
  λx = (xy[[j]][[1]] - xy[[i]][[1]]) / L;
  Print["    λx = ", N[λx, 3]];
  describe valor numérico
  λy = (xy[[j]][[2]] - xy[[i]][[2]]) / L;
  Print["    λy = ", N[λy, 3]];
  describe valor numérico
  kk = {Nx[b], (Mz[b, j] + Mz[b, i]) / L, Mz[b, i], Nx[b], -(Mz[b, j] + Mz[b, i]) / L, Mz[b, j]};
  Part[Fe, b] = Transpose[T[λx, λy]].kk;
  parte transposición
  Print[MatrixForm[Fe[[b]]]];
  describe forma de matriz
}
]

```

Elemento = 1

λ_x = 0.

λ_y = 1.

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) \\ 0. + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 1] \\ 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) \\ 0. + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] \end{pmatrix}$$

Elemento = 2

λ_x = 1.

λ_y = 0.

$$\begin{pmatrix} 0. + 1. Nx[2] \\ 0. + 0.2 (Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) \\ 0. + Mz[2, 2] \\ 0. + 1. Nx[2] \\ 0. + 0.2 (-Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) \\ 0. + Mz[2, 3] \end{pmatrix}$$

Elemento = 3

λ_x = 0.

λ_y = 1.

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (Mz[3, 4] + Mz[3, 5]) \\ 0. + 1. Nx[3] \\ 0. + Mz[3, 5] \\ 0. - 0.2 (-Mz[3, 4] - Mz[3, 5]) \\ 0. + 1. Nx[3] \\ 0. + Mz[3, 4] \end{pmatrix}$$

Elemento = 4

$\lambda_X = -1.$

$\lambda_Y = 0.$

$$\begin{pmatrix} 0. - 1. \text{Nx}[4] \\ 0. - 0.2 (\text{Mz}[4, 3] + \text{Mz}[4, 4]) \\ 0. + \text{Mz}[4, 4] \\ 0. - 1. \text{Nx}[4] \\ 0. - 0.2 (-\text{Mz}[4, 3] - \text{Mz}[4, 4]) \\ 0. + \text{Mz}[4, 3] \end{pmatrix}$$

In[]:=

In[]:= (* ensamblar fuerzas equivalentes *)

s = 3;

ngdl = s nd;

Feqv = Table[0.0, {ngdl}];

|tabla

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {

|para cada

i = barras[b][[1]][[1];

j = barras[b][[1]][[2];

(*nudo i*)

For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)

|para cada

Part[Feqv, s (i - 1) + f] += Part[Fe, b, f];

|parte

|parte

];

(*nudo j*)

For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)

|para cada

Part[Feqv, s (j - 1) + f] += Part[Fe, b, s + f];

|parte

|parte

];

}

];

MatrixForm[Feqv, 7]

|forma de matriz

Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) \\ 0. + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 1] \\ 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) + 1. Nx[2] \\ 0. + 0.2 (Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] + Mz[2, 2] \\ 0. + 1. Nx[2] - 1. Nx[4] \\ 0. + 0.2 (-Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) - 0.2 (-Mz[4, 3] - Mz[4, 4]) \\ 0. + Mz[2, 3] + Mz[4, 3] \\ 0. - 0.2 (-Mz[3, 4] - Mz[3, 5]) - 1. Nx[4] \\ 0. - 0.2 (Mz[4, 3] + Mz[4, 4]) + 1. Nx[3] \\ 0. + Mz[3, 4] + Mz[4, 4] \\ 0. - 0.2 (Mz[3, 4] + Mz[3, 5]) \\ 0. + 1. Nx[3] \\ 0. + Mz[3, 5] \end{pmatrix}$$

In[*]:=

```
In[*]:= u = Array[A, {ngdl}]; (*desplazamientos *)
      |arreglo
F = Array[W, {ngdl}]; (*fuerzas en los nudos*)
      |arreglo

For[i = 1, i ≤ nd, i++, {
  |para cada
  For[j = 1, j ≤ s, j++, {
    |para cada
    If[(nodos[[i]][2][j] == "x"), F[[s (i - 1) + j]] = nodos[[i]][3][j], u[[s (i - 1) + j]] = nodos[[i]][2][j];
    |si
  }
  ];
}
];

MatrixForm[u] (*desplazamientos*)
|forma de matriz
MatrixForm[F]
|forma de matriz
(*fuerzas*)
```

Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} W[1] \\ W[2] \\ W[3] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ W[13] \\ W[14] \\ W[15] \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \\ \Lambda[4] \\ \Lambda[5] \\ \Lambda[6] \\ \Lambda[7] \\ \Lambda[8] \\ \Lambda[9] \\ \Lambda[10] \\ \Lambda[11] \\ \Lambda[12] \\ \theta \\ \theta \\ \theta \end{pmatrix}$$

```
In[*]:= orden = 0;
For[i = 1, i ≤ ngdl, i++, If[u[[i]] == 0.0, orden++]]
|para cada |si

cono = Table[0, {orden}]; (*gdl conocidos*)
|tabla

For[i = 1; a = 1, i ≤ ngdl, i++, If[u[[i]] == 0.0, {Part[cono, a] = i, a++}]]
|para cada |si |parte

kk = Table[i, {i, 1, ngdl}];
|tabla

incog = Complement[kk, cono] (*gdl incognita*)
|complemento

Out[*]= {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

In[*]:= MatrixForm[Feqv + F]
|forma de matriz
```

Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) + W[1] \\ 0. + 1. Nx[1] + W[2] \\ 0. + Mz[1, 1] + W[3] \\ 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) + 1. Nx[2] \\ 0. + 0.2 (Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] + Mz[2, 2] \\ 0. + 1. Nx[2] - 1. Nx[4] \\ 0. - P + 0.2 (-Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) - 0.2 (-Mz[4, 3] - Mz[4, 4]) \\ 0. + Mz[2, 3] + Mz[4, 3] \\ 0. + P - 0.2 (-Mz[3, 4] - Mz[3, 5]) - 1. Nx[4] \\ 0. - 0.2 (Mz[4, 3] + Mz[4, 4]) + 1. Nx[3] \\ 0. + Mz[3, 4] + Mz[4, 4] \\ 0. - 0.2 (Mz[3, 4] + Mz[3, 5]) + W[13] \\ 0. + 1. Nx[3] + W[14] \\ 0. + Mz[3, 5] + W[15] \end{pmatrix}$$

In[*]:= **kk** = **Feqv** + **F**;

ecs = **Table**[**kk**[[**i**]] == 0, {**i**, **Length**[**kk**]}];

|tabla

|longitud

In[*]:=

In[*]:= (* **sistematizar** *)

In[*]:= **axil** = **Solve**[**ecs**[[{5, 7, 10, 11}]], **Table**[**Nx**[**b**], {**b**, **nb**}]][[1]]

|resuelve

|tabla

In[*]:= **kk** = **Feqv** + **F**;

ecs = **Table**[**kk**[[**i**]] == 0, {**i**, **Length**[**kk**]}];

|tabla

|longitud

In[*]:=

In[*]:= (* **sistematizar** *)

In[*]:= **axil** = **Solve**[**ecs**[[{5, 7, 10, 11}]], **Table**[**Nx**[**b**], {**b**, **nb**}]][[1]]

|resuelve

|tabla

Out[*]= {Nx[1] → 0. - 0.2 (Mz[2, 2] + Mz[2, 3]), Nx[2] → 0. + 1. (0. + P - 0.2 (-1. Mz[3, 4] - 1. Mz[3, 5])),
Nx[3] → 0. + 0.2 (Mz[4, 3] + Mz[4, 4]), Nx[4] → 0. + 1. P + 0.2 Mz[3, 4] + 0.2 Mz[3, 5]}

In[*]:=

In[*]:= **reac** = **Solve**[**ecs**[[**cono**]]][[1]];

|resuelve

eq = **Table**[0, {5}];

|tabla

(* **eq**[[1]] = **Simplify**[W[1] + W[13] == P /. **reac**] *)

eq[[1]] = **Simplify**[**ecs**[[4]] /. **axil**]

|simplifica

eq[[2]] = **ecs**[[8]]


```

eq[[3]] = ecs[[6]]
eq[[4]] = ecs[[9]]
eq[[5]] = ecs[[12]]

Out[*]= 1. P + 0.2 Mz[1, 1] + 0.2 Mz[1, 2] + 0.2 Mz[3, 4] + 0.2 Mz[3, 5] == 0

Out[*]= 0. - P + 0.2 (-Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) - 0.2 (-Mz[4, 3] - Mz[4, 4]) == 0

Out[*]= 0. + Mz[1, 2] + Mz[2, 2] == 0

Out[*]= 0. + Mz[2, 3] + Mz[4, 3] == 0

Out[*]= 0. + Mz[3, 4] + Mz[4, 4] == 0

In[*]:= MatrixForm[ecs[[incog]]]
|forma de matriz

Out[*]:= MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.2 (-Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) + 1. Nx[2] == 0 \\ 0. + 0.2 (Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + 1. Nx[1] == 0 \\ 0. + Mz[1, 2] + Mz[2, 2] == 0 \\ 0. + 1. Nx[2] - 1. Nx[4] == 0 \\ 0. - P + 0.2 (-Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) - 0.2 (-Mz[4, 3] - Mz[4, 4]) == 0 \\ 0. + Mz[2, 3] + Mz[4, 3] == 0 \\ 0. + P - 0.2 (-Mz[3, 4] - Mz[3, 5]) - 1. Nx[4] == 0 \\ 0. - 0.2 (Mz[4, 3] + Mz[4, 4]) + 1. Nx[3] == 0 \\ 0. + Mz[3, 4] + Mz[4, 4] == 0 \end{pmatrix}$$


In[*]:= PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))

In[*]:= Mij = {};
rM = {};
vM = {};
v0 = {};
Ed = 0;
For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada
i = barras[[b]][[1]][[1]];
j = barras[[b]][[1]][[2]];
L = √ ((xy[[j]][[1]] - xy[[i]][[1]])^2 + (xy[[j]][[2]] - xy[[i]][[2]])^2);

vEi = material[barras[[b]][[2]][[1]][[1]]];
Ii = perfil[barras[[b]][[2]][[2]][[2]]];

Mij = Join[Mij, {-Mp ≤ Mz[b, i] ≤ Mp, -Mp ≤ Mz[b, j] ≤ Mp}];
|junta
rM = Join[rM, {Mz[b, i], Mz[b, j]}];
|junta
vM = Join[vM, {m[b, i], m[b, j]}];
|junta
v0 = Join[v0, {0[b, i], 0[b, j]}];
|junta

```

```

Ma = Mz[b, i];
Mb = Mz[b, j];
Ed += PFV1[-Ma, Mb, -Ma, Mb, L, vEi Ii];
}
];
rM
v0

Out[*]= {Mz[1, 1], Mz[1, 2], Mz[2, 2], Mz[2, 3], Mz[3, 5], Mz[3, 4], Mz[4, 4], Mz[4, 3]}

Out[*]= {0[1, 1], 0[1, 2], 0[2, 2], 0[2, 3], 0[3, 5], 0[3, 4], 0[4, 4], 0[4, 3]}

In[*]:=
In[*]:= Ed
Out[*]= 4.74672×10-8 (-Mz[1, 1] (-2 Mz[1, 1] + Mz[1, 2]) + Mz[1, 2] (-Mz[1, 1] + 2 Mz[1, 2])) + 4.74672×10-8 (-Mz[2, 2] (-2 Mz[2, 2] + Mz[2, 3]) + Mz[2, 3] (-Mz[2, 2] + 2 Mz[2, 3])) +
4.74672×10-8 (Mz[3, 4] (2 Mz[3, 4] - Mz[3, 5]) - (Mz[3, 4] - 2 Mz[3, 5]) Mz[3, 5]) + 4.74672×10-8 (Mz[4, 3] (2 Mz[4, 3] - Mz[4, 4]) - (Mz[4, 3] - 2 Mz[4, 4]) Mz[4, 4])

In[*]:= sol = Maximize[Join[{P}, eq, MiJ] /. datos, Join[{P}, rM]] // Quiet
|maximiza |junta |junta |silencio
Out[*]= {103 620.,
{P → 103 620., Mz[1, 1] → -172 700., Mz[1, 2] → 0., Mz[2, 2] → 0., Mz[2, 3] → -172 700., Mz[3, 5] → -172 700., Mz[3, 4] → -172 700., Mz[4, 4] → 172 700., Mz[4, 3] → 172 700.}}

In[*]:= (* comprobar *)
Pc = 3 Mp / L0 /. datos
Out[*]= 103 620.

In[*]:=

In[*]:=

In[*]:= (* calcular ecs compatibilidad *)
In[*]:= mEQ = Normal[CoefficientArrays[eq, rM]] [[2]];
|normal |arreglos de coeficientes
MatrixForm[mEQ]
|forma de matriz
Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 1. & 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. & 0 & 0 & 0 & 1. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 0 \end{pmatrix}$$


In[*]:= MatrixRank[mEQ]
|rango matricial
Out[*]= 5

```

```

In[ ]:= vn0 = NullSpace[mEQ];
           |espacio nulo

           MatrixForm[vn0]
           |forma de matriz

Out[ ]:= MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.732217 & -0.0280931 & 0.0280931 & -0.176031 & 0.436341 & 0.323969 & -0.323969 & 0.176031 \\ 0.0177827 & -0.278093 & 0.278093 & 0.073969 & 0.686341 & -0.426031 & 0.426031 & -0.073969 \\ 0.360844 & -0.505181 & 0.505181 & -0.360844 & -0.0721688 & 0.216506 & -0.216506 & 0.360844 \end{pmatrix}$$


In[ ]:= v1 = Table[rM[[i]] -> (rM[[i]] /. sol[[2]]), {i, Length[rM]}]
           |tabla |longitud

Out[ ]:= {Mz[1, 1] -> -172.700., Mz[1, 2] -> 0., Mz[2, 2] -> 0., Mz[2, 3] -> -172.700., Mz[3, 5] -> -172.700., Mz[3, 4] -> -172.700., Mz[4, 4] -> 172.700., Mz[4, 3] -> 172.700.}

In[ ]:=

In[ ]:= n0 = Dimensions[vn0][[1]];
           |dimensiones

           v2 = Table[Table[vM[[1]] -> (vn0[[k]][[1]]), {1, Length[vM]}], {k, n0}];
           |tabla |tabla |longitud

           v2

Out[ ]:= {{m[1, 1] -> -0.732217, m[1, 2] -> -0.0280931, m[2, 2] -> 0.0280931, m[2, 3] -> -0.176031, m[3, 5] -> 0.436341, m[3, 4] -> 0.323969, m[4, 4] -> -0.323969, m[4, 3] -> 0.176031},
           {m[1, 1] -> 0.0177827, m[1, 2] -> -0.278093, m[2, 2] -> 0.278093, m[2, 3] -> 0.073969, m[3, 5] -> 0.686341, m[3, 4] -> -0.426031, m[4, 4] -> 0.426031, m[4, 3] -> -0.073969},
           {m[1, 1] -> 0.360844, m[1, 2] -> -0.505181, m[2, 2] -> 0.505181, m[2, 3] -> -0.360844, m[3, 5] -> -0.0721688, m[3, 4] -> 0.216506, m[4, 4] -> -0.216506, m[4, 3] -> 0.360844}}

In[ ]:= (* ecuaciones de compatibilidad *)

           ecs = Table[0, {n0}];
           |tabla

           For[k = 1, k <= n0, k++, {
           |para cada

           For[b = 1, b <= nb, b++, {
           |para cada

           i = barras[[b]][[1]][[1]];
           j = barras[[b]][[1]][[2]];
           L = Sqrt[(xy[[j]][[1]] - xy[[i]][[1]])^2 + (xy[[j]][[2]] - xy[[i]][[2]])^2];

           ecs[[k]] += (PFV1[-Mz[b, i], Mz[b, j], -m[b, i], m[b, j], L, vE Iy] /. sol[[2]] /. v2[[k]] /. datos);
           }
           ];

           ecs[[k]] += Sum[vM[[1]] * v0[[1]], {1, Length[v0]}]
           |suma |longitud

           /. v2[[k]];
           ];

           ecs = Table[ecs[[i]] == 0, {i, Length[ecs]}]
           |tabla |longitud

Out[ ]:= {0.00744544 - 0.732217 \phi[1, 1] - 0.0280931 \phi[1, 2] + 0.0280931 \phi[2, 2] - 0.176031 \phi[2, 3] + 0.323969 \phi[3, 4] + 0.436341 \phi[3, 5] + 0.176031 \phi[4, 3] - 0.323969 \phi[4, 4] == 0,
           -0.000752142 + 0.0177827 \phi[1, 1] - 0.278093 \phi[1, 2] + 0.278093 \phi[2, 2] + 0.073969 \phi[2, 3] - 0.426031 \phi[3, 4] + 0.686341 \phi[3, 5] - 0.073969 \phi[4, 3] + 0.426031 \phi[4, 4] == 0,
           0. + 0.360844 \phi[1, 1] - 0.505181 \phi[1, 2] + 0.505181 \phi[2, 2] - 0.360844 \phi[2, 3] + 0.216506 \phi[3, 4] - 0.0721688 \phi[3, 5] - 0.360844 \phi[4, 3] - 0.216506 \phi[4, 4] == 0}

```

```

In[*]:= Edisp = Sum[rM[[i]] × vθ[[i]], {i, Length[rM]}] /. v1
      |suma      |longitud
cd = Table[rM[[i]] × vθ[[i]] ≥ 0, {i, Length[rM]}] /. sol[2] /. v1
      |tabla      |longitud
Out[*]= 0. - 172700. θ[1, 1] - 172700. θ[2, 3] - 172700. θ[3, 4] - 172700. θ[3, 5] + 172700. θ[4, 3] + 172700. θ[4, 4]
Out[*]= {-172700. θ[1, 1] ≥ 0, True, True, -172700. θ[2, 3] ≥ 0, -172700. θ[3, 5] ≥ 0, -172700. θ[3, 4] ≥ 0, 172700. θ[4, 4] ≥ 0, 172700. θ[4, 3] ≥ 0}

In[*]:= val = {};
      For[i = 1, i ≤ Length[vθ], i++, {
      |para cada |longitud
      If[Abs[v1[[i]][[2]]] - 0.99 Mp] > 10^-4 /. datos, , val = Join[val, {vθ[[i]] == 0}]]
      |si |valor absoluto |junta
      }
      ]
In[*]:= val
Out[*]= {θ[1, 2] == 0, θ[2, 2] == 0}

In[*]:=
In[*]:= sol3 = Minimize[Join[{Edisp}, ecs, cd, val], vθ] // Quiet
      |minimiza |junta |silencio
Out[*]= {5662.89, {θ[1, 1] → 0., θ[1, 2] → 0., θ[2, 2] → 0., θ[2, 3] → -0.00819758, θ[3, 5] → -0.00819758, θ[3, 4] → -0.0163952, θ[4, 4] → 0., θ[4, 3] → 0.}}

In[*]:= (* signo menos → horario *)

In[*]:= (* comprobar *)
      θ3 = Mp L0 / (6 vE Iy) /. datos

      θ4 = -Mp L0 / (3 vE Iy) /. datos

      θ5 = Mp L0 / (6 vE Iy) /. datos
Out[*]= 0.00819758
Out[*]= -0.0163952
Out[*]= 0.00819758

```

Anexo E: Código de resolución nave industrial

```

In[*]:= (* metodo: Direct Method (DM) - metodo directo *)

In[*]:=

In[*]:= (*definiciones*)

In[*]:= (* unidades: m, N *)

In[*]:= (*matriz de paso: globales → locales*)
T[X_, Y_] := {{X, Y, 0, 0, 0, 0}, {-Y, X, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, X, Y, 0}, {0, 0, 0, -Y, X, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}};
MatrixForm[T[λX, λY]]
|forma de matriz

ut[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \lambda_X & \lambda_Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_Y & \lambda_X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_X & \lambda_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_Y & \lambda_X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[*]:=

datos = {Lc → 10, H → 3, vE → 2.1 × 1011, A → 53.8 × 10-4, Iy → 8360.0 × 10-8, Sy → 628 × 10-6, fy → 275.0 × 106, Mp → 172.8 × 103,
         Np → A fy, P → 500 λ, q0 → 0};

In[*]:=

nodos = {{0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
         {{0, H}, {"x", "x", "x"}, {P, 0, 0}},
         {{0, 2 H}, {"x", "x", "x"}, {P, 0, 0}},
         {{0, 3 H}, {"x", "x", "x"}, {P, 0, 0}},
         {{0, 4 H}, {"x", "x", "x"}, {P, -P, 0}},
         {{L, 4 H}, {"x", "x", "x"}, {0, -P, 0}},
         {{L, 3 H}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
         {{L, 2 H}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
         {{L, H}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
         {{L, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
         {{2 L, 2 H}, {"x", "x", "x"}, {0, -P, 0}},
         {{2 L, H}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
         {{2 L, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},

         } /. datos; (* coordenadas/desplazamientos y giros/fuerzas y momento*)

material = {{vE, fy}} /. datos; (* una lista por material *)
perfil = {{A, Iy, Mp}} /. datos; (* una lista por perfil *)

```

```

barras = {{{1, 2}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{2, 3}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{3, 4}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{4, 5}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{5, 6}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{6, 7}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{7, 8}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{8, 9}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{9, 10}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{2, 9}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{3, 8}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{4, 7}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{8, 11}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{9, 12}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{11, 12}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          {{12, 13}, {1, 1}, {0, 0}, {}},
          } /. datos; (* nodos/material y perfil/qx y qy (locales)/rigidez rotacional secciones extremas (kN.m/rad) *)

nd = Length[nodos]; (* numero de nudos *)
nb = Length[barras]; (* numero de barras *)

In[ ]:= (*matriz de rigidez elemental (globales)*)
s = 3; (*gdl/nudo, tipo de problema*)
Fe = Table[0, {nb}, {2 s}, {2 s}];
xy = Table[nodos[[i]][1], {i, nd}];

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
  Print["Elemento = ", b];
  i = barras[b][1][1];
  j = barras[b][1][2];
  L = Sqrt[(xy[j][1] - xy[i][1])^2 + (xy[j][2] - xy[i][2])^2];
  λx = (xy[j][1] - xy[i][1]) / L;
  Print[" λx = ", N[λx, 3]];
  λy = (xy[j][2] - xy[i][2]) / L;
  Print[" λy = ", N[λy, 3]];
  tc = barras[b][3][1]; (* tipo carga *)
  If[tc == 0,
    qi = 0,

```

```

If[tc == 0,
|si
  qi = 0,
  If[tc == 1,
  |si
    qi = λ barras[b][3][2];
  ];

];

F1 = {-Nx[b], qi L + (Mz[b, j] - Mz[b, i] - qi L^2/2) / L, -Mz[b, i], Nx[b], -(Mz[b, j] - Mz[b, i] - qi L^2/2) / L, Mz[b, j]};

Fe[b] = F1 - 0 Femp;

Part[Fe, b] = Transpose[T[λx, λy]].Fe[b];
|parte |transposición
Print[MatrixForm[Fe[b]]];
|escribe |forma de matriz
}
]

```

Elemento = 1

$$\lambda_x = 0.$$

$$\lambda_y = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 0. - 1. (0. + 0.142857 (0. - Mz[1, 1] + Mz[1, 2])) \\ 0. - 1. Nx[1] \\ 0. - Mz[1, 1] \\ 0. - 0.142857 (0. + Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) \\ 0. + 1. Nx[1] \\ 0. + Mz[1, 2] \end{pmatrix}$$

Elemento = 2

$$\lambda_x = 0.980581$$

$$\lambda_y = 0.196116$$

$$\begin{pmatrix} 0. - 0.196116 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[2, 2] + Mz[2, 3])) - 0.980581 Nx[2] \\ 0. + 0.980581 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[2, 2] + Mz[2, 3])) - 0.196116 Nx[2] \\ 0. - Mz[2, 2] \\ -0.0153846 (0. + Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.980581 Nx[2] \\ 0.0769231 (0. + Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.196116 Nx[2] \\ 0. + Mz[2, 3] \end{pmatrix}$$

```

Elemento = 3
λx = 0.980581
λy = -0.196116

$$\begin{pmatrix} 0. + 0.196116 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[3, 3] + Mz[3, 4])) - 0.980581 Nx[3] \\ 0. + 0.980581 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[3, 3] + Mz[3, 4])) + 0.196116 Nx[3] \\ 0. - Mz[3, 3] \\ 0.0153846 (0. + Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 0.980581 Nx[3] \\ 0.0769231 (0. + Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) - 0.196116 Nx[3] \\ 0. + Mz[3, 4] \end{pmatrix}$$

Elemento = 4
λx = 0.
λy = -1.

$$\begin{pmatrix} 0. + 1. (0. + 0.142857 (0. - Mz[4, 4] + Mz[4, 5])) \\ 0. + 1. Nx[4] \\ 0. - Mz[4, 4] \\ 0. + 0.142857 (0. + Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) \\ 0. - 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[4, 5] \end{pmatrix}$$

]:=

(* ensamblar fuerzas equivalentes *)
s = 3;
ngdl = s nd;
Feqv = Table[0.0, {ngdl}];
|tabla

For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
|para cada
i = barras[b][1][1];
j = barras[b][1][2];

(*nudo i*)
For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)
|para cada
Part[Feqv, s (i - 1) + f] += Part[Fe, b, f];
|parte |parte
];

(*nudo j*)
For[f = 1, f ≤ s, f++, (*filas*)
|para cada
Part[Feqv, s (j - 1) + f] += Part[Fe, b, s + f];
|parte |parte
];

```



```

    ];
  }
];
MatrixForm[Feqv, 7]
|forma de matriz

//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. - 1. (0. + 0.142857 (0. - Mz[1, 1] + Mz[1, 2])) \\ 0. - 1. Nx[1] \\ 0. - Mz[1, 1] \\ 0. - 0.142857 (0. + Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 0.196116 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[2, 2] + Mz[2, 3])) - 0.980581 Nx[2] \\ 0. + 0.980581 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[2, 2] + Mz[2, 3])) + 1. Nx[1] - 0.196116 Nx[2] \\ 0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] \\ 0. - 0.0153846 (0. + Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.196116 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[3, 3] + Mz[3, 4])) + 0.980581 Nx[2] - 0.980581 Nx[3] \\ 0. + 0.0769231 (0. + Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.980581 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[3, 3] + Mz[3, 4])) + 0.196116 Nx[2] + 0.196116 Nx[3] \\ 0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3] \\ 0. + 0.0153846 (0. + Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. (0. + 0.142857 (0. - Mz[4, 4] + Mz[4, 5])) + 0.980581 Nx[3] \\ 0. + 0.0769231 (0. + Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) - 0.196116 Nx[3] + 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] \\ 0. + 0.142857 (0. + Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) \\ 0. - 1. Nx[4] \\ 0. + Mz[4, 5] \end{pmatrix}$$


];:= u = Array[Δ, {ngdl}]; (*desplazamientos *)
|arreglo
F = Array[W, {ngdl}]; (*fuerzas en los nudos*)
|arreglo

For[i = 1, i ≤ nd, i++, {
|para cada
  For[j = 1, j ≤ s, j++, {
|para cada
    If[(nodos[[i]][2][j] == "x"), F[[s (i - 1) + j]] = nodos[[i]][3][j], u[[s (i - 1) + j]] = nodos[[i]][2][j];
    |si
  }
  ];
}
];

MatrixForm[u] (*desplazamientos*)
|forma de matriz
MatrixForm[F]
|forma de matriz

```

(*fuerzas*)

//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta[4] \\ \Delta[5] \\ \Delta[6] \\ \Delta[7] \\ \Delta[8] \\ \Delta[9] \\ \Delta[10] \\ \Delta[11] \\ \Delta[12] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} W[1] \\ W[2] \\ W[3] \\ 500 \lambda \\ -500 \lambda \\ 0 \\ 0 \\ -500 \lambda \\ 0 \\ 500 \lambda \\ -500 \lambda \\ 0 \\ W[13] \\ W[14] \\ W[15] \end{pmatrix}$$

]:= orden = 0;

For[i = 1, i ≤ ngdl, i++, If[u[[i]] == 0, orden++]]

[para cada [si

```

cono = Table[0, {orden}]; (*gdl conocidos*)
      |tabla

For[i = 1; a = 1, i ≤ ngdl, i++, If[u[[i]] == 0, {Part[cono, a] = i, a++}]]
      |para cada      |si      |parte

kk = Table[i, {i, 1, ngdl}];
      |tabla

incog = Complement[kk, cono] (*gdl incognita*)
      |complemento

]/= {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

]:= ecs = Feqv - F;
MatrixForm[ecs]
      |forma de matriz

'/MatrixForm=
      0. - 1. (0. + 0.142857 (0. - Mz[1, 1] + Mz[1, 2])) - W[1]
      0. - 1. Nx[1] - W[2]
      0. - Mz[1, 1] - W[3]
      0. - 500 λ - 0.142857 (0. + Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 0.196116 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[2, 2] + Mz[2, 3])) - 0.980581 Nx[2]
      0. + 500 λ + 0.980581 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[2, 2] + Mz[2, 3])) + 1. Nx[1] - 0.196116 Nx[2]
      0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2]
      0. - 0.0153846 (0. + Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.196116 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[3, 3] + Mz[3, 4])) + 0.980581 Nx[2] - 0.980581 Nx[3]
      0. + 500 λ + 0.0769231 (0. + Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.980581 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[3, 3] + Mz[3, 4])) + 0.196116 Nx[2] + 0.196116 Nx[3]
      0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3]
      0. - 500 λ + 0.0153846 (0. + Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. (0. + 0.142857 (0. - Mz[4, 4] + Mz[4, 5])) + 0.980581 Nx[3]
      0. + 500 λ + 0.0769231 (0. + Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) - 0.196116 Nx[3] + 1. Nx[4]
      0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4]
      0. + 0.142857 (0. + Mz[4, 4] - Mz[4, 5]) - W[13]
      0. - 1. Nx[4] - W[14]
      0. + Mz[4, 5] - W[15]

eq = Table[0, {Length[incog]}];
      |tabla      |longitud

Do[
  |repite
  eq[[i]] = ecs[incog][[i]] == 0
  , {i, Length[incog]}]
      |longitud

eq

{0. - 500 λ - 0.142857 (0. + Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 0.196116 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[2, 2] + Mz[2, 3])) - 0.980581 Nx[2] == 0,
0. + 500 λ + 0.980581 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[2, 2] + Mz[2, 3])) + 1. Nx[1] - 0.196116 Nx[2] == 0, 0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2] == 0,
0. - 0.0153846 (0. + Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.196116 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[3, 3] + Mz[3, 4])) + 0.980581 Nx[2] - 0.980581 Nx[3] == 0,
0. + 500 λ + 0.0769231 (0. + Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.980581 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[3, 3] + Mz[3, 4])) + 0.196116 Nx[2] + 0.196116 Nx[3] == 0,
0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3] == 0, 0. - 500 λ + 0.0153846 (0. + Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. (0. + 0.142857 (0. - Mz[4, 4] + Mz[4, 5])) + 0.980581 Nx[3] == 0,
0. + 500 λ + 0.0769231 (0. + Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) - 0.196116 Nx[3] + 1. Nx[4] == 0, 0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4] == 0}

MatrixForm[ecs[incog]] //. datos]
      |forma de matriz

'/MatrixForm=
      0. - 500 λ - 0.142857 (0. + Mz[1, 1] - Mz[1, 2]) - 0.196116 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[2, 2] + Mz[2, 3])) - 0.980581 Nx[2]
      0. + 500 λ + 0.980581 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[2, 2] + Mz[2, 3])) + 1. Nx[1] - 0.196116 Nx[2]
      0. + Mz[1, 2] - Mz[2, 2]
      0. - 0.0153846 (0. + Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.196116 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[3, 3] + Mz[3, 4])) + 0.980581 Nx[2] - 0.980581 Nx[3]
      0. + 500 λ + 0.0769231 (0. + Mz[2, 2] - Mz[2, 3]) + 0.980581 (0. + 0.0784465 (0. - Mz[3, 3] + Mz[3, 4])) + 0.196116 Nx[2] + 0.196116 Nx[3]
      0. + Mz[2, 3] - Mz[3, 3]
      0. - 500 λ + 0.0153846 (0. + Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) + 1. (0. + 0.142857 (0. - Mz[4, 4] + Mz[4, 5])) + 0.980581 Nx[3]
      0. + 500 λ + 0.0769231 (0. + Mz[3, 3] - Mz[3, 4]) - 0.196116 Nx[3] + 1. Nx[4]
      0. + Mz[3, 4] - Mz[4, 4]

```

```

PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))
PFV2[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_, q_] := L / (6 EI) ((ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma)) + q L^2 / 4 (ma + mb))

Mij = {}; Nij = {};
rM = {};
vM = {};
vθ = {};
For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
  para cada
    i = barras[[b]][[1]][[1]];
    j = barras[[b]][[1]][[2]];
    L = √((xy[[j]][[1]] - xy[[i]][[1]])^2 + (xy[[j]][[2]] - xy[[i]][[2]])^2);

    vEi = material[barras[[b]][[2]][[1]][[1]]];
    Ai = perfil[barras[[b]][[2]][[2]][[1]]];
    Ii = perfil[barras[[b]][[2]][[2]][[2]]];
    Npi = Ai fy;
    Mpi = perfil[barras[[b]][[2]][[2]][[3]]];
    qi = barras[[b]][[3]][[1]] //. datos;

    Mij = Join[Mij, {-Mpi ≤ Mz[b, i] ≤ Mpi, -Mpi ≤ Mz[b, j] ≤ Mpi}] //. datos;
    junta

    Nij = Join[Nij, {-Npi < Nx[b] < Npi}] //. datos;
    junta

    rM = Join[rM, {Mz[b, i], Mz[b, j]}];
    junta

    vM = Join[vM, {m[b, i], m[b, j]}];
    junta

    vθ = Join[vθ, {θ[b, i], θ[b, j]}];
    junta

  }
];
rM
For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
  para cada
    qi = barras[[b]][[3]][[1]] //. datos;
    If[qi ≠ 0,
      si
        vθ = Join[vθ, {θ[b]}];
        junta
    ];
  }
];

{Mz[1, 1], Mz[1, 2], Mz[2, 2], Mz[2, 3], Mz[3, 3], Mz[3, 4], Mz[4, 4], Mz[4, 5]}

(* incognitas *)
rI = {};
rI = Join[rI, rM, Table[Nx[i], {i, nb}]]
junta      tabla

{Mz[1, 1], Mz[1, 2], Mz[2, 2], Mz[2, 3], Mz[3, 3], Mz[3, 4], Mz[4, 4], Mz[4, 5], Nx[1], Nx[2], Nx[3], Nx[4]}

sol = FindMaximum[Join[{λ, eq, Mij} //. datos, Join[{λ, rI}]
encuentra má... junta      junta

{81.502, {λ → 81.502, Mz[1, 1] → -172 800., Mz[1, 2] → 52 114.3, Mz[2, 2] → 52 114.3, Mz[2, 3] → 172 800., Mz[3, 3] → 172 800.,
Mz[3, 4] → -172 800., Mz[4, 4] → -172 800., Mz[4, 5] → 172 800., Nx[1] → -52 130., Nx[2] → -10 684.6, Nx[3] → -14 213.3, Nx[4] → -70 123.1}}

```

```

(* parte grafica *)

apoyo[x_, f_] := Module[{},
  |módulo

  g0 = {};
  g0 = Join[g0, {Line[{x, x + f {2, 0}}]}];
  |junta |línea
  g0 = Join[g0, {Line[{x, x - f {2, 0}}]}];
  |junta |línea
  g0 = Join[g0, {Line[{x + f {0, 0}, x + f {0, -0.5}}]}];
  |junta |línea
  g0 = Join[g0, {Line[{x + f {1, 0}, x + f {1, -0.5}}]}];
  |junta |línea
  g0 = Join[g0, {Line[{x + f {2, 0}, x + f {2, -0.5}}]}];
  |junta |línea
  g0 = Join[g0, {Line[{x + f {-1, 0}, x + f {-1, -0.5}}]}];
  |junta |línea
  g0 = Join[g0, {Line[{x + f {-2, 0}, x + f {-2, -0.5}}]}];
  |junta |línea
  Graphics[g0, PlotRange -> All]
  |gráfico |rango de rep... |todo

];

carga[x_, f_, dir_] := Module[{},
  |módulo

  (* dir=0: horizontal; dir=1: vertical *)
  If[dir == 0,
    |si
    g2 = Graphics[{Arrowheads[Medium], Arrow[{x - f {4, 0}, x}]}];
    |gráfico |cabeceras de... |tamaño ... |flecha
  If[dir == 1,
    |si
    g2 = Graphics[{Arrowheads[Medium], Arrow[{x + f {0, 4}, x}]}];
    |gráfico |cabeceras de... |tamaño ... |flecha
  g2

];

```

```

(* valores cargas *)
valores = Module[{},
  módulo
  Graphics[{Text[Style["λP", Medium, Blue], {-1, Lc + 4} /. datos],
    gráfico texto estilo tamaño... azul
    Text[Style["λP", Medium, Blue], {-4, Lc + 1} /. datos],
    texto estilo tamaño... azul
    Text[Style["λP", Medium, Blue], {-1 + L0, H + 4} /. datos],
    texto estilo tamaño... azul
    Text[Style["λP", Medium, Blue], {2 L0 + 1, Lc + 4} /. datos],
    texto estilo tamaño... azul
    Text[Style["λP", Medium, Blue], {2 L0 + 4, Lc + 1} /. datos}]]
];

(* estructura *)
g0 = {};
For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
  para cada
    i = barras[b][1][1];
    j = barras[b][1][2];
    L =  $\sqrt{((xy[j][1] - xy[i][1])^2 + (xy[j][2] - xy[i][2])^2)}$ ;
    λx = (xy[j][1] - xy[i][1]) / L;
    λy = (xy[j][2] - xy[i][2]) / L;
    g0 = Join[g0, {ParametricPlot[{xy[i][1] + λx x, xy[i][2] + λy x}, {x, 0, L}]}]];
    junta gráfico paramétrico
  }
];

(* rotulas plasticas *)
g1 = {};
For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
  para cada
    i = barras[b][1][1];
    j = barras[b][1][2];
    L =  $\sqrt{((xy[j][1] - xy[i][1])^2 + (xy[j][2] - xy[i][2])^2)}$ ;
    λx = (xy[j][1] - xy[i][1]) / L;
    λy = (xy[j][2] - xy[i][2]) / L;

    Mpi = perfil[barras[b][2][3]];
    If[Abs[Mz[b, i] /. sol[2]] ≥ 0.99 Mpi,
      si valor absoluto
      g1 = Join[g1, {Graphics[{PointSize[Large], Red, Point[{xy[i][1] + λx 0.05 L, xy[i][2] + λy 0.05 L}]}]}]];
      junta gráfico tamaño de... grande rojo punto
    ];
    If[Abs[Mz[b, j] /. sol[2]] ≥ 0.99 Mpi,
      si valor absoluto
      g1 = Join[g1, {Graphics[{PointSize[Large], Red, Point[{xy[i][1] + λx 0.95 L, xy[i][2] + λy 0.95 L}]}]}]];
      junta gráfico tamaño de... grande rojo punto
    ];
  }
];

```

```

(* perfil de las barras *)
g2 = {};
For[b = 1, b ≤ nb, b++, {
  para cada
    i = barras[b][1][1];
    j = barras[b][1][2];
    L = √((xy[j][1] - xy[i][1])^2 + (xy[j][2] - xy[i][2])^2);
    λx = (xy[j][1] - xy[i][1]) / L;
    λy = (xy[j][2] - xy[i][2]) / L;

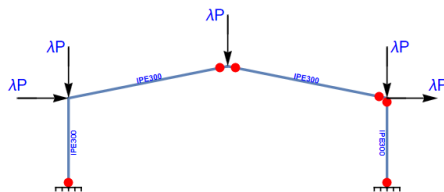
    k = barras[b][2][2];
    If[k == 1,
      si
        g2 =
          Join[g2,
            junta
              {Graphics[{Text[Style["IPE300", Tiny, Bold, Blue], {(xy[j][1] + xy[i][1]) / 2, (xy[j][2] + xy[i][2]) / 2} + 0.3 {1.3 λy, λx},
                gráfico texto estilo tam... negrita azul
                Automatic, {λx, λy}}]}];
      ];
    If[k == 2,
      si
        g2 =
          Join[g2,
            junta
              {Graphics[{Text[Style["IPE300", Tiny, Bold, Blue], {(xy[j][1] + xy[i][1]) / 2, (xy[j][2] + xy[i][2]) / 2} + 0.3 {1.3 λy, λx},
                gráfico texto estilo tam... negrita azul
                Automatic, {λx, λy}}]}];
      ];
    ];
  };
];

```

```

solucion =
Show[{g0, g1, g2, apoyo[{0, 0}, 0.5], apoyo[{2 L0, 0}, 0.5], carga[{0, Lc}, 1, 0], carga[{0, Lc}, 1, 1], carga[{L0, H}, 1, 1],
  muestra
    carga[{2 L0, Lc}, 1, 1], carga[{2 L0 + 4, Lc}, 1, 0], valores] /. datos, PlotRange → All, Axes → False]

```



```
λc = λ /. sol[2]
```

```
81.502
```

