GEOMETRÍA EN EL PARQUE

Eugenio PARDO ROMERO
Profesor de Matemáticas y su didáctica
de la EUM de Palencia

«Me he propuesto elevarme a lo que podría haber dado origen a la Geometría... Me ha parecido que la medición de los terrenos ha debido de originar las primeras proposiciones».

A. C. CLAIRAUT *

LA GEOMETRÍA ha surgido para resolver al hombre problemas que se le plantean, tanto en su vida ordinaria, como de conocimiento del mundo en que se encuentra inmerso.

En este artículo vamos a ver aplicaciones de la Geometría a la realidad volviendo, en muchos casos, a resolver problemas del mismo modo que, según nos revela la Historia de la Matemática, los resolvieron los matemáticos antiguos.

Las actividades que se proponen están tomadas de la realidad; los datos son obtenidos por los propios alumnos, quienes tienen que efectuar las mediciones y constataciones necesarias para ello. En el planteo y resolución es fundamental que predomine la iniciativa y labor de los alumnos, el profesor solamente intervendrá para orientar y solventar dudas. El trabajo ha de ser reflejo de la actuación del alumno, en lo posible, por propia iniciativa.

Con esto se quiere colocar al alumno en las situaciones que las circunstancias de la vida pueden presentarle en un futuro. Este método, que por su forma tiene una intención meramente utilitaria, sin embargo, también es formativa. Responde a una concepción de la educación que asigna un mayor rendimiento educativo a la enseñanza que permita dar significado concreto a los conocimientos teóricos.

Según Courant: «las matemáticas han de tomar su motivación de lo concreto y específico, y tener como meta, asimismo, algún nivel de la realidad.

El vuelo a lo abstracto ha de ser algo más que un mero escape. Despegue y aterrizaje son ambos indispensables, aun cuando el mismo piloto no pueda llevar a cabo todas las fases de la trayectoria».**

Nosotros vamos a realizar todas las actividades que proponemos en el parque de *La Carcavilla*, próximo a la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de EGB de Palencia; pero pueden realizarse también en el patio de cualquier escuela, con ligeras modificaciones.

El material que necesitamos es: plano de Palencia en el que se encuentre el parque citado, teodolito, reloj «de meridiana», brújula, escuadra, espejo, cinta métrica, palo de un metro de longitud, cuerda, tiza, y lapiz y papel para tomar nota de las observaciones realizadas.

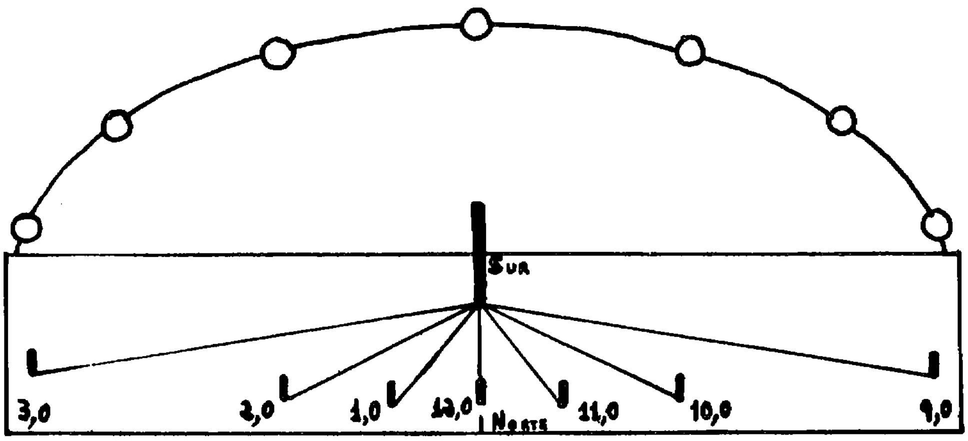
Todo este material es accesible a cualquier escuela, salvo el teodolito y el reloj «de meridiana» por lo que en los anexos indicamos su construcción y uso.

En algunas de nuestras actividades el sol va a cumplir un papel fundamental, por lo que será conveniente, si se quieren realizar todas, elegir un día soleado.

Vamos a empezar calibrando nuestro reloj «de meridiana», actividad de la que nos ocuparemos todo el día, hecho que no impedirá que efectuemos todas las actividades propuestas.

Pues bien, instalamos nuestro reloj en un lugar del parque en el que reciba luz solar la mayor parte de la jornada. Le apoyaremos en un sitio perfectamente horizontal, para lo que nos podemos valer del nivel indicado en el anexo, y, mediante la brújula, hacemos que el eje Norte-Sur de su base se oriente según el eje N-S que indica la brújula. Esta recta se conoce como «meridiana del lugar» (ver figura 1).

FIGURA 1



Cada media hora, durante todo el día, y de 15 en 15 minutos desde las 12 a la 14 horas si el calibrado se efectúa en invierno, y de las 13 a las 15 si es en verano, los alumnos marcarán sobre la tabla la sombra que arroja el gnomon, indicando la hora de nuestro reloj «de pulsera» a la que corresponde cada sombra. Marcaremos con trazo más grueso las sombras que corresponden a las horas enteras, así tendremos calibrado nuestro reloj de sol. (Por cierto, el más antiguo que se conoce data del siglo XV a. C. y fue construido en Egipto durante el mandato del faraón Tutmosis III).

Este reloj es muy adecuado para latitudes superiores a los 35°, como es nuestro caso, porque las sombras arrojadas son demasiado largas. En tales latitudes se podría utilizar el reloj en verano que es cuando las sombras son más cortas (ver figura 2).

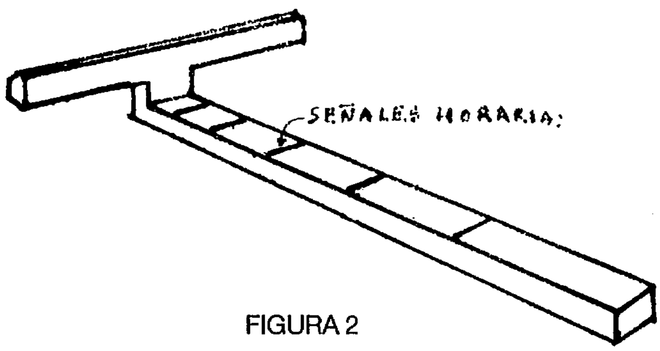


FIGURA 2

Si unimos los puntos extremos de la sombra arrojada por nuestro gnomon obtenemos una curva simétrica respecto del eje N-S, eje común a la sombra más corta, a la meridiana del lugar y al mediodía solar.

Como esta curva no depende de la colocación de nuestro reloj, no necesitamos la brújula para conocer la dirección N-S, pues la marca la sombra más corta. El sur le indica la base del gnomon y el norte el extremo de la sombra.

Una vez que conocemos hacía donde está el norte lo indicaremos en nuestro plano, con lo que le habremos orientado.

Ayudándonos de esta curva, también podemos calcular la longitud y la latitud geográficas de nuestro parque. Más adelante veremos cómo.

Ahora bien, la sombra más corta observamos que no coincide con las doce de nuestro reloj «de pulsera», como teóricamente sería de esperar, por indicarnos el mediodía solar; esto es debido a tres motivos que pasamos a exponer brevemente:

Uno se debe a que la hora «oficial» de España está adelantada respecto a la hora solar, una en invierno y dos en verano.

Otro a la no uniformidad del movimiento aparente del sol, por lo que los 365 días del año no son todos iguales, existiendo días algo más largos y otros algo más cortos, llegando a haber hasta 16 minutos 18 segundos de diferencia entre el día solar aparente y el día solar medio (duración de un día ficticio que resulta del promedio de todos los días del año), diferencia que se conoce como *ecuación del tiempo*, y que es nula a mediados de abril, a mediados de junio, a principios de septiembre y a finales de diciembre. Esta ecuación está, evidentemente, tabulada.

Y un tercero, es debido a la ubicación del lugar donde se instala el reloj, ya que al fijar la hora «oficial» de un país, se hace sumando o restando horas enteras a la hora de «Greenwich» o meridiano cero, que en España pasa por Castellón de la Plana. Se considera cada hora entera la que señalan los meridianos que, 15° en 15°, suceden al de Greenwich.

Como la Tierra da una vuelta completa alrededor de su eje cada 24 horas, girará 15° cada hora, por lo que cada grado que gire equivale a cuatro minutos.

Esto explica por qué el mediodía solar, aun corregido con el cambio de hora oficial y la *ecuación del tiempo,* se muestra retrasado, en nuestro parque, 18 minutos; pues está situado a 4° 30‘ de longitud oeste.

De acuerdo con esto y procediendo al revés, podemos calcular, como decíamos, la longitud geográfica de nuestro lugar. En efecto, conociendo la diferencia exacta de tiempo entre nuestro mediodía solar y la hora «oficial» podemos calcular la longitud del lugar en el que instalamos el reloj.

Utilizando en forma inversa los cálculos efectuados antes, los alumnos podrán calcular que los 18 minutos de retraso respecto del mediodía solar corregido, corresponden a 4° 30‘ de longitud oeste. (Para más información pueden consultarse [1] y [12] de la bibliografía).

Antes de calcular la latitud geográfica, vamos a describir el procedimiento que utilizó Eratóstenes de Cirene, en el siglo III a. C., para calcular la longitud del meridiano terrestre, ya que este procedimiento nos servirá para calcular la latitud de nuestro parque.

Eratóstenes observó que en Siene (actualmente Assuán), al mediodía en el solsticio del verano (22 de junio), un mástil vertical espuesto al sol no arrojaba sombra alguna y el fondo de un pozo profundo quedaba completamente iluminado. Sin embargo, en ese momento y en Alejandría el ángulo formado por un mástil vertical y el rayo que pasa por el extremo superior de este y por el extremo de su sombra, ángulo α ,medía 7° 12‘, o lo que es lo mismo 1/50 de circunferencia (ver figura 3).

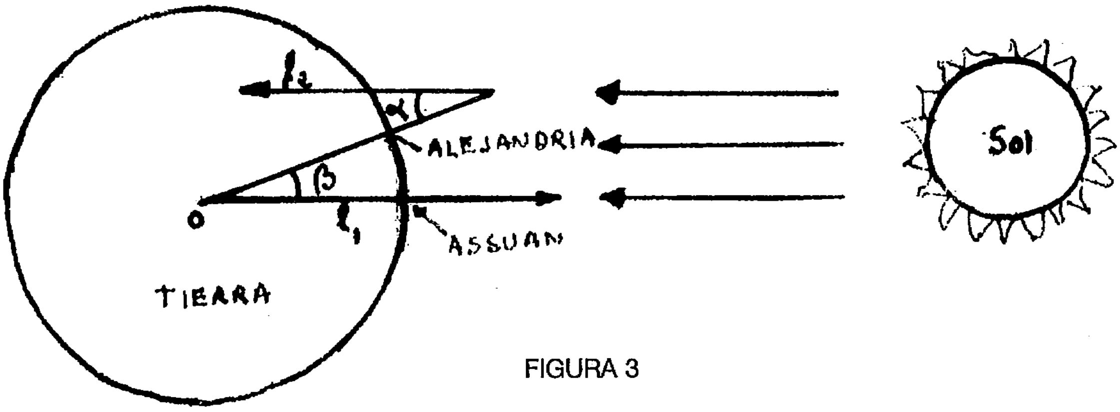


FIGURA 3

Con la hipótesis de que los rayos del Sol inciden paralelamente sobre la Tierra, se tiene que los rayos l_1 y l_2 son paralelos y cortados por una secante por lo que $\alpha = B$. En consecuencia, la distancia de Siene a Alejandría tendría que ser 1/50 de la longitud del meridiano terrestre.

Se sabía que la distancia entre Siene y Alejandría era, aproximadamente, 5.000 estadios. Eratóstenes concluyó que la longitud del meridiano terrestre era de 250.000 estadios. No sabemos con certeza cuál es el valor del estadio que tomó Eratóstenes, pero considerando que éste fuera de 158,75 m. (estadio egipcio), obtuvo 39.688 km. como longitud del meridiano terrestre, valor que difiere en menos de un 1% del valor real.

En todo este razonamiento, totalmente correcto desde el punto de vista geométrico, hay dos pequeños errores, que no desvirtúan el cálculo de Erastótenes porque resultan compensados: 1º: la ciudad se Siene está casi un grado al norte del trópico; y 2.º: las dos ciudades no se encuentran sobre el mismo meridiano.

Posteriormente, Eratóstenes cambió su cálculo por uno mejor: 252.000 estadios, pero nadie parece saber por qué lo hizo. De acuerdo con los datos conocidos, algunos historiadores creen que no sólo era inteligente y cuidadoso, sino, también, que tuvo mucha suerte.

En tiempos de Cristóbal Colón el valor que se conocía del meridiano terrestre era mucho menor, por lo que fue a las Índias por un «atajo» que le llevó a descubrir América.

Conocido el método de Eratóstenes, vamos a calcular la latitud del parque. No tenemos más que medir el ángulo φ formado por la sombra del gnomon y el propio gnomon en el momento en que esta sombra es mínima, es decir, cuando el Sol pasa por el meridiano del parque al mediodía solar, y este ángulo es la latitud geográfica si la medición la hacemos los dos días en los

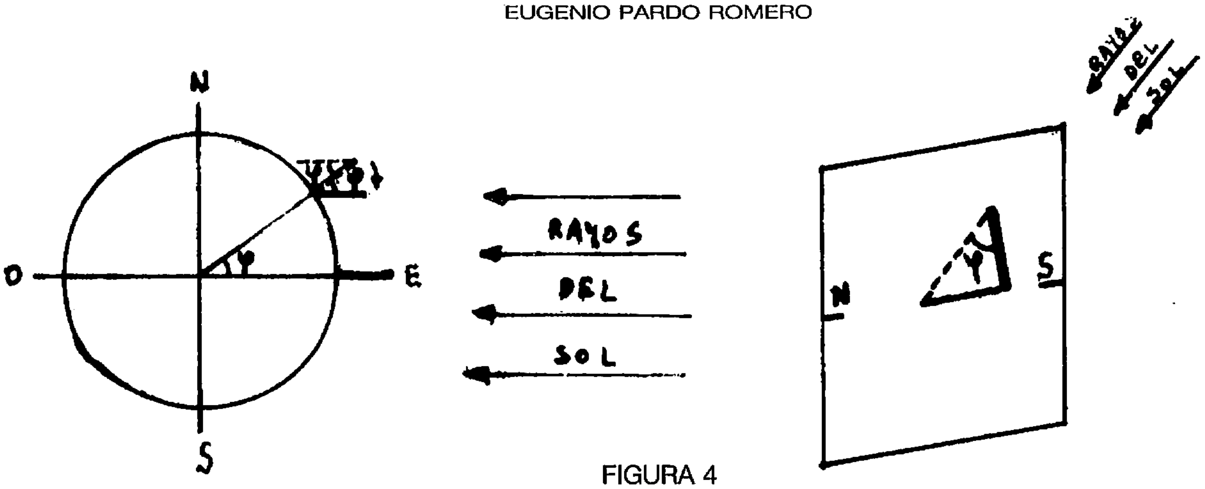


FIGURA 4

que el Sol «cae» sobre el ecuador verticalmente (aproximadamente el 21 de marzo y el 22 de septiembre). Para los demás días, habrá que contar con que también el Sol está «inclinado» (en apariencia) hacia arriba en verano y hacia abajo en invierno, del plano ecuatorial terrestre, alcanzando su máxima inclinación, 23º 27‘, hacia el norte o hacia el sur, los días de solsticio de verano e invierno, respectivamente. Existen tablas en las que figura la inclinación del Sol para cada día del año. Con esto podemos construir un reloj de sol con corrección de latitud. (Consultar [1] y [12] de la bibliografía).

Los cálculos que hemos realizado en estas actividades serían más precisos si en vez de un gnomon de 15 cm. usamos uno de un metro. En adelante trabajaremos con un palo de un metro, que, además, nos facilitará las operaciones.

Mientras la sombra de nuestro reloj «de meridiana» nos va marcando el paso del tiempo, seguimos aprovechando el Sol para calcular alturas de árboles, farolas, edificios,...

El procedimiento que vamos a utilizar ya lo empleó Tales de Mileto (S. VI a. C.) para calcular la altura de las pirámides de Egipto: «En el momento en que la sombra arrojada por un palo colocado verticalmente sea igual a su longitud, ocurrirá que la sombra de la pirámide es igual a su altura». Problema cuya solución exigió, a su vez, el conocimiento de la igualdad de dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales, y la proporcionalidad de los lados homólogos de dos triángulos semejantes.

«En papiros egipcios y en tablillas cuneiformes se encuentran aplicaciones numéricas de las propiedades de los triángulos semejantes, pero tales aplicaciones prácticas no presuponen el conocimiento previo de la demostración teórica de ellas. De ahí que de atribuir alguna contribución original de Tales al respecto debería referirse a la deducción racional de esas propiedades, pero nada de eso aparece en las referencias disponibles, donde a lo sumo se indica el método utilizado, por ejemplo: midiendo la sombra proyectada por la pirámide en el instante en que la propia sombra del operador era igual a la altura de su cuerpo. Pero aún en este caso, fundado sobre un método de comprobación intuitiva, nada prueba que Tales haya demostrado el teorema que, con frecuencia, lleva su nombre en los textos elementales de geometría, pero cuya primera demostración, nada fácil, aparece en el libro VI de los Elementos de Euclides (S. III a. C.)».***

Pues bien, empleando este método vamos a calcular la altura de un árbol de nuestro parque.

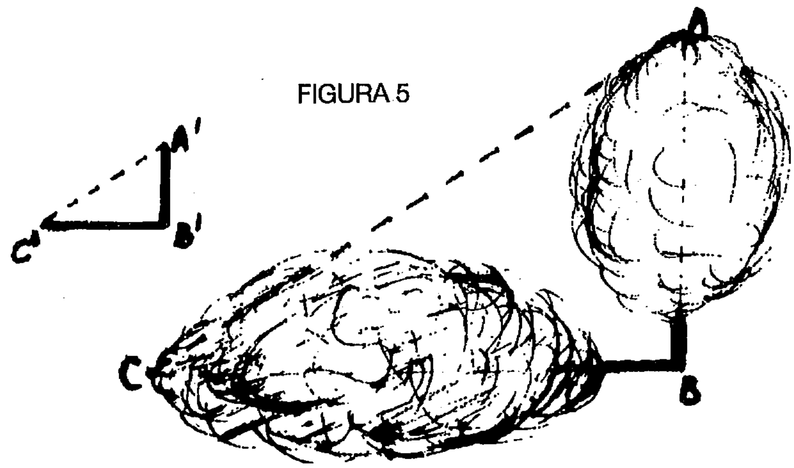
Tomemos el palo de un metro y situémosle verticalmente. En el momento en que su sombra mida un metro, la longitud de la sombra arrojada por el árbol será su altura.

Pero para tener dos triángulos semejantes no hace falta que sean isósceles por lo que podemos efectuar las medidas en cualquier momento del día. Así, los triángulos A B C (formado por la altura del árbol, su sombra arrojada y la recta que une el punto más alto del árbol con el extremo de su sombra) y el A‘B‘C‘ (por el palo, su sombra y la recta que une el extremo de su sombra) son semejantes (ángulos en C,C‘ y B,B‘ al tener sus respectivos lados paralelos, son iguales) y por tanto es cierta la relación:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'} \qquad \text{con lo que} \qquad AB = \frac{CB \cdot A'B'}{C'B'}$$

es la altura del árbol.

FIGURA 5



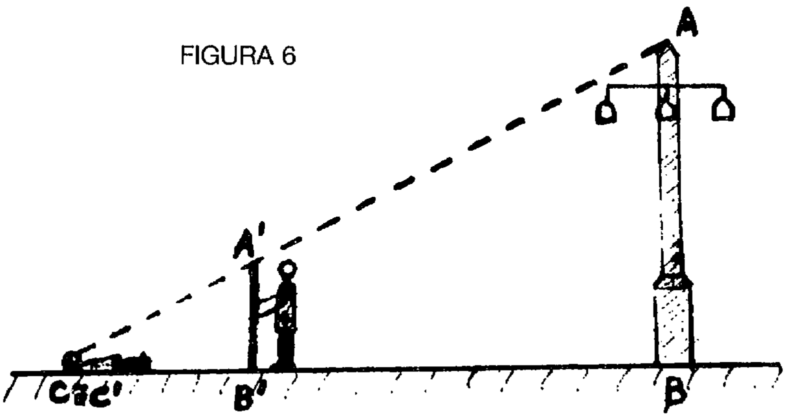
En definitiva, dividimos la longitud de la sombra del árbol por la de la sombra arrojada por el palo, en el mismo instante, y como A‘B‘ vale un metro, el cociente obtenido será la altura del árbol. Téngase en cuenta que en el caso de ser los triángulos isósceles A‘B‘ = C‘B‘ por lo que AB = CB, como hizo Tales.

Este método es muy sencillo, pero ¿cómo calculamos la altura si ese día no «hace» sol?

Pues muy fácilmente, empleando los métodos que a continuación indicamos y que tampoco presentan ninguna dificultad, pues todos están basados en la proporcionalidad.

En la Figura 6 los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes, entonces como ocurría anteriormente:

FIGURA 6



$$AB = \frac{CB \cdot A'B'}{C'B'}$$

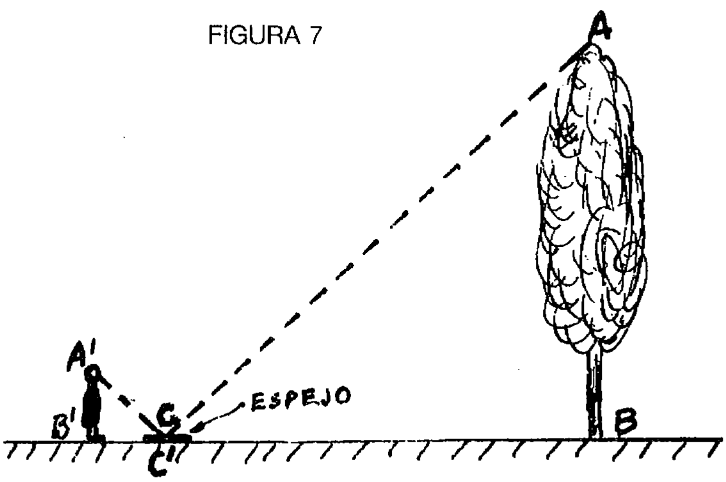
Siendo AB la altura de la farola, A'B' la altura del palo, CB la distancia desde los ojos del alumno que está tumbado a la base de la farola y C'B' la distancia a la que ha de situarse el palo verticalmente para que su vértice, el de la farola y los ojos del alumno estén alineados.

Pero, tener que tumbarse en el suelo es incómodo, por lo que vamos a indicar otro método que aparece en el libro «Óptica» de Euclides.

Los triangulos ABC y A'B'C' de la figura son semejantes, ya que tienen los ángulos iguales: El ángulo $A\hat{C}B = A'\hat{C}'B'$ ya que «el rayo incidente es igual al formado por el reflejado» y los ángulos en B y B' son rectos. Entonces:

$$AB = \frac{CB \cdot A'B'}{C'B'}$$

FIGURA 7



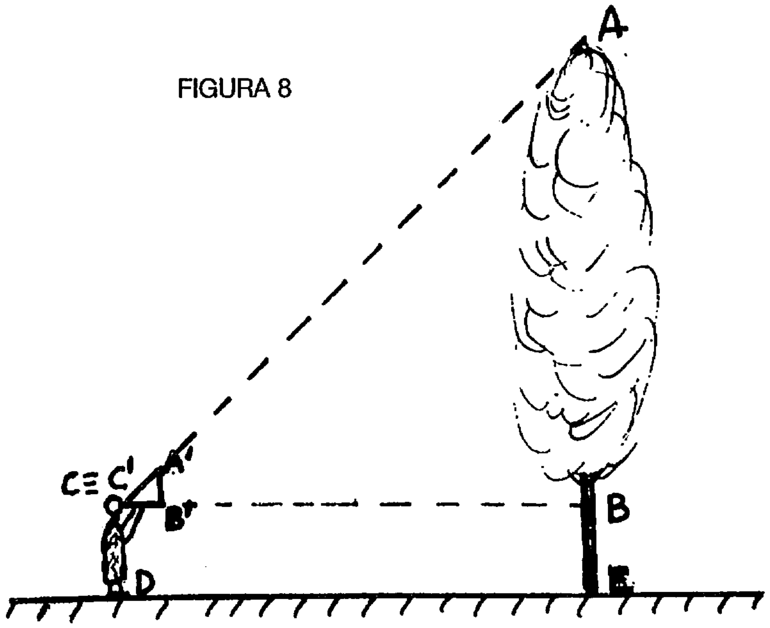
Siendo AB la altura del árbol A'B' la altura desde el suelo a los ojos del alumno, CB la distancia de la base del árbol al punto del espejo en el que se ve el vértice del árbol y C'B' la distancia de este punto hasta donde ha tenido que colocarse el alumno para ver reflejado el vértice.

Si no tenemos a mano un espejo, pero sí un cartabón de los empleados en dibujo lineal (triángulo rectángulo isósceles), indicamos este otro método:

El alumno se mueve con el cartabón situado a la altura de los ojos, conforme se ve en la figura 8, hasta una posicón D en la que el rayo visual C'A' pase por A.

Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes —ángulos en B y B' rectos y ángulo en C común— por lo que volvemos a tener:

FIGURA 8



$$AB = \frac{CB \cdot A'B'}{C'B'}$$

Ahora para calcular la altura del árbol hemos de sumar a la altura AB la BE=CD, que es la altura desde el suelo a los ojos del alumno.

Aún nos queda por utilizar el aparato más «sofisticado» de cuantos hemos traído hasta nuestro parque. Es el teodolito, con el que además de calcular alturas vamos a calcular distancias.

Situemos el teodolito en D, a la distancia del árbol que deseemos. A continuación, ayudándonos de los niveles que lleva incorporados, le colocaremos de forma que esté ubicado horizontalmente. Enfocando el tubo al vértice del árbol podemos leer en el semicírculo graduado el ángulo que ha girado desde su posición horizontal. Pues bien, como del triángulo rectángulo ABC conocemos el lado CB y el ángulo α, tenemos:

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{AB}{BC}$$

y mirando en las tablas trigonométricas o en la calculadora, el valor de tag α, tenemos:

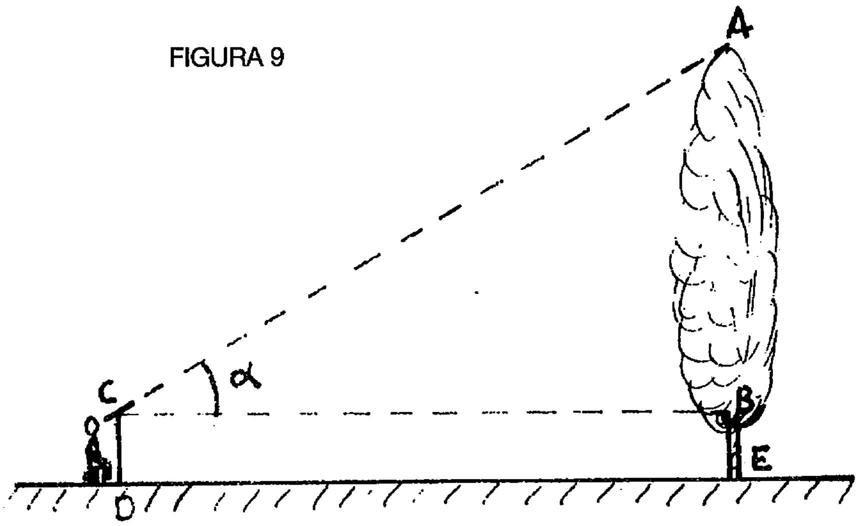
$$AB = BC \cdot \text{tag}\,\alpha$$

con lo que la altura del árbol es:

$$AE = AB + BE$$

siendo BE la distancia desde el eje del tubo al suelo.

FIGURA 9



Si nuestros alumnos aún no conocen las funciones circulares no será motivo para quedarnos sin calcular la altura del árbol, es más, aprovecharemos para introducir o aplicar las escalas, que figuran en los mapas, planos,... que no es más que un problema de proporcionalidad.

Si pudiéramos abatir sobre el suelo el triángulo ABC, ya tendríamos resuelto el problema, pues bastaría con medir la distancia AB en el suelo y añadirle CD = BE.

De este triángulo conocemos un lado y dos ángulos, uno de ellos recto, luego sabemos construirlo.

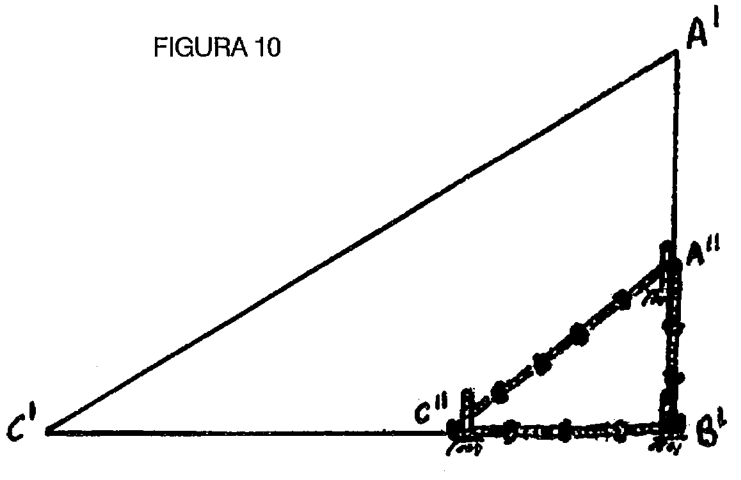
Así, en un lugar despejado del parque, trazamos un segmento de longitud B'C' = BC. Ahora nuestra dificultad está en trazar los ángulos, ya que no tenemos un semicírculo graduado del tamaño adecuado. Pero cuando construimos el teodolito graduamos un círculo en la base que nos serviría para medir ángulos como el que ahora queremos (ángulos horizontales).

Así, situamos el teodolito en B' de tal modo que mirando por su tubo veamos los puntos que forman la recta B'C', giramos el teodolito 90° horizontalmente y volviendo a mirar señalamos en el terreno la recta B'A' que nos indica el eje del tubo. De este modo, hemos trazado un ángulo recto con vértice en B'. Para trazar el ángulo en C', situamos el deodolito en C' y procedemos como anteriormente, sólo que ahora trazamos un ángulo de α°. El punto donde se corten esas rectas es A'. Así, hemos abatido nuestro triángulo y, por tanto, tenemos el problema resuelto.

Hemos trazado un ángulo recto en el suelo con la ayuda del teodolito, veamos cómo ayudándose de una cuerda los trazaban los agrimensores egipcios hace 5.000 años.

En una cuerda hacían doce nudos equidistantes, entonces formaban con la cuerda un triángulo en el que los lados tenían 5,4 y 3 espacios iguales entre nudos. Así, obtenían un triángulo rectángulo, ya que $5 + 4 + 3 = 12$ y $5^2 = 4^2 + 3^2$. Esta propiedad que nosotros conocemos como teorema de Pitágoras ya era conocida por los egipcios. Posteriormente, Pitágoras (S. VI a. C.) la generalizó y dió lugar al teorema que lleva su nombre.

FIGURA 10



En las actividades anteriores hemos trabajado con triángulos que tenían sus lados proporcionales (triángulos semejantes) y gracias a ello pudimos calcular alturas de obstáculos.

Para construir el triángulo A'B'C' en el suelo hemos realizado las mismas operaciones que cuando lo construimos en el papel. ¿Cómo podemos hacerlo en el papel de tal modo que pudiésemos medir la altura del árbol?

En efecto, trazando un triángulo A"B"C" de lados proporcionales al A'B'C' que habíamos construido en el terreno. Así:

$$\frac{A':0B'}{A''B''} = \frac{C'B'}{C''B''} \quad \text{con lo que } A'B' = \frac{A''B'' \cdot C'B'}{C''B''} = \frac{A''B'' \cdot CB}{C''B''} = AB$$

y si $\dfrac{CB}{C''B''} = K$ el triángulo del papel tiene dos lados K veces menores que el del terreno, esto es: $CB = K \cdot C''B''$.

Si el triángulo A"B"C" tiene sus lados 200 veces más pequeños que el que se forma en la realidad, diremos que le hemos dibujado a escala 1:200, lo que quiere decir que cada unidad del dibujo son doscientas unidades en la realidad.

La altura del árbol quedará calculada multiplicando por 200 la longitud A"B" y sumando a este resultado la altura del teodolito, por supuesto, empleando las mismas unidades de medida.

Ahora que ya sabemos lo que es la escala y cómo calcularla, vamos a averiguar la del plano en el que se encuentra nuestro parque. Para ello identificamos en la realidad una recta del plano, midiendo ambas y efectuando el cociente de su longitud en el plano y en la realidad, empleando las mismas unidades en ambas medidas, tendremos la escala de nuestro plano.

Para facilitar los cálculos cuando trabajamos con la escala, podemos obtener una expresión más sencilla de la escala, simplemente hallando una fracción equivalente a la obtenida anteriormente, en la que el numerador sea la unidad, tal como suele figurar en los mapas.

Una vez que hemos calculado e indicado en el plano su escala, vamos a situar algún objeto que no esté representado en él, por ejemplo, una de las chimeneas de la Electrolisis del Cobre, empresa situada al lado de nuestro parque.

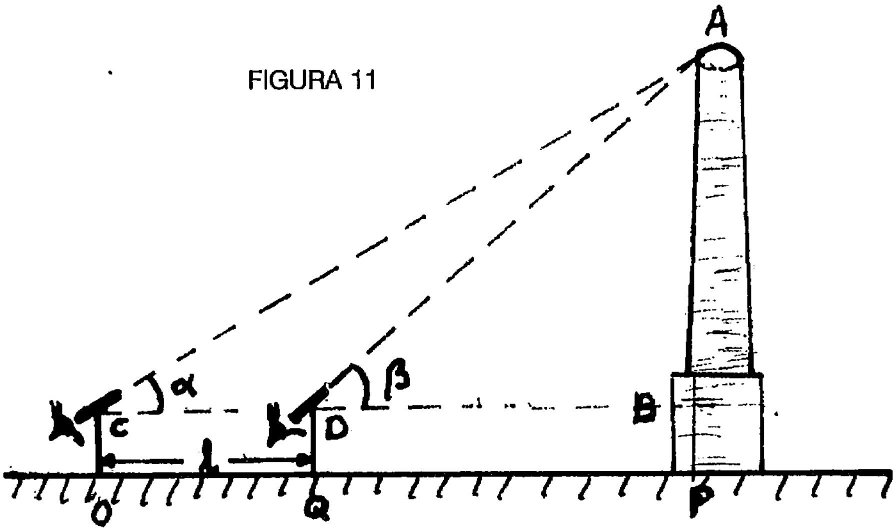
Como esta chimenea va a venir representada en el plano por un punto, nuestro problema va a consistir en situar un punto P en un plano, para lo que podemos emplear las coordenadas polares en las que fijado un punto O y una semirrecta *r*, necesitamos conocer un ángulo y una distancia para situar cualquier punto del plano.

En nuestro caso el punto O será aquel en el que situemos el teodolito y la semirrecta *r* el eje norte-sur.

Situados en O y enfocando el tubo en la dirección N-S y luego en la de la chimenea elegida tenemos calculado el ángulo γ , sin más que leer en el círculo horizontal de nuestro teodolito.

La distancia OP la calculamos del siguiente modo: Después de medir desde O el ángulo α avanzamos hacia la chimenea en línea recta l metros hasta Q donde volvemos a situar el teodolito para medir el ángulo β (Ver figura 11).

FIGURA 11



Dibujando en el papel, a la escala que deseemos, el triángulo ADC podemos calcular no sólo la distancia OP sino también la altura de la chimenea, que será AP = AB+BP.

Pasando esta distancia a la escala del plano ya tenemos los dos datos que necesitábamos para situar la chimenea. En efecto, situado O en el plano trazamos el ángulo γ con vértice en O, a partir de la semirrecta *r* y en el sentido adecuado. La distancia OP la colocamos sobre el segundo lado de nuestro ángulo y este punto P será donde está situada la chimenea. (Ver *figura 12*).

Recíprocamente, si la chimenea estuviese situada en el plano, calculando OP podríamos calcular la escala del mismo.

Nótese que este mismo procedimiento le podemos emplear para situarnos en el plano con sólo localizar un accidente del terreno y calcular la distancia a la que nos encontramos de él, así como el ángulo que forma la recta formada por nuestra situación y el obstáculo y por la dirección N-S.

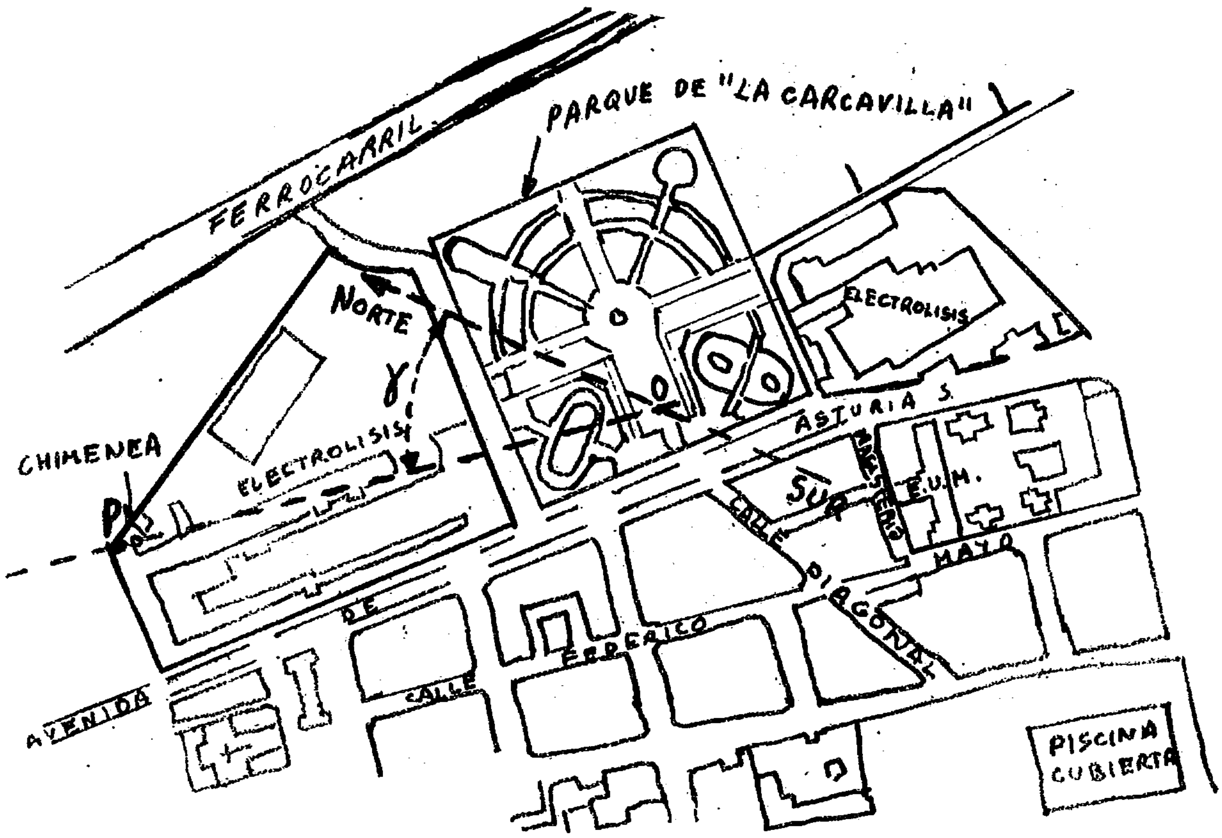


FIGURA 12

Antes hemos trazado sobre el terreno un triángulo, ahora vamos a trazar una circunferencia y una elipse como las de los parterres del parque.

Los jardineros las trazan con una cuerda, aplicanco las definiciones de estas curvas, tal como puede apreciarse en la figura 13 de la elipse.

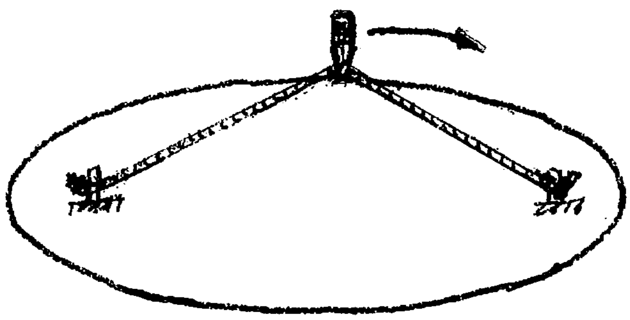


FIGURA 13

Sobre el terreno, por un lado, y empleando el plano, por otro, calcularemos la superficie de algunos de los parterres, comparando los resultados obtenidos por cada procedimiento.

Este parque fue un cementerio del que se han conservado algunos panteones de formas geométricas muy conocidas.

Ahora nos interesa saber la superficie y el volumen de alguno de ellos y podemos calcularlo ayudándonos de los procedimientos indicados para medir alturas.

Para finalizar nuestras actividades en el parque nos vamos a proponer trazar una línea de nivel en el tobogán de cemento que allí se encuentra y luego la trasladaremos al papel.

Para lo primero, situamos el teodolito en un punto O, cercano al tobogán, y cuidando que el tubo esté siempre horizontal (ya que una línea de nivel es la intersección de un plano horizontal con el terreno) le iremos girando a la vez que miramos por el tubo. Así podemos localizar, y un compañero marcar en el tobogán, los puntos por donde pasa la línea de nivel. (Ver figura 14).

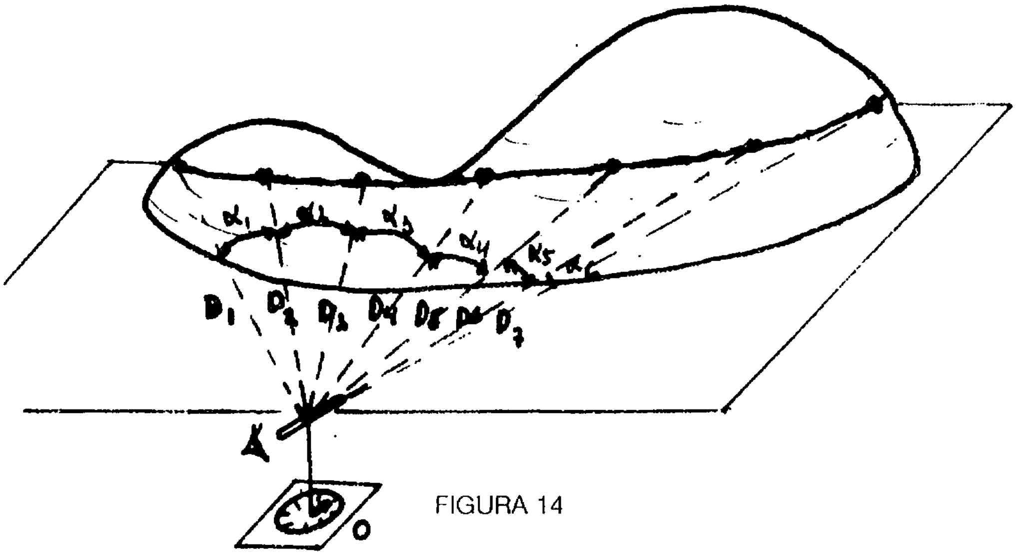


FIGURA 14

Para pasarla al papel necesitamos medir los ángulos α_i en el círculo horizontal y las distancias d_i, con una cinta métrica. Lo dibujamos a la escala que creamos conveniente y así obtenemos la línea del nivel que nos da la forma del tobogán a la altura del tubo del teodolito. (Ver figura 15).

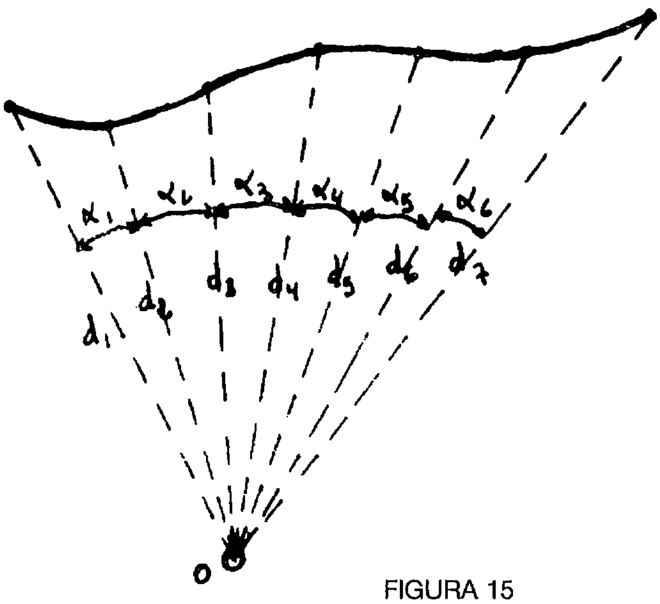


FIGURA 15

Decíamos al principio del artículo que el profesor solamente intervendrá para orientar y solventar dudas, en definitiva para ayudar al alumno a resolver los problemas planteados. ¿Pero cómo?

«Lo mejor es ayudar al alumno de forma natural. El maestro deberá ponerse en su lugar, ver desde el punto de vista del alumno, tratar de comprender lo que pasa por su mente y plantear una pregunta o indicar algún camino que pudiese ocurrírsele al propio alumno.

Hemos de tener en cuenta que para resolver un problema es necesario:

1.° COMPRENDER EL PROBLEMA, es decir, ver claramente lo que se pide.

2.° Captar las relaciones que existan entre los diversos elementos, ver lo que liga la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder TRAZAR UN PLAN.

3.° Poner en EJECUCIÓN el plan.

4.° VOLVER ATRÁS una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla».[11]

ANEXO

Reloj «de meridiana»: Consiste simplemente en una base de madera a la que se fija verticalmente en su centro un palo de 15 cm. llamado gnomon.

Sobre la mitad de uno de los lados mayores se marca una línea, que señalará el norte, mientras que en la mitad del lado opuesto se marcará otra línea, indicadora del sur. (Ver figura 1).

El teodolito es un aparato que sirve para medir ángulos de un plano horizontal y de uno vertical. Difiere principalmente del que emplean los topógrafos en la precisión de las medidas, como es natural. (Ver figura 16).

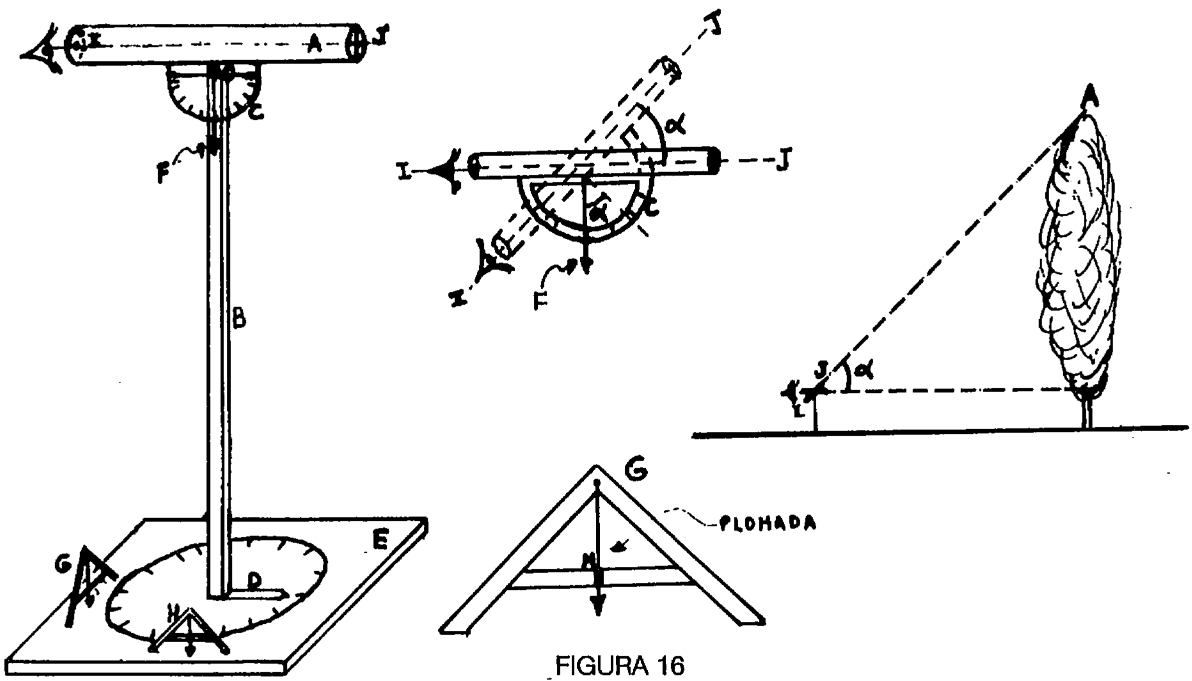


FIGURA 16

Los materiales que necesitamos para su construcción son: un tubo A (por ejemplo, de los que vienen en los rollos de papel de aluminio), un listón de madera B de 2×2×100 cm., un semicírculo graduado C, tres cuerdas de 20 cm. de las que colgarán unos pesos (plomadas), un pequeño cursor de madera D (15 cm.), una tabla E de 40×40, un listón de 2×1×16 cm., y dos trozos de alambre de 7 cm. cada uno.

Modo ce construirlo:

Su realización correrá a cargo de los propios alumnos, pues su construcción tiene para ellos un valor formativo, además de familiarizarse con el aparato.

En un extremo del tubo se fijan dos alambres de tal forma que se crucen en su punto medio tapando el otro extremo con un papel en el que se realizará, en su punto medio, un pequeño orificio que servirá para enfocar el aparato.

A este tubo se fija el semicírculo de tal modo que se mueva solidario con él. Este semicírculo nos servirá para medir ángulos en el plano vertical, para ello suspenderemos del punto 0, que será el eje de giro, una plomada F.

Este eje de giro atravesará el listón de 100 cm. En su otro extremo fijaremos el cursor que girará solidario con el listón y por tanto girará al girar el tubo horizontalmente.

Los niveles G y H están formados por dos triángulos isósceles de madera, construidos con el listón de 2×1×160 cm., en cuyos vértices se suspende una plomada. Si el plano en el que se apoya el nivel es perfectamente horizontal el hilo de la plomada pasará por el punto medio M, punto que habremos marcado con una recta.

Para terminar, fijaremos perpendicularmente a la base los dos niveles en las posiciones indicadas en la figura. Ellos nos servirán para situar la base del teodolito perfectamente horizontal sobre el terreno.

Plinio El Viejo, escritor del siglo I de nuestra era, atribuye la invención de estos niveles a Teodoro de Samos que vivió en el siglo VI a. C.

Manejo del aparato:

Valiéndonos de los niveles situaremos el aparato de tal modo que la base quede perfectamente horizontal y por tanto el palo de un metro B vertical.

Para medir ángulos verticales alineamos el eje IJ con el vértice A del obstáculo. La medida del ángulo α vendrá dada en el semicírculo C (téngase en cuenta que cuando el tubo está horizontal el semicírculo nos indica 90º).

Para medir ángulos horizontales, por ejemplo, el que forma el punto donde estamos y dos árboles, enfocamos con el tubo a uno de los árboles y anotamos los grados que el cursor D nos indica en el círculo de la base, luego miramos al otro árbol y volvemos a anotar los grados. La diferencia entre estas medidas nos dará la medida de ángulo buscado.

Con este sencillo teodolito o astrolabio (pues nos permite determinar la altura y el rumbo de una estrella) se realizaron muchos de los descubrimientos primitivos.

* * *

BIBLIOGRAFÍA

1. AVERBUJ, E.: *Para medir, aparatos y métodos,* Ed. Laia, Barcelona, 1981.
2. BOSCH, D y DEULOFEU, J.: *Primeros cálculos del tamaño del sistema solar,* Actas de las III J. A. E. M., I. C. E. de la Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 1983.
3. CASTELNUOVO, E.: *Geometría intuitiva,* Ed. Labor, Barcelona, 1963.
4. CORBERO, R. y LLADO, C.: *L'eclipsi de sol del día 15 de desembre de 1982: eje de de una programación para primer curso de B. U. P.,* Actas de las III J. A. E. M.
5. ESQUIVEL, J. A. y YUS, R.: *Nueva revista de enseñanzas medias,* núm. 7, 1985, pp. 135-146.
6. FREUDENTHAL, H.: *En todos los niveles ¡Geometría!,* Actas de las III J. A. E. M.
7. GAVALDA, D.: *Breve viaje el mundo de la matemática,* Fundación Caja de Pensiones, Barcelona, 1984.
8. GRUPO BETA: *Proporcionalidad geométrica y ejercicios de medida,* I. C. E. Universidad de Extremadura, Badajoz, 1985.
9. MARQUÉS, M.: *La observación astronómica en la Grecia antigua,* Actas de las III J. A. E. M.
10. MOISE, E. y DOWNS, F.: *Geometría moderna.* Fondo Educativo Interaméricano, Bogotá, 1970.
11. POLYA, G.: *Cómo plantear y resolver problemas,* Ed. Trillas, México, 1965.
12. RONAN, C. A.: *Los amantes de la astronomía,* Ed. Blume, Barcelona, 1982.

* * *

* *Elements de Géometrie, 1741, citado por E. Castelnuovo en (3).*

** *Matemáticas en el mundo moderno,* Recopilación de M. Kline de la revista *Scientific American,* Ed. Blume, Madrid, 1974.

*** *Historia de la Matemática,* J. Rey Pastor y J. Babini, Ed. Gedisa, Barcelona, 1985, 2 volúmenes.