Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL:

INTEGRAL DEFINIDA, CÁLCULO MENTAL Y NUEVAS TECNOLOGÍAS

Presentada por Mario Porres Tomé para optar al grado de doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por: Dr. D. Tomás Ortega del Rincón

Valladolid, julio de 2011

Memoria presentada para optar al grado de Doctor por la Universidad de Valladolid por D. Mario Porres Tomé, Licenciado en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Valladolid, en el Programa de Doctorado: *Investigación en Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales, y de la Matemática.*

Director de la Tesis Doctoral: *Dr. D. Tomás Ortega del Rincón.* Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid.

D. TOMÁS ORTEGA DEL RINCÓN, Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que la presente memoria, ***Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías,*** ha sido realizada por D. Mario Porres Tomé bajo mi dirección en la Universidad de Valladolid.

Valladolid, julio de 2011

Fdo.: Dr. D. Tomás Ortega del Rincón

A Pilar,

Alfonso y Javier

La sabiduría exalta a sus hijos,
y cuida de los que la buscan.
El que la ama, ama la vida;
y los que madrugan a buscarla
serán colmados de alegría.
Hijo, desde tu juventud ponte a aprender,
y hasta encanecer hallarás sabiduría.
Como el que ara y el que siembra acércate a ella
y espera sus buenos frutos.

Sirácida 4, 11-12 y 6, 18-19

AGRADECIMIENTOS

A todos mis alumnos, en especial a quienes han participado en esta investigación, ellos son la razón por la cual deseamos mejorar la enseñanza.

A mi esposa Pilar y a mis hijos Alfonso y Javier por su apoyo y sus ánimos; las conclusiones están redactadas, la Tesis ha concluido y después de su defensa todo mi tiempo será vuestro.

A mis padres, hermanos y al resto de mi familia; los familiares presentes se alegran por ver finalizada esta investigación, los ausentes hubieran tenido las mismas sensaciones y todos ellos han contribuido sobremanera a la llegada de este momento en el cual se concentran tantos años de trabajo. Gracias a esta ejemplar familia, sin ella no hubiera sido posible hacer nada.

A todas las personas que han participado en mi educación, desde el más humilde de mis maestros hasta el más prestigioso de mis profesores, les expreso mi más sincero agradecimiento.

A todos los que se han interesado por mis progresos en esta investigación, gracias por vuestro ánimo y apoyo.

A los científicos de todos los tiempos, gracias a ellos tenemos una calidad de vida impensable siglos atrás y, además, sigue mejorando continuamente.

Al Director de la Tesis, Dr. D. Tomás Ortega del Rincón, recio castellano, hombre cabal, trabajador incansable, paciente en grado sumo, excelente profesor e investigador. Gracias por tu magnanimidad, tus sabios consejos y tu confianza hacia mi persona; la deuda contraída contigo es impagable.

A los Doctores del Tribunal calificador de esta Tesis Doctoral por el tiempo dedicado a la misma y por sus sabios consejos que sin duda me darán en el acto de defensa de esta Memoria.

A todas las personas que se acerquen a esta Tesis Doctoral por el diálogo virtual mantenido con ellas al realizar la lectura de este documento de investigación, y deseándoles que su propio tiempo dedicado a ello no sea baldío; en caso contrario, me consideraré su deudor.

Por último, a la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León por la concesión de una Licencia por Estudios para finalizar esta Tesis Doctoral.

RESUMEN

La Tesis Doctoral *Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías*, inscrita en Didáctica de la Matemática, ha sido realizada bajo el marco metodológico cualitativo de investigación-acción y el modelo teórico de los actos de comprensión de Sierpinska.

La parte teórica se compone de los siguientes apartados:

- El estudio los antecedentes, cuyos investigadores más significativos son: Schneider, Tall, Sierpinska, Abrahamson, Dubinsky, Rouche, Azcárate, Cordero, Contreras, Depool, Camacho, González-Martín, Sierra, Ortega, Blázquez, Eisenberg, Turégano, Llorens, Gómez, Cockcroft, Brousseau, Drijvers, Trouche, etc.
- Un breve resumen de las características de la investigación cualitativa reconocida como investigación-acción.
- La presentación de varios modelos teóricos utilizados en las investigaciones matemáticas con orientaciones didácticas, éstos son: imagen conceptual y definición conceptual de Tall y Vinner, los actos de comprensión de Sierpinska, la transposición didáctica de Chevallard, las representaciones semióticas de Duval, las situaciones didácticas de Brousseau y la teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas) de Dubinsky.
- La epistemología del área y el cálculo integral, entre cuyos científicos más relevantes destacamos a: Eudoxo, Euclides, Arquímedes, Oresme, Cavalieri, Fermat, Barrow, Newton, Leibniz, Cauchy, Riemann, Darboux y Lebesgue.
- El análisis curricular del concepto integral (definida e indefinida) realizado en once libros de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II y, para lo cual, se han establecido las correspondientes categorías de contenido matemático.
- La elaboración de una Unidad Didáctica en la que se establecen el área del rectángulo y del círculo, se construye la integral de Darboux y se demuestra el teorema fundamental del cálculo mediante sumas discretas y el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

La parte experimental se realiza en seis ciclos, siguiendo un proceso en espiral, con alumnos de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales y en ella encontramos, entre otras, las siguientes aportaciones:

- Los aprendizajes de los estudiantes de los conceptos inherentes a la integral definida analizados mediante el establecimiento de categorías de comprensión matemática, según los actos de comprensión de Sierpinska, y con la metodología cualitativa de investigación-acción.
- Los resultados prácticos del cálculo de primitivas elementales realizados mediante el cálculo mental, cuya implementación ha sido realizada en los diez primeros minutos de cada sesión de clase en el aula habitual de grupo.
- Los resultados de la utilización del programa de cálculo simbólico *DERIVE*, junto con el programa de utilidades realizado por el profesor investigador, en la enseñanza y el aprendizaje de la integral.

Consideramos interesantes dos descomposiciones de la integral definida realizadas en esta investigación: la primera es una descomposición genética según la teoría APOE y la segunda viene determinada según los actos de comprensión de Sierpinska y obstáculos y/o dificultades del concepto que nos ocupa; esta última nos sirve de base teórica para analizar las producciones de los estudiantes.

Tras esta parte experimental, se realiza el análisis correspondiente y se presentan las conclusiones a las cuales hemos llegado en la presente investigación, además de una propuesta curricular de enseñanza de la integral definida para estudiantes de Bachillerato.

ÍNDICE

PRÓLOGO **...** ***1***

CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN. ANTECEDENTES. OBJETIVOS GENERALES **...............................** ***13***

I.1. INTRODUCCIÓN.. 13

I.2. EL ORIGEN DEL PROBLEMA 14

I.3. ANTECEDENTES EN LA INVESTIGACIÓN 15

I.3.1. EL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA...................................... 15
I.3.2. LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS EN LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DEFINIDA.. 59
I.3.3. CÁLCULO MENTAL.. 69
I.3.4. DIFICULTADES EN LA ADQUISICIÓN DEL SABER MATEMÁTICO (CONCEPTO INTEGRAL DEFINIDA), EN EL USO DE LOS PROGRAMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO Y EN EL CÁLCULO MENTAL .. 75

I.4. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN 94

I.5. OBJETIVOS GENERALES 99

CAPÍTULO II: MARCO METODOLÓGICO CUALITATICO **.......** ***103***

II.1. INTRODUCCIÓN 103

II.2. LA INVESTIGACIÓN-ACCIÓN 106

II.2.1. CONCEPTO, CARACTERÍSTICAS, RASGOS, REQUISITOS Y RECOPILACIÓN DE DATOS.. 106
II.2.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 114
II.2.3. LOS CICLOS Y SUS FASES.. 116
II.2.3.1. Planificación..119
II.2.3.2. Acción 120
II.2.3.3. Observación o análisis 120
II.2.3.4. Reflexión..121
II.2.4. CONCLUSIONES 122

II.3. VALIDEZ DE UN ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN ACCIÓN 123

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO. HIPÓTESIS..........................127

III.1. MODELOS COGNITIVOS 127

III.1.1. PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO 128

III.1.2. IMAGEN CONCEPTUAL Y DEFINICIÓN CONCEPTUAL 132

III.1.3. DIFICULTADES, OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y ERRORES 136

III.1.4. LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS DE BROUSSEAU 140

III.1.5. EL MODELO DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA....................145

III.1.6. LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE CHEVALLARD..............155

III.1.7. LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE DUVAL 159

III.1.8. LA TEORÍA APOE...164

III.1.8.1. Análisis teórico 166

III.1.8.2. Tratamiento instruccional. Metodología de la enseñanza ACE....171

III.1.8.3. Observación, discusión y valoración 173

III.1.8.4. Descomposición genética de la integral 174

III.1.8.5. Aportaciones y limitaciones de la teoría APOE 181

III.2. MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN. ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA 183

III.2.1. PODER DESCRIPTIVO 184

III.2.2. PODER EXPLICATIVO..184

III.2.3. ALCANCE 184

III.2.4. PODER PREDICTIVO 185

III.2.5. RIGOR Y ESPECIFICIDAD 185

III.2.6. CAPACIDAD DE FALSACIÓN...186

III.2.7. CAPACIDAD DE REPLICACIÓN 186

III.2.8. TRIANGULACIÓN 187

III.3. HIPÓTESIS...188

CAPÍTULO IV: TRATAMIENTO CURRICULAR 193

IV.1. LEGISLACIÓN...193

IV.1.1. LOGSE, EXTRACTO DEL REAL DECRETO 938/2001 195

IV.1.2. LOE, EXTRACTO DEL DECRETO 42/2008 197

IV.1.3. REFLEXIONES 200

IV.2. ANÁLISIS CURRICULAR DEL CONCEPTO....................................201

IV.2.1. CATEGORÍAS DE CONTENIDO MATEMÁTICO RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA 201

IV.2.1.1. NA: Contenidos sobre números y aproximación 202

IV.2.1.2. AR: Contenidos sobre áreas y aproximación...............................202

IV.2.1.3. ID: Contenidos sobre la integral definida 203

IV.2.1.4. PID: Propiedades de la integral definida......................................203

IV.2.1.5. DJ: Demostraciones y justificaciones analíticas 203

IV.2.1.6. GR: Gráficas...204

IV.2.1.7. II: Integral indefinida 205

IV.2.1.8. AID: Aplicaciones de la integral definida....................................205

IV.2.1.9. MO: Motivación...206

IV.2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS LIBROS DE TEXTO 207
IV.2.3. TABLAS RESUMEN DE LOS TEXTOS/CATEGORÍAS 210
IV.2.3.1. NA: Contenidos sobre números y aproximación..........................210
IV.2.3.2. AR: Contenidos sobre áreas y aproximación 212
IV.2.3.3. ID: Contenidos sobre la integral definida....................................214
IV.2.3.4. PID: Propiedades de la integral definida.....................................215
IV.2.3.5. DJ: Demostraciones y justificaciones analíticas...........................216
IV.2.3.6. GR: Gráficas...217
IV.2.3.7. II: Integral indefinida..218
IV.2.3.8. AID: Aplicaciones de la integral definida....................................219
IV.2.3.9. MO: Motivación...220
IV.2.3.10. Tablas cuantitativas..222
IV.2.4. REFLEXIONES 226

CAPÍTULO V: ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO.
LA DOCENCIA ACTUAL. ÁREA E INTEGAL...............................229

V.1. INTRODUCCIÓN 229

V.2. EPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO INTEGRAL............................. 231
V.2.1. INTRODUCCIÓN 231
V.2.2. EDAD ANTIGUA Y EDAD MEDIA 233
V.2.3. DEL RENACIMIENTO HASTA BARROW 238
V.2.4. DESDE NEWTON Y LEIBNIZ HASTA EL CONCEPTO INTEGRAL 241
V.2.5. LA INTEGRAL COMO OBJETO MATEMÁTICO 242
V.2.6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES EPISTEMOLÓGICAS 243

V.3. EL ÁREA COMO LÍMITE 247
V.3.1. ÁREA DEL RECTÁNGULO... 247
V.3.2. INTRODUCCIÓN DEL NÚMERO π.. 252
V.3.2.1. Longitud de la circunferencia 252
V.3.2.2. Área del círculo...253

V.4. INTEGRAL DEFINIDA EN MACS II 254
V.4.1. CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA 255
V.4.1.1. Integral de Darboux 256
V.4.1.2. Integral de Riemann...259
V.4.1.3. Integral de Darboux versus Integral de Riemann 261
V.4.2. VALOR NUMÉRICO DE LA INTEGRAL DEFINIDA..................... 262
V.4.2.1. Teorema del valor medio del cálculo diferencial........................263
V.4.2.2. Teorema fundamental del cálculo (Fischer) 264
V.4.2.3. Primer teorema fundamental del cálculo (Spivak).......................266
V.4.2.4. Segundo teorema fundamental del cálculo (regla de Barrow).......266
V.4.3. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA 267
V.4.3.1. De los extremos de integración..267
V.4.3.2. Linealidad y aditividad 267
V.4.3.3. De la monotonía...268
V.4.3.4. Teorema del valor medio del cálculo integral.............................269

V.5. INTEGRACIÓN NUMÉRICA...270
V.5.1. MÉTODO DE LOS RECTÁNGULOS 270
V.5.2. MÉTODO DE LOS TRAPECIOS 272

V.6. ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL.............................274
V.6.1. ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA 274
V.6.2. OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.............278

CAPÍTULO VI: FOCOS, CICLOS Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN Y CATEGORÍAS DE ANÁLISIS 279

VI.1. INTRODUCCIÓN...279

VI.2. FOCOS DE LA INVESTIGACIÓN 279
VI.2.1. FOCO 1: PRECONCEPTO..281
VI.2.2. FOCO 2: CONCEPTO 282
VI.2.3. FOCO 3: APLICACIONES 283

VI.3. CICLOS Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN 285
VI.3.1. EL PROBLEMA Y LA MUESTRA 285
VI.3.2. CICLO DE EXPLORACIÓN (I, CURSO 2003-2004).......................286
VI.3.3. CICLOS DE CONFIRMACIÓN (II y III) 287
VI.3.3.1. Ciclo II (Curso 2004-2005)...287
VI.3.3.2. Ciclo III (Curso 2005-2006)...289
VI.3.4. CICLOS DE CONSOLIDACIÓN (IV y V)...290
VI.3.4.1. Ciclo IV (Curso 2006-2007) 290
VI.3.4.2. Ciclo V (Curso 2007-2008)..292
VI.3.5. CICLO DE CIERRE (VI, CURSO 2008-2009)..................................293
VI.3.6. REFLEXIÓN..294

VI.4. CATEGORÍAS..295
VI.4.1. INTRODUCCIÓN..295
VI.4.2. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA 296
VI.4.3. REFLEXIÓN..303

CAPÍTULO VII: CICLO DE EXPLORACIÓN (I), CURSO 2003-2004 305

VII.1. INTRODUCCIÓN...305

VII.2. PLANIFICACIÓN...306

VII.3. ACCIÓN...308
VII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN 309
VII.3.1.1. SESIÓN 1: Miércoles, 12 de mayo de 2004...............................309
VII.3.1.2. SESIÓN 8: Martes, 25 de mayo de 2004..................................312
VII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN...316

VII.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS...319
VII.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA 319

VII.4.1.1. DGA: Determinación gráfica del área..321
VII.4.1.2. DGSI: Determinación gráfica de las sumas inferiores................321
VII.4.1.3. DGSS: Determinación gráfica de las sumas superiores............ .323
VII.4.1.4. RSISR: Relación entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, la segunda un refinamiento de la primera..................... 324
VII.4.1.5. ESIS: Expresión analítica de las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición de "n+1" nodos.................................325
VII.4.1.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux...327
VII.4.1.7. ACAFE: Cálculo del área mediante fórmulas elementales.........329
VII.4.1.8. DGSR: Determinación gráfica de las sumas de Riemann...........332
VII.4.1.9. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida 333
VII.4.1.10. IGAI: Interpretación gráfica de la aditividad de la integral 335
VII.4.1.11. IGTVMI: Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral...336
VII.4.2. RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DEL CICLO DE EXPLORACIÓN.................................... 337
VII.4.3. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA 341

VII.5. REFLEXIONES DEL CICLO DE EXPLORACIÓN...................... 344

CAPÍTULO VIII: CICLOS DE CONFIRMACIÓN (II Y III), CURSOS 2004-2005 Y 2005-2006...347

VIII.1. INTRODUCCIÓN.. 347

VIII.2. PLANIFICACIÓN 349

VIII.3. ACCIÓN... 353
VIII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN 353
VIII.3.1.1. SESIÓN 4: Miércoles (15-12-2004) y lunes (12-12-2005).......354
VIII.3.1.2. SESIÓN 12: Lunes (17-01-2005) y miécoles (11-01-2006). 356
VIII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN... 360

VIII.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS 363
VIII.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA 363
VIII.4.1.1. DR: Representación de la función de Dirichlet........................365
VIII.4.1.2. DMIN4: Mínimos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos...366
VIII.4.1.3. DMAX4: Máximos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos........... 367
VIII.4.1.4. DSI4: Representa y calcula la suma inferior según DMIN4 368
VIII.4.1.5. DSS4: Representa y calcula la suma superior según DMAX4..369
VIII.4.1.6. DIINF: Dirichlet integral inferior 370
VIII.4.1.7. DISUP: Dirichlet integral superior 371
VIII.4.1.8. DNI: Dirichlet no integrable...373
VIII.4.1.9. AR: Representar el área determinada por la función afín........ 374

VIII.4.1.10. AMIN4: Mínimos de la función afín para una partición de 4 subintervalos....375
VIII.4.1.11. AMAX4: Máximos de la función afín para una partición de 4 subintervalos....376
VIII.4.1.12. ASI4: Representa y calcula la suma inferior según AMIN4 ...377
VIII.4.1.13. ASS4: Representa y calcula la suma superior según AMAX4 379
VIII.4.1.14. AIINF: Afín integral inferior....380
VIII.4.1.15. AISUP: Afín integral superior....382
VIII.4.1.16. AI: Afín integrable....384
VIII.4.1.17. CP: Cálculo de primitivas....386
VIII.4.2. TABLAS RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DE LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN....389
VIII.4.2.1. Categorías de los ciclos de confirmación (II y III) que son comunes al ciclo de exploración (I)....390
VIII.4.2.2. Nuevas categorías de los ciclos de confirmación (II y III)....392
VIII.4.3. REFLEXIONES DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS DE LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN....394
VIII.4.4. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA....397

VIII.5. REFLEXIONES DE LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN....402

CAPÍTULO IX: CICLOS DE CONSOLIDACIÓN (IV Y V), CURSOS 2006-2007 Y 2007-2008....405

IX.1. INTRODUCCIÓN....405

IX.2. PLANIFICACIÓN....408

IX.3. ACCIÓN....411
IX.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN....411
IX.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN....421

IX.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS....425
IX.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA....425
IX.4.1.1. DSIn-10: Dirichlet, sumas inferiores en "n ó 10" subintervalos....427
IX.4.1.2. DSSn-10: Dirichlet, sumas superiores en "n ó 10" subintervalos....429
IX.4.1.3. ASI20: Afín, sumas inferiores en "20" subintervalos....432
IX.4.1.4. ASS20: Afín, sumaas superiores en "20" subintervalos....433
IX.4.1.5. ASIn: Afín, sumas inferiores en "n" subintervalos....434
IX.4.1.6. ASSn: Afín, sumas superiores en "n" subintervalos....436
IX.4.1.7. ACID: Cálculo del área por medio de la integral definida....437
IX.4.1.8. ATCFI: Cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables....438
IX.4.1.9. IGTVMD: Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial....440
IX.4.1.10. TFCIS: Teorema fundamental del cálculo integral (sumas)....442

IX.4.1.11. TFCII: Teorema fundamental del cálculo integral (incrementos) 443
IX.4.1.12. TFCSI: Teorema fundamental del cálculo integral (sumas e incrementos)....444
IX.4.1.13. CP: Cálculo de primitivas....445
IX.4.2. TABLAS RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DE LOS CICLOS DE CONSOLIDACIÓN.... 449
IX.4.2.1. Categorías de los ciclos de consolidación (IV y V) que son comunes a las de los ciclos de exploración (I) y confirmación (II y III)....450
IX.4.2.2. Categorías de los ciclos de consolidación (IV y V) que son comunes a las de los ciclos de confirmación (II y III)....452
IX.4.2.3. Nuevas categorías de los ciclos de consolidación (IV y V) 454
IX.4.3. REFLEXIONES DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS DE LOS CICLOS DE CONSOLIDACIÓN 456
IX.4.4. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA 460

IX.5. REFLEXIONES DE LOS CICLOS DE CONSOLIDACIÓN 465

CAPÍTULO X: CICLO DE CIERRE (VI), CURSO 2008-2009 467

X.1. INTRODUCCIÓN 467

X.2. PLANIFICACIÓN.... 471

X.3. ACCIÓN 474
X.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN 475
X.3.1.1. Cálculo mental....476
X.3.1.2. Cálculo estimativo y cálculo de áreas....479
X.3.1.3. Otras aplicaciones de la integral....482
X.3.1.4. Problemas propuestos en las pruebas de acceso a las Universidades de Castilla y León....487
X.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN.... 490

X.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS 493
X.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA....493
X.4.1.1. DGA: Determinación gráfica del área 494
X.4.1.2. DGSI: Determinación gráfica de las sumas inferiores....495
X.4.1.3. DGSS: Determinación gráfica de las sumas superiores....496
X.4.1.4. RSISR: Relación entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, la segunda un refinamiento de la primera....497
X.4.1.5. ESIS: Expresión analítica de las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición de 6 nodos 498
X.4.1.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux....500
X.4.1.7. DR: Representación de la función de Dirichlet 502
X.4.1.8. DMIN4: Mínimos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos 503

X.4.1.9. DMAX4: Máximos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos........... 504
X.4.1.10. DSI4: Representa y calcula la suma inferior según DMIN4 504
X.4.1.11. DSS4: Representa y calcula la suma superior según DMAX4....505
X.4.1.12. DSI8: Dirichlet, suma inferior en 8 subintervalos.......................507
X.4.1.13. DSS8: Dirichlet, suma inferior en 8 subintervalos 508
X.4.1.14. DIINF: Dirichlet integral inferior 509
X.4.1.15. DISUP: Dirichlet integral superior 510
X.4.1.16. DNI: Dirichlet no integrable...511
X.4.1.17. AR: Representar el área determinada por la función afín...........512
X.4.1.18. AMIN4: Mínimos de la función afín para una partición de 4 subintervalos 513
X.4.1.19. AMAX4: Máximos de la función afín para una partición de 4 subintervalos........... 513
X.4.1.20. ASI4: Representa y calcula la suma inferior según AMIN4 514
X.4.1.21. ASS4: Representa y calcula la suma superior según AMAX4....515
X.4.1.22. ASI8: Afín, suma inferior en 8 subintervalos.............................517
X.4.1.23. ASS8: Afín, suma superior en 8 subintervalos...........................518
X.4.1.24. ASIn: Afín, suma inferior en "n" subintervalos..........................519
X.4.1.25. ASSn: Afín, suma superior en "n" subintervalos........................520
X.4.1.26. AIINF: Afín integral inferior 520
X.4.1.27. AISUP: Afín integral superior 521
X.4.1.28. AI: Afín integrable..522
X.4.1.29. ACAFE: Cálculo del área mediante fórmulas elementales 523
X.4.1.30. ACID: Cálculo del área por medio de la integral definida 523
X.4.1.31. ATCFI: Cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables 524
X.4.1.32. DGSR: Determinación gráfica de las sumas de Riemann 525
X.4.1.33. IGTVMD: Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial 527
X.4.1.34. TFCIS: Teorema fundamental del cálculo integral (sumas)........528
X.4.1.35. TFCII: Teorema fundamental del cálculo integral (incrementos) 529
X.4.1.36. TFCSI: Teorema fundamental del cálculo integral (sumas e incrementos)...530
X.4.1.37. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida 531
X.4.1.38. IGAI: Interpretación gráfica de la aditividad de la integral.........532
X.4.1.39. IGTVMI: Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral...533
X.4.1.40. CP: Cálculo de primitivas..535
X.4.2. TABLA RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DEL CICLO DE CIERRE 540
X.4.3. REFLEXIONES DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS DEL CICLO DE CIERRE 543
X.4.4. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA...546

X.5. INFORME Y ENCUESTAS ... 552
X.5.1. INFORME DEL OBSERVADOR EXTERNO ... 552
X.5.2. ENCUESTA A LOS ALUMNOS ... 553
X.5.2.1. Cálculo mental ... 555
X.5.2.2. Práctica con lápiz y papel (cuadernillo de la integral) ... 557
X.5.2.3. Unidad didáctica: Área e integral definida ... 559
X.6. REFLEXIONES DEL CICLO DE CIERRE ... 561

CAPÍTULO XI: DEL LÁPIZ Y PAPEL A LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS CON DERIVE ... 565

XI.1. INTRODUCCIÓN ... 565
XI.2. PRÁCTICAS CON LÁPIZ Y PAPEL ... 568
XI.2.1. OBJETIVOS ... 569
XI.2.2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL SEGUNDO CICLO ... 570
XI.2.3. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL TERCER CICLO ... 577
XI.2.4. REFLEXIONES ... 583
XI.3. PRÁCTICAS *CON DERIVE* ... 586
XI.3.1. OBJETIVOS ... 589
XI.3.2. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLOS DE CONFIRMACIÓN ... 591
XI.3.2.1. Planificación y texto de la práctica ... 591
XI.3.2.2. Acción ... 596
XI.3.2.3. Análisis de las respuestas ... 598
XI.3.2.4. Tablas resumen de las prácticas informáticas ... 599
XI.3.2.5. Reflexiones ... 602
XI.3.3. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLOS DE CONSOLIDACIÓN ... 604
XI.3.3.1. Planificación y texto de la práctica ... 604
XI.3.3.2. Acción ... 609
XI.3.3.3. Análisis de las respuestas ... 611
XI.3.3.4. Tablas resumen de las prácticas informáticas ... 614
XI.3.3.5. Reflexiones ... 615
XI.3.4. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLO DE CIERRE ... 617
XI.3.4.1. Planificación y texto de la práctica ... 617
XI.3.4.2. Acción ... 624
XI.3.4.3. Análisis de las respuestas ... 625
XI.3.4.4. Tablas resumen de las prácticas informáticas ... 627
XI.3.4.5. Encuesta a los alumnos ... 628
XI.3.4.6. Reflexiones ... 630
XI.4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS CON *DERIVE* SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA ... 632
XI.5. REFLEXIONES GENERALES ... 638
XI.5.1. PRÁCTICAS CON LÁPIZ Y PAPEL ... 638
XI.5.2. PRÁCTICAS CON *DERIVE* ... 640

CAPÍTULO XII: CONCLUSIONES, PROPUESTA CURRICULAR Y PROBLEMAS ABIERTOS 643

XII.1. INTRODUCCIÓN...643

XII.2. CONCLUSIONES..644

XII.2.1. OBJETIVO 1. HIPÓTESIS: 1.1, 1.2 Y 1.3 644

XII.2.2. OBJETIVO 2. HIPÓTESIS: 2.1 Y 2.2 651

XII.2.3. OBJETIVO 3. HIPÓTESIS: 3.1, 3.2, 3.3 Y 3.4 656

XII.2.4. OBJETIVO 4. HIPÓTESIS: 4.1 Y 4.2 671

XII.2.5. DECÁLOGO DE CONCLUSIONES FINALES 675

XII.3. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN....................................676

XII.4. APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN..................................677

XII.5. PROPUESTA CURRICULAR...680

XII.6. PROBLEMAS ABIERTOS 684

BIBLIOGRAFÍA 685

PRÓLOGO **..** ***1***

PRÓLOGO

La ciencia Matemática, considerada en algún momento específica de las enseñanzas técnicas, impregna toda actividad humana y hoy tiene un papel protagonista en todas las ramas del saber. Las Matemáticas forman parte de un amplio conjunto de disciplinas científicas reconocidas actualmente como “Ciencias Sociales” y, en consecuencia, ha quedado superada la dicotomía Ciencias-Letras imperante en los estudios hasta mediados del siglo pasado.

Las Matemáticas y la Lengua son materias instrumentales y vehiculares en la Enseñanza y, por tanto, los profesores de estas asignaturas deben facilitar y favorecer su aprendizaje a todos los alumnos[1], incluso a aquellos que carecen de motivación alguna. No es suficiente enseñar Matemáticas en los Institutos de Enseñanza Secundaria mediante la exposición magistral. La sociedad ha cambiado, los estudiantes tienen sus propias prioridades, cuando no son incertidumbres; su diversidad cultural y su procedencia son manifiestas en nuestras aulas; además, existen intereses dispares, e incluso contrapuestos, entre la administración educativa, los profesores, los alumnos y los padres de alumnos. En la enseñanza se exigen cambios profundos.

Los informes y evaluaciones, internos y externos, de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas son constantes y, entre ellos, destacamos:

- El informe Cockcroft que es el resultado de la comisión creada, en 1978, por el gobierno británico a instancias del Parlamento con el siguiente mandato: *“Examinar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas primarias y secundarias de Inglaterra y Gales, teniendo en cuenta en particular las enseñanzas exigidas en la enseñanza superior y postsecundaria, en el trabajo y vida adulta en general, y hacer recomendaciones”.*

[1] Salvo que se especifique lo contrario, cuando expresemos: alumnos, padres, profesores, etc. deberemos entender: alumnas-alumnos, madres-padres, profesoras-profesores, etc. El mismo criterio debe seguirse cuando los sustantivos estén escritos en singular.

- Los periódicos informes PISA[2] que acaparan en muchos momentos un espacio considerable entre los informativos de mayor prestigio y calidad, asimismo, en las conversaciones habituales de las personas interesadas en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Los Gobiernos, central y autonómicos, y las Universidades son conscientes de la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y, para ello, se han creado Departamentos de *Didáctica de la Matemática* cuyas investigaciones en este área de conocimiento, aunque joven, son extensas y producen documentos de altísima calidad. Asimismo, las revistas de Didáctica de las Ciencias proliferan en multitud de países y las Tesis Doctorales con orientación didáctica crecen de forma exponencial.

Pensamos que un profesor de Matemáticas puede hacer algo por mejorar su propia enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas de los estudiantes de Bachillerato; sin embargo, no es lo mismo trabajar con alumnos de Ciencias y Tecnología que con alumnos de Ciencias Sociales, pues estos últimos, suelen arrastrar importantes carencias matemáticas y, generalmente, su propio interés por esta ciencia es bajo, cuando no de auténtico rechazo.

El profesor investigador, después de haber ejercido la docencia en distintos Institutos de Enseñanza Secundaria (IES) durante varios años y habiendo leído reflexivamente el informe Cockcroft en 1990, se propuso mejorar su propia actividad docente; sin embargo, aunque loable tal intención, es insuficiente si se pretende realizar sin ayuda alguna.

El traslado de este profesor, del IES “Eugenio Frutos” de Guareña (Badajoz) al IES “Arca Real” de Valladolid, le permitió realizar los cursos de Doctorado de Didáctica de la Matemática en la Facultad de Educación de la Universidad de Valladolid y, bajo la tutela del profesor Ortega, obtener la suficiencia investigadora y comenzar la Tesis Doctoral *“Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías”* cuya investigación experimental debía desarrollarse con estudiantes de segundo curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales pues consideramos que, aunque los resultados sean más discretos que los de los estudiantes de Ciencias y Tecnología, pueden ser más satisfactorios dadas las dificultades con las que podíamos encontrarnos, tanto por las particularidades de los alumnos como por el tema objeto de nuestra investigación.

[2] Programme for International Assessment. En castellano: Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes. Los informes PISA son trianuales y el primero data del año 2000.

Un nuevo traslado al IES "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos ha sido el motivo por el cual la investigación experimental se ha realizado con alumnos de este centro docente y, posiblemente, haya retrasado la redacción final de la presente Memoria puesto que los desplazamientos entre Burgos y Valladolid no han tenido, en algunos momentos, la periodicidad deseada.

La realización de esta Tesis no ha sido fácil, la investigación ha tenido sus incertidumbres, dificultades, desasosiegos, exigencias y; asimismo, alegrías, ilusiones y satisfacciones por los pequeños logros personales y colectivos que se han ido obteniendo. Los documentos consultados y elaborados, las pruebas realizadas y corregidas, las audiciones de las grabaciones efectuadas y las entrevistas con el Director de la Tesis han ocupado largas horas en cualquier momento del día de los muchos en los que ha transcurrido la presente investigación. Al fin, la investigación ha llegado a su término y ha sido necesario poner en orden los documentos dispersos que la recogían, e incluso, algunos de ellos estaban redactados a vuelapluma.

Redactar la Tesis Doctoral no resulta tan trivial como puede pensarse en un primer momento, obliga al autor a prestar atención en la configuración y redacción de otras Tesis, a buscar en *internet* normas generales de publicación de trabajos originales y a leer algún texto de contrastado prestigio, entre ellos *Cómo se hace una Tesis* de Umberto Eco. A pesar de ello, la elección del sistema de referencia bibliográfica comporta un pequeño dilema entre el modelo ISO 690 o APA[3], nosotros nos hemos decantado por el segundo ya que es el más utilizado en las Tesis Didácticas. Encontramos un nuevo dilema, la redacción será extensa o reducida; el profesor investigador, dado que realiza su actividad docente con estudiantes de educación secundaria, considera que si a los alumnos debe explicárseles la materia sin hurtar información alguna y con claridad meridiana, entonces, por defecto profesional, debemos redactar la presente Memoria con una extensión razonable y escribiéndola en un lenguaje sencillo y explicativo. Por último, ¿pocas o muchas notas a pie de página?, evidentemente, es más fácil escribir pocas; sin embargo, para facilitar su lectura pensamos que es mejor ser generosos y que el lector elija las que considere necesarias.

Archivada toda la documentación en ficheros varios y tomadas las decisiones oportunas, es el momento de redactar la Tesis y, de nuevo, la organización secuencial de todos los documentos disponibles y elaborados

[3] American Psychological Association.

se muestra claramente insuficiente, deben estar archivados de forma indexada con multitud de referencias entre ellos y, a pesar de ello, se pierde algún puntero, no obstante, es la forma más eficaz de controlar tal cantidad de información y comenzar la redacción de esta Memoria de Tesis Doctoral.

Pensamos que las informaciones gráficas ayudan incuestionablemente a la comprensión de los textos y su visualización hace que facilite la retención de la información; por tanto, consideramos que las figuras, tablas y gráficos incluidos en la presente Memoria son suficientes y las referencias a los mismos, para facilitar su localización, son las que corresponden al epígrafe en el cual se encuentran ubicados.

Una vez que se han descrito las pautas de redacción de la Memoria, es el momento de presentar el tema de investigación. Así pues, uno de los contenidos curriculares que, sin duda, merecen una atención especial es la integral definida, ya que la creencia general del investigador es que este concepto presenta numerosas y profundas dificultades de aprendizaje para los estudiantes de Bachillerato, sobre todo, de Ciencias Sociales; esta creencia procede de las experiencias docentes del investigador y del director de la investigación. La idea inicial del equipo investigador es integrar en la docencia, junto con el estudio tradicional, el cálculo mental y el *software* de cálculo simbólico y representación gráfica denominado *DERIVE.* El análisis de la docencia integrando estas orientaciones didácticas constituye el origen y objetivo general de la investigación, el cual se puede concretar en los siguientes términos:

Investigar los aprendizajes que se producen en los estudiantes de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales sobre la integral definida al integrar docencia tradicional, cálculo mental y nuevas tecnologías.

Este objetivo general se desdobla en cuatro: el primero consistente en un estudio epistemológico de la integral y, el resto, uno por cada una de las partes de las que se compone nuestra investigación (cálculo metal, integral definida y nuevas tecnologías). Para ello, entre otras cosas, debemos elaborar nuevos materiales didácticos y preparar actividades que serán aplicadas, en seis ciclos de investigación-acción, a estudiantes de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales siguiendo el modelo metodológico cualitativo de *investigación-acción* y el modelo teórico de los *actos de comprensión de Sierpinska.*

Este documento consta de doce capítulos, además del *Índice,* el *Prólogo,* la *Bibliografía* y los *Anexos*; a partir de este momento, después de escribir, en cursiva, el título de cada capítulo redactamos un breve resumen del mismo con el fin de que el lector tenga una visión general del contenido del capítulo correspondiente.

En el *Capítulo I: Problema de Investigación. Antecedentes. Objetivos Generales,* precisamos el problema objeto de nuestra investigación (integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías), estudiamos los antecedentes de cada una de las partes señaladas; asimismo, realizamos un estudio de las dificultades en la adquisición del saber matemático, acotamos el problema de investigación y establecemos los objetivos generales.

Pensamos que el número de investigaciones seleccionadas es elevado y la calidad de las mismas está suficientemente contrastada, pues sus autores son expertos en *Didáctica de la Matemática*, algunos de estos investigadores son: Poincaré, Schneider, Tall, Sierpinska, Artigue, Abrahamson, Dubinsky, Rouche, Dreyfus, Azcárate, Calvo, Cantoral, Cordero, Contreras, Ortega, Eisenberg, Orton, Turégano, Llorens, Camacho, González-Martín, Depool, Gómez, Reys, Segovia, Cortés, Guzmán, Blázquez, Brousseau, Ordóñez, Sierra, Drijvers, Trouche y Faria.

En este capítulo se propone que la caracterización de la integrabilidad de Darboux se realice mediante la siguiente aproximación óptima:

Teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux: La función f es integrable Darboux en [a,b] sií para cualquier aproximación positiva de cero, ε, existe una partición P de [a,b] tal que la diferencia entre la suma superior de Darboux relativa a P y la correspondiente suma inferior es menor que ε (exista una partición, P, tal que la diferencia entre la suma superior e inferior se aproxima a cero más que cualquier número prefijado).

En el *Capítulo II: Marco Metodológico Cualitativo,* justificamos la elección del modelo cualitativo de *investigación-acción* para la realización de la presente Tesis. Dicha elección no ha sido caprichosa, es la que más se ajusta a los propósitos de esta Memoria y, para ello, hemos recurrido a los textos de Kemmis y McTaggart (1988), Hopkins (1989), Pérez Serrano (1994) y Elliott

(1997) en los cuales se establecen las características y rasgos fundamentales de la investigación cualitativa denominada investigación en la acción; hemos optado por realizar una amplia exposición de la metodología de la *investigación-acción,* pues consideramos que su lectura puede hacer comprender dicho marco a los neófitos y, a su vez, puede ser obviada por los lectores que la conozcan. Asimismo, consideramos que la metodología cuantitativa no es incompatible con la metodología cualitativa, es más, puede complementarla en algunos momentos y así lo hemos considerado. Por tanto, en la redacción de la memoria de la parte experimental de esta investigación encontraremos gráficos y tablas estadísticas que completan la información obtenida por métodos cualitativos.

En el *Capítulo III: Marco Teórico. Hipótesis,* definimos los conceptos *Didáctica de la Matemática* (D'Amore, 2008) y *Pensamiento Matemático Avanzado* (Tall, 1991; Dreyfus, 1991; Vinner, 1991; Dubinsky, 1991 y en España Azcárate y Camacho, 2003); seguidamente, exponemos varios marcos teóricos: *imagen conceptual y definición conceptual de Tall y Vinner; dificultades, obstáculos epistemológicos y errores; las situaciones didácticas de Brousseau; el modelo de comprensión de Sierpinska; la transposición didáctica de Chevallad y la Teoría APOE*[4] *de Dubinsky.* Hemos considerado oportuno presentar estos marcos teóricos porque, aunque poseen características específicas, no son excluyentes, tienen muchos elementos comunes y se consideran en diversos momentos de la investigación.

La *Teoría APOE* nos permite realizar la *descomposición genética de la integral* para una docencia impartida a bachilleres de ciencias sociales y que implícitamente utilizamos en nuestra investigación. Consideramos que las descomposiciones genéticas de Czarnocha y cols. (2001) y Boigues y cols. (2010b) son insuficientes puesto que han sido realizadas para la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida con estudiantes universitarios[5].

El marco teórico elegido es *"El modelo de comprensión de Sierpinska"*, por el cual hemos establecido *los actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y los obstáculos y/o dificultades en la enseñanza-aprendizaje de*

[4]APOE: Acrónimo de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. En inglés se reconoce como APOS.

[5] No hemos considerado oportuno incluir las descomposiciones genéticas de la integral definida de Czarnocha (2001) y Boigues (2010b) en los *Antecedentes* del capítulo I; más bien, pensamos que tales descomposiciones deben ubicarse en el contexto de la *teoría APOE* del capítulo III y así, el lector puede establecer directamente las diferencias de estas descomposiciones genéticas con la propuesta en nuestra investigación.

la integral definida, el cálculo mental de primitivas y las nuevas tecnologías. Además, este marco teórico satisface los ocho criterios de Schoenfeld (2000)[6]. *Los actos de comprensión de Sierpinska*, el modelo metodológico cualitativo de *investigación-acción* del capítulo II y el establecimiento de las *Conjeturas* o *Hipótesis*, asociadas a cada uno de los objetivos generales, han de permitirnos realizar la investigación didáctica en la cual estamos embarcados. Sin embargo, para situarnos en el contexto de la investigación, podemos establecer como punto de partida*:*

Los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales tienen serias dificultades en el aprendizaje del concepto integral definida.

En el *Capítulo IV: Tratamiento Curricular,* se realiza un breve resumen de la *Legislación* educativa en la cual están insertados nuestros tópicos de la investigación (integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías). El *Análisis curricular del concepto,* mediante el establecimiento de *categorías de contenido matemático,* nos permite realizar el *Análisis didáctico* individualizado de once libros de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (MACS II)[7]; seguidamente, hacemos un estudio comparativo en una relación de *Tablas resumen de los textos/categorías* y concluimos con una serie de *Reflexiones* entre las que podemos destacar:

El tratamiento que dan los libros de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II a la integral definida es deficiente y, por tanto, hay que construir una secuencia didáctica que sea adecuada.

El *Capítulo V: Estudio Epistemológico. La Docencia Actual. Área e Integral,* surge del mandato expresado en los objetivos generales primero y tercero, las hipótesis asociadas a los mismos y de la reflexión del recuadro anterior.

El problema del área parte incluso antes de que la matemática adquiriera la categoría de Ciencia en el periodo Talásico (Boyer, 1986, págs. 71-75) y, como tal, pensamos que los conceptos *área e integral definida* deben tener un extenso *estudio epistemológico;* sin embargo, en este capítulo hemos

[6] Poder descriptivo, poder explicativo, alcance, poder predictivo, rigor y especificidad, capacidad de falsación y capacidad de replicación.

[7] Los textos analizados son de las editoriales: Anaya, Casals, Donostiarra, Ecir, Edebé, Edelvives, Editex, Hespérides, Marfil, McGraw-Hill y SM. Véase, además, el anexo A.

optado por realizar un breve resumen en el cual incluimos: la cuadratura de la parábola de Arquímedes, la demostración geométrica del teorema fundamental del cálculo dada por Barrow, las notaciones infinitesimales de Newton y Leibniz y, por último, una serie de síntesis y conclusiones epistemológicas. El texto completo, según nuestra investigación, de la *Epistemología del Cálculo Integral* podemos encontrarlo en el anexo B.

Continúa el capítulo V con el establecimiento del *Área como límite* (área del rectángulo y del círculo), *Integral Definida en MACS II* (integral de Darboux, integral de Riemann y teorema fundamental del cálculo), *Integración numérica* (rectángulos y trapecios) y *Aplicaciones de la integral* en la cual se calculan áreas de regiones planas y, por extensión, sigue en el anexo C.

El *Capítulo VI: Focos, ciclos y fases de la investigación y categorías de análisis,* en primer lugar, determina la estructura por la cual será desarrollada la docencia de la integral con estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales; el segundo punto que se aborda es la organización de los seis ciclos de investigación-acción en cuatro grupos: exploración (ciclo I), confirmación (ciclos II y III), consolidación (ciclos IV y V) y cierre (ciclo VI) en los cuales se explican, brevemente, cada una de las fases de la investigación-acción (planificación, acción, análisis y reflexión) y, tercero, se establecen las *categorías de comprensión matemática* por las cuales evaluaremos la comprensión de los alumnos del concepto integral definida en los ciclos de nuestra investigación[8].

En el *Capítulo VII: Ciclo de exploración (I), Curso 2003-2004*, está redactada la investigación realizada en el primer ciclo de la presente investigación, en él quedan recogidos: la planificación de la acción, la descripción de dos sesiones de la acción[9], el análisis de los cuadernillos teórico-prácticos cumplimentados por los alumnos y, por último: las reflexiones de la acción, el análisis según los actos de comprensión de Sierpinska de los documentos de los estudiantes y las reflexiones a las cuales hemos llegado en este ciclo.

El cálculo mental de primitivas y la utilización de las nuevas tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de la integral han estado ausentes en este primer ciclo y, como tal, no están contemplados en este capítulo.

[8] Las cuarenta categorías de comprensión matemática establecidas en esta investigación, junto con el texto teórico-práctico que valida a cada una de ellas, pueden verse en el anexo D.

[9] El anexo G recoge la descripción completa de la acción del ciclo de exploración.

El *Capítulo VIII: Ciclos de confirmación (II y III), Cursos 2004-05 y 2005-06*, tiene la misma estructura del capítulo anterior[10], ahora bien, incluyendo el cálculo mental de primitivas, cálculo que en estos ciclos ha sido practicado con los estudiantes. Asimismo, hemos trabajado con las nuevas tecnologías, sin embargo, su memoria queda recogida en el capítulo XI.

El *Capítulo IX: Ciclos de consolidación (IV y V), Cursos 2006-07 y 2007-08*, tiene la misma estructura que el anterior, aunque la descripción de la acción es más breve.

El *Capítulo X: Ciclo de cierre (VI), Curso 2003-2004*, está dedicado al sexto y último ciclo de esta investigación y sigue con el mismo criterio de los tres capítulos anteriores; además, incluye el informe del observador externo y las encuestas realizadas a los alumnos.

Redactar la Memoria de la investigación experimental realizada en los seis ciclos, además de ser muy extensa, supone que, como consecuencia de la investigación-acción, el contenido de varios párrafos es muy similar. Nosotros, en aras de favorecer una lectura más ágil de esta Tesis Doctoral y sin restar un ápice la información y los resultados obtenidos en nuestra investigación, nos hemos decantado por presentar los hechos más relevantes de cada uno de los nuevos ciclos y hacer referencia solamente a los resultados comunes con los anteriores; así pues, las *categorías de comprensión matemática* se presentan de forma progresiva en los capítulos VII, VIII y IX y, finalmente, todas ellas han sido incluidas en el capítulo X con el propósito de tener una visión de conjunto.

El *Capítulo XI: Del Lápiz y Papel a las Nuevas Tecnologías con DERIVE*, está dedicado a la redacción de la memoria del estudio y análisis de las producciones de los estudiantes sobre los diferentes conceptos que determinan el de integral definida mediante la integrabilidad de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo [1,3]. Dos técnicas han sido empleadas para tal menester: la clásica del lápiz y papel, utilizada solamente en los dos ciclos de confirmación, y la más moderna del cálculo computacional con el programa de cálculo simbólico *DERIVE*, así como el programa de utilidades implementado por el profesor investigador; las nuevas tecnologías han sido aplicadas en todos los ciclos de la investigación, salvo en el de exploración.

[10] El anexo H recoge la descripción completa de la acción de los dos ciclos de confirmación.

En el *Capítulo XII: Conclusiones, Propuesta Curricular y Problemas Abiertos*, detallamos: a) las conclusiones a las que hemos llegado en la investigación, siendo recogidas y redactadas según los *Objetivos Generales* del capítulo I y las *Hipótesis* asociadas a los mismos establecidas en el capítulo III, b) las limitaciones y aportaciones derivadas de la investigación realizada con los alumnos de Bachillerato de Ciencias Sociales en la enseñanza y aprendizaje de la *Integral Definida*, la práctica del cálculo de primitivas elementales mediante el *Cálculo Mental* y la utilización de las *Nuevas Tecnologías* con *DERIVE*, c) una propuesta curricular para la enseñanza de la integral definida a estudiantes de Bachillerato y, por último, d) establecemos una relación de los problemas abiertos que han surgido de nuestra investigación y pueden ser el punto de partida de investigaciones posteriores.

No es nuestro propósito extendernos mucho más en este prólogo, por tanto, consideramos que es suficiente nombrar los *Anexos* de esta Memoria, pues sus denominaciones orientan sobre su contenido, éstos son:

Anexo A (Capítulo IV): Análisis didáctico de los libros de texto.

Anexo B (Capítulo V): Epistemología del cálculo integral.

Anexo C (Capítulo V): Algunas aplicaciones de la integral.

Anexo D (Capítulo VI): Categorías de comprensión matemática.

Anexo E (Capítulos VI, VII, VIII, IX y X): Iniciación a las integrales.

Anexo F (Capítulos VI, VII, VIII, IX y X): Cuadernillo de la integral definida.

Anexo G (Capítulo VII): La acción en el ciclo de exploración.

Anexo H (Capítulo VIII): La acción en los ciclos de confirmación.

Anexo I (Capítulos VIIII, IX y X): Cálculo mental de primitivas elementales.

Anexo J (Capítulos X y XI): Informe y encuestas.

Anexo K (Capítulo XI): Prácticas con lápiz y papel.

Anexo L (Capítulo XI): Texto, programa y prácticas con DERIVE.

Con el fin de adquirir una visión general de la estructura de nuestra investigación y mostrar el flujo de la información, partiendo de su concepción original y recorriendo los diferentes estadios hasta finalizar con las conclusiones, presentamos la figura 0 la cual es el colofón de este *Prólogo* y, a su vez, el umbral de la Memoria de la Tesis Doctoral denominada *Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías.*

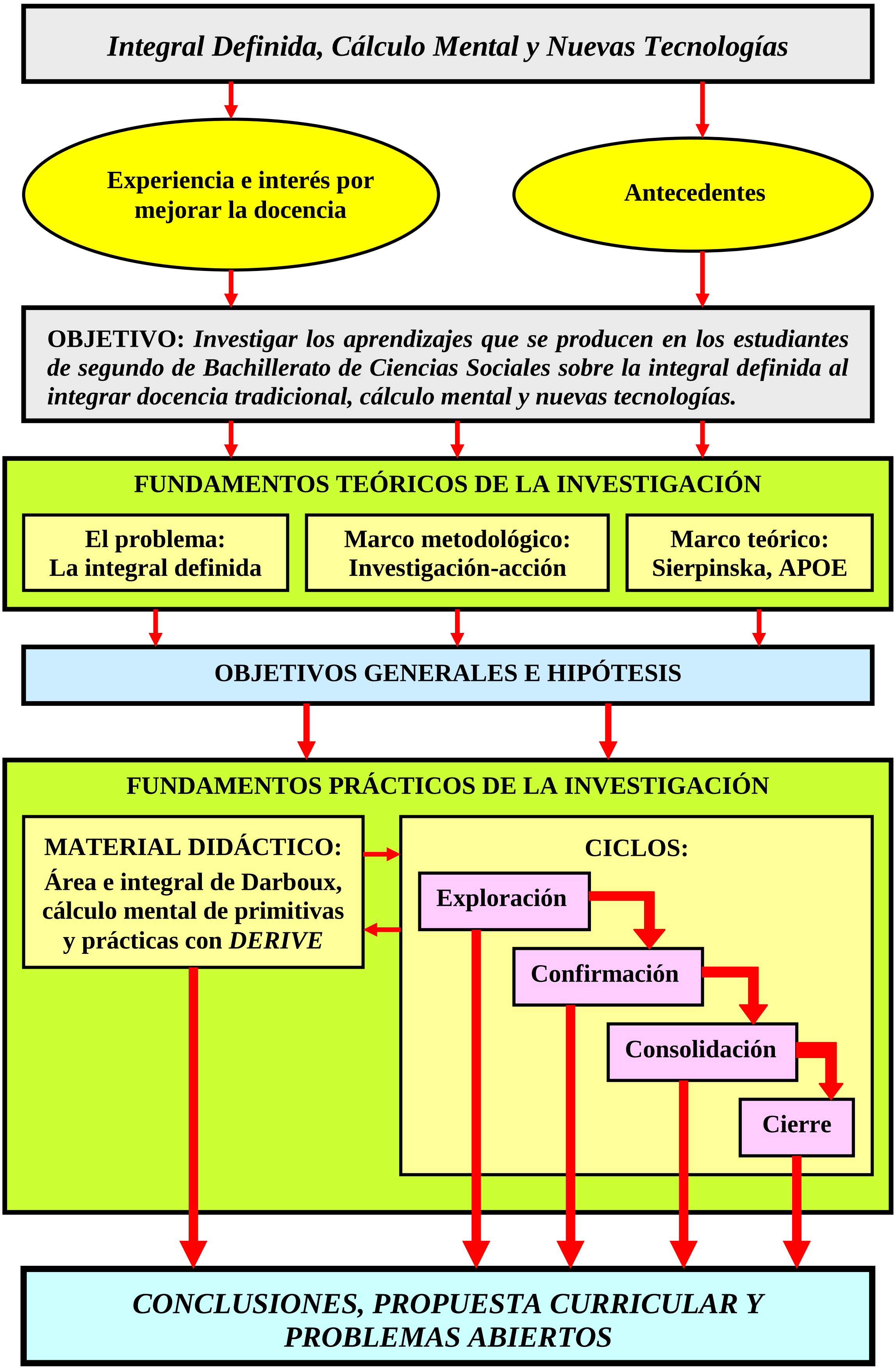


Figura 0. Esquema de la investigación.

CAPÍTULO I: ***EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN. ANTECEDENTES. OBJETIVOS GENERALES*** *13*

I.1. INTRODUCCIÓN **13**

I.2. EL ORIGEN DEL PROBLEMA **14**

I.3. ANTECEDENTES EN LA INVESTIGACIÓN **15**

I.3.1. EL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA **15**

I.3.2. LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS EN LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DEFINIDA **59**

I.3.3. CÁLCULO MENTAL **69**

I.3.4. DIFICULTADES EN LA ADQUISICIÓN DEL SABER MATEMÁTICO (CONCEPTO INTEGRAL DEFINIDA), EN EL USO DE LOS PROGRAMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO Y EN EL CÁLCULO MENTAL **75**

I.4. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN **94**

I.5. OBJETIVOS GENERALES **99**

CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN. ANTECEDENTES. OBJETIVOS GENERALES

I.1. INTRODUCCIÓN

Este primer capítulo se organiza en cuatro partes claramente diferenciadas: el origen del problema, antecedentes de la investigación, delimitación del problema de investigación y objetivos generales.

En el origen del problema, el profesor investigador expone algunas de las múltiples razones por las cuales ha decidido investigar la enseñanza y el aprendizaje de la Integral Definida con alumnos de segundo curso de Bachillerato de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales.

Los antecedentes de la investigación constan de cuatro partes: el concepto de la integral definida, las nuevas tecnologías en la enseñanza de la integral, el cálculo mental y, por último, dificultades en la adquisición del saber matemático (concepto integral definida), en el uso de los programas de cálculo simbólico y en el cálculo mental. Consideramos que cada una de las partes de las cuales se componen los antecedentes de la investigación está suficientemente documentada con las investigaciones, en didáctica de la integral[1], seleccionadas en esta memoria y realizadas por investigadores cuyos trabajos tienen una calidad ampliamente contrastada.

La tercera parte del presente capítulo está dedicada a la delimitación del problema de investigación en los tres niveles preestablecidos: integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías.

Por último, cuatro son los objetivos generales: desarrollo epistemológico, el cálculo de primitivas inmediatas mediante el cálculo mental, el aprendizaje de los alumnos con la docencia tradicional y, finalmente, la utilización de las nuevas tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral.

En esta investigación abordamos algunos de los problemas abiertos en otras tesis doctorales y, a partir de este capítulo, estamos en condiciones de establecer los marcos metodológico y teórico de la presente investigación.

[1] Entiéndase: Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías.

I.2. EL ORIGEN DEL PROBLEMA

El presente trabajo de investigación tiene su origen en la constatación del profesor investigador de las dificultades que encuentran los estudiantes en la comprensión de los conceptos del análisis matemático en general y, en particular, en el de integral definida. No es caprichosa tal elección, pues la experiencia del profesor investigador así lo corrobora, después de varios cursos académicos impartiendo Matemáticas I (Opciones A y B –Ciencias–) y Matemáticas II (Opciones C y D –Letras–) del antiguo COU[2], la asignatura de Análisis Matemático en el centro asociado de la UNED[3] de Mérida (Badajoz) y esta misma asignatura en la Universidad de Valladolid, así como las Matemáticas II del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de la modalidad del Bachillerato de Ciencias Sociales correspondientes a la LOGSE[4] y a la actual LOE[5]. Además, debido al propio interés del profesor investigador y del director[6] de la presente tesis por la mejora constante del proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, consideramos que:

a) No son suficientes las propias reflexiones sobre las dificultades que existen en la asimilación de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes.

b) No basta con la buena disposición y la voluntad de cambio del profesor para que pueda mejorar de forma eficaz la comprensión de los conceptos matemáticos por los alumnos.

c) Ante los cambios sociales tan importantes en los cuales estamos inmersos, el interés creciente de los padres por los estudios de sus hijos y la realidad multicultural, supone que la lección magistral no puede tener la misma consideración que en décadas anteriores y, por tanto, deben considerarse nuevas actuaciones.

[2] Curso de Orientación Universitaria establecido por Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa (BOE: 6-8-1970). El antiguo COU puede considerarse equivalente a segundo curso del actual Bachillerato.

[3] Universidad Nacional de Educación a Distancia.

[4] Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (BOE: 4-10-1990).

[5] Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE: 4-5-2006).

[6] Dr. D. Tomás Ortega del Rincón, cuya dilatada actividad docente comenzó en Institutos de Educación Secundaria y, desde hace varios años, ejerce la docencia y la investigación en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Valladolid.

d) Las clases son cada vez mas heterogéneas y confluyen en las mismas multitud de intereses, incluso, en algunas ocasiones contrapuestos; además, el profesor gestiona su clase y debe obtener los mejores rendimientos posibles.

e) No pueden considerarse los rendimientos de una clase en función de las calificaciones obtenidas por los alumnos, la mayoría de las veces, carecen del rigor científico necesario para poder evaluar de forma objetiva la actividad docente del profesor y el aprendizaje de los alumnos.

f) Consideramos que el análisis matemático contiene conceptos y procedimientos difíciles para los alumnos y que es necesario investigar para que puedan transmitirse bajo los parámetros de una enseñanza de calidad que propicien un buen aprendizaje con el fin de que perdure en los alumnos el mayor tiempo posible.

Teniendo en cuenta las reflexiones anteriores, nos proponemos investigar el aprendizaje de los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales del concepto de integral definida poniendo en práctica una enseñanza basada en el cálculo mental, el uso de *software* matemático adecuado y la docencia impartida en el aula del grupo.

I.3. ANTECEDENTES EN LA INVESTIGACIÓN

I.3.1. EL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

En este epígrafe hacemos una breve reseña de los trabajos de investigación que se han centrado en la enseñanza-aprendizaje del concepto de integral definida. Sin embargo, a modo de introducción, por la importancia que en su momento tuvo la conferencia de **Poincaré** en 1904 sobre las definiciones matemáticas, transcribimos de Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995)[7], lo que consideraba este gran matemático sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral:

[7] Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática, "una empresa docente"*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. Pp. 97-140.

> Para definir una integral, tomamos toda serie de precauciones. Distinguimos las funciones continuas de las discontinuas, y aquéllas que tienen derivadas de las que no. Todo esto tiene un lugar en la enseñanza dentro de las Facultades, pero todo esto sería inadecuado en el liceo. Al estudiante, no importa qué definición se tenga de ella, no sabrá nunca qué es una integral si no se le ha mostrado con anterioridad lo que es. Todas las sutilezas le serán indiferentes. Él cree saber lo que es una superficie y comprenderá que no lo sabe sólo cuando sepa muy bien lo que significa el cálculo integral. Y no hay interés en decírselo en el momento en que se aborda este cálculo. Lo único que queda por hacer es muy simple: definir la integral como el área comprendida entre el eje de las x, dos ordenadas [ordenada, para Poincaré, significa recta paralela al eje de las ordenadas] y la curva, y mostrar que, cuando una de las ordenadas se desplaza, la derivada de esta área es precisamente la ordenada en sí. Este fue el razonamiento de Newton, fue así como surgió el cálculo integral. Gústenos o no, tenemos que pasar de nuevo por donde nuestros padres pasaron (Artigue y cols., 1995, pág. 101).

Este texto de Poincaré contiene declaraciones de tipo didáctico muy importantes con las que estamos completamente de acuerdo, por ejemplo, en las primeras líneas indica la dificultad del aprendizaje del concepto. A continuación se refiere a una adaptación al contexto, donde incluso podría considerar una transposición didáctica. Finalmente recomienda que se defina el concepto a partir del área bajo una curva de una función, esta opción es la que hemos considerado en la enseñanza-aprendizaje de la integral para los alumnos con los cuales realizamos nuestra investigación.

Schneider (1988, 1989, 1991), citado por Artigue y cols. (1995), pretende conceptuar las derivadas y primitivas a partir de objetos mentales[8] como área y volumen, afirma:

> Los problemas utilizados son en esencia problemas que tienen una dimensión histórica y sirven en particular para traer a colación la presencia de las concepciones espontáneas de los estudiantes sobre representaciones mentales de la superficie (respectivamente volúmenes) como agrupaciones de segmentos (respectivamente superficies) comparables con la teoría de los indivisibles de Cavalieri en el siglo XVII (...) estas representaciones

[8] La expresión "objeto mental" se toma con la acepción que le dio Freudenthal, es decir: "Toda noción como longitud, número, paralelas, recurrencia, etc. que, sin haber alcanzado el estado de formalización de un concepto matemático y sin inscribirse en una teoría axiomática, no obstante está dotada de propiedades que la convierten en instrumento de organización de un conjunto de fenómenos".

> pueden convertirse en el obstáculo epistemológico (...) denominado el obstáculo de la "heterogeneidad de las dimensiones" (Schneider, 1991). Este obstáculo se asocia con los saltos implícitos e incontrolados entre el dominio de los objetos y las magnitudes geométricas y el de sus medidas cuando se manipulan simultáneamente magnitudes de dimensiones diferentes (a la unión de magnitudes correspondería necesariamente la adición de medidas), además, existen ciertos errores en los cálculos de áreas y volúmenes (Artigue y cols., 1995, pág. 118).

En este contexto, afirma Tall (1996)[9], el error que cometen sus estudiantes al calcular las sumas inferiores y superiores de la función $y=x^3$ en el intervalo [0,1], pues afirman: "Los rectángulos tienen una anchura que al disminuir, éstos se reducen a líneas cuyo área es 0 y no pueden sumarse".

En nuestra investigación, asimismo, constatamos la dificultad que tienen los alumnos de bachillerato en el cálculo de las sumas de Darboux de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo [1,3], además, coincidimos con Schneider en que muchos estudiantes piensan que la suma de segmentos no puede dar un área o que la suma de áreas "cero" no puede dar un valor que no sea nulo.

Tall (1996) define un *procept* elemental como la amalgama de tres componentes: un proceso que produce un objeto matemático y un símbolo que se utiliza para representar el proceso o el objeto; un *procept* consiste en una colección de los *procepts* elementales que tienen el mismo objeto (como ejemplo del primero considérese la operación 4+2 y del segundo los *procepts* elementales 2+4, 2x3, 18/3,... pues todos ellos dan resultado 6). Dicho autor resume las representaciones de las funciones y el cálculo diferencial e integral, en la tabla I.3.1.1 (Tall, 1996, pág. 295) se reproducen íntegramente todas ellas por la relación tan estrecha entre los tres contenidos genéricos (funciones, derivada e integral).

Nuestra investigación se centra en el último de ellos, es decir, las dos últimas filas de la tabla aunque no desarrollaremos la visión espacial en nuestra propuesta a los alumnos ni la concepción de la integral definida como el límite de sumas, habiendo optado por la toma de los extremos superior e inferior de las respectivas sumas inferiores y superiores de Darboux.

[9] Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop y cols. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer. Pp. 289-325.

	REPRESENTACIONES				
	VISUAL ESPACIAL	**NUMÉRICO**	**SIMBÓLICO**	**GRÁFICO**	**FORMAL**
PROCEPS	*Inactivo* Observando Experimentando	*Cuantitativo* Estimando Aproximando	*Manipulativo* Manipulando Limitando	*Cualitativo* Visualizando Conceptualizando	*Deductivo* Definiendo Deduciendo
CAMBIO: FUNCIÓN (Haciendo)	Distancia, velocidad cambiando con el tiempo	Evaluar numéricamente	Símbolos algebraicos	Gráficas	Definición teórica
CAMBIO: FUNCIÓN (Deshaciendo)	Resolviendo problemas	Soluciones numérica de las ecuaciones	Resolviendo ecuaciones simbólicamente	Visualizando soluciones cuando las gráficas se cortan	Teoremas: Valores intermedios, ...
RAZÓN DEL CAMBIO: DERIVADA (Haciendo)	Velocidad desde la gráfica tiempo-espacio	Pendiente numérica	Notación simbólica de la derivada	Visualizando la justificación gráfica	Formalización de la derivada
RAZÓN DEL CAMBIO: DERIVADA (Deshaciendo)	Resolviendo problemas. Hallando la distancia desde la velocidad	Solución numérica de las ecuaciones diferenciales	Antiderivadas Solución simbólica de las ecuaciones diferenciales	Visualización gráfica de una determinada pendiente	Antiderivadas Existencia de soluciones de una ecuación diferencial
DESARROLLO ACUMULATIVO: INTEGRAL (Haciendo)	Distancia desde la gráfica tiempo-velocidad	Área numérica	Símbolo de la integral como límite de sumas	Área bajo una gráfica	Formalización de la integral de Riemann
DESARROLLO ACUMULATIVO: INTEGRAL (Deshaciendo)	Computando la velocidad desde la distancia	Conocer el área, descubrir la función numérica	Simbología del Teorema Fundamental del Cálculo	Conocer el área, descubrir la gráfica	Formalización del Teorema Fundamental del Cálculo
	MUNDO REAL DEL CÁLCULO	**CÁLCULO TEÓRICO**	**CÁLCULO TEÓRICO**	**CÁLCULO TEÓRICO**	**ANÁLISIS**

Tabla I.3.1.1. Las representaciones en funciones y el cálculo diferencial e integral.

El propósito de nuestra investigación no es formalizar en primera instancia la integral de Riemann, más bien, mediante sumas inferiores y superiores establecer la integral de Darboux y, de ahí, demostrar que ambas integrales, Darboux y Riemann, son equivalentes.

Sierpinska (1985[10], 1987[11]), afirma que el concepto de límite contiene obstáculos y pone como ejemplo el Teorema Fundamental del Cálculo. Esta autora utiliza la orientación de Poincaré y considera el área *A(x)* desde un punto *a* a otro punto variable *x*, se considera una función de *x* (algunos estudiantes tienen dificultad en la comprensión puesto consideran que una función debe venir dada por una fórmula), dicho teorema afirma que *A'(x)=ƒ(x).* Visualmente el área comprendida entre la curva desde *x* hasta *x+h* es *A(x+h)–A(x)*, es evidente que el área de esa tira, bajo determinadas condiciones, está muy próxima a *ƒ(x)·h* cuando *h* tiende a *0*, es decir, $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \to f(x)$. La figura I.3.1.1 ilustra esta afirmación.

Así pues, el área entre *x* y *x+h* es "aproximadamente" la del rectángulo cuya base es *h* y altura es *ƒ(x)*, cuando *h* tiende a cero. La aproximación puede considerarse muy buena, sin embargo, se detectan obstáculos cognitivos importantes al pasar de la aproximación a la igualdad al tomar el límite, los alumnos creen que las bases son cero y que el área desaparece. La investigación concluye que el "aplastamiento" es equivalente a la continuidad puntual, es decir:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $x - \delta < t < x + \delta$,

entonces, se cumple que $f(x)-\varepsilon < f(t) < f(x)+\varepsilon$

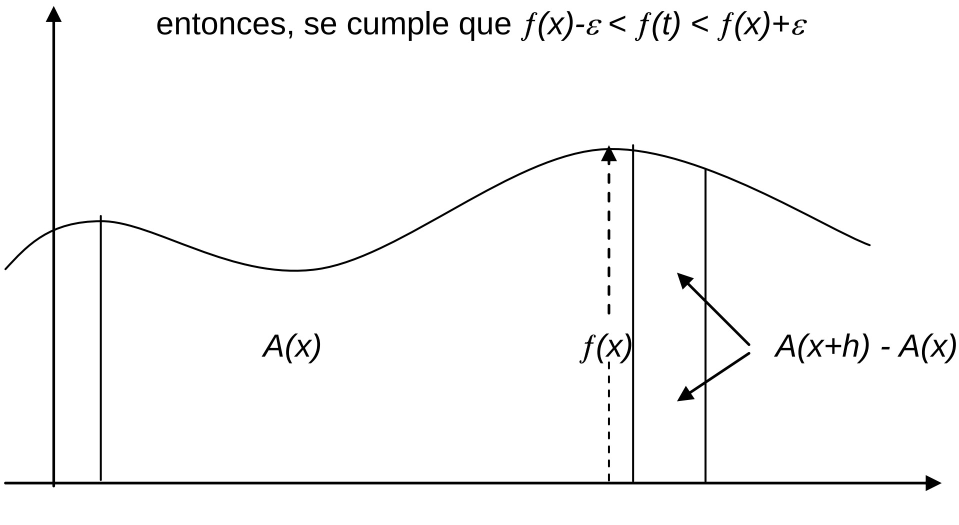


Figura I.3.1.1. El área bajo una gráfica. Teorema Fundamental del Cálculo.

[10] Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6 (1), pp. 5-67.

[11] Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* 18 (4), pp. 371-387.

Como posteriormente afirma Artigue, este obstáculo es muy fuerte y, como consecuencia, en nuestra investigación consideramos como prueba del teorema fundamental del cálculo integral utilizando el teorema de los incrementos finitos[12] que tiene implícita la regla de Barrow.

Artigue (1995, 2003a) realizó investigaciones, simultáneamente, en didáctica de las ciencias matemáticas y físicas; constató que había estudiantes que pensaban:

> *Para integrar, es esencial no pensar en lo que representa dl y proceder mecánicamente, de lo contrario uno está perdido* (...) *El físico tiene un reclamo: sus aparatos de medición y los errores cometidos con sus aparatos son de todas formas más grandes que los errores cometidos con las aproximaciones matemáticas* (...) en física parece que los estudiantes consideran que lo concerniente a los procedimientos integrales como "aproximativo" y "cómodo", es decir, como un sector donde es mejor funcionar con mecanizaciones sin tratar de comprender (...) En matemáticas, a pesar de que el campo de la aproximación es explícito en las definiciones (...) tal campo está poco presente en las prácticas y se oculta muy rápido con teoremas más potentes que permiten algebrizar de manera contundente el funcionamiento del cálculo, solapado por medio de teoremas que permiten algebrizar el funcionamiento del cálculo (...) Los estudiantes que llegan a la universidad (...) tienen una concepción de la integral como operación inversa a la derivación, asociada a la imagen del área bajo una curva, y que la enseñanza en este nivel debe dar un sentido a la noción del "procedimiento integral"[13] (Artigue y cols., 1995, págs. 124-126).

Artigue (2003a)[14] afirma que "en muchos países el primer contacto con las integrales se da al final del nivel secundario por medio de la noción de anti-derivada y una aproximación práctica al teorema fundamental del cálculo que permite conectar las anti-derivadas con una noción intuitiva de área" (pág. 124). Efectivamente, en España el concepto de integral se muestra a los estudiantes en el último curso de educación secundaria (segundo de bachillerato) y en la mayoría de los casos el cálculo de primitivas antecede a

[12] El teorema de los incrementos finitos también es conocido por: teorema del valor medio del cálculo diferencial, teorema fundamental del cálculo diferencial o teorema de Lagrange.

[13] Un sentido que no pueden garantizar las clases magistrales tradicionales sobre la integral de Riemann y los ejercicios que enfatizan, sobre todo, el cálculo exacto de primitivas e integrales.

[14] Artigue, M. (2003a). ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, vol. X, nº 2,* pp. 117-134.

la integral definida mostrándose ésta a partir de la ampliación del cálculo de áreas elementales y, sobre todo, calculando diferentes áreas mediante la regla de Barrow.

Esta autora presenta una situación en la cual introduce el procedimiento integral y para ello propone que los estudiantes determinen las fuerzas ejercidas por dos masas, distantes 3 metros, la masa M distribuida uniformemente en una barra de 6 metros y de 18 kilos y otra masa puntual M’ de 2 kilos (figura I.3.1.2).

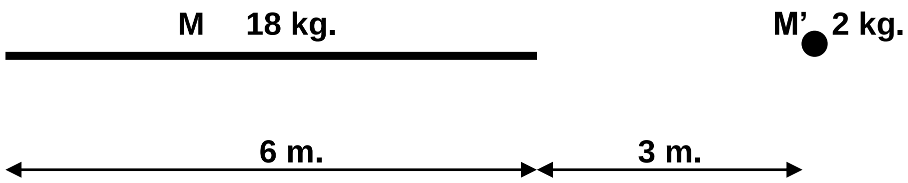


Figura I.3.1.2. Fuerza ejercida por dos masas.

Artigue (2003a, págs. 125-127) constata que la mayoría de los estudiantes consideraron, en un principio, la aplicación errónea del centro de gravedad tomando como puntual la masa de la barra en el centro de la misma. Las dudas planteadas permitieron conjeturar a muchos de ellos cortar la barra en dos partes iguales y tomar la mitad de la masa total concentrada en el punto medio de cada trozo, ello supuso que se tuviera en cuenta la “posición” que junto con las ideas de concentración de la masa en un punto y de la partición permitió hacer concebir la fuerza como el resultado del paso al límite mediante corte y encuadre, es decir, el procedimiento integral. Además, esta investigadora concluye que debe considerarse prioritaria y anteponerse la construcción del concepto integral definida al cálculo de primitivas.

Nosotros pensamos, al igual que Artigue, que el concepto de la integral definida debe anteponerse al cálculo de primitivas; así lo hacemos en nuestra investigación puesto que si invirtiésemos los términos, los alumnos no entenderían, en un principio, la necesidad de las *“antiderivadas”* y *“los métodos de integración”*, les restaría interés por la adquisición del concepto de integral definida y, posteriormente, el establecimiento del teorema fundamental del cálculo integral les resultaría, posiblemente, artificioso.

En el desarrollo del concepto, con nuestros alumnos, se ha trabajado algún ejemplo, pocos, en el cual se aplica la integral definida para determinar la solución sin necesidad del cálculo de áreas. Pensamos que al ser un curso terminal (segundo de bachillerato de ciencias sociales) y por la presión de las Pruebas de Acceso a la Universidad, no ha sido posible dedicarle más tiempo al desarrollo de la integral definida y exponer más aplicaciones distintas de las clásicas (cálculo de áreas).

Abrahamson (1998)[15] considera el teorema fundamental del cálculo (TFC)[16] a: $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$ y constata que muchos estudiantes piensan que es una definición.

Propone que sea introducido por medio de sumas discretas, a saber: La suma telescópica $(y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\Delta y_i = y_n - y_0$. Si existe una función F y puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, donde se cumple que $y_i = F(x_i)$, entonces se verifica $\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{n}\Delta F(x_i) = F(b) - F(a)$. Si en lugar de aplicar con todo rigor el teorema del valor medio, tomamos la aproximación $\Delta F(x_i) \approx F'(x_i)\Delta x_i$, entonces, $\sum_{i=1}^{n}F'(x_i)\Delta x_i \approx F(b) - F(a)$. Ello hace que sea pedagógico y de fácil comprensión el TFC: $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$.

Pensamos que esta propuesta de “justificación” del TFC contiene un *déficit* de razonamiento entre la equivalencia de $F(b) - F(a)$ y la última igualdad. Nuestra propuesta consistirá en mostrar el teorema del valor medio del cálculo diferencial mediante su interpretación geométrica y, a partir de él, demostrar el TFC.

Abrahamson comenta que esta forma de introducir el TFC es eficaz para la posterior comprensión del mismo por parte de los estudiantes. Asimismo,

[15] Abrahamson, D. L. (1998). Revisiting the Fundamental Theorem of Calculus. *Mathematics in College*. Office of Academic Affairs. The City University of New York. 535 East 80th Street. New York, NY 10021. Pp. 3-16.

[16] Muchos textos de Matemáticas le denominan segundo teorema fundamental del cálculo, y el primer teorema fundamental del cálculo es: $F(x) = \int_a^x f$ donde para todo *x*, $F' = f$.

dice que al transformar la *"S"* de suma, mediante los límites, en la *"S alargada*" los mismos profesores confunden a los estudiantes al escribir expresiones tales como: $\int f(x)\,dx,\quad \int_a^x f(t)\,dt,\quad \int_a^x f(x)\,dx,\quad \int_a^x f(t)\,dx$ y para evitar tales confusiones sugiere que los profesores sean muy rigurosos en el empleo del lenguaje preciso y la notación correcta. Por último, propone que ante la confusión del los conceptos *"integral definida"* e *"integral indefinida,* $\int f(x)\,dx$ *"*, a esta última se le denomine *"antiderivada"* o *"primitiva".*

En nuestra opinión, también es una fuente de confusión la utilización de la misma o distinta variable en el integrando y en el extremo superior de integración, además, nos hemos decantado por la denominación *"cálculo de primitivas"* en lugar de *"cálculo de antiderivadas"* o *"cálculo de integrales indefinidas".*

Dubinsky y **Schwingendorf** (1990)[17], citados en Muñoz (2007, pág. 38)[18], diseñaron una serie de tareas para ayudar a los estudiantes a hacer construcciones mentales, objeto-proceso, cuya finalidad era la comprensión del teorema fundamental del cálculo. Éstas consistieron en prácticas con ordenador, señalando que para la comprensión de los conceptos es eficaz escribir programas informáticos pues las construcciones mentales son más ricas y producen un efecto positivo, y ejercicios para resolver en casa, todo ello centrado en las sumas de Riemann. Estos autores concluyen que la evaluación de los efectos y resultados obtenidos es extremadamente difícil.

Asimismo, Dubinsky (1991), citado por Calvo (2001)[19], considera que la construcción de conceptos matemáticos se puede describir por medio de varias etapas: interiorización, coordinación, encapsulación y generalización (teoría APOE[20] o APOS). Considérese el ejemplo de que muchos

---

[17] Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1990). Constructing Calculus Concept: cooperation in a computer laboratory. *Mathematical Association of America Notes,* 24, pp. 47-70.

[18] Muñoz, G. (2007). Rediseño del Cálculo Integral escolar fundamentado en la predicción. En: Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R. M., Carrillo, C., López, I. y Navarro, C. (2007). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos. Pp. 27-76.

[19] Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral.* Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.

[20] Acrónimo de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. En inglés APOS.

estudiantes han asimilado el proceso de calcular el área entre una curva dada por una función positiva y el eje de abscisas en el intervalo [a,b] por medio del límite de las sumas de las área de determinados rectángulos, el problema surge cuando se cambia el intervalo y ello es debido a que consideran que el área se ha encapsulado como un número, sin embargo, al cambiar el extremo de integración se obtiene una nueva función. En otras palabras, sea *f(x)* una función integrable en [a,b], se define una nueva función en el mismo intervalo dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$, ello, entre otras cosas, impide: la comprensión de la integral definida (pues generalmente no coincide con el área), el teorema fundamental del cálculo, el concepto de integral impropia y la definición del logaritmo neperiano por medio de la integral[21], es decir, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$, siendo $0 < x$.

Nosotros tenemos en mente estos problemas de comprensión y utilizamos el método de Fischer (1983) para establecer el TFC sin que éste esté asociado al concepto de área y, como ya se ha indicado, utilizamos *software* matemático adecuado para que los alumnos distingan área de integral. Además, se proponen ejercicios de lápiz y papel para que los alumnos los resuelvan en casa y, con ello, adquirir los distintos conceptos para la comprensión y el aprendizaje de la integral definida.

Perrin (1990)[22] construye un proceso de aprendizaje del concepto de área distinguiéndola de superficie y número. Así pues, el concepto de área es el nexo que une superficie con número, y esto se logra recorriendo tres estadios de aprendizaje: a) construir la noción de área como magnitud autónoma, b) extender la aplicación medida a superficies que no se pueden recubrir con un número entero de unidades de superficie, y, finalmente, c) señalar diferencias y establecer relaciones entre áreas, es decir, se persigue la cadena superficie-área-número.

[21] Aunque está fuera de las pretensiones de esta Memoria, consideramos muy interesante el artículo: Socioepistemología de la contradicción. Un estudio sobre la noción de logaritmos de números negativos y el origen de la variable compleja de Cantoral y Farfán (2008). En: Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R. M., Lezama, J. y Romo, A. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos. Pp. 242-284.

[22] Perrin, M. J. (1990). L'aire et la mesure. *Petit x*, 24. Paris: IREM. Pp. 5-36.

Para nosotros, es evidente que número y área de una superficie son conceptos diferentes y, haciéndonos eco de este autor, se construye el concepto de área de rectángulo independientemente de las longitudes y de la tipología numérica que las expresa.

Tierney, **Boyd** y **Davis** (1990)[23], citados por Turégano (1994, págs. 55-56)[24], investigan con estudiantes, futuros profesores de matemáticas, y ponen de manifiesto que tienen conceptos erróneos sobre el área, entre los cuales podemos destacar:

- Los estudiantes generalizan frecuentemente las fórmulas para hallar el área de un rectángulo a figuras planas que no son rectángulos.
- Muchos piensan que es la "longitud por anchura". (...) Muchos de los que mencionaron la fórmula LxA no pasaron de longitud a unidades cuadradas.
- Es corriente que los estudiantes utilicen los números de que disponen, sean los que sean.
- Al parecer (...) aceptan la "conservación del área" (...) se siguen imaginando que las figuras con el mismo perímetro tienen la misma área.

En nuestra investigación constatamos errores similares a los descubiertos por estos autores, e incluso, manipulan el resultado final cuando consideran que la solución no es de su "agrado"[25].

Rouche (2004)[26] propone que los conceptos de derivada, integral y primitiva sean introducidos en contextos diferentes y así los estudiantes puedan reinventar el teorema fundamental del cálculo. Para ello propone los siguiente problema: La función $g(x) = x - \frac{x^2}{2}$ expresa el perfil de un terreno donde la abscisa, *x*, es la distancia medida a partir del origen y la ordenada

[23] Tierney, C., Boyd, C. y Davis, G. (1990). Prospective Primary Teachers Conceptions of Area. *Proceedings of the 14th International Conference of Mathematics Education.* Oaxtepec. México. Pp. 307-315.

[24] Turégano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo integral.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

[25] Se ha comprobado que algunos estudiantes al determinar un área, si el resultado es un valor fraccionario, entonces lo multiplican por el denominador.

[26] Rouché, N. (2004). La dérivée, la primitive un univers de sens. *Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public,* pp. 123-137.

g(x) es la altura del terreno para la abscisa *x*. La función $f(x)=1-x$ expresa la pendiente de la recta tangente al perfil del terreno en el punto de abscisa x. Además, supongamos que tenemos los siguientes datos:

a) La representación de las mismas (figuras I.3.1.3 y I.3.1.4) .

b) Dos tablas de valores (tablas I.3.1.2 y I.3.1.3) para cada una de las funciones en los nodos de la partición *P* = { 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 y 1} del intervalo [0,1].

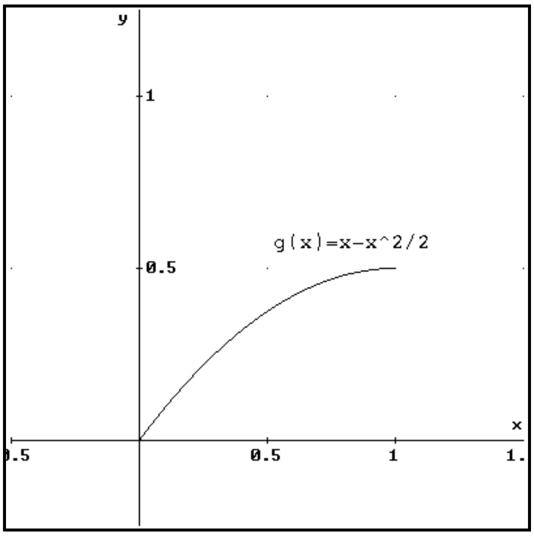


Figura I.3.1.3. Perfil de un terreno.

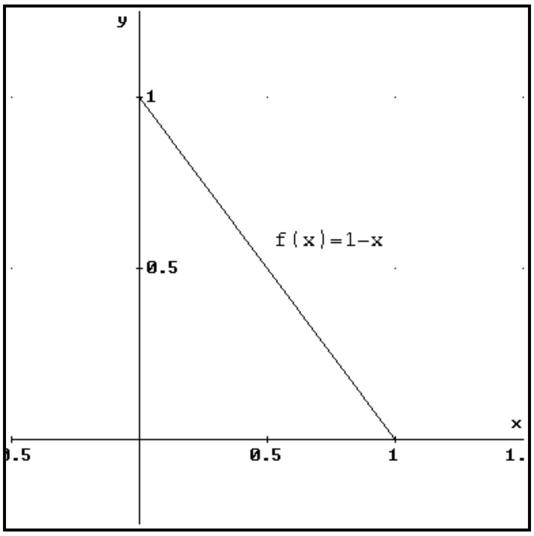


Figura I.3.1.4. Pendiente de un terreno.

x	**0,0**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
g(x)	0,0	0,095	0,18	0,225	0,32	0,375	0,42	0,455	0,48	0,495	0,5

Tabla I.3.1.2. Valores del perfil de un terreno.

x	**0,0**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
***f*(x)**	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0

Tabla I.3.1.3. Valores de la pendiente de un terreno.

Rouche, con el enunciado del problema y los datos que han sido adjuntados, propone el estudio de tres respuestas, éstas son:

1º.- Suponiendo que se conoce la función *g(x)* (perfil del terreno), el investigador se pregunta ¿cuál es la pendiente en cada punto del perfil del terreno? y responde con los cocientes incrementales $h(x_i)=\dfrac{g(x_i)-g(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$, *i=1,2,...,10;* donde x_i son los nodos de la partición *P*, y, sin necesidad de conocer la derivada, los alumnos obtendrán una aproximación a los valores de la derivada de la función *g(x)*, es decir, mediante las pendientes de las rectas secantes, $y=g(x_{i-1})+\dfrac{g(x_i)-g(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})$, *i=1,2,...,10* (ver figura I.3.1.5) a la curva de la función *g(x)* y que pasan por las coordenadas de dos nodos consecutivos. Si comparamos estos datos, pendientes de las rectas secantes y pendientes de las rectas tangentes en los nodos de la partición, se concluye que los correspondientes valores de $h(x)$ y $f(x)$ son prácticamente iguales (ver tabla I.3.1.4). En consecuencia, los alumnos aceptan, sin dificultad, como gráfica de las pendientes de las rectas tangentes a la curva de la función *g(x),* la gráfica de la función $f(x)$, representada en la figura I.3.1.4.

x	**0,0**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
h(x)	--	0,95	0,85	0,75	0,65	0,55	0,45	0,35	0,25	0,15	0,05
***f*(x)**	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0

Tabla I.3.1.4. Valores de las pendientes de las rectas secantes y de las rectas tangentes.

2º.- Supóngase, ahora, que se conoce la pendiente en cada punto del perfil de un terreno, dicha pendiente, viene dada por la función *f(x)*, Rouche, de nuevo, se interroga ¿cuál será la gráfica del perfil del terreno? En este momento representa la recta que pasa por el origen y tiene pendiente 1, seguidamente, sabiendo que los valores de la tabla I.3.1.3 deben ser las pendientes de las rectas tangentes a la curva del perfil de terreno y considerando que para puntos muy próximos la pendiente es la misma; además, por el contexto del problema la altura es acumulativa. Uniendo los puntos de tangencia, se obtiene la gráfica buscada (véase la figura I.3.1.6).

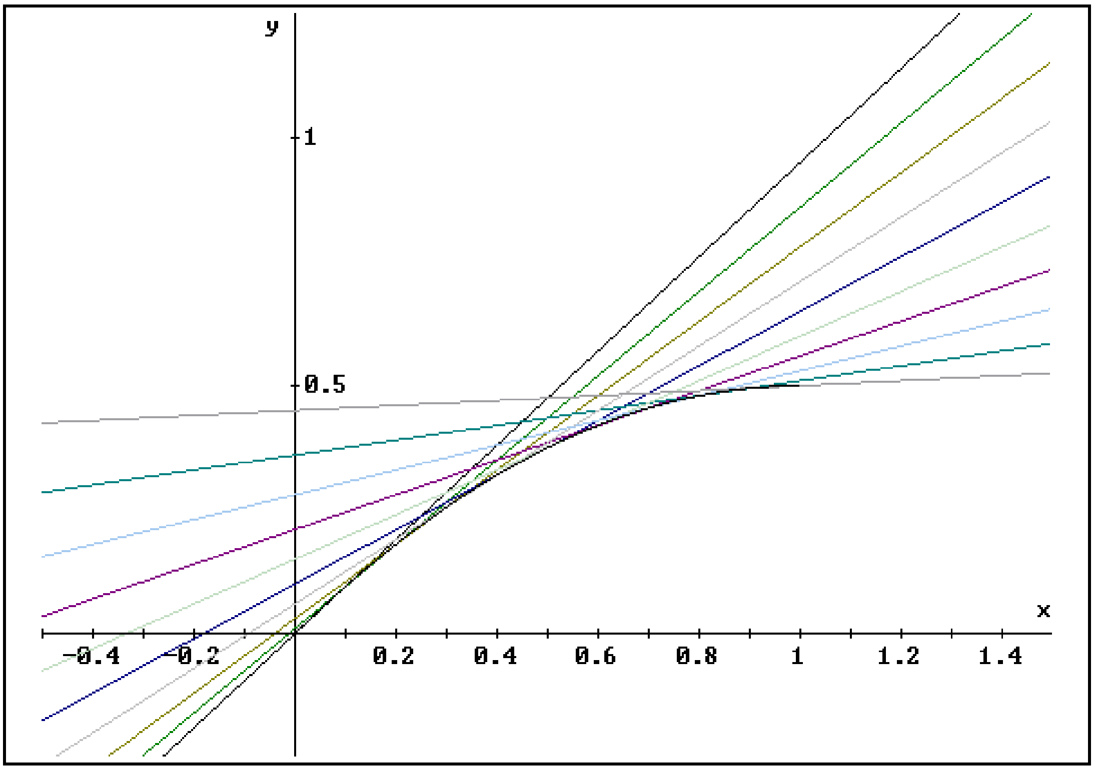


Figura I.3.1.5. Rectas secantes.

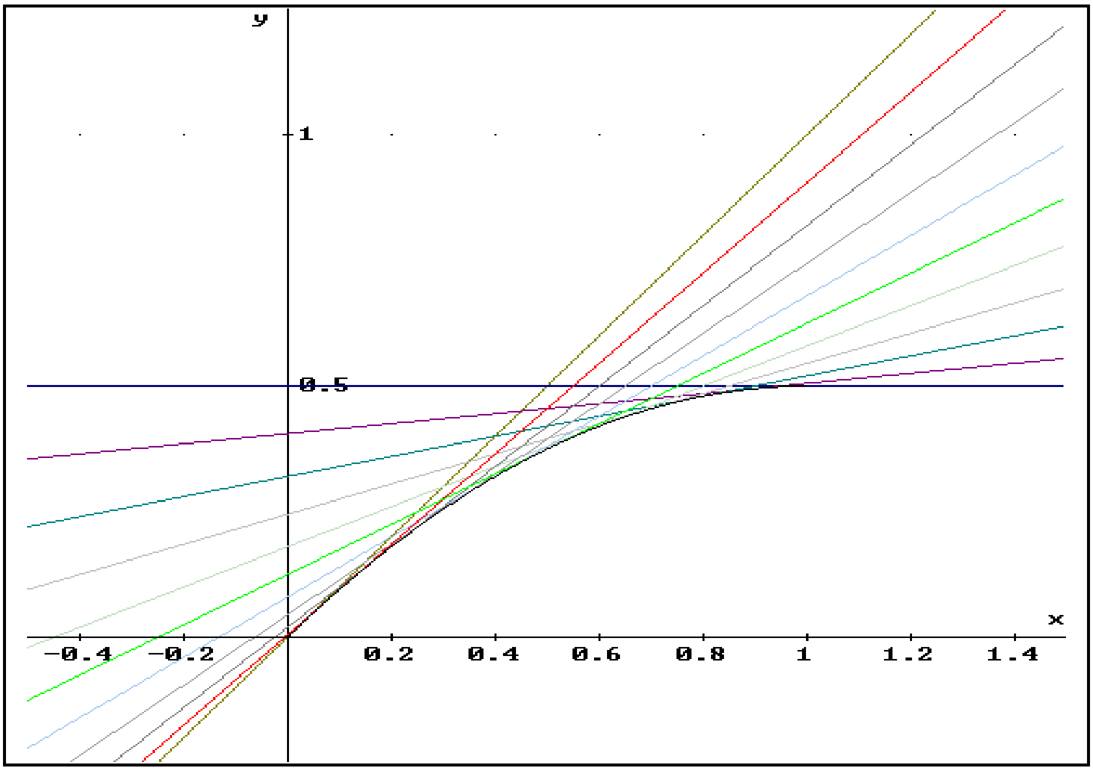
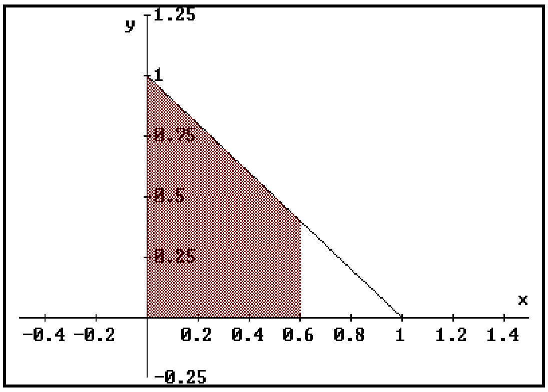


Figura I.3.1.6. Rectas tangentes.

Es más, sea la función A(x) dada por el área bajo la curva de la función *ƒ(x)* y el eje de abscisas desde 0 hasta *x*, entonces, A(x) coincide con la altura que determina el perfil del terreno, es decir, coincide con la función *g(x).* Por la propia definición de las funciones *ƒ(x)* y *g(x)*, se tiene: *g´(x)=ƒ(x),* por tanto, A´*(x)=ƒ(x)* (véase una aplicación elemental en las figuras inferiores).



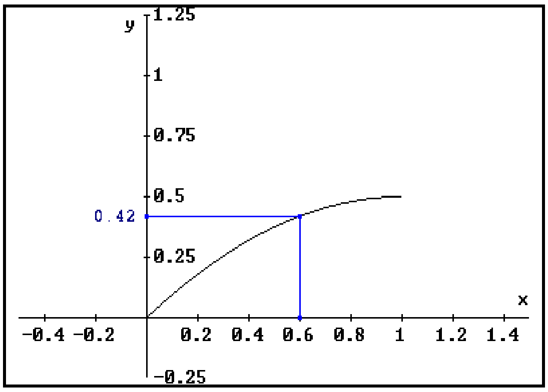


Figura I.3.1.7 (izquierda). Área bajo la curva de la pendiente del perfil del terreno = 0,42 u^2.
Figura I.3.1.8 (derecha). Altura del perfil del terreno = 0,42 u.

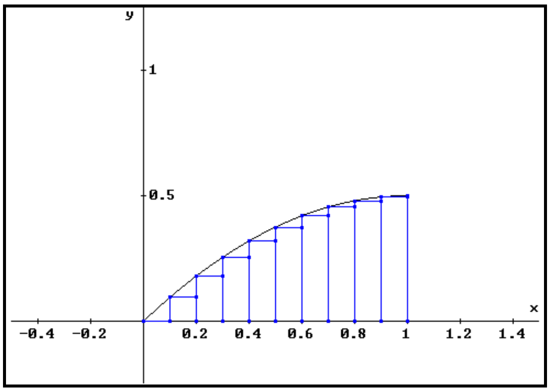
Nosotros constatamos la importancia de este resultado, pues, coincide en su totalidad con lo expresado por Poincaré un siglo antes[27] y, además, queda establecido el TFC.

3º.- Si se desea calcular el área determinada por la función *g(x)*, el eje de abscisas y las rectas *x*=0 y *x*=1, el autor, propone que se realicen las sumas inferiores de Darboux (él las llama de Riemann) y, sumando las áreas de rectángulos cuya base mide 0,1 y la altura es $g(x_{i-1})$ para cada uno de los el subintervalos $[x_{i-1},x_i]$, *i=1,2,...,10,* de la partición *P*, se obtiene un valor aproximado del área buscada (la ilustración gráfica de los rectángulos viene dada en la figura I.3.1.9). Además, si se desea nivelar el terreno, se concluye que, es una aplicación inmediata del teorema del valor medio del cálculo Integral (figura I.3.1.10).

Resumiendo, Rouche propone introducir el concepto de integral definida por medio de ejemplos extraídos del contexto real y para determinar el área es más viable utilizar sumas de áreas de trapecios para pasar, posteriormente, a las sumas de Riemann, pues, corresponde con el desarrollo histórico de la

[27] "Definir la integral como el área comprendida entre el eje de las x, dos ordenadas [ordenada, para Poincaré, significa recta paralela al eje de ordenadas] y la curva, y mostrar que, cuando una de las ordenadas se desplaza, la derivada de esta área es precisamente la ordenada en sí" Poincaré (1904).

integral definida que facilita la comprensión del concepto por los estudiantes e introduce de forma natural el teorema fundamental del cálculo.



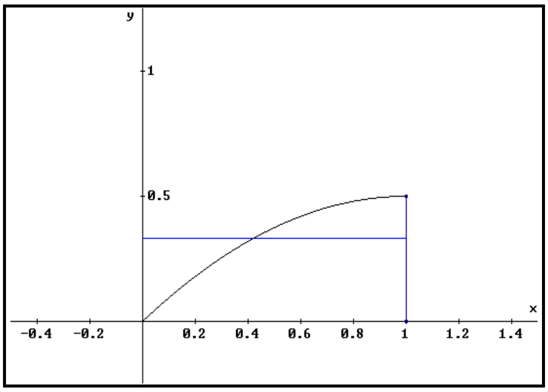


Figura I.3.1.9 (izquierda). Sumas inferiores de Darboux. Área de los rectángulos=0,3075 u^2. Figura I.3.1.10 (derecha). Interpretación del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Nuestra investigación también sigue algunas recomendaciones de Rouche puesto que se insiste en las representaciones gráficas de los diferentes rectángulos (superiores, inferiores e intermedios) cuya realización viene apoyada por elementos de *software*, en concreto el programa de cálculo simbólico *DERIVE*, para que los alumnos visualicen las diferentes sumas de Darboux y de Riemann y así establecer, en principio, la definición de integral definida, asimismo, mediante las sumas de Riemann y el teorema fundamental del cálculo diferencial demostramos el teorema fundamental del cálculo y, por último, mediante visualizaciones del área justificamos el teorema del valor medio del cálculo integral.

Dreyfus (1991), citado por Muñoz (2007, págs. 36-37), considera que para tener éxito en las Matemáticas es importante poseer representaciones mentales de un concepto que incluyan varios aspectos del mismo, sus investigaciones concluyen que:

- Los estudiantes aprenden los procedimientos del Cálculo en un nivel puramente algorítmico, que es construido sobre imágenes conceptuales escasas.
- Las dificultades en la concepción de los procesos de diferenciación e integración pueden explicarse en términos de que los estudiantes carecen, necesariamente, de un nivel alto de abstracción, tanto del concepto de función (como un objeto), como de los procesos de aproximación.

- La visualización es poco común y, si ocurre, el vínculo cognoscitivo entre las representaciones visual-gráfica y la analítico-algebraica es un punto de mayor dificultad.

Para nosotros también son importantes las visualizaciones y éstas se hacen utilizando medios manuales e informáticos, además, muchos de los alumnos de bachillerato carecen de la abstracción necesaria para comprender el concepto de integral definida y, por ello, pretendemos fortalecer las representaciones gráficas de tal forma que sean complementarias a las expresiones matemáticas analítico-algebraicas y favorezcan el aprendizaje de las matemáticas.

Harel y **Kaput** (1991), citados por Calvo (2001, pág. 14), consideran que el encapsulamiento debe tener presente los operadores puntuales y los uniformes. Un ejemplo del primero es la suma de las funciones $f(x)+g(x)$ donde basta intersectar los dominios de ambas funciones para obtener el dominio de la función suma y sumarlas. Sin embargo, el encapsulamiento uniforme exige un paso más, considérese la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$, se define la función integral dada por $I(t)=\int_0^t f(x)dx$, en tal caso, algunos estudiantes cometen el error para *t>1* al considerar $I(t)=\int_0^t xdx$ en lugar de $I(t)=\int_0^1 x^2dx+\int_1^t xdx$.

La afirmación de Harel y Kaput *"intersectar los dominios de ambas funciones para obtener el dominio de la función suma y sumarlas"* es falsa, por ejemplo, el dominio de las funciones *ƒ(x)=ln(x)* y *g(x)*=1– *ln(x)* es (0, ∞) y, sin embargo, el de la suma es el conjunto de los números reales, $\Re$. Por otra parte, sí que coincidimos con los autores en los errores que cometen los alumnos por una asociación errónea del subdominio o intervalo correspondiente en funciones definidas a trozos y será tenido en consideración, sobre todo, al realizar la representación e integración de este tipo de funciones.

Azcárate, **Casadevall**, **Casellas** y **Bosch** (1996)[28] en su texto, ya clásico, *Cálculo Diferencial e Integral*, afirman que muy pocos alumnos de bachillerato son capaces de expresar correctamente que el valor exacto del área bajo una parte de una parábola se podía obtener como límite de las sumas de franjas rectangulares y que, además, existen dificultades en presencia de valores negativos o de discontinuidades.

Estos investigadores consideran que fuera de las aplicaciones directas del cálculo de áreas y volúmenes, no se reconoce cuándo el cálculo de una magnitud requiere la integración y propone que el aprendizaje del concepto de integral definida sea independiente del concepto de derivada, e incluso, puede explicarse antes, ello evitaría que los alumnos consideraran la integración como operación inversa de la derivación. Además, afirman que esta propuesta es acorde con el proceso histórico y que los primeros cálculos de superficies limitadas por curvas se hicieron por métodos geométricos y aconseja que, con notación moderna, sea adaptado el método exhaustivo; incluso, señalan que los alumnos construyen desde el principio una concepción de la integral definida como un número que da la medida de un área y propone que la presentación del concepto sea mediante el concepto de área y por medio de sucesivas aproximaciones (recuérdese que va dirigido a bachilleres) y que se establezca el teorema fundamental del cálculo mediante la integración numérica. Por último, precisan que el *software* debe jugar un papel relevante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida.

Es evidente que Azcárate y cols. (1996) siguen las orientaciones de los principales investigadores del concepto, entre los que caben destacar: Poincaré (1904), Abrahamson (1998), Artigue (1995, 2003a), Sierpinska (1985, 1987), Dubinsky (1990, 1996) y Rouche (2004). En nuestra investigación tenemos en cuenta las precisiones y recomendaciones de esta investigadora y colaboradores, sí que introducimos la integral definida mediante sucesivas aproximaciones de los valores de las distinta áreas (superiores e inferiores), por medio de las nuevas tecnologías utilizando el programa de *software* matemático *DERIVE* donde se compagina la visualización y los cálculos de áreas por medio de la integración numérica (método rectangular); seguidamente, una vez establecido el TFC, se

[28] Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E. y Bosch, D. (1996). *Educación Matemática en Secundaria. Cálculo Diferencial e Integral.* Madrid: Síntesis.

procede a constatar la necesidad del cálculo de primitivas, las cuales serán sencillas y empleando, entre otros instrumentos, el cálculo mental.

En la figura I.3.1.11 hemos querido expresar que el primer lugar en el proceso de enseñanza-aprendizaje corresponde a la integral definida y, de ésta, surge la necesidad del cálculo de primitivas (no al revés, por eso no ponemos la doble implicación) y de ahí la utilización de diferentes instrumentos para resolver las cuestiones y problemas planteados anteriormente. Así interpretamos las sugerencias de Azcárate y cols. y las ponemos en práctica.

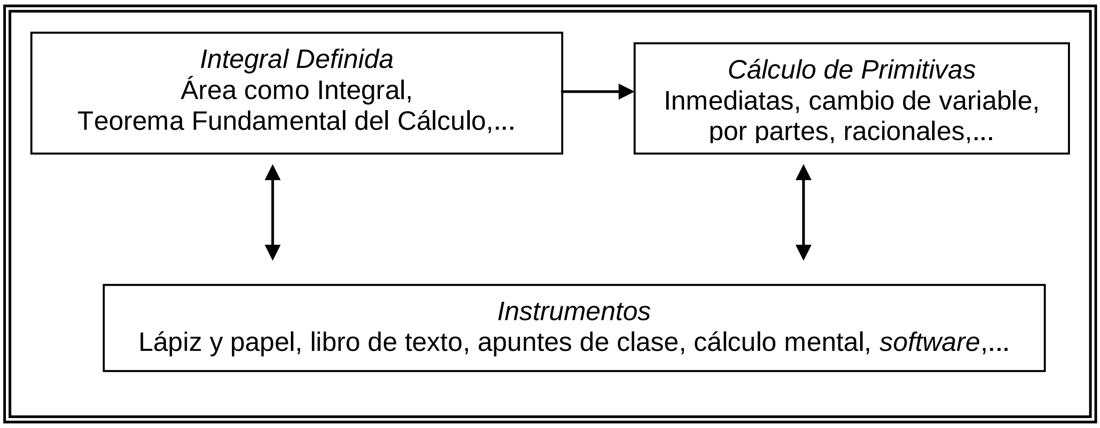


Figura I.3.1.11. Ciclo de enseñanza-aprendizaje de la integral.

Calvo (2001)[29] en su Tesis Doctoral, dirigida por Azcárate, afirma (pág. 165):

- Las tareas con cotas superiores e inferiores para el área bajo el gráfico de funciones positivas de concavidad positiva son enfrentadas por los estudiantes de manera comparables a las tareas con cotas inferiores y superiores, respectivamente, para funciones de concavidad negativa.
- La preferencia por dar la cota más ajustada posible, se refleja en el uso del método trapezoidal (...) frente al método rectangular con una partición formada por dos subintervalos. (...) la aproximación obtenida al utilizar este segundo método, la cual recibió menos adhesiones, coincide con (...) la suma superior de Riemann, a partir de las cuales se define la integral en los cursos universitarios de Cálculo.
- Frente a una función de concavidad positiva les resulta más fácil trabajar con cotas superiores para el área bajo su gráfico que con cotas inferiores y aunque para funciones decrecientes de concavidad positiva el método

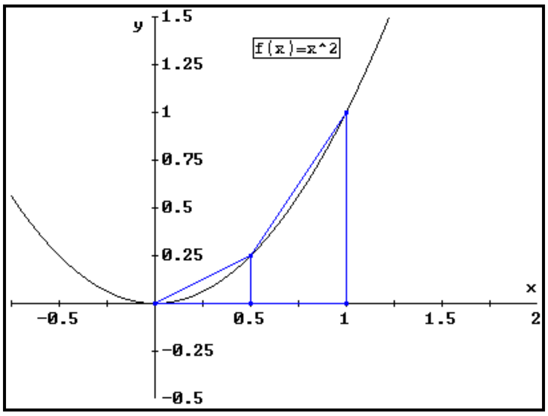
[29] Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.

> rectangular con una partición más fina cumpla el objetivo de mejorar la cota superior dada, los estudiantes prefieren recurrir al uso de trapecios.

No estamos de acuerdo con la afirmación de Calvo, consideramos que la aproximación mediante el método trapezoidal no es necesariamente mejor que la suma de Riemann, por ejemplo, considérese la función $f(x) = x^2$, el intervalo [0,1], la partición P = {0, ½, 1} y los puntos intermedios Q = {¼, ¾}. Calculemos la integral, las áreas trapezoidal y rectangular y los errores según los procedimientos utilizados (tabla I.3.1.5 y figuras I.3.1.12 y I.3.1.13). Es evidente que $A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} u^2$, además, concluimos que el error trapezoidal es el doble que el error rectangular.

	TRAPEZOIDAL	RECTANGULAR
ÁREA	$A_T = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{2} + \frac{\frac{1}{4}+1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}+\frac{5}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}u^2$	$A_R = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{32}+\frac{9}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}u^2$
ERROR	$E_T = A_T - A = \frac{3}{8}-\frac{1}{3} = \frac{1}{24}u^2$	$E_R = A - A_R = \frac{1}{3}-\frac{5}{16} = \frac{1}{48}u^2$

Tabla I.3.1.5 Áreas y errores de los procedimientos trapezoidal y rectangular.



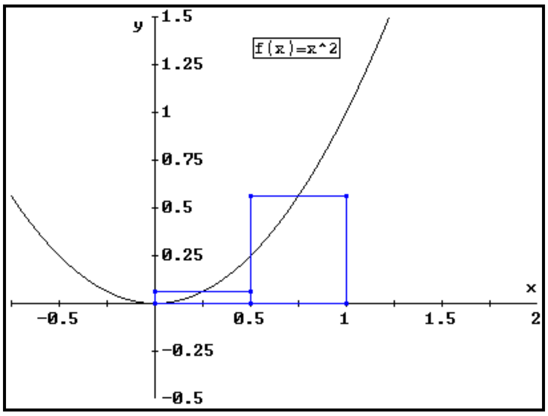


Figura I.3.1.12 (izquierda). Suma trapezoidal. Área de los trapecios = 3/8 u^2 = 0,375 u^2.

Figura I.3.1.13 (derecha). Suma de Riemann. Área de los rectángulos =5/16 u^2 =0,3125 u^2.

Determinemos el error cometido al utilizar cada procedimiento. Si deseamos valorar la $\int_a^b g(x)dx$ por medio de la integración numérica[30] en una partición de *"n+1"* nodos equidistantes del intervalo [*a,b*], siendo $h = \frac{b-a}{n}$, se tiene:

- Por el método rectangular, que puede coincidir con las sumas de Darboux y es una suma de Riemann, el error cometido es $E_R = -\frac{(b-a)\cdot h}{2} g'(\xi); \quad a < \xi < b$, es decir, de orden uno.
- Por el método trapezoidal, el error cometido es $E_T = -\frac{(b-a)\cdot h^2}{12} g''(\zeta); \quad a < \zeta < b$, es decir, de orden dos.

Interpretamos que la investigadora considera mejor el segundo método porque al aumentar los nodos de la partición, la integración trapezoidal converge más rápida que la rectangular. En nuestra trabajo nos hemos decantado por las sumas de Riemann puesto que los alumnos investigados son de bachillerato y no se contemplan, a ese nivel, métodos de integración numérica distintos a los rectangulares.

Pérez (2008)[31], en su tesis doctoral, propone una metodología para diseñar y evaluar el aprendizaje de las matemáticas que se ejemplifica con el cálculo integral. El desarrollo se realizó en la Universidad de Camagüey y constaba de 6 etapas, a saber: "análisis de los objetivos, estructuración del contenido de la unidad, determinación de las cadenas de clases, diseño del sistema de tareas de la unidad, diseño del sistema de evaluación de la unidad y diseño del sistema de evaluación de la materia" (págs. 73-74). Algunas de las conclusiones, según la autora, debidas a la aplicación de la metodología son: "se obtienen mejores resultados en la evaluación final de la materia, se logra la participación de los estudiantes (...) con trabajos de búsqueda parcial, se aumenta el número de horas de estudio semanales y la asistencia a la biblioteca" (págs. 79-90).

[30] Demidovich, B. P. y Maron, I. A. (1977). *Cálculo Numérico Fundamental*. Madrid: Paraninfo. Pp. 647-655.

[31] Pérez, O. (2008). La Evaluación del Aprendizaje en la Educación Matemática. En: Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R. M., Lezama, J. y Romo, A. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos. Pp. 65-90.

Pérez plantea una docencia sistemática y analiza los resultados de la investigación a través de los aprendizajes, cosa que también haremos en nuestra investigación que contempla múltiples aspectos metodológicos.

Cabañas y **Cantoral** (2007)[32], realizan un enfoque socioepistemológico de la integral definida y afirman que la enseñanza tradicional tiende a desarrollar el uso de fórmulas y las técnicas de integración en el cálculo de áreas, olvidando las actividades de la vida cotidiana. Estos investigadores, desde la Teoría de las Situaciones[33], para la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida proponen cuatro etapas cuya representación viene determinada en la figura I.3.1.14.

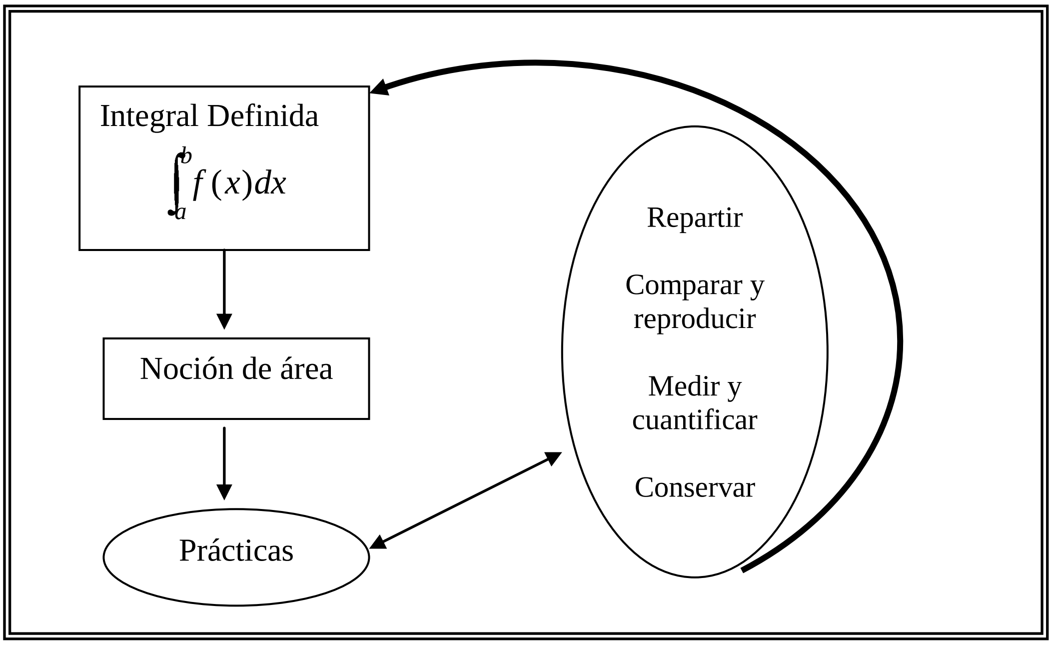


Figura I.3.1.14. Una visión del estudio de la integral definida en el marco de la aproximación socioepistemológica.

Y la matización de cada una de las cuatro etapas de la figura anterior viene explicitada en el texto siguiente (Cabañas y Cantoral, 2007, págs. 13-14):

a) *Repartir.* Esta actividad se vincula a situaciones de la vida cotidiana en las que dado un objeto hay que repartirlo equitativamente, ya sea aprovechando regularidades, por estimación o por medición.

[32] Cabañas, M. G. y Cantoral, R. (2007). La integral definida: un enfoque socioepistemológico. En: Dolores y cols. (2007). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos. Pp. 3-25.

[33] Véase, en la presente Memoria, la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau del capítulo III: *Marco Teórico. Hipótesis.*

b) *Comparar y reproducir.* Las situaciones tienen que ver con la comparación de dos superficies con el fin de determinar cómo es una respecto de la otra. Estas actividades pueden realizarse mediante: inclusión, transformaciones, estimación, por medición, o estudiando funciones.

c) *Medir y cuantificar.* El área suele aparecer en situaciones de medida, ya sea para repartir, conservar, comparar o valorar. Este proceso puede realizarse mediante la exhausión, acotación, transformaciones o relaciones geométricas generales.

d) *Conservar.* Esta actividad se presenta después de realizar transformaciones o movimientos en construcciones vinculadas a regiones planas o no planas. En este proceso, los objetos pueden cambiar o mantener su forma sin que el área se altere.

El concepto de área, según Cabañas y Cantoral (2007, pág. 15), está relacionado con tres prácticas: medida, comparación y conservación. El concepto de medida que requiere de una unidad de medida, de la "cantidad de unidades" y del cálculo de fórmulas. La conservación supone que el valor del área permanece aunque la figura se transforme cualitativamente (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1970[34] y Kordaki y Potari, 1998[35], 2002[36]). Para comprender la posterior definición de medida y su relación con la integral, transcribimos los conceptos de *Teoría de la medida* y *Teoría de la integración* según Bouvier y George (1984)[37].

> *Teoría de la medida.* (...) El concepto de medida es mucho más general que el de la medida en sentido usual utilizado en metrología en las demás ciencias experimentales y técnicas y que consiste en asignar a ciertos sub-conjuntos de un conjunto E un número real positivo que satisfaga a ciertas condiciones (...) La teoría de la medida es hoy prácticamente sinónima de la teoría de la integración. Comprende como aplicación importante la teoría de las probabilidades (Bouvier y George, 1984, pág. 528).
>
> *Teoría de la integración.* (...) Se interesa en la actualidad tanto por la integral de funciones como por la medida de conjuntos. En ambos casos, según una

[34] Piaget, J., Inhelder, B. y Szemisnka, A. (1970). *The child´s conception of geometry*. New York, USA: basic books, Inc. Publishers.

[35] Kordaki, M. y Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computer and Education,* 31, pp. 405-422.

[36] Kordaki, M. y Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computer for Mathematical Learning,* 7(1), pp. 65-100.

[37] Bouvier, A. y George, M. (1984). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Akal.

> presentación unificada debida a Daniell, se remite al estudio de una forma lineal (medida o integral) sobre un espacio de funciones y a su prolongación sobre un espacio mayor. La noción de integral se ha esbozado sucesivamente a partir de los trabajos de Pascal, Fermat, Euler, Leibniz, Newton, Cauchy y Riemann (durante mucho tiempo se ha dicho que integrar es pasar de lo infinitamente pequeño a lo finito). La teoría de la medida, aunque presentida ya por Eudoxio y Arquímedes, se ha desarrollado más recientemente gracias a los trabajos de Lebesgue, Radon, Riesz, Borel, Stieltjes, Daniell, etc. (Bouvier y George, 1984, pág. 447).

Boyer (1986, págs. 759-760)[38] define *"la medida"* y escribe:

> Cuando Lebesgue presentó su nuevo concepto de integral, utilizó [la palabra "medida"] (...) Esta medida era una extensión de los conceptos clásicos de longitud, área y volumen a conjuntos más generales (más "extraños") que los asociados hasta entonces a las curvas y superficies usuales. Hoy la palabra "medida" se usa en un sentido más general: una medida μ sobre una σ-álgebra de conjuntos *R* es simplemente una función real no negativa sobre *R*, que cumple la propiedad de que $\mu\left(\bigcup_{i=o}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$ para toda familia numerable $(A_i)_{i\in N} \subseteq R$, tal que los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos. [El nuevo concepto de integral de Lebesgue es más general y, además, engloba al de integral de Riemann, sin embargo, el recíproco no es cierto].

En efecto, la comparación siempre es posible por la propia naturaleza de la medida, es decir, porque al asignarse al área un número positivo, por medio del buen orden de los números reales, se pueden comparar dos o más áreas. Además, por la linealidad de la definición de la medida, el valor del área permanece intacto mientras su forma puede ser cualitativamente nueva, ello supone que el área se conserva en los movimientos de translación y rotación; modificando una figura, partiéndola y reacomodando sus partes; y mediante ciertas transformaciones analíticas y geométricas.

Estos investigadores consideran que el concepto de área en los niveles medio y superior suele introducirse por el procedimiento de calcular la suma de áreas de rectángulos, posteriormente, por medio del límite se asocia un valor al área. Este procedimiento, afirman Cabañas y Cantoral, entraña dificultades cognitivas en los alumnos como quedó advertido: *"la suma de áreas de rectángulos de base cero es cero"* (Schneider, 1991).

[38] Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

En nuestra investigación, introducimos el concepto de área tal y como lo proponen estos investigadores (por medio de un cuadrado de lado unidad), seguidamente se consideran rectángulos de base y altura enteras, posteriormente las dimensiones son racionales y finalmente irracionales. Constatamos que los alumnos tienen conflicto cognitivo al calcular las áreas de los últimos rectángulos (base y altura irracionales) por la toma de límites de sucesiones racionales y la completitud de $\Re$; además, la concepción del área del círculo de radio 1 como π unidades cuadradas[39] también supone un conflicto cognitivo importante a los estudiantes. Nosotros no consideramos el límite de las sumas de Riemann, se ha optado por el extremo superior de las sumas inferiores de Darboux y el extremo inferior de las sumas superiores de Darboux, si ambos extremos coinciden, se dirá que la función es integrable en el sentido Darboux (que coincide con la integral de Riemann). Asimismo, la conservación del área la tratamos al aplicar la linealidad y la aditividad de la integral, el teorema del valor medio del cálculo integral y la integración por cambio de variable.

En la presente investigación, desarrollada con alumnos de bachillerato, se ha optado por la Integral de Darboux, sin embargo, se ha considerado oportuno realizar en el capítulo V de la presente memoria un breve *"Estudio Epistemológico"* del área, la integral y la medida desde la antigüedad clásica griega hasta mediados del siglo pasado.

Cordero (2001[40], 2005[41]), ha investigado en didáctica del análisis matemático y, entre otros, obtiene importantes resultados acerca de la integral, éstos pueden resumirse en[42]:

- Del análisis socioepistemológico, encontramos un patrón en la construcción de la Teoría de la Integral, dado por la expresión $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$,

[39] *Problema de la cuadratura del círculo:* ¿Es posible construir, con regla y compás, un cuadrado que tenga el mismo área que un círculo dado? La respuesta es negativa y ello es debido a la demostración de la trascendencia del número π realizada por Lindemann en 1882. Puede encontrarse más información en Boyer (1986, págs. 689-691).

[40] Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Relime, vol. 4, núm. 2, julio,* pp. 103-128.

[41] Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Relime, vol. 8, núm. 3, noviembre,* pp. 265-286.

[42] Debemos aclarar que los siguientes puntos no han sido transcritos textualmente, más bien, han sido redactados por el autor de esta Tesis conservando la filosofía del texto original de Cordero.

donde la diferencia $F(x+dx)-F(x)$ y las condiciones de la función derivada F' juegan un papel definitivo en la discusión.

- A la integral se le asignó un significado por medio de la noción de *acumulación*. Tal resignificación adquirió relevancia cuando se matizaron dos aspectos de los fenómenos de variación continua denominados *valor acumulado (suma)* y *acumulación (resta).*
- Las situaciones que favorecen desarrollar el pensamiento matemático de los alumnos en la integral son los fenómenos de cambio.
- El reconocimiento de las situaciones locales propicia el conocimiento de las situaciones globales.
- La investigación sugiere que las realizaciones didácticas más favorables son aquéllas que se enfocan a situaciones específicas de variación continua y cambio, por ejemplo la *acumulación*, en contraposición con la función derivada y las sumas de Riemann.
- Al considerar el área bajo una curva como modelo geométrico de la integral bajo una variación continua, exige transitar de lo estático a lo dinámico.
- La discusión de la integración se inicia con la cantidad *desconocida* (función primitiva) que se desea calcular, al exigir de ésta una variación (función derivada) en un contexto determinado y, finalmente, determinar su integral (cantidad conocida).
- El diagrama, figura inferior, de las categorías (operaciones elementales: suma y resta; variación discreta: suma y resta; y variación continua: diferenciación e integración) de las resignificaciones de la integral es:

Operaciones elementales: Suma y resta

$a + b = c$ (valor acumulado) *$c - a = b$ (acumulación)*

↓

Variación discreta: Suma y resta

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n; d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$; donde $d_i = a_i - a_{i-1}$

$a_n = a_0 + \Sigma d_i$ (valor acumulado) $a_n - a_0 = \Sigma d_i$ (acumulación)

↓

Variación continua: Integración y diferenciación

$P(x) = U$ *$P(x + dx) - P(x) = dP$*

$P(a) + \int dP = P(b)$ (valor acumulado) *$P(b) - P(a) = \int dP$ (acumulación)*

Figura I.3.1.15. Diagrama de categorías (Cordero, 2005, pág. 281).

Este autor no plantea ningún contexto en el que se aplique la integral, pero bajo la teoría socioepistemológica sería interesante proponer algunos ejemplos, nosotros damos el siguiente: Un viajante cobra comisiones por cada una de las unidades vendidas de un artículo, la función que determina dichas comisiones viene dada por $C(x)=\begin{cases} 10 & si \quad 0\le x\le 20 \\ 30 & si \quad 20<x\le 50 \\ 60 & si \quad 50<x\le 100 \end{cases}$ Se pide: representar *C(x)*[43]; determinar la función ganancias, *G(x)*; representar y calcular *G(70)*.

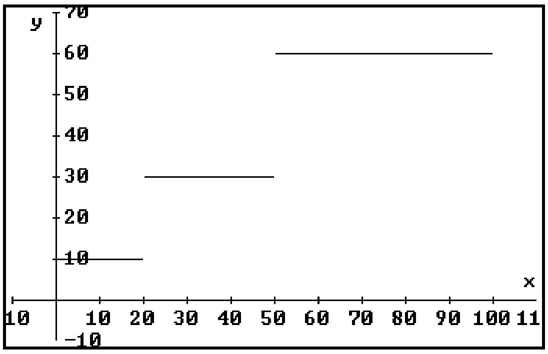


Figura I.3.1.16. Función comisión, C(x).

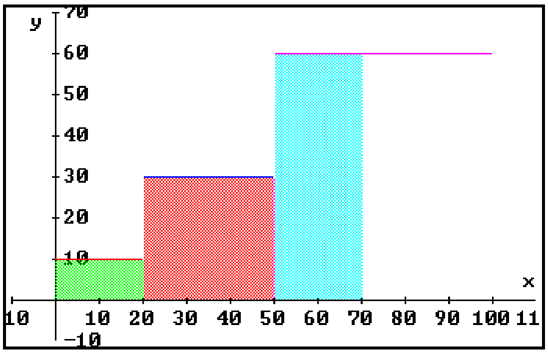


Figura I.3.1.17. Función ganancias, G(x).

La función comisión, *C(x)*, viene representada en la figura I.3.1.16, el eje de abscisas determina las unidades vendidas y el eje de ordenadas da la comisión por cada unidad vendida (según el intervalo en el que se encuentre dicha unidad). Sin embargo, la función ganancias, *G(x)*, figura I.1.3.17, tiene una representación gráfica que causa conflictos cognitivos a los alumnos puesto que en el eje *OX* denotamos las unidades vendidas, el eje *OY* no determina las ganancias; éstas vienen dadas por el área comprendida entre la función *C(x) y* las rectas *x=0* y *x=a*, siendo $0\le a\le 100$. Por tanto:

$$G(x)=\int_0^x C(t)dt \text{ ; } G(70)=\int_0^{70} C(x)dx=\int_0^{20}10dx+\int_{20}^{50}30dx+\int_{50}^{70}60dx=200+900+1200=2300\text{ €}$$

Es evidente que *G(x)* es un ejemplo sencillo, extraído de un contexto real, y didáctico de función acumulativa. Nosotros, en nuestra investigación, hemos planteado que los estudiantes determinaran gráficamente la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad a\le x\le b$, donde *f(x)* es una función positiva; en este caso, se constatan las dificultades de los alumnos al hacer la representación de *F(x).*

[43] Si el viajante ha vendido 70 unidades, por cada una de las 20 primeras unidades cobra 10 €, por cada una de las 30 siguientes cobra 30 € y por cada una de las 20 últimas cobra 60 €.

Muñoz (2007)[44] considera que en la actualidad el cálculo integral se expone a los estudiantes mediante la separación de lo conceptual y lo algorítmico, "en algunos casos, se reduce la parte conceptual a la definición de integral de Cauchy o (...) de Riemann; (...) se realiza el cálculo de integrales usando (...) el teorema fundamental del cálculo" (pág. 28).

Este investigador, afirma que es necesario rediseñar el cálculo integral escolar bajo las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural. Así pues, hace un estudio desde una perspectiva histórica-epistemológica-sociocultural mencionando a los científicos que contribuyeron en mayor medida desde la antigüedad hasta mediados del siglo XIX al descubrimiento del cálculo integral (Arquímedes, Galileo, Fermat, Newton, Leibniz, Pascal, Euler, Fourier, Cauchy y Riemann). Además, en los dos últimos siglos los marcos epistémicos ya no se refieren a las fenómenos de variación o cambio como en los periodos anteriores, ello, propició el inicio de los procesos de *fundamentación del Cálculo* y el nacimiento y consolidación del *Análisis Matemático* (pág. 44*).* A partir de este momento el objetivo es la construcción de un campo conceptual del Cálculo[45] lo cual obliga a introducir nociones como la *predicción* y la *acumulación.*

La metodología, propuesta por Muñoz, para el diseño de actividades didácticas consta de cuatro fases, éstas son[46]:

a) *Selección de un marco epistémico compatible con la naturaleza de la institución escolar específica.* Por ejemplo, para estudiantes de Ingeniería se seleccionó el marco epistémico de Newton constituido en el contexto sociocultural específico del siglo XVII, donde se aprecia la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, es decir la noción de *predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor.*

b) *Construcción de un campo conceptual a partir de un campo epistémico.* Conjunto de situaciones que le dan sentido al Cálculo Integral y que implican la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, con base al campo epistémico de Newton, la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud y desde la perspectiva de la integral vía la noción de acumulación.

[44] Muñoz, G. (2007). Rediseño del Cálculo Integral escolar fundamentado en la predicción. En: Dolores y cols. (2007, págs. 27-76).

[45] *Campo conceptual es un espacio de problemas o de situaciones problema cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos, de varios tipos, en estrecha conexión* (Vergnaud, 1990).

[46] Aclaramos, de nuevo, que los siguientes puntos no han sido transcritos textualmente, más bien, han sido redactados por el autor de esta Tesis conservando la filosofía del texto original de Muñoz.

c) *Caracterización de la génesis contemporánea.* Consistente en estudios experimentales con estudiantes contemporáneos en su contexto sociocultural específico.

d) *Hacia una génesis didáctica.* Se intenta propiciar y controlar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en la institución escolar específica vía diseño adecuado de secuencias de actividades, es decir, desarrollando estudios experimentales que buscan el *control de la génesis artificial de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico.*

Un hallazgo importante, para este investigador, es que el rol del profesor no corresponde con la transmisión ni la institucionalización, sino, más bien, como introductor de propiedades que no pueden ser abstraídas por la interacción de los estudiantes cuyo objeto es el conocimiento conceptual y algorítmico, resumiendo, la labor del docente debe ser la de mediador social. En nuestro trabajo, como se comentó anteriormente, se hace un análisis epistemológico del concepto, pero el marco que se utiliza, está actualizado y tiene presentes los progresos conceptuales y tecnológicos.

Contreras y **Ordóñez** (2003[47], 2006[48], 2010[49]) y otros colaboradores tienen estas y otras publicaciones sobre el concepto que nos ocupa, nosotros nos hemos decantado por extraer las conclusiones sobre el análisis de los manuales de segundo de bachillerato en la enseñanza del cálculo integral y analizar la influencia de las Pruebas de Acceso a la Universidad.

Los significados históricos de la integral definida, según estos autores, son:

- Integral de Newton (...) tiene mucho que ver con la integral indefinida al utilizar la inversión de la diferenciación para el cálculo de áreas.
- Integral de Leibniz (...) está relacionada con los procesos que hacen los manuales con los rectángulos superiores e inferiores, puesto que interpreta el área curvilínea como suma de rectángulos.

[47] Contreras, A. y Ordóñez, L. (2003). El análisis de manuales de enseñanza de la Integral Definida. *Investigaciones en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española en Educación Matemática (SEIEM),* pp. 277-288.

[48] Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad Ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la Integral Definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME).* México D. F. Pp. 65-84.

[49] Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las Pruebas de Acceso a la Universidad en la Enseñanza de la Integral Definida en el Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias,* 28(3), pp. 367-384.

- Integral de Cauchy (...) como límite de una suma para funciones continuas y para funciones discontinuas de salto e infinitas.
- Integral de Riemann (...) como límite de una suma para funciones con discontinuidades aisladas y también aquéllas que tienen un conjunto denso de puntos de discontinuidades. Posteriormente, prescindió de la continuidad y de la continuidad a trozos en la definición de Integral.
- Integral de Darboux (...) para funciones acotadas, por tanto integrables y con discontinuidades de medida cero. Define las medidas superiores e inferiores y demuestra el Teorema Fundamental del Cálculo para funciones integrables en sentido amplio.
- Integral de Lebesgue (...) define función acotada y medible en un conjunto, aunque se puede extender a cierta clase de funciones medibles no acotadas. Es el conjunto de valores de la imagen (la ordenada) lo que se divide en partes.

En nuestra investigación, en el capítulo V y en el anexo B, realizamos un breve estudio Epistemológico del área y la integral definida en el que contemplamos las seis integrales[50] relacionadas por Contreras y Ordóñez (2003, pág. 282).

Los conflictos semióticos[51], asociados a los significados institucionales, que establecen estos investigadores (2003, pág. 283) son:

- CSVAA del valor aproximado del área. Consiste en que el área sólo puede tomar un valor aproximado y no fijo.
- CSGL de la consideración geométrica del límite. Se efectúa el paso al límite (...) donde los rectángulos se estrechan hasta llegar a ser (...) segmentos.
- CSDD de la discordancia dimensional. Una cierta percepción de las magnitudes se inmiscuye en los cálculos de las áreas y de los volúmenes de manera que magnitudes de dimensiones distintas se entremezclan, lo que puede conducir al error.
- CSMU del movimiento uniforme. Puede aparecer cuando se introduce la Integral Definida con situaciones que tienen que ver con el espacio recorrido por un móvil y su velocidad.

[50] Las integrales de Newton y Leibniz están dentro del epígrafe *V.2.4. Desde Newton y Leibniz hasta el concepto de Integral.* El resto de las integrales pueden encontrarse en *V.2.5. La Integral como objeto matemático.*

[51] Conflicto semiótico: *"Disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos –personas o instituciones– en interacción comunicativa"* Godino (2002).

Más allá del *Estudio Epistemológico*, hemos realizado en el capítulo IV un exhaustivo estudio del *Tratamiento Curricular* de la integral en once libros de texto donde se han establecido una serie de categorías para su estudio, que amplían las cuatro expresadas anteriormente. Además, del capítulo VI en adelante se formalizan nuevas categorías correspondientes al desarrollo de la investigación con los estudiantes de los diferentes ciclos.

Las conclusiones, más importantes, a las que llegan son[52]:

a) Se constata que el concepto de Integral Definida viene asociado, casi exclusivamente, a la idea de área encerrada bajo una curva.

b) Hay algunos significados institucionales históricos que no aparecen en ningún manual como es el caso del de Darboux, lo que es lógico debido a la herramienta matemática necesaria no oportuna en esta etapa.

c) Es negativo que apenas se trabaje la integral definida como resultado de los procesos de cambio. El único intento es la introducción de ejemplos sencillos de aplicación de la función velocidad-tiempo extraídos de la Física.

d) Hay una fuerte presencia del conflicto semiótico del valor aproximado del área como consecuencia del paso al límite.

e) Al hacer la amplitud de los intervalos que tienda a cero, se puede considerar que el área se completaría con infinitos segmentos o que se puede obtener el volumen como una infinidad de superficies[53].

f) El concepto se introduce generalmente por medio del área bajo una curva y los alumnos tienen conflictos al determinar los signos de la función y, en consecuencia, no diferencian entre área e integral.

g) La menor algebrización del cálculo integral favorecería la relación entre derivada e integral.

En nuestra investigación encontramos resultados que confirman d) y e), sin embargo, hemos procurado minimizar estos conflicto semióticos mediante el establecimiento de la integral de Darboux, por tanto, discrepamos de la conclusión b), consideramos que *“No es más difícil considerar el extremo superior de las sumas inferiores de Darboux (extremo inferior de las sumas superiores de Darboux) que el límite de una sucesión de sumas de Riemann cuando la sucesión de los diámetros de las particiones tiende a cero”.*

[52] Las conclusiones no han sido transcritas literalmente, más bien, han sido redactados por el autor de esta Tesis conservando la filosofía del texto original de Contreras y Ordóñez.

[53] Schneider (1988, 1991) lo reconoce como “heterogeneidad de las dimensiones”.

Contreras y cols. (2010) contemplan cuatro configuraciones epistémicas[54] de la integral definida: CE-geo, denominada *"geométrica"* que hace referencia a un contexto geométrico totalmente estático como puede ser el cálculo de áreas, longitudes de curvas y volúmenes de revolución, CE-RPC debida al *"resultado de un proceso de cambio"* cuyas aplicaciones pueden encontrarse en la física, biología y ciencias sociales, CE-invderiv *"inversa de la derivada"* y CE-aproxlim *"aproximación al límite".* Para cada una de las configuraciones epistémicas se señalan varios conflictos, nosotros destacamos:

> Por último, para la CE-aproxlim nos encontramos con diversos conflictos asociados a la noción de límite (...) los estudiantes aceptan afirmaciones del tipo "se aproxima más y más pero no es el área exacta", pero son incapaces de aceptar que el límite del proceso de aproximación al área sea el valor "exacto" de dicha área (Contreras y cols., 2010, pág. 371).

En nuestra investigación podemos añadir, siguiendo los criterios de estos investigadores, una nueva configuración epistémica, ésta es, CE-extremos, la cual se refiere a la toma de *"los extremos superior (respectivamente inferior) de las sumas inferiores (respectivamente superiores) de Darboux".* Nosotros consideramos que la opción tomada de introducir la integral de Darboux en segundo de bachillerato favorece la comprensión de la integral definida sin generar en los estudiantes el conflicto señalado anteriormente.

Estos investigadores realizan un estudio de la integral definida en cinco libros de texto y en las pruebas de acceso a las universidades andaluzas desde las configuraciones establecidas anteriormente y concluyen:

> El alumno (...) sólo conoce la configuración geométrica (...) no cumpliéndose la hipótesis de que "aprender un objeto matemático significa saber coordinar los distintos sistemas de representación semióticos (...)" (Duval, 2000)[55] y, en el caso de la integral definida, difícilmente pueden coordinarse si no se conocen (...) La determinación de cálculos aproximados aporta información (...) que contribuye a la resolución de conflictos semióticos (Contreras y cols., 2010, págs. 377-378).

Consideramos interesante la última reflexión y, además de realizar varias representaciones semióticas, hemos incluido cálculos estimativos de áreas.

[54] "Los objetos primarios se organizan en entidades más complejas llamadas *configuraciones epistémicas* (...) si se refieren a los significados institucionales, o *configuraciones cognitivas* si se refieren a los significados personales" (Contreras y cols., 2010, pág. 369).

[55] Un breve resumen de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval puede verse en el capítulo III: *Marco Teórico. Hipótesis* de la presente Memoria.

Ortega (2004[56], 2006[57], 2008[58]), lleva impartiendo docencia más de treinta años en varios Institutos de Educación Secundaria y en la Universidad, ha compaginado su labor docente con múltiples investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, por tanto, puede considerarse una autoridad de primer nivel en el área de conocimiento de la Didáctica, lo cual, queda corroborado por sus publicaciones y la dirección de varias Tesis Doctorales.

Si bien considera, este profesor-investigador, que el entusiasmo del profesor es un elemento motivador importante en el aula de matemáticas, ello no es suficiente; además, la conducta de los alumnos en muchas ocasiones es de aburrimiento, propósito deliberado de perturbar, molestar en clase a los compañeros y al profesor, etc.

Los objetivos que deben establecerse, según Ortega (2004, pág. 506) , en la enseñanza-aprendizaje de la integral definida e integral indefinida, son:

> Los alumnos entiendan el concepto de integral definida y sean capaces de aplicarlo a la resolución de problemas. Distinguir y relacionar la integral definida e indefinida de una función con los conceptos de primitiva y función integrable. Saber integrar numéricamente, ver su generalidad y saber aplicarlo mediante *software* adecuado. Conocer las técnicas elementales de cálculo de primitivas.

Los procedimientos, a los que alude este autor, son:

> El concepto de integral definida deberá establecerse a partir del cálculo de áreas definidas bajo una curva. Se construirán sumas de Darboux, (...) a la vez que se dibujarán para una función continua y positiva. Eligiendo un punto interior de cada subintervalo se construyen las sumas de Riemann, (...) lo que de forma natural, aporta un método general de integración numérica. Conviene notar que en cada partición sólo hay dos sumas de Darboux mientas que hay infinitas sumas de Riemann. Las de Darboux son más interesantes para relacionar el concepto con el de área, pero las de Riemann son más apropiadas para efectuar una integración numérica. El siguiente teorema permite utilizar unas sumas u otras indistintamente.

---

[56] Ortega, T. (2004). ¿Qué pintan un motor y una botella en el cálculo integral? Curso Corto de Didáctica, Proyecto BXX2000-0069 de la Dirección General de Enseñanza Superior. España. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame, vol. 17, tomo II,* pp. 515-526.

[57] Ortega, T., Blázquez, S., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Relime, vol. 9, núm. 2, julio,* pp. 189-209.

[58] Ortega, T. (2008) ¿Se pueden crear matemáticas desde la didáctica de la matemática? En: Cantoral y cols. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos. Pp. 705-730.

> *Si ƒ es acotada en [a,b], entonces ƒ es integrable Darboux sií lo es Riemann.*
>
> Cuando se haga la integración numérica conviene que la partición sea uniforme [La utilización de las nuevas tecnologías será de gran ayuda]. La regla de los trapecios es muy intuitiva y tiene mayor orden de convergencia.
>
> El teorema fundamental del cálculo, que debe establecerse inmediatamente después de definir el concepto de primitiva, da un método analítico para determinar integrales definidas y con él se establece la necesidad de cálculo de primitivas (...) s*ólo se deben desarrollar los métodos generales de cálculo de primitivas (descomposición, integración por partes, cambio de variable y algún método particular sencillo) y el formalismo necesario para que la Matemática no se distorsione.* Se deben justificar las aplicaciones de la integral definida mediante procesos de sumatorios de Riemann: de áreas de rectángulos, de volúmenes de cilindros, de centros de masas de rectángulos, etc. (Ortega, 2004, pág. 516).

Ortega efectúa una excelente declaración de principios para la enseñanza y el aprendizaje de la integral que nosotros llevamos a cabo en nuestra investigación al realizar la implementación teórico-práctica de la integral con estudiantes de bachillerato. Además, entendemos que la utilización del programa de cálculo simbólico *DERIVE* en el aula de informática para consolidar los conceptos de área e integral definida y realizar la integración numérica cumple con uno de los objetivos señalados anteriormente por el Director de la presente Tesis Doctoral. Por último, nosotros potenciamos el cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental.

Consideramos muy importante la propuesta de establecer el teorema fundamental del cálculo integral (TFCI) inmediatamente después de definir el concepto de integral definida ya que da un método analítico para determinar integrales definidas y con él justifica la necesidad del cálculo de primitivas (del que no debe abusarse). Seguidamente se reproducen dos formas diferentes de entender y demostrar el TFCI, el investigador, es partidario de utilizar el teorema del valor medio del cálculo diferencial, según Fischer[59], puesto que la conexión con la derivada es más evidente que la propuesta de Spivak[60] y, además, debe ser completado con la regla de Barrow (conocida como segundo teorema fundamental del cálculo). En la tabla I.3.1.6 se encuentran las dos demostraciones del TFCI.

[59] Fischer, E. (1983). *Intermediate Real Analysis.* New York: Springer Verlag.

[60] Spivak, M. (1991). *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Reverté.

<table>
<tr><th>Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Spivak)</th><th>Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Fischer)</th></tr>
<tr><td>Sea f integrable sobre [a,b] y se define F sobre [a,b] por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Si f es continua en c de [a,b], entonces F es derivable en c y F'(c)=f(c).

Demostración: Supongamos que c está en (a,b); para c=a o b, los razonamientos son análogos con las derivadas laterales.

Sea h>0. Entonces:
$F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f(t)dt$

Se definen: m_h = inf {f(x): c<x<c+h};
M_h = sup {f(x): c<x<c+h}.

Se deduce: $m_h h \le \int_c^{c+h} f(t)dt \le M_h h$.

O bien: $m_h \le \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \le M_h$

La misma expresión se obtiene cuando h<0.
Tomando límites cuando h tiende a 0, y puesto que f es continua en x=c, se obtiene $F'(c)=f(c)$.

Es necesario el segundo teorema fundamental del cálculo, que coincide con la regla de Barrow.</td><td>Si f es integrable Riemann en [a,b] y G es una primitiva suya sobre ese intervalo, entonces
$$\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$$
Demostración: Sea P={a=x_0, x_1, x_2, ..., x_n=b} una partición arbitraria de [a,b].
$$\sum_{i=1}^{n}\left[G(x_i)-G(x_{i-1})\right]=\left[G(x_1)-G(x_0)\right]+$$ $$+\left[G(x_2)-G(x_1)\right]+...+\left[G(x_n)-G(x_{n-1})\right]=G(b)-G(a)$$
Por el teorema del valor medio, en cada subintervalo [x_{i-1},x_i], existe un α_i, interior, tal que $G(x_i)-G(x_{i-1})=G'(\alpha_i)\Delta x_i$ y por ser G una primitiva de f, entonces $G(x_i) - G(x_{i-1})=f(\alpha_i)\Delta x_i$.

Por tanto, $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = G(b)-G(a)$

Como las sumas de Riemann están acotadas por las de Darboux, entonces,
$$\underline{s}(p,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le$$ $$\le \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \overline{S}(P,f)$$
Por otra parte, como P es una partición arbitraria,
$$Inferior \int_a^b f(x)dx \le G(b)-G(a) \le Superior \int_a^b f(x)dx$$
Finalmente el hecho de que f es integrable termina la prueba.</td></tr>
</table>

Tabla I.3.1.6. Teorema Fundamental del Cálculo (demostraciones de Spivak y Fischer).

Si nos atenemos a las funciones de la demostración: verificación, explicación, sistematización, comunicación y descubrimiento (DeVilliers, 1990)[61]; la demostración del teorema fundamental del cálculo integral de Fischer aventaja en todas a la de Spivak.

[61] DeVilliers, M. (1990). The role and functions of demonstrations in mathematics. *Pythagoras*, 24, pp. 17-24.

Verificación: El resultado del segundo es más fuerte que el del primero.

Explicación: La desigualdad $m_h h \leq \int_c^{c+h} f(t)dt \leq M_h h$ y el paso al límite encierran una gran dificultad.

Sistematización: Se ordenan mejor las ideas en el segundo que en el primero con un flujo continuo sin tener que recurrir a resultados adicionales fuera del concepto de integral definida en el propio flujo.

Comunicación: Es evidente que el segundo transmite mejor el mensaje matemático.

Descubrimiento: La expresión $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = G(b) - G(a)$ asegura que existen *n* nodos, α_1, $\alpha_{2}, ..., \alpha_n$ (*n* arbitrario) para los que el método de los rectángulos con paso constante es exacto. Esta expresión también es indicativa de que (...) se trata de un teorema de valor medio [generalizado de la integral] de *n* nodos, con *n* variable (Este resultado es una primicia de este curso).

Queda constatado que la demostración del TFCI de Fischer es mejor que la de Spivak, sin embargo, podemos adelantar que en ningún libro de texto, de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, que haya sido analizado en el capítulo IV de esta memoria se ha encontrado la de Fischer y los que han demostrado dicho teorema se han decantado por la de Spivak, seguidamente concluyen con la demostración de la regla de Barrow[62],. Nosotros en la fundamentación de la integral definida, con alumnos de bachillerato, estableceremos el TFCI propuesto por Ortega y Fischer.

Son conceptos distintos *función integrable, primitiva* e *integral indefinida*, según Ortega, muchos libros de texto los confunden e incluso buena parte del profesorado; para aclararlo, expresa y escribe:

- *Definición.* Si f es una función integrable Riemann en [a,b], para cada x de [a,b] la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ existe y se llama integral indefinida de f.
- Si una función es integrable y tiene una primitiva G, entonces la integral indefinida es una primitiva de f, ello es evidente ya que para todo x de [a,b] se tiene $F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$.

[62] Spivak demuestra el segundo teorema fundamental del cálculo, regla de Barrow, de forma similar a la demostración del teorema fundamental del cálculo de Fischer.

- La integral indefinida $F(x)=\int_a^x \cos(t)dt = sen(x)-sen(a)$ nunca puede ser sen(x) + 2, que es una primitiva de cos(x).
- Existen funciones integrable que no tienen primitiva, considérese la función

$$f(x)=\begin{cases} -1 & si \quad -2\le x\le 0 \\ 1 & si \quad 0<x\le 2 \end{cases}$$

- Existen funciones que tienen primitiva y no son integrables, las funciones

$$H(x)=\begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & si \quad x\in[-1,0)\cup(0,1] \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+2xsen\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & si \quad x\in[-1,0)\cup(0,1] \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

verifican que $H'(x)=h(x)$, pero, *h(x)* no es integrable en el intervalo [-1,1].

Este autor da una caracterización de una función integrable Darboux y se decanta más por utilizar una aproximación óptima que una aproximación métrica[63], dice:

> *Teorema de caracterización óptima de las funciones integrables Darboux: La función f es integrable Darboux en [a,b] sií para cualquier aproximación positiva de cero, ε, existe una partición P de [a,b] tal que la diferencia entre la suma superior de Darboux relativa a P y la correspondiente suma inferior es menor que ε (exista una partición, P, tal que la diferencia entre la suma superior e inferior se aproxima a cero más que cualquier número prefijado).*

Así pues, los extremos de ambas sumas deben coincidir y, en consecuencia, esas aproximaciones a la integral no se pueden mejorar y son ella misma.

En nuestro trabajo de investigación seguimos, en parte, estos criterios y, al ser equivalentes las integrales de Darboux y Riemann, conjeturamos que el *"Teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux"* es más comprensible para los estudiantes que cursan matemáticas en segundo curso de bachillerato de ciencias sociales cuando se formula como una aproximación óptima en lugar de la métrica.

[63] Una función f definida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ es *integrable Riemann* en $[a,b]$ y su integral es el número I_R si, y sólo si, se verifica la siguiente condición: *Para cualquier $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que para toda partición P de* $[a,b]$ *con diámetro(P)<δ y cualquier conjunto de puntos intermedios T de P se verifica* $|R(f,P,T) - I_R| < \varepsilon$.

Eisenberg (1994)[64] da a conocer dos ejemplos, en los cuales se constata la prioridad de los alumnos por la resolución analítica de los problemas en lugar de optar por la solución gráfica aunque sea más sencilla e intuitiva. He aquí éstos:

1.- Sea la función $f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<1 \\ |x-2| & si \quad 1\leq x\leq 3 \\ 0 & si \quad x>3 \end{cases}$. Se pide:

a) Representa dicha función.

b) Calcula Prob(X>3/2) siendo X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es *f(x).*

2.- Demuestra que $g(a)(b-a)<\int_a^b g(x)dx<g(b)(b-a)$ siendo *g(x)* una función estrictamente creciente y positiva.

Eisenberg indica que, en la resolución del primer ejercicio, el 92% de los estudiantes dibuja correctamente la función de densidad (figura I.3.1.18). El 89% escribe Prob(X>3/2)= $\int_{3/2}^{3}|x-2|dx$, de éstos, sólo hacen el cálculo correcto de la integral el 44% (39,16% del total), de los cuales, la integral la realizan por métodos de integración el 72% (28,20% del total) frente al 28% (10,96% del total) que la calculan gráficamente, es decir, sumando las áreas de dos triángulos (figura I.3.1.19).

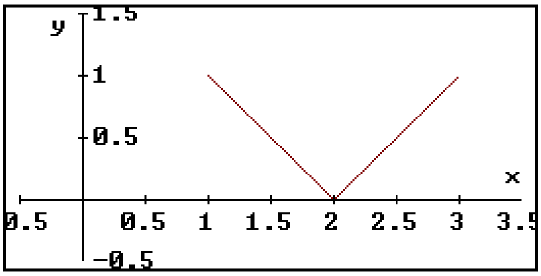


Figura I.3.1.18. Función de densidad f(x).

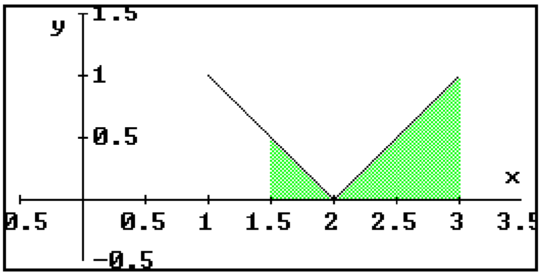


Figura I.3.1.19. Prob (X > 3/2) = $\int_{3/2}^{3}|x-2|dx$

Al resolver el segundo ejercicio este autor constata que la mayoría de los alumnos optó por una solución algebraica en lugar de la gráfica (figuras I.3.1.20, I.3.1.21, I.3.1.22 y I.3.1.23).

[64] Eisenberg, T. (1994). On Understanding the Reluctance to Visualize. *Z.D.M.*, 94(4), pp. 109-113.

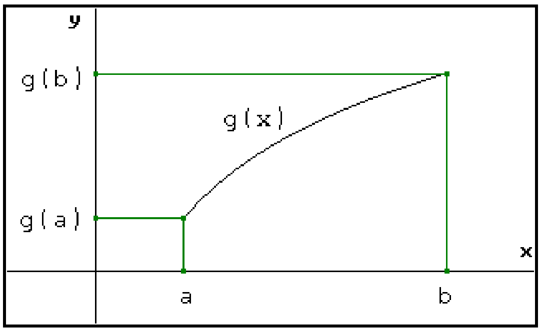


Figura I.3.1.20. Función estrictamente creciente y positiva, g(x).

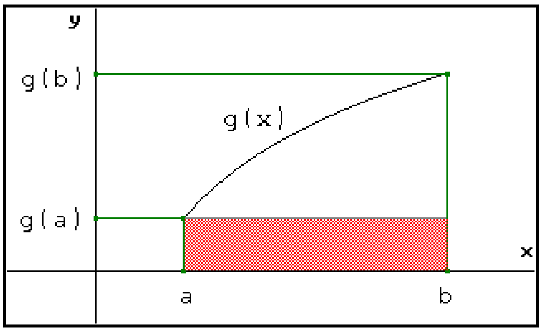


Figura I.3.1.21. Suma inferior, g(a)(b-a).

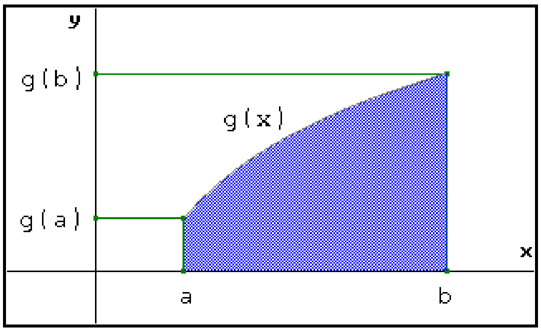


Figura I.3.1.22. $\int_a^b g(x)dx$.

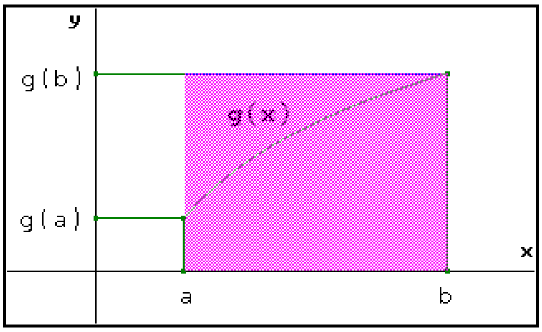


Figura I.3.1.23. Suma superior, g(b)(b-a).

Nosotros pensamos que son poco creíbles estos resultados, puesto que no indica nada Eisenberg acerca de las instrucciones dadas a los estudiantes; suponemos que si en la docencia se hubiese incluido el uso de gráficas en problemas similares a los propuestos, posiblemente, más alumnos las hubiesen utilizado para resolver estos dos ejercicios.

Orton (1983)[65] realizó un estudio sobre la comprensión, de un grupo de estudiantes, de los conceptos relacionados con la integral de Riemann (límites, áreas de figuras planas regulares, aproximación del área bajo una curva, cálculo de integrales definidas y cálculo de volúmenes de revolución), llegando a las siguientes conclusiones[66]:

- El concepto de límite no se ha consolidado suficientemente en etapas anteriores lo cual dificulta la comprensión del concepto integral definida.

[65] Orton, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), pp. 1-14.

[66] Dichas conclusiones están redactadas en términos del autor del esta Memoria, eso sí, respetando escrupulosamente las conclusiones originales de Orton.

- A algunos estudiantes les resulta difícil comprender la integral como el límite de sumas, incluso puede ser poco aconsejable esta introducción si los únicos objetivos se reducen a integrar y responder a cuestiones eminentemente prácticas.
- La disponibilidad de Calculadoras y Programas de Cálculo Simbólico libera a los alumnos de tediosas operaciones y les permita hacer cálculos aproximados de áreas bajo una curva.
- En la introducción del Cálculo Integral, es aconsejable, utilizar diagramas y gráficos.

Siguiendo a Blázquez y Ortega (2001[67], 2002[68]) y coincidiendo con Orton (1983), consideramos que el concepto de límite es muy difícil de consolidar y más la aplicación del mismo definiendo la integral como límite de sumas, por la arbitrariedad de la partición y, por esta razón, es más interesante considerar extremos (superior de sumas inferiores de Darboux e inferior de sumas superiores de Darboux). Por otra parte, pensamos que es necesario el uso de *software* matemático apropiado para realizar integraciones numéricas aproximadas, así como, la utilización de diagramas y gráficos adecuados para una mejor enseñanza-aprendizaje de la integral.

Las investigaciones de **Turégano** (1994)[69], posiblemente, son las que más se acerquen a la nuestra, sin embargo, sus estudiantes eran del Bachillerato correspondiente a la Ley General de Educación (LGE, 1970) y los nuestros son de los Bachilleratos de la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE, 1990)[70] y de la Ley Orgánica de Educación (LOE, 2006). Dada la importancia de sus conclusiones (no incluimos en este momento las correspondientes al uso de los programas de cálculo simbólico, se hará posteriormente), nosotros transcribimos algunas de ellas y seguidamente las comentamos con la información contrastada de otras investigaciones y, de forma muy generalizada, con la nuestra propia.

[67] Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *AULA, vol. 10.* Salamanca. Pp. 119-135.

[68] Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* pp. 67-82.

[69] Turégano, P. (1994). *Los Conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo integral.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

[70] Recuérdese que la investigación práctica se ha realizado con alumnos de Bachillerato LOGSE.

> Hemos encontrado más dificultades en la utilización de la expresión analítica de las funciones que en la visualización de sus gráficos, lo que nos lleva a pensar que estos estudiantes tendrían más dificultades en la comprensión del concepto integral como antiderivada que en el aspecto geométrico de la misma (pág. 219).

Los estudiantes aprenden los procedimientos del cálculo a nivel algorítmico y las imágenes conceptuales son escasas (Dreyfus, 1991), la integral definida debe explicarse mediante la visualización gráfica del área bajo una curva (Poincaré, 1904 y Tall, 1996); es más apropiado introducir en primer lugar el concepto de integral definida y, posteriormente, realizar el cálculo de primitivas (Azcárate y cols., 1996; Artigue, 2003a y Ortega, 2004); además, la integral definida de funciones definidas a trozos es un obstáculo cognitivo (Harel y Kaput, 1991). Nosotros, en nuestra investigación consideramos, y así lo hacemos, que el establecimiento de la integral definida (mediante la visualización de las sumas superiores e inferiores de Darboux) debe preceder al cálculo de primitivas (mediante la tabla de integrales inmediatas y procedimientos generales sencillos, además del cálculo mental para calcular primitivas elementales).

> La introducción de la integral vía su definición geométrica nos ha permitido dar sentido a determinados conceptos del cálculo: sucesión, límite, número real e integral, en un contexto concreto que es el del cálculo de áreas bajo curvas (...) La clave en la evolución del concepto de límite está en presentarles una situación evidente (altura única de un rectángulo) en un marco geométrico-numérico (...) situación que convence al estudiante de que realmente hay un número que mide la altura. La existencia de la integral queda justificada con la existencia de la altura (págs. 247-248).

Orton (1983) constató la dificultad de muchos estudiantes en la comprensión de la integral como límite de una suma, las sumas de Darboux son más interesantes para establecer el concepto de área y las de Riemann para efectuar la integración numérica (Ortega, 2004), creemos que algunos estudiantes llegan a confundir la altura de un rectángulo con la superficie “heterogeneidad de las dimensiones” (Schneider, 1991) por lo que es necesario señalar diferencias y establecer relaciones entre áreas y longitudes (Perrin, 1990) y, por último, los estudiantes universitarios para obtener aproximaciones del área bajo una curva se decantan por el método trapezoidal frente el rectangular (Calvo, 2001). En nuestra investigación hemos optado por la aproximación de las sumas de áreas rectangulares (los estudiantes son bachilleres) pero no hemos utilizado el concepto de límite, puesto que es un conflicto semiótico importante (Contreras y Ordóñez, 2003) y ha sido sustituido por los respectivos extremos superior e inferior de las sumas inferiores y superiores; asimismo, para establecer el concepto de área hemos considerado rectángulos de base y longitud enteras, posteriormente racionales y finalmente irracionales, sin embargo, la consideración de que todo número irracional puede considerarse como límite de una sucesión de números racionales (densidad de Θ en $\Re$) es un obstáculo cognitivo importante para los alumnos.

> Se han identificado tres imágenes asociadas al concepto de integral definida que hemos asignado, al igual que el área, con los apelativos de **primitiva, operativa y descriptiva** (págs. 248-249).
>
> - Un estudiante manifiesta una imagen **primitiva** de la integral si la asocia con la fórmula *(b – a)·h* que le permite calcular áreas de figuras "raras". Corresponde a estudiantes con una imagen primitiva del área y que no han construido una imagen específica de integral ni de área bajo una curva (...) Esto no les permite transferir a otros contextos en el que la resolución del problema pasa por identificar con el área bajo la curva (...)
> - Una imagen **operativa** corresponde a aquellos estudiantes que han construido una imagen mental de la integral, pero como sinónimo de área. No han integrado todos los elementos subyacentes al concepto (...) Efectúan el paso al límite a nivel de percepción visual (...) Pueden calcular el áreas bajo una curvas con $f(x) \geq 0$ y transferir a otros contextos.
> - Una imagen **descriptiva** de la integral corresponde a aquellos estudiantes que pueden dar una descripción verbal de lo que entienden por integral articulando perfectamente la información figural, semántica y simbólica, y consiguiendo integrar en el concepto todos los conceptos subyacentes y los procedimientos de cálculo. Se mezcla en ellos la visión geométrica con la numérica (...) Pueden calcular correctamente cualquier área bajo una curva y transferir correctamente a otros contextos.

Efectivamente, hay estudiantes que saben calcular áreas bajo una curva pero tienen dificultades para transferirlo a otros contextos (Tierney, 1990) y un obstáculo importante es que la derivada del área es la función en el punto (Poincaré, 1904 y Sierpinska, 1987) por eso el TFCI debe establecer inmediatamente después de introducir la integral definida y mediante el teorema del valor medio del cálculo diferencial (Ortega, 2004). El concepto de área requiere una unidad de medida y cuando no es una medida exacta será necesario aproximar (Cabañas y Cantoral, 2007), además, algunos estudiantes consideran que al disminuir la anchura de los rectángulos el área de los mismos se reduce a cero y no pueden sumarse (Scheneider, 1989 y 1991 y Abrahamson, 1998) propone hacer sumas discretas y mediante aproximaciones establecer el TFCI. En nuestro trabajo de investigación realizamos la propuesta de Ortega (2004) e introducimos el TFCI mediante la demostración de Fischer (1983) que verifica todas las funciones de la demostración (DeVilliers, 1990).

> Los estudiantes que parten de la premisa falsa de que el continuo está formado por elementos indivisibles[71] tienen dificultades para reconocer y calcular el área bajo la curva velocidad como el espacio recorrido; no así los que recurren a una relación funcional entre las tres variables: *e=v·t.* Es indudable que el acercamiento a la integral como medida del área de un rectángulo congruente con la región curvilínea permite una transferencia inmediata a esta relación, ya que el tiempo con la base y la velocidad con la altura (pág. 249).

No entendemos a qué se refiere Turégano (1994) al escribir “la premisa falsa de que el continuo está formado por elementos indivisibles”, pensamos que la investigadora le da una acepción distinta a Cavalieri.

Nosotros hemos propuesto, a los alumnos, algún ejemplo en el que se aplica la integral definida en otros contextos distintos al del cálculo de áreas, en concreto en algunos ciclos de la investigación se han resuelto ejercicios en los cuales intervienen las magnitudes: velocidad, espacio y tiempo.

Son importantes otras aplicaciones tales como: las fuerzas ejercidas por dos masas (Artigue, 2003a), el perfil y la pendiente de un terreno (Rouche, 2004) y Cordero (2005) comenta la función acumulación de la integral y nosotros hemos propuesto en este capítulo, no así a nuestros alumnos, la función acumulativa del viajante. Finalmente, en el anexo C del capítulo V de la presente memoria resolvemos varios ejercicios en los cuales se aplica el cálculo integral en otras ciencias distintas a las Matemáticas.

---

[71] La única referencia que hemos encontrado en la Tesis Doctoral de Turégano al concepto de indivisible es: ”Cavalieri opone la de lo invisible, que no es lo infinitamente pequeño y que tiene, rotunda y francamente, una dimensión menos que el objeto estudiado” (pág. 70).

> Este enfoque de la integración favorece la transferencia al contexto probabilístico, ya que, al existir en los estudiantes un sustrato natural intuitivo para la noción de probabilidad, han asociado la medida de los puntos del dominio con su área sin realizar ningún razonamiento explícito, evidentemente (pág. 249).

Es evidente que las teorías de la probabilidad, de la medida e integral están interrelacionadas, incluso se confunden (Bouvier y George, 1984 y Boyer, 1986), sin embargo, en nuestro trabajo de investigación no hemos incluido explícitamente ninguna función de densidad ni función de distribución de probabilidad. Eisenberg (1994) constata la dificultad que tienen los estudiantes para determinar la probabilidad conocida su función de densidad.

Nosotros hemos observado que al explicar la parte correspondiente a probabilidad en segundo de bachillerato de ciencias sociales los alumnos lo consideran independiente del análisis y se sorprenden que la distribución normal N(0,1): $F(x) = P(z \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$ (figura I.3.1.24, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$), sea una aplicación de la integral, quizá por: ser una integral impropia, el extremo superior de integración *x*, la variable aleatoria *z*, la variable de integración *t*, porque la función integrando carece de primitiva y debe efectuarse la integración numérica; constatamos como investigadores que los estudiantes no tienen ningún escrúpulo en recurrir a la correspondiente tabla (algunos de cuyos valores damos en la tabla I.3.1.7) para determinar las probabilidades que se piden en los ejercicios que se proponen.

x	*f(x)*	*F(x)*
-1	0.2419707245	0.1586552539
-0.5	0.3520653267	0.3085375387
0	0.3989422804	0.5
0.75	0.3011374321	0.7733726476
2.09	0.04491477233	0.9816911001
3.94	0.0001698255994	0.9999592591

Tabla I.3.1.7. N(0,1). Algunos valores de las funciones de densidad y de probabilidad.

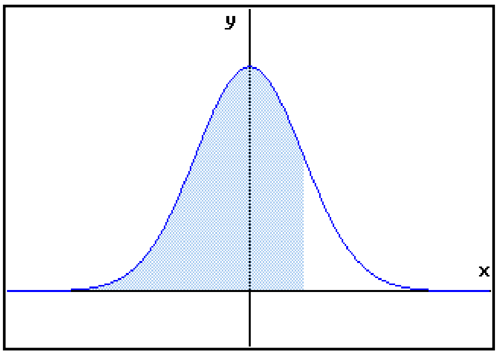


Figura I.3.1.24. Distribución Normal N(0,1).

I.3.2. LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS EN LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Numerosas investigaciones constatan la importancia de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, en particular los programas de cálculo simbólico (PCS); además, en los antecedentes anteriores hemos encontrado a investigadores que hacían referencia al uso de *software* matemático apropiado para la enseñanza-aprendizaje de la integral definida. Exponemos, a partir de este momento, algunas investigaciones específicas en las que de forma relevante intervienen las nuevas tecnologías, sobre todo en los últimos años, en la enseñanza y el aprendizaje de esta parte fundamental del análisis matemático que se conoce como integral definida.

Martín y **Velasco** (2001)[72] estudian las sumas de Riemann con sistemas de cálculo simbólico, en particular *Maple*. Estos autores trabajan diferentes sumas (izquierda, derecha, centro y aleatoria) de Riemann para la función $f(x) = xe^x$ en el intervalo [0,1] tomando 100, 200,..., 2000 subintervalos de amplitudes respectivas 1/100, 1/200,..., 1/2000. Asimismo, calculan las sumas anteriores para la misma función en el intervalo [0,3] y para *"m+1"* nodos equidistantes y obtienen las siguientes conclusiones:

- El Sistema de Cálculo Simbólico *Maple* es capaz de calcular el valor numérico de cualquier suma de Riemann siempre que se especifique la función, el intervalo, la partición y los puntos de evaluación.
- En el ejemplo presentado, [*Maple*] también es capaz de encontrar la expresión del término general de algunas sucesiones obtenidas al tomar como puntos de evaluación los extremos o el centro de los subintervalos originados por particiones equiespaciadas y con malla tendiendo a cero. [Así pues, esto nos permite calcular los límites y al coincidir se obtiene el valor de la integral]. El cálculo directo de la integral sirve para corroborar el resultado.
- La evolución numérica de las sumas inferior y superior de *Riemann* proporciona siempre cotas del valor buscado, pero la convergencia es más bien lenta (...) [Sin embargo, esto nos permite acotar el error cometido al tomar como valor la media de ambas sumas].

[72] Martín, L. J. y Velasco, J. A. (2001). Sumas de Riemann con Sistemas de Cálculo Simbólico. *Suma. Revista sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* 38, noviembre, pp. 47-52.

- Desde el punto de vista docente, las utilidades gráficas, numéricas y simbólicas de los Sistemas de Cálculo Simbólico representan una ayuda inestimable para explicar el concepto de integral de *Riemann*.
- Las posibilidades de experimentar con diferentes situaciones (modificar la función, considerar diferentes intervalos de integración y diferentes particiones para cada intervalo, cambiar los puntos de evaluación, calcular los valores numéricos de las sumas, etc.) (...) permite al alumno descubrir los puntos donde se encuentran las dificultades teóricas y de cálculo de la integral de *Riemann*.

En nuestra investigación (siempre hemos utilizado *DERIVE* como *software* matemático específico) consideramos la función $f(x) = x^2$ y el intervalo [1,3], también, dividimos un intervalo en varios subintervalos de la misma amplitud (consideramos que para tener una percepción visual óptima, el número de nodos de la partición debe ser pequeño y así lo hacemos), representamos y calculamos las sumas inferior y superior de Darboux; no hemos considerado el error que se comete al tomar las aproximaciones de las sumas anteriores; los alumnos entienden gráficamente cada una de las sumas; sin embargo, ninguno de ellos comprueba que los cálculos efectuados por el ordenador coinciden con los valores que se desean calcular. Efectivamente, la aplicación informática utilizada ayuda a los alumnos a comprender el concepto de integral definida. En el último ciclo de nuestra investigación hemos hecho una pequeña práctica del cálculo de sumas inferiores y superiores para subintervalos de distinta amplitud.

La función, elegida por Martín y Velasco, $f(x) = xe^x$ no ha sido posible calcular una primitiva de la misma con alumnos de segundo de bachillerato de ciencias sociales puesto que no se ha explicado la integración por partes.

Llorens y **Santonja** (1997)[73] constatan que existen deficiencias en el aprendizaje del concepto de integral definida en estudiantes de primer curso de carreras científicas, éstas son:

- *Generalmente, los estudiantes identifican "integral" con "primitiva"*. La integral, para ellos, no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico. Es, por tanto, un proceso algebraico. (...) un estudiante puede reconocer distintos métodos de integración e,

[73] Llorens, J. L. y Santonja, F. J. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas, noviembre, vol. 5, nº 1/2,* pp. 61-76.

incluso, saber aplicarlos con cierta soltura (...) y, al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlos al cálculo de un área o ignorar por completo qué son las sumas de Riemann.

- *Las integrales "definidas" se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no pueda aplicarse.* Es decir, el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ representa sólo *un paso más* del cálculo de primitivas, la aplicación de la regla de Barrow. Sólo un 23% de 198 fueron capaces de descubrir el error en la expresión $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2$.
- *No se integra el concepto de área con el de integral.* La interpretación de la integral definida es algebraico-formal frente a la visual-geométrica*.* El 95% de los alumnos no fueron capaces de calcular $\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx$.
- *Se predomina el cálculo excesivo de primitivas en detrimento del concepto de integral definida y sus aplicaciones.*

Estos autores proponen potenciar la visualización, es decir, *explicitar las imágenes de los conceptos*, y sugieren:

- Pasar, sucesivamente, del área de un rectángulo, a la del trapecio mixtilíneo y, posteriormente, a la integral de Cauchy-Riemann.
- El programa de cálculo simbólico *DERIVE* es muy útil para visualizar las sumas de Riemann y al mismo tiempo calcularlas (propone como ejercicio determinar el área encerrada por la gráfica de la función $y=x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=3$).
- La manipulación de *DERIVE* debe hacerse con todas las garantías, como ejemplo erróneo da el resultado $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2$, es aquí donde el estudiante debe precisar que el cálculo ha de ser $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \infty$.
- El Teorema Fundamental del Cálculo debe ser el vehículo que permita comprender la necesidad del cálculo de primitivas.
- No debe abusarse del cálculo de primitivas, deben calcularse algunas con lápiz y papel, además, existen programas informáticos como *DERIVE* que facilitan tal acometido.

- El cálculo de primitivas no debe obstaculizar la comprensión del concepto integral definida y éste será facilitado priorizando el concepto-imagen en lugar del concepto-definición. Las Nuevas Tecnologías son instrumentos válidos y eficaces que ayudan a conseguir estos objetivos.

La función que comentan Llorens y Santonja coincide con la de nuestra investigación, para calcular $\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx$ nos remitimos a Eisenberg (1994) y a la crítica que hicimos en su momento, asimismo, consideramos que debemos conocer la base teórica de los conceptos pues al utilizar *DERIVE* pueden darse resultados erróneos y así lo hemos comprobado con nuestros alumnos. El concepto-imagen, mediante la visualización de sumas inferiores y superiores de Darboux y sumas de Riemann, nos ha permitido consolidar el concepto-definición y, volvemos a confirmar, que el establecimiento del TFCI ha creado la necesidad del cálculo de primitivas (Ortega, 2004).

Artigue (2003b)[74] reflexiona sobre el uso tecnológico y la dialéctica del trabajo conceptual y técnico en la enseñanza de las matemáticas. Considera, esta investigadora, que es otra matemática la que se está realizando y la reconoce como *Génesis Instrumental* que se ocupa del uso de las nuevas tecnologías. Dos direcciones determinan la *Génesis Instrumental*, la primera dirigida hacia la herramienta tecnológica dotándola progresivamente de potencialidad, transformándose eventualmente para las aplicaciones específicas *(instrumentalización)* y la segunda dirigida hacia el estudiante que conduce a la apropiación de los esquemas de la acción instrumentada, ello permite dar respuestas eficaces a las tareas propuestas *(instrumentación)*. Asimismo, a pesar de las dificultades de una integración eficaz de los programas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas, considera positivo la utilización de los ordenadores en el aprendizaje del cálculo pues permite establecer imágenes visuales de los fundamentos matemáticos que enriquecen las imágenes mentales a la vez que hacen de la ciencia matemática una disciplina dinámica y constructiva.

Nuestros alumnos, efectivamente, en las clases impartidas con medios tradicionales (pizarra y toma de apuntes) y realizar ejercicios con la técnica de lápiz y papel, consideran que la matemática es estática, al recurrir al aula

[74] Artigue (2003b). Aprendiendo matemáticas en un ambiente CAS: la génesis de una reflexión sobre la instrumentalización y la dialéctica entre el trabajo técnico y el conceptual. *IREM*. Extraído de la red, el 3 de marzo de 2007, desde http://www.mat.uson.mx./calculadora/artigue.htm

de informática quedan sorprendidos por el dinamismo con el que se construyen los conceptos, así lo hemos constatado, y junto con la diversidad de imágenes les permite adquirir y consolidar nuevos conceptos matemáticos (en este caso los inherentes a la integral definida).

Lois y **Milevicich** (2008)[75], consideran que la algebrización del cálculo diferencial e integral en la enseñanza universitaria es reduccionista puesto que se basa en operaciones algebraicas y pasa de forma simplista sobre los conceptos. Así pues, las dificultades que presenta el aprendizaje del análisis matemático en el primer curso universitario pueden atribuirse a:

- El predominio del formalismo en la exposición de los conceptos y la ausencia del enfoque geométrico. Los alumnos no logran comprender el concepto de integral definida de una función como el área bajo una curva, pues no visualizan cómo se construye por medio de sumas, generalmente de Riemann.
- Los profesores enseñan el concepto de forma expositiva, eludiendo obtener aproximaciones más precisas.
- El abordaje simplista y sin aparente conexión con las aplicaciones de la integral definida obstaculiza la comprensión y resolución de problemas referidos a área, volúmenes, longitudes de curvas, fuerza hidrostática, trabajo, presión, centros de masa, etc.
- El uso del ordenador en el aula, como recurso didáctico, facilita la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral puesto que coordina distintos registros de representación del concepto.
- La enseñanza de las matemáticas requiere una inmersión de las dificultades del pasado, el ordenador y los programas de cálculo simbólico son herramientas que permiten simular tales situaciones y facilitan la comprensión del concepto.

Corroboramos las conclusiones de estos autores, efectivamente, en el presente trabajo de investigación, al exponer primero la integral definida mediante métodos tradicionales, los alumnos ven ciertas incoherencias y aprecian los diferentes pasos poco interrelacionados que conducen a unos resultados muy artificiosos. Posteriormente, al exponer los conceptos con

[75] Lois, A. E. y Milevicich, L. M. (2008). La enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Integral desde la perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación, nº 47/5, noviembre*. Edita: Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Pp. 1-15.

apoyo informático, mediante imágenes y cálculos de sumas de Riemann, ellos mismos construyen la integral definida y son protagonistas directos y activos de la adquisición del concepto, además, la proverbial pasividad del alumnado en la clase magistral queda sustituida, en el aula de informática, por una desbordante actividad (incluso precipitada) de los estudiantes que pretenden conocer los diferentes valores de las sumas sin comprobar absolutamente nada y teniendo una fe ciega en el ordenador; en consecuencia, el profesor en muchas ocasiones debe obligarles a reflexionar sobre lo que está ocurriendo y por qué.

Heid (2002)[76], considera que los programas CAS (computer algebra system) constituyen una tecnología cognitiva que facilita el acceso de los estudiantes a procesos de pensamiento matemático de un nivel más alto y les permite generar y manipular expresiones simbólicas con el consiguiente ahorro de tiempo y trabajo. Los CAS actúan como amplificadores y reorganizadores, por tanto, permiten extender el currículo y ampliar los tópicos que se trabajan habitualmente, asimismo, como tecnología cognitiva es reorganizadora y actúa cambiando la naturaleza y organización del currículo. También se constata la influencia en las teorías de la representación en el aprendizaje de las Matemáticas.

Aunque Heid no propone ningún tema o concepto en el cual se haya utilizado las CAS, nosotros pensamos que, efectivamente al exponer la integral definida mediante *DERIVE*, el *software* matemático ayuda a los estudiantes a adquirir y consolidar su propio pensamiento matemático; eso sí, no sólo sirve manipular los programas informáticos, además, es necesario trabajar con lápiz y papel y otros registros que fortalezcan el saber matemático de los alumnos.

De nuevo, por las razones aducidas anteriormente, recurrimos a las investigaciones de **Turégano** (1994, págs. 218-220 y 247-249), no obstante, ahora hacemos hincapié en las conclusiones de esta autora en la utilización de las nuevas tecnologías para la enseñanza-aprendizaje de la integral definida, éstas son:

[76] Heid, M. K. (2002). How theories about the learning and knowing of mathematics can inform the use of CAS in school mathematics: One perspective. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education,* 9(2), pp. 95-112.

- Casi la totalidad de los estudiantes ha aprendido con la ayuda del ordenador a calcular áreas bajo curvas, (...) algunos lo hacen de forma instrumental.
- Hemos constatado que el ordenador se puede considerar como uno de los elementos más motivadores para el aprendizaje. No se puede ni se debe obviar esta poderosa herramienta en los procesos educativos actuales y, de forma muy especial, en los cursos de cálculo introductorio.
- Los modelos visuales en la enseñanza del cálculo y la eliminación de cálculos algebraicos (mediante el uso del ordenador) favorecen la formación y transformación de intuiciones y la creación de imágenes de concepto que ayudarán posteriormente a la formalización de los conceptos del cálculo infinitesimal.
- El uso del ordenador permite que el estudiante pueda simultanear todos los aspectos psicológicos que se ponen en juego para el aprendizaje de las matemáticas: abstracción, representación, formación de conceptos, inducción y visualización.

En nuestra investigación, llevada a cabo con alumnos de bachillerato, confirmamos que es aconsejable utilizar *software* adecuado para hacer cálculos aproximados (Orton, 1983), el uso de los ordenadores favorece la creación de imágenes del concepto que ayudan posteriormente a la formalización del concepto de integral definida (Dubinsky, 1996), incluso, el saber adquirido con estos medios, se consolida y permanece más tiempo en la cultura matemática de cada estudiante.

Camacho (2005)[77] en una investigación realizada, en la Universidad de la Laguna, durante el curso 2001-2002 con estudiantes a los cuales se les explicó la integral, utilizando *DERIVE,* concluye, entre otras cosas, que:

- *DERIVE* constituye un amplificador del currículum desde el momento que es utilizado para que los estudiantes desarrollen un conjunto de Prácticas de Laboratorio para introducir y establecer el concepto de Integral Definida usando métodos de aproximación que no se encuentran en el currículo de Cálculo I de las carreras de Ingeniería.
- *DERIVE* como reorganizador del currículum se optó por presentar en primer lugar el concepto de Integral Definida, como un área, frente al cálculo de

[77] Camacho, M. (2005). La enseñanza y el aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (computer algebra system). *Investigación en Educación Matemática*. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática. SEIEM.* Córdoba. Pp. 97-110.

primitivas. Este proceso es el inverso al que se suele realizar en la exposición tradicional de estos temas.

- *DERIVE*, por medio de sus capacidades, constituye un entorno de trabajo privilegiado y favorece las conexiones entre las distintas representaciones.
- El Módulo Instruccional utilizado se subdividió en tres partes:
    - Práctica I: Se realizan cuadraturas de la región que queremos calcular resaltando los aspectos gráficos mediante construcciones progresivas de rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (Simpson).
    - Práctica II: Se presentó al estudiante un resumen del desarrollo gráfico expuesto anteriormente y se introduce el aspecto numérico calculando las diferentes aproximaciones del área mediante las sumas de las diferentes regiones visualizadas previamente.
    - Se incluyeron diferentes problemas cuya resolución con *DERIVE* exigía aplicar los conocimientos teórico-prácticos expuestos en las clases habituales y en el aula de Informática.

La investigación de Camacho (2005), realizada con estudiantes universitarios es similar a la nuestra, incluso hemos planteado la secuenciación propuesta por este investigador priorizando los conceptos de área e integral definida sobre los cálculos de primitivas (Llorens y Santonja, 1997 y Ortega, 2004); nuestros métodos de aproximación se han realizado por medio de rectángulos y coordinando los aspectos gráficos y algorítmicos mediante la utilización de *DERIVE.*

González-Martín (2006)[78] en su tesis doctoral, investigación realizada en la enseñanza superior, expresa la ventajas de la utilización de los programas de cálculo simbólico (PCS) en los siguientes términos:

- Se libera al estudiante de la realización de cálculos molestos por lo que los PCS ofrece oportunidades para concentrarse en la estrategia de resolución de problemas y en la construcción de conceptos.
- Afecta a la relación entre conceptos y habilidades y permite *resecuenciar*, prestando más atención a los conceptos que a los algoritmos, puesto que los PCS se encargan del trabajo computacional y los alumnos se sienten más seguros ya que les ayudaba a concentrarse en los conceptos y en el

[78] González-Martín, A. S. (2006). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje.* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

proceso global de resolución de problemas, por tanto, aprender con las nuevas tecnologías permite hacer énfasis en la comprensión conceptual y considerar los cálculos como un medio y no un fin.

- Incremento en la eficiencia y una reducción en el tiempo empleado en los cálculos algebraicos.

Depool (2004)[79] en su tesis doctoral (realizada con estudiantes de primer curso de ingeniería) llega, entre otras, a las siguientes conclusiones:

- DERIVE facilitó el trabajo de los alumnos para el estudio del concepto de Integral Definida al permitir que visualizaran los procedimientos aproximados así como los cálculos pues de lo contrario, con lápiz y papel, les resultaría demasiado laborioso, complicado y difícil de entender.
- La creación de un Programa de Utilidades por parte del autor permitió a los alumnos formar una imagen del concepto de Integral Definida más flexible ya que observan paso a paso el proceso de construcción de la integral como área y enlazar con el conocimiento de los procesos algorítmicos con los que los estudiantes están más familiarizados.
- El PCS y las exposiciones magistrales en clase son complementarios pues acercan procedimientos teóricos de las clases con la visualización y los cálculos de las prácticas de informática, por tanto, la motivación hacia el trabajo matemático fue alta e incluso se vio incrementada después de la instrucción, tal vez, el trabajo combinado de clases habituales y prácticas de laboratorio con ordenadores motiva a los estudiantes.
- Las clases de laboratorio con PCS permiten y, además se aconseja, que los alumnos discutan por grupos los resultados obtenidos pues ello redunda en una mejor comprensión del concepto.
- La mayoría de los estudiantes son capaces de utilizar los sistemas de representación asociados al concepto de integral definida según la organización adquirida anteriormente del concepto de área de figuras planas, lo cual supone que el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo.
- Algunos estudiantes perciben el cálculo de la integral definida como la aplicación de un procedimiento algorítmico sin preocuparse del contexto del problema.

[79] Depool, R. A. (2004). *La enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS).* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

- Hay estudiantes con una clara predisposición al uso de *DERIVE*, reconocen que el cálculo de las integrales va más allá de la aplicación de una fórmula y los PCS pueden visualizar los procedimientos de cálculo de la integral de Riemann; es evidente que entienden la relación entre área y el concepto de Integral Definida.
- La facilidad de trabajo con los registros gráficos que brinda el ordenador constituye una forma importante de interacción, facilitada por la posibilidad de seguir paso a paso los procesos de resolución y poder cotejar en todo momento los resultados.

Tanto González-Martín como Depool llegan a conclusiones muy interesantes y pensamos que debemos interrelacionarlas con la presente investigación, he aquí los puntos que consideramos más importantes:

1. La visualización mediante el registro gráfico adquiere una importancia capital en la consolidación del concepto, por tanto, en nuestro trabajo y con apoyo de *DERIVE* no consideramos que lo visual es más difícil de enseñar ni que no es matemático (Dreyfus, 1991; Eisenberg, 1994); es más, nuestros estudiantes son partícipes muy activos de su propio aprendizaje.
2. La aproximación de la integral definida mediante el cálculo de áreas se constata que es eficaz y ello queda facilitado por los cálculos efectuados mediante los PCS liberando a los alumnos de tediosas operaciones de lápiz y papel. Sin embargo, los estudiantes consideran que los resultados del ordenador son incuestionables y no realizan ningún cálculo aproximado.
3. Discriminar los conceptos de área e integral definida exige de los alumnos una comprensión de los conceptos que muchos de ellos (bachilleres) no consiguen alcanzar; tienen dificultades en los cálculos de áreas determinadas por funciones definidas a trozos y funciones dadas en valor absoluto, el eje de abscisas y dos rectas verticales.
4. El material didáctico empleado por estos investigadores y nosotros mismos son las clases tradicionales (magistrales) y los PCS (para facilitar la comprensión de los estudiantes, incluso, el profesor investigador ha creado un pequeño programa de utilidades), combinando ambas técnicas, los alumnos tienen una alta motivación y son sujetos activos de su propio aprendizaje.

I.3.3. CÁLCULO MENTAL

Gómez (1994[80], 1998[81]) y **Ortega** y **Ortiz** (2002)[82], entre otros autores, defienden el uso del cálculo mental en educación matemática. Para estos investigadores el *cálculo mental* es una forma de calcular con datos exactos que se caracteriza por no tener ayuda externa, siendo sólo con la mente. En las dos tablas siguientes recogemos las características de los cálculos escrito y mental (tabla I.3.3.1, según Gómez) y los tipos de cálculo mental (tabla I.3.3.2, según Ortega y Ortiz).

Cálculo escrito	Cálculo mental
Escribe, utiliza, generalmente, lápiz y papel.	*De memoria,* no se puede utilizar lápiz y papel ni ningún otro dispositivo.
Abreviado, oculta pasos relacionados con las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva.	*Rápido,* no debe considerarse como prioridad principal, se adquiere esta habilidad con la práctica continuada.
Automático, no necesita ser comprendido para ser ejecutado.	*Variable,* se pueden seguir diferentes caminos para la resolución de un mismo problema.
Simbólico, se manipulan símbolos sin referencia al mundo real.	*Flexible,* se busca sustituir o cambiar los datos iniciales por otros más cómodos, más fáciles de calcular.
Analítico, las cifras se manipulan separadamente.	*Activo,* la persona que calcula elige la estrategia que desea utilizar.
Confiable, siempre se utiliza el mismo algoritmo para el mismo tipo de ejercicios.	*Constructivo,* las respuestas se van construyendo con resultados parciales que se resumen para obtener el resultado final.

Tabla I.3.3.1. Principales características de los cálculos escrito y mental (Gómez, 1998).

[80] Gómez, B. (1994). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo y los procesos cognitivos involucrados en los errores que cometen los estudiantes al aplicarlos.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

[81] Gómez, B. (1998). *Numeración y cálculo.* Madrid: Síntesis.

[82] Ortega, T. y Ortiz, M. (2002). *Cálculo mental.* Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid.

Tipos de cálculo mental	Características del cálculo mental
Cálculo mecánico o de estímulo-respuesta.	Conlleva el empleo de una técnica automática; existiendo el riesgo de que cuando no se utiliza tiende a olvidarse rápidamente.
Cálculo reflexivo o pensado.	Sobre todo se caracteriza porque cada vez el cálculo es nuevo, de forma que el que lo utiliza usa determinadas estrategias, que pueden ser originales, tratando de relacionar al mismo tiempo que efectúa los cálculos, los números y las operaciones. Todo esto implica una reflexión que conlleva toma de decisiones y elección de la estrategia más adecuada. Para este tipo de cálculo se requieren ciertas habilidades, como: conteos, recolocaciones, compensaciones, descompensaciones, manejo de tablas, etc. que sirven para poder alterar los datos iniciales y de esta forma trabajar más cómodamente con otros más fáciles de calcular.

Tabla I.3.3.2. Tipos y características del cálculo mental (Ortega y Ortiz, 2002).

Tanto Gómez como Ortega y Ortiz opinan sobre la implantación del cálculo mental, entre otros puntos, lo siguiente:

- Su metodología puede dar una visión participativa de las Matemáticas.
- Puede influir en el desarrollo de capacidades como la versatilidad e independencia de los procedimientos, la reflexión para decidir y elegir, la confianza en el cálculo aritmético y la capacidad de concentración.
- Los programas de cálculo mental producen mayores avances que cuando se usan sólo los textos.
- Existe una relación positiva entre la habilidad en cálculo mental y la habilidad general en aritmética.
- Los niños (alumnos de primaria) están motivados en todos los casos, la respuesta del alumnado es excelente y no se cansan.
- Se recomienda continuidad, cuando no la hay se producen retrasos.
- El tiempo “perdido” en la práctica del cálculo mental se gana en otros momentos.
- Es conveniente tener presente a los alumnos que van más retrasados.
- El tiempo dedicado, diariamente, debe estar en torno a los cinco minutos.

Las investigaciones de estos autores sobre el cálculo mental se restringen al cálculo metal numérico, sin embargo, no tiene por qué ser éste el único campo en el que se enseñe a los alumnos el cálculo mental. Nosotros, en nuestra investigación pensamos que el cálculo de primitivas es un buen ejercicio para desarrollar las capacidades de los alumnos de bachillerato en cálculo mental; las primitivas que se calculan por esta técnica son inmediatas, sin embargo, a los alumnos les exige prestar máxima atención, estar muy concentrados y saber con soltura las tablas de derivadas e integrales que aparecen en cualquier libro de texto de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales.

Reys (1984), citado por **Segovia** y **Castro** (2009)[83], da cinco razones para defender el cálculo mental en la escuela, éstas son:

- Es un prerrequisito para el desarrollo de la aritmética escrita.
- Es un promotor para el conocimiento de las estructuras de los números y sus propiedades.
- Es un promotor de la creatividad, del conocimiento independiente e incita a los estudiantes a tener ingenio con los números grandes.
- Contribuye a la mejora en la resolución de los problemas.
- Es una base para el desarrollo de técnicas de cálculo estimativo.

Aunque la mayor práctica docente del cálculo mental suele establecerse en la educación primaria y en el primer ciclo de educación secundaria obligatoria, no es menos cierto que, a lo largo de la vida todas las personas nos vemos abocadas en infinidad de ocasiones a realizar cálculos aproximados o estimaciones (el cálculo estimativo, según Reys, es la habilidad para llevar a cabo un cálculo numérico del cual se obtiene una respuesta aproximada, utilizando únicamente procedimientos mentales, es decir, sin el uso de lápiz y papel o cualquier otro dispositivo de cálculo o registro).

Tanto Reys como otros investigadores, entre los que destacamos **Cortés (**2001)[84] y **Cortés**, **Backhoff** y **Organista** (2004[85], 2005[86]) dan las siguientes características de los alumnos considerados buenos estimadores, éstas son:

[83] Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, nº 17, vol. 7(1), pp. 499-536.

- Entendimiento del concepto de estimación lo que permite que el estudiante se sienta cómodo trabajando con cierto error.
- Confianza del estudiante en sí mismo.
- Selección rápida entre varias estrategias.
- Rapidez con que recuerdan resultados básicos para todas las operaciones.
- Buena percepción del valor posicional para las diferentes operaciones.
- Manejo de los datos mentalmente.
- Habilidad para el ajuste de estimaciones.
- Rápido y eficiente uso de los cálculos mentales para producir una información numérica precisa con la cual formular estimaciones.
- Uso de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de los números.
- Los mejores alumnos expresaron que sí estiman los resultados y además lo hacen con agrado y por costumbre, por ejemplo, cuando hacen compras. Además, obtienen excelentes resultados académicos en Matemáticas.

En nuestro trabajo de investigación realizamos expresamente el cálculo mental y puntualmente el cálculo estimativo de áreas, sin embargo, insistimos que el cálculo de primitivas elementales exige gran fluidez de ideas y agilidad mental para determinarlas; además, en una primera aproximación debe "estimarse" la posible solución de la función integrando. Asimismo, calcular áreas comprendidas entre una función, el eje de abscisas y las rectas *x=a* y *x=b*, en multitud de ocasiones exige ser crítico con las respuestas obtenidas con lápiz y papel o por medios informáticos, sean los ejemplos:

- $\int_0^1 x^2 dx = \left[x^3\right]_0^1 = 1$. Si los estudiantes que cometen este error representan gráficamente o mentalmente las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x$, es evidente que $f(x) \leq g(x)$ en el intervalo [0,1], además,

[84] Cortés, J. (2001). *Análisis de las estrategias del cálculo estimativo que utilizan los estudiantes de 2º de secundaria en Baja California.* Tesis de Maestría en Ciencias Educativas. Ensenada: UABC. México.

[85] Cortés, J., Backhoff, E. y Organista, J. (2004). Estrategias del cálculo mental utilizadas por estudiantes del nivel de secundaria en Baja California. *Educación Matemática*, vol. 16, nº 1, abril. México: Santillana. Pp. 149-168.

[86] Cortés, J., Backhoff, E. y Organista, J. (2005). Análisis de las estrategias del cálculo estimativo en escolares de secundaria considerados buenos estimadores. *Revista Mexicana de Investigación Educativa (REMIE)*, vol. 10, nº 25. México. Pp. 543-558.

$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ u^2 puesto que es el área de un triángulo de base y altura la unidad, por tanto, $\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ u^2.

- Calcular áreas comprendidas entre una función $h(x)=x^3$, el eje de abscisas y las rectas $x= -1$ y $x=1$; el cálculo $\int_{-1}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ lo realizan algunos alumnos. Para evitar este error bastaría que consideraran, mentalmente, que la función $h(x)=x^3$ es impar o simétrica respecto del origen de coordenadas, por tanto, el área es $\int_{-1}^1 \left|x^3\right| dx = 2\int_0^1 x^3 dx = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ u^2.

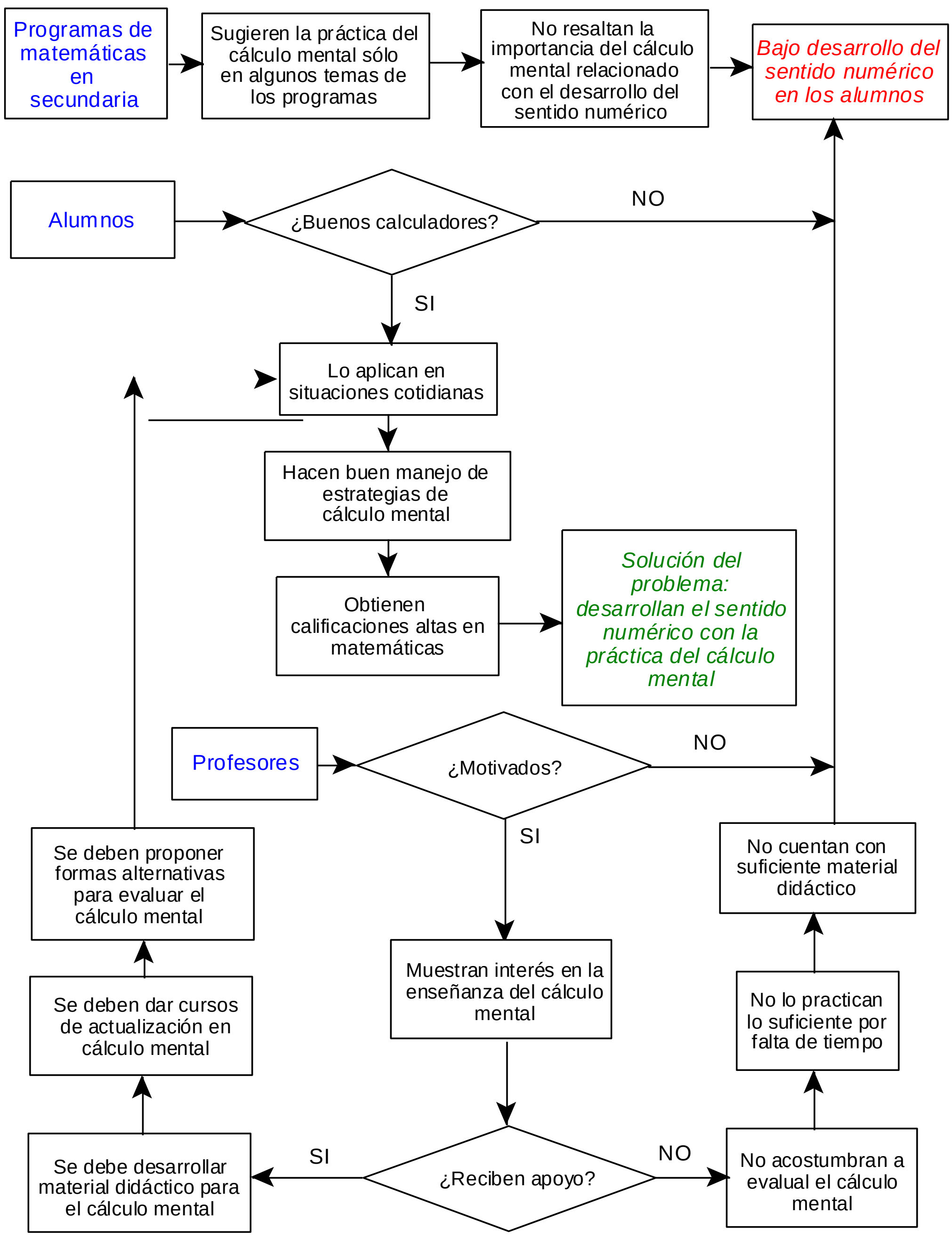
Hemos comentado que, en algunos momentos, se ha realizado el cálculo estimativo para hallar áreas de superficies planas y ello es debido a que en la presente investigación se ha detectado que algunos estudiantes no consideran válida la solución del área de una superficie en forma fraccionaria o radical y, por tanto, la multiplican por el denominador o la elevan al índice de la raíz[87], nosotros, para hacer comprender a dichos alumnos que estaban en el error hemos tomado las opciones de comparar funciones integrando o "estimar" superficies mediante tramas cuadriculadas. Así pues, estamos de acuerdo con la siguiente reflexión:

> La geometría plana elemental puede jugar un papel fundamental en la introducción y desarrollo de la integral definida. En concreto, la determinación de cálculos aproximados aporta información de control sobre la actividad matemática que contribuye a la resolución de conflictos semióticos (Contreras y cols., 2010, pág. 378).

Terminamos el cálculo mental con el organigrama propuesto por Cortés (2001, pág. 89) en el cual intervienen los alumnos, el profesor y la administración educativa. Creemos que es ilustrativo e importante en la educación secundaria para el desarrollo y la consolidación del cálculo mental (estimativo) en el aula y, consecuentemente, sea aplicado en multitud de situaciones en las que han de encontrarse los alumnos a lo largo de su vida.

---

[87] Así, por ejemplo, si las áreas son A_1=4/3 u^2 o $A_2=\sqrt{5}$ u^2, la primera la multiplican por 3 y la segunda la elevan al cuadrado, y escriben: A_1=4 u^2 y A_2=5 u^2.



Organigama I.3.3. Ambiente detectado alrededor del cálculo mental (estimativo) en educación secundaria.

I.3.4. DIFICULTADES EN LA ADQUISICIÓN DEL SABER MATEMÁTICO (CONCEPTO INTEGRAL DEFINIDA), EN EL USO DE LOS PROGRAMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO Y EN EL CÁLCULO MENTAL

Consideramos que este epígrafe es importante puesto que en él se da una visión generalizada de las dificultades que tienen los profesores y alumnos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (particularmente en el análisis matemático y, dentro de él, el tema de la integral). En el momento actual, los estudiantes, en general, consideran que las nuevas tecnologías son incontestables y sus resultados son dogmáticos, es ahora cuando la labor del profesor se considera imprescindible para que los alumnos sean críticos con los resultados obtenidos por medios informáticos y no los acepten *per se.* Por último, las calculadoras y los ordenadores liberan a los profesores y estudiantes de la realización de operaciones más o menos complejas, sin embargo, ello no exime del cálculo mental, exacto o estimativo, para evitar posibles errores en la manipulación de estos instrumentos.

El profesor e investigador Miguel de **Guzmán** (1996), citado por Lois y Milevicich (2008), considera que:

> La matemática es una ciencia intensamente dinámica y cambiante de manera rápida y hasta turbulenta en sus propios contenidos y aún en su propia concepción, aunque más lentamente. Ello sugiere que los investigadores y docentes deben permanecer atentos a los cambios y a la realidad dinámica mutante, los contenidos visuales y representaciones geométricas juegan un papel esencial en esta ciencia.

Este autor pretende justificar la importancia de *visualizar* en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas pues está relacionado con las diferentes representaciones del concepto que son favorecidas por medio del papel o pantalla del ordenador. Guzmán hace una breve exposición epistemológica del cálculo infinitesimal y considera que a través de los tiempos una fuente de inspiración ha sido la visualización, ésta es:

- Una primera aproximación a los problemas del infinito tuvo lugar en Grecia, siglo V a. C., a partir de los problemas de inconmensurabilidad. Arquímedes, siglo III a. C., propone un proceso heurístico para calcular áreas, volúmenes y centros de gravedad.

- En el siglo XVII, apoyándose en los conocimientos clásicos, el álgebra simbólica y la geometría analítica junto con la variabilidad y el concepto de infinito permitió la explosión de la matemática infinitesimal.
- Científicos de primer orden utilizaron diferentes métodos: geométricos Cavalieri y Barrow; analíticos: Descartes, Fermat y Wallis.
- Dos científico excepcionales: Newton y Leibniz son considerados los descubridores del cálculo infinitesimal.
- Desde mediados del siglo XIX se impuso la corriente formalista que rechazaba la visualización como herramienta de demostración y análisis, a partir de este momento se consideró irrelevante la intuición y fue muy lenta la evolución del pensamiento geométrico. Hasta hace pocas décadas se consideraba que las matemáticas no son visuales.
- La vuelta de la enseñanza al espíritu geométrico es una necesidad que consideran la mayoría de los investigadores y docentes, pero, ¿cómo?

La investigación que llevamos a cabo no desdeña la visualización, es más, la exposición algebraica del concepto junto con los gráficos obtenidos con medios informáticos ayudan a la adquisición del concepto de integral definida por parte de los alumnos. Pensamos que el *software* matemático, en particular aquél que visualiza-grafica las funciones y las sumas de Riemann, es una herramienta importante por el dinamismo de las representaciones y la precisión de los cálculos que reduce considerablemente el tiempo si se realizaran con lápiz y papel y se eliminan los frecuentes errores cometidos manualmente, por tanto, no se desvía la atención en el objetivo último que es la comprensión y el aprendizaje del concepto objeto de nuestra investigación. Así lo hemos realizado en el presente trabajo y se ha procurado mantener un equilibrio entre la formalización algebraica y la visualización de la integral definida.

Blázquez (1999, págs. 17-19)[88], citando a Macnab y Cummine (1992), señala como dificultades propias de las matemáticas a:

- Inicialmente las matemáticas surgen de un contexto concreto que luego debe pasar a un proceso de abstracción.
- Las ideas matemáticas son complejas y los profesores con demasiada frecuencia recurren a la autoridad.

[88] Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

- La naturaleza jerárquica de las matemáticas no debe trasladarse a la secuencia de la enseñanza, en ocasiones, es aconsejable cambiar de tema para captar el interés de los alumnos.
- La incapacidad de seguir un argumento lógico es la causa de muchas dificultades y hace que no puedan comprenderse las matemáticas.
- Muchos alumnos confunden la notación formal con el concepto.
- Los algoritmos pueden confundir a los alumnos cuando son demasiado complejos y pueden influir negativamente en el razonamiento matemático.
- Las variables pueden causar confusión a los alumnos por ser introducidas en contextos en los que el propósito no es evidente.
- Los conceptos espaciales se apoyan en representaciones visuales que muchos alumnos no las tienen suficientemente desarrolladas.

Aunque Blázquez no hace ninguna referencia a la integral definida, nosotros constatamos en nuestra investigación muchas de las dificultades expuestas por esta investigadora. En efecto, por comentar alguna de ellas, la secuencia sumas inferiores-superiores de Darboux, el extremo superior-inferior de las sumas anteriores y la definición de integral definida cuando coinciden los dos extremos anteriores es difícil de entender para muchos alumnos, si a eso añadimos las notaciones, el escollo es insalvable para algunos estudiantes.

Brousseau (1983)[89] menciona que el error no es, en muchas ocasiones, el resultado de la ignorancia o de la duda, también puede surgir cuando el conocimiento anterior tuvo éxito y ante los avances resulta ser inadaptado e insuficiente. Los obstáculos cognitivos forman parte del conocimiento y, este autor, los clasifica según su origen en:

- *Ontogénicos*, son debidos a las limitaciones del estudiante en el momento de su desarrollo.
- *Didácticos*, son los que dependen de un proyecto educativo concreto.
- *Epistemológicos*, son los de la naturaleza propia del conocimiento, es decir, los correspondientes al concepto.

Brousseau afirma que las características de los obstáculos son:

- Los errores producidos son resistentes a la corrección, es decir, no son esporádicos, suelen repetirse sistemáticamente en situaciones análogas.

[89] Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4(2)*, pp. 165-198.

- Se trata de un conocimiento, nunca de su ausencia, y puede ser incorrecto o incompleto pero no incoherente.
- Es un conocimiento que genera respuestas correctas para un determinado tipo de problemas, asimismo, dicho conocimiento genera respuestas incorrectas o erróneas en la resolución de problemas que resultan de la ampliación de los anteriores.

El conocimiento de los alumnos ha generado respuestas correctas cuando se calcula el área determinada por la gráfica de una función continua y positiva *ƒ(x)*, el eje de abscisas y las rectas *x=a* y *x=b,* basta con hallar $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, siendo *F'(x)=ƒ(x).* Ahora bien, uno de los errores más persistentes que hemos detectado en el alumnado, es aquél en el que si *g(x)* es una función continua que cambia de signo en el intervalo [*a,b*] y se desea calcular el área determinada por la gráfica de la función *g(x)* el eje de abscisas y las rectas *x=a* y *x=b,* algunos estudiantes, realizan el cálculo $\int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a)$, donde *G'(x)=g(x)*; es evidente que, esos alumnos, confunden los conceptos de área e integral definida y no tienen en cuenta los subintervalos en los cuales la función es positiva y en los que es negativa*.* El error persiste cuando las funciones están definidas a trozos, por ejemplo, sea la función $h(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$, calcular el área determinada por la gráfica de la función *h(x)* el eje *OX* y las rectas *x=0* y *x=2,* algunos alumnos, realizan el cálculo $\int_0^2 h(x)dx = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}u^2$, este error, muy habitual, conlleva la dificultad de la adquisición del concepto de función definida a trozos, en este caso, la deficiente visualización de la función *h(x)* y la falta de estimación del posible valor de ese área, puesto que, dicha superficie está incluida en la de un triángulo de base dos y altura uno, por tanto, el área pedida debe ser inferior a una unidad cuadrada.

Contreras y **Ordóñez** (2005)[90] analizan los significados personales de un grupo de dieciséis estudiantes de segundo curso de bachillerato, en torno al concepto de integral definida, según las respuestas dadas por dichos alumnos. Estos autores, previamente a la exposición de las cuestiones correspondientes y el análisis de los resultados, definen los siguientes conceptos:

- La *función semiótica* se entiende como la correspondencia entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.
- El *conflicto semiótico* es toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa (Godino, 2002, pág. 258).
- El *análisis ontológico-semiótico* de un texto matemático es su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos (Godino, 2003, pág. 155).

Tres cuestiones[91] son las que proponen a los estudiantes éstas, junto con sus conclusiones, son:

Cuestión 1. De las siguientes expresiones:

$$a)\ \int_a^c f(x)dx\,,\quad b)\left|\int_a^c f(x)dx\right|,\quad c)\ \int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx\quad y\quad d)\ \int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

determina cuál o cuáles de ellas, nos dan el área de la gráfica de f y el eje de abscisas.

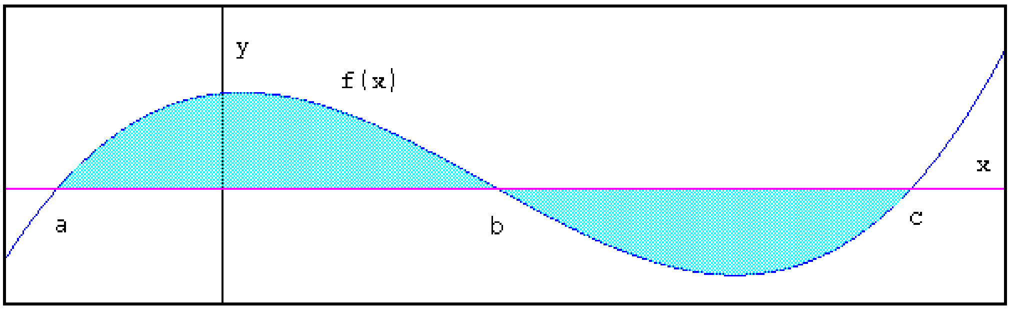


Figura I.3.4.1. Área encerrada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas.

[90] Contreras, A. y Ordóñez, L. (2005). Análisis de significados personales de los estudiantes acerca de la integral definida. *Grupo de investigación: Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. IX Simposio SEIEM*. Córdoba. Pp. 1-14,

[91] En realidad, las denominan: Cuestión 2, Cuestión 5 y Cuestión 4. Nosotros las reconocemos en el mismo orden por: Cuestión 1, Cuestión 2 y Cuestión 3.

Considerando las proposiciones falsas (PF1: la integral definida nos proporciona el área; PF2: basta tomar el valor absoluto para obtener el área; PF3: se verifica la propiedad $\left|\int_a^c f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \left|\int_b^c f(x)dx\right|$ y PF4: basta tomar los puntos de corte para que la integral nos dé el área por sí misma). Los porcentajes (alumnos) que responden a cada proposición falsa, respectivamente, son: 6,25% (1), 12,5% (2), 25% (4) y 12,5% (2).

Los conflictos semióticos, sus porcentajes y alumnos que los tienen son:

- Propiedades falsas el 56,25% (9).
- Integral definida, toman las áreas fuera de los intervalos, el 12,5% (2).
- Asociado al concepto de opuesto, el alumno responde: *"d) no puede ser cierta porque tiene delante un signo negativo y, sin embargo, debe ser positiva por ser un área",* el 6,25% (1).

Cuestión 2. Un coche de Fórmula 1 se queda sin propulsión debido a una rotura del embrague. Se estima que a partir de ese momento (t=0) su velocidad en metros por segundo, viene dada por la fórmula $v = 80 - 0{,}05t^2$, cuya gráfica puedes comprobar que es la de la figura adjunta[92].

- ¿Qué distancia habrá recorrido a los 20 segundos?
- ¿Qué distancia recorre entre los 20 y los 40 segundos?
- ¿Qué distancia recorrerá hasta pararse?

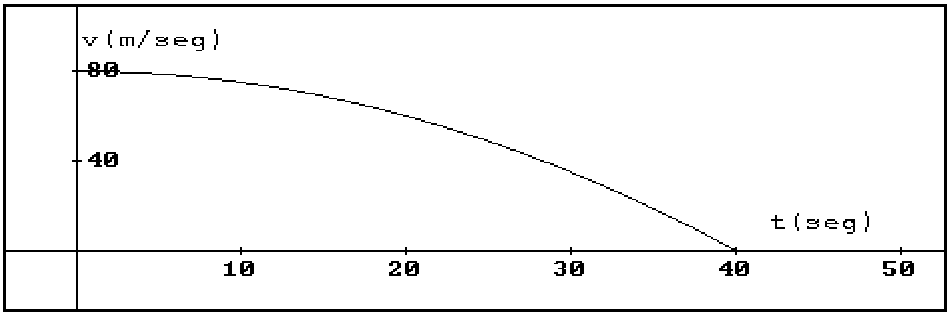


Figura I.3.4.2. Gráfica de la función velocidad $v(t) = 80 - 0{,}05t^2$.

El 31,25% (5) de los alumnos utilizan correctamente la aditividad de la integral para contestar correctamente el apartado 3; el mismo porcentaje 31,25% consideran erróneamente que es un movimiento uniforme o uniformemente acelerado e intentan aplicar las fórmulas clásicas $e=v\cdot t$; $e=v\cdot t-(1/2)at^2$, esto indica que la transferencia al contexto físico no se ha realizado correctamente.

[92] Esta cuestión aparece en la Tesis Doctoral de Turégano (1994) y en un problema del libro de texto de Matemáticas Aplicadas a la Ciencias Sociales II de Marfil (véase *IV.2.2.9. Marfil* del anexo A).

Los conflictos semióticos detallados son el 31,25% (5) del movimiento uniforme, el 12,5% (2) en la elección errónea de los límites de integración, el 25% (4) en el cálculo numérico y el 25% (4) en operaciones erróneas en la integración lo que es muy significativo dada la escasa dificultad de la función integrando.

Cuestión 3. Consideramos $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Si fuese f la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando las respuestas lo más extensamente que puedas.

a) F(α) = 0; b) F'(α) = 0; c) F es creciente en el intervalo (0,α)

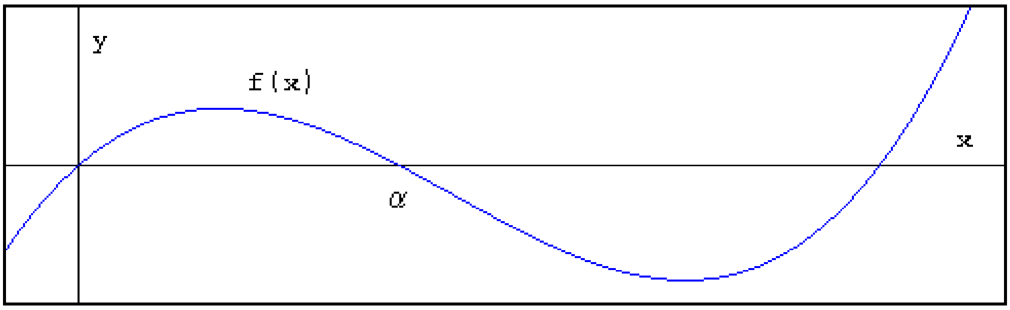


Figura I.3.4.3.. Gráfica de la función f.

En esta cuestión se consideran las proposiciones falsas (PF1: F(α)=0, "es verdadera porque la gráfica corta al eje OX en α"; PF2: F'(α)=0, "es verdadera porque F(α)=0, entonces F'(α)=0" y PF3: F es creciente en el intervalo (0,α), "es falsa, porque F(x) es creciente hasta α/2 y decreciente desde α/2 hasta α". La presente cuestión, según los autores, fue propuesta en los exámenes de las pruebas de acceso a la Universidad, al grupo de estudiantes objeto de estudio se les resolvió en clase y, sin embargo, sólo 3 (18,75%) la resolvieron correctamente. Asimismo, el 18,75% dan las respuestas PF1 y PF2, lo cual indica el conflicto semiótico de confundir la integral definida con la función dada. Un estudiante confunde la integral con la derivada. Cuatro estudiantes (25%) utilizaron el área para contestar correctamente el apartado a) y, de éstos, tres aplicaron correctamente el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el apartado b).

Contreras y Ordóñez han realizado su investigación con alumnos de 2º de bachillerato, por el tipo de preguntas, pensamos que han sido alumnos de la modalidad de ciencias de la naturaleza, no sabemos la docencia y las instrucciones que se han dado a los estudiantes y, al igual que ellos, quedamos sorprendidos por los bajos resultados obtenidos en la tercera cuestión. Nuestra investigación se compone de seis ciclos, está realizada con una media de veinte alumnos por ciclo y todos los estudiantes son de ciencias sociales. Constatamos, como se verá más adelante, que dada la representación gráfica de una función continua y positiva *f(x)* en el intervalo [a,b] si definimos la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ y pedimos a los estudiantes que realicen una representación gráfica de la función *F(x)*, muy pocos la expresan como el área comprendida entre la función *f(x)* y el eje de abscisas desde *a* hasta *x*; asimismo, veremos que muchos de nuestros alumnos también tienen dificultades para el cálculo de primitivas elementales aunque se haya insistido en el cálculo mental.

Sierra y **Codes** (2005)[93] afirman que existen dos posturas extremas en cuanto a la utilización de las nuevas tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, una de ellas defiende la no utilización de las mismas por el peligro que supone para los estudiantes al reducir ciertas habilidades, la otra considera que es la panacea para resolver problemas rutinarios y habrá que hacer hincapié en enseñar el manejo de estas nuevas herramientas. Así pues, el modelo conocido como *"caja blanca/caja negra"* de Buchberger (2003), propone que durante el proceso de aprendizaje de un nuevo concepto matemático, el alumno trabaje con lápiz y papel, es decir, los cálculos más relevantes deben desarrollarse a mano para consolidar el concepto que debe adquirir (*caja blanca*); el uso prematuro de los PCS puede llevar al estudiante a perder el control de los procedimientos y la comprensión de los conceptos, sin embargo, el uso posterior de los PCS le permite liberarse de tediosos cálculos y dedicar mayor tiempo a la adquisición del saber matemático (*caja negra*); Macintyre y Forbes (2002), ante la dicotomía de *"caja blanca/caja negra"* de los PCS sugieren la *"caja gris"*, esto supone que en lugar de resolver un problema en su totalidad se haga por pequeños pasos donde el alumno controle los procedimientos y la tecnología haga los diferentes cálculos mediante subprogramas o subrutinas.

Sierra y Codes dan una serie de conclusiones referentes a la utilización de las nuevas tecnologías en el aula, éstas son:

- Sin una buena planificación, los efectos son negativos.

[93] Sierra, M. y Codes, M. (2005). Entorno computacional y Educación Matemática: Una revisión del estado actual. *Grupo de investigación: Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. IX Simposio SEIEM*. Córdoba.

- No es la panacea a los problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Requieren un cambio profundo en la enseñanza.
- Existe una resistencia social e institucional al empleo de las nuevas tecnologías en el aula.
- ¿Están preparados los profesores para los cambios que se avecinan al introducir nuevas tecnologías en el aula?
- Hace más compleja la tarea del alumno y del profesor, ya que el nuevo entorno demanda un aprendizaje para su correcto manejo.
- Requiere una renovación de los recursos pedagógicos.
- Las nuevas tecnologías junto con el trabajo cooperativo, mejoran el aprendizaje.

Es cierto que las nuevas tecnologías exigen una preparación específica de los profesores y, además, el aprendizaje de la utilización de la herramienta informática por parte de los alumnos, así lo hemos realizado en nuestra investigación teniendo que implementar el profesor-investigador algún programa de utilidades, dar una serie de instrucciones precisas a los estudiantes para el manejo de *DERIVE* y siguiendo la propuesta de *“caja gris”* para la enseñanza-aprendizaje de la integral definida. Hemos percibido que existen dos fases distintas en el proceso de aprendizaje de los alumnos de las herramientas y comandos informáticos, conocido como *“génesis instrumental”* (Artigue, 2003b). La primera fase consistente en el conocimiento de los diferentes comandos e instrucciones, lo cual supone una fuerte dependencia de la máquina y los estudiantes emplean gran diversidad de estrategias y técnicas. La segunda fase consiste en la organización, es decir, tan pronto como los comandos ganan significado matemático son reducidas las técnicas y estrategias. En la adquisición de la *“comprensión de la máquina o herramienta”* influye la habilidad del usuario y su saber matemático (Guin y Trouche, 1999)[94].

Pensamos que el uso del ordenador, no sustituye la clase tradicional de matemáticas, más bien, sirve de ayuda para profundizar en los enfoques geométrico y gráfico, estimula el trabajo intuitivo del alumno y le facilita el quehacer matemático: observar, experimentar, conjeturar y probar.

[94] Guin, D. y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computer for Mathematical Learning, 3*, pp. 195-227.

Drijvers (2002)[95] considera que:

> Son obstáculos en el uso de los PCS las barreras provistas por las nuevas tecnologías que impiden al estudiante desarrollar el esquema de utilización que tiene en mente. Un obstáculo surge cuando las partes técnica y conceptual no están en equilibrio y éste puede ser *global* (cuando existen ciertas limitaciones para que la máquina trabaje a nivel general en la relación de la resolución de problemas y su implementación) y *local* (que se relaciona con un tópico matemático y la forma de ser tratado por el ordenador). Se considera apropiado que las antiguas técnicas de lápiz y papel encuentren acomodo en las técnicas informáticas y ambas se interrelacionen entre sí y con las concepciones mentales. Además, a la hora de manejar las técnicas informáticas y las de lápiz y papel deben ser *congruentes*, es decir, que ambas técnicas sean flexibles y que sean reconocidas como diferentes implementaciones de la resolución de problemas matemáticos. También tienen que ser *transparentes*, lo cual supone que el estudiante debe reconocer la forma de trabajo del entorno informático como una prolongación de la técnica original de lápiz y papel. Por último, la presentación de los resultados debe ser comprensible para los usuarios y estar exenta de errores.

La figura I.3.4.4 ilustra, de forma triangular, las concepciones mentales de los alumnos y las relaciones con las viejas y nuevas técnicas. En nuestra investigación hemos considerado prioritario encontrar el punto de equilibrio del triángulo establecido por Drijvers, por ello, no se han descuidado ninguno de los vértices determinados por este investigador y procurando que la información fluya en todos los sentidos en lugar de ser unidireccional.

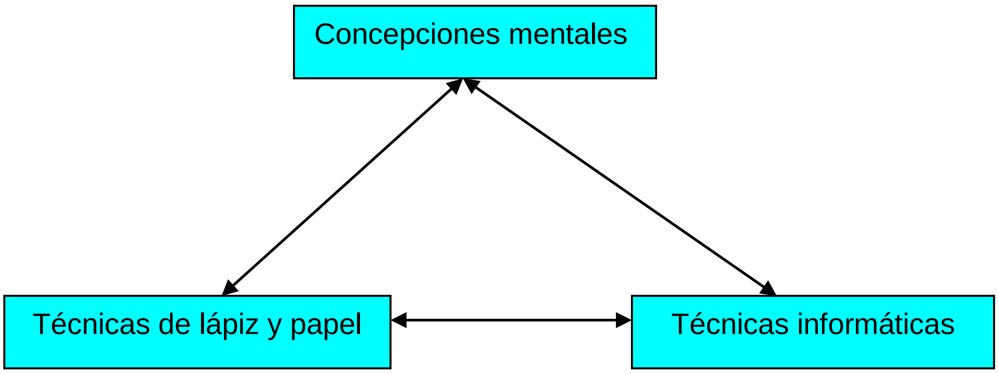


Figura I.3.4.4. Equilibrio entre nuevas y viejas tecnologías (Drijvers, 2002).

[95] Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34 (5)*, pp. 221-228.

La tabla I.3.4.1 establece, según este autor, los obstáculos locales y globales de la utilización de los programas de cálculo simbólico.

OBSTÁCULOS LOCALES	**OBSTÁCULOS GLOBALES**
La diferencia entre las representaciones algebraicas provistas por el PCS y las que los estudiantes esperan y conciben como "simples".	Las limitaciones del PCS y la dificultad de proporcionar estrategias algebraicas para ayudar al PCS a superar estas limitaciones.
La diferencia entre los cálculos numéricos y algebraicos y la forma implícita en que el PCS maneja la diferencia.	La incapacidad de decidir cuándo y cómo el uso del PCS puede ser útil.
La concepción flexible de variables y parámetros que el uso de un PCS requiere.	El carácter de *"caja negra"* del PCS.
La tendencia a aceptar sólo soluciones numéricas y no soluciones algebraicas.	La difícil transferencia entre las técnicas del PCS y la técnica de lápiz y papel debidas a la ausencia de congruencia entre las técnicas de ambos medios. Algunos factores son de *"ausencia de transparencia"* de la herramienta informática.
Las concepciones limitadas de la sustitución algebraica y de la solución algebraica.	La dificultad para interpretar las salidas de los PCS.
La concepción de una expresión como un proceso.	

Tabla I.3.4.1. Obstáculos de los Programas de Cálculo Simbólico (PCS).

El carácter de *"caja negra"* del ordenador es muy fuerte en los alumnos y el profesor, para romper ese obstáculo, se ha visto obligado a realizar un pequeño programa de utilidades para que los estudiantes reflexionen sobre los resultados obtenidos y comprendan los procedimientos que subyacen en el programa específico de *software* matemático *DERIVE*.

Trouche (2002)[96], mencionado por Camacho (2005), aclara que el uso individual de la calculadora y por extensión de los PCS por parte de los alumnos les lleva, frecuentemente, a cometer errores; asimismo, considera que las nuevas tecnologías permiten aportar grandes ventajas a los alumnos

[96] Trouche, L. (2002). Genèses instrumentales, aspects individuels et collectives. *Calculatrices symboliques. Transformer on outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions. Pp. 243-276.

y, a su vez, el profesor deberá guiar el aprendizaje de los estudiantes. La tabla I.3.4.2 da una relación de los errores/ventajas en el uso de los PCS.

ERRORES DE LOS ALUMNOS CON EL USO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS	VENTAJAS DE LOS ALUMNOS CON EL USO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS
Consideran que la pantalla tiene límites y las gráficas no los tienen.	Es más probable que la utilización de los PCS permita a los estudiantes construir su propia comprensión matemática gracias a una reflexión continua, constante y consciente.
Consideran que las asíntotas forman parte de la función.	El comportamiento ideal y óptimo de los PCS induce a los estudiantes a buscar la excelencia en el aprendizaje de los conceptos y en la resolución de los problemas.
Hacen un acto de fe en lo que dice la calculadora y los PCS sin relacionar la solución con los conocimientos adquiridos.	Los profesores son los orientadores, por tanto, deben elegir los instrumentos adecuados para que sea eficaz el aprendizaje de los alumnos por medio de las nuevas tecnologías.
	El rol del profesor es señalar las contradicciones existentes y no percibidas por el alumno, incitar a la reflexión, introducir los conocimientos matemáticos y técnicos necesarios y administrar las dificultades que surjan en el nuevo entorno.

Tabla I.3.4.2. Errores/ventajas en el uso de las nuevas tecnologías.

Es evidente que los alumnos, a pesar de las ventajas que les aportan las nuevas tecnologías, cometen errores (Trouche, 2002) y, a la vez, deben salvar obstáculos (Drijvers, 2002). Esto ha sido corroborado con los datos de nuestra investigación en la cual, efectivamente, el profesor ha orientado a los estudiantes en la aplicación de *DERIVE*, ha tenido que provocar la reflexión y la crítica (de los estudiantes) por los datos obtenidos del ordenador. Añadimos que, las instrucciones informáticas dadas a los alumnos les parecen fuera de contexto, exigen tiempo para ser asimiladas y consideran que no están relacionadas con los conceptos matemáticos; en resumen, los procedimientos tradicionales (lápiz y papel) e informáticos los consideran independientes, sin relación alguna e, incluso, los resultados aparentan ser distintos según los métodos utilizados, en consecuencia, una labor prioritaria del profesor investigador es ensamblar ambos procedimientos para facilitar la comprensión y adquisición de los estudiantes de la integral definida.

Faria (2008)[97] utiliza las nuevas tecnologías para reflexionar y argumentar sobre la veracidad de las conjeturas planteadas y propone el siguiente ejemplo:

> Algunos errores, cometidos por alumnos universitarios costarricenses, vienen determinados por considerar las igualdades:
>
> $$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}; \quad \iint f(x,y)g(x,y)dxdy = \left(\iint f(x,y)dxdy\right)\left(\iint g(x,y)dxdy\right)$$
>
> A modo de ejemplo y para corregir el primer error encontrado y relacionado con la aplicación equivocada de alguna supuesta propiedad de las integrales: $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$, en consecuencia, se decide utilizar la representación gráfica de la calculadora TI92, planteando el siguiente ejercicio para que los estudiantes lo trabajen en el aula:
>
> 1. Defina las siguientes funciones: $h(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2+1}dt \quad y \quad k(x) = \frac{\int_0^x t\,dt}{\int_0^x (t^2+1)dt}$
> 2. Grafique las funciones *h(x)* y *k(x)* en un mismo sistema de coordenadas, utilizando un dominio apropiado. Utilice estilos diferentes para graficar las dos funciones.
> 3. Compare las gráficas obtenidas y concluir si *h(x)=k(x).*
> 4. Utilice los resultados obtenidos para verificar si es verdadera o falsa la conjetura: $\int_0^x \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{\int_0^x t\,dt}{\int_0^x (t^2+1)dt}$
> 5. ¿Qué podemos decir en general con relación a la siguiente "propiedad"? $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ (1)
> 6. Si la propiedad (1) es falsa, construya un ejemplo para el cual la propiedad (1) es verdadera.

[97] Faria, E. de (2008). Matemáticas y Nuevas Tecnologías en Costa Rica. En Cantoral y cols. (2008). *Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Madrid: Díaz de Santos. Pp. 775-800.

Las representaciones gráficas de las funciones *h(x)* y *k(x)* vienen dadas en la figura I.3.4.5. Una de las respuestas dada por un estudiante a la pregunta 6 consistió en tomar las funciones $f(x)=x$, $g(x)=1$, donde $x\in[0,1]$. Es importante enfatizar a los estudiantes que algunos ejemplos concordantes con una conjetura no garantiza que tal conjetura sea verdadera, pero que es suficiente un contraejemplo para garantizar que la conjetura es falsa.

Este procedimiento se extendió posteriormente para corregir errores parecidos, que fueron cometidos por algunos estudiantes durante el desarrollo del tema de integrales múltiples. Es importante resaltar que tales errores ocurrieron en una proporción mucho menor que aquellos cometidos en integrales simples. Esto es un posible indicador de la importancia que tuvieron tanto la calculadora gráfica como las guías didácticas elaboradas en la corrección de conceptos y creencias equivocadas.

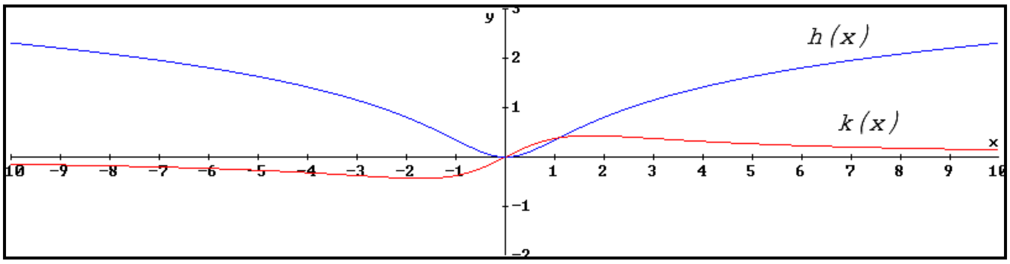


Figura I.3.4.5. Gráficas de las funciones $h(x)=\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt$ y $k(x)=\frac{\int_0^x t\,dt}{\int_0^x (t^2+1)\,dt}$

Consideramos que el ejemplo propuesto por Faria es interesante, puesto que, nuestros alumnos al realizar el cálculo de primitivas de productos y cocientes de funciones, mediante el cálculo mental, aplican lo que algunos de ellos consideran la siguiente propiedad: *“La integral del producto (cociente) de funciones es el producto (cociente) de las integrales”*. Este error es muy persistente en el alumnado, difícil de corregir, aunque se realicen los cálculos correctamente con lápiz y papel en el aula, después, con demasiada frecuencia los estudiantes vuelven a incidir en el error.

Estamos totalmente de acuerdo con Faria que, después de muchos años ejerciendo la docencia el profesor investigador, en la enseñanza deben resaltarse y advertirse los posibles errores que cometen los alumnos para minimizar la persistencia de los mismos en los estudiantes; consideramos que tal actuación redunda en un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y de la integral en particular.

En el contexto de este epígrafe, sin ánimo de ser exhaustivos, señalamos otras dificultades (además, proponemos algunas medidas para eliminarlas o minimizarlas) en el uso de las **Nuevas Tecnologías** las siguientes:

- La necesidad de los estudiantes de un cierto tiempo para madurar y desarrollar una comprensión conceptual segura de los conceptos, han de prestar atención al proceso de transformación y relación que deben establecerse entre las representaciones gráficas y numéricas, por tanto, los estudiantes deben desarrollar un conjunto de estrategias para la resolución de problemas que pudieran ayudarlos a decidir cuándo usar un *software* y cómo dirigir su trabajo (Camacho, 2005).
- El uso de un determinado PCS altera tanto el entorno de trabajo de los estudiantes, como la aproximación a los principales conceptos del análisis (función, derivada, integral, límite), así pues, los alumnos deben familiarizarse con los PCS que posibiliten el abordaje de problemas de cierta complejidad, evitando la tendencia a la resolución de prototipos, con el fin de producir una auténtica interrelación entre los diferentes lenguajes y conceptos; la utilización de las nuevas tecnologías limita las respuestas conceptuales e incluso presentan mayor número de contradicciones que la técnica de lápiz y papel. El uso del ordenador no debe limitarse a sesiones puntuales, ya que sólo un trabajo largo en el tiempo puede posibilitar la reflexión y las necesarias puestas en común sobre conceptos y procesos complejos como son los del análisis matemático, es decir, debe ser extenso y continuado pues prepara y complementa un trabajo de tipo teórico y de manipulación simbólica tan importante y necesario en los niveles avanzados (Deulofeu, 2007)[98].
- No se puede considerar una ventaja el incremento en la eficiencia y una reducción en el tiempo empleado en los cálculos algebraicos para los alumnos de la enseñanza secundaria, pues son noveles en las ciencias Matemática e Informática. El entorno de los PCS tienden a ser una herramienta vertical, ello supone que *"todo está hecho"*, es muy rígido en cuanto a la sintaxis y no admite notaciones informales.

[98] Deulofeu, J. (2007). Los sistemas de representación y el uso de las CAS en el Análisis Matemático. Réplica a la ponencia "La enseñanza y el aprendizaje del análisis Matemático haciendo uso de las CAS (Computer Algebra System)" del profesor Matías Camacho. *Investigación en Educación Matemática XI*, pp. 393-397.

El *software* tiene la catalogación de *"caja negra"*, los algoritmos informáticos son desconocidos por la mayoría de los usuarios, e incluso, son mucho más sofisticados que los que utilizarían los estudiantes, en consecuencia, ven que los resultados obtenidos por el PCS se obtienen por caminos muy distintos a los empleados por ellos mismos con la técnica de lápiz y papel. Los estudiantes consideran que los PCS es un micromundo en sí mismo y no encuentran la relación con el mundo matemático y les puede llevar a los fenómenos de *pseudo-transparencia* (cuando la técnica del entorno informático es similar a la de lápiz y papel pero presenta diferencias sutiles difíciles de apreciar) y *doble referencia* (como consecuencia del fenómeno anterior los estudiantes no descubren las matemáticas, más bien el entorno de programación y las instrucciones del lenguaje de programación). Algunos estudiantes emplean el *"comportamiento del pescador"*, es decir, utilizan comandos e instrucciones sin pensar lo que hacen y esperando obtener los resultados que desean (generalmente esta técnica falla en la inmensa mayoría de los casos). Existe gran cantidad de PCS en la actualidad, lo cual plantea la elección del más adecuado para nuestros propósitos y el consiguiente empleo de tiempo para aprender su utilización por parte del profesor y enseñar las instrucciones básicas a los alumnos (Guin y Trouche, 1999; Drijvers, 2002 y González-Martín, 2006).

- La desventaja es que el trabajo se hace muy mecánico, se limita el pensamiento puesto que todo lo hace el ordenador y no muestra el procedimiento para obtener los resultados. El programa de utilidades elaborado como complemento de *DERIVE* para la explicación "paso a paso", a un grupo de alumnos, de la integral definida no tuvo el éxito esperado en la consolidación del concepto por parte de los alumnos. La introducción del concepto de integral definida desde una perspectiva gráfica y numérica mediante *software* matemático resulta, en ocasiones, ser un obstáculo. Cuando se combinan durante el curso las clases habituales con las prácticas de laboratorio, los alumnos consideran que trabajar con *DERIVE* involucra seguir procedimientos, conocer el lenguaje apropiado y producir conocimientos propios; si sólo en algunos temas se recurre a las prácticas de laboratorio, entonces los estudiantes consideran que el *software* es, únicamente, una herramienta para encontrar resultados (Depool, 2004).

En nuestra investigación, insistimos, realizada con alumnos de segundo de bachillerato de la modalidad de ciencias sociales, afirmamos que los estudiantes tienen muchas de las dificultades expuestas en este último párrafo, sirvan los ejemplos: El programa específico de utilidades diseñado para las prácticas los alumnos lo perciben como algo tangencial y distinto a lo expuesto en el aula. Al utilizarse solamente el aula de informática para trabajar el concepto de integral definida, los alumnos tienen dificultades en el manejo de las instrucciones y, efectivamente, consideran que *DERIVE* sólo realiza cálculos y sirve para hallar las soluciones de los problemas. Las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas de áreas e integrales definidas causan conflictos cognitivos en algunos alumnos.

La escasa literatura científica, encontrada en la presente investigación, sobre las dificultades y errores en el **Cálculo Mental** y la ausencia de la misma en el contexto del cálculo de primitivas por medio del cálculo mental, nos ha llevado a establecer como guía las investigaciones de Gómez (1995)[99].

- El cálculo mental es de utilidad en la comprensión y desarrollo de los equivalentes escritos (Cockcroft, 1985), pudiendo llevar al descubrimiento de pautas, estructuras y propiedades (Reys, 1985); es un dominio para introducir de modo informal ideas matemáticas que luego se desarrollarán con profundidad (Cockcroft, 1985) y, posiblemente, para desarrollar destrezas de resolución de problemas (Polya, 1945 y Trafton, 1978).
- Tradicionalmente se creía que los errores de cálculo que cometían los estudiantes eran debidos a una falta de dominio de los métodos o a despistes en el cálculo, a partir del último cuarto del siglo pasado se consideran desde el punto de vista del constructivismo, en contraposición con el conductismo, relacionados con el diagnóstico de las dificultades de aprendizaje y las sugerencias para remediarlas (Borasi, 1994); son el síntoma indicativo de alguna patología subyacente, un método falso que el estudiante cree correcto (Brousseau, 1986), son un producto de la experiencia previa y una parte del proceso de aprendizaje que se manifiesta de forma persistente y reproductible.

[99] Gómez, B. (1995). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Investigaciones y Experiencias Didácticas. Enseñanza de las Ciencias*, *13 (3),* pp. 313-325.

- Los errores en el cálculo mental que no se deben a distracciones y se reproducen sistemáticamente en situaciones similares son el objeto de las investigaciones puesto que están relacionados con una cierta manera de conocer que permiten detectar las resistencias a la evolución del concepto, esto es, los obstáculos epistemológicos (Gómez, 1995).

Consideramos relevantes las categorías y subcategorías, que establece Gómez (1995), de respuestas incorrectas en el cálculo mental, nosotros, las transcribimos en el siguiente texto, salvo los ejemplos, que hemos considerado oportuno extraerlos de nuestra propia investigación e insertarlos, junto con algún motivo por el cual los alumnos cometen dichos errores, en sus propias categorías/subcategorías según la tabla I.3.4.3.

> - *Errores mecánicos* debidos a la falta de interés, cansancio, distracción, nerviosismo, etc. El estudiante pierde el control consciente en la resolución del problema, no implica falta de conocimiento, el problema puede ser resuelto correctamente una segunda vez sin que medie ninguna instrucción concreta.
>   - *Perseverativos* debidos a que un número queda retenido fijamente en el pensamiento.
>   - *Inercia a la acción* debidos a que se ejecuta una operación que no corresponde con el signo, tal vez por la influencia de una operación precedente.
> - *Errores de calidad* debidos a la falta de conocimientos matemáticos.
>   - *Memorización pobremente establecida.*
>   - *Aprendizaje de las reglas* debidos a una incorrecta extensión de las reglas o a la omisión de los pasos necesarios.
>
> Los errores de calidad en la forma de aprendizaje de las reglas son los denominados *errores sistemáticos de procedimiento* entendidos como tales en el sentido de procedimiento inapropiado, persistente y reproductible que no se debe a distracción o inadvertencia, casualidad o fallo de la memoria (Gómez, 1995, pág. 315).

En nuestro trabajo de investigación hemos ejercitado el cálculo mental mediante el cálculo de primitivas, nuestros alumnos, en un principio han sido reticentes pero a medida que avanzábamos consideraban que era un ejercicio interesante y el profesor, en ocasiones, debió prestar una atención especial a los alumnos más lentos en dicha actividad (Ortega y Ortiz, 2002).

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
Mecánicos $\int x^3 dx = 3x^2 + k$ El alumno estaba despistado y ha confundido la integración con la derivación	***Perseverativos*** $\int sen(x)dx = \cos(x) + k$ Esta integral es retenida erróneamente en el pensamiento del alumno y, sin embargo, realiza correctamente $[\cos(x)]' = -sen(x)$
	Inercia a la acción $\int \left(x^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \ln\|x\| + \sqrt{x} + k$ El alumno sabe que $[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pero ha tomado el integrando como una suma de funciones
De Calidad $\int (1+3x)^4 dx = \frac{1}{5}(1+3x)^5 + k$ El alumno sabe que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ pero no sabe o tiene dificultades en aplicar correctamente $\int f^n(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + k$	***Memorización pobremente establecida*** $\int \frac{x}{x^2+1} dx = arctag\,(x) + k$ El alumno no recuerda $\int \frac{1}{x^2+1} dx = arctag\,(x) + k$ o $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + k$
	Aprendizaje de las reglas (sistemáticos de procedimiento) $\int sen(x) \cdot \cos x(x)dx = -\cos(x) \cdot sen(x) + k$ El alumno recurre a la falsa propiedad: *“la integral del producto es el producto de las integrales”*

Tabla I.3.4.3. Categorías/subcategorías de los errores, ejemplos y causas que los provocan en el cálculo mental de primitivas.

Percibimos que el trabajo que hemos desarrollado con el cálculo mental no es habitual en segundo de bachillerato, posiblemente, debido a varias razones, entre las que podemos destacar: a) los profesores no lo enseñan, puede ser porque no están motivados o si lo están y muestran interés tampoco lo enseñan suficientemente por la limitación de los programas, b) la escasez de material didáctico adecuado y la carencia de cursos específicos para docentes, etc. (Cortés, 2001), c) las intervenciones orales para algunos alumnos les resultan difíciles y se sienten inseguros al no poder revisar sus ejercicios, d) los ejercicios con números fraccionarios les resultan difíciles y, finalmente, e) el límite de tiempo hace que los estudiantes se sientan nerviosos y no puedan dar una respuesta adecuada (Cortés, 2005).

A pesar de las dificultades iniciales para la puesta en práctica del cálculo de primitivas mediante el cálculo mental, consideramos que la experiencia es gratificante, positiva y didácticamente es aconsejable para que los estudiantes aprendan matemáticas.

I.4. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN

Desde los años setenta del siglo pasado viene investigándose sobre la Didáctica de las Matemáticas, nuestra investigación queda delimitada al campo conceptual del Análisis Matemático en el nivel de segundo curso de bachillerato. El problema que abordamos queda explicitado bajo la denominación: ***"INTEGRAL DEFINIDA, CÁLCULO MENTAL Y NUEVAS TECNOLOGÍAS"***, lo cual supone que somos conscientes de las dificultades que pueden encontrar los alumnos en el nivel de estudios que nos ocupa; es evidente que los antecedentes expuestos en el presente capítulo pueden ser el punto de partida de múltiples investigaciones; además, a la vez que realizamos la investigación, no podemos olvidarnos de nuestra actividad docente en el Instituto de Enseñanza Secundaria "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos y debemos cumplir con los mandatos establecidos por la legislación vigente, entre otros:

> La introducción de integrales aportará nuevas y potentes herramientas para la resolución de problemas geométricos y funcionales. Las herramientas tecnológicas, en particular el uso de calculadoras y aplicaciones informáticas como sistemas de álgebra computacional o de geometría dinámica, pueden servir de ayuda tanto como para la mejor comprensión de los conceptos y la resolución de problemas complejos como para el procesamiento de cálculos pesados, sin dejar de trabajar la fluidez y la precisión en el cálculo manual simple, donde los estudiantes suelen cometer frecuentes errores que les pueden llevar a falsos resultados o inducir a confusión en sus conclusiones (Decreto 42/2008 de 5 de junio, BOCyL.- Nº 111 de 11 de junio, pág. 11357).

Ahora, ha llegado el momento de concretar y delimitar nuestro problema de investigación, lo hemos dispuesto en tres apartados y en cada uno de ellos expresamos en negrita el tema a investigar. Además, para evitar la imprecisión y acotar el campo de investigación hacemos una breve explicación de lo que se pretende investigar relacionándolo con problemas abiertos de investigaciones precedentes y con el currículo actual; sin embargo, a pesar de establecer el objeto de investigación, no es el momento de establecer las hipótesis puesto que aún no se ha explicado el marco teórico ni la metodología con que se desarrollará la presente investigación.

Integral Definida: Ante la amplitud de este tema, no pretendemos dar respuesta a una infinidad de problemas que encuentran su resolución en el desarrollo de este concepto. Nuestra propuesta prioritaria es: ***"Elaborar una unidad didáctica en el que se establezca el concepto de área, sumas inferiores y superiores de Darboux, integral de Darboux, teorema fundamental del cálculo, regla de Barrow, propiedades y aplicaciones de la integral definida".*** Entendemos por:

> Unidad didáctica a una unidad de programación y actuación docente configurada por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado, para la consecución de unos objetivos didácticos; una unidad didáctica da respuesta a todas las cuestiones curriculares al qué enseñar (objetivos y contenidos), cuándo enseñar (secuencia ordenada de actividades y contenidos), cómo enseñar (actividades, organización del espacio y del tiempo, materiales y recursos didácticos) y a la evaluación (criterios e instrumentos para la evaluación), todo ello en un tiempo claramente determinado (MEC, 1992, Cajas Rojas).

Nuestra propuesta, aún, es más amplia: analizamos el concepto (integral definida) dentro del currículo de bachillerato, exploramos cómo lo desarrollan diferentes libros de texto, establecemos diferentes categorías de los distintos conceptos que configuran la integral definida, las analizamos y redactamos las conclusiones a las que hemos llegado. Consideramos fundamental el establecimiento del concepto de área puesto que contribuye a que el profesor-investigador tenga una idea clara de la situación del estudiante en lo referente a las imágenes del concepto de área, ya que pretender crear una imagen del concepto de integral en estudiantes con una imagen primitiva del área es como predicar en el desierto y es conveniente conocer la situación de los estudiantes en cuanto a su habilidad para visualizar, lo cual permitirá al profesor tomar conciencia de si éstos son realmente capaces de interpretar correctamente las representaciones gráficas utilizadas frecuentemente como apoyo de las explicaciones de diversos conceptos (Turégano, 1994, págs. 250-251). El enunciado y la demostración que damos del teorema fundamental del cálculo sigue la propuesta de Ortega (2004); se separan claramente el enunciado del teorema de su demostración para facilitar la distinción del papel que juega cada uno de ellos, se cuida la redacción del enunciado para lograr una adecuada comprensión por parte de los alumnos y se fomenta la apreciación por parte de los estudiantes de las funciones que cumplen las demostraciones (Ibañes, 2001, págs. 533-534). Esta propuesta cumple, ampliamente, para la integral definida, uno de los objetivos de las Matemáticas de bachillerato:

> Considerar las argumentaciones razonadas y la existencia de demostraciones rigurosas sobre las que se basa el avance de la ciencia y la tecnología, mostrando una actitud flexible, abierta y crítica ante otros juicios y razonamientos. Asimismo, desarrolla el contenido del currículo de Matemáticas de bachillerato: Introducción del concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Integral definida. Regla de Barrow. Teorema del valor medio para integrales. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas (Decreto 42/2008 de 5 de junio, BOCyL.- Nº 111 de 11 de junio, págs. 11357-11359).

Cálculo Mental: Desgraciadamente la mayoría de los docentes de secundaria centran su atención en la enseñanza del cálculo con lápiz y papel (Cortés y cols., 2005); en el currículo actual de Matemáticas, el cálculo mental, sólo es objetivo educativo en Educación Primaria y en Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. Nosotros consideramos que el cálculo mental también debe incluirse y potenciarse en Bachillerato y nuestra propuesta, concreta, es la siguiente: ***"Cálculo mental de integrales sencillas"***. Entendemos por *cálculo mental de integrales sencillas, en adelante cálculo mental de primitivas, al cálculo de antiderivadas de funciones elementales casi similares a las que pueden encontrarse en cualquier libro de texto de bachillerato bajo la denominación de Tabla de Primitivas o Integrales Inmediatas. Por ejemplo:* $\int sen 2x\, dx,\ \int senx \cos x\, dx,\ etc.$

Pensamos que el cálculo mental de primitivas sirve de diagnóstico tanto, para que el profesor conozca las concepciones que sobre los procedimientos de cálculo tienen los estudiantes, como para que ellos se vean obligados a la búsqueda de soluciones de primitivas elementales. Sentando así las bases para su posible reconceptualización, además, es importante que emerjan los errores de los alumnos como ayuda para reconocer sus creencias, la forma en que se aprendieron o se han aprendido y las dificultades a las que se enfrentan (Gómez, 1995). La dualidad derivación-integración exige que el alumno mantenga un alto poder de concentración en la resolución mental de los ejercicios, y, entre otras razones, los estudiantes han de ser conscientes de que el cálculo mental es un excelente ejercicio para exponer en clase, oralmente, sus razonamientos, sus dudas e, incluso, sus errores siendo ellos mismos protagonistas activos de su propio aprendizaje. Es más, con nuestra propuesta ampliamos, mediante este nuevo método de cálculo, uno de los contenidos del currículo de Matemáticas de Bachillerato:

> Primitiva de una función. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas, en particular inmediatas (Decreto 42/2008 de 5 de junio, BOCyL.- Nº 111 de 11 de junio, pág. 11359).

Nuevas Tecnologías: Entendemos que las nuevas tecnologías han de estar presentes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y así quedó manifestado, hace más de un cuarto de siglo, en el informe Cockcroft[100]:

> En la enseñanza secundaria, creemos que es particularmente necesario desarrollar las posibilidades de presentación gráfica que ofrecen en la actualidad los ordenadores. Así podrá trabajarse en el trazado de gráficas y, a un nivel superior, conseguir una presentación visual de las ideas básicas del cálculo y del empleo de los métodos iterativos. Además, la propia naturaleza interactiva del trabajo con un ordenador ofrecerá a los alumnos, que disfrutan "investigando", la oportunidad de comprender mejor muchos de los conceptos matemáticos que han de abordar. Pero, una vez más, **deseamos subrayar la necesidad de preparar programas que no sean simplemente "aditamentos", sino que contribuyan a la labor general de matemáticas en la escuela.** Por último, quienes adquieran *software* para utilizarlo en el aula de informática, habrán de asegurarse de que es de buena calidad (Cockcroft y cols., 1985, págs. 146-148).

Aunque el informe Cockcroft podemos considerarlo lejano en el tiempo, no por ello ha perdido vigencia, es más, estamos totalmente de acuerdo con el texto trascrito y pensamos que *DERIVE* es un programa de cálculo computacional adecuado para los alumnos de segundo curso de bachillerato

[100] Cockcroft y cols. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado.

y, para completarlo, se han creado varios subprogramas que favorecen la enseñanza-aprendizaje de los conceptos que conforman la integral definida.

Sabemos que no es habitual que los estudiantes participen en las prácticas con los ordenadores en el aula de informática para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Depool, 2004, pág. 434), nosotros, en la presente investigación damos a las nuevas tecnologías una orientación eminentemente didáctica, es decir, a la enseñanza-aprendizaje de la integral definida; limitamos las mismas a la informática y en concreto a la utilización del programa de cálculo simbólico denominado *DERIVE*. Nuestra propuesta es: ***"DERIVE y programa de utilidades para la visualización y conceptualización de la integral definida y el cálculo de áreas".***

No es nuestro objetivo dar unas instrucciones precisas para la utilización de *DERIVE*, basta consultar cualquier manual, nos proponemos que los alumnos visualicen las sumas inferiores y superiores de Darboux y las sumas de Riemann[101] de una determinada función en un intervalo, calculen los valores de dichas sumas y establezcan el concepto de integral definida; para poder realizar dicha visualización el profesor-investigador ha programado varias subrutinas (programa de utilidades) con el objetivo de que al ejecutarlo los estudiantes consideren que la informática es una *"caja blanca"* donde todo resultado es comprendido y contrastado, en definitiva, aunque nuestro módulo instruccional es original, consideramos que sí se han tenido presentes la sugerencias de Cockcroft y cols. (1985, pág. 147) y de Depool (2004, pág. 435) para utilizarlo en las aulas de bachillerato, cuando se introduzca el concepto de integral definida.

Pensamos que la introducción de los conceptos vía la resolución de problemas que han estado en el origen del concepto logran realzar la formación del mismo, utilizar simultáneamente modos visuales y analíticos favorece establecer relaciones entre ellos y aquí es donde el ordenador ayuda poderosamente a este tratamiento (Turégano, 1994, págs. 250-251); además, el uso de *DERIVE* puede convertirse en un entorno favorable para la integración y operacionabilidad de los tres registros (algebraico, numérico y gráfico) para lograr un aprendizaje mucho más significativo de la integral (González-Martín, 2006, pág. 428).

[101] Consideramos que no es aconsejable efectuar aproximaciones por medio de la regla de los trapecios puesto que esto puede confundir a los alumnos de segundo de bachillerato de ciencias sociales y desviarlos del objetivo final que es el establecimiento del concepto integral definida.

Por último, nuestra propuesta de utilización de las nuevas tecnologías para la enseñanza-aprendizaje de la integral definida cumple uno de los objetivos de las Matemáticas de Bachillerato:

> Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, reducir el tiempo de cálculo y servir como herramienta de resolución de problemas (Decreto 42/2008 de 5 de junio, BOCyL.- Nº 111 de 11 de junio, pág. 11358).

I.5. OBJETIVOS GENERALES

Una vez determinado el origen del problema, estudiados los antecedentes y delimitado el problema de investigación, establecemos como objetivo básico y fundamental: ***"Investigar los aprendizajes que se producen en los estudiantes de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales sobre la integral definida al integrar docencia tradicional, cálculo mental y nuevas tecnologías".*** Sin embargo, tal objetivo es muy amplio, por tanto, para poderlo abordar de forma más precisa lo matizamos en cuatro objetivos generales: el primero referente a la epistemología de la integral y, el resto, uno por cada parte de las que se compone la denominación de esta tesis.

Objetivo 1: *Analizar el desarrollo epistemológico de la integral y diferentes conceptualizaciones de la misma con el fin de establecer conexiones con el currículo actual y fundamentar la docencia y la investigación.*

Podemos considerar el problema de las cuadraturas desde que la matemática adquiere la categoría de Ciencia (Edad Talásica)[102] hasta nuestros días y, según nuestra propia investigación, el primer testimonio escrito lo encontramos en la Grecia Clásica del siglo V a.C. En el siglo XIX de nuestra era surge la primera formalización del concepto integral definida que, seguidamente, dio paso a la teoría de la medida. Por tanto, han transcurrido veinticinco siglos en los cuales se han obtenido infinidad de resultados particulares de cálculo de áreas y se han establecido varias teorías de la integral.

[102] "Edad Talásica", también reconocida como "Edad del Mar [Mediterráneo]", es el periodo que transcurre, aproximadamente, desde el 800 a.C. hasta el 800 d.C. (Boyer, 1986, págs. 71-75).

Nuestra propuesta consiste en realizar un *estudio epistemológico del área y la integral definida* que permita justificar la docencia actual del cálculo integral con alumnos de bachillerato de ciencias sociales y ello queda redactado en la sección *V.2. Epistemología del Cálculo Integral* del capítulo V y en el anexo B de la presente memoria. Consideramos que dicha sección ha de tener la suficiente extensión para que el lector de esta tesis doctoral adquiera una visión general de cómo se ha tratado aquí el problema de las cuadraturas a lo largo de la historia.

Objetivo 2: *Descubrir los logros y las dificultades que tienen los estudiantes al resolver mentalmente integrales indefinidas sencillas, que sean muy parecidas a las que figuran en las tablas de primitivas.*

La metodología básica empleada para conseguir este objetivo ha sido la práctica del cálculo de primitivas mediante el cálculo mental con alumnos de segundo de bachillerato de ciencias sociales, generalmente, al comienzo de cada clase y, además, con la realización de pruebas escritas donde sólo se permitía escribir la solución de integrales indefinidas elementales. Desde el capítulo VII hasta el capítulo X, ambos inclusive, de la presente memoria de se recoge la investigación del *Cálculo Mental.*

Considerando los antecedente del cálculo de primitivas mediante el cálculo mental y, adelantándonos a los resultados de nuestra propia investigación, podemos afirmar que los alumnos de bachillerato no están acostumbrados a la práctica del cálculo mental en clase de matemáticas.

Objetivo 3: *Explorar desde un perspectiva investigadora los aprendizajes que se producen en los estudiantes en el estudio de la integral definida utilizando los soportes clásicos: libro de texto, toma de apuntes y resolución de problemas con lápiz y papel.*

Este objetivo es muy amplio y para analizarlo rigurosamente el equipo investigador contrastará la práctica educativa ordinaria que podríamos considerar tradicional a través del libro de texto, el uso de la pizarra, la toma de apuntes, intervenciones interactivas o no que tienen lugar en el desarrollo de la docencia tradicional y las producciones con lápiz y papel.

Consideramos que la enseñanza-aprendizaje de la integral definida a los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales debe abordarse desde el conocimiento de algunos antecedentes (véase el apartado *I.3. Antecedentes* *de la Investigación* del presente capítulo), del tratamiento curricular del concepto según la legislación vigente y el que en la actualidad le dan los libros de texto[103] (capítulo IV) y, después de su análisis mediante categorías de contenido matemático, elaborar la correspondiente unidad didáctica del área y la integral para ser impartida a estudiantes bachilleres (capítulo V).

Para facilitar la redacción y lectura de la presente tesis, en el capítulo VI se han determinado los seis ciclos de investigación-acción que la componen y las categorías de comprensión matemática utilizadas posteriormente. Por último, la redacción de la investigación realizada con los estudiantes de segundo de bachillerato de ciencias sociales de la enseñanza y aprendizaje de la integral definida, sin las prácticas informáticas con *DERIVE*, queda recogida desde el capítulo VII al X (ambos inclusive).

Objetivo 4: *Analizar la integración del programa de cálculo simbólico DERIVE, aplicado al desarrollo teórico-práctico de la integral definida, en el proceso de enseñanza del profesor y aprendizaje de los estudiantes.*

Los alumnos, de dos en dos en el aula de informática del instituto, con las orientaciones precisas del profesor investigador, el programa de utilidades y el de *software* matemático *DERIVE* deben consolidar los conocimientos adquiridos en el aula habitual. Pensamos que la enseñanza-aprendizaje, mediante las nuevas tecnologías, del concepto matemático que nos ocupa debe ser redactado en un capítulo específico y así se ha recogido en el XI.

Finalmente, las hipótesis quedarán establecidas después de determinar los marcos metodológico (capítulo II) y teórico (capítulo III) en los cuales se incardina esta investigación y posteriormente, una vez realizada y analizada la práctica educativa y redactada la investigación con los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales, ensamblaremos la triple investigación (Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías) y redactaremos las conclusiones a las cuales hemos llegado de manera conjunta (capítulo XII), puesto que el fin último de la presente investigación es descubrir las aportaciones y las limitaciones de nuestra propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de una de las más bellas construcciones de la mente humana como es la Integral Definida.

[103] Para ello se ha cogido una muestra de once manuales de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de otras tantas editoriales: Anaya, Casals, Donostiarra, Ecir, Edebé, Edelvives, Editex, Hespérides, Marfil, McGraw-Hill y SM.

CAPÍTULO II: MARCO METODOLÓGICO CUALITATIVO *103*

II.1. INTRODUCCIÓN **103**

II.2. LA INVESTIGACIÓN-ACCIÓN **106**

II.2.1. CONCEPTO, CARACTERÍSTICAS, RASGOS, REQUISITOS Y RECOPILACIÓN DE DATOS 106

II.2.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 114

II.2.3. LOS CICLOS Y SUS FASES 116

II.2.3.1. Planificación 119

II.2.3.2. Acción 120

II.2.3.3. Observación o análisis 120

II.2.3.4. Reflexión 121

II.2.4. CONCLUSIONES 122

II.3. VALIDEZ DE UN ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN ACCIÓN **123**

CAPÍTULO II: MARCO METODOLÓGICO CUALITATIVO

II.1. INTRODUCCIÓN

Una vez delimitado el problema de la presente investigación, ahora es el momento de determinar una metodología adecuada para llevar a cabo el trabajo de investigación propuesto. Según Pérez Serrano (1994)[1] existen dos grandes perspectivas teóricas, *positivismo y fenomenología*, que han dominado las ciencias sociales y de ellas nacen dos métodos, modelos o paradigmas, *cuantitativo y cualitativo.* Las características de cada uno de ellos las expresamos a continuación (págs. 18-33)[2]:

- El positivismo se adhiere a los principios fundamentales de la unidad de la ciencia, la metodología de la investigación debe ser la de las ciencias exactas y físicas y la explicación científica es de naturaleza causal que consiste en subordinar los casos particulares a las leyes generales. Las características del **modelo cuantitativo** son:
  - *Búsqueda de un conocimiento sistemático, comprobable, comparable, medible y replicable,* se rechazan los hechos aislados.
  - *Prioriza la eficacia y el incremento del corpus de conocimiento,* ignora los juicios de valor y no se ocupa de la acción social.
  - *La metodología es el modelo hipotético-deductivo* por lo que la única forma de estudiar la realidad social es el estadístico.
  - *La realidad es observable, medible y cuantificable*, es decir, se adecua el objeto de estudio al método y no el método el objeto de estudio, denominado reduccionismo metodológico.

[1] Pérez Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes I. Métodos*. Madrid: La Muralla.

[2] En el presente capítulo, de aquí en adelante, los textos reducidos han sido redactados por el autor de esta tesis manteniendo, en la medida de lo posible, los textos originales de los investigadores a los cuales se hace referencia en cada momento.

- *Parte de una muestra significativa para generalizar los resultados*, las sociedades no se estudian una a una exhaustivamente, se toma una muestra, al azar, representativa y se generalizan los resultados a otras poblaciones.

- No todo es explicable con el paradigma cuantitativo, por ejemplo, la práctica educativa posee una lógica muy distinta a la racional y científica postulada por el positivismo, el nuevo modelo naturalista o cualitativo (basado en la fenomenología) considera que las estadísticas oscurecen las dimensiones cualitativas y aboga por que los informadores deben ser observados no como actores cuya conducta debe medirse sino como documentos que reflejan su propia cultura; las características del **modelo cualitativo** son:
    - *La teoría constituye una reflexión en y desde la praxis*, es decir, la teoría se centra en las reglas que subyacen y gobiernan los fenómenos sociales, los problemas educativos tienen un carácter global y se pone el acento fundamentalmente en la comprensión de los procesos, creencias, valores y reflexiones.
    - *Intenta comprender la realidad*, el conocimiento es un producto de la actividad humana, por tanto, no se descubre, se produce.
    - *Describe el hecho en el que se desarrolla el conocimiento*, los datos son descriptivos, las palabras de las personas, las conductas observables; no busca la generalización y se caracteriza por estudiar en profundidad una situación concreta desarrollando hipótesis individuales que se dan en casos individuales.
    - *Profundiza en los diferentes motivos de los hechos*, no existe una única realidad sino múltiples realidades interrelacionadas, así pues, la realidad es holística, global y polifacética.
    - *El individuo es un sujeto interactivo y comunicativo que comparte significados*, la conducta social se explica mediante las interrelaciones de los sujetos y las formas de vida de los individuos.

Así pues, Pérez Serrano (1994) ha mostrado dos modelos de investigación y, como resumen, en la tabla II.1 compara las características fundamentales de los paradigmas cuantitativo y cualitativo.

Pensamos que los dos métodos expuestos no son excluyentes, sin embargo, en la presente investigación queda claro que debemos optar por la investigación cualitativa puesto que pretendemos saber qué ocurre en la enseñanza-aprendizaje de la integral definida, con alumnos de bachillerato de ciencias sociales, tal y como quedó establecido en el capítulo anterior.

PUNTO DE COMPARACIÓN	INVESTIGACIÓN CUALITATIVA	INVESTIGACIÓN CUANTITATIVA
Foco de la investigación. (Centro de interés).	Cualidad. (Naturaleza, esencia).	Cantidad. (Cuánto, cuántos).
Raíces filosóficas.	La fenomenología, la interacción simbólica.	El positivismo, el empirismo lógico.
Conceptos asociados.	Trabajo de campo, etnografía, naturalista.	Experimental, empírica, estadística.
Objetivos de la investigación.	Comprensión, descripción, descubrimiento, generadora de hipótesis.	Predicción, control, descripción, confirmación, comprobación de hipótesis.
Características del diseño.	Flexible, envolvente, emergente.	Predeterminado, estructurado.
Marco o escenario.	Natural, familiar.	Desconocido, artificial.
Muestra.	Pequeña, no aleatoria, teórica.	Grande, aleatoria, representativa.
Recogida de datos.	El investigador como instrumento primario, entrevistas, observaciones.	Instrumentos inanimados: escalas, pruebas, encuestas cuestionarios, ordenadores.
Modalidad de análisis.	Inductivo: por el investigador.	Deductivo: por métodos estadísticos.
Hallazgos.	Comprehensivos, holísticos, expansivos.	Precisos, limitados, reduccionistas.

Tabla II.1. Investigaciones cualitativa y cuantitativa (Pérez Serrano, 1994, pág. 54).

Además, consideramos que el método cuantitativo no podemos rechazarlo totalmente en la presente investigación, más bien, creemos oportuno aclarar que a lo largo de nuestro trabajo también hemos incluido tablas estadísticas en el recuento de datos que hacen aflorar ciertas regularidades que, incluso, pueden obedecer a determinadas leyes.

Enmarcada nuestra investigación bajo el modelo cualitativo, fortalecida en algunos momentos con cálculos cuantitativos, debemos establecer cómo debe realizarse la investigación, es decir, elegir el *marco metodológico* cualitativo que soportará nuestra investigación teórico-práctica.

Pérez Serrano (1994) determina dos métodos de investigación cualitativa: *el estudio de casos* y *la investigación-acción*. Este último método es el que aplicamos en nuestra investigación y, en este capítulo, desarrollamos la base teórica sobre la cual se sustenta.

II.2. LA INVESTIGACIÓN-ACCIÓN

Como profesionales de la enseñanza reclamamos cada día más tiempo, formación y posibilidades de sistematizar y reflexionar sobre nuestra propia actividad docente. Una modalidad de investigación cualitativa, denominada *investigación-acción* se consolida como un paradigma con un estilo propio, abierto, centrado en los problemas prácticos de la educación, empleando variedad de métodos que ayuden a la toma de decisiones y orientado a la transformación y al cambio (Pérez Serrano, 1994, págs. 134-135).

II.2.1. CONCEPTO, CARACTERÍSTICAS, RASGOS, REQUISITOS Y RECOPILACIÓN DE DATOS

El origen de la investigación-acción se sitúa en los trabajos realizados, en los años 40 del siglo XX, en Estados Unidos por el psicólogo Kurt Lewin cuyos aspectos más importantes son: planificación de la acción, recogida de datos, análisis y reflexión; siendo cíclico el proceso. A partir de 1970 investigadores como: Habermas, Gadamer, Elliott (1997)[3], Adelman, Stenhouse, Carr, Kemmis y McTaggart (1988)[4], Hopkins (1989)[5], Pérez Serrano (1994), etcétera, retoman las ideas originales de Lewin y, considerando al profesor como investigador, dan un gran impulso a una nueva y fructífera etapa de la investigación-acción en la docencia con el objetivo de conseguir mejoras educativas. He aquí tres definiciones del concepto de investigación-acción, la primera de ellas muy genérica y las otras dos incardinadas en nuestra labor docente, éstas son:

- Tiene como meta contribuir tanto a los problemas prácticos de la gente en situaciones problemáticas inmediatas, como a los fines de la ciencia social, mediante una estrecha colaboración dentro de un marco ético aceptable para ambos (Rapoport, 1970)[6].
- Es una práctica reflexiva social en la que no hay distinción entre la práctica sobre la que se investiga y el proceso de investigar sobre ella. Las estrategias docentes suponen la existencia de teorías prácticas acerca de

[3] Elliott, J. (1997). *La investigación-acción en educación.* Madrid: Morata.

[4] Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción.* Barcelona: Laertes.

[5] Hopkins, D. (1989). *Investigación en el aula. Guía del profesor*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

[6] Mencionado por Hopkins (1989, pág. 48).

los modos de plasmar los valores educativos en situaciones concretas, y cuando se llevan a cabo de manera reflexiva, constituyen una forma de investigación-acción. Si se considera una práctica social como la enseñanza como una actividad reflexiva, la división del trabajo entre prácticos e investigadores se desvanece (Elliott, 1997, pág. 95).

- La investigación-acción es una forma de indagación introspectiva *colectiva* emprendida por participantes en situaciones sociales con objeto de mejorar la racionalidad y la justicia de sus prácticas sociales o educativas, así como la comprensión de esas prácticas y de las situaciones en las que éstas tienen lugar. Ofrece a todos los participantes en la tarea de la educación un enfoque flexible de la mejora escolar a través de una acción y una reflexión críticamente informadas, apropiadas para las circunstancias y las limitaciones reales, complejas y a menudo desorientadoras, de la escuela moderna (Kemmis y McTaggart, 1988, págs. 9-10).

Las dos últimas definiciones son las que reflejan de una manera más fidedigna las aspiraciones de la presente investigación, sin embargo, en este momento debemos determinar las características de la investigación-acción en educación, según Kemmis y McTaggart (1988, págs. 30-34), éstas son[7]:

- Se propone *mejorar la educación* mediante su *cambio*.
- Es *participativa*: a través de ella, las personas trabajan por la mejora de *sus propias prácticas* y las de otras personas.
- Se desarrolla siguiendo una *espiral introspectiva*: una espiral de ciclos de *planificación, acción, observación y reflexión.* Posteriormente, modificando lo que sea preciso, se inicia un nuevo ciclo.
- Es *colaboradora*: ampliando el grupo colaborador con el mayor número posible de personas afectadas por las prácticas.
- Crea *comunidades autocríticas* de personas que participan en todas las fases del proceso de la investigación.
- Es un *proceso sistemático de aprendizaje*: nuestra acción educativa se convierte en una *praxis*, a través de la cual podemos vivir nuestros valores educativos.
- Induce a las personas a *teorizar* acerca de sus prácticas.
- Exige que las prácticas, las ideas y las suposiciones sean *sometidas a prueba*, haciendo acopio de *pruebas apremiantes.*
- No sólo implica *registrar* descriptivamente, también *recopilar y analizar nuestros propios juicios, reacciones e impresiones* en torno a lo que ocurre.

[7] El texto en cursiva corresponde a Kemmis y McTaggart (1988).

- Exige el mantenimiento de un *diario personal* en el que registremos nuestros progresos y nuestras reflexiones.
- Es un proceso *político* porque nos implica en la realización de cambios que afectarán a otras personas que realizarán *análisis críticos*.
- *Empieza modestamente* con *pequeños ciclos* de planificación, acción, observación y reflexión con *pequeños grupos* de colaboradores.
- Nos permite crear *registros* de nuestras mejoras: *actividades y prácticas* en el *lenguaje y el discurso* de los cambios en las *relaciones y formas de organización*, y del desarrollo de nuestro dominio de la investigación-acción.
- Nos permite dar una *justificación razonada* y crear una *argumentación desarrollada, comprobada y examinada críticamente* en favor de lo que hacemos.

Las características dadas por Kemmis y McTaggart (1988) contienen todos los principios de la investigación-acción y una de ellas, considerada fundamental, es la que sigue el *proceso en espiral* donde cada ciclo consta de cuatro fases (planificación, acción, observación y reflexión) y realimenta al siguiente ciclo; la figura II.2.1.1 recoge este proceso.

Nuestra investigación práctica con alumnos de segundo de bachillerato de ciencias sociales ha sido implementada con seis ciclos, los cuales siguen el *proceso en espiral*, y serán detallados a lo largo de la redacción de la presente memoria.

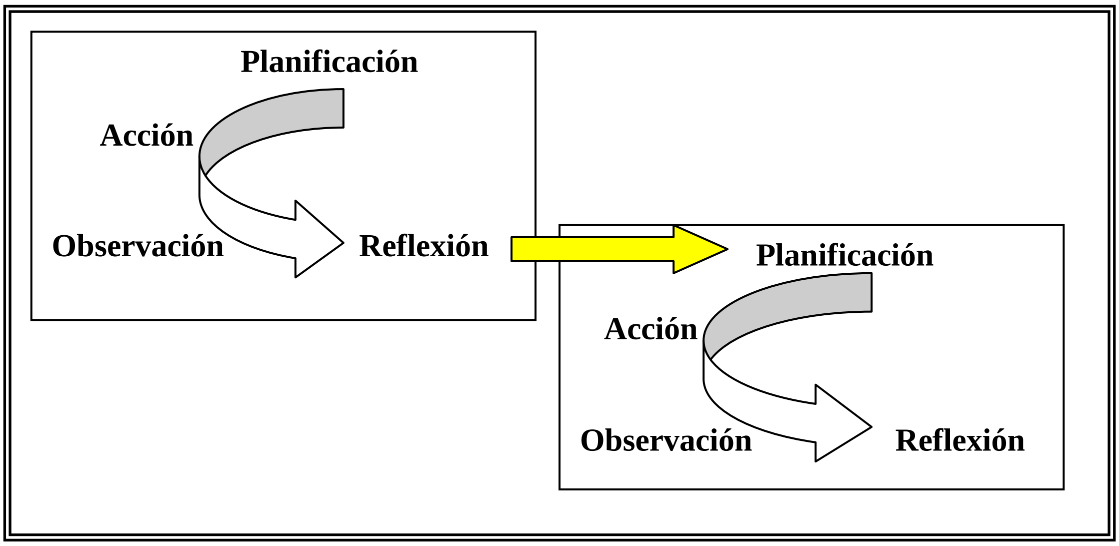


Figura II.2.1.1. Fases de cada ciclo de la investigación-acción.

Para clarificar, aún más, este modelo cualitativo de investigación, creemos conveniente dar un resumen de los rasgos que definen la metodología investigación-acción, según Pérez Serrano (1994, págs. 158-173), éstos son:

- *Vinculados a la acción:*
  - *Unión de teoría y praxis*, supone incorporar la investigación educativa a la práctica escolar, unir investigación y docencia.
  - *Orientada a la mejora de la acción*, contribuye a la resolución de problemas con una visión dinámica de la realidad, perfecciona la práctica docente y enriquece a profesores, alumnos e investigadores.
  - *Parte de problemas prácticos*, tomando la actividad educativa como hipótesis experimental, para pasar a comprobar su validez en la práctica; en contraposición con el científico conductista que comienza por un problema teórico definido por su disciplina.
  - *Protagonismo del práctico*, da prioridad a los docentes y los convierte en protagonistas de su propia investigación educativa.
- *Vinculados a la investigación:*
  - *Un nuevo tipo de investigador*, el conocimiento científico se construye con las personas implicadas en la acción educativa.
  - *Investigación amplia y flexible*, el proceso no es lineal, se vuelve a los datos tantas veces como sea necesario, se reinterpretan y se contrastan con nuevas fuentes.
  - *Perspectiva ecológica*, estudia los problemas en su propio contexto, dentro del aula.
  - *Interés por la clarificación de los valores y características del profesor*, se trata, de sacar mediante la reflexión las creencias y valores que actúan de motor en el profesor.
  - *Rigor metodológico*, no se sacrifica al rigor del método aunque se desarrolla en ambientes sociales muy variopintos y en la educación.
- *Vinculados al cambio de actitudes:*
  - *Dimensión de colaboración*, se necesita la implicación de un grupo de personas que han optado por un cambio social en la realidad concreta en la que está inscrito.
  - *Democratización del proceso de la investigación*, en el campo educativo implica el cuestionamiento del status jerárquico del rol del investigador, la igualdad/primacía del docente frente al investigador y la consiguiente coparticipación.
  - *Función crítica*, con respecto a la ciencia tradicional, la investigación cualitativa es la que permite una serie de procedimientos hipotéticos

con los que los profesores pueden experimentar como base para una traducción reflexiva de sus ideas en actuaciones educativas.

- *Función de comunicación*, la publicación de la investigación será en un lenguaje sencillo, claro y asequible; además, al comunicar los resultados, abre un trabajo a la crítica y, en consecuencia, al perfeccionamiento.
- *Acción como cambio social*, se reconoce que pueden pretenderse cambios de adaptación o de transformación radical; entre los primeros, pueden ser modestos y resolver problemas o mejorar situaciones concretas de pequeños grupos o individuales.
- *Finalidad de formación*, es un medio, para el adulto, de proseguir su desarrollo personal y su formación profesional.

Sintetiza esta autora, la investigación-acción, con estas palabra:

> La investigación-acción desempeña una importante función de formación, no de formación en abstracto, sino que se trata de un tipo de formación permanente que se va adquiriendo en el propio desempeño profesional. Esta formación que se va forjando en ese contraste diario del quehacer profesional, en el debate entre teoría y práctica, (...) configura un nuevo tipo de profesional exigente y flexible, con capacidad de educar y de educarse en un marco que encierra un proceso permanente de mejora (Pérez Serrano, 1994, pág. 173).

Los rasgos establecidos por Pérez Serrano (1994) se identifican en la presente investigación; además, los requisitos (págs. 177-179) de la investigación-acción propuestos por esta autora (texto reducido y en cursiva) los cumplen nuestra investigación (texto normal y en redonda):

1. *Que el proyecto de investigación-acción surja de problemas y preocupaciones educativas de carácter práctico que sientan como propios los educadores. No se contempla la práctica educativa como un fenómeno objetivo, más bien, lo que interesa es cómo mejorar la misma, a la vez que se comprende mejor y se descubren las condiciones en las que se llevan a cabo.*

Este profesor, después de muchos años de docencia, ha constatado que en la enseñanza secundaria integrar modos y procedimientos (calculo mental, técnicas de lápiz y papel y nuevas tecnologías) en la enseñanza de las Matemáticas entraña dificultades al propio docente, a los alumnos e, incluso, las expectativas de los padres no se cumplen como sería de desear. Ante este panorama, en lugar de navegar en el desaliento, una vez realizados los cursos de doctorado en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Valladolid y con el consenso del Tutor (Dr. D. Tomás Ortega del Rincón) se ha optado por integrar los tres modos de enseñanza en el tema de investigación denominado: **“Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías”.**

2. *Que el proyecto implique a todos los responsables del mismo, formando un equipo preocupado por las cuestiones prácticas vinculadas con la acción que se desea mejorar. Esto exige un compromiso en todas y cada una de las fases y una participación responsable.*

El director de la tesis, el profesor-investigador, profesores del Departamento de Matemáticas (uno de ellos ha sido profesor-observador) y alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales del Instituto de Educación Secundaria “Félix Rodríguez de la Fuente” de Burgos se han implicado en el presente trabajo y cada uno de ellos, coordinadamente, ha asumido sus propias tareas y responsabilidades.

3. *Que se eviten las siguientes formas y métodos de actuación: depender exclusivamente de pruebas, buscar exclusivamente la determinación del logro de los fines, ignorar las perspectivas de otros profesores, no examinar los modos en que los procesos de formación están condicionados por limitaciones sociales que escapan al control de los participantes y servir a quienes toman decisiones fuera de las situaciones en las que se conducen las actividades a expensas de decisiones racionales y participativas y, por último, romper el ciclo de acción y reflexión necesario para el desarrollo racional de la educación.*

Constatamos que la investigación que estamos llevando a cabo no ha incurrido en ninguno de estos vicios de procedimiento y afirmamos que en todo momento hemos sido totalmente rigurosos en la realización de todas las fases (planificación, acción, análisis y reflexión) de cada uno de los seis ciclos de los que se compone la presente investigación-acción.

4. *Que se mantenga la relación de un diario del proyecto en el que se registren las reflexiones críticas relativas al tema a investigar.*

Durante el periodo en el que se ha realizado la presente investigación hemos anotado los aspectos más importantes de la misma, las actividades y prácticas a realizar y el desarrollo del proyecto.

5. *Que siga una espiral de ciclos de planificación-acción-observación-reflexión.*

Al objeto de comprender este requisito, la figura II.2.1.2 refleja el proceso en espiral; posteriormente detallaremos todas las fases teóricas de cada ciclo. Nosotros, como sabemos, hemos implementado seis ciclos con sus correspondientes fases en nuestra investigación.

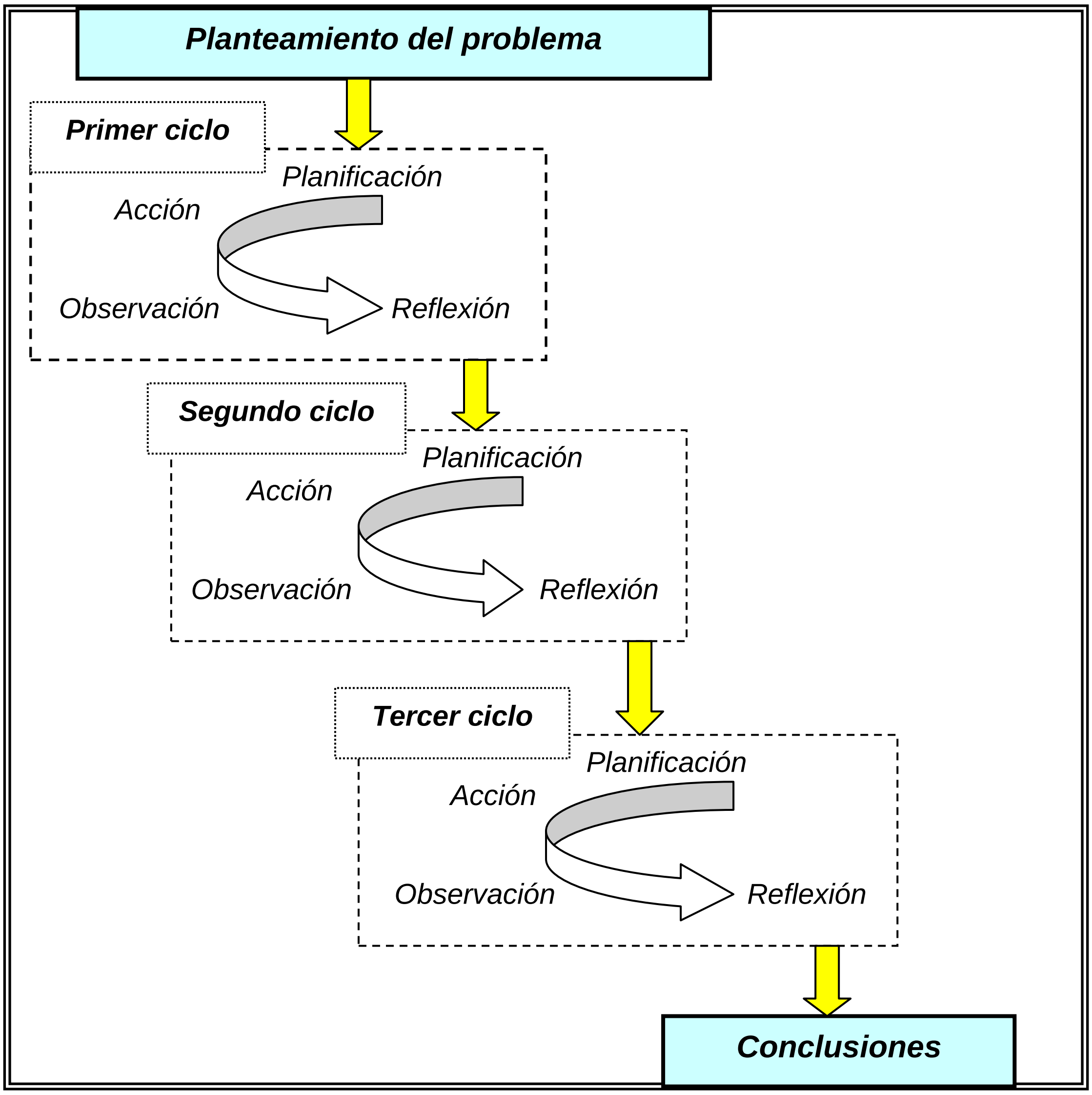


Figura II.2.1.2. Proceso en espiral, ciclos y fases de cada ciclo de la investigación-acción.

6. *Es imprescindible partir de abajo a arriba, integrar docencia, praxis e investigación, relacionar la investigación documental y la formación investigadora y, finalmente, aplicar los resultados a la práctica educativa.*

Efectivamente, nosotros hemos seguido esta propuesta integrando la investigación y la docencia y con el ánimo de aplicar las resultados para realizar una buena práctica docente.

En general, en nuestro trabajo de investigación, nos sentimos identificados con la definición, las características, los rasgos y, como hemos señalado, cumplimos los requisitos de la investigación-acción; sin embargo, esto no es suficiente mientras no se materialice por escrito la investigación que estamos llevando a cabo, la acepte la comunidad científica y nos movilice a favor de la mejora de nuestro quehacer como profesores.

Para la recopilación de datos y su posterior análisis ha sido necesario emplear un tiempo considerable tanto del profesor-investigador como del resto de las personas implicadas en este trabajo de investigación. Los instrumentos que han intervenido en la obtención de datos han sido los siguientes:

- *Anotaciones del profesor-investigador.* Después de cada clase, salvo raras excepciones, el profesor-investigador anotaba en un cuaderno específico los acontecimientos, el ambiente, las incidencias y los episodios considerados relevantes durante el desarrollo de la clase.
- *Grabaciones en audio.* Al principio, los alumnos se sorprenden por ser grabados, pasados unos minutos, la clase transcurre con la normalidad habitual y los estudiantes participan con toda naturalidad en las sesiones correspondientes. Este procedimiento de toma de datos es fidedigno con todas las intervenciones orales de los alumnos y del profesor, incluso, refleja el ambiente de clase. Las transcripciones posteriores son muy laboriosas y nos han llevado mucho tiempo, sin embargo, consideramos que la información obtenida es muy valiosa.
- *Los textos escritos de los alumnos.* Han sido muchos documentos los analizados: cuadernillos que debían rellenar los alumnos para poder obtener información sobre su comprensión teórica de los conceptos, cuadernillos sobre la comprensión de la práctica informática, cuestionarios, pruebas sobre la comprensión-adquisición de los conceptos explicados en el aula de clase y en el aula de informática. Las aportaciones de todos estos documentos han sido muy valiosas para obtener información acerca del proceso de aprendizaje de los alumnos, las dificultades encontradas, los logros conseguidos, carencias detectadas, etc.

Para el análisis de datos hemos empleado el sistema de categorías:

> El sistema de *categorías* para el análisis [de datos] se basa en el modelo ya clásico en la literatura especializada, utilizado por numerosos investigadores –por ejemplo, Bell (1976), y en España, Castro (1994), Cubillo (1997) o Blázquez (1999)– que está constituido por los tres agentes principales en el aula: objeto de la enseñanza, profesor y alumno; lo que da lugar a la consideración de tres tipos de categorías: las de comprensión matemática, las de contenido matemático y las de interacción didáctica (Ibañes, 2001, pág. 117)[8].

En nuestro trabajo, hemos utilizado los dos primeros tipos de categorías:

a) Las de *comprensión matemática* relativas a la comprensión de los alumnos de los conceptos relacionados con la integral definida en los contextos del cálculo mental y la exposición tradicional en el aula de clase quedarán definidas en el capítulo VI y las del más moderno contexto del aula de informática se establecerán en el capítulo XI.

b) Las de *contenido matemático* se han elaborado para el análisis del concepto (integral definida) en once libros de texto de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II y han quedado establecidas en el capítulo IV.

II.2.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Llegado a este punto, es el momento de determinar el problema objeto de nuestra investigación, aunque ya lo hemos definido y delimitado en el capítulo anterior de la presente memoria y la denominación del tema es: *"Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías"*; pensamos que ahora debemos justificarlo bajo la perspectiva de la investigación-acción. Veamos, al amparo de relevantes autores, algunas de las motivaciones que nos han llevado a ello:

- Debemos saber de qué modo nuestro trabajo está moldeado y justificado por determinadas tareas educativas y que nuestro trabajo educativo encaja en el contexto más amplio de la escolarización y la sociedad como parte del proceso mediante el cual los individuos, nuestra sociedad y nuestra cultura se forman y reforman a través de las generaciones (Kemmis y McTaggart, 1988, pág. 72).

[8] Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

- Consiste en tratar de diagnosticar y descubrir el problema que preocupe a todos, su origen, causas y por qué ocurre. Es importante descubrir incoherencias entre lo que sucede, por qué sucede y qué debería suceder si se elaborara un proyecto alternativo. Diagnosticamos para introducir cambios; propicia, además, no sólo la mejora de lo que se hace, sino su comprensión más profunda (Pérez Serrano, 1994, págs. 181-183).
- La función principal del profesor es la de enseñar y ningún método de investigación debe interferir o interrumpir la tarea de enseñar. Al hacerse profesor-investigador, cada profesor está de forma deliberada y consciente ampliando su función para incluir un elemento profesional. El problema objeto de la investigación emprendida por el profesor debe ser un problema atractivo para él, debe ser realmente un problema; es decir, debe tener solución, de lo contrario, por definición, no es un problema.
  Elige un tema que sea interesante para ti o tus alumnos, o que tengas que encontrártelo necesariamente en el curso de tus actividades escolares normales; el tema en el que te vas a concentrar tiene que ser motivador por sí mismo; si el profesor escoge un tema que es muy complejo o variable, pronto aparecerán la frustración y el desencanto. En suma, al elegir un tema para investigar en el aula, asegúrate, al menos al principio, de que sea viable, concreto e interesante por sí mismo (Hopkins, 1989, págs. 58-65).

Las reflexiones de estos especialistas, del profesor-tutor asignado al alumno en los correspondientes cursos de doctorado (director y autor, respectivamente, de la presente tesis) y del propio profesor-investigador han sido determinantes para la elección del tema anteriormente citado. Además, dicho tema, cumple, entre otras, las recomendaciones expuestas por Kemmis y McTaggart (1988), Pérez Serrano (1994) y Hopkins (1989); incluso, vistos los *"Antecedentes"* del capítulo I, basta releer *"La delimitación del problema"* para que, entre éstas y aquéllas, tengamos suficientes razones para justificar la elección del problema objeto de investigación, éste es: ***"Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías"***.

Aún así, todavía, no se ha planteado el problema en su totalidad, tal y como lo exige la investigación-acción; debemos formular las *"Hipótesis"*, sin embargo, de momento, las posponemos hasta que desarrollemos en su totalidad el capítulo II (*Marco Metodológico Cualitativo*) y el capítulo III (*Marco Teórico*). No obstante, consideramos la necesidad, científica, de justificar la inclusión de las *"hipótesis"*, he aquí algunas e importantes razones:

- El profesor-investigador, en lugar de aceptar sin crítica lo que defiende una teoría concreta, la pone en práctica en forma de hipótesis de trabajo; este pensamiento engloba dos de los aspectos fundamentales del profesor autónomo y profesional, el primero porque controla el conocimiento en lugar de subordinarse a él y el segundo por estar inmerso en el proceso de teorizar y de adquirir conocimiento de sí mismo. Es importante formular de forma tan explícita como sea posible las hipótesis que se están comprobando y conviene formularlas de la forma menos ambigua posible, de manera que estén claramente expuestas a una posible refutación (Hopkins, 1989, págs. 70-72).
- Desarrollar y comprobar hipótesis prácticas acerca de cómo pueden resolverse los problemas de la enseñanza previamente identificados e investigar en qué medida pueden ser aplicadas en forma general (Elliott, 1997, pág. 136).
- Una vez identificado el problema se pasa a formular las hipótesis-acción para una posible solución del problema. Las hipótesis son simples conjeturas, posibles explicaciones que el investigador cree que dará respuesta al problema planteado, su misión se centra en explicar de forma clara lo que debería hacerse para obtener la resolución del problema. Aunque ofertan en cierto modo respuestas provisionales, constituyen el punto de partida para la acción al mismo tiempo que la orientan (Pérez Serrano, 1994, pág. 186).

Queda dicho que las hipótesis se formularán posteriormente; todos estos investigadores, en los párrafos anteriores, nos ha orientado hacia dónde debe ir la investigación-acción, esto es, la determinación de los ciclos y las fases de los que se componen cada uno de ellos.

II.2.3. LOS CICLOS Y SUS FASES

Aunque las figuras II.2.1.1 y II.2.1.2 son ilustrativas de lo que en investigación-acción se entiende por ciclo y las fases que lo componen, sin embargo, creemos oportuno fijar el concepto de ciclo, según Kemmis y McTaggart y Pérez Serrano, éste es:

- La investigación-acción se desarrolla en una *espiral introspectiva*: una espiral de ciclos de *planificación, acción* (establecimiento de planes)*, observación* (sistemática), *reflexión*... y luego replanificación, nuevo paso a la acción, nuevas observaciones y reflexiones (Kemmis y McTaggart, 1988, pág. 30).

- Que siga una *espiral de ciclos de acción-reflexión* (planear, actuar, observar y reflexionar) para favorecer la comprensión de las prácticas y sus efectos. Todas las actividades de cada fase están interrelacionadas y sistematizadas de forma tal que cada fase precede de la anterior y da forma a la siguiente (...) se aconseja ciclos cortos y alcanzables, puesto que permiten apreciar fácilmente el progreso y evolución del proyecto, proporcionan una cierta práctica y son más gratificantes en lo que se refiere a aprender del proceso (Pérez Serrano, 1994, pág. 179).

Como tenemos dicho, seis ciclos componen la presente investigación, al objeto de ser más comprensible nuestro trabajo, a cada ciclo le hemos asignado el curso académico en el que se desarrolló, así pues, el primer ciclo corresponde con el curso 2003-2004 y, así sucesivamente, el sexto ciclo se realizó durante el curso 2008-2009. Naturalmente, la duración de cada ciclo no ha sido la del curso académico en el que está incardinado; cada uno de ellos no superó las veintidós sesiones de trabajo conjunto entre profesor y alumnos, considerando como tales las clases impartidas en el aula del grupo, las clases del aula de informática y las sesiones, de control, en las que se realizaron pruebas escritas; las horas de trabajo personal de cada uno de los alumnos han variado sustancialmente y, aunque no podemos cuantificarlas, queda constatado por la calidad y buena presentación de algunos trabajos, en contraposición con la desidia y poco interés mostrado en la realización de otros. El primer ciclo se desarrolló durante el mes de mayo de 2004, el tiempo asignado al resto de los siguientes ciclos es el de los meses de diciembre, enero y una o dos sesiones de trabajo en el mes de mayo del curso académico correspondiente. La figura II.2.3 muestra gráficamente la relación en espiral de los diferentes ciclos que componen la presente investigación.

Una vez realizado el planteamiento del problema, definido el concepto de ciclo y determinados los ciclos de nuestra investigación, es el momento de explicar, teóricamente, las fases de cada ciclo; su formalización práctica se realizará en el momento de estudiar, en el contexto del desarrollo de nuestra investigación, cada uno de estos ciclos.

Debido a la gran cantidad de ciclos que componen la presente investigación, considerando el director y profesor investigador de esta tesis que no es aconsejable establecer un capítulo por cada ciclo, se ha optado por agruparlos según se determina en la tabla II.2.3.

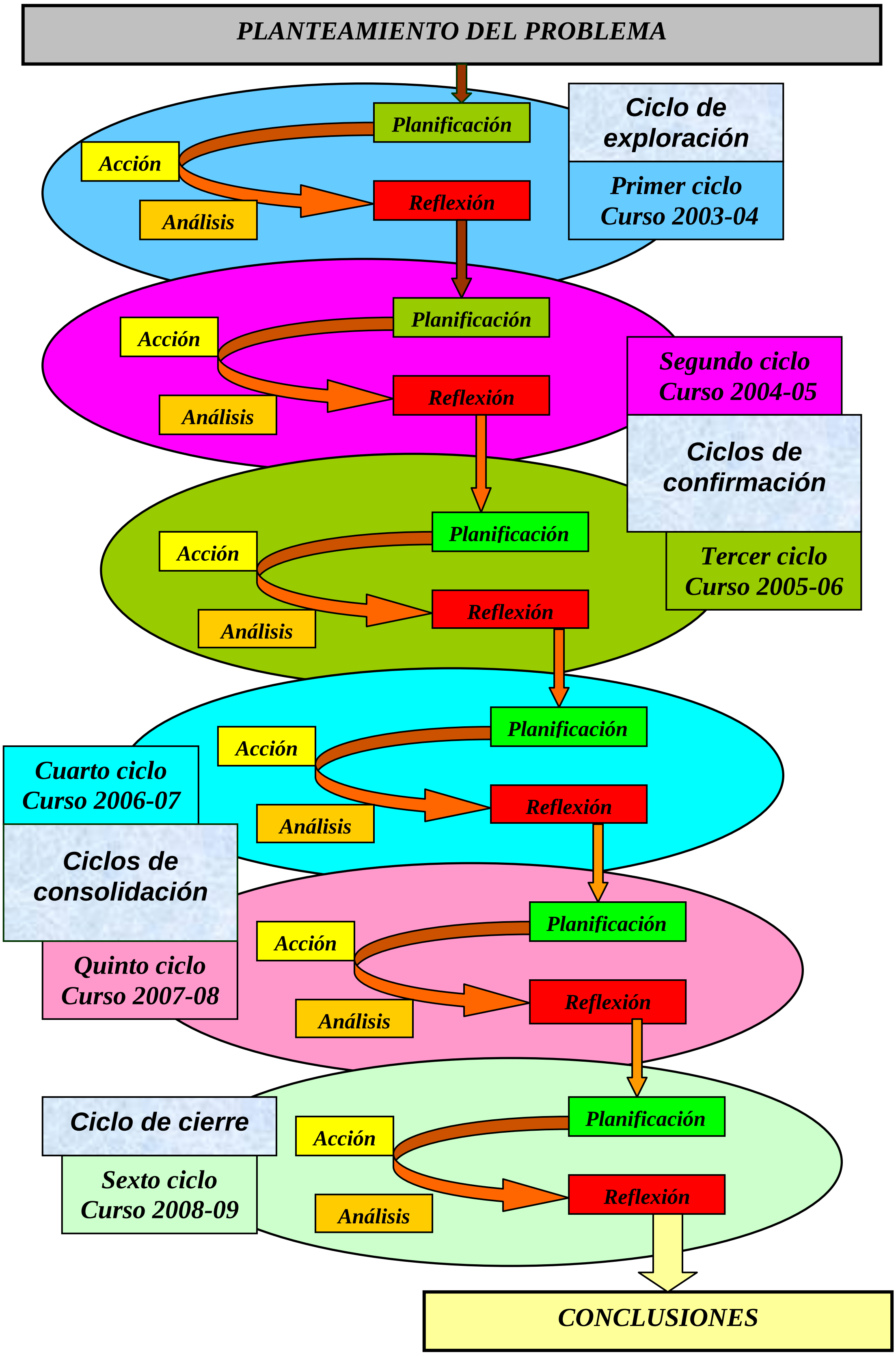


Figura II.2.3. Proceso en espiral. Planteamiento del problema, ciclos, fases y conclusiones de nuestra investigación-acción: Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías.

Ciclos	***Cursos***	***Capítulo***	***Denominación***
I	2003-04	VII	Ciclo de exploración
II y III	2004-05 y 2005-06	VIII	Ciclos de confirmación
IV y V	2006-07 y 2007-08	IX	Ciclos de consolidación
VI	2008-09	X	Ciclo de cierre

Tabla II.2.3. Distribución, por capítulos, de la memoria de los ciclos de la investigación sobre la integral definida y el cálculo mental.

Los cuatro capítulos de la tabla anterior deberán contener la investigación práctica correspondiente a la *Integral Definida* y al *Cálculo Mental*, aquellos capítulos en los cuales se redacte conjuntamente la memoria de dos ciclos deberán escribirse los resultados comunes de ambos y, asimismo, deberá quedar constancia de las especificidades de cada uno de los ciclos.

La utilización de las *Nuevas Tecnologías* para la enseñanza y el aprendizaje de la integral tendrán un único capítulo, el XI, para todos los ciclos en los cuales se hayan utilizado programas de cálculo simbólico.

Retomando la teoría de la investigación-acción, por orden secuencial de su aparición, las cuatro fases de las que se compone cada ciclo son: *planificación, acción, observación o análisis de la acción y reflexión*; veamos, brevemente, las características fundamentales de cada una de ellas.

II.2.3.1. Planificación

En este punto, para comenzar cada ciclo, es necesario, realizar un plan de trabajo en el cual se concreten las actividades que deben desarrollarse, el grupo en el cual se realizarán, los medios técnicos o materiales que serán empleados, las limitaciones de tiempo y recursos, cómo se recogerán los datos, etc. La *planificación* debe ser bastante flexible para adaptarse a efectos imprevistos en la acción. Expliquémoslo con otras palabras:

> La investigación-acción es una estrategia y planear estrategias es fundamental. Se trata de decisiones prácticas y concretas. Pensar en el problema en general, posibilidades, limitaciones objetivas, subjetivas, en que se puede mejorar o cambiar. Decidir qué debe hacerse, por dónde empezar, quiénes están implicados, con qué recursos contamos, qué objetivos nos proponemos. Planear todo aquello que precisemos para resolver el problema, acciones, responsabilidades, tiempos, espacios aplicaciones,

> controles, registros, etc. En este sentido el plan guía y orienta a la acción, pero también constituye el punto de referencia para la reflexión posterior, que puede provocar la modificación y el desarrollo de nuevos planes (Pérez Serrano, 1994, págs. 186-187).

Las actividades docentes realizadas para elaborar esta tesis, en todos los ciclos han ido destinadas, como ya sabemos, a alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales del Instituto de Enseñanza Secundaria "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos; más adelante se concretarán cada una de las seis planificaciones.

II.2.3.2. Acción

La *acción* es la aplicación cuidadosa y reflexiva de la planificación realizada en el estadio anterior, debe ser fluida y dinámica y, a veces, exige decisiones instantáneas acerca de qué debe hacerse y debe desarrollar el ejercicio de la práctica razonada; durante la acción es fundamental la toma de datos, ésta debe ser lo más amplia posible y con las técnicas que se consideren más viables y oportunas. En otras palabras:

> La acción pone manos a la obra lo que se ha planeado. Naturalmente, las cosas no funcionan, habitualmente, de un modo así de sencillo. Su plan no habrá contemplado todas las circunstancias de su puesta en práctica y las circunstancias pueden haber cambiado, quizá obtenga una retroalimentación inmediata que le obligue a modificar el plan casi de inmediato. Es importante, sin embargo, que no se desvíe demasiado de su plan. Es aún más importante, cuando pase a la acción que *controle* aquello que ocurre (Kemmis y McTaggart, 1988, págs. 102-103).

Las técnicas de toma de datos que hemos empleado en nuestra investigación quedaron determinadas anteriormente, las grabaciones en audio se realizaron correctamente, sus transcripciones fueron analizadas con todo detalle para la elaboración de esta memoria y los documentos de los alumnos han sido *estudiados* para obtener una información más precisa. Esto nos ha permitido entrar en la siguiente fase.

II.2.3.3. Observación o análisis

La *observación* o el *análisis* ha de estar documentado, servirá como base para la posterior reflexión, tiene que ser flexible y abierto para registrar lo inesperado, es decir, el objetivo básico será la introspección crítica. En la etapa anterior quedó claro que es fundamental la correcta toma de datos, esto no es suficiente, deben analizarse; así lo establecen los investigadores anteriores:

- Ha llegado ahora el momento de que ensamble sus observaciones, coteje los datos y los filtre para averiguar qué pueden contarle acerca de si las cosas marcharon tal y como había planeado. Procure controlar sus especulaciones. Intente que el retrato de aquello que ha ocurrido sea lo más claro posible, de tal forma que disponga de un informe máximamente fiable, utilizable como base para la reflexión y para decidir qué hay que hacer (Kemmis y McTaggart, 1988, págs. 113-114).

- Con el análisis se trata de dar sentido a lo que ocurre en la vida real, el análisis debe mirar a la acción total, holística e interactiva que sugiere cómo un aspecto puede influir en otro. En general, conviene hacer un esfuerzo para presentar los datos en forma gráfica, de este modo se transmite mejor el mensaje que se puede representar con un carácter más preciso, relevante y objetivo (Pérez Serrano, 1994, págs. 190-191).

Nuestros análisis de los datos han sido exhaustivos, se han establecido categorías de la comprensión de los conceptos, hemos calculado porcentajes, elaborado gráficos y tablas, incluso, se ha redactado alguna observación que ha sido considerada importante por el profesor investigador; todo ello se detallará cuando se estudien todos y cada uno de los ciclos.

II.2.3.4. Reflexión

La *reflexión* pretende encontrar sentido a la planificación, los procesos, los problemas y las restricciones que se han manifestado en la acción y a los resultados obtenidos por medio de la observación o del análisis; Pérez Serrano y Kemmis y McTaggart, escriben al respecto:

- La reflexión rememora la acción tal y como queda registrada a través de los distintos instrumentos, intentando explicar qué ocurre y por qué ocurre. Se reflexiona sobre el plan de acción, sobre todo el proceso y las acciones; se contrasta lo planeado y lo que se consigue; se compara lo que se pretende, lo que se realiza y lo que se logra (Pérez Serrano, 1994, págs. 191-192).

- Ha llegado el momento de reflexionar: analizar, sintetizar, interpretar, explicar y sacar conclusiones. En esta etapa, le sugerimos que piense sintéticamente, que intente integrar sus ideas en las categorías del lenguaje/discurso, la acción/práctica y las relaciones sociales/organización (Kemmis y McTaggart, 1988, págs. 114-115).

En todos los ciclos que componen la presente investigación, hemos realizado una reflexión exhaustiva, se ha tenido especial cuidado en determinar las correspondientes categorías y en la explicación de los resultados obtenidos, además, en cada ciclo, esto, lo hemos recogido en un apartado específico denominado *Reflexiones.*

Las fases que componen cada ciclo: planificación, acción, análisis y reflexión no deben entenderse como estáticas, estancas y completas por sí mismas; mediante una buena reflexión estamos en disposición de introducirnos en un nuevo ciclo comenzando por la planificación (entiéndase replanificación) y avanzando por medio de sus propias fases; este procedimiento se conoce como *proceso en espiral*, donde una de sus principales características es la retroalimentación constante. Este proceso no es indefinido, hay un momento en el cual debe darse por terminado pero: ¿cómo?, ¿cuándo? y ¿qué debe hacerse después? es lo que nos proponemos contestar a partir de este momento; comencemos por la última pregunta, ello nos introduce en el siguiente epígrafe.

II.2.4. CONCLUSIONES

Establecidos y desarrollados los ciclos y realizadas todas las fases de cada uno de ellos, entonces, puede decirse que se ha recorrido un largo proceso en el que estamos más capacitados para:

> Leer la realidad de una forma más sistemática y organizar las secuencias. Detectar posibles lagunas, incoherencias y vacíos que se han producido a lo largo de la investigación. Reformular más precisamente el problema o algún matiz del problema del que no habíamos captado toda su importancia. Imaginar soluciones hipotéticas y conjeturas a partir de las condiciones diferentes a las ya conocidas. Discutir e interpretar los datos a partir de un conocimiento más profundo del contexto y el proceso de cambio. Transferir el conocimiento de lo estudiado a situaciones similares, es decir, aprender de la experiencia sin intentar generalizar (Pérez Serrano, 1994, pág. 193).

Esto que comenta esta autora, mirando al *Planteamiento del Problema* y el establecimiento de *Hipótesis*, es lo que se conoce como *Conclusiones*; éstas tienen que dar respuesta a las *Hipótesis* que se conjeturaron, su redacción (a la luz del trabajo de investigación-acción desarrollado) debe ser rigurosa, clara, precisa y veraz, sin ninguna concesión a las interpretaciones.

Así lo hemos realizado, recordemos que en la *Delimitación del Problema* y el *Planteamiento del Problema* se hicieron referencias a problemas abiertos de Turégano (1994), Depool (2004) y González-Martín (2006) y en el presente trabajo se han establecido con todo rigor las *Hipótesis* y han sido redactadas las *Conclusiones* con las exigencias del párrafo anterior. Es más, entendemos que a la luz de la investigación-acción realizada, Pérez Serrano propone que se determinen una serie de *Problemas Abiertos* para posibles y futuros trabajos de investigación-acción, así lo hacemos.

Por otro lado, pensamos que de poco serviría que se hiciese una excelente investigación-acción sobre un determinado problema si no se organizaran correctamente los datos; esta organización debe comportar que: la investigación pueda repetirse, la evidencia usada para generar hipótesis y la acción posterior esté claramente documentada y, por último, que la acción efectuada como resultado de la investigación sea controlada (Hopkins, 1989, pág. 142). Si el trabajo realizado está bien hecho, entonces, debe exponerse a la crítica pues favorece un diálogo entre los profesionales que está orientado a la investigación y comprometido con la acción y la mejora de la práctica (Hopkins, 1989, págs. 146-147). Así lo entendemos y lo hemos puesto en práctica, por tanto, el trabajo de investigación-acción llevado a cabo, durante tantos años, queda redactado en la presente Tesis Doctoral.

II.3. VALIDEZ DE UN ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN ACCIÓN

Al estudiar los ciclos, dejamos pendiente las preguntas ¿cómo? y ¿cuándo? finaliza el proceso en espiral para que sean considerados válidos los productos de un determinado proceso de investigación-acción, Elliott (1997) lo expresa en los siguientes términos:

- Con respecto a la validez de un informe de investigación acción hemos de distinguir entre su validez interna y su validez externa. Un informe puede ser considerado internamente válido si el autor demuestra que los cambios señalados en su análisis del problema constituye una mejora. Por tanto, un informe de este tipo ha de contener no sólo el análisis de un problema, sino la evaluación de la acción emprendida. Un informe puede considerarse externamente válido si las intuiciones que presenta pueden generalizarse más allá de la situación o situaciones estudiadas (Elliott, 1997, pág. 181).
- "La validación externa de los informes de estudios de casos (llamada a veces "validez ecológica") es, pues, un proceso completamente diferente de

> la validación externa empleada en los tipos de investigación más positivistas, basada en estudio de muestras. El conocimiento generado a partir de los estudios de muestras es externamente válido si puede demostrarse que es verdaderamente representativo de la población de la que se ha extraído; a veces se denomina este proceso “validación de población”, y está determinado por la utilización de procedimientos (normalmente de naturaleza estadística) que no dependen del juicio de los usuarios individuales de los informes de investigación. En la investigación mediante estudio de casos sobre problemas prácticos, los responsables de la validación externa del estudio radica en el usuario y no en el investigador (Elliott, 1997, págs. 183-184).

- La investigación-acción no supone que sus descubrimientos se puedan generalizar pues se basa en el estudio de casos y no de muestras. Cuando las intuiciones adquiridas a partir de un estudio de casos se traducen a una acción de más calidad puede demostrarse su validez externa y, por tanto, la posibilidad de generalización que encierran (Elliott, 1997, pág. 184).

Dado que la validez externa de la investigación-acción sólo depende del usuario, deberemos centrarnos en la validación interna para poder garantizar que el presente trabajo cumple con los requisitos establecidos para ser considerado válido como trabajo de investigación-acción. Así pues, existen dos técnicas básicas de validación interna de las hipótesis, éstas son la ***saturación*** y la ***triangulación***, en los siguientes párrafos se hace una descripción de las mismas y se comenta su incidencia con el presente trabajo de investigación.

> La técnica de la saturación consiste en que una hipótesis o categoría generada de la observación se comprueba repetidamente con los datos en un intento de modificarla, validarla o falsificarla. Es difícil y quizá temerario sugerir una frecuencia que asegure la validez de una categoría, porque eso variará de un caso a otro, pero durante este proceso pueden ocurrir varios elementos predecibles. Primero, si después de repetidas comprobaciones la categoría no aparece debe descartarse. Segundo, la categoría pudo haberse conceptualizado en bruto y a través de la comprobación, el concepto se modifica, matiza y amplía. Tercero, aunque el proceso de falsificación nunca se completa, llega un momento en el que la observación repetida no llega ni a la refutación ni a la ampliación y solamente sirve para apoyar la hipótesis. En este punto, cuando decrece la utilidad de la observación, se dice que ha habido una saturación y que la hipótesis ha sido validada (Hopkins, 1989, págs. 135-136).

Pensamos que en esta investigación hemos realizado correctamente la técnica de la saturación puesto que se han implementado seis ciclos de investigación-acción en espiral, se han contrastado todas las categorías y, en consecuencia, las hipótesis; creemos que, al final, las conclusiones de los últimos ciclos eran básicamente las mismas, por tanto, continuar con nuevos ciclos no aportaba nada nuevo a nuestra investigación.

> La triangulación (figura II.3) implica la obtención de relatos acerca de una situación de enseñanza desde tres puntos de vista bastante distintos: los correspondientes al profesor, a los alumnos y a un observador participante. La determinación de quien obtiene la información, de cómo se presentan los relatos y de quién la compara depende considerablemente del contexto. El proceso de recabar los relatos desde tres puntos de vista diferentes tiene una justificación epistemológica. Cada vértice del triángulo se sitúa en una posición epistemológica singular con respecto al acceso a los datos relevantes sobre una determinada situación de enseñanza. La persona ubicada en la mejor posición para tener acceso a las intenciones y objetivos de la situación, vía introspección, es el profesor. Los alumnos ocupan la mejor posición para explicar cómo las acciones del profesor influyen sobre su propio modo de responder a la situación. El observador participante se encuentra en la mejor participación para recoger datos sobre las características de la interacción entre el profesor y los alumnos. Al compartir su relato con los precedentes de los dos otros puntos de vista, la persona que ocupa uno de los vértices del triángulo tiene la oportunidad de comprobar y revisar, quizá, su propia perspectiva al contar con datos más completos (Elliott, 1997, pág. 150).

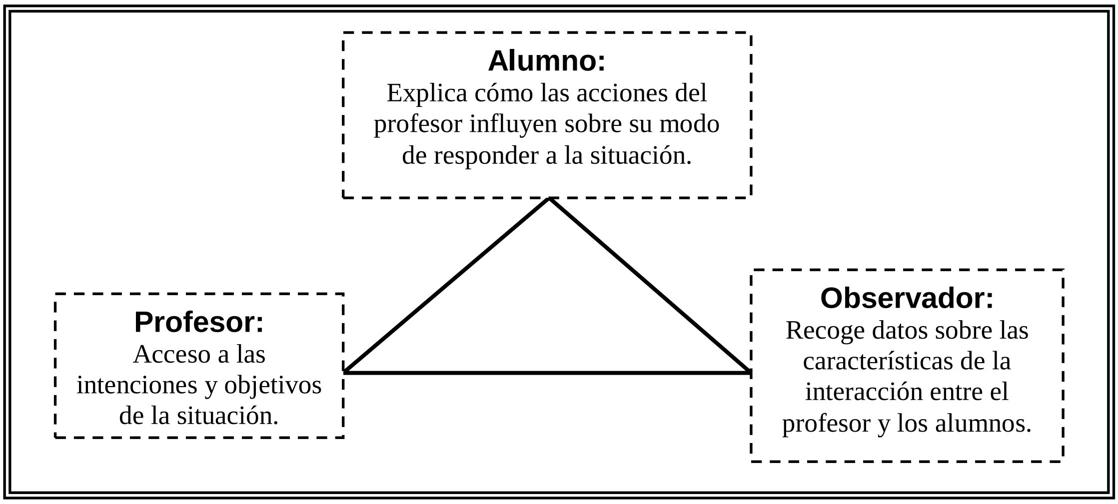


Figura II.3. La triangulación según Elliott.

En nuestra investigación hemos contado, en el último ciclo, como observador externo al Jefe del Departamento de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos; con este método se pretende examinar las intervenciones del profesor y los alumnos, la forma de trabajar y las dificultades de los alumnos y del profesor y las interacciones entre profesor-alumno y alumno-alumno; la observación efectuada por el observador fue realizada bajo un protocolo.

En el resto de los ciclos se ha considerado como observador, al director de la presente tesis, basándose su observación en la información suministrada por el profesor-investigador. Pensamos que el presente trabajo cumple con los requisitos necesarios para ser considerado de investigación-acción; además, este tipo de investigación queda ampliamente contrastada con relevantes trabajos realizados por investigadores tales como: Blázquez (1999), Ibañes (2001), García Olivares (2007)[9] y Pecharromán (2008)[10].

[9] García Olivares, A. (2007). *Educación matemática atendiendo a la diversidad. Análisis de una metodología específica.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

[10] Pecharromán, C. (2008). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

***CAPÍTULO III:* MARCO TEÓRICO. HIPÓTESIS 127**

III.1. MODELOS COGNITIVOS 127

III.1.1. PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO 128

III.1.2. IMAGEN CONCEPTUAL Y DEFINICIÓN CONCEPTUAL 132

III.1.3. DIFICULTADES, OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y ERRORES 136

III.1.4. LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS DE BROUSSEAU 140

III.1.5. EL MODELO DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA 145

III.1.6. LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE CHEVALLARD 155

III.1.7. LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE DUVAL 159

III.1.8. LA TEORÍA APOE 164

III.1.8.1. Análisis teórico 166

III.1.8.2. Tratamiento instruccional. Metodología de la enseñanza ACE 171

III.1.8.3. Observación, discusión y valoración 173

III.1.8.4. Descomposición genética de la integral 174

III.1.8.5. Aportaciones y limitaciones de la teoría APOE 181

III.2. MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN. ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA 183

III.2.1. PODER DESCRIPTIVO 184

III.2.2. PODER EXPLICATIVO 184

III.2.3. ALCANCE 184

III.2.4. PODER PREDICTIVO 185

III.2.5. RIGOR Y ESPECIFICIDAD 185

III.2.6. CAPACIDAD DE FALSACIÓN 186

III.2.7. CAPACIDAD DE REPLICACIÓN 186

III.2.8. TRIANGULACIÓN 187

III.3. HIPÓTESIS 188

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO. HIPÓTESIS

III.1. MODELOS COGNITIVOS

Es evidente que la presente investigación queda incluida dentro del campo de la *Didáctica de la Matemática*, ahora es el momento de definir, en un sentido amplio, tal concepto, éste es:

> La didáctica de la matemática es el arte de concebir y de crear condiciones que pueden determinar el aprendizaje de un conocimiento matemático por parte del individuo. El aprendizaje se considera aquí como un conjunto de cambios de comportamiento que señalan, a un observador predeterminado, que un sujeto dispone de un conjunto de conocimientos, lo que implica la gestión de diversos registros de representación, la creación de convicciones específicas, el uso de diversos lenguajes, el dominio de un conjunto de referencias idóneas, de pruebas, de justificaciones y de obligaciones; estas condiciones deben poder ser puestas en acción y reproducidas intencionalmente, en este caso, se habla de prácticas didácticas.
>
> Las prácticas didácticas son también "condiciones" y por tanto, a su vez objeto de estudio; la didáctica se presenta entonces como el estudio de tales convicciones, bajo formas de proyectos y de efectivas realizaciones.
>
> Los estudios científicos de tipo experimental en este campo necesitan de la explicación de conceptos y de métodos que deben ser sometidos a exigencias de verificación de la coherencia y de adecuación a la específica contingencia. Ciertas teorías tienen por objeto evidenciar los aspectos que estudia la didáctica (D'Amore, 2008)[1].

Los párrafos anteriores encierran varias consideraciones sobre la *Didáctica de la Matemática,* en primer lugar lo define como *"el arte de concebir y crear condiciones"*, es decir, de enseñar, sin embargo, no explicita nada sobre la enseñanza; posteriormente pasa al aprendizaje, ahora, sí, define el concepto relacionándolo con *"un observador predeterminado"*. En esta investigación, intervienen como observadores el profesor-investigador, el director de la

[1] D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de la enseñanza. *Enseñanza de la Matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática), vol. 17, nº 1,* pp. 87-106.

presente tesis, un profesor de matemáticas y, más adelante, las personas que lean y reflexionen con la lectura de este trabajo. Para un buen ensamblaje del binomio enseñanza-aprendizaje, D'Amore (2008), considera que deben darse buenas condiciones para que las prácticas didácticas sean reconocidas a nivel científico y, es aquí, donde iniciamos el presente capítulo al establecer el *"Marco Teórico"* o especificar las teorías más importantes en *Didáctica de la Matemática.* Esto es: toda investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos, como la que estamos llevando a cabo sobre la noción de integral definida, debe enmarcarse en una serie de supuestos teóricos que expliquen qué se entiende por términos como comprensión o conocimiento, y cómo se entiende el funcionamiento de la mente humana en los procesos cognitivos. Así pues, este trabajo se enmarca dentro de una amplia línea de investigación sobre procesos mentales de alto nivel, el pensamiento matemático avanzado y dentro del mismo tienen cabida aspectos concretos de determinadas teorías como la de la imagen conceptual de Tall y Vinner, la de los obstáculos epistemológicos de Brousseau o la de la transposición didáctica de Chevallard, y determinados modelos como el modelo de comprensión de Sierpinska, o el de sistemas de representación de los conceptos matemáticos. Todas estas teorías o modelos se desarrollan a continuación.

III.1.1. PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

Azcárate y Camacho (2003)[2], consideran que el pensamiento matemático es elemental y avanzado en los siguientes términos:

> En 1985 se formó un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del "Pensamiento Matemático Avanzado" y, en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal. En España, desde mediados de la década de los años noventa del siglo pasado, ha evolucionado la investigación en Didáctica de las Matemáticas desde los conceptos básicos de la enseñanza primaria "pensamiento matemático elemental" a cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático propio de los currículos de bachillerato y primeros cursos universitarios "pensamiento matemático avanzado", además, en palabras de

[2] Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* vol. X, nº 2, pp. 135-149.

> Dreyfus (1991), comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales.

Nuestra investigación sobre el Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías se encuentra dentro de la Didáctica de la Matemática y más concretamente en el currículo del Análisis Matemático del último curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales y en el contexto del pensamiento matemático avanzado. Debido a la complejidad intrínseca de la noción de integral y a la amplitud de su campo conceptual (existe una fuerte interrelación entre el concepto de integral definida y otros conceptos tales como el de límite, función, infinito, etc.), es de esperar que el aprendizaje de dicha noción involucre procesos cognitivos de alto nivel en matemáticas.

Según Tall (1991)[3], citado por Blázquez (1999, pág. 50-53), el pensamiento matemático avanzado difiere del elemental en que, básicamente, se requiere una reconstrucción cognitiva para pasar de la descripción del concepto a la definición y de la convicción a la prueba lógica basada en la definición. Asimismo, Tall (1991) establece una serie de consideraciones cognitivas acerca del pensamiento matemático avanzado, que tendremos en cuenta en nuestra investigación, éstas son:

- Existen muchos tipos de "mentes" matemáticas, es decir, los matemáticos tienen diferentes percepciones de las matemáticas (intuicionistas, formalistas, logicistas, constructivistas, etc.), así como también existen diferentes puntos de vista sobre un concepto matemático, dependiendo de las experiencias previas; por tanto, no existe un modo absoluto de pensar acerca de las matemáticas.
- Es posible que en la mente de un individuo convivan puntos de vista conflictivos, pero que no provocan conflictos en la práctica si no se evocan simultáneamente[4].
- La psicología constructiva de Piaget da una explicación de cómo se crean las ideas en la mente de cada individuo que se puede aplicar a los procesos de pensamiento matemático avanzado. Según Piaget existe la necesidad individual de un equilibrio dinámico en la mente. Este equilibrio puede ser

[3] Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En: Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer. Pp. 3-21.

[4] En el apartado III.1.2, del presente capítulo, se desarrolla la teoría de la definición e imagen conceptual de Tall y Vinner que hace referencia a este hecho.

perturbado por la confrontación entre conocimientos nuevos y antiguos, dando lugar así a un periodo de transición que lleva a la reconstrucción de la estructura cognitiva y a la adquisición de un nivel de madurez superior. En este proceso de transición el individuo adquiere datos nuevos -*asimilación*- obligando a que la estructura cognitiva se modifique -*acomodación*-. Skemp distingue entre aquellos procesos de aprendizaje en los que hay una simple expansión de la estructura individual cognitiva y aquellos donde hay un conflicto cognitivo y requieren una reconstrucción mental.

- Siguiendo el esquema anterior, los problemas surgen cuando las nuevas ideas no se acomodan satisfactoriamente. Así aparecen los obstáculos epistemológicos[5], que son un ejemplo de conflicto cognitivo entre partes inconsistentes de la imagen conceptual del individuo. Una explicación para algunos de los obstáculos viene dada por lo que Tall llama *principio de extensión genérica*, que consiste en generalizar las propiedades conocidas a otros contextos, cuando se han trabajado ejemplos del mismo tipo, sin contraejemplos, en un contexto determinado.
- En el aprendizaje de matemáticas avanzadas hay que distinguir dos procesos: por un lado, la *generalización*, que consiste en extender procesos familiares, y puede ser *expansiva* si no requiere cambios en las ideas, *reconstructiva* si requiere reconstrucción de la estructura cognitiva existente, o *disyuntiva* si se añaden nuevas ideas en la estructura cognitiva que no se integran con las antiguas; y, por otro lado, la *abstracción*, que requiere una gran reorganización mental. La generalización expansiva es una buena técnica de enseñanza porque aplica un proceso conocido en un contexto distinto[6] y es también un primer paso hacia la abstracción formal, sin necesidad de reconstrucción mental.
- La intuición y el rigor se toman habitualmente como términos opuestos, pero, al igual que las funciones en el cerebro, se encuentran íntimamente relacionados. La intuición es el producto de las imágenes conceptuales del individuo y son más lógicas cuanta más información tiene éste. El desarrollo de esta intuición lógica debe ser uno de los mayores objetivos de la educación matemática más avanzada.

Además de estas consideraciones cognitivas, Tall describe la actividad del pensamiento matemático avanzado como un ciclo que comienza en el acto creativo de considerar un problema, pasar a formular conjeturas, lo cual lleva

[5] Ver en el apartado III.1.3 un resumen de la teoría de los obstáculos epistemológicos.

[6] Considérese, por ejemplo, la generalización del método de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas para resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

un gran trabajo de selección de ideas y relaciones útiles; esta parte inicial requiere no sólo la lógica o la deducción, sino, también una actividad mental flexible para relacionar conceptos que se encuentran desvinculados. Durante el ciclo se utiliza la *síntesis* y el *análisis,* que tienen funciones complementarias en el pensamiento matemático: la *síntesis* comienza en el momento consciente de organizar las ideas, seguida de una actividad más intuitiva, en la que tiene lugar la interrelación entre imágenes conceptuales, es decir, corresponde con la construcción de teorías; el *análisis* es una actividad que organiza las nuevas ideas en forma lógica y las refina, lo cual, supone dar coherencia lógica a la estructura que se ha creado. En la enseñanza elemental enfatizamos la síntesis del conocimiento, comenzando por conceptos simples; sin embargo, en la enseñanza superior se enfatiza el análisis del conocimiento. A los alumnos universitarios, generalmente, como también señala Skemp, se les muestra el producto del pensamiento matemático en lugar del proceso en sí; nosotros en la investigación que nos ocupa buscaremos un equilibrio ente síntesis y análisis para que los estudiantes adquieran una mejor comprensión del concepto.

Una de las dificultades de la integral definida se relaciona con el doble estatus operacional y estructural de la misma. Este doble estatus tiene que ver con lo que Tall (1996) llama *procepto*[7], es decir, la combinación de proceso y concepto invocados por el mismo símbolo. Este término tiene su origen en las investigaciones de Dubinsky y Sfard, que teorizan el conocimiento humano como sigue: mediante la interiorización de algunas acciones éstas se convierten en procesos, y, más tarde, por un fenómeno de *encapsulación* se conciben como objetos; por ejemplo, el proceso de sumar lleva al concepto de suma (con lo que *suma* es un *procepto*). Tall señala que los conceptos básicos del cálculo son *proceptos* (función, límite, derivada e integral) y propone un tratamiento de éstos basado en diferentes representaciones, como pueden ser la representación visual, los cálculos numéricos o las manipulaciones simbólicas con ayuda de programas de *software* matemático adecuado.

En nuestra investigación somos conscientes de las dificultades que tienen los estudiantes, de bachillerato de sociales, con el *procepto* integral definida y la presentación realizada a los alumnos sigue las propuestas de Tall.

[7] Véase Tall en los *Antecedentes* del capítulo I y los *proceptos* básicos del Análisis Matemático en la tabla I.3.1.1.

III.1.2. IMAGEN CONCEPTUAL Y DEFINICIÓN CONCEPTUAL

Vinner (1991)[8], citado por Turégano (2006)[9], afirma que, en contra de la opinión generalizada hasta hace pocos años, las definiciones no desempeñan, inicialmente, el rol que debe suponerse para la adquisición de los conceptos por parte de los estudiantes; éstas son sus palabras:

> Las definiciones crean un serio problema en el aprendizaje de las matemáticas. Representan, quizá, más que otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas según las conciben los matemáticos profesionales y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos. El profesor y el autor de un libro de texto pueden pensar que su tarea ha terminado con la introducción de la definición formal. Pero no deben hacerse ilusiones sobre el poder que tenga esta definición en el pensamiento matemático del estudiante.

Tall y Vinner (1981)[10] consideran que el funcionamiento del cerebro no siempre es lógico y así se manifiesta cuando se cometen errores. Para explicar la razón de dichos éxitos o fracasos, hacen una distinción entre la *imagen del concepto* y *la definición del concepto* que tienen los estudiantes, denominado *concept-image*; la figura III.1.2 ilustra la teoría de estos investigadores, así como la adquisición de un concepto según Charles.

Así como la *imagen conceptual* está perfectamente identificada en la figura, aclaramos que, la *definición del concepto* es la lista de palabras que se utilizan para especificar dicho concepto, ésta puede ser formal o personal, la primera es la aceptada por la comunidad de matemáticos, mientras que la segunda es una reconstrucción personal de la definición con las palabras del individuo. La definición conceptual puede generar una parte de la imagen conceptual del individuo, coherente o no con el resto.

Al resolver problemas, el cerebro puede activar ciertas partes de la imagen conceptual (*imágenes conceptuales evocadas*) que, a veces, pueden ser incoherentes con otras; es decir, una parte de la imagen conceptual o la propia definición es un *factor de conflicto potencial* si existe la posibilidad de que entre en conflicto con otra parte de la imagen conceptual o con la

[8] Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En: Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Pp. 65-81.

[9] Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos, 21*, pp. 35-48.

[10] Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* pp. 151-169.

definición (incoherencia). Cuando parte de la imagen conceptual o definición conceptual entra en conflicto con otras partes, o con la definición formal del concepto, se convierte en un *factor de conflicto cognitivo*, lo cual sólo ocurre al evocar simultáneamente estas imágenes o la definición conceptual.

INTERPRETACIÓN DE LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS: DEFINICIÓN E IMAGEN CONCEPTUAL SEGÚN TALL Y VINNER

DEFINICIÓN CONCEPTUAL

Todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definiciones formales. Muchas de estas definiciones se presentan antes o después a los estudiantes. Pero los estudiantes no necesariamente utilizan la definición cuando deciden si un objeto matemático es un ejemplo o un contraejemplo del concepto.

IMAGEN CONCEPTUAL

Conjunto de todas las imágenes mentales asociadas en la mente del estudiante con el nombre de un concepto, pudiendo ser una representación visual o bien una serie de impresiones o experiencias. Es, por tanto, algo no verbal que se ha ido formando a lo largo de los años por medio de experiencias de todo tipo y que puede que contenga partes que no estén de acuerdo con la definición formal. En estos casos el comportamiento del estudiante puede diferir de lo que espera de él el profesor.

ADQUIRIR UN CONCEPTO, SEGÚN CHARLES, SIGNIFICA

Adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal y cómo éste está concebido por la comunidad matemática. En todo ejemplo de concepto encontramos atributos relevantes y atributos irrelevantes. Desde esta perspectiva, se debe comenzar con varios ejemplos y contraejemplos:

- Identificar los atributos relevantes del concepto objeto de consideración, así como los atributos irrelevantes que se presenten con mayor frecuencia.
- Seleccionar los ejemplos de modo que los atributos irrelevantes de más frecuente aparición sean variados.
- Seleccionar una variedad de contraejemplos en los que se infrinjan diversos atributos relevantes.
- Llamar la atención de los estudiantes hacia los atributos relevantes e irrelevantes mediante preguntas y explicaciones.
- Pedir al estudiante que elabore la definición si el concepto no es muy difícil.

Figura III.1.2. Definición conceptual e imagen conceptual según Tall y Vinner y adquisición del concepto según Charles.

Como señala Vinner (1991), adquirir un concepto significa formar una imagen conceptual para dicho concepto. Conocer la definición no significa conocer el concepto, ya que, de hecho, muchos conceptos se adquieren sin definición. Si se parte de que el alumno tiene una imagen conceptual, cuando recibe la definición puede ocurrir: que la imagen conceptual la incluya de forma satisfactoria (se produce una *acomodación*), que la imagen conceptual no cambie y el individuo no asimile ni utilice la definición, o que no cambien ni la imagen conceptual ni la definición y ésta sólo se utilice cuando se le pregunta directamente por ella, mientras que en cualquier otro momento se evoca una imagen conceptual distinta. Si se parte de la definición formal puede ocurrir algo similar a lo anterior. Los profesores esperan que la imagen conceptual de los alumnos se forme a través de la definición del concepto y, la imagen, esté controlada por la definición.

En los procesos de resolución de problemas o perfeccionamiento de tareas el proceso puede pasar por consultar la definición, como sería deseable, según se recoge en los esquemas del gráfico III.1.2.1, donde la entrada es la tarea a realizar, las flechas ascendentes simbolizan el proceso y la salida es la respuesta del alumno; cada estudiante puede decantarse por una de las tres vías, no necesariamente excluyentes: *Interacción entre imagen y definición conceptual, deducción puramente forma o deducción que sigue al pensamiento intuitivo.*

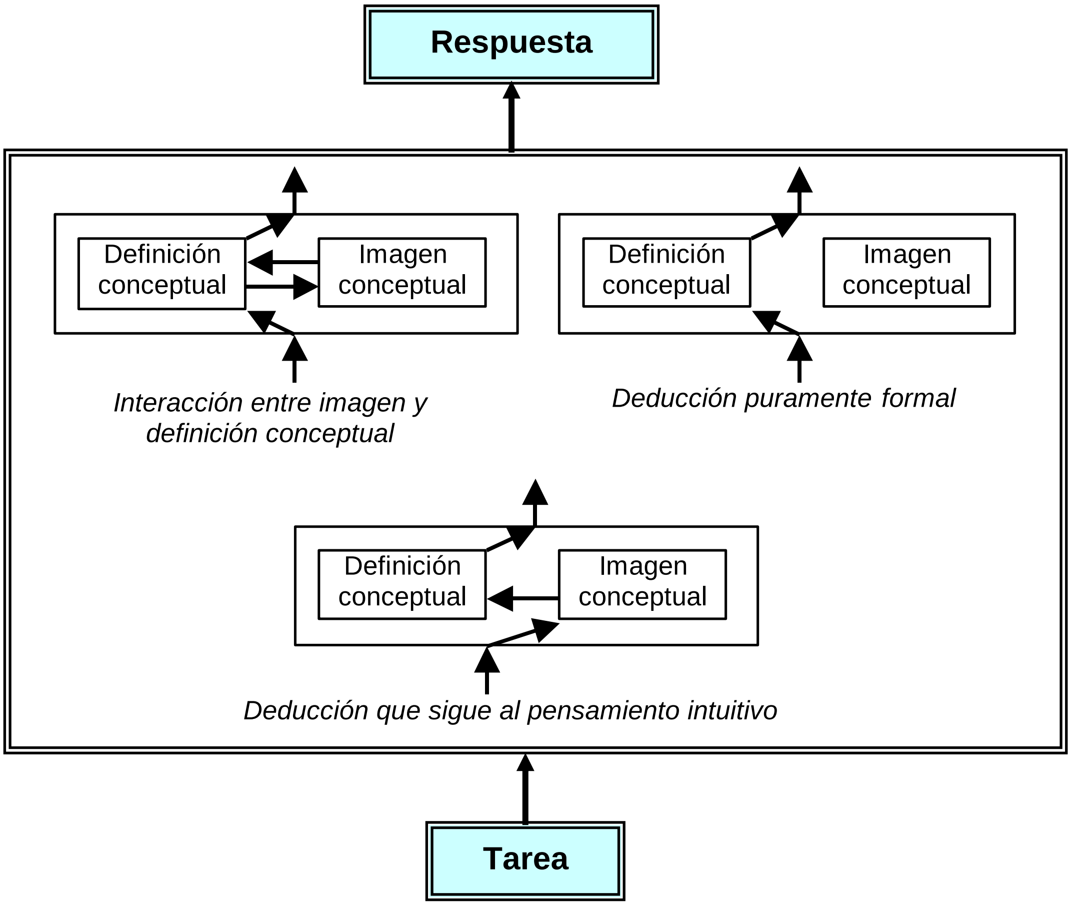


Gráfico III.1.2.1. Proceso esperado de los alumnos en la resolución de tareas.

Sin embargo, en la práctica el esquema utilizado es el del gráfico III.1.2.2, donde la respuesta que se da es intuitiva, puesto que no existe interacción con la definición formal; este esquema suele tener éxito puesto que en la mayoría de los problemas la utilización de imágenes conceptuales incompletas lleva a la conclusión correcta.

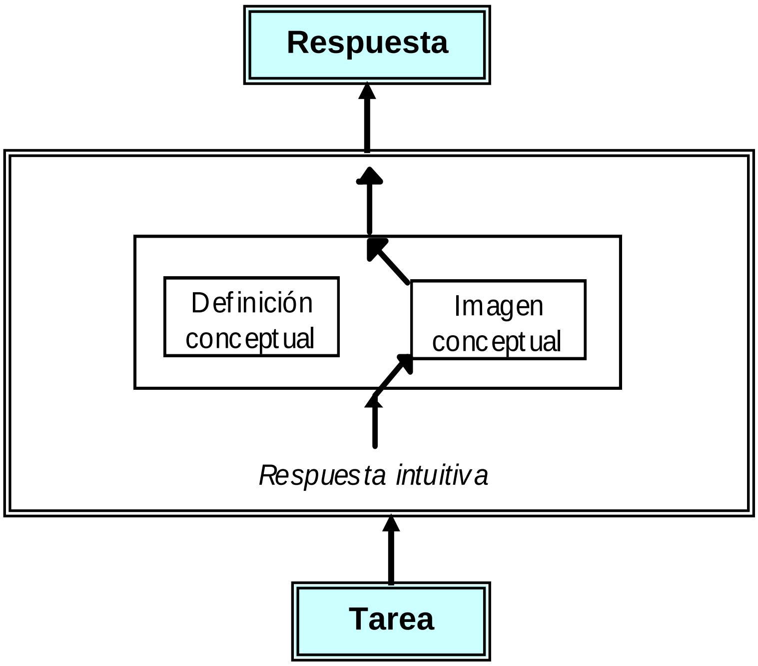


Gráfico III.1.2.2. Proceso habitual en la resolución de tareas de los alumnos.

En cuanto a las implicaciones para la enseñanza, Vinner destaca que deben evitarse conflictos cognitivos innecesarios en los estudiantes y sólo iniciarlos cuando esos conflictos les permitan pasar a un estado intelectual superior. Los conceptos deben adquirirse por medio de experiencias reales y no de forma técnica, empezando por ejemplos del concepto y de lo que no es el concepto, para que se forme la imagen conceptual. El profesor no debe conformarse con introducir la definición, más bien, debe proponer ejemplos atípicos para provocar conflictos entre la imagen conceptual y la definición y profundizar en ésta, asimismo, ha de proponer tareas que no se resuelvan correctamente refiriéndose sólo a la imagen conceptual, para convencerles de la necesidad de utilizar la definición.

En resumen, prevalecen los hábitos del pensamiento de la vida corriente y el estudiante no es consciente de la necesidad de consultar la definición formal, así pues, parece adecuado actuar sobre la imagen del concepto para transformarla y mejorarla mediante la ayuda de lo que Tall llama *organizadores genéricos*, que son micromundos dentro de los cuales el estudiante puede manipular un concepto u objetos relacionados con él; unas veces serán programas de ordenador, otras, material curricular, etc. Tall y Vinner estiman que, antes de establecer la definición de cualquier concepto, es aconsejable proponer ejemplos, visualizar y construir una buena imagen conceptual, incluso, elaborando nuevo material curricular.

Nosotros, en esta investigación, hemos trabajado bajo estos parámetros y así, por medio del calculo mental, mediante ejemplos, contraejemplos y multitud de ejercicios se ha conseguido que la mayoría de los alumnos definieran correctamente, de forma personal, el concepto de primitiva de una función. La apropiación del concepto de integral definida por parte de los estudiantes ha resultado ser más difícil; para ello, primeramente, se ha implementado una unidad didáctica en la cual se combinan los aspectos visuales y teóricos con el fin de interrelacionar las imágenes conceptuales con la definición conceptual; además, hemos considerado muy importante la visualización por medio del *software* matemático adecuado, en concreto el programa de cálculo simbólico *DERIVE*, y, con ayuda, de una serie de programas de utilidades creados por el profesor-investigador con el objetivo de que la imagen conceptual de las sumas inferiores y superiores de Darboux sean adquiridas, por los alumnos, con mayor riqueza de matices y, en consecuencia, poder dar el siguiente paso, con ciertas garantías de éxito, al definir la integral definida como la igualdad del extremo superior de las sumas inferiores y del extremo inferior de las sumas superiores.

III.1.3. DIFICULTADES, OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y ERRORES

El desarrollo del conocimiento no es acumulativo, es decir, cuando se pasa de un nivel de comprensión a otro se da simultáneamente una integración y una reorganización del conocimiento, reelaborando conocimientos que no funcionan ante determinados problemas (Contreras, 2000, pág. 73)[11]. González-Martín y Camacho (2005)[12], consideran que existen cuatro elemento básicos como productores de las dificultades en el currículo de

[11] Contreras, A. (2000). La Enseñanza del Análisis Matemático en Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *IV Simposio de la SEIEM. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, nº 9.* Noviembre. Sevilla. Pp. 71-86.

[12] González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las Ciencias, 23 (1),* pp. 81-96.

matemáticas: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en matemáticas, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares. Estas dificultades se relacionan y forman redes en las que se refuerzan, concretándose en la práctica en forma de obstáculos y manifestándose en forma de errores.

Brousseau (1998)[13], citado por Barrantes (2006a)[14], distingue tres tipos de obstáculos según su origen[15]: *obstáculos de origen ontogénico*, que tiene que ver con todo lo relacionado con las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo; *obstáculos de origen didáctico*, que son los que se adquieren o aparecen por el modo de enseñar o por la elección de un tema o una axiomática; y, por último, *obstáculos de origen epistemológico*, que son los obstáculos que ciertos conceptos tienen para ser aprendidos, es propio del concepto. Sierpinska (1994)[16] los define como sigue:

> Los obstáculos epistemológicos son formas de comprensión basados en algunos esquemas inconscientes de pensamiento que han sido adquiridos culturalmente y en creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas y acerca de las categorías fundamentales como número, espacio, causa, azar, infinito que son inadecuados con respecto a la teoría actual.

Algunas de las características más importantes de los obstáculos (Socas, 1997)[17] son: un obstáculo es un conocimiento adquirido y no una falta de conocimiento, tiene un dominio de eficacia y se utiliza para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto, cuando este conocimiento se utiliza fuera de su contexto genera respuestas inadecuadas e incluso incorrectas, es resistente y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté o cuando más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez y, por último, continúa manifestándose esporádicamente después de haber notado su inexactitud.

---

[13] Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

[14] Barrantes, H. (2006a). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, año 1, número 2.

[15] Véase Brousseau en el epígrafe I.3.4 del capítulo I.

[16] Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Basingstoke. UK: Flamer. P. xi.

[17] Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Capítulo V*. Barcelona: ICE/Horsori. Pp. 125-154.

En el proceso de enseñanza de las matemáticas si se ignoran los obstáculos epistemológicos (Barrantes, 2006a) conduce a optar por:

- Enseñar, de entre los conocimiento definitivos, aquellos que parece pueden ser comprendidos por los estudiantes y que simplemente deben ajustarse a los precedentes, estos conocimientos incompletos producen "culturas temporales" pues son obstáculos que pueden ser más o menos bien remontadas por el estudiante y por el profesor pero que provocan numerosas dificultades.
- Enseñar los conocimientos definitivos bajo la forma y organización definitiva como un lenguaje, con el riesgo de un uso meramente formal carente de sentido; ese lenguaje puede no estar adaptado al desarrollo de los estudiantes.

No hay fuentes últimas del conocimiento, todo conocimiento es humano y está mezclado con nuestros errores y prejuicios; además, el error es parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento, por tanto, es necesario un ejercicio constante de crítica sometiendo a prueba nuestros conocimientos y aproximaciones a la verdad (Kilpatrick, Gómez y Rico, 1995)[18]. En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, los errores, aparecen con mucha frecuencia, los cuales, nos permiten hacer las siguientes reflexiones:

1. Los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje.
2. Los errores no aparecen por azar, surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente.
3. Es necesario que cualquier teoría de instrucción modifique la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes de los mismos, reemplazándola por la previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje.
4. Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunos de los cuales surgen inevitablemente.
5. Los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las matemáticas, son datos objetivos que encontramos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
6. Los errores también son función de otras variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social, etc.

[18] Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico L. (1995). Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación Matemática*. Edts. Kilpatrick, Gómez y Rico. Editorial Iberoamericana S.A. de C.V. Universidad de los Andes, Universidad de Granada y Universidad de Georgia.

Destacamos algunas de las características generales de los errores cometidos por los alumnos: a) los errores son sorprendentes, incluso se mantienen ocultos al profesor durante algún tiempo, b) los errores son extremadamente persistentes, son resistentes a cambiar por sí mismos ya que la corrección de los mismos puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos, c) los errores pueden ser sistemáticos o por azar, los primeros son mucho más frecuentes y se manifiestan efectivos para revelar procesos mentales subyacentes donde los estudiantes consideran que proceden correctamente, los segundos son debidos a despistes de los alumnos, d) los errores ignoran los significados, dando soluciones que no se ponen en cuestión aunque a todas luces sean incorrectas y e) los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas.

Kilpatrick, Goméz y Rico (1995) establecen seis categorías descriptivas para clasificar los errores, éstas son:

1. Datos mal utilizados, considerados como tales los errores cometidos por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en el enunciado de la cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno, por ejemplo: una lectura incorrecta del enunciado, se añaden datos extraños, se olvidan datos necesarios para la solución, se contesta algo que no es necesario, etc.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje, debido, generalmente, a una traducción errónea de los hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
3. Inferencias no válidas lógicamente, entre otras destacamos: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y del consecuente, el antecedente; afirmar que el consecuente no se deduce del antecedente; utilizar incorrectamente los cuantificadores.
4. Teoremas o definiciones deformados, tales como aplicar un teorema sin las condiciones necesarias, aplicar la propiedad conmutativa al producto de matrices, realizar una valoración o un desarrollo incorrecto de una definición.
5. Falta de verificación de la solución, el alumno ha realizado toda la tarea correctamente, sin embargo, la solución no es la pedida. Si el estudiante hubiera contrastado su solución con una posterior lectura del problema, probablemente, el error pudiera haber sido evitado.
6. Errores técnicos, incluimos en esta categoría los errores de cálculo, de toma de datos y los derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

Consideramos que los errores pueden ayudarnos a investigar cuestiones abstractas relativas a la naturaleza de las Matemáticas a las que es difícil acercarse por otra vía, utilizar los errores como motivación y medio para interrogar sobre las Matemáticas pueden mejorar la comprensión de las Matemáticas como disciplina por parte de los estudiantes y, por último, comprender una materia implica mucho más que aprender su contenido, además, debe comprenderse su filosofía, la metodología empleada, el alcance y las limitaciones de la disciplina y debe favorecer el desarrollo de actitudes positivas hacia las Matemáticas.

Nuestro propósito no es ignorar los obstáculos epistemológicos, al ponerse éstos de manifiesto a través de los errores, debemos tener en cuenta que la comprensión implica una interacción del individuo con una situación problemática, una interacción dialéctica donde el estudiante toma conocimientos anteriores y los revisa, modifica, completa o rechaza para formar concepciones nuevas. Así pues, es necesario promover una interacción del mismo tipo, que enfrente al alumno con una situación problemática que permita desestabilizar sus concepciones y cuya solución óptima o única sea el nuevo conocimiento que se desea adquirir; este hecho debe tenerse presente para plantear situaciones didácticas y eso es lo realizado durante el desarrollo práctico de la presente investigación.

III.1.4. LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS DE BROUSSEAU

"El conocimiento existe y tiene sentido para el sujeto cognoscente sólo porque representa una solución óptima en un sistema de restricciones" (Brousseau, 1986)[19], citado por Godino (2003, pág. 74)[20]. *La teoría de las situaciones didácticas* busca estudiar, apoyándose en enfoques constructivistas del aprendizaje, las situaciones de apropiación del conocimiento matemático a partir de la adopción del alumno a ambientes que se presentan en un comienzo muy problemáticos; entendemos por:

> Una *situación didáctica* es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos en un

[19] Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), pp. 33-115.

[20] Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

> determinado medio, comprendiendo, eventualmente, instrumentos, objetos y un sistema educativo, representado por el profesor, con la finalidad de posibilitar a estos alumnos un saber constituido o en vías de constitución. El trabajo del alumno debería, al menos en parte, reproducir las características del trabajo científico propiamente dicho, como garantía de una construcción efectiva de conocimientos pertinentes (Brousseau, 1986).

Además, según (Panizza, 2003)[21], la teoría de las situaciones didácticas es eficaz, entre otras, por las siguientes razones:

> La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los profesores acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores.

Brousseau (1986) propone, según Godino (2003, págs. 74-75), varios tipos de situaciones didácticas que pueden provocar la *génesis artificial* de un concepto matemático[22], dichos tipos de situaciones se centran en:

- ‘‘Acción”, donde los estudiantes hacen sus primeros intentos para resolver un problema propuesto por el profesor.
- “Comunicación”, donde los estudiantes comunican los resultados de su trabajo a otros estudiantes y al profesor.
- “Validación”, donde se usan argumentaciones teóricas más que empíricas.
- “Institucionalización”, donde los resultados de las negociaciones y convenciones de las fases previas son resumidos y la atención se centra sobre los hechos importantes, los procedimientos, las ideas y la terminología oficial.

En la investigación que estamos llevando a cabo, quedan perfectamente constatadas estas situaciones en el cálculo de primitivas mediante el cálculo mental; en efecto, al proponer el profesor el cálculo de una integral a los

[21] Panizza, M. (2003). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas.* En: http://www.crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf (consulta efectuada el 10-06-09).

[22] “La *génesis artificial* consiste en simular diferentes aspectos actuales del concepto para los estudiantes, sin reproducir el proceso histórico, que conducirá a resultados similares” (Godino, 2003, pág. 75).

alumnos, éstos hacen sus propios intentos o conjeturas (*acción)*, considerada la posible solución, unos alumnos informan a otros o al profesor sus hallazgos (*comunicación)*, seguidamente, por medio de discusión y razonamientos teóricos (*validación)* dan la respuesta que suponen correcta y, por último, confirman la solución comprobando el tipo de integral inmediata (polinómica, potencial, exponencial, trigonométrica, logarítmica, etc.), comunicando al resto de los alumnos y al profesor el resultado dando una primitiva, de la función integrando, y sumándole la constante *k* (*institucionalización).* Afirmamos que, además, los alumnos también siguen estas situaciones, en el aula de clase, al resolver por escrito problemas en los cuales se necesita aplicar los diferentes conceptos de integral definida y, en el aula de informática, cuando realizan las correspondientes prácticas de ordenador.

Este investigador de la Didáctica de las Matemáticas establece un modelo teórico basado en *las situaciones didácticas, las situaciones a-didácticas, el contrato didáctico y la transposición didáctica*. El primer concepto ha quedado ampliamente definido y caracterizado, el cuatro se definirá en el epígrafe III.1.6 (*Transposición Didáctica de Chevallard*), he aquí las definiciones, según Brousseau (1986), de los otros dos conceptos:

- Se llama *contrato didáctico* al conjunto de comportamientos del profesor que son esperados por los alumnos y al conjunto de comportamientos de los alumnos que el profesor espera de ellos. Es el conjunto de reglas que determinan, una pequeña parte explícitamente, pero sobre todo implícitamente lo que cada socio de la relación didáctica debe hacer y, lo que de alguna manera, deberán exigirse el uno al otro.

- Cuando el alumno es capaz de poner en funcionamiento y utilizar por sí mismo el saber que está construyendo, en una situación no prevista en cualquier contexto de enseñanza y también en ausencia de cualquier profesor, está ocurriendo lo que puede ser llamada una *situación a-didáctica.*

Dentro de las situaciones que acontecen en la *situación didáctica*, pueden identificarse efectos que pueden inhibir o interrumpir la construcción del conocimiento que lleva a cabo el estudiante dentro del medio didáctico que el profesor elabora, Brousseau indica cinco efectos (texto en tamaño reducido) y nosotros los comentamos en el contexto de la presente investigación:

- *Efecto Topaze y control de la incertidumbre*: La respuesta del alumno está determinada de antemano, el profesor escoge las preguntas que el alumno sabe responder; dicho efecto se produce cuando los conocimientos esperados desaparecen completamente al tomar el profesor preguntas cada vez más fáciles para obtener la máxima significación para el máximo número de alumnos.

Un ejemplo del *efecto Topace* consiste en proponer siempre ejemplos de integral definida de funciones constantes, $f(x)$=k, en el intervalo [a,b], por tanto, daría lugar al aprendizaje de la regla k(b-a) y, en consecuencia, olvidarse totalmente del concepto de integral definida.

- *Efecto Jourdain o el malentendido fundamental:* Consiste en que el profesor reconozca un conocimiento en las respuestas o comportamientos del alumno, aunque estén motivadas por causas y justificaciones banales, para evitar la constatación del fracaso de su gestión.

En la enseñanza de la integral definida, por ejemplo, el profesor al preguntar por el área encerrada por una función positiva, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b, puede asegurar que el alumno entiende lo que es al hacer la integral de la función entre los extremos a y b, sin embargo si la función cambia de signo, el alumno resuelve la misma integral sin controlar los puntos de corte de la función con el eje de abscisas; he aquí el *efecto Jourdain*.

- *Deslizamiento metacognitivo*: Consiste en tomar las explicaciones o los métodos heurísticos como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático.

Un ejemplo de este fenómeno consiste en reducir el estudio del concepto de integral definida al cálculo de integrales definidas.

- *El uso abusivo de la analogía*: Cuando los alumnos fracasan en su aprendizaje, el profesor suele darles una nueva oportunidad proponiéndoles un problema similar, así, aquellos obtienen la solución por una lectura de las indicaciones didácticas y no por la investigación del problema (buscan las similitudes con otros problemas ya resueltos).

Por ejemplo, se da un uso abusivo de la analogía, cuando en la enseñanza tradicional de la integral de Darboux, al calcular las sumas inferiores y superiores de una función se toman funciones polinómicas sencillas, debido a la dificultad que conlleva calcular dichas sumas para otras funciones.

- *El envejecimiento de las situaciones de enseñanza*: Se refiere a la actitud que el profesor tiene cuando al reproducir una lección siente la necesidad de modificarla, ya sea en toda su estructura o en detalles pequeños como los ejemplos, los ejercicios o la formulación.

Este fenómeno se observa también en el sistema de enseñanza, donde se modifican periódicamente los programas (incluso se publican nuevas leyes como LOGSE, LODE y LOE), lo que hace muy difícil el control de la transposición didáctica. Además, observamos, la desproporción que existe entre la novedad de los programas de Matemáticas y la estabilidad de las prácticas de enseñanza.

Todas y cada una de las situaciones didácticas de Brousseau (*acción, comunicación, validación* e *institucionalización)* tienen gestión de tiempo y espacio de los alumnos, lo cual conlleva componentes a-didácticos, esto se conoce como la *devolución* de los problemas por parte del profesor a los alumnos. La orientación final de las situaciones didácticas es la elaboración de *situaciones fundamentales* relacionadas con los conceptos matemáticos enseñados en el centro educativo, que garanticen la adquisición de los estudiantes cualquiera que fuera la personalidad del profesor.

Como indican Sierpinska y Lerman (1996)[23], Brousseau establece un programa de investigación para la didáctica de la matemática que implica estudios epistemológicos, diseño de situaciones didácticas, experimentación, comparación del diseño con los procesos que tienen lugar de hecho, revisión de los estudios epistemológicos y del diseño, y estudio de las condiciones de reproductibilidad de las situaciones.

El modelo teórico propuesto por Guy Brousseau y, excepcionalmente, caracterizado por Serpinska y Lerman es compatible con la metodología cualitativa de investigación-acción (capítulo II); los estudios epistemológicos del área y la integral definida se encuentran en el capítulo V y la experimentación está recogida del capítulo VI en adelante; además, se han realizado estudios de los antecedentes (capítulo I) y del tratamiento curricular del concepto (capítulo IV). Por tanto, nuestra investigación cumple ampliamente todas las exigencias de Brousseau y así queda recogido en la redacción de la presente monografía.

[23] Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of education. *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer A. P. Pp. 827-876.

III.1.5. EL MODELO DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA

Hasta 1976, la comunidad científica consideraba que conocimiento matemático y comprensión matemática eran el mismo concepto. Skemp (1976)[24] estableció sus diferencias e inicialmente, describió dos categorías de comprensión matemática: *comprensión relacional* consistente en cómo saber qué hacer y por qué se debe hacer, la cual proporciona vías para una transferencia más eficiente, para la extracción de información desde la memoria del estudiante, para lograr que esa comprensión sea una meta por sí misma y promover su propio crecimiento y *comprensión instrumental* que es tener reglas sin una razón justificada, tiende a permitir un acuerdo fácil para promover recompensas más tangibles e inmediatas y para proporcionar un acceso rápido a las respuestas. Posteriormente, Skemp, establece dos nuevas categorías: *comprensión lógica* y *comprensión simbólica*[25]*.*

Sierpinska (1990)[26] plantea el significado de acto de comprensión en los siguientes términos:

> La comprensión es un acto, pero un acto envuelto en un proceso de interpretación, siendo esta interpretación un desarrollo dialéctico entre afirmaciones más y más elaboradas y la validación de esas afirmaciones (pág. 26). Comprender el concepto será concebido como el acto de aprehender su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión (pág. 27). Una descripción de los actos de comprensión de un concepto matemático contendría de este modo una lista de los obstáculos epistemológicos relacionados a este concepto, proveyéndonos de información más completa sobre su significado (pág. 28). La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos (pág. 35).

---

[24] Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77,* pp. 20-26.

[25] En este contexto, es interesante la lectura de *Una breve historia de la "comprensión"* en: Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime, vol. 6, núm. 3,* pp. 221-278.

[26] Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the learning of Mathematics 10, 3, November.* Montreal. Quebec. Canada: FLM Publishing Association. Pp. 24-39.

Sierpinska (1990) considera que no todos los actos de comprensión corresponden con un acto de superación de un obstáculo epistemológico, sin embargo, establece que son complementarios:

> Superar los obstáculos epistemológicos y llegar a la comprensión son dos formas distintas de hablar sobre lo mismo. La primera es "negativa" y la segunda "positiva". Esto sugiere un postulado para análisis epistemológicos de conceptos matemáticos: deberían ambos contener imágenes "positivas" y "'negativas", los obstáculos epistemológicos y las condiciones de comprensión (pág. 28).

Si esta investigadora considera que los actos de comprensión y los obstáculos epistemológicos son complementarios, entonces la medición de la profundidad de la comprensión puede lograrse mediante el número de obstáculos epistemológicos superados o mediante la identificación del número y calidad de los actos de comprensión logrados.

Nuestra propuesta inicial es actuar en "positivo", por tanto, trabajar con los actos de comprensión; así pues, en la línea de lo que Lakatos propone en sus *Pruebas y refutaciones*, o Ricoeur cuando explica el proceso de validación de una conjetura; la comprensión así entendida es coherente con lo que Tall llamaba el ciclo de actividad del pensamiento matemático avanzado o con la forma que tiene Brousseau de concebir el conocimiento como interacción dialéctica entre el individuo y el medio (Blázquez y Ortega, 1998)[27]. Sierpinska (1990, pág. 29), establece cuatro categorías de actos de comprensión en un contexto matemático[28], éstas son:

- *Identificación:* Este acto consiste en la repentina percepción de objetos que corresponden a la denominación del concepto (relacionado con el concepto en cuestión) o a la identificación de un término como si tuviera estatus científico.
- *Discriminación:* Es la diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas que estaban anteriormente confundidas.
- *Generalización:* Consiste en darse cuenta de la no esencialidad de una presunción o de la posibilidad de extender el rango de las aplicaciones.
- *Síntesis:* Consiste en aprehender relaciones entre dos o más propiedades, hechos u objetos y organizarlos en un todo consistente.

[27] Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de Bachillerato. *AULA, vol. 10*. Salamanca. Pp. 119-135.

[28] Los *actos de comprensión* de Sierpinska han sido utilizados como *Marco Teórico* en varias Tesis Doctorales en España, entre ellas: Blázquez (1999) y García Olivares (2007).

Veamos las diferentes categorías de Sierpinska en dos ejemplos, el primero correspondiente al cálculo de primitivas y el segundo a la determinación de una integral definida, extraídos de nuestra investigación:

Ejemplo 1. Al calcular $\int x dx$, puede *identificarse* a $\frac{x^2}{2}$ como una primitiva de la función $f(x)=x$, *distinguir* a $\frac{x^2}{2}+3$ como otra primitiva de $f(x)$ y que $\frac{x^2}{3}+2$ no es una primitiva de dicha función, *generalizar* que cualquier primitiva de la función $f(x)$ tiene la expresión $\frac{x^2}{2}+k$, es decir, $\int x dx = \frac{x^2}{2}+k$ y, de esto, establecer o *sintetizar* que las primitivas de $x^2, x^3, \ldots, x^n$ son, respectivamente: $\frac{x^3}{3}+k$, $\frac{x^4}{4}+k$, ..., $\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$.

Ejemplo 2. Al calcular el área comprendida entre la función $f(x)=x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=3$, sin aplicar el teorema fundamental del cálculo, mediante las técnicas de lápiz y papel y con el programa de utilidades implementado por el profesor-investigador, se obtiene lo siguiente: Al dividir el intervalo [1,3] en cuatro subintervalos de la misma amplitud, los alumnos deben *identificar* las sumas inferiores y superiores de Darboux para la función $f(x)=x^2$ asociadas a la partición P = {1; 1,5; 2; 2,5; 3}, *discriminar* que las sumas inferiores siempre son menores que las sumas superiores para dicha función y para cualquier otra partición del intervalo [1,3], *generalizar* que la integral inferior (extremo superior de las sumas inferiores) es menor o igual que la integral superior (extremo inferior de las sumas superiores) y, como consecuencia de esto, al ser iguales para $f(x)=x^2$ en el intervalo [1,3], deducir que la función $f(x)=x^2$ es integrable en [1,3] y por último *sintetizar,* por medio del teorema fundamental del cálculo, que $\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}\, u^2$ pero que el área comprendida entre la función $g(x)=x^3$, el eje de abscisas y las rectas $x=-2$ y $x=2$ no es $\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 4-4=0\, u^2$, por tanto, los conceptos de área e integral definida son distintos.

Acabamos de dar dos ejemplos en los cuales hemos determinado los actos de comprensión; sin embargo, consideramos que debemos ampliar los actos de comprensión de Sierpinska y los obstáculos y/o dificultades asociados a los mismos al problema objeto de nuestra investigación: *Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías.*

Por tanto, por cada una de las tres partes que componen esta investigación establecemos sendas tablas en las cuales detallamos los actos de comprensión, siguiendo el modelo teórico de Sierpinska, y los obstáculos y/o dificultades asociados a dichos actos. Dichas tablas se han construido inspiradas en los actos de comprensión de Sierpinska para el concepto de función, ciertamente, hemos hecho una interpretación con una dosis muy amplia de libertad. La aceptación o no de estos actos tendrá lugar cuando se analicen los documentos de los estudiantes.

Seguidamente presentamos los actos de comprensión y cada uno de ellos queda identificado con un código alfanumérico el cual consta de dos letras seguidas de un subíndice numérico. La primera letra siempre es C (*acto de comprensión*), seguida de una de las tres letras: I (*integral definida*, consistente en las producciones de los alumnos con lápiz y papel), M (*cálculo mental*, referente a los resultados de los estudiantes en el cálculo mental de primitivas elementales) o T (*nuevas tecnologías*, es decir, los actos de comprensión derivados del uso de *DERIVE* y del programa de utilidades implementado para la ocasión); los subíndices numéricos son correlativos. Asimismo, los obstáculos también tienen una identificación alfanumérica que coincide con la del acto de comprensión asociado a él, cambiando la letra C por O (*obstáculo*); además, si un acto tiene varios obstáculos asociados entonces al subíndice numérico se le añaden las letras a, b, c, etc. sucesivamente[29].

[29] Así, por ejemplo, en la *tabla III.1.5.1. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al aprendizaje de la integral definida,* el primer acto de comprensión es CI_1: Necesidad del cálculo de áreas de superficies poligonales y circulares. Este acto tiene asociado dos obstáculos OI_{1a}: Desinterés por el cálculo de áreas y OI_{1b}: Se considera “más de lo mismo” de cursos anteriores.

INTEGRAL DEFINIDA 1/3	
ACTOS DE COMPRENSIÓN	**OBSTÁCULOS Y/O DIFICULTADES**
CI_1: Necesidad del cálculo de áreas de superficies poligonales y circulares.	OI_{1a}: Desinterés por el cálculo de áreas. OI_{1b}: Se considera "más de lo mismo" de cursos anteriores.
CI_2: Identificación de los polígonos más comunes: cuadrado, rectángulo, triángulo, trapecio, rombo, pentágono, hexágono,...	OI_2: Desconocimiento de los polígonos regulares.
CI_3: Discriminación entre perímetro y superficie.	OI_3: Desconocimiento u olvido de las unidades de longitud y superficie.
CI_4: Generalización del área de un rectángulo.	OI_4: Desconocimiento de la tipología numérica: naturales, enteros, racionales e irracionales.
CI_5: Generalización y síntesis de áreas de polígonos regulares.	OI_5: Confusión entre semiperímetro y apotema.
CI_6: Generalización y síntesis de áreas encerradas en superficies poligonales.	OI_6: Descomposición de una superficie poligonal en suma de superficies elementales.
CI_7: Discriminación entre circunferencia y círculo.	OI_7: Confusión entre longitud de la circunferencia y área del círculo.
CI_8: Generalización de la sucesión de las áreas de una sucesión creciente de polígonos regulares inscritos en un círculo.	OI_8: Desconocimiento u olvido de las razones trigonométricas.
CI_9: Síntesis del área del círculo mediante el límite de la sucesión de las áreas anteriores.	OI_{9a}: Dificultad en la comprensión del concepto de límite de una sucesión. OI_{9b}: Aceptar como un axioma que el área del círculo es πr^2.
CI_{10}: Necesidad de generalizar el cálculo de áreas de superficies "no convencionales".	OI_{10}: Desinterés por el cálculo de áreas.
CI_{11}: Identificación de una superficie delimitada por la gráfica de una función continua y positiva, el eje OX y las rectas x=a y x=b.	OI_{11}: Dificultad en la representación gráfica de funciones.
CI_{12}: Identificación de una partición del intervalo compacto [a,b].	OI_{12}: Confundir los subíndices con los nodos de la partición.
CI_{13}: Generalización y síntesis del concepto de partición.	OI_{13}: Dificultad para establecer una partición con un número indeterminado "n+1" nodos.
CI_{14}: Identificación de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo y discriminación entre mínimo y máximo absolutos.	OI_{14}: Confusión entre extremo relativo y absoluto.
CI_{15}: Generalización de los extremos absolutos para cada uno de los subintervalos de una partición.	OI_{15}: No se acepta fácilmente que un máximo absoluto en un subintervalo pueda ser un mínimo absoluto en otro subintervalo o viceversa.

INTEGRAL DEFINIDA 2/3	
ACTOS DE COMPRENSIÓN	**OBSTÁCULOS Y/O DIFICULTADES**
CI_{16}: Identificación de las sumas inferior y superior y discriminación entre ambas.	OI_{16}: Imprecisión en la determinación gráfica de las superficies inferiores y superiores.
CI_{17}: Generalización de suma inferior y suma superior.	OI_{17}: Dificultad para establecer las expresiones analíticas de las sumas inferiores y superiores.
CI_{18}: Síntesis entre suma inferior, área y suma superior, es decir: $s(f,P) \leq A \leq S(f,P)$.	OI_{18}: Las desigualdades no resultan evidentes a los estudiantes cuando la partición tiene un número indeterminado "n+1" nodos.
CI_{19}: Identificación de la integral inferior como el extremo superior de las sumas inferiores (ídem integral superior) y discriminación entre integral inferior y superior.	OI_{19a}: La integral inferior no se alcanza, se aproxima a un valor (ídem superior). OI_{19b}: Las definiciones de estas integrales son consideradas de difícil comprensión y las desigualdades entre ambas no resultan evidentes.
CI_{20}: Síntesis de función integrable Darboux en un intervalo compacto [a,b].	OI_{20a}: Si las sumas inferior y superior se aproximan a un mismo valor tanto como deseemos, no necesariamente son iguales las integrales inferior y superior. OI_{20b}: No es fácil encontrar la partición P del teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.
CI_{21}: Identificación de la función de Dirichlet y discriminación entre números racionales e irracionales.	OI_{21}: Inseguridad en la representación de los números sobre la recta real.
CI_{22}: Síntesis de la existencia de funciones no integrables Darboux.	OI_{22}: Creencia de que todas las funciones son integrable Darboux.
CI_{23}: Generalización de conjunto de puntos intermedios asociados a una partición.	OI_{23}: El desconocimiento del conjunto de puntos intermedios genera ambigüedad.
CI_{24}: Síntesis entre las sumas inferior y superior de Darboux y la suma de Riemann, es decir: $s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P)$.	OI_{24}: Muchas expresiones algebraicas de difícil comprensión analítica.
CI_{25}: Síntesis de función integrable Riemann en un intervalo compacto [a,b].	OI_{25}: Confusión en la definición conceptual de función integrable Riemann.
CI_{26}: Síntesis de función integrable en[a,b]: Integral Darboux $\Leftrightarrow$ Integral Riemann	OI_{26}: Considerar que la integral de Darboux y la integral de Riemann son la misma, independientemente de la definición de cada una de ellas.
CI_{27}: Síntesis del teorema de los incrementos finitos.	OI_{27}: Desconocimiento del teorema del valor medio del cálculo diferencial y comprensión deficiente de su interpretación geométrica.
CI_{28}: Generalización del teorema del valor medio a cada uno de los subintervalos de la partición.	OI_{28}: El valor que toma la función en los puntos intermedios es impreciso; además, si el número de dichos puntos es "n", entonces la correspondiente suma de Riemann, más que comprendida, es aceptada.

INTEGRAL DEFINIDA 3/3	
ACTOS DE COMPRENSIÓN	**OBSTÁCULOS Y/O DIFICULTADES**
CI_{29}: Síntesis del teorema fundamental del cálculo.	OI_{29}: El teorema fundamental del cálculo es la regla de Barrow y siempre es posible encontrar una primitiva de una función.
CI_{30}: Discriminación entre los conceptos área e integral definida.	OI_{30}: Considerar que ambos conceptos son iguales.
CI_{31}: Generalización y síntesis del cálculo de áreas comprendidas entre la grafica de una función (positiva, negativa, que cambia de signo, definida a trozos), el eje OX y las rectas *x=a* y *x=b.*	OI_{31}: El cálculo de áreas se reduce a: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$
CI_{32}: Generalización y síntesis del área comprendida entre dos curvas y las rectas *x=a* y *x=b.*	OI_{32}: No resulta fácil aplicar correctamente el algoritmo correspondiente.
CI_{33}: Generalización de la integral definida a las "Ciencias Sociales".	OI_{33}: Las Matemáticas son ajenas a las "Ciencias Sociales". Además, del enunciado de los problemas no se deduce fácilmente que deba aplicarse el cálculo integral.
CI_{34}: Generalización y síntesis del concepto integral indefinida: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$	OI_{34}: El extremo superior de la integral y la variable de integración son confusos.
CI_{35}: Síntesis de que no siempre es posible encontrar una primitiva de una función integrable.	OI_{35}: Todas las funciones integrable tienen una primitiva que puede ser escrita en forma explícita.
CI_{36}: Generalización de las sumas de Riemann a la integración numérica.	OI_{36}: No se considera necesaria la integración numérica o es demasiado complicada.
CI_{37}: Síntesis de la integración numérica como sumas agrupadas bajo diferentes criterios.	OI_{37}: Es suficiente la integración numérica por el método rectangular, el de los trapecios y la regla de Simpson complican el cálculo.
CI_{38}: Generalización de la integral definida en el Análisis Matemático a la distribución Normal del Cálculo de Probabilidades y la Estadística.	OI_{38a}: La integral y la distribución Normal N(0,1) no tienen relación alguna. OI_{38b}: La Normal es el área bajo una curva que la dan las tablas y, a veces, es necesario tipificar previamente.
CI_{39}: Síntesis de la necesidad del cálculo de primitivas elementales, mediante el cálculo mental, debido al teorema fundamental del cálculo.	OI_{39}: El cálculo de primitivas es difícil y, para ello, el alumno debe dominar el cálculo de derivadas.
CI_{40}: Síntesis de la necesidad de utilizar nuevas tecnologías para generar registros gráficos y realizar cálculos.	OI_{40}: La utilización de programas de cálculo simbólico requiere un aprendizaje específico.

Tabla III.1.5.1. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al aprendizaje de la integral definida.

CÁLCULO MENTAL	
ACTOS DE COMPRENSIÓN	**OBSTÁCULOS Y/O DIFICULTADES**
CM_1: Identificación del concepto de primitiva como antiderivada.	OM_1: Derivar es difícil. Calcular primitivas es “ir hacia atrás”, por tanto, muy difícil.
CM_2: Generalización de que dos primitivas de la misma función se diferencian en una constante.	OM_2: No es evidente, por ejemplo, las funciones $F_1(x)=sen^2x$ y $F_2(x)= -\cos^2x$ son dos primitivas de $f(x)=2senx\cdot cosx$ y resulta difícil encontrar la relación $F_2(x) = F_1(x) + k$.
CM_3: Síntesis: $\int f(x)\,dx = F(x)+k$;$F'(x)=f(x)$	OM_3: Integrar y derivar genera confusión. Se deriva la función integrando en lugar de integrarla.
CM_4: Identificación de los tipos de funciones: polinómicas, trigonométricas, potenciales, exponenciales, racionales,...	OM_4: Es difícil distinguir unas funciones de otras. Por ejemplo: f (x)= sen^2x y g(x)= $senx^2$.
CM_5: Identificación y aprendizaje comprensivo de la tabla de primitivas de funciones elementales del libro de texto.	OM_5: Se omiten factores constantes de integración. Por ejemplo: $\int x^3\,dx = x^4+k$.
CM_6: Generalización, síntesis y aprendizaje comprensivo de la tabla de primitivas de funciones compuestas. Por ejemplo: $\int \left[f(x)\right]^n f'(x)\,dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}+k, \quad n\neq 0$.	OM_6: Se considera, erróneamente, que “la integral del producto (cociente) es el producto (cociente) de las integrales”. Por ejemplo: $\int \left(x^2+3\right)^5 2x = \frac{\left(x^2+3\right)^6}{6}\cdot x^2+k$
CM_7: Síntesis de que el cálculo de primitivas de muchas funciones no es difícil si se han hecho muchas derivadas.	OM_7: No se ha aprendido, con la comprensión necesaria, la tabla de derivadas del libro de texto.
CM_8: Síntesis de que el cálculo de primitivas elementales puede hacerse mediante el cálculo mental.	OM_8: El cálculo mental exige mucha concentración y es muy fácil cometer errores.
CM_9: Generalización del cálculo de primitivas similares a las de la tabla del libro de texto mediante el cálculo mental.	OM_9: No se ha aprendido y asimilado la tabla de integrales inmediatas del libro de texto.
CM_{10}: Identificación y discriminación de primitivas de una función mediante cálculo mental. Por ejemplo: “Si una primitiva de e^x es e^x, entonces una primitiva de e^{2x} será e^{2x}; sin embargo, la derivada de e^{2x} es $2e^{2x}$. En consecuencia, la integral de e^{2x} es $e^{2x}/2+k$”.	OM_{10}: Las sucesivas relaciones entre integración y derivación y la determinación de factores constantes de integración son difíciles de controlar.
CM_{11}: Síntesis de que el cálculo mental y el cambio de variable son dos métodos de integración no excluyentes.	OM_{11}: El método del cambio de variable es demasiado artificioso.
CM_{12}: Síntesis de que el cálculo de primitivas se amplía con estudios más avanzados.	OM_{12}: Muchos alumnos consideran que sus estudios posteriores no necesitan el cálculo integral.
CM_{13}: Síntesis de que se pueden calcular primitivas con las nuevas tecnologías.	OM_{13}: No es necesario resolver integrales, lo hacen los ordenadores.

Tabla III.1.5.2. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental.

NUEVAS TECNOLOGÍAS	
ACTOS DE COMPRENSIÓN	**OBSTÁCULOS Y/O DIFICULTADES**
CT_1: Identificación de *DERIVE* como *software* válido para la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida.	OT_1: Las instrucciones y comandos de *DERIVE* tienen un lenguaje propio que es necesario aprender o, al menos, practicar previamente.
CT_2: Síntesis relacional de las instrucciones de *DERIVE* y los conceptos de la integral definida.	OT_2: Existen distintas representaciones semióticas de los conceptos de integral definida y el *software* puede hacer que los estudiantes consideren las representaciones informáticas como internas y no conscientes (Duval, 1995).
CT_3: Generalización, por medio de *DERIVE*, de distintas representaciones de la integral definida: gráficas, numéricas y simbólicas en un contexto informático. El *software* da una percepción dinámica del concepto (Duval, 2006).	OT_3: Los conceptos matemáticos que subyacen en *DERIVE* pasan desapercibidos a los alumnos; por tanto, el equipo investigador considera que deben emerger todos ellos para que el mayor número posible de estudiantes los adquieran conscientemente.
CT_4: Síntesis de la necesidad de implementar un programa de utilidades de la integral, complementario a *DERIVE*, que transfiera los conceptos del lenguaje matemático usual al lenguaje informático.	OT_4: Los alumnos no pueden implementar ningún programa informático, exige mucho tiempo y estudio.
CT_5: Identificación y discriminación de cada uno de los conceptos matemáticos específicos (partición, sumas inferior y superior, etc.) con una instrucción propia del programa de utilidades, por medio de la cual se obtenga su correspondiente representación gráfica y/o cálculo numérico.	OT_5: Al ejecutar el programa de utilidades: las nuevas instrucciones informáticas no admiten ningún error, “el ordenador no entiende lo que se escribe si se escribe mal”, es decir, si la sintaxis no es correcta.
CT_6: Síntesis de que pueden modificarse los algoritmos de lápiz-papel por otros nuevos en el contexto informático, por ejemplo, es más fácil el cálculo de áreas mediante el valor absoluto de la función integrando.	OT_6: Los alumnos afirman: “El valor absoluto de la integral es la integral del valor absoluto de la función integrando”.
CT_7: Discriminación entre área e integral definida.	OT_7: Cálculo de integrales definidas y áreas de funciones impares cuyos extremos de integración sean opuestos.
CT_8: Síntesis de la integral indefinida como la superficie recorrida entre la gráfica de una función, el eje de abscisas, una recta vertical fija y otra variable.	OT_8: Para que el ordenador reconozca las variables el alumno debe determinarlas correctamente.
CT_9: Síntesis de que *DERIVE* calcula primitivas.	OT_{9a}: No es necesario el cálculo mental de primitivas, lo hace el ordenador. OT_{9b}: En ocasiones debe traducirse el resultado del ordenador a la escritura habitual, en otras es incomprensible.
CT_{10}: Las Nuevas Tecnologías favorecen el aprendizaje de las Matemáticas.	OT_{10}: Los estudiantes realizan un “acto de fe” ante los resultados que presenta el ordenador.

Tabla III.1.5.3. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados a la utilización del programa de cálculo simbólico DERIVE.

Consideramos que para un determinado problema de investigación, los actos de comprensión y los obstáculos asociados a los mismos no tienen una única descomposición y que pueden darse varias materializaciones. Por tanto, partiendo de la premisa anterior y siendo conscientes de que nuestra investigación se desarrolla con alumnos de bachillerato, hemos considerado conveniente establecer un número elevado de actos de comprensión y obstáculos con el fin de que permita al profesor investigador realizar la investigación con el máximo rigor y redactar la tesis doctoral con máxima objetividad y, de tal manera, que los lectores de esta memoria tengan la base teórica suficiente para realizar una crítica reflexiva de este documento y, sobre todo, de los resultados prácticos del mismo.

La tabla III.1.5.1 recoge los actos de comprensión y los obstáculos relativos a la *Integral Definida*, es muy amplia puesto que el concepto sintetizado de integral definida engloba muchos otros y pensamos que para realizar una investigación exhaustiva no podíamos sustraer ninguno de ellos. Los dos últimos actos de comprensión (obstáculos) de la integral definida conectan con las otras dos tablas, en consecuencia, ello hace que los tres tópicos de nuestra investigación estén interrelacionados.

La tabla III.1.5.2 recoge los actos de comprensión y los obstáculos relativos al cálculo de primitivas elementales mediante el *Cálculo Mental*, se relaciona el cálculo diferencial con el cálculo integral en su nivel más sencillo y como alternativa a la resolución de algunos ejercicios se aplica el cambio de variable. Encontramos dos obstáculos muy importantes: muchos estudiantes no aprenden las tablas de derivadas e integrales del texto y consideran que es innecesario aprender a derivar e integrar si ya lo hace el ordenador.

La tabla III.1.5.3 recoge los actos de comprensión y los obstáculos relativos a la enseñanza-aprendizaje de la integral mediante la utilización de *DERIVE.* El lenguaje informático es un obstáculo importante para los estudiantes, sin embargo, queda aminorado por su capacidad para la utilización de las nuevas tecnologías; la realización de múltiples representaciones gráficas y cálculos numéricos favorece la adquisición del concepto integral definida.

Los actos de comprensión y los obstáculos, según el modelo de Sierpinska, relacionados en las tablas anteriores, junto con la posterior descomposición genética de la integral, en el marco de la teoría APOS, serán las guías por las cuales realizaremos nuestra investigación práctica de la enseñanza y el aprendizaje de la integral con alumnos de bachillerato de ciencias sociales.

III.1.6. LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE CHEVALLARD

El término *transposición didáctica* fue utilizado por Chevallard en 1980 para describir el conjunto de transformaciones que sufre un saber científico (objeto de saber), entendido como un conocimiento reconocido culturalmente, para convertirse, en primer lugar, en un saber susceptible de ser enseñado (objeto a enseñar) y, en segundo lugar, en el saber manifestado en el sistema educativo (objeto de enseñanza). Se parte de la idea de que en todo proyecto social de enseñanza se identifican una serie de contenidos que deben ser enseñados, y que estos contenidos han de adaptarse para pasar de un contenido de saber preciso a una versión didáctica de ese objeto. Con palabras del propio Chevallard (1985, pág. 39)[30], expresamos:

> Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la *transposición didáctica.*

Aclaremos este concepto: La comunidad científica elabora un saber denominado *saber sabio, científico* o *erudito* totalmente descontextualizado, sin especificar el camino que ha llevado a su creación y redactado en textos técnico-científicos, sin embargo, todo este saber acumulado a lo largo de la historia no será enseñado, se elige un *saber a enseñar* o *institucionalizado* en cuya elección interviene el sistema social[31]. Una vez seleccionados los objetos de enseñanza, que serán dados a conocer en programas promulgados por el Ministerio de Educación, junto con los fundamentos de su selección, algunas orientaciones metodológicas, un ordenamiento y jerarquización de los saberes y los objetivos que la sociedad espera que se logren a través de ellos, éstos deben ser transformados en conocimientos a adquirir por los alumnos. El *saber institucionalizado* es reelaborado por los expertos y se redacta en textos y manuales donde se propone una organización secuenciada, en unidades didácticas, donde se combinan teoría, ejemplos, ejercicios, ilustraciones, etc.

---

[30] Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

[31] El conjunto de las fuentes de influencias que actúan en la selección de los contenidos que serán parte de los programas escolares y que determinan todo el funcionamiento del proceso didáctico, según Chevallard, recibe el nombre de *noosfera.* Forman parte de la noosfera: científicos, profesores, especialistas, políticos, escritores de textos y otros agentes de la educación.

A partir de este momento interviene el profesor administrando y adaptando la transposición didáctica, él toma los objetos del saber escolar y los organiza en el tiempo de acuerdo a su conocimiento y a sus propias hipótesis de aprendizaje, así pues, el saber escolar que el profesor enseña a los alumnos se denomina *saber enseñado.* Sin embargo, los alumnos aprenden y transforman el saber, dándose el último estadio de la transposición didáctica reconocido como *saber del alumno* (véase la figura III.1.6).

Saber sabio → ***Saber institucionalizado*** → ***Saber enseñado*** → ***Saber del alumno***

Figura III.1.6. La transposición didáctica según Chevallard.

Chevallard considera que para enseñar un objeto debe disponerse de una buena transposición didáctica y, para ello, debe partirse de la epistemología natural del concepto (que incluye una génesis histórica y el estado actual del mismo) y proponer una epistemología artificial (que será una versión degradada de la anterior). Un aspecto interesante de esta teoría es el funcionamiento didáctico de los saberes, la cual establece tres niveles del discurso didáctico (Chevallard, 1998, págs. 220-223)[32], éstos son:

- *Nociones protomatemáticas:* Son aquellas cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, se encuentran de forma implícita, se utilizan cuando surgen dificultades que provienen de la falta de dominio de una capacidad determinada, pero no se reconocen como herramienta y, mucho menos como objetos de estudio (por ejemplo: modelo, estructura, análisis matemático, lógica matemática, álgebra).
- *Nociones paramatemáticas:* Son aquellas que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos para describir otros objetos matemáticos, pero que no se las considera como objetos de estudio en sí mismas y, por tanto, no son objetos de evaluación directa (por ejemplo: parámetro, ecuación, demostración).
- *Nociones matemáticas:* Son aquellas que se reconocen como objeto de estudio en sí mismas, además sirven como instrumento para el estudio de otros objetos. Son los contenidos que se evalúan explícitamente y este tipo de nociones son designadas por los currículos (por ejemplo: suma, círculo, derivada, integral).

[32] Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: AIQUE.

Las diferentes nociones, establecidas por este investigador de la didáctica de la matemática, no son excluyentes, por ejemplo, puede considerarse la demostración como noción paramatemática dentro del análisis matemático y como noción matemática en el contexto de la lógica matemática.

Las características de la transposición didáctica para la puesta de los saberes en los *textos del saber* o *textualización*, según Gómez (2005)[33], son:

- *Desincretización del saber.* Consiste en una delimitación de los "saberes parciales" y cada uno de estos se expresa en un discurso autónomo. Produce la descontextualización del saber, su extracción de los problemas que le dieron origen y, en consecuencia, dando lugar a prácticas de aprendizaje especializado.
- *Despersonalización del saber.* Todo saber sabio en el momento de su nacimiento está ligado a su creador, posteriormente, al ser reconocido por la comunidad científica pierde su halo de subjetividad, queda desvinculado del investigador que le dio origen y, por medio de la textualización, adquiere la categoría de saber objetivado.
- *Programabilidad de la adquisición del saber.* La textualización del saber supone la introducción de una programación, de una norma de progresión en el conocimiento. El texto docente, mediante la programación de aprendizajes, tendrá una secuenciación de los contenidos con el objetivo de permitir una adquisición progresiva de información.
- *Publicidad del saber y control social de los aprendizajes.* La objetivación producida por la textualización del saber conduce a la publicidad de este saber y, en consecuencia, al ser público puede ser enseñado por los profesores (previa adquisición de dicho saber por medio del estudio) y aprendido por los estudiantes mediante un control social (académico) de enseñanza-aprendizaje.

Brousseau (1986), citado por Blázquez (1999, pág. 60), señala, en este contexto de la transposición didáctica, que:

> El trabajo del profesor es, en cierta medida, inverso al trabajo del investigador. El investigador debe determinar sus hallazgos, despersonalizarlos, descontextualizarlos y destemporalizarlos (suprimiendo las reflexiones y caminos erróneos, las razones y condiciones personales que le llevaron al éxito y encontrando la teoría más general en la que los

[33] Gómez, M. A. (2005). La transposición didáctica: Historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, volumen 1, julio-diciembre*, pp. 83-115.

> resultados son válidos), procesos indispensables para que el lector no recorra el mismo camino que el investigador. El alumno debería reproducir una actividad similar, actuando, formulando, probando, construyendo modelos, lenguajes, conceptos o teorías, para lo cual el profesor debe presentar situaciones que permitan esta actividad y en las que los conocimientos que se pretenden adquirir se presenten como la solución óptima a esos problemas. Para ello debe producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos que permitan a los alumnos un trabajo similar al del investigador para desarrollar el saber al que se aspira.

El trabajo que nos ocupa, lleva consigo las nociones matemáticas inherentes a la integral definida, el *saber sabio*, de estos conceptos es muy amplio y con diferentes grados de dificultad, además, existen varias teorías de la integral (Wallis, Cauchy, Riemann, Darboux, Lebesgue, etc.). La Administración Educativa (Ministerio de Educación y Ciencia y la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León) ha establecido en el currículo de Bachillerato la Integral Indefinida y la Integral Definida de Riemann (por este orden), es decir, el *saber institucionalizado.* El profesor-investigador y el director de esta tesis han considerado que, en primer lugar, el desarrollo histórico es el inverso, es decir, primero Integral Definida y después Integral Indefinida, así se ha entendido y ello nos ha aconsejado, junto con los antecedentes del capítulo I, exponer los conceptos en este orden; además, la textualización de estos conceptos en los diferentes libros de texto de segundo de bachillerato nos ha parecido insuficiente y, por tanto, se ha elaborado una nueva unidad didáctica de la Integral Definida según la teoría, actualizada, de Darboux, hemos optado por hacer especial hincapié en el cálculo de primitivas por medio del cálculo mental y ha sido utilizado como material de apoyo programas de *software* matemático, esto es lo que de acuerdo con Chevallard reconocemos como *saber enseñado.* Las hipótesis de esta investigación, la redacción de los distintos ciclos que la componen y las conclusiones de esta tesis, entre otros instrumentos, arrojaran la luz suficiente para evaluar el *saber del alumno* o *saber aprendido.*

La breve secuencia descrita en el párrafo anterior permite visualizar los distintos estadios de la transposición didáctica recorridos por el concepto Integral Definida: *Desincretización del saber*, consistente en la delimitación de los saberes relacionados con el concepto. *Despersonalización del saber*, aunque nosotros hemos conservado la denominación Integral de Darboux, por lo demás, reúne todas las características de esta etapa. *Programabilidad* *de la adquisición del saber*, establecida por el Departamento de Matemáticas del Instituto "Félix Rodríguez de la Fuente" y el profesor-investigador mediante los objetivos, conceptos y criterios de evaluación de la Integral. *Publicidad del saber*, reconocido en el trabajo realizado en el aula, la exposición del tema, la entrega de apuntes y las prácticas informáticas. *Control social de los aprendizajes*, por medio de pruebas objetivas realizadas a los estudiantes.

III.1.7. LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE DUVAL

El término *representación* y la expresión *sistema de representación* en el binomio enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tiene, según Goldin (1998)[34] y Goldin y Janvier (1998)[35], citados por Godino (2003, págs. 51-53), las siguientes interpretaciones:

- Una situación física, externa y estructurada, o un conjunto de situaciones de un entorno físico, que se puede describir matemáticamente o se puede ver como concretización de ideas matemáticas.
- Una materialización lingüística, o un sistema lingüístico mediante el que se plantea un problema o se discute un contenido matemático, con énfasis en las características sintácticas y en la estructura semántica.
- Un constructo matemático formal, o un sistema de constructos, que pueden representar situaciones mediante símbolos, usualmente cumpliendo ciertos axiomas o conforme a definiciones precisas. Incluyendo constructos matemáticos que pueden representar aspectos de otros constructos matemáticos.
- Una configuración cognitiva interna, individual, o un sistema complejo de tales configuraciones, inferida a partir de la conducta o la introspección, que describe algunos aspectos de los procesos del pensamiento matemático y la resolución de problemas.

De acuerdo con Godino (2003), las representaciones pueden considerarse *externas* cuando comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas tales como la notación formal algebraica, la recta real numérica, la representación en coordenadas cartesianas; e *internas* como

[34] Goldin, G. (1998). Representation and the psychology of mathematics education: II. *Journal of Mathematics Behaviour, 17 (2),* pp. 135-165.

[35] Goldin, G. y Janvier, C. (1998). Representation and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour, 17 (1),* pp. 1-4.

los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas. Profundizando en las concepciones de representación interna y externa, Duval (1993)[36] establece nuevos conceptos de representaciones mentales y semióticas, éstos son:

- Las *representaciones mentales* (internas) cubren el conjunto de imágenes y, globalmente a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que le está asociado.
- Las *representaciones semióticas* (externas) son representaciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significado y de funcionamiento.

La interdependencia entre las representaciones internas y externas se expresa afirmando que "no hay noesis sin semiosis[37]; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de las noesis" (Godino, 2003, pág. 57).

Las representaciones semióticas no están subordinadas a las representaciones mentales puesto que el desarrollo de las últimas depende de la interiorización de las primeras, no puede haber comprensión matemática si no se distingue un concepto de su representación y las representaciones pueden ser muy diferentes. Las representaciones (internas y externas) se utilizan para razonar, comunicar o recordar los conceptos; ambas están relacionadas ya que se postula que las representaciones externas actúan como estímulo para la construcción de nuevas estructuras mentales, y por tanto las representaciones internas son una interiorización de las externas, pero también éstas son el medio para exteriorizar las representaciones mentales. Eso sí, la representación es distinta del concepto, aunque muchas veces se confunden (por ejemplo, se confunde el número con su representación decimal).

Existen diversidad de sistemas de representación para cada concepto y cada uno de ellos proporciona una visión diferente del mismo. Así, el uso de diferentes sistemas de representación de un mismo objeto o concepto

[36] Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique e fusionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives,* 5. Strasbourg: IREM. Pp. 37-65.

[37] *Noesis* es la aprehensión conceptual de un objeto. *Semiosis* es la aprehensión o la producción de una representación semiótica.

aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos, puesto que enriquece sus representaciones internas y, de este modo, se pueden establecer relaciones entre los distintos significados del concepto. Ahora bien, el manejo de varios sistemas de representación para un mismo concepto trae consigo dificultades, ya que la traducción entre los sistemas no es trivial, lo que implica la necesidad de un trabajo sistemático en este aspecto.

Si bien es cierto que las *representaciones mentales y semióticas* son consideradas *conscientes* por Duval (1995)[38], asimismo, este investigador considera que las *representaciones computacionales*, cuya función es el tratamiento automático o casi-automático, son no-conscientes.

Estamos de acuerdo con Duval en la clasificación de las representaciones, sin embargo, nuestra propuesta es trabajar con los alumnos de segundo de bachillerato para que las representaciones computacionales sean tan conscientes para los estudiantes como las otras dos y, a la vez, que no sean exclusivamente internas, es decir, que tengan un importante componente de representación externa; para ello, como es sabido, se ha implementado con un pequeño programa de utilidades que, junto con *DERIVE*, será utilizado en las prácticas de la integral en el aula de informática.

Una prueba de la tendencia de los investigadores a la utilización de diversos sistemas de representación para un mismo concepto, la encontramos en Tall (1996)[39], citado por Font (2010)[40], que propone cuatro sistemas para trabajar con conceptos de cálculo, relacionados directamente con la utilización de los ordenadores como herramienta y nosotros los integramos en la presente investigación:

1. *Representaciones enactivas*, son acciones que dan sensación de cambio, en efecto, las sucesivas representaciones y cálculos de las sumas de Darboux para distintas particiones, asociadas a una función positiva en un intervalo compacto, permiten construir la integral de Darboux mediante una secuencia dinámica.

2. *Representaciones interactivas*, *gráficas,* como la simulación de las relaciones entre función, variable y extremos de integración que

[38] Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

[39] Tall, D. (1996). Functions and Calculus, en A. J. Bishop y cols. *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer. Pp. 289-325.

[40] Font, V. (2010). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas.* En: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome14/font.pdf (consulta realizada el 2-2-10).

proporcionan las nuevas tecnologías. Estas representaciones están vinculadas a la acción y proporcionan una base intuitiva para el cálculo elemental.

3. *Representaciones numéricas* (usando *software* que escriba tablas de valores, hojas de cálculo o estudiando la programación de rutinas numéricas, por ejemplo para aproximar el área bajo una curva), *simbólicas* (como los símbolos para la derivada, la integral o las funciones) y *visuales* (como la ampliación del grafo de una función para ver que cada vez la función se parece más a una recta). Todas ellas muestran el funcionamiento proceptual (como proceso y como concepto), y constituyen el cálculo elemental.
4. *Representaciones formales* (a través de la programación o el uso de los manipuladores simbólicos) donde los objetos se manipulan a través de definiciones y no de descripciones, y que constituyen el análisis matemático.

En cuanto al cambio de representaciones, el paso al nivel del análisis no es trivial, ya que requiere un nivel más alto de representaciones formales, lo que implica construcciones significativas y reconstrucción del conocimiento. Así pues, todo lo anterior sugiere que es un error intentar construir definiciones formales y teoremas desde el principio (Font, 2010).

Duval (2006)[41] establece dos clases de transformaciones de representaciones semióticas: la *conversión* y el *tratamiento* (pág. 145). "La conversión puede ser considerada como el **umbral** de la comprensión" (pág. 149) y "la comprensión matemática requiere **una coordinación interna** entre los diferentes sistemas de coordinación semióticos posibles que se pueden elegir y usar" (pág. 158). Si se desea saber el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ambas representaciones deben ser separadas para estudiar lo que hacen los estudiantes cuando se enfrentan a un problema.

Veamos, en el contexto de nuestra investigación, las dos transformaciones de diferentes representaciones semióticas activadas de tres formas distintas mediante el siguiente ejemplo:

Juan posee una finca delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=|x-2|$ *y* $g(x)=1$ *y las rectas* $x=0$ *y* $x=5$*. Calcular su área.*

[41] Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, vol. 9.1,* pp. 143-168.

1.- Conversión gráfica (figura III.1.7.1) y tratamiento algebraico con lápiz y papel mediante la suma del área de tres triángulos.

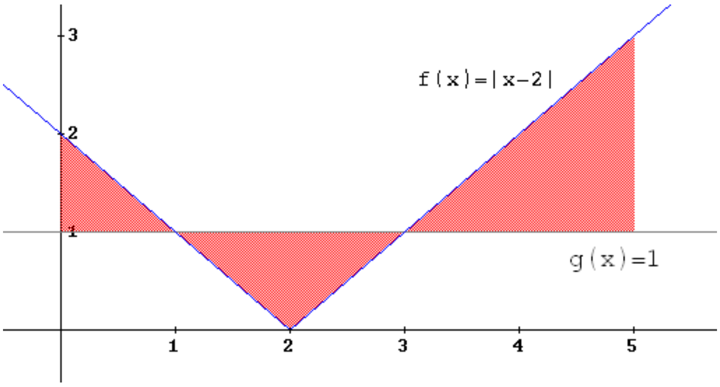


Figura III.1.7.1. Superficie de una finca.

Área de la finca = $A_1 + A_2 + A_3$ = 1x1/2 + 2x1/2 + 2x2/2 = 3,5 u^2.

2.- Conversión gráfica (figura III.1.7.1) y tratamiento algebraico-analítico con el *software* matemático *DERIVE* (figura III.1.7.2).

```
#1:   f(x) := |x - 2|
#2:                                        |x - 2|
#3:   g(x) := 1
#4:                                        1
#5:   AreaBetweenCurves(f(x), g(x), x, 0, 5)
#6:              [|x - 2|, 1, x ≤ 5 ∧ 0 ≤ x ∧ (y - 1)·|x - 2| - y·(y - 1) > 0]
#7:   h(x) := |f(x) - g(x)|
#8:                                        ||x - 2| - 1|
       5
#9:   ∫  ||x - 2| - 1| dx
       0
                                           7
#10:                                       ─
                                           2
```

Figura III.1.7.2. Cálculo del área de la finca con DERIVE.

3.- Conversión analítica mediante la expresión $\int_0^5 \left| f(x) - g(x) \right| dx$ y tratamiento analítico, con el procedimiento de integración, con lápiz y papel.

Después de determinar analíticamente la función diferencia, el área viene dada, aplicando el cálculo de primitivas inmediatas y la regla de Barrow, por la expresión:

$$\acute{A}rea = \int_0^1 (1 - x)\,dx + \int_1^2 (x - 1)\,dx + \int_2^3 (3 - x)\,dx + \int_3^5 (x - 3)\,dx = 3{,}5\,u^2.$$

Pensamos que la última propuesta es más laboriosa y difícil que las otras dos, sin embargo, las representaciones semióticas del problema enunciado son muy diferentes y si deseamos resolverlo por medio de *software* también ha de conocerse el lenguaje informático (representación semiótica informática) y, en este caso, las diferentes instrucciones de *DERIVE.*

Para que los estudiantes comprendan las matemáticas es necesario exponer varias representaciones al mismo tiempo y, además, las palabras deben estar relacionadas con las imágenes.

> El *software* proporciona herramientas para mostrar "instantáneamente" tantas representaciones diferentes como sean necesarias. Por tanto, los estudiantes también pueden obtener las posibles representaciones de los objetos con los que están trabajando o que están usando como herramientas. Además el *software* puede dar una percepción dinámica de la transformación de la representación frente al soporte estático del papel. Tareas específicas como traducir o transferir también pueden servir para preparar a los estudiantes para que reaccionen ante una clase de representación dada (verbal, simbólica o visual) cambiándola por otra (Duval, 2006, pág. 159).

En la presente investigación hemos utilizado el *programa de cálculo simbólico DERIVE*, por medio del cual y mediante un proceso dinámico establecer diferentes representaciones de la integral definida, haciendo especial hincapié en la representación gráfica y, a su vez, combinándolo con el cálculo numérico de distintas sumas inferiores y superiores de Darboux.

III.1.8. LA TEORÍA APOE

El aprendizaje de las Matemáticas, como se ha confirmado anteriormente, entraña grandes dificultades y, como sabemos, se ha estudiado bajo varias teorías. Así pues, un grupo de investigadores RUMEC[42] ha propuesto una nueva teoría constructivista sobre la adquisición del conocimiento matemático o del aprendizaje matemático denominada teoría APOE[43], fundamentada en la teoría cognitiva de Jean Piaget, cuya puesta en práctica se realiza mediante el diseño instruccional ACE[44].

[42] RUMEC: Research in Undergraduate Mathematics Education.

[43] APOE: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. En inglés APOS.

[44] ACE: Actividades con ordenador, discusiones en Clase y Ejercicios.

Asiala y cols. (1996)[45], Dubinsky (1996)[46] y Dubinsky y McDonald (2001)[47], han desarrollado y refinado, usando métodos cualitativos, el marco teórico APOE, es el resultado de la interpretación de la teoría constructivista de Piaget y sus ideas relativas a la abstracción reflexiva, aplicadas al estudio cualitativo del desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

Este enfoque teórico tienen tres componentes: a) el análisis teórico inicial, b) el diseño del tratamiento instruccional y c) la implementación y recolección de datos de investigación. Se propone un ciclo de investigación que pasa a través de las tres componentes, esbozadas en la figura III.1.8, repitiéndolas tanto como sea necesario. Durante este proceso cíclico, tanto la teoría como el tratamiento instruccional se refinan y se mejoran a partir de los resultados empíricos. En primer lugar, se parte de un análisis teórico inicial que persigue explicitar lo que significa comprender un concepto matemático y cómo esa comprensión puede ser construida por un individuo; posteriormente, este análisis conduce al diseño de un dispositivo instruccional que busca que los individuos logren alcanzar las construcciones mentales que fueron identificados en el análisis teórico inicial; finalmente, como resultado de la implementación del dispositivo instruccional, se obtienen datos de investigación que son analizados en el contexto de la perspectiva teórica APOE.

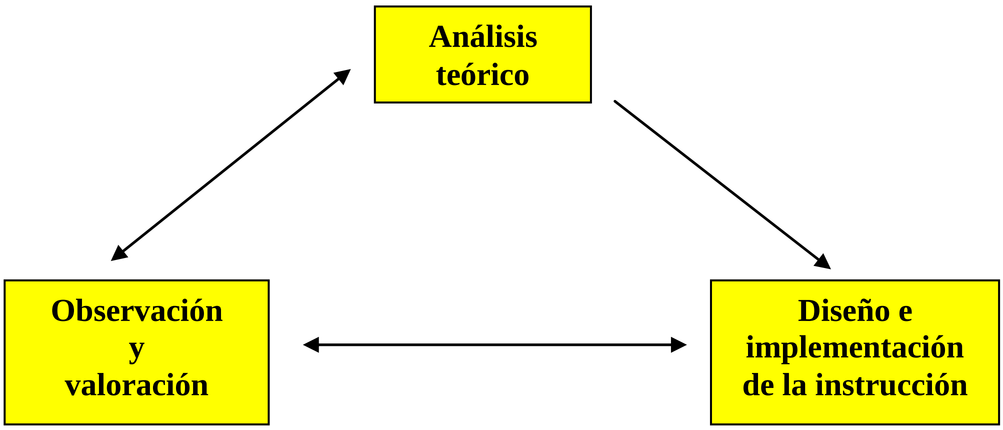


Figura III.1.8. Componentes del marco teórico de la Teoría APOE.

45 Asiala, M., Brown, A., DeVriers, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2*, pp. 1-32.

46 Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, vol. 8 (3)*, pp. 24-41.

47 Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*, 7. Dordrecht: Kluwer. Pp. 273-280.

III.1.8.1. Análisis teórico

La teoría APOE propone la búsqueda de la reflexión por parte de los individuos a la hora de aprender y comprender los conceptos matemáticos más que la memorización acrítica de técnicas y algoritmos con independencia del grado de sofisticación que éstos tengan. Por tanto, bajo este marco teórico, comprender un concepto matemático implica darse cuenta del funcionamiento de los procesos que permiten intuir un resultado sin verse en la necesidad de realizar la totalidad de los cálculos; ser capaces de introducir diferentes variaciones de un mismo algoritmo para observar convergencias y divergencias, para establecer relaciones, para organizar experiencias dentro del ámbito matemático como en otros contextos. En general, se plantea la necesidad de reflexionar para poder llegar a aprender y comprender conceptos matemáticos. Reflexionar en el sentido de poner atención consciente a las operaciones que el individuo realiza al resolver una situación problemática en matemáticas (Badillo, 2003, pág. 32)[48].

Así pues, el desarrollo intelectual de un individuo no consiste en la adquisición de porciones específicas de conocimiento, más bien, requiere del surgimiento de mecanismos poderosos a través de los cuales el sujeto aumenta su habilidad para comprender situaciones matemáticas complejas. Estos mecanismos incluyen la abstracción reflexiva, las dicotomía asimilación-acomodación y desequilibración-reequilibración, y la tricotomía intra, inter y trans (Asiala y cols., 1996 y Dubinsky, 1996).

III.1.8.1.1. Procesos cognitivos

La teoría APOE proponen cinco tipos de abstracción reflexiva dentro del pensamiento matemático avanzado, éstos son: interiorización, coordinación, encapsulación-desencapsulación, generalización y tematización.

a) Interiorización es la construcción mental de un proceso, mediante una serie de acciones sobre objetos cognitivos, que pueden ser realizados o imaginados para ser ejecutados en la mente del individuo sin necesidad de llevar a cabo todos los pasos específicos (Badillo, 2003, pág. 37).

[48] Badillo, E. R. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia. "la derivada, un concepto a caballo entre la Matemática y la Física".* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Por tanto, el paso de interiorización de acciones en proceso debería convertirse en el puente que permite ir de una primera construcción mental (acción) hacia otra de un nivel más sofisticado (proceso). Ordinariamente, muchas de las actividades que diseñamos para que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos no contemplan el paso de una construcción mental a otra. Es decir, que no están diseñadas teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo de los estudiantes, se muestran desconexas entre sí por lo que propician la memorización de técnicas y algoritmos que permiten solucionar un tipo concreto de ejercicios, pero que no llegan a interiorizarse en procesos. Considérese, por ejemplo, la integral definida y la regla de Barrow.

b) Coordinación de acciones o de procesos que conduce a la construcción de un nuevo proceso unificador y más sólido. Por ejemplo, podemos definir el área por medio de la integral de Darboux o la integral de Riemann.

c) Encapsulación-desencapsulación. *Encapsulación* es la trasformación mental de un proceso, el cual se ha interiorizado en una acción, en un objeto cognitivo. Este objeto puede considerarse como una entidad total y se puede actuar mentalmente sobre él por medido de acciones y procesos, por tanto, la *encapsulación* es el proceso de conversión de un proceso dinámico en un objeto estático; por ejemplo, en el proceso dinámico de hallar las sumas inferiores y superiores (que están formadas por dos clases de objetos) con el objeto integral definida (estático), se dice que se ha encapsulado el proceso de calcular dichas sumas en la integral definida. Cuando se realiza el proceso mental de ir hacia atrás, es decir, del objeto al proceso del cual fue encapsulado, se dice que hemos *desencapsulado* un objeto en su proceso inicial; sirva como ejemplo el dado por una función $y=f(x)$ (objeto estático), calcular los valores de la misma para determinados datos de la variable independiente (proceso dinámico).

d) Generalización. Cuando un sujeto aprende a aplicar un esquema ya existente a una gran colección de fenómenos, se dice que el esquema ha sido generalizado. Esto puede ocurrir porque el sujeto se da cuenta de la mayor aplicabilidad del esquema. También puede ocurrir cuando un proceso es encapsulado en un objeto (Dubinsky, 1991). Consideramos en nuestro caso concreto, la capacidad de aplicar el esquema del concepto de integral definida en económicas, biología, físicas, etc.

e) Tematización. Cuando una persona reflexiona sobre su comprensión del esquema de un concepto, visto como "un todo", y es capaz de realizar nuevas acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido *tematizado* en un nuevo objeto; es decir, que se llega a una nueva estructura mental, que son los esquemas, en esta instancia pueden ser tratados como objetos e incluirse en organizaciones de esquemas de "más alto nivel" (Asiala y cols., 1996). Por ejemplo, el espacio vectorial de las funciones integrables en un intervalo cerrado y acotado.

III.1.8.1.2. Construcciones mentales

La construcción del conocimiento matemático, según la teoría APOE, pasa por cuatro etapas[49]: **Acciones**, **Procesos**, **Objetos** y **Esquemas**.

> Las **acciones** son transformaciones de objetos que se perciben por un individuo como algo que es, en cierta medida, externo. La construcción de acciones es el primer objetivo de la instrucción. Las acciones se interiorizan en **procesos** cuando se repiten y el alumno reflexiona sobre ellas. El individuo percibe un proceso como algo interno a él. Los procesos se encapsulan en **objetos** cuando se percibe como una totalidad sobre la que se realizan transformaciones. El **esquema** de un individuo, es la totalidad del conocimiento que para él está conectado (consciente o inconsciente) con un tópico matemático particular. Resulta de organizar estructuralmente la colección de objetos, procesos y acciones que el individuo posee. Cuando el individuo trata al esquema como un objeto en sí mismo, se dice que ha tematizado el esquema (Sierra y Codes, 2005, pág. 6)[50].

Definidas e interrelacionadas las cuatro etapas de las construcciones mentales, expliquemos cada una de ellas:

a) Acciones. Esto implica que un individuo cuyo entendimiento o compresión de un concepto matemático está limitado por una concepción acción, puede realizar transformaciones reaccionando sólo a indicaciones externas que le proporciona detalles precisos sobre qué pasos dar. Por ejemplo, un estudiante tienen una concepción acción de la función, cuando no es capaz de interpretar una situación como una función, si no se le

[49] El desarrollo de estas construcciones mentales no es lineal, no ocurre en una secuencia lógica simple, por tanto, estas construcciones pueden aparecer simultáneamente.

[50] Sierra, M. y Codes, M. (2005). Entorno computacional y Educación Matemática: Una revisión del estado actual. *IX Simposio SEIEM.* Córdoba. Pp. 1-16.

proporciona una ecuación o expresión algebraica para ir evaluándola en diferentes puntos del dominio. Esto demuestra, que este estudiante sólo puede manipular la fórmula dada y evaluarla en puntos específicos del dominio, pero difícilmente podrá trabajar y comprender las funciones definidas a trozos, las inversas de funciones, la composición de funciones, la función derivada, el cálculo de primitivas y la función integral.

La perspectiva de la acción de los conceptos matemáticos, desde el marco de la teoría APOE, están relacionadas con la inhabilidad de los estudiantes para interiorizar estas acciones en procesos, o encapsular los procesos en objetos (Dubinsky, 1996). De allí la importancia del profesor en el diseño de actividades e implementación de estrategias que permitan activar estos procesos cognitivos en los individuos, siendo conscientes que las acciones marcan el principio del entendimiento de un concepto.

b) Procesos. El estudiante realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora, no necesariamente dirigida por un estímulo externo; así pues, un alumno que adquiere una concepción proceso de un concepto matemático, puede reflexionar sobre ella, describirla, o incluso invertir la secuencia de la transformación sin necesidad de volver a realizar los pasos (Dubinsky, 1996). A diferencia de la acción, el sujeto percibe el proceso como una transformación interna, y que controla, en vez de percibirla como algo que hace como respuesta a una o varias señales externas (Badillo, 2003, pág. 44). Por ejemplo, para el caso de funciones como la función *sen(x)*, se requiere de una concepción proceso del concepto función porque no se encuentra con instrucciones directas o explícitas para obtener una salida para una entrada dada, por ello, para poder calcular la función en todo el dominio, se debe imaginar el proceso de asociar a cada número real su seno. Asimismo, la persona que tenga una concepción proceso del concepto función, puede coordinar dos o más procesos para construir una composición de funciones. De igual forma, puede invertir el proceso para obtener funciones inversas o realizar el cálculo de primitivas.

c) Objetos. Cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. Entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso se ha encapsulado en un objeto (Asiala y cols., 1996 y Dubinsky, 1996). Para el caso concreto del concepto función, sugieren que en la manipulación de funciones para encontrar operaciones con funciones, tales como suma, producto o cuando se forman conjuntos de funciones, se observa fácilmente cómo aparecen la encapsulación de procesos en objetos y la desencapsulación de objetos a procesos. En general, la encapsulación de procesos en objetos es muy difícil.

d) Esquemas. Una vez construidos, objetos y procesos pueden ser interconectados de varias formas; procesos y objetos se relacionan en virtud de que los primeros actúan sobre los segundos; una colección de procesos y objetos puede ser organizada en una manera estructurada para formar esquemas. Considérese, por ejemplo, la integral definida aplicada a las ciencias sociales.

De igual forma que los procesos y objetos se organizan en estructuras más sofisticadas llamadas esquemas, los esquemas también se pueden coordinar y organizar en estructuras de un nivel más alto: cuando esto ocurre se da la transformación que ya definimos como **tematización**, recordemos que las funciones integrables en un intervalo cerrado y acotado forman un espacio vectorial.

La siguiente figura muestra la construcción mental de acciones, procesos y objetos y su relación con los procesos cognitivos de la teoría APOE (Dubinsky, 1996, pág. 33).

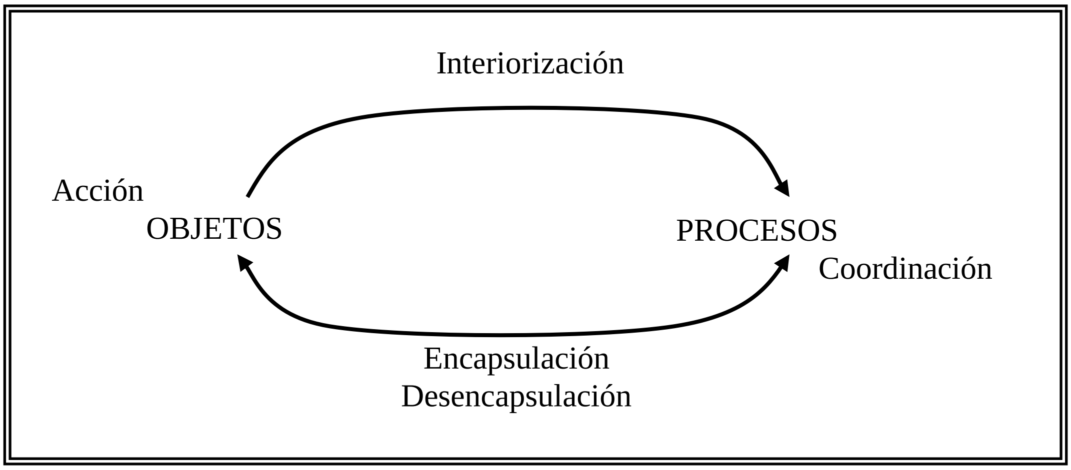


Figura III.1.8.2. Construcciones mentales para el conocimiento matemático.

III.1.8.1.3. Niveles de comprensión de un esquema

Actualmente se está ampliando el marco de la teoría APOE con los niveles de comprensión de un esquema, conocida con el nombre de tríada (**intra**, **inter** y **trans**). En el estudio que nos ocupa podemos considerar el nivel **intra** (interiorización) como sucesos particulares que son analizados por sus propiedades, por ejemplo, la linealidad de la integral definida. En el nivel **inter** (encapsulación) los estudiantes ascienden a niveles superiores, buscan relaciones y asocian varios conceptos, por ejemplo: la linealidad de la integral, el cálculo de áreas determinadas por funciones definidas a trozos o funciones que toman valores positivos y negativos e incluso el área comprendida entre dos funciones. En el nivel **trans** (tematización) el estudiante organiza y coordina las relaciones adquiridas anteriormente formando nuevas estructuras, por ejemplo, la aplicación de la integral definida en los diferentes campos del saber como pueden ser las ciencias físicas, la economía, las ciencias sociales, etc.

Debemos aclarar, una vez más, que estos niveles no se adquieren de forma lineal aunque el progreso es gradual y conlleva la coexistencia de varios esquemas dinámicos que se reestructuran constantemente.

III.1.8.2. Tratamiento instruccional. Metodología de la enseñanza ACE

El tratamiento instruccional es la segunda componente de la teoría APOE. Para el diseño del tratamiento instruccional de un concepto matemático específico toman como base el análisis teórico inicial (descomposición genética[51] que han elaborado de dicho concepto). Dubinsky (1996), afirma que el método pedagógico que sustenta sus investigaciones, con el fin de alcanzar sus objetivos, está conformado por tres grandes principios:

- **i)** Investigación sobre la enseñanza.
- **ii)** El ciclo de enseñanza ACE[52].
- **iii)** El aprendizaje cooperativo.

Nosotros nos dedicaremos a comentar, brevemente, el primero y el tercero, siendo más explícitos en el ciclo de enseñanza ACE.

[51] En nuestro caso, la descomposición genética de la integral será realizada en este capítulo.

[52] ACE: Actividades con ordenador, discusiones en Clase y Ejercicios de afianzamiento.

En relación con el primero de ellos, *la investigación sobre la enseñanza*, enfatiza que las investigaciones son primordialmente estudios cualitativos, donde la base de la información surge de cuestionarios que deben resolver por escrito y de entrevistas con los estudiantes sobre sus respuestas a los cuestionarios y sobre cómo piensan cuando se enfrentan a la resolución de situaciones problemas en relación con el concepto matemático en cuestión.

Atendiendo al *aprendizaje cooperativo*, los estudiantes realizan su trabajo durante todo el curso académico (lo cual incluye tareas y algunas evaluaciones) en grupos cooperativos permanentes. La hipótesis que subyace de esta opción metodológica es que, este tipo de trabajo, les proporciona un ambiente de interacción social que propicia la maduración de sus entendimientos (Dubinsky, 1996).

Para la implementación del tratamiento instruccional, propuesto por la teoría APOE, y para desarrollar las construcciones mentales de los estudiantes con base en el análisis epistemológico que hacen del concepto inicialmente, se ha adoptado la *enseñanza ACE* (actividades con ordenador, discusiones en clases y ejercicios de afianzamiento). La principal estrategia del método de enseñanza ACE es incluir el uso del lenguaje de programación que ayude a la construcción de los conceptos matemáticos y el trabajo en grupos cooperativos que propicie la discusión (Badillo, 2003, pág. 52).

a) Actividades con ordenador. Están diseñadas para inducir a los estudiantes a efectuar las construcciones mentales especificas de acciones, procesos y objetos, que son parte fundamental de la teoría: involucran algún elemento del aprendizaje por descubrimiento y su principal objetivo es proporcionar a los estudiantes una experiencia base en lugar de llevarlos directamente a respuestas correctas. En términos generales se busca que los estudiantes a través del lenguaje de programación ganen experiencia previa con los conceptos matemáticos y desarrollen tareas específicas que tienen como objetivo inducir a los estudiantes a hacer las construcciones mentales específicas que propone el análisis teórico. En nuestra investigación, realizada con bachilleres, no ha sido posible que los estudiantes implementaran su propio programa informático, sin embargo, el profesor-investigador ha realizado un pequeño programa de utilidades para que los alumnos comprendieran algunos de los conceptos relacionados con la integral definida y, al menos, que la enseñanza con *software* informático fuera en el contexto de *caja gris.*

b) Discusión en clase. Después de las prácticas informáticas, los estudiantes se reúnen, en su aula habitual, en pequeños grupos para discutir su aplicación en otros dominios y contextos, trabajan en equipo sobre tareas de lápiz y papel, diseñadas por el profesor y basándose en las actividades realizadas en el ordenador. El objetivo es lograr que los estudiantes reflexionen y discutan sobre el trabajo realizado con el ordenador y sobre las diferentes situaciones problemas solucionadas en clase. El profesor es el orientador, en algún momento asume la responsabilidad de puntualizar y resumir los puntos claves tocados por los estudiantes en la discusión sobre el concepto en cuestión. En esta investigación, los estudiantes han trabajado en el aula de clase siguiendo las indicaciones expresadas anteriormente.

c) Ejercicios. Son los “deberes” complementarios a las tareas de ordenador y las actividades de grupo realizadas en el aula de clase. El objetivo de estos ejercicios es que los estudiantes refuercen y afiancen las ideas que han construido sobre el concepto matemático estudiado y usen la matemática que han aprendido como base de otros conceptos matemáticos que serán desarrollados posteriormente. El profesor investigador, en sus clases de matemáticas, siempre propone y exige, a todos sus alumnos, la resolución de ejercicios y problemas que deberán realizarse en horario no lectivo.

III.1.8.3. Observación, discusión y valoración

Durante la *implementación de la instrucción* también se recopilan datos de la investigación, además, junto con la descomposición genética del concepto (*análisis teórico*) se reflexiona y valoran los resultados obtenidos, definiendo así, un ciclo de investigación que se repite tantas veces como sea necesario, hasta lograr profundizar en la comprensión de cómo los estudiantes construyen su comprensión del concepto matemático investigado. El resultado de este análisis puede conducir a la revisión de la descomposición genética inicial, y de igual forma, generar cambios en el tratamiento instruccional. La descomposición genética inicial del concepto está basada por un lado en la comprensión que tienen los investigadores del concepto matemático y por otro en sus experiencias como aprendices y profesores. Dado que el ciclo es repetitivo, la descomposición genética última, refleja más o menos el análisis de los datos.

Durante todos los ciclos que propone el marco de la teoría APOE, sugieren la recolección de diferentes clases de datos y la utilización de diferentes instrumentos de recolección, entre ellos, cuestionarios, grabaciones y entrevistas semiestructuradas. Estos datos son analizados para observar qué construcciones mentales han alcanzado los estudiantes. Si sus construcciones están incluidas en la descomposición genética realizada, se puede llegar a predecir qué matemática tienen que llegar a aprender los estudiantes. Así los resultados de los trabajos desde la base de este marco teórico son de naturaleza dual, un primer resultado de la investigación es el profundizar la comprensión de la epistemología del concepto, y otro resultado conduce a la creación de estrategias didácticas por las cuales los estudiantes adquieren mejor un concepto matemático específico.

III.1.8.4. Descomposición genética de la integral

Dentro de la teoría APOE, el análisis teórico del concepto matemático que se desea estudiar concluye con la descomposición genética de dicho concepto, consiste en un análisis teórico serio y riguroso del contenido matemático concreto que se desea enseñar (Badillo, 2003).

> Una descomposición genética es una descripción idealizada de las representaciones, vínculos, objetos, procesos y acciones esperadas matemáticamente, que casi siempre se atribuyen al concepto. Además, la descomposición genética proporciona un trayecto posible para la formación de un concepto por parte del estudiante; sin embargo, puede no ser representativa de la trayectoria que tienen todos los estudiantes (Meel, 2003, págs. 247-248).

La descomposición genética no es única, es susceptible de ser mejorada y lleva al diseño de una unidad didáctica cuyo principal objetivo es que el alumno construya el modelo cognitivo propuesto por el investigador (Sierra y Codes, 2005, pág. 5). Para la elaboración de dicha descomposición genética de un concepto matemático deben tenerse presentes: a) la comprensión que tiene el investigador como alumno y posteriormente como profesor del concepto objeto de estudio, b) la historia y epistemología del concepto y, por último, c) los resultados de la investigación que se han obtenido en el campo de la didáctica de las matemáticas relacionados con el concepto estudiado.

La descomposición genética es el centro de gravedad de la aplicación de la teoría APOE porque: a) permite estructurar el concepto matemático objeto de estudio, b) es la base para el diseño de las instrucciones y c) ofrece categorías conceptuales y analíticas para el diseño de la recogida de datos, el análisis de las construcciones mentales de los alumnos cuando adquieren el concepto matemático que se pretende estudiar y el análisis de los objetos matemáticos en el contexto institucional en el que son transmitidos.

Así pues, un concepto tan complejo como la integral definida puede tener varias descomposiciones genéticas; en nuestra investigación de los *antecedentes* hemos encontrado cinco, en cuatro de ellas interviene el mismo investigador, diseñadas para la realización de investigaciones de enseñanza-aprendizaje de la integral definida con estudiantes universitarios.

Según Czarnocha y cols. (2001)[53], citado por Boigues (2010a)[54], tenemos:

1.	Noción de función a nivel objeto.
2.	**2.a** La noción de partición a nivel objeto. **2.b** Comprender a nivel de objeto la noción de sucesión.
3.	La acción sobre una función y una partición de construir una suma de Riemann.
4.	La noción de suma de Riemann a nivel de proceso.
5.	La noción de suma de Riemann a nivel de objeto. • Variaciones de la suma (derecha, izquierda, punto medio). • Dependencia de n.
6.	Acciones con la suma de Riemann: comparar con un área a nivel gráfico y mediante aproximaciones.
7.	Proceso de suma de Riemann, interiorización de 6.
8.	Aplicar el esquema de límite para obtener un número.
9.	Tener un esquema de límite de una sucesión que tenga en cuenta la distancia entre término y límite y tener una noción de distancia.
10.	Esquema de la suma de Riemann.
11.	Coordinación entre el esquema de la suma de Riemann y el esquema de límite.

Tabla III.1.8.4.1. Descomposición genética de la integral definida según Czarnocha y cols.

[53] Czarnocha, B., Loch. S., Prabhu, V. y Vidakovic, D. (2001). The Concept of Definite Integral: Coordination of Two Schemas. En Maria van den Heuvel-Penhuizen (Ed.). *Proceedings of the XXV Conference of the PME.* Utrech: Freudenthal Institut. Pp. 297-304.

[54] Boigues, F. J. (2010a). Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería. *Jornadas de investigación en Análisis Matemático. Publicación del grupo de didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM*, febrero, Baeza. Pp. 42-61.

Boigues y Pastor (2007)[55] realizan una descomposición genética de la integral definida; Boigues (2010a) propone dos nuevas descomposiciones genéticas y en Boigues, Llinares y Estruch (2010b)[56] encontramos otra similar a las anteriores, ésta, escaneada, es:

ESQUEMA DE LA INTEGRAL DEFINIDA	
ESQUEMA A: ***Partición*** **de un intervalo [a, b]**	
A.0	Esquema del intervalo en la recta real.
A.1	Gráficamente se tendría la acción de dividir un segmento en varias partes.
A.2	Analíticamente tendríamos la acción de mostrar un conjunto de valores ordenados, cuyo primer elemento coincidiría con a y el último con b.
A.3	Interiorización de las acciones A1 y A2 en un proceso que implica subdividir, gráfica o analíticamente, un intervalo en una serie de subintervalos. Incluye dos elementos: · interiorización de la acción A1. · interiorización de la acción A2.
R1A	Relacionar analítica y gráficamente la idea de partición de un intervalo cualquiera entendida como proceso.
ESQUEMA B: ***Sumas de Riemann*** **para una función continua** ***f(x)*** **en un intervalo real** ***[a, b]*** **y con una partición**	
B.01	Esquema de área de una superficie.
B.02	Esquema de función real de variable real.
B.03=A	Esquema de partición.
B.1	Gráficamente la acción de construir rectángulos que se aproximen al área buscada siguiendo los siguientes criterios: a) Dividir el intervalo en subintervalos según la partición dada. b) Seleccionar para cada subintervalo un punto y representar su imagen según un criterio (el máximo, el mínimo y así sucesivamente). c) Dibujar los rectángulos con base en los subintervalos y tomando como alturas las imágenes seleccionadas anteriormente.
B.2	Analíticamente la acción de hallar un número que coincide con la suma de las áreas de los rectángulos.
B.3	La interiorización de los elementos B1 y B2 llevará a una comprensión de la noción de suma de Riemann a nivel de proceso. Incluye dos elementos: · interiorización de la acción B1. · interiorización de la acción B2.
R1B	Relacionar analítica y gráficamente la obtención de la suma de las áreas de los rectángulos para un intervalo y una partición cualquiera.
ESQUEMA C: ***La integral definida*** **como el límite a una sucesión de Sumas de Riemann.**	
C1	Esquema de sucesión.
C2	Esquema de límite de una sucesión.
C3=B	Esquema de suma de Riemann.
R1C	{C1 R C3} vía construcción de una sucesión de sumas de Riemann.
R2C	{C2 R C3} vía límite de una sucesión de sumas de Riemann.

Figura III.1.8.4.1. Descomposición genética de la integral definida, Boigues y cols. (2010b).

[55] Boigues, F. J. y Pastor, J. (2007). La teoría Fuzzy como elemento para medir el grado de desarrollo en la comprensión de la integral. En: P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo: M. T. González (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM.* Huesca. Pp. 145-155.

[56] Boigues, F. J., Llinares, S. y Estruch, V. (2010b). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias sociales. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, RELIME, vol. 13 (3),* pp. 255-282.

La descomposición genética anterior es muy interesante. Sin embargo, para la investigación que proponemos es conveniente hacer otra que contemple la epistemología, el concepto, los teoremas, las propiedades y la orientación docente llevada a cabo en la que destacan el cálculo mental y las nuevas tecnologías. Por tanto, en las siguientes tablas establecemos cinco esquemas claramente diferenciados y en cuyo encabezamiento expresamos brevemente los concepto que deseamos incluir en cada una de ellos.

ESQUEMA I: CONOCIMIENTOS PRERREQUISITOS	
I.1	Representación gráfica en sistema de coordenadas cartesianas de los objetos matemáticos.
I.1.1	Reconocimiento de los ejes; del significado del origen; de las unidades y de las escalas.
I.1.2	Representación gráfica de puntos.
I.1.3	Representación gráfica de rectas.
I.2	Coordinación de representaciones de puntos de las funciones.
I.2.1	Interpretación de (x,y) cuando viene dado por los pares de las soluciones de la ecuación $y=f(x)$.
I.2.2	Interpretación de (x,y) cuando viene dada por la gráfica de la función $y=f(x)$.
I.2.3	Definición de las condiciones necesarias para que una relación sea una función e interpretación gráfica de dichas condiciones.
I.2.4	Superar la necesidad de tener una fórmula (expresión analítica) para interpretar una función.
I.3	Coordinación de los diferentes aspectos de la continuidad de una función.
I.3.1	En un punto: continuidad y discontinuidad (evitable e inevitable).
I.3.2	En un intervalo.
I.4	Coordinación y traducción de diferentes modos de representación de una función.
I.5	Cálculo de áreas de rectángulos.
I.5.1	Los lados de un rectángulo son de longitud entera.
I.5.2	Los lados de un rectángulo son de longitud racional.
I.5.3	Los lados de un rectángulo son de longitud irracional.
I.6	Cálculo de áreas de triángulos y polígonos regulares.
I.7	Establecimiento del número π.
I.7.1	Longitud de la circunferencia.
I.7.2	Área del círculo.
I.8	Cálculo de áreas de superficies que pueden descomponerse como suma (resta) de triángulos, cuadrados, polígonos regulares, círculos y sectores circulares.

Tabla III.1.8.4.2. Descomposición genética de la integral de Darboux. Conocimientos prerrequisitos.

ESQUEMA II: CONTEXTO GRÁFICO, ANALÍTICO, ALGEBRAICO Y NUMÉRICO DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (1/2)	
II.1	**Gráfico:** Particiones, sumas inferiores y superiores de Darboux.
II.1.1	Representar y expresar una partición P asociada a un intervalo I.
II.1.2	Representar el área, A, que se pretende calcular.
II.1.3	Representar y expresar los mínimos y máximos absolutos de una función en cada uno de los subintervalos de la partición P.
II.1.4	Representar las sumas inferiores y superiores de Darboux de una función asociadas a la partición P.
II.1.5	Comparar, gráficamente, las sumas inferiores y superiores de Darboux y el área, A, representada anteriormente.
II.2	**Algebraico-numérico:** Particiones, sumas inferiores y superiores de Darboux.
II.2.1	Calcular la partición P del intervalo I.
II.2.2	Aproximar el área A, por medio del área del rectángulo inferior y el rectángulo superior, es decir, $m(b-a) \leq A \leq M(b-a)$.
II.2.3	Calcular las sumas inferiores y superiores de Darboux.
II.2.4	Comparar y ordenar de menor a mayor los diferentes valores obtenidos en los dos puntos anteriores.
II.3	**Gráfico:** Refinamiento de una partición.
II.3.1	Construcción y representación de una partición P' más fina que P.
II.3.2	Representación de los mínimos y máximos absolutos asociados a los subintervalos de la nueva partición P'.
II.3.3	Representar las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a P'.
II.3.4	Comparar, gráficamente, las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a P y a P' junto con el área A.
II.4	**Algebraico-numérico:** Refinamiento de una partición.
II.4.1	Calcular la partición refinada P'.
II.4.2	Calcular las sumas inferiores y supriores de una función en un intervalo asociadas a la partición P'.
II.4.3	Comparar y ordenar de menor a mayor las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a las particiones P y P' junto con el área A.
II.5	**Algebraico-analítico:** Integral de Darboux.
II.5.1	Interiorización de la integral inferior de Darboux como el extremo superior de las sumas inferiores.
II.5.2	Interiorización de la integral superior de Darboux como el extremo inferior de las sumas superiores.
II.5.3	Comparar las integrales inferior y superior de Darboux con el área A.
II.5.4	Interiorización del concepto de integral de Darboux.
II.5.5	Interiorización del teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.

ESQUEMA II: CONTEXTO GRÁFICO, ANALÍTICO, ALGEBRAICO Y NUMÉRICO DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (2/2)	
II.6	**Gráfico-analítico:** Integral de Riemann.
II.6.1	Representar los valores de una función en un punto intermedio de cada uno de los subintervalos de P.
II.6.2	Representar la suma de Riemann asociadas a una partición P y a un conjunto de puntos intermedios.
II.6.3	Comparar las sumas inferior y superior de Darboux con la suma de Riemann de una función $f(x)$ en un intervalo I asociadas a la partición P.
II.7	**Algebraico-analítico:** Integral de Darboux $\leftrightarrow$ Integral de Riemann.
II.7.1	Interiorización del teorema del encaje.
II.7.2	Equivalencia entre la integral de Darboux y la integral de Riemann, en lo sucesivo, integral definida.
II.7.3	Interiorización de la existencia de funciones integrables, por ejemplo: las continuas (lineales, afines, parabólicas, etc.), escalonadas y monótonas.
II.7.4	Comprensión de la existencias de funciones no integrables.
II.8	**Aplicación:** Cálculo de la integral definida por medio de sumas inferiores y superiores de Darboux de la función $f(x)=x$ en el intervalo I=[0,1].
II.8.1	Representación del área determinada por la función $y = x$, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=1.
II.8.2	Determinación de una partición, P_4, del intervalo I=[0,1] de 5 nodos con una amplitud de cada subintervalo de 1/4.
II.8.3	Representación y cálculo de las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a $P_{4.}$
II.8.4	Determinación de una partición, P_n, del intervalo [0,1] de n+1 nodos con una amplitud de cada subintervalo de 1/n.
II.8.5	Representación y cálculo de las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a $P_{n.}$
II.8.6	Cálculo de la integral inferior y superior de Darboux de la función anterior en el intervalo I.
II.8.7	Cálculo del área del triángulo de vértices O(0,0), A(0,1) y B(1,1).
II.8.8	Comparación de los valores obtenidos anteriormente.
II.8.9	Interiorización de la necesidad de calcular las áreas por procedimientos distintos al de las sumas inferiores y superiores de Darboux.

Tabla III.1.8.4.3. Descomposición genética de la integral de Darboux. Contexto gráfico, analítico, algebraico y numérico del concepto de integral definida.

ESQUEMA III: PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN, TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL, TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA	
III.1	Concepto de primitiva de una función.
III.2	Teorema de los incrementos finitos o del valor medio (TVM).
III.2.1	Determinación de la hipótesis y la tesis del TVM.
III.2.2	Cálculo de la pendiente de la recta que pasa por los puntos *A(a,ƒ(a))* y *B(b,ƒ(b))*.
III.2.3	Equivalencia entre la derivada de una función en un punto y la pendiente de la recta tangente en dicho punto.
III.2.4	Confirmación de la tesis del TVM mediante la igualdad de los dos puntos anteriores.
III.3	Teorema fundamental del cálculo (TFC).
III.3.1	Determinación de la hipótesis y la tesis del TFC.
III.3.2	Sumas de Riemann y teorema del valor medio del cálculo diferencial.
III.3.3	Igualdad entre integral inferior y superior de una función integrable Darboux, lo cual concluye la demostración del TFC.
III.3.4	Regla de Barrow.
III.4	Propiedades de la integral definida.
III.4.1	Linealidad de la integral definida.
III.4.2	Coincidencia de los límites de integración.
III.4.3	Teorema del valor medio del cálculo integral.

Tabla III.1.8.4.4. Descomposición genética de la integral de Darboux. Primitiva de una función, teorema del valor medio del cálculo diferencial, teorema fundamental del cálculo y propiedades de la integral definida.

ESQUEMA IV: INTEGRAL INDEFINIDA Y CÁLCULO DE PRIMITIVAS	
IV.1	Concepto de integral indefinida.
IV.2	Linealidad de la integral indefinida.
IV.3	Tabla de primitivas.
IV.4	Primitivas inmediatas.
IV.5	Cálculo mental de primitivas.
IV.6	Cambio de variable en el cálculo de primitivas.

Tabla III.1.8.4.5. Descomposición genética de la integral de Darboux. Integral indefinida y cálculo de primitivas.

ESQUEMA V: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA	
V.1	Representación de la integral indefinida como área barrida entre la función $y=f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=t$.
V.2	Asociación entre el cálculo de áreas y la integral definida.
V.2.1	La curva está por encima del eje de abscisas.
V.2.2	La curva está por debajo del eje de abscisas.
V.2.3	La curva corta al eje de abscisas.
V.3	Área encerrada entre dos curvas.
V.4	Generalización del cálculo integral.
V.4.1	Resolución de problemas de economía.
V.4.2	Resolución de problemas de física.

Tabla III.1.8.4.6. Descomposición genética de la integral de Darboux. Aplicaciones de la integral definida.

Nuestra descomposición genética de la integral tiene mayor grado de concreción que las de Czarnocha y cols. (2001) y Boigues y cols. (2010b); surge de la larga experiencia del profesor investigador impartiendo docencia en institutos de educación secundaria, de la implementación[57] de cada uno de los seis ciclos de los que se compone esta investigación y del estudio y análisis de la descomposición genética de la derivada realizada por Badillo (2003). Además, consideramos que debe ser así puesto que nuestra investigación se desarrolla con estudiantes de bachillerato de la modalidad de ciencias sociales, muchos de ellos tienen grandes dificultades para comprender conceptos matemáticos y su entusiasmo por la ciencia matemática es más bien escaso, e incluso, de rechazo total. Pensamos que los esquemas propuestos están conformados por varios subesquemas que no detallamos y creemos que no resultaría difícil establecerlos.

III.1.8.5. Aportaciones y limitaciones de la teoría APOE

Consideramos que la espiral de ciclos de investigación expuesto en la teoría APOE está bien estructurado, es coherente, riguroso y bastante complejo, de ahí que su implementación presente algunas dificultades descritas por Badillo (2003, págs. 56-62); además, proponemos algunas preguntas abiertas a la aplicación de la misma, éstas son:

[57] Planificación, acción, análisis y reflexión.

- La asimilación de la teoría por parte del investigador durante el proceso de la investigación hace que la percepción tanto del problema como de la propuesta de solución cambien o evolucionen.
- Las dificultades para aclarar y determinar tanto las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) que se requieren en el estudio del problema como el sistema de ejercicios y problemas. Dada la descomposición genética ¿cómo se elabora el sistema de ejercicios para su desarrollo? En la teoría no se propone ningún mecanismo de construcción para la elaboración de dicho sistema y queda a cargo de la intuición, experiencia y dominio del tema del investigador.
- En la instrumentación didáctica se requiere de un grupo de profesores con ideas claras sobre el problema que se investiga y que conozca la teoría que se pretende utilizar ¿hasta qué punto se requiere de ese equipo de investigación?
- En el diseño de unidades didácticas de conceptos tan complejos como el de integral definida ¿es posible realizar una descomposición genética única del concepto que incluya toda su complejidad conceptual: sintaxis y semántica? o, por el contrario, ¿debemos asumir la elaboración de una unidad didáctica como un sumatorio de descomposiciones genéticas que atiendan a la complejidad específica de los conceptos que la conforman?
- La pobreza en la descomposición genética de un concepto matemático puede llevar a la emergencia de fenómenos didácticos como el de la algebrización en la enseñanza de los conceptos matemáticos.
- La poca importancia que se le otorga a la problemática de la complejidad semiótica de los objetos matemáticos dentro de la teoría. Los niveles de compresión de un esquema (intra, inter y trans), en algunos momentos, no están suficientemente delimitados y, además, debe construirse el aparato teórico y analítico que ayude a clarificar y fundamentar la influencia de las traducciones y relaciones entre representaciones de los objetos matemáticos en la construcción de los procesos cognitivos como resultado de la actividad matemática que se diseña y genera en el aula.

III.2. MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN. ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA

Los distintos marcos teóricos resumidos en este capítulo no son excluyentes, cualquier de ellos puede ser utilizado en investigaciones de didáctica de la matemática y, además, todas estas investigaciones tienen muchas de las características de cada uno de los marcos señalados con anterioridad.

Nuestro propósito inicial ha sido el establecimiento de varios marcos teóricos para comprender mejor nuestra investigación; así, por ejemplo, el diseño de la unidad didáctica, las actividades en el aula de grupo y en el aula de informática siguen nuestra descomposición genética de la integral, propuesta por la teoría APOS; además, esta teoría establece que la investigación debe desarrollarse por ciclos mediante un proceso en espiral, el cual reconocemos en el marco metodológico cualitativo de *investigación-acción*.

Sin embargo, somos conscientes que debemos elegir uno de los marcos teóricos y consideramos que el que mejor se adapta a nuestra investigación es el **Modelo de los actos de comprensión de Sierpinska**, véase el apartado III.1.5 de este capítulo, que propone cuatro categorías de actos de comprensión (*identificación, discriminación, generalización* y *síntesis*).

> Para Sierpinska la comprensión y los obstáculos son dos caras de la misma moneda, una es la parte negativa, los obstáculos, puesto que prestan atención a lo erróneo, mientras que la otra, la comprensión, es la parte positiva puesto que busca nuevas formas de conocimiento. Algunos actos de comprensión son actos de superación de obstáculos y otros se convierten en la adquisición de nuevos obstáculos. Una descripción de los actos de comprensión debería completarse con una lista de los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto, aportando más información sobre su significado (Blázquez y Ortega, 1998, págs. 120-121).

El mandato de Sierpinska, para la integral definida, lo hemos recogido en las tablas III.1.5.1, III.1.5.2 y III.1.5.3; así pues, el modelo teórico de los *actos de comprensión de Sierpinska* (ACS), junto la *investigación-acción*, es un buen marco teórico para la investigación en didáctica de la matemática pues satisface los ocho criterios de Schoenfeld (2000)[58], matizados por Meel (2003), los cuales definimos (en cursiva) y analizamos brevemente a la luz del marco teórico seleccionado:

[58] Schoenfeld. A. H. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the American Mathematical Society, vol. 47, number 6*, june/july, pp. 641-649.

III.2.1. PODER DESCRIPTIVO

Es la capacidad del marco teórico para capturar las características esenciales de la investigación, que permiten un análisis fidedigno del fenómeno que se está describiendo (Schoenfeld, 2000, pág. 646 y Meel, 2003, pág. 249).

Los ACS y la investigación-acción proporcionan la suficiente información mediante la toma de datos, las grabaciones, las prácticas del profesor investigador y de los estudiantes, etc. que permiten a cualquier lector interpretar la teoría y reconocer el nivel de comprensión del concepto integral definida alcanzado por los estudiantes participantes en la investigación.

III.2.2. PODER EXPLICATIVO

Es la capacidad del marco teórico para explicar los mecanismos de cómo y porqué las cosas funcionan. Las explicaciones proporcionan las razones subyacentes por las cuales un estudiante puede o no realizar una tarea particular. *El marco teórico debe contener términos precisos y descriptivos que indiquen los objetos importantes de la teoría* (Schoenfeld, 2000, págs. 646-647 y Meel, 2003, págs. 249-250).

El modelo teórico de los ACS cumple este requisito puesto que tiene la capacidad suficiente para señalar las construcciones mentales de cada estudiante en sus cuatro estadios o categorías (identificación, discriminación, generalización y síntesis); además, los niveles de comprensión de los conceptos matemáticos alcanzados por cada uno de los estudiantes de la investigación pueden ser muy dispares.

III.2.3. ALCANCE

Es el rango del fenómeno que analiza la teoría, debe poderse aplicar el marco teórico a un amplio número de conceptos más que a un concepto localizado (Schoenfeld, 2000, pág. 647 y Meel, 2003, pág. 250).

Los ACS ha sido el modelo teórico bajo el cual se han realizado varias tesis doctorales y también han sido publicados trabajos de investigación en didáctica de matemáticas, además, los temas abordados han sido diversos: continuidad, derivabilidad, límites, etc. Así pues, consideramos que los ACS es un buen modelo teórico para analizar, bajo la perspectiva de la didáctica de la matemática, el aprendizaje de los alumnos de bachillerato de ciencias sociales de los conceptos que conforman la integral definida.

III.2.4. PODER PREDICTIVO

No se entiende tal poder como el que se deriva de las ciencias físicas, más bien, es la capacidad para proporcionar predicciones razonables respecto a las acciones y expresiones observadas con base a la información anterior. En esencia, permite al investigador anticipar las respuestas, gracias al conocimiento previo, antes de que el participante responda (Schoenfeld, 2000, pág. 647 y Meel, 2003, págs. 250-251)*.*

Los ACS y la metodología cualitativa de investigación en la acción permiten realizar predicciones comprobables; esto supone que si una actividad se realiza de determinada manera por el estudiante, entonces, el investigador puede deducir, con los datos anteriores, su respuesta. Efectivamente, para ello nos hemos apoyado en los actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al aprendizaje de la integral definida (tabla III.1.5.1), al cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental (tabla III.1.5.2) y a la utilización del programa de cálculo simbólico *DERIVE* (tabla III.1.5.3) los cuales nos permiten obtener información descriptiva y formular hipótesis; además, la experimentación de nuestra investigación se compone de seis ciclos y finaliza en el momento en el cual se alcanza la *saturación*.

III.2.5. RIGOR Y ESPECIFICIDAD

Es la capacidad para identificar los elementos inherentes a la teoría y los mecanismos que los conectan, es decir, que los términos y las relaciones de la teoría están bien definidos y, en consecuencia, para cada estudiante se puede detectar fácilmente el nivel alcanzado (Schoenfeld, 2000, págs. 647-648 y Meel, 2003, pág. 251)*.*

El marco teórico de los ACS verifica este requisito puesto que el profesor investigador, analizando rigurosamente las producciones de cada alumno participante en la investigación, puede determinar el nivel alcanzado por el estudiante en la comprensión de los conceptos matemáticos (identificación, discriminación, generalización y síntesis) y establecer las relaciones con los niveles logrados por otros estudiantes. Ello queda favorecido porque cada concepto, de los múltiples que componen el de integral definida, tiene asociados sus propios actos de comprensión junto con los obstáculos que permiten o dificultan la adquisición del mismo (véanse las tablas III.1.5.1, III.1.5.2 y III.1.5.3).

III.2.6. CAPACIDAD DE FALSACIÓN

No se trata de que una teoría del aprendizaje sea una afirmación de la verdad, más bien, debe centrarse en la manera en la que una teoría del aprendizaje de las matemáticas puede ayudar a comprender el proceso de aprendizaje al proporcionarnos explicaciones del fenómeno que podemos observar en los estudiantes que están tratando de construir sus comprensiones de los conceptos matemáticos y sugiriendo direcciones para la pedagogía, que puedan ayudarnos en este proceso de aprendizaje (Schoenfeld, 2000, pág. 648 y Meel, 2003, págs. 251-252).

Pensamos que los ACS alcanzan la capacidad de falsación al permitir categorizar, dividir y elaborar facetas de comprensión de tal manera que nos muestren una comprensión más profunda del pensamiento matemático de los estudiantes. Además, cuando se explora un nuevo concepto matemático los investigadores ampliarán los actos de comprensión de tal manera que podrán trascender las descripciones de los anteriores manteniendo la compatibilidad con las afirmaciones previas.

III.2.7. CAPACIDAD DE REPLICACIÓN

Esta capacidad está íntimamente relacionada al rigor y la especificidad y, en consecuencia, la replicabilidad del marco teórico es la capacidad del mismo para describir conductas similares en formas similares; es decir, que el marco teórico debe definirse lo suficientemente bien para que otros investigadores, si las circunstancias se repiten, puedan observar los mismos datos y llegar a las mismas conclusiones (Schoenfeld, 2000, pág. 648 y Meel, 2003, págs. 252-253).

Los ACS tienen capacidad suficiente de replicación puesto que en nuestra investigación nos hemos servido de prácticas instructivas tales como: la elaboración de una unidad didáctica de la integral definida, las prácticas en el aula de informática con el programa de utilidades implementado por el profesor-investigador y *DERIVE*, la docencia y las prácticas realizadas en el aula de clase, el cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental y los ejercicios propuestos. Además, nuestra propia descomposición genética de la integral[59] nos ha servido como guía para que los estudiantes puedan lograr, mediante una actividad constructiva, su desarrollo de la comprensión conceptual del área y la integral definida.

[59] Véanse las tablas III.1.8.4.2, III.1.8.4.3, III.1.8.4.4, III.1.8.4.5 y III.1.8.4.6.

III.2.8. TRIANGULACIÓN

Una teoría no debe basarse en un conjunto limitado de experiencias del investigador, más bien, debe utilizar información recolectada por varios métodos y por diferentes actores (Schoenfeld, 2000, págs. 648-649 y Meel, 2003, pág. 253).

La metodología cualitativa de investigación-acción y, en consecuencia, el marco teórico de los ACS establecen que la información recogida debe ser del profesor-investigador, los estudiantes y, en nuestro caso, tenemos dos observadores externos que son el Director de esta investigación y el Jefe del Departamento de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos, en el cual se desarrolla la presente investigación sobre la enseñanza del profesor y aprendizaje de los alumnos de bachillerato de ciencias sociales de la integral definida[60].

El marco teórico de los *actos de comprensión de Sierpinska* tiene muchos puntos comunes con el resto de los marcos teóricos expuestos en este capítulo y pensamos que se pueden establecer las coincidencias y discrepancias entre el marco teórico elegido y los demás; sin embargo, no entra dentro de nuestros objetivos determinar las relaciones existentes entre ellos; consideramos suficientes las establecidas con el amplio concepto de integral definida al presentar algunos de los marcos teóricos.

Es importante matizar que la investigación en *didáctica de la matemática* es una ciencia nueva con muy pocos años de existencia y que en modo alguno es una investigación en *ciencia matemática,* por tanto, las metodologías de cada una de ellas son diferentes (cualitativa la primera y cuantitativa la segunda)[61] y, en consecuencia, los respectivos marcos teóricos son muy distintos y los resultados de los dos tipos de investigación han de valorarse desde ópticas diferentes.

Así pues, la elección del marco metodológico cualitativo de *investigación acción* y del marco teórico de los *actos de comprensión de Sierpinska* ha de permitirnos realizar una investigación rigurosa, con seis grupos de alumnos distribuidos en seis ciclos, de la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida que pueda ser expuesta a la crítica científica.

---

[60] Véase, en el capítulo II de la presente memoria, el apartado *II.3. Validez de un estudio de investigación-acción* y la *figura II.3. La triangulación según Elliott.*

[61] Véase la *Introducción* del capítulo II.

III.3. HIPÓTESIS

En el primer capítulo ha sido establecido y delimitado el problema de la investigación: *Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías* y se han determinado los *objetivos generales*[62]; en el segundo capítulo hemos seleccionado el marco metodológico cualitativo de *investigación-acción*[63] y, en el tercero, el marco teórico de los *actos de comprensión de Sierpinska*[64].

Es evidente que con la redacción de los objetivos de la investigación no es necesario explicitar las *hipótesis* o *conjeturas*. Sin embargo, con el fin de fijar nuestra posición al respecto, se enumeran varias *hipótesis* asociadas a cada uno de los *objetivos generales* establecidos, éstas son[65]:

Hipótesis 1.1: *El concepto de integral definida ha surgido de múltiples trabajos, de matemáticos muy ilustres, realizados durante veintitrés siglos.*

Entendemos por matemáticos muy ilustres a científicos de todo tipo cuyos resultados matemáticos, en la resolución del problema de las cuadraturas, son importantes. Si consideramos desde las primeras referencias históricas de la Grecia clásica de Pericles (495-429 a.C.) hasta el Imperio de Napoleón (1804-1815), es evidente que multitud de científicos han abordado con procedimientos muy diversos el problema del área que, posteriormente, dio paso al concepto integral definida.

---

[62] **Objetivo 1:** Analizar el desarrollo epistemológico de la integral y diferentes conceptualizaciones de la misma con el fin de establecer conexiones con el currículo actual y fundamentar la docencia y la investigación.

Objetivo 2: Descubrir los logros y las dificultades que tienen los estudiantes al resolver mentalmente integrales indefinidas sencillas, que sean muy parecidas a las que figuran en las tablas de primitivas.

Objetivo 3: Explorar desde una perspectiva investigadora los aprendizajes que se producen en los estudiantes en el estudio de la integral definida utilizando los soportes clásicos: libro de texto, toma de apuntes y resolución de problemas con lápiz y papel.

Objetivo 4: Analizar la integración del programa de cálculo simbólico *DERIVE*, aplicado al desarrollo teórico-práctico de la integral definida, en el proceso de enseñanza del profesor y aprendizaje de los estudiantes.

[63] Recuérdese que en algunos momentos de la investigación se utilizan métodos cuantitativos mediante tablas y gráficas estadísticas.

[64] Reconocemos que en nuestra investigación encontramos, con cierto grado de libertad, componentes de la teoría APOE tales como la descomposición genética de la integral (definida e indefinida) y el tratamiento instruccional ACE.

[65] Cada hipótesis tiene asociados dos dígitos, el primero corresponde con el objetivo general en el cual está incardinada y el segundo el orden secuencial que ocupa dicha hipótesis en relación con su objetivo. Es evidente que las hipótesis no están asociadas a un único objetivo, sin embargo, han sido ubicadas en el lugar que, pensamos, más se adecuan con los objetivos establecidos en el capítulo I.

Hipótesis 1.2: *Existen diferentes conceptos de integral definida debidos a la concepción de diversos tipos de sumas considerados en su definición.*

La difusión de la Ciencia con la caída del Antiguo Régimen (1789) y los trabajos de Fourier (1768-1830) crearon la necesidad de establecer el concepto integral, éste no es único, y a lo largo de los dos últimos siglos se han elaborado diversas teorías. Nuestra propuesta es realizar un breve estudio epistemológico de las integrales de Cauchy (1789-1857), Riemann (1826-1866), Darboux (1842-1917) y Lebesgue (1875-1941).

Hipótesis 1.3: *Los libros de texto de Bachillerato no contienen la epistemología de la integral definida y la construcción del concepto es confusa y muy pobre, si es que aparece.*

Consideramos que el análisis de los libros de texto debe ser exhaustivo y, para ello, se establecen las *categorías de contenido matemático* que nos permitirán analizar rigurosamente la integral definida en varios textos de Matemáticas aplicadas a la Ciencias Sociales II (capítulo IV). Confirmando, por adelantado esta hipótesis, el equipo investigador ha elaborado el capítulo V de la presente tesis en el cual se realiza el estudio epistemológico del área y la integral definida y se construye la integral de Darboux.

Hipótesis 2.1: *Los estudiantes pueden calcular muchas primitivas mentalmente, aunque pueden tener ciertas dificultades.*

No se ha encontrado literatura científica que corrobore o desmienta esta hipótesis, sin embargo, estamos de acuerdo con Ortega (2004) que en el cálculo de primitivas deben rechazarse los cálculos excesivos para que no se distorsionen las Matemáticas. Por tanto, el profesor investigador y el director de la tesis piensan que los estudiantes, con la práctica diaria del cálculo mental durante un corto periodo de tiempo, pueden adquirir seguridad y rapidez en el cálculo de primitivas elementales.

Hipótesis 2.2: *El cálculo mental de primitivas afianza a los alumnos en la comprensión del teorema fundamental del cálculo.*

Creemos que, para funciones elementales, el cálculo mental de primitivas inmediatas facilita la aplicación de la regla de Barrow pues, según investigaciones precedentes (Azcárate, 1996; Abrahamson, 1998 y Ortega, 2004) es aconsejable establecer el teorema fundamental del cálculo integral mediante el teorema de los incrementos finitos[66], además, la interrelación entre diferenciación e integración queda favorecida por la práctica del cálculo mental de primitivas.

Hipótesis 3.1: *Los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales tienen serias dificultades en el aprendizaje del concepto integral definida.*

Las investigaciones precedentes así lo confirman, sin embargo, todas ellas han sido realizadas con alumnos universitarios, salvo la tesis doctoral de Turégano (1994) que investiga *los conceptos en torno a la medida, el área y la integral definida* con alumnos de Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) y del Curso de Orientación Universitaria (COU) de la Ley General de Educación de 1970. Consideramos insuficientes estas investigaciones y, por tanto, nuestro propósito es investigar el aprendizaje de la integral definida impartiendo docencia a estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales de la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE).

Confirmar o desmentir esta hipótesis no resulta fácil, requiere una larga y rigurosa investigación, para ello, hemos establecido una serie de *categorías de comprensión matemática* que han sido contrastadas en seis ciclos con la metodología de investigación-acción y bajo el marco teórico de los *actos de comprensión de Sierpinska.*

Las tres hipótesis siguientes, en el contexto del tercer objetivo, constituyen un intento de determinar la comprensión de los alumnos de bachillerato del concepto de integral de Darboux y del teorema fundamental del cálculo.

Hipótesis 3.2: *No es más fácil establecer la integral definida por límites secuenciales que mediante extremos para establecer la integral de Darboux.*

Los alumnos tienen dificultades para comprender el concepto de límite (Blázquez, 1999), en consecuencia, la alternativa que propone el equipo investigador es establecer la integral de Darboux tomando extremos superior e inferior de sumas inferiores y superiores respectivamente, en lugar de la integral de Riemann que viene definida mediante un límite[67].

[66] Teorema fundamental del cálculo: *Si f es integrable Riemann en $[a,b]$ y G es una primitiva suya sobre ese intervalo, entonces* $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

[67] Las integrales de Darboux y Riemann son equivalentes; sin embargo, a los alumnos de bachillerato no les interesa la demostración de tal equivalencia, las aceptan como iguales.

Hipótesis 3.3: *Los alumnos comprenden mejor el teorema de caracterización óptima de las funciones integrables Darboux que el teorema de caracterización métrica.*

En el contexto de la hipótesis anterior, consideramos que los alumnos de ciencias sociales pueden comprender, sin excesiva dificultad, que:

> Una función f es integrable Darboux en [a,b] sií para cualquier aproximación positiva de cero, ε, existe una partición P de [a,b] tal que la diferencia entre la suma superior de Darboux relativa a P y la correspondiente suma inferior es menor que ε (exista una partición, P, tal que la diferencia entre la suma superior e inferior se aproxima a cero más que cualquier número prefijado).

Hipótesis 3.4: *Es más fácil demostrar el teorema fundamental del cálculo (Fischer), mediante el teorema de los incrementos finitos, que establecer el primer y segundo teoremas fundamentales del cálculo (Spivak)[68].*

El teorema de Fischer aventaja en todas las funciones de la demostración[69] al teorema de Spivak (Ortega, 2004) y, el equipo investigador, conjetura que los estudiantes de bachillerato comprenden mejor el teorema de Fischer puesto que, además, su demostración puede ser apoyada gráficamente.

Hipótesis 4.1: *DERIVE ahorra tiempo en representaciones gráficas y cálculos tediosos, por tanto, puede dedicarse a tareas conceptuales.*

El establecimiento de vínculos cognitivos entre las representaciones visual-gráfica y analítico-algebraica favorecen el aprendizaje de la integral definida (Dreyfus, 1991) y, en consecuencia, pensamos que el programa específico de *software* matemático *DERIVE* permite a los estudiantes dedicarle más esfuerzos a la comprensión conceptual de la integral definida.

Hipótesis 4.2: *El aprendizaje con DERIVE es más eficaz si se combina con el cálculo mental o, al menos, el cálculo estimativo.*

Pensamos, a tenor de las investigaciones previas y de la propia experiencia, que la combinación de registros mentales e informáticos tales como visualizaciones y cálculos numéricos ayudan a adquirir y consolidar los conceptos que conforman la integral definida pues ello hace que las nuevas tecnologías adquieran el efecto de *"caja gris"* (Sierra y Codes, 2005).

[68] El segundo teorema fundamental del cálculo se le reconoce como regla de Barrow.

[69] Verificación, explicación, sistematización, comunicación y descubrimiento (DeVries, 1990).

***CAPÍTULO IV: TRATAMIENTO CURRICULAR*............193**

IV.1. LEGISLACIÓN 193
IV.1.1. LOGSE, EXTRACTO DEL REAL DECRETO 938/2001 195
IV.1.2. LOE, EXTRACTO DEL DECRETO 42/2008 197
IV.1.3. REFLEXIONES 200

IV.2. ANÁLISIS CURRICULAR DEL CONCEPTO......................201
IV.2.1. CATEGORÍAS DE CONTENIDO MATEMÁTICO RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA 201
IV.2.1.1. NA: Contenidos sobre números y aproximación 202
IV.2.1.2. AR: Contenidos sobre áreas y aproximación 202
IV.2.1.3. ID: Contenidos sobre la integral definida.....................................203
IV.2.1.4. PID: Propiedades de la integral definida......................................203
IV.2.1.5. DJ: Demostraciones y justificaciones analíticas 203
IV.2.1.6. GR: Gráficas..204
IV.2.1.7. II: Integral indefinida...205
IV.2.1.8. AID: Aplicaciones de la integral definida....................................205
IV.2.1.9. MO: Motivación..206
IV.2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS LIBROS DE TEXTO 207
IV.2.3. TABLAS RESUMEN DE LOS TEXTOS/CATEGORÍAS 210
IV.2.3.1. NA: Contenidos sobre números y aproximación 210
IV.2.3.2. AR: Contenidos sobre áreas y aproximación 212
IV.2.3.3. ID: Contenidos sobre la integral definida.....................................214
IV.2.3.4. PID: Propiedades de la integral definida......................................215
IV.2.3.5. DJ: Demostraciones y justificaciones analíticas 216
IV.2.3.6. GR: Gráficas..217
IV.2.3.7. II: Integral indefinida...218
IV.2.3.8. AID: Aplicaciones de la integral definida....................................219
IV.2.3.9. MO: Motivación..220
IV.2.3.10. Tablas cuantitativas..222
IV.2.4. REFLEXIONES 226

CAPÍTULO IV: TRATAMIENTO CURRICULAR

IV.1. LEGISLACIÓN

Sería demasiado prolijo hacer un seguimiento detallado y pormenorizado de los desarrollos legislativos emanados de la Constitución Española de 1978 sobre la educación, no es nuestro objetivo; sin embargo, consideramos conveniente situarnos en el marco legal surgido de la Constitución para justificar ante la sociedad y los poderes públicos el trabajo que realizamos en la presente investigación.

El derecho a la educación y la libertad de enseñanza quedan consagrados en la Constitución Española de 1978 en los siguientes términos:

> Todos tienen derecho a la educación. Se reconoce la libertad de enseñanza. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana en el respeto a los principios democráticos de convivencia y a los derechos y libertades fundamentales. La enseñanza básica es obligatoria y gratuita. Los poderes públicos garantizan el derecho de todos a la educación, mediante una programación general de la enseñanza, con la participación efectiva de todos los sectores afectados y la creación de centros docentes[1].

Cuatro Leyes Orgánicas y sus correspondientes decretos han desarrollado el mandato constitucional del *Derecho a la Educación*, éstas son:

- **Ley Orgánica Reguladora del Derecho a la Educación, LODE,** de 1985, que da cobertura legislativa a las tres Leyes Orgánicas de Educación aprobadas por las Cortes Generales.
- **Ley Orgánica General del Sistema Educativo, LOGSE,** de 1990, desarrollada, entre otros, por el Real Decreto 1178/1992, de 2 de

[1] Extracto del artículo 27 de la Constitución Española aprobada por referéndum el 6 de diciembre de 1978 y sancionada por el Rey el día 27 del mismo mes.

octubre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de Bachillerato (BOE 21-10-1992), el Real Decreto 1.179/1.992, de 2 de octubre, por el que se establece el currículo de Bachillerato (BOE 21-10-1992) y el Real Decreto 938/2001, de 3 de agosto, por el que se modifica el Real Decreto 1179/1992, de 2 de octubre, por el que se establece el currículo del Bachillerato (BOE 7-9-2001).

- **Ley Orgánica de Calidad de la Educación, LOCE,** de 2002, que tuvo un periodo de vigencia muy reducido y, por tanto, no ha podido ser puesta en práctica.
- **Ley Orgánica de Educación, LOE,** de 2006, desarrollada, entre otros, por el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan las enseñanzas mínimas (BOE 6-11-2007) y, al tener transferidas en ese momento las competencias de Educación la Comunidad de Castilla y León, el Decreto 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León (BOCyL 11-06-2008).

El ámbito de aplicación de nuestra investigación se encuentra dentro de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (MACS II) de segundo curso de bachillerato, orientada a la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Integral desde las perspectivas de la Integral Definida, el Cálculo Mental y las Nuevas Tecnologías. Por tanto, la implementación de la presente investigación está al amparo de la LOGSE y del Real Decreto 938/2001 que ha estado vigente, para segundo curso de bachillerato, desde su publicación hasta el curso 2008-2009, inclusive, periodo en el cual se ha desarrollado toda nuestra investigación-acción que comprende desde el primer ciclo (curso 2003-2004) hasta el sexto y último (curso 2008-2009); sin embargo, la redacción definitiva de la presente Tesis Doctoral se realiza bajo la LOE, el Real Decreto 1467/2007 y el Decreto 42/2008.

Así pues, pensamos que lo más correcto es incluir sendos extractos de los currículos de MACS II, los cuales tengan relación directa o indirecta con los tópicos que conforman nuestra investigación; es decir, exista alguna mención directa o indirecta a: cálculo integral, integral indefinida, integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías.

IV.1.1. LOGSE, EXTRACTO DEL REAL DECRETO 938/2001

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I Y II

Introducción

Con estas Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales se pretende facilitar al alumno los conocimientos matemáticos que precisa el estudio de la economía, la psicología, la sociología y todas aquellas otras ciencias llamadas sociales. Se buscará, por tanto, la aplicación de las destrezas matemáticas aprendidas a la resolución de problemas de carácter socioeconómico.

En las Matemáticas de esta modalidad, y sobre todo en las de segundo curso, se debe buscar que el alumno desarrolle un grado de madurez que le permita comprender los problemas que se le presentan, elegir un modelo matemático que se ajuste a él e interpretar adecuadamente las soluciones obtenidas dentro del contexto planteado por el problema.

Una de las características más significativas de nuestro tiempo es el pujante desarrollo tecnológico que se refleja, fundamentalmente, en el uso generalizado de las nuevas tecnologías. En consecuencia, es necesario incorporar, en el currículo de matemáticas, el uso de todos aquellos recursos tecnológicos (calculadoras, programas informáticos, Internet, etc.) que resulten adecuados para el desarrollo de determinados procedimientos rutinarios, en la interpretación y análisis de situaciones diversas relacionadas con los números, el álgebra lineal, el análisis funcional o la estadística, así como en la resolución práctica de numerosas situaciones problemáticas, relacionadas con la economía, la sociología, la tecnología o, simplemente, con la vida cotidiana.

Parece innecesario resaltar que los procesos que se involucran en la resolución de un problema matemático ayudan, de modo muy importante, a desarrollar la capacidad de razonar de los alumnos, a la vez que les proveen de actitudes y hábitos propios del quehacer matemático.

Por último, se deberá seguir cuidadosamente el proceso de aprendizaje de los alumnos, cuidando que éstos desarrollen el grado de confianza en sí mismos necesario para sumergirse en el estudio de esta disciplina.

Objetivos

Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas que puedan presentarse en fenómenos y procesos propios de las ciencias sociales.

Mostrar actitudes propias de la actividad matemática como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el gusto por el rigor o la necesidad de contrastar apreciaciones intuitivas.

Establecer relaciones entre las matemáticas y el medio social, cultural y económico, reconociendo su valor como parte de nuestra cultura.

Servirse de los medios tecnológicos que se encuentran a su disposición, haciendo un uso racional de ellos y descubriendo las enormes posibilidades que nos ofrecen.

Aprovechar los cauces de información facilitados por las nuevas tecnologías, seleccionando aquello que pueda ser más útil para resolver los problemas planteados.

Desarrollar hábitos de trabajo, así como curiosidad, creatividad, interés y confianza en sí mismos, para investigar y resolver situaciones problemáticas nuevas y desconocidas.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Utilización de distintos recursos tecnológicos (calculadoras, programas informáticos, etc.) como apoyo en los procedimientos que involucran el manejo de matrices, sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales.

Límite y continuidad de una función en un punto. Estudio de la continuidad en funciones dadas a trozos.

Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Recta tangente a una curva en un punto.

Función derivada. Cálculo de derivadas en las familias de funciones conocidas.

Integrales indefinidas. Propiedades elementales. Cálculo de integrales indefinidas inmediatas o reducibles a inmediatas.

Integral definida. Regla de Barrow. Aplicación de la integral definida en el cálculo de áreas planas.

Utilización de distintos recursos tecnológicos (calculadoras científicas y gráficas, programas informáticos) como apoyo en el análisis de las propiedades de funciones pertenecientes a las familias más conocidas y a los procedimientos de integración.

Parámetros de una población y estadísticos muestrales. Distribución muestral de las medias. Teorema central del límite.

Estimación por intervalos de confianza. Nivel de confianza. Error de estimación y tamaño de la muestra.

Criterios de evaluación

Utilizar los conceptos básicos y la terminología adecuada del análisis.

Desarrollar los métodos más usuales para el cálculo de límites y derivadas e integrales.

Aplicar las propiedades globales y locales de las funciones, el cálculo de derivadas y el cálculo integral para analizar, interpretar y resolver problemas relacionados con fenómenos naturales, económicos o sociales.

Establecer intervalos de confianza para la media de la población a partir de los parámetros de la muestra elegida.

IV.1.2. LOE, EXTRACTO DEL DECRETO 42/2008

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I Y II

Introducción

Las Matemáticas ocupan un lugar importante en la historia del pensamiento y de la cultura. Parece evidente que la persona que aspire a un cierto nivel cultural no puede prescindir de ellas, hay que destacar su papel formativo, pues por su forma de hacer, proporcionan una disciplina mental para el trabajo y contribuyen a desarrollar y cultivar las facultades del intelecto.

Los contenidos otorgan un papel predominante a los procedimientos y a las técnicas instrumentales y se orientan a la resolución de problemas y a la explicación y comunicación de fenómenos presentes en el mundo de la Economía, la Sociología, la Demografía y, en general a todas las actividades que derivan de la realidad social.

Las herramientas tecnológicas, en particular el uso de calculadoras y aplicaciones informáticas como sistemas de álgebra computacional o de geometría dinámica, pueden servir de ayuda tanto para la mejor comprensión de conceptos y la resolución de problemas complejos como para el procesamiento de cálculos pesados, sin dejar de trabajar la fluidez y la precisión en el cálculo manual simple, donde los estudiantes suelen cometer frecuentes errores que les pueden llevar a falsos resultados o inducir a confusión en sus conclusiones.

La resolución de problemas debe caracterizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta materia. Debe servir para que el alumnado desarrolle una visión amplia y científica de la realidad, para estimular la creatividad y la valoración de las ideas ajenas, la habilidad para expresar las ideas propias con argumentos adecuados y el reconocimiento de los posibles errores cometidos. Las estrategias que se desarrollan al resolver problemas constituyen una parte esencial de la educación matemática y activan las competencias necesarias para aplicar los conocimientos y habilidades adquiridas en contextos reales.

Objetivos

Adoptar actitudes propias de la actividad matemática como la visión analítica o la necesidad de verificación. Asumir la precisión como un criterio subordinado al contexto, las apreciaciones intuitivas como un argumento a contrastar y la apertura a nuevas ideas como un reto.

Hacer uso de variados recursos, incluidos los informáticos, en la búsqueda selectiva y el tratamiento de la información gráfica, estadística y algebraica en sus categorías financiera, humanística o de otra índole, interpretando con corrección y profundidad los resultados obtenidos de ese tratamiento.

Adquirir y manejar con fluidez un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos. Incorporar con naturalidad el lenguaje técnico y gráfico a situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente.

Utilizar el conocimiento matemático para interpretar y comprender la realidad, estableciendo relaciones entre las matemáticas y el entorno social, cultural o económico y apreciando su lugar, actual e histórico, como parte de nuestra cultura.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Aproximación al concepto de límite y continuidad. Técnicas elementales de cálculo de límites.

Derivada de una función en un punto. Recta tangente en un punto. Reglas de derivación.

Implicaciones prácticas del Teorema Central del Límite, del teorema de aproximación de la binomial a la normal y de la Ley de los Grandes Números.

Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales.

Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida.

Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

Criterios de evaluación

Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características.

Identificar y representar gráficamente funciones polinómicas, racionales sencillas, exponenciales y logarítmicas a partir de sus propiedades locales y globales.

Conocer el concepto de muestreo y planificar y realizar estudios estadísticos de fenómenos sociales que permitan estimar parámetros con una fiabilidad y exactitud prefijadas, determinar el tipo de distribución e inferir conclusiones acerca del comportamiento de la población estudiada.

Analizar de forma crítica informes estadísticos presentes en los medios de comunicación y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.

Reconocer la presencia de las matemáticas en la vida real y aplicar los conocimientos adquiridos a situaciones nuevas, diseñando, utilizando y contrastando distintas estrategias y herramientas matemáticas para su estudio y tratamiento.

IV.1.3. REFLEXIONES

El profesor investigador ha realizado un análisis completo de los currículos de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II del Real Decreto 938/2001 del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte[2] y del Decreto 42/2008 de la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León[3]. Este análisis nos permite obtener las siguientes reflexiones:

a) El currículo del Real Decreto es mucho más ambicioso, extenso y rico que el currículo del Decreto.

b) Nuestra investigación experimental con alumnos de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales se ha desarrollado bajo el periodo de vigencia del Real Decreto.

c) El currículo del Real Decreto incluye entre sus contenidos el “Cálculo Integral” y son preceptivos su enseñanza y aprendizaje. El currículo del Decreto no contempla entre sus contenidos el “Cálculo Integral”.

d) Ningún currículo incluye, expresamente, el Cálculo Mental.

e) La distribución normal la incluyen los dos currículos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, sin embargo, consideramos que una buena comprensión de la misma exige la comprensión de área y, por extensión, la integral definida. Además, en segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales se considera prioritario el estudio de la distribución normal, por tanto, no comprendemos que el “Cálculo Integral” no esté incluido en el currículo del Decreto.

f) Pensamos que la formación de los estudiantes es incompleta sin el estudio del “Cálculo Integral” puesto que muchos de ellos se decantarán por estudios de Ciencias Sociales, por tanto, el Decreto merece ser modificado y se debe incluir el “Cálculo Integral”.

g) Las Administraciones públicas proponen la utilización de las “Nuevas Tecnologías” para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas; sin embargo, no dotan a los centros de los medios materiales y tecnológicos necesarios, ni de los programas de cálculo simbólico y no preparan suficientemente a los profesores para la utilización de la informática en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

[2] En adelante nos referiremos al Real Decreto 938/2001 como Real Decreto.

[3] En adelante nos referiremos al Decreto 42/2008 como Decreto.

IV.2. ANÁLISIS CURRICULAR DEL CONCEPTO

Para poder analizar la situación del concepto en el currículo real[4] se han tenido como referente las *categorías de contenido matemático relativas al concepto de integral definida* que posteriormente se evaluarán en la secuencia didáctica. El análisis se basará en comprobar si aparecen o no dichas categorías en el currículo de algunos textos de MACS II de segundo curso de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales.

IV.2.1. CATEGORÍAS DE CONTENIDO MATEMÁTICO RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

En estas categorías se contemplan los contenidos relacionados con el campo conceptual de la integral definida. Así pues, se distinguen categorías relacionadas con: *números y aproximación, área y aproximación, integral definida, propiedades de la integral definida, integral indefinida y aplicaciones de la integral definida*.

Cada una de las categorías mencionadas anteriormente será reconocida con un código alfabético que tendrá el propósito de ser un acrónimo de su significado y, además, estará compuesta por varias subcategorías definidas con las mismas características de la categoría matriz que las contiene.

Con el propósito de facilitar, a las personas que lean la presente memoria, la localización de todas las *categorías y subcategorías de contenido matemático relativas al concepto de integral definida*, definimos seguidamente cada una de las categorías en un subepígrafe que contendrá los siguientes datos:

- Código, en mayúscula y negrita, por el cual es reconocida.
- Frase, en negrita, que le caracteriza.
- Breve reflexión por la cual se ha establecido la categoría.
- Relación de subcategorías que la componen, las cuales contendrán:
    - Subcódigo, en mayúscula y negrita, por el cual se le reconoce.
    - Frase que le caracteriza.

Así pues, en las siguientes páginas detallamos cada una de las *categorías y subcategorías de contenido matemático relativas al concepto de integral definida* que intervienen en el análisis de los textos de esta investigación.

[4] Considérese el *Saber Institucionalizado de la Transposición Didáctica de Chevallard.*

IV.2.1.1. NA: Contenidos sobre números y aproximación

Reflexión: Consideramos importante que los alumnos conozcan los distintos números que componen la recta real; sin embargo, esto no puede darse por sabido a todos los estudiantes puesto que muchos de ellos han tenido dificultades en el aprendizaje, clasificación y representación de los números reales en sus estudios de matemáticas en la enseñanza secundaria obligatoria y en el primer curso de bachillerato.

NAN: Números enteros naturales.

NAR: Números racionales y su representación en la recta.

NAI: Existencia de números irracionales.

RRF: Representación de números racionales fraccionarios.

IV.2.1.2. AR: Contenidos sobre áreas y aproximación

Reflexión: El concepto de área no ha sido adquirido suficientemente por los estudiantes en los cursos anteriores a segundo de bachillerato, más bien, han interiorizado, en mayor medida, algunas fórmulas de las áreas de polígonos tales como: cuadrado, rectángulo, triángulo y círculo; más difícil de recordar o deducir es el área del rombo, el romboide, sectores circulares y polígonos regulares y calcular áreas de figuras planas por descomposición de figuras de área conocida. Consideramos que, en ocasiones, el cálculo exacto de un área no es suficiente y se hace necesario su valor aproximado, por tanto, el redondeo y la correcta transformación de los números en sus expresiones decimales o en números decimales "próximos" a ellos debe valorarse en los libros de texto.

ARN: Área de rectángulos de lados de longitud entera.

ARR: Área de rectángulos de lados de longitud racional.

ARI: Área de rectángulos de lados de longitud irracional.

APR: Área de polígonos regulares.

APG: Área de polígonos generales.

AC: Área de círculo.

AFC: Área de figuras circulares.

AFM: Área de figuras mixtas.

IV.2.1.3. ID: Contenidos sobre la integral definida

Reflexión: Específico de este curso es la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida, pero ¿cómo introducen los manuales de MACS II este concepto tan importante? Pensamos que esta categoría es fundamental para poder evaluar la calidad de la formalización teórica de la integral definida en los libros de texto, pues de ello depende que los alumnos tengan interés por la "construcción" de la integral definida y adquieran el concepto con mayor o menor solidez. Además, creemos que la integral Darboux-Riemann es una de las más bellas realizaciones de la mente humana y, en consecuencia, no puede ser hurtada su "construcción" a los estudiantes de ciencias sociales.

IDAR: Aproximación a la integral definida, como área, por rectángulos (sumas inferiores y superiores).

IDAT: Aproximación a la integral definida por trapecios.

IDD: Integral de Darboux.

IDR: Integral de Riemann.

IV.2.1.4. PID: Propiedades de la integral definida

Reflexión: El estadio más elemental en el cual nos podemos encontrar al establecer la integral definida es dar una relación de algunas de sus propiedades, esto es lo que pretendemos descubrir con esta categoría.

PIDIL: Linealidad de la integral definida.

PIDTF: Teorema fundamental de cálculo integral.

PIDRB: Regla de Barrow.

PIDVM: Teorema del valor medio de la integral definida.

IV.2.1.5. DJ: Demostraciones y justificaciones analíticas

Reflexión: Mediante los procedimientos establecidos en las subcategorías de la categoría ID pueden calcularse áreas de superficies comprendidas entre las gráficas de funciones muy sencillas, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$, pero es totalmente insuficiente[5]. Establecer la integral definida mediante límites es un primer paso, aunque puede ser insuficiente, y presentar el

[5] Procedimientos particulares y muy laboriosos fueron utilizados, con anterioridad a Newton y Leibniz, para el cálculo de áreas de superficies similares a la considerada con anterioridad.

Teorema Fundamental del Cálculo es dar un paso de gigante para resolver el problema del "cálculo de áreas", por tanto, los libros de texto de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales no pueden "imponerlo" sin ninguna justificación o justificándolo insuficientemente; así pues, debemos estudiar las diferentes presentaciones, demostraciones o justificaciones de dicho teorema, de la regla de Barrow y del teorema del valor medio del cálculo integral.

DJL: Justificación de la integral definida mediante límites.

DTF: Demostración del teorema fundamental de cálculo integral.

DRB: Demostración de la regla de Barrow.

DVM: Demostración del teorema del valor medio de la integral definida.

JVF: Justificación del teorema fundamental del cálculo integral.

JRB: Justificación de la regla de Barrow.

JVM: Justificación del teorema del valor medio de la integral definida.

IV.2.1.6. GR: Gráficas

Reflexión: Las demostraciones y justificaciones analíticas juegan un papel muy importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas del bachillerato, sin embargo, no podemos obviar las representaciones gráficas que son imprescindibles en la teoría de la integral, así pues, debemos considerarlas prioritarias en el establecimiento de las sumas de Darboux y de Riemann y, como tal, deben tener una excelente calidad para que los estudiantes comprendan mejor los conceptos matemáticos que contienen y, asimismo, de forma natural establezcan la función área y ayuden a encontrar y comprender la solución de innumerables problemas.

GRS: Gráficas de las sumas inferiores y superiores.

GRI: Gráficas de rectángulos intermedios.

GRA: Representación gráfica de la función área.

GVM: Interpretación geométrica del teorema del valor medio de la integral definida.

GEI: Gráficas de especial interés en la resolución de los problemas.

IV.2.1.7. II: Integral indefinida

Reflexión: Conocer el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de Barrow no es eficaz si no se domina el cálculo de primitivas, es aquí donde se justifica el cálculo de las mismas. Consideramos que los libros de texto deben mostrar una serie de ejercicios y métodos de integración que, sin ser excesivamente complicados, hagan que los estudiantes no se desanimen y calculen integrales indefinidas no como un fin en sí, más bien, como un paso intermedio para resolver problemas en los cuales sea necesario resolver integrales definidas.

III: Integrales inmediatas.

IIC: Integración por cambio de variable.

IIR: Integración de funciones racionales con raíces reales simples.

IIP: Integración por partes.

IV.2.1.8. AID: Aplicaciones de la integral definida

Reflexión: Las matemáticas en bachillerato se justifican por la resolución de problemas y así debe ser con esta parte del análisis matemático. La integral definida tiene multitud de aplicaciones en las más diversas actividades y en las ciencias sociales, sin embargo, consideramos que antes debemos consolidar el concepto resolviendo los problemas que justificaron su estudio.

Calcular áreas determinadas por la gráfica de una función, el eje de abscisas y dos rectas verticales no es fácil para los alumnos si la función cambia de signo o está definida a trozos, tampoco es evidente calcular el área comprendida entre dos curvas y, pensamos que los libros de texto deben obrar con precisión al plantear y resolver estas cuestiones.

Consolidados los ejercicios expresados anteriormente, la integral definida, debe permitir a los alumnos dar un paso más mediante la resolución de problemas de las ciencias sociales tal y como era uno de los objetivos del Decreto, por ello, los libros de texto deben incluir ejercicios de Economía, Psicología, Sociología, Geografía y otras disciplinas afines.

En ocasiones la función integrando no es integrable o no se sabe integrar, esta contingencia deben contemplarla los manuales, y en este momento se hace necesario recurrir a un nuevo método de integración conocido como *integración numérica*.

AIDAU: Cálculo del área determinada por la grafica de una función, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$.

AIDFI: Área de funciones asociadas a intervalos.

AIDAD: Cálculo de área limitada por dos curvas.

AIDV: Cálculo de volúmenes de revolución.

AIDF: Aplicaciones de la integral definida a la Física.

AIDE: Aplicaciones de la integral definida a la Economía.

AIDS: Aplicaciones de la integral definida a las Ciencias Sociales.

IN: Integración numérica.

ISL: Interpolación segmentaria lineal.

IV.2.1.9. MO: Motivación

Reflexión: Es difícil aprender Matemáticas si los estudiantes no se sienten motivados, el quehacer diario del profesor en el aula debe transmitir entusiasmo e interés por aprender y debe realizar bien las actividades.

Los libros de texto no pueden ser ajenos a ello y han de apostar por realizar una introducción histórica del concepto de área e integral definida para que los estudiantes se sientan privilegiados al ser receptores de resultados científicos obtenidos por mentes excepcionales a lo largo de muchos siglos.

La ciencia sigue avanzando y en los últimos años la Informática ha irrumpido en la sociedad como ninguna otra ciencia ha sido capaz de hacerlo a la largo de la historia de la Humanidad, es por ello que, no podemos desdeñar esta nueva ciencia para una mejor enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Por tanto, los libros de texto deben incluir las nuevas tecnologías en todas las unidades didácticas para que los alumnos conozcan y aprovechen nuevas formas de aprendizaje desconocidas unos años antes.

MOH: Introducción histórica.

MRP: Resolución de problemas.

MAR: Aplicaciones de la vida real.

MOE: Motivación por la exactitud.

MNT: Utilización de las nuevas tecnologías.

IV.2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS LIBROS DE TEXTO

Analizamos, a partir de este momento, once libros de texto de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II de segundo curso de bachillerato y, como es obvio, nuestro análisis se centra en el estudio del tratamiento curricular dado por los textos al cálculo integral[6].

Consideramos que el análisis didáctico de dichos textos, reconocidos por sus editoriales (Anaya, Casals, Donostiarra, Ecir, Edebé, Edelvivies, Editex, Hespérides, Marfil, McGraw-Hill y SM), alarga en demasía la redacción del presente capítulo, por ello, consideramos suficiente incluir en este apartado el análisis del manual de McGraw-Hill y, asimismo, el análisis didáctico de todos ellos transferirlo al anexo A de esta tesis doctoral.

LIBRO DE TEXTO DE McGRAW-HILL

En este momento hacemos un breve resumen de la unidad didáctica en la cual se desarrolla la Integral siguiendo, en la manera de lo posible, la estructura dada por sus autores, asimismo, escaneamos una pequeña parte de dicha unidad y concluimos con una reflexión.

UNIDAD DIDÁCTICA 8: INTEGRALES

Inicia la unidad con la relación de *Objetivos* que se pretenden alcanzar y los *Procedimientos* que se van a utilizar, emplea el concepto de antiderivada y afirma: "*El cálculo diferencial e integral puede ser considerado como una obra maestra del pensamiento y la constancia del género humano*".

1. Integral definida

"Un problema de áreas". Considera una función $f(x)$ continua y positiva en [a,b], toma una partición del intervalo, establece las sumas inferiores y superiores asociadas a la partición y las relaciona con el área que se desea calcular. Se ilustra gráficamente y lo aplica a la función $f(x)=0'5x+2$ en [1,5].

"Hacia la integral definida". Afina la partición anterior[7] y por este procedimiento construye una sucesión de particiones estableciendo la relación de desigualdad entre "todas" las sumas inferiores y superiores y

[6] Entiéndase: Integral indefinida, integral definida, calculo mental aplicado al cálculo de primitivas elementales y el uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizajes de la integral.

[7] Mediante la subdivisión de los subintervalos de la partición inicial.

concluye que sus respectivos límites convergen al área[8], escribiéndola bajo la notación integral[9].

2. Teorema fundamental y otras aplicaciones

"Teorema fundamental del cálculo integral". Establece la aditividad de la integral definida, define la función integral[10] y enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo integral.

"Antiderivadas[11]: primitivas".

"Regla de Barrow". La demuestra y la aplica a dos ejemplos elementales.

"Otras propiedades de la integral definida". Incluye la linealidad y omite el teorema del valor medio de la integral.

3. Integrales inmediatas y técnicas de integración

Da una tabla de integrales inmediatas y calcula integrales por la propiedad de la linealidad y por cambio de variable.

4. Cálculo práctico de áreas y otras aplicaciones de la integral

Entre las primeras se resuelven los clásicos ejercicios que se pueden encontrar en la mayoría de los libros de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Se aplica la integral definida a la resolución de dos problemas (física y biología) cuyas funciones integrando son lineal y parabólica, finalmente, se propone un ejercicio de crecimiento demográfico.

5. Problemas propuestos, problemas resueltos y autoevaluación

Los problemas resueltos, once, se secuencian según ha sido expuesta la unidad didáctica y, de ellos, tres corresponden a las ciencias sociales. Las mismas características tienen los veinticuatro problemas propuestos. Los ejercicios de autoevaluación, dieciséis, son eminentemente prácticos[12].

[8] Obsérvese que el procedimiento es correcto porque el diámetro de una partición es la mitad del de la anterior y, en consecuencia, la sucesión de los diámetros de las particiones tiende a cero.

[9] En ningún momento es reconocida como integral de Darboux o de Riemann.

[10] Nunca la denomina "función área".

[11] Véase la "justificación" de este término y la definición de primitiva en la *Figura IV.2.2.*

[12] Sólo hay dos ejercicios teóricos, uno es el siguiente: *"¿Es cierto que la integral de un producto es igual al producto de las integrales? Compruébalo..."*

Reflexión: En esta unidad didáctica no existe una pequeña introducción histórica y tampoco se introducen las nuevas tecnologías, una vez más, expresamos nuestro desacuerdo por ignorar el pasado y silenciar los avances tecnológicos.

No se ha encontrado ningún ejercicio en el que deba calcularse alguna integral cuya función integrando esté definida a trozos o sea discontinua en varios puntos, creemos que la ausencia de este tipo de ejercicios no favorece a los estudiantes la adquisición del concepto integral.

Consideramos que doce problemas resueltos y propuestos, en el contexto de las ciencias sociales, es un buen número para que los alumnos comprendan que las Matemáticas, además de conformar un pensamiento riguroso, es una ciencia que permite avanzar a todas las demás.

✦ *Antiderivadas: primitivas*

Dada la función $F(x)$ es fácil hallar su derivada $F'(x)$. El proceso inverso, encontrar $F(x)$ a partir de $F'(x)$, se llama **antiderivación**.

Esto es,

$$F(x) \xrightarrow{\text{derivación}} F'(x) = f(x)$$

$$F(x) \xleftarrow{\text{antiderivación}} F'(x) = f(x)$$

En el ejemplo anterior hemos dado como antiderivada de $f(x) = 3x^2$ la función $F(x) = x^3 - 1$, que, efectivamente, lo es, pues

$$F'(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2$$

Otras antiderivadas de $f(x) = 3x^2$ son $G_1(x) = x^3$, $G_2(x) = x^3 + 12$ o, en general, $G(x) = x^3 + c$, con c = constante, pues en todos los casos

$$G'_1(x) = G'_2(x) = G'(x) = 3x^2$$

El conjunto de todas las antiderivadas de $f(x)$ se llama **primitiva** de esa función. Así, la primitiva de $f(x)$ es $F(x) + c$, siendo $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$ y c una constante arbitraria.

Con esto, la primitiva de $f(x) = 3x^2$ es $G(x) = x^3 + c$.

La derivación y la antiderivación son *operaciones* inversas, similares al cuadrado y raíz cuadrada o a la exponencial y el logaritmo.

Para hallar antiderivadas basta con aplicar al revés las fórmulas de derivación vistas en la unidad anterior. Como estos cálculos no son fáciles, es conveniente comprobar, derivando, que la antiderivada elegida es correcta.

Figura IV.2.2. Justificación de la "operación" antiderivación según McGraw-Hill.

Pensamos que es un acierto escribir *"La derivación y la antiderivación son operaciones inversas, similares (...) a la exponencial y al logaritmo"* y un grave error considerar la primitiva de una función al conjunto de todas sus antiderivadas, la comunidad matemática reconoce la antiderivada como primitiva y al conjunto de todas las primitivas de una función como integral indefinida de la función integrando[13].

[13] Además, los autores definen la *"Integral definida"* en los términos señalados anteriormente.

IV.2.3. TABLAS RESUMEN DE LOS TEXTOS/CATEGORÍAS

En la sección anterior y en el anexo A, hemos realizado una breve descripción individualizada del contenido matemático de la integral definida en once libros de textos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II y, además, por cada uno de ellos hemos incluido una pequeña reflexión.

Consideramos que no es suficiente el estudio particular de cada texto y debe establecerse un estudio comparativo entre todos ellos, por tanto, es imprescindible recurrir a las *categorías de contenido matemático relativas al concepto de integral definida*[14].

Establecemos un subepígrafe por cada una de las nueve categorías de contenido matemático principales[15] y sus respectivas subcategorías, en él confeccionamos una tabla comparativa de la inclusión o exclusión de dichas subcategorías en cada uno de los manuales de matemáticas y comentamos los datos contenidos en la tabla correspondiente[16].

El décimo y último subepígefe le denominamos *Tablas cuantitativas* y en él incluiremos varias tablas en las cuales relacionamos y comentamos todas las categorías y subcategorías de todos los libros de texto analizados.

IV.2.3.1. NA: Contenidos sobre números y aproximación

La tabla IV.2.3.1 muestra que ningún libro de texto, de los analizados, da tratamiento alguno a las categoría sobre *números y aproximación* (NAN: Números enteros naturales, NAR: Números racionales y su representación en la recta, NAI: Existencia de números irracionales y RRF: Representación de los números racionales fraccionarios).

Estas categorías deben estar incluidas en cursos anteriores a segundo de Bachillerato de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. Al objeto de situarnos en el tratamiento de las mismas se han analizado tres textos: dos de Secundaria Obligatoria (Matemáticas 3º ESO y Matemáticas 4º ESO, opción B) de la editorial Anaya y el tercero, de Bachillerato, de la editorial Bruño (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I).

[14] Véase el epígrafe IV.2.1.

[15] Los códigos de las categorías principales son: NA, AR, ID, PID, DJ, GR, II, AID y MO.

[16] Los comentarios de cada una de las tablas serán posteriores a la misma y excepcionalmente, en aras de una mejor presentación, podrán incluirse parte de los mismos con anterioridad a la tabla que los soportan.

EDITORIAL	NA: CONTENIDOS SOBRE NÚMEROS Y APROXIMACIÓN			
	NAN	NAR	NAI	RRF
Anaya	No	No	No	No
Casals	No	No	No	No
Donostiarra	No	No	No	No
Ecir	No	No	No	No
Edebé	No	No	No	No
Edelvives	No	No	No	No
Editex	No	No	No	No
Hespérides	No	No	No	No
Marfil	No	No	No	No
McGraw-Hill	No	No	No	No
SM	No	No	No	No

Tabla IV.2.3.1. Tratamiento de las categorías de contenidos sobre números y aproximación.

Matemáticas 3º ESO. *Los números y sus utilidades:* números enteros y racionales, representación aproximada de un número decimal sobre la recta numérica, fracciones (expresión decimal exacta o periódica), representación gráfica de un número fraccionario, identificación de algunos números irracionales, redondeo y error absoluto.

Matemáticas 4º ESO, opción B. *El número real:* números aproximados (error relativo y absoluto), notación científica (operaciones con números en notación científica), números no racionales (irracionales), representación de números sobre la recta real, potencias y raíces, intervalos.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Encontramos los tópicos que se desean estudiar dentro del bloque *Aritmética y Álgebra*, consta de tres unidades didácticas (1.- Números reales y operaciones. 2.- Aproximación de números reales. Sucesiones y polinomios. 3.- Ecuaciones, inecuaciones y sistemas). En las dos primeras están las categorías que buscamos, así pues, damos el índice que siguen los autores de este texto: Números reales (números racionales, representación geométrica de los números racionales, números racionales en forma decimal, números irracionales, la recta real, algunos irracionales famosos: π, ϕ y *e*). Potencias y radicales, operaciones. Aplicaciones de las potencias (desintegración de materiales radioactivos, matemática financiera, interés compuesto). Logaritmos y aplicaciones (logaritmos en arqueología, dotación de fósiles). Orden en la recta real. Valor absoluto de un número real. Intervalos en la recta real. Estimación de un número real (error absoluto, error relativo, truncamiento, redondeo). Notación científica.

Del análisis de los tres libros de texto mencionados, inferimos que las categorías correspondiente a los números y aproximación están en el segundo ciclo de la ESO[17] y en primer curso de Bachillerato de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales.

IV.2.3.2. AR: Contenidos sobre áreas y aproximación

EDITORIAL	AR: CONTENIDOS SOBRE ÁREAS Y APROXIMACIÓN							
	ARN	ARR	ARI	APR	APG	AC	AFC	AFM
Anaya	No	No	No	No	No	No	No	No
Casals	Sí	No	No	Sí	No	Sí	No	Sí
Donostiarra	No	No	No	Sí	No	No	No	No
Ecir	No	No	No	Sí	No	No	No	Sí
Edebé	No	No	No	Sí	No	Sí	No	No
Edelvives	No	No	No	Sí	No	No	No	No
Editex	Sí	No	No	Sí	No	No	No	No
Hespérides	No	No	No	No	No	No	No	No
Marfil	No	No	No	Sí	No	No	No	No
McGraw-Hill	No	No	No	Sí	No	No	No	No
SM	No	No	No	Sí	No	No	No	No

Tabla IV.2.3.2. Tratamiento de las categorías de contenidos sobre áreas y aproximación.

[17] Los números naturales se estudian en el primer ciclo de la ESO.

Los libros de texto de MACS II analizados no dan un tratamiento aceptable, salvo Casals, a la categoría sobre *áreas y aproximación* (ARN: Área de rectángulos de lados de longitud entera, ARR: Área de rectángulos de lados de longitud racional, ARI: Área de rectángulos de lado de longitud irracional, APR: Área de polígonos regulares, APG: Área de polígonos generales, AC: Área del círculo, AFC: Área de figuras circulares y AFM: Área de figuras mixtas).

Razonando como se ha hecho con la anterior categoría, NA, consideramos que las subcategorías relacionadas anteriormente deben estar incluidas en cursos anteriores a segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales; así pues, volvemos a analizar los tres textos anteriores.

Matemáticas 3º ESO. Unidad Didáctica 7: *Figuras planas*. Área del rectángulo (toma los lados de longitud entera y no estudia cuando los lados son de longitud no entera). Área de un paralelogramo (el rombo como caso particular). Área del triángulo. Área del trapecio. Área de un polígono regular. Área de un polígono cualquiera. Área del círculo. Área del sector circular. Área de la corona circular. Área de la elipse. No demuestra absolutamente nada, se limita a escribir las fórmulas.

Matemáticas 3º ESO. Unidad Didáctica 8: *Figuras en el espacio*. Área de un prisma. Área de una pirámide. Área del tronco de pirámide. Área de un cilindro. Área de un cono. Área del tronco de cono. Área de la esfera, del casquete esférico y de la zona esférica. A continuación estudia los volúmenes que no es nuestro propósito su análisis[18].

Matemáticas 4º ESO, opción B. No hay nada.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I. No hay nada.

Del análisis de los tres libros de texto, inferimos que las subcategorías correspondiente a áreas y aproximación están en el segundo ciclo de ESO (localizadas en el currículo de tercer curso, además, el cálculo de áreas sencillas se encuentra en el primer ciclo de ESO). El cálculo de áreas queda excluido del currículo de primer curso de Bachillerato de Ciencias Sociales.

[18] En el estudio de los volúmenes se incluye el Principio de Cavalieri: *"Si dos cuerpos tienen la misma altura y al cortarlos por planos paralelos a sus bases se obtienen figuras con la misma área, entonces tienen el mismo volumen"*.

IV.2.3.3. ID: Contenidos sobre la integral definida

EDITORIAL	ID: CONTENIDOS SOBRE LA INTEGRAL DEFINIDA			
	IDAR	IDAT	IDD	IDR
Anaya	No	No	No	No
Casals	Sí	No	No	No
Donostiarra	No	No	No	No
Ecir	Sí	No	No	No
Edebé	Sí	Sí	Sí	No
Edelvives	Sí	No	Sí	No
Editex	Sí	No	Sí	No
Hespérides	No	No	No	No
Marfil	Sí	No	No	No
McGraw-Hill	Sí	No	Sí	No
SM	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla IV.2.3.3. Tratamiento de las categorías de contenidos sobre la integral definida.

Sólo dos textos, Edebé y SM, dan un tratamiento aceptable a las categorías sobre *integral definida* (IDAR: Aproximación a la integral definida, como área por rectángulos –sumas inferiores y superiores–, IDAT: Aproximación a la integral definida por trapecios, IDD: Integral de Darboux e IDR: Integral de Riemann). No podemos considerar que estas categorías estén incluidas en cursos anteriores a segundo de bachillerato[19] y pensamos que los autores no han sido capaces de exponer aceptablemente este concepto. Ninguno de los que construyen la integral de Darboux lo menciona (Edebé y Editex la llaman de Riemann, Edelvives y SM no comentan nada). El único que expresa correctamente la integral de Riemann es SM. Se considera muy negativo que los textos de las editoriales Anaya, Donostiarra y Hespérides no aproximen la integral definida por áreas de rectángulos. Por último, se constata que la categoría IDAT sólo está presente en Edebé y SM.

[19] En adelante, salvo que se diga lo contrario, cuando mencionemos segundo de bachillerato nos referiremos a segundo de bachillerato de ciencias sociales.

IV.2.3.4. PID: Propiedades de la integral definida

EDITORIAL	PID: PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA			
	PIDIL	PIDTF	PIDRB	PIDVM
Anaya	Sí	Sí	Sí	No
Casals	No	Sí	Sí	Sí
Donostiarra	No	Sí	Sí	No
Ecir	Sí	No	Sí	No
Edebé	Sí	No	Sí	No
Edelvives	Sí	Sí	Sí	Sí
Editex	Sí	No	Sí	No
Hespérides	Sí	Sí	Sí	No
Marfil	Sí	Sí	Sí	Sí
McGraw-Hill	Sí	Sí	Sí	No
SM	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla IV.2.3.4. Tratamiento de las categorías de propiedades de la integral definida.

Casi dos tercios de los libros de texto analizados, salvo Donostiarra, Ecir, Edebé y Editex, incluyen tres de las cuatro subcategorías de las *propiedades de la integral definida* (PIDIL: Linealidad de la integral, PIDTF: Teorema fundamental del cálculo integral, PIDRB: Regla de Barrow y PIDVM: Teorema del valor medio de la integral definida).

Queda constatado que la regla de Barrow la incluyen todos los textos. El teorema fundamental del cálculo integral (cuya importancia es evidente) no viene ni tan siquiera enunciado en Ecir, Edebé y Editex –consideramos que no debiera pasarse por alto–. El teorema del valor medio del cálculo integral, por lo evidente que resulta, también debiera estar en todos los textos, sin embargo, sólo lo incluyen Casals, Edelvives, Marfil y SM. La linealidad es obvia, sólo la olvidan Casals y Donostiarra. Incluyen todas las categorías los textos de Edelvives, Marfil (que escribe muy poco y no hace absolutamente nada) y SM.

IV.2.3.5. DJ: Demostraciones y justificaciones analíticas

EDITORIAL	DJ: DEMOSTRACIONES Y JUSTIFICACIONES						
	DJL	DTF	DRB	DVM	JTF	JRB	JVM
Anaya	No	No	Sí	No	Sí	Sí	No
Casals	Sí	No	No	No	Sí	No	Sí
Donostiarra	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No
Ecir	No	No	Sí	No	No	No	No
Edebé	Sí	No	No	No	No	No	No
Edelvives	Sí	No	Sí	No	No	Sí	Sí
Editex	Sí	No	No	No	No	No	No
Hespérides	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No
Marfil	No	No	No	No	No	No	No
McGraw-Hill	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No
SM	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla IV.2.3.5. Tratamiento de las categorías de demostraciones y justificaciones analíticas.

Sólo dos textos, MacGraw-Hill y SM, dan un buen tratamiento a las categorías sobre *demostraciones y justificaciones analíticas* (DJL: Justificación de la integral definida mediante límites, DTF: Demostración del teorema fundamental de cálculo integral, DRB: Demostración de la regla de Barrow, DVM: Demostración del teorema del valor medio de la integral definida, JTF: Justificación del teorema fundamental del cálculo integral, JRB: Justificación de la regla de Barrow y JVM: Justificación del teorema del valor medio). Muy deficientes son los textos de Marfil, Ecir, Edebé y Editex. Son manifiestamente mejorables los manuales de Anaya, Casals, Donostiarra, Edelvives y Hespérides.

Consideramos que no es aconsejable definir la integral definida mediante la coincidencia de los límites de las sucesiones de sumas inferiores y superiores asociadas a una sucesión de particiones, P_n, ya que dichos límites pueden no coincidir y, sin embargo, la función ser integrable en el intervalo [a,b]. Para que ambos límites coincidan debe imponerse alguna restricción a la sucesión de particiones[20] que, posiblemente, resulte demasiado artificioso para que los alumnos comprendan el concepto de función integrable en un intervalo [a,b][21].

Consideramos prioritaria la demostración del teorema fundamental del cálculo integral[22], algunos autores ni siquiera incluyen su enunciado[23]. Un corolario inmediato es la regla de Barrow, que también debieran haberla demostrado todos. La demostración del teorema del valor medio para el cálculo integral se encuentra, únicamente, en el texto de SM.

IV.2.3.6. GR: Gráficas

Según la tabla IV.2.3.6, sólo tres textos (Casals, Edelvives y SM), dan un buen tratamiento a las categorías sobre las *representaciones gráficas* (GRS: Gráficas del las sumas inferiores y superiores, GRI: Gráficas de los rectángulos intermedios, GRA: Representación gráfica de la función área, GVM: Interpretación geométrica del teorema del valor medio de la integral definida y GEI: Gráficas de especial interés en la resolución de los problemas). Muy deficientes son Donostiarra y Hespérides.

No desarrollan la integral definida y, por tanto, no realizan los gráficos de las sumas los textos de Anaya, Donostiarra y Hespérides. La representación gráfica de la función área no se encuentra en los manuales de Edebé y Editex. Muy ilustrativa es la interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo integral y sólo la incluyen Casals, Edelvives y SM. La quinta categoría, GEI, se comenta por sí misma. Encontramos las sumas intermedias en el libro editado por SM y en ningún otro, además, es el único que no confunde la integral de Riemann con la de Darboux.

---

[20] Hemos encontrado tres restricciones en el estudio y análisis de los textos:

1ª.- Que cada uno de los subintervalos de la partición P_n tenga amplitud h=(b – a)/n.

2ª.- Que cada partición, a partir de una dada P_1, se obtenga de la subdivisión de los subintervalos de la anterior.

3ª.- Que $\Delta x \rightarrow 0$. Entendemos que es equivalente a que la sucesión de los diámetros asociados a la sucesión de particiones debe tender a cero.

[21] Nuestra propuesta es definir los conceptos integral inferior e integral superior de Darboux mediante el extremo superior de las sumas inferiores y el extremo inferior de las sumas superiores, respectivamente, y establecer la integrabilidad de una función f(x) en un intervalo [a,b], en el sentido Darboux, cuando coinciden las dos integrales anteriores.

[22] Porque establece la relación existente entre los problemas *"de la tangente"* y *"del área"*.

[23] Véase la *Tabla IV.2.3.4.*

EDITORIAL	GR: GRÁFICAS				
	GRS	GRI	GRA	GVM	GEI
Anaya	No	No	Sí	No	Sí
Casals	Sí	No	Sí	Sí	No
Donostiarra	No	No	Sí	No	No
Ecir	Sí	No	Sí	No	No
Edebé	Sí	No	No	No	Sí
Edelvives	Sí	No	Sí	Sí	No
Editex	Sí	No	No	No	Sí
Hespérides	No	No	Sí	No	No
Marfil	Sí	No	Sí	No	No
McGraw-Hill	Sí	No	Sí	No	No
SM	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla IV.2.3.6. Tratamiento de las categorías de gráficas.

IV.2.3.7. II: Integral indefinida

La tabla IV.2.3.7 constata que los textos de Anaya, Marfil, McGraw-Hill y SM no superan dos de las cuatro subcategorías asociadas a la categoría *integral indefinida* (III: Integrales inmediatas, IIC: Integración por cambio de variable, IIR: Integración de funciones racionales con raíces reales simples e IIP: Integración por partes). Donostiarra alcanza tres de las cuatro subcategorías y el resto de los libros de texto desarrollan todos los métodos de integración contemplados en este subepígrafe.

Las tablas de integrales inmediatas en algunos casos son muy reducidas, no se dignan incluirlas Marfil y SM. La integración por cambio de variable no la mencionan Anaya y Marfil. La integración de funciones racionales con raíces reales (simples o múltiples) es la que está en menos textos de MACS II, sólo la encontramos en Casals, Ecir, Edebé, Edelvives, Editex y Hespérides. Finalmente, el método de integración por partes no se incluye en Anaya, Marfil y McGraw-Hill.

EDITORIAL	II: INTEGRAL INDEFINIDA			
	III	IIC	IIR	IIP
Anaya	Sí	No	No	No
Casals	Sí	Sí	Sí	Sí
Donostiarra	Sí	Sí	No	Sí
Ecir	Sí	Sí	Sí	Sí
Edebé	Sí	Sí	Sí	Sí
Edelvives	Sí	Sí	Sí	Sí
Editex	Sí	Sí	Sí	Sí
Hespérides	Sí	Sí	Sí	Sí
Marfil	No	No	No	No
McGraw-Hill	Sí	Sí	No	No
SM	No	Sí	No	Sí

Tabla IV.2.3.7. Tratamiento de las categorías de la integral indefinida.

IV.2.3.8. AID: Aplicaciones de la integral definida

Observamos, en la tabla IV.2.3.8, que poco más de la mitad de los textos analizados (Anaya, Casals, Edebé, Edelvives, Hespérides y SM) dan un tratamiento aceptable a las categorías *de aplicaciones de la integral definida* (AIDAU: Cálculo del área determinada por una curva, el eje de abscisas y las rectas x=a; x=b, AIDFI: Área de funciones asociadas a intervalos, AIDAD: Cálculo de área limitada por dos curvas, AIDV: Cálculo de volúmenes de revolución, AIDF: Aplicaciones de la integral definida a la Física, AIDE: Aplicaciones de la integral definida a la Economía, AIDS: Aplicaciones de la integral definida a las Ciencias Sociales, IN: Integración numérica e ISL: Interpolación segmentaria lineal). Son deficientes en grado sumo Donostiarra y Marfil, la primera sólo incluye las categorías AIDAU y AIDAD; la segunda orienta, que no lo aplica en ningún ejemplo, sobre la categoría AIDS.

EDITORIAL	AID: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA								
	AIDAU	AIDFI	AIDAD	AIDV	AIDF	AIDE	AIDS	IN	ISL
Anaya	Sí	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí	No	No
Casals	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí	Sí	No	No
Donostiarra	Sí	No	Sí	No	No	No	No	No	No
Ecir	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí	No	No	No
Edebé	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Edelvives	Sí	No	Sí	Sí	Sí	No	Sí	No	No
Editex	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí	No	No	No
Hespérides	Sí	Sí	Sí	No	No	Sí	No	Sí	No
Marfil	No	No	No	No	No	No	Sí	No	No
McGraw-Hill	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	No
SM	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No

Tabla IV.2.3.8. Tratamiento de las categorías de aplicaciones de la integral definida.

Salvo el libro editado por Marfil, todos los textos incluyen los tópicos clásicos, es decir, área limitada por una curva y el eje de abscisas en el intervalo [a,b] y área limitada por dos curvas. La mayoría de los textos ignoran las categorías: AIDFI, AIDV, IN e ISL. Podemos considerar que, en general, los textos analizados dan un tratamiento “aceptable” a lo que puede considerarse “Aplicación de la integral definida a otras Ciencias “.

IV.2.3.9. MO: Motivación

La tabla IV.2.3.9 muestra que cinco de los textos analizado (Anaya, Casals, Edebé, Editex y SM) superan en más del 50% las categorías de *motivación* (MOH: Introducción histórica, MRP: Resolución de problemas, MAR: Aplicaciones de la vida real, MOE: Motivación por la exactitud y MNT: Utilización de las Nuevas Tecnologías). Cuatro textos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (Donostiarra, Ecir, Edelvives y Hespérides) contemplan una única subcategoría, lo que consideramos un paupérrimo bagaje.

EDITORIAL	MO: MOTIVACIÓN				
	MOH	MRP	MAR	MOE	MNT
Anaya	Sí	Sí	Sí	No	No
Casals	Sí	Sí	Sí	No	Sí
Donostiarra	No	No	No	Sí	No
Ecir	No	No	Sí	No	No
Edebé	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Edelvives	No	No	Sí	No	No
Editex	Sí	Sí	No	No	Sí
Hespérides	No	No	No	Sí	No
Marfil	No	Sí	Sí	No	No
McGraw-Hill	No	Sí	Sí	No	No
SM	No	Sí	Sí	No	Sí

Tabla IV.2.3.9. Tratamiento de las categorías de motivación.

Se constata que la motivación por medio de la introducción histórica es muy escasa; sólo la consideran Anaya, Casals, Edebé y Editex, creemos que todos debieran incluirla puesto que para los alumnos es un nexo de unión entre el pensamiento matemático de nuestros antepasados y el que ellos van a adquirir. Sí es aceptable la motivación en la resolución de problemas y aplicaciones a la vida real. La resolución de los problemas en algunos casos es muy mecánica y sólo tres textos, Donostiarra, Edebé y Hespérides, tienen presente la importancia que conlleva la exactitud en la resolución de los ejercicios y problemas. Percibimos que las Nuevas Tecnologías se están abriendo paso en los libros de texto, concretamente el programa de *software* matemático *DERIVE*, creemos que éstas son necesarias y deben ser incluidas en todos los libros de texto de Matemáticas de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

IV.2.3.10. Tablas cuantitativas

En cada uno de los nueve puntos anteriores hemos incluido una tabla específica para cada familia de categorías[24] en la cual indicábamos si eran tratadas en cada uno de los libros de texto analizados. A partir de este momento analizamos, conjuntamente, todas las categorías en todos los textos y lo reconocemos como *Tablas cuantitativas* que contendrá tres tablas de carácter cuantitativo y, a su vez, serán comentadas, brevemente, bajo la óptica cualitativa-cuantitativa.

EDITORIAL	CATEGORÍAS DE CONTENIDO MATEMÁTICO RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA									
	NA (4)	AR (8)	ID (4)	PID (4)	DJ (7)	GR (5)	II (4)	AID (9)	MO (5)	***TF (50)***
Anaya	0	0	0	3	3	2	1	5	3	***17***
Casals	0	4	1	3	3	3	4	5	4	***27***
Donostiarra	0	1	0	2	4	1	3	2	1	***14***
Ecir	0	2	1	2	1	2	4	4	1	***17***
Edebé	0	2	3	2	1	2	4	7	4	***25***
Edelvives	0	1	2	4	4	3	4	5	1	***24***
Editex	0	2	2	2	1	2	4	4	3	***20***
Hespérides	0	0	0	3	4	1	4	5	1	***18***
Marfil	0	1	1	4	0	2	0	1	2	***11***
McGraw-Hill	0	1	2	3	5	2	2	4	2	***21***
SM	0	1	4	4	7	5	2	6	3	***32***
TC	***0***	***15***	***16***	***32***	***33***	***25***	***32***	***48***	***25***	***226***

Tabla IV.2.3.10.1. Resumen del tratamiento de las categorías de contenido matemático de once libros de texto (TF: Total fila, TC: Total columna)[25].

[24] Consideramos una familia de categorías a la categoría principal y sus subcategorías, por ejemplo, la categoría principal *NA: Contenido sobre números y aproximación* está formada por las subcategorías *NAN: Números enteros naturales, NAR: Números enteros y su representación en la recta, NAI: Existencia de números irracionales* y *RRF: Representación de números racionales fraccionarios.*

[25] Entre paréntesis el número de subcategorías que pertenecen a la categoría.

Según la tabla IV.2.3.10.1, de las cincuenta subcategorías (correspondientes a las categorías principales *–NA: Contenidos sobre números y aproximación, AR: Contenidos sobre áreas y aproximación, ID: Contenidos sobre la integral definida, PID: Propiedades de las integral definida, DJ: Demostraciones y justificaciones, GR: Gráficas, II: Integral indefinida, AID: Aplicaciones de la integral definida y MO: Motivación–*), sólo tres textos alcanzan, al menos, el 50% de éstas, Casals, Edebé y SM (el mejor); muy próximo a este valor se encuentra Edelvives, los peores son Marfil, Donostiarra y Anaya. Si excluyésemos *NA* (en cuyo caso son 46 subcategorías), los resultados tampoco son muy alentadores, sólo cuatro textos superan el 50%.

Debemos constatar que los contenidos sobre números y aproximación se trabajan en cursos anteriores a segundo de Bachillerato, en segundo ciclo de ESO (especialmente en 4º curso) y en el primer curso de Bachillerato de Ciencias Sociales. También es importante advertir que los contenidos sobre áreas y aproximación son trabajados en ESO, sin embargo, sería aconsejable que en segundo de Bachillerato se volviera a incidir sobre ellos o al menos se dieran unas indicaciones para que el profesor los evocara, al objeto de que el estudiante no encontrara ningún conflicto entre los viejos conocimientos y los nuevos que se desean introducir.

Los contenidos específicos de la integral definida, incluyendo técnicas elementales de integración, reciben tratamientos muy dispares en los libros de texto analizados, en muchas ocasiones, se les da poco rigor científico e incluso pueden inducir al error.

Consideramos que la motivación, *MO*, es importante para el aprendizaje de la integral definida y no puede obviarse la *introducción histórica* pues científicos tales como Arquímedes, Newton, Leibniz, Riemann y Darboux contribuyeron a la creación y consolidación de esta parte del Análisis Matemático. Pensamos que es una excelente opción el incluir las Nuevas Tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de la integral, suponemos que en un corto espacio de tiempo todos los textos de Matemáticas de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato las incluirán, ahora bien, sería aconsejable que los centros estuvieran dotados con más medios informáticos y los profesores de matemáticas tuvieran la formación informática necesaria.

La información de la tabla IV.2.3.10.1, en la cual se incluye el número de subcategorías de cada categoría encontradas en cada libro de texto, es incompleta por establecerse en frecuencias absolutas y, por tanto, consideramos que debe completarse determinando los porcentajes.

Al objeto de comprender la tabla IV.2.3.10.3 añadimos una nueva, la tabla IV.2.3.10.2, en la cual la fila S corresponde con las subcategorías de cada categoría y la fila NS es el número total de subcategorías de cada categoría, es decir, el producto del número de libros analizados por las subcategorías de cada categoría (NS=11S). La última columna (T=TOTAL) coincide con la suma de cada una de sus filas, excluyendo la última celda.

	CATEGORÍAS / SUBCATEGORÍAS									
	NA	**AR**	**ID**	**PID**	**DJ**	**GR**	**II**	**AID**	**MO**	**T**
S	4	8	4	4	7	5	4	9	5	**50**
NS	44	88	44	44	77	55	44	99	55	**550**

Tabla IV.2.3.10.2. Subcategorías (S) de cada una de las categorías y número de subcategorías de los once libros de texto (NS).

Los datos de la tabla IV.2.3.10.3 vienen configurados como sigue:

- **Columna MPT** *(media ponderada textos).* El valor de cada casilla es $MPT_i = 100TF_i/50$, siendo $1 \leq i \leq 11$. TF_i de la tabla IV.2.3.10.1.
- **Fila MPC** *(media ponderada categorías).* El valor de cada celda es $MPC_j = 100TC_j/NS_j$, siendo $1 \leq j \leq 10$. TC_j de la tabla IV.2.3.10.1. NS_j de la tabla IV.2.3.10.2.
- **Fila DT** *(desviación típica).* Cada celda contiene la desviación típica de los once primeros datos de su propia columna.
- **El resto de los valores** viene dado como sigue: Si consideramos las matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ de los datos numéricos de la tablas IV.2.3.10.1 y IV.2.3.10.3, respectivamente, entonces $b_{ij}=100a_{ij}/S_j$ donde S_j es el valor j-ésimo del vector fila S, de la tabla IV.2.3.10.2, con $1 \leq i \leq 11$ y $1 \leq j \leq 9$.

Hagamos un breve estudio de la tabla IV.2.3.10.3 en la que, salvo la última fila, damos los porcentajes de la presencia de las nueve familias de las categorías principales en los once libros de texto de MACS II analizados.

EDITORIAL	PORCENTAJES DE LAS CATEGORÍAS DE CONTENIDO MATEMÁTICO RELATIVAS A LA INTEGRAL DEFINIDA									
	NA	**AR**	**ID**	**PID**	**DJ**	**GR**	**II**	**AID**	**MO**	***MPT***
Anaya	0	0	0	75	42,86	40	25	55,56	60	***34***
Casals	0	50	25	75	42,86	60	100	55,56	80	***54***
Donostiarra	0	12,5	0	50	57,14	20	75	22,22	20	***28***
Ecir	0	25	25	50	14,29	40	100	44,44	20	***34***
Edebé	0	25	75	50	14,29	40	100	77,78	80	***50***
Edelvives	0	12,5	50	100	57,14	60	100	55,56	20	***48***
Editex	0	25	50	50	14,29	40	100	44,44	60	***40***
Hespérides	0	0	0	75	57,14	20	100	55,56	20	***36***
Marfil	0	12,5	25	100	0	40	0	11,11	40	***22***
McGraw-Hill	0	12,5	50	75	71,43	40	50	44,44	40	***42***
SM	0	12,5	100	100	100	100	50	66,67	60	***64***
MPC	***0***	***17,05***	***36,36***	***72,73***	***42,86***	***45,45***	***72,73***	***48,48***	***45,45***	***41,09***
DT	***0***	***13,35***	***30,83***	***19,81***	***28,57***	***21,05***	***34,47***	***17,9***	***22,71***	***11,61***

Tabla IV.2.3.10.3. Resumen de los porcentajes del tratamiento de las categorías.
(MPT: Media ponderada textos; MPC: Media ponderada categorías; DT: Desviación típica).

Considerando la columna MPT, no aceptamos como buenos manuales la mayoría de los libros de texto analizados puesto que en su conjunto tienen incluidas el 41,09% del total de las subcategorías. En lugar destacado está SM con el 64% y Marfil es un texto de ínfima calidad con el 22%.

Considerando la fila MPC, las familias PID e II tienen una presencia del 72,73% en todos los textos, el resto de las familias no alcanzan el 50% y, además, constatamos que NA y AR son categorías cuyo tratamiento corresponden a cursos anteriores a segundo de Bachillerato.

Considerando la fila DT, estamos en condiciones de afirmar que la inclusión de cada familia de categorías es muy dispar en los libros de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, destacando las categorías ID, DJ e II cuyas desviaciones típicas superan los 28 puntos porcentuales.

IV.2.4. REFLEXIONES

Una vez analizados los textos y realizados los resúmenes de las categorías en las tablas anteriores, es el momento de hacer algunas reflexiones sobre la presencia de tales categorías en dichos libros. No se trata de un estudio estadístico y las tablas precedentes tan sólo muestran la frecuencia de tales categorías a modo de recuento. Sin embargo, estos datos hablan por sí solos, ya que en muchos casos son tan diferentes que cualquier observador podría interpretarlos.

Además de las reflexiones realizadas en el *análisis didáctico de cada uno de los libros de texto* (anexo A) y de los comentarios y consideraciones de las *tablas resumen de los textos/categorías,* podemos hacer una serie de reflexiones eminentemente cualitativas. Éstas son:

a) El currículo de Matemáticas de segundo curso de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales no incluye absolutamente nada sobre números y aproximación en relación con el cálculo de áreas. Los números reales, redondeos, truncamientos y errores están recogidos en los currículos del segundo ciclo de la ESO y en el currículo de primer curso de Bachillerato de Ciencias Sociales.

b) Las áreas planas se tratan en el segundo ciclo de la ESO pero sólo se dan reglas de cálculo sin hacer un estudio del concepto. Lo que llama la atención es que en segundo curso de Bachillerato, salvo el texto de Casals, no se hacen conexiones con los estudios anteriores y, por tanto, no se describen ninguna de las dificultades relativas a la tipología numérica ni al tipo de curva que delimita la superficie y, consecuentemente, no se explicita la necesidad del cálculo integral que resuelve este problema.

c) La integral de Darboux no se construye bien, los autores que pretenden justificarla, la confunden con la de Riemann. SM y Edebé son los textos que presentan la integral de Riemann con mayor rigor, aunque sin especificar, mediante sumas inferiores y superiores de Darboux. Los manuales en los cuales se define la integral tomando límites de sumas inferiores y superiores no detallan suficientemente la sucesión de particiones ni los diámetros de las mismas. Ningún autor define la integral inferior como el extremo superior de las sumas inferiores ni la integral superior como el extremo inferior de las sumas superiores, a pesar de las dificultades que tienen los alumnos para la adquisición del concepto de límite (Blázquez, 1999). Esta reflexión hace que nos reafirmemos en la hipótesis 3.2*: "No es más fácil establecer la integral definida por límites secuenciales que mediante extremos para establecer la integral de Darboux"*.

d) Como alternativa a las definiciones de la integral de Darboux, tanto por medio de límites de sucesiones de sumas inferiores y superiores[26] como por la de extremos superior e inferior de las sumas anteriores[27], pensamos que *"los alumnos comprenden sin demasiada dificultad el teorema de caracterización óptima de las funciones integrables Darboux"* (lo cual guarda cierta correlación con la hipótesis 3.3).

e) El Teorema Fundamental del Cálculo Integral[28] es ignorado en algunos textos y los libros en los que se demuestra carece del rigor científico necesario. Mantenemos la esencia de la hipótesis 3.4 por la cual pensamos que *"los estudiantes comprenden mejor el enunciado y la demostración del teorema fundamental del cálculo, según la versión de Fischer"*[29], el cual incluye la regla de Barrow.

f) El texto de Marfil no incluye ninguna tabla de primitivas inmediatas, otros explican los métodos más comunes de integración (cambio variable, por partes, funciones racionales con raíces reales simples) y solamente Casals propone ejercicios de cálculo de primitivas mediante el cálculo mental. Pensamos que *"los estudiantes pueden calcular muchas primitivas elementales mediante el cálculo mental, aunque en ciertos momentos encuentren dificultades"* y, además, *"el cálculo mental de primitivas favorece la comprensión del teorema fundamental del cálculo"* (hipótesis 2.1 y 2.2).

---

26 $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad h_n = (b-a)/n$.

27 *Extremo superior* $\{s(f,P)\}$ = *Extremo inferior* $\{S(f,P)\} = \int_a^b f(x)\,dx$, *P partición de* $[a,b]$.

28 Los textos de MACS II consideran el Teorema Fundamental del Cálculo Integral a:
Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y G es la función $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *con* $x\in[a,b]$ *entonces G es derivable y además:* $G'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

29 Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Fischer):
Si f es integrable Riemann en [a,b] y G es una primitiva suya sobre ese intervalo, entonces:
$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

g) Salvo SM, los textos analizados de MACS II tienen escasas representaciones gráficas, consideramos que, además de las representaciones formales (algebraicas, analíticas y numéricas), las visualizaciones gráficas son muy importantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en general y del Cálculo Integral en particular, por tanto, debemos hacer más hincapié en las mismas pues la coordinación de varios registros semióticos facilita al estudiante la comprensión, adquisición y asimilación de los conceptos (Tall, 1996; Duval,1999 y Font, 2010).

h) La motivación histórica no existe o es muy escasa, salvo Casals y Edebé. Pensamos que la epistemología del cálculo integral es el nexo de unión entre las generaciones pasadas y la presente, además, es la mejor forma de comprender la necesidad de medir superficies (en cuya resolución se han implicado multitud de sabios a lo largo de los siglos). Consideramos prioritario realizar un *“estudio epistemológico del área y la integral definida y hacer una construcción de dichos conceptos en el contexto de la docencia actual”* (objetivo 1).

i) Las Nuevas Tecnologías tienen escasa presencia en textos. Creemos que su utilización debe ser habitual en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y, en especial, en el Cálculo Integral puesto que ahorra tiempo en los cálculos, permite la visualización “dinámica” de superficies de Riemann (incluidas las inferiores y superiores de Darboux) y establece la relación entre las distintas sumas (inferiores, intermedias y superiores), por tanto, consideramos que favorece el aprendizaje de los alumnos y les permite dedicar más tiempo a la comprensión conceptual. *DERIVE* es el *software* elegido por el equipo investigador para la enseñanza y el aprendizaje de la integral.

j) En resumen, ***el tratamiento que dan los libros de texto de MACS II a la integral definida es deficiente y, por tanto, hay que construir una secuencia didáctica que sea adecuada***. Este desarrollo se presenta en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO V: ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO. LA DOCENCIA ACTUAL. ÁREA E INTEGRAL........................*229*

V.1. INTRODUCCIÓN **229**

V.2. EPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO INTEGRAL **231**
V.2.1. INTRODUCCIÓN **231**
V.2.2. EDAD ANTIGUA Y EDAD MEDIA **233**
V.2.3. DEL RENACIMIENTO HASTA BARROW **238**
V.2.4. DESDE NEWTON Y LEIBNIZ HASTA EL CONCEPTO INTEGRAL **241**
V.2.5. LA INTEGRAL COMO OBJETO MATEMÁTICO **242**
V.2.6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES EPISTEMOLÓGICAS **243**

V.3. EL ÁREA COMO LÍMITE **247**
V.3.1. ÁREA DEL RECTÁNGULO **247**
V.3.2. INTRODUCCIÓN DEL NÚMERO π **252**
V.3.2.1. Longitud de la circunferencia 252
V.3.2.2. Área del círculo 253

V.4. INTEGRAL DEFINIDA EN MACS II **254**
V.4.1. CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA **255**
V.4.1.1. Integral de Darboux 256
V.4.1.2. Integral de Riemann 259
V.4.1.3. Integral de Darboux versus Integral de Riemann 261
V.4.2. VALOR NUMÉRICO DE LA INTEGRAL DEFINIDA **262**
V.4.2.1. Teorema del valor medio del cálculo diferencial 263
V.4.2.2. Teorema fundamental del cálculo (Fischer) 264
V.4.2.3. Primer teorema fundamental del cálculo (Spivak) 266
V.4.2.4. Segundo teorema fundamental del cálculo (regla de Barrow)............ 266
V.4.3. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA **267**
V.4.3.1. De los extremos de integración.. 267
V.4.3.2. Linealidad y aditividad 267
V.4.3.3. De la monotonía.. 268
V.4.3.4. Teorema del valor medio del cálculo integral 269

V.5. INTEGRACIÓN NUMÉRICA **270**
V.5.1. MÉTODO DE LOS RECTÁNGULOS **270**
V.5.2. MÉTODO DE LOS TRAPECIOS **272**

V.6. ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL **274**
V.6.1. ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA **274**
V.6.2. OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA **278**

CAPÍTULO V: ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO. LA DOCENCIA ACTUAL. ÁREA E INTEGRAL

V.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo y en el anexo B realizamos un estudio general de la integral definida o, más propiamente, de los conceptos de la integral definida. Para este trabajo de investigación, desde la perspectiva de la transposición didáctica[1], los contenidos del capítulo y el anexo constituirán el *saber sabio* y, posteriormente, se hará una transposición didáctica de él para ser enseñado a alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales.

De acuerdo con Chevallard (1998), consideramos que para enseñar un objeto debe disponerse de una buena transposición didáctica y, para ello, debe partirse de la *epistemología natural* del concepto y proponer una *epistemología artificial*.

La *epistemología del cálculo integral* o *epistemología natural* está dividida en cuatro etapas históricas y el criterio que se ha seguido en su redacción es respetar, en lo posible, los procedimientos originales y la notación de tal manera que su lectura no exigiera un gran esfuerzo a los lectores de esta tesis. He aquí cada una de las partes con los autores más significativos:

- *Edad Antigua y Edad Media* (Hipócrates de Chíos, Eudoxo, Euclides, Arquímedes y Oresme).
- *Del Renacimiento hasta Barrow* (Stevin, Kepler, Cavalieri, Fermat, Torricelli, Pascal, Huygens, Wallis y Barrow).
- *Desde Newton y Leibniz hasta el concepto integral* (Newton, Leibniz, Euler, Laplace, Fourier y Gauss).
- *La integral como objeto matemático* (Cauchy, Riemann, Darboux y Lebesgue).

Además, el estudio epistemológico concluye con una serie de *Síntesis y Conclusiones Epistemológicas.*

[1] Véase en el capítulo III la sección *III.1.6. La transposición didáctica de Chevallard*.

La *transposición didáctica* o *epistemología artificial* que proponemos puede considerarse, a caballo, entre el *saber sabio* y el *saber institucionalizado* que, posteriormente, el profesor investigador (siguiendo las orientaciones de director de la tesis y la metodología de investigación-acción) reelaborará para que se convierta en *saber enseñado* a los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales de los ciclos que componen esta investigación.

La transposición didáctica consistirá en la elaboración de una *unidad didáctica del área y la integral*, en la cual demostramos (mediante la toma de límites) el área del rectángulo y del círculo; por la necesidad natural de hallar el cálculo de áreas de figuras irregulares, establecemos el concepto de integral definida (Darboux y Riemann) para alumnos de enseñanza media (bachilleres) y demostramos el teorema fundamental del cálculo (versión Fischer) y el teorema del valor medio del cálculo integral. Los textos de MACS II reconocen dos teoremas fundamentales del cálculo, el primero (versión Spivak) y el segundo (regla de Barrow), ambos serán demostrados en este capítulo. La dificultad para calcular primitivas de algunas funciones o la inexistencia de las mismas en forma explícita crea la necesidad de realizar la integración numérica, nosotros presentamos la rectangular y la trapezoidal; terminamos con algunas aplicaciones de la integral que, de forma natural, continúan en el anexo C.

La evaluación *del saber del alumno* será recogida en la redacción de los seis ciclos de la investigación y en las conclusiones de esta tesis doctoral.

Los dos problemas principales del análisis: *1º el problema de las tangentes: la determinación de las tangentes a una curva dada; esto es, el problema fundamental del cálculo diferencial* y *2º el problema de las cuadraturas: determinar el área encerrada por una curva dada; o sea, el problema fundamental del cálculo integral* están interrelacionados y fueron científicos tales como Newton y Leibniz (siglos XVII y XVIII) quienes con sus nuevos métodos matemáticos y la excelente notación de Leibniz hicieron que el análisis matemático avanzara a pasos agigantados. El siglo XIX llevó a cabo la formalización teórica del análisis y actualmente podemos considerar que "no existe ninguna razón para que las personas educadas y cultas no entiendan el cálculo infinitesimal [cálculo diferencial e integral], el cual es básico para las ciencias" (Courant y Robbins, 1964, pág. 409).

V.2. EPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO INTEGRAL

V.2.1. INTRODUCCIÓN

Sin ánimo de ser exhaustivos, pretendemos dar una visión muy generalizada del desarrollo histórico del cálculo integral que será descrito por etapas.

Los orígenes los encontramos en el antigua Grecia, cuyos representantes más importantes son: Antifonte, Brison, Anaxágoras, Hipócrates de Chíos, Demócrito, Eudoxo, Euclides (autor de los Elementos, en el cual se incluye el método de exhausción de Eudoxo) y, sobre todo, Arquímedes (considerado uno de los mayores sabios de todos los tiempos). Todos estos autores desarrollan el embrión del cálculo infinitesimal a partir de problemas concretos, entre otros, la cuadratura de la parábola y el volumen del cono. Su resolución se consigue mediante la utilización de procedimientos específicos para cada tipo de problema.

Desde la invasión de Grecia por Roma no existen personajes históricos cuyos trabajos sean dignos de mención para el avance del cálculo integral. En la Baja Edad Media encontramos a Nicolás de Oresme que introduce la representación de los conceptos tiempo-velocidad y a partir de la misma deduce, de forma incipiente, la velocidad media y el espacio recorrido. Hasta este punto consideraremos la primera etapa de la epistemología del cálculo integral, denominada *"Edad Antigua y Edad Media".*

La segunda etapa, *"Del Renacimiento hasta Barrow",* comprende 270 años a partir de 1500 y al principio los avances son muy limitados; sin embargo, ya se percibe una generalización del problema del cálculo de áreas y los científicos más importantes que hacen estudios al respecto son: Stevin, Kepler, Galileo, Cavalieri, Roberval, Torricelli, Wallis, Fermat, Pascal, Descartes y Barrow; todos ellos emplean procedimientos particulares. Isaac Barrow, maestro de Newton, es el primer científico que demuestra el teorema fundamental del cálculo aunque no percibe su importancia.

La tercera etapa, *"Desde Newton y Leibniz hasta la formalización de la integral como objeto matemático"*, se inicia con la toma de posesión de la Cátedra Lucasiana de Matemáticas en la Universidad de Cambridge por Isaac Newton, acaecida en 1669, y su final con la publicación de la célebre *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier en 1822.

Además de los estudios y publicaciones de tan egregios científicos (Newton y Leibniz) destacamos los trabajos de la familia Bernoulli, Euler, Laplace, Fourier y Gauss. Los resultados de este periodo son muy importantes, se dan métodos generales para resolver el problema del área y se encuentran nuevas aplicaciones de la integral definida en otros ámbitos de la ciencia.

La cuarta etapa, *"La formalización de la integral como objeto matemático"*, consiste en construir la base matemática rigurosa del concepto que nos ocupa. Su inicio es en 1823, con la publicación de *Resume des leçons sur le calcul infinitesimal* de Cauchy y llega hasta nuestros días. En este apartado hacemos mención a varias teorías de la integración, éstas son: Integral de Cauchy, Integral de Riemann, Integral de Darboux, Integral de Riemann-Stieltjes, Integral de Funciones Escalonadas y Regladas (Bourbaki-Dieudonné) e Integral de Lebesgue (esta última es la más general y la más importante, además, es reconocida como *"Teoría de la Medida"*).

En los diferentes apartados hemos intentado seguir, en la medida de lo posible, los razonamientos originales de los diferentes autores a lo largo de los siglos, así como las teorías de la integral definida. En este punto sólo podemos afirmar que *"El Cálculo Integral aún tiene un recorrido insospechado en las diferentes Ciencias y seguirá siendo una sólida herramienta para el progreso de la Humanidad".*

Finalizamos la epistemología del cálculo integral con *Síntesis y Conclusiones Epistemológicas* (Capace y Arrieche, 2007)[2].

No nos proponemos hacer un estudio pormenorizado del desarrollo histórico de la cuestión que nos ocupa, más bien, dar unas pinceladas con las cuales podamos tener una visión generalizada del cálculo integral. No se ha podido incluir a todos los autores, eso sí, pensamos que están los más importantes, eso sí, no creamos que ellos fueran los únicos cuyos estudios hicieron que el avance del análisis matemático fuera espectacular, nada de ello hubiera sido posible sin el trabajo anónimo de tantas personas a lo largo de los siglos.

En este capítulo, con el objetivo de reducir la redacción de esta memoria, presentamos un pequeño extracto de la *epistemología del cálculo integral,* pudiéndose encontrar la totalidad del apartado V.2 en el anexo B.

[2] Capace, L. y Arrieche, M. (2007). Algunas configuraciones epistémicas de la integral en una variable real desde su origen hasta su consolidación. *Enseñanza de la Matemática. Volúmenes 12 al 16. Número Extraordinario; 2003-2007. Diciembre de 2007. Asociación Venezolana de Educación Matemática*. Pp. 35-52.

V.2.2. EDAD ANTIGUA Y EDAD MEDIA

Arquímedes (287-212 a.C.), nacido y muerto en Siracusa, es considerado el científico más importante de la Antigüedad y junto con Newton (1642-1727) y Gauss (1777-1855) uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos. Arquímedes, escribió varios tratados y uno de ellos conocido como *El Método*[3] tiene una importancia excepcional porque revela una faceta de su pensamiento que no aparece en ningún otro científico, así pues, mediante un *"método mecánico"* de equilibrio descubrió el área de un segmento parabólico: *cuatro tercios del triángulo inscrito*[4]*.* En su libro *Cuadratura de la Parábola* da dos métodos para hallar el área del segmento parabólico, según el propio Arquímedes: "He descubierto este teorema primero por consideraciones de mecánica, y luego por razonamientos geométricos", el primero de ellos es semejante al argumento mecánico expuesto en el *Método* y el segundo, el cual demostramos seguidamente, lo hace apoyado por la Geometría.

Cuadratura de la parábola de Arquímedes[5]

El método geométrico aplicado por Arquímedes es el exhaustivo que, como sabemos, consiste en inscribir en la curva figuras iguales de la misma clase limitadas por rectas. Una multiplicidad siempre creciente de estas figuras cada vez menores determina que las figuras limitadas por rectas se ajusten cada vez más a la curva, hasta que, después de una repetición infinita, se llega, en las figuras limitadas por rectas, a unas rectas límite tan pequeñas que pueden considerarse como elementos de la curva. Falta aún, sin embargo, efectuar el segundo paso esencial: hemos de estar en condiciones de sumar las áreas del número infinito de figuras limitadas por rectas, pues sólo tal suma infinita nos puede proporcionar el área "agotada" de la figura

---

[3] La única copia superviviente del Método fue descubierta en un palimpsesto (pergamino que la escritura original ha tratado de ser borrada y sustituida por otra diferente) en Constantinopla por el científico J. L Heiberg en el año 1906.

[4] Puede verse la demostración, por el *método mecánico*, en:
Boyer (1986, págs. 182-184).
Kline (1992, tomo I, págs. 154-157).
Vera, F. (1970). *Científicos Griegos*. Madrid: Aguilar. Pp. 223-232.

[5] La demostración *geométrica* de la *cuadratura de la parábola* de la presente memoria procede de: Colerus, E. (1959). *De la tabla de multiplicar a la integral. Las Matemáticas para todos*. Barcelona: Labor. Reimpresión. Pp. 269-276. El procedimiento que emplea Colerus, según sus propias palabras, es: "Para ello nos valdremos exclusivamente de sus estudios geométricos, prescindiendo de sus métodos estáticos, excesivamente pesados". Otras demostraciones pueden encontrarse en Kline (1992, tomo I, págs. 157-160) y Boyer (1986, págs. 174-175).

limitada por curvas, expresada mediante las áreas de las primeras. Más adelante veremos cómo puede efectuarse esta suma; por ahora dibujaremos un arco cualquiera de una “parábola ordinaria”, de la cual ya, en tiempo de Arquímedes, se conocían numerosas propiedades (figura V.2.2).

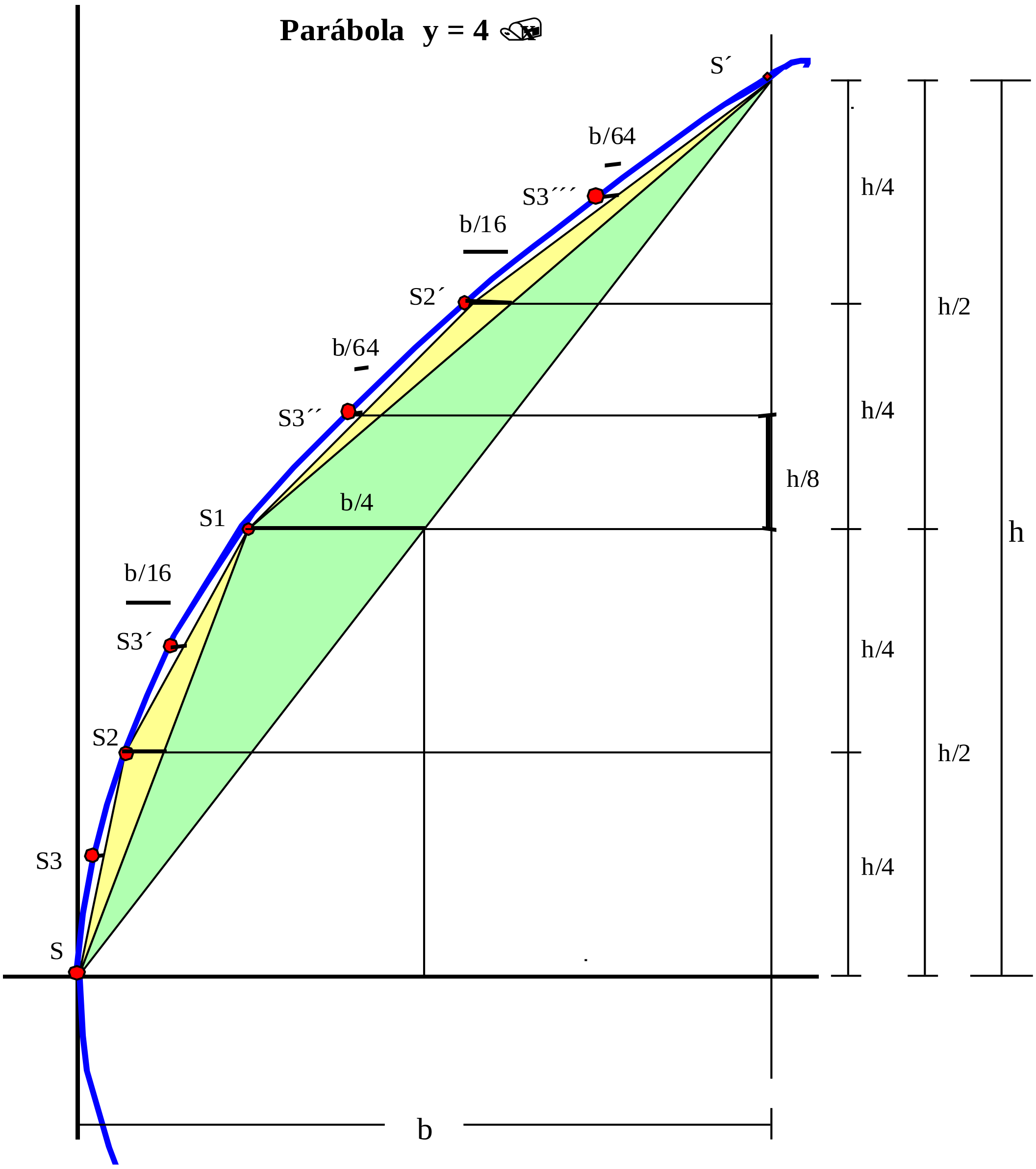


Figura V.2.2. Segmento parabólico.

Se busca el área de una sección de parábola de la figura llamada segmento parabólico. Inscribimos a este segmento un triángulo cuyo vértice coincida con el de la parábola. Para mayor sencillez nos limitaremos a la mitad superior del segmento, en el que estará comprendido ahora un gran triángulo rectángulo (la mitad del triángulo inscrito completo), cuya hipotenusa se extiende desde el vértice de la parábola hasta el punto en el que se corta la cuerda que limita el segmento. Los catetos de este triángulo que designaremos con el nombre de “triángulo grande” son un segmento del eje de la parábola y otro segmento perpendicular al eje e igual a la mitad de la cuerda. Y ahora empecemos con el “agotamiento”. Para ello tomaremos la hipotenusa del “triángulo grande” como la base de un nuevo triángulo (de color verde en la figura), que ya no será rectángulo. Sobre los otros dos lados de este triángulo verde tienen a su vez sus bases dos triángulos amarillos, cuyos vértices, como todos los de los triángulos que consideramos, están sobre la parábola. Sigamos ahora mentalmente este proceso. Sobre cada uno de los dos lados libres de los triángulos amarillos podemos apoyar las bases de otros dos triángulos menores, cuyos vértices, han de estar sobre la parábola, y así hasta el infinito. Se ve inmediatamente que estos triángulos han de terminar por rellenar completamente el semisegmento de parábola, pero ¿cómo obtendremos la suma de las áreas de este número infinito de triángulos?

En este punto veremos brillar en todo se esplendor el genio matemático de los griegos, admirándonos, a la vez, de la claridad y sencillez casi increíbles con que resolvieron este problema aparentemente insoluble. Arquímedes decía que una suma infinita sólo podía estar construida por una serie decreciente cuyos términos se hallaran entre sí en una relación racional cualquiera. Así se sabía, por ejemplo, que la suma de la serie 1 + 1/2 + 1/4 + + 1/8 + 1/16 +... daba un valor racional a pesar de sumarse un número infinito de términos: el valor 2. Si se consigue, pues, que el área de nuestros triángulos, cada vez menores, llegue a estar en una relación disminutiva constante, el problema se habrá convertido en la suma de una serie decreciente. Y el “triángulo grande” podrá ser tan grande como se quiera, pues tomándolo igual a 1, y expresando los demás triángulos en fracciones de esa unidad, para obtener el resultado bastará, después de efectuada la suma de la serie, multiplicar el valor obtenido por el área real del “triángulo grande”. El resultado final debe expresar, de un modo racional y exacto, la cuadratura de la parábola.

Arquímedes consiguió, efectivamente, este objetivo. Siguiendo el curso de sus ideas de modo simplificado, para lo cual nos rendirá un excelente servicio el esquema de la figura V.2.2.4, recordaremos que la parábola posee propiedades muy notables. Como su exposición nos llevaría demasiado lejos, nos limitaremos a citar que todas las paralelas al eje (que cortan a la parábola en los puntos S, S3, S2, S3´, etc.) se llaman diámetros de la parábola, y que en la parábola, cuando la porción del diámetro comprendida entre una cuerda y la curva tiene una longitud máxima, el diámetro divide a la cuerda en dos partes iguales. Indiquemos, además, que los griegos y, desde luego Arquímedes, sabían perfectamente que el segmento de eje *b* estaba, con una cualquiera de sus partes, en la misma razón que h^2 en el cuadrado de la perpendicular trazada desde el punto de división de la parábola, lo que en nuestro lenguaje moderno significa precisamente la ecuación analítica de la parábola ordinaria[6],

$$y^2 = x, \quad o \quad y = \sqrt{x} \ .$$

Y ahora, a la vista de la figura V.2.2, correspondiente a la parábola $y = 4\sqrt{x}$, entremos de lleno en el estudio del problema.

El "triángulo grande" tiene por catetos *b* y *h* y por hipotenusa, SS´; su área es *bh/2.* Trazamos en el punto *h/2* un "diámetro, buscando un punto S1 de intersección con la parábola e inscribiendo a este nuevo segmento el triángulo SS´S1, lo podemos imaginar dividido por el segmento *b/4* en dos triángulos parciales, ambos de base *b/4* y altura *h/2*, que juntos tendrán por área $2\times\left(\frac{b}{4}\times\frac{h}{2}\right):2$, lo que supone que el triángulo SS´S1 tiene un área $\frac{bh}{8}$.

Esto supone que el triángulo verde es la cuarta parte del "triángulo grande". Tracemos ahora otros dos diámetros por *h/4* y *3h/4*, es decir, volvemos a dividir *h/2* en dos mitades. Los diámetros de estos puntos de división dan lugar a dos nuevos puntos de intersección S2 y S2´ en la parábola. Y como a los nuevos segmentos SS2S1 y S1S2´S´ les podemos inscribir dos nuevos triángulos SS2S1 y S1S2´S´ que corresponden a los triángulos amarillos, se repite, de nuevo, las mismas propiedades y el procedimiento anterior. Tenemos cuatro triángulos parciales separados por la base *b/16*, cada dos de ellos forman un triángulo amarillo, cada triángulo parcial tiene un área $\left(\frac{b}{16}\times\frac{h}{4}\right):2$ y los cuatro juntos $4\times\left(\frac{b}{16}\times\frac{h}{4}\right):2$, o sea, $\frac{bh}{32}$, lo que significa que los dos triángulos amarillos son la cuarta parte del triángulo verde.

Si seguimos aplicando la misma ley formativa y dividimos en la figura los *h/4*, obtendremos mediante los cuatro nuevos diámetros los cuatro nuevos

[6] Las abscisas del punto extremo *x* y del punto de división *x'* se hallan entonces en la misma relación que los cuadrados de las ordenadas correspondientes y^2 e $(y')^2$. Por tanto, todos los puntos de la parábola se hallan expresados por $y^2=x$.

puntos de intersección S3, S3´, S3´´ y S3´´´, y con ellos cuatro “triángulos exhaustivos” que formarán en conjunto ocho triángulos parciales de base *b/64*, cuya área total será $8\times\left(\frac{b}{64}\times\frac{h}{8}\right):2$, es decir, $\frac{bh}{128}$, siendo la cuarta parte del área de los triángulos amarillos.

Concluimos que nuestro “agotamiento”, bajo la condición de la continua división en dos mitades de *h*, trazado de diámetros y formación de triángulos, forman una serie decreciente que cumple: El “triángulo” grande es cuatro veces mayor que el verde. El triángulo verde es cuatro veces mayor que los triángulos amarillos. Los triángulos amarillos son cuatro veces mayores que los triángulos de vértices S3, S3´, S3´´ y S3´´´, etc., y así hasta el infinito. Si tomamos ahora por unidad el “triángulo grande”, cosa que podemos hacer, obtendremos la serie: 1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 +... , puesto que en esta serie cada término es 1/4 del precedente. Por tanto, el área del segmento parabólico será el área del “triángulo grande” por la suma de la serie[7]. Por procedimientos modernos, sabemos que esa serie es geométrica de razón 1/4, por tanto la suma es[8]: $S_\infty=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$.

Por último, debemos decir que el primer triángulo no necesita ser triángulo rectángulo, pudiendo haber cogido cualquier segmento oblicuo como triángulo inicial y debiéndose haberlo hecho así para conseguir la completa generalización. De hacerlo así, se determina el paralelogramo que pasa por los vértices opuestos del mismo dividiendo dicho paralelogramo en la relación 2/3 a 1/3 y todos los triángulos “exhaustivos” valen 1/3 del triángulo de partida cuya base es la cuerda del segmento[9].

Así pues: *“El área del segmento parabólico es el cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento”.*

[7] Arquímedes desconocía la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, sin embargo, por medio de la doble reducción al absurdo (similar a la realizada para calcular el volumen del cono en el anexo B) obtiene el valor 4/3.
Una demostración, por doble reducción al absurdo, de la cuadratura de un segmento parabólico puede encontrarse en: Pérez González, F. J. (2008). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.* Universidad de Granada. Departamento Análisis Matemático. Pp. 500-502.
En: http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_fun_una_var.pdf

[8] Recuérdese la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica donde r es la razón $0<r<1$ y a_a el primer término, esto es, Suma = $a_1/(1-r)$.

[9] Colerus obvia esta demostración, a nosotros nos resultaría fácil utilizando el cálculo integral moderno y, si es necesario, realizando previamente un cambio de coordenadas.

V.2.3. DEL RENACIMIENTO HASTA BARROW

Cavalieri (1598-1647), discípulo de Galileo, calcula superficies y volúmenes mediante el establecimiento de los indivisibles, cuya formulación de sus principios es[10]:

1. *Si dos figuras planas tienen la misma altura y si sus secciones determinadas por líneas paralelas a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces las áreas de las dos figuras están también en la misma razón.*
2. *Si dos cuerpos sólidos tienen la misma altura y si las secciones que determinan planos paralelos a las bases y a distancias iguales de ellas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los dos sólidos están también en la misma razón.*

Así pues, por medio del primer principio calcula el área de la elipse partiendo de la relación existente entre su ecuación y la de la circunferencia; asimismo, basándose en el segundo principio determina el volumen de la esfera en función del cilindro que la circunscribe.

Isaac Barrow (1630-1677), cierra este periodo iniciado con el ingeniero Stevin (1548-1620), es el maestro de Newton y la mejor explicación posible del momento en el que se encuentra el análisis matemático y la contribución de Barrow al mismo viene dada por Rey Pastor (1973, pág. 447)[11]:

> Contemplamos en esta breve reseña dos ríos caudalosos de ideas que avanzan paralelos. Uno tiene su origen en el **problema del área** (...) para formar un cuerpo de doctrina que se puede llamar Cálculo Integral, el cual avanza lentamente, resolviendo los problemas uno a uno con artificios especiales, a veces ingeniosísimos, porque la sumación se presenta de modo distinto en cada uno y se carece de un método general. El otro caudal de ideas está formado por las numerosas aportaciones al **problema de la tangente**; se persigue un procedimiento general válido para todas las curvas y cada matemático inventa uno distinto en apariencia, todos ellos basados en el cálculo con infinitésimos (...)

[10] Pérez, G., Molfino, V., Lanzilotta, M. y Dalcín, M. (2002). Epistemología e Historia de la Matemática-Nivel Medio. Orígenes del Cálculo Infinitesimal: De la Antigüedad al Teorema Fundamental. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 15*, pp. 514-519.

[11] Rey Pastor (1973). *Curso de Cálculo Infinitesimal.* Madrid: Biblioteca Matemática.

> Cada país del continente dispara su flecha sin dar plenamente en el blanco, gloria reservada a un teólogo inglés, aficionado a las matemáticas, el cual ideó la determinación de la tangente por el cociente de incrementos. Tal es la sencilla idea de Barrow que oscureció a todas las demás.
>
> El Cálculo diferencial encontró su cauce en Isaac Barrow, pero sus aguas habían corrido estérilmente, mientras el Cálculo integral, incomparablemente más fecundo, quedaba estancado en su progreso. Faltaba la idea genial que fundiese en uno ambos caudales de pensamiento y también fue Barrow quien dio la solución. El área es una función primitiva del integrando; o bien, con el lenguaje de entonces: el problema del área es inverso al problema de la tangente. El dificilísimo problema de la sumación de elementos quedaba así reducido al cálculo de la tangente, mucho más sencillo. Y el mismo año memorable de 1669 en el que se desata este nudo inextricable con el que forcejearon cientos de gigantes durante dos mil años, cede su cátedra de Geometría a su discípulo predilecto Newton y se consagra de nuevo a la Teología.
>
> Desde este momento culminante en el que confluyen las dos grandes corrientes, sólo falta elaborar el algoritmo diferencial, ir complicando los problemas, crear la notación adecuada. Todo ello es simple cuestión de tecnicismo; y si a la técnica se suma el genio se comprende cómo pudo crecer inconmensurablemente en tan breve periodo, en manos de Isaac Newton y de Guillermo Leibniz.

El cálculo diferencial tal y como se conoce en la actualidad parte de los trabajos de Fermat[12] y el método de Barrow “para la determinación de tangentes (...) y en él aparecen dos cantidades que equivalen, en términos modernos, a Δx e Δy” (Boyer, 1986, pág. 488). Así pues, estos dos científicos, aficionados a las Matemáticas, utilizando procedimientos geométrico-analíticos son los fundadores del cálculo diferencial[13].

En la presente memoria, nuestro interés se centra en el cálculo integral y, efectivamente, a Isaac Barrow le cupo el privilegio de establecer el Teorema Fundamental del Cálculo cuyo enunciado y demostración aparece en la Lección X, Proposición 11 de las *Lectiones Geometricae*. Éste es[14]:

---

[12] Laplace considera a Fermat el descubridor del cálculo diferencial (Boyer, 1986, pág. 440).

[13] Las diferenciales de Fermat y Barrow pueden verse en: Boyer (1986, págs. 439-441 y 487-489) y Kline (1992, tomo I, págs. 455-458).

[14] Kindt, M. (2011). *Aportaciones de la historia de las matemáticas a la educación moderna.* Freudenthal Institut. Universidad de Utrecht (Holanda). En:

- La curva *ZE*E*, figura V.2.3, representa una función monótona.
- La curva *VF*F* representa el área encerrada entre el eje horizontal, la curva *ZE*E*, y la rectas verticales *DE* y *VZ.* Esta es una función de la abscisa *D.* Las longitudes a^* y a representan, respectivamente, las áreas de *VD*E*Z* y *VDEZ.*
- El punto *T* es construido de tal modo que la longitud del segmento *DT* es igual al cociente $DT = FD/ED = a/y$.

Afirmación: *La línea TF es una tangente a la curva VF*F.*

Supongamos que *K* es un punto de *TF* entre *T* y *F.* Veamos que *K* es un punto a la derecha de la curva *VF*F.*

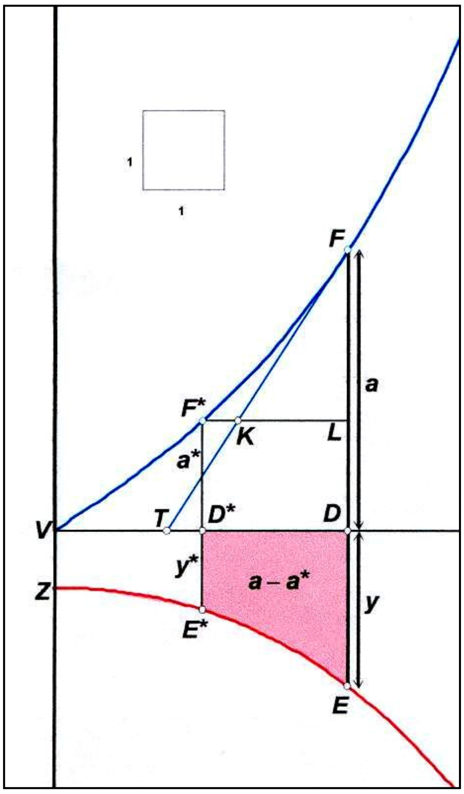


Figura V.2.3. Teorema Fundamental del Cálculo según Barrow.

Por la construcción de *T* tenemos:

$FL/LK = FD/DT = ED = y$, lo cual implica que $FL = LK \cdot y$ (1)

De otro lado: $FL = a - a^* =$ área $VDEZ$ – área VD^*E^*Z = área $D^*DEE^* < D^*D \cdot y$, es decir, $FL < D^*D \cdot y$ (2), puesto que la curva *ZE*E* representa una función monótona.

De (1) y (2) se obtiene $LK < D^*D$ y, por construcción, $LK < LF^*$

Prolongando la recta *TF* demostramos, de modo análogo, que cada punto de la parte prolongada está a la derecha de *VF*F.*

Entonces todos los puntos de la recta, salvo *F*, están a la derecha de la curva, por tanto, *TF* es tangente a la curva en *F.*

Barrow no fue consciente de su descubrimiento y, en notación moderna, estableció la relación entre el problema de la tangente (mediante el cociente incremental) y el problema del área (mediante productos incrementales) como operaciones inversas (Larson y Hostetler, 1990, pág. 314).

http://www.cimm.ucr.ac.ar/historia%20de%20las%20matematicas/archivos/M.%20Kindt.Aportaciones%20de%20la%20historia%20de%20las%20matematicas%20a%20la%20educacion%20moderna.%20Freudenthal%institut,%20Universidad%20de%20Utrech.%20Holanda.pdf

V.2.4. DESDE NEWTON Y LEIBNIZ HASTA EL CONCEPTO INTEGRAL

Hasta ahora todos los métodos habían resuelto casos particulares, quedaba la generalización de los mismos y ésta fue proporcionada por dos científicos excepcionales: **Newton** (1642-1727) y **Leibniz** (1646-1716). He aquí algunas de sus aportaciones (Pérez y cols. 2002, pág. 508):

- El desarrollo de un *método general* para el cálculo de la variación de una variable con respecto al tiempo, en el cálculo de Newton; o la diferencial de una variable, en el cálculo de Leibniz.
- El conocimiento claro y contundente, de nuevo con generalidad, de que los problemas de las tangentes y las cuadraturas son recíprocos, lo que suponía una nueva herramienta para el cálculo de áreas. Frente al contenido geométrico y parcial que le dio Barrow, Newton y Leibniz le dieron en primer lugar una generalidad en su aplicación, en segundo lugar una presentación más analítica y en tercer lugar la importancia que dicho resultado tiene dentro del cálculo.
- Añadimos que a ambos se les considera los fundadores el *Cálculo*, pues ellos fueron los que *aritmetizaron* el cálculo ya que lo empezaron a construir con *conceptos algebraicos.*

Por último, a modo de ilustración, damos una tabla de las notaciones usadas por ambos egregios contrincantes (Rey Pastor, 1973, pág. 448)[15]:

Notaciones de Newton	**Notaciones de Leibniz**	**Notaciones actuales**
Quantitas correlata		Variable independiente: t
Fluente		Función: y
o	dt (antes t/d)	Incremento: dt
Fluxión: y	dy/dx	Derivada: y´ = dy/dx
Momento: y.*o*	Diferencial: dy	Diferencial: dy
Integral: y	Omnia: ∫ l; ∫y.dx.	Integral: ∫y.dx

Tabla V.2.4. Notaciones diferenciales e integrales de Newton y Leibniz.

[15] La notación de Leibniz es la que se usa en la actualidad, favorecida por "el simbolismo matemático que automatiza los cálculos y permite formular fácilmente procesos algorítmicos (...) El cálculo de Leibniz triunfó en el continente europeo gracias a los trabajos de los hermanos Bernoulli y al libro de texto del Marqués de L'Hôpital [*Analyse des infiniment petits,* publicado en 1696] que divulgó las técnicas del cálculo leibniziano por toda Europa" (Pérez González, 2008, págs. 514-517).

V.2.5. LA INTEGRAL COMO OBJETO MATEMÁTICO

Es evidente que ante la ingente contribución de los científicos durante tantos siglos era necesario que se creara una Teoría de la Integral (se entiende Integral Definida, aunque posteriormente se ampliará), para ello se adopta el símbolo "$\int$ ", introducido por Leibniz en lugar *"omn."*, la palabra *"integral"*, utilizada por primera ver por Jacques Bernoulli en 1690 en su *Acta Eruditorum* y, finalmente, fue Fourier quien la expresó en su concepción moderna "$\int_a^b f(x)dx$ " (Recalde, 2007, pág. 115). Además, ello no hubiera sido posible sin la definición de función dada por Euler.

El honor de definir el concepto moderno de integral le corresponde al francés **Cauchy** (1789-1857), posteriormente autores como **Riemann** (1826-1866) y **Darboux** (1842-1917) formalizarán y ampliarán dicho concepto terminando con la moderna teoría de la integración (en su sentido más amplio, *"Teoría de la Medida"*) de **Lebesgue** (1875-1941).

Los tres primeros científicos dan prioridad al eje de abscisas tomando particiones del intervalo compacto [a,b] del dominio de definición de una función real de variable real, $f(x)$, acotada, y, mediante diferentes procesos sumatorios, establecen sus respectivas teorías de la integral.

Por otra parte, Lebesgue, para la misma función $f(x)$ considera m y M dos números reales tales que verifican: $m \leq f(x) \leq M$; $a \leq x \leq b$. Es decir, dado el intervalo cerrado y acotado [m,M] del conjunto imagen de $f(x)$ toma particiones del mismo y, generalizando el concepto de medida, establece la integral que lleva su nombre.

En esta memoria, proponemos como *saber a enseñar*[16]*,* la integral de Darboux bajo la perspectiva de enseñanza-aprendizaje para estudiantes de bachillerato de ciencias sociales y, asimismo, concluimos que las integrales de Riemann y Darboux son equivalentes (véase el apartado V.4). Sin embargo, tanto la integral de Cauchy como la de Lebesgue quedan fuera del *saber institucionalizado* para ser impartido en enseñanzas medias.

Por último, consideramos oportuno completar este apartado, por tanto, un breve resumen de estas cuatro teorías de la integral puede verse, en su contexto histórico, en el anexo B.

[16] Véase *III.1.6. La transposición didáctica de Chevallard* del capítulo III.

V.2.6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES EPISTEMOLÓGICAS

Habiendo realizado un breve estudio epistemológico del área y la integral a lo largo de los últimos 2500 años[17], seguidamente elaboramos unas tablas resumen (Capace y Arrieche, 2007, págs. 48-51) de las características más importantes de las configuraciones del área y la integral en cada uno de los periodos en los cuales hemos dividido el estudio epistemológico.

Seis tablas componen nuestro resumen y las hemos clasificado, por parejas, en tres grupos, éstos son:

1. *Génesis del problema de las cuadraturas y cubaturas y la resolución de problemas particulares.* La primera parte corresponde con la resolución de problemas particulares de áreas y volúmenes mediante procedimientos de la antigüedad clásica y la segunda el intento de generalizar los procedimientos del cálculo de áreas y volúmenes de figuras determinadas por distintas familias de funciones.
2. *Generalización de las cuadraturas y cubaturas, evolución y desarrollo de la solución general: Newton y Leibniz.* Las investigaciones de estos dos científicos permiten encontrar la relación existente entre el problema de las tangentes y el problema de las cuadraturas, por tanto, se establece y demuestra con todo rigor el teorema fundamental del cálculo, el cual permite hacer generalizaciones para determinar áreas y volúmenes.
3. *Consolidación del Cálculo Integral.* El problema de las áreas ha trascendido al concepto *Integral*, el cual, debe formalizarse con rigor matemático. Cauchy es el primero en conformar una *Teoría de la Integral* que será ampliada por Riemann y Darboux (primera tabla). Retomando los primitivos conceptos de longitud y área de los griegos, Jordan, Borel y Lebesgue establecen los conceptos de *conjunto medible* y *función medible*[18] que permiten la creación de la *Integral de Lebesgue* que resuelve todos los problemas de áreas y cubaturas de los griegos, amplia la integral de Riemann-Darboux y conserva todos sus resultados y, además, es el origen de la *Teoría de la Medida* (segunda tabla) que está en constante expansión y tiene multitud de aplicaciones en diferentes ámbitos de la Ciencia.

[17] Véase el *Anexo B (Capítulo V): Epistemología del cálculo integral.*

[18] Sumable en la terminología de Lebesgue.

He aquí las seis tablas resumen a las cuales hemos hecho referencia:

1.- "Génesis del problema de las cuadraturas y cubaturas y la resolución de problemas particulares".

Configuración epistemológica en la Edad Antigua y Edad Media.	
Situaciones	Cuadraturas, cubaturas.
Acciones	Se determinan por el método de exhausción las mejores aproximaciones numéricas que representen áreas y volúmenes.
Lenguaje	Básicamente geométrico, también aritmético.
Conceptos	Los básicos de medida de área y volumen (cuadraturas y cubaturas). Nociones de continuo e infinito.
Propiedades	Fórmulas de áreas y volúmenes. Método de exhausción de Eudoxo. Axiomas de Arquímedes. Propiedades de las razones.
Argumentos	La doble reducción al absurdo utilizada en la Grecia Clásica y las proporciones de Oresme.

Configuración epistemológica de acuerdo a la resolución de los problemas originarios del cálculo integral: Periodo del Renacimiento hasta Barrow.	
Situaciones	Los problemas se plantean para determinar áreas y volúmenes de regiones y sólidos generados por funciones de tipo algebraico y algunas transcendentes.
Acciones	Las integraciones se hacen de forma numérica, es decir, por aproximaciones numéricas con las cuales se determinan cuadraturas de parábolas, hipérbolas, cicloides, elipses y círculos. Se asume que la superficie puede estar compuesta por infinitos elementos infinitesimales de iguales dimensiones. Se emplean progresiones para calcular cuadraturas.
Lenguaje	Geométrico, aritmético y algebraico.
Conceptos	Infinitésimo, serie, cuadratura, cubatura, centro de gravedad, arcos, series infinitas, indivisible e infinitamente pequeño.
Propiedades	Series infinitas, método de exhausción sin doble reducción al absurdo. Método inductivo aplicado por Wallis para su integración.
Argumentos	Los propios del método de la exhausción y del método inductivo y deductivo.

Tablas V.2.6.1. Área e integral desde la antigüedad hasta Newton-Leibniz.

2.- "Generalización de las cuadraturas y cubaturas, evolución y desarrollo de la solución general: Newton y Leibniz".

Configuración epistemológica impulsada por los trabajos de Newton y que tiene que ver con la relación inversa entre diferenciación e integración.	
Situaciones	Problemas que requieren un mayor número de elementos matemáticos para su solución, como ejemplo, los fluentes y las fluxiones de Newton.
Acciones	Expresar funciones como series infinitas de potencias y calcular el área como la inversa de la diferenciación. Utilizar series infinitas de potencias como una técnica de integración.
Lenguaje	Geométrico, simbólico, notaciones y gráficos.
Conceptos	Series de potencias, cuadraturas, curvaturas, tangentes, fluentes-fluxiones y cantidades infinitamente pequeñas.
Propiedades	Utiliza la recién conocida relación inversa entre el problema de la tangente y el problema de la cuadratura. Desarrollos binomiales.
Argumentos	La integración como suma infinita. Utiliza rigurosamente el método deductivo el cual le permite hacer generalizaciones.

Configuración epistemológica impulsada por los trabajos de Newton y Leibniz que tiene que ver con el concepto de integral visto como una suma de elementos infinitesimales.	
Situaciones	Se quiere generalizar la Integral a un grupo más amplio de problemas y elaborar símbolos, notaciones y lenguaje para éstos.
Acciones	Emplea el sumatorio como la inversa de la diferenciación. Las cuadraturas como suma de infinitos rectángulos. Se demostró rigurosamente el Teorema Fundamental del Cálculo.
Lenguaje	Simbólico y numérico.
Conceptos	Series infinitas, secuencias de diferencias, cuadraturas, curvaturas, tangentes y procesos infinitos.
Propiedades	Para obtener el área de una región cerrada basta con sumar el área de los rectángulos inscritos porque los triángulos que contienen la curva son infinitamente pequeños.
Argumentos	Rigor en el método deductivo, el cual permite hacer generalizaciones.

Tablas V.2.6.2. Generalización de los problemas de cuadraturas y cubaturas.

3.- "Consolidación del Cálculo Integral".

Configuración epistemológica impulsada por el desarrollo teórico de la Integral. Teorías de la Integración de Cauchy-Riemann-Darboux.	
Situaciones	Fundamentación de los conceptos esenciales del Cálculo Integral, las aplicaciones son secundarias y el rigor matemático es prioritario. Se consolidan varias teorías: Cauchy, Riemann, Darboux, etc.
Acciones	Las más importantes son: Incluir procesos aritméticos en la integración, generalizar la Integral de Cauchy a un número más amplio de funciones, los conceptos de límite e infinitésimos, la definición de integral como límite de una suma y, finalmente, integración de funciones que no tienen primitiva en todo el intervalo de integración.
Lenguaje	Simbólico y numérico.
Conceptos	Función, límite, infinitésimo, continuidad y discontinuidad, series convergentes, derivada, diferencial e integral definida.
Propiedades	Unicidad de la Integral Definida, Teorema Fundamental del Cálculo, Teorema del Valor Medio de la Integral, Linealidad de la Integral Definida, Equivalencia de las integrales de Riemann y Darboux. Desarrollos en Series de Fourier, etc.
Argumentos	Los propios del rigor matemático en la definición de los conceptos y en las demostraciones.

Configuración epistemológica impulsada por la Teoría de la Medida.	
Situaciones	Generalizar el concepto Integral por medio de la Teoría de la Medida.
Acciones	Generalización de la Integral de Riemann-Darboux. Demostraciones más amplias del Teorema Fundamental del Cálculo y del Teorema del Valor Medio de la Integral.
Lenguaje	El propio del Análisis en términos conjuntistas y topológicos.
Conceptos	Integral, conjunto medible, función medible, sumas superiores e inferiores, supremo e ínfimo.
Propiedades	Las propias de la Integral de Lebesgue y la Teoría de la Medida.
Argumentos	Deducción rigurosa apoyada en la Teoría de la Integral, la Teoría de Borel y la Teoría de la Medida.

Tablas V.2.6.3. Generalización de la Integral. Teoría de la Medida.

V.3. EL ÁREA COMO LÍMITE

V.3.1. ÁREA DEL RECTÁNGULO

Para poder calcular el área de una figura plana elegimos como *unidad de área* un cuadrado de lado igual a la unidad de longitud. Si ésta es un centímetro, la unidad correspondiente de área será un centímetro cuadrado, es decir, un cuadrado de lado igual a un centímetro. El área de una superficie es el número de cuadrados de lado unidad que contiene. Sin embargo, este número de cuadrados no es fácil de determinar y, en gran medida, la dificultad de su determinación depende de la forma de la superficie.

El caso más sencillo es cuando la superficie tiene una forma rectangular y suponiendo que las dimensiones, base y altura, del rectángulo fuesen *p* y *q*, la tipología numérica de estos números condiciona el establecimiento de la regla por todos conocida: *Área = base x altura*. Lo que sigue a continuación tiene como fin establecer esta fórmula cualesquiera que sean los valores reales de la base y de la altura.

a) Si *p* y *q* son números enteros, la superficie del rectángulo es igual a *pxq* unidades de área o más brevemente, el área es igual al producto *pxq* unidades cuadradas. La siguiente figura contempla esta circunstancia.

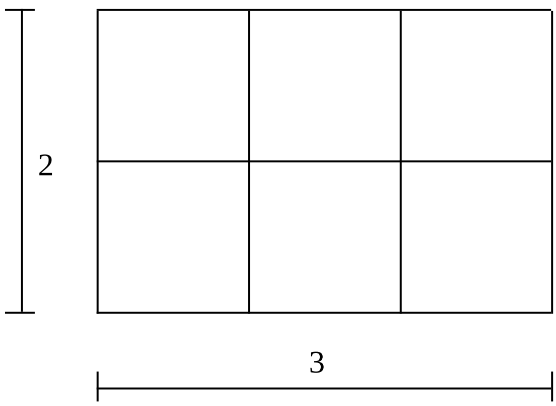


Figura V.3.1.1. Área de un rectángulo de base y longitud enteras.

El área del rectángulo superior es *pxq unidades cuadradas*, es decir, 6 u^2.

b) Si p y q son racionales, se obtiene este resultado escribiendo p y q como fracciones irreducibles $p=m/n$ y $q=m'/n'$. Los denominadores de p y q indican el número de divisiones de la unidad en sus respectivas fracciones. Si a cada división de la primera fracción se le divide en n' partes iguales, la unidad se habrá dividido en $n \cdot n'$ partes iguales. Análogamente, si a cada división de la segunda fracción se le divide en n partes iguales, la unidad también se habrá dividido en $n \cdot n'$ partes iguales. Por lo tanto, considerando como unidad de longitud una de estas partes, que llamaremos unidad pequeña, o lo que es lo mismo una unidad pequeña es $1/nn'$ unidades, resulta que la longitud de la base tendrá $p=mn'$ unidades pequeñas. Análogamente, la altura tendrá $q=m'n$ unidades pequeñas y el rectángulo tendrá $mn'm'n$ (unidades pequeñas cuadradas, cada una de lado $1/nn'$), $mn'm'n$ unidades pequeñas de superficie, o bien, $mn'm'n$ cuadraditos. Como cada unidad de superficie tiene $(n \cdot n')^2$ cuadraditos, el número de cuadrados de la unidad que contiene es $mn' \cdot m'n \cdot 1/(nn')^2 = (m/n)x(m'/n') = pxq\ u^2$, es decir, el área de un rectángulo de base y altura p y q, respectivamente.

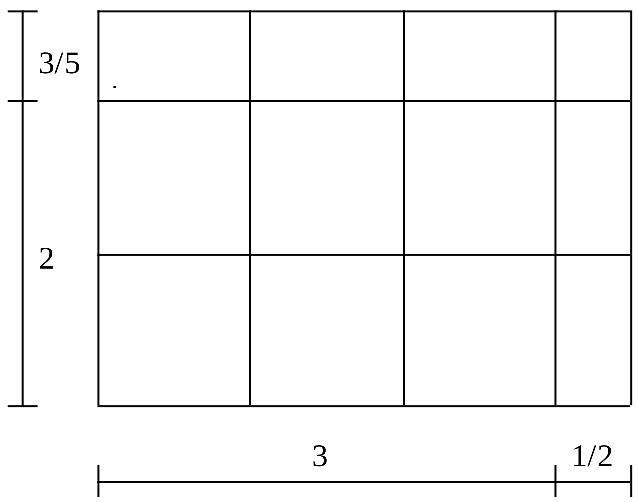


Figura V.3.1.2. Área de un rectángulo de base y longitud racionales.

Supongamos que la base mide 7/2 unidades y la altura 13/5 unidades, resultando una figura en la que, en principio, no se puede medir con unidades cuadradas (los bordes no caben en cuadrados de área unidad completos) ¿Se podría considerar otra unidad de área más pequeña de manera que mida exactamente toda la superficie (que encaje exactamente un número entero de veces)? En este caso, cuando las longitudes de la base y la altura sean números racionales, sí, como se verá a continuación y, para ello, sólo hay que considerar cuadraditos cuyo lado tenga por longitud el inverso del mínimo común múltiplo de los denominadores.

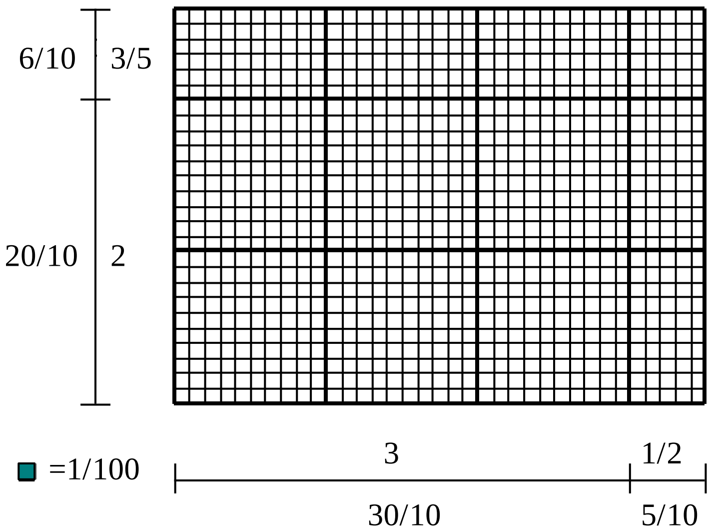


Figura V.3.1.3. Superficie rectangular formada por cuadraditos.

En este caso, si contamos cuadraditos pequeños se tiene:

$$30 \cdot 20 + 30 \cdot 6 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 6 = 910$$

Como cada cuadradito pequeño es 1/100 del cuadrado unidad, el área es:

$$910 \cdot 1 / 100 = 9{,}1 \text{ u}^2$$

Este resultado coincide con el producto de la base por la altura:

$$7/2 \cdot 13/5 = 3{,}5 \cdot 2{,}6 = 9{,}1 \text{ u}^2$$

Esto es así para cualquier rectángulo tal que las longitudes de sus lados puedan expresarse por números racionales, y el área, por tanto, es:

Área = base x altura unidades cuadradas = pxq u^2

c) Si *p* y *q* son irracionales, en este caso tales números son límites de sucesiones convergentes de números racionales y el área es el límite de las áreas formadas por el producto de las sucesiones y, al verificarse que el límite del producto es el producto de los límites, coincide con el valor *pxq.*

Consideremos las sucesiones de números racionales monótonas crecientes convergentes a p y q respectivamente:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots \rightarrow p \quad \text{y} \quad q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots \rightarrow q$$

La sucesión producto es una sucesión de números racionales cuyo límite es el producto de los límites: $p_1 \cdot q_1,\ p_2 \cdot q_2,\ p_3 \cdot q_3, \ldots, p_n \cdot q_n, \ldots \rightarrow p \cdot q$.

Por definición, el área del rectángulo, A, es la siguiente:

$$A = \text{Área} = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (p_n \cdot q_n) = \lim_{n\to\infty} p_n \cdot \lim_{n\to\infty} q_n = p \cdot q \ \ u^2$$

Considerando la sucesión $A_n = p_n \cdot q_n$ donde A_n es el área de un rectángulo de base p_n y altura q_n, se tiene una sucesión de áreas monótona creciente y acotada superiormente por su límite y, por tanto, puede definirse el límite como el área del rectángulo de partida que es el límite de las áreas de una sucesión de rectángulos cuyos lados tienen longitud racional.

Por ejemplo, supongamos que se pretende hallar el área del rectángulo de base $\sqrt{10}$ unidades y altura $\sqrt{5}$ unidades.

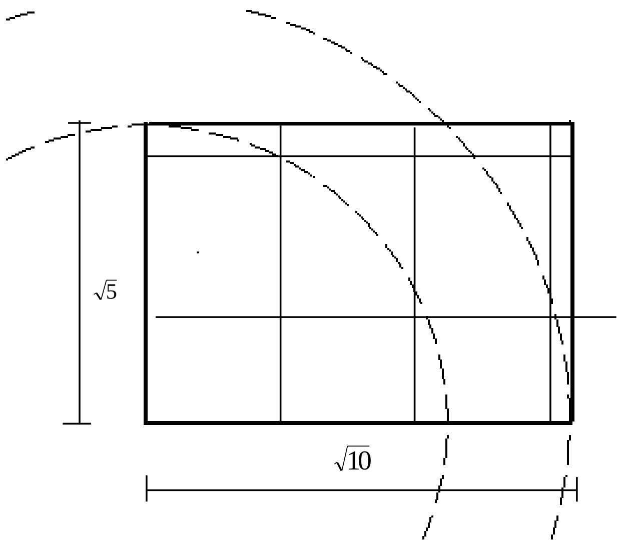


Figura V.3.1.4. Área de un rectángulo de base y longitud irracionales.

Aproximamos $\sqrt{10}$ y $\sqrt{5}$ por sucesiones monótonas crecientes.

Para la base: 3, 3’1, 3’16, 3’162, 3’1622, 3’16227, 3’162277, ... $\rightarrow \sqrt{10}$

Para la altura: 2, 2’2, 2’23, 2’236, 2’2360, 2’23606, 2’236067, ... $\rightarrow \sqrt{5}$

Y para las áreas: 3·2, 3’1·2’2, 3’16·2’23, 3’162·2’236, ...$\rightarrow \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}$

Por tanto, el área es: $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}$ u^2.

Geométricamente es evidente que el área de un triángulo es igual a la mitad de la del rectángulo con la misma base, *b*, y la misma altura, *h*, por lo que el área del triángulo viene dada por la expresión *bxh/2* u^2. Cualquier dominio plano, limitado por una o varias poligonales, puede descomponerse en triángulos, por lo que su área puede obtenerse como suma de las de éstos[19].

Se plantea la necesidad de un método más general de calcular áreas cuando investigamos el área de una figura no limitada por rectas, sino por curvas; por ejemplo, ¿cómo determinaremos el área de un disco circular o de un segmento de parábola? Esta cuestión crucial, punto de partida del cálculo integral, fue objeto de las investigaciones de *Eudoxo de Cnido*, en el siglo IV a.C., quien las calculó mediante *"el método de la exhausción"*. Con *Arquímedes* y los grandes matemáticos hasta la época de *Gauss*, podemos adoptar la "*ingenua*" actitud de que las áreas curvilíneas son entes dados intuitivamente, y que no consiste en definirlas, más bien en calcularlas. Inscribamos en el dominio otro dominio aproximado de contorno poligonal, cuya área está bien definida, y que representa aproximadamente al primero. Eligiendo otro dominio poligonal que incluya al anterior, obtenemos una aproximación mejor del dominio dado, y procediendo de esta manera podemos agotar paulatinamente toda la superficie y obtener el área buscada como límite de las áreas de una sucesión de dominios poligonales inscritos cuyo número de lados crece indefinidamente. De esta manera puede calcularse el área del círculo de radio 1; su valor numérico se designa mediante el símbolo π.

En la primera mitad del siglo XVII, aparecen obras de muchos matemáticos con intentos de aplicar métodos infinitesimales al cálculo de áreas y volúmenes. En lo referente al cálculo de áreas de figuras, hemos de decir que el universo de las figuras cuya área se deseaba calcular estaba en expansión constante. Nos encontramos ya ante el problema general de calcular el área de cualquier región encerrada por rectas y curvas.

El proceso seguido a lo largo de los siglos por los matemáticos no ha sido lineal, tal y como ha quedado constatado en la *Epistemología del Cálculo Integral*, sin embargo, los avances han ido acumulándose hasta establecer la concepción moderna del cálculo integral, una de cuyas integrales, la de Darboux es la que utilizamos en nuestro trabajo de investigación-acción con alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales.

[19] Véase el área del triángulo, por indivisibles de Cavalieri, en Boyer (1986, págs. 417-418).

V.3.2. INTRODUCCIÓN DEL NÚMERO π

A lo largo de toda la historia de la matemática, el cálculo de aproximaciones cada vez más finas de π ha sido una constante. Aproximaciones numéricas y aproximaciones gráficas, entre estas últimas se pretendía que fueran exactas con regla y compás, es decir que se construyera un segmento de longitud π. Este problema es irresoluble y lo demostró *Lindemann* en 1882, para ello lo primero que hizo fue demostrar que la ecuación $e^{ix} + 1 = 0$ no se verifica para ningún valor *x* algebraico, previamente *Euler* había demostrado que se cumplía para $x=\pi$ lo que concluye que π es trascendente (no es raíz de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros), así quedó zanjado de una vez por todas la cuadratura del círculo.

Aquí no se trata de buscar aproximaciones de π sino de establecer una definición consistente del mismo, puesto que en muchas áreas tiene que intervenir forzosamente. Se consideran dos definiciones equivalente: una en el cálculo de la longitud de la circunferencia y la otra en el cálculo del área del círculo.

V.3.2.1. Longitud de la circunferencia

El perímetro, P_n, de los polígonos regulares, viene dado por la fórmula $P_n=n\cdot l_n$, siendo *n* el número de lados y l_n la longitud de uno de ellos. Este perímetro también puede expresarse en función de una constante C_n que depende del número de lados, *n*, y del radio *r* de la circunferencia circunscrita (véase la figura V.3.2.1).

$P_n = n\cdot l_n = C_n\cdot 2\cdot r, (n = 3, 4, ...)$. Por otra parte si el ángulo central del polígono regular de *n* lados es α_n, es claro que $\alpha_n=360/n.$ Así pues, el lado, l_n, relacionado con el radio *r* de la circunferencia circunscrita viene dado por:

$l_n=2\cdot r\cdot sen(\alpha_n/2)=2\cdot r\cdot sen(360/2n)$, consecuentemente, $C_n=n\cdot sen(360/2n)$

También es fácil observar que al aumentar el número de lados del polígono inscrito en la misma circunferencia, su perímetro cada vez está más próximo a la longitud de la circunferencia circunscrita y, por tanto, la sucesión de los perímetros, P_n es monótona creciente y acotada superiormente, por ejemplo, por la longitud de la propia circunferencia circunscrita e incluso también por el perímetro del cuadrado de lado 2r. De estas dos consideraciones se deduce que la sucesión de los perímetros de los polígonos regulares de *n* lados, inscritos en la circunferencia de radio, *r*, tiene límite. Por definición tal límite es la longitud de dicha circunferencia. Es obvio que la sucesión de las constantes C_n también tiene límite. Este límite expresa la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Así pues, se tiene la siguiente definición:

π es el límite cuando n tiende a infinito de $n \cdot sen(360/2n)$.

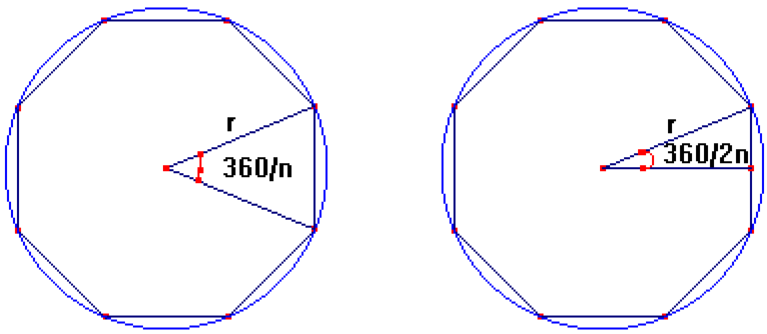


Figura V.3.2.1. Perímetro de un polígono regular de n lados.

$$P_n = n \cdot l_n = C_n \cdot 2 \cdot r = 2 \cdot r \cdot n \cdot sen(360/2n).$$

V.3.2.2. Área del círculo

Incidiendo sobre los polígonos regulares de *n* lados y recordando que el elemento básico de área es el cuadrado de lado unidad, es fácil deducir que su área, A_n es la mitad del producto de su perímetro $n \cdot l_n$ por su apotema, a_n esto es, $A_n = n \cdot l_n \cdot a_n/2$. En un polígono regular de *n* lados inscrito en una circunferencia de radio *r*, no es difícil obtener las relaciones entre el lado y el apotema en función del radio. Siendo $\alpha_n = 360/n$ y se verifican las relaciones:

$l_n = 2 \cdot r \cdot sen(\alpha_n/2)$, $a_n = r \cdot cos(\alpha_n/2)$. Sustituyendo en la igualdad anterior,

$$A_n = n \cdot 2 \cdot r \cdot sen(\alpha_n/2) \cdot r \cdot cos(\alpha_n/2)/2 = n \cdot r^2 \cdot sen(\alpha_n)/2 = n \cdot r^2 \cdot sen(360/n)/2.$$

Considerando que $K_n = (n/2) \cdot sen(360/n)$, entonces, $A_n = K_n \cdot r^2$. Al aumentar el número de lados se generan así dos sucesiones, A_n y K_n que tienen el mismo carácter. Los polígonos de áreas A_n se acercan cada vez más al área del círculo circunscrito de radio *r* y el área de dicho círculo es cota superior de A_n. Por definición el área del círculo que circunscribe a la sucesión de todos los polígonos regulares es el límite de la sucesión de las áreas de dichos polígonos.

K_n es la constante de proporcionalidad entre el área A_n y el área del cuadrado de lado r. Conviene notar que $K_{2n} = C_n$ y, por tanto, también el límite de K_n es el número π definido anteriormente puesto que la sucesión C_n coincide con una subsucesión de K_n.

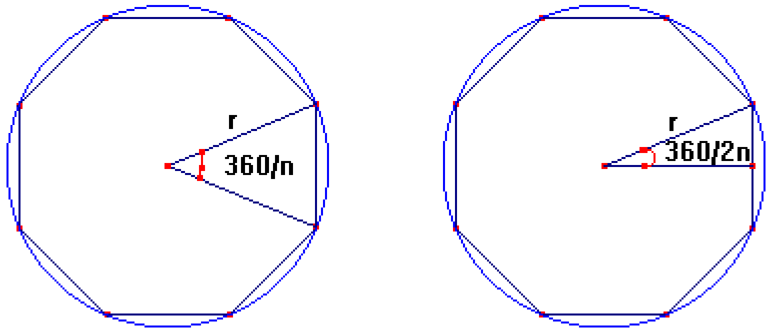


Figura V.3.2.2. Área de un polígono regular de n lados.

$$A_n = n \cdot 2 \cdot r \cdot sen(\alpha_n/2) \cdot r \cdot cos(\alpha_n/2)/2 = n \cdot r^2 \cdot sen(\alpha_n)/2 = n \cdot r^2 \cdot sen(360/n)/2.$$

V.4. INTEGRAL DEFINIDA EN MACS II

De las distintas integrales que han sido presentadas en la primera parte de este capítulo, dedicada al *Estudio Epistemológico* del área y la integral, el profesor investigador y el director de la tesis consideran que la integral de Darboux es la más apropiada para ser explicada a los estudiantes de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales.

Pensamos que la integral de Darboux es una buena elección porque en su desarrollo tiene asociadas visualizaciones por las cuales se advierte la monotonía de las sumas inferiores y superiores que confluyen en el área de la superficie que se desea calcular.

La integral de Riemann precede históricamente a la integral de Darboux; sin embargo, consideramos que aquélla es más inapropiada, para estudiantes de bachillerato, que la de Darboux por la indeterminación de los puntos intermedios asociados a una partición y por la propia definición de función integrable en el sentido Riemann.

No ignoramos la transposición didáctica actual de la integral de Riemann, también la presentamos e incluso, aunque no lo contempla el currículo de bachillerato, establecemos su equivalencia con la de Darboux.

V.4.1. CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

En la geometría elemental se deducen fórmulas para el área de algunas figuras planas, en general, basándose en las áreas del triángulo y del círculo. Hasta la aparición del Cálculo Infinitesimal fue imposible hallar de manera sistemática el área de figuras planas delimitadas por curvas definidas por funciones. Nosotros no pretendemos hacer un estudio exhaustivo de la integral definida, más bien, dar unas pinceladas donde se exponga lo esencial.

Estudiemos, por ejemplo, cómo puede calcularse el área de la superficie encerrada entre el eje de abscisas, la función positiva $y=f(x)$ y las rectas $x=a$, $x=b$ (figura adjunta).

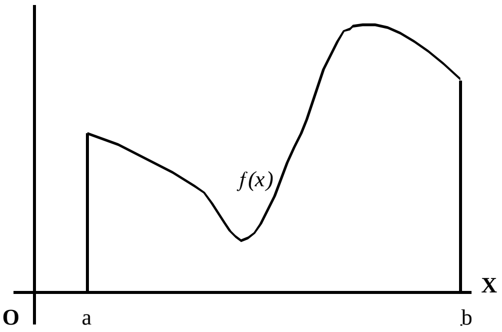


Figura V.4.1.1. Área comprendida entre la función $f(x)$, el eje OX y las rectas x=a, x=b.

Consideramos una partición del intervalo $[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, x_2\}$ y sean:

$$m_i = \text{extremo inferior } \{ f(t) \,/\, t \in [x_{i-1}, x_i] \},\ i = 1, 2 \ \text{ y}$$

$$M_i = \text{extremo superior } \{ f(t) \,/\, t \in [x_{i-1}, x_i] \},\ i = 1, 2.$$

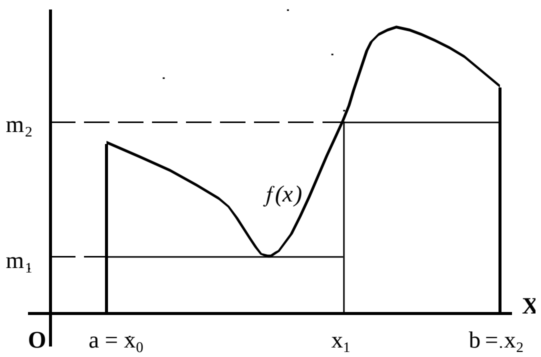


Figura V.4.1.2. Suma inferior $s(f,P)$.

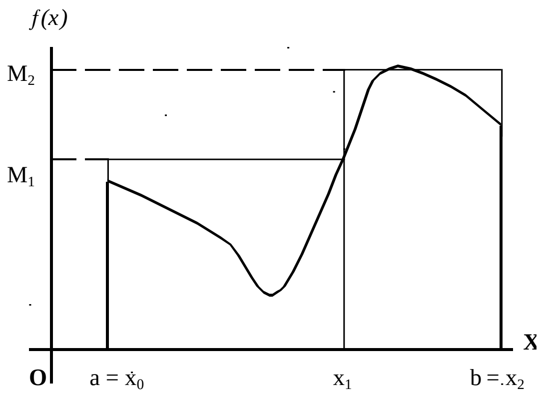


Figura V.4.1.3. Suma superior $S(f,P)$.

Definimos las siguientes sumas:

$$\text{Suma inferior}(f,\ P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1)$$

$$\text{Suma superior}(f,\ P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1)$$

Consideremos otra partición más fina *P’* = $\{x_0, x'_1, x_1, x_2\}$ y hagamos las respectivas sumas inferiores y superiores, ver figuras V.4.1.4 y V.4.1.5.

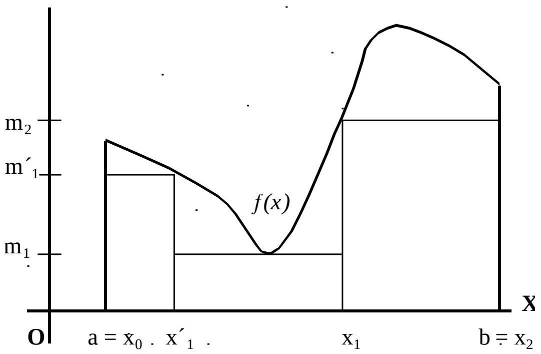


Figura V.4.1.4. Suma inferior s(ƒ,P’).

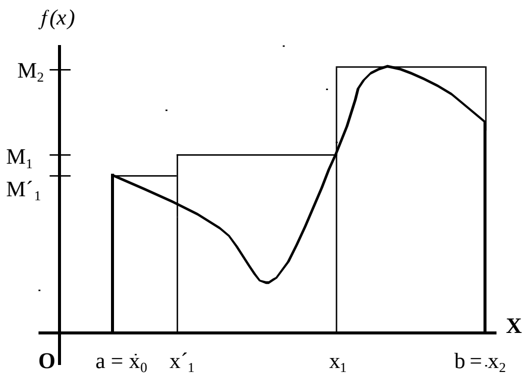


Figura V.4.1.5. Suma superior S(ƒ,P’).

$$\text{Suma inferior}(f,\ P') = m'_1(x'_1 - x_0) + m_1(x_1 - x'_1) + m_2(x_2 - x_1)$$

$$\text{Suma superior}(f,\ P') = M'_1(x'_1 - x_0) + M_1(x_1 - x'_1) + M_2(x_2 - x_1)$$

Es obvio que se cumple:

$$\text{Suma inferior}(f,\ P) \leq \text{Suma inferior}(f,\ P') \leq \text{Área}$$

$$\text{Área} \leq \text{Suma superior}(f,\ P') \leq \text{Suma superior}(f,\ P).$$

Este proceso podría repetirse y siempre ocurre que las áreas superiores de las particiones más finas disminuyen y las áreas inferiores, de las particiones más finas, aumentan. Así pues, concluimos, que para cualquier partición de [*a,b*] se verifica: *Suma inferior* $\leq$ *Área* $\leq$ *Suma superior.*

V.4.1.1. Integral de Darboux

Sea [*a,b*] un intervalo cerrado y acotado, llamamos *partición* de [*a,b*] a todo conjunto finito de la forma: $P = \{\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$. Sean *P y Q* dos particiones de [*a,b*], diremos que *P* es *más fina* que *Q* si $Q \subset P$ (*P* contiene todos los puntos de *Q* y alguno más).

Se llama diámetro de la partición *P* a: $d(P) = \text{máximo}\ \{x_i - x_{i-1}\},\ i = 1, 2, ..., n.$

Sea *ƒ(x)* una función acotada, definida en [*a,b*], sean:

$m = \text{extremo inferior}\ \{\ f(t)\ /\ t \in [a,b]\ \},\ \ M = \text{extremo superior}\ \{\ f(t)\ /\ t \in [a,b]\ \},$

m_i = *extremo inferior* { $f(t)$ / $t \in [x_{i-1},x_i]$ } = *inf* { $f(t)$ / $t \in [x_{i-1},x_i]$, *i* = 1, 2, ..., *n*

M_i = *extremo superior* { $f(t)$ / $t \in [x_{i-1},x_i]$ } = *sup*{ $f(t)$ / $t \in [x_{i-1},x_i]$ }, *i* = 1, 2, ..., *n*

Llamamos *suma inferior de Darboux y suma superior de Darboux* [$s(f,P)$ y $S(f,P)$ respectivamente], asociadas a f y a *P* en [*a,b*], a:

$$s(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + m_n(x_n - x_{n-1})$$

$$S(f,P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + M_n(x_n - x_{n-1})$$

Es obvio que se cumple: $m(b-a) \le s(f,P) \le S(f,P) \le M(b-a)$, con lo que los conjuntos formados por las *sumas inferiores y superiores* asociados a una función están acotados. Además, si *P* es una partición más fina que *Q*, también se verifica: $s(f,Q) \le s(f,P) \le S(f,P) \le S(f,Q)$.

Además, para cualquier par de particiones *P y Q* de [*a,b*], también se cumple: $s(f,P) \le S(f,Q)$ (para demostrar este aserto considérese $P \cup Q$ como refinamiento común).

Sea $f(x)$ una función acotada en el intervalo [*a,b*], se define *integral inferior de Darboux* de f en [*a,b*] al valor:

$Inf \int_a^b f(x)\,dx = Extremo\ Superior\ \{s(f,P) / P\ es\ partición\ de\ [a,b]\}$, es decir, el extremo superior o supremo de las sumas inferiores.

Sea $f(x)$ una función acotada en el intervalo [*a,b*], se define *integral superior de Darboux* de f en *[a,b]* al valor:

$Sup \int_a^b f(x)\,dx = Extremo\ Inferior\ \{S(f,P) / P\ es\ partición\ de\ [a,b]\}$, es decir, el extremo inferior o ínfimo de las sumas superiores.

Sea $f(x)$ una función acotada en [*a,b*], diremos que es ***integrable Darboux*** en [*a,b*] si las dos integrales anteriores coinciden, en cuyo caso se denota por: $\int_a^b f(x)\,dx$, y se lee *"integral entre a y b de $f(x)$ diferencial de x".*

Todas las funciones acotadas en un intervalo cerrado no son integrables según Darboux, por ejemplo, no lo es la función de Dirichlet[20].

[20] $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional\ en\ [0,4] \\ 2 & si\ x\ es\ irracional\ en\ [0,4] \end{cases}$

Teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.

Sea $f(x)$ una función acotada en [a,b]. Una condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea integrable Darboux en [a,b] es que para cualquier $\varepsilon > 0$, exista una partición P de [a,b] tal que *Suma superior(f,P)–Suma inferior(f,P)* $< \varepsilon$ (exista una partición, P, tal que la diferencia entre la suma superior e inferior se aproxima a cero más que cualquier número prefijado).

Corolario 1: Toda función continua en [a,b] es integrable Darboux.

Corolario 2: Toda función monótona en [a,b] es integrable Darboux.

No es nuestro propósito demostrar tal teorema ni los corolarios, podemos encontrar las correspondientes demostraciones en Fischer (1983).

Una vez establecida y caracterizada la integral de Darboux debemos encontrar alguna función que sea integrable, he aquí un ejemplo:

Calcular la integral, si existe, de la función $f(x)=x$, en el intervalo [0,1] (Ballvé y cols., 1996), la figura V.4.1.1.1 es su representación.

Fijamos un número $\varepsilon>0$, sabemos que existe un número natural n tal que $\frac{1}{n}<\varepsilon$, sea la partición de [0,1] $P_n = \{ 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1 \}$, donde $x_i=i/n$, $i= 1, 2, \ldots, n$

Hallemos la diferencia entre la suma superior, $S(f,P_n)$, y la suma inferior, $s(f,P_n)$.

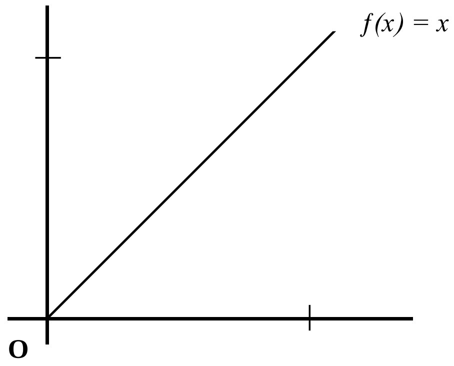


Figura V.4.1.1.1. Función f(x)=x

Obsérvese que $M_i = \sup f(x) = x_i$ y $m_i = \inf f(x) = x_{i-1}$, siendo $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) = x_1(x_1 - x_0) + x_2(x_2 - x_1) + \ldots + x_i(x_i - x_{i-1}) + \ldots + x_n(x_n - x_{n-1}) -$$
$$- x_0(x_1 - x_0) - x_1(x_2 - x_1) - \ldots - x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - \ldots - x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \ldots +(x_i - x_{i-1})^2 + \ldots +(x_n - x_{n-1})^2 = n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Por tanto, obtenemos: $S(f,P_n) - s(f,P_n) = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Lo cual nos demuestra que $f(x)$ es integrable, pues hemos encontrado la partición a la cual se refiere el teorema de caracterización.

Calculemos el valor de dicha integral, determinemos en primer lugar las sumas inferiores y superiores:

$$s(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

$$S(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

Nótese que en ambos casos se ha aplicado la suma de los *"n"* primeros términos de una progresión aritmética. Si tomamos límite cuando *n* tiende a infinito, se ve que el límite de ambas sumas es ½ = 0,5; esto nos permite asegurar que: $\int_0^1 f(x)\,dx = 1/2 = 0{,}5 \quad \textit{unidades cuadradas}$.

Las dos figuras siguientes ilustran las sumas inferior y superior para n = 4.

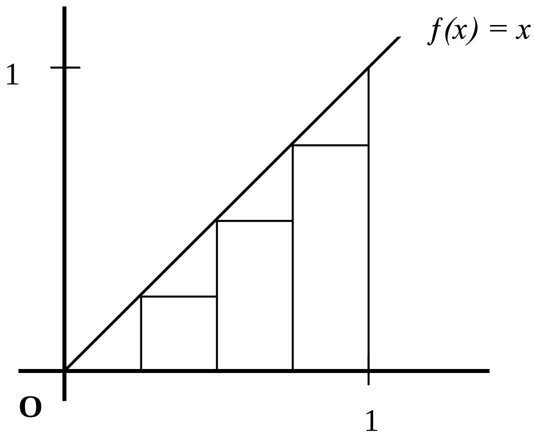


Figura V.4.1.1.2. Suma inferior: s(f,P₄)

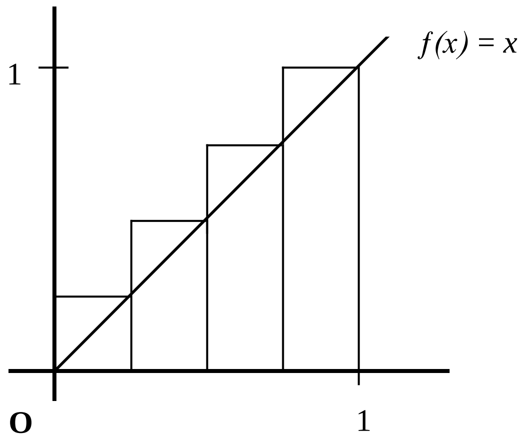


Figura V.4.1.1.3. Suma superior: S(f,P₄)

V.4.1.2. Integral de Riemann

Recordando la figura V.4.1.1, consideramos una partición del intervalo [*a,b*], la dada por, $P = \{x_0, x_1, x_2\}$; tomemos $M_i = \sup\{ f(t) \,/\, t \in [x_{i-1},x_i] \}$, $i = 1, 2$ y $m_i = \inf\{ f(t) \,/\, t \in [x_{i-1},x_i] \}$, $i = 1, 2$; como mostraban la figura V.4.1.2 (suma inferior) y la figura V.4.1.3 (suma superior).

Sea el conjunto $\{ f(t_i) \,/\, t_i \in [x_{i-1},x_i] \}$, $i = 1,2$ (t_i es un punto cualquiera del subintervalo $[x_{i-1},x_i]$), al ser $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$, para todo i, se obtiene:

Suma inferior(f,P) $\leq f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) \leq$ Suma superior(f,P). Esta circunstancia queda ilustrada en la figura inferior.

Sea [*a,b*] un intervalo cerrado y acotado, $P = \{ x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ una partición de [*a,b*].

Sea $T = \{ t_1, t_2, \ldots, t_n \}$ un conjunto de puntos intermedios asociado *a P* ($t_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i = 1, 2,..., n$). Se denomina *suma de Riemann* asociada a f, a *P* y a *T* al número:

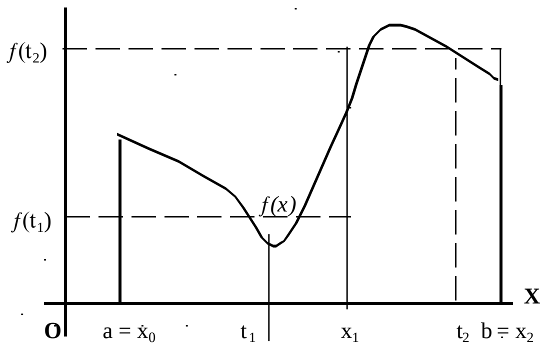


Figura V.4.1.2.1. Suma de Riemann.

$$R(f,P,T) = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$$

Concluimos que para cualquier conjunto de puntos intermedios, *T*, asociados a la partición *P* se verifica: $s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P)$.

Sea una función $f(x)$, acotada en [*a,b*], diremos que es ***integrable Riemann*** en [*a,b*] y su integral es el número real I_R si, y sólo si, se verifica la siguiente condición: *Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|I_R - R(f,P,T)| < \varepsilon$, para toda partición P que tenga diámetro menor que δ y cualquiera que sea el conjunto de puntos intermedios T de P.*

Si $f(x)$ es integrable Riemann, se suele denotar por: $\lim\limits_{d(P)\to 0} R(f,P,T) = I_R$

Teorema: Si f es integrable Riemann, el número real I_R es único.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que hay dos valores, I_1 e I_2. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que $|I_1 - R(f,P',T')| < \varepsilon/2$ para toda partición *P'* que tenga diámetro menor que δ_1 y cualquiera que sea el conjunto de puntos intermedios *T'* de *P'*. Asimismo, dado $\varepsilon > 0$, existe un valor $\delta_2 > 0$ tal que $|I_2 - R(f,P'',T'')| < \varepsilon/2$ para toda partición *P''* que tenga diámetro menor que δ_2 y cualquiera que sea el conjunto de puntos intermedios *T''* de *P''*.

Sea δ = mínimo (δ_1, δ_2) y sea *P* una partición tal que $d(P) < \delta$, entonces para cualquier conjunto de puntos intermedios *T* de *P* se tiene:

$$|I_1 - I_2| = |I_1 - R(f,P,T) + R(f,P,T) - I_2| \leq |I_1 - R(f,P,T)| + |R(f,P,T) - I_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Lo cual concluye que $I_1 = I_2$ y el teorema queda demostrado.

V.4.1.3. Integral de Darboux versus Integral de Riemann

Hemos definido dos integrales, Darboux y Riemann, e inmediatamente nos preguntamos si coincidirán ambas integrales. No es fácil dar una respuesta satisfactoria, sin embargo, he aquí la solución:

Lema[21]*:* Sea $f(x)$ acotada en [a,b]. Una condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea integrable Darboux en [a,b] es que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición P de [a,b] cuyo diámetro sea menor que δ, se verifica que *Suma superior(f,P) – Suma inferior(f,P)* $< \varepsilon$.

Teorema: Sea $f(x)$ una función acotada en [a,b], $f(x)$ es integrable Darboux si, y sólo si, es integrable Riemann y además ambas integrales coinciden.

Demostración. Supongamos que es integrable Darboux. Sabemos, por el lema anterior que dado $\varepsilon > 0$, tan pequeño como queramos, existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición P de [a,b] cuyo diámetro sea menor que δ, se verifica que: *Suma superior(f,P) – Suma inferior(f,P)* $< \varepsilon$. Además,

$$Inf\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = Sup\int_a^b f(x)\,dx.$$

De estas igualdades se derivan las siguientes desigualdades:

$$\int_a^b f(x)\,dx - s(f,P) \leq S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon,$$

$$S(f,P) - \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

y, por tanto, para cualquier conjunto de puntos intermedios, T, asociados a la partición P, se verifica: $\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$

Consecuentemente, $\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < R(f,P,T) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$,

desigualdades que confirman la integrabilidad Riemann de $f(x)$.

Supongamos, recíprocamente, que $f(x)$ es integrable Riemann, entonces: Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $I_R - \varepsilon/2 < R(f,P,T) < I_R + \varepsilon/2$ para toda partición P que tenga diámetro menor que δ y cualquiera que sea el conjunto de puntos intermedios T de P.

[21] La demostración puede encontrarse en Fischer (1983, págs. 634-636).

Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, con $d(P) < \delta$; sean $M_i = sup\ \{ f(t)\ /\ t \in [x_{i-1},x_i] \}$, para $i =1,2,...,n$ y sea $T_\alpha = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \}$ un conjunto de puntos intermedios asociado *a P* tal que $M_i - \varepsilon/(2(b-a)) < f(\alpha_i)$, $\alpha_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,...,n$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})}{2(b-a)} < \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) \text{, como } \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a\,,$$

por tanto, $Sup\int_a^b f(x)dx - \varepsilon/2 \leq S(f,P) - \varepsilon/2 < R(f,P,T_\alpha) < I_R + \varepsilon/2$.

Consecuentemente, sumando $\varepsilon/2$, se tiene: $Sup\int_a^b f(x)dx < I_R + \varepsilon$.

Para la partición anterior, *P*, sean $m_i = inf\ \{ f(t)\ /\ t \in [x_{i-1},x_i] \}$, $i = 1, 2, ..., n$ y sea $T_\beta = \{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \}$ un conjunto de puntos intermedios asociado *a P* tal que $f(\beta_i) < m_i + \varepsilon/(2(b-a))$, $\beta_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, razonando como antes se obtiene: $I_R - \varepsilon/2 < R(f,P,T_\beta) < s(f,P) + \varepsilon/2 \leq Inf\int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon/2$

Consecuentemente, restando $\varepsilon/2$, se tiene: $I_R - \varepsilon < Inf\int_a^b f(x)\,dx$

Enlazando esta expresión con la obtenida anteriormente, se tiene:

$$I_R - \varepsilon < Inf\int_a^b f(x)\,dx \leq Sup\int_a^b f(x)\,dx < I_R + \varepsilon$$

lo que implica que f es integrable Darboux y dicha integral coincide con la de Riemann (Fischer, 1983, págs. 630-640)[22].

V.4.2. VALOR NUMÉRICO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Una vez establecido el concepto de integral, debemos determinar alguna fórmula que facilite la obtención del valor numérico en el cálculo de integrales definidas ya que realizar los cálculos mediante sumas inferiores y superiores de Darboux o sumas de Riemann nos resulta demasiado artificioso y poco operativo.

[22] A partir de este momento, cualquier función integrable en el sentido Darboux o Riemann, la reconoceremos como *función integrable*.

El *Teorema Fundamental del Cálculo* (Fischer) nos da la respuesta, sin embargo, para su demostración necesitamos el *Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial*[23]. Por otro lado, en la docencia actual impartida en bachillerato se suelen considerar el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo* (Spivak) y el *Segundo Teorema Fundamental del Cálculo* reconocido como *Regla de Barrow*[24].

Los cuatro teoremas configuran el presente apartado, además, necesitamos un nuevo concepto, éste es: Diremos que la función $F(x)$ es una *primitiva* de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ si $F'(x) = f(x)$ para cada x de $[a,b]$.

V.4.2.1. Teorema del valor medio del cálculo diferencial

Si h es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un punto interior c del intervalo (a, b) tal que $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

Demostración. Por desconocimiento, de los alumnos de bachillerato de ciencias sociales del teorema de Rolle, la demostración del teorema del valor medio se omite. Hacemos la interpretación geométrica del mismo, ésta es:

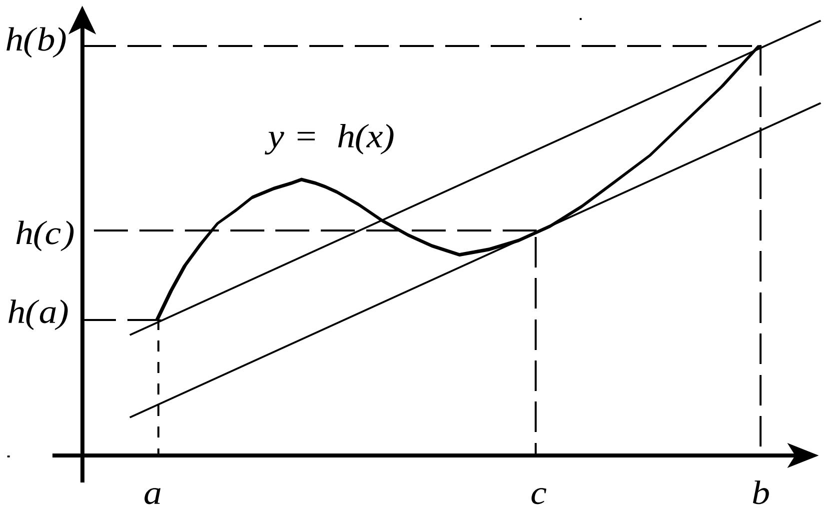


Figura V.4.2.1. Interpretación geométrica del teorema del valor medio.

[23] Este teorema también es reconocido por:

- *Teorema del valor medio.*
- *Teorema de Lagrange.*
- *Teorema de los incrementos finitos.*

[24] El Teorema Fundamental del Cálculo tiene, al menos, dos interpretaciones, nosotros hemos considerado la Fischer y la de Spivak por ser los autores de cuyos textos hemos extraído las correspondientes demostraciones. En la presente tesis doctoral puede encontrarse más información en el resumen de la investigación de Ortega (2004) ubicado en los *Antecedentes de la Integral Definida* del capítulo I.

Nótese que la recta que pasa por los puntos $A(a, h(a))$ y $B(b, h(b))$ tiene pendiente $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}$. La recta que pasa por el punto $C(c, h(c))$ es tangente a la curva en dicho punto, por tanto, su pendiente es $h'(c)$. Al ser ambas rectas paralelas sus pendientes coinciden, es decir: $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c)$, en consecuencia se obtiene: $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$, lo que concluye la interpretación geométrica.

En nuestra breve *Epistemología del Cálculo Integral* afirmábamos que Isaac Barrow, poco antes de 1669, estableció que el problema del área es inverso al problema de la tangente (Rey Pastor, 1973, pág. 447); además, sabemos cómo lo demostró geométricamente aunque no fue consciente de la importancia de su descubrimiento. En el anexo B también puede verse cómo demostraron el teorema fundamental del cálculo Newton y Cauchy; sin embargo, en este momento procede la demostración de dicho teorema mediante una transposición didáctica actual y, por tanto, si determinamos la relación existente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral habremos encontrado la expresión por la cual se la reconoce a la integral definida y ello constituirá la cima de este breve estudio teórico de la integral definida.

V.4.2.2. Teorema fundamental del cálculo (Fischer)[25]

Si $f(x)$ es integrable en [a,b] y $G(x)$ es una primitiva suya sobre este intervalo, entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

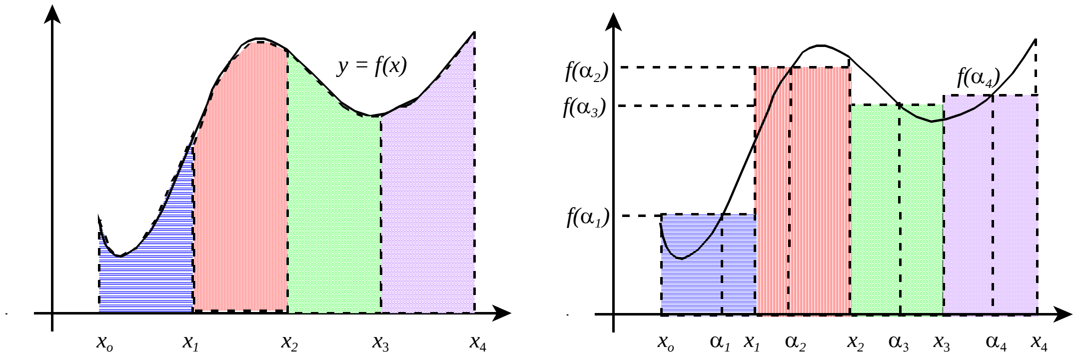
Demostración. Para facilitar la comprensión del teorema consideremos una partición de [a,b] con 5 nodos, $P = \{a=x_0, x_1, x_2, x_3, x_4=b\}$. Entonces tenemos:

$G(x_1) - G(x_0) + G(x_2) - G(x_1) + G(x_3) - G(x_2) + G(x_4) - G(x_3) = G(b) - G(a).$

Por el teorema del valor medio, en cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,...,4;$ existe un α_i, interior, tal que $G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = G'(\alpha_i)\Delta x_i = f(\alpha_i)\Delta x_i$, por

[25] Esta versión del *teorema fundamental del cálculo* ha sido facilitada por el profesor Dr. D. Tomás Ortega del Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid. La fórmula que lo determina es reconocida como *regla de Barrow*.

ser *G* una primitiva de f y, además, tal y como se muestra en las dos figuras siguientes, se verifican las igualdades:



Figuras V.4.2.2. Superficies distintas, áreas iguales.

$$G(x_1) - G(x_0) = f(\alpha_1)\Delta x_1,\ G(x_2) - G(x_1) = f(\alpha_2)\Delta x_2,$$

$$G(x_3) - G(x_2) = f(\alpha_3)\Delta x_3,\ G(x_4) - G(x_3) = f(\alpha_4)\Delta x_4. \text{ Por tanto:}$$

$$G(b) - G(a) = f(\alpha_1)\Delta x_1 + f(\alpha_2)\Delta x_2 + f(\alpha_3)\Delta x_3 + f(\alpha_4)\Delta x_4 = R(f,P,T) \quad (*)$$

Si $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ es el conjunto de puntos intermedios asociados a *P*, al estar acotadas las sumas de Riemann por las de Darboux, se obtiene:

$$s(f,P) \le R(f,P,T) \le S(f,P).$$

Por otra parte, como *P* es una partición arbitraria, deducimos:

$$Inf \int_a^b f(x)\,dx \le G(b) - G(a) \le Sup \int_a^b f(x)\,dx$$

Al ser f(x) integrable obtenemos: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ c. q. d.

La expresión $(*)$ nos permite establecer el *teorema generalizado del valor medio del cálculo integral:*

"Si $f(x)$ es integrable en [a,b] entonces para cualquier partición P del intervalo [a,b], existe un conjunto de puntos intermedios T de [a,b] asociada a P tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(\alpha_1)\Delta x_1 + f(\alpha_2)\Delta x_2 + f(\alpha_3)\Delta x_3 + \dots + f(\alpha_n)\Delta x_n$*".*

Por otro lado, si $f(x)$ es una función integrable en [*a*,*b*], para cada *x* de [*a,b*], la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ existe y se llama *integral indefinida de $f(x)$.*

Además si *f(x)* es integrable y tiene una primitiva, *G(x)*, entonces la integral indefinida es una primitiva de *f(x)*, así pues, para todo *x* del intervalo [*a,b*], se tiene: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt = G(x)-G(a)$ y, en consecuencia, dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante.

V.4.2.3. Primer teorema fundamental del cálculo (Spivak)

Sea *f(x)* integrable sobre [a,b] y se define *F* sobre [a,b] por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Si *f* es continua en c de [a,b], entonces *F* es derivable en c y $F'(c)=f(c)$.

Demostración: Supongamos que c está en (a,b); para c=a o b, los razonamientos son análogos con las derivadas laterales.

Sea h>0. Entonces: $F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f(t)dt$,

Se definen: m_h = inf {f(x): c<x<c+h}; M_h = sup {f(x): c<x<c+h}.

Se deduce: $m_h h \leq \int_c^{c+h} f(t)dt \leq M_h h$. O bien: $m_h \leq \dfrac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h$

La misma expresión se obtiene cuando h<0.

Tomando límites cuando h tiende a 0, y puesto que *f* es continua en x=c, se obtiene $F'(c)=f(c)$.

V.4.2.4. Segundo teorema fundamental del cálculo (regla de Barrow)

Sea *f* continua en [a,b] y *G* una primitiva de *f* sobre [a,b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$.

Demostración: Por el primer teorema sabemos que $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de *f*, por tanto, *F(x)=G(x)+k* y como *F(a)*=0, obtenemos *k= –G(a)*

Así pues, $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$ #

La regla de Barrow nos proporciona un método práctico y eficaz para calcular integrales definidas, pero a la vez crea la necesidad de determinar primitivas de la función integrando.

V.4.3. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Construida la integral definida y demostrado el teorema fundamental del cálculo, antes de proceder a aplicarla en algunos problemas, establecemos algunas propiedades de la misma, éstas son:

V.4.3.1. De los extremos de integración

- Si los extremos de la integral coinciden, entonces la integral se anula:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

- Si se intercambian los extremos de la integral, entonces la integral cambia de signo: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Las demostraciones de estas dos propiedades son triviales.

V.4.3.2. Linealidad y aditividad

- *Linealidad.* Si α y β son números reales y *f(x)* y *g(x)* son dos funciones integrables en [*a,b*], entonces se verifica:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

- *Aditividad.* Si *c* es un punto del intervalo [*a,b*], se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Las demostraciones de estas propiedades son triviales y la interpretación geométrica de la *aditividad* viene dada seguidamente.

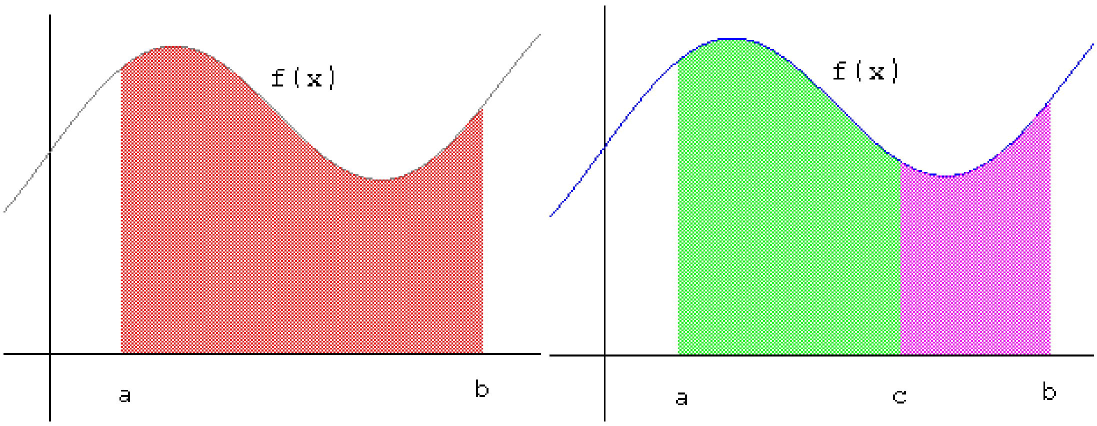


Figura V.4.3.2. Interpretación geométrica de la aditividad de la integral.

V.4.3.3. De la monotonía

- Si f y g son integrables en [*a*,*b*] y $f(x) \leq g(x)$ para todo *x* del intervalo, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Demostración: Sea la función diferencia $h(x)=g(x)-f(x)$, entonces $h(x)\geq 0$ en [a,b], si *m* es el mínimo absoluto de *h(x)* en [a,b], es evidente que $0 \leq m$.

Para cualquier partición *P* de [a,b] y la suma inferior de la función *h(x)* asociada a la partición *P* de [a,b] tenemos:

$$0 \leq m(b-a) \leq s(h,P) \leq \int_a^b h(x)dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

lo cual nos permite concluir que $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ #

En las dos figuras inferiores se han representado las funciones $f(x)$ y $g(x)$, siendo $f(x) \leq g(x)$; a la izquierda consideramos $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ y a la derecha $G(x)=\int_a^x g(t)dt$. No es difícil deducir que $F(x) \leq G(x)$.

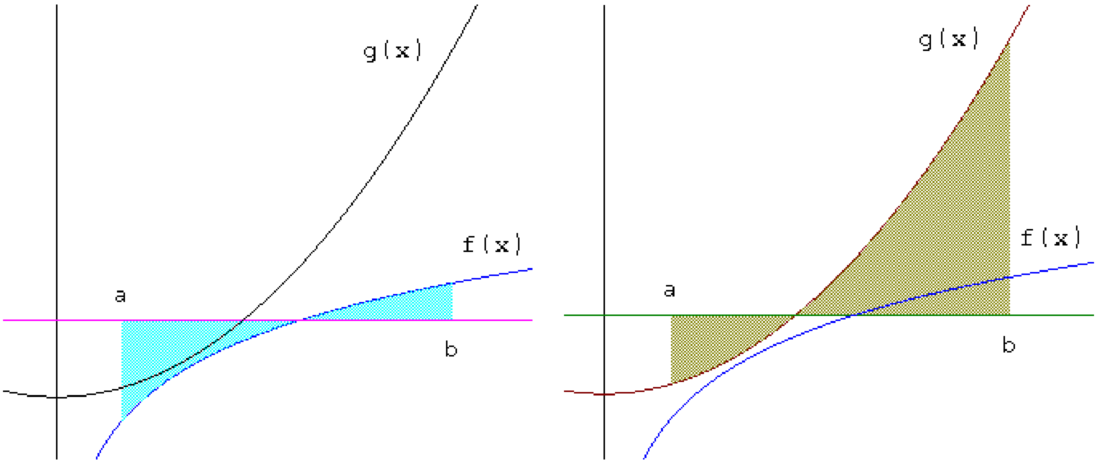


Figura V.4.3.3. Interpretación geométrica de la monotonía de la integral.

V.4.3.4. Teorema del valor medio del cálculo integral

- Si $f(x)$ es una función continua en [a,b], entonces existe un punto c del intervalo [a,b], tal que: $\int_a^b f(x)dx$ = f(c)(b-a)

Demostración: Al ser $f(x)$ continua en [a,b], sean m y M el mínimo y el máximo absolutos, respectivamente, de la función en el intervalo, por la desigualdad $m \leq f(x) \leq M$ y la propiedad de la monotonía tendremos $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$, por tanto, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ y dividiendo por $(b-a)$, obtenemos $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$ y por ser $f(x)$ continua en [a,b] alcanza todos los valores comprendidos entre su mínimo y máximo absolutos, es decir, existe un punto c de [a,b] tal que $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$, así pues, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ #

La interpretación geométrica de este importante resultado viene dada en las dos figuras inferiores.

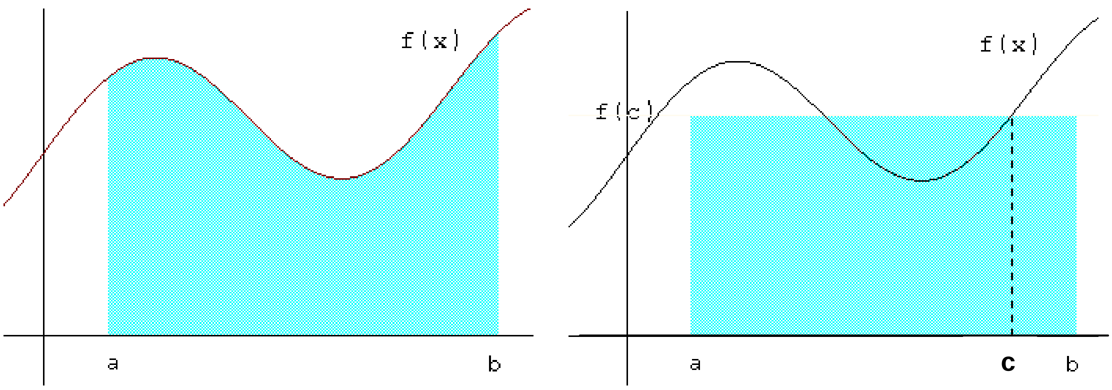


Figura V.4.3.4. Interpretación geométrica del teorema del valor medio de la integral.

V.5. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Sabemos que la regla de Barrow permite obtener el valor de la integral definida de una función si se conoce la primitiva de dicha función. Sucede que a veces es imposible escribir la primitiva de la función como una combinación finita de funciones elementales, o es difícil hallarla, por tanto es necesario investigar otros métodos de resolución de integrales definidas.

Estos métodos son “métodos numéricos” que permiten aproximar el valor de la integral definida. Estudiaremos sólo dos métodos sencillos (rectángulos y trapecios) y esperamos que el lector sepa observar la ayuda que le puede prestar el tratamiento informático en su resolución.

Consideramos que para alumnos bachilleres de ciencias sociales el método más apropiado es el de los rectángulos porque es más intuitivo gráfica y analíticamente y, además, consiste en realizar sumas de Riemann.

V.5.1. MÉTODO DE LOS RECTÁNGULOS

Sea $f(x) \geq 0$ en el intervalo [*a,b*]. Veamos cómo aproximar el área del recinto determinado por la gráfica de la función, el eje *OX* y las rectas $x=a$ y $x=b$.

Sea $P = \{a=x_0, x_1, \ldots, x_n=b\}$ una partición de [*a,b*] que divide a este intervalo en un número par de subintervalos de igual amplitud: $(b-a)/n$.

Supongamos que podemos calcular el valor de $f(x)$ en cada uno de los puntos de la partición. La idea del método consiste en considerar la partición de la forma: $Q = \{x_0, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n\}$ y aproximar el área determinada por la función $f(x)$, el eje *OX* y las rectas $x=x_i$ y $x=x_{i+2}$ $(i = 0, 2, \ldots, n-2)$ por un rectángulo de base $2(b-a)/n$ y altura $f(x_{i+1})$, tal y como muestra la figura V.5.1

La suma de las áreas de estos rectángulos nos dará una aproximación a la integral definida: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2(b-a)}{n} f(x_1) + \frac{2(b-a)}{n} f(x_3) + \ldots + \frac{2(b-a)}{n} f(x_{n-1})$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2(b-a)}{n}\left[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})\right]$$

Siendo $P = \{ x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b \}$ una partición del intervalo [*a,b*] con un número par de subintervalos iguales. Esta fórmula nos permite obtener una aproximación de la integral definida por el método de los rectángulos (el lector puede observar que son las sumas de Riemann).

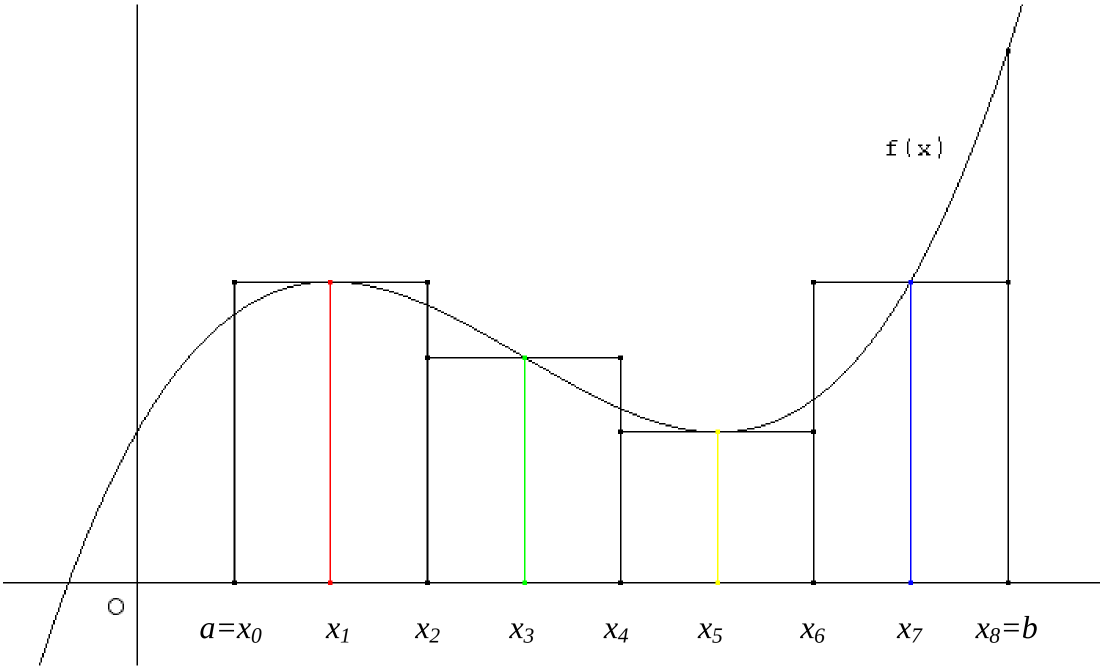


Figura V.5.1. Integración numérica. Método de los rectángulos.

Ejemplo 1. Aproximar la integral de la función $f(x)$ = sen(x)/x mediante una partición del intervalo [0,2] en diez partes iguales. Obtenemos la tabla:

	x_1	x_3	x_5	x_7	X_9
x	0,2	0,6	1	1,4	1,8
Sen(x)/x	0,9933	0,9410	0,8414	0,7038	0,5410

Tabla V.5.1.1. Valores de la función sen(x)/x en cinco nodos.

$$\int_0^2 \frac{senx}{x}dx \approx 2\cdot\frac{2}{10}\left[0{,}9933+0{,}9410+...+0{,}5410\right]=1{,}6082$$

Ejemplo 2. Aproximar la integral de la función $f(x)$ = $1/(1+x^2)$ mediante una partición del intervalo [0,1] en ocho subintervalos. Obtenemos la tabla:

	x_1	x_3	x_5	x_7
x	0,125	0,375	0,625	0,875
$1/(1+x^2)$	0,9846	0,8767	0,7191	0,5663

Tabla V.5.1.2. Valores de la función $1/(1+x^2)$ en cuatro nodos.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx 2\cdot\frac{1}{8}\left[0{,}9846+...+0{,}5663\right]=0{,}786675$$

V.5.2. MÉTODO DE LOS TRAPECIOS

Supongamos que $f(x) \geq 0$ con $x \in [a,b]$. Sea $P = \{ a=x_0, x_1, \ldots, x_n=b \}$ una partición de $[a,b]$ en n subintervalos de igual amplitud, $(b-a)/n$. Cada punto de la partición determina un punto sobre la gráfica de $f(x)$. Si unimos estos puntos por segmentos rectos obtenemos una aproximación al área mediante una suma de trapecios:

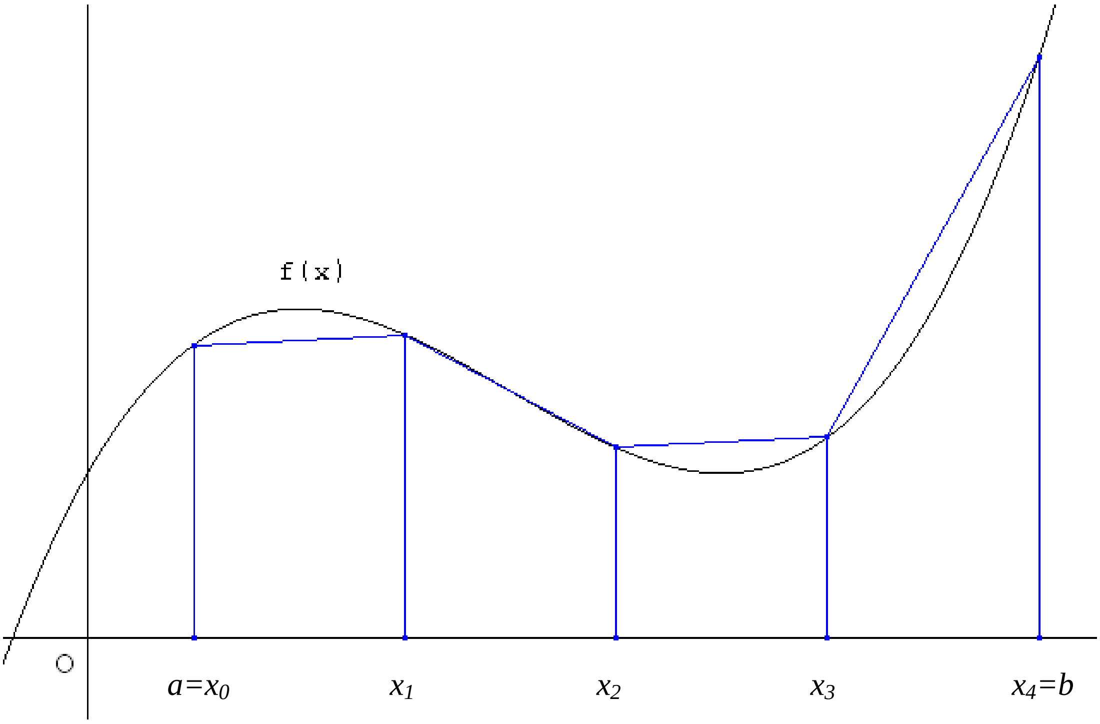


Figura V.5.2. Integración numérica. Método de los trapecios.

Sabemos que el área de un trapecio es el producto de la semisuma de las alturas por la base. En particular, un subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ determina un trapecio de área: $S_i = \dfrac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot\dfrac{b-a}{n}$

Por tanto, la suma de todos ellos es:

$$S = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot\frac{b-a}{n} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot\frac{b-a}{n} + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

Es decir:

$$S = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-2})+f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]$$

Simplificando: $S = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1)+...+f(x_{n-1})\right]$

Si *S* es una aproximación al área encerrada por *f(x),* el eje *OX* y las rectas *x=a* y *x=b.* La aproximación al área es mejor cuanto más fina sea la partición. Por tanto, podemos escribir:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1)+...+f(x_{n-1})\right]$$

Ejemplo. Como $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [arctgx]_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853$. Para calcular una nueva aproximación de π, realizamos la siguiente tabla:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1/(1+x²)	1	0,9901	0,9615	0,9174	0,8621	0,8	0,7353	0,6711	0,6098	0,5525	0,5

Tabla V.5.2. Valores de la función $1/(1+x^2)$ en once nodos.

Por tanto: S = 0,1 [(1 + 0,5)/2 + 0,9901 +…+ 0,5525] = 0,78498

Luego: π / 4 = 0,78493. Esto nos permite concluir que $\pi \approx 3{,}13992$

El error cometido en los dos métodos de integración numérica quedó determinado en el capítulo I de la presente investigación y concluimos que el de los trapecios era mejor que el de los rectángulos, aunque tampoco proporciona una aproximación óptima.

La *regla de Simpson* es un tercer método de integración numérica que mejora sustancialmente a los dos anteriores, sin embargo, solamente expresamos su fórmula sin justificación alguna puesto que excede los objetivos de esta memoria[26].

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+...+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

siendo *n* par y la amplitud de cada subintervalo *(b –a)/n.*

[26] Nótese que la secuencia de los coeficientes de Simpson se ajusta a: 1, 4, 2, 4, 2, 4, ..., 4, 2, 4, 1.

V.6. ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL

No es nuestro objetivo dar una relación innumerable de aplicaciones de la integral definida, más bien, reseñar algunos ejemplos sencillos del cálculo de áreas y después hacer una relación de otras aplicaciones de la integral definida las cuales serán desarrolladas en el anexo C que es la continuación natural de este capítulo. Las fórmulas que utilizamos no las demostramos, consideramos que su justificación puede encontrarse en los innumerables manuales de Matemáticas que proliferan por doquier.

V.6.1. ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

1.1. Si la función, dada en forma explícita, es positiva: El área entre su gráfica, el eje *OX* y las rectas *x=a* y *x=b* (figura V.6.1.1) es: $A=\int_a^b f(x)dx$.

1.2. Si la función, dada en forma explícita, cambia de signo: El área entre su gráfica, el eje de abscisas y las rectas *x=a* y *x=b* (figura V.6.1.2), viene dada por: $A=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$

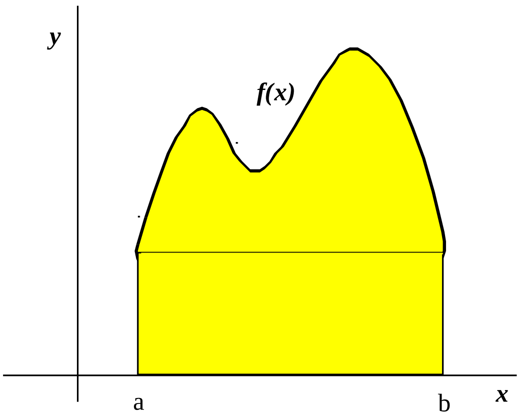


Figura V.6.1.1. La función es positiva.

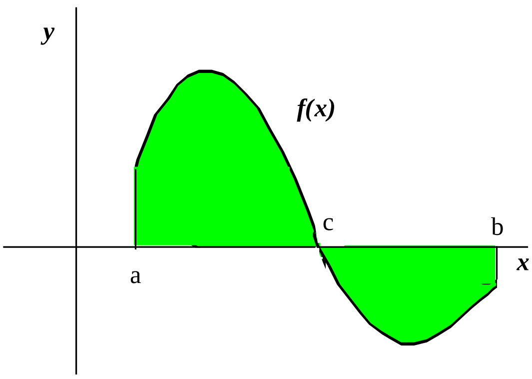
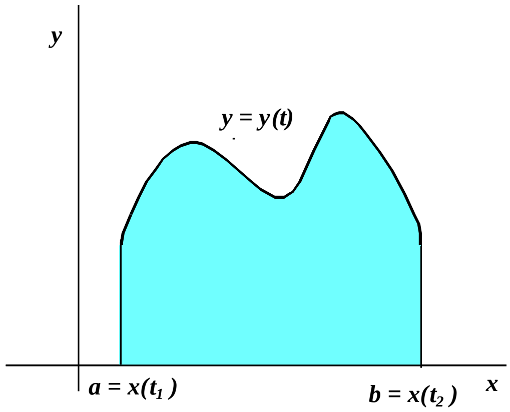


Figura V.6.1.2. La función cambia de signo.

1.3. Si la función está expresada en paramétricas, donde *x=x(t)* e *y=y(t)*. El área encerrada por la gráfica de la curva, el eje *OX* y las rectas verticales cuyas abscisas son $a=x(t_1)$ y $b=x(t_2)$ (figura V.6.1.3) es: $A=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$

1.4. Si la función está expresada en forma polar $\rho = \rho(\theta)$. El área encerrada por la gráfica entre los argumentos $\alpha \ y \ \beta; 0 < \alpha < \beta < 2\pi$ (figura V.6.1.4) es: $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$.



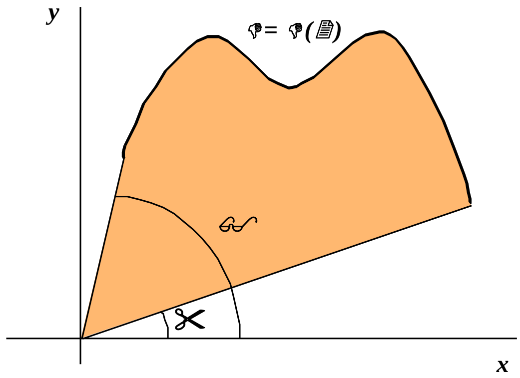


Figura V.6.1.3. La función está en paramétricas. *Figura V.6.1.4. La función está en polares.*

1.5. El área encerrada entre dos curvas definidas en forma explícita (figura V.6.1.5) viene dada por la expresión[27]: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

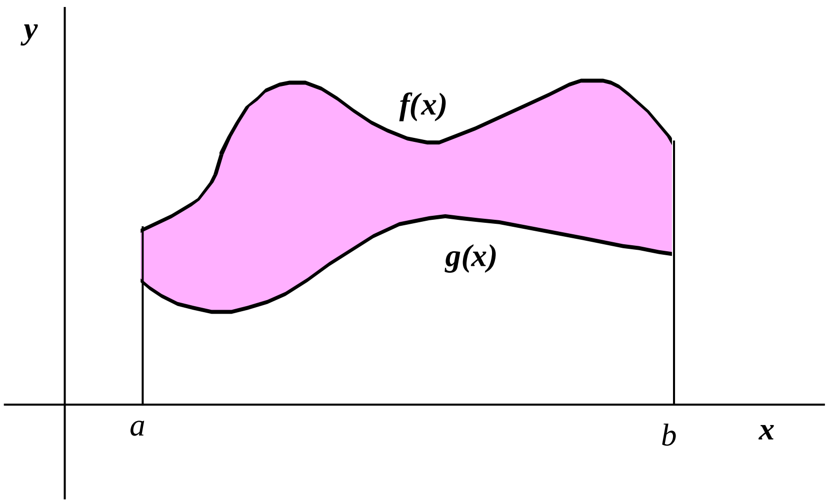


Figura V.6.1.5. Área encerrada entre dos curvas.

[27] Además de la expresión señalada, existe un algoritmo que se detallará en los capítulos posteriores en los cuales se redactarán las prácticas con los alumnos en los ciclos de la investigación.

Ejemplo 1: Calcule la siguientes áreas:

1.1. La limitada por la parábola $y=x^2$, el eje *OX* y las rectas $x=0$ y $x=2$.

1.2. La limitada por la función $y=senx$ entre $x=0$ y $x=2\pi$.

1.3. La encerrada por la elipse de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\,sen(t) \end{cases}$.

1.4. La encerrada por la lemniscata de Bernoulli cuya ecuación polar es: $\rho(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}$.

1.5. La encerrada entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

Solución:

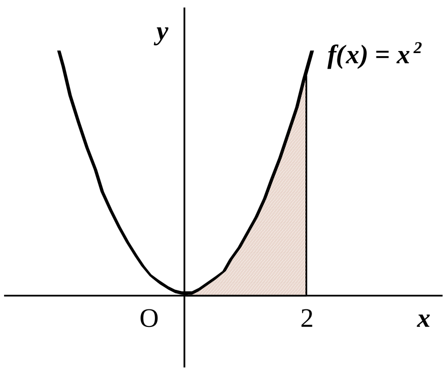


Figura V.6.1.6. Parábola $y=x^2$.

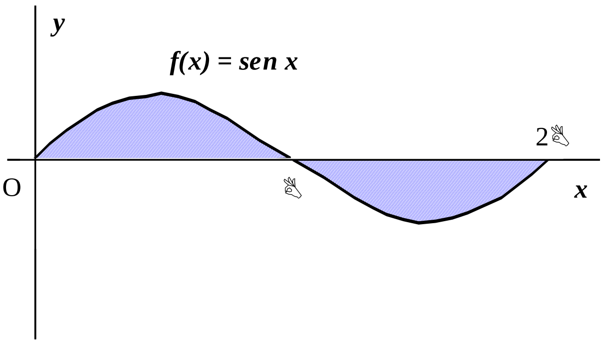


Figura V.6.1.7. Función seno.

1.1. $A = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}u^2$

1.2. $A = \int_0^{\pi} sen\,x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} sen\,x\,dx = 2\int_0^{\pi} sen\,x\,dx = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 2[-\cos\pi + \cos 0] = 4u^2$

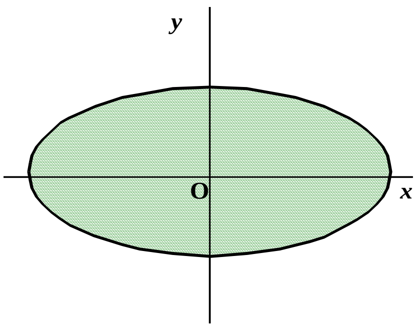


Figura V.6.1.8. Elipse.

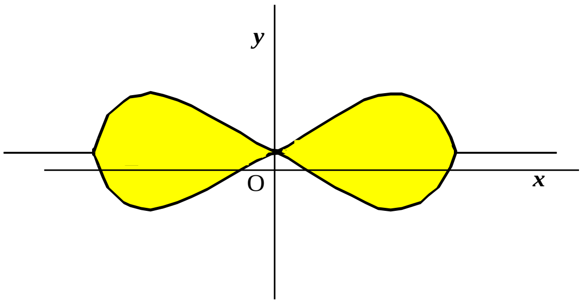


Figura V.6.1.9. Lemniscata de Bernoulli.

1.3. El área de la elipse es cuatro veces la de la parte superior derecha:

$$A = 4\int_{\pi/2}^{0} y(t)x'(t)dt = 4\int_{\pi/2}^{0}(bsent)(-asent)dt = -4ab\int_{\pi/2}^{0} sen^2 tdt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 4ab\left[\frac{t}{2}-\frac{sen2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = 4ab\frac{\pi}{4} = \pi ab \quad u^2$$

1.4. El área de la lemniscata de Bernoulli[28] es cuatro veces la de la parte superior derecha, esto es:

$$A = 4\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho^2(\theta)d\theta = 2\int_0^{\pi/4} a^2\cos(2\theta)d\theta = a^2\left[sen(2\theta)\right]_0^{\pi/4} = a^2 \ u^2$$

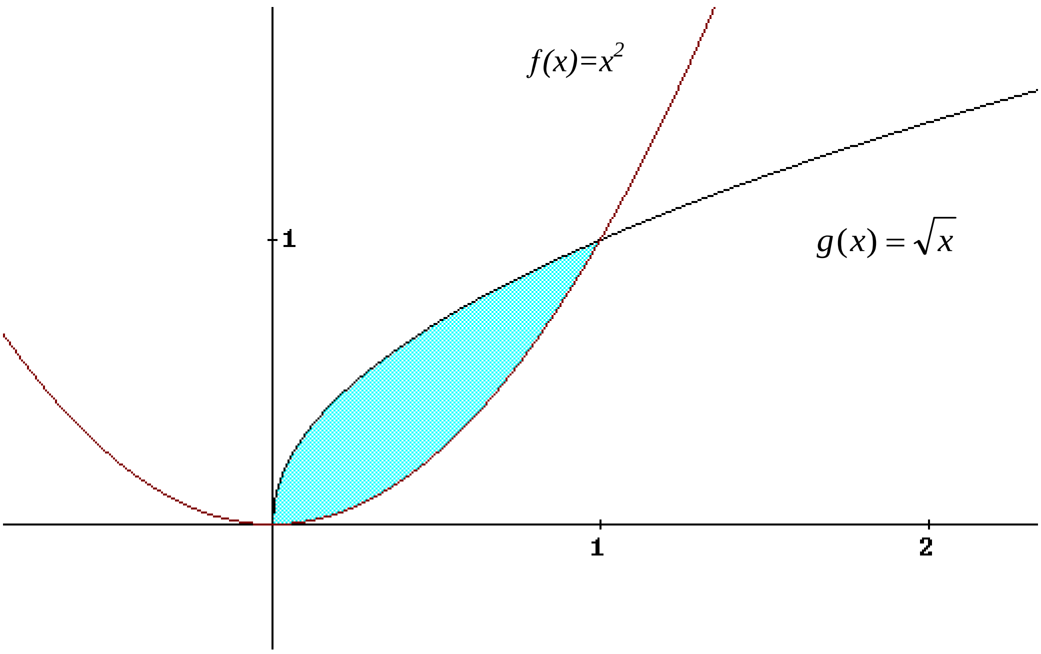


Figura V.6.1.10. Superficie encerrada entre dos curvas.

1.5. Los puntos de corte de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$ son $a=0$ y $b=1$; y el área pedida es:

$$A = \int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx = \int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}u^2$$

[28] Burgos, J. (1995). *Cálculo infinitesimal de una variable*. Madrid: McGraw-Hill. P. 402.

V.6.2. OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Consideramos que este capítulo tiene una extensión considerable, por tanto, pensamos que en lugar de desarrollar una serie de aplicaciones de la integral definida, es más aconsejable establecer en este punto la relación de las mismas y remitir al lector al anexo C. He aquí las aplicaciones de la integral definida que hemos considerado en esta memoria:

- Longitud de un arco de curva.
- Cálculo de volúmenes.
- Cálculo de áreas de superficies de revolución.
- La cicloide.
- Integrales impropias.
- Espacio, velocidad, aceleración y tiempo.
- Trabajo.
- Centro de gravedad.
- Fuerza ejercida por un fluido.
- Ley de enfriamiento de Newton.
- Crecimiento exponencial y logístico.
- Economía.
- Probabilidad.
- Ciencias Sociales.

Los problemas que hemos abordado son diversos y con ello pretendemos dar una pequeñísima muestra del potencial que encierra el cálculo integral; además, el campo de su utilización está en constante expansión en todas las ciencias experimentales y aplicadas y, sobre todo desde mediados del siglo pasado, está adquiriendo un protagonismo destacado en las ciencias sociales.

CAPÍTULO VI: FOCOS, CICLOS Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN Y CATEGORÍAS DE ANÁLISIS................*279*

VI.1. INTRODUCCIÓN..279

VI.2. FOCOS DE LA INVESTIGACIÓN..279

VI.2.1. FOCO 1: PRECONCEPTO..281

VI.2.2. FOCO 2: CONCEPTO..282

VI.2.3. FOCO 3: APLICACIONES..283

VI.3. CICLOS Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN..........................285

VI.3.1. EL PROBLEMA Y LA MUESTRA...285

VI.3.2. CICLO DE EXPLORACIÓN (I, CURSO 2003-2004)..........................286

VI.3.3. CICLOS DE CONFIRMACIÓN (II y III)..287

VI.3.4. CICLOS DE CONSOLIDACIÓN (IV y V)..290

VI.3.5. CICLO DE CIERRE (VI, CURSO 2008-2009)...................................293

VI.3.6. REFLEXIÓN..294

VI.4. CATEGORÍAS..295

VI.4.1. INTRODUCCIÓN..295

VI.4.2. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA...................296

VI.4.3. REFLEXIÓN..303

CAPÍTULO VI: FOCOS, CICLOS Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN Y CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

VI.1. INTRODUCCIÓN

Delimitado el problema de la investigación, *Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías* (capítulo I), establecidos los marcos metodológico cualitativo *de investigación-acción* (capítulo II) y el teórico de los *actos de comprensión de Sierpinska* (capítulo III), estudiado el *tratamiento curricular* del concepto (capítulo IV y anexo A) y realizado el *estudio epistemológico* y elaborada la correspondiente *unidad didáctica* (capítulo V y anexos B y C); a partir de este momento ponemos en práctica la secuencia de la enseñanza y el aprendizaje del área y la integral definida.

En los siguientes apartados explicitamos los focos, los ciclos y fases de la investigación y las categorías de análisis (contenido matemático, comprensión matemática, comprensión práctica con lápiz y papel y comprensión práctica con *DERIVE*).

VI.2. FOCOS DE LA INVESTIGACIÓN

Analizado el desarrollo y exposición del área y la integral en diferentes textos de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II (capítulo IV y anexo A), el profesor investigador, con las orientaciones precisas del director de la tesis, diseñó una Unidad Didáctica y una Secuencia Didáctica que se dividió en tres partes claramente diferenciadas: La primera (Foco 1) conocida como preconcepto consistente en una aproximación al problema del área tanto a nivel histórico como la determinación de la misma para figuras poligonales, incluso quedó establecida el área del círculo. La segunda (Foco 2) hace hincapié en el concepto de integral de Darboux, teorema fundamental del cálculo, regla de Barrow y las propiedades de la integral definida. La tercera y última secuencia (Foco 3) recoge las aplicaciones más sencillas de la integral definida: área encerrada entre la gráfica de una curva dada por la función $y=f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$; área encerrada entre dos curvas; otras aplicaciones de la integral y aplicaciones del cálculo integral por medio de *software* matemático específico. En esta investigación se ha utilizado el programa de cálculo simbólico *DERIVE* y, además, los estudiantes ejercitan el cálculo mental calculando primitivas elementales.

No pretendemos relacionar todos los conceptos de análisis matemático de MACS II, sin embargo, creemos conveniente determinar la relación existente entre el concepto objeto de estudio (integral definida) en el presente trabajo y los que de una u otra forma tienen una relación más directa con él y así puede verse en la siguiente figura:

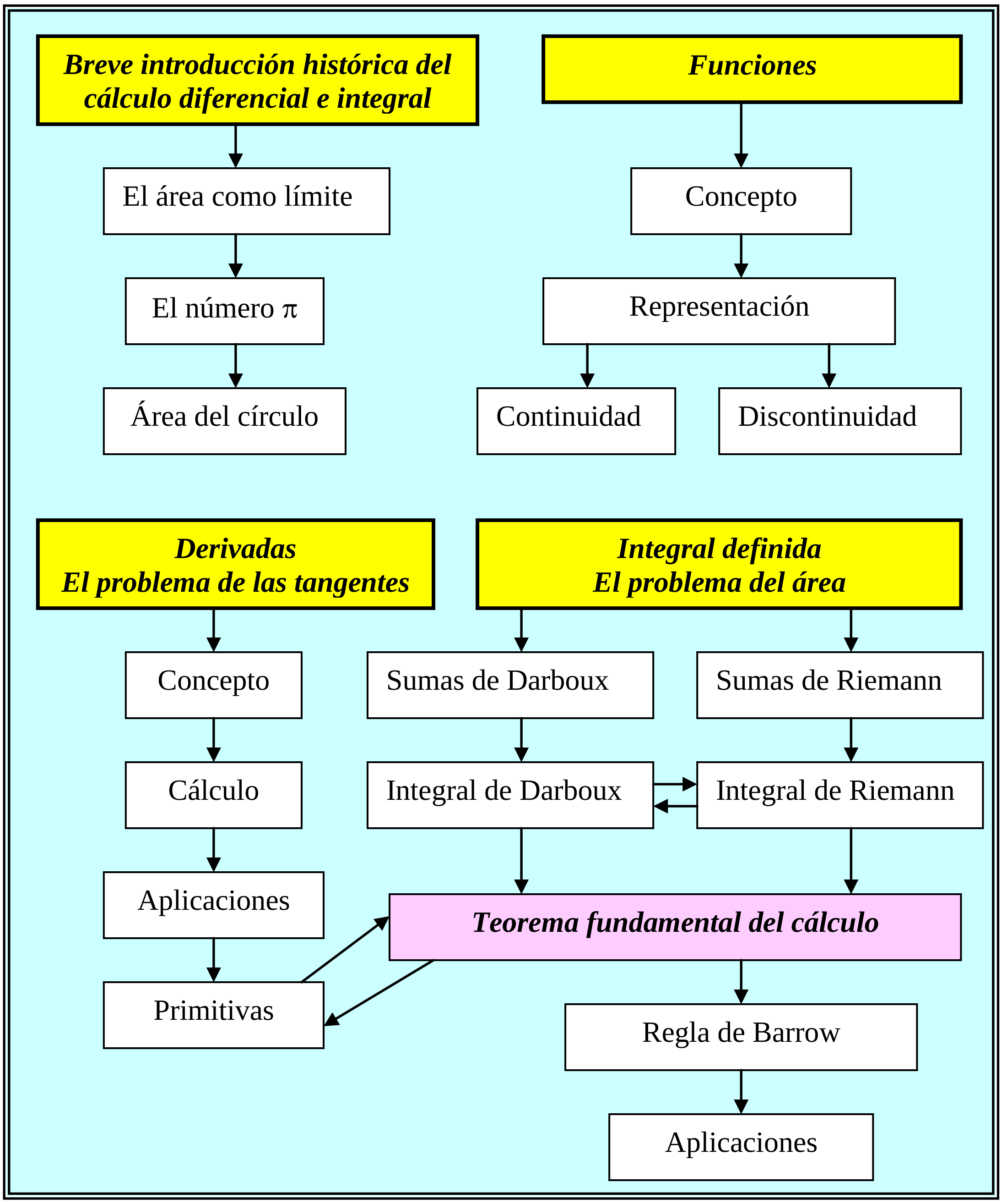


Figura VI.1.1. Conceptos de Análisis Matemático relacionados con la Integral.

VI.2.1. FOCO 1: PRECONCEPTO

Tal y como se comentó anteriormente, en este punto nos aproximamos al concepto de área de una superficie plana, para ello, en primer lugar, hacemos una breve introducción histórica del área y la integral definida. Definimos la *unidad de área* como *un cuadrado de lado la unidad.* Si tomamos un rectángulo cuya base y altura tienen longitudes enteras, entonces, su área es el producto de su base por su altura y, además es un número entero de unidades de área. Después de muchos años de estudio por parte de los alumnos, éstos tienen perfectamente asimilada la fórmula clásica (área de un rectángulo es el producto de la base por la altura); sin embargo, muchos de ellos no pueden o no saben justificar por qué surge la misma cuando las longitudes de los lados son racionales, bajo las indicaciones del director de la investigación y del profesor-investigador aceptan y pensamos que la mayoría comprende que al escribir las longitudes de los lados como fracciones irreducibles cada unidad de área se subdivide en un número entero de unidades de área menores y con una simple operación algebraica se vuelve a justificar la fórmula conocida por todos. Si los lados tienen longitud irracional, aunque siguen aceptando el área del rectángulo como la base por la altura del mismo, comprenden que ya no se pueden utilizar los dos procedimientos anteriores y aunque no se menciona la densidad de los racionales en la recta real, sí aceptan que un número irracional es el límite de una sucesión creciente de números racionales y, por el álgebra de los límites, se vuelve a obtener la fórmula perseguida desde el principio.

Calcular el área de un triángulo es elemental, basta considerar ésta como la mitad de la del rectángulo cuya base y altura coinciden con la del triángulo objeto de estudio. Para un polígono regular, tampoco entraña dificultad, coincide con el producto del semiperímetro del mismo por su apotema; asimismo, para los polígonos mixtilíneos es fácil deducir su área pues basta con descomponer dichos polígonos como suma de rectángulos, triángulos y polígonos regulares. Esto permite recordar a los estudiantes resultados de cursos anteriores y, a su vez, adquirir y consolidar el concepto de área estudiado a través de los cursos de Primaria, ESO y Bachillerato.

Aunque, los estudiantes, están familiarizados con el área del círculo, se constata que es muy difícil por parte de los alumnos justificar el valor del número π puesto que lo consideran como algo valorado en *“tres catorce”*, no se plantean otro valor y, en todo caso, al insistir el profesor en determinar y justificar su valor, recurren a la calculadora. Por medio de polígonos inscritos y razones trigonométricas se calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo, además ciertas sucesiones tienden a una constante que denominamos π, aceptan los procedimientos, sin embargo, da la impresión de no comprenderlos e incluso ser innecesarios pues han interiorizado la longitud de la circunferencia y el área del círculo de tal forma que para ellos son sendos axiomas (razonan *“porque sí”*).

A partir de este momento es imposible obtener el área exacta de polígonos curvilíneos, todos somos conscientes de la necesidad de emplear nuevos procedimientos para determinar los valores que pretendemos calcular, y es en estos momentos cuando se considera necesario formalizar una nueva teoría matemática que amplíe y generalice el concepto de área, es decir, corresponde la formalización de la integral definida.

VI.2.2. FOCO 2: CONCEPTO

Ahora es el momento de mostrar el concepto de Integral de Darboux, para ello se introduce por medio de las sumas inferiores y superiores de Darboux, este procedimiento resulta comprensible a los estudiantes, más complicado es asimilar la integral inferior o extremo superior de las sumas inferiores y la integral superior o extremo inferior de las sumas superiores; la coincidencia de la integral inferior y superior hace que se defina la integral de Darboux como el valor común de las anteriores (como es natural, la función *y=ƒ(x)*, es continua y positiva y se desea calcular el área comprendida entre dicha función, el eje de abscisas y las rectas *x=a* y *x=b*). Aceptan de buen grado que coincidan las integrales inferior y superior, les resulta difícil comprender que existen funciones cuyas integrales inferior y superior son distintas, considérese la función de Dirichlet[1], y consecuentemente no son integrables Darboux. Las sumas de Riemann al estar comprendidas entre las de Darboux, no les son en modo alguno muy complicadas[2], por tanto, ambas integrales no las consideran equivalentes sino iguales. Los estudiantes aceptan sin dificultad que una función continua sea integrable, el teorema de

[1] La función de Dirichlet viene dada por: $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in Q \cap [0,1] \\ 0 & si \quad x \in I \cap [0,1] \end{cases}$

[2] Se ha constatado que las sumas de Riemann, a los estudiantes, les resultan más imprecisas que las de Darboux.

caracterización de las funciones integrables consideran que es demasiado artificioso y desconfían cuando se afirma que existen funciones discontinuas y al mismo tiempo integrables.

Los estudiantes se sienten sorprendidos con el teorema fundamental del cálculo integral[3], su enunciado les produce cierta perplejidad y la demostración del mismo por medio del teorema de los incrementos finitos o del valor medio del cálculo diferencial les desborda puesto que muchos de ellos desconocen tal teorema, quedan admirados que en este punto se pueda relacionar el cálculo diferencial con el cálculo integral. La regla de Barrow hace que intuyan un final práctico a la carga teórica sobre la que se apoya el objetivo primero consistente en el cálculo de áreas no elementales. Las propiedades de la integral resultan evidentes, pues su interpretación gráfica es de muy fácil comprensión.

VI.2.3. FOCO 3: APLICACIONES

Tal y como se comentó en el foco anterior al relacionar el cálculo diferencial con el cálculo integral, nuestro primer objetivo es el cálculo de integrales indefinidas, no damos ningún método de integración[4], nos basta con las integrales inmediatas, lo cual hace que recurramos infinidad de veces a los conceptos de derivada y primitiva, ni siquiera trabajamos con intensidad la integración por cambio de variable, eso sí, hacemos una fuerte apuesta del cálculo de primitivas mediante el cálculo mental. Las dificultades encontradas son importantes y los progresos de los alumnos varían de forma sustancial, la decepción queda patente al calcular las primitivas de una función, el cálculo de primitivas no deja de ser un obstáculo importante para poder aplicar el teorema fundamental del cálculo integral.

Otro aspecto digno de destacar es la facilidad con la que comprenden el algoritmo del cálculo de áreas comprendidas entre una función positiva, el eje de abscisas y dos rectas verticales. Resulta paradójico, a los estudiantes, que el cálculo del área determinada por la función $f(x)=x^3$, el eje de abscisas, las rectas $x=-2$ y $x=2$ les dé valor “0”, naturalmente, deben comprender que esta función no es positiva por lo que será necesario

---

[3] En el presente trabajo consideramos el teorema fundamental del cálculo integral a:

Sea F(x) una primitiva de f(x) en el intervalo [a,b], entonces: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

[4] En algunos momentos puntuales se ha resuelto algún ejercicio por cambio de variable.

determinar los puntos de corte de ésta con el eje de abscisas o en su defecto considerar el valor absoluto de la función e incluso recurrir a la simetría de la función respecto del origen (función impar). Ahora es el momento para constatar que la integral definida no es el área. El cálculo del área comprendida entre dos curvas no les es complicado en exceso, siempre y cuando se realice el algoritmo propuesto por la mayoría de los libros de texto.

A los estudiantes les resultan sorprendentes a la vez que interesantes, otras aplicaciones de la integral a las Ciencias Sociales, puesto que empiezan a considerar las Matemáticas como una herramienta imprescindible para el desarrollo de otras disciplinas científicas.

Se calculan primitivas de funciones polinómicas, potenciales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y racionales, todas ellas inmediatas. En todos los ciclos de los que se compone nuestra investigación calcularemos primitivas elementales mediante el cálculo mental y, excepcionalmente, lo combinaremos con ejercicios muy sencillos de integración por cambio de variable; ante la dificultad del cálculo de primitivas, los estudiantes son conscientes que deben esforzarse y el profesor les hace ver que la integral indefinida abarca un campo muy amplio y requiere estudios más avanzados.

Asimismo, determinar áreas por medio del teorema fundamental del cálculo integral es inviable si no somos capaces de calcular una primitiva, ello permite percibir a los estudiantes de la importancia de las sumas de Darboux y las de Riemann, del teorema de caracterización de las funciones integrables como herramientas necesarias para el desarrollo de la integración numérica ya sea por procedimientos tan elementales como el de los rectángulos y el de los trapecios. Posteriormente, en la sección de Estadística y Probabilidad, se hallará la integral por medio de la Normal, se calcularán probabilidades y se utilizará en el contraste de hipótesis.

Por último, la laboriosidad de los cálculos, el tiempo que se exige para resolver problemas cuyos algoritmos de resolución son elementales y, sin embargo, los procedimientos son demasiado monótonos, hace que tanto el director de la investigación, el profesor investigador y los estudiantes sean conscientes de la ayuda que supone el empleo de las Nuevas Tecnologías puesto que permite dedicar los mayores esfuerzos a la comprensión de los conceptos fundamentales del análisis matemático y no nos reste tiempo en cálculos pesados, tediosos e incluso intranscendentes.

VI.3. CICLOS Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Resumimos, a partir de este momento, el desarrollo de la investigación y, según el esquema de la metodología de investigación-acción, comenzamos con el planteamiento del problema y seguimos con los seis ciclos que componen nuestra investigación, explicando brevemente cada una de sus fases: planificación, acción, análisis y reflexión.

VI.3.1. EL PROBLEMA Y LA MUESTRA

Nuestro problema está motivado por el interés del investigador y del director de la investigación por indagar en las dificultades de la enseñanza del profesor y el aprendizaje de los alumnos de Bachillerato (sobre todo de los de la opción de Ciencias Sociales) por la comprensión de ciertos conceptos que en Análisis Matemático se agrupan bajo el título de Integral Definida[5].

La presente investigación ha sido larga en el tiempo, consta de seis ciclos, y las muestras de cada uno de ellos están tomadas de un único grupo de estudiantes de segundo curso de bachillerato de la modalidad de ciencias sociales del Instituto de Enseñanza Secundaria "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos, siendo la muestra de, aproximadamente, veinte alumnos por ciclo, es decir, ciento veinte alumnos han participado en la investigación. El número exacto de los estudiantes participantes en cada uno de los ciclos de la investigación se consignará en los siguientes capítulos de la presente memoria en los cuales se redactará la "acción práctica" de la Integral Definida, el Cálculo Mental y las Nuevas Tecnologías.

En los siguientes epígrafes hacemos un breve resumen de cada ciclo y de las fases de cada uno de ellos, en los capítulos posteriores de esta tesis analizaremos con todo rigor cada ciclo y sus fases y aplicaremos el marco metodológico cualitativo en su modalidad de investigación-acción (capítulo II) y el marco teórico basándonos en los actos de comprensión de Sierpinska y los obstáculos y/o dificultades asociados a los mismos (capítulo III). Por el gran número de ciclos realizados y atendiendo a las características de los mismos, los hemos agrupado en: ciclo de exploración (ciclo I, capítulo VII), ciclos de confirmación (ciclos II y III, capítulo VIII), ciclos de consolidación (ciclos IV y V, capítulo IX) y ciclo de cierre (ciclo VI, capítulo X); además, la memoria de las nuevas tecnologías estará en el capítulo XI.

[5] Véase en el capítulo I: El problema de investigación y delimitación del problema de investigación.

VI.3.2. CICLO DE EXPLORACIÓN (I, CURSO 2003-2004)

Planificación. Durante este curso se elaboraron distintos materiales, según el currículo establecido y la programación del departamento de matemáticas. Las *categorías de contenido matemático relativas al concepto de integral definida* quedaron determinadas definitivamente y, además, nos sirvieron para analizar el tratamiento del área y la integral definida dado en diferentes libros de texto de MACS II (capítulo IV y anexo A). Específico de este ciclo fue el establecimiento, por primera vez, de algunas *categorías de comprensión matemática relativas al concepto de integral definida.*

Los dos primeros trimestres del curso que nos ocupa se dedicaron a la elaboración de la unidad didáctica *Área e Integral Definida* y del *cuadernillo de actividades de los alumnos*, estos materiales fueron utilizados durante el último mes del curso.

Acción. La puesta en práctica de la unidad didáctica se realizó a partir del día 12 de mayo de 2004 y hasta la finalización del curso lectivo para segundo curso de bachillerato, 28 de mayo, posteriormente se detallará la secuencia de los hechos.

Análisis. En este primer ciclo de la investigación se ha trabajado con el material que proporcionaban las tareas, las pruebas escritas de los alumnos y el cuaderno del profesor; debemos constatar que no hubo grabaciones.

Reflexión. Durante este ciclo se validaron once categorías de comprensión matemática, sin embargo, debemos puntualizar una serie de matizaciones las cuales nos servirán para desarrollar según el modelo de investigación acción las futuras actuaciones, éstas son:

a) No es aconsejable abordar el cálculo integral al final del curso puesto que los alumnos se encuentran saturados y además tienen muchas pruebas de las diferentes materias puesto que la evaluación final está muy próxima.

b) La comprensión del pretest no fue del todo satisfactoria por lo que se deberá rediseñar y, como complemento a la explicación del profesor, deberá entregarse en soporte escrito.

c) La simbología matemática es demasiado complicada para los estudiantes de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales, deberemos hacerla más comprensible para que les resulte más fácil la adquisición del concepto integral definida.

d) No se ha trabajado con las nuevas tecnologías y, según quedó constatado en el marco teórico y en los objetivos de este trabajo, deben utilizarse las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida, por tanto, posteriormente habrá que diseñar alguna actividad que utilice *software* matemático específico para cumplir con el objetivo propuesto.

e) Los estudiantes consideran que la relación entre integral definida, área e integral indefinida es muy ambigua y al final se limitan a aplicar, en muchos casos incorrectamente, la regla de Barrow.

f) Para determinar el área entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales, los estudiantes no estudian el signo de la función.

g) No distinguen entre el cálculo de un área y la integral definida.

h) La integrales indefinidas deben ser integrales inmediatas, si alguna vez se utilizó el cambio de variable les generó más confusión que el uso de procedimientos elementales para el cálculo de primitivas.

i) No se trabajó suficientemente el cálculo de primitivas mediante el cálculo mental, ello fue debido a la falta de tiempo, el nerviosismo y el cansancio de los estudiantes por los exámenes finales.

La memoria del primer ciclo de nuestra investigación, denominado *ciclo de exploración*, está redactada en el capítulo VII de esta tesis doctoral.

VI.3.3. CICLOS DE CONFIRMACIÓN (II y III)

Debido a la extensión de esta memoria y considerando que los ciclos II y III son muy similares, hemos optado por estudiar y realizar la posterior redacción de la memoria de ambos ciclos conjuntamente, así pues, los reconoceremos como *ciclos de confirmación.* Excepcionalmente en estos ciclos, para poder ver la secuencia temporal de cada uno de ellos, seguimos el modelo de redacción que se configuró en el ciclo de exploración.

VI.3.3.1. Ciclo II (Curso 2004-2005)

Planificación. Durante el primer trimestre del curso se reelaboró la unidad didáctica *Área e Integral Definida* y el *cuadernillo de actividades de los alumnos*, se elaboraron el *cuadernillo de prácticas con lápiz y papel* y el *cuadernillo de prácticas con DERIVE*, asimismo, el profesor investigador implementó un pequeño programa informático para poder realizar la práctica en el aula de informática. Por último, se establecieron nuevas *categorías de comprensión matemática relativas al concepto de integral definida.*

Acción. La puesta en práctica de la unidad didáctica se realizó durante los meses de diciembre de 2004 y enero de 2005. El tiempo dedicado a la acción fue muy superior al del primer ciclo.

Análisis. En este ciclo se ha trabajado con el material que proporcionaban las tareas, las pruebas escritas de los alumnos, el cuaderno de campo del profesor, grabaciones en audio y prácticas en el aula de informática.

Reflexión. Durante este ciclo se validaron las categorías a las que hicimos referencia anteriormente y, adelantándonos a la descripción posterior, obtenemos las siguientes reflexiones:

a) La simbología matemática sigue siendo demasiado complicada para los estudiantes, deberemos hacerla más comprensible para que les resulte más fácil la adquisición de los conceptos relacionados con la integral definida.

b) Asumiendo una de las reflexiones del ciclo anterior, se ha trabajado con las nuevas tecnologías, sin embargo, se constata que la falta de tiempo es una dificultad añadida a los alumnos para la comprensión de los conceptos inherentes a la integral.

c) Para determinar el área entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales, muchos estudiantes, siguen sin estudiar si la función cambia de signo entre los extremos de integración.

d) Un elevado número de alumnos consideran que son los mismos conceptos los de área e integral definida.

e) La integrales indefinidas deben ser elementales, su cálculo les resulta complicado a la mayoría de los estudiantes puesto que no dominan suficientemente las técnicas de derivación y, por tanto, como máximo debe utilizarse el cambio de variable en su aplicación más elemental. El cálculo mental en este ciclo ha sido muy limitado, por tanto, deberá trabajarse con más intensidad en los siguientes ciclos.

f) Los alumnos consideran la regla de Barrow como un *"comodín"* que resuelve innumerables problemas y suelen utilizarla sin estudiar previamente si es posible su aplicación.

VI.3.3.2. Ciclo III (Curso 2005-2006)

Planificación. Durante este curso se reelaboraron, de nuevo, los distintos materiales de los ciclos anteriores siguiendo las directrices del currículo de MACS II, la programación del departamento de matemáticas del instituto y las reflexiones de los dos ciclos anteriores, al mismo tiempo, se confirmaron todas las *categorías de comprensión matemática relativas al concepto de integral definida* del ciclo anterior.

Acción. La puesta en práctica del tercer ciclo de nuestra investigación se realizó durante los meses de diciembre de 2005 y enero de 2006. El tiempo dedicado a la acción en este ciclo coincide con el del anterior.

Análisis. Se ha vuelto a trabajar con el material que proporcionaban las tareas, pruebas escritas y cuadernillos de los estudiantes y el cuaderno del profesor, grabaciones en audio y prácticas en el aula de informática, para lo cual, el profesor-investigador tuvo que modificar el programa informático implementado el curso anterior.

Reflexión. Durante este ciclo se validaron las categorías a las que hicimos referencia en los dos ciclos anteriores, detallamos una serie de nuevas reflexiones que surgen en el presente ciclo y, en consecuencia, deberemos tenerlas presentes para futuras actuaciones, éstas son:

a) Los alumnos siguen considerando la regla de Barrow como un *"comodín"* que resuelve innumerables problemas del cálculo de áreas, la utilizan indiscriminadamente, por tanto, deberemos "matizar" las aplicaciones del teorema fundamental del cálculo integral.

b) La simbología matemática sigue siendo demasiado complicada para los alumnos, además, el tránsito de lo finito determinado (2, 3 ó varios casos) a lo indeterminado ("n" casos) les resulta muy dificultoso.

c) Se ha trabajado con las nuevas tecnologías y, asumiendo la reflexión del ciclo anterior, la falta de tiempo sigue siendo una dificultad añadida para los estudiantes incrementada por el desconocimiento general del programa de cálculo simbólico *DERIVE*.

d) Los alumnos tienen grandes dificultades para el cálculo de primitivas, las integrales que se realizan son inmediatas y aunque se ha trabajado con mayor insistencia el cálculo de las mismas mediante el cálculo mental, el resultado está lejos de ser satisfactorio.

e) A los estudiantes les resulta difícil adquirir el concepto de integral de Darboux mediante la igualdad de los conceptos de *“extremo superior de las sumas inferiores (integral inferior de Darboux) e inferior de las sumas superiores (integral superior de Darboux)”*, pero no más que mediante concepto de *“límites de las sucesiones de sumas inferiores y superiores cuando el diámetro de la sucesión de particiones tiende a 0 y ambos límites coinciden”.*

La extensa memoria de los dos *ciclos de confirmación* viene redactada en los capítulos VIII y XI[6].

VI.3.4. CICLOS DE CONSOLIDACIÓN (IV y V)

Procediendo de forma similar a los dos ciclos anteriores, los ciclos IV y V se estudian y analizan conjuntamente bajo la denominación de *ciclos de consolidación.*

VI.3.4.1. Ciclo IV (Curso 2006-2007)

Planificación. Como en los ciclos anteriores, se volvieron a reelaborar los distintos materiales escritos e informáticos. Fueron confirmadas las *categorías de comprensión matemática relativas al concepto de Integral Definida* de los ciclos anteriores y, además, se añadieron otras nuevas que más adelante se detallarán.

Acción. La puesta en práctica de este ciclo, en el aula de grupo y en el aula de informática, se realizó durante los meses de diciembre de 2006 y enero de 2007. Las sesiones, excluyendo exámenes y repasos, dedicadas a la integral definida, el cálculo mental y las nuevas tecnologías fueron quince.

Análisis. De nuevo, en este ciclo se ha vuelto a trabajar con el material que proporcionaban las tareas, las pruebas de los alumnos y el cuaderno del profesor, grabaciones en audio y prácticas en el aula de informática. En este ciclo, y en los restantes, se ha prescindido del cuadernillo de prácticas con lápiz-papel, manteniéndose los demás cuadernillos con las modificaciones que han sido consideradas necesarias por el equipo investigador.

[6] En el capítulo VIII se redactarán las fases sobre la integral definida (enseñanza y aprendizaje tradicional) y el cálculo mental realizadas en los ciclos II y III, además, se analizarán los cuadernillos teórico-prácticos de los estudiantes. En el capítulo XI redactaremos la memoria de la sesión con *DERIVE* así como el análisis de los cuadernillos de las prácticas de lápiz-papel y cuadernillos de prácticas informáticas de todos los alumnos.

Reflexión. En este ciclo se validaron las categorías a las que hicimos referencia anteriormente y puntualizamos, de nuevo, una serie de reflexiones que confirman las obtenidas en los ciclos anteriores, además, añadimos algunas específicas del cuarto ciclo de nuestra investigación:

a) La interpretación geométrica del área y de las sumas de Darboux (inferior y superior) no es complicada para los alumnos.

b) Pensamos que muchos estudiantes no han adquirido el lenguaje verbal asociado al simbolismo matemático, es decir, no interrelacionan las diferentes representaciones (verbal, analítica y gráfica) del concepto integral definida. Los alumnos comprenden mejor las interpretaciones geométricas que las expresiones algebraicas.

c) La representación de la función de Dirichlet es un obstáculo importante para muchos estudiantes y, en consecuencia, no reconocen la no integrabilidad en el sentido Darboux de dicha función.

d) Podemos concluir que la generalización tomando un número indeterminado de nodos de una partición les dificulta más, a los estudiantes, la comprensión conceptual de la integrabilidad de una función que si se toma un pequeño número de los mismos.

e) Cuando se pide la representación gráfica de la función integral, siendo fijo el extremo inferior y variable el extremo superior de la misma, los resultados son bastante pobres.

f) El cálculo de primitivas mediante el cálculo mental da resultados insatisfactorios, los estudiantes tienen un déficit importante en sus conocimientos de cálculo diferencial, lo cual repercute en el cálculo de primitivas elementales.

g) Las nuevas tecnologías, en concreto la aplicación del *software* de propósito matemático *DERIVE*, por su capacidad de cálculo y de representación gráfica permiten tener al profesor investigador y a los alumnos un apoyo visual importante para la introducción de los conceptos propios de la integral definida.

h) Los estudiantes tienen un alto interés por las prácticas informáticas, aunque las consideran como un mero apéndice de las actividades desarrolladas en el aula del grupo.

VI.3.4.2. Ciclo V (Curso 2007-2008)

Planificación. Una vez más, se reelaboraron los distintos materiales según el currículo de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales de segundo curso de bachillerato, la programación del departamento de matemáticas del instituto y la experiencia docente del profesor investigador adquirida por sus años de docencia y en los anteriores ciclos de la presente investigación. Las *categorías de comprensión matemática relativas al concepto de integral definida* fueron las mismas del ciclo anterior.

Acción. La puesta en práctica de la planificación en el aula de clase y en el aula de informática se realizó, en quince sesiones, desde el 5 de diciembre de 2007 hasta el 22 de enero de 2008, ambos inclusive.

Análisis. Una vez más, se ha vuelto a trabajar con el material que proporcionaban las tareas, las pruebas escritas y orales de los alumnos y el cuaderno del profesor, grabaciones en audio y los desarrollos de las actividades en las aulas del grupo e informática.

Reflexión. Durante este ciclo se validaron las categorías a las que hicimos referencia anteriormente y entre otras reflexiones obtenemos:

a) Menos de la cuarta parte de los alumnos son capaces de explicar con cierta coherencia los conceptos de integral inferior e integral superior de Darboux.

b) El cálculo de áreas mediante fórmulas elementales no es tenido en cuenta por muchos estudiantes, aplican el teorema fundamental del cálculo, aún cuando en algunos ejercicios es más fácil la aplicación de fórmulas como las del área del triángulo y del rectángulo.

c) La mejor comprensión de los conceptos por parte de los alumnos queda favorecida por la interpretación geométrica junto con una simplificación del excesivo rigor matemático.

d) Las particiones de los intervalos deben ser con pocos nodos, pues el mayor número de los mismos está directamente relacionado con una mayor dificultad para el aprendizaje de los conceptos matemáticos que precisan del concepto de partición.

e) Las prácticas con las nuevas tecnologías necesitan un tiempo considerable para que los alumnos se familiaricen con el programa de cálculo simbólico *DERIVE* y adquieran un manejo aceptable del mismo, posteriormente, ello permite a los estudiantes dedicar todos sus esfuerzos a la comprensión de los conceptos relacionados con el área y la integral definida.

f) Los estudiantes motivados por proseguir sus estudios en la Universidad obtienen mejores resultados que los alumnos que se sienten obligados a estudiar y desean abandonar el estudio o se decantan por realizar los próximos años estudios profesionales.

La redacción de la memoria de la presente tesis doctoral de los dos *ciclos de consolidación* viene recogida en los capítulos IX y XI[7].

VI.3.5. CICLO DE CIERRE (VI, CURSO 2008-2009)

Planificación. Este es el último ciclo de nuestra investigación y como tal se confirmaron los materiales de los otros ciclos, la reelaboración de nuevos materiales fue, sobre todo, para las prácticas de ordenador con *DERIVE*.

Acción. La puesta en práctica de este ciclo, con los estudiantes, se realizó durante los meses de diciembre de 2008 y enero de 2009.

Análisis. Una vez más, en esta fase se ha trabajado con el material que proporcionaban las tareas, las pruebas orales y escritas de los alumnos y el cuaderno del profesor, grabaciones en audio y prácticas informáticas.

Reflexión. En este ciclo se validaron todas las categorías de comprensión matemática de los ciclos anteriores y, además, entre otras, llegamos a algunas reflexiones, tales como:

a) La interpretación geométrica del área y de las sumas de Darboux (inferior y superior) no es complicada para los alumnos.

b) Pensamos que para reducir la dificultad y ganar en la comprensión del concepto integral definida es aconsejable no tomar “n+1” nodos de un intervalo, basta tomar un pequeño número de los mismos. Por tanto, consideramos que las particiones de los intervalos deben ser con pocos nodos pues a mayor número de ellos es mayor la dificultad para el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

[7] En el capítulo IX se redactarán las cuatro fases de la integral definida (docencia clásica) y el cálculo mental realizadas en los ciclos IV y V, además, se analizarán los cuadernillos teórico-prácticos de los alumnos. En el capítulo XI redactaremos la memoria de la sesión informática con *DERIVE* así como el análisis de los cuadernillos de las prácticas informáticas de todos los estudiantes.

c) Los alumnos ignoran la aplicación del teorema de caracterización de las funciones integrables para la función afín, *ƒ(x)=x,* en el intervalo [0,1] y aplican directamente la regla de Barrow.

d) La determinación gráfica de las sumas de Riemann no es dificultosa para los estudiantes y, aunque no se ha realizado, pensamos que para ciertas funciones, los estudiantes, pueden ver la necesidad de realizar la integración numérica.

e) El cálculo de primitivas mediante el cálculo mental sigue siendo un obstáculo difícil de superar para la mayoría de los alumnos.

f) Las nuevas tecnologías son una herramienta muy importante para la comprensión y adquisición, por los estudiantes, de los conceptos de área, integral definida y función integral. Además, *DERIVE* presta una ayuda inestimable al profesor-investigador para la enseñanza de los tópicos que nos ocupan en esta investigación.

La redacción de la memoria del ciclo VI, reconocido como *ciclo de cierre*, está recogida en los capítulos X y XI[8].

VI.3.6. REFLEXIÓN

Pensamos que esta breve reseña de la muestra y de las fases de cada uno de los seis ciclos de la investigación, así como el agrupamiento de los mismos, ha de permitir al profesor investigador redactar la presente tesis doctoral con orden, rigor, precisión y total objetividad de toda la información recopilada "en el trabajo de campo" durante estos años de investigación con estudiantes de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales. Además, estamos firmemente convencidos que todas las personas que lean la parte práctica de la presente memoria[9], ya sea con espíritu informativo o crítico, podrán disponer, sin restar un ápice de rigor, objetividad y especificidad de la información obtenida, de un texto más concentrado y menos disperso que si se hubiese redactado la memoria de cada ciclo de forma independiente.

[8] En el capítulo X se redactarán las cuatro fases de la integral definida (enseñanza-aprendizaje sin nuevas tecnologías) y el cálculo mental de primitivas realizadas en el ciclo VI y se analizarán los cuadernillos teórico-prácticos de los estudiantes. En el capítulo XI redactaremos la memoria de la sesión informática con *DERIVE* así como el análisis de los cuadernillos de las prácticas informáticas de todos los alumnos.

[9] La parte práctica o experimental de la presente memoria de tesis doctoral la consideramos desde el capítulo VI, inclusive, hasta la Bibliografía.

VI.4. CATEGORÍAS

VI.4.1. INTRODUCCIÓN

La investigación-acción exige el establecimiento de categorías para facilitar la investigación, acortar la redacción de la memoria y hacer más fácil la lectura y el estudio de la tesis doctoral, así pues, siguiendo este mandato tan importante, nosotros hemos establecido varios tipos de categorías, a saber:

- *Categorías de contenido matemático relativas al concepto de integral definida*. Alfabéticas y, además, son acrónimos[10] de los conceptos básicos que las sustentan, han sido definidas en el capítulo IV, epígrafe IV.2.1, para poder realizar el análisis curricular del concepto de los once libros de texto de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, por tanto, no es necesario volverlas a incluir.
- *Categorías de comprensión matemática.* La mayoría son alfabéticas y muy pocas alfanuméricas, también son acrónimos y se han establecido para el análisis de los cuadernillos teórico-prácticos realizados por los alumnos de los seis ciclos de nuestra investigación. En el siguiente epígrafe y en el anexo D detallamos cada una de ellas.
- *Categorías de comprensión práctica con lápiz y papel.* Alfanuméricas, el número de cada categoría corresponde con el número de ítem del ejercicio práctico de la integral con lápiz y papel. Estas categorías se utilizan solamente en los dos ciclos de confirmación y son independientes las del ciclo II de las del ciclo III, no las explicitamos en este momento pues quedan perfectamente determinadas en el capítulo XI, apartado *XI.2. Prácticas con lápiz y papel.*
- *Categorías de comprensión práctica con DERIVE.* Alfanuméricas, el número de cada categoría corresponde con el número de ítem del cuadernillo del ejercicio práctico en el aula de informática. Tres grupos de categorías conforman las de este tipos, éstos son:
    - Ciclos de confirmación, comunes a los ciclos II y III.
    - Ciclos de consolidación, comunes a los ciclos IV y V.
    - Ciclo de cierre, pertenecientes al ciclo VI.

[10] Entiéndase en su sentido más amplio, no estricto.

Las categorías de comprensión práctica con *DERIVE* tampoco son determinadas en este momento, serán detalladas en el capítulo XI, apartado *XI.3. Prácticas con DERIVE.*

Hemos excluido las *categorías de interacción didáctica profesor-alumno y alumno-alumno* porque consideramos que no aportan ninguna ventaja a la redacción de la presente memoria y menos a su lectura.

VI.4.2. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

Las *categorías de comprensión matemática* se expresan para evaluar la relación entre los estudiantes y el saber enseñado, es decir, el nivel de comprensión de los alumnos sobre la materia enseñada. Las categorías se diseñan cuando se pone en práctica por primera vez la exposición de la unidad didáctica del área y la integral definida y durante los ciclos posteriores que, como establece el marco metodológico cualitativo de investigación-acción, deberán completarse hasta llegar a la saturación. Para determinar dichas categorías hemos considerado la *descomposición genética de la integral* (*teoría APOE*) y los *actos de comprensión de la integral, según el modelo de Sierpinska,* establecidos en el capítulo III.

Escribimos a continuación las cuarenta *categorías de comprensión matemática* del ciclo de cierre que contiene todas las de los ciclos anteriores[11] y cada una de ellas viene determinada por:

- Código, en mayúscula y negrita, por el cual es reconocida.
- Frase, en negrita, que le caracteriza.
- Breve texto explicativo de la actividad propuesta.

En las siguientes páginas detallamos todas las *categorías de comprensión matemática* del concepto integral que intervienen en nuestra investigación.

Además, cada una de estas *categorías de comprensión matemática* lleva asociado un texto del cuadernillo teórico-práctico del área y la integral que la valida, en el cual se incluye la pregunta o preguntas realizadas a los estudiantes; sin embargo, hemos considerado oportuno obviar en este capítulo dicho texto y transferirlo al anexo D.

[11] Consideramos que las *categorías de comprensión matemática* del ciclo de cierre son representativas de las del resto de los ciclos y, si en alguno de ellos hay alguna modificación, se hará constar en la redacción de la parte experimental del ciclo o ciclos correspondientes.

VI.4.2.1. DGA: Determinación gráfica del área

Actividad 1: El alumno tiene que señalar el área comprendida entre una función continua y positiva, $y=f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$.

VI.4.2.2. DGSI: Determinación gráfica de las sumas inferiores

Actividad 2: Los alumnos deben señalar gráficamente la suma inferior de la función anterior según una partición concreta del intervalo [a,b]. Se pide, además, que determinen la suma inferior de la misma función para un refinamiento de la partición anterior.

VI.4.2.3. DGSS: Determinación gráfica de las sumas superiores

Actividad 3: Los alumnos, siguiendo el criterio anterior, deben señalar gráficamente las sumas superiores de una función positiva asociada a las particiones *P* y *P´* del intervalo [a,b], siendo *P´* un refinamiento de *P.*

VI.4.2.4. RSISR: Relación entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, la segunda un refinamiento de la primera

Actividad 4: El estudiante debe encontrar la relación existente entre el área que se pretende calcular, las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición y a un refinamiento de la partición primitiva.

VI.4.2.5. ESIS: Expresión analítica de las sumas inferior y superior asociadas a una partición de 6 nodos

Actividad 5: El estudiante tiene que saber generalizar las expresiones analíticas de las sumas inferior y superior de Darboux de una función asociadas a una partición de 6 nodos.

VI.4.2.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux

Actividad 6: Los alumnos deben expresar literalmente lo que entienden por integral inferior y superior de Darboux, previamente, han sido definidas matemáticamente ambas integrales.

VI.4.2.7. DR: Representación de la función de Dirichlet

Actividad 7: Consiste, recordando la función de Dirichlet, en representar la función anterior que toma un determinado valor en los puntos racionales del intervalo [0,4] y otro valor en los puntos irracionales del mismo intervalo.

VI.4.2.8. DMIN4: Mínimos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos

Actividad 8: Los alumnos deben determinar los mínimos de la función de Dirichlet en 4 subintervalos, de igual amplitud, del intervalo [0,4].

VI.4.2.9. DMAX4: Máximos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos

Actividad 9: Los alumnos deben determinar los máximos de la función de Dirichlet en los 4 subintervalos anteriores.

VI.4.2.10. DSI4: Representa y calcula la suma inferior según DMIN4

Actividad 10: Los estudiantes deben determinar la suma inferior de la función de Dirichlet para los mínimos obtenidos en la categoría DMIN4.

VI.4.2.11. DSS4: Representa y calcula la suma superior según DMAX4

Actividad 11: Los estudiantes deben determinar la suma superior de la función de Dirichlet para los máximos obtenidos en la categoría DMAX4.

VI.4.2.12. DSI8: Dirichlet, suma inferior en 8 subintervalos

Actividad 12: Los estudiantes deben determinar la suma inferior de la función de Dirichlet asociada a la partición $P_8 = \{4i/8\}_{i=0}^{8} = \{i/2\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,4].

VI.4.2.13. DSS8: Dirichlet, suma superior en 8 subintervalos

Actividad 13: Los alumnos deben determinar la suma superior de la función de Dirichlet asociada a la partición $P_8 = \{4i/8\}_{i=0}^{8} = \{i/2\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,4].

VI.4.2.14. DIINF: Dirichlet integral inferior

Actividad 14: Los alumnos deben calcular el extremo superior de las sumas inferiores, es decir, la integral inferior de la función de Dirichlet.

VI.4.2.15. DISUP: Dirichlet integral superior

Actividad 15: Los alumnos deben calcular el extremo inferior de las sumas superiores, es decir, la integral superior de la función de Dirichlet.

VI.4.2.16. DNI: Dirichlet no integrable

Actividad 16: Consiste en razonar si la función de Dirichlet, que ha sido estudiada anteriormente, es integrable o no en el sentido Darboux.

VI.4.2.17. AR: Representar el área determinada por la función afín

Actividad 17: Consiste en representar la superficie determinada por la función afín f(x)=x, el eje de abscisas y las rectas verticales x=0 y x=1.

VI.4.2.18. AMIN4: Mínimos de la función afín para una partición de 4 subintervalos

Actividad 18: Los alumnos deben determinar los mínimos de la función afín en 4 subintervalos del intervalo [0,1].

VI.4.2.19. AMAX4: Máximos de la función afín para una partición de 4 subintervalos

Actividad 19: Los alumnos deben determinar los máximos de la función afín en 4 subintervalos del intervalo [0,1].

VI.4.2.20. ASI4: Representa y calcula la suma inferior según AMIN4

Actividad 20: Los estudiantes deben determinar, en primer lugar, la superficie asociada a $s(f,P_4)$ y, después, calcular $s(f,P_4)$.

VI.4.2.21. ASS4: Representa y calcula la suma superior según AMAX4

Actividad 21: Los estudiantes deben determinar, en primer lugar, la superficie asociada a $S(f,P_4)$ y, después, calcular $S(f,P_4)$.

VI.4.2.22. ASI8: Afín, suma inferior en 8 subintervalos

Actividad 22: Los alumnos deben determinar la suma inferior de la función afín asociada a la partición $P_8 = \{i/8\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,1].

VI.4.2.23. ASS8: Afín, suma superior en 8 subintervalos

Actividad 23: Los alumnos deben determinar las sumas superiores de la función afín asociada a la partición $P_8 = \{i/8\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,1].

VI.4.2.24. ASIn: Afín, suma inferior en "n" subintervalos

Actividad 24: Los alumnos deben deducir el valor de la suma inferior $s(f,P_n)$ de la función afín asociada a la partición $P_n = \{i/n\}_{i=0}^{n}$.

VI.4.2.25. ASSn: Afín, suma superior en "n" subintervalos

Actividad 25: Los alumnos deben determinar el valor de la suma superior $S(f,P_n)$ de la función afín asociada a la partición $P_n = \{i/n\}_{i=0}^{n}$.

VI.4.2.26. AIINF: Afín integral inferior

Actividad 26: Los alumnos deben calcular el extremo superior de las sumas inferiores, es decir, la integral inferior de la función afín en el intervalo [0,1].

VI.4.2.27. AISUP: Afín integral superior

Actividad 27: Los alumnos deben calcular el extremo inferior de las sumas superiores, es decir, la integral superior de Darboux de la función en [0,1].

VI.4.2.28. AI: Afín integrable

Actividad 28: Consiste en razonar si la función afín $f(x)=x$, estudiada anteriormente, es integrable o no en el sentido Darboux.

VI.4.2.29. ACAFE: Cálculo del área mediante fórmulas elementales

Actividad 29: Los alumnos deben calcular el área de un triángulo mediante la clásica fórmula de base por altura dividido por dos.

VI.4.2.30. ACID: Cálculo del área por medio de la integral definida

Actividad 30: Los alumnos deben calcular el área comprendida entre la función $f(x)=x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=1$ aplicando la teoría del cálculo integral, es decir, el teorema fundamental del cálculo integral[12].

[12] A esta categoría debiéramos reconocerla como ATFCI (cálculo del área mediante el teorema fundamental del cálculo integral), sin embargo, no hemos creído conveniente utilizar esas siglas para no confundirla con la siguiente categoría ATCFI (cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables).

VI.4.2.31. ATCFI: Cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables

Actividad 31: Los alumnos deben calcular el área comprendida entre la función $f(x)=x$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=1$ utilizando el teorema de caracterización de las funciones integrables, es decir, que para que una función sea integrable basta con fijar un valor tan pequeño como deseemos y que encontremos una partición asociada al intervalo tal que la diferencia entre las sumas superior e inferior de Darboux sea menor que el número predeterminado anteriormente.

VI.4.2.32. DGSR: Determinación gráfica de las sumas de Riemann

Actividad 32: Consiste en señalar el área de los rectángulos que se obtienen al determinar como base de los mismos los subintervalos de una partición y alturas el valor que toma la función en cualquier punto del subintervalo correspondiente.

VI.4.2.33. IGTVMD: Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial

Actividad 33: Los alumnos desconocen el teorema de Rolle y no podemos demostrar analíticamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial[13], como alternativa, realizamos una interpretación geométrica que los alumnos deben completar. Los estudiantes deben descubrir que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(a,h(a))$ y $B(b,h(b))$ para una función $h(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto interior del intervalo $[a,b]$.

VI.4.2.34. TFCIS: Teorema fundamental cálculo integral (sumas)

Actividad 34: Los alumnos han de descubrir que las sumas de las diferencias del valor de la función entre dos nodos consecutivos coincide con la diferencia del valor de la función en los extremos del intervalo.

VI.4.2.35. TFCII: Teorema fundamental cálculo integral (incrementos)

Actividad 35: Los alumnos deben aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial en cada subintervalo del intervalo original.

[13] Este teorema también es reconocido como teorema del valor medio de Lagrange o teorema de los incrementos finitos.

VI.4.2.36. TFCSI: Teorema fundamental cálculo integral (sumas e incrementos)

Actividad 36: Los alumnos deben comprender que las sumas de las diferencias del valor de la función entre dos nodos consecutivos coincide con la diferencia del valor de la función en los extremos del intervalo y, además, debe ser aplicado el teorema de los incrementos finitos en cada subintervalo.

VI.4.2.37. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida

Actividad 37: El alumno debe expresar gráficamente lo que entiende por función integral.

VI.4.2.38. IGAI: Interpretación gráfica de la aditividad de la integral

Actividad 38: Consiste en determinar que la integral entre dos extremos de una función coincide con la suma de dos integrales uno de cuyos extremos (el superior de la primera y el inferior de la segunda) es un punto intermedio del intervalo original.

VI.4.2.39. IGTVMI: Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral

Actividad 39: El estudiante debe descubrir que el área de una superficie curvilínea es igual al área de un rectángulo.

VI.4.2.40. CP: Cálculo de primitivas

Actividad 40: En todos los ciclos, salvo en el de exploración, se ha trabajado el cálculo mental mediante el cálculo de primitivas elementales, no obstante, a esta categoría la designamos *"CP: Cálculo de primitivas"* porque consideramos que la actividad desarrollada es algo más amplia que el cálculo mental de integrales inmediatas y, sobre todo, porque la toma de datos correspondientes a esta categoría también incluye pruebas escritas.

En cada una de las categorías anteriores hemos incluido, en el anexo D, la cuestión o cuestiones que las determinan, en esta no es posible por la gran cantidad de ejercicios que se han resuelto, así pues, en la descripción de cada uno de los ciclos de la investigación se especificará el CP realizado.

VI.4.3. REFLEXIÓN

Las treinta y nueve *categorías de comprensión matemática de la integral definida* pertenecen al cuadernillo teórico-práctico, del ciclo de cierre, que ha debido cumplimentar cada uno de los estudiantes de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales del grupo investigado del curso 2008-2009. Pensamos que incluir todas ellas en el epígrafe VI.4.2 facilita la redacción de la presente memoria y, sobre todo, la lectura de la misma.

La metodología de investigación-acción empleada en esta tesis supone que todas las *categorías de comprensión matemática* no estuvieran establecidas desde el ciclo de exploración (curso 2003-2004) y que en el resto de los ciclos se crearan nuevas categorías o se modificaran las anteriores, eso sí, el ciclo de cierre engloba todas las *categorías de comprensión matemática* de los seis ciclos de los que se compone la presente investigación.

En la descripción posterior de la experimentación en todos los ciclos de la investigación analizaremos las *categorías de comprensión matemática* evaluadas expresamente en cada ciclo y, por cada una de ellas, constataremos los diferentes matices con la que lleva el mismo código en el ciclo de cierre[14].

[14] La descripción de la experimentación en la cual intervienen las *categorías de comprensión matemática* viene redactada en los siguientes capítulos:

Capítulo VII: Ciclo de exploración (I), Curso 2003-2004.
Capítulo VIII: Ciclos de confirmación (II y III), Cursos 2004-2005 y 2005-2006.
Capítulo IX: Ciclos de consolidación (IV y V), Cursos 2006-2007 y 2007-2008.
Capítulo X: Ciclo de cierre (VI), Curso 2008-2009.

CAPÍTULO VII: CICLO DE EXPLORACIÓN (I), CURSO 2003-2004 .... ***305***

VII.1. INTRODUCCIÓN **305**

VII.2. PLANIFICACIÓN **306**

VII.3. ACCIÓN **308**

VII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN 309

VII.3.1.1. SESIÓN 1: Miércoles, 12 de mayo de 2004 309

VII.3.1.2. SESIÓN 8: Martes, 25 de mayo de 2004 312

VII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN 316

VII.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS **319**

VII.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA 319

VII.4.1.1. DGA: Determinación gráfica del área 321

VII.4.1.2. DGSI: Determinación gráfica de las sumas inferiores 321

VII.4.1.3. DGSS: Determinación gráfica de las sumas superiores 323

VII.4.1.4. RSISR: Relación entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, la segunda un refinamiento de la primera 324

VII.4.1.5. ESIS: Expresión analítica de las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición de “n + 1” nodos 325

VII.4.1.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux 327

VII.4.1.7. ACAFE: Cálculo de áreas mediante fórmulas elementales 329

VII.4.1.8. DGSR: Determinación gráfica de la sumas de Riemann 332

VII.4.1.9. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida 333

VII.4.1.10. IGAI: Interpretación gráfica de la aditividad de la integral 335

VII.4.1.11. IGTVMI: Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral 336

VII.4.2. RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DEL CICLO DE EXPLORACIÓN 337

VII.4.3. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA 341

VII.5. REFLEXIONES DEL CICLO DE EXPLORACIÓN **344**

CAPÍTULO VII: CICLO DE EXPLORACIÓN (I), CURSO 2003-2004

VII.1. INTRODUCCIÓN

En el curso 2003-2004 ya había sido realizado el análisis curricular de la integral definida de las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, de segundo curso de Bachillerato, de once libros de texto editados por otras tantas editoriales (capítulo IV y anexo A) y se había elaborado la correspondiente Unidad Didáctica de la Integral Definida (capítulo V), sin embargo, no había sido implementado ningún programa informático ni avanzado lo suficiente en el estudio del *software* matemático específico, *DERIVE*, para poder ser puesto en práctica en el aula de informática.

Siguiendo el modelo metodológico de investigación en la acción, se puso en práctica la planificación, llevándose a cabo mediante la acción de las actividades inherentes a uno de nuestros tópicos de investigación (integral definida), seguidamente se realizó el análisis u observación de la acción y, para concluir, se redactaron las reflexiones del presente ciclo.

En este ciclo, y en todos los demás, estudiamos los cuatro fases de la investigación-acción y ello queda redactado en los siguientes epígrafes de tal forma que se garantice el rigor y la objetividad de la investigación y, a la vez, procurando no ser repetitivos en nuestros análisis y reflexiones.

El desplazamiento, por concurso de traslados, del profesor-investigador del Instituto de Enseñanza Secundaria “Arca Real” de Valladolid al IES “Félix Rodríguez de la Fuente” de Burgos ha supuesto que la implementación prevista para los estudiantes del primer instituto haya sido realizada con alumnos del segundo y, al desconocer el autor del presente trabajo la idiosincrasia del Departamento de Matemáticas y la formación matemática de los estudiantes del IES “Félix Rodríguez de la Fuente”, se ha optado por tomar en consideración, solamente, la integral definida obviando el cálculo mental y las nuevas tecnologías. Además, al desarrollar la investigación durante el mes de mayo de 2004, consideramos que los resultados pueden quedar determinados por la tensión acumulada, los nervios y la carga lectiva que los alumnos soportan al final del curso.

Los objetivos más importantes del primer ciclo, correspondiente al curso 2003-2004 y denominado de exploración, son:

- Realizar una docencia en la cual se presente a los estudiantes la integral definida mediante una unidad didáctica distinta a la del libro de texto.
- Realizar un cuadernillo de actividades de la integral definida que han de cumplimentar los estudiantes.
- Descubrir las mayores dificultades que tienen los alumnos en la adquisición del concepto de integral definida.
- Descubrir el comportamiento de los alumnos en el aula, así como la interacción alumno-alumno y alumno-profesor.

VII.2. PLANIFICACIÓN

Constatamos que la programación de la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II de segundo curso de Bachillerato, realizada por el Departamento de Matemáticas del Instituto, en los últimos cursos y en éste también, establece que el Análisis Matemático se impartirá en el tercer trimestre del curso lectivo, en consecuencia, los capítulos correspondientes a la integral deberán explicarse durante el mes de mayo de 2004.

El profesor-investigador, al incorporarse al centro, consciente de las dificultades que pueden surgir al impartir los conceptos inherentes a la integral (debidas a lo avanzado del curso, nerviosismo y saturación de los alumnos, multitud de exámenes y proximidad de la evaluación final) propone que el Análisis Matemático se imparta el primer trimestre del curso. La propuesta es rechazada, por el inminente comienzo de la actividad docente y por estar ultimada la programación de las matemáticas para todos los cursos del Instituto; no obstante, queda abierta tal propuesta y si el Departamento lo considera oportuno, se realizará el cambio propuesto a partir del próximo año académico.

Nuestra planificación, según la programación del Departamento de Matemáticas, deberá realizarse para mayo de 2004 y, posiblemente, será puesta en práctica durante la segunda quincena de dicho mes. El investigador, consultando las actas del curso anterior constata que en primer curso de bachillerato de ciencias sociales las derivadas fueron explicadas con gran brevedad y se realizaron muy pocos ejercicios, ello supondrá que se exigirá un tiempo considerable para la consolidación de dicho concepto en segundo de bachillerato y, en consecuencia, el profesor investigador piensa que los estudiantes tendrán dificultades con el cálculo de primitivas.

Las sesiones del primer ciclo han sido impartidas durante el curso académico 2003-2004 a un grupo de 25 alumnos de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales del IES "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos. Constatamos que la enseñanza-aprendizaje del Análisis Matemático ha resultado ser más dificultosa de lo inicialmente previsto y, por tanto, el desarrollo en clase de la integral se ha visto muy limitado en tiempo. A principios de mayo, según lo recoge la tabla VII.2, quedó establecido el calendario de actividades con el cual se pretendía poner en práctica la planificación elaborada los meses anteriores.

El planteamiento teórico de la integral que hemos seguido corresponde con el expuesto en el capítulo V de la presente memoria, sin embargo, los ejercicios y problemas propuestos y resueltos proceden, en su mayoría, del libro de texto[1] cuya unidad didáctica *Iniciación a las integrales* ha sido escaneada en el anexo E.

Los periodos lectivos diarios en los cuales se impartieron las clases de matemáticas al grupo de alumnos objeto de nuestra investigación durante el curso 2003-2004 fueron los siguientes: martes y miércoles (segundo periodo, de 9:25 horas a 10:15 horas), jueves (tercer periodo, de 10:35 horas a 11:25 horas) y viernes (quinto periodo, de 12:40 horas a 13:30 horas). Pensamos que nuestra planificación-programación ha sido elaborada con razonables expectativas para ser aplicada a un curso de las características que pretendemos investigar, no obstante, posiblemente haya que matizar y modificar sobre la marcha nuestra planificación. Todo ello se verá en la siguiente fase del presente ciclo: la acción o implementación.

[1] Colera J., García R. y Oliveira M. J. (2003). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. Bachillerato*. Madrid: Anaya.

SESIÓN	TRABAJO PLANIFICADO/REALIZADO	DÍA
1	Desarrollo histórico de la integral. El área como límite. Área del cuadrado y del círculo. Integral de Darboux.	12-05-04 miércoles
2	Integrales de Darboux y de Riemann. Teorema fundamental del cálculo integral. Propiedades de la integral definida.	13-05-04 jueves
3	Integral indefinida. Cálculo de primitivas. Integración de funciones polinómicas. Integración de funciones radicales. Integración de funciones exponenciales.	14-05-04 viernes
4	Cálculo de primitivas. Integración por cambio de variable. Integración de funciones racionales.	18-05-04 martes
5	Cálculo de primitivas elementales, aplicando los métodos de las sesiones anteriores. Integral definida. Aplicaciones elementales del teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow.	19-05-04 miércoles
6	Área encerrada entre una curva, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b. Área comprendida entre dos curvas. Problemas elementales.	20-05-04 jueves
7	Cálculo de áreas, resolución de los ejercicios propuestos en la sesión anterior. Aplicaciones de la integral definida.	21-05-04 viernes
8	Resolución de ejercicios de cálculo integral.	25-05-04 martes
9	Resolución de problemas de cálculo integral propuestos en las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León.	26-05-04 miércoles
10	Primera prueba de evaluación, a partir de las 16:30 horas.	26-05-04 miércoles
11	Segunda prueba de evaluación, a partir de las 16:30 horas.	28-05-04 viernes
12	Resolución de todo tipo de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León.	1-15 junio-04

Tabla VII.2. Planificación del ciclo de exploración (curso 2003-2004).

VII.3. ACCIÓN

Tal y como quedó establecido anteriormente, la acción se desarrolló con un grupo de estudiantess de segundo curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales, grupo E, compuesto por 33 alumnos, de los cuales 25 cursaron Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II y, de éstos, tres repetían la asignatura.

El profesor-investigador se ha servido para la redacción de este texto de su cuaderno de campo, la observación de clase, los apuntes y comentarios de los alumnos, etc. Además, en este apartado también se describe la observación directa de la misma de forma muy puntual, utilizando las anotaciones del profesor efectuadas en momentos posteriores a la finalización de cada una de las clases.

He aquí, a título de ejemplo, el resultado de la acción o implementación de la primera y octava sesiones de la docencia de la integral definida del primer ciclo de nuestra investigación, reconocido como ciclo de exploración (curso 2003-2004). En el anexo G se presenta la totalidad del desarrollo docente.

VII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN

VII.3.1.1. SESIÓN 1: Miércoles, 12 de mayo de 2004

Los alumnos se hacen los remolones, les cuesta comenzar la clase y prestar atención, el profesor, mientras tanto, prepara el material necesario para desarrollar la clase, es decir: proyector, transparencias, borra la pizarra, etc. Transcurridos unos minutos el profesor comenta a los alumnos que después de estudiados los distintos tópicos del Análisis Matemático (límites, continuidad, derivabilidad, representación gráfica de funciones y problemas de optimización), sólo resta la última parte del mismo, denominada Integral (definida e indefinida). La clase se dedica a hacer una breve introducción histórica del tema, definir el concepto de área, determinar el área del rectángulo y del círculo y, posteriormente, se formaliza el concepto de integral definida[2]. Todo ello lo explica el profesor-investigador con ayuda de transparencias y, apoyándose, con notaciones precisas en la pizarra.

Todos los estudiantes están expectantes por el desarrollo de esta primera sesión con los nuevos materiales, muchos de ellos quedan sorprendidos y, posiblemente, la mayoría prestan más atención a la manipulación de dichos materiales que a los contenidos científicos que se pretenden enseñar. El ambiente de clase es de cierto nerviosismo, no demasiado, los alumnos hablan entre sí y muestran poca atención a las explicaciones del profesor. Además, al principio protestan porque, según ellos, no pueden tomar apuntes puesto que la clase está en penumbra; el profesor manifiesta que no

[2] Véase Área e Integral del capítulo V de la presente memoria.

es necesario tomar apuntes al pie de la letra y lo que se pretende, de momento, es que comprendan la necesidad de encontrar nuevos procedimientos para el cálculo de áreas. Después de establecer el orden y matizar las normas de actuación comienza la clase como sigue:

DESARROLLO HISTÓRICO DE LA INTEGRAL

Con una breve introducción, se hace un comentario muy superficial de los científicos más importantes (Eudoxo, Arquímedes, Riemann y Darboux), cuyos trabajos han sido fundamentales para el cálculo de áreas[3].

EL ÁREA COMO LÍMITE

El profesor expone cómo puede calcularse el área de un rectángulo cuya base y altura son números enteros positivos (naturales), a los alumnos les resulta evidente que dicho área es base por altura y el resultado es un número entero de unidades cuadradas. Si las dimensiones del rectángulo son racionales positivas, los alumnos tienden a aplicar la fórmula anterior; sin embargo, la demostración de tal aserto exige expresar las dimensiones lineales como fracciones irreducibles y, posteriormente, tomar el mínimo común múltiplo de los denominadores, expresar las fracciones anteriores mediante otras equivalentes de igual denominador, establecer la unidad cuadrada de superficie como el total de los cuadraditos que se obtienen del común denominador al cuadrado y, a partir de este momento, determinar las unidades cuadradas de la superficie del rectángulo[4]. Si alguna de las dimensiones del rectángulo son irracionales, entonces el profesor investigador aproxima la base y la altura por medio de sendas sucesiones de números racionales o fraccionarios, por tanto, estaríamos en el supuesto anterior y el producto de ambas sucesiones tenderá al área que pretendemos calcular, es decir, el límite del producto de las sucesiones coincide con el producto de los límites de dichas sucesiones y, en consecuencia, el área de dicho rectángulo es base por altura[5].

---

[3] En general, los alumnos, consideran que la introducción histórica no es importante y su actitud en estos momentos es muy pasiva. Una alumna observa que el problema del área ha sido investigado a lo largo de muchos siglos y el profesor comenta que es importante la resolución de dicho problema.

[4] Muchos estudiantes consideran que este procedimiento es demasiado artificioso e innecesario puesto que según uno de ellos, corroborado por la mayoría, se llega a lo que ya sabíamos: *"Área del rectángulo es base por altura"*.

[5] Una dificultad añadida para los alumnos es el desconocimiento de la densidad del cuerpo de los números racionales en el cuerpo de los reales. Éstos aceptan, considerando casi una imposición, que cualquier número irracional se puede obtener como límite de una sucesión de números racionales.

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y ÁREA DEL CÍRCULO

El profesor-investigador sugiere que para calcular la longitud de una circunferencia es suficiente determinar los perímetros de polígonos regulares inscritos en la misma y mediante el paso al límite de una sucesión de esos perímetros se obtiene la longitud de la circunferencia, previamente se establece el valor de π como límite de una sucesión trigonométrica[6]. Asimismo, podemos determinar el área del círculo mediante el cálculo del límite de la sucesión de las áreas de los polígonos regulares anteriores[7].

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA. INTEGAL DE DARBOUX

El profesor proyecta, por medio de transparencias, un ejemplo gráfico y pretende calcular su área[8]; además, comenta que no resulta tan fácil puesto que la superficie tiene un lado curvilíneo. Introduce el concepto de partición junto con las sumas inferiores y superiores y pregunta: ¿Qué ocurriría si en lugar de subdividir el intervalo inicial en dos subintervalos, uno de estos subintervalos lo volvemos a dividir en otros dos subintervalos?[9]. Se concluye que: la nueva suma inferior es mayor que la anterior y la suma superior obtenida ahora es menor que la de la primera partición, además estos resultados se aproximan más al valor que deseamos conocer.

Se constata que si tomamos una partición del intervalo con muchos puntos (nodos), entonces, las sumas inferior y superior de la función asociadas a dicha partición se aproximan suficientemente al área que pretendemos calcular; además, se concluye que la suma inferior siempre es menor o igual que el área y ésta es menor o igual que la suma superior[10].

---

[6] El establecimiento del número π es considerado por los estudiantes complicado y difícil puesto que tienen grandes dificultades con la comprensión y la formalización de las razones trigonométricas y con el cálculo de límites, así pues, $\pi = \lim_{n\to\infty} n \cdot sen(360/2n)$. Los alumnos tienen interiorizado el valor de $\pi \approx 3{,}14$ y con eso les es suficiente.

[7] Para una gran mayoría de alumnos, la determinación de la longitud de la circunferencia y el área del círculo por medio de las longitudes y las áreas de polígonos regulares inscritos en el círculo es demasiado artificioso e incluso algunos lo consideran innecesario. Muchos de ellos dicen que la longitud de la circunferencia es $L=2\pi r$ y el área del círculo es $A=\pi r^2$ *¡Porque sí!*

[8] Área comprendida entre la gráfica de una función positiva $f(x)$, el eje OX y las rectas x=a y x=b.

[9] Se toma la partición P´ que tiene los mismos nodos que P más uno.

[10] Los estudiantes, en general, consideran que este procedimiento es demasiado laborioso; sin embargo, muestran una atención superior a la habitual y están expectantes por los resultados que se van obteniendo.

Una dificultad añadida para los estudiantes es que no se pueden tomar límites de sucesiones de sumas inferiores y superiores puesto que el conjunto de particiones de un intervalo no es numerable, para ello, consideramos el extremo superior de las sumas inferiores (integral inferior de Darboux) y el extremo inferior de las sumas superiores (integral superior de Darboux)[11], si ambos extremos coinciden, diremos que la función es integrable Darboux[12] y coincide con el área que pretendemos calcular, es decir[13]: $Área = \int_a^b f(x)dx \quad unidades \quad cuadradas$.

Veamos un ejemplo, dice el profesor, para calcular el área comprendida entre la función *ƒ(x)=x*, el eje de abscisas y las rectas *x=0* y *x=1,* se determina una partición de "n+1" nodos del intervalo [0,1], las sumas inferior y superior y, por medio de cálculos, concluimos que dicho área es 0,5 unidades cuadradas[14].

La clase termina con cierta decepción por parte de los alumnos puesto que piensan que ha sido demasiado teórica y complicada, además, no han tomado apuntes y su preocupación es si *"¿esto lo vas a preguntar?"*[15]*.*

VII.3.1.2. SESIÓN 8: Martes, 25 de mayo de 2004

Comienza la segunda clase del día para los alumnos, son las 9:25 horas, el profesor apremia para que preparen el material, se hacen los desentendidos y poco a poco, con actitud pasiva, se sienten en disposición de trabajar aunque con muy poco interés.

---

[11] Los conceptos extremo superior de las sumas inferiores y extremo inferior de las sumas superiores se explican a los estudiantes por primera vez y son de difícil comprensión, es más, no ven la necesidad de dichos conceptos. A algunos alumnos las definiciones de integral inferior y superior de Darboux les parecen un *"trabalenguas"* y muchos de ellos consideran que ambas integrales coinciden.

[12] Las notaciones $\inf \int_a^b f(x)dx, \quad \sup \int_a^b f(x)dx \quad y \quad \int_a^b f(x)dx$ son consideradas, por la inmensa mayoría de los alumnos, incomprensibles.

[13] El procedimiento es considerado muy complicado y el resultado obtenido es confuso, las protestas son generalizadas y el profesor se ve obligado a restablecer el orden. No se ha explicado el teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.

[14] Definitivamente, los alumnos desisten puesto que para calcular las sumas inferiores y superiores ha sido necesario determinar la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética y, según ellos, nunca lo han visto o no lo recuerdan.

[15] El profesor matiza que lo importante es que entiendan el concepto de función integrable Darboux.

Después de una lectura detallada del problema número 20[16] la mayoría de los alumnos no saben cómo empezar, no recuerdan la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto. El profesor dice*: "No resolváis nada y representad lo que se os pide, de momento, no es necesario hallar la ecuación de la recta tangente".* Sin dificultad representan la parábola y la mayoría de los alumnos dibujan la recta tangente con cierta maestría.

Interviene el profesor diciendo: *"La recta tangente tiene una ecuación muy sencilla ¿Sabéis cuál es?"* Una alumna, consultando sus apuntes[17], da la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto. Muy bien, interviene el profesor, a la vez que escribe la ecuación general en la pizarra, calculadla. Muchos alumnos se sienten perdidos, muy pocos saben lo que realmente deben hacer, no avanzan. La clase se alborota, todos hablan, nadie escucha. Ha de intervenirse con autoridad y se impone el silencio.

El profesor calcula la ecuación de la recta tangente y en la pizarra pinta de color amarillo la superficie cuyo área ha de hallar. No intentéis, dice, calcular el área de una única vez, sería aconsejable determinar dos recintos.

La alumna anterior dice: *"creo que podemos calcular el área de la función entre 0 y 2, después el área de la tangente entre el punto de corte de ésta con el eje de abscisas y 2. Finalmente restamos y así obtenemos la solución".* Así es, corrobora el profesor, lo has comprendido perfectamente y se termina resolviendo el problema en la pizarra.

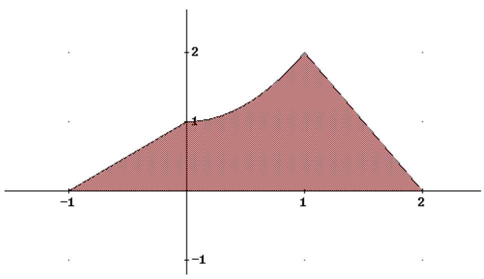
Los ejercicios 21 y 23 siguen el mismo procedimiento que el que acabamos de resolver, afirma el profesor, escribe las soluciones en la pizarra y propone que los hagan esta misma tarde.

A continuación se pasa a resolver el problema 22[18]. La figura sorprende a los alumnos, dos de ellos consideran que la expresión analítica de la función

16 Calcula el área limitada por la gráfica de $y=x+x^2$ la tangente a esa curva en $x=2$ y el eje OX.

17 Esta alumna muestra interés por las matemáticas y sabe buscar información cuando la precisa.

18 Halla el área de la figura sabiendo que el lado curvo corresponde con la función $y = x^2 + 1$.



está incompleta y como tal debe calcularse. El resto duda y el profesor pide que reflexionen cómo se puede calcular ese área. Finalmente, todos están de acuerdo que la superficie coloreada viene determinada por tres recintos, dos de ellos triangulares y el central cuyo área es $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$. Para el cálculo de las áreas triangulares, tres alumnos proponen que se determinen las ecuaciones de las rectas que contienen los segmentos y se calculen las correspondientes integrales[19], el profesor muestra su sorpresa, un alumno propone *“calcular las áreas de los triángulos utilizando la fórmula clásica: área del triángulo, base por altura entre dos”.*

Los alumnos no muestran ningún interés por hacer más ejercicios, el profesor exige silencio y propone resolver los ejercicios 25, 26 y 38.

El ejercicio 25[20] viene dado mediante una función en valor absoluto[21]. Los alumnos protestan y el profesor aconseja que *“se represente la función si resulta sencillo o, en caso contrario, se escriba su expresión analítica por medio de su definición a trozos”.*

Dos alumnos, recordando las representación de funciones, proponen que *“se represente la recta y=2x–4 y, después de ‘doblar’ la recta por el eje OX se obtiene la representación de la función valor absoluto y, de esto, su definición a tozos”.* La mayoría opta por resolver la ecuación *2x–4=0.*

Para resolver el apartado a) la mayoría de los estudiantes no saben cómo actuar, se entabla una pequeña discusión[22] y, al final, estudiado el recinto gráfico determinado por la función valor absoluto, el eje de abscisas y las rectas *x=0* y *x=5* se opta por sumar las áreas de los dos triángulos que componen la superficie sin necesidad de efectuar el cálculo integral[23].

---

[19] Estos alumnos no utilizan los conocimientos previos y se obcecan en el cálculo integral.

[20] A) Halla el área limitada por $y=|2x-4|$, el eje X y las rectas x=0 y x=5. B) Calcula $\int_{-2}^{3} |2x-4|\,dx$.

[21] Los alumnos rechazan las funciones de este tipo, muchos de ellos tienen serias dificultades para definirlas a trozos.

[22] Unos proponen que se calcule $\int_0^5 (2x-4)\,dx$, lo cual es erróneo. Un alumno expresa que el área viene determinada por $A=\int_0^2 (-2x+4)\,dx+\int_2^5 (2x-4)\,dx$.

[23] Los alumnos desconfían de las representaciones gráficas y consideran más riguroso hacer los cálculos algebraico-numéricos empleando las expresiones analíticas de las funciones; además, piensan que *“en clase de cálculo integral, los problemas deben resolverse por medio de integrales”.*

La resolución del 25 b) ha sido realizada, mayoritariamente, mediante la suma de dos integrales porque, según un alumno, *"no tiene sentido calcular el área de dos triángulos".*

En el ejercicio número 26[24] tenemos dos funciones definidas a trozos, para realizar las correspondientes integrales, a pesar de que se acaba de resolver el 25 con las mismas características, aún hay siete alumnos que no saben cómo comenzar, ocho dudan y, en primer lugar representan las funciones; otros tres alumnos hacen la integral pero tomando sólo la primera parte de la función definida a trozos sin tener en cuenta los extremos de la integración, el resto escribe bien las integrales y proceden a calcularlas.

El profesor, para que los alumnos comprendan mejor el ejercicio, dibuja la función *f(x)*, pinta de color azul la superficie comprendida entre la función *f(x)*[25], el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=1 y debajo de la superficie escribe $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx$. Procede del mismo modo para la superficie de la derecha (color amarillo) y ahora escribe la expresión $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (2-x)\,dx$.

Por último, sumando ambas integrales calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Los alumnos, en general, han seguido con sumo interés la resolución de la primera parte del ejercicio 26, la mayoría han coloreado las superficies con distintos colores y ha habido algún comentario como *"¡Qué fácil! ahora lo entiendo todo"*[26].

Los alumnos están animados, muestran interés por resolver la segunda parte del ejercicio y muchos comienzan dibujando[27] la función *g(x)*.

---

24 Calcula: *a)* $\int_0^2 f(x)\,dx$, *b)* $\int_{-1}^3 g(x)\,dx$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x & si \quad -1 \le x \le 1 \\ x^2+1 & si \quad 1 < x \le 3 \end{cases}$$

25 Escribe sobre la gráfica de la función y por encima de la superficie azul $y = x^2$.

26 La combinación de los registros gráfico, analítico y algebraico ayuda a los estudiantes a comprender la resolución del ejercicio.

27 El profesor ha comentado: *"No es necesario representar la función"*. Un alumno dice: *"Yo lo entiendo mejor con la representación gráfica"*.

Faltan seis minutos para que finalice la clase y es el momento de hacer el último ejercicio[28] propuesto, el 38. Para resolver este problema, dice el profesor, no debéis tener ninguna dificultad insalvable, su resolución es idéntica a la del problema 22; es aconsejable hacer el dibujo y calcular algunas áreas aplicando las fórmulas más sencillas (por ejemplo: cuadrado, rectángulo, triángulo, trapecio y círculo). Comenzad a resolverlo.

Los alumnos, desanimados, representan el triángulo mixtilíneo e intentan calcular el área con ayuda de sus compañeros y del profesor.

Un alumno dice: *"Para calcular el área puede obtenerse del área del cuadrado de lado 4 menos la integral entre –2 y –1 de* x^2 *menos el área del trapecio cuya semisuma de las bases es 2,5 y altura 3".* Es muy interesante tu aportación, dice el profesor, calcula el área pedida[29].

Más de la mitad de los alumnos han optado por calcular el área del trapecio mediante $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ siendo $f(x)$ la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y C. Otros alumnos han calculado el área del trapecio sumando las áreas de un rectángulo y un triángulo.

Suena el timbre, sólo tres alumnos han terminado el ejercicio, cuatro continúan resolviéndole y el resto recoge el material. El profesor dice que el próximo día se resolverán ejercicios propuestos en las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León.

VII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN

El análisis de los datos descritos, en el apartado VII.3.1 y en el anexo G, sobre las notas del cuaderno de campo del profesor investigador y sobre las observaciones (comportamiento, grado de motivación, avances en el aprendizaje, indisciplina, grado de integración entre los alumnos, etc.) llevadas a cabo durante la acción en la enseñanza y aprendizaje de la integral, con alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales, nos permite enunciar las siguientes reflexiones:

---

[28] Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices A(2,4), B(–2,4) y C(–1,1), en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la de ecuación $y=x^2$.

[29] El alumno, al pedirle la justificación el profesor, ha girado el cuaderno 90º a la derecha y así ha determinado el área del trapecio.

a) En un principio sorprende a los estudiantes la exposición, mediante transparencias[30], de los conceptos teóricos del área y la integral definida. A los alumnos, durante su permanencia en el instituto, siempre se les habían presentado los temas de matemáticas mediante la exposición magistral del profesor y utilizando como únicos recursos tiza, pizarra y, excepcionalmente, calculadora.

b) La exposición teórica[31] hace que los alumnos se desentiendan de ella, consideran innecesario justificar el área de un rectángulo y el establecimiento del número π.

c) Los alumnos consideran muy difícil la definición de la integral inferior de Darboux mediante el extremo superior de las sumas inferiores[32] (ídem integral superior) y de un nivel superior al que corresponde a segundo curso de bachillerato. Para todos ellos son iguales las integrales de Darboux y Riemann, además, el teorema fundamental de cálculo lo reconocen como regla de Barrow.

d) Los alumnos muestran más interés por hacer los ejercicios prácticos cuando disponen de más tiempo en clase, el profesor en esta unidad didáctica ha personalizado más la docencia y, sorprende la predisposición de los alumnos a aprender, se sienten protagonistas directos de su propio aprendizaje[33]. Las interacciones entre el profesor y los alumnos son más intensas y se crea un mayor grado de complicidad en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

e) El momento en el cual se ha impartido la docencia del tema no ha sido el más idóneo, los estudiantes pierden concentración en la realización de las actividades puesto que están finalizando el curso y tienen que realizar muchas pruebas durante el mes de mayo, concentrándose las mismas en la segunda quincena.

f) El libro de texto sólo se ha utilizado para tomar los problemas de él y resolverlos, la teoría explicada en clase ha sido la del capítulo V de la

[30] Sólo se ha utilizado ese material en las dos primeras sesiones.

[31] Los alumnos consideran que la formalización teórica de los conceptos matemáticos no es importante o es demasiado abstracta y, como tal, no muestran ningún interés, simplemente la aceptan.

[32] Una alumna preguntó *"si se podían tomar límites cuando n tiende a infinito"*.

[33] El profesor se ha pasado por los pupitres de los estudiantes con más frecuencia que durante el resto del curso resolviendo dudas y orientando en la realización de las actividades, los alumnos han trabajado más y mejor que en los meses anteriores.

presente memoria[34]. Los alumnos, en un principio, se sorprendieron por ser la primera vez que se hace esto durante el curso.

g) El profesor, durante el curso, siempre lleva a clase tizas de diferentes colores, para el cálculo de áreas son de gran utilidad[35], ello favorece la comprensión de los conceptos matemáticos de los alumnos[36].

h) El cálculo de primitivas es difícil para los alumnos[37], no aprenden ninguna tabla de integrales inmediatas y prefieren consultar la del libro de texto.

i) La combinación de los registros gráfico y analítico-algebraico hace que los alumnos comprendan mejor los conceptos teóricos y tengan más éxito en la resolución de problemas[38].

j) En este ciclo de exploración el considerar a las personas con nombre genérico (un alumno, una alumna) obstaculiza la redacción de la presente memoria; por tanto, en el resto de los ciclos se grabarán todas las sesiones y nos referiremos a cada alumno con dos letras mayúsculas[39].

k) La experiencia puede considerarse positiva aunque incompleta, así pues, en los siguientes ciclos deberemos ampliar el campo de acción calculando primitivas elementales mediante el cálculo mental y utilizando las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida; además, consideramos prioritario implementar la fase de la acción en otra época del curso escolar.

---

[34] Quedó establecido en la hipótesis 1.3 del capítulo III y en la reflexión j) del capítulo IV la necesidad de elaborar una Unidad Didáctica del Área y la Integral.

[35] Siguiendo el principio: *"A recintos distintos, colores distintos"*.

[36] Varios estudiantes han utilizado esta técnica para resolver problemas de áreas.

[37] La mayoría de los alumnos no tienen fluidez en el cálculo de derivadas y, consecuentemente, tienen grandes dificultades para el cálculo de integrales inmediatas.

[38] Los alumnos, por regla general, consideran más importante el registro analítico-algebraico que el gráfico, a éste se le percibe como un apéndice, a veces innecesario, del anterior.

[39] Generalmente constarán de la primera letra del nombre y del primer apellido y en caso de coincidir varios alumnos serán la primera del nombre y primera del segundo apellido.

VII.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS

En este ciclo de exploración, el profesor investigador y el director de la tesis elaboraron un cuadernillo el cual contenía un texto incompleto de la integral definida y que debía ser completado por los alumnos, dicho cuadernillo se entregó a los estudiantes inmediatamente después de ser explicada la teoría de la integral y, por el periodo del curso[40] en el cual se ha desarrollado la actividad, pensamos que fue muy poco tiempo el que transcurrió hasta la recepción de los trabajos de los alumnos por el profesor y, en consecuencia, creemos que los estudiantes no han podido asimilar suficientemente el tema objeto de investigación.

VII.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

En este ciclo inicial (curso 2003–2004) se asignaron once categorías de comprensión matemática, definidas en el capítulo VI y anexo D, y para poder ser valoradas las respuestas de los alumnos se optó por la escala de Likert[41]. El profesor investigador, una vez analizadas las respuestas de los estudiantes a las distintas categorías ha establecido los siguientes niveles de respuesta:

1. Es incorrecta en todos sus términos o no contesta.
2. Tiene graves deficiencias, no es totalmente incorrecta, no puede considerarse aceptable.
3. Es incompleta, no es incorrecta, puede mejorarse de forma sustancial.
4. Es correcta, sin embargo, se puede mejorar mínimamente.
5. Es totalmente correcta.

En el análisis de cada una de las categorías de comprensión matemática se escribirá en primer lugar las siglas con las cuales es reconocida, seguida de la expresión a la cual se refiere[42]; después se detallará la actividad que se pretende realizar y el objetivo que se desea alcanzar, posteriormente se analizarán los datos según la escala Likert y, finalmente, se redactará una pequeña reflexión.

[40] Del 12 al 26 de mayo de 2004.

[41] Dicha escala establece cinco niveles de respuesta que van del 1 (mínimo) al 5 (máximo).

[42] Cualquier categoría la reconoceremos, una vez formalizada, por sus siglas.

En el análisis de las respuestas hemos considerado conveniente escanear la respuesta de uno o varios alumnos para que el lector de la presente memoria pueda ver la solución correcta de la categoría[43] y, en ciertas ocasiones, se han incluido otras respuestas de los estudiantes, algunas de las cuales nos han llamado la atención por su originalidad o por los errores cometidos.

Posteriormente, se muestra la distribución de las respuestas emitidas mediante un diagrama poligonal porque interpretamos que los valores consignados son los extremos de un intervalo[44] y como tal no podemos considerar un diagrama de barras, en cada uno de los diagramas poligonales hemos incluido la referencia (en negrita), es decir, las siglas de la categoría seguidas del año académico al cual corresponde la experimentación, en el eje horizontal hemos colocado los niveles precedidos de las siglas de la categoría y en el eje vertical los porcentajes[45] de los niveles de cada una de ellas.

La figura o figuras escaneadas y el diagrama poligonal de cada categoría de comprensión matemática recibirán el nombre de *Gráficos VII.4.1.n* donde *"n"* es el ordinal de la categoría y las referencias a estos gráficos siempre serán de izquierda a derecha y de arriba abajo; además, cada uno de ellos llevará una letra mayúscula que lo identifica, el primero corresponderá con la respuesta correcta de un alumno mientras que el último será el diagrama poligonal y siempre tendrá asociada la etiqueta $\boxed{\text{I}}$ [46].

Finalmente, por cada categoría de comprensión matemática, daremos la reflexión en la cual redactaremos las conclusiones y apreciaciones que consideremos más importantes.

---

[43] La primera figura escaneada siempre corresponderá, si es posible, con una respuesta correcta de uno de los alumnos que forman parte de la investigación.

[44] El profesor investigador asigna a cada respuesta, que se evalúa desde 1 (la más baja) hasta 5 (la más alta) con un decimal y según la escala Likert, el siguiente $Valor = \begin{cases} 1 & si \quad 1 \le x < 1{,}5 \\ 2 & si \quad 1{,}5 \le x < 2{,}5 \\ 3 & si \quad 2{,}5 \le x < 3{,}5 \\ 4 & si \quad 3{,}5 \le x < 4{,}5 \\ 5 & si \quad 4{,}5 \le x \le 5 \end{cases}$.

[45] Nos hemos decantado por los porcentajes de los alumnos que fueron evaluados según la categoría porque resulta más sencilla su lectura que si consideramos las frecuencias absolutas.

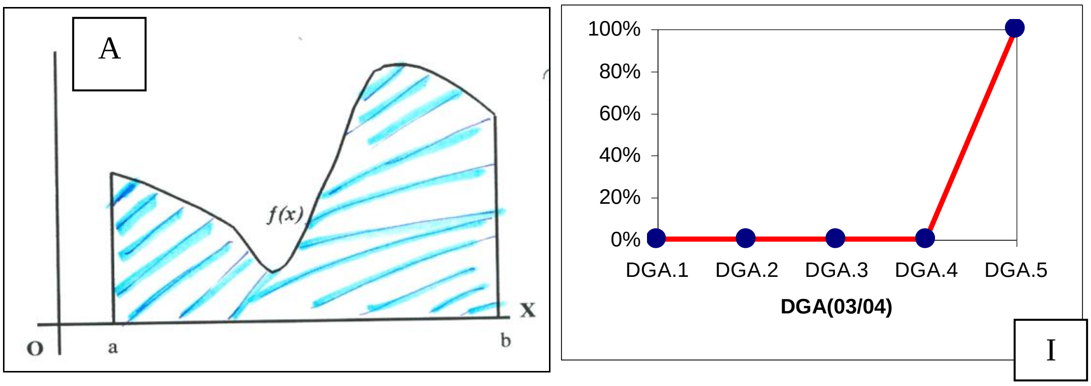
[46] Haciendo referencia al ciclo I de la investigación, es decir, el ciclo de exploración.

VII.4.1.1. DGA: Determinación gráfica del área

Actividad 1: El alumno tiene que señalar la superficie comprendida entre una función positiva, el eje de abscisas y las rectas *x=a* y *x=b*.

Objetivo: Obtener información sobre la comprensión de los alumnos para determinar gráficamente la superficie acotada por una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

Análisis de datos: La totalidad de los alumnos responde correctamente a la cuestión planteada. Los siguientes gráficos muestran este comportamiento.



Gráficos VII.4.1.1. Determinación gráfica del área (ciclo de exploración).

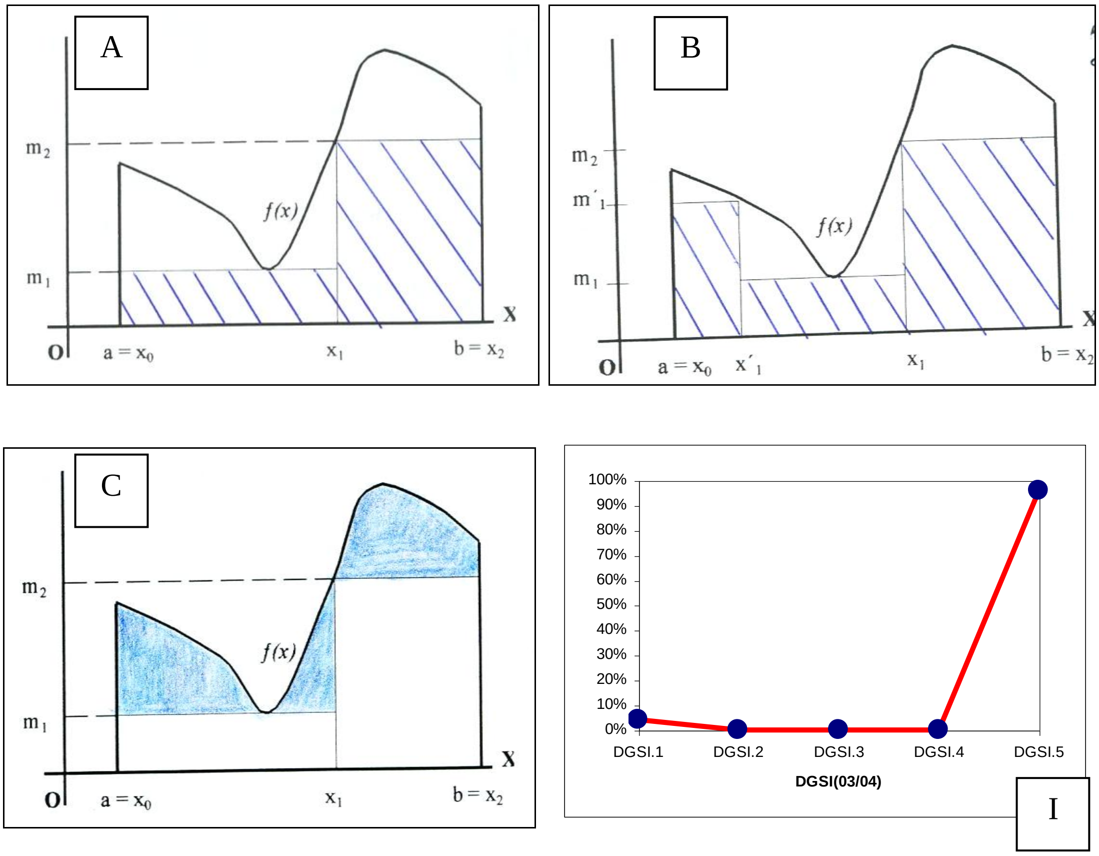
Reflexión: Tal y como acabamos de comentar, estamos en condiciones de asegurar que los estudiantes no encuentran ninguna dificultad en la determinación de la superficie encerrada por la gráfica de una función positiva, definida en un intervalo compacto y el eje de abscisas. Así pues, afirmamos que todos los alumnos son conscientes del objetivo que se pretende alcanzar.

VII.4.1.2. DGSI: Determinación gráfica de las sumas inferiores

Actividad 2: Los alumnos deben señalar gráficamente la suma inferior de la función anterior según una partición concreta del intervalo [a,b]. Se pide, además, que determinen la suma inferior de la misma función para un refinamiento de la partición anterior.

Objetivo: Analizar el grado de comprensión de los estudiantes para determinar gráficamente la suma inferior de una función positiva asociada a una partición. Asimismo, se vuelve a analizar la suma inferior de la misma función asociada a una nueva partición, más fina que la anterior.

Análisis de datos: La solución de esta actividad viene dada por los gráficos A y B. El gráfico C corresponde al único estudiante, una alumna[47], que ha dado una solución errónea y considera *"la suma inferior como la superficie comprendida entre los lados superiores de rectángulos inferiores y la gráfica de la función".*



Gráficos VII.4.1.2. Determinación gráfica de las sumas inferiores (ciclo de exploración).

Reflexión: Consideramos que prácticamente todos los alumnos, el 96%, han comprendido gráficamente el concepto de suma inferior. Posiblemente la alumna que ha cometido el error no haya prestado la más mínima atención a lo que se le pedía y creemos que una nueva y atenta lectura del texto le permitiría obtener la respuesta sin ningún error, en cualquier caso deberemos seguir el trabajo realizado por esta alumna.

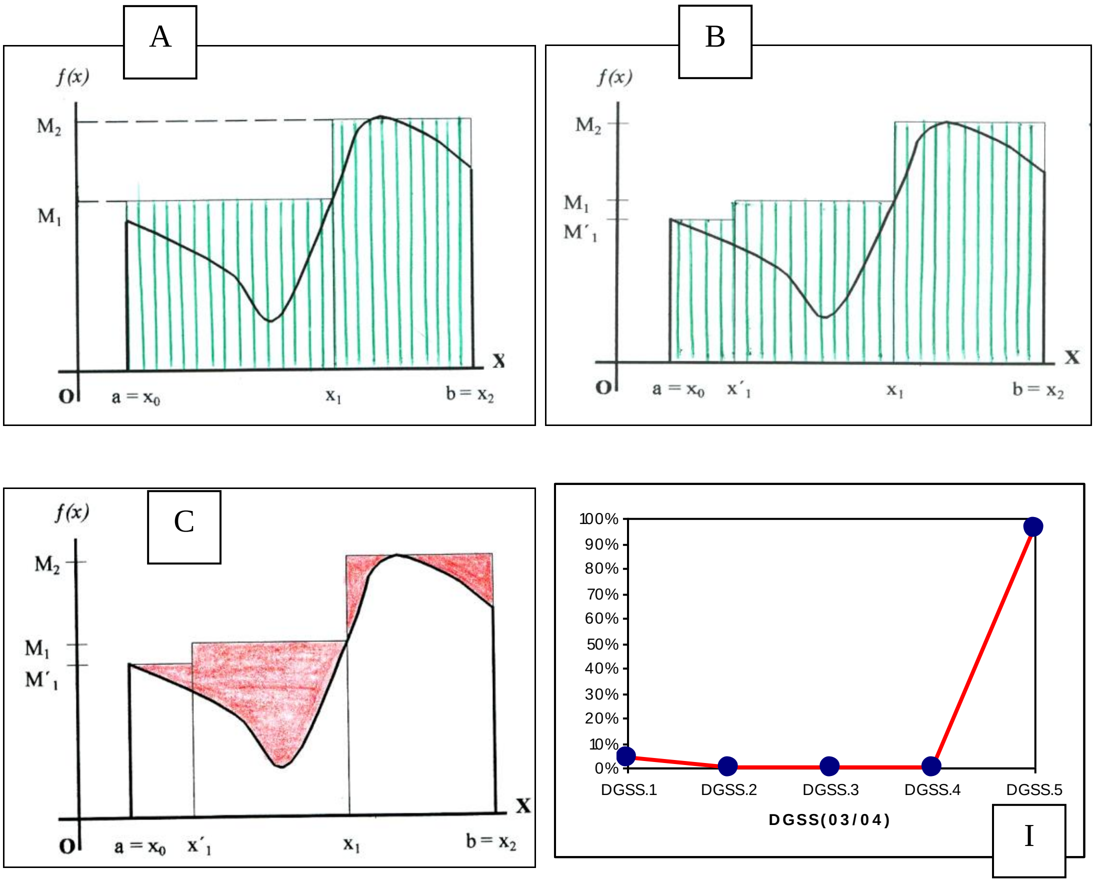
47 Dicha persona es una alumna repetidora.

VII.4.1.3. DGSS: Determinación gráfica de las sumas superiores

Actividad 3: Los estudiantes, siguiendo el criterio anterior, deben señalar gráficamente las sumas superiores de una función positiva asociada a las particiones *P* y *P´* del intervalo [a,b], siendo *P´* un refinamiento de *P.*

Objetivo: Análogo al anterior, es decir, estudiar el grado de comprensión de los alumnos para determinar gráficamente la suma superior de una función positiva asociada a una partición. Además, se analiza la nueva suma superior de la función asociada a un refinamiento de la partición anterior.

Análisis de datos: Como en la categoría precedente, todos los alumnos responden correctamente a la cuestión planteada, salvo la alumna anterior que considera *"la suma superior como la superficie comprendida entre los lados superiores de los rectángulos superiores y la gráfica de la función"*, según consta en el gráfico C*.*



Gráficos VII.4.1.3. Determinación gráfica de las sumas superiores (ciclo de exploración).

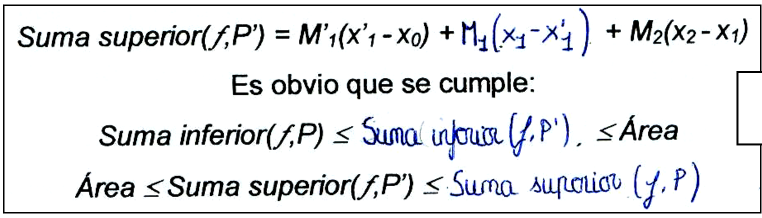
Reflexión: No podemos suscribir íntegramente todas y cada una de las palabras de la reflexión anterior, la interpretación de la alumna puede ser debida a errores conceptuales más que a falta de una lectura comprensiva y atenta del texto. Se constata que en estas tres categorías la interpretación geométrica no resulta dificultosa a los estudiantes, afirmamos que se produce una reciprocidad total entre la comprensión gráfica de los alumnos de las sumas inferiores y superiores.

VII.4.1.4. RSISR: Relación entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, la segunda un refinamiento de la primera

Actividad 4: El alumno debe encontrar la relación existente entre el área que se pretende calcular, las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición y a un refinamiento de la primitiva partición. Para que los alumnos presten mayor atención deben completar la expresión de la suma superior de la función asociada a la partición más fina y en atención a una menor dificultad deben colocar ordenadamente la suma inferior asociada al refinamiento y la suma superior asociada a la partición general.

Objetivo: Se pretende obtener información por la cual seamos capaces de descubrir hasta qué punto los estudiantes comprenden la relación existente entre las diferentes sumas, combinando la visión gráfica de los epígrafes anteriores y la más sencilla expresión analítica.

Análisis de datos: Esta categoría muestra una serie de respuestas que difieren significativamente entre ellas según muestran los siguientes gráficos:

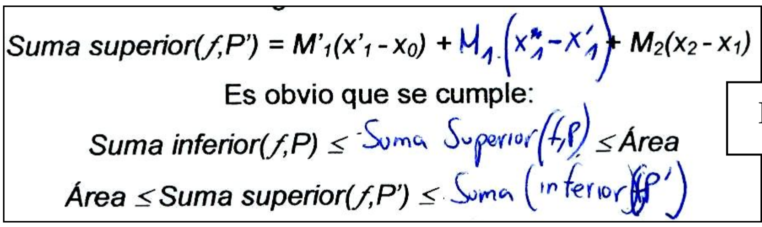

Suma superior(f,P') = $M'_1(x'_1 - x_0) + M_1(x_1 - x'_1) + M_2(x_2 - x_1)$

Es obvio que se cumple:

Suma inferior(f,P) ≤ Suma inferior(f,P') ≤ *Área*

Área ≤ *Suma superior(f,P')* ≤ Suma superior(f,P)

A

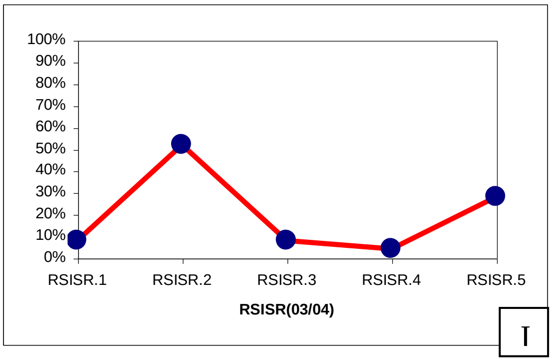

Suma superior(f,P') = $M'_1(x'_1 - x_0) + M_1(x_1 - x'_1) + M_2(x_2 - x_1)$

Es obvio que se cumple:

Suma inferior(f,P) ≤ Suma Superior(f,P) ≤ *Área*

Área ≤ *Suma superior(f,P')* ≤ Suma (inferior(f,P'))

B



Gráficos VII.4.1.4. Relación entre las sumas inferiores y superiores para un refinamiento (ciclo de exploración).

Todos los alumnos, salvo dos completan correctamente la suma superior *S(ƒ,*P'*)*, sin embargo, 15 alumnos (60%) tienen dificultades para establecer las desigualdades que se piden y no son capaces de relacionar las sumas de las dos particiones, algunos han dudado y llegan al extremo de cumplimentar el cuadernillo con bolígrafo y cuando consideran que la dificultad es excesiva y no están seguros de su respuesta lo hacen con lápiz[48]. En el texto B escaneamos la respuesta de un alumno cuyos errores son evidentes[49].

Reflexión: En esta categoría observamos, véase la gráfica I, que poco más de la cuarta parte de los estudiantes son capaces de comprender y expresar correctamente la relación existente entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, una más fina que la otra. Sin embargo, el 60% de los alumnos responden muy deficientemente (52%) o su respuesta es incorrecta o no existe (8%). Comparando las respuestas de esta categoría con las anteriores constatamos que los estudiantes tienen dificultades importantes para relacionar y expresar analíticamente las diferentes sumas de Darboux, además, pensamos que los alumnos no transfieren información entre los registros gráfico y analítico-algebraico.

VII.4.1.5. ESIS: Expresión analítica de las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición de "n + 1" nodos

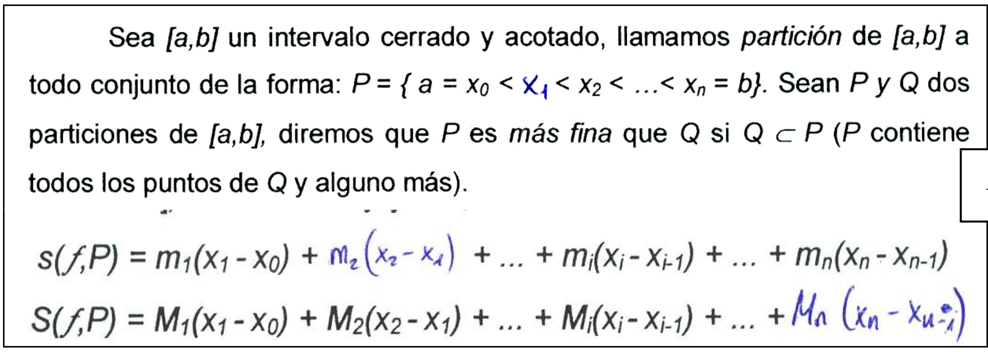
Actividad 5: El alumno tiene que saber generalizar las expresiones analíticas de las sumas inferiores y superiores de Darboux de una función asociadas a una partición de "n+1" nodos. Para que los estudiantes se concentren en su actividad deben completar, previamente, un nodo de la partición y, posteriormente, se cumplimentarán las sumas.

[48] Varios alumnos han seguido esta técnica para hacer esta actividad.

[49] Pensamos que este alumno se reafirma en su solución por la seguridad con la que escribe su respuesta.

Objetivo: Éste consiste en conocer el grado de adquisición de los conceptos suma inferior y superior por medio de expresiones analíticas más generales.

Análisis de los datos: Tal y como se observa en el gráfico correspondiente, veintiún alumnos[50] dan la respuesta correctamente. La del resto de los alumnos podemos considerarla incompleta, no errónea.



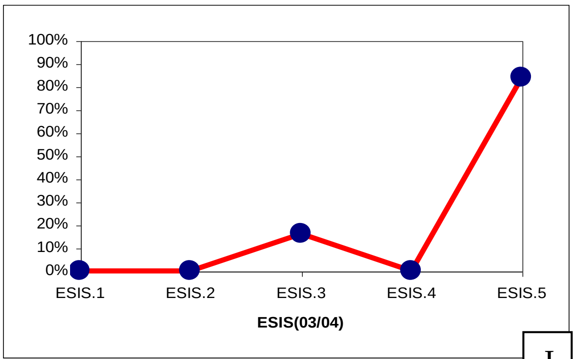
Sea *[a,b]* un intervalo cerrado y acotado, llamamos *partición* de *[a,b]* a todo conjunto de la forma: $P = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$. Sean *P y Q* dos particiones de *[a,b]*, diremos que *P* es *más fina* que *Q* si $Q \subset P$ (*P* contiene todos los puntos de *Q* y alguno más).

$$s(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_i(x_i - x_{i-1}) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

$$S(f,P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_i(x_i - x_{i-1}) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

A

Reflexión: Si bien es cierto que hay un porcentaje muy elevado (84%) de estudiantes cuya repuesta es totalmente correcta, debemos constatar que cuatro de ellos (16%) dan respuestas que, aunque sean incompletas, no pueden considerarse incorrectas.



I

Gráficos VII.4.1.5. Expresiones analíticas de las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición de "n+1" nodos (ciclo de exploración).

Comparando las respuestas de esta actividad con las de la anterior, ambas son analíticas, pero mientras que en este caso se reduce a completar una suma simbólica siguiendo el método de los términos anteriores, en la cuarta actividad tienen que relacionar conceptos y ello les resulta mucho más difícil.

[50] Algunos alumnos, como el del texto escaneado, han dudado al expresar alguna de las sumas, sin embargo, han sabido corregir la imprecisión o el error.

VII.4.1.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux

*Actividad 6: L*os alumnos deben expresar literalmente lo que entienden por integral inferior y superior de Darboux, previamente, han sido definidas matemáticamente ambas integrales.

Objetivo: No es suficiente con que los alumnos aprendan la definición matemática de ambas integrales[51] y su expresión analítica, más bien, se pretende determinar el grado de comprensión que poseen los estudiantes de estos dos conceptos del análisis matemático.

Análisis de los datos: El alumno del texto A es el que mejor entiende el concepto de integral inferior de Darboux como el extremo superior de las sumas inferiores, el alumno es redundante *“las sumas inferiores de las áreas”*[52] y, además, dice cómo se alcanza dicho valor *“se consigue al tomar particiones más finas”*[53] (ídem integral superior de Dardoux).

En el texto B el alumno ha captado ambos conceptos con gran nitidez en las dos primeras partes; sin embargo, en la tercera dice: *“en el límite las dos sumas son iguales y coinciden con el área de la superficie que encierra la gráfica”.* Pensamos que este estudiante mezcla los conceptos de extremo con los de límite; cada integral la define como un extremo y a la vez como un límite, finalmente, supone que existen las dos integrales y coinciden y, por tanto, la función es integrable Darboux[54].

La redacción del texto C es muy particular y el lector debe interpretar demasiadas cosas para poder deducir qué es cada una de las integrales, eso sí, entendemos que el alumno considera que las dos integrales de Darboux *“deberían coincidir”.*

El alumno autor de los textos y las gráficas D no discrimina entre suma inferior e integral inferior de Darboux (ídem superiores). Además, pensamos que considera rectángulos *“inscritos”* y *“circunscritos”* asociándolo al cálculo del área del círculo mediante una sucesión de las áreas de polígonos regulares inscritos en el círculo.

---

[51] Integral inferior y superior de Darboux.

[52] Por definición, una suma inferior es un área.

[53] Este alumno desconoce que el diámetro de las particiones debe tender a cero.

[54] Este alumno desconoce la función de Dirichlet.

A

• Integral Inferior: se entiende como el valor más alto o superior de las sumas inferiores de las áreas de las particiones. Este valor se consigue al tomar particiones cada vez más finas.

• Integral Superior: se entiende como el valor más bajo o inferior de las sumas superiores de las áreas de las particiones. Este valor se consigue al tomar particiones cada vez más finas.

B

Integral inferior de Darboux:
es el valor máximo que alcanza la suma de las áreas de los rectángulos inferiores.

Integral superior de Darboux:
es el mínimo valor que alcanzan la suma de las áreas de los rectángulos superiores.

En el límite las dos sumas son iguales y coinciden con el área de la superficie que encierra la gráfica.

C

La integral superior es aquella que se obtiene al acotar el terreno que queremos hallar desde arriba hasta que ya no se puede más.
La inferior es lo mismo pero desde abajo. Por lo tanto, hay si se puede integrar, y está bien hecho, deberían coincidir

D

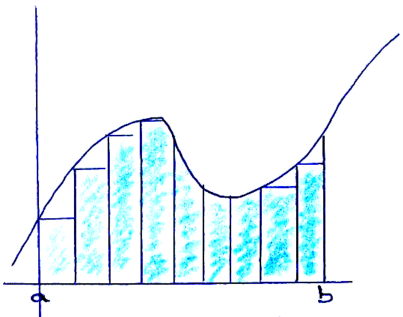
1) Integral inferior de Darboux

Suma de las áreas de los rectángulos inscritos de la región bajo una curva

2) Integral superior de Darboux

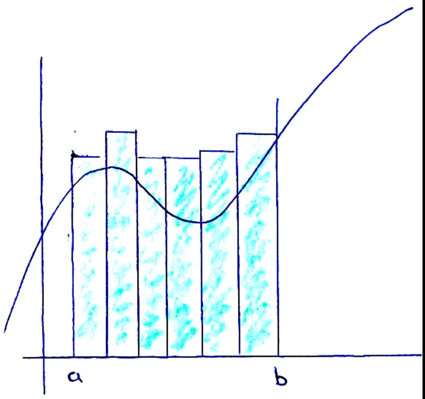
Suma de las áreas de los rectángulos circunscritos de la región

1)



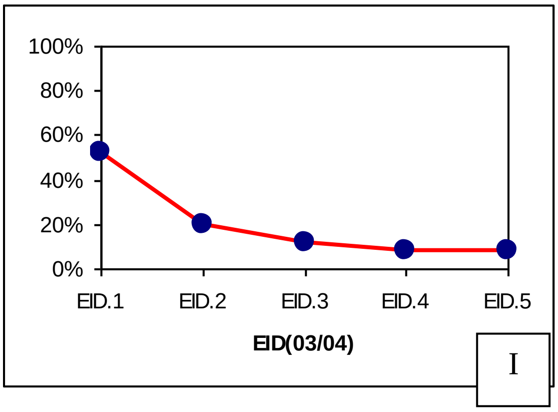
El área de los rectángulos inscritos es menor que el área de la región

2)



El área de los rectángulos circunscritos es mayor que el área de la región

Reflexión: En esta categoría observamos que poco más de la cuarta parte de los alumnos son capaces de explicar con cierta coherencia los conceptos de integral inferior y superior de Darboux, tres de ellos (12%) deben mejorar significativamente sus respuestas. Constatamos que más de la mitad de los estudiantes responden de forma totalmente errónea o no se dignan contestar.



Gráficos VII.4.1.6. Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux (ciclo de exploración).

Pensamos que, en general, muchos estudiantes no han adquirido el lenguaje verbal asociado a expresiones simbólico-matemáticas.

VII.4.1.7. ACAFE: Cálculo de áreas mediante fórmulas elementales

Actividad 7: Los alumnos deben calcular el área de un triángulo mediante la clásica fórmula de base por altura dividido entre dos. Para que sean conscientes de la situación, previamente, se pide que coloreen la superficie cuyo área se desea hallar.

Objetivo: El objetivo que pretende esta actividad consiste en descubrir hasta qué punto los alumnos relacionan las fórmulas elementales del cálculo de áreas con el teorema de caracterización de las funciones integrables de Darboux aplicado a la función $f(x)=x$. Incluso, los alumnos deben ser conscientes de la nula operatividad de dicho teorema para resolver ejercicios prácticos, ello nos encaminará al teorema fundamental del cálculo (TFC).

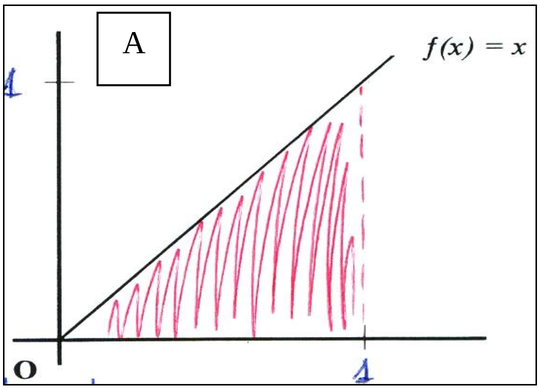
Análisis de los datos[55]*:* El gráfico A es la superficie del área triangular que se desea calcular. En las expresiones B el alumno ha intentado aplicar el teorema de caracterización de las funciones integrables y no ha relacionado sus conocimientos previos y posteriores[56] al expresar el área como una integral y dar un resultado erróneo.

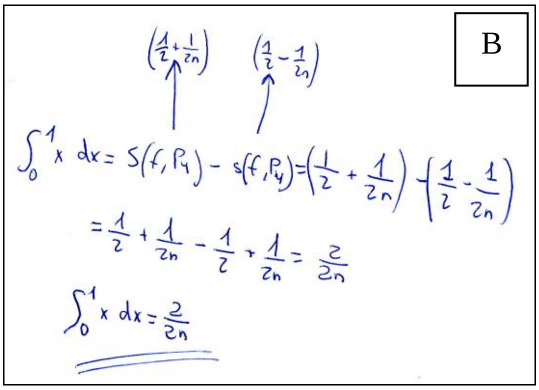
[55] Atendiendo a la optimización de los gráficos, en contra de nuestros criterios generales, hemos puesto en primer lugar una solución errónea.

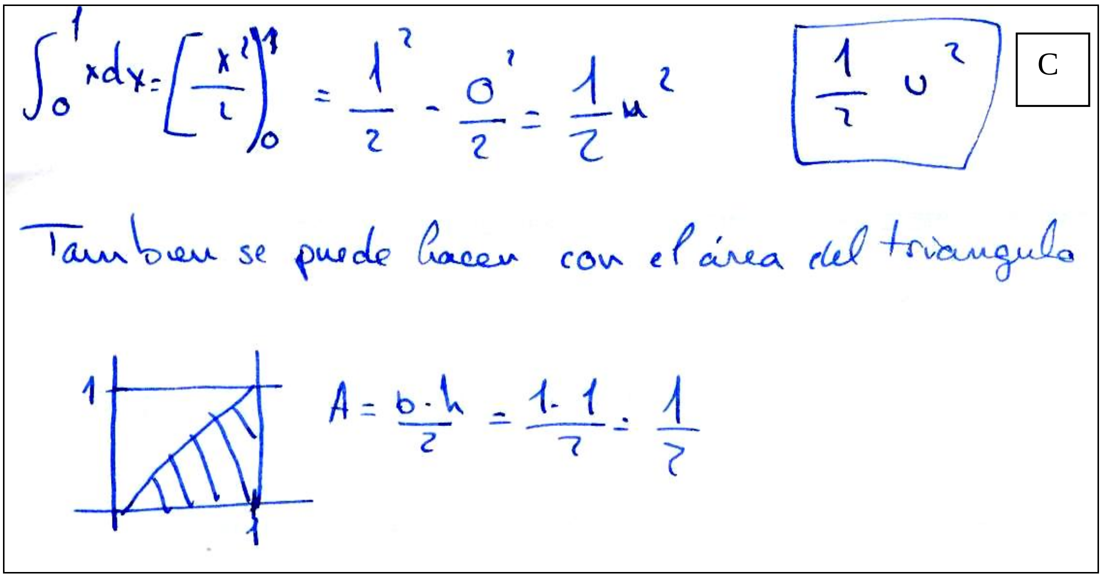
[56] Previos: $\acute{A}rea = \dfrac{Base\ x\ Altura}{2}$. Posteriores: Aplicando el TFC, $\acute{A}rea = \int_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}$.

La autora de C ha aplicado correctamente dos procedimientos distintos para calcular el área del triángulo y no ha tenido ningún conflicto en su aplicación, es más, acepta los dos con toda naturalidad.

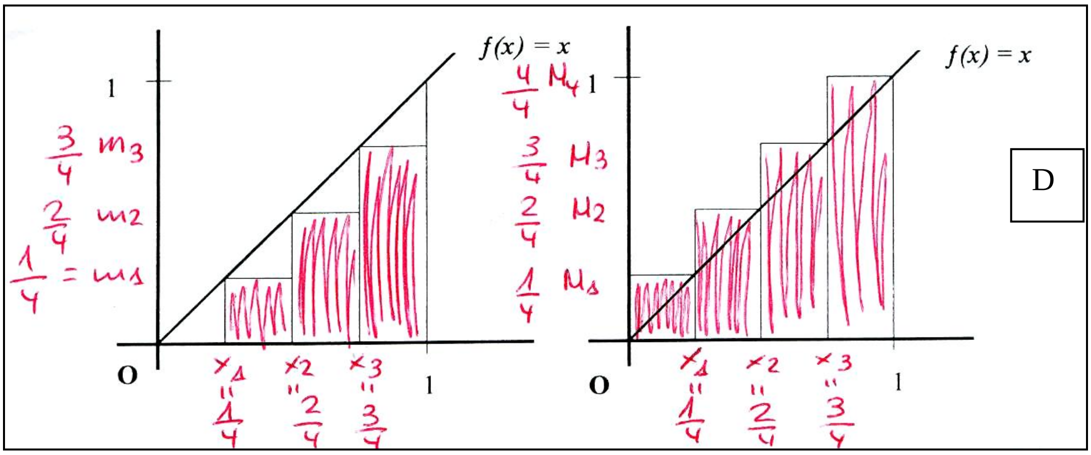
La alumna de D dibuja las sumas inferiores (superiores), posteriormente suma (resta) las áreas de cuatro triángulos rectángulos isósceles de base y altura 0,25 y obtiene el área del triángulo de base y altura la unidad[57]. Otra alumna, en E, ha calculado el área del triángulo mediante la fórmula tradicional y, además, ha utilizado el mismo procedimiento que la anterior con la ligera excepción de que ésta ha utilizado números decimales y aquélla se decantó por las fracciones. En cualquier caso, estas dos últimas alumnas han calculado el área por procedimientos elementales y no han dado el paso posterior de utilizar el TFC.







57 No se ha considerado oportuno escanear los cálculos realizados por dicha alumna.



E

$$6^{\circ}\ \Delta = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0'5.$$

7° a) $0'25 \cdot 0'25 = 0'0625$

b) $0'5 \cdot 0'25 = 0'125$

c) $0'75 \cdot 0'25 = 0'1875$

d) $1 \cdot 0'5 = 0'25$

$$0'625 - 4 \cdot \frac{0'25 \cdot 0'25}{2} = 0'5$$

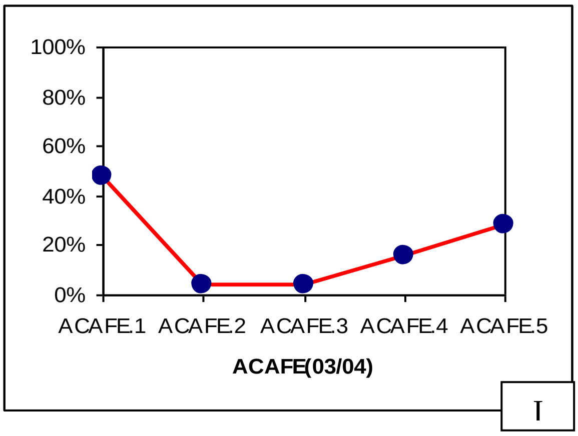
8° a) $0'25 \cdot 0'25 = 0'0625$

$0'5 \cdot 0'25 = 0'125$

$0'75 \cdot 0'25 = 0'1875$

$$0'375 + 4 \cdot \frac{0'25 \cdot 0'25}{2} = 0'5.$$

Reflexión: Sólo siete estudiantes (28%) han recurrido a sus conocimientos previos para hallar el área de un triángulo, de éstos, uno de ellos ha aplicado el teorema fundamental del cálculo.



Gráficos VII.4.1.7. Cálculo de áreas mediante las fórmulas elementales de los polígonos regulares (ciclo de exploración).

Podemos decir lo mismo de los cuatro alumnos (16%) que han sido incluidos en el nivel 4 de la categoría que nos ocupa, han seguido procedimientos similares a las alumnas de los gráficos D y E. Merece especial atención el alto porcentaje de alumnos (52%) que responden muy deficientemente, no contestan o lo hacen incorrectamente, pensamos que éstos no han sido capaces de recordar las fórmulas de áreas elementales.

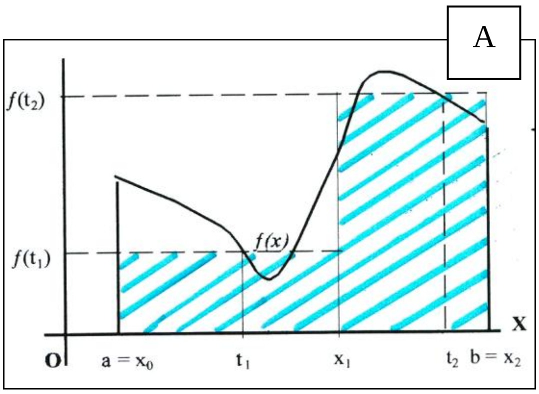
Por otro lado, después de analizadas siete categorías de comprensión matemática, creemos que los alumnos comprenden mejor la representación gráfica de estos conceptos matemáticos que su formulación analítica. Ello nos sugiere la conveniencia de realizar alguna práctica en cursos posteriores utilizando las nuevas tecnologías y la aplicación del *software* matemático *DERIVE*, el cual nos permitirá aprovechar su capacidad de representación gráfica y tener un apoyo visual para la introducción de los conceptos, a la vez que nos facilitará realizar diferentes cálculos con suma rapidez.

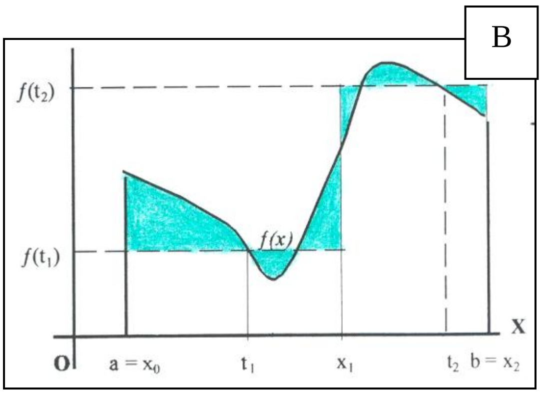
VII.4.1.8. DGSR: Determinación gráfica de la sumas de Riemann

Actividad 8: Consiste en señalar el área de los rectángulos que se obtienen al determinar como bases de los mismos los subintervalos de una partición y alturas el valor que toma la función en cualquier punto del subintervalo correspondiente.

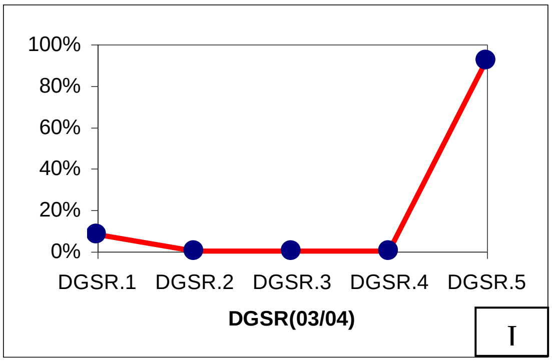
Objetivo: Obtener información acerca del grado de comprensión gráfica de las sumas de Riemann, sin embargo, no se busca la relación entre estas sumas y las inferiores y superiores de Darboux.

Análisis de datos: El gráfico A es la solución correcta, de nuevo, la alumna que no supo interpretar gráficos anteriores (véase, por ejemplo, *Gráficos VII.4.1.2-C)*, tampoco ha determinado correctamente las sumas de Riemann, según consta en el gráfico B.





Reflexión: Esta actividad la realizan correctamente veintitrés alumnos (92%), es decir, interpretan bien las sumas de Riemann, un alumno no responde la cuestión y la alumna del gráfico B lo hace mal. Es evidente que la actividad de esta categoría y las actividades 8 y 9 de las categorías DGSI y DGS son similares; además, los porcentajes de aciertos de las tres superan el 90%, esto nos hace pensar que las interpretaciones gráficas son más fáciles de comprender para los alumnos que las formalizaciones analíticas de las sumas de Darboux y Riemann.



Gráficos VII.4.1.8. Determinación gráfica de las sumas de Riemann (ciclo de exploración).

VII.4.1.9. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida

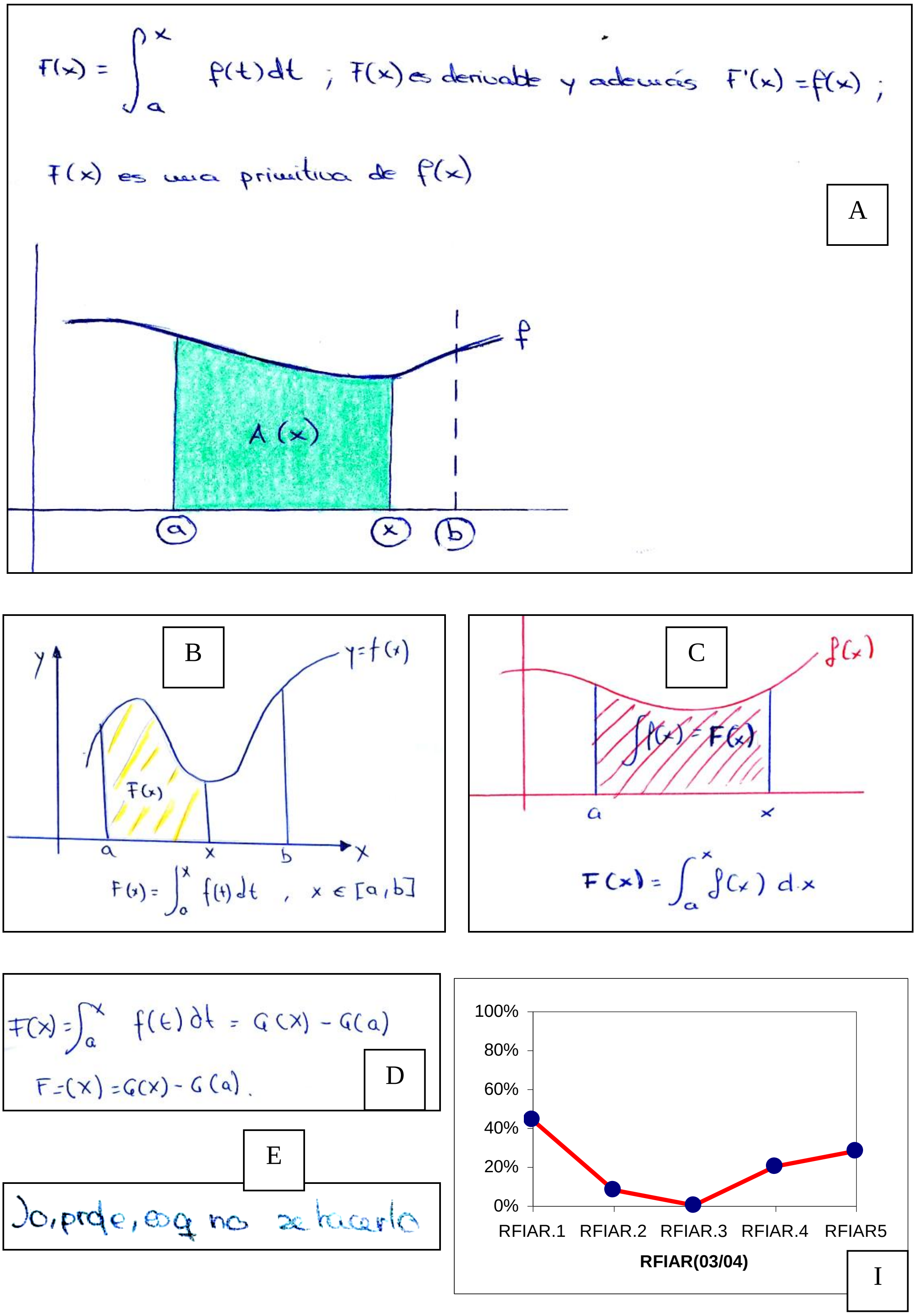
Actividad 9: El estudiante debe expresar gráficamente lo que entiende por función integral.

Objetivo: Se pretende averiguar si los alumnos comprenden, gráficamente, que la función *F(x)* es el área encerrada entre el eje de abscisas, la función *ƒ(t)*, la recta x=a y una recta vertical que se desplaza entre a y b, según los valores de la variable *x.*

Análisis de los datos: Consideramos que pocos estudiantes comprenden correctamente la relación entre integral definida y área. Veamos las cinco respuestas escaneadas:

El alumno del gráfico A afirma: *"F(x) es una primitiva de ƒ(x)"* y, a la vista del dibujo, debemos interpretar que *F(x)=A(x).* El autor de B ha expresado correctamente la función *F(x)*. Pensamos que el alumno del gráfico-texto C ha interpretado bien la función *F(x)* aunque la variable de integración y el extremo superior de la integral las denomine con la misma letra, *x*.

En D no hay ninguna interpretación gráfica, ha considerado (sin escribirlo) que *F(x) es una primitiva de ƒ(x)* y ha dado el valor de *F(x)* mediante el TFC, siendo *G(x)* otra primitiva de *ƒ(x).* La alumna de E se lamenta y escribe, tímidamente, con lápiz: *"Jo, profe es q no se hacerlo".*



Gráficos VII.4.1.9. Representación de la función integral en función del área recorrida (ciclo de exploración).

Reflexión: Casi la mitad de los alumnos, doce, dan una respuesta correcta a esta categoría. Sin embargo, podemos considerar que trece alumnos no entienden la función integral como el área de la superficie recorrida entre la gráfica de una función positiva, el eje de abscisas, la recta *x*=*a* y otra recta variable y paralela a la anterior.

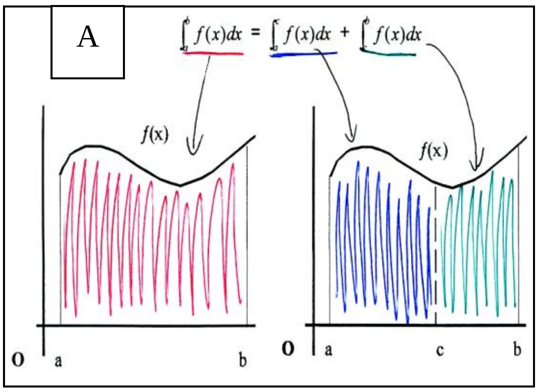
Constatamos que el profesor investigador no incluía, en el correspondiente cuadernillo, ningún gráfico que sugiriera la representación gráfica de la función integral; sin embargo, en clase se ilustró la significación de la función integral $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, quizás la pregunta así formulada no fuera lo suficientemente explícita para que los estudiantes dieran la representación correcta, pensamos que quizá pretendían representarla como el lugar geométrico de los punto *(x,F(x))*. Para los próximos ciclos deberemos ser más explícitos en esta actividad.

VII.4.1.10. IGAI: Interpretación gráfica de la aditividad de la integral

Actividad 10: Consiste en determinar que la integral entre dos extremos de una función coincide con la suma de dos integrales uno de cuyos extremos (el superior de la primera y el inferior de la segunda) es un punto intermedio del intervalo original.

Objetivo: Se desea obtener información sobre la comprensión de los estudiantes de la aditividad de la integral.

Análisis de datos: Todos los alumnos comprenden, gráficamente, la aditividad de la integral definida.



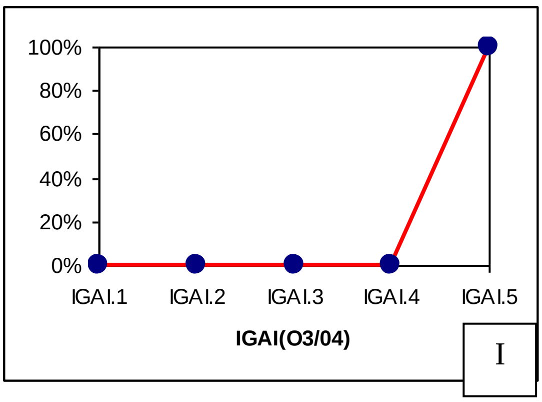


Gráfico VII.4.1.10. Interpretación gráfica de la aditividad de la integral (ciclo de exploración).

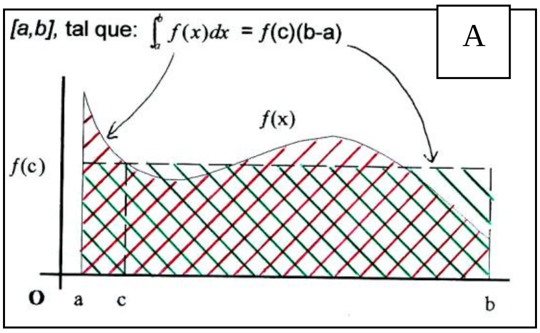
Reflexión: Afirmamos que todos los estudiantes comprenden la aditividad de la integral, es decir, un área se calcula por medio de la descomposición de la superficie original en dos, se halla el área de cada una de ellas y el área total es la suma de las áreas parciales.

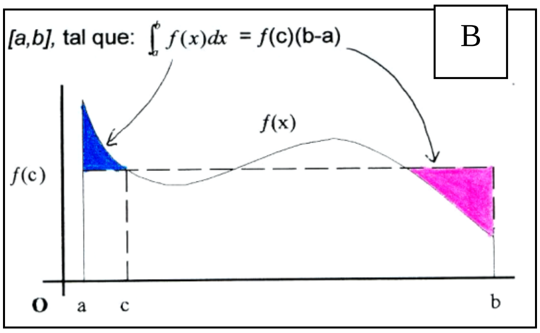
VII.4.1.11. IGTVMI: Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral

Actividad 11: El alumno debe descubrir que el área de una superficie curvilínea es igual al área de un rectángulo.

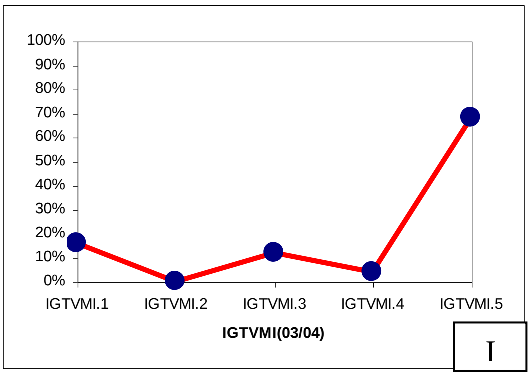
Objetivo: Obtener datos sobre la comprensión de las superficies, es decir, que aunque el superficie se deforme, el área permanece invariante. Analizar si los estudiantes comprenden la aplicación del teorema del valor medio de la integral en relación con el área.

Análisis de datos: Un porcentaje muy alto de los alumnos alcanza el objetivo propuesto. El gráfico B es de la alumna mencionada en otros análisis[58].





Reflexión: Observando el gráfico I, concluimos que dieciocho alumnos (72%) comprenden que para calcular un área con superficie curvilínea se puede transformar en superficie mixtilínea (compensando diferentes partes), suponemos que tres de ellos no tendrían problemas si volviesen a leer detenidamente la cuestión. El resto, 4 alumnos (16%), se limitan a no contestar o a hacerlo mal.



Gráficos VII.4.1.11. Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral (ciclos de exploración).

58 Véanse, por ejemplo, *Gráficos VII.4.1.2-B* y *Gráficos VII.4.1.3*-C.

VII.4.2. RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DEL CICLO DE EXPLORACIÓN

En la sección anterior, el profesor investigador ha estudiado las once categorías de comprensión matemática con las que han sido evaluados los alumnos del ciclo de exploración (ciclo I, curso 2003-2004)[59]. En este momento, junto con el director de la tesis, consideramos necesario confeccionar una tabla resumen de dichas categorías en la cual se analizan las respuestas de los estudiantes con una valoración cuantitativa.

En la tabla VII.4.2 damos la siguiente información:

- La primera columna contiene los códigos de las categorías establecidas en el ciclo de exploración.
- Como *Niveles de respuesta* tenemos los cinco que hemos establecido según la escala Likert y por cada nivel de cada una de las categorías se localizan dos datos, éstos son: la frecuencia n_i y el porcentaje del nivel obtenido para esa categoría[60].
- Tres parámetros, para cada categoría, denominados *Medidas*, éstos son: *Moda (Mo)* que es el nivel de mayor frecuencia, *Suma* (Σ) que es $\sum = \sum n_i \left(Nivel\ de\ respuesta\ de\ la\ categoría \right)$ y *Media* ($\bar{x}$) que viene dada por el cociente $\bar{x}$ = Σ/número total de alumnos[61].
- La última fila sigue el mismo procedimiento sumando previamente las columnas de las frecuencias de cada uno de los niveles[62].

---

[59] Dicha evaluación se ha efectuado, según la escala Likert, con la corrección rigurosa y sistemática de cada uno de los cuadernillos teórico-prácticos de comprensión matemática cumplimentados individualmente por los estudiantes.

[60] Por ejemplo, el nivel 5 de la categoría ESIS tiene frecuencia 21 (han sido evaluadas 21 respuestas de los estudiantes de esa categoría con un nivel 5) y el porcentaje que le corresponde es el 84% (21 alumnos del total, 25).

[61] Si consideramos ESIS, tenemos: *Mo*=5 puesto que el nivel 5 tiene la frecuencia más alta (21), Σ=0x1+ 0x2 + 4x3 + 0x4 + 21x5 = 117 y $\bar{x}$ =117/25 = 4,68.

[62] Por ejemplo, la frecuencia TOTAL del nivel 1 es la suma de todas las frecuencias de nivel 1 de las categorías y asciende a 46; el 16,73% se obtiene de 4600/275 (275=25x11; 25 alumnos y 11 categorías).

CATEGORÍAS	FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO I)												
	Niveles de respuesta										Medidas		
	1		2		3		4		5		*Mo*	Σ	$\overline{x}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
DGA	0	0	0	0	0	0	0	0	25	100	5	125	5
DGSI	1	4	0	0	0	0	0	0	24	96	5	121	4,84
DGSS	1	4	0	0	0	0	0	0	24	96	5	121	4,84
RSISR	2	8	13	52	2	8	1	4	7	28	2	73	3,13
ESIS	0	0	0	0	4	16	0	0	21	84	5	117	4,68
EID	13	52	5	20	3	12	2	8	2	8	1	50	2
ACAFE	12	48	1	4	1	4	4	16	7	28	1	68	2,72
DGSR	2	8	0	0	0	0	0	0	23	92	5	117	4,68
RFIAR	11	44	2	8	0	0	5	20	7	28	1	70	2,8
IGAI	0	0	0	0	0	0	0	0	25	100	5	125	5
IGTVMI	4	16	0	0	3	12	1	4	17	68	5	102	4,08
TOTAL	**46**	**16,73**	**21**	**7,63**	**13**	**4,73**	**13**	**4,73**	**182**	**66,18**	**5**	**1089**	**3,96**

Tabla VII.4.2. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las categorías/niveles de comprensión matemática relativas al concepto de integral definida del ciclo de exploración (I, curso 2003-2004).

Recordamos, de nuevo, que han participado en la investigación del primer ciclo 25 alumnos y todos ellos, con mayor o menor grado de implicación, han asistido a clase y han cumplimentado el cuadernillo[63].

[63] Los cuadernillos han resultado ser un elemento novedoso para los alumnos y se percibe que la mayoría de los estudiantes se han esforzado para cumplimentarlo según sus conocimientos adquiridos.

A la vista de los resultados de la tabla anterior, las once categorías de comprensión matemática que componen este ciclo pueden dividirse en dos grupos claramente diferenciados: el primero cuyo componente principal es el gráfico (DGA, DGSI, DGSS, DGSR, RFIAR, IGAI e IGTVMI) y el segundo con una orientación más analítica (RSISR, ESIS, EID y ACAFE). Analicemos cada uno de estos grupos:

Categorías gráficas: Constatamos que los porcentajes del máximo nivel de cada categoría son, en general, muy elevados superando el 90% cinco de ellas (DGA, DGSI, DGS e IGAI). IGTVMI obtiene el 72% sumando los porcentajes de los niveles 4 y 5 que consideramos buenos y, posiblemente, pudieran haber sido mejores si en lugar de interpretar gráficamente el teorema del valor medio de la integral en un único dibujo[64] se hubiera realizado en dos.

Mención especial merece la categoría RFIAR que, además, tiene un componente importante de carga conceptual, así pues, los estudiantes tienen graves dificultades para discriminar entre variable de integración y extremo superior de la integral[65], hecho constatado por las investigaciones de Dubinsky (1991), Harel y Kaput (1991), Abrahamson (1998) y Cordero (2005)[66]. Por tanto, en los ciclos sucesivos deberemos vigilar las respuestas a esta categoría que puede considerarse gráfico-analítica.

Analizado este grupo de categorías podemos afirmar que los estudiantes tienen una gran capacidad para comprender conceptos matemáticos en su expresión gráfica y visual puesto que el porcentaje total, correspondiente al máximo nivel de estas siete categorías, es muy próximo al 83%.

Categorías analíticas: En este grupo de categorías los resultados de los niveles de respuesta son bien distintos a los obtenidos anteriormente, veamos cada una de ellas:

- RSISR exige coordinar conceptos fundamentales tales como partición *P* y refinamiento de la misma *P'*, sumas inferior y superior de Darboux de una función asociadas a las dos particiones[67] y establecer las

[64] Véanse los *Gráficos VII.4.1.11. Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral.*

[65] Véase el epígrafe *VII.4.1.9. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida.*

[66] Consúltese el apartado *I.3. Antecedentes en la Investigación* del capítulo I de la presente memoria.

[67] La partición *P* consta de tres nodos y *P'* de cuatro.

desigualdades entre las sumas de Darboux[68] de *P* y *P'.* El profesor investigador consciente de las dificultades que podían tener los estudiantes ha escrito las desigualdades y los alumnos sólo han tenido que determinar dos sumas. Sin embargo, menos de la tercera parte (32%) han dado la respuesta correcta[69].

- ESIS, aunque las expresiones analíticas de esta categoría son más generales que las de la anterior, tiene un alto porcentaje (84%) de aciertos; pensamos que puede ser debido a que en esta categoría los alumnos sólo tenían que determinar las sumas inferior y superior de Darboux de una función f asociadas a la partición *P.*

- EID es, a la vista de los resultados (8% + 8%)[70], la categoría más difícil para los estudiantes puesto que: tienen serias dificultades para expresar por escrito sus ideas, consideran suficiente que las particiones sean cada vez finas, piensan que si existen las integrales inferior y superior de Darboux entonces la función es integrable Darboux y creen que el límite de las dos sumas (inferiores y superiores) converge al área de la superficie que encierra la gráfica[71]. El profesor investigador considera que el grado de dificultad de los conceptos de integral inferior y superior de Darboux, para los alumnos de segundo de bachillerato de ciencias sociales, es muy alto y piensa que esta categoría de comprensión matemática puede ser estudiada en posteriores investigaciones con estudiantes universitarios.

- ACAFE sorprende por la ausencia de evocación de los conocimientos previos de los estudiantes, no relacionan suficientemente la integral definida como la ampliación del cálculo de áreas y, en consecuencia, no perciben que en multitud de ocasiones es más eficaz recurrir a fórmulas básicas del primer ciclo de educación secundaria obligatoria que a nuevas teorías estudiadas en cursos superiores. Además, consideramos que los estudiantes no consultan suficientemente los apuntes de clase puesto que se han resuelto ejercicios de cálculo de áreas mediante las fórmulas elementales.

[68] Entendemos como tal: $s(f,P)$, $S(f,P)$, $s(f,P')$ y $S(f,P')$.

[69] Previamente, para que los alumnos prestaran mayor atención, han tenido que completar $S(f,P')$.

[70] Suma de los porcentajes obtenidos en la categoría de los niveles 4 y 5.

[71] Véase el epígrafe *VII.4.1.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux.*

Las *categorías analíticas* son las más difíciles de comprender por los estudiantes, cuando sólo se pide un concepto se alcanza el máximo nivel[72] con más facilidad (ESIS, 84%), si intervienen varios baja considerablemente (RSISR y ACAFE, 28% y 28%) y cuando se pide que redacten las ideas extraídas del estudio de un pequeño texto matemático, entonces, los resultados son simbólicos (EID, 8%). Así pues, poco más de la tercera parte de las respuesta de los estudiantes (37%) en este grupo de categorías han alcanzado el nivel óptimo.

Si calculamos, en la tabla VII.4.2, las medias de los porcentajes del nivel más bajo[73], obtenemos en las *categorías analíticas* el 27% mientras que en las *categorías gráficas* los estudiantes se quedan en el 11%. Así pues, destacamos la menor dificultad de las *categorías gráficas* y, en consecuencia, parece que la percepción gráfica y la visualización es más eficaz para estos alumnos (Castro y Castro, 1997 y Duval, 1999).

VII.4.3. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA

El modelo teórico bajo el cual se realiza la presente investigación es el *modelo de comprensión de Sierpinska*, el cual exige que se establezcan los actos de comprensión y los obstáculos y/o dificultades[74] asociados a la enseñanza-aprendizaje de la integral definida. Así lo hemos establecido en el capítulo III[75] y, por tanto, debemos identificar los actos de comprensión que se derivan de la acción y, sobre todo, del análisis de los cuadernillos.

En este ciclo de exploración, ante la ausencia de investigación del cálculo de primitivas inmediatas mediante el cálculo mental y del uso de las nuevas tecnologías, nos limitaremos a determinar los actos de comprensión y los obstáculos y/o dificultades según se recoge en la tabla III.1.5.1[76] del capítulo III relativos a las once categorías de comprensión matemática analizadas

[72] Nivel 5: La respuesta es totalmente correcta.

[73] Nivel 1: La respuesta es incorrecta en todos sus términos o no contesta.

[74] Consideramos que, en nuestra investigación, los estudiantes no siempre encuentran obstáculos en la adquisición del conocimiento matemático, en ocasiones, tienen dificultades.

[75] Véase el epígrafe *III.1.5. El Modelo de Comprensión de Sierpinska.*

[76] *Tabla III.1.5.1. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al aprendizaje de la integral definida.*

anteriormente. Tanto los actos de comprensión de Sierpinska como los obstáculos y/o dificultades observados en el ciclo I son reconocidos por sus códigos (entre paréntesis) mediante las correspondientes categorías de comprensión matemática (cuyos códigos también los escribimos entre paréntesis)[77] y, además, se comentan a nivel general y no de forma individualizada puesto que esta investigación no contempla ningún estudio de casos. He aquí el análisis de las producciones de los estudiantes según el marco o modelo teórico mencionado:

Los estudiantes identifican una superficie delimitada por la gráfica de una función positiva, el eje de abscisas y dos rectas verticales (CI_{11}; DGA); también lo consiguen, al menos gráficamente, con los conceptos de partición (cuando consta de tres nodos) y sumas inferior y superior de Darboux asociadas a esa partición, además, de los extremos absolutos de la función en cada subintervalo de los dos que determina la partición inicial (CI_{12}, CI_{14} y CI_{16}; DGSI y DGSS).

La deficiente identificación y discriminación entre una partición, *P*, y un refinamiento de la misma, *P'*, conlleva que, al menos la mitad de los alumnos, tengan dificultades en la discriminación de las respectivas sumas inferiores y superiores y en el establecimiento de la relación existente entre todas ellas (OI_{16} y OI_{17}; RSISR)[78].

Los estudiantes se sienten más seguros cuando deben identificar un concepto en lugar de relacionar varios. Esta afirmación queda confirmada en este primer ciclo por el elevado número de alumnos que generalizan las sumas inferior y superior de Darboux, aunque el número de nodos del intervalo [a,b] sea indeterminado (CI_{13}, CI_{15} y CI_{17}; ESIS)[79].

[77] Si, por ejemplo, se escribe (CI_{11}; DGA) significa que aparece el acto de compresión CI_{11}: *Identificación de una superficie delimitada por la gráfica de una función continua y positiva, el eje OX y las rectas x=a y x=b* y, además, ello queda corroborado por la categoría de comprensión matemática DGA: *Determinación gráfica del área.*

Así pues, cuando en el mismo paréntesis incluyamos códigos de actos u obstáculos y códigos de categorías, la sintaxis será: (ACT-OBS, ACT-OBS,... y ACT-OBS; CAT, CAT,... y CAT).

[78] El equipo investigador no ha considerado necesario establecer actos de comprensión y obstáculos entre una partición *P* y un refinamiento de la misma *P'*. Sin embargo, pensamos que toda partición *P* se puede generalizar mediante refinamientos y las sumas de Darboux asociadas a las nuevas particiones generalizan las sumas inferior y superior de la función f asociadas a *P*.

[79] Pensamos que no existe contradicción alguna entre los párrafos que provocan esta nota y la anterior, más bien, que los estudiantes de segundo de bachillerato de ciencias sociales no comprenden la relación de orden parcial que puede establecerse en el conjunto de las particiones del intervalo [a,b].

Identificar y discriminar las integrales inferior y superior de Darboux es muy difícil para la mayoría de los alumnos y, en este ciclo de exploración, conjeturamos que los estudiantes tienen grandes dificultades en la comprensión del teorema de caracterización óptima de las funciones integrables Darboux y, posiblemente, algunos piensan que las integrales inferior y superior de Darboux no se alcanzan, más bien, se aproximan a un valor (OI_{19a}, OI_{19b}, OI_{20a} y OI_{20b}; EID).

Las sumas de Riemann son fáciles de identificar gráficamente y, pensamos que, no son difíciles de generalizar; sin embargo, nada sabemos de la capacidad de los estudiantes para discriminarlas con las sumas inferior y superior de Darboux y mucho menos de sintetizar unas y otras bajo las desigualdades $s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P)$ (CI_{23} y CI_{24}; DGSR).

Generalizar el concepto de función área y transferirlo al concepto de integral indefinida sintetizándolo bajo la expresión $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es muy difícil para todos los estudiantes y, constatamos que, el mayor obstáculo con el que se encuentran es la identificación del límite superior de la integral con la variable de integración (OI_{30} y OI_{34}; RFIAR).

Entendemos que los estudiantes identifican y discriminan los polígonos regulares más comunes (CI_2), aunque no han sintetizado suficientemente sus áreas (OI_6; ACAFE) al no percibir que el área limitada por la función $f(x)=x$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=1$ es el área del triángulo rectángulo cuyos vértices son O(0,0); A(0,1) y B(1,1).

Pensamos que los alumnos transfieren correctamente las propiedades de la descomposición de una superficie poligonal en superficies elementales (OI_6) y de la unicidad del área de una superficie ante las diferentes transformaciones de la misma y, estas propiedades las generalizan, al menos gráficamente, a las propiedades de la aditividad y del valor medio de la integral definida (IGAI e IGTMVI).

Analizadas por primera vez, según los *actos de comprensión y obstáculos de Sierpinska,* las once categorías de comprensión matemática de la integral definida establecidas en este ciclo de exploración, y considerando la metodología de investigación-acción, deberemos volver a analizarlas en el resto de los ciclos de la experimentación, bajo el marco teórico de Sierpinska, pues muestra investigación se desarrolla en un proceso espiral.

VII.5. REFLEXIONES DEL CICLO DE EXPLORACIÓN

Llegado a este punto, una vez realizadas las tres primeras fases de la investigación (planificación, acción y análisis) y determinados los actos de comprensión y obstáculos de Sierpinska derivados del análisis de los veinticinco cuadernillos teórico-prácticos de los estudiantes de 2º E, procede en estos momentos redactar las reflexiones a las cuales hemos llegado en este primer ciclo de la investigación o ciclo de exploración.

Esta experiencia inicial de investigación ha resultado gratificante para el profesor investigador y, a su vez, le ha permitido profundizar en didáctica de la matemática, lo cual ha redundado en una mejor calidad de la enseñanza. Los estudiantes han percibido una docencia distinta a la habitual, consideran que su trabajo diario es valorado y que pueden ser artífices directos y activos de su propio aprendizaje, es más, algunos que prácticamente habían abandonado la asignatura han trabajado la integral definida con interés.

En un principio, la implementación estaba prevista para un grupo de segundo de bachillerato de ciencias sociales del instituto de enseñanza secundaria “Arca Real” de Valladolid y debiera haberse realizado el primer trimestre del curso 2003-2004, sin embargo, ello no fue posible[80] y tuvo que hacerse, como es sabido, con un grupo del IES “Félix Rodríguez de la Fuente” de Burgos. La implementación se ha desarrollado a partir del 12 de mayo de 2004 hasta el final de la actividad docente del curso académico, pensamos que no es el momento idóneo para realizar investigaciones en didáctica de las matemáticas puesto que intervienen factores externos a la propia investigación que pueden distorsionarla. A pesar de las dificultades encontradas, creemos que la puesta en práctica del primer ciclo, reconocido como ciclo de exploración, puede considerarse positiva en atención a:

a) Los alumnos, en general, y después de las dos primeras clases en las que se utilizaron las transparencias han tenido una actitud positiva, es más, han intentado sustraerse de las preocupaciones inherentes al final de curso y se han centrado en el aprendizaje de la integral.

b) Los falta de consolidación de los conceptos previos del análisis (cálculo de límites, continuidad y derivabilidad) por parte de los estudiantes supone que los avances teórico-prácticos en la integral sean lentos y limitados.

[80] Por traslado del profesor investigador.

c) Las intervenciones de los alumnos han sido más frecuentes que en los meses anteriores, de mayor calidad científica, ha habido menos interrupciones y estudiantes que no intervenían en clase por su timidez han sido más activos y se han dirigido con más frecuencia a sus compañeros y al profesor[81]. Ningún alumno se ha sentido discriminado ni ha sido pasivo en su aprendizaje, todos han trabajado activamente.

d) Consideramos que las representaciones gráficas, por parte del profesor investigador, mediante tizas de diferentes colores hace que, después de la sorpresa inicial, los estudiantes valoren la actitud y el interés del docente por una enseñanza de calidad y, en consecuencia, favorezcan un mejor aprendizaje de los alumnos. Esto queda corroborado, por los estudiantes, por la utilización de distintos lápices de colores para determinar diferentes superficies en la toma de apuntes y en la propia resolución de ejercicios en sus cuadernos.

e) Los alumnos prestan más atención a los ejercicios prácticos que a los de contenido teórico, es más, les cuesta mucho trabajo dedicar un tiempo a pensar y prefieren resolver los problemas escribiendo inmediatamente la respuesta.

f) Los alumnos obtienen mejores resultados en las *categorías gráficas* que en las *categorías analíticas*, probablemente por el momento actual en el cual los medios audiovisuales tienen un protagonismo absoluto. Además, la redacción escrita de sus ideas matemáticas es muy deficiente.

g) La dedicación del profesor es muy activa, los estudiantes demandan constantemente su atención y algunos se impacientan cuando no pueden ser atendidos en el momento que lo desean.

h) El aprovechamiento de los alumnos puede considerarse alto, quizá más que con la clase magistral puesto que muestran más interés en la resolución de problemas y muchos de ellos continúan con las tareas cuando suena el timbre al final de la clase.

i) No se ha trabajado el cálculo de primitivas inmediatas mediante el cálculo mental y consideramos que en los próximos ciclos se debe

[81] Sobre todo, cuando el profesor se mezclaba entre los alumnos y abandonaba la tarima.

realizar. El binomio derivación-integración debe consolidarse y, como tal, los estudiantes deben adquirir la fluidez necesaria para relacionar ambos conceptos.

j) El uso de nuevas tecnologías, salvo la calculadora, ha estado ausente. Pensamos que los alumnos aprenden más y mejor combinando distintos registros y, en consecuencia, en los siguientes ciclos deberemos utilizar *software* matemático que permita pasar del registro gráfico al analítico-algebraico y viceversa con gran fluidez para que los estudiantes aprendan con más facilidad.

k) Las clases de este ciclo de exploración no han sido grabadas, el profesor investigador se ha valido de su cuaderno de campo y de los cuadernillos de los alumnos, consideramos que tales instrumentos son insuficientes para la toma de datos, en ciclos posteriores deberán emplearse más medios materiales para recoger fielmente la puesta en práctica de la acción o implementación.

l) No es aconsejable referirse a los alumnos de forma indeterminada, en los siguientes ciclos hay que arbitrar medidas que faciliten la fluidez en la redacción y lectura de la presente memoria.

m) Desde este momento se considera prioritario revisar la programación del Departamento de Matemáticas del IES “Félix Rodríguez de la Fuente” de Burgos con el propósito de impartir el Análisis Matemático de las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II en el primer trimestre de los sucesivos cursos académicos.

Consideramos que estas reflexiones son importantes y partimos de ellas para realizar un nuevo ciclo[82] en el cual, de nuevo, seguiremos las fases que lo componen[83] y así hasta llegar a la saturación. Así pues, el reto es grande, las expectativas son altas y el rigor en la investigación ha de ser el hilo conductor que nos lleve a las conclusiones de esta tesis doctoral.

[82] Recuérdese que el marco metodológico cualitativo de investigación-acción es un proceso en espiral, véase el capítulo II.

[83] Planificación, acción, análisis de la acción y reflexión.

CAPÍTULO VIII: CICLOS DE CONFIRMACIÓN (II Y III), CURSOS 2004-2005 Y 2005-2006........... 347

VIII.1. INTRODUCCIÓN... 347

VIII.2. PLANIFICACIÓN... 349

VIII.3. ACCIÓN... 353

VIII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN 353

VIII.3.1.1. SESIÓN 4: Miércoles (15-12-2004) y lunes (12-12-2005) 354

VIII.3.1.2. SESIÓN 12: Lunes (17-01-2005) y miércoles (11-01-2006) 356

VIII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN.. 360

VIII.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS........................... 363

VIII.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA 363

VIII.4.1.1. DR: Representación de la función de Dirichlet 365

VIII.4.1.2. DMIN4: Mínimos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos 366

VIII.4.1.3. DMAX4: Máximos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos... 367

VIII.4.1.4. DSI4: Representa y calcula la suma inferior según DMIN4...... 368

VIII.4.1.5. DSS4: Representa y calcula la suma superior según DMAX4.. 369

VIII.4.1.6. DIINF: Dirichlet integral inferior 370

VIII.4.1.7. DISUP: Dirichlet integral superior 371

VIII.4.1.8. DNI: Dirichlet no integrable... 373

VIII.4.1.9. AR: Representar el área determinada por la función afín.......... 374

VIII.4.1.10. AMIN4: Mínimos de la función afín para una partición de 4 subintervalos... 375

VIII.4.1.11. AMAX4: Máximos de la función afín para una partición de 4 subintervalos... 376

VIII.4.1.12. ASI4: Representa y calcula la suma inferior según AMIN4.... 377

VIII.4.1.13. ASS4: Representa y calcula la suma superior según AMAX4 379

VIII.4.1.14. AIINF: Afín integral inferior 380

VIII.4.1.15. AISUP: Afín integral superior 382

VIII.4.1.16. AI: Afín integrable... 384

VIII.4.1.17. CP: Cálculo de primitivas 386

VIII.4.2. TABLAS RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DE LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN... 389

VIII.4.2.1. Categorías de los ciclos de confirmación (II y III) que son comunes al ciclo de exploración (I)... 390

VIII.4.2.2. Nuevas categorías de los ciclos de confirmación (II y III) 392

VIII.4.3. REFLEXIONES DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS DE LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN................. 394

VIII.4.4. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA 397

VIII.5. REFLEXIONES DE LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN..402

CAPÍTULO VIII: CICLOS DE CONFIRMACIÓN (II Y III), CURSOS 2004-2005 Y 2005-2006

VIII.1. INTRODUCCIÓN

El presente capítulo, referente a la experimentación en los ciclos de confirmación, y debido al elevado número de ciclos que componen esta investigación, creemos necesario incluir los ciclos II y III correspondientes a los cursos académicos 2004-2005 y 2005-2006. Pensamos que ello es posible por darse similitudes entre ambos ciclos tanto en el desarrollo de la actividad docente como en los materiales utilizados en cada uno de ellos.

El profesor investigador (PI), en septiembre de 2004, conocía el funcionamiento del Departamento de Matemáticas del IES "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos y las características de su alumnado, además, ya había realizado el primer ciclo de la investigación[1] y podía reanudar su actividad investigadora desde la fase de las reflexiones del ciclo de exploración. Escribamos, de nuevo, algunas de ellas[2] y comentemos las actuaciones que hemos seguido al respecto:

1. *"Desde este momento se considera prioritario revisar la programación del Departamento de Matemáticas del Instituto con el propósito de impartir el Análisis Matemático de las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II en el primer trimestre de los sucesivos cursos académicos".* En efecto, el Departamento en las programaciones de Matemáticas CC SS II, a partir de septiembre de 2004, establece que el Análisis Matemático de dicha asignatura se impartirá desde el inicio del curso hasta mediados del mes de enero.
2. *"No es aconsejable referirse a los alumnos de forma indeterminada, en los siguientes ciclos hay que arbitrar medidas que faciliten la*

[1] Véase el *Capítulo VII: Ciclo de Exploración (I), Curso 2003-2004.*

[2] Las reflexiones del ciclo anterior irán entrecomilladas y en cursiva.

fluidez en la redacción y lectura de la presente memoria". A partir de este momento consideramos oportuno referirnos a los estudiantes con un código alfabético de dos letras mayúsculas formado por las iniciales del nombre[3] y del primer apellido; si dos alumnos coinciden en su código, entonces la segunda letra (de uno de ellos) será la inicial del segundo apellido y si persiste la coincidencia, el código estará formado por las iniciales de los dos apellidos. Cuando se estudien varios ciclos conjuntamente los códigos no podrán coincidir salvo que se refiera a un mismo alumno repetidor y que haya cursado la asignatura, en los dos ciclos, con el profesor-investigador.

3. *"Las clases de este ciclo no han sido grabadas".* Desde ahora, salvo que se especifique lo contrario, se grabarán en audio todas las clases y, además, se seguirán tomando los datos tal y como se hizo en el ciclo de exploración.
4. *"El uso de nuevas tecnologías, salvo la calculadora, ha estado ausente".* Desde el segundo ciclo, inclusive, y hasta el final de la investigación se utilizará el programa de *software* matemático *DERIVE* para realizar prácticas informáticas en las cuales puedan combinarse registros gráficos, analíticos y numéricos de la integral[4].
5. *"No se ha trabajado el cálculo mental".* El cálculo mental debe formar parte de la presente investigación[5], por tanto, desde este momento dedicaremos el tiempo necesario para realizarlo en la práctica docente y, en consecuencia, redactar en la presente memoria los datos objetivos que hayamos extraído del mismo.

No deseamos extendernos más comentado el resto de las reflexiones del ciclo de exploración, sin embargo, estamos obligados a tenerlas presentes en todo momento, en primer lugar al implementar los ciclos de confirmación que nos servirán de punto de partida y, posteriormente, en la redacción del

[3] Si el nombre es compuesto, generalmente, será la inicial del primero.

[4] Recuérdese, en el capítulo I, el objetivo 4: "*Analizar la integración del programa de cálculo simbólico DERIVE, aplicado al desarrollo teórico-práctico de la integral definida, en el proceso de enseñanza del profesor y aprendizaje de los estudiantes".* Además, considérense las hipótesis 4.1 y 4.2, del capítulo III, asociadas a este objetivo.

[5] Recuérdese, en el capítulo I, el objetivo 2: "*Descubrir los logros y las dificultades que tienen los estudiantes al resolver mentalmente integrales indefinidas sencillas, que sean muy parecidas a las que figuran en las tablas de primitivas".* Además, considérense las hipótesis 2.1 y 2.2, del capítulo III, asociadas a este objetivo.

presente capítulo en el cual describiremos las reflexiones más relevantes a las que hayamos llegado.

En estos dos ciclos de confirmación se sigue una docencia teórico-práctica interactiva: el profesor explica y los alumnos intervienen continuamente. En los ciclos de confirmación se practica una recogida de datos más eficaz que en el anterior y se incluyen, como sabemos, ciertas novedades en el desarrollo docente; concretamente:

- Las clases son grabadas en audio.
- Se realizan prácticas de la integral definida en el aula de informática.
- El cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental forma parte de los ciclos II y III.
- Se utilizan medios tecnológicos para la exposición teórica.
- El profesor investigador incrementa la atención personalizada a cada uno de los estudiantes.

VIII.2. PLANIFICACIÓN

En los actuales ciclos de confirmación, la planificación debe realizarse antes del mes de diciembre puesto que la unidad didáctica correspondiente a la integral, según quedó establecido por el departamento de matemáticas, deberá ser explicada, aproximadamente, durante el último mes del primer trimestre de cada curso lectivo. El profesor-investigador considera que, a pesar de los exámenes de la primera evaluación, la investigación se verá menos condicionada por factores externos que la realizada en el ciclo de exploración y, como tal, celebra el cambio realizado por el departamento de matemáticas[6].

Si en el ciclo anterior hubo un tiempo muy limitado para llevar a cabo la acción, no es el caso en estos dos ciclos y, a tal efecto, hemos establecido un calendario más amplio para implementarla, pensamos que esto redundará en una mayor calidad de la enseñanza del profesor y del aprendizaje de cada alumno de la integral y los datos que obtengamos de estos ciclos de confirmación serán más ricos que los del anterior.

[6] Dicho cambio fue realizado a propuesta del profesor investigador.

Dos grupos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales, uno por cada curso lectivo, nos han servido para desarrollar esta parte de nuestra investigación-acción; estos grupos han sido 2º E (ciclo II, curso 2004-2005) con 20 alumnos y tres de ellos repetidores y 2º F (ciclo III, curso 2005-2006), también, con 20 alumnos y dos de ellos repetidores.

Atendiendo a las reflexiones del ciclo anterior y a la introducción del presente capítulo, a cada alumno le hemos asignado un único código; además, hemos localizado la posición física que, generalmente, ocupa cada uno de ellos en el aula, la cual tiene dos pasillos centrales y tres filas de pupitres pareados. Las tablas VIII.2.1 muestran la distribución a la cual hacemos referencia.

	P I Z A R R A S				
V E N T A N A S					
	CP, TF	*P A S I L L O*		*P A S I L L O*	
	NC, SR		BM, JM		JG, AM
	SC, SA		DA, RG		DR
	EG, MT		NU		BR
	LM, SR				HL

	P I Z A R R A S				
V E N T A N A S					
	MN, AP	*P A S I L L O*		*P A S I L L O*	
	MD, TE		EM		BB, RD
	RA, CB		MA, DS		MC, JC
	SB, YC		DC, MG		DA
	RS		JA		

Tablas VIII.2.1. Distribución en las aulas de grupo de los alumnos de 2º E del ciclo II, curso 2004-2005 (izquierda) y 2º F del ciclo III, curso 2005-2006 (derecha).

En el aula de ordenadores, obligatoriamente, se colocan por parejas; sin embargo, en el aula ordinaria se respeta su ubicación natural del resto de las asignaturas para no romper el contrato didáctico en este aspecto. DA es el único alumno repetidor que forma parte de los dos ciclos de confirmación, los demás estudiantes, incluyendo los del ciclo de exploración, intervienen por primera vez en esta investigación.

En este capítulo redactamos, conjuntamente, dos ciclos y no podemos como en el anterior describir secuencialmente los hechos acaecidos en cada uno de ellos puesto que pasaríamos de un grupo a otro de forma indiscriminada avanzando y retrocediendo un año, así pues, debemos arbitrar alguna medida que sin restar rigor a la investigación resulte fluida la redacción de la memoria de la tesis e invite a proseguir su lectura.

Cada grupo ha tenido un horario distinto, en la tabla VIII.2.2 hemos incluido los días en los cuales se ha impartido matemáticas en cada uno de ellos, el periodo diario, de 50 minutos, que le corresponde y la hora de comienzo y finalización de los periodos de clase.

	LUNES		***MARTES***		***MIÉRCOLES***		***JUEVES***		***VIERNES***	
2º E ***2004-2005***	**2º**	9:25 10:15	**--**	------- -------	**6º**	13:35 14:25	**2º**	9:25 10:15	**1º**	8:30 9:20
2º F ***2005-2006***	**1º**	8:30 9:20	**4º**	11:30 12:20	**3º**	10:35 11:25	**--**	------- -------	**5º**	12:40 13:30

Tabla VIII.2.2. Periodos lectivos semanales de matemáticas de los grupos 2º E y 2º F.

A finales de noviembre ya estaba planificado el trabajo que debía realizarse en cada uno de los ciclos, se había estudiado *DERIVE* y el profesor investigador estaba ultimando la implementación de un programa informático con el cual los estudiantes deberían realizar, en el mes de enero, la práctica de la integral en el aula de informática.

En este momento destacamos que en el ciclo de exploración el tiempo de la acción fue muy reducido, con el objetivo fundamental de seguir la programación establecida por el departamento de matemáticas del instituto y no renunciar a explicar ninguno de los temas de la asignatura MACS II, nos proponemos ampliar el tiempo de las fases de la acción o implementación de los ciclos de confirmación, así pues, si en el ciclo I hubo nueve sesiones básicas[7], en cada uno de estos dos nuevos ciclos tendremos quince sesiones básicas en las cuales trabajaremos los tópicos del curso 2003-2004 ampliándolos con el cálculo mental y el uso de las nuevas tecnologías. La tabla VIII.2.3 contiene la planificación de la puesta en práctica del trabajo de la integral en los grupos 2º E y 2º F, así como las fechas en las cuales se realizaron las distintas sesiones.

[7] Entendemos como sesión básica a aquélla que corresponde con una clase en el aula del grupo o en el aula de informática, excluyendo los exámenes y los días de repaso posteriores a la evaluación final del mes de mayo.

SESIÓN	*TRABAJO PLANIFICADO-REALIZADO*	*2º E*	*2º F*
1	Desarrollo histórico de la integral. Áreas del rectángulo y del círculo.	9-12-04 jueves	2-12-05 viernes
2	Sumas inferior y superior de Darboux; integrales superior e inferior de Darboux. Integral de Darboux.	10-12-04 viernes	7-12-05 miércoles
3	Sumas de Riemann e integral de Riemann. Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Regla de Barrow. Ejemplos. Propiedades de la Integral Definida.	13-12-04 lunes	9-12-05 viernes
4	Cálculo de primitivas. Integrales inmediatas.	15-12-04 miércoles	12-12-05 lunes
5	Cálculo de primitivas. Integración de funciones racionales elementales y de funciones exponenciales.	16-12-04 jueves	13-12-05 martes
6	Cálculo de primitivas elementales.	17-12-04 viernes	14-12-05 miércoles
7	Cálculo de primitivas elementales.	20-12-04 lunes	16-12-05 viernes
8	Aplicaciones elementales del Teorema Fundamental del Cálculo. Regla de Barrow.	10-01-05 lunes	19-12-05 lunes
9	Área encerrada entre una curva, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b. Área comprendida entre dos curvas. Problemas elementales.	12-01-05 miércoles	20-12-05 martes
10	Cálculo de áreas e integral definida.	13-01-05 jueves	9-01-06 lunes
11	Cálculo de áreas e integral definida.	14-01-05 viernes	10-01-06 martes
12	Aplicaciones de la Integral definida.	17-01-05 lunes	11-01-06 miércoles
13	Resolución de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad.	19-01-05 miércoles	13-01-06 viernes
14	Resolución de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad.	20-01-05 jueves	16-01-06 lunes
15	Prácticas con *DERIVE* en el aula de informática.	20-01-05 jueves	23-01-06 lunes
16	Primera prueba de evaluación a las 16:30 horas.	25-01-05 martes	6-02-06 lunes
17	Segunda prueba de evaluación a las 16:30 horas.	25-05-05 miércoles	25-05-06 jueves
18	Repaso de las Matemáticas Aplicadas CC. SS. II para las Pruebas de Acceso y exámenes de Septiembre.	1-10 junio 2005	1-13 junio 2006

Tabla VIII.2.3. Planificación de los ciclos de confirmación (cursos 2004-2005 y 2005-2006).

VIII.3. ACCIÓN

Las fases de la acción de los ciclos de confirmación se desarrollaron con dos grupos, 2º E y 2º F, de dos cursos lectivos distintos; ambos grupos constaban de 20 alumnos cada uno y el periodo establecido para ello fueron los meses de diciembre y enero. Novedades importantes con respecto a la acción del ciclo de exploración son: el incremento del número de sesiones, la puesta en práctica del cálculo mental y el uso de las nuevas tecnologías. Los instrumentos de toma de datos fueron los del ciclo anterior y, además, cada una de las sesiones ha sido grabada en audio.

Conviene aclarar que el cálculo mental no tiene una o varias sesiones específicas de la acción, está dentro de todas las sesiones dedicadas a la integral. El uso de las nuevas tecnologías, en concreto, el programa de *software* matemático específico *DERIVE* tiene una sesión específica en el aula de informática del instituto que se describirá oportunamente.

VIII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN

Las sesiones de trabajo realizadas al poner en práctica la docencia de la integral se describen en el anexo H y dos de ellas (cuarta y duodécima) quedan descritas a continuación, asimismo, incluimos en la descripción los hechos objetivos más relevantes extraídos de las anotaciones del cuaderno de campo del profesor y de la audición de las cintas grabadas en cada una de las sesiones de enseñanza-aprendizaje en el aula de grupo, así como las distintas apreciaciones del profesor investigador.

Es evidente que redactar cada sesión para dos ciclos diferentes comporta un grado de dificultad superior al del ciclo de exploración, para ello hemos optado por poner en el epígrafe correspondiente las dos fechas[8] en las cuales se desarrolla la acción y, como las clases del aula de cada grupo no corresponden a la misma fecha ni al mismo periodo lectivo, consideramos que cada una de ellas comienza en el minuto 0 y finaliza en el minuto 50.

Las sesiones del aula de informática en las cuales se aplican las nuevas tecnologías recibirán una atención específica en el capítulo XI de la presente memoria de tesis doctoral.

[8] La primera fecha corresponderá al grupo 2º E del curso 2004-2005 y la segunda a 2º F del curso siguiente.

Cuando haya diferencias sustanciales entre un grupo y otro, aún en la misma sesión, se especificará y al referirnos a un alumno determinado lo haremos mediante su código. Las tres últimas sesiones de la tabla VIII.2.3 no serán descritas como las anteriores.

Desde este momento no serán utilizadas las transparencias, serán sustituidas por el ordenador y un cañón que proyectarán en una pantalla la información que el profesor considere oportuna.

VIII.3.1.1. SESIÓN 4: Miércoles (15-12-2004) y lunes (12-12-2005)

Desde este momento, pasamos a resolver ejercicios prácticos, no insistiremos más sobre la formalización teórica de la integral. Los alumnos sienten que, de nuevo, se vuelve a la rutina de las clases de matemáticas y, en general, se muestran pasivos al comienzo de la clase. El profesor sugiere que todos los alumnos tengan, a la vista, las tablas de derivadas e integrales inmediatas[9], después de tres minutos, ya es posible comenzar.

El profesor, para situar a los alumnos en contexto, relaciona los conceptos de derivación e integración: escribe varias funciones sencillas en la pizarra y las deriva, seguidamente, la derivada de cada función la integra y hace ver a los alumnos que vuelven a obtenerse las funciones originales[10].

Estamos, aproximadamente, en el minuto 8 y es el momento de comenzar a resolver los ejercicios número 3[11] y nº 4[12], pág. 213 del libro de texto[13]. No

---

[9] Páginas 157 (derivadas) y 212 (primitivas) del libro de texto.

[10] En palabras de SA y DS: *"La integración es lo contrario de la derivación"*. Apreciación corroborada por varios alumnos de los dos grupos.

[11] Ejercicio nº 3. Halla las primitivas de estas funciones:

$a)\ f(x) = (x^3 - 5x + 3)^2 (3x^2 - 5)$ $\quad b)\ f(x) = (5x + -1)^3$ $\quad c)\ f(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x}$

$d)\ f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x}$ $\quad e)\ f(x) = \cos x\, sen^3 x$

[12] Ejercicio nº 4. Busca las primitivas de:

$a)\ f(x) = x\, 2^{x^2} \ln 2$ $\quad b)\ f(x) = x\, 2^{x^2}$ $\quad c)\ f(x) = 2^{3x-5}$

$d)\ f(x) = sen 3x$ $\quad e)\ f(x) = sen(x^3 - 4x^2)(3x^2 - 8x)$ $\quad f)\ f(x) = \dfrac{senx}{\cos x}$

[13] En el anexo E se ha escaneado la novena unidad didáctica: *Iniciación a las integrales* del libro de texto: Colera, J., García, R. y Oliveira, M. (2003). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: Anaya.

es nuestra pretensión volver a repetir las actuaciones del ciclo de exploración, más bien, escribiremos las intervenciones más novedosas y que, a la vez, tengan un cierto interés didáctico.

RG considera que *"3 a) es muy sencilla, basta multiplicar y dividir por 3 y el resultado es* $\frac{1}{3}(x^3-5x+1)^3+k$*, porque tiene que ser un grado mayor".* BM, JM y algunos alumnos más dudan; el profesor recurre a la derivada-integral de la función potencial para explicar el resultado y, los alumnos, parece que comprenden la solución dada por RG.

El 3 c) suscita ciertas dificultades, sin embargo LM observa que *"la derivada del denominador es el numerador"* y el PI pregunta si conoce alguna derivada o integral donde aparezca esa relación, los alumnos buscan en las dos tablas, CP comenta que puede ser un *"neperiano"*, se discute la propuesta, el profesor escribe varios ejemplos sencillos de integración logarítmica y, al final, la mayoría de los alumnos escriben la solución[14]. El primer grupo está atento, pocos se suelen despistar, el segundo es más inquieto e intentan ralentizar la clase[15]. Se acaba el ejercicio nº 3.

El tiempo avanza, han pasado 23 minutos desde el inicio de la clase y con el grupo 2º E se ha optado por resolver el ejercicio nº 4, no así en 2º F que, posteriormente, se justificará la opción tomada. El cálculo de las tres primeras primitivas del nº 4, es difícil para los alumnos, la derivada de la función exponencial no la tienen suficientemente interiorizada y, peor aún, si la base no es el número *e.* Resolver el 4 a) ha sido un continuo ir y venir de las derivadas a las integrales, los alumnos se despistan, se desmoralizan, hablan, interrumpen constantemente e incluso jalean a DR cuando dice: *"Esto no hay quien lo entienda".* El profesor ha optado, en lugar de resolver 4 c) sustituirlo por el cálculo de $\int e^{3x-5}dx$ y otras similares[16], ahora parece que entienden mejor las soluciones, incluso EG comenta a sus compañeros más próximos: *"Esto es más fácil".* El resto del nº 4 se hace con cierta celeridad, algunos alumnos se desentienden y no prestan atención, pero no molestan.

[14] El profesor investigador comenta que debe escribirse el logaritmo neperiano del valor absoluto de la función denominador, los alumnos no lo consideran importante y debe aclararse que sólo existen logaritmos de valores positivos.

[15] Como ejemplo, basta decir que el profesor no puede poner tantos ejemplos como en el anterior grupo, debe ser más conciso.

[16] El PI ha considerado oportuno proponer ejercicios de integración exponencial con base el número *e.*

Realizada esta experiencia en el ciclo II, el equipo investigador[17] considera que la dificultad añadida del nº 4 no aporta un incremento equivalente a los estudiantes en la consolidación de los contenidos matemáticos y, como tal, se decidió que en los ciclos sucesivos no se resolvieran integrales exponenciales de base distinta al número *"e"*. Consideramos que los alumnos deben pensar más, escribir menos y relacionar con fluidez la derivación con la integración, es decir, potenciar el cálculo mental y, en consecuencia, en esta sesión se sustituyó en 2º F dicho ejercicio por el nº 1 de la página 227[18].

Los alumnos de 2º F con los cuatro primeros apartados del ejercicio se sienten, en general, seguros al resolverlos. Llama la atención que al calcular una primitiva de $\sqrt{3}$ hay alumnos que tienen dificultades, incluso TE dice que *"$\sqrt{3}$ es* 3 *elevado a ½ y se calcula como una función potencial"* y, sin embargo, les resulta evidente que una primitiva de 3 es 3x.

El cálculo de las cuatro últimas primitivas comporta mayores dificultades, expresar $1/x^2 = x^{-2}$ y $\sqrt{x} = x^{1/2}$ no es fácil para muchos estudiantes y si le añadimos la integración de una función con potencia negativa o fraccionaria, entonces, el error está garantizado para la mayoría de ellos, además, el ruido y las interrupciones son constantes.

VIII.3.1.2. SESIÓN 12: Lunes (17-01-2005) y miércoles (11-01-2006)

Ya nos hemos repuesto del caos de la sesión anterior, los alumnos opinan que no pueden preguntarse ejercicios tan difíciles y que los de los exámenes tienen que ser más fáciles, el profesor contesta que serán más sencillos y no tendrán radicales, en cualquier caso, se debe saber calcular áreas comprendidas entre dos curvas, es decir, ejercicios tipo 13, 15, 16 y 17, excluyendo 17 b). Los alumnos sienten que sus peticiones son atendidas[19] y ya podemos comenzar una nueva sesión del cálculo integral.

---

[17] El director de la tesis y el profesor investigador.

[18] Ejercicio nº 1. Halla una primitiva de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = x+1 \qquad b)\ f(x) = 2x-\sqrt{3} \qquad c)\ f(x) = \frac{x}{2}+x^2 \qquad d)\ f(x) = -8x^3+3x^2$

$e)\ f(x) = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3} \qquad f)\ f(x) = \sqrt{x}+\frac{3}{5x^4} \qquad g)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{3} \qquad h)\ f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

[19] Es decir, se respeta el contrato didáctico.

En este momento no podemos considerar que los dos grupos tengan algo en común en esta sesión, es evidente que ambos son diferentes y hemos optado por analizar dicha sesión individualmente.

Grupo 2º E, curso 2004-2005

El PI propone la resolución del problema número 25[20]. Expresar una función en valor absoluto produce rechazo en muchos estudiantes[21], el profesor escribe la función definiéndola a trozos, algunos alumnos dudan[22]. Para conectar con conceptos anteriores el profesor dice: *"Posiblemente la función no sea derivable en un punto, ¿dónde?".* LM afirma: *"En x=2, ya lo hemos visto en continuidad y derivabilidad".*

La función está definida a trozos, los alumnos deben dibujarla y determinar la superficie cuyo área se desea calcular, observando la figura consiste en sumar el área de dos triángulos con bases y alturas conocidas. El profesor pide a los alumnos que expresen el área por medio de una integral, dudan, no saben qué escribir, CP y JG consideran que el área es $A = \int_0^5 (2x-4)\,dx$, pero el resultado no es el obtenido anteriormente; observando la gráfica y la expresión de la función se acepta que $A = \int_0^2 (-2x+4)\,dx + \int_2^5 (2x-4)\,dx$.

El segundo apartado se calcula sin ningún problema mediante la suma de las áreas de dos triángulos o, también, sumando dos integrales tal y como se hizo anteriormente. Es evidente que la representación gráfica de la función valor absoluto ha ayudado a los estudiantes a comprender la solución analítica y, además, la propiedad de la aditividad de la integral.

Estamos en el minuto 12 y, al hilo de este problema, debemos hacer el 27[23].

---

[20] Ejercicio nº 25.

A) Halla el área limitada por $y = |2x - 4|$, el eje X y las rectas x=0 y x=5. B) Calcula $\int_{-2}^{3} |2x-4|$.

[21] EG: *"No me gusta nada el valor absoluto".* Esta expresión es corroborada por muchos alumnos.

[22] RG: *"Hasta 2 es un tipo de función y después otro".*

[23] Ejercicio nº 27.
Dada la función *f(x)*, halla el área limitada por *f(x)*, el eje *OX* y las rectas x=0 y x=3:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x < -1/2 \\ -x^2 + 3x & -1/2 \le x \le 3 \\ |x+3| & x > 3 \end{cases}$$

Los alumnos dudan, SC y MT quieren eliminar el valor absoluto y no saben qué hacer con la integral. El profesor propone que *"observen el dominio de definición de cada una de las ramas"*, AM dice: *"cuando x es menor que – ½ o es mayor que 3, no interesa para calcular la integral".* Los alumnos dibujan la parte central de la función, señalan el área y, prácticamente por unanimidad, escriben y calculan $A=\int_0^3 \left(-x^2+3x\right)dx$.

El ejercicio 26[24] les parece sencillo, el profesor propone que dibujen las funciones, los estudiantes no tienen mayores dificultades para representar funciones definidas a trozos[25], colorean las superficies que les corresponden a cada una de las integrales y, por medio de la aditividad, calculan las integrales pedidas. El PI hace observar que si el enunciado hubiera sido: *"calcular el área comprendida entre la función g(x), el eje de abscisas y las rectas* $x=-1$ y $x=3$ *¿Coincidiría con* $\int_{-1}^3 g(x)\,dx$ *?".* La mayoría de los alumnos observan el dibujo, no tarda en contestar SR: *"No, porque* $\int_{-1}^1 2x\,dx$ *es cero y el área no es cero".* JM duda, su compañera BM le explica que la integral vale cero porque "se contrarrestan" las áreas de los dos triángulos[26].

Faltan 8 minutos para terminar la clase y el profesor propone el ejercicio 24[27] que considera más teórico. Los alumnos no entienden el enunciado y el PI, recordando la integral definida, escribe $\int_a^b f(x)\,dx$, siendo $f(x)$ cualquier función positiva y pide a los alumnos que hagan la correspondiente interpretación geométrica. Hay algunas dudas, HL la dibuja en el encerado, todos parecen comprender el significado analítico y geométrico; el profesor investigador, a la vez que señala un punto entre *a* y *b*, pregunta: *"¿Puedo*

---

[24] Ejercicio nº 26. Calcula: a) $\int_0^2 f(x)$ y b) $\int_{-1}^3 g(x)$, siendo:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad 0\le x\le 1 \\ 2-x & si \quad 1<x\le 2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x & si \quad -1\le x\le 1 \\ x^2+1 & si \quad 1<x\le 3 \end{cases}$$

[25] La representación gráfica de funciones, entre ellas las definidas a trozos, se ha realizado en el mes de noviembre.

[26] Es evidente que hay alumnos que discriminan los conceptos de área e integral definida.

[27] Ejercicio nº 24. Dada $f(x) = x + 1$, halla: $a)\int_0^x f \qquad b)\int_1^x f \qquad c)\int_{-1}^x f \qquad d)\int_1^3 f$

señalar un punto cualquiera entre a y b? ¿Cómo le llamamos?", contestan a coro "equis"; el profesor escribe *"x"* a la izquierda de *b* y colorea la superficie comprendida entre f, el eje de abscisas y las rectas $r_1=a$ y $r_2=x$, después dice que lo expresen analíticamente y muchos de ellos escriben $\int_a^x f(x)\,dx$, sin embargo, dudan[28] y SA dice: *"Que la x de dentro no puede ser igual que la de arriba".* El profesor marcando un punto entre *a* y *x* pregunta si se le puede llamar *t*, los alumnos dicen *"sí"*, entonces, dice el profesor, *"expresad bien la superficie coloreada".* CP dice: *"Integral entre a y x de* $f(t)$*",* el profesor escribe $\int_a^x f(t)\,dt$ y los alumnos parecen haberlo entendido. Sólo ha dado tiempo a hacer el 24 a), se propone que el resto se hagan en casa.

Grupo 2º F, curso 2005-2006

Con este grupo no es posible resolver los ejercicios de la sesión duodécima del ciclo anterior, así pues, para consolidar los conocimientos se ha optado por terminar el nº 17[29] y seguir con el nº 15.

Al proponer estas actividades, los alumnos se sienten más cómodos con este tipo de problemas puesto que han asimilado el procedimiento algorítmico del cálculo de áreas comprendidas entre dos curvas, el PI dice: *"No es necesario representar las funciones, sin embargo, vosotros debéis representarlas[30], señalar la superficie y calcular el área".*

El 17 d) es muy fácil, según DC que lo resuelve en el encerado. El 17 e) necesita más tiempo porque los estudiantes son muy lentos para representar polinomios de tercer grado y parábolas con coeficiente principal negativo, además, muchos estudiantes no poseen recursos suficientes para resolver ecuaciones de tercer grado[31] y al poseer tres puntos comunes la función diferencia, *h*(*x*), consideran que el área viene dada por $A=\left|\int_{-2}^{1} h(x)\,dx\right|$ en lugar

[28] Consúltese en *Antecedentes*, capítulo I: Abrahamson (1998), Harel y Kaput (1991), Ortega (2004) y Contreras y Ordóñez (2005).

[29] Véase el enunciado del ejercicio en la sesión anterior.

[30] El PI considera que los estudiantes consolidan mejor los conocimientos matemáticos si combinan adecuadamente los registros gráficos y analítico-algebraicos.

[31] Entiéndase, como tal, entre otros: factorizar, divisores del término independiente, regla de Ruffini, identidades notables, etc.

de calcular $A = \left|\int_{-2}^{0} h(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} h(x)\,dx\right|$. El 17 f), teniendo como guía el anterior, es resuelto por los alumnos sin excesiva dificultad.

Han pasado 24 minutos de clase y es el momento de hacer el nº 15[32]. Hacer este ejercicio anima a los alumnos; los dos primeros los resuelven, a la vez, uno en cada pizarra DA y MA; el tercero y cuarto son resueltos por EM y YC. El último, al resolverlo individualmente los estudiantes, encontramos que tiene dificultades para calcular las raíces RA que realiza los productos de los factores y después desea calcular las raíces[33] del polinomio resultante y MC, para calcular la integral, piensa que es de tipo potencial[34].

VIII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN

Las sesiones descritas de los ciclos de confirmación[35] se han basado en el cuaderno de campo del profesor, las grabaciones en audio de las clases, las anotaciones realizadas por el profesor inmediatamente posteriores a cada una de las sesiones, los cuadernos de trabajo de los alumnos y los cuadernillos de las actividades propuestas. La información recopilada por los medios mencionados nos ha permitido avanzar en el conocimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral llevado a cabo durante la acción y, para ello, hemos anotado los sucesos que lo conforman, destacando entre otros: el comportamiento y grado de motivación de los alumnos, avances en el aprendizaje, indisciplina y grado de integración entre los estudiantes; ello nos permite enunciar las siguientes reflexiones:

a) Pensamos que ha sido un acierto impartir la integral definida durante los meses de diciembre y enero por permitirnos dedicarle más tiempo y no sentir la presión de final de curso.

b) La explicación de los conceptos teóricos de la integral definida por medio del ordenador y el cañón proyector[36] hace que los alumnos, en

[32] Ejercicio nº 15. Calcula el área comprendida entre las curvas:
a) $y = x^2$ e $y = 3 - 2x$ b) $y = 4 - 2x^2$ e $y = 3x^2$ c) $y = x$ e $y = x^2 - 2$
d) $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 2$ e) $y = (x+2)^2(x-3)$ y el eje de abscisas.

[33] RA no se ha percatado de que el polinomio está factorizado.

[34] Además, MC no recuerda las identidades notables y es muy lento al realizar los productos.

[35] Véase el anexo H.

[36] Ordenador y cañón proyector sólo se han utilizado en las tres primeras sesiones.

los primeros momentos, se sientan desorientados, sin embargo, poco después prestan más atención que si la exposición fuera la clásica clase magistral.

c) La grabación en audio de las clases, salvo en los minutos iniciales de la primera sesión, es aceptada con total normalidad por los alumnos.

d) Los estudiantes habían interiorizado el área del rectángulo y del círculo desde el primer ciclo de educación secundaria obligatoria, por tanto, no perciben la necesidad de justificar científicamente dichas áreas ni de formalizar el número π.

e) Los alumnos piensan que la integral inferior, integral superior e integral de Darboux "siempre" coinciden para cualquier función, es decir, no discriminan la integrabilidad de la no integrabilidad. Además, consideran iguales las integrales de Darboux y Riemann.

f) El teorema fundamental del cálculo es considerado muy útil por los estudiantes, sin embargo, una dificultad importante para ellos es el cálculo de primitivas[37].

g) El cálculo de primitivas, tal y como se descubrió en el ciclo de exploración, sigue siendo difícil para los alumnos[38], no aprenden ninguna tabla de integrales inmediatas y prefieren consultarla.

h) Consideramos que el cálculo de primitivas elementales no puede localizarse en varias sesiones concretas y específicas[39], pensamos que las clases no pueden ser monográficas y, en consecuencia, parece más razonable aplicar la primera parte de cada clase al cálculo de primitivas y el resto a aplicaciones prácticas de la integral.

i) El cálculo mental, aunque se ha realizado, pensamos que debemos potenciarlo aún más en todas las sesiones y ha de ser la herramienta principal para el cálculo de primitivas elementales.

j) El tiempo dedicado a la enseñanza y el aprendizaje de la integral en cada uno de los ciclos de confirmación, excluyendo las sesiones de evaluación y repaso final, se ha incrementado en 2/3 con respecto al

[37] Sólo se han calculado primitivas elementales, no se ha aplicado ningún método de integración.

[38] La mayoría de los estudiantes no tienen fluidez en el cálculo de derivadas y, consecuentemente, tienen grandes dificultades para el cálculo de integrales inmediatas.

[39] Sesiones: 4, 5, 6 y 7.

ciclo de exploración. Esto ha supuesto que nos haya permitido tener una sesión práctica en el aula de informática y los estudiantes hayan tenido más tiempo para asimilar y consolidar los conceptos.

k) Corroboramos la reflexión del ciclo anterior por la cual consideramos que personalizar la enseñanza supone mayor protagonismo de los alumnos en su propio aprendizaje.

l) El libro de texto ha servido de guía para realizar las actividades, no así para presentar la teoría puesto que se ha expuesto según lo establecido en el capítulo V.

m) Las representaciones gráficas han de ser de buena calidad, es importante matizar lo fundamental y aconsejable utilizar diferentes colores para combinar los registros gráficos, analíticos y algebraicos. Creemos que ello favorece la mejor comprensión de los conceptos teóricos y facilita la resolución de los problemas a los alumnos.

n) Las nuevas tecnologías han tenido un destacado protagonismo en estos ciclos de confirmación, se ha utilizado el programa de cálculo simbólico *DERIVE*, además, el profesor ha implementado varios subprogramas con el objetivo de que los estudiantes comprendan de forma dinámica[40] diferentes conceptos matemáticos frente a la exposición y realización estática de la pizarra o lápiz y papel.

o) La mayoría de los estudiantes desconocen el programa de cálculo simbólico *DERIVE* y, en consecuencia, al ejecutar dicho programa supone que los alumnos presten más atención a los comandos que a la adquisición de los conceptos matemáticos mediante las nuevas tecnologías. Sin embargo, a pesar de estas dificultades, el uso del ordenador resulta motivador para los estudiantes de los ciclos de confirmación. Estas dos últimas reflexiones serán contrastadas en el capítulo XI, que estará dedicado al desarrollo de la docencia en el aula de informática.

[40] Entendemos por “forma dinámica” la construcción de varios gráficos y la realización de distintos cálculos en un corto periodo de tiempo frente a la “forma estática” que es la realización, durante un tiempo prudencial, de un único cálculo apoyado por un único gráfico.

VIII.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS

En los dos ciclos de confirmación el profesor investigador y el director de la tesis perfeccionaron el cuadernillo del ciclo de exploración que contenía un texto incompleto de la integral definida y debía ser completado por los alumnos, dicho cuadernillo, recogido en el anexo E de la presente memoria[41], se entregó a los estudiantes inmediatamente después de ser explicada la teoría de la integral y, ahora sí, pensamos que el tiempo que transcurrió hasta la recepción de los trabajos de los alumnos por el profesor fue suficiente para su realización.

VIII.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

En los ciclos de confirmación (ciclos II y III, cursos 2004–2005 y 2005-2006) se asignaron veintiocho categorías de comprensión matemática, definidas en el capítulo VI y en el anexo D, siendo valoradas las respuestas de los estudiantes mediante la escala Likert[42].

Siguiendo el procedimiento del capítulo anterior, en el análisis de cada una de las diecisiete nuevas categorías[43] de comprensión matemática se escribirá, en primer lugar, las siglas con las cuales es reconocida seguida de la expresión a la cual se refiere[44], después se detallará la actividad[45] que se pretende realizar y el objetivo que se desea alcanzar, posteriormente, se analizarán los datos según la escala Likert y, finalmente, se redactará una pequeña reflexión.

---

[41] El cuadernillo de la integral, presentado en el anexo F, corresponde al del ciclo de cierre de nuestra investigación. Consideramos que es innecesario incluir el de los ciclos de confirmación puesto que se deduce fácilmente del cuadernillo teórico-práctico del anexo F, basta seguir el estudio que se realiza de cada una de las categorías de comprensión matemática en el presente capítulo.

[42] Dicha escala establece cinco niveles de respuesta que van del 1 (mínimo) al 5 (máximo), éstos son:

1. La respuesta es incorrecta en todos sus términos o no contesta.
2. La respuesta no es totalmente incorrecta, sin embargo, no se puede considerar aceptable.
3. La respuesta se considera incompleta, no incorrecta, se puede mejorar de forma sustancial.
4. La respuesta es válida, aunque puede ser mejorada mínimamente.
5. La respuesta es totalmente correcta.

[43] Con el objetivo de aligerar el texto del presente capítulo y, a la vez, no sesgar la investigación se ha optado por no incluir en esta sección las categorías comunes de los ciclos de confirmación (II y III) y exploración (I).

[44] Cualquier categoría la reconoceremos, una vez formalizada, por sus siglas.

[45] Se ha optado por seguir una ordenación secuencial, aunque en el cuadernillo teórico-práctico no corresponda al mismo número de orden.

De nuevo, en el análisis de las respuestas escaneamos la respuesta correcta de uno o varios alumnos que identificamos con el código de su autor o autores y, en ciertas ocasiones se han incluido otras respuestas de los estudiantes, algunas de las cuales nos han llamado la atención por su originalidad o por los errores cometidos. Posteriormente, se muestra la distribución de las respuestas emitidas mediante un diagrama poligonal por cada ciclo donde hemos incluido la referencia (en negrita), es decir, las siglas de la categoría seguidas del año académico al cual corresponde nuestra experimentación, en el eje horizontal hemos colocado los niveles precedidos de las siglas de la categoría y en el eje vertical los porcentajes[46] de los niveles de cada una de ellas.

La figura o figuras escaneadas y los dos diagramas poligonales de cada categoría recibirán el nombre de *Gráficos VIII.4.1.n* donde *"n"* es el ordinal de la categoría[47]. Las referencias a las figuras siempre serán de izquierda a derecha y de arriba abajo; además, cada una de ellas llevará el código del alumno autor de la misma y, generalmente, la primera corresponderá con la respuesta correcta de un estudiante. Cada uno de los diagramas poligonales llevará asignada una etiqueta, en números romanos, correspondiente al ciclo al cual representa.

Finalmente, por cada una de las nuevas categorías de comprensión matemática de los ciclos de confirmación, daremos una reflexión en la cual redactaremos las conclusiones y apreciaciones que consideremos más importantes.

A partir de este momento, en las ocho próximas categorías, estudiamos la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional\ en\ [0,4] \\ 2 & si\ x\ es\ irracional\ en\ [0,4] \end{cases}$, que la reconocemos como función de Dirichlet, la cual no es integrable en el sentido Darboux ni Riemann. Adelantándonos a los resultados obtenidos en nuestra investigación, podemos confirmar que los alumnos representan aceptablemente la función; sin embargo, la comprensión del concepto de integrabilidad según Darboux les resulta dificultoso. Estas ocho categorías comienzan con la letra **D**.

[46] Nos hemos decantado por los porcentajes de los alumnos que fueron evaluados según la categoría porque resulta más sencilla su lectura que si consideramos las frecuencias absolutas.

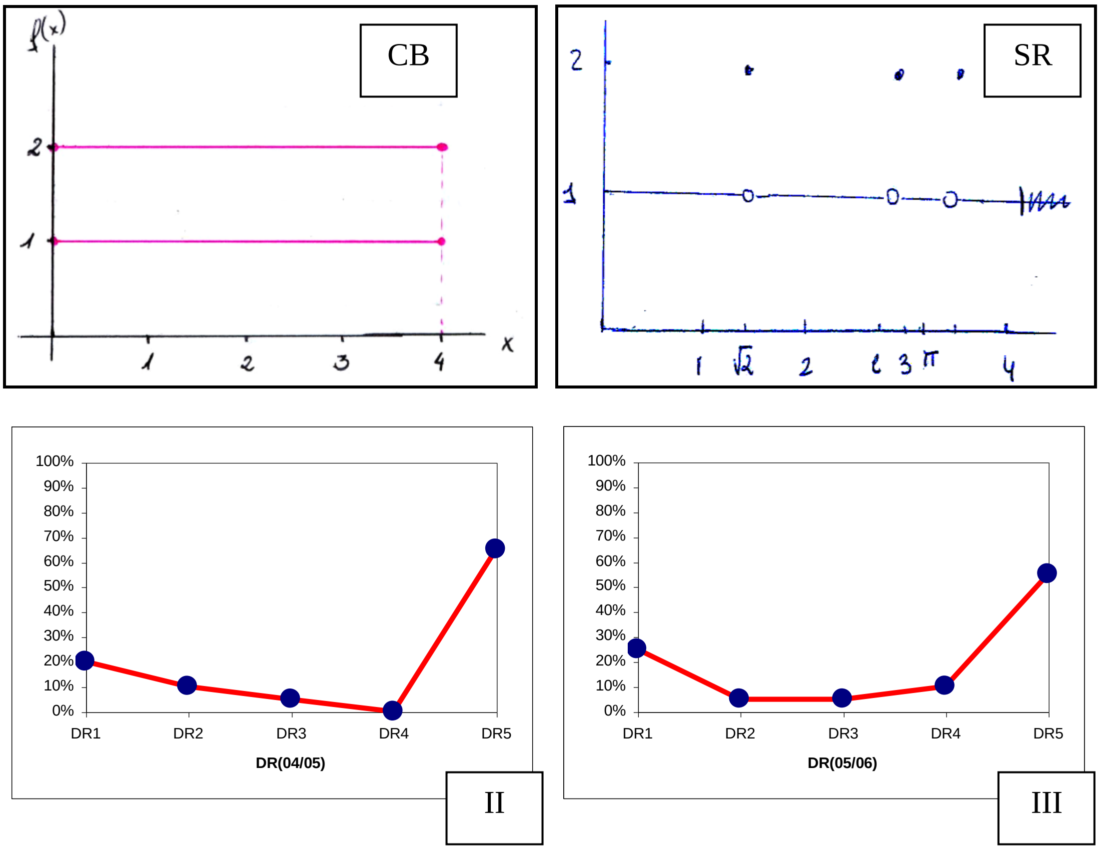
[47] El ordinal de cada categoría de comprensión matemática ha de coincidir con el ordinal de su propia actividad.

VIII.4.1.1. DR: Representación de la función de Dirichlet

Actividad 1: Consiste, recordando la función de Dirichlet, en representar la función anterior que toma un determinado valor en los puntos racionales del intervalo [0,4] y otro valor en los puntos irracionales del mismo intervalo.

Objetivo: Analizar si el estudiante comprende que entre dos números racionales del intervalo [0,4] siempre hay un número irracional y viceversa, es decir, que el conjunto de los números racionales (Θ) y el conjunto de los números irracionales (I) son densos en los números reales (P).

Análisis de datos: La alumna CB ha considerado la densidad de los dos conjuntos en los reales aunque, aparentemente, no parece la representación gráfica de una función porque a cada abscisa se le han asignado dos ordenadas; sin embargo, la alumna del SR ha determinado varios valores racionales e irracionales, no ha descubierto la densidad de I y sí la de Θ, en un principio, no determinó correctamente el dominio de definición de la función[48].



Gráficos VIII.4.1.1. Dirichlet representación (ciclos de confirmación).

[48] Varios alumnos han continuado la representación gráfica a partir de 4.

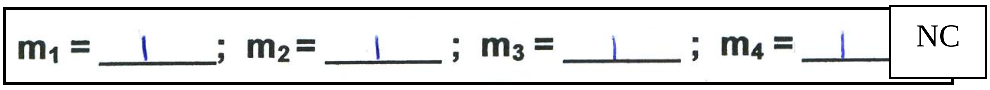
Reflexión: En el curso 2004-2005, tal y como puede observarse, 13 alumnos (65%) representan correctamente la función, 6 de ellos (30%) lo hacen muy deficientemente o no la representan. En el curso siguiente, figura III, también se puede afirmar que 13 alumnos (65%) representan correctamente la función, asimismo, 6 de ellos (30%) lo hacen muy deficientemente y uno, como en el curso anterior, da una representación incompleta. Pensamos que algunos estudiantes tienen dificultades para reconocer los diferentes tipos de números (naturales, enteros, racionales, irracionales y reales).

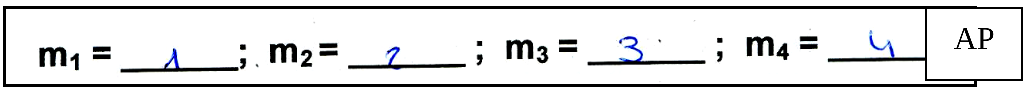
VIII.4.1.2. DMIN4: Mínimos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos

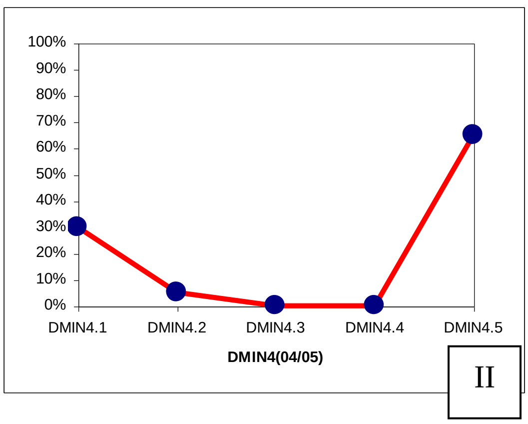
Actividad 2: Los alumnos deben determinar los mínimos de la función de Dirichlet en 4 subintervalos, de igual amplitud, del intervalo [0,4].

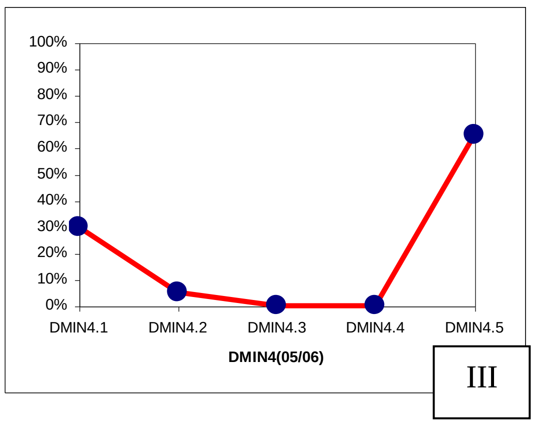
Objetivo: Pretendemos controlar el nivel de comprensión por parte de los alumnos del concepto de mínimo de una función en un subintervalo.

Análisis de los datos: La alumna NC ha determinado correctamente los cuatro mínimos, no así, AP que ha realizado mal la representación de la función y esta alumna no ha sabido determinarlos.









Gráficos VIII.4.1.2. Cálculo de los mínimos en 4 subintervalos (ciclos de confirmación).

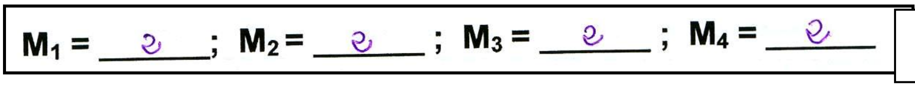
Reflexión: Para los dos cursos de los ciclos de confirmación se concluye que el mismo número de alumnos, 13 (65%), de la categoría anterior determinan los mínimos correctamente, el resto lo hace muy deficientemente o no los calculan en cada uno de los subintervalos. Entre las respuestas del nivel 1 de la categoría DMIN4 se incluyen las de los alumnos que no contestan y los que responden mal en todos sus términos y las respuestas de éstos son disparatadas como la que aparece escaneada en la cual AP interpreta que el mínimo absoluto en cada subintervalo coincide con el subíndice del mínimo.

VIII.4.1.3. DMAX4: Máximos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos

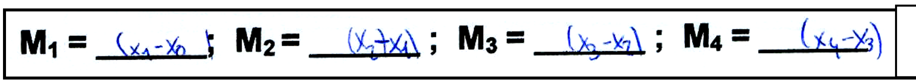
Actividad 3: Los estudiantes deben determinar los máximos de la función de Dirichlet en los 4 subintervalos anteriores.

Objetivo: Deseamos saber el nivel de comprensión de los alumnos del concepto de máximo absoluto de una función en un subintervalo.

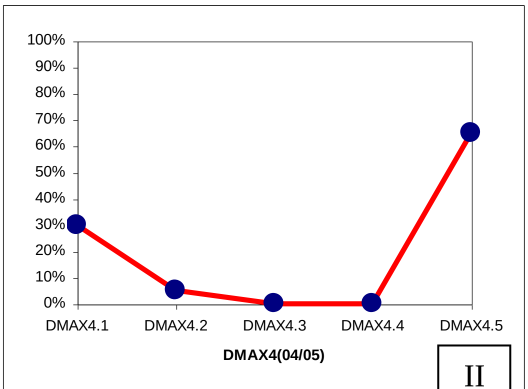
Análisis de los datos: El alumno MC ha calculado correctamente los máximos de la función en cada subintervalo. Pensamos que SA ha considerado cada máximo como la amplitud teórica de cada subintervalo, salvo el segundo que ha sumado los extremos; sin embargo, consideramos que la respuesta de SA es disparatada y, sin duda, es una sucesión de símbolos que carece de sentido.



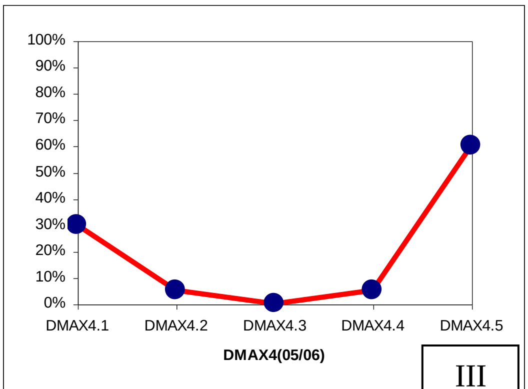
MC



SA



II



III

Gráficos VIII.4.1.3. Cálculo de los máximos en 4 subintervalos (ciclos de confirmación).

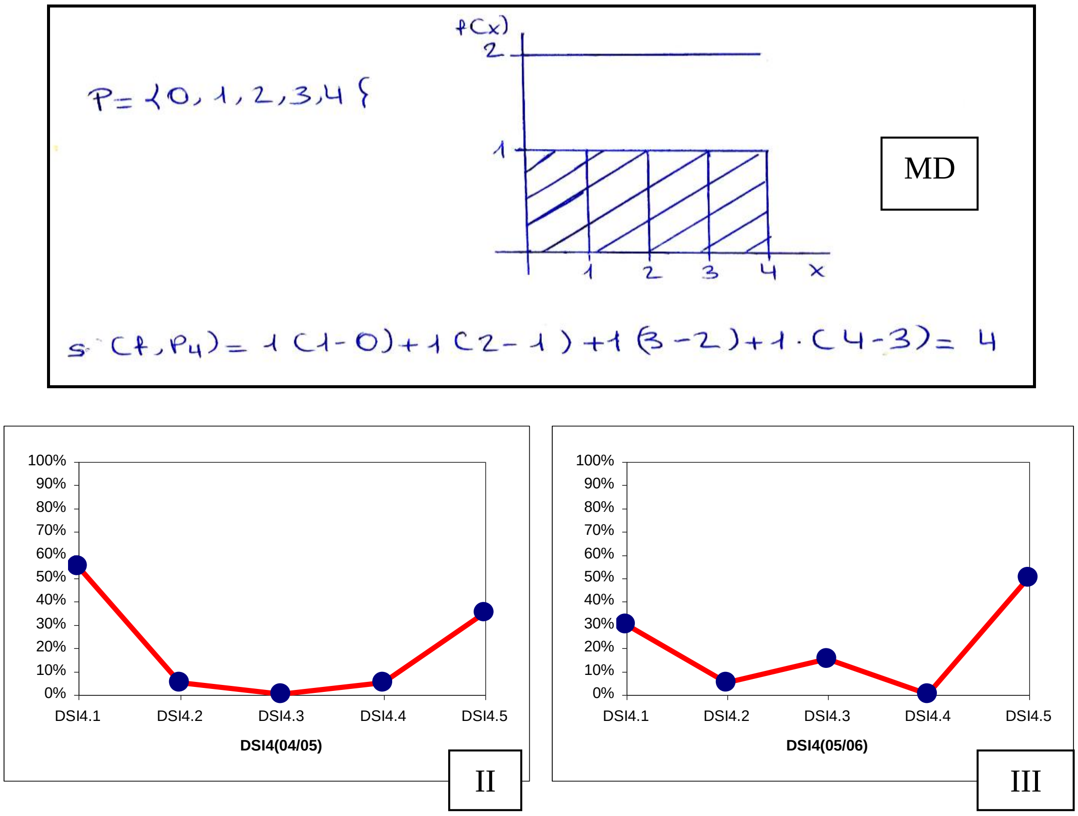
Reflexión: En ambos ciclos de confirmación, los mismos alumnos, 13 (65%), de las dos categorías anteriores responden correctamente (aunque mejor en el grupo 2º E del segundo ciclo), el resto de los estudiantes responden muy deficientemente, es decir, no calculan los máximos de la función de Dirichlet en cada uno de los cuatro subintervalos de [0,4].

VIII.4.1.4. DSI4: Representa y calcula la suma inferior según DMIN4

Actividad 4: Los alumnos deben determinar la suma inferior de la función de Dirichlet para los mínimos obtenidos en la categoría DMIN4.

Objetivo: Deseamos conocer el grado de comprensión de los estudiantes de la representación gráfica y su capacidad de expresión analítica de la suma inferior de la función asociada a una partición de cinco nodos.

Análisis de los datos: MD dibuja y calcula s(f,P_4). Algunos alumnos no dibujan correctamente la superficie puesto que han considerado el dibujo de MD sin los segmentos inclinados, si han calculado bien la suma inferior, entonces la respuesta ha sido considerada válida.



Gráficos VIII.4.1.4. Representación y cálculo de la suma inferior en 4 subintervalos (ciclos de confirmación).

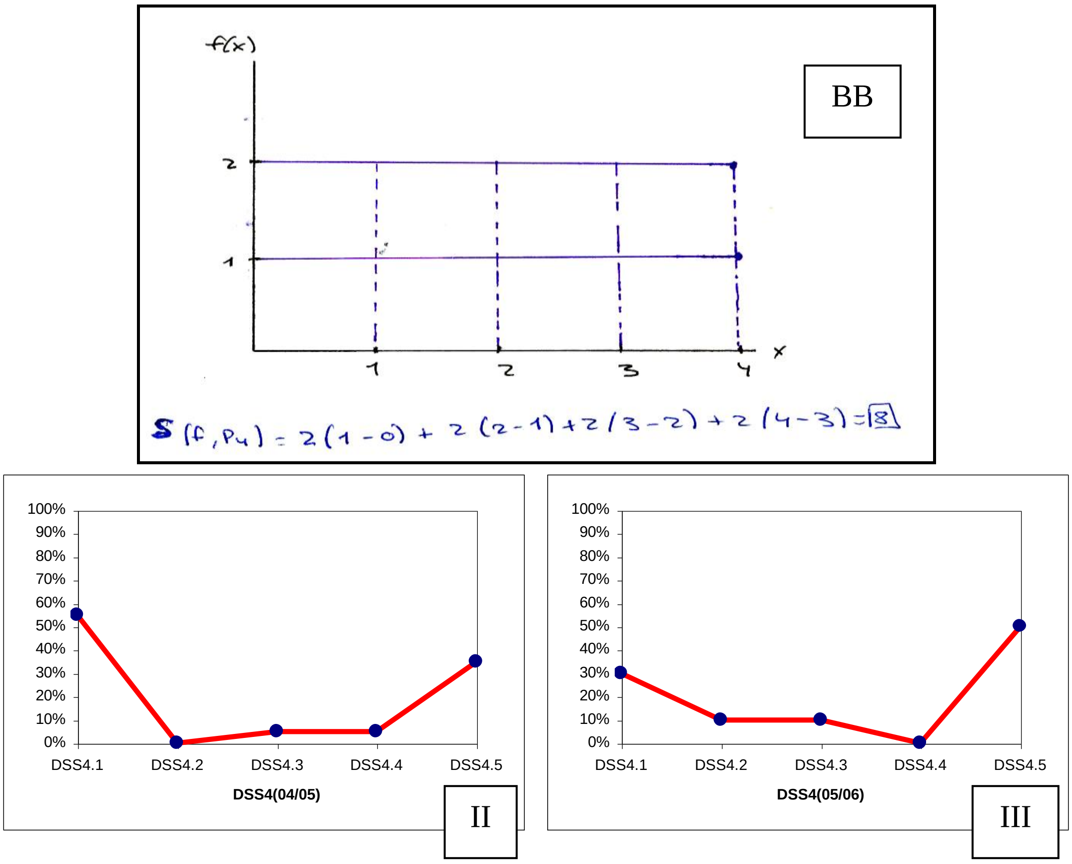
Reflexión: En el ciclo II, sólo el 40% de los alumnos calculan correctamente la suma inferior de la función de Dirichlet asociada a la categoría DMIN4, el resto (12 estudiantes) no son capaces de desarrollar un procedimiento aceptable. En el ciclo siguiente, curso 2005-2006, el 50% de los alumnos calculan correctamente la suma inferior, tres (15%) hacen un cálculo deficiente, el resto (7 alumnos) fracasan o, directamente, no lo intentan.

VIII.4.1.5. DSS4: Representa y calcula la suma superior según DMAX4

Actividad 5: Los alumnos deben determinar la suma superior de la función de Dirichlet para los máximos obtenidos en la categoría DMAX4.

Objetivo: Deseamos conocer el grado de comprensión de los estudiantes de la representación gráfica y su capacidad de expresión analítica de la suma superior de la función de Dirichlet asociada a una partición de cinco nodos.

Análisis de los datos: BB dibuja y calcula S(f,P_4) con el mismo matiz que el expresado en el análisis de la anterior categoría.



Gráficos VIII.4.1.5. Representación y cálculo de la suma superior en 4 subintervalos (ciclos de confirmación).

Reflexión: En el contexto de la reflexión anterior, vemos que en el curso 2004-2005, sólo el 40% de los alumnos calculan la suma superior de la función de Dirichlet asociada a la categoría DMAX4, el resto (11 alumnos) no desarrollan un procedimiento aceptable. En el curso siguiente el 50% de los alumnos calculan correctamente la suma superior, dos lo hacen de forma incompleta, el resto (8 alumnos) fracasan o, simplemente, no lo intentan.

VIII.4.1.6. DIINF: Dirichlet integral inferior

Actividad 6: Los alumnos deben calcular el extremo superior de las sumas inferiores, es decir, la integral inferior de la función de Dirichlet.

Objetivo: Se pretende concretar el grado de comprensión de los estudiantes del concepto de integral inferior de la función de Dirichlet en [0,4], o lo que es equivalente, el extremo superior de las sumas inferiores.

Análisis de los datos: El texto de TF explica de forma sencilla y convincente el valor de la integral inferior, entendemos que la grafía $\boxed{b}$ debe ser 4. Pensamos que la alumna del texto RS supone que los diámetros de las particiones son tan pequeños como deseemos puesto que expresa: *"A medida que las particiones sean más pequeñas".* La estudiante TE confunde las notaciones de las sumas inferiores y superiores, toma una partición con infinitos nodos[49] y posteriormente realiza cálculos incomprensibles.

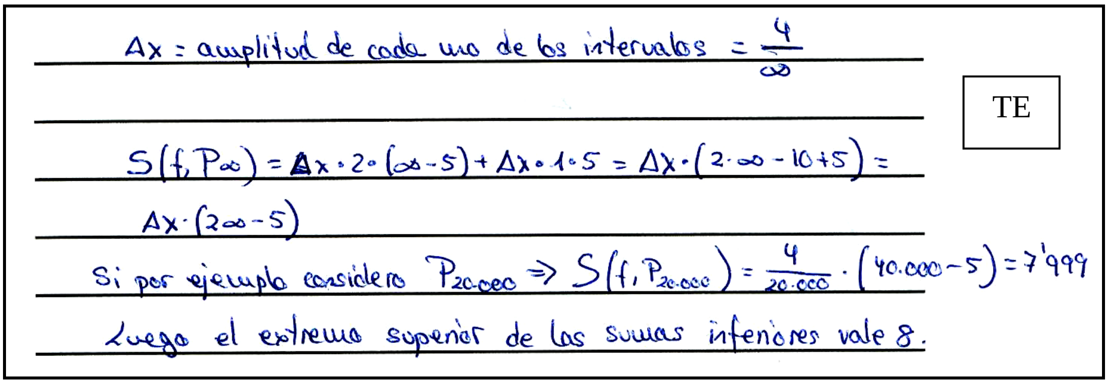
El extremo superior de las sumas inferiores es=4, que es el valor que tiene el área de la figura dentro del intervalo (0,4). En este caso todas las sumas inferiores valen b porque la gráfica es una línea horizontal

TF

El extremo superior de las sumas inferiores es el valor mas alto de Todos los que se obtienen al calcular las sumas inferiores con diferentes particiones. A medida que las particiones sean mas pequeñas la suma inferior será mas alta pero en este caso todas las sumas inferiores son iguales y vale 4.

RS

[49] Sabemos que cualquier partición debe tener un número finito de nodos.


TE

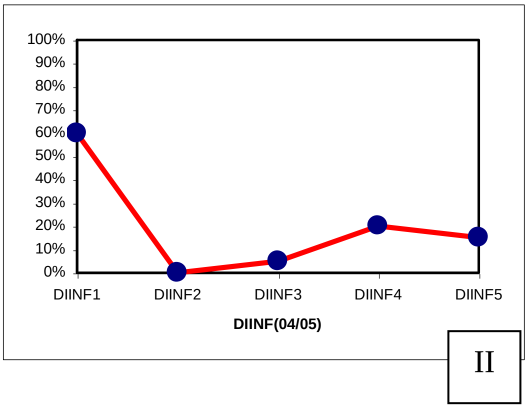
Δx: amplitud de cada uno de los intervalos $= \frac{4}{\infty}$

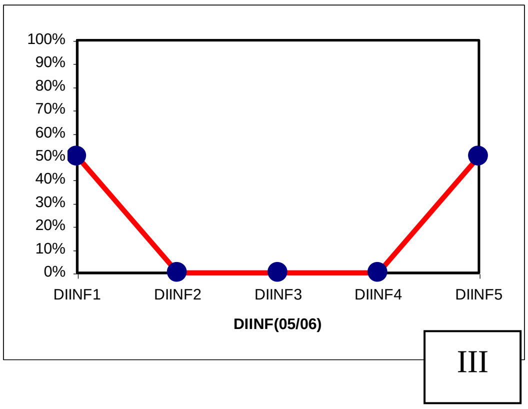
$S(f, P_\infty) = \Delta x \cdot 2 \cdot (\infty - 5) + \Delta x \cdot 1 \cdot 5 = \Delta x \cdot (2 \cdot \infty - 10 + 5) =$

$\Delta x \cdot (2\infty - 5)$

Si por ejemplo considero $P_{20.000} \Rightarrow S(f, P_{20.000}) = \frac{4}{20.000} \cdot (40.000 - 5) = 7'999$

Luego el extremo superior de las sumas inferiores vale 8.





Gráficos VIII.4.1.6. Dirichlet integral inferior (ciclos de confirmación).

Reflexión: En el grupo 2º E del curso 2004-2005, el 35% de los estudiantes calculan aceptablemente la integral inferior de la función, uno se aproxima a su valor y 12 alumnos (60%) no dan una respuesta aceptable, o se limitan a no contestar. Los alumnos del grupo 2º F del curso siguiente mejoran las respuestas tal y como puede observarse en el gráfico III: el 50% de los alumnos calculan bien la integral inferior de la función, sin embargo, en el extremo opuesto están 10 alumnos (50%).

VIII.4.1.7. DISUP: Dirichlet integral superior

Actividad 7: Los alumnos deben calcular el extremo inferior de las sumas superiores, es decir, la integral superior de la función de Dirichlet.

Objetivo: Se pretende concretar el grado de comprensión de los alumnos del concepto de integral superior de una función de Dirichlet definida en [0,4], o lo que es equivalente, el extremo inferior de las sumas superiores.

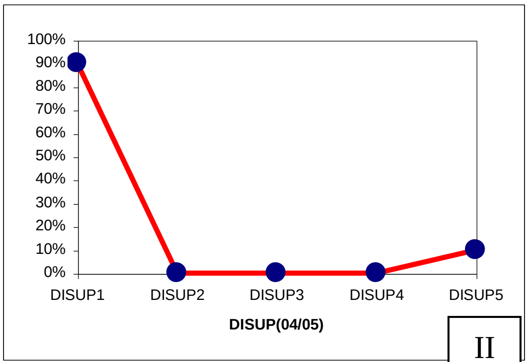
Análisis de los datos: MD afirma que *"todas las sumas superiores nos darán el mismo [valor] que es 8"*, no podemos asegurar que esta alumna haya observado que cualquier suma superior es el área del rectángulo de base 4 y altura 2, aunque la respuesta sea correcta[50]. La alumna RG no se plantea que las sumas superiores e inferiores puedan ser distintas.

El extremo inferior de las sumas superiores es el valor más bajo del conjunto del conjunto de todas las sumas obtenidas al hacer las diferentes particiones; en este caso todas las sumas superiores nos darán el mismo que es 8, por lo tanto, el extremo inferior será 8.

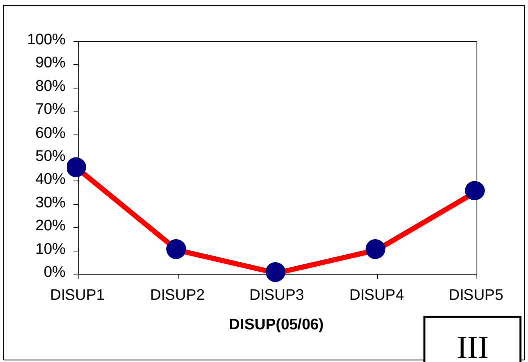
MD

Vale cuatro porque las sumas inferiores y superiores coinciden en 4

RG



II



III

Gráficos VIII.4.1.7. Dirichlet integral superior (ciclos de confirmación)

Reflexión: En el curso 2004-2005, el 10% de los alumnos calculan bien la integral superior de la función, 18 alumnos (90%) no comprenden ese concepto y la respuesta es errónea o se limitan a no contestar. En el curso 2005-2006 el 45% de los alumnos calculan bien la integral superior de la función de Dirichlet o su respuesta puede considerarse válida (niveles 4 y 5), 11 alumnos (45%) dan una respuesta inaceptable[51] o, simplemente, no contestan.

[50] Tres alumnos, de los dos ciclos de confirmación, han escrito: *"Las sumas superiores valen 8 porque es el área de un rectángulo de base 4 y altura 2"*.

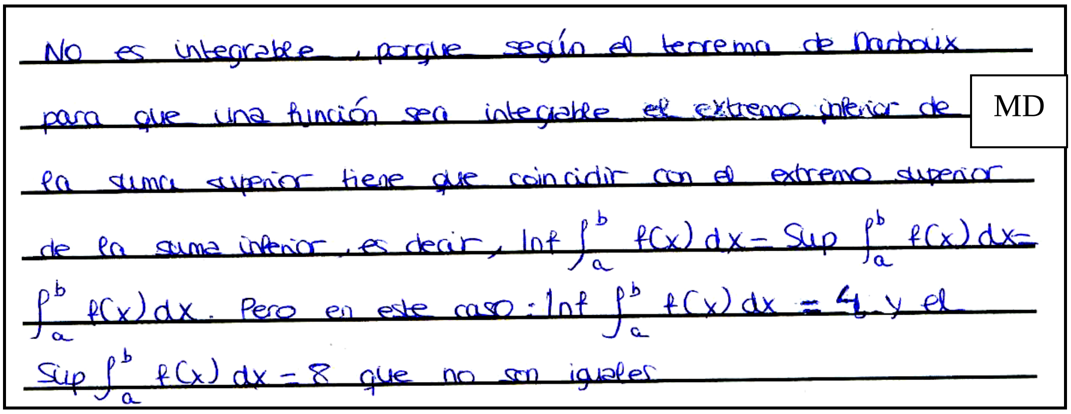
[51] Consideramos, en los dos ciclos de confirmación, respuesta inaceptable o errónea a aquélla por la cual los estudiantes afirman que *"coinciden las integrales superior e inferior de Darboux"*, aunque se haya especificado o no el valor de alguna de las dos integrales.

VIII.4.1.8. DNI: Dirichlet no integrable

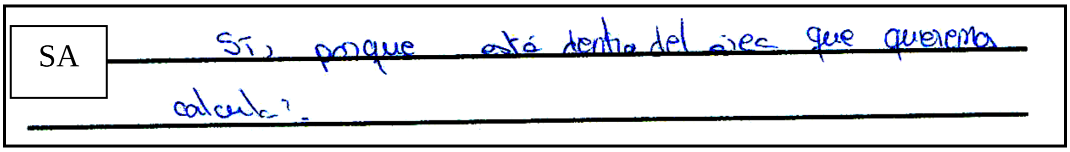
Actividad 8: Consiste en razonar si la función de Dirichlet que ha sido estudiada anteriormente es integrable o no en el sentido Darboux.

Objetivo: Se trata de determinar el nivel de comprensión de los estudiantes del concepto de integrabilidad en el sentido Darboux y, consecuentemente, de la existencia de funciones que no cumplen las condiciones de Darboux.

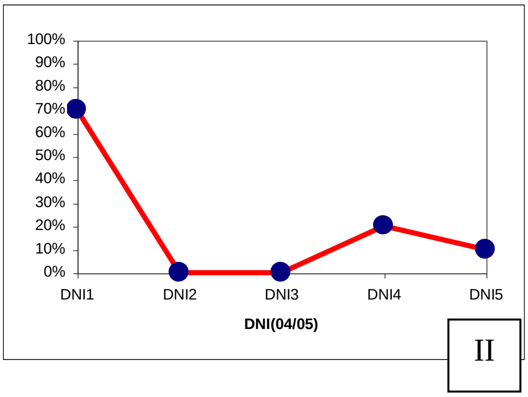
Análisis de los datos: MD lo explica muy bien, puesto que define el concepto de integral de Darboux[52], y esta alumna comprueba que no lo cumple la función de Dirichlet[53]. Una respuesta incoherente es la dada por SA.

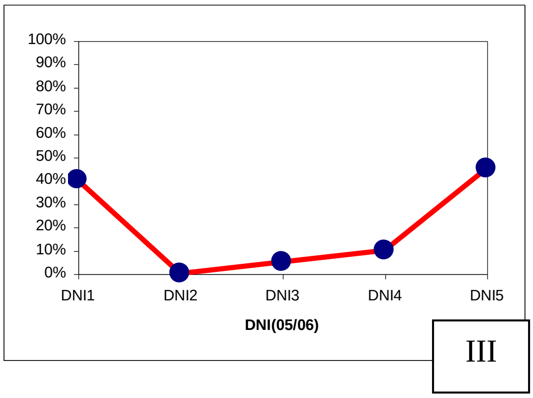

MD

No es integrable, porque según el teorema de Darboux para que una función sea integrable el extremo inferior de la suma superior tiene que coincidir con el extremo superior de la suma inferior, es decir, $\mathrm{Inf}\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{Sup}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Pero en este caso: $\mathrm{Inf}\int_a^b f(x)\,dx = 4$ y el $\mathrm{Sup}\int_a^b f(x)\,dx = 8$ que no son iguales


SA

Sí, porque está dentro del área que queremos calcular.





Gráficos VIII.4.1.8. Dirichlet no integrable (ciclos de confirmación).

[52] MD considera la definición del concepto de integral de Darboux como *"el teorema de Darboux"*.

[53] Muchos alumnos escriben: *"No es integrable porque la integral inferior y superior deberían coincidir"*.

Reflexión: Del grupo 2º E, sólo el 10% de los alumnos afirman con toda precisión que la función no es integrable, 4 de ellos (20%) reconocen tal circunstancia sin mayores dificultades; el resto (70%) no contestan o sus respuestas no son válidas. En el siguiente ciclo, grupo 2º F, cambian sustancialmente las respuestas tal y como se venía observando en las categorías anteriores, así pues: el 45% de los alumnos afirman con toda precisión que la función no es integrable, 2 de ellos (20%) reconocen tal circunstancia sin mayores dificultades, uno intuye la no integrabilidad y el resto (40%) dan una respuesta errónea o no contestan.

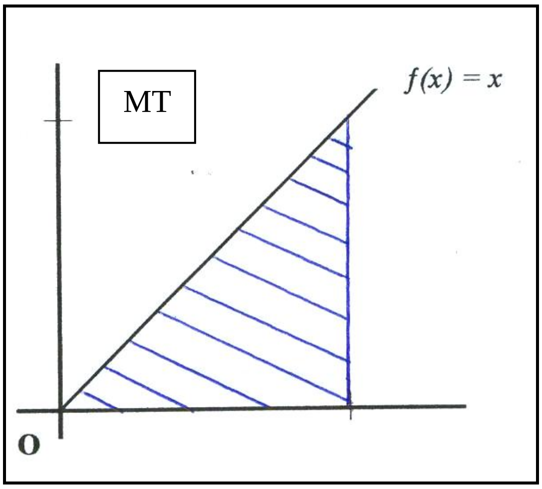
A partir de este momento, en las próximas ocho categorías de comprensión matemática, estudiamos la función afín $f(x)=x$. Las nuevas categorías serán similares a las de la función de Dirichlet, además, todas ellas comienzan con la letra **A**.

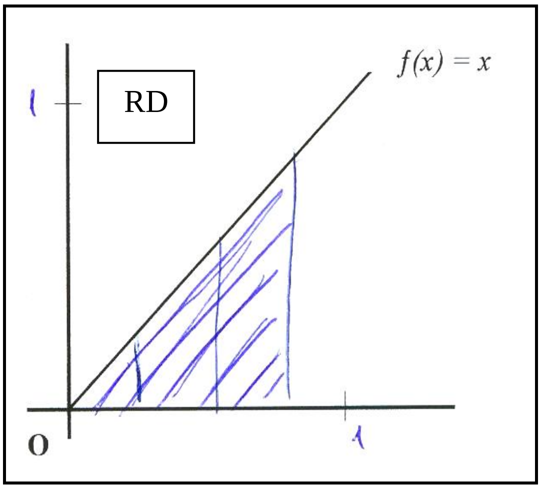
VIII.4.1.9. AR: Representar el área determinada por la función afín

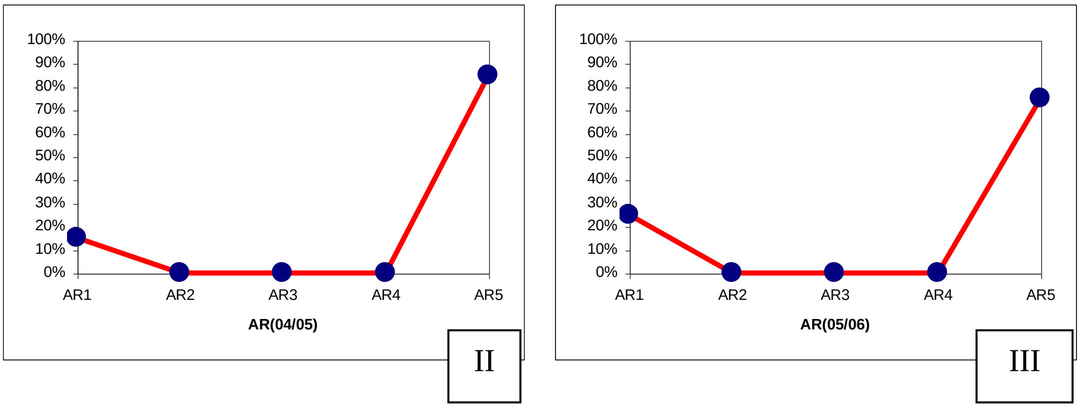
Actividad 9: Consiste en representar la superficie determinada por la función afín f(x)=x, el eje de abscisas y las rectas verticales x=0 y x=1.

Objetivo: Analizar si el alumno determina gráficamente, con total precisión, la superficie cuyo área se pretende calcular posteriormente.

Análisis de los datos: Es evidente que en la figura de MT está graficada la superficie correctamente; sin embargo, la alumna RD ha expresado la superficie determinada por la función f(x), el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=3/4, lo cual es insuficiente.







Gráficos VIII.4.1.9. Representar el área determinada por la función afín (ciclos II y III).

Reflexión: En el curso 2004-2005, 17 alumnos responden correctamente, uno lo hace mal y dos de ellos no contestan. En el curso siguiente, 15 alumnos determinan gráficamente el área con total precisión, un alumno responde mal y cuatro de ellos no lo hacen. Pensamos que con una lectura atenta del texto, las personas que han contestado mal o no han respondido, hubieran acertado en la representación.

VIII.4.1.10. AMIN4: Mínimos de la función afín para una partición de 4 subintervalos

Actividad 10: Los alumnos deben determinar los mínimos de la función afín en 4 subintervalos del intervalo [0,1].

Objetivo: Pretendemos controlar el nivel de comprensión, por parte de los estudiantes, del concepto de mínimo de una función en un subintervalo.

Análisis de los datos: NC expresa correctamente las abscisas y ordenadas de los mínimos en cada subintervalo, no así SB que en lugar de determinar los mínimos ha tomado los máximos y la respuesta de RD está fuera de toda lógica, aunque bastaría desplazar, comenzando por cero, un lugar los valores para obtener la solución correcta.

m_1 = $f(0/4) = 0$ **; m_2 =** $f(1/4) = 1/4$

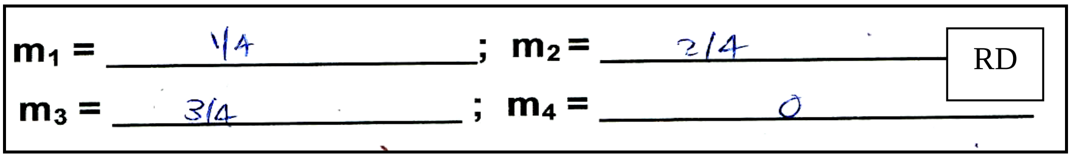
m_3 = $f(2/4) = 2/4$ **; m_4 =** $f(3/4) = 3/4$

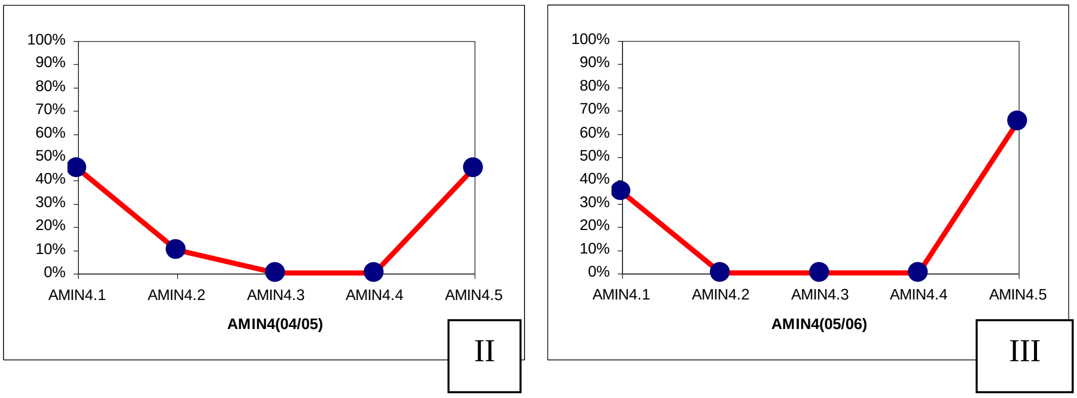
NC

m_1 = $\frac{1}{4} = 0{,}25$ **; m_2 =** $\frac{2}{4} = 0{,}5$

m_3 = $\frac{3}{4} = 0{,}75$ **; m_4 =** 1

SB





Gráficos VIII.4.1.10. Cálculo de los mínimos, afín, en 4 subintervalos (ciclos II y III).

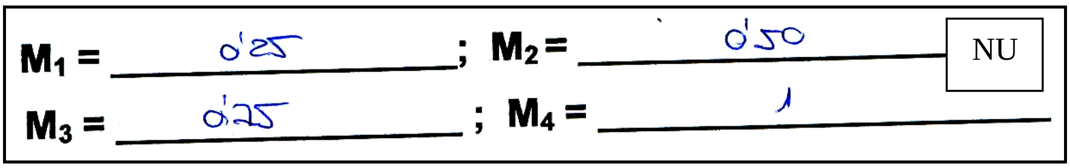
Reflexión: Aunque la función es muy sencilla, $f(x)=x$, 9 alumnos (45%) aciertan plenamente en el primer ciclo de confirmación (II) y 13 (65%) en el siguiente ciclo (III). Dos alumnos (10%) calculan correctamente algún mínimo, no los cuatro (ciclo II); el resto no determinan bien ningún mínimo.

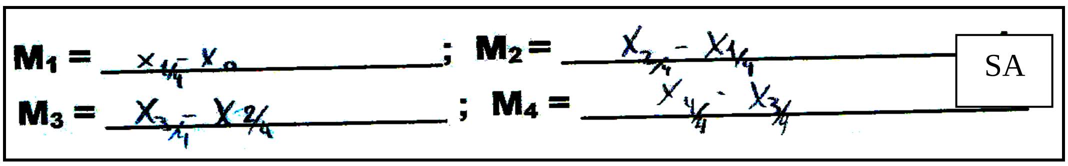
VIII.4.1.11. AMAX4: Máximos de la función afín para una partición de 4 subintervalos

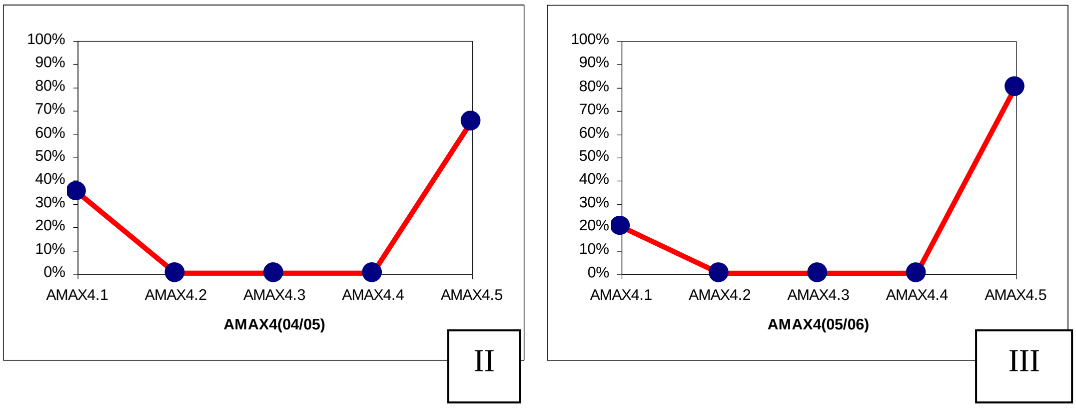
Actividad 11: Los alumnos deben determinar los máximos de la función afín en 4 subintervalos del intervalo [0,1].

Objetivo: Pretendemos controlar el nivel de comprensión, de los estudiantes, del concepto de máximo de una función en un subintervalo.

Análisis de los datos: La alumna NU ha calculado todos los máximos en cada subintervalo; sin embargo, SA confunde los máximos, las amplitudes de los subintervalos y los subíndices de los nodos de una partición.







Gráficos VIII.4.1.11. Cálculo de los máximos, afín, en 4 subintervalos (ciclos II y III).

Reflexión: 13 alumnos (65%) y 16 alumnos (80%) de los ciclos II y III, respectivamente, calculan los máximos correctamente; los restantes no los saben calcular. Los resultados de esta categoría, en ambos cursos, mejoran a los de la anterior aunque existe cierta paridad entre las mismas.

VIII.4.1.12. ASI4: Representa y calcula la suma inferior según AMIN4

Actividad 12: Los estudiantes deben determinar, en primer lugar, la superficie asociada a $s(f,P_4)$ y, después, calcular $s(f,P_4)$.

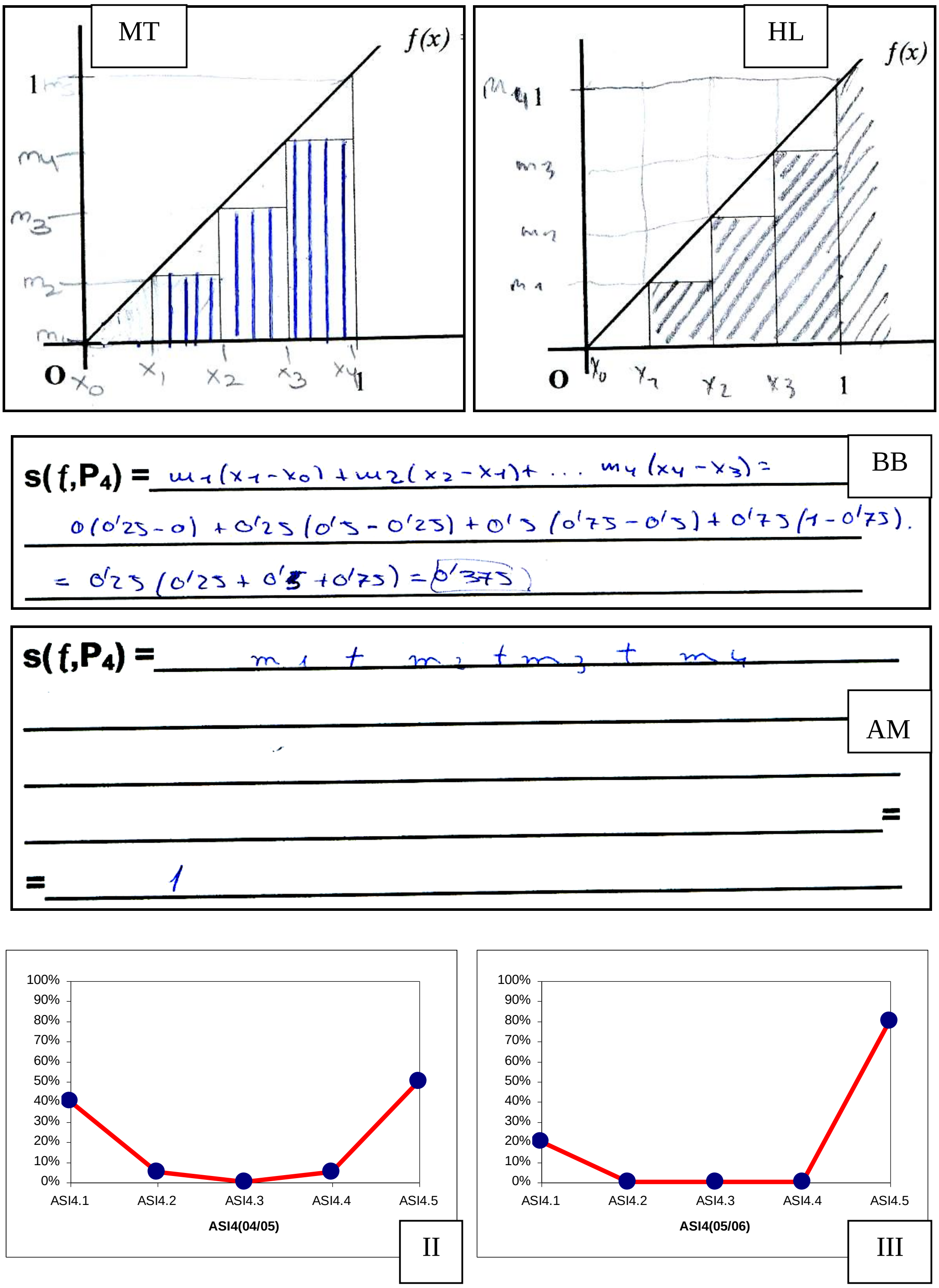
Objetivo: Deseamos controlar el nivel de comprensión y asociación de los estudiantes de los registros gráfico, analítico-algebraico y numérico de la suma inferior de la función afín asociada la partición $P_4=\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$.

Análisis de los datos: La estudiante MT, aunque ha dudado, ha expresado muy bien los nodos de la partición, los mínimos y las superficies de los rectángulos inferiores. No podemos decir lo mismo de HL puesto que no ha sido capaz de expresar correctamente los mínimos absolutos y no sabe cómo determinar el rectángulo de la derecha, pensamos que no ha identificado el intervalo P_4.

Por otro lado, en el cálculo de $s(f,P_4)$ advertimos que BB, en primer lugar, escribe de forma general la suma inferior y, después, la calcula[54]. El alumno AM no ha adquirido el concepto de suma inferior y, además, da un mal resultado[55].

[54] Entendemos que BB señala la solución de forma dubitativa.

[55] El profesor investigador piensa que AM debe dar un resultado y, sabiendo que está mal, lo da.



Gráficos VIII.4.1.12. Representación y cálculo de la suma inferior de la función afín en 4 subintervalos (ciclos de confirmación).

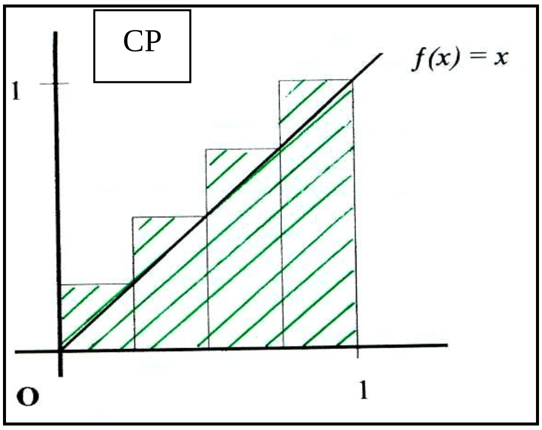
Reflexión: De los alumnos de 2º E, sólo el 50% de los mismos representan y calculan correctamente la suma inferior de la función afín asociada a la categoría AMIN4, sin embargo, 9 alumnos (45%) no son capaces de desarrollar un procedimiento aceptable y un estudiante tiene una buena respuesta, aunque mejorable. En 2º F, el 80% de los estudiantes calculan correctamente la suma inferior de la función asociada a la categoría AMIN4, lo cual es sorprendente, puesto que en la categoría AMIN4 solamente el 65% de los alumnos calcularon correctamente los mínimos; como siempre, cuatro alumnos (20%) no responden.

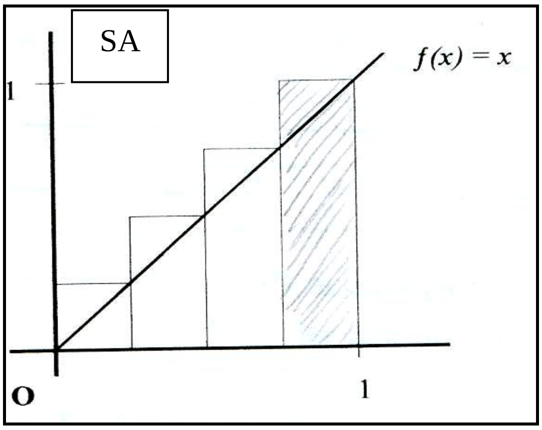
VIII.4.1.13. ASS4: Representa y calcula la suma superior según AMAX4

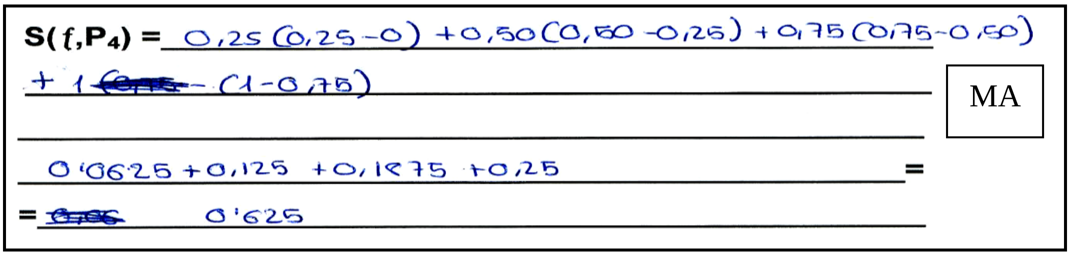
Actividad 13: Los estudiantes deben determinar, en primer lugar, la superficie asociada a $S(f,P_4)$ y, después, calcular $S(f,P_4)$.

Objetivo: Deseamos controlar el nivel de comprensión y asociación de los alumnos de los registros gráfico, analítico-algebraico y numérico de la suma superior de la función afín $f(x)=x$ asociada a la partición $P_4=\{i/4\}$; i=0, ..., 4.

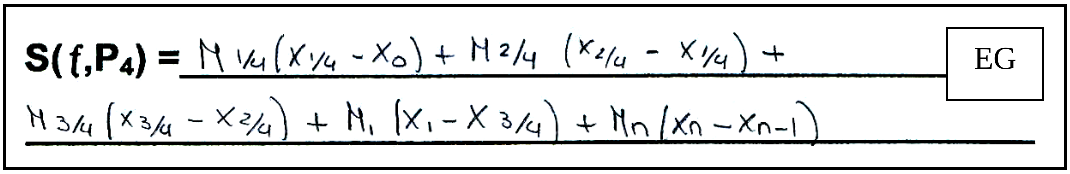
Análisis de los datos: CP expresa correctamente las superficies de los rectángulos superiores. SA sólo ha señalado el último rectángulo superior. El cálculo de la suma superior está bien realizado por MA y la alumna EG escribe la letra “M” delante de cada máximo y la letra “x” delante de cada nodo, además, añade un último sumando que es innecesario[56].

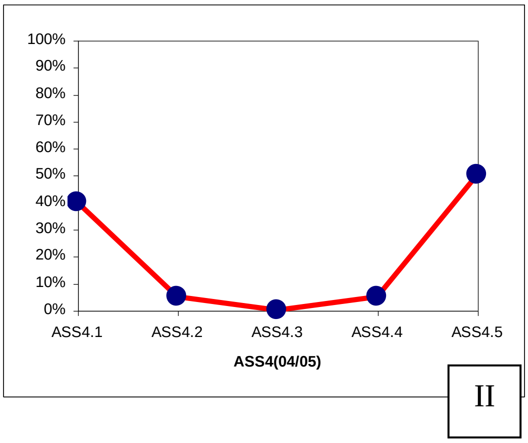


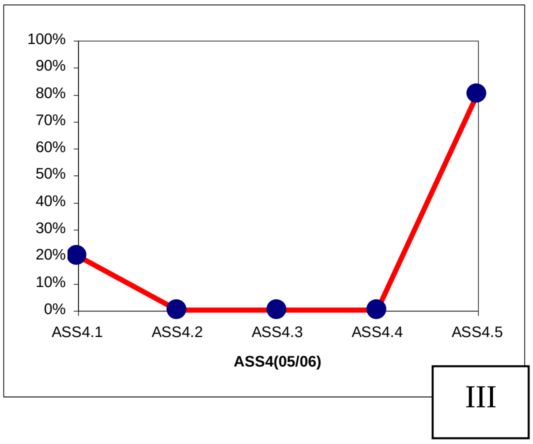




[56] Pensamos que EG no transfiere los conceptos teóricos a los ejercicios prácticos y, además, confunde los subíndices de los nodos con los propios valores de los nodos.







Gráficos VIII.4.1.13. Representación y cálculo de la suma superior de la función afín en 4 subintervalos (ciclos de confirmación).

Reflexión: Según el gráfico II, solamente el 50% de los alumnos representan y calculan correctamente la suma superior de la función asociada a la categoría AMAX4, sin embargo 9 alumnos (45%) responden mal o no lo hacen y uno tiene una buena respuesta, aunque mejorable, además este gráfico está en la línea de los dos anteriores para los alumnos del grupo 2º E (ciclo II). De los estudiantes de 2º F (ciclo III), el 80% representan y calculan bien la suma y cuatro no responden; merece especial atención señalar que el gráfico III de esta categoría coincide con los correspondientes gráficos de las dos categorías anteriores.

VIII.4.1.14. AIINF: Afín integral inferior

Actividad 14: Los alumnos deben calcular el extremo superior de las sumas inferiores, es decir, la integral inferior de la función afín en el intervalo [0,1].

Objetivo: Se pretende concretar el grado de comprensión de los alumnos del concepto de integral inferior de la función $f(x)=x$, es decir, el extremo superior de las sumas inferiores.

Análisis de los datos: Suponemos que SB considera que el número de nodos de la partición tiende a infinito y entendemos que al escribir *"cuanto menor sea la diferencia entre $x_n - x_{n-1}$"* se refiere a que el diámetro de la partición tiende a cero[57], muy interesante es la apreciación de SB al considerar que la integral inferior *"tenderá a aproximarse a 0,5, es decir, será el número menor de 0,5 más próximo a este, o incluso 0,5"*, lo cual confirma el conflicto u obstáculo descrito por Contreras y cols. (2010, pág. 371)[58].

La alumna TE combina el extremo superior de las sumas inferiores y el límite de las sumas inferiores siendo la amplitud de cada subintervalo 1/n y sumando los "n–1" primeros números enteros. JG da la solución correcta sin justificarla y el alumno AM considera que el extremo superior de las sumas inferiores a la amplitud del intervalo [0,1].

Pues tenderá a aproximarse a 0,5, es decir, será el número menor de 0,5 más próximo a este, o incluso 0,5, es decir, que las pequeñas áreas que deberemos hallar serán un número infinito, y con ello alcanzaríamos el área perfecta. En definitiva cuanto menor sea la diferencia entre $x_n - x_{n-1}$ nos acercaremos con más exactitud al área de la figura.

SB

$$S(f,P_n) = \cancel{0\cdot\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1+2\cdots+(n-1)}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)}{n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{2n} \Rightarrow$$

Extremo superior de las sumas inferiores $= \lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{2n} =$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-1/n}{2} = \frac{1}{2}.$$

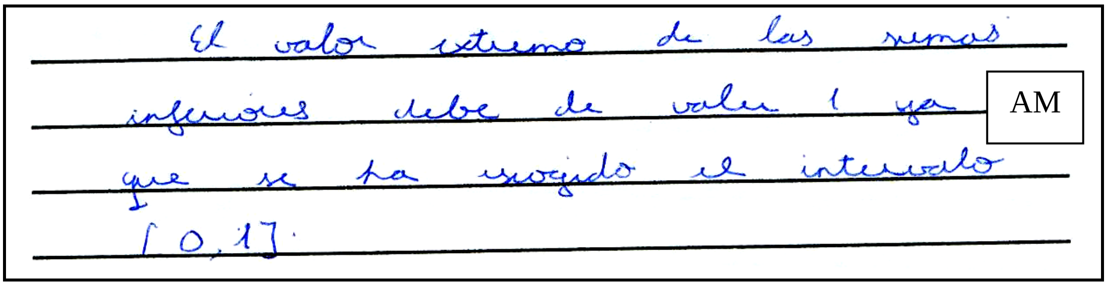
TE

El extremo superior de las sumas inferiores estaría en 0'5

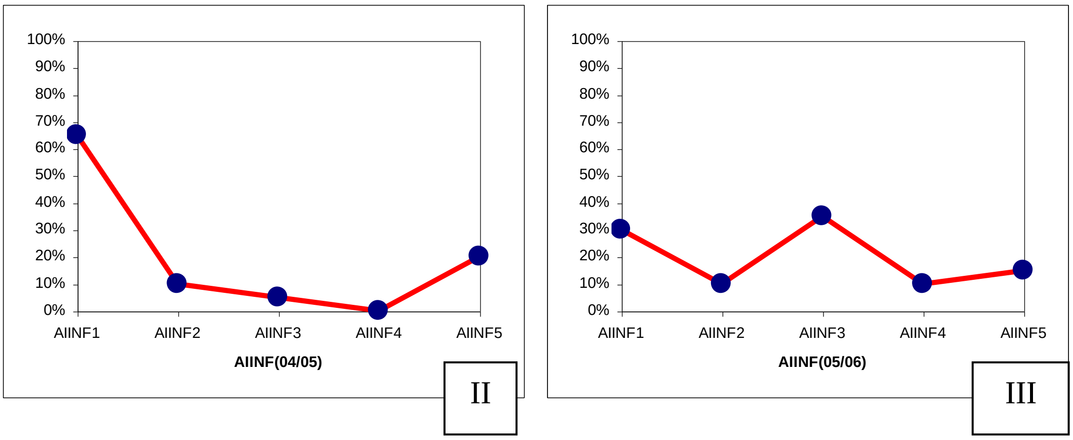
JG

[57] A SB no se le ha explicado el concepto de diámetro de una partición y esta estudiante "intuye" que las diferencias entre dos nodos consecutivos han de tender a cero, aunque sólo toma la diferencia de los dos últimos.

[58] Véase Contreras y Ordóñez (2003, 2006 y 2010) en los *Antecedentes* del capítulo I, donde se afirma: *"Se aproxima más y más pero no es el área exacta".*


El valor extremo de las sumas inferiores debe de valer 1 ya que se ha escogido el intervalo [0,1].

AM



Gráficos VIII.4.1.14. Integral inferior de la función afín (ciclos de confirmación).

Reflexión: En el ciclo II: El 20% de los alumnos calculan correctamente la integral inferior de la función afín, uno dice *"aproximarse a 0,5 (...) o incluso 0,5"* y 15 alumnos (75%) dan una respuesta inaceptable, o se limitan a no contestar. En el segundo ciclo de confirmación (III): El 15% de los estudiantes calculan la integral inferior de la función afín, dos dicen que *"se aproxima a 0,5"*, siete alumnos (35%) dan una respuesta demasiado ambigua y 8 alumnos (40%) responden mal o no contestan.

VIII.4.1.15. AISUP: Afín integral superior

Actividad 15: Los estudiantes deben calcular el extremo inferior de las sumas superiores, es decir, la integral superior de la función afín en [0,1].

Objetivo: Se pretende concretar el grado de comprensión de los alumnos del concepto de integral superior de la función $f(x)=x$ en el intervalo [0,1], es decir, el extremo inferior de las sumas superiores.

Análisis de los datos: Las respuestas escaneadas de los alumnos en la categoría anterior son similares a las respuestas de esos mismos alumnos en esta categoría, sin embargo, hemos tomado dos respuestas de otros tantos estudiantes donde justifican el valor del extremo superior de las sumas inferiores. La alumna SF se ha percatado que la integral superior es el área del triángulo, por otro lado, el alumno DC no dice que sea 0,5 y lo considera así porque ha calculado $S(f,P_{20})$[59] = 0,525.

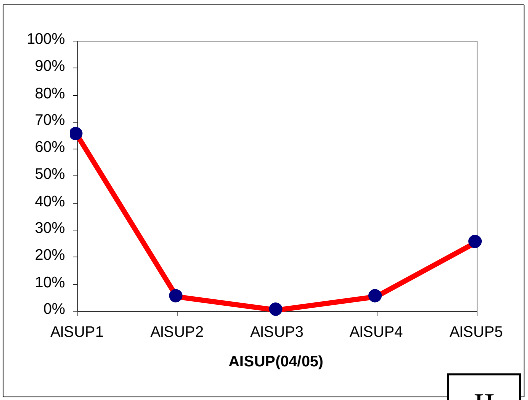
El valor inferior de las sumas superiores es 0'5 porque va disminuyendo el valor a medida que se hacen más particiones y nos acercamos al valor del área del triángulo

SF

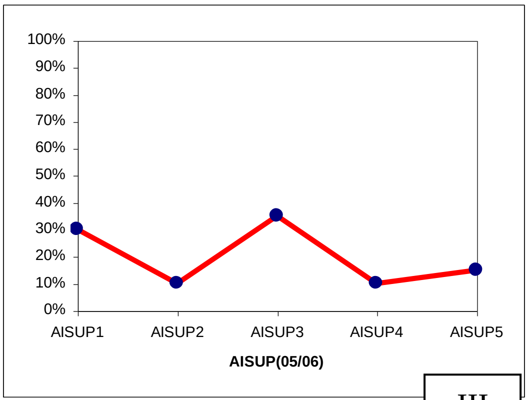
DC

Se aproxima a 0,5

Extremo inferior $\{S(f,P)\} \leq 0{,}525$



II



III

Gráficos VIII.4.1.15. Integral superior de la función afín (ciclos de confirmación).

Reflexión: La cuarta parte de los alumnos, curso 2004-2005, calculan bien la integral superior de la función afín, 14 alumnos (70%) responden mal o se limitan a no contestar, un alumno puede mejorar la respuesta. En el curso 2005-2006, el 15% de los alumnos calculan correctamente la integral superior de la función afín, dos afirman que "se aproximan" a su valor, siete estudiantes están dentro de la ambigüedad y 8 alumnos (40%) dan una respuesta inaceptable o no responden.

Tanto en esta categoría como en la precedente, varios alumnos consideran que los valores de las integrales inferior y superior de Darboux de la función $f(x)=x$ en el intervalo [0,1] no se alcanzan, más bien *"se aproximan a 0,5".*

[59] $P_{20} = \{x_i = i/20\}$, desde i=0 hasta 20.

VIII.4.1.16. AI: Afín integrable

Actividad 16: Consiste en razonar si la función afín $f(x)=x$, estudiada anteriormente, es integrable o no en el sentido Darboux en [0,1].

Objetivo: Esta actividad pretende controlar el nivel de comprensión de los estudiantes del concepto de integral en el sentido Darboux de la función $f(x)=x$ en el intervalo [0,1].

Análisis de los datos: Las respuestas de algunos alumnos hacen referencia al teorema de caracterización de las funciones integrables en el sentido Darboux (JG y BM). Otros la consideran integrable porque *"coinciden el extremo superior de las sumas inferiores y el extremo inferior de las sumas superiores"* (DC y RA[60]).

La alumna TE, para calcular la integral superior ha tomado los límites tal y como se explicó para la integral inferior y al final concluye que ambas coinciden y, además, su valor es 0,5; sin embargo, muy pocos estudiantes dan dicho valor.

El alumno DC confirma que la función es integrable, sin embargo, se encuentra con el obstáculo de determinar el valor y lo asigna *"próximo a 0,5".*

Si es integrable, porque la diferencia entre las sumas superiores e inferiores se hace cada vez más pequeña.

JG

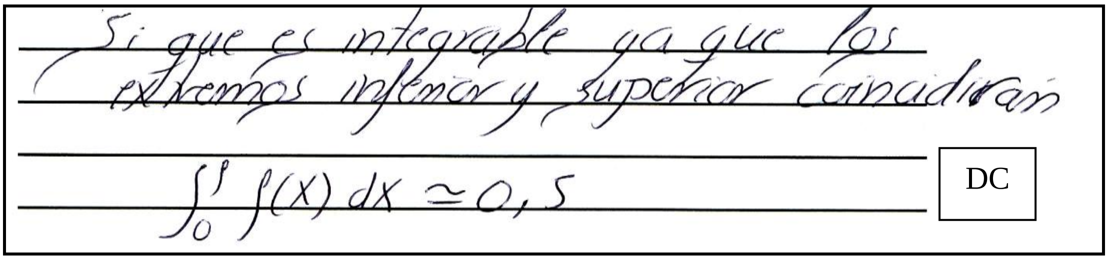
Si, xq las sumas inferiores y superiores cada vez se aproximan mas y según el teorema de caracterización de las funciones integrables en el sentido de Darboux.

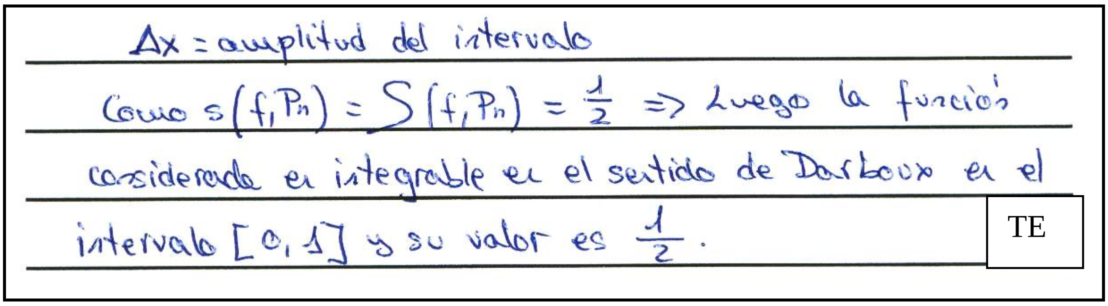
BM

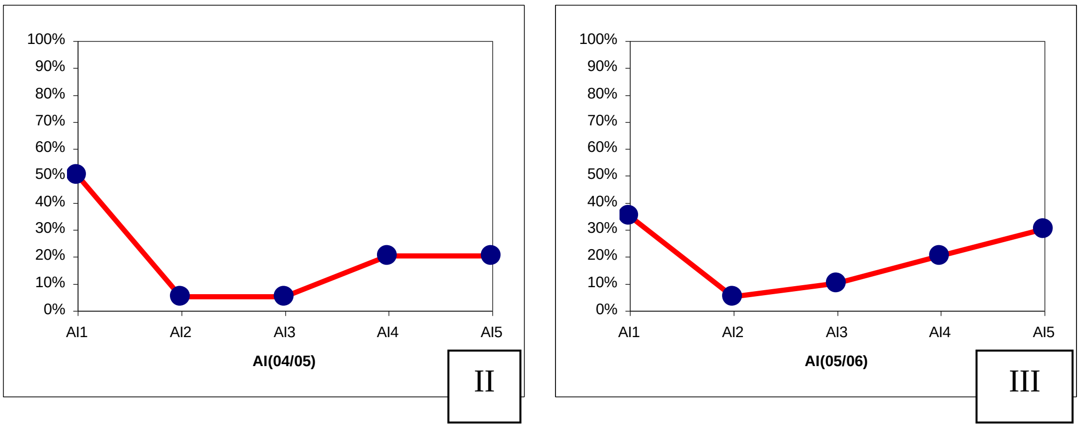
Si, porque esta acotada en el intervalo [0, 1] y porque el extremo inferior de las sumas superiores y el extremo superior de las sumas inferiores coin-ciden.

RA

[60] No es suficiente que la función esté acotada, considérese la función de Dirichlet que esta acotada y no es integrable Darboux. Para justificar que la función afín es integrable Darboux basta afirmar que *"las integrales inferior y superior de Darboux coinciden".*







Gráficos VIII.4.1.16. Integrabilidad de la función afín (ciclos de confirmación).

Reflexión: En el grupo 2º E: El 20% de los estudiantes afirman con total precisión que la función es integrable, cuatro de ellos (20%) reconocen tal circunstancia sin mayores dificultades y once alumnos (55%) responden incorrectamente o no contestan. En el siguiente grupo, 2º F: El 30% de los alumnos justifican correctamente que la función es integrable, cuatro estudiantes (20%) lo reconocen sin dificultad, ocho alumnos (40%) dan una respuesta inaceptable o se limitan a no contestar.

Ningún estudiante de ambos grupos ha considerado que la función f(x)=x no es integrable en el sentido Darboux en el intervalo [0,1].

VIII.4.1.17. CP: Cálculo de primitivas

Aunque el cálculo mental fue trabajado en las sesiones de la acción o implementación[61], consideramos que el nivel alcanzado por cada uno de los estudiantes debe quedar constatado, por escrito[62], mediante la propuesta realizada por el profesor investigador de resolución de ejercicios del cálculo de primitivas elementales por los alumnos de los ciclos de confirmación.

Actividad 17: Los estudiantes deben calcular mentalmente, o en su defecto escribiendo lo mínimo posible, integrales inmediatas.

Objetivo: Pretendemos evaluar el cálculo mental con respecto a la integral indefinida, es decir, la agilidad mental para determinar primitivas.

Niveles de respuesta: El profesor, en la corrección de cada una de las pruebas del cálculo de primitivas las ha evaluado de 0 a 10; además, para seguir el criterio de los niveles de respuesta de las categorías anteriores se ha establecido la siguiente tabla de conversión:

INTERVALO DE CALIFICACIÓN DEL EJERCICIO	NIVEL DE RESPUESTA
[0; 2,5)	1
[2,5; 5)	2
[5; 7,5)	3
[7,5; 9)	4
[9; 10]	5

Tabla VIII.4.1.17. Equivalencia entre las calificaciones del cálculo de primitivas y los niveles de respuesta según la escala Likert.

Análisis de los datos: El profesor investigador ha optado por escanear dos ejercicios de otros tantos alumnos de cada uno de los ciclos de confirmación y analizarlos individualmente; sin embargo, para no extendernos en demasía en la redacción del presente capítulo, no incluimos aquí dichos ejercicios y hemos optado por hacerlo en el anexo I. Seguidamente efectuamos el análisis de las pruebas escritas realizadas por los estudiantes.

[61] Véanse, en el anexo H, las sesiones 4, 5, 6 y 7 de los ciclos de confirmación.

[62] Nótese que, además, están las grabaciones de las clases en audio, el cuaderno de campo del profesor y las anotaciones redactadas inmediatamente después de cada una de las sesiones de clase.

La diferencia sustancial entre uno y otro grupo es que a los alumno de 2º E (ciclo II, curso 2004-2005) se le hizo la prueba durante una hora sin ningún material de apoyo y al grupo del curso siguiente, 2º F, se le permitió disponer de dos horas y consultar las tablas de derivadas e integrales inmediatas[63]. He aquí el análisis de cada una de las cuatro pruebas individuales:

La alumna EG (2º E) realiza un buen cálculo mental, aunque en algún momento comete pequeños errores al determinar factores constantes de integración, no ha utilizado $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx = \sqrt{f(x)} + k$ y, en su defecto, la calcula como la integral de una función potencial o, erróneamente, considera la solución el neperiano del denominador. Un error conceptual importante es considerar la igualdad $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$.

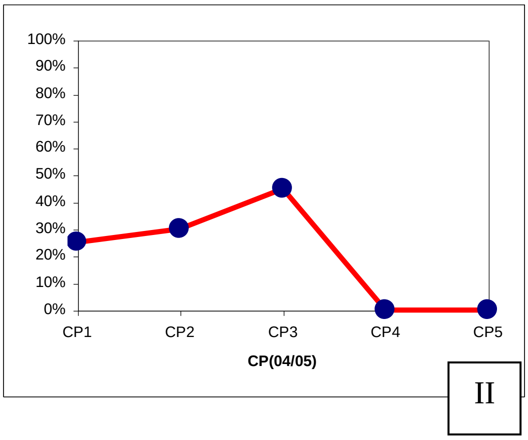
La alumna LM (2º E) tiene mayores dificultades para realizar el cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental. Las integrales cuya solución es un logaritmo neperiano las resuelve tomando el neperiano del denominador sin determinar la constante necesaria para que la solución sea la correcta. Utiliza la linealidad de la integral para la suma de las funciones integrando, aunque comete algunos errores en la solución; ahora bien, un error conceptual importante es la generalización de dicha propiedad cuando el integrando es producto de dos funciones y, esta alumna, considera que $\int f(x)\,g(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int g(x)\,dx\right)$. Por último, LM, piensa que la solución de $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx$ es *4f'(x)[f(x)]* $^{-1/2}$, lo cual es un error. Así pues, pensamos que la alumna LM no ha asimilado suficientemente el cálculo de primitivas elementales y podemos considerar que el cálculo mental realizado por la misma es insuficiente.

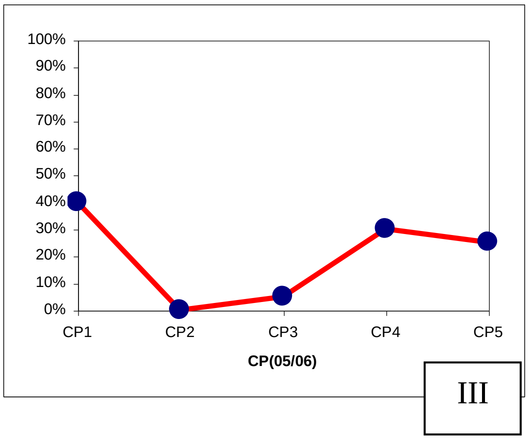
El alumno DC[64] (2º F) realiza un buen ejercicio de cálculo de primitivas, aplica correctamente la propiedad $\int f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int a\, f(x)\,dx,\ a \neq 0$ y, sin embargo, pretende generalizarla a $\int f(x)\,dx = \frac{1}{g(x)}\int g(x)\cdot f(x)\,dx$.

[63] Consideramos que debemos actuar así: en virtud de la metodología de investigación-acción, por la información obtenida del grupo 2º E (ciclo II, curso 2004-2005) y por las características propias de los alumnos de 2º F (ciclo III, curso 2005-2006) detectadas en las diferentes sesiones de la acción.

[64] El alumno DC es repetidor, sin embargo, anteriormente nunca fue alumno del PI.

La prueba de MG (2º F), está llena de confusión y tiene errores conceptuales muy importantes entre los que destacamos: la realización de la derivada de parte del integrando, confundir la integración de funciones logarítmicas con las potenciales, desconocer la integral de una constante, etc.





Gráficos VIII.4.1.17. Cálculo de primitivas elementales (ciclos de confirmación).

Reflexión: Menos de la mitad de los estudiantes, del curso 2004-2005, sólo 9 (45%) se considerarían aprobados en el cálculo mental de primitivas, el resto no supera la prueba[65]. Mejoran los resultados en el curso siguiente pues 12 estudiantes (60%) han aprobado y los demás suspenden[66], además, debemos constatar que previamente se propusieron ejercicios muy similares a los del examen para que fueran resueltos por los estudiantes fuera del horario lectivo. Creemos que estos bajos resultados pueden ser debidos, entre otras causas, a las dificultades que tenían los estudiantes en el cálculo diferencial.

Los errores más comunes que podemos encontrar son: no determinar los factores constantes de integración, confundir las integrales cuya solución es tipo radical con las logarítmicas, atribuir la linealidad de la suma al producto y al cociente de funciones, generalizar la propiedad de que el integrando puede multiplicarse por una constante si previamente la integral se ha dividido por la misma constante a considerar una función cualquiera en lugar de la constante, confundir la integración con la derivación y, además, algunos alumnos no comprenden y muchos no memorizan las tablas de derivadas e integrales del libro de texto.

[65] Recuérdese que para realizar estos ejercicios los alumnos dispusieron de una hora.

[66] Analizada la experiencia del primer ciclo de confirmación, el examen realizado al grupo 2º F tuvo una duración de dos horas y a los estudiantes se les permitió consultar las tablas de derivadas e integrales inmediatas.

VIII.4.2. TABLAS RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DE LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN

Tal y como quedó establecido anteriormente, para no alargar demasiado la redacción de la presente tesis doctoral, se han estudiado las once categorías comunes a los ciclos de exploración y confirmación aunque en los epígrafes anteriores no hayan sido analizadas, sin embargo, pensamos que ahora se deben realizar las correspondientes tablas[67] resumen de dichas categorías en cada uno de los dos ciclos de la confirmación. Asimismo, incluimos otras dos tablas[68] resumen, una por cada curso de los ciclos de confirmación, de las diecisiete nuevas categorías analizadas en los epígrafes anteriores.

En cada una de las cuatro tablas, de los dos ciclos de confirmación[69], consideramos las respuestas de los cuadernillos de los estudiantes con una valoración cuantitativa y, además, damos la siguiente información:

- La primera columna contiene los códigos de las categorías.
- Como *Niveles de respuesta* tenemos los cinco que hemos establecido según la escala Likert y por cada nivel de cada una de las categorías se localizan dos datos, éstos son: la frecuencia n_i y el porcentaje del nivel obtenido para esa categoría[70].
- Tres parámetros, para cada categoría, denominados *Medidas*, éstos son: *Moda (Mo)* que es el nivel de mayor frecuencia, *Suma* (Σ) que es $\sum = \sum n_i \left(\textit{Nivel de respuesta de la categoría} \right)$ y *Media* ($\bar{x}$) que viene dada por el cociente $\bar{x} = \Sigma$/número total de alumnos[71].
- La última fila sigue el mismo procedimiento sumando previamente las columnas de las frecuencias de cada uno de los niveles[72].

[67] Véanse las tablas VIII.4.2.1.1 y VIII.4.2.1.2.

[68] Véanse las tablas VIII.4.2.2.1 y VIII.4.2.2.2.

[69] Recuérdese que cada uno de los dos ciclos de confirmación tiene 20 alumnos.

[70] Por ejemplo, para la categoría ESIS de la primera tabla el nivel 4 tiene frecuencia 13 (han sido evaluadas 13 respuestas de los alumnos en esa categoría con un nivel 4) y el porcentaje que le corresponde es el 65% (13 alumnos del total que son 20).

[71] Si consideramos ESIS, tenemos: *Mo* = 4 puesto que el nivel 4 tiene la frecuencia más alta (13), Σ=1x1+ 0x2 + 4x3 + 13x4 + 2x5 = 75 y $\bar{x}$ = 75/20 = 3,75 (20 alumnos del grupo 2º E).

[72] Por ejemplo, la frecuencia TOTAL del nivel 1 es la suma de todas las frecuencias de nivel 1 de las categorías y asciende a 53; el 24,09% se obtiene de 5300/220 (220=20x11; 20 alumnos y 11 categorías).

VIII.4.2.1. Categorías de los ciclos de confirmación (II y III) que son comunes al ciclo de exploración (I)

CATEGORÍAS	*FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO II)*												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\bar{x}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
DGA	2	10	0	0	0	0	0	0	18	90	5	92	4,6
DGSI	2	10	0	0	0	0	0	0	18	90	5	92	4,6
DGSS	2	10	0	0	0	0	0	0	18	90	5	92	4,6
RSISR	6	30	10	50	2	10	0	0	2	10	2	42	2,1
ESIS	1	5	0	0	4	20	13	65	2	10	4	75	3,75
EID	3	15	6	30	4	20	3	15	4	20	2	59	2,95
ACAFE	11	55	2	10	0	0	2	10	5	25	1	48	2,4
DGSR	2	10	1	5	0	0	1	5	16	80	5	88	4,4
RFIAR	13	65	0	0	0	0	1	5	6	30	1	47	2,35
IGAI	5	25	1	5	1	5	2	10	11	55	5	73	3,65
IGTVMI	6	30	1	5	0	0	3	15	10	50	5	70	3,5
TOTAL	**53**	**24,09**	**21**	**9,55**	**11**	**5**	**25**	**11,36**	**110**	**50**	**5**	**778**	**3,54**

Tabla VIII.4.2.1.1. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las categorías/niveles de comprensión matemática, comunes a los ciclos de exploración y confirmación, relativas al concepto de integral definida (Curso 2004-2005).

CATEGORÍAS	*FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO III)*												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	**Σ**	$\bar{x}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
DGA	4	20	0	0	0	0	0	0	16	80	5	84	4,2
DGSI	4	20	0	0	0	0	0	0	16	80	5	84	4,2
DGSS	4	20	0	0	0	0	0	0	16	80	5	84	4,2
RSISR	4	20	3	15	0	0	0	0	13	65	5	75	3,75
ESIS	4	20	0	0	3	15	2	10	11	55	5	76	3,8
EID	6	30	1	5	5	25	3	15	5	25	1	60	3
ACAFE	7	35	1	5	2	10	0	0	10	50	5	65	3,25
DGSR	5	25	0	0	0	0	9	45	6	30	4	71	3,55
RFIAR	5	25	0	0	3	15	1	5	11	55	5	73	3,65
IGAI	4	20	0	0	1	5	0	0	15	75	5	82	4,1
IGTVMI	9	45	0	0	0	0	0	0	11	55	5	64	3,2
TOTAL	**56**	**25,46**	**5**	**2,27**	**14**	**6,36**	**15**	**6,82**	**130**	**59,09**	**5**	**818**	**3,72**

Tabla VIII.4.2.1.2. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las categorías/niveles de comprensión matemática, comunes a los ciclos de exploración y confirmación, relativas al concepto de integral definida (Curso 2005-2006).

VIII.4.2.2. Nuevas categorías de los ciclos de confirmación (II y III)

CA TE GO RÍ AS	***FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS NUEVAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO II)***												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\bar{X}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
DR	4	20	2	10	1	5	0	0	13	65	5	76	3,8
DMIN4	6	30	1	5	0	0	0	0	13	65	5	73	3,65
DMAX4	6	30	1	5	0	0	0	0	13	65	5	73	3,65
DSI4	11	55	1	5	0	0	1	5	7	35	1	52	2,6
DSS4	11	55	0	0	1	5	1	5	7	35	1	53	2,65
DIINF	12	60	0	0	1	5	4	20	3	15	1	46	2,3
DISUP	18	90	0	0	0	0	0	0	2	10	1	28	1,4
DNI	14	70	0	0	0	0	4	20	2	10	1	40	2
AR	2	10	1	5	0	0	0	0	17	85	1	89	4,45
AMIN4	9	45	2	10	0	0	0	0	9	45	3	58	2,9
AMAX4	7	35	0	0	0	0	0	0	13	65	5	72	3,6
ASI4	8	40	1	5	0	0	1	5	10	50	5	64	3,2
ASS4	8	40	1	5	0	0	1	5	10	50	5	64	3,2
AIINF	13	65	2	10	1	5	0	0	4	20	1	40	2
AISUP	13	65	1	5	0	0	1	5	5	25	1	44	2,2
AI	10	50	1	5	1	5	4	20	4	20	1	51	2,55
CP	5	25	6	30	9	45	0	0	0	0	3	44	2,2
TOTAL	**157**	**46,18**	**20**	**5,88**	**14**	**4,12**	**17**	**5**	**132**	**38,82**	**1**	**967**	**2,84**

Tabla VIII.4.2.2.1. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las nuevas categorías/niveles de comprensión matemática relativas al concepto de integral definida y cálculo mental de los ciclos de confirmación (Curso 2004-2005).

CATEGORÍAS	***FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS NUEVAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO III)***												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\bar{x}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
DR	5	25	1	5	1	5	2	10	11	55	5	73	3,65
DMIN4	6	30	1	5	0	0	0	0	13	65	5	73	3,65
DMAX4	6	30	1	5	0	0	1	5	12	60	5	72	3,6
DSI4	6	30	1	5	3	15	0	0	10	50	5	67	3,35
DSS4	6	30	2	10	2	10	0	0	10	50	5	66	3,6
DIINF	10	50	0	0	0	0	0	0	10	50	5	60	3
DISUP	9	45	2	10	0	0	2	10	7	35	1	56	2,8
DNI	8	40	0	0	1	5	2	10	9	45	5	68	3,4
AR	5	25	0	0	0	0	0	0	15	75	5	80	4
AMIN4	7	35	0	0	0	0	0	0	13	65	5	72	3,6
AMAX4	4	20	0	0	0	0	0	0	16	80	5	84	4,2
ASI4	4	20	0	0	0	0	0	0	16	80	5	84	4,2
ASS4	4	20	0	0	0	0	0	0	16	80	5	84	4,2
AIINF	6	30	2	10	7	35	2	10	3	15	3	54	2,7
AISUP	6	30	2	10	7	35	2	10	3	15	3	54	2,7
AI	7	35	1	5	2	10	4	20	6	30	1	57	2,85
CP	8	40	0	0	1	5	6	30	5	25	1	60	3
TOTAL	**107**	**31,47**	**13**	**3,82**	**24**	**7,06**	**21**	**6,18**	**175**	**51,47**	**5**	**1164**	**3,42**

Tabla VIII.4.2.2.2. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las nuevas categorías/niveles de comprensión matemática relativas al concepto de integral definida y cálculo mental de los ciclos de confirmación (Curso 2005-2006).

VIII.4.3. REFLEXIONES DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS DE LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN

Llegado a este punto, una vez estudiadas las categorías del primer ciclo (curso 2003-2004), segundo ciclo (2004-2005) y tercer ciclo (2005-2006), debemos establecer las reflexiones[73] de los ciclos de confirmación a las cuales hemos llegado, éstas son:

a) Los estudiantes no encuentran dificultad en la determinación gráfica del área (categoría DGA) comprendida entre la gráfica de una función positiva, definida en un intervalo compacto y el eje de abscisas. Ahora bien, los de nivel mínimo fueron los que abandonaron la asignatura.

b) La mayoría de los alumnos, 90% y 80% respectivamente, han comprendido gráficamente el concepto de suma inferior y suma superior de Darboux (DGSI y DGSS).

c) Podemos afirmar que la interpretación geométrica del área y de las sumas de Darboux (inferior y superior) no es complicada para los estudiantes de los ciclos de confirmación.

d) El 10% de los alumnos del curso 2004-2005 son capaces de comprender y expresar correctamente la relación existente entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones (RSISR), una más fina que la otra. Contrasta con el 65% del curso siguiente.

e) Si sumamos los dos niveles más altos para la expresión de las sumas inferiores y superiores (ESIS) tenemos un 75% en el segundo ciclo y un 65% en el tercero. Debemos señalar el contraste tan destacado que existe para las resultados de las categorías RSISR (10%) y ESIS (65% + 10%) del curso 2004-2005.

f) Los estudiantes que explican con cierta coherencia los conceptos de integral inferior y superior de Darboux (EID) se sitúan entre el 35% y el 40%. Seguimos pensando que los alumnos tienen dificultades para explicar los diferentes conceptos matemáticos y/o que no comprenden suficientemente las notaciones matemáticas.

[73] Consideraremos respuestas buenas a las que están en los niveles 4 y 5 y respuestas incorrectas a las de los niveles 1 y 2. Por tanto, al considerar los porcentajes en algunos casos se efectuará la suma y en otros se indicará dicha suma.

g) La representación de la función de Dirichlet y la obtención de los mínimos y máximos en cuatro subintervalos (DR, DMIN4 y DMAX4) no causa ninguna dificultad a un porcentaje aproximado del 65% de los estudiantes en los dos ciclos objeto de análisis; el resto, 35%, de los alumnos dan respuestas incorrectas o se limitan a no contestar.

h) Las sumas inferiores y superiores de la función de Dirichlet para una partición de 5 nodos (DSI4 y DSS4) las realizan correctamente el 40% y el 50% de los alumnos de los ciclos II y III, respectivamente. Por otro lado, realizan mal las sumas alrededor del 35% de ambos ciclos.

i) Siguiendo la estela marcada anteriormente, las categorías DIINF, DISUP y DNI dan mejores resultados en el tercer ciclo que en el segundo aunque en ambos bajan con respecto a las dos anteriores.

j) Determinar gráficamente el área limitada por la función afín $f(x)=x$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=1$ no supone ninguna dificultad a más del 75% de los alumnos de ambos ciclos (categoría AR), sin embargo, calcular los mínimos y máximos de una partición del intervalo original en cuatro subintervalos (AMIN4 y AMAX4) y la obtención de las sumas inferiores y superiores asociadas a la partición anterior (ASI4 y ASS4) arroja aproximadamente un 55% de aciertos y un 45% de fracasos para el curso 2004-2005. Estos resultados quedan mejorados en el curso siguiente con el 80% de respuestas válidas y un 20% erróneas.

k) Mayor dificultad causa a los estudiantes determinar la integral inferior y superior (AIINF y AISUP), siendo la cuarta parte de los alumnos a los cuales se les puede validar su respuesta; observamos mejoras en la justificación de la integrabilidad de la función afín (AI), pues los resultados se encuentran entre el 40% y el 50%, según los ciclos.

l) El cálculo de áreas mediante fórmulas elementales (ACAFE) comporta cierta dificultad a los alumnos 55%+10% (segundo ciclo) y 35%+5% (tercer ciclo) y, en consecuencia, éstos son incapaces de utilizar los recursos adquiridos y aprendidos en cursos anteriores (áreas de polígonos regulares) y relacionarlos con las nuevas teorías del Cálculo Integral explicadas en segundo curso de Bachillerato.

m) Más de las tres cuartas partes de los estudiantes determinan gráficamente las sumas de Riemann (DGSR).

n) Cuando se pide la representación gráfica de la función integral, es decir, siendo variable el extremo superior de la misma, RFIAR, los resultados son más discretos, siendo positivos el 35% y el 60% según los ciclos.

o) Las interpretaciones gráficas de la aditividad de la integral y del teorema del valor medio de la integral las realizan correctamente un porcentaje elevado de alumnos; sin embargo, la expresión analítica de estas interpretaciones disminuye sensiblemente, obteniéndose una media aproximada del 65%.

p) El cálculo mental de primitivas, realizado por escrito con la resolución de los ejercicios propuestos en la categoría del cálculo de primitivas, CP, tiene resultados bajos puesto que sólo superan la prueba[74] el 45% de los estudiantes del curso 2004-2005 y el 60% de los del curso 2005-2006[75].

q) Pensamos que las nuevas tecnologías son necesarias para una mejor enseñanza-aprendizaje de la integral y el programa de *software* matemático *DERIVE*, por su capacidad de representación gráfica y de efectuar cálculos, ha de permitir a los alumnos dedicarle más tiempo a la comprensión y adquisición reflexiva de los conceptos que conforman el área y la integral. En consecuencia, la investigación realizada en los ciclos de confirmación con el uso de las nuevas tecnologías queda recogida en el capítulo XI de la presente memoria.

r) Si consideramos los niveles 4 y 5, ver las cuatro últimas tablas, como respuestas aceptables, entonces la suma de las medias porcentuales de estos dos niveles, para todas las categorías, es del 48,33% para el segundo ciclo (curso 2004-2005) frente al 61,21% del tercer ciclo (curso 2005-2006).

s) Quedan confirmadas, con los matices propios de estos dos ciclos de confirmación redactados en este capítulo, las siguientes reflexiones del ciclo de exploración[76]: a), b), c), d), e), f), g) y h).

[74] Excepcionalmente para esta categoría consideramos que un estudiante ha superado la prueba si ha alcanzado un nivel igual o superior a 3.

[75] Para más información, véase *VIII.4.1.17. CP: Cálculo de primitivas* y el anexo I.

[76] Véase el apartado *VII.5. Reflexiones del ciclo de exploración* del capítulo VII de esta memoria.

VIII.4.4. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA

Sabemos que el modelo teórico bajo el cual realizamos la presente investigación es el *modelo de comprensión de Sierpinska*, por tanto, debemos determinar los actos de comprensión y los obstáculos y/o dificultades[77] asociados a la enseñanza-aprendizaje de la integral definida en los dos ciclos de confirmación. Nosotros así lo hemos establecido teóricamente en el capítulo III[78] y, consecuentemente, ahora debemos identificar los actos de comprensión que se derivan de la acción en: a) el análisis de los cuadernillos teórico-prácticos del área y la integral de los estudiantes, b) el cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental realizado en las sesiones de la implementación de la planificación y en las pruebas escritas de los alumnos y, por último, c) la utilización de *DERIVE* en las sesiones prácticas realizadas en el aula de informática[79].

En la memoria de estos ciclos de confirmación nos limitaremos a determinar los actos de comprensión y los obstáculos y/o dificultades, según se recoge en la tabla III.1.5.1[80], relativos a las once categorías de comprensión matemática comunes con el ciclo de exploración y las dieciséis nuevas categorías analizadas anteriormente. Posteriormente se determinarán los actos correspondientes a la categoría *cálculo de primitivas (CP)*[81].

Los actos de comprensión de Sierpinska y los obstáculos y/o dificultades observados en los ciclos II y III son reconocidos por sus códigos (entre paréntesis) mediante las correspondientes categorías de comprensión matemática (cuyos códigos también los escribimos entre paréntesis)[82] y,

[77] Consideramos que, en nuestra investigación, los estudiantes no siempre encuentran obstáculos en la adquisición del conocimiento matemático, en ocasiones, tienen dificultades.

[78] Véase el epígrafe *III.1.5. El Modelo de Comprensión de Sierpinska.*

[79] En el capítulo XI, en el cual redactamos la memoria de nuestra investigación de la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida con las nuevas tecnologías, estudiaremos los actos de comprensión en el contexto de nuestras prácticas con *DERIVE.*

[80] *Tabla III.1.5.1. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al aprendizaje de la integral definida* del capítulo III.

[81] Entiéndase *cálculo mental de primitivas elementales.*

[82] Si, por ejemplo, se escribe (CI_{11}; DGA) significa que aparece el acto de compresión CI_{11}: *Identificación de una superficie delimitada por la gráfica de una función continua y positiva, el eje OX y las rectas x=a y x=b* y, además, ello queda corroborado por la categoría de comprensión matemática DGA: *Determinación gráfica del área.* Así pues, cuando en el mismo paréntesis incluyamos códigos de actos u obstáculos y códigos de categorías, la sintaxis será:

(ACT-OBS, ACT-OBS,... y ACT-OBS; CAT, CAT,... y CAT).

además, son comentados a nivel general y no de forma individualizada puesto que esta investigación, de didáctica de la integral con alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales, no contempla ningún estudio de casos. He aquí el análisis de las producciones de los estudiantes según el marco o modelo teórico mencionado:

Coincidimos con el análisis efectuado en el ciclo I y, de nuevo, los alumnos de los ciclos II y III identifican correctamente una superficie delimitada por la gráfica de una función continua y positiva $f(x)$, el eje de abscisas y dos rectas verticales (CI_{11}; DGA). El concepto de partición (P), cuando consta de tres nodos, es identificado sin dificultad por los estudiantes y, al menos gráficamente, identifican y discriminan las sumas inferior y superior de Darboux de $f(x)$ asociadas a la partición P (CI_{12} y CI_{16}; DGSI y DGSS). Además, el control gráfico de $s(f,P)$ y $S(f,P)$ supone que, asimismo, los alumnos identifiquen y discriminen los extremos absolutos de la función $f(x)$ en los subintervalos $[a,x_1]$ y $[x_1,b]$ (CI_{14}).

Los estudiantes de 2º E tienen más dificultades que los de 2º F en identificar y discriminar dos particiones con la relación de refinamiento, $P\subset P'$, y, en consecuencia, establecer la relación existente entre las sumas inferiores y superiores asociadas a ambas particiones. Así pues, para los alumnos del ciclo II tales conceptos entrañan grados de dificultad superiores a los del ciclo de exploración (OI_{16} y OI_{17}; RSISR) y, sin embargo, podemos afirmar que los estudiantes de 2º F llegan a adquirirlos con un buen grado de comprensión (CI_{16} y CI_{17}).

A los alumnos de los ciclos de confirmación no les resulta difícil generalizar las sumas inferior y superior de Darboux para un número indeterminado de nodos del intervalo [a,b], si éstos solamente deben completar parte de las expresiones (CI_{13}, CI_{15} y CI_{17}; ESIS)[83].

Constatamos que los estudiantes de los ciclos II y III tienen dificultades para identificar y discriminar las integrales inferior y superior de Darboux (EID), es más, definir por escrito cada uno de estos conceptos con sus propias expresiones resulta muy complicado para muchos de ellos. Además, confirmamos la conjetura del ciclo I por la cual estamos en condiciones de

[83] Reiteramos, de nuevo, que no existe contradicción alguna entre esta afirmación y las anteriores puesto que consideramos que los estudiantes bachilleres no comprenden la relación de orden parcial que puede establecerse en el conjunto de las particiones del intervalo compacto [a,b].

afirmar que algunos alumnos piensan que las integrales inferior y superior de Darboux de una función *f(x)* en un intervalo [a,b] no se alcanzan, más bien, se aproximan cada una de ellas a un valor (OI_{19a}, OI_{19b}, OI_{20a} y OI_{20b}; EID).

Los estudiantes identifican y generalizan fácilmente las sumas de Riemann, (CI_{23} y CI_{24}; DGSR). Al menos el 50% de los mismos son capaces de discriminar las sumas inferior y superior de Darboux y las de Riemann asociadas a cualquier conjunto de puntos intermedios de una partición y sintetizarlas con las desigualdades $s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P)$ y, además, afirmamos que todos los alumnos consideran iguales la integral de Darboux y la de Riemann (CI_{26})[84].

Transitar del concepto de integral definida al concepto de integral indefinida sintetizándolo con la expresión $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es muy difícil para los alumnos de 2º E y no tanto para los de 2º F, de nuevo, constatamos que el mayor obstáculo con el que se encuentran estos estudiantes es la identificación del extremo superior de la integral con la variable de integración, es decir, consideran $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ en lugar de $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (OI_{30} y OI_{34}; RFIAR).

Los estudiantes, en un elevado porcentaje, no establecen relaciones matemáticas entre sus conocimientos previos y los adquiridos con el cálculo integral, así pues, muy pocos recurren a la síntesis de la fórmula clásica del área de un triángulo (OI_6; ACAFE). Por último, las propiedades más elementales de la integral definida (aditividad, IGAI y valor medio, IGTVMI) no son difíciles de identificar gráficamente para dos tercios de los alumnos.

Hasta este momento hemos analizado las once categorías de comprensión matemática comunes a los ciclos de confirmación y exploración. A partir de ahora estudiamos, según los *actos de comprensión de Sierpinska*, las nuevas categorías de los ciclos de confirmación, salvo el *cálculo mental de primitivas (CP)* que, posteriormente, tendrá un tratamiento específico.

La inseguridad en la representación de los números sobre la recta real y la ausencia de discriminación entre números racionales e irracionales son obstáculos por los cuales los alumnos no sintetizan la densidad de cada uno de estos conjuntos en los reales y, consecuentemente, alrededor de la

[84] Estas afirmaciones han quedado suficientemente contrastadas, en los dos ciclos de confirmación, en: las sesiones de la acción impartidas en el aula de cada uno de los grupos, las anotaciones del cuaderno del profesor investigador, las grabaciones en audio y los cuadernos de clase de los alumnos.

tercera parte de los estudiantes no son capaces de identificar gráficamente la función de Dirichlet[85] (OI_{21}; DR). En términos positivos, dos de cada tres son los que identifican y generalizan los extremos absolutos de dicha función en varios subintervalos de [0,4] (CI_{14} y CI_{15}; DMIN4 y DMAX4).

Menos de la mitad de los alumnos (45%) identifican y discriminan las sumas inferiores y superiores de la función de Dirichlet asociadas a una partición de cinco nodos (CI_{16}; DSI4 y DSS4).

Constatamos que existe una gran diferencia entre los alumnos de los grupos 2º E y 2º F que identifican y discriminan las integrales superior e inferior de Darboux de la función de Dirichlet y, en consecuencia, en la síntesis de no integrabilidad de dicha función (CI_{19} y CI_{22}; DIINF, DISUP y DNI); así pues, en los ciclos posteriores de nuestra investigación deberemos estar vigilantes con los niveles de respuesta de los estudiantes en las categorías de comprensión matemática asociadas a la función de Dirichlet.

La función afín $f(x)=x$ es representada (AR), sin mayores dificultades, por la mayoría de los alumnos. Los resultados de las categorías AMIN4, AMAX4, ASI4 y ASS4, en general, igualan o mejoran a los de sus homólogas de la función de Dirichlet; sin embargo, de nuevo constatemos que los estudiantes del grupo F mejoran a los del grupo E (CI_{11}, CI_{14} y CI_{16}).

Identificar y discriminar las integrales inferior y superior de Darboux de la función afín en el intervalo [0,1] arroja unos niveles muy inferiores a los de las categorías precedentes de la función afín, aunque mejoran en la síntesis de la integrabilidad de dicha función (CI_{19} y CI_{20}; AIINF, AISUP y AI).

Conjeturábamos, en el capítulo anterior que *"los estudiantes tienen grandes dificultades en la comprensión del teorema de caracterización óptima de las funciones integrables Darboux y, posiblemente, piensen que la integral inferior no se alcanza, más bien, se aproxima a un valor (ídem integral superior)".* Efectivamente, los alumnos de los ciclos de confirmación (II y III) no reconocen fácilmente dicho teorema y, algunos de ellos, afirman que las integrales inferior y superior de Darboux no se alcanzan, más bien, se aproximan a unas cantidades determinadas llegando a afirmar[86] $\int_0^1 x\,dx \cong 0{,}5$.

[85] La función de Dirichlet de la presente investigación es: $f(x)=\begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional\ en\ [0,4] \\ 2 & si\ x\ es\ irracional\ en\ [0,4] \end{cases}$

[86] Véase, en el anexo I, la prueba escaneada del alumno DC de 2º F del ciclo de confirmación.

El *cálculo mental de primitivas (CP)* tiene un tratamiento particular y así lo hemos determinado en los primeros capítulos de esta memoria, además, sus propios actos de comprensión y obstáculos y/o dificultades han quedado establecidos en el capítulo III[87]. Por tanto, procede en estos momentos analizar el *cálculo mental de primitivas* efectuado en las sesiones de la acción y en la corrección y valoración de las pruebas escritas de los alumnos de los dos ciclos de confirmación (II y III, cursos: 2004-2005 y 2005-2006)[88].

Partimos del hecho constatado de que, al menos la mitad de los estudiantes, no han aprendido ni comprendido suficientemente (sintetizado) la tabla de derivadas del libro de texto (OM_7), hecho acrecentado en el aprendizaje comprensivo de la tabla de integrales inmediatas (OM_9). Además, la no identificación de primitiva como antiderivada hace que algunos alumnos sean incapaces de discriminar la diferenciación de la integración (OM_3)[89].

En las distintas sesiones de la acción en las cuales se ha realizado el cálculo mental[90] de primitivas elementales ha quedado constatado que los alumnos han de tener un alto nivel de concentración (OM_8) y que los estudios previos al cálculo integral debe permitirles discriminar diferentes tipos de funciones (polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc.) para poder calcular integrales inmediatas (CM_4); sin embargo, los resultados generales alcanzan niveles discretos (CM_5, CM_6, CM_7, CM_8, CM_5 y CM_{10}).

Los estudiantes tienen dificultades en la determinación de constantes de integración (OM_5) y, sobre todo, consideramos que un obstáculo importante es la ausencia de generalización de las derivadas de funciones elementales, mediante la “regla de la cadena”, a las funciones compuestas lo cual conlleva que no hayan sintetizado la linealidad de la diferenciación e integración e intenten aplicar, entre otras, pseudopropiedades tales como: $\int f(x)\,g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$, $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$, $\int f(x)\,dx = g(x)\int \frac{1}{g(x)}\,f(x)\,dx$ (OM_6).

Por último, al menos la mitad de los estudiantes piensan que en sus estudios posteriores no necesitan el cálculo integral (OM_{12}).

87 Véase la *Tabla III.1.5.2. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al cálculo de primitivas mediante el cálculo mental.*

88 En estos momentos no pretendemos ser exhaustivos, más bien, determinar algunos actos de comprensión y obstáculos y/o dificultades del cálculo mental de primitivas.

89 Véase el comentario del alumno JA en VIII.3.1.9 y la prueba de MG de 2º F en el anexo I.

90 Consúltense las sesiones 4, 5, 6 y 7 del anexo H.

VIII.5. REFLEXIONES DE LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN

Realizadas y redactadas las tres primeras fases de la investigación de los ciclos de confirmación (planificación, acción y análisis) y analizadas las producciones de los estudiantes bajo el marco teórico de los actos de comprensión de Sierpinska, ahora es el momento de abordar la última fase, es decir, según el marco metodológico cualitativo de investigación-acción, establecer e identificar las reflexiones a las cuales hemos llegado y que han de servir para introducirnos en los ciclos de consolidación[91].

Afirmamos que la doble experiencia de investigación-acción realizada en los ciclos de confirmación ha resultado ser muy positiva al profesor investigador puesto que le ha permitido seguir profundizando en didáctica de la integral y, en consecuencia, pensamos que la enseñanza de la integral ha sido impartida con un alto nivel de calidad. Los estudiantes han percibido una docencia distinta a la habitual, consideran que su trabajo diario es valorado y que son artífices directos y activos de su propio aprendizaje, por tanto, creemos que también los alumnos han realizado un aprendizaje superior al que habitualmente se alcanza con otros tipos de docencia.

Han participado en la doble investigación cuarenta estudiantes (veinte por ciclo) de bachillerato de ciencias sociales del IES “Félix Rodríguez de la Fuente” de Burgos. La acción se ha desarrollado en los meses de diciembre y enero de los correspondientes cursos académicos, consideramos que ha sido muy positiva y las reflexiones más importantes son:

a) El incremento de las sesiones dedicadas a la enseñanza de la integral ha favorecido el aprendizaje de los alumnos y, en general, su actitud ha sido muy positiva.

b) Constatamos que el aprendizaje del análisis matemático es difícil para los estudiantes de segundo curso de ciencias sociales y pensamos que alcanza su cenit en el cálculo integral.

c) Las intervenciones de los estudiantes han sido más frecuentes que en los meses anteriores a diciembre, de mayor calidad científica y los que no intervenían en clase por su timidez han sido más activos y se han dirigido con mayor frecuencia a sus compañeros y al profesor[92].

[91] La memoria de los ciclos de consolidación (ciclos IV y V, cursos: 2006-2007 y 2007-2008) se encuentra redactada en los capítulos IX y XI de la presente tesis doctoral.

[92] Sobre todo, cuando el profesor investigador se mezclaba entre los alumnos y abandonaba la tarima.

Ningún alumno se ha sentido discriminado ni ha sido pasivo en su aprendizaje, todos han trabajado activamente.

d) Las representaciones gráficas, por parte del profesor investigador, con tizas de diferentes colores hace que los estudiantes valoren la actitud y el interés del docente por una enseñanza de calidad y, en consecuencia, favorezcan un mejor aprendizaje de los alumnos. Los estudiantes, asimismo, utilizan lápices de diferentes colores en la toma de apuntes y en la resolución de ejercicios en sus cuadernos.

e) Los estudiantes persiguen resultados inmediatos y se decantan por los ejercicios de contenido práctico en detrimento de los teóricos.

f) La enseñanza realizada exige una dedicación muy activa del profesor y, en general, los alumnos le consultan constantemente.

g) Consideramos que el aprovechamiento de los estudiantes, según sus capacidades, es alto y muchos de ellos prosiguen con sus actividades aun cuando haya finalizado la clase de matemáticas.

h) Los alumnos, como regla general, cumplimentan los respectivos cuadernillos teórico-prácticos de actividades de forma secuencial y no retroceden en sus propias prácticas para corregir resultados que han sido contradichos por los que acaban de escribir.

i) Hemos trabajado el cálculo mental de primitivas inmediatas y, a pesar de haber ejercitado previamente el cálculo diferencial, consideramos que los resultados son discretos; por tanto, pensamos que el cálculo de primitivas deberá ampliarse a un número superior de sesiones.

j) Se ha utilizado *DERIVE* para la enseñanza-aprendizaje de la integral y consideramos que la experiencia ha sido muy positiva[93].

Pensamos que estas reflexiones de los dos ciclos de confirmación son la más importantes y, junto con las del ciclo de exploración, partimos de ellas para realizar un nuevo ciclo[94] en el cual, una vez más, seguiremos las fases que lo componen[95] y así hasta llegar a la saturación.

[93] La investigación realizada con el uso *DERIVE* para la enseñanza-aprendizaje de la integral queda redactada en el capítulo XI y, consecuentemente, allí están las correspondientes reflexiones.

[94] Recuérdese que el marco metodológico cualitativo de investigación-acción es un proceso en espiral, véase el capítulo II.

[95] Planificación, acción, análisis de la acción u observación y reflexión.

CAPÍTULO IX: CICLOS DE CONSOLIDACIÓN (IV Y V), CURSOS 2006-2007 Y 2007-2008 .... ***405***

IX.1. INTRODUCCIÓN **405**

IX.2. PLANIFICACIÓN **408**

IX.3. ACCIÓN **411**

IX.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN **411**

IX.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN **421**

IX.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS **425**

IX.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA **425**

IX.4.1.1. DSIn-10: Dirichlet, sumas inferiores en “n ó 10” subintervalos 427

IX.4.1.2. DSSn-10: Dirichlet, sumas superiores en “n ó 10” subintervalos 429

IX.4.1.3. ASI20: Afín, sumas inferiores en “20” subintervalos 432

IX.4.1.4. ASS20: Afín, sumas superiores en “20” subintervalos 433

IX.4.1.5. ASIn: Afín, sumas inferiores en “n” subintervalos 434

IX.4.1.6. ASSn: Afín, sumas superiores en “n” subintervalos 436

IX.4.1.7. ACID: Cálculo del área por medio de la integral definida 437

IX.4.1.8. ATCFI: Cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables 438

IX.4.1.9. IGTVMD: Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial 440

IX.4.1.10. TFCIS: Teorema fundamental cálculo integral (sumas) 442

IX.4.1.11. TFCII: Teorema fundamental cálculo integral (incrementos)..... 443

IX.4.1.12. TFCSI: Teorema fundamental cálculo integral (sumas e incrementos) 444

IX.4.1.13. CP: Cálculo de primitivas 445

IX.4.2. TABLAS RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DE LOS CICLOS DE CONSOLIDACIÓN **449**

IX.4.2.1. Categorías de los ciclos de consolidación (IV y V) que son comunes a las de los ciclos de exploración (I) y confirmación (II y III)...... 450

IX.4.2.2. Categorías de los ciclos de consolidación (IV y V) que son comunes a las de los ciclos de confirmación (II y III)................................. 452

IX.4.2.3. Nuevas categorías de los ciclos de consolidación (IV y V) 454

IX.4.3. REFLEXIONES DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS DE LOS CICLOS DE CONSOLIDACIÓN **456**

IX.4.4. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA **460**

IX.5. REFLEXIONES DE LOS CICLOS DE CONSOLIDACIÓN **465**

CAPÍTULO IX: CICLOS DE CONSOLIDACIÓN (IV Y V), CURSOS 2006-2007 Y 2007-2008

IX.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo, denominado ciclos de consolidación, redactamos la investigación en los ciclos IV y V correspondientes a los cursos 2006-2007 y 2007-2008; esto es posible por las similitudes existentes entre ambos[1].

El profesor investigador, en los tres últimos cursos lectivos, había sido miembro del departamento de matemáticas del instituto de enseñanza secundaria "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos y, por tanto, conocía perfectamente el funcionamiento y las características del instituto y del departamento, además, había realizado tres ciclos de la investigación[2] y podía continuar su actividad investigadora desde las reflexiones de los ciclos de exploración (I) y confirmación (II y III). Recordemos, de nuevo, algunas de ellas y redactemos las actuaciones que hemos seguido al respecto[3]:

1. *"Pensamos que ha sido un acierto impartir la integral definida durante los meses de diciembre y enero por permitirnos dedicarle más tiempo y no sentir la presión de final de curso".* Así hemos actuado en estos dos nuevos ciclos de consolidación y, consecuentemente, la integral definida es enseñada en el mismo periodo de tiempo que en los ciclos de confirmación. El profesor utiliza instrumentos tales como el ordenador, cañón proyector, pizarra, tizas de colores, libro de texto y cuadernillos de trabajo; además, las clases serán grabadas en audio.
2. *"Consideramos que el cálculo de primitivas no puede localizarse en varias sesiones concretas y específicas, pensamos que las clases no pueden ser monográficas y, en consecuencia, parece más razonable aplicar la primera parte de cada clase al cálculo de primitivas y el*

[1] Siguiendo el criterio del capítulo anterior, las diferencias sustanciales entre los ciclos IV y V se harán constar convenientemente en la redacción del presente capítulo.

[2] Ciclo de exploración (capítulo VII y anexo G) y ciclos de confirmación (capítulo VIII y anexo H).

[3] Las reflexiones de los ciclos anteriores van entrecomilladas y en cursiva.

resto a aplicaciones prácticas de la integral". En efecto, en los dos ciclos de consolidación hemos dedicado la primera parte de cada una de las clases a la potenciación del cálculo mental mediante el cálculo de primitivas y, posteriormente, a la enseñanza-aprendizaje de la integral definida. Además, el número de sesiones de cada uno de los ciclos de consolidación coincide con el número de sesiones de cada ciclo de confirmación, incrementándose 2/3 las clases de cualquiera de estos cuatro ciclos respecto a las del ciclo de exploración[4].

3. *"Personalizar la enseñanza supone mayor protagonismo de los alumnos en su propio aprendizaje".* Seguimos en esta actitud viéndose incrementada mediante el cálculo, individualizado y personalizado de cada estudiante, de primitivas elementales y dando las orientaciones precisas en la resolución de ejercicios y problemas.
4. *"Las representaciones gráficas han de ser de buena calidad, es importante matizar lo fundamental y aconsejable utilizar diferentes colores para combinar los registros gráficos, analíticos y algebraicos. Creemos que ello favorece la mejor comprensión de los conceptos teóricos y facilita la resolución de los problemas a los alumnos".* Confirmamos esta reflexión y continuamos haciendo lo que se expresa en ella y afirmamos, por la experiencia adquirida de los ciclos anteriores, que muchos alumnos siguen este proceder y también utilizan lápices de diferentes colores para representar superficies distintas y realizar cálculos de diferentes áreas.
5. *"A cada alumnos se le ha identificado con dos letras mayúsculas"*[5]. En estos dos ciclos de consolidación y en el ciclo de cierre seguimos con la identificación de los estudiantes establecida en los dos ciclos de confirmación, puesto que ha resultado ser muy eficaz para la redacción del capítulo anterior.
6. *"Las nuevas tecnologías han tenido un destacado papel en estos ciclos de confirmación, se ha utilizado el programa de cálculo simbólico DERIVE".* En los dos nuevos ciclos de consolidación hemos continuado utilizando el aula de informática para que los estudiantes adquirieran y consoliden sus conocimientos sobre la integral definida

[4] Se excluyen las sesiones de evaluación y repaso final de la primera quincena de junio.

[5] Serán la iniciales del nombre y primer apellido y en caso de coincidir varios alumnos serán las del nombre y segundo apellido y si persisten las coincidencias serán las de los dos apellidos.

mediante las nuevas tecnologías; sin embargo, la redacción de esta parte de la investigación se realizará en el capítulo XI.

7. *"Los alumnos que explican con cierta coherencia los conceptos de integral inferior y superior de Darboux (EID) se sitúan entre el 35% y el 40%. Seguimos pensando que los estudiantes tienen dificultades para explicar los diferentes conceptos matemáticos o que no comprenden suficientemente las notaciones matemáticas".* En los siguientes ciclos debemos hacer un esfuerzo para que los estudiantes se expresen correctamente en el lenguaje matemático y, además, sepan transferirlo a un lenguaje verbal-escrito adecuado.

8. *"Los falta de consolidación de los conceptos previos (cálculo de límites, continuidad y derivabilidad) por parte de los alumnos supone que sus avances teórico-prácticos en la integral sean lentos y limitados".* Con el objetivo de obtener un mejor aprendizaje, debemos seguir insistiendo en los conceptos previos de la integral y para ello se realizará una enseñanza más personalizada y se harán más pruebas[6], orales y escritas, durante el primer trimestre del curso.

9. *"A los alumnos les cuesta mucho trabajo dedicar un tiempo a pensar y prefieren resolver los problemas escribiendo inmediatamente la respuesta".* Pensamos que las matemáticas contienen un componente fundamental de análisis y reflexión, por tanto, potenciaremos el pensamiento abstracto, crítico, riguroso y pausado frente a la inmediatez de los resultados.

10. *"Constatamos que el aprendizaje del análisis matemático es difícil para los alumnos de ciencias sociales y pensamos que alcanza su cenit en el cálculo integral".* Que la adquisición del concepto integral definida conlleve un alto grado de dificultad, no exime a los profesores de la responsabilidad de realizar una buena práctica en su enseñanza ni a los estudiantes del deber de aprenderlo según sus capacidades; por tanto, consideramos que esto ha de servirnos de acicate para profundizar en nuestra investigación y, además, debemos hacer ver a los estudiantes que la Integral no se acaba en el Análisis Matemático, más bien, continúa de la mano de la distribución Normal en los fértiles campos de la Probabilidad y la Estadística.

[6] Se hará especial incidencia en los cálculos de límites, derivadas y primitivas inmediatas.

IX.2. PLANIFICACIÓN

La planificación de los actuales ciclos de consolidación ha sido realizada con anterioridad al mes de diciembre del correspondiente curso lectivo[7], además, el tiempo dedicado a la puesta en práctica de la planificación (acción) será el mismo que el dedicado a la implementación de los ciclos de confirmación.

Dos grupos de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales, uno por cada curso lectivo, nos han servido para desarrollar esta parte de nuestra investigación-acción; estos grupos han sido 2º D del curso 2006-2007 formado por 21 alumnos, dos de ellos repetidores[8] (ciclo IV) y 2º E del curso 2007-2008 con 19 alumnos, siendo tres repetidores[9] (ciclo V).

Atendiendo a las reflexiones de los ciclos anteriores y al punto 5 de la Introducción de este capítulo, a cada estudiante le hemos asignado un único código; además, hemos localizado la posición física que, generalmente, ocupa en el aula, la cual tiene dos pasillos centrales y tres filas de pupitres pareados, así pues, la tabla IX.2.1 muestra la distribución de los alumnos a la cual hacemos referencia.

	P I Z A R R A S				
VENTANAS					
	NM, EG	*PASILLO*	RP, MC	*PASILLO*	
	VV, SS		SB		DA
	JA		MP, EV		GM
	SD, NV		SA, BP		CS
			SG, BM		RI, AN

	P I Z A R R A S				
VENTANAS					
	RF, DR	*PASILLO*		*PASILLO*	
	SR, AG		MA, CG		JM
	RS, AS		AR, MR		RG, RH
	DB, GF		SM, VO		DA, JB

Tablas IX.2.1. Distribución, en clase, de los alumnos de 2º D del ciclo IV, curso 2006-2007 (izquierda) y 2º E del ciclo V, curso 2007-2008 (derecha).

[7] La planificación de los ciclos de confirmación goza de las mismas características que la de los dos ciclos de confirmación, véase el capítulo VIII.

[8] El alumno JA formó parte de la investigación en el ciclo III (confirmación).

[9] Ningún alumno de 2º E participó en los anteriores ciclos de la investigación.

En el presente capítulo redactamos dos ciclos y, de nuevo, seguimos el procedimiento de los ciclos de confirmación, aunque más resumidos puesto que las sesiones tienen las mismas características que las de los ciclos II y III del capítulo anterior.

Cada grupo ha tenido un horario semanal distinto y, como tal, en la tabla IX.2.2 hemos incluido los días en los cuales se ha impartido matemáticas en cada uno de ellos, el periodo diario, de 50 minutos, que le corresponde y la hora de comienzo y finalización de los periodos de clase.

	LUNES		***MARTES***		***MIÉRCOLES***		***JUEVES***		***VIERNES***	
2º D 2006-2007	**3º**	10:35 11:25	**2º**	9:25 10:15	**--**	------- -------	**5º**	12:40 13:30	**4º**	11:30 12:20
2º E 2007-2008	**2º**	9:25 10:15	**4º**	11:30 12:20	**4º**	11:30 12:20	**--**	------- -------	**3º**	10:35 11:25

Tabla IX.2.2. Periodos lectivos semanales de matemáticas de los grupos 2º D y 2º E.

Desde septiembre a noviembre de cada año se planificó el trabajo que se debía realizar en cada uno de los dos ciclos de consolidación, se había profundizado en el estudio del *software* matemático *DERIVE* y el profesor investigador había modificado el programa informático implementado para los ciclos de confirmación con el objetivo de facilitar, a los alumnos, su puesta en práctica[10] en estos nuevos ciclos y, además, para que los estudiantes tuvieran una mejor comprensión de los procedimientos de construcción de la integral definida.

Siguiendo la programación establecida por el departamento de matemáticas del instituto y sin renunciar a explicar ningún tema de Matemáticas CC SS II, nos proponemos dedicar a las fases de implementación de los ciclos de consolidación el mismo tiempo que el de los ciclos de confirmación, por tanto, serán quince sesiones básicas[11], de cada uno de estos dos nuevos ciclos en las cuales trabajaremos todos los tópicos de los ciclos II y III. La tabla IX.2.3 contiene la planificación de la puesta en práctica de la integral en los grupos 2º D y 2º E, así como las fechas de su realización.

[10] La práctica con *DERIVE* será realizada en el aula de informática en la segunda quincena de enero.

[11] Entendemos como sesión básica a aquélla que corresponde con una clase en el aula del grupo o en el aula de informática, excluyendo los exámenes y los días de repaso posteriores a la evaluación final del mes de mayo.

SESIÓN	*TRABAJO PLANIFICADO-REALIZADO*	*2º D*	*2º E*
1	Cálculo mental de derivadas y primitivas. El problema del área. Desarrollo histórico de la integral. Áreas del rectángulo y del círculo. Sumas inferior y superior de Darboux.	5-12-06 martes	5-12-07 miércoles
2	Cálculo mental. Integrales superior e inferior de Darboux. Integral de Darboux. Sumas de Riemann e integral de Riemann.	11-12-06 lunes	10-12-07 lunes
3	Cálculo mental. Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Teorema fundamental del cálculo.	12-12-06 martes	11-12-07 martes
4	Cálculo mental de primitivas inmediatas. Regla de Barrow. Ejemplos. Propiedades de la integral definida.	14-12-06 jueves	12-12-07 miércoles
5	Cálculo de primitivas elementales. Integración de funciones racionales elementales y exponenciales.	15-12-06 viernes	14-12-07 viernes
6	Cálculo de primitivas elementales. Integración de funciones potenciales, trigonométricas, etc.	18-12-06 lunes	17-12-07 lunes
7	Cálculo de primitivas elementales. Integral indefinida. Integral definida. Ejercicios.	19-12-06 martes	18-12-07 martes
8	Cálculo mental. Aplicaciones del teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow. Ejercicios.	21-12-06 jueves	19-12-07 miércoles
9	Cálculo mental de primitivas. Área encerrada entre una curva, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b. Problemas elementales.	8-01-07 lunes	8-01-08 martes
10	Cálculo mental. Área comprendida entre dos curvas. Problemas elementales.	9-01-07 martes	9-01-08 miércoles
11	Cálculo de primitivas. Cálculo de áreas e integral definida.	11-01-07 jueves	11-01-08 viernes
12	Cálculo de primitivas. Otras aplicaciones de la integral definida.	12-01-07 viernes	14-01-08 lunes
13	Resolución de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad.	15-01-07 lunes	15-01-08 martes
14	Resolución de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad.	16-01-07 martes	16-01-08 miércoles
15	Prácticas con *DERIVE* en el aula de informática.	19-01-07 viernes	22-01-08 martes
16	Primera prueba de evaluación a las 16:30 horas.	21-12-06 jueves	20-12-07 jueves
17	Segunda prueba de evaluación a las 16:30 horas.	24-01-07 miércoles	6-02-08 miércoles
18	Tercera prueba de evaluación a las 16:30 horas.	22-05-07 martes	26-05-08 lunes
19	Repaso de las Matemáticas Aplicadas CC. SS. II para las Pruebas de Acceso y exámenes de Septiembre.	1-11 junio 2007	1-13 junio 2008

Tabla IX.2.3. Planificación de los ciclos de consolidación (cursos: 2006-2007 y 2007-2008).

IX.3. ACCIÓN

Las fases de la acción de estos dos ciclos de consolidación se han desarrollado con dos grupos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales, 2º D (ciclo IV, curso 2006-2007) y 2º E (ciclo V, curso 2007-2008), el primer grupo constaba de veintiún estudiantes y el segundo de diecinueve. Constatamos que el número de sesiones de la acción en cada uno de los ciclos de consolidación coincide con los ciclos de confirmación y, además, también se ha seguido con la puesta en práctica del cálculo mental y el uso de las nuevas tecnologías. Los instrumentos de toma de datos fueron los de los dos ciclos anteriores.

El cálculo mental no tiene una o varias sesiones específicas de la acción, está dentro de todas las sesiones dedicadas a la integral. El uso de las nuevas tecnologías, en concreto, el programa de *software* de propósito matemático *DERIVE* tiene una sesión específica, por cada grupo, en el aula de informática del instituto que se describirá en el capítulo XI.

IX.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN

A continuación describimos un resumen de las sesiones realizadas al poner en práctica la docencia de la integral, asimismo, incluimos en la descripción los hechos objetivos más relevantes extraídos de las anotaciones del cuaderno de campo del profesor y de la audición de las cintas grabadas en cada una de las sesiones, así como otras apreciaciones directas del profesor investigador (PI).

Consideramos oportuno no redactar cada una de las sesiones tal y como se hizo en los dos capítulos anteriores y sus anexos, más bien, como tendríamos muchas intervenciones repetitivas, creemos más conveniente redactar los hechos que consideramos más importantes y las novedades de las sesiones de las dos fases de consolidación.

El profesor, de nuevo, se ha servido del ordenador y del cañón proyector para formalizar la construcción teórica de la integral definida, sin embargo, ha utilizado con mayor frecuencia y alternativamente los instrumentos anteriores y la pizarra para que los estudiantes comprendieran mejor los conceptos más teóricos. Desde el primer momento, hemos considerado que la introducción histórica sólo debía ser mencionada y que la formalización de las áreas del rectángulo y del círculo tenían que ser expuestas con gran brevedad[12], así pues, debía dedicarse más tiempo a la construcción de las integrales de Darboux y de Riemann y a la demostración analítica, apoyada por las interpretaciones gráficas, del teorema del valor medio del cálculo diferencial y del teorema fundamental del cálculo.

El profesor consideraba que debían interaccionar la exposición visual por medio del ordenador-cañón-pantalla y sus propias explicaciones orales con el apoyo de gráficas y escritura en la pizarra de clase, además, el tiempo dedicado a esta parte teórica tenía que ser superior al que se le asignó en los ciclos anteriores. Veamos el texto del cual se sirvió el profesor, en la tercera sesión de cada ciclo de consolidación, para explicar el:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL[13]

Si $f(x)$ es integrable Riemann-Darboux en [a,b] y G es una primitiva suya sobre este intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Demostración[14]*:* Sea $P = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = b\}$ una partición arbitraria[15] de [a,b]. Entonces tenemos:

$G(x_1) – G(x_0) + G(x_2) – G(x_1) + G(x_3) – G(x_2) + G(x_4) – G(x_3) = G(b) – G(a).$

Por el teorema del valor medio[16], en cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$, $i = 1,..., 4,$ existe un α_i, interior, tal que $G(x_i) – G(x_{i-1})=G'(\alpha_i)(x_i – x_{i-1})=G'(\alpha_i)\Delta x_i =f(\alpha_i)\Delta x_i$, por ser G una primitiva de f y, además, tal y como se muestra en las figuras IX.3.1.1 se verifican las igualdades:

---

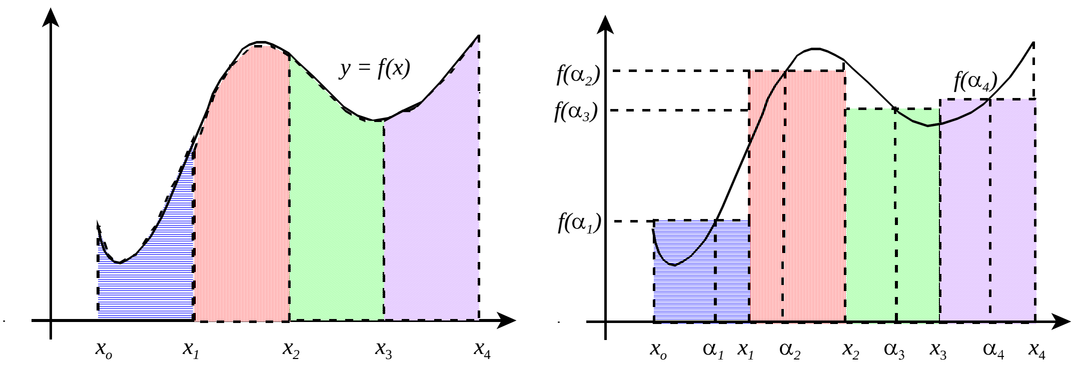
[12] A los estudiantes se les entregó, posteriormente, un resumen de la introducción histórica de la integral, la demostración de las fórmulas del área del rectángulo y del círculo y la construcción del número π.

[13] Con el propósito de favorecer la atención de los alumnos, el profesor les ha entregado fotocopiado, en color, el teorema fundamental del cálculo. Asimismo, antes de demostrarlo, ha afirmado: *"Este teorema es el más importante del Análisis Matemático puesto que relaciona el cálculo diferencial con el integral, además, da un método de cálculo y a la igualdad se le reconoce como regla de Barrow".*

[14] El profesor investigador, ante la ausencia de demostraciones de teoremas en los cursos de bachillerato de ciencias sociales, ha explicado a los alumnos que todo Teorema se compone de una Hipótesis y una Tesis, la Tesis debe demostrarse partiendo de la Hipótesis y mientras no se demuestre un Teorema no se le puede reconocer como tal, en todo caso, es una Conjetura.

[15] El Director de esta Tesis Doctoral asevera: *"Un pequeño número de nodos de la partición ayuda a los estudiantes a comprender mejor la demostración, en lugar de tomar un número elevado de los mismos o 'n' nodos".*

[16] El teorema del valor medio fue explicado momentos anteriores al teorema que nos ocupa.



Figuras IX.3.1.1. Superficies distintas y áreas iguales para los mismos colores[17].

$$G(x_1) - G(x_0) = G'(\alpha_1)(x_1 - x_0) = f(\alpha_1)\Delta x_1,\ G(x_2) - G(x_1) = G'(\alpha_2)(x_2 - x_1) = f(\alpha_2)\Delta x_2,$$

$$G(x_3) - G(x_2) = G'(\alpha_3)(x_3 - x_2) = f(\alpha_3)\Delta x_3,\ G(x_4) - G(x_3) = G'(\alpha_4)(x_4 - x_3) = f(\alpha_4)\Delta x_4.$$

Por tanto: $G(b) - G(a) = f(\alpha_1)\Delta x_1 + f(\alpha_2)\Delta x_2 + f(\alpha_3)\Delta x_3 + f(\alpha_4)\Delta x_4 = R(f,P,T).$

Si $T = \{\alpha_1,\ \alpha_2,,\alpha_3,\ \alpha_4\}$ es el conjunto de puntos intermedios asociados a P, al estar acotadas las sumas de Riemann por las de Darboux, se obtiene:

$$s(f,P) \le R(f,P,T) \le S(f,P).$$

Por otra parte, como P es una partición arbitraria, deducimos:

$$Inf \int_a^b f(x)dx \le G(b) - G(a) \le Sup \int_a^b f(x)dx$$

Al ser f(x) integrable obtenemos: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ #

La explicación de este teorema ha supuesto a los estudiantes una forma novedosa de hacer matemáticas, sin embargo, una de sus máximas preocupaciones es si se preguntará esta demostración en el examen[18]. El profesor debe aclarar que no se preguntará tal demostración, eso sí, deberá saberse aplicar en los ejercicios prácticos[19] y, después, los alumnos tuvieron que cumplimentar un cuadernillo de trabajo y en él se puede apreciar si, a pesar de no ser exigido en el examen, entendieron el teorema o no.

---

[17] El profesor investigador ha hecho especial hincapié en la igualdad de las áreas de los recintos con el mismo color y, asociando el teorema del valor medio con el hecho de que *G(x)* es una primitiva de *f(x)*, se ha pasado de una interpretación gráfica a una expresión analítica y ello, nos hace suponer que, ha ayudado a los estudiantes a una mejor comprensión del teorema.

[18] Del ciclo IV lo han preguntado: DA, MC, EG, GM, NM, SS y VV. Del ciclo V han sido: RF, CG, RG, AR y DR.

[19] RF y DR, alumnos repetidores, procedentes de otro centro de la provincia consideran que el teorema fundamental del cálculo integral es la regla de Barrow y sirve para calcular áreas.

En las catorce sesiones impartidas en el aula de cada grupo se ha dedicado la primera parte al cálculo de primitivas elementales utilizando, sobre todo, el cálculo mental. Como es obvio, en cada clase no ha sido el mismo tiempo, sin embargo, podemos afirmar que éste está comprendido entre ocho y veinte minutos[20].

Tal y como se explicitó en el punto octavo de la Introducción del presente capítulo[21] y considerando que el grupo 2º D había adquirido cierta destreza en el cálculo de derivadas, se ha potenciado el cálculo de primitivas elementales mediante la resolución mental de las mismas. Los resultados han sido muy heterogéneos, varios alumnos tales como: DA, MC, EG, GM, SS y VV obtienen buenas calificaciones si consideramos las pruebas orales; en el extremo opuesto podemos incluir a: JA, SG, BM, MP y EV.

El profesor ha propuesto a los alumnos de 2º D que resuelvan $\int x e^{x^2} dx$.

AN considera que la solución es $e^{x^2} + k$, el profesor duda y el alumno AN dice: *"La derivada de* e^x *es* e^x *y la derivada de* e^{x^2} *es* $2xe^{x^2}$ *(después de hacer una pausa y pensarlo)"* .

Interviene el profesor y pregunta: *"¿Piensas que es correcta la solución que has dado?"*

AN responde: *"Bueno la multiplicamos por 2".*

Hay murmullos, EG moviendo la cabeza muestra su desacuerdo, el profesor pide silencio e interpela a AN diciendo: *"¿Estás seguro? Piénsalo".*

AN, después de unos instantes, contesta: *"Mejor la dividimos por 2 y ya está"*

Algunos alumnos como MC, RP y EV piensan que esta integral es difícil y que no se puede considerar elemental.

La alumna SB hace que el profesor se acerque a su pupitre pues considera que la solución es $\frac{x^2}{2} e^{x^2} + k$ y lo justifica diciendo: *"La integral de x es* $\frac{x^2}{2}$

[20] El tiempo asignado al cálculo mental fue más restringido en las cuatro últimas sesiones, nunca inferior a los ocho minutos. Sin embargo, en las sesiones 5, 6 y 7 se intensificó el cálculo de primitivas elementales y éstas fueron realizadas mediante el cálculo mental y la técnica clásica de lápiz y papel (el único método de integración explicado, y no exigido, ha sido el *cambio de variable*).

[21] Con el objetivo de obtener un mejor aprendizaje, debemos seguir insistiendo en los conceptos previos de la integral y para ello se realizará una enseñanza más personalizada y se harán más pruebas, orales y escritas, durante el primer trimestre.

y la integral de e^{x^2} *es* e^{x^2} *porque la integral de* e^x *es* e^x *".* Es evidente que SB comete varios errores conceptuales y el profesor debe explicárselos[22].

El PI considera que este ejercicio es un excelente ejemplo para resolverlo por cambio de variable y así lo hace tomando $x^2=t$, por tanto, $2xdx=dt$, entonces $\int x e^{x^2} dx = \int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^t + k$ y deshaciendo el cambio obtenemos la solución $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + k$. Algunos estudiantes se sienten perplejos[23], muy pocos piensan que es interesante[24] y la mayoría son indiferentes.

Este mismo ejercicio ha sido resuelto en 2º E por medio de la integración inmediata[25], sin cambio de variable, y las dificultades de los alumnos[26] fueron similares a las descritas en el grupo 2º D.

En la cuarta sesión, la alumna RP (2º D) afirma que $\int 3e^{5x} dx = \frac{3}{6} e^{6x} + k$ y lo justifica porque $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$, el profesor sugiere que compruebe la solución derivando la función $F(x) = \frac{3}{6} e^{6x}$, RP hace la derivada de *F(x)* y queda sorprendida de no haber obtenido la función integrando[27]. Al final con las orientaciones del PI, esta alumna, halla la solución correcta.

El profesor considera que este ejercicio también es propicio para resolverlo mediante el cambio de variable *5x=t* y así lo hace. Varios alumnos afirman que la resolución por este método es interesante[28], sin embargo, la mayoría de los estudiantes prefieren no aplicar el cambio de variable.

---

[22] SB considera que: *"La integral de la suma es la suma de las integrales, por tanto, la integral del producto es el producto de las integrales".* Además, comete el error de generalizar $\int e^x dx = e^x + k$ a $\int e^{x^2} dx = e^{x^2} + k$.

[23] SA, RI, BM, MP y NV.

[24] DA, EG y SS.

[25] En el grupo 2º E del curso 2007-2008 (ciclo V) no se ha resuelto ningún ejercicio por cambio de variable.

[26] MA, VO y AS han cometido los mismos errores que la alumna SB del grupo 2º D (ciclo IV).

[27] RP ha confundido la función exponencial con la potencial, de ahí la falsa seguridad en su primera solución.

[28] Añadimos a los alumnos anteriores, de la nota 24, los siguientes: GM, NM y VV.

Otros ejercicios resueltos en 2º D mediante la integración inmediata y el cambio de variable han sido[29]: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\,dx$, $\int senx \cos x\,dx$, $\int senx \cos^2 x\,dx$, $\int 5x \cos x^2\,dx$, $\int \sqrt{3x-2}\,dx$ y $\int \frac{1}{x^2} sen \frac{1}{x}\,dx$.

En el grupo 2º E se han calculado primitivas, sin utilizar ningún método de integración, considerándolas inmediatas y apoyándonos en operaciones algebraicas sencillas y en el cálculo mental. Veamos algunas de ellas:

En la segunda sesión MA determina que $\int (x^2-3)\,x^3 dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)\frac{x^4}{4} + k$, el profesor pide a su compañero CG que confirme o desmienta la solución, él comenta que no puede ser porque *“$\int f\cdot g \neq \int f \cdot \int g$, pero que no sabe resolverla”.* RS dice: *”Yo he multiplicado y la he resuelto”.* El PI advierte a todos los estudiantes que en ocasiones debemos operar con la función integrando para poder obtener la solución. Seguidamente el profesor propone que resuelvan $\int (x^2-3)^2 x\,dx$, más de la mitad de los alumnos elevan el binomio al cuadrado[30] y lo multiplican por *x,* tres alumnos[31] ni siquiera lo intentan y el resto “parece” que buscan alguna relación entre los factores del integrando; finalmente RF dice que es del tipo potencial y da la solución sin necesidad de realizar ninguna multiplicación y “cuadrando” las constantes de integración necesarias[32].

Se constata que para los estudiantes es más fácil resolver $\int sen^5 x \cos x\,dx$ que $\int senx \cos x\,dx$ pues a la primera, por regla general, se le reconoce de tipo potencial y la segunda es más dificultoso identificarla como tal, incluso, algunos alumnos integran cada uno de los factores del integrando.

---

[29] En aras de una mayor brevedad en la redacción de este epígrafe, consideramos que no es necesario escribir las interacciones profesor-alumnos de 2º D en las resoluciones de los ejercicios propuestos ya que son semejantes a las descritas en las dos últimas páginas.

[30] MR pregunta al profesor por las identidades notables, el profesor se las recuerda escribiéndolas en la pizarra y advierte que en este caso no es necesario hacer la multiplicación.

[31] JB, RG y RH.

[32] AG y SM, entre otros, están confusos y preguntan: *“Pero cuando hay que hacer la multiplicación”.* El profesor dice a toda la clase: *“Antes de hacer operaciones debe ‘observarse’ el integrando, buscar las posibles relaciones entre las distintas partes del mismo y operar en consecuencia”.*

Realizar operaciones algebraicas y simplificar las funciones integrando resulta complicado a muchos alumnos de ambos grupos[33], por ejemplo, resolver las integrales: $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x+3}}dx$, $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x-2}dx$, $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx$, $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x}dx$, $\int \left(x+\sqrt{x}\right)^2 dx$ y $\int \left(sen^2 x+\cos^2 x\right)dx$ suscita todo tipo de comentarios[34] y para algunos estudiantes es difícil la resolución de estos ejercicios[35].

Confundir integrales cuyas soluciones son logarítmicas y potenciales es bastante habitual, más aún, si un radical debe expresarse en forma potencial, la resolución de: $\int \frac{x^2}{x^3-5}dx$, $\int \frac{x^2}{\left(x^3-5\right)^4}dx$ y $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-5}}dx$ hace suponer a DB que las tres tienen la misma solución y ésta es $\frac{1}{3}\ln\left|x^3-5\right|+k$. Evidentemente, el profesor debe explicar a todos los alumnos[36] en general y personalmente a DB las diferencias de cada una de las funciones integrando y las similitudes entre la segunda y tercera integral.

Dividir fracciones algebraicas y resolver integrales con parámetros comportan dificultades similares a las descritas en el ciclo de exploración (I, capítulo VII) y en los ciclos de confirmación (II y III, capítulo VIII).

---

[33] El profesor percibe que tienen mayores dificultades los alumnos de 2º E.

[34] He aquí algunos comentarios de los estudiantes:

BM: *"No recuerdo las propiedades de las potencias"*.
GF: *"No sé simplificar raíces, para mí es imposible"*.
JA: *"¡Qué forma tan rara de escribir $x = e^{\ln x}$!"*.
SM: *"Las fórmulas esas (identidades notables) nunca las he conseguido aprender"*.
DA: *"Yo estudié las matemáticas 'fáciles' de 4º [de la ESO] y no he visto los logaritmos"*.
VO: *"Sé la integral del seno y del coseno pero no sé ninguna propiedad"*.

[35] Este ha sido el intercambio de opiniones entre la alumna (SS) y el profesor (P):

SS: *"Si $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x-2}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$ entonces elevamos el segundo integrando al cuadrado y la integral es inmediata"*.
P: *"Calcula $\int 7\,dx$ "*.
SS: *"7x"*.
P: *"Calcula $\int 7^2\,dx$ "*.
SS: *"$7x^3/3$"*.
P: *"¿Seguro?"*.
SS: *"Bueno, espera, ¡Qué burrada! 7 al cuadrado es 49 y la solución es 49x"*.
P: *"¿Sigues pensando que se puede elevar cuadrado?"*.
SS: *"No, creo que no (después de pensarlo durante unos instantes)"*.

[36] La alumna GM, procedente de Ecuador, para expresar $\frac{1}{3}$ dice: *"Uno sobre tres"*.

A partir de este momento describimos sucintamente[37] la parte de las sesiones en las cuales se han explicado ejercicios prácticos del cálculo integral sin hacer más referencias al cálculo de primitivas inmediatas mediante el cálculo mental.

Al profesor investigador le sorprendió el hecho acaecido en la undécima sesión de los ciclos de confirmación, martes 10 de enero de 2006, por el cual la alumna CB del tercer ciclo de esta investigación al resolver el ejercicio número 16 del libro de texto[38] y obtener el valor del área 32/3 unidades cuadradas, multiplicó por tres y consideró que, en realidad, el área era 32 unidades cuadradas. Así pues, este profesor consideró en aquel momento que en los siguientes ciclos, además de practicar el cálculo mental, debía incidir en el *cálculo estimativo* y uno de los campos donde mejor se puede aplicar es en el cálculo “aproximado” de áreas.

La primera ocasión para estimar y calcular un área se presentó inmediatamente después del establecimiento del teorema fundamental del cálculo integral, así pues, el profesor propuso el siguiente problema:

Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$ *, se pide:*

a) *Representar* $f(x)$*.*
b) *Calcular el valor aproximado del área comprendida entre la gráfica de la función* $f(x)$*, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=9.*
c) *Calcular el área comprendida entre la gráfica de la función* $f(x)$*, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=9.*

La representación gráfica de la función resultó ser muy sencilla para los estudiantes, no así estimar el área, después de observar la figura IX.3.1.2 el alumno DA propuso que el área se *“aproximaba”* a la suma de las áreas del rectángulo de vértices A(1,0); B(9,0); C(1,1) y D(9,1) y del triángulo de vértices C, D y E(9,3) *“aunque es algo mayor”*. Los alumnos, mediante un sencillo cálculo[39] confirmaron que el área era *“un poco más”* de 16 unidades cuadradas[40]. VV comentó que *“el área coloreada podía estar entre 1 y 2, por tanto, se podía estimar en 17 ó 18 (después de una pausa) o mejor 17,5* u^2*”.*

[37] Como es obvio, redactamos los hechos más relevantes y que sean específicos de los ciclos de consolidación.

[38] Ejercicio nº 16. Halla el área comprendida entre la curva $y = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y=5$.

[39] Área del rectángulo + área del triángulo = $8 \cdot 1 + 8 \cdot 2/2 = 16$ u^2.

[40] EG propuso que el área se calculara por la *“fórmula del trapecio”*.

Calcular el área exacta, dice el profesor, supone aplicar el teorema fundamental del cálculo integral, es decir, resolver $\int_1^9 \sqrt{x}\, dx = \frac{52}{3}\ u^2$.

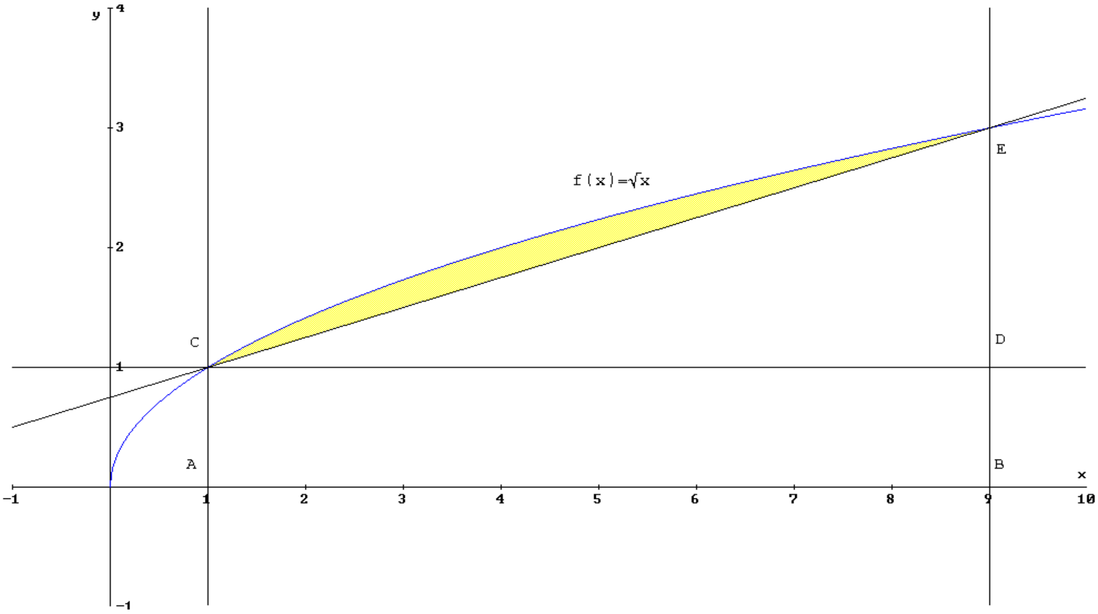


Figura IX.3.1.2. Diferencia entre la superficie comprendida entre la función $f(x)=\sqrt{x}$, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=9 y la superficie trapezoidal.

El PI al obtener el resultado 52/3, deliberadamente, lo ha multiplicado por 3 y ha escrito en la pizarra que el área pedida es 52 u^2. Rápidamente, la mayoría de los alumnos de 2º D han expresado su disconformidad diciendo *"eso es imposible"*, al final se acepta la solución 52/3 u^2 $\cong$ 17,33 u^2. Vista la reacción de los alumnos, el profesor investigador dice: *"Una vez calculada un área es aconsejable hacer una estimación de la misma por medio de cálculos de áreas elementales y ver si los datos obtenidos son concordantes o no con los anteriores, además, cuando el resultado es una fracción no se puede multiplicar por el denominador, en todo caso, puede efectuarse la división"*[41].

Si bien es cierto que el ejercicio anterior se propuso solamente a los alumnos de 2º D[42]. Asimismo, se estimó el cálculo de áreas en el ciclo V y, entre otros problemas resueltos con los alumnos de 2º E, redactamos el último con ligeras modificaciones respecto al texto original, éste es[43]:

[41] Asimismo, el profesor dijo un texto análogo cuando el resultado es la raíz de un número.

[42] Además, los alumnos de 2º D al resolver varios ejercicios también estimaron sus áreas.

[43] González, C., Llorente, J. y Ruiz, M. J. (1997). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato Humanidades y Ciencias Sociales*. Madrid: Editex. Pág. 231.

Durante un cierto periodo de tiempo, las hojas de una especie vegetal transpiran a razón de 2 miligramos de agua por centímetro cuadrado. Los bordes de una de dichas hojas coinciden con los del recinto acotado del plano limitado por las curvas de ecuaciones $y=\sqrt{5x},\quad y=x^2/5$ *donde x e y están expresados en centímetros. Se pide:*

a) Representar la hoja.
b) Estimar el área de la hoja.
c) Calcular el área de la hoja.
d) Calcular la cantidad total de agua transpirada por esa hoja en el periodo de tiempo citado.

Representar las funciones[44] que delimitan la hoja y colorear la superficie de la misma (figura IX.3.1.3) no resultó complicado a los estudiantes, calcular el área ha sido dificultoso para varios de ellos[45], finalmente, aplicando el TFC se ha obtenido $\acute{A}rea=\int_0^5\left(\sqrt{5x}-\frac{x^2}{5}\right)dx=\frac{25}{3}cm^2\approx 8{,}33\,cm^2$ y de ahí determinar la cantidad de agua transpirada por la hoja ha resultado trivial.

El profesor ha dejado un tiempo prudencial a los estudiantes para que estimaran la superficie de la hoja. Se discuten las posibles soluciones y consideramos muy interesante la idea CG quien dice: *"La hoja tiene forma de rombo y recordando el área del mismo[46], obtenemos un valor aproximado de la superficie de la hoja".*

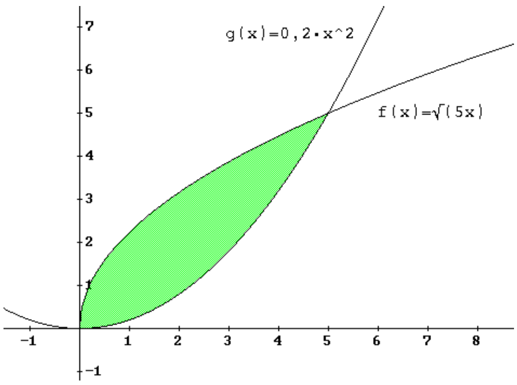


Figura IX.3.1.3. Superficie de una hoja

Se acepta $\acute{A}rea\ \ estimada=\frac{\sqrt{5^2+5^2}\cdot\left(f(2)-g(2)\right)}{2}=\frac{\sqrt{50}\cdot\left(\sqrt{10}-4/5\right)}{2}\approx 8{,}35\,cm^2$ y, para sorpresa de todos, este valor es muy próximo al área real[47].

---

[44] El profesor investigador ha aconsejado a los estudiantes de todos los ciclos, en innumerables ocasiones, que *"a funciones distintas nombres distintos"*, así pues: $f(x)=\sqrt{5x},\quad g(x)=x^2/5$.

[45] MA, DB y RH han tenido dificultades para determinar los puntos comunes de las funciones y los alumnos JM, GF, RG y AS han necesitado ayuda para calcular una primitiva de la función diferencia.

[46] CG dice: *"Área del rombo es diagonal mayor par diagonal menor entre dos"*.

[47] El alumno CG muestra un cierto interés por el "cálculo estimativo de áreas" y según sus propias palabras: *"En la ESO el cálculo de áreas y volúmenes no se me daba mal"*.

IX.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN

La descripción resumida de la implementación o acción de los dos ciclos de consolidación realizada hasta el momento[48] nos permite confirmar o desmentir las reflexiones de la acción de los ciclos anteriores[49], así como, redactar nuevas reflexiones emanadas de los dos ciclos de consolidación sobre el conocimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la integral definida, el cálculo mental y las nuevas tecnologías, éstas son:

a) Confirmamos que realizar la experiencia docente de nuestra investigación durante los meses de diciembre y enero, de los correspondientes cursos académicos, nos permite dedicarle más tiempo y los estudiantes se sienten más motivados que cuando se realizó al final de curso en el ciclo de exploración.

b) Debe combinarse la exposición teórica de la integral definida mediante los medios tecnológicos[50] y la técnica tradicional de tiza y pizarra puesto que ello hace que los alumnos permanezcan más activos ya que toman algunas anotaciones y no tienen una actitud de "brazos caídos" y, además, no sienten el agobio de "copiar todo en su cuaderno"[51].

c) La exposición mediante ordenador-pizarra hace que los estudiantes combinen la comprensión de conceptos matemáticos (favorecidos por el ordenador) con los procedimientos (que adquieren mayor peso en la pizarra) por medio de los cuales se formalizan los conceptos inherentes a la integral definida.

d) Los alumnos no muestran ningún interés por la introducción histórica de la integral, les interesa muy poco su formalización teórica y sólo desean saber las aplicaciones prácticas de la misma[52].

---

[48] La información ha sido recopilada por medio del cuaderno de campo del profesor, las grabaciones de las clases en audio y los cuadernos de trabajo de los alumnos.

[49] Véanse las reflexiones de la acción del ciclo de exploración y de los ciclos de confirmación (capítulos VII y VIII, epígrafes VII.3.2 y VIII.3.2, respectivamente).

[50] Ordenador, cañón proyector y pantalla.

[51] Cuando la exposición es por medios tecnológicos la clase está en penumbra y los alumnos no toman apuntes y aunque parecen atentos, en realidad, están apáticos (brazos caídos). Si sólo se utiliza la pizarra, la clase está más iluminada y muchos estudiantes se consideran con la obligación de transcribir lo que dice y escribe el profesor (copiar todo en su cuaderno).

[52] Es evidente que los alumnos no dan la suficiente importancia a la epistemología ni a una buena teoría matemática, la mayoría de ellos, sólo se conforman con resolver ejercicios sencillos.

e) Los alumnos tienen incluidas en su acervo cultural las fórmulas del área del rectángulo y del círculo y la longitud de la circunferencia, de tal manera, que consideran innecesaria cualquier justificación de las mismas. Los estudiantes asocian al número π el valor 3,14 y para ellos es más que suficiente.

f) No es conveniente hacer una larga exposición teórica de los conceptos puesto que los alumnos pierden atención, es aconsejable intercalar pequeños ejercicios prácticos como apoyo teórico para que los estudiantes mantengan el interés por su propio aprendizaje.

g) El cálculo mental de primitivas ha adquirido más peso que en los ciclos anteriores y ha sido practicado al comienzo de cada una de las clases como mínimo durante ocho-diez minutos.

h) Los alumnos son reticentes al aprendizaje de cualquier tabla de derivadas y, consecuentemente, de ninguna tabla de integrales inmediatas; por tanto, esto dificulta el cálculo mental aplicado al cálculo de primitivas elementales.

i) Calcular primitivas en las cuales la función integrando tiene parámetros es difícil para los alumnos puesto que no distinguen entre constante, variable y parámetro[53].

j) Al menos la tercera parte de los estudiantes de los dos ciclos de consolidación no reconocen las identidades $\sqrt[n]{f(x)} = [f(x)]^{\frac{1}{n}}$ y $\frac{1}{f^n(x)} = [f(x)]^{-n}$, por tanto, ello conlleva que muchos de ellos cometan errores conceptuales y operativos.

k) Aunque, en la memoria de los ciclos de confirmación, comentamos que no se utilizaría ningún método de integración, por las características propias del grupo 2º D (ciclo IV), hemos creído conveniente aplicar el cambio de variable en la resolución de alguna integral indefinida. Desde este momento, constatamos que muy pocos alumnos se interesan por este método de integración y a muchos de ellos les produce confusión.

[53] La alumna SS de 2º D, echando mano del Diccionario de la Lengua de la Real Academia Española lee: *"Parámetro. Variable, que en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno de ellos mediante su valor numérico".* Posteriormente, el término "parámetro" es aceptado con naturalidad cuando se resuelven sistemas de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro.

l) Consideramos un error que los libros de texto escriban las integrales indefinidas sin *"dx"* puesto que entorpece enormemente, entre otros, la utilización del método de integración por cambio de variable.

m) La exposición teórica de la integral definida se ha realizado de la transposición didáctica de la del capítulo V de la presente memoria y la mayoría de los ejercicios prácticos proceden del libro de texto y de las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León.

n) El rendimiento de los alumnos es mayor cuando la enseñanza se hace más personalizada, por tanto, es aconsejable que haya una buena interacción profesor-alumno. El profesor ha puesto en práctica esta reflexión haciendo que los estudiantes: i) resuelvan primitivas inmediatas mediante el cálculo mental, ii) resuelvan problemas en la pizarra y iii) respondan en público a algunas cuestiones; además, el profesor ha pasado por los pupitres de los estudiantes para observar su trabajo y ayudándolos a resolver sus dudas.

o) Para evitar posibles confusiones en la resolución de los ejercicios consideramos que: *"A funciones distintas, nombres distintos"*, no se puede llamar a todas las funciones *y,* por tanto, el criterio que seguimos es: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$, etc. Esto favorece la comprensión conceptual de los estudiantes y hace que los procedimientos aplicados en la resolución de los ejercicios sean menos confusos.

p) Siguiendo con el criterio anterior: *"A superficies distintas, colores distintos".* Así pues, es de gran utilidad pintar cada uno de los recintos con diferentes colores puesto que ayuda a comprender las partes de las que se compone el resultado final.

q) Pensamos que es fundamental una buena combinación de los registros gráficos y analítico-algebraicos para que los estudiantes comprendan mejor los conceptos teóricos y tengan más éxito en la resolución de problemas, así pues, es prioritario esmerarse en hacer buenas representaciones gráficas y ser ordenado en la exposición analítico-algebraica de los procedimientos matemáticos.

r) El profesor investigador ha considerado prioritario dedicar más tiempo a la demostración del teorema del valor medio del cálculo diferencial y del teorema fundamental del cálculo integral, además, para ello se ha apoyado en distintas representaciones gráficas.

s) Discriminar diferentes conceptos matemáticos (considérese por ejemplo: integral inferior y superior de Darboux, integral de Darboux, integral de Riemann) es muy difícil para la mayoría de los alumnos[54].

t) La identificación de los estudiantes sigue el mismo criterio de los dos ciclos de confirmación, el cual ha mostrado ser muy eficaz.

u) El tiempo dedicado a la enseñanza de la integral definida, la práctica del cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental y la utilización de las nuevas tecnologías para la enseñanza-aprendizaje de la integral en estos dos nuevos ciclos de consolidación es el mismo que el de los dos ciclos anteriores.

v) En algunas ocasiones los alumnos al obtener la solución de un área en forma fraccionaria la multiplican por el denominador (ídem si es la raíz de un número que lo elevan al índice de la misma). Este error tan importante ha llevado al profesor a reflexionar sobre el mismo y en algunos ejercicios prácticos ha considerado oportuno *”estimar”* el área de la superficie y estudiar su concordancia con el valor exacto del área obtenida, generalmente, por medio de la integral.

w) Calcular integrales definidas o superficies en las cuales intervienen funciones definidas a trozos es dificultoso para los estudiantes puesto que cometen demasiados errores en la determinación del dominio de definición de dichas funciones.

x) Las nuevas tecnologías, especificadas en el uso del programa de cálculo simbólico *DERIVE,* aplicadas a la enseñanza y el aprendizaje de la integral serán estudiadas en el capítulo XI y, por tanto, en este momento no redactamos ninguna reflexión sobre las mismas.

y) Este PI haciendo un somero estudio de las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León ha observado que en las últimas convocatorias hay muy pocos ejercicios en los cuales, para su resolución, deban aplicarse conocimientos del cálculo integral y, por tanto, esto nos puede permitir dedicar más tiempo al cálculo mental, cálculo estimativo y a las nuevas tecnologías.

[54] Véase Poincaré (1904), citado por Artigue y cols. (1995, pág. 110), en *I.3. Antecedentes de la investigación* del capítulo I.

IX.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS

De nuevo, en los dos ciclos de consolidación el profesor investigador y el director de la tesis perfeccionaron el cuadernillo de los ciclos de exploración y confirmación, dicho cuadernillo[55], contenía un texto incompleto de la integral definida y debía ser completado por los alumnos, éste se entregó a los estudiantes inmediatamente después de ser explicada la teoría de la integral y días después el profesor los recogió cumplimentados por ellos.

IX.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

En los dos ciclos de consolidación (ciclos IV y V de la presente investigación, cursos 2006-2007 y 2007-2008, grupos 2º D y 2º E) se asignaron cuarenta categorías de comprensión matemática, definidas en el capítulo VI, siendo valoradas las respuestas de los estudiantes mediante la escala Likert[56].

Siguiendo el procedimiento de los dos capítulos anteriores[57], en el análisis de cada una de las doce nuevas categorías de comprensión matemática[58] y, también, la del cálculo de primitivas (CP)[59] se escribirá en primer lugar las siglas con las cuales es reconocida seguida de la expresión a la cual se refiere[60], después se detallará la actividad[61] que se pretende realizar y el objetivo que se desea alcanzar, posteriormente se analizarán los datos según la escala Likert y, finalmente, se redactará una pequeña reflexión.

[55] El cuadernillo de la integral, presentado en el anexo F, corresponde al ciclo de cierre de nuestra investigación. Consideramos que no es necesario incluir el de los dos ciclos de consolidación puesto que se deduce fácilmente del cuadernillo teórico-práctico del anexo F, basta seguir el estudio que se realiza de cada una de las categorías de comprensión matemática en el presente capítulo.

[56] Dicha escala establece cinco niveles de respuesta que van del 1 (mínimo) al 5 (máximo) y éstos son:

1. La respuesta es incorrecta en todos sus términos o no contesta.
2. La respuesta no es totalmente incorrecta, sin embargo, no se puede considerar aceptable.
3. La respuesta se considera incompleta, no incorrecta, se puede mejorar de forma sustancial.
4. La respuesta es válida, aunque puede ser mejorada mínimamente.
5. La respuesta es totalmente correcta.

[57] El texto es análogo al de los epígrafes VII.4.1 y VIII.4.1, sin embargo, creemos conveniente rescribirlo de nuevo para situarnos en el contexto de la investigación y para que el lector pueda realizar una lectura secuencial y no indexada, como se diría en lenguaje informático.

[58] Con el objetivo de aligerar el texto del presente capítulo y, a la vez, no sesgar la investigación se ha optado por no incluir en esta sección las categorías de los ciclos de exploración y confirmación.

[59] Consideramos esta categoría de comprensión matemática por su vinculación al cálculo mental.

[60] Cualquier categoría la reconoceremos, una vez formalizada, por sus siglas.

[61] Se ha optado por seguir una ordenación secuencial, aunque en el cuadernillo teórico-práctico de la integral no corresponda con el mismo número de orden.

Una vez más, en el análisis de las respuestas escaneamos, en la mayoría de las ocasiones, la respuesta correcta de uno o varios estudiantes que identificamos con el código de su autor o autores y, en ciertos casos, se han incluido otras respuestas de los alumnos algunas de las cuales nos han llamado la atención por su originalidad o por los errores cometidos. Posteriormente, se muestra la distribución de las respuestas emitidas mediante un diagrama poligonal por cada ciclo donde hemos incluido la referencia (en negrita), es decir, las siglas de la categoría seguidas del año académico al cual corresponde la experimentación, en el eje horizontal hemos colocado los niveles precedidos de las siglas de la categoría y en el eje vertical los porcentajes[62] de los niveles de cada una de ellas. La figura o figuras escaneadas y los diagramas poligonales de cada categoría recibirán el nombre de *Gráficos IX.4.1.n* donde *"n"* es el ordinal de la categoría[63] y las referencias a estos gráficos siempre serán de izquierda a derecha y de arriba abajo, además, cada uno de ellos llevará el código del alumno autor del mismo y, generalmente, el primero corresponderá con una respuesta correcta; cada uno de los dos diagramas poligonales llevará asignada una etiqueta, en números romanos, correspondiente al ciclo al cual representa. Finalmente, para cada categoría de comprensión matemática, daremos la reflexión en la cual redactaremos las conclusiones y apreciaciones que consideremos más importantes.

Recordamos que la experimentación del cuarto ciclo se ha desarrollado durante el curso 2006-2007 con el grupo 2º D de segundo de bachillerato de ciencias sociales formado por veintiún alumnos que han cursado MACS II en el IES "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos. La investigación del ciclo V corresponde al grupo 2º E del curso 2007-2008 formado por diecinueve alumnos de la misma modalidad de bachillerato y del mismo centro burgalés.

En los ciclos de confirmación se definió la función de Dirichlet[64] y con ella se establecieron ocho categorías de comprensión matemática, recordemos que todas comenzaban con la letra **D**; sin embargo, en estos dos nuevos ciclos de consolidación hemos añadido otras dos, éstas son: DSIn-10 y DSSn-10.

[62] Nos hemos decantado por los porcentajes de los estudiantes que fueron evaluados según la categoría porque resulta más sencilla su lectura que si consideramos las frecuencias absolutas.

[63] El ordinal de cada categoría ha de coincidir con el ordinal de su propia actividad.

[64] Función de Dirichlet: $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional\ en\ [0,4] \\ 2 & si\ x\ es\ irracional\ en\ [0,4] \end{cases}$

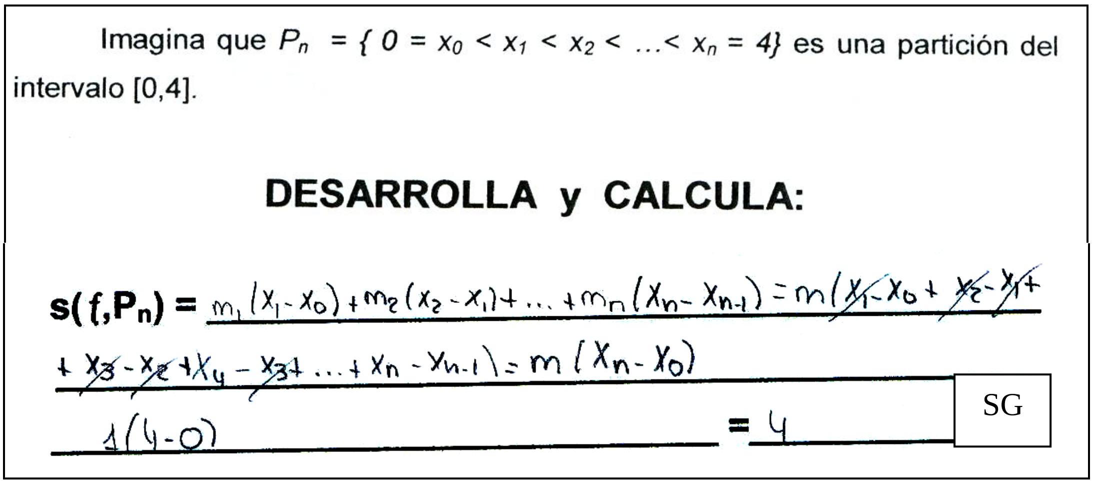
El motivo por el cual hemos creado estas dos nuevas categorías es porque consideramos insuficiente tomar la única partición P_4={0,1,2,3,4} del intervalo [0,4] para que los estudiantes respondan correctamente a las tres categorías siguientes (DIINF, DISUP y DNI) y por la disparidad de resultados obtenidos en los ciclos de confirmación.

IX.4.1.1. DSIn-10: Dirichlet, sumas inferiores en "n ó 10" subintervalos

Actividad 1: Los estudiantes deben determinar las sumas inferiores de la función de Dirichlet asociadas a una partición de n (ciclo IV) ó 10 (ciclo V) subintervalos del intervalo [0,4].

Objetivo: Pretendemos obtener el nivel de comprensión, por parte de los alumnos del ciclo IV del cálculo de s(f, P_n), posteriormente, en el ciclo V se consideró que era más aconsejable calcular s(f, P_{10})[65].

Análisis de datos: La alumna SG ha escrito la expresión teórica de la suma inferior, ha observado que todos los mínimos coinciden y, por tanto, a todos ellos los ha designado con la letra "m", posteriormente, ha sacado factor común "m" y contrarrestando los nodos intermedios ha obtenido que la suma inferior es el producto de "m" por la diferencia de los extremos del intervalo, finalmente, la suma inferior la obtiene mediante una sencilla sustitución. Es evidente que el desarrollo efectuado por SG es excelente y le ha llevado a un cálculo correcto de s(f, P_n).



Imagina que $P_n = \{ 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 4\}$ es una partición del intervalo [0,4].

DESARROLLA y CALCULA:

$$s(f,P_n) = m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_n(x_n-x_{n-1}) = m(\cancel{x_1}-x_0+\cancel{x_2}-\cancel{x_1}+\cancel{x_3}-\cancel{x_2}+x_4-\cancel{x_3}+\ldots+x_n-x_{n-1}) = m(x_n-x_0)$$

$$1(4-0) = 4$$

SG

[65] P_n partición con un número indeterminado de "n" subintervalos de [0,4] cuyos nodos son desconocidos. $P_{10}=\{0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_9<x_{10}=4\}$ partición indefinida de 11 nodos desconocidos de [0,4], salvo el primero y el último.

La solución dada por NV, aunque parecida a la anterior, comporta una serie de suposiciones que debieran haber sido explicadas. En primer lugar, la expresión de la suma está compuesta por cuatro sumandos y, posteriormente, se añade un último término que está aislado y no es sumando; pensamos que para NV todos los mínimos tienen el mismo valor pero no resulta evidente que se puedan eliminar los nodos intermedios. Interpretando las expresiones anteriores, NV calcula la suma inferior.

NV

s(f,Pn) = $m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2+x_1) + m_3(x_3-x_2) +$
$+ m_4(x_4-x_3)$.
$m_n(x_n - x_{n-1}) = m(x_n - x_0)$ **=** $1(4-0) = 4$

Como puede verse en el ciclo V se optó por tomar una partición genérica de once nodos y todos los estudiantes que han contestado a esta cuestión han considerado la partición $P_{10} = \left\{\frac{4i}{10}\right\}_{i=0}^{10} = \left\{\frac{2i}{5}\right\}_{i=0}^{10}$ tal y como puede verse en las dos respuestas escaneadas.

En JM se observa que los dos primeros nodos de la partición no están escritos correctamente, la expresión genérica de la suma inferior es correcta así como la suma, sin embargo, nos preguntamos ¿Qué hubiese escrito JM si en lugar de considerar P_{10} hubiese sido, por ejemplo, P_{30}?

Imagina que $P_{10} = \{ 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{10} = 4\}$ es una partición del intervalo [0,4].

JM

DESARROLLA y CALCULA:

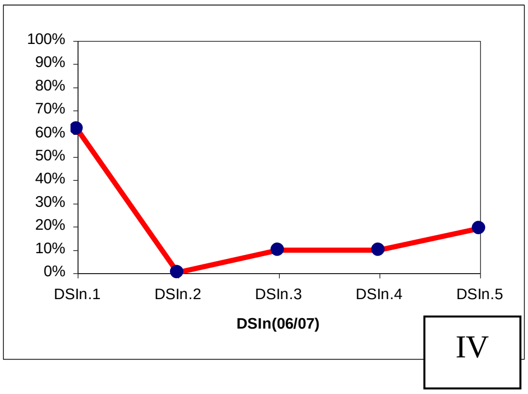
$P_{10} = \}0'04, 0'8, 1'2, 1'6, 2'24, 2'6, 3'2, 3'6, 4\{$

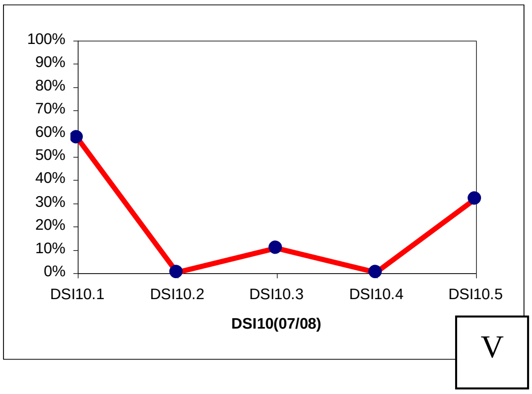
s(f,P10) = $m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2-x_1) + \ldots + m_{10}(x_{10}-x_9) =$
$1(0'4-0) + 1(0'8-0'4) + 1(1'2-0'8) + 1(1'6-1'2) + 1(2-1'6) + 1(2'4-2) +$
$1(2'8-2'4) + 1(3'2-2'8) + 1(3'6-3'2) + 1(4-3'6)$ **=** $10 \cdot 0'4 = \boxed{4}$

El alumno JB ha expresado los nodos en forma fraccionaria, sin embargo, ha errado al determinar los mínimos de la función en cada subintervalo.

$$s(f,P_{10}) = \left(\frac{2}{5}-0\right)\cdot 1+\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\right)\cdot 2+\left(\frac{6}{5}-\frac{4}{5}\right)\cdot 1+\left(\frac{8}{5}-\frac{6}{5}\right)\cdot 2+\left(\frac{10}{5}-\frac{8}{5}\right)\cdot 1+\left(\frac{12}{5}-\frac{10}{5}\right)\cdot 1+\ldots\ldots+\left(\frac{20}{5}-\frac{18}{5}\right)\cdot 1 = \frac{2}{5}\cdot(1+2+1+2+1+1+2+1+2+1) = \frac{28}{5}$$

JB





Gráficos IX.4.1.1. Dirichlet, cálculo de las sumas inferiores en n (ciclo IV) ó 10 (ciclo V) subintervalos (ciclos de consolidación).

Reflexión: El estudio de las respuestas de los alumnos de 2º E hace suponer que los estudiantes se decanten por datos concretos, no son partidarios de operar con valores indeterminados y, frecuentemente, los sustituyen por aquellos valores que consideran oportunos; las respuestas tipo JM han sido consideradas con el máximo nivel[66]. Si observamos detenidamente los diagramas poligonales IV y V no se encuentran diferencias sustanciales entre las respuestas de los alumnos de 2º D y 2º E.

IX.4.1.2. DSSn-10: Dirichlet, sumas superiores en "n ó 10" subintervalos

Actividad 2: Los estudiantes deben determinar las sumas superiores de la función de Dirichlet asociadas a una partición de n (ciclo IV) ó 10 (ciclo V) subintervalos del intervalo [0,4].

Objetivo: Pretendemos obtener el nivel de comprensión, por parte de los alumnos del ciclo IV del cálculo de $S(f, P_n)$, posteriormente, en el ciclo V se consideró que era más aconsejable calcular $S(f, P_{10})$.

Análisis de datos: La alumna EV ha escrito la expresión teórica de la suma superior incompleta puesto que ha omitido dos +, ha observado que todos

[66] Hemos tomado esta opción por realizar el estudio con alumnos de bachillerato, entendemos que si los estudiantes fueran universitarios el nivel debiera haber sido, como máximo, 4.

los máximos coinciden y a todos ellos los ha designado con la letra "M", después ha sacado factor común "M" y suponiendo que contrarresta los nodos intermedios ha obtenido el valor S(f, P_n) sin realizar el último cálculo. En el texto de BM sólo se ha expresado cualquier suma superior asociada a cualquier función y para cualquier partición de cinco nodos de cualquier intervalo [a,b].

Imagina que $P_n = \{\, 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 4 \,\}$ es una partición del intervalo [0,4].

EV

DESARROLLA y CALCULA:

S(f,P$_n$) = $M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+M_3(x_3-x_2)+M_4(x_4-x_3)\ldots M_n(x_n-x_{n-1}) = M(x_n-x_0)$ = $2(4-0)$

S(f,P$_n$) = $M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+M_3(x_3-x_2)+M_4(x_4-x_3)$ =

BM

Los alumnos de 2º E, que responden a la cuestión, siguen tomando la partición de la categoría anterior e intentan calcular S(f, P_{10}). La alumna SM lo logra escribiendo todos los sumandos y el alumno DA escribe bien el resultado aunque, como es evidente, la respuesta no puede considerarse válida ya que comete el grave error de convertir los sumandos en productos.

Imagina que $P_{10} = \{\, 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{10} = 4 \,\}$ es una partición del intervalo [0,4].

DESARROLLA y CALCULA:

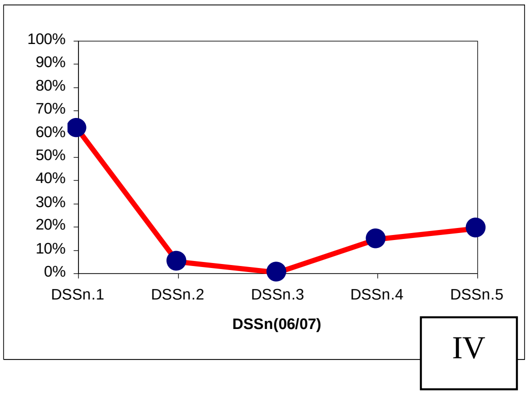
SM

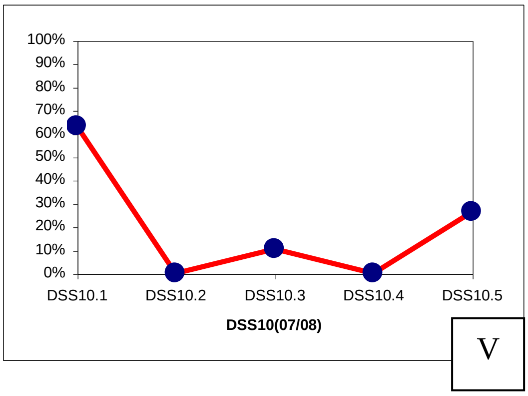
S(f,P$_{10}$) = $M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\ldots M_{10}(x_{10}-x_9) =$ 2(0'4-0)+2(0'8-0'4)+2(1'2-0'8)+2(1'6-1'2)+2(2-1'6)+2(2'4-2)+2(2'8-2'4)+2(3'2-2'8)+2(3'6-3'2)+2(4-3'6) = 10·2·0'4 = 8

S(*f*,P$_{10}$) = $M_1(x_1 - x_0) \cdots + M_{10}(x_{10} - x_9)$ DA

$2(0'8 - 0'4) \cdots 2(4 - 3'6)$

= $10 \cdot 2 \cdot 0'4 = 8$





Gráficos IX.4.1.2. Dirichlet, cálculo de las sumas superiores en n (ciclo IV) ó 10 (ciclo V) subintervalos (ciclos de consolidación).

Reflexión: Afirmamos que en esta categoría, de nuevo, los alumnos de 2º E siguen tomando la partición $P_{10} = \left\{ \frac{4i}{10} \right\}_{i=0}^{10} = \left\{ \frac{2i}{5} \right\}_{i=0}^{10}$ y ello nos hace pensar que los estudiantes pueden adquirir mejor los conceptos matemáticos sobre datos concretos antes que tomar valores abstractos. Sin embargo, observando detenidamente los gráficos estadísticos de estas dos últimas categorías no podemos corroborar la conjetura anterior puesto que no encontramos diferencias sustanciales del gráfico V respecto del IV.

En los ciclos de confirmación se definió la función afín *f(x)=x* y con ella se establecieron ocho categorías de comprensión matemática, recordemos que todas comenzaban con la letra **A**, en estos ciclos de consolidación hemos añadido otras seis, éstas son: ASI20, DSS20, ASIn, ASSn, ACID y ATFCI. El motivo por el cual hemos creado estas nuevas categorías es porque consideramos insuficientes las categorías anteriores para que los alumnos deduzcan la integrabilidad de dicha función y para poder obtener el área comprendida entre la función *f(x)=x*, el eje de abscisas y las rectas *x=0* y *x=1* mediante el teorema fundamental del cálculo, el área de un triángulo[67] y el teorema de caracterización de las funciones integrables. Veamos estas nuevas categorías de comprensión matemática.

[67] Recuérdese la categoría ACAFE.

IX.4.1.3. ASI20: Afín, sumas inferiores en “20” subintervalos

Actividad 3: Los estudiantes deben determinar las sumas inferiores de la función afín asociadas a una partición de 21 nodos del intervalo [0,1].

Objetivo: Pretendemos obtener el nivel de comprensión y la capacidad de cálculo de los alumnos para hallar s(f, P_{20}).

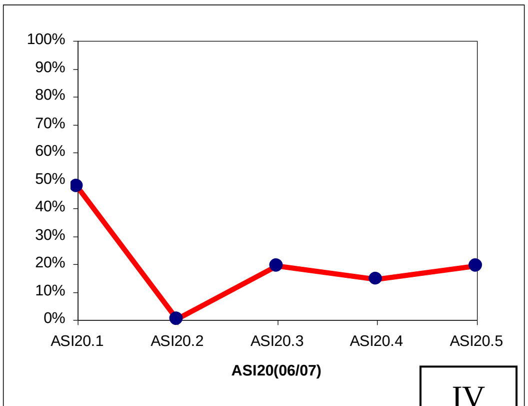
Análisis de datos: Podemos considerar que la alumna AR ha expresado correctamente s(f, P_{20}) aunque faltan dos signos +, sin embargo, la suma de las fracciones es incorrecta puesto que no ha determinado todos los sumandos y, además, el resultado asciende a $\frac{190}{400} = 0{,}475$.

Imagina que P_{20} = { 0 = 0/20 < 1/20 < 2/20 < …< 20/20 = 1} es una partición del intervalo [0,1].

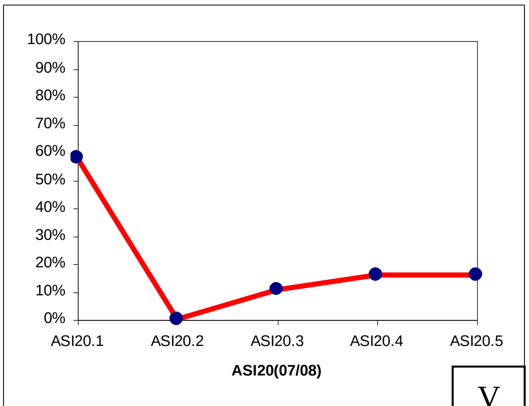
AR

DESARROLLA y CALCULA:

$$s(f,P_{20}) = 0\left(\frac{1}{20}-\frac{0}{20}\right)+\frac{1}{20}\left(\frac{2}{20}-\frac{1}{20}\right)+\frac{2}{20}\left(\frac{3}{20}-\frac{2}{20}\right)+$$
$$\frac{3}{20}\left(\frac{4}{20}-\frac{3}{20}\right)+\frac{5}{20}\left(\frac{6}{20}-\frac{5}{20}\right)+\ldots\ \frac{15}{20}\left(\frac{16}{20}-\frac{15}{20}\right)+\frac{16}{20}\left(\frac{17}{20}-\frac{16}{20}\right)$$
$$+\frac{17}{20}\left(\frac{18}{20}-\frac{17}{20}\right)+\frac{18}{20}\left(\frac{19}{20}-\frac{18}{20}\right)+\frac{19}{20}\left(\frac{20}{20}-\frac{19}{20}\right)=$$
$$0\cdot\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\cdot\frac{2}{20}+\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{20}+\ldots\ \frac{15}{20}\cdot\frac{1}{20}+\frac{16}{20}\cdot\frac{1}{20}$$
$$+\frac{17}{20}\cdot\frac{1}{20}+\frac{18}{20}\cdot\frac{1}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}+\frac{20}{20}\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{400}+\frac{2}{400}+\frac{3}{400}$$
$$\frac{15}{400}+\frac{16}{400}+\frac{17}{400}+\frac{18}{400}+\frac{19}{400}=$$
$$=\frac{189}{400}=0'4725$$



IV



V

Gráficos IX.4.1.3. Afín, cálculo de las sumas inferiores s(f,P_{20}) (ciclos de consolidación).

Reflexión: Calcular la suma inferior asociada a la partición $P_{20} = \left\{ \frac{i}{20} \right\}_{i=0}^{20}$ hace que los estudiantes encuentren dificultades en: la determinación de los nodos y mínimos absolutos en cada subintervalo, expresar la amplitud de los subintervalos y sumar 19 términos de una progresión aritmética. Por tanto, en ninguno de los dos ciclos superan el 20% los alumnos que realizan correctamente todo el procedimiento y alrededor del 50% ni siquiera lo intentan o cometen errores conceptuales que son calificados con el nivel 1.

IX.4.1.4. ASS20: Afín, sumas superiores en "20" subintervalos

Actividad 4: Los estudiantes deben determinar las sumas superiores de la función afín asociadas a la partición $P_{20} = \left\{ \frac{i}{20} \right\}_{i=0}^{20}$ del intervalo [0,1].

Objetivo: Pretendemos obtener el nivel de comprensión y la capacidad de cálculo de los alumnos para hallar S(f, P_{20}).

Análisis de datos: Es evidente que el alumno AG y tres más de los dos ciclos no han optado por la mejor notación numérica puesto que debieran haber tomado números fraccionarios. AG no ha calculado la suma, posiblemente haya hecho un vago intento, aunque la ha acotado, con lápiz, entre el área del triángulo y S(f, P_4). Algunos alumnos que han realizado la suma con fracciones han cometido un error similar al de AR, comentado anteriormente.

Imagina que P_{20} = { 0 = 0/20 < 1/20 < 2/20 < …< 20/20 = 1} es una partición del intervalo [0,1].

AG

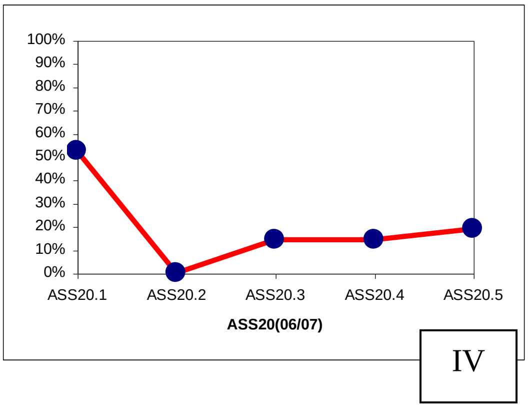
DESARROLLA y CALCULA:

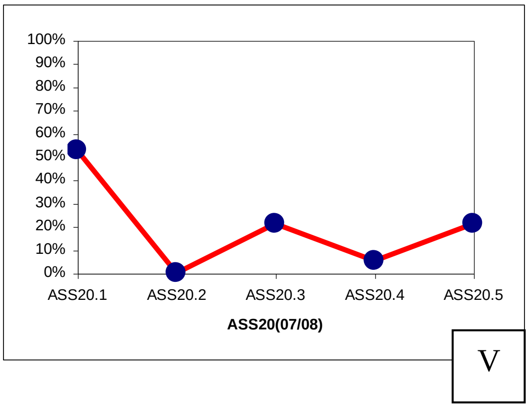
S(f,P₂₀) = 0,05(0,05-0)+0,1(0,1-0,05)+0,15(0,15-0,1)+0,2(0,2-0,15) 0,025 +0,25(0,25-0,2)+0,3(0,3-0,25)+0,35(0,35-0,3)+0,4(0,4-0,35)+0,45(0,45-0,4)+0,5(0,5-0,45)+0,55(0,55-0,5)+0,6(0,6-0,55)+0,65(0,65-0,6)+0,7(0,7-0,65)+0,75(0,75-0,7)+0,8(0,8-0,75)+0,85(0,85-0,8)+0,9(0,9-0,85)+0,95(0,95-0,8)+1(1-0,95)

=

= 0,625 > x > 0,5

S





Gráficos IX.4.1.4. Afín, cálculo de las sumas superiores S(ƒ, P_{20}) (ciclos de consolidación).

Reflexión: Calcular la suma superior S(ƒ, P_{20}) comporta dificultades análogas a las de la categoría anterior y, de nuevo, alrededor del 20% son los que alcanzan el máximo nivel. Consideramos importante que los estudiantes, antes de realizar operaciones matemáticas, elijan la notación numérica más adecuada ya que ello simplificaría los cálculos, no se desanimarían y mostrarían más interés por alcanzar el objetivo que se pretende.

IX.4.1.5. ASIn: Afín, sumas inferiores en "n" subintervalos

Actividad 5: Los alumnos deben descubrir, por inducción, el valor de s(ƒ, P_n) de la función afín asociada a la partición cuya distancia internodal es 1/n.

Objetivo: Por medio de esta categoría pretendemos controlar la capacidad de generalización de los alumnos de s(ƒ, P_n), conociendo s(ƒ, P_4) y s(ƒ, P_8).

Análisis de datos: La alumna VV es la única, de los dos ciclos de consolidación, que ha marcado el denominador de la segunda fracción al determinar las sumas inferiores y superiores para n=4 y n=8, además, el texto de VV sirve para el estudio de esta categoría y la posterior. Estas dos categorías son muy similares, diríamos simétricas, por lo cual al escanear las respuestas hemos intentado buscar la complementariedad.

En AN podemos observar que, además de expresar correctamente la suma inferior, ha calculado el límite de la sucesión de sumas inferiores y ello ha sido posible porque el diámetro de cada partición P_n es 1/n; obsérvese que esto es equivalente a tomar el extremo superior de las sumas inferiores, es decir, ha calculado la integral inferior. Constatamos que la mayoría de los estudiantes que han respondido correctamente han escrito solamente la primera igualdad.

Por otro lado, el alumno RF ha expresado de forma generalista la suma inferior, tomando $m_i=x_{i-1}$, sin determinarla en el ejemplo propuesto.

VV

$$s(f,P_4)=\frac{0}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{0}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{4}{4}-\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\frac{i-1}{4}\left(\frac{i}{4}-\frac{i-1}{4}\right)=\sum_{i=1}^{4}\frac{i-1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,4}=0,5-0,125=0,375$$

Dn

$$S(f,P_4)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{0}{4}\right)+\frac{2}{4}\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)+\frac{4}{4}\left(\frac{4}{4}-\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\frac{i}{4}\left(\frac{i}{4}-\frac{i-1}{4}\right)=\sum_{i=1}^{4}\frac{i}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,4}=0,5+0,125=0,625$$

Pn

Para n = 8, no es difícil demostrar que: $s(f,P_8)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,8}=0,5-0,0625=0,4375$ y

N

$$S(f,P_8)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,8}=0,5+0,0625=0,5625$$

Dn

Nótese que en las fórmulas anteriores se ha aplicado la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

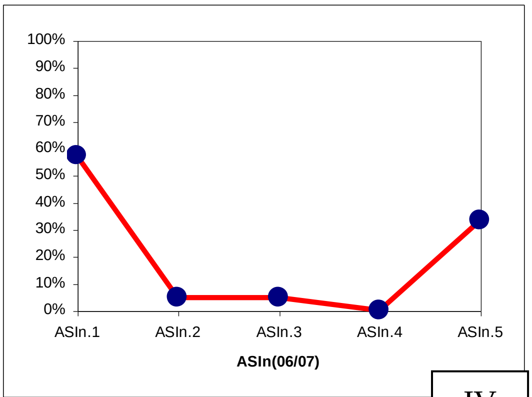
¿CUÁNTO CREES QUE PUEDE VALER LA SIGUIENTE SUMA?

AN

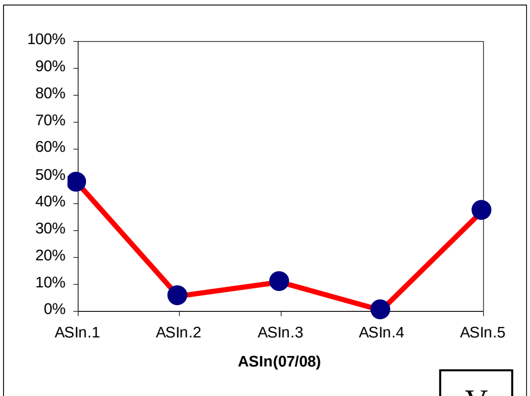
$$\boldsymbol{s(f,P_n)} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot n}=\frac{n-1}{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}$$

RF

$$\boldsymbol{s(f,P_n)} = x_0(x_1-x_0)+x_1(x_2-x_1)+\dots+x_{n-1}(x_n-x_{n-1})$$



IV



V

Gráficos IX.4.1.5. Afín, cálculo de las sumas inferiores $s(f, P_n)$ (ciclos de consolidación).

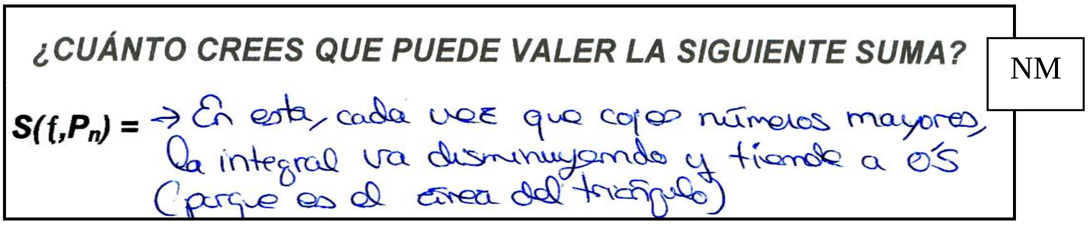
Reflexión: A pesar del texto tan completo entregado en el cuadernillo, solamente la tercera parte de los alumnos de ambos ciclos generalizan correctamente la suma inferior y podemos considerar que más de la mitad no contestan o su respuesta es totalmente errónea.

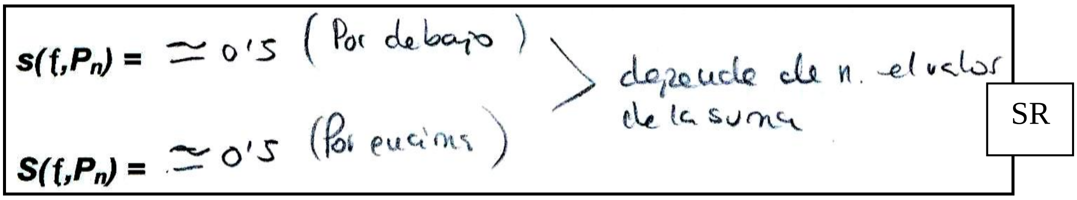
IX.4.1.6. ASSn: Afín, sumas superiores en "n" subintervalos

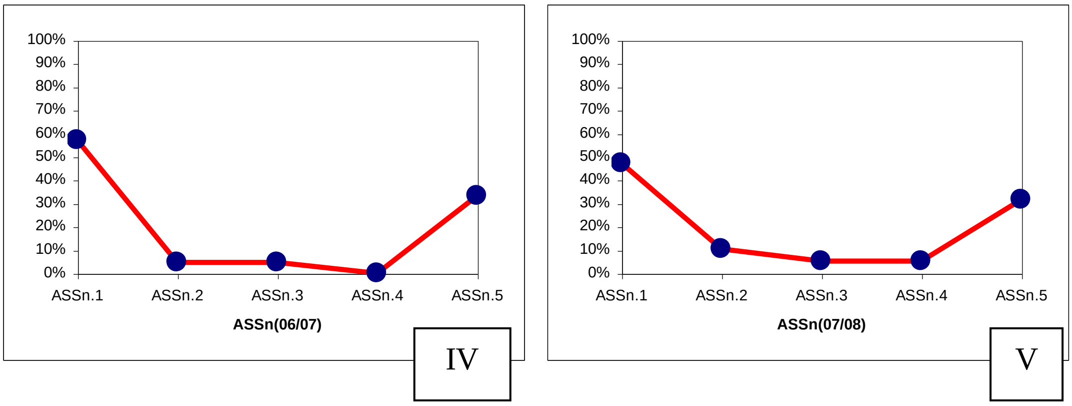
Actividad 6: Los alumnos deben hallar, por inducción, el valor de S(f, P_n) de la función afín asociada a la partición cuya distancia internodal es 1/n.

Objetivo: Por medio de esta categoría pretendemos controlar la capacidad de generalización de los alumnos de S(f, P_n), conociendo S(f, P_4) y S(f, P_8).

Análisis de datos: El análisis de los gráficos de la categoría anterior nos vuelve a servir para esta categoría, haciendo las modificaciones oportunas, puesto que los alumnos "han calcado" las respuestas.







Gráficos IX.4.1.6. Afín, cálculo de las sumas superiores S(f, P_n) (ciclos de consolidación).

La alumna NM no ha calculado S(f, P_n), más bien, ha hallado el valor de la integral superior. SR no calcula el valor de la integral superior, eso sí, dice que la suma superior depende de *"n"*, además, dicho valor es próximo y superior a 0,5 (ídem suma inferior).

Reflexión: Tal y como se ve en el gráfico estadístico IV, al igual que en la anterior categoría, siete alumnos (33,33%) han determinado la suma superior e incluso dos de ellos han tomado el límite concluyendo que éste es 0,5; otros dos alumnos deben mejorar sus respuestas y el resto (57,15%) no contestan o lo hacen mal. El gráfico V, del grupo 2º E, muestra tales similitudes con el anterior que no es necesario comentar.

Las respuestas dadas por cada alumno de los dos ciclos de consolidación, en las dos últimas categorías, pueden considerarse simétricas[68]. Sin embargo, pensamos que los estudiantes no están acostumbrados a estudiar textos matemáticos habida cuenta de los resultados obtenidos en ASIn y ASSn y suponemos que es escasa la asimilación, de algunos estudiantes, de parte de la información dada en el cuadernillo.

IX.4.1.7. ACID: Cálculo del área por medio de la integral definida

Actividad 7: Los alumnos deben calcular el área comprendida entre la función $f(x)=x$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=1$ aplicando la teoría del cálculo integral, preferentemente, por medio del teorema fundamental del cálculo integral.

Objetivo: Por medio de esta categoría se pretende determinar si los alumnos aplican correctamente la regla de Barrow.

Análisis de datos: Solamente la alumna BP, de los dos ciclos, ha escrito la expresión teórica del TFC aunque errando en uno de los dos extremos e ignorando el extremo inferior en el corchete que acompaña a la primitiva, no obstante, el resultado es correcto. La solución dada por VO es incoherente.

CALCULA, SI EXISTE:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xdx = G(1) - G(2)$$

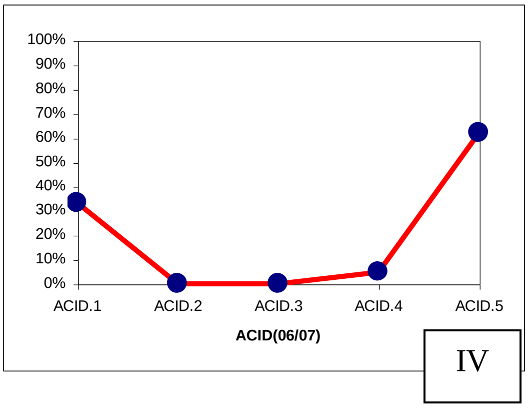
$$\left[\frac{x^2}{2}\right]^1 = \left[\frac{1}{2}\right] - 0 = 0'5$$

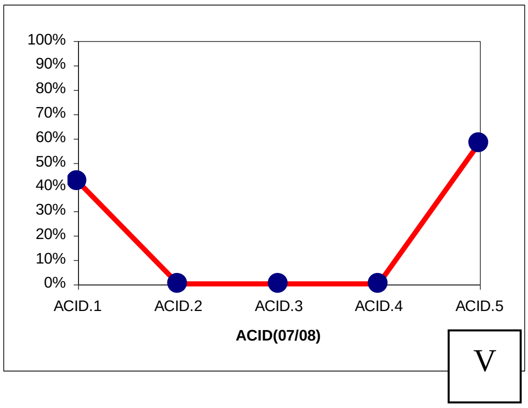
BP

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xdx = \int_0^1 f(x)\, f(dx)$$

VO

[68] Véanse las respuestas de SR en las cuales se observa la paridad entre $s(f, P_n)$ y $S(f, P_n)$.





Gráficos IX.4.1.7. Cálculo del área mediante la regla de Barrow (ciclos de consolidación).

Reflexión: A pesar de las múltiples ocasiones en las cuales se ha aplicado el teorema fundamental del cálculo, al menos la tercera parte de los alumnos no han sabido aplicar la regla de Barrow a este ejercicio tan elemental, el resto han calculado correctamente el área mediante la integral definida[69].

IX.4.1.8. ATCFI: Cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables

Actividad 8: Los alumnos deben calcular el área comprendida entre la función $f(x)=x$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=1$ utilizando el teorema de caracterización de las funciones integrables, es decir, que para que una función sea integrable basta con fijar un valor tan pequeño como deseemos y que encontremos una partición asociada al intervalo tal que la diferencia entre la suma superior e inferior sea menor que el número predeterminado anteriormente.

Objetivo: Deseamos conocer el grado de comprensión de los alumnos del teorema de caracterización óptima de las funciones integables y, por tanto, que existe otra forma alternativa de calcular el área.

Análisis de datos: La alumna NM da una explicación escrita y otra gráfica, en la primera entendemos que es contradictorio expresar *"las superiores son números cada vez mayores [que] disminuyen"*, y por tanto, no está explicado correctamente. La explicación gráfica es correcta, sin embargo, debiera haber sido más cuidadosa con la representación de las sumas superiores.

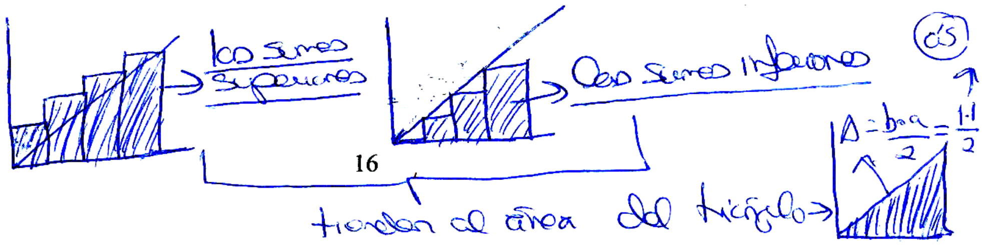
[69] A esta categoría de comprensión matemática debiéramos reconocerla como ATFCI (cálculo del área mediante el teorema fundamental del cálculo integral), sin embargo, no hemos creído conveniente utilizar esas siglas para no confundirla con la siguiente categoría ATCFI (cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables).

DB justifica el valor que calculó correctamente en la categoría anterior mediante el teorema fundamental del cálculo integral y da su propia interpretación del teorema de caracterización de las funciones integrables.

JUSTIFICA EL VALOR CALCULADO ANTERIORMENTE

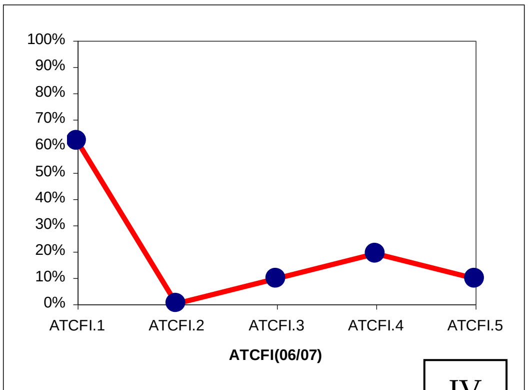
→ Pues se puede observar que tanto las sumas superiores como las sumas inferiores tienden a 0'5; las superiores con números cada vez mayores disminuyen y se acercan cada vez más al área del triángulo, las inferiores con números cada vez mayores van aumentando y se acercan al área del triángulo que vale 0'5.

NM

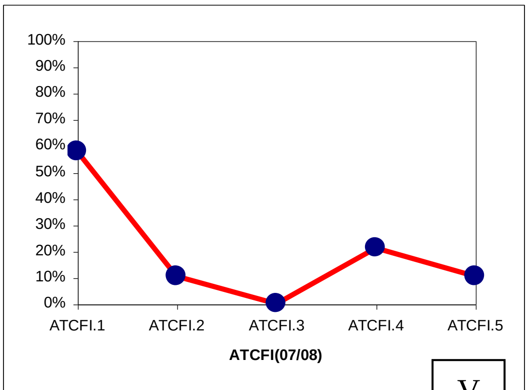


lo he calculado aplicando la fórmula. Podemos decir que es el acertado ya que la suma superior y la inferior se encuentran en torno a ese número, es decir, 0'5

DB



IV



V

Gráficos IX.4.1.8. Cálculo de áreas mediante el teorema de caracterización de funciones integrables (ciclos de consolidación).

Reflexión: La gráfica IV, del grupo 2º D, expresa que dos alumnos aplican correctamente el teorema de caracterización de las funciones integrables, cuatro estudiantes aplican el teorema fundamental (no era el objetivo), dos alumnos hacen referencia a alguno de los teoremas aunque no los aplican correctamente y, el resto, trece alumnos (más del 60%) no dan ninguna respuesta o es en todo punto errónea. Los porcentajes de los niveles de respuesta de los alumnos del grupo 2º E no discrepan sustancialmente de los de 2º D. Pensamos que al calcular previamente la integral definida ha confundido a los alumnos puesto que se han visto sorprendidos por los dos teoremas y muchos de ellos no han sabido aplicarlos al ejemplo propuesto.

Las cuatro próximas categorías las dedicaremos al estudio de dos teoremas fundamentales del Análisis Matemático, éstas son: IGTVMD, TFCIS, TFCII y TFCISI en las cuales juegan un importante papel las representaciones gráficas. La primera se refiere al teorema del valor medio del cálculo diferencial y las tres siguientes al teorema fundamental del cálculo integral.

IX.4.1.9. IGTVMD: Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial

Actividad 9: Los estudiantes desconocen el teorema de Rolle y no podemos demostrar analíticamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial[70], como alternativa, realizamos una demostración-interpretación geométrica que los alumnos deben completar. Los estudiantes deben descubrir que la pendiente de la recta que pasa por los puntos *A(a,h(a))* y *B(b,h(b))* para una función *h(x)* continua en [*a,b*] y derivable en *(a,b)* coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto interior de dicho intervalo.

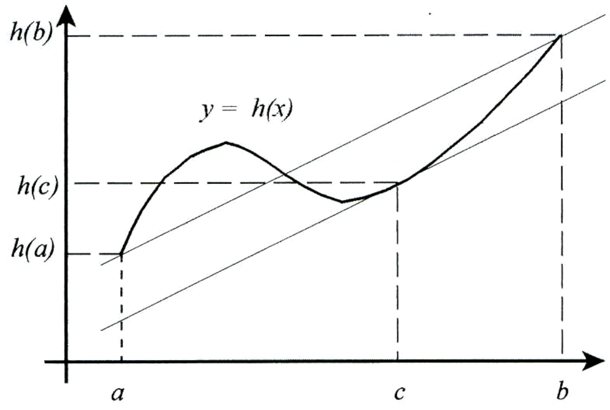
Objetivo: Esta categoría pretende controlar el nivel de comprensión gráfica de los alumnos del teorema del valor medio del cálculo diferencial, para ello deberán leer y comprender el texto matemático que se adjunta.

Análisis de datos: La alumna MR, en primer lugar, ha dudado y ha escrito las respuestas con lápiz, posteriormente, se ha convencido de que las mismas son correctas y lo ha confirmado rescribiéndolas con bolígrafo[71].

[70] Este teorema también es reconocido como teorema del valor medio de Lagrange o teorema de los incrementos finitos.

[71] Es frecuente que, sobre todo, las alumnas escriban las respuestas con lápiz cuando no están totalmente seguras de las mismas y que lo hagan con bolígrafo en caso contrario.

Otras respuestas no hemos considerado oportuno escanearlas, eso sí, nos hemos visto obligados a redefinir los niveles de respuesta[72].

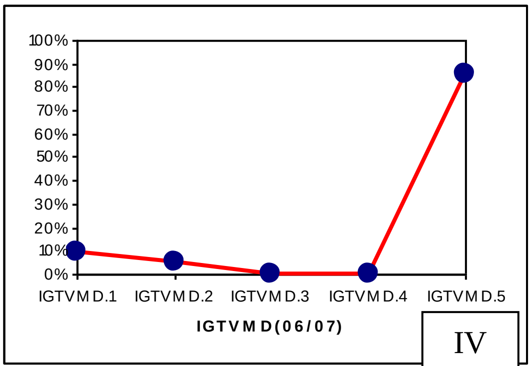


MR

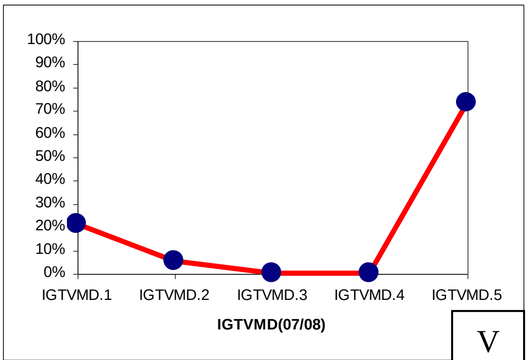
Figura 2.2.2 Interpretación geométrica del teorema del valor medio

Nótese que la recta que pasa por los puntos $A(a,\ h(a))$ y $B\underline{(b,\ h(b))}$ tiene pendiente $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}$. La recta que pasa por el punto $C(c,\ h(c))$ es tangente a la curva en dicho punto, por tanto su pendiente es $\underline{h'(c)}$.

Al ser ambas rectas paralelas sus pendientes coinciden, es decir: $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}=h'(c)$, en consecuencia se obtiene: $\underline{h(b)-h(a)} = h'(c)(b-a)$, lo que concluye la interpretación geométrica.



IV



V

Gráficos IX.4.1.9. Interpretación gráfica del teorema de Lagrange (ciclos de consolidación).

[72] Los niveles de respuesta, según la escala Likert, para las categorías IGTVMD y TFCIS son:
1. El alumno no contesta o falla en su totalidad.
2. El alumno completa correctamente un apartado y falla en dos.
3. No se tiene en consideración este nivel de respuesta.
4. El alumno responde correctamente dos apartados y falla en uno.
5. El alumno completa correctamente los tres apartados.

Reflexión: La gráfica V, del grupo 2º E, expresa que catorce alumnos han comprendido la interpretación geométrica del teorema de los incrementos finitos (73,68%), el resto no han sido capaces de comprender el texto matemático a pesar de la insistencia del PI en el cálculo y representación de la recta tangente a una curva en un punto y los ejercicios realizados durante el primer trimestre de 2007-2008; la estadística de 2º D mejora, respecto al anterior grupo, puesto que son dieciocho (85,72%) los que alcanzan el nivel máximo. Consideramos que el resultado nos parece muy positivo y ello puede ser debido a que en clase se explicó detenidamente dicho teorema.

IX.4.1.10. TFCIS: Teorema fundamental cálculo integral (sumas)

Actividad 10: Los alumnos han de descubrir que las sumas de las diferencias del valor de la función entre dos nodos consecutivos coincide con la diferencia del valor de la función en los extremos del intervalo.

Objetivo: Esta categoría pretende controlar el nivel de comprensión de los estudiantes de las expresiones analíticas conformadas con sumandos que a su vez se contrarrestan.

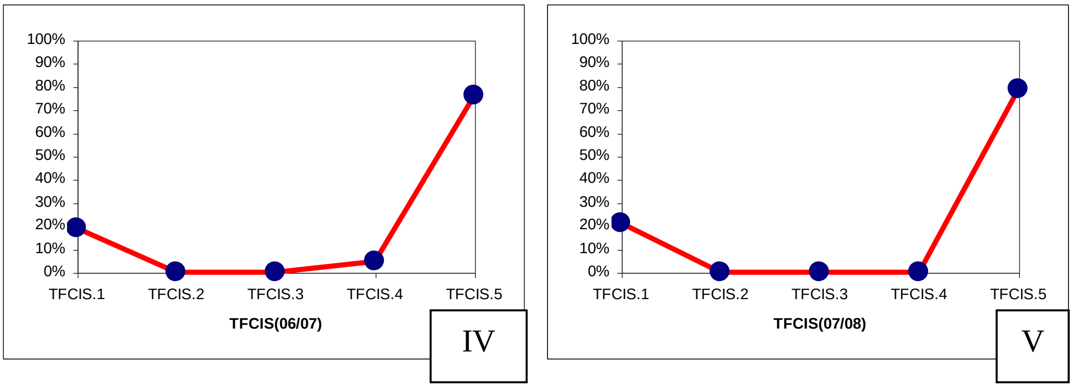
Análisis de datos: Los niveles de respuesta coinciden con los de la categoría anterior. La respuesta de CG es correcta y en GM es fácil encontrar el error.

$$G(x_1) - \underline{G(x_0)} + G(x_2) - G(x_1) + \underline{G(x_3)} - G(x_2) + G(x_4) - \underline{G(x_3)} = G(b) - G(a).$$

CG

$$G(x_1) - \underline{G(x_0)} + G(x_2) - G(x_1) + \underline{G(x_3) - G(x_2)} - G(x_2) + G(x_4) - \underline{G(x_3)} = G(b) - G(a).$$

GM



Gráficos IX.4.1.10. Teorema Fundamental del Cálculo Integral, sumas de las diferencias internodales (ciclos de consolidación).

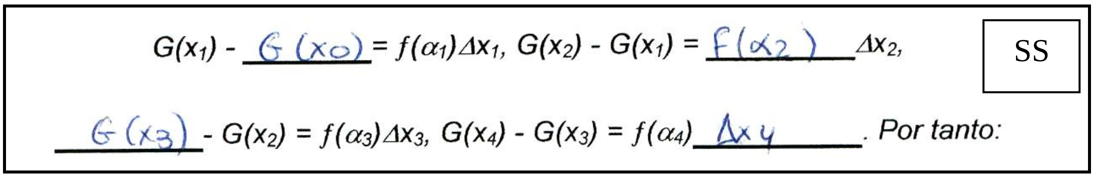
Reflexión: Alrededor de las cuatro quintas partes de los estudiantes de ambos ciclos han respondido correctamente; el resto, salvo un alumno, también han contestado pero erróneamente.

IX.4.1.11. TFCII: Teorema fundamental cálculo integral (incrementos)

Actividad 11: Los estudiantes deben aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial en cada subintervalo del intervalo original.

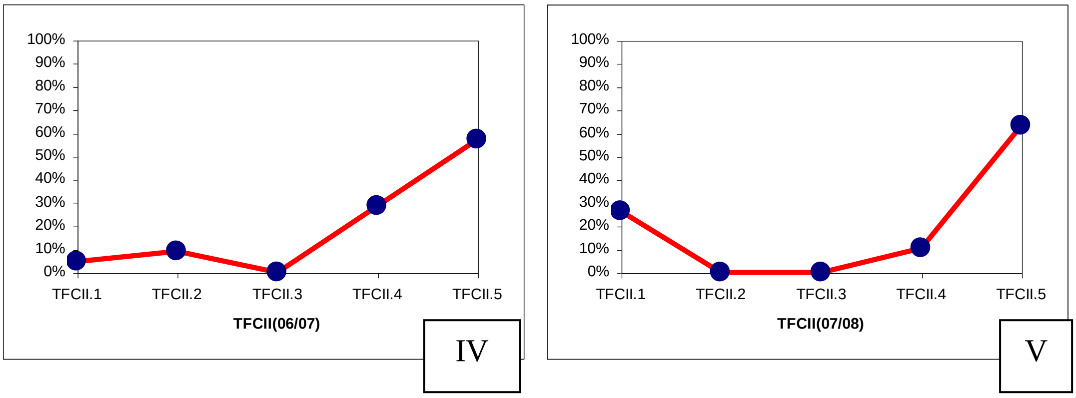
Objetivo: Esta categoría pretende controlar el nivel de comprensión de los alumnos del teorema de los incrementos finitos aplicado a cada subintervalo de los cuatro que forman la partición del intervalo [*a*,*b*].

Análisis de datos: Los niveles de respuesta para esta categoría han sido redefinidos[73] y vista la solución escaneada no merecen ningún comentario.


$G(x_1)$ - G(x0) $= f(\alpha_1)\Delta x_1$, $G(x_2) - G(x_1) =$ f(α2) Δx_2,

G(x3) $- G(x_2) = f(\alpha_3)\Delta x_3$, $G(x_4) - G(x_3) = f(\alpha_4)$ Δx4. *Por tanto:*

SS



Gráficos IX.4.1.11. Teorema Fundamental del Cálculo Integral, incrementos finitos internodales (ciclos de consolidación).

Reflexión: Según se desprende de los gráficos IV y V, si consideramos que el haber cometido un error puede ser debido a la escasa atención de los alumnos al cumplimentar la cuestión correspondiente, lo cual puede ser

[73] Los niveles de respuesta, según la escala Likert, para esta categoría son:

1. El alumno no contesta o falla en su totalidad.
2. El alumno completa correctamente un apartado y falla en tres.
3. El alumno completa correctamente dos apartados y falla en otros dos.
4. El alumno completa correctamente tres apartados y falla en uno.
5. El alumno completa correctamente los cuatro apartados.

subsanado sin mayor dificultad, concluimos que el 80% de todos los estudiantes de los dos ciclos han respondido correctamente y, en el extremo opuesto, observamos que el 20% ha errado en todos sus términos.

IX.4.1.12. TFCSI: Teorema fundamental cálculo integral (sumas e incrementos)

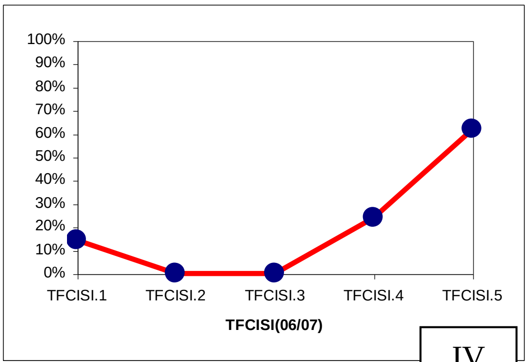
Actividad 12: Los alumnos deben comprender que las sumas de las diferencias del valor de la función entre dos nodos consecutivos coincide con la diferencia del valor de la función en los extremos del intervalo y, además, debe ser aplicado el teorema de los incrementos finitos en cada subintervalo.

Objetivo: Con esta actividad pretendemos controlar el nivel de comprensión de los alumnos de la parte final del teorema fundamental del cálculo integral en el cual los sumandos coinciden con el valor de la función en un punto intermedio de su respectivo subintervalo por la amplitud del mismo.

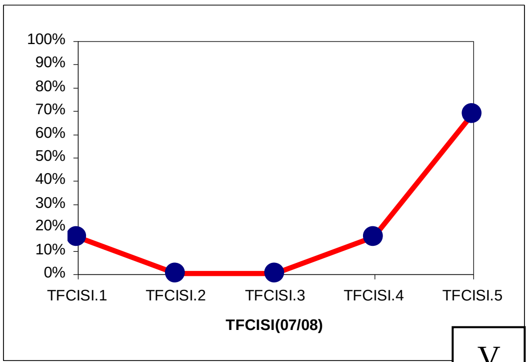
Análisis de datos: La respuesta[74] de EG es totalmente correcta y se explica por sí misma.

$$G(b) - G(a) = f(\alpha_1)\Delta x_1 + \underline{f(\alpha_2)\Delta x_2} + f(\alpha_3)\Delta x_3 + f(\alpha_4)\Delta x_4 = R(f,P,T).$$

EG



IV



V

Gráficos IX.4.1.12. Teorema Fundamental del Cálculo Integral, sumas e incrementos finitos internodales (ciclos de consolidación).

Reflexión: Alrededor del 85% de los estudiantes responden correctamente, considerando como tal los niveles 4 y 5. El resto falla en todos sus términos y corresponde a los alumnos que no se han interesado por el teorema fundamental del cálculo integral.

[74] Sólo se admiten tres niveles de respuesta, a saber: 1 (mal), 5 (bien) y 4 (el alumno en lugar de escribir α_2 ha escrito a_2).

IX.4.1.13. CP: Cálculo de primitivas

Como es sabido, el cálculo mental de primitivas ha sido trabajado en clase con los estudiantes en los ciclos de confirmación y consolidación[75], además, pensamos que en los ciclos IV y V se ha dedicado más tiempo que en los dos anteriores. Es evidente que las grabaciones de las clases y el cuaderno de campo del profesor aportan un material de primer orden para valorar la capacidad de cálculo mental de los alumnos; sin embargo, pensamos que la puesta en práctica del mismo mediante el cálculo de primitivas también ha de quedar constatada con la resolución escrita de varios ejercicios.

Actividad 13: Los alumnos deben dar la solución escrita de algunas integrales inmediatas[76]. Los ejercicios propuestos del cálculo de primitivas inmediatas fueron realizados en los meses de diciembre y enero-febrero de los cursos académicos correspondientes y dentro de exámenes más amplios de análisis matemático[77]. He aquí dichos ejercicios[78]:

Ejercicio nº 1.- Calcula las siguientes integrales:

$$\int\left(e^{3x}+\frac{5}{x^2}\right)dx \qquad \int\left(7x\cdot\sqrt[3]{5x^2+3}+\frac{x-3}{x^2-6x+20}\right)dx$$

Ejercicio nº 2.- Calcula las siguientes integrales:

$$\int\left(x\sqrt{3x^2-5}+\frac{e^x}{7e^x+5}\right)dx \qquad \int\left(sen^4 3x\cdot\cos 3x+\frac{6x^2-4x+5}{x+2}\right)dx$$

Objetivo: Pretendemos evaluar la capacidad de cálculo mental de los estudiantes con respecto a la integración, es decir, la agilidad mental para determinar primitivas.

Niveles de respuesta: El profesor investigador en la corrección particular de cada una de las pruebas del cálculo de primitivas las ha evaluado de 0 a 10 y, para seguir el criterio de los niveles de respuesta de las categorías anteriores, se ha establecido la siguiente tabla de conversión[79]:

[75] El cálculo mental no se investigó en el primer ciclo, reconocido como ciclo de exploración.

[76] No se ha exigido ningún método de integración, ni tan siquiera el de sustitución aunque fue explicado en el ciclo cuarto a los estudiantes del grupo 2º D.

[77] Véase la *Tabla IX.2.3. Planificación de los ciclos de consolidación (cursos 2006-07 y 2007-08).*

[78] El primero ha sido propuesto en diciembre y el segundo, que es el quinto del correspondiente examen, ha sido propuesto en enero-febrero.

[79] Dichos niveles se establecieron en el capítulo anterior, sin embargo, para que la lectura de este capítulo sea secuencial, volvemos a incluir la misma tabla.

INTERVALO DE CALIFICACIÓN DEL EJERCICIO	NIVEL DE RESPUESTA
[0; 2,5)	1
[2,5; 5)	2
[5; 7,5)	3
[7,5; 9)	4
[9; 10]	5

Tabla IX.4.1.13. Equivalencia entre las calificaciones del cálculo de primitivas y los niveles de respuesta según la escala Likert.

Análisis de los datos: El profesor ha escaneado, en el anexo I, cuatro ejercicios de otros tantos estudiantes, dos por cada ciclo de consolidación. Analizamos seguidamente cada una de las pruebas individuales.

La alumna GM, del ciclo IV, ha resuelto correctamente tres de las cuatro integrales[80], sin embargo, expresa mal el índice del radical y, además, comete errores al aplicar las propiedades de las potencias dando una solución que, posiblemente, ella misma no la considere correcta[81].

Podemos considerar que la alumna MR, de 2º E, ha resuelto bien las integrales, pensamos que un pequeño repaso hubiera sido suficiente para determinar el factor constante de integración que ha obviado, esto lo afirmamos porque MR en el cálculo mental realizado en las distintas clases obtenía buenos resultados.

El alumno DA, 2º D, es el único que expresa la propiedad de la linealidad de la integral[82] y aquí detectamos un error frecuente en algunos alumnos ya que, como él, intentan generalizar $\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}dx = \frac{f^{-n+1}(x)}{-n+1} + k \quad si \quad n \neq 1$ a $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \frac{f^{-1\pm 1}(x)}{-1\pm 1} + k$ dudando si deben poner +1 ó –1. Concluimos que la integración de funciones racionales no resulta fácil a muchos estudiantes

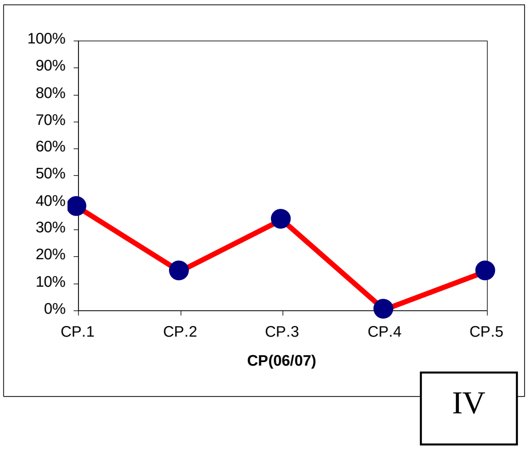
[80] Estamos evaluando el ejercicio nº 1. Las dos integrales se convierten en cuatro al aplicar la propiedad de la linealidad de la integral.

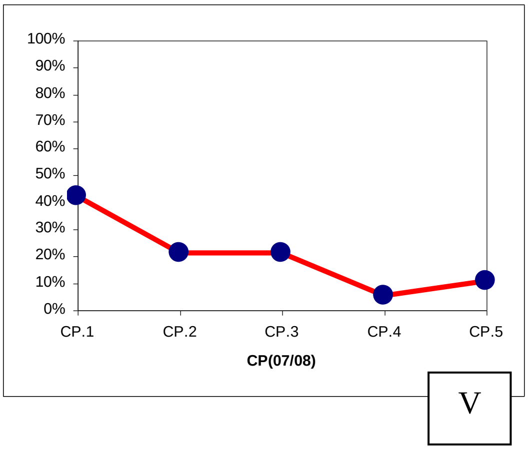
[81] GM resuelve las cuatro integrales con lápiz, considera que las dos primeras son correctas y las repasa con bolígrafo, no así las otras dos.

[82] DA escribe: *"Las hago por separado"*.

cuando deben dividirse polinomios puesto que no saben o cometen demasiados errores[83].

La alumna SR, 2º E, encuentra dificultades en el cálculo de integrales trigonométricas y, nuevamente, en la división de polinomios.





Gráficos IX.4.1.13. Cálculo de Primitivas (ciclos de consolidación).

Reflexión: Diecisiete, de cuarenta, son los alumnos que alcanzan un nivel igual a superior a 3, esto supone que el 42,5% aprueban el cálculo de primitivas elementales. Asimismo, otros dieciséis estudiantes obtienen una puntuación inferior a 2,5 (nivel 1) por lo cual podemos afirmar que, en general, los resultados obtenidos en el cálculo mental de primitivas elementales son altamente insatisfactorios.

Vistos los resultados, una vez corregidas las pruebas, el profesor consideró que en el ciclo IV eran insatisfactorios; consciente de esta situación, decidió dedicarle más tiempo al cálculo mental en el ciclo V y mantener los mismos ejercicios. Los resultados no sólo no mejoraron, más bien, sufrieron un pequeño empeoramiento. Esto ha de hacernos reflexionar en el modo de abordar el cálculo mental de primitivas elementales durante el próximo ciclo con el objetivo de mejorar sustancialmente los de los ciclos de consolidación.

En estos momentos consideramos que los ejercicios de cálculo de primitivas propuestos no son los más idóneos, sin embargo, es conveniente determinar algunos errores en los cuales incurren los estudiantes de los ciclos de consolidación al resolver integrales indefinidas, éstos son:

[83] Aunque la división de polinomios se había efectuado en las clases de matemáticas previas al examen, muchos estudiantes seguían teniendo dificultades para realizarla correctamente. Con posterioridad al examen el profesor recordó a los alumnos, en un recreo, el algoritmo de la división de polinomios. DA lo comprendió desde el primer momento.

a) Al menos la tercera parte de los alumnos no aprenden las tablas de derivadas e integrales del libro de texto y muchos de los que las aprenden tienen dificultades para asimilarlas conceptualmente.

b) Algunos, pocos, estudiantes al resolver integrales derivan parte o toda la función integrando.

c) Es frecuente que en la integración de funciones polinómicas no determinen correctamente los coeficientes.

d) Varios alumnos razonan como sigue: *"Si la integral de la suma es la suma de las integrales, también la integral del producto es el producto de las integrales (ídem cociente)".*

e) Resolver integrales inmediatas por medio del cambio de variable hace que muchos estudiantes se sientan desorientados y confundidos[84].

f) Las integrales cuya solución es "tipo logarítmico" las confunden con las de "tipo potencial".

g) Dividir polinomios es difícil para algunos alumnos y, en consecuencia, las funciones racionales no resultan fáciles de integrar[85].

h) Bastantes estudiantes desconocen o no recuerdan las funciones circulares y ello supone que no encuentren ningún sentido al cálculo de integrales trigonométricas[86].

i) Las funciones exponenciales deben tener como base el número *e.*

j) Muy pocos alumnos simplifican la función integrando o la reformulan, la mayoría de ellos intentan calcular directamente la integral[87].

k) Es muy difícil que los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales comprueben los resultados obtenidos en el cálculo de primitivas.

---

[84] Circunstancia agravada por ignorar el libro de texto la expresión *"dx"*, así por ejemplo, propone que se calculen: $\int \frac{1}{x^2} sen \frac{1}{x}$, $\int \frac{2}{x} \ln x$, $\int \frac{1}{e^x} \cos e^{-x}$, etc.

[85] Sólo se han resuelto ejercicios de integrales racionales cuya solución es potencial y/o polinómica y/o logarítmica (neperiano). No se han considerado integrales racionales según las raíces del denominador ni aquéllas cuya solución es arco tangente.

[86] Varios alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales han cursado en cuarto curso de educación secundaria obligatoria Matemáticas A y, en consecuencia, las razones trigonométrica no se contemplan en el correspondiente currículo.

[87] Considérense los ejemplos del libro de texto: $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}}$, $\int \frac{1}{x^2+2x+1}$, etc.

IX.4.2. TABLAS RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DE LOS CICLOS DE CONSOLIDACIÓN

Procedemos de forma similar a la del capítulo anterior, así pues, el PI ha estudiado las cuarenta categorías de los dos ciclos de consolidación; sin embargo, las comunes a los ciclos de exploración (I) y confirmación (II y III), estudiados anteriormente, no han sido redactadas en el apartado anterior salvo CP (cálculo de primitivas). Pensamos que ahora es el momento de realizar las correspondientes tablas[88] de las once categorías comunes de los ciclos de exploración, confirmación y consolidación; asimismo, añadimos otras dos tablas[89] correspondientes a las dieciséis categorías comunes de los ciclos de confirmación y consolidación; por último, incluimos otras dos nuevas tablas[90], una por cada curso de los ciclos de consolidación, de las trece nuevas categorías estudiadas en los epígrafes anteriores. En cada una de las seis tablas, de los ciclos de consolidación, consideramos las respuestas de los cuadernillos teórico-prácticos de los estudiantes con una valoración cuantitativa y, además, damos la siguiente información:

- La primera columna contiene los códigos de las categorías.
- Como *Niveles de respuesta* tenemos los cinco que hemos establecido según la escala Likert y por cada nivel de cada una de las categorías se localizan dos datos, éstos son: la frecuencia n_i y el porcentaje del nivel obtenido para esa categoría[91].
- Tres parámetros, para cada categoría, denominados *Medidas*, éstos son: *Moda (Mo)* que es el nivel de mayor frecuencia, *Suma* (Σ) que es $\sum = \sum n_i \left(\textit{Nivel de respuesta de la categoría} \right)$ y *Media* ($\bar{x}$) que viene dada por el cociente $\bar{x} = \Sigma$/número total de alumnos[92].
- La última fila sigue el mismo procedimiento, sumando previamente las columnas de las frecuencias de cada uno de los niveles.

[88] Véanse las tablas IX.4.2.1.1 y IX.4.2.1.2.

[89] Véanse las tablas IX.4.2.2.1 y IX.4.2.2.2.

[90] Véanse las tablas IX.4.2.3.1 y IX.4.2.3.2.

[91] Por ejemplo, para la categoría ESIS de la primera tabla el nivel 5 tiene frecuencia 17 (han sido evaluadas 17 respuestas de los alumnos en esa categoría con un nivel 5) y el porcentaje que le corresponde es el 80,96% (17 alumnos del total que son 21).

[92] Si consideramos ESIS, tenemos: *Mo*=5 puesto que el nivel 5 tiene la frecuencia más alta (17), Σ=1x0+ 1x2 + 1x3 + 2x4 + 17x5 = 98 y $\bar{x}$ = 98/21 = 4,67 (21 alumnos del grupo 2º D).

IX.4.2.1. Categorías de los ciclos de consolidación (IV y V) que son comunes a las de los ciclos de exploración (I) y confirmación (II y III)

CATEGORÍAS	*FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO IV)*												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\bar{x}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
DGA	1	4,76	0	0	0	0	0	0	20	95,24	5	101	4,81
DGSI	1	4,76	0	0	0	0	0	0	20	95,24	5	101	4,81
DGSS	3	14,29	0	0	1	4,76	0	0	17	80,95	5	91	4,33
RSISR	2	9,52	3	14,28	8	38,10	0	0	8	38,10	4	72	3,43
ESIS	0	0	1	4,76	1	4,76	2	9,52	17	80,96	5	98	4,67
EID	4	19,05	4	19,05	5	23,81	3	14,28	5	23,81	4	64	3,05
ACAFE	8	38,10	0	0	7	33,33	1	4,76	5	23,81	1	58	2,76
DGSR	3	14,29	1	4,76	0	0	0	0	17	80,95	5	90	4,29
RFIAR	15	71,43	0	0	0	0	0	0	6	28,57	1	45	2,14
IGAI	3	14,29	1	4,76	1	4,76	1	4,76	15	71,43	5	87	4,14
IGTVMI	9	42,86	1	4,76	10	47,62	0	0	1	4,76	1	46	2,19
TOTAL	**49**	**21,21**	**11**	**4,76**	**33**	**14,29**	**7**	**3,03**	**131**	**56,71**	**5**	**853**	**3,69**

Tabla IX.4.2.1.1. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las categorías/niveles de comprensión matemática, comunes a los ciclos de exploración, confirmación y consolidación, relativas al concepto de integral definida (Curso 2006-2007).

CATEGORÍAS	FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO V)												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	**Σ**	$\bar{x}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
DGA	2	10,53	0	0	0	0	0	0	17	89,47	5	87	4,58
DGSI	2	10,53	0	0	0	0	0	0	17	89,47	5	87	4,58
DGSS	3	15,79	0	0	0	0	0	0	16	84,21	5	83	4,37
RSISR	6	31,58	2	10,53	5	26,32	0	0	6	31,58	3	55	2,89
ESIS	2	10,53	0	0	0	0	3	15,79	14	73,68	5	84	4,42
EID	7	36,84	3	15,79	4	21,05	0	0	5	26,32	1	50	2,63
ACAFE	10	52,63	0	0	4	21,05	0	0	5	26,32	1	47	2,47
DGSR	4	21,05	0	0	0	0	0	0	15	78,95	5	79	4,16
RFIAR	12	63,16	0	0	0	0	1	5,26	6	31,58	1	46	2,42
IGAI	4	21,05	0	0	2	10,53	0	0	13	68,42	5	75	3,95
IGTVMI	8	42,11	0	0	9	47,37	0	0	2	10,53	3	45	2,37
TOTAL	**60**	**28,71**	**5**	**2,39**	**24**	**11,48**	**4**	**1,91**	**116**	**55,51**	**5**	**738**	**3,53**

Tabla IX.4.2.1.2. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las categorías/niveles de comprensión matemática, comunes a los ciclos de exploración, confirmación y consolidación, relativas al concepto de integral definida (Curso 2007-2008).

IX.4.2.2. Categorías de los ciclos de consolidación (IV y V) que son comunes a las de los ciclos de confirmación (II y III)

CATEGORÍAS	*FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS NUEVAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO IV)*												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		*Mo*	Σ	$\overline{X}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
DR	12	57,14	3	14,29	0	0	0	0	6	28,57	1	48	2,29
DMIN4	9	42,86	0	0	0	0	0	0	12	57,14	5	69	3,29
DMAX4	10	47,62	0	0	0	0	0	0	11	52,38	5	65	3,10
DSI4	8	38,10	1	4,76	0	0	10	47,62	2	9,52	4	60	2,86
DSS4	9	42,86	1	4,76	0	0	10	47,62	1	4,76	4	56	2,67
DIINF	13	61,90	0	0	1	4,76	2	9,52	5	23,82	1	49	2,33
DISUP	12	57,14	0	0	2	9,52	2	9,52	5	23,82	1	51	2,43
DNI	8	38,10	1	4,76	3	14,28	1	4,76	8	38,10	3	63	3
AR	2	9,52	0	0	0	0	0	0	19	90,48	5	97	4,62
AMIN4	6	28,57	0	0	0	0	0	0	15	71,43	5	81	3,86
AMAX4	4	19,05	0	0	0	0	0	0	17	80,95	5	89	4,24
ASI4	6	28,57	0	0	0	0	1	4,76	14	66,67	5	80	3,81
ASS4	6	28,57	0	0	0	0	1	4,76	14	66,67	5	80	3,81
AIINF	10	47,62	2	9,52	3	14,29	1	4,76	5	23,81	1	52	2,48
AISUP	10	47,62	2	9,52	2	9,52	2	9,52	5	23,81	1	53	2,52
AI	8	38,10	2	9,52	5	23,81	2	9,52	4	19,05	1	55	2,62
TOTAL	**133**	**39,59**	**12**	**3,57**	**16**	**4,76**	**32**	**9,52**	**143**	**42,56**	**5**	**1048**	**3,12**

Tabla IX.4.2.2.1. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las categorías/niveles de comprensión matemática, comunes a los ciclos de confirmación y consolidación, relativas al concepto de integral definida (Curso 2006-2007).

CATEGORÍAS	FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS NUEVAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO V)												
	Niveles de respuesta										Medidas		
	1		2		3		4		5		*Mo*	Σ	$\bar{x}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
DR	10	52,63	2	10,53	2	10,53	0	0	5	26,32	1	45	2,37
DMIN4	6	31,58	2	10,53	0	0	1	5,26	10	52,63	5	64	3,37
DMAX4	7	36,84	1	5,26	0	0	0	0	11	57,89	5	64	3,37
DSI4	5	26,31	3	15,79	0	0	8	42,11	3	15,79	4	58	3,05
DSS4	7	36,84	2	10,53	2	10,53	5	26,31	3	15,79	1	52	2,74
DIINF	11	57,89	1	5,26	0	0	2	10,53	5	26,32	1	46	2,42
DISUP	11	57,89	1	5,26	0	0	2	10,53	5	26,32	1	46	2,42
DNI	10	52,63	2	10,53	0	0	3	15,79	4	21,05	1	46	2,42
AR	3	15,79	0	0	0	0	0	0	16	84,21	5	83	4,37
AMIN4	7	36,84	0	0	0	0	0	0	12	63,16	5	67	3,53
AMAX4	5	26,32	0	0	0	0	0	0	14	73,68	5	75	3,95
ASI4	5	26,32	0	0	0	0	1	5,26	13	68,42	5	74	3,89
ASS4	5	26,32	0	0	0	0	0	0	14	73,68	5	75	3,95
AIINF	13	68,42	0	0	0	0	1	5,26	5	26,32	1	42	2,21
AISUP	12	63,16	0	0	1	5,26	2	10,53	4	21,05	1	43	2,26
AI	12	63,16	0	0	3	15,79	0	0	4	21,05	1	41	2,16
TOTAL	**129**	**42,43**	**14**	**4,61**	**8**	**2,63**	**25**	**8,22**	**128**	**42,11**	**1**	**921**	**3,03**

Tabla IX.4.2.2.2. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las categorías/niveles de comprensión matemática, comunes a los ciclos de confirmación y consolidación relativas al concepto de integral definida (Curso 2007-2008).

IX.4.2.3. Nuevas categorías de los ciclos de consolidación (IV y V)

CATEGORÍAS	*FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO IV)*												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	**Σ**	$\bar{x}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
DSIn-10	13	61,90	0	0	2	9,52	2	9,52	4	19,05	1	47	2,24
DSSn-10	13	61,90	1	4,76	0	0	3	14,29	4	19,05	1	47	2,24
ASI20	10	47,62	0	0	4	19,05	3	14,29	4	19,05	1	54	2,57
ASS20	11	52,38	0	0	3	14,27	3	14,29	4	19,05	1	52	2,48
ASIn	12	57,15	1	4,76	1	4,76	0	0	7	33,33	1	52	2,48
ASSn	12	57,15	1	4,76	1	4,76	0	0	7	33,33	1	52	2,48
ACID	7	33,33	0	0	0	0	1	4,76	13	61,90	5	76	3,62
ATCFI	13	61,90	0	0	2	9,52	4	19,05	2	9,52	1	45	2,14
IGTVMD	2	9,52	1	4,76	0	0	0	0	18	85,72	5	94	4,48
TFCIS	4	19,05	0	0	0	0	1	4,76	16	76,19	5	88	4,19
TFCII	1	4,76	2	9,52	0	0	6	28,57	12	57,15	5	92	4,38
TFCISI	3	14,29	0	0	0	0	5	23,81	13	61,90	5	88	4,19
CP	8	38,09	3	14,29	7	33,33	0	0	3	14,29	1	50	2,38
TOTAL	**109**	**39,92**	**9**	**3,30**	**20**	**7,33**	**28**	**10,26**	**107**	**39,19**	**1**	**837**	**3,07**

Tabla IX.4.2.3.1. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las nuevas categorías/niveles de comprensión matemática relativas al concepto de integral definida y cálculo mental de los ciclos de consolidación (Curso 2006-2007).

CATEGORÍAS	*FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (CICLO V)*												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\bar{x}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
DSIn-10	11	57,89	0	0	2	10,53	0	0	6	31,58	1	47	2,43
DSSn-10	12	63,16	0	0	2	10,53	0	0	5	26,32	1	43	2,26
ASI20	11	57,89	0	0	2	10,53	3	15,79	3	15,79	1	44	2,32
ASS20	10	52,63	0	0	4	21,05	1	5,26	4	21,05	1	46	2,42
ASIn	9	47,37	1	5,26	2	10,53	0	0	7	36,84	1	52	2,74
ASSn	9	47,37	2	10,53	1	5,26	1	5,26	6	31,58	1	50	2,63
ACID	8	42,11	0	0	0	0	0	0	11	57,89	5	63	3,32
ATCFI	11	57,89	2	10,53	0	0	4	21,05	2	10,53	1	41	2,16
IGTVMD	4	21,05	1	5,26	0	0	0	0	14	73,68	5	76	4
TFCIS	4	21,05	0	0	0	0	0	0	15	78,95	5	79	4,16
TFCII	5	26,32	0	0	0	0	2	10,53	12	63,16	5	73	3,84
TFCISI	3	15,79	0	0	0	0	3	15,79	13	68,42	5	80	4,21
CP	8	42,11	4	21,05	4	21,05	1	5,26	2	10,53	1	42	2,21
TOTAL	**105**	**42,51**	**10**	**4,05**	**17**	**6,88**	**15**	**6,07**	**100**	**40,49**	**1**	**736**	**2,98**

Tabla IX.4.2.3.2. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las nuevas categorías/niveles de comprensión matemática relativas al concepto de integral definida y cálculo mental de los ciclos de consolidación (Curso 2007-2008).

IX.4.3. REFLEXIONES DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS DE LOS CICLOS DE CONSOLIDACIÓN

Es obvio que las reflexiones de la acción de los dos ciclos de consolidación, redactadas en este capítulo, han de completarse con nuevas reflexiones o conclusiones emanadas del estudio de las categorías de comprensión matemática de los ciclos IV y V. He aquí las más importantes, surgidas del análisis de los cuadernillos cumplimentados por los estudiantes y, derivadas del estudio de las cuarenta categorías de comprensión matemática:

a) Los alumnos no encuentran dificultad en la determinación geométrica de la superficie (categoría DGA) comprendida entre la gráfica de una función positiva, definida en un intervalo compacto y el eje de abscisas, asimismo, más de las cuatro quintas partes de los estudiantes han comprendido gráficamente el concepto de suma inferior y suma superior de Darboux (DGSI y DGSS). Podemos afirmar que la interpretación geométrica del área y de las sumas de Darboux (inferior y superior) no es complicada para los alumnos. Próximo al 90% son los estudiantes que expresan correctamente[93] las sumas inferiores y superiores (ESIS).

b) Alrededor de la tercera parte de los alumnos (38,10% y 31,58%)[94] son capaces de comprender y expresar correctamente la relación existente entre las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a dos particiones (RSISR) siendo una más fina que la otra.

c) Si analizamos conjuntamente los dos ciclos, sólo el 32,5% de los alumnos han explicado con cierta coherencia los conceptos de integral inferior y superior de Darboux (EID). Pensamos, una vez más, que los estudiantes tienen grandes dificultades para expresar por escrito su propia comprensión de estos conceptos matemáticos.

d) La representación de la función de Dirichlet[95] (DR) causa graves problemas a los alumnos pues, tal y como se comentó anteriormente,

[93] Consideramos que un alumno "se ha expresado correctamente" si en la correspondiente categoría ha sido evaluado con nivel 4 ó 5.

[94] De ahora en adelante, considérese el primer porcentaje el de los alumnos del grupo 2º D del curso 2006-2007 (ciclo IV) y el segundo el de los alumnos del grupo 2º E del curso 2007-2008 (ciclo V).

[95] $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional\ en\ [0,4] \\ 2 & si\ x\ es\ irracional\ en\ [0,4] \end{cases}$

muchos de ellos no reconocen que entre dos números racionales existe otro irracional y viceversa. Además, al representar la función objeto de estudio señalan la superficie rectangular de vértices A(0,1), B(4,1), C(0,2) y D(4,2). Representan correctamente tal función seis alumnos de veintiuno, es decir, el 28,57% (ciclo IV) y cinco alumnos de diecinueve, es decir, el 26,32% (ciclo V).

e) La obtención de los mínimos y máximos en cuatro subintervalos (DMIN4 y DMAX4) no es difícil para poco más de la mitad de los alumnos, sin embargo, más del 40% de los mismos dan respuestas incorrectas o no contestan. Las mismas tendencias muestran los alumnos para las sumas inferiores y superiores de la función de Dirichlet (DSI4 y DSS4), considerando la partición anterior.

f) Al generalizar el número de nodos del intervalo [0,4] a “n+1”, para el curso 2006-2007, podemos considerar que alrededor de la tercera parte de los estudiantes calculan correctamente las sumas inferiores y las superiores y más del 60% no saben calcular dichas sumas[96]. Si en lugar de generalizar los nodos, tomamos “once”, los alumnos del curso 2007-2008 no mejoran sus respuestas y los porcentajes del grupo 2º E[97] son análogos a los de 2º D.

g) Siguiendo la estela marcada anteriormente, las categorías DIINF y DISUP dan resultados prácticamente iguales a los del punto anterior y pocos estudiantes (42,86% y 36,84%) afirman que la función de Dirichlet no es integrable, DNI. El 14,28% de los alumnos de 2º D debe matizar sustancialmente su respuesta puesto que la dan demasiado ambigua.

h) Podemos concluir que la generalización de las sumas inferiores y superiores de Darboux, tomando “n+1” u “once” nodos de [0,4], arroja resultados similares y, en consecuencia, pensamos que un número elevado de nodos de dicho intervalo no facilita la comprensión conceptual de la no integrabilidad de una función de Dirichlet. Por tanto, con el objetivo de que los estudiantes mejoren su propia comprensión del concepto de función integrable, es aconsejable no tomar “n” subintervalos de [0,4], basta un pequeño número de ellos.

[96] Véanse las categorías DSIn-10 y DSSn-10 de la tabla IX.4.2.3.1 de 2º D.

[97] Véanse las categorías DSIn-10 y DSSn-10 de la tabla IX.4.2.3.2 de 2º E.

i) Determinar, gráficamente, el área limitada por la función afín *ƒ(x)=x,* el eje de abscisas y las rectas *x=0* y *x=1* (categoría AR) no supone ninguna dificultad al 87,5% de todos los alumnos (ciclos IV y V). Sin embargo, calcular los mínimos y máximos absolutos de la función afín asociados a la partición P_4={0;0'25;0'5;0'75;1} (AMIN4 y AMAX4) y obtener las correspondientes sumas inferiores y superiores (ASI4 y ASS4) arroja una media próxima al 70% de aciertos y el 27,5% de fracasos si valoramos conjuntamente las cuatro categorías de los dos grupos pertenecientes a los ciclos de consolidación.

j) Al aumentar el número de nodos a veintiuno observamos que las dificultades de los alumnos, más que conceptuales son operativas, ya que se comprueba que pocos, menos de la quinta parte, alcanzan el máximo nivel[98]. Para un número indeterminado "n" subintervalos las respuestas que alcanzan el nivel 5 (ASIn y ASSn) ascienden a la tercera parte. Concluimos que en los dos niveles más altos de las cuatro categorías de los dos ciclos de consolidación se obtienen resultados análogos[99], eso sí, la imprecisión se considera mayor para ASI20 y ASS20 que para ASIn y ASSn puesto que los porcentajes en los niveles 2, 3 y 4 en las dos primeras categorías son superiores a los de ASIn y ASSn en ambos grupos.

k) Determinar la integral inferior y superior de la función afín en el intervalo [0,1], AIINF y AISUP, es difícil para los alumnos, puesto que a poco más de la cuarta parte se les puede validar su respuesta. La justificación "rigurosa" de la integrabilidad de la función afín (AI) la establecen el 20% de los estudiantes.

l) El cálculo de áreas mediante fórmulas elementales[100], ACAFE, lo realizan, aproximadamente, la cuarta parte de los alumnos. Alrededor del 60% de los estudiantes calculan el área triangular por medio de la integral definida (ACID), es decir, aplicando la regla de Barrow. Queda comprobado que el 30% de los estudiantes de los dos ciclos de consolidación justifican correctamente el área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables, ATCFI.

[98] Véanse las categorías ASI20 y ASS20 en las tablas IX.4.2.3.1 y IX.4.2.3.2.

[99] Los porcentajes medios de los niveles 4 y 5 de las categorías ASI20, ASS20, ASIn y ASSn de los ciclos IV y V se sitúan entre el 33,33% y el 36,84%, salvo para ASS20 (ciclo V) que es el 26,31%.

[100] Área del triángulo.

m) Cuatro de cada cinco alumnos determinan gráficamente las sumas de Riemann (DGSR), alrededor del 30% de los estudiantes de los ciclos IV y V realizan correctamente la representación gráfica de la función integral[101] (RFIAR) y la interpretación gráfica de la aditividad de la integral (IGAI) la realizan, aproximadamente, el 70%.

n) La interpretación geométrica del teorema del valor medio de la integral, IGTVMI, junto con su expresión analítica, obtiene un porcentaje muy bajo de respuestas correctas (7,5%) que contrasta enormemente con los resultados de los ciclos anteriores; por tanto, deberemos estar atentos, a las respuestas de los estudiantes en esta categoría, en el siguiente ciclo de la investigación.

o) Los teoremas del valor medio del cálculo diferencial y fundamental del cálculo fueron explicados gráficamente y con todo lujo de detalles en clase, incluso, para asimilar mejor el segundo se tomaron cinco nodos; ello redunda en los porcentajes de aciertos[102] que tienen los estudiantes superando, al menos, el 80% (ciclo IV) y 73% (ciclo V) según consta en las categorías IGTVMD, TFCIS, TFCII y TFCISI. Concluimos que la mejor comprensión de los conceptos, por parte de los alumnos, queda favorecida por la interpretación geométrica junto con una simplificación del excesivo rigor matemático[103].

p) La prueba escrita[104] del cálculo de primitivas elementales, CP, sólo la superan el 42,5% de los alumnos de los ciclos de consolidación. El profesor investigador considera que los ejercicios propuestos por escrito, comunes a los estudiantes de ambos ciclos, no son los más idóneos, por tanto, deberá replantearse el cálculo de primitivas.

q) El uso específico del programa de cálculo simbólico *DERIVE*, en el contexto de las nuevas tecnologías, en la enseñanza y aprendizaje de la integral definida en los ciclos de consolidación se estudiará en el capítulo XI de la presente memoria.

---

[101] Función integral: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

[102] Consideramos aciertos si al ser evaluada la correspondiente categoría ha conseguido en nivel igual o superior a 4.

[103] Nos referimos, entre otras cosas, a la toma de un número reducido de nodos.

[104] Excepcionalmente, consideramos que un estudiante ha superado la prueba si al ser evaluada la categoría CP ha obtenido un nivel igual o superior a 3.

IX.4.4. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA

El modelo teórico que sustenta esta investigación es el de los *actos de comprensión de Sierpinska*, así pues, en el capítulo III[105] hemos establecido los actos de comprensión y los obstáculos y/o dificultades[106] asociados a la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida.

Realizada la planificación y la acción de los ciclos de consolidación (IV y V, cursos: 2006-2007 y 2007-2008); analizados los cuadernillos por medio de los cuales hemos evaluado el grado de adquisición, por los estudiantes, de los conceptos matemáticos que conforman la integral definida y, además, redactadas las reflexiones derivadas de la acción y del análisis de los cuadernillos teórico-prácticos de los alumnos. Procede, en estos momentos, identificar los actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y los obstáculos y/o dificultades que se derivan de la acción y, sobre todo, del:

a) Aprendizaje de la integral definida.
b) Cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental, realizado en las sesiones de la acción y en las pruebas escritas.
c) Uso del programa de cálculo simbólico *DERIVE* en la sesión práctica realizada en el aula de informática[107].

En la memoria de estos ciclos de consolidación determinamos los actos de comprensión y los obstáculos y/o dificultades, según se recoge en la tabla III.1.5.1[108], relativos a las once categorías de comprensión matemática comunes de los ciclos IV y V con los ciclos de exploración (I) y confirmación (II y III)[109]; las dieciséis categorías comunes de los ciclos de confirmación y consolidación[110] y las doce nuevas categorías de comprensión matemática de los ciclos de consolidación analizadas anteriormente[111].

[105] Véase el epígrafe *III.1.5. El Modelo de Comprensión de Sierpinska.*

[106] Consideramos que, en nuestra investigación, los estudiantes no siempre encuentran obstáculos en la adquisición del conocimiento matemático, en ocasiones, tienen dificultades.

[107] En el capítulo XI, en el cual redactamos nuestra investigación de la enseñanza-aprendizaje de la integral con las nuevas tecnologías, estudiaremos los actos de comprensión en el contexto de nuestra práctica informática con *DERIVE.*

[108] *Tabla III.1.5.1. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al aprendizaje de la integral definida* del capítulo III.

[109] Véanse las *Tablas IX.4.2.1.1 y IX.4.2.1.2.*

[110] Véanse las *Tablas IX.4.2.2.1 y IX.4.2.2.2.*

[111] Véanse las *Tablas IX.4.2.3.1 y IX.4.2.3.2.*

Posteriormente se determinarán los actos de comprensión correspondientes a la categoría *cálculo de primitivas (CP)*[112].

Nuevamente, procediendo del mismo modo que en los tres ciclos anteriores, los actos de comprensión de Sierpinska y los obstáculos y/o dificultades observados en los ciclos IV y V los reconocemos por sus códigos junto con los códigos de las correspondientes categorías de comprensión matemática (ambos códigos entre paréntesis)[113] y, además, son comentados a nivel general[114]. He aquí el análisis de las producciones de los estudiantes bachilleres de ciencias sociales de los ciclos de consolidación según el marco o modelo teórico de Sierpinska:

Corroboramos los resultados obtenidos en los tres ciclos anteriores y, de nuevo, confirmamos que los estudiantes de los ciclos IV y V identifican correctamente una superficie delimitada por la gráfica de una función continua y positiva $f(x)$, el eje *OX* y las rectas $x=a$ y $x=b$ (CI_{11}; DGA).

Reconocer e identificar una partición de tres nodos, $P=\{a=x_0 < x_1 < x_2=b\}$, es fácil para el 90% de los alumnos; además, también identifican y discriminan gráficamente los extremos absolutos de $f(x)$ en los subintervalos $[a,x_1]$ y $[x_1,b]$ (CI_{14}) y, de esto se deriva, la correcta comprensión de las sumas inferior, $s(f,P)$, y superior, $S(f,P)$, de Darboux (CI_{12} y CI_{16}; DGSI y DGSS).

La tercera parte de los estudiantes de estos dos ciclos no tienen mayores dificultades para identificar y discriminar dos particiones, siendo $P \subset P'$, y, además, establecen la correspondiente relación entre las respectivas sumas inferiores y superiores asociadas a ambas particiones (CI_{16} y CI_{17}; RSISR)[115].

Más de las tres cuartas partes de los alumnos de 2º D y 2º E de los ciclos de consolidación no tienen dificultades para generalizar, completando parte de

[112] Entiéndase *cálculo mental de primitivas elementales.*

[113] Si, por ejemplo, se escribe (CI_{11}; DGA) significa que aparece el acto de compresión CI_{11}: *Identificación de una superficie delimitada por la gráfica de una función continua y positiva, el eje OX y las rectas x=a y x=b* y, además, ello queda corroborado por la categoría de comprensión matemática DGA: *Determinación gráfica del área*. Así pues, cuando en el mismo paréntesis incluyamos códigos de actos u obstáculos y códigos de categorías, la sintaxis será:
(ACT-OBS, ACT-OBS,... y ACT-OBS; CAT, CAT,... y CAT).

[114] Consideramos que no debemos determinar los actos de comprensión según Sierpinska a nivel individual puesto que la presente investigación no contempla ningún estudio de casos.

[115] Constatamos que, según los datos obrantes en esta investigación, los porcentajes de comprensión de estos actos en los ciclos de consolidación son algo superiores a los del ciclo de exploración y próximos a la media de los ciclos de confirmación (aunque, como quedó detallado en el capítulo anterior, los resultados de los ciclos II y III en la categoría RSISR son muy dispares).

las expresiones, las sumas inferior y superior de Darboux para seis nodos del intervalo [a,b] (CI_{13}, CI_{15} y CI_{17}; ESIS).

La cuarta parte de los alumnos de los ciclos IV y V consiguen identificar y discriminar, con sus propias palabras, las integrales inferior y superior de Darboux de una función positiva en un intervalo compacto (CI_{19} y CI_{20}; EID); sin embargo, algunos estudiantes están convencidos que cada una de esas integrales, en lugar de coincidir con un número, se aproximan a él (OI_{19a}, OI_{19b}, OI_{20a} y OI_{20b}). Por tanto, el resultado obtenido en los ciclos anteriores por el cual *"algunos alumnos piensan que la integral inferior no se alcanza, más bien, se aproxima a un valor (ídem integral superior)"*, lejos de considerarlo una conjetura, en estos ciclos de consolidación podemos confirmarlo como un hecho verídico.

Identificar y generalizar gráficamente las sumas de Riemann es fácil para el 80% de los estudiantes (CI_{23} y CI_{24}; DGSR) y, según los datos de los cuales disponemos, también un porcentaje elevado de los mismos discriminan las sumas inferior y superior de Darboux y las de Riemann sintetizándolas en las desigualdades $s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P)$. Afirmamos que todos los alumnos de bachillerato de ciencias sociales consideran iguales la integral de Darboux y la integral de Riemann, independientemente de sus respectivas definiciones (CI_{26}), y ambas son reconocidas como "la integral".

De nuevo, la síntesis del concepto de función integral o integral indefinida bajo la expresión $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es muy difícil para, aproximadamente, las dos terceras partes de los estudiantes de los grupos 2º D y 2º E y, una vez más, percibimos que un obstáculo importante está en considerar el extremo superior de la integral igual a la variable de integración (OI_{30} y OI_{34}; RFIAR).

Los estudiantes no se plantean recurrir a sus conocimientos adquiridos en la enseñanza secundaria obligatoria, así pues, menos de la tercera parte de los mismos utilizan la fórmula del área del triángulo (CI_5; ACAFE). Las aditividad de la integral se comprende mejor, gráficamente y analíticamente, que el teorema del valor medio de la integral definida (IGAI y IGTVMI).

Acabamos de analizar las once categorías de comprensión matemática comunes a los ciclos de exploración (I), confirmación (II y III) y consolidación (IV y V). A partir de ahora estudiamos, según los *actos de comprensión de Sierpinska*, el resto de las categorías de los ciclos de consolidación, algunas de las cuales son comunes a las de los ciclos de confirmación.

La ausencia de discriminación entre los números racionales e irracionales y el desconocimiento de la tipología numérica de los números reales por la mayoría de los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales, 70%, supone un obstáculo importante para la representación de la función de Dirichlet[116] (OI_{21}; DR). Sin embargo, identificar y discriminar los extremos absolutos de dicha función en cuatro subintervalos de [0,4] es fácil para seis de cada diez estudiantes (CI_{14} y CI_{15}; DMIN4 y DMAX4). La mitad de los alumnos de los ciclos de consolidación identifican y discriminan las sumas inferiores y superiores de la función de Dirichlet en el intervalo [0,4] asociadas a una partición de cinco nodos (CI_{16}; DSI4 y DSS4); tal proporción disminuye, a la tercera parte, al generalizar dichas sumas aumentando el número de nodos de la partición (OI_{17}; DSIn-10 y DSSn-10)[117] y, además, siendo éstos indeterminados[118].

Constatamos que uno de cada tres estudiantes identifican y discriminan las integrales superior e inferior de Darboux de la función de Dirichlet en [0,4] y, consecuentemente, sintetizan la no integrabilidad de dicha función (CI_{19} y CI_{22}; DIINF, DISUP y DNI).

La función afín *ƒ(x)=x* es representada por los alumnos que se lo proponen y, al menos siete de cada diez estudiantes, identifican y discriminan los extremos absolutos y las sumas de Darboux de *ƒ(x)* asociados a la partición $P_4 = \{ i/4 \}_{i=0}^{4}$ (CI_{11}, CI_{14} y CI_{16}; AR, AMIN4, AMAX4, ASI4 y ASS4).

Los resultados de las nuevas categorías de comprensión matemática, relativas a la función afín, establecidas en los dos ciclos de consolidación nos permiten confirmar la dificultad que tienen dos de cada tres estudiantes para establecer la generalización de las respectivas sumas inferiores y superiores (CI_{17}; ASI20, ASS20, ASIn y ASSn)[119].

El 25% de los estudiantes identifican y discriminan las integrales inferior y superior de Darboux de la función *ƒ(x)=x* en [0,1] y, además, generalizan la igualdad de ambas integrales sintetizándolo en la integrabilidad de dicha

---

[116] La función de Dirichlet de la presente investigación es: $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional\ en\ [0,4] \\ 2 & si\ x\ es\ irracional\ en\ [0,4] \end{cases}$

[117] Las categorías DSIn-10 y DSSn-10 son específicas de los ciclos de consolidación.

[118] Los estudiantes no aceptan fácilmente cualquier partición indeterminada de "once" nodos y toman la partición P_{10}={4n/10}; n=0,...,10.

[119] Varios alumnos, al calcular ASI20 y ASS20, cometen errores aritmético-algebraicos al operar con fracciones, siendo P_{20}={n/20}; n=0,...,20.

función en el intervalo mencionado (CI_{19} y CI_{20}; AIINF, AISUP y AI). Se vuelve a constatar, una vez más, que varios estudiantes entienden que $\underline{\int_0^1 x\,dx} \cong 0'5$, ídem integral superior (OI_{20a}).

Por último, generalizar y sintetizar la integrabilidad de la función afín mediante el teorema fundamental del cálculo (CI_{29} y CI_{31}; ACID) es más fácil para los alumnos que realizarlo mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables (ATCFI). Estos datos nos permiten confirmar que *"los alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales anteponen la aplicación de teorema fundamental del cálculo (regla de Barrow) a la comprensión conceptual del teorema de caracterización óptima de funciones integrables".*

Confirmamos que las visualizaciones e interpretaciones gráficas del teorema del valor medio del cálculo diferencial y del teorema fundamental del cálculo, efectuadas mediante las demostraciones-justificaciones de los mismos, han permitido a ocho de cada diez estudiantes sintetizarlos sin excesiva dificultad (CI_{27}, CI_{28}, CI_{29} y CI_{36}; IGTVMD, TFCIS, TFCII y TFCISI).

Sabemos que el *cálculo mental de primitivas (CP)* tiene un tratamiento específico y, por ello, hemos establecido sus propios actos de comprensión y obstáculos y/o dificultades según el modelo de Sierpinska del capítulo III[120]. Sin embargo, consideramos que los actos de comprensión del cálculo mental de primitivas elementales realizado en los ciclos de confirmación quedaron suficientemente determinados en el apartado VIII.4.4 del capítulo anterior; además, la propuesta de ejercicios escritos realizada por el profesor investigador para los ciclos de consolidación la consideramos insuficiente; por tanto, en este capítulo no establecemos los correspondientes actos de comprensión del cálculo mental ya que pensamos que son suficientes las reflexiones redactadas en el epígrafe *IX.4.1.13. CP: Cálculo de primitivas* del presente capítulo. En el ciclo de cierre serán determinados con todo rigor los actos de comprensión del cálculo mental de primitivas elementales.

[120] Véase la *Tabla III.1.5.2. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental.*

IX.5. REFLEXIONES DE LOS CICLOS DE CONSOLIDACIÓN

Consideramos que las reflexiones de la acción (epígrafe IX.3.2) y las reflexiones derivadas del análisis de los cuadernillos teórico-prácticos del área y la integral cumplimentados por los estudiantes (IX.4.3), además, del análisis de la comprensión de los alumnos de los conceptos que configuran el de integral definida según los actos de Sierpinska (IX.4.4) pueden formar parte del presente apartado y, por tanto, pensamos que no es necesario volver a escribir la mayoría de las reflexiones y apreciaciones descritas anteriormente.

La metodología cualitativa de investigación acción y su proceso en espiral[121], nos permite conectar con las reflexiones del ciclo de exploración (VII.5) y las de los ciclos de confirmación (VIII.5) y, asimismo, consideramos que en los actuales ciclos de consolidación podemos transcribir la mayoría de ellas. Así pues, creemos innecesario extendernos mucho más en las reflexiones de estos dos ciclos.

Consideramos que la investigación realizada hasta el momento arroja suficiente información y pensamos que, posiblemente, hayamos llegado a la saturación; no obstante, para confirmarlo establecemos el ciclo final (VI) con las mismas categorías de comprensión matemática de los ciclos actuales.

Así pues, todas y cada una de las reflexiones del presente capítulo, junto con las de los dos anteriores, han de permitirnos acceder al siguiente ciclo de cierre[122] en el cual analizaremos la enseñanza del profesor-investigador y el aprendizaje de los estudiantes de segundo de bachillerato de ciencias sociales de la integral definida, el cálculo mental de primitivas elementales y el uso del programa de cálculo simbólico *DERIVE.*

[121] Véase la *Figura II.2.3* en el *capítulo II: Marco metodológico cualitativo.*

[122] La memoria del ciclo de cierre (ciclo VI, curso 2008-2009) puede encontrarse en los capítulos X y XI de la presente tesis doctoral.

CAPÍTULO X: CICLO DE CIERRE (VI), CURSO 2008-2009 467

X.1. INTRODUCCIÓN..467

X.2. PLANIFICACIÓN 471

X.3. ACCIÓN 474

X.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN 475

X.3.1.1. Cálculo mental 476

X.3.1.2. Cálculo estimativo y cálculo de áreas..479

X.3.1.3. Otras aplicaciones de la integral 482

X.3.1.4. Problemas propuestos en las pruebas de acceso a las Universidades de Castilla y León 487

X.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN..490

X.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS 493

X.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA 493

X.4.1.1. DGA: Determinación gráfica del área 494

X.4.1.2. DGSI: Determinación gráfica de las sumas inferiores.................495

X.4.1.3. DGSS: Determinación gráfica de las sumas superiores...............496

X.4.1.4. RSISR: Relación entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, la segunda un refinamiento de la primera........................497

X.4.1.5. ESIS: Expresión analítica de las sumas inferior y superior asociadas a una partición de 6 nodos 498

X.4.1.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux 500

X.4.1.7. DR: Representación de la función de Dirichlet 502

X.4.1.8. DMIN4: Mínimos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos 503

X.4.1.9. DMAX4: Máximos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos 504

X.4.1.10. DSI4: Representa y calcula la suma inferior según DMIN4.......504

X.4.1.11. DSS4: Representa y calcula la suma superior según DMAX4...505

X.4.1.12. DSI8: Dirichlet, suma inferior en 8 subintervalos 507

X.4.1.13. DSS8: Dirichlet, suma superior en 8 subintervalos 508

X.4.1.14. DIINF: Dirichlet integral inferior 509

X.4.1.15. DISUP: Dirichlet integral superior 510

X.4.1.16. DNI: Dirichlet no integrable 511

X.4.1.17. AR: Representar el área determinada por la función afín...........512

X.4.1.18. AMIN4: Mínimos de la función afín para una partición de 4 subintervalos 513

X.4.1.19. AMAX4: Máximos de la función afín para una partición de 4 subintervalos 513

X.4.1.20. ASI4: Representa y calcula la suma inferior según AMIN4.......514

X.4.1.21. ASS4: Representa y calcula la suma superior según AMAX4...515

X.4.1.22. ASI8: Afín, suma inferior en 8 subintervalos 517

X.4.1.23. ASS8: Afín, suma superior en 8 subintervalos 518

X.4.1.24. ASIn: Afín, suma inferior en "n" subintervalos 519
X.4.1.25. ASSn: Afín, suma superior en "n" subintervalos 520
X.4.1.26. AIINF: Afín integral inferior 520
X.4.1.27. AISUP: Afín integral superior 521
X.4.1.28. AI: Afín integrable 522
X.4.1.29. ACAFE: Cálculo del área mediante fórmulas elementales 523
X.4.1.30. ACID: Cálculo del área por medio de la integral definida 523
X.4.1.31. ATCFI: Cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables 524
X.4.1.32. DGSR: Determinación gráfica de las sumas de Riemann 525
X.4.1.33. IGTVMD: Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial 527
X.4.1.34. TFCIS: Teorema fundamental cálculo integral (sumas) 528
X.4.1.35. TFCII: Teorema fundamental cálculo integral (incrementos) 529
X.4.1.36. TFCSI: Teorema fundamental cálculo integral (sumas e incrementos) 530
X.4.1.37. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida 531
X.4.1.38. IGAI: Interpretación gráfica de la aditividad de la integral 532
X.4.1.39. IGTVMI: Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral 533
X.4.1.40. CP: Cálculo de primitivas 535

X.4.2. TABLA RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DEL CICLO DE CIERRE 540
X.4.3. REFLEXIONES DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS DEL CICLO DE CIERRE 543
X.4.4. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA 546

X.5. INFORME Y ENCUESTAS 552
X.5.1. INFORME DEL OBSERVADOR EXTERNO 552
X.5.2. ENCUESTA A LOS ALUMNOS 553
X.5.2.1. Cálculo mental 555
X.5.2.2. Práctica con lápiz y papel (cuadernillo de la integral) 557
X.5.2.3. Unidad didáctica: Área e integral definida 559

X.6 REFLEXIONES DEL CICLO DE CIERRE 561

CAPÍTULO X: CICLO DE CIERRE (VI), CURSO 2008-2009

X.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo redactamos la memoria de la investigación experimental, del sexto y último ciclo, realizada con diecinueve estudiantes del grupo 2º D de segundo de bachillerato de ciencias sociales del instituto de educación secundaria "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos.

El profesor investigador, en septiembre de 2008, llevaba un lustro siendo miembro del departamento de matemáticas del instituto y en todos los cursos había impartido la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, además, había realizado cinco ciclos de la investigación[1] y se proponía finalizar su actividad investigadora partiendo desde las reflexiones de los ciclos de exploración (I), confirmación (II y III) y consolidación (IV y V) y basándose, sobre todo, en las reflexiones de los dos últimos ciclos. Recordemos, de nuevo, algunas de ellas y redactemos las actuaciones que hemos seguido al respecto en el ciclo de cierre[2]:

1. *"Debe combinarse la exposición teórica de la integral definida mediante los medios tecnológicos[3] y la técnica tradicional de tiza y pizarra"*. En este último ciclo hemos seguido exponiendo la integral utilizando la herramienta clásica de tiza-pizarra con la más moderna del ordenador-proyector, pensamos que ambas son complementarias puesto que hace que los alumnos mantengan una atención mayor que si se utilizara exclusivamente una de ellas.

[1] Ciclo de exploración (I, curso 2003-04), ciclos de confirmación (II y III, cursos 2004-05 y 2005-06) y ciclos de consolidación (IV y V, cursos 2006-07 y 2007-08). Véanse los capítulos VII, VIII y IX.

[2] Las reflexiones de los ciclos anteriores irán entrecomilladas y en cursiva.

[3] Ordenador, cañón proyector y pantalla.

2. *"Es aconsejable intercalar pequeños ejercicios prácticos como apoyo a los conceptos teóricos para que los estudiantes mantengan el interés por su propio aprendizaje".* Efectivamente, los alumnos de ciencias sociales no están interesados por el estudio de las diferentes teorías de la integral definida[4] y sólo pretenden hacer ejercicios sencillos cuya resolución sea inmediata; sin embargo, la enseñanza de las matemáticas no puede limitarse a meras aplicaciones de las mismas. Por tanto, el profesor investigador (PI) en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral, durante el ciclo de cierre, ha combinado la teoría con la práctica de tal forma que los alumnos perciban las matemáticas como una ciencia en la cual teoría y práctica no son excluyentes, más bien complementarias.
3. *"El cálculo mental de primitivas (...) ha sido practicado al comienzo de cada una de las clases como mínimo durante ocho-diez minutos".* Este criterio también se ha seguido en cada clase del ciclo VI, sin embargo, la experiencia de los cinco ciclos anteriores exige que los alumnos practiquen simultáneamente la derivación-integración con el fin de adquirir más práctica en el cálculo de primitivas elementales. Desde este momento descartamos los métodos clásicos de integración[5], sólo se practicará el cálculo de integrales inmediatas.
4. *"El rendimiento de los alumnos es mayor cuando la enseñanza se hace más personalizada, por tanto, es aconsejable que haya una buena interacción profesor-alumno".* Esta reflexión ha quedado constatada a lo largo de los años y los resultados los consideramos muy positivos, así pues, no sólo seguiremos poniéndola en práctica en el ciclo de cierre, continuaremos con ella a lo largo de nuestra actividad docente.
5. *"A funciones distintas, nombres distintos (...) a superficies distintas, colores distintos".* El ahorro en la escritura de una función mediante la letra "*y*" produce confusión a muchos estudiantes, en consecuencia, nosotros designamos a las funciones por $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etc. Asimismo, consideramos muy eficaz utilizar tizas de diferentes colores

[4] En el contexto de nuestra investigación realizada con estudiantes de bachillerato, sólo podemos referirnos a dos teorías: Integral de Darboux e integral de Riemann.

[5] Cambio de variable, por partes e integración de funciones racionales según las distintas raíces del denominador.

para designar superficies distintas, es más, los alumnos imitan al profesor investigador y, siendo conscientes de la importancia de las visualizaciones, ellos también hacen uso de sus lápices de colores.

6. *“Dedicar más tiempo a la demostración del teorema del valor medio del cálculo diferencial y del teorema fundamental del cálculo integral”.* La demostración analítica de ambos teoremas es de muy difícil comprensión para los alumnos de ciencias sociales, en consecuencia, el equipo investigador ha considerado oportuno combinar los registros gráficos y analítico-algebraicos para que los estudiantes alcancen a comprender ambos teoremas. El PI ha puesto en práctica, de nuevo, las orientaciones del director de la tesis explicando detalladamente el teorema fundamental del cálculo integral, siendo muy riguroso en las representaciones gráficas y estableciendo las distintas relaciones entre áreas, función primitiva, suma de Riemann y función integrable.
7. *“El profesor investigador ha considerado oportuno ‘estimar’ el área de la superficie y estudiar su concordancia con el valor exacto del área”.* En los ciclos de consolidación quedó constatada la importancia de estimar el área de una determinada superficie, incluso, aunque se haya obtenido el valor exacto de la misma; nosotros seguimos considerándolo oportuno y como tal se practicará en el ciclo de cierre.
8. *“Calcular integrales definidas o superficies en las cuales intervienen funciones definidas a trozos es dificultoso para los alumnos”.* Pensamos que debemos hacer más ejercicios en los cuales intervengan este tipo de funciones y donde las representaciones gráficas adquieran un carácter prioritario con el objetivo de que complementen la resolución analítico-algebraico-numérica.
9. *“En las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León hay muy pocos ejercicios en los cuales, para su resolución, deban aplicarse conocimientos del cálculo integral”.* Dándose esta circunstancia dedicaremos en este último ciclo más tiempo, que en cualquiera de los ciclos anteriores, al *cálculo mental* mediante el cálculo de derivadas e integrales inmediatas, al *cálculo estimativo* en la determinación de áreas y a las *nuevas tecnologías* como refuerzo y apoyo al estudio del cálculo integral[6].

[6] El estudio de la integral mediante las nuevas tecnologías se redactará en el capítulo XI.

10. *“La representación de la función de Dirichlet*[7] *causa graves problemas a los alumnos (...) y para ganar en la comprensión del concepto de integral es aconsejable no tomar ‘n’ subintervalos de [0,4], basta tomar un pequeño número de ellos”.* Las investigaciones derivadas de los cinco ciclos anteriores confirman que los estudiantes para comprender los conceptos matemáticos deben desprenderse de largas expresiones matemáticas pues una atención excesiva a éstas hace que no profundicen suficientemente en los conceptos, así pues, consideramos desaconsejable tomar más de ocho subintervalos en las cuestiones del cuadernillo referentes a la función de Dirichlet.

11. *“La función afín $f(x)=x$, (...) Al aumentar el número de nodos a 21, del intervalo [0,1], observamos que las dificultades de los alumnos más que conceptuales son operativas ya que consideramos que pocos alcanzan el máximo nivel”*[8]. Razonando como en el punto anterior, no consideraremos más de ocho subintervalos de [0,1] y de ahí pasaremos a un número indeterminado *“n”* subintervalos.

12. *“Los teoremas del valor medio del cálculo diferencial y fundamental del cálculo integral (...) categorías IGTVMD, TFCIS, TFCII y TFCISI tienen un porcentaje elevado de aciertos”.* Por tanto, consideramos que debemos seguir actuando como en los ciclos de consolidación.

13. *“Algunos alumnos piensan que la integral inferior no se alcanza, más bien, se aproxima a un valor (ídem integral superior)”.* Consideramos que esta importante reflexión de los ciclos anteriores debe ser contrastada en el último ciclo y, para ello, estaremos muy atentos a las intervenciones de los estudiantes en clase, así como, al análisis de los cuadernillos y pruebas escritas de cada uno de los alumnos.

14. *“Sólo superan la prueba escrita del cálculo de primitivas*[9]*, CP, el 42,5% de los alumnos de los ciclos de consolidación”.* El profesor investigador considera que debe replantearse, más que la docencia y los ejercicios con respuestas orales de los alumnos realizados en clase, los ejercicios escritos propuestos a los estudiantes.

---

[7] $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional\ en\ [0,4] \\ 2 & si\ x\ es\ irracional\ en\ [0,4] \end{cases}$

[8] Véanse las categorías ASI20 y ASS20 en las tablas IX.4.2.3.1 y IX.4.2.3.2 del capítulo IX.

[9] Excepcionalmente, consideramos que un estudiante ha superado la prueba si al ser evaluada la categoría CP ha obtenido un nivel igual o superior a 3.

X.2. PLANIFICACIÓN

En este último ciclo de cierre, la planificación de la acción ha sido realizada con anterioridad al mes de diciembre de 2008 y se ha basado en las investigaciones realizadas en los ciclos de exploración (I), confirmación (II y III) y consolidación (IV y V) y el tiempo dedicado a la acción del ciclo VI podemos considerar que es el mismo que el de cada uno de los cuatro ciclos inmediatamente anteriores.

Un grupo de segundo de bachillerato de ciencias sociales, 2º D, del curso lectivo 2008-2009, nos ha servido para desarrollar esta parte de nuestra investigación-acción; dicho grupo lo componen diecinueve alumnos, tres de ellos repetidores y dos de éstos[10] formaron parte de la investigación realizada en el ciclo anterior. Según quedó establecido, a cada estudiante le hemos asignado un único código; además, hemos localizado la posición física que, generalmente, ocupa en el aula de clase del grupo, la cual tiene dos pasillos centrales y tres filas de pupitres pareados; así pues, la tabla adjunta muestra la distribución de los alumnos de 2º D del ciclo VI.

	P I Z A R R A S				
V E N T A N A S					
	AM, SH	*P A S I L L O*	RH, DT	*P A S I L L O*	
	DM, EP		DB, DD		GF, RS
	LB, SM		RB, RM		EG, MM
	VB		DA, AC		

Tabla X.2.1. Distribución, en clase, de los alumnos de 2º D, curso 2008-2009.

El horario en el cual se ha impartido matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II (MACS II) viene dado en la tabla X.2.2 en la que expresamos la hora de comienzo y finalización de cada periodo lectivo de 50 minutos.

	LUNES		***MARTES***		***MIÉRCOLES***		***JUEVES***		***VIERNES***	
2º D ***2008-2009***	**2º**	9:25 10:15	**5º**	12:40 13:30	**3º**	10:35 11:25	**--**	------- -------	**5º**	12:40 13:30

Tabla X.2.2. Periodos lectivos semanales de matemáticas del grupo 2º D (ciclo VI).

[10] El alumno GF y la alumna RH formaron parte de la investigación en el ciclo V (consolidación).

Desde el primer momento se planificó que al impartirse la exposición teórica de la integral definida debía tener el apoyo de representaciones gráficas que ayudaran a comprender a los estudiantes los diferentes conceptos que componen la integral de Darboux. No se ha considerado oportuno realizar una introducción histórica[11] del área y la integral definida y, sin embargo, consideramos prioritario demostrar el teorema fundamental del cálculo integral tal y como se hizo en los ciclos de consolidación.

El cálculo mental sigue teniendo un peso muy importante en las sesiones y, al menos, en cada una de ellas se dedicarán ocho minutos, además, en el cálculo de derivadas se potenciará el cálculo mental con el objetivo de mejorar el cálculo mental de primitivas elementales. El profesor investigador considera que no es suficiente, en algunos ejercicios, calcular el valor de un área, por tanto, deberá hacerse una estimación de la misma.

Si bien es cierto que no fue aconsejable impartir la integral al final del curso[12] y, por ello, el departamento de matemáticas del IES “Félix Rodríguez de la Fuente” de Burgos aprobó que la parte del programa de MACS II dedicada al análisis se impartiera, a partir de septiembre de 2004, el primer trimestre[13] del curso académico correspondiente; el profesor investigador ha encontrado el inconveniente de la escasa atención de algunos alumnos durante el mes de diciembre debido, entre otros factores, al puente de la Constitución e Inmaculada, la realización de los exámenes de la primera evaluación y la proximidad de las vacaciones de Navidad. El PI consciente de estas contrariedades ha optado por seguir impartiendo el análisis matemático sin proponer ninguna modificación porque si se hubiera explicado en el segundo trimestre del curso nos encontraríamos con los exámenes de la segunda evaluación y las vacaciones de Semana Santa. Finalmente, consideramos muy favorable el periodo establecido puesto que en el mes de enero los estudiantes están más relajados y pueden centrarse, casi exclusivamente, en realizar las prácticas de la integral con el uso de las nuevas tecnologías en el aula de informática, cumplimentar el cuadernillo teórico-práctico y, por último, pueden realizar, sin la presión de otros exámenes, la prueba escrita del cálculo de primitivas elementales evaluable como cálculo mental.

[11] El PI ha ofrecido, a los estudiantes que estuvieran interesados, un resumen de la introducción histórica de la integral, ninguno se ha interesado por él.

[12] En el ciclo de exploración la integral definida se impartió en mayo de 2004.

[13] Como es sabido la integral se ha impartido desde primeros de diciembre hasta, aproximadamente, el 20 de enero de cada uno de los ciclos de confirmación y consolidación.

La tabla X.2.3 contiene la planificación, matizada por la puesta en práctica, de la integral definida en el grupo 2º D del ciclo de cierre (curso 2008-2009).

SESIÓN	***TRABAJO PLANIFICADO-REALIZADO***	***2º D***
1	Cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental. Áreas del rectángulo y del círculo. Sumas inferiores y superiores de Darboux.	1-12-08, lunes
2	Cálculo mental: Derivadas e integrales inmediatas.	2-12-08, martes
3	Cálculo mental. Integral inferior y superior de Darboux. Integral de Darboux.	3-12-08, miércoles
4	Repaso del análisis matemático, salvo la integral.	5-12-08, viernes
5	Cálculo mental: Derivadas e integrales inmediatas.	9-12-08, martes
6	Cálculo mental. Integral de Darboux (repaso) e integral de Riemann.	10-12-08, miércoles
7	Teorema del valor medio del cálculo diferencial y teorema fundamental del cálculo integral.	12-12-08, viernes
8	Cálculo mental. Cálculo de áreas por medio de la regla de Barrow.	15-12-08, lunes
9	Cálculo mental. Cálculo de áreas. Cálculo estimativo.	16-12-08, martes
10	Cálculo mental y repaso de problemas de optimización aplicando las derivadas para el examen (derivadas, integrales inmediatas y optimización) del jueves 18 a las 16:15 horas.	17-12-08, miércoles
11	Explicación de las soluciones de los exámenes de los días 5 y 18.	19-12-08, viernes
12	Cálculo mental. Cálculo de áreas. Cálculo estimativo.	9-01-09, viernes
13	Cálculo mental. Aplicaciones de la integral definida. Cálculo estimativo.	12-01-09, lunes
14	Cálculo mental. Aplicaciones de la integral definida. Cálculo estimativo.	13-01-09, martes
15	Resolución de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León.	14-01-09, miércoles
16	Resolución de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León.	16-01-09, viernes
17	Prácticas con *DERIVE* en el aula de informática.	22-01-09, jueves
18	Primera prueba de evaluación a las 16:15 horas.	18-12-08, jueves
19	Segunda prueba de evaluación a las 16:15 horas.	29-01-09, jueves
20	Tercera prueba de evaluación a las 16:15 horas.	26-05-09, martes
21	Repaso de las Matemáticas Aplicadas CC. SS. II para las Pruebas de Acceso y exámenes de Septiembre.	1-12 junio 2009

Tabla X.2.3. Planificación del ciclo de cierre (ciclo VI, curso 2008-2009).

X.3. ACCIÓN

La fase de la acción del ciclo de cierre se ha desarrollado con un grupo de segundo de bachillerato de CC SS, 2º D (ciclo VI, curso 2008-2009) en el cual estaban matriculados diecinueve alumnos, tres repetidores y dos de éstos ya habían formado parte de la investigación del ciclo anterior.

Constatamos que en el ciclo de cierre son catorce las sesiones de la acción, impartidas en el aula de grupo, más la sesión de la utilización de las nuevas tecnologías, en el aula de informática, con el programa de *software* matemático *DERIVE.* El número total de clase, quince, coincide con el de sesiones de cada uno de los ciclos de confirmación y consolidación; la duración de cada una de las sesiones del aula de grupo es de 50 minutos y la del aula de informática es, aproximadamente, 2:30 horas.

El libro de texto propuesto a los estudiantes es el mismo que el de todos los ciclos anteriores, es decir, Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II de la editorial Anaya; el profesor investigador, para el ciclo VI, consideró oportuno resolver varios ejercicios de los manuales de Editex[14] que serán detallados en la descripción de la acción. Las sesiones decimoquinta y decimosexta se dedicaron, exclusivamente, a resolver problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León en los cuales, para su resolución, es necesario el cálculo integral.

Las sesiones segunda y quinta se dedicaron explícitamente al cálculo de derivadas y primitivas elementales puesto que en la segunda tenían inmediatamente después de la clase de matemáticas examen de historia y solamente había trece alumnos en clase, en la quinta sesión del día 9-12-08 los alumnos estaban apáticos por haber realizado previamente el examen de inglés, además, faltaban cinco. El PI consideró, al inicio de esas clases, que no era aconsejable explicar los conceptos teóricos de la integral de Darboux y, por tanto, las dos sesiones se dedicaron íntegramente al cálculo mental.

En el extremo opuesto nos encontramos con las sesiones 4, 7, 11, 15 y 16 en las cuales estuvo ausente el cálculo mental de primitivas elementales y los motivos de tal ausencia quedan constatados en la tabla X.3. En la séptima sesión estuvo en clase, como observador externo, el Jefe del Departamento de Matemáticas del Instituto.

[14] González, C., Llorente, J. y Ruiz, M. J. (1997, 2003). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. Bachillerato Humanidades y Ciencias Sociales. 2º Bachillerato.* Madrid: Editex.

SESIÓN	***TRABAJO REALIZADO***	***MOTIVO POR EL CUAL ESTÁ AUSENTE EL CÁLCULO MENTAL***	***2º D***
4	Repaso del análisis, salvo la integral.	Este mismo día los alumnos deben realizar, a partir de las 16:15 horas, el tercer examen de análisis para la primera evaluación en el cual se excluye la integral definida e indefinida.	5-12-08 viernes
7	Teorema del valor medio del cálculo diferencial y teorema fundamental del cálculo.	El PI ha considerado prioritario dedicar toda la sesión a explicar estos importantes teoremas, haciendo que los estudiantes sean partícipes activos de la demostración de los mismos, representando los distintos recintos de los cuales se compone el área a determinar y coordinándolo con los registros analítico-algebraicos.	12-12-08 viernes
11	Explicación detallada de las soluciones de los exámenes de análisis de los días 5 y 18 de diciembre de 2008.	Hoy es el último día lectivo del trimestre, faltan diez alumnos, y sólo se puede comentar el examen de la tarde anterior (el profesor, al finalizar un examen, siempre entrega a los estudiantes las soluciones por escrito).	19-12-08 viernes
15	Resolución de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad.	Por el tipo de problemas, el PI considera que no es aconsejable practicar el cálculo mental.	14-01-09 miércoles
16	Resolución de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad.	Por el tipo de problemas, el PI considera que no es aconsejable practicar el cálculo mental.	16-01-09 viernes

Tabla X.3. Ausencia del cálculo mental en las sesiones de aula del grupo 2º D (ciclo VI).

X.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN

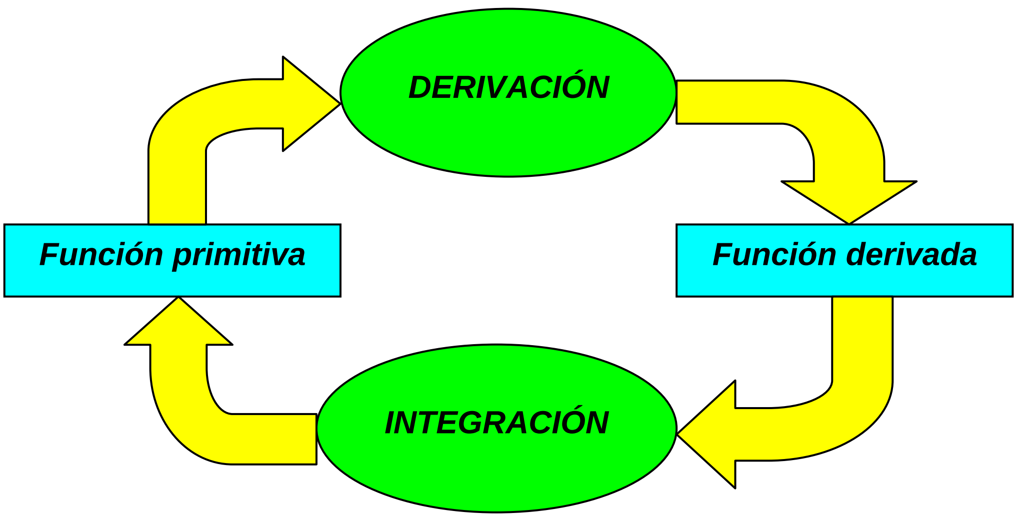
En este ciclo no redactamos los hechos secuenciales más relevantes de varias sesiones de la acción (2+2) tal y como se realizó en los capítulos VII y VIII, tampoco describimos la acción con el mismo formato del capítulo IX; pensamos que la redacción sería muy similar a la de los tres capítulos anteriores. El profesor investigador ha considerado oportuno subdividir la descripción de la acción en cuarto apartados: a) cálculo mental, b) cálculo estimativo y cálculo de áreas, c) otras aplicaciones de la integral y, por último, d) problemas propuestos en pruebas de acceso a la Universidades de Castilla y León. A partir de este momento describimos las acciones más importantes que no hayan sido redactadas en ciclos anteriores y, como es obvio, muchas de las actividades proceden de los libros de texto de Editex.

X.3.1.1. Cálculo mental

El cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental se ha efectuado en los ciclos de confirmación y consolidación, sin embargo, en el presente ciclo hemos considerado oportuno, en las primeras sesiones, combinar ejercicios de derivación e integración para que los estudiantes adquieran la fluidez necesaria en el cálculo de derivadas e integrales.

El PI comienza la clase del día 1 de diciembre escribiendo en la pizarra varias funciones elementales y haciendo, con ayuda de los alumnos, sus derivadas; sin borrar las primeras funciones pregunta: *"¿De dónde proceden las funciones derivadas?"*. Las respuestas no se hacen esperar y LB dice que *"son las funciones que se han escrito en primer lugar".*

Esto hace que el profesor escriba en la pizarra derecha el diagrama cíclico y el texto de la figura X.3.1.1 en el cual se relacionan los conceptos de derivación e integración, todos los estudiantes lo copian y así es como comienza, en el ciclo VI de nuestra investigación, el cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental.



F(x) es una primitiva de $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + k$

Figura X.3.1.1. Relación entre derivación e integración.

En esta primera sesión algunos alumnos cometen errores al calcular las derivadas de algunas funciones pues no aplican la regla de la cadena[15], otros no recuerdan las reglas de derivación y la mayoría de ellos son

[15] RS considera que la derivada de la función $f(x)=sen3x$ es $f\acute{}(x)=cos3x$.

demasiado lentos en el cálculo de derivadas. Integrar funciones una de cuyas primitivas está escrita en la pizarra y cuya derivada ha sido realizada según el ciclo de la figura X.3.1.1 no resulta difícil a los estudiantes, les parece sencillo; calcular primitivas de funciones en las hay que determinar un factor constante de integración hace que en estos primeros momentos muchos de ellos se sientan perdidos, veamos un ejemplo:

Dada la función *ƒ(x)=cos5x*, el alumno AC la deriva correctamente escribiendo *ƒ´(x)= –5sen5x*, sin embargo, en un principio, considera que una primitiva de *g(x)=sen2x* es *G(x)=cos2x*; el profesor pide que efectúe la derivada de la función *G(x)* y él mismo se percata de su error, después de rescribir la función integrando, AC da la solución correcta.

A los veinte minutos del comienzo de la clase, el profesor escribe en la pizarra y explica algunas propiedades de la integral indefinida, tales como:

$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$, $\int f(x)\, dx = \frac{1}{k} \int k\, f(x)\, dx$, $\int f(x)\, dx = -\int \left[-f(x)\right] dx$,

$\int \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$ e $\int f'\left[g(x)\right] g'(x)\, dx = f\left[g(x)\right] + k$.

Es el momento de presentar la tabla de integrales inmediatas[16], así se hace, y el PI pide a todos los alumnos de 2º D que repasen la tabla de derivadas y estudien la de integrales puesto que en las siguientes clases trabajaremos el cálculo de primitivas inmediatas mediante la técnica del cálculo mental.

La segunda sesión se dedica íntegramente al cálculo de integrales inmediatas, muchos estudiantes están despistados, no se centran en las actividades matemáticas y, aunque realizan las derivadas con relativa rapidez, cometen errores al resolver ejercicios de integración.

La alumna EP necesita ser ayudada para calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y no duda en afirmar que $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + k$; el profesor, empleando tizas de colores, y apoyándose en la derivada de la función *ƒ(x)* escribe: $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + k$, EP afirma comprender la solución.

[16] Para facilitar la actividad docente, el profesor entrega a cada estudiante un folio en el que por una cara está fotocopiada una tabla de derivadas y por la otra cara una tabla de integrales inmediatas.

Los progresos de los alumnos en el cálculo mental de primitivas son muy dispares, poco a poco se centran en las actividades y algunos de los errores observados, más comunes, que cometen están en la siguiente tabla:

INTEGRALES	***ERRORES***
$\int \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx,\ \int \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$	Los alumnos dudan si el número π es una constante o una variable.
$\int e^{ax+b}dx$	Los parámetros *"a"* y *"b"* son tratados como variables.
$\int senx \cos x\, dx$	Considerar que la integral del producto es el producto de las integrales.
$\int 2^x dx$	La función exponencial 2^x la consideran como e^x.
$\int e^{x^2}dx$	* La solución es $e^{x^2}+k$ o bien $e^{x^3/3}+k$. * $\int e^{x^2}dx=\frac{1}{2x}\int 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2x}e^{x^2}+k$.
$\int x^e dx$	* La solución es x^e+k. * Dudan si *e* es una constante o una variable.
$\int tagx\ dx$	Desconocen la igualdad $tagx=\frac{senx}{\cos x}$.
$\int \frac{senx}{\cos x}dx$	* No recuerdan las integrales con solución logarítmica. * La solución es $ln\lvert cosx\rvert + k$. * Considerar que la integral del cociente es el cociente de las integrales.
$\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}dx$	* No discriminan n=1 y no dan la solución logarítmica. * Determinan mal el factor constante de integración.
Polinómicas	Tienen dificultades para determinar los factores constantes de integración.
Racionales elementales	* No saben dividir polinomios o dividen mal. * Simplifican polinomios considerando los sumandos como factores.
Trigonométricas	* Desconocen las razones trigonométricas. * No aprenden o no comprenden sus derivadas.
Radicales	* No los expresan correctamente en forma potencial. * Tienen dificultades para operar con radicales.
Potenciales y exponenciales	Tienen dificultades para distinguirlas y determinar las soluciones.

Tabla X.3.1.1. Errores más comunes en el cálculo mental de integrales inmediatas.

X.3.1.2. Cálculo estimativo y cálculo de áreas

El profesor, en la sesión del día 16 de diciembre de 2008 y como primera propuesta de *cálculo estimativo* de un área en el ciclo VI, propuso a los estudiantes de 2º D el siguiente problema:

Representa la parábola $y=x^2-4x$, estima el área comprendida entre la parábola y el eje de abscisas y, por último, calcula el área.

Este problema causó sorpresa a los alumnos porque, según ellos, nunca se les había pedido que estimaran nada en matemáticas[17]. El profesor pidió que se representara la función y que colorearan la superficie cuyo área se pretendía calcular, los estudiantes no han tenido mayores dificultades para realizar esa parte de la tarea propuesta.

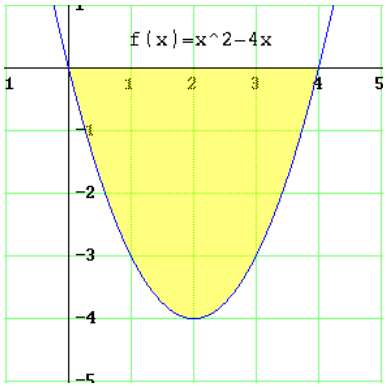


Figura X.3.1.2.1. Área entre una curva y el eje OX.

El profesor realizó seguidamente en la pizarra el dibujo según la figura adjunta e insistió en la trama cuyo cuadradito tiene de lado una unidad de longitud, los alumnos completaron el dibujo en sus cuadernos y el profesor les pidió que, según los cuadraditos, dieran el valor aproximado del área del recinto coloreado. Se estableció un pequeño debate y RM razonó como sigue: “Hay 6 cuadraditos cubiertos totalmente, si observamos los cuadraditos incompletos de la derecha y de abajo arriba, el segundo y el cuarto pueden ser uno completo y el primero con el tercero suman ‘algo más de uno’, con los incompletos de la derecha se forman dos cuadraditos y los de la izquierda otros dos, por tanto, el área total es ‘un poco más’ de 10 cuadraditos, puede ser 10,5”.

Los alumnos aceptan como buena la estimación de RM. Calcular el área no les resulta difícil aplicando el teorema fundamental del cálculo y las propiedades de la integral definida, así pues:

$\acute{A}rea = -\int_0^4 \left(x^2 - 4x\right) dx = \frac{32}{3} \quad u^2 \cong 10{,}67 \quad u^2$. El profesor pregunta si es posible que el área sea 32 u^2, las respuestas de los estudiantes son negativas, con ello advierte a todos los alumnos que el resultado final no se puede multiplicar por el denominador, en todo caso se debe efectuar la división.

[17] El profesor debió especificar a los alumnos de 2º D que hacer un cálculo “aproximado” del área se entiende por “estimar el área”.

Un nuevo problema propone el profesor-investigador para ser resuelto en la primera sesión de 2009, éste es:

Representa la superficie limitada por las curvas $y=x^2$, $y^2=x$, estima el área comprendida entre dichas curvas y calcula su área (Editex, 1997, pág. 229).

Los alumnos, se encuentran indecisos al considerar la segunda curva, se establece un pequeño debate y a propuesta de RB la expresamos como $y=\sqrt{x}$ y, según las instrucciones del profesor, renombramos las funciones como $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$.

La representación del recinto en papel cuadriculado resulta sencillo y ameno a los estudiantes aunque le dedican demasiado tiempo. La alumna RH estima que el área está comprendida entre *"la mitad y la cuarta parte del cuadrado"* y DT piensa que *"puede ser la tercera parte del cuadrado".* Los alumnos aceptan que la estimación de DT es mejor, sin embargo, aún no se sabe el valor exacto del área. El alumno DD, sale a la pizarra, y aplicando el algoritmo del cálculo del área entre dos curvas establece que el área viene determinada por $\int_0^1 (x^2-\sqrt{x})dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$ y, dice DD, *"como el área siempre es positiva, obtenemos que es un tercio"*. Es evidente la satisfacción de DT, el profesor "insiste" si es posible multiplicar el resultado por 3 y el área en este caso es una unidad cuadrada; la respuesta de EP es contundente: *"Pero no lo ves en el dibujo que no llega ni a medio cuadrado".*

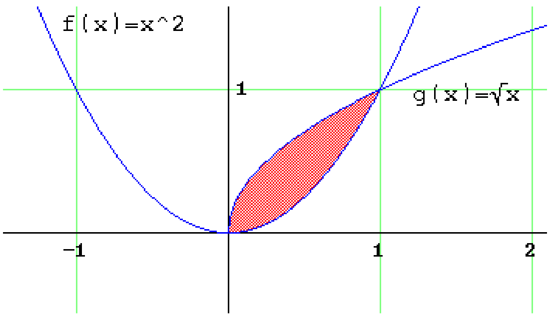


Figura X.3.1.2.2. Superficie comprendida entre dos curvas.

El objetivo fundamental que se proponía el profesor investigador al resolver este ejercicio era que los alumnos transformaran la expresión de la segunda curva en una función "aunque se perdiera la rama que va por debajo del eje de abscisas" y que los estudiantes fueran conscientes de la importancia del cálculo estimativo del área para no cometer el error de multiplicar el resultado final por 3. Es evidente que, en el área calculada anteriormente, la representación gráfica de la superficie y la simple observación de dicha superficie hace que los alumnos se sientan seguros al obtener la solución del problema aplicando el teorema fundamental del cálculo integral.

Con el propósito añadido de que los estudiantes expresen cualquier función elemental dada en valor absoluto como función definida a trozos[18], el PI ha propuesto el siguiente problema (Editex, 1997, pág. 229):

Dada la función $f(x) = \left| x^2 - 1 \right|$ *se pide:*

a) *Exprésala como función definida a trozos.*
b) *Represéntala.*
c) *Estima el área comprendida entre la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x= –2 y x=2.*
d) *Calcula dicho área.*

A la mayoría de los alumnos les resulta difícil escribir la función con la nueva expresión, VB propone calcular las raíces del polinomio $P(x)=x^2-1$ y, posteriormente, resolver la inecuación $x^2-1 \geq 0$ para obtener la expresión pedida. SH propone que se represente el polinomio *P(x)* y la parte de la gráfica que está por debajo del eje de abscisas se *"doble"* sobre el mismo eje y así se puede obtener su expresión[19]. Después de resolver las dudas de muchos alumnos, el profesor escribe en la pizarra[20]: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < -1 \\ -\left(x^2 - 1\right) & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & si \quad 1 < x \end{cases}$ y los estudiantes, algunos de ellos con cierta dificultad, representan la función.

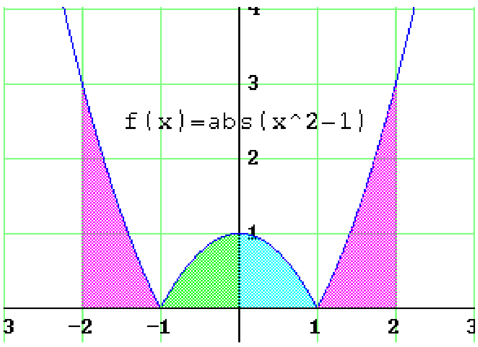


Figura X.3.1.2.3. Superficie entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

No es nuestro propósito extendernos en los pormenores de la resolución del problema, en resumen EG, observando la figura X.3.1.2.3, dice: *"El área es el doble del área que está a la derecha del eje OY y el valor aproximado del área de la superficie derecha es la suma de las áreas del 'triángulo' pequeño*

[18] El profesor investigador ha detectado en sus años de docencia, confirmada en los seis ciclos de la presente investigación, que los alumnos de bachillerato tienen dificultades para transferir la expresión de una función dada en valor absoluto a la expresión de la misma como función definida a trozos.

[19] Esta idea la expresó insistentemente el PI a los estudiantes al representar este tipo de funciones y en el estudio de la continuidad y derivabilidad de las mismas en sus puntos críticos, temas estudiados con anterioridad al cálculo integral.

[20] Los estudiantes lo entienden mejor al escribir la rama central entre paréntesis precedida del signo – y posteriormente se elimina el paréntesis.

y del ‘triángulo’ grande”. Haciendo los cálculos precisos obtenemos que el área estimada es 4 unidades cuadradas y, para sorpresa de los estudiantes, coincide con su valor real calculado mediante la propiedad de la aditividad de la integral y la regla de Barrow[21].

Para que los alumnos discriminen entre integral definida y área, el profesor, partiendo del ejercicio anterior, propone: *Calcular el área comprendida entre la función g(x) =x^2–1, el eje de abscisas y las rectas x= –2 y x=2.*

DB dice que basta calcular $\int_{-2}^{2}(x^2-1)dx$, SM piensa que es mejor hallar $2\int_{0}^{2}(x^2-1)dx$, una vez obtenida la solución, 4/3 unidades cuadradas, y a la vista de la representación de la superficie, varios alumnos “consideran” que el área es mayor que el resultado dado por DB y SM, AM afirma: ”*El área es cuatro cuadraditos, lo hemos calculado antes”*. Visto el error cometido por los alumnos citados y alguno más, el profesor advierte que los conceptos de integral definida y área no son iguales y para calcular áreas por medio de la integral debemos *“controlar si se contrarrestan algunas áreas”.*

X.3.1.3. Otras aplicaciones de la integral

El PI ha comentado a los alumnos que el cálculo integral tiene multitud de aplicaciones distintas a la determinación de áreas, en ciclos anteriores se resolvió algún problema de este tipo y en este también hacemos lo mismo, veamos tres de ellos extraídos de los manuales de Editex (González y cols., 1997, pág. 231 y 2003, págs. 250-251):

Problema 1: Un objeto cae desde un avión con una velocidad de caída vertical v(t)=15+32t metros por segundo (t = tiempo en segundos) y a los 10 segundos ha llegado al suelo. Se pide:

a) *Representa la función velocidad.*
b) *¿A qué la altura vuela el avión?*

En enunciado de este problema sorprende a varios alumnos[22] y determinar el dominio de definición de la función velocidad no es fácil para EG, SM y DT. El alumno AM dice: *“Por el ‘contexto’ del problema el dominio de definición es [0,10]”*, este mismo alumno representa la función en la pizarra.

[21] El profesor ha insistido a los alumnos que al calcular áreas deben observar si existen simetrías, en tal caso, pueden reducirse sustancialmente las operaciones algebraicas.

[22] DA, LB, EG, RM, EP y DT.

Calcular la altura del avión es más complicado, RS propone hallar v(10), rápidamente le replica SH diciéndole que ese valor es la velocidad del objeto a los 10 segundos. El profesor sugiere que se modifique la velocidad del problema y se considere que el objeto cae a 80 m/s ¿A que altura vuela el avión? La respuesta es rápida y varios alumnos responden a 800 metros.

El profesor pide a los alumnos que representen la nueva función velocidad, que coloreen y calculen el área comprendida entre dicha función, el eje de abscisas y las rectas *x=0* y *x=10*. No surgen dificultades dignas de mención y al calcular el área rectangular por medio de la integral definida hace exclamar a AM: *“¡Pero si es 800, la altura del avión!”*

Los alumnos retoman el problema original, colorean la superficie según la figura adjunta y AM determina que la altura del avión coincide con el área de dicha superficie y, mediante el teorema fundamental del cálculo, obtiene:

$$Altura = \int_0^{10} (15 + 32t)\,dt = 1750 \ \ metros$$

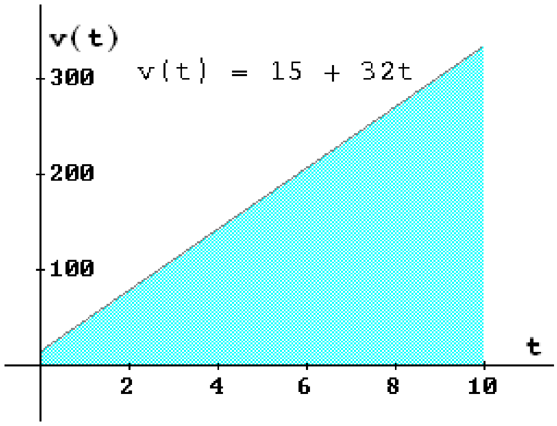


Figura X.3.1.3.1. Altura del avión.

El problema que se acaba de resolver anima a los estudiantes, la dinámica de la clase es buena y muchos alumnos, según DM, quieren resolver más *“problemas prácticos de la integral en los que no se pida calcular áreas”.*

Problema 2: Una empresa estima que la tasa de variación de gastos de mantenimiento y renovación de los equipos informáticos viene dada por la función m(t)=4t^2*+10t+10 donde t se mide en años y m(t) en cientos de euros/año. Se pide:*

a) *Establece el dominio de definición de la función m(t).*
b) *Representa la función m(t).*
c) *Calcula el gasto de la empresa en la renovación y mantenimiento de sus equipos informáticos en los cinco primeros años.*
d) *Calcula el gasto entre el tercer año y el octavo.*

El concepto tasa de variación de gastos es incomprensible para DA y SM, según ellos bastaría con decir los gastos, el PI debe explicarles que no es lo mismo y para ello recurre al símil de espacio y la velocidad considerando ésta como la tasa de variación del espacio, estos estudiantes y los demás, dicen comprender la diferencia entre ambos conceptos aunque el profesor duda de la sinceridad de sus respuestas.

Establecer el dominio de definición de la función *m(t)* suscita varias opiniones: MM dice que como es una parábola el dominio son todos los reales, no está de acuerdo AC que propone como dominio los números reales positivos porque *"una empresa no funciona para t años negativos"* y, finalmente, se acepta la propuesta de DD y tomamos como dominio de definición de *m(t)* el intervalo [0,20] porque *"ninguna empresa funciona infinitos años"*.

Debemos constatar que al expresar *m(t)* en cientos de euros/año ha confundido, entre otros, al alumno GF porque considera que *m(*50*)*=10510 euros/año, se relee el problema, y el mismo alumno rectifica diciendo: *"m(50) es más de un millón de euros ¡Qué barbaridad!".* La alumna SH comenta que una empresa puede "durar" más de 20 años y la función *m(t)* no le convence cuando han transcurrido, por ejemplo, 30 años; el profesor sugiere que a partir de los 20 años la función *m(t) "puede tener otra expresión distinta y esto crearía la necesidad de ser definida a trozos".*

Para representar la función *m(t)* se acuerda tomar el intervalo [0,10] como se muestra en la figura adjunta. Los gastos de la empresa en los cinco primeros años vienen dados por la expresión $\int_0^5 m(t)\,dt$ = 341,67 cientos de euros y los gastos calculados por SH entre el tercer y octavo año son $\int_3^8 \left(4t^2+10t+10\right)dt$ = 94767 euros, que esta alumna considera "excesivos" puesto que son "casi" el triple de los de los cinco primeros años.

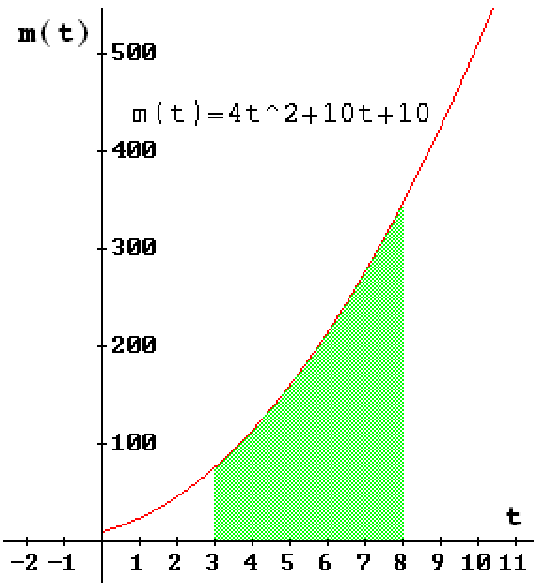


Figura X.3.1.3.2. Gastos de una empresa en informática.

Los alumnos representan en sus cuadernos la función *m(t)* y colorean el área, según la figura X.3.1.3.2, que corresponde con los últimos gastos calculados; además, afirman haber comprendido la solución del problema.

Problema 3: Un automovilista sale de viaje y, al cabo de t horas, va a una velocidad de (80 + 3t) km/h. Al cabo de 3 horas descansa durante 1 hora. Reanuda la marcha a una velocidad de (108 – t) km/h, siendo t el tiempo en horas desde que salió. Después de 6 horas llega a su destino. Se pide:

- *a) Determina analíticamente la función velocidad v(t) y represéntala.*
- *b) Determina analíticamente la función espacio recorrido e(t) en función del tiempo t y represéntala.*
- *c) Calcula la distancia total recorrida por el automovilista.*

Después de una lectura detallada del ejercicio, DD determina el dominio de definición de la función *v(t)*, éste es [0,6]. Expresarla analíticamente causa dificultades a la mayoría de los alumnos, RH dice no entender nada, el profesor sugiere que [0,6] se descomponga como unión de subintervalos según el enunciado del problema; RB sugiere que el intervalo puede escribirse [0,6]=[0,3]∪[3,4]∪[4,6]; el PI propone que, a partir de esta igualdad, se determine la función, después de varias matizaciones la alumna VB propone: $v(t)=\begin{cases} 80+3t & si \quad 0\le t\le 3 \\ 0 & si \quad 3<t<4 \\ 108-t & si \quad 4\le t\le 6 \end{cases}$

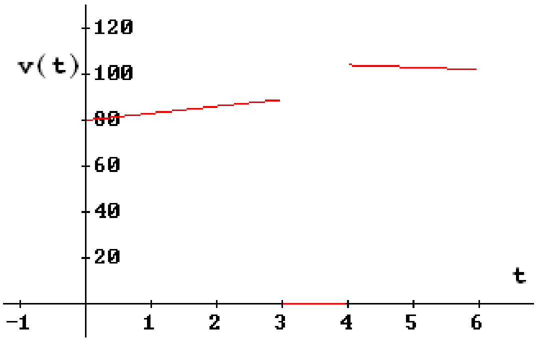


Figura X.3.1.3.3. Función velocidad.

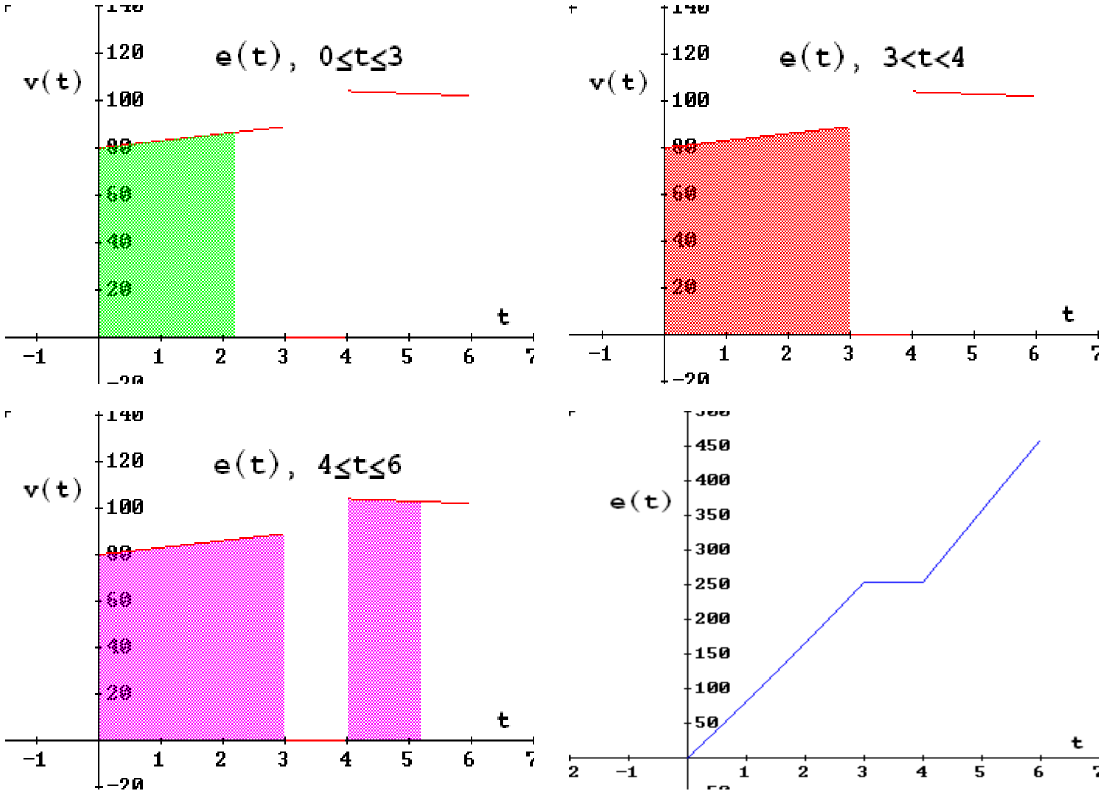
Para representar la función velocidad los alumnos EP, DD y SM no la delimitan correctamente según sus subdominios de definición, finalmente el profesor realiza en la pizarra el dibujo de la derecha.

DT afirma que el espacio es el área recorrida pues así se comentó en el primer problema pero que, aunque lo comprende gráficamente, no sabe cómo determinar su expresión analítica, el PI pregunta ¿Cuál es el dominio de definición?, DT duda y, finalmente, afirma que también es [0,6].

El profesor, dirigiéndose a toda la clase, dice: *"Si el área coincide con el espacio ¿cómo se determina el área bajo una curva?".* Varios alumnos dicen que *"es la integral pero el extremo superior es variable y la variable de integración no puede coincidir con dicho extremo".* Al fin se establece que el espacio recorrido es $e(t)=\int_0^t v(s)\,ds, \quad 0\le s\le 6$; el problema vuelve a surgir al sustituir la función velocidad para calcular la integral, así pues, el profesor escribe en el encerado: $$e(t)=\begin{cases} \int_0^t (80+3s)\,ds & si \quad 0\le t\le 3 \\ \int_0^3 (80+3s)\,ds+\int_3^t 0\,ds & si \quad 3<t<4 \\ \int_0^3 (80+3s)\,ds+\int_3^4 0\,ds+\int_4^t (108-s)\,ds & si \quad 4\le t\le 6 \end{cases}$$

y propone a los estudiantes que determinen la función espacio. Calculando las diferentes integrales se obtiene: $$e(t)=\begin{cases} 1{,}5t^2+80t & si \quad 0\le t\le 3 \\ 253{,}5 & si \quad 3<t<4 \\ -0{,}5t^2+108t-170{,}5 & si \quad 4\le t\le 6 \end{cases}$$

La representación gráfica del espacio se realiza de dos formas distintas: La primera mediante el área recorrida entre la función velocidad *v(t)*, el eje de abscisas y las rectas *x=0* y *x=t*, siendo $0 \le t \le 6$ (según los tres primeros dibujos de la figura inferior). La segunda es la representación clásica donde el eje de abscisas representa el tiempo y el eje de ordenadas el espacio recorrido (dibujo inferior derecho). El espacio recorrido es *e*(6) = 459,5 km.



Figuras X.3.1.3.4. Diferentes representaciones gráficas de la función espacio.

Este ejercicio suscita comentarios muy diversos y muchos estudiantes consideran que no es apropiado para su nivel. El profesor piensa que es interesante porque han sido abordados varios conceptos matemáticos.

X.3.1.4. Problemas propuestos en las pruebas de acceso a las Universidades de Castilla y León

Pocos son los problemas de cálculo integral propuestos en las pruebas de acceso a las Universidades de Castilla y León y, además, en las últimas convocatorias cada vez son menos frecuentes, en el presente epígrafe describimos la acción en la resolución de cuatro problemas, éstos son:

El primer problema[23] conlleva la dificultad de determinar el dominio de definición a los alumnos DA, EG y EP y su representación gráfica se hace lenta, aunque no complicada, para la mayoría de los estudiantes. Determinar la ecuación de la recta tangente tiene dificultades análogas a problemas similares descritos en ciclos anteriores.

El profesor, con el objetivo de que los estudiantes comprendan mejor el área que deben calcular, pide que se represente la recta[24] $y = -4x + 4$ y se determine dicho área, los alumnos la representan según la figura adjunta. Para calcular el área, según AM no es necesario hallar ninguna integral, la superficie es triangular y el área es 2 unidades cuadradas. SH propone que, como estamos en clase de integrales, se calcule aplicando el teorema fundamental del cálculo integral: $\int_0^1 (-4x+4)\,dx = \left[-2x^2+4x\right]_0^1 = 2 \quad u^2$.

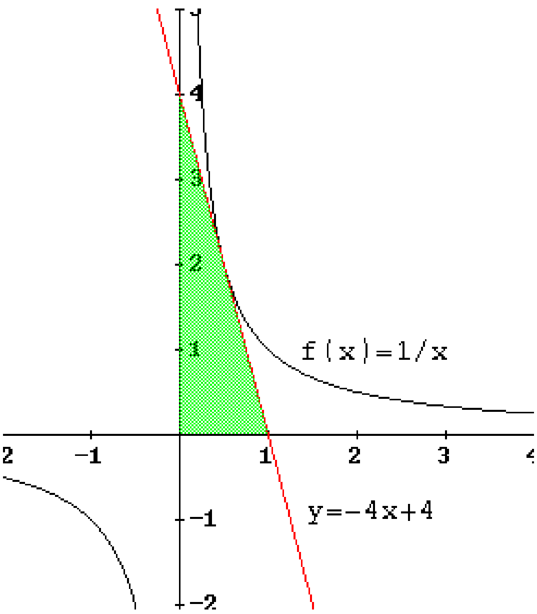


Figura X.3.1.4.1. Superficie triangular.

Después de resolver este ejercicio, RM pregunta: *"Para calcular áreas ¿se pueden aplicar las fórmulas que 'conocemos de toda la vida'?".*

---

[23] Septiembre 2008, opción B.

Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Se pide:

a) Representa la función $f(x)$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $x = 1/2$.

c) Halla el área limitada por la recta $y = -4x + 4$ y la parte positiva de los ejes de coordenadas.

[24] Nótese que la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x = 1/2$ coincide con la recta $y = -4x + 4$.

El segundo problema[25] podemos considerarlo que está dedicado íntegramente al cálculo integral. El profesor, una vez más, pide a los alumnos que representen la superficie de la *media* mesa; los estudiantes realizan el dibujo de esa porción de la mesa, incluso algunos de ellos lo completan haciendo un boceto de la misma.

Para determinar la *mitad* del área de la misma, DD la calcula restando al área del rectángulo, 2x1, el valor $\int_{-1}^{1} x^2 dx$. Otros alumnos proponen que se calcule como la superficie comprendida entre las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=1$. DM sugiere que se calcule *"la cuarta parte del área de la mesa".* Terminar el problema no acarrea ninguna dificultad digna de mención.

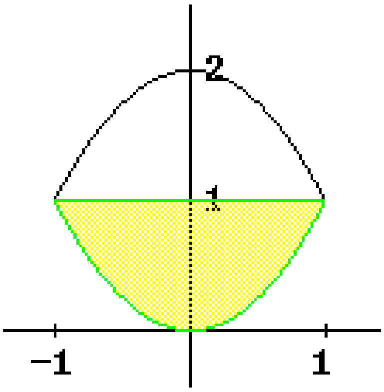


Figura X.3.1.4.2. Superficie de media mesa.

La primera parte del tercer problema[26] consiste en la clásica pregunta del cálculo de la recta tangente. La segunda parte nos atañe puesto que se debe calcular un área y, además, debemos descomponerla en suma de dos.

El PI propone, sin representar la función, que se calcule el área, varios alumnos hallan $\int_0^4 \left(x^3 - 3x^2\right) dx$ y al obtener resultado 0 sospechan que es incorrecto. LB sale al encerado y hace una representación gráfica "aproximada" de la función y determina: *Área* $= -\int_0^3 \left(x^3 - 3x^2\right) dx + \int_3^4 \left(x^3 - 3x^2\right) dx$. Los estudiantes terminan de resolver el ejercicio en su cuaderno, al pasar el profesor por los puestos de los alumnos, MM comenta: *"El área total es el doble de la primera".*

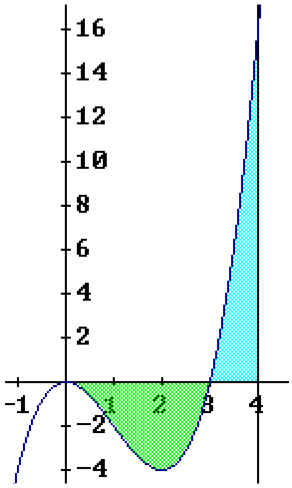


Figura X.3.1.4.3. Área total = Suma áreas parciales.

[25] Junio 2007, opción A.
La superficie de *media* mesa está limitada por las funciones $f(x)=x^2$ y la recta $g(x)=1$, estando x expresado en metros. El barniz se vende en botes para cubrir una superficie de 2 metros cuadrados. ¿Cuántos botes necesitaremos comprar para barnizar toda la mesa y cuántos metros cuadrados podríamos barnizar con el barniz sobrante?

[26] Junio 2006, opción B.
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^3 - 3x^2$ en $x= -1$.
b) Calcula el área encerrada entre la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=4$.

El cuarto problema[27] es específico del cálculo integral y los estudiantes al realizar la primera lectura perciben que este ejercicio es de los más sencillos que han sido propuestos en las pruebas de acceso.

La representación de la parábola es realizada correctamente por todos los alumnos, aunque hay que recordar a EP y RS que si el coeficiente principal de la parábola es negativo entonces las "ramas" van hacia abajo[28] y, en consecuencia, el profesor investigador debe ayudarles a representarla; la recta es dibujada con suma facilidad y los estudiantes colorean la superficie que representa el terreno.

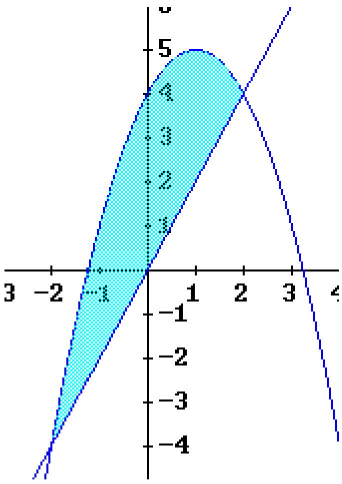


Figura X.3.1.4.4.
Plano de una parcela.

El alumno AM, observando su representación gráfica (véase la figura adjunta), dice que la parábola y la recta se cortan en los puntos de abscisas x_1=–2 y x_2=2 y el área surge[29] de $\int_{-2}^{2}\left(-x^2+2x+4-2x\right)dx$ y lo termina de resolver en su propio cuaderno. Ha habido representaciones más imprecisas y, entre otros, los alumnos GF, RH, SM y DT han optado por seguir, analíticamente, el algoritmo para calcular el área comprendida entre dos curvas[30], finalmente, el alumno RM resuelve el problema en la pizarra obteniendo una superficie de 32/3 km^2 y ascendiendo el valor de los terrenos a 320 millones de euros[31].

---

[27] Junio 2006, opción B.
Una inmobiliaria está interesada en adquirir unos terrenos que pueden ser representados en un determinado plano como la superficie encerrada entre la parábola $f(x)=-x^2+2x+4$ y la recta $g(x)=2x$.

a) Halla la representación gráfica simultánea de estas dos funciones.
b) Si una unidad de área en este plano equivale a 1 km^2 y el precio del km^2 es de 30 millones de euros ¿Qué importe debe pagar la inmobiliaria por esos terrenos?

[28] EP y RS piensan que, por ejemplo, $f(1)=7$ porque, según ellos: *"un número al cuadrado siempre es positivo"*. El profesor debe explicar que el signo negativo precede a x^2 y, salvo para x=0, siempre se verifica que el valor de $-x^2$ es negativo y el valor de $(-x)^2$ es positivo, por tanto $-x^2 \neq (-x)^2$.

[29] El PI viendo las dudas que tienen los alumnos al determinar áreas por medio de integrales definidas cuando el resultado es negativo ha optado por calcular la integral definida de la función diferencia y, posteriormente, tomar el valor absoluto de dicho resultado. Para abreviar el profesor investigador dice: *"El área surge de la integral..."*

[30] El algoritmo para calcular el área comprendida entre dos curvas fue explicado a los alumnos del ciclo VI al resolver el primer problema de estas características.

[31] Varios alumnos no se imaginan 32/3 km^2, el profesor comenta que, aproximadamente, son 1067 hectáreas y DM dice: *"Según los informativos de televisión son 1067 campos de fútbol"*.

X.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN

La descripción de la acción del ciclo de cierre, realizada resumidamente en los cuatro epígrafes anteriores, permite confirmar muchas de las reflexiones de la acción de los cinco ciclos precedentes y descubrir algunas, pocas debido a la saturación, de este último ciclo de nuestra investigación; estás son las más importantes reflexiones de la implementación del cálculo mental y la integral definida a las cuales hemos llegado:

a) La exposición teórica[32] hace que, en general, los estudiantes se desentiendan de ella; por tanto, debe combinarse con ejercicios prácticos para que los alumnos mantengan la atención en clase.

b) La fundamentación teoría de la integral, explicada en clase, ha consistido en una transposición de la integral definida del capítulo V de la presente memoria[33]. Los ejercicios resueltos han sido tomados de los libros de texto de MACS II de Anaya y Editex, de las pruebas de acceso a las Universidades de Castilla y León y los propuestos por el PI, sobre todo, en cálculo mental. Los alumnos desean disponer de material de apoyo para sentirse seguros y, para ello, además del libro de texto oficial (Anaya), el profesor les ha entregado los apuntes y fotocopias necesarios para poder realizar un trabajo eficaz.

c) Los estudiantes se desentienden de las definiciones de integral de Darboux y de integral de Riemann, sólo les interesa sus aplicaciones prácticas mediante el teorema fundamental del cálculo[34].

d) Los estudiantes se sienten protagonistas de su propio aprendizaje si el profesor individualiza la docencia y, sobre todo, cuando el PI observa, sugiere, comenta y orienta a cada alumno en su propio trabajo cuando éste está en su pupitre y el profesor se acerca a él.

e) El orden y claridad del profesor en la resolución de problemas en la pizarra hace que los estudiantes los comprendan mejor. Además, la utilización conjunta de registros gráficos, mediante diferentes colores, y simbólico-algebraicos favorece la enseñanza y el aprendizaje de la integral y facilita la toma de apuntes.

[32] Los alumnos consideran que la formalización teórica de los conceptos matemáticos no es importante o es demasiado abstracta y, como tal, no muestran ningún interés, simplemente, la aceptan.

[33] Véanse los epígrafes *I.5. Objetivos generales* (capítulo I) y *III.3. Hipótesis* (capítulo III), en los cuales quedó establecida la necesidad de elaborar una nueva unidad didáctica.

[34] Reconocido como regla de Barrow (véase el capítulo V de la presente memoria).

f) A pesar de haber practicado el cálculo de derivadas los meses de octubre y noviembre de 2008, el cálculo de primitivas sigue siendo difícil para los alumnos[35], muchos de ellos no aprenden ninguna tabla de derivadas e integrales inmediatas y prefieren consultarlas.

g) Se ha realizado con insistencia, al comienzo de la mayoría de las sesiones de clase, el cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental; además, se ha combinado con el cálculo mental de derivadas y el profesor investigador percibe que se dan grandes diferencias entre los estudiantes.

h) En este ciclo de cierre no se han calculado primitivas mediante el cambio de variable, pensamos que su aplicación podía inducir a confusión a muchos alumnos, tal y como sucedió en ciclos anteriores.

i) Calcular primitivas en las cuales la función integrando tiene parámetros o los números π y e es difícil para muchos estudiantes puesto que no distinguen entre constante, variable y parámetro.

j) Operar con radicales, fracciones algebraicas y potencias hace que muchos alumnos cometan errores conceptuales y procedimentales.

k) Haber cursado, en cuarto curso de educación secundaria obligatoria, matemáticas opción A u opción B e, incluso, algún programa de diversificación curricular hace que los actuales alumnos que cursan MACS II tengan conocimientos matemáticos muy heterogéneos; este es el caso de los estudiantes del grupo 2º D del presente ciclo[36].

l) Varios alumnos no tienen los conocimientos básicos suficientes de las funciones trigonométricas, potencial, exponencial y logarítmica; esto condiciona sobremanera el cálculo de derivadas e integrales inmediatas y, en consecuencia, los progresos matemáticos de los estudiantes son muy dispares.

m) Confirmamos las reflexiones de los ciclos anteriores: *"A funciones distintas, nombres distintos; a superficies distintas, colores distintos".* Esto resulta ser muy eficaz pues: evita confusiones, clarifica las explicaciones del profesor y favorece la comprensión y el estudio a los alumnos.

[35] La mayoría de ellos no tienen fluidez en el cálculo de derivadas y, consecuentemente, tienen grandes dificultades para el cálculo de integrales inmediatas.

[36] El currículo de Educación Secundaria Obligatoria en la comunidad de Castilla y León puede consultarse en el Decreto 52/2007, de 17 de mayo (BOCyL: 23-05-2007).

n) Las demostraciones-justificaciones del teorema del valor medio del cálculo diferencial y del teorema fundamental del cálculo integral son consideradas prioritarias por el profesor investigador puesto que para la mayoría de los alumnos estos son los primeros teoremas que se les demuestran. El profesor considera, por la baja capacidad de abstracción de muchos alumnos, insuficientes las demostraciones analítico-algebraicas y, como tal, debe realizarlas conjuntamente con representaciones gráficas que las apoyen y permitan una mejor comprensión de las mismas a todos los estudiantes.

o) El “*cálculo estimativo”* fue mencionado en los ciclos anteriores, incluso se practicó en alguna sesión. En la planificación del presente ciclo de cierre nos propusimos trabajarlo con más intensidad y así se ha actuado; así pues, al calcular áreas se ha considerado oportuno estimarlas mediante un cálculo aproximado, generalmente, por medio de cuadrículas. La experiencia ha sido muy positiva y, además, los estudiantes se sienten más seguros al confirmar o desmentir el valor del área calculada, generalmente, por medio del cálculo integral (esto nos permite discriminar los conceptos de área e integral definida).

p) Consideramos que es insuficiente, como única aplicación del cálculo integral, el cálculo de áreas y, en consecuencia, creemos oportuno resolver problemas bajo la denominación *“otras aplicaciones de la integral”.* La experiencia también ha sido muy positiva y la resolución de estos ejercicios ha tenido un componente gráfico muy importante, además, los alumnos han mostrado un alto interés por la resolución de este tipo de problemas.

q) Determinar el dominio de definición de una función enunciada mediante la redacción de un texto es muy difícil para la mayoría de los estudiantes, si a eso se le añade el cálculo de integrales definidas de funciones definidas a trozos o en valor absoluto entonces puede considerarse, para algunos de ellos, un obstáculo insalvable.

r) Los alumnos de ciencias sociales desconocen las medidas de superficie agrarias[37] y su equivalencia en el sistema métrico decimal.

s) Existe una escasez preocupante en las pruebas de acceso a las Universidades de Castilla y León, en las últimas convocatorias, de problemas en los cuales deba aplicarse el cálculo integral.

[37] Hectárea=ha=hm^2, área=a=dam^2 y centiárea=ca=m^2.

X.4. ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS

En el último ciclo de esta investigación, el profesor investigador y el director de la tesis modificaron y perfeccionaron el cuadernillo teórico-práctico de los ciclos de consolidación, el cual contenía un texto incompleto de la integral definida que debía ser cumplimentado por los alumnos; éste se entregó a los estudiantes, como en los cursos precedentes, inmediatamente después de ser explicada la teoría de la integral y, pasados unos días, el profesor los recogió cumplimentados por los alumnos.

X.4.1. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

En este último ciclo de cierre (ciclo VI de la presente investigación, curso 2008-2009, grupo 2º D) se asignaron cuarenta categorías de comprensión matemática[38] y las respuestas de los estudiantes, de los cuadernillos de la integral, han sido valoradas según la escala Likert[39].

Siguiendo el procedimiento de los capítulos anteriores[40], en el análisis de cada una de las categorías de comprensión matemática se escribirá en primer lugar las siglas con las cuales es reconocida junto con la expresión a la cual se refiere[41], después se detallará la actividad que se pretende realizar y el objetivo que se desea alcanzar, posteriormente se analizarán los datos según la escala Likert y, finalmente, se redactará una pequeña reflexión.

De nuevo, en el análisis de las respuestas escaneamos, en la mayoría de las ocasiones, la respuesta correcta de uno o varios alumnos que identificamos con el código de su autor o autores y, en ciertas ocasiones se han incluido otras respuestas de los estudiantes algunas de las cuales nos han llamado la atención por su originalidad o por los errores cometidos. Posteriormente,

---

[38] Véase la definición de las mismas en el capítulo VI y en el anexo D.

[39] Dicha escala establece cinco niveles de respuesta que van del 1 (mínimo) al 5 (máximo) y éstos son:

1. La respuesta es incorrecta en todos sus términos o no contesta.
2. La respuesta no es totalmente negativa, sin embargo, no se puede considerar aceptable.
3. La respuesta se considera incompleta, no incorrecta, se puede mejorar de forma sustancial.
4. La respuesta es válida, aunque puede ser mejorada mínimamente.
5. La respuesta es totalmente correcta.

[40] El texto es análogo al de los epígrafes VII.4.1, VIII.4.1 y IX.4.1, sin embargo, creemos conveniente rescribirlo de nuevo para situarnos en el contexto de la investigación y para que el lector pueda realizar una lectura secuencial y no indexada como se diría en lenguaje informático.

[41] Cualquier categoría de comprensión matemática la reconoceremos, una vez formalizada, por sus siglas.

se muestra la distribución de las respuestas emitidas mediante un diagrama poligonal donde hemos incluido la referencia (en negrita), es decir, las siglas de la categoría seguidas del año académico al cual corresponde la experimentación, en el eje horizontal hemos colocado los niveles precedidos de las siglas de la categoría y en el eje vertical los porcentajes[42] de los niveles de cada una de ellas. La figura o figuras escaneadas y el diagrama poligonal de cada categoría recibirán el nombre de *Gráficos X.4.1.n* donde *"n"* es el ordinal de la categoría[43] y las referencias a estos gráficos siempre serán de izquierda a derecha y de arriba abajo, además, cada uno de ellos llevará dos letras mayúsculas[44] que lo identifica y el primer gráfico corresponderá, generalmente, con la respuesta correcta de un estudiante, mientras que, el último será el diagrama poligonal[45]. Finalmente, por cada categoría, daremos la reflexión en la cual redactaremos las conclusiones y apreciaciones que consideremos más importantes.

Recordamos que la investigación del ciclo sexto se ha desarrollado durante el curso 2008-2009 con el grupo 2º D de segundo curso de bachillerato, formado por diecinueve estudiantes que han cursado Matemáticas aplicadas Ciencias Sociales II en el IES "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos. He aquí el análisis de las cuarenta categorías:

X.4.1.1. DGA: Determinación gráfica del área

Actividad 1: El estudiante tiene que señalar la superficie comprendida entre una función positiva $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$.

Objetivo: Obtener información sobre la comprensión de los alumnos para determinar gráficamente la superficie acotada por la gráfica de una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

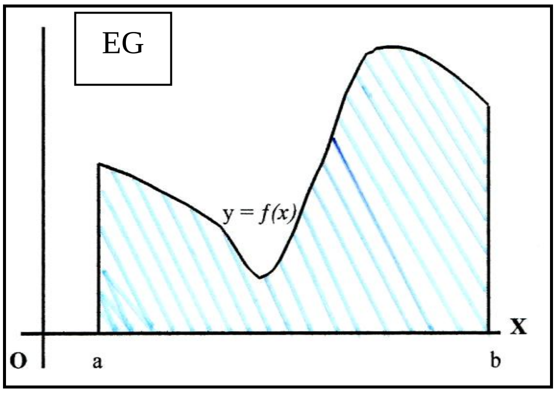
Análisis de datos: Tres alumnos responden erróneamente a esta cuestión, el resto lo hacen correctamente.

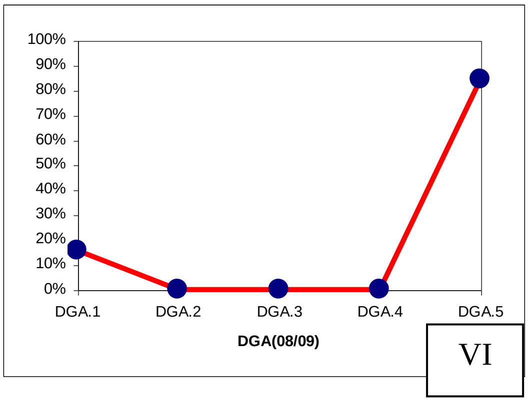
[42] Nos hemos decantado por los porcentajes de los alumnos que fueron evaluados según el nivel de la categoría porque resulta más sencilla su lectura que si consideramos las frecuencias absolutas.

[43] El ordinal de cada categoría ha de coincidir con el ordinal de su propia actividad.

[44] Las dos letras mayúsculas corresponderán al código del estudiante autor del gráfico.

[45] El diagrama poligonal llevará el código VI que identifica al sexto ciclo, es decir, el de cierre.





Gráficos X.4.1.1. Determinación gráfica del área (ciclo de cierre).

Reflexión: Según el gráfico estadístico VI, consideramos que los alumnos, con una lectura atenta del texto matemático, son capaces de señalar la superficie encerrada por la gráfica de una función continua y positiva definida en un intervalo compacto, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$.

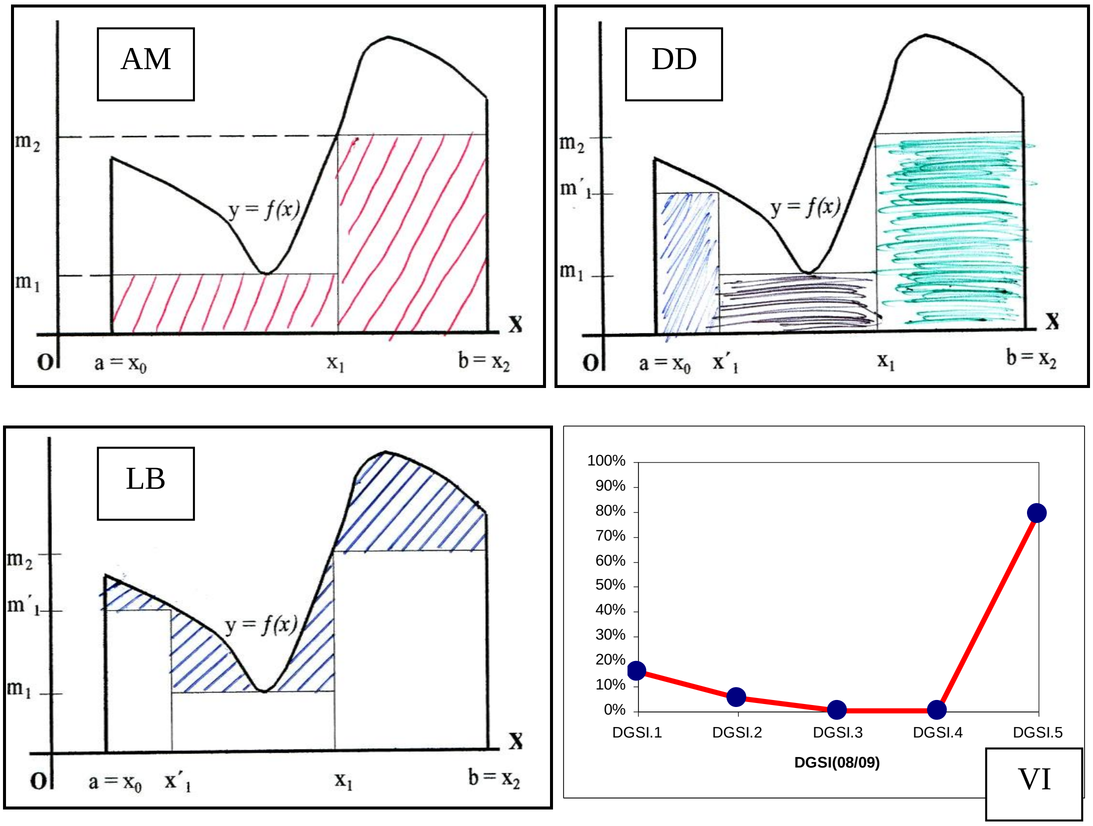
X.4.1.2. DGSI: Determinación gráfica de las sumas inferiores

Actividad 2: Los alumnos deben señalar gráficamente la suma inferior de la función anterior según una partición concreta del intervalo [a,b]. Se pide, además, que determinen la suma inferior de la misma función para un refinamiento de la partición anterior.

Objetivo: Analizar el grado de comprensión de los estudiantes para determinar gráficamente la suma inferior de una función positiva asociada a una partición. Asimismo, se vuelve a analizar la suma inferior de la misma función asociada a una nueva partición, más fina que la anterior.

Análisis de datos: La solución de esta actividad viene dada por los alumnos AM y DD. La alumna LB entiende *"la suma inferior es la comprendida entre los rectángulos inferiores y la gráfica de la función"*, quizá haya querido señalar el error que se comete al considerar el cálculo del área mediante las áreas de los rectángulos inferiores.

Reflexión: Los niveles de respuesta alcanzados en esta categoría están en el contexto de la anterior, no existe ninguna diferencia sustancial.



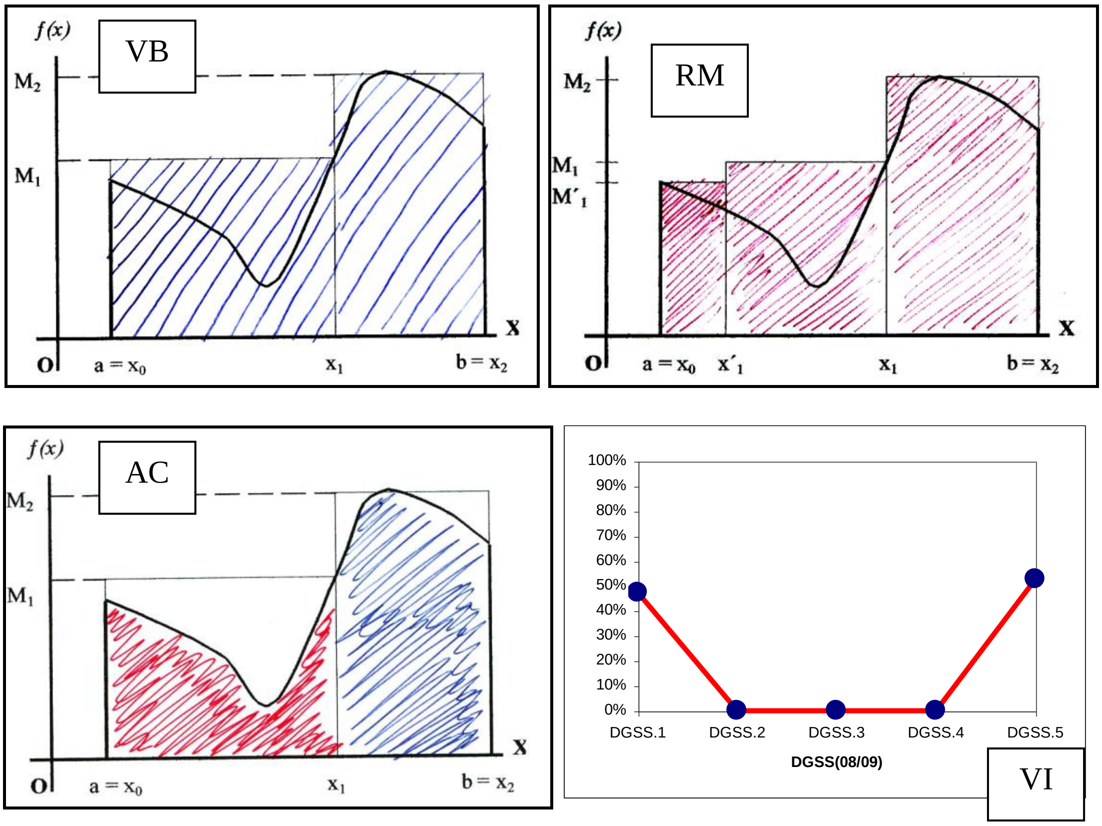
Gráficos X.4.1.2. Determinación gráfica de las sumas inferiores (ciclo de cierre).

X.4.1.3. DGSS: Determinación gráfica de las sumas superiores

Actividad 3: Los alumnos, siguiendo el criterio anterior, deben señalar gráficamente las sumas superiores de una función positiva asociada a las particiones *P* y *P´* del intervalo [a,b], siendo *P´* un refinamiento de *P.*

Objetivo: Análogo al anterior, es decir, estudiar el grado de comprensión de los alumnos para determinar gráficamente la suma superior de una función positiva asociada a una partición. Asimismo, se analiza la nueva suma superior de la misma función asociada a refinamiento de la partición inicial.

Análisis de datos: En esta categoría muchas respuestas son incorrectas y una de ellas es la dada por AC quien en realidad considera *"la solución de la primera categoría".* Dos respuestas no escaneadas determinan *"la suma superior como la superficie comprendida entre la parte superior de los rectángulos superiores y la gráfica de la función"*, así pues, no entienden la idea de aproximación del área mediante rectángulos, posteriormente en el refinamiento de la partición, como es lógico, la respuesta es errónea.



Gráficos X.4.1.3. Determinación gráfica de las sumas superiores (ciclo de cierre).

Reflexión: En el presente ciclo observamos, véase VI, que sólo el 52,63% (10 alumnos) responden correctamente la cuestión planteada en esta tercera categoría. El profesor investigador piensa que algunos de los estudiantes que dan la solución incorrecta tienen dificultades en la comprensión lectora de pequeños textos escritos y no transfieren correctamente la información entre los lenguajes castellano y matemático.

X.4.1.4. RSISR: Relación entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, la segunda un refinamiento de la primera

Actividad 4: El estudiante debe encontrar la relación existente entre el área que se pretende calcular, las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición y a un refinamiento de la primitiva partición.

Objetivo: Se pretende obtener información por la cual seamos capaces de descubrir hasta qué punto los alumnos comprenden la relación existente entre las diferentes sumas, combinando la visión gráfica de las categorías anteriores y la más sencilla expresión analítica.

Análisis de datos: Las respuestas de esta categoría son muy diversas: El alumno DB ha respondido correctamente (aunque la primera solución debió corregirla) y la alumna EP no comete ningún error puesto que mantiene las desigualdades, sin embargo, el objetivo era que estableciera la relación entre $s(f,P)$, $S(f,P)$, $s(f,P')$ y $S(f,P')$.

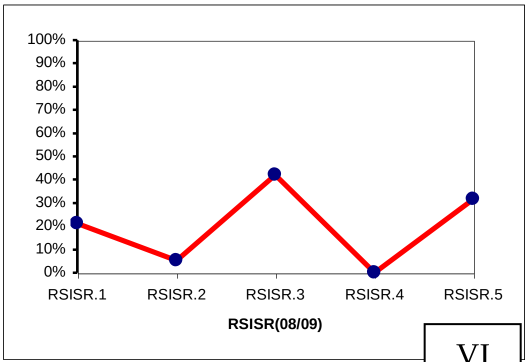
Suma inferior(f,P) ≤ Suma inferior (f, P') ≤ *Área*
Área ≤ *Suma superior(f,P')* ≤ Suma superior (f, P).

DB

Suma inferior(f,P) ≤ $m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1)$ ≤ *Área*
Área ≤ *Suma superior(f,P')* ≤ $M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1)$

EP

Reflexión: La tercera parte de los estudiantes comprenden y expresan correctamente la relación existente entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, una más fina que la otra. La cuarta parte[46] de los alumnos de 2º D responden muy deficientemente o su respuesta es incorrecta o no existe. Son 8 alumnos, 42,11%, a los cuales se les puede considerar que su respuesta es incompleta pero no errónea[47].



VI

Gráficos X.4.1.4. Relación entre las sumas inferiores y superiores para un refinamiento (ciclo de cierre).

X.4.1.5. ESIS: Expresión analítica de las sumas inferior y superior asociadas a una partición de 6 nodos

Actividad 5: El alumno tiene que saber generalizar las expresiones analíticas de las sumas inferior y superior de Darboux de una función asociadas a una partición de seis nodos.

Objetivo: Éste consiste en conocer el grado de adquisición de los conceptos suma inferior y superior por medio de expresiones analíticas más generales.

[46] Considerando los niveles de respuesta 1 y 2.

[47] Considérese, por ejemplo, la respuesta de la alumna EP.

Análisis de los datos: Una lectura atenta de la cuestión permite completarla con éxito a dieciséis estudiantes, dos alumnos han cometido un único error al cumplimentar los siete sumandos y GF no discrimina correctamente las sumas inferiores de las superiores ni los mínimos de los máximos.

$s(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + m_4(x_4 - x_3) + m_5(x_5 - x_4)$

SM

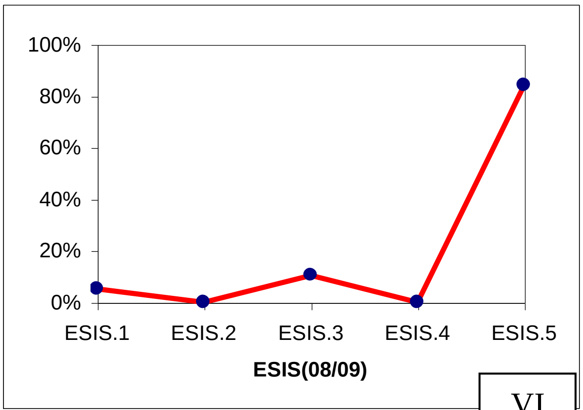
$S(f,P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + M_4(x_4 - x_3) + M_5(x_5 - x_4)$

$s(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + m_4(x_4 - x_3) + m_5(x_5 - x_4)$

GF

$S(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + m_4(x_4 - x_3) + m_5(x_5 - x_4)$

Reflexión: Un porcentaje muy elevado, 84,21%, de estudiantes responden correctamente a la actividad y constatamos que las respuestas de nivel 3 podían haber llegado al máximo nivel si los alumnos hubieran mostrado más atención en la lectura y cumplimentación de la cuestión correspondiente.



VI

Gráficos X.4.1.5. Expresión de las sumas inferiores y superiores de Darboux para seis nodos (ciclo de cierre).

Las respuestas de esta actividad mejoran significativamente las de la anterior y pensamos que ello es debido a que en la presente los alumnos deben completar una suma simbólica y en la cuarta actividad deben relacionar diferentes conceptos y, evidentemente, les resulta más difícil.

X.4.1.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux

Actividad 6: Los alumnos deben expresar literalmente lo que entienden por integral inferior y superior de Darboux, previamente, han sido definidas matemáticamente ambas integrales.

Objetivo: No es suficiente con que los alumnos aprendan la definición matemática de ambas integrales[48] y su expresión analítica, más bien, se pretende determinar el grado de comprensión que poseen los estudiantes de estos dos conceptos del análisis matemático.

Análisis de los datos: Pensamos que la respuesta de SM es correcta aunque, posiblemente, debiera haber precisado algo más. DD duda del concepto de integral inferior y recurre a la geometría para poderlo entender y explicar. La alumna RH no ha interiorizado la escritura de un intervalo cerrado y en lugar de tomar el conjunto de todas las sumas superiores, sólo recurre a la suma superior de la partición P sin precisar dicha partición. DA escribe incoherencias.

INTEGRAL INFERIOR DE DARBOUX: La entendemos como la más grande de todas las áreas calculadas por debajo de la función en el intervalo [a,b]

SM

INTEGRAL INFERIOR DE DARBOUX: Se halla poniendo como máximo el punto inferior máximo de la Función en $m_1(x_1 - x_0)$ y en $m_2(x_2 - x_1)$. A simple vista, y sin entender mucho sobre el asunto, creo que se trata de hallar el área mínima de la Función, mediante geometría. Los rectángulos con lo que se halla nunca sobrepasan la Función.

DD

[48] Integral inferior y superior de Darboux.

INTEGRAL SUPERIOR DE DARBOUX: Es el extremo inferior de la suma superior de la partición "p". perteneciente a la función "f" donde "p" es partición del intervalo cerrado "a,b".

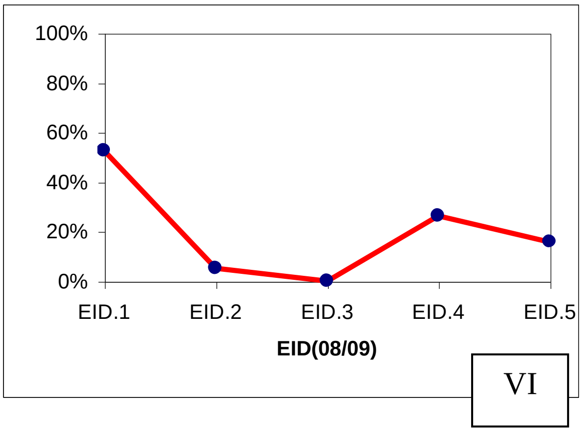
RH

INTEGRAL SUPERIOR DE DARBOUX: Es una suma de resta de una particiones hechas por las funciones correspondientes.

DA

Reflexión: Se constata, una vez más, que a muchos estudiantes les resulta muy difícil redactar, con sus propias palabras, conceptos matemáticos tales como integral inferior y superior de Darboux una vez definidos y formalizados matemáticamente.

Podemos confirmar: *"Más de la mitad de los alumnos no han adquirido el suficiente lenguaje verbal asociado a las distintas expresiones simbólico-matemáticas".*



Gráficos X.4.1.6. Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux (ciclo de cierre).

A partir de este momento y en las diez próximas categorías estudiamos la función $f(x)=\begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional\ en\ [0,4] \\ 2 & si\ x\ es\ irracional\ en\ [0,4] \end{cases}$, que la reconocemos como función de Dirichlet, la cual no es integrable en el sentido Darboux ni Riemann.

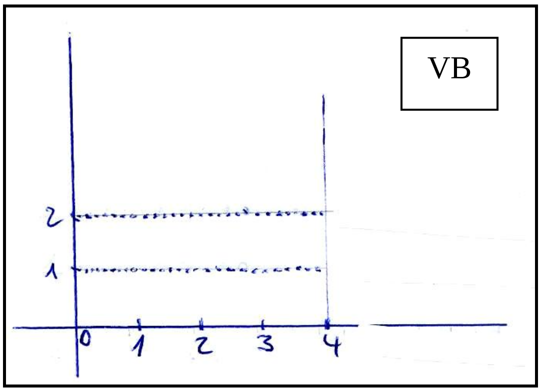
Adelantándonos a los resultados gráficos podemos afirmar que los alumnos representan aceptablemente la función, sin embargo, la comprensión del concepto de integrabilidad según Darboux les resulta dificultoso. Las diez categorías siguientes comienzan con la letra **D**.

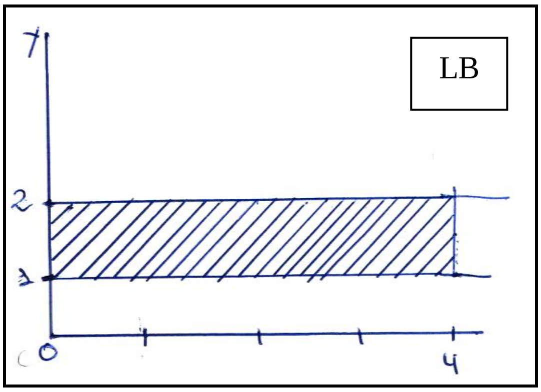
X.4.1.7. DR: Representación de la función de Dirichlet

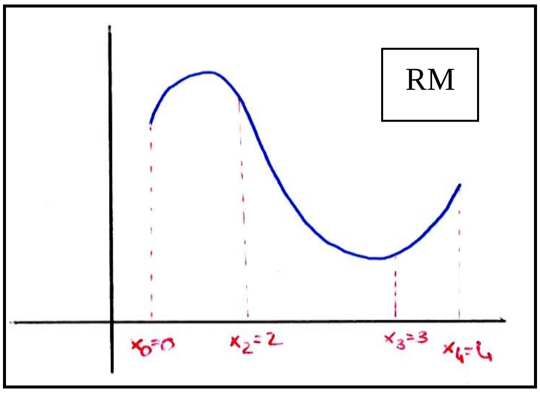
Actividad 7: Consiste, recordando la función de Dirichlet, en representar la función anterior que toma un determinado valor en los puntos racionales del intervalo [0,4] y otro valor en los puntos irracionales del mismo intervalo.

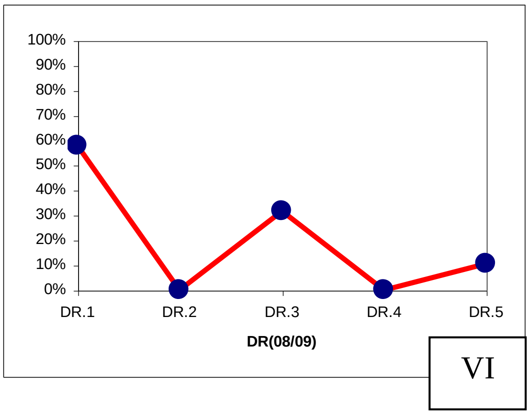
Objetivo: Analizar si el estudiante comprende que entre dos números racionales del intervalo [0,4] siempre hay un número irracional y viceversa, es decir, que los conjuntos de los números racionales (Θ) e irracionales (I) son densos en el cuerpo de los números reales (P).

Análisis de datos: En el gráfico de la alumna VB se observa que ha considerado la densidad de ambos conjuntos en los reales y, además, la autora ha expresado, por medio de los segmentos punteados, que según la naturaleza de cada punto del intervalo compacto [0,4] la función toma un único valor: 1 ó 2. La alumna LB no ha determinado la ordenada de cada punto del dominio de definición de la función, es más, ha considerado la aplicación $f(x)$=[1,2] si x es un punto del intervalo [0,4][49]. El alumno RM ni siquiera ha señalado correctamente los puntos del eje de abscisas.









[49] Entendemos, por el dibujo, que LB ha determinado correctamente el dominio de definición de $f(x)$.

Gráficos X.1.4.7. Dirichlet representación (ciclo de cierre).

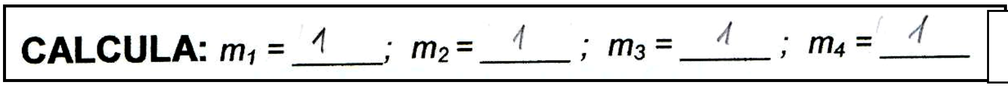
Reflexión: Sólo dos alumnos han representado correctamente la función de Dirichlet, seis deben mejorarla determinando correctamente el dominio de definición y el resto, 57,89%, no lo intentan o lo hacen mal en todos sus términos. En este ciclo de cierre debemos observar que varios alumnos representan la función, como LB, considerando la superficie rectangular cuyos vértices son: A(0,1); B(4,1); C(0,2) y D(4,2).

X.4.1.8. DMIN4: Mínimos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos

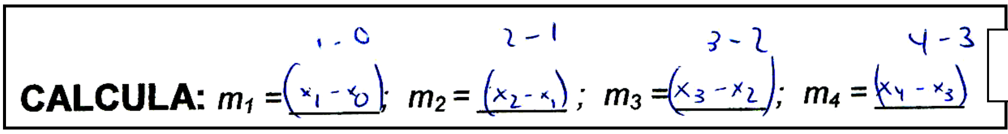
Actividad 8: Los alumnos deben determinar los mínimos absolutos de la función de Dirichlet en 4 subintervalos, de igual amplitud, del intervalo [0,4].

Objetivo: Pretendemos controlar el nivel de comprensión por parte de los estudiantes del concepto de mínimo de una función en un subintervalo.

Análisis de los datos: El alumno RS ha determinado correctamente los cuatro mínimos, no así, DD que ha considerado la amplitud teórica de los subintervalos y después ha escrito la amplitud real de cada uno de ellos.

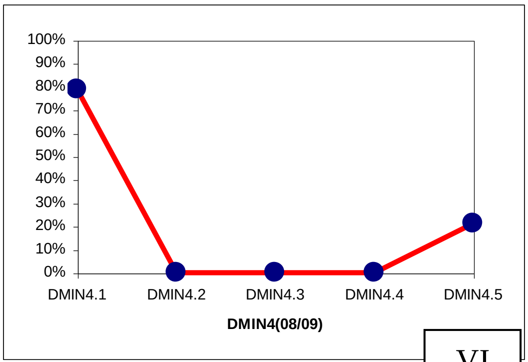


RS



DD

Reflexión: Poco más de la quinta parte de los estudiantes de 2º D han determinado correctamente los cuatro mínimos absolutos, varios alumnos han expresado $m_i = x_i - x_{i-1}$ y el resto se ha limitado a no contestar o sus respuestas son totalmente erróneas.



VI

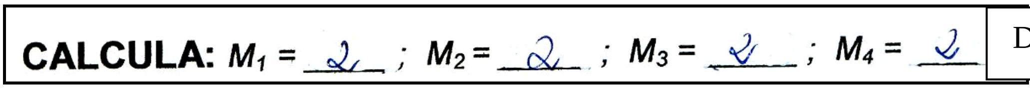
Gráficos X.4.1.8. Cálculo de los mínimos en 4 subintervalos (ciclo de cierre).

X.4.1.9. DMAX4: Máximos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos

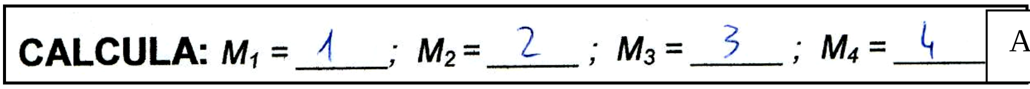
Actividad 9: Los alumnos deben determinar los máximos absolutos de la función de Dirichlet en los 4 subintervalos anteriores.

Objetivo: Deseamos saber el nivel de comprensión de los alumnos del concepto de máximo de una función en un subintervalo.

Análisis de los datos: El alumno DB ha calculado correctamente los máximos de la función en cada subintervalo; sin embargo, SA ha considerado cada máximo el correspondiente a la función $g(x)=x$, que es la que representó como $f(x)$, en cada uno de los subintervalos que conforman el intervalo [0,4].

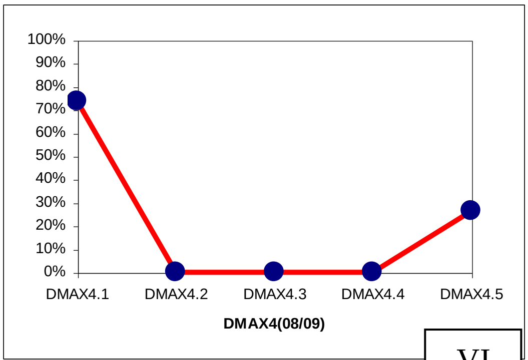


DB



AM

Reflexión: En el contexto de la representación de la función de Dirichlet, cinco alumnos, 26,31%, determinan correctamente los cuatro máximos, el resto lo hacen mal.



VI

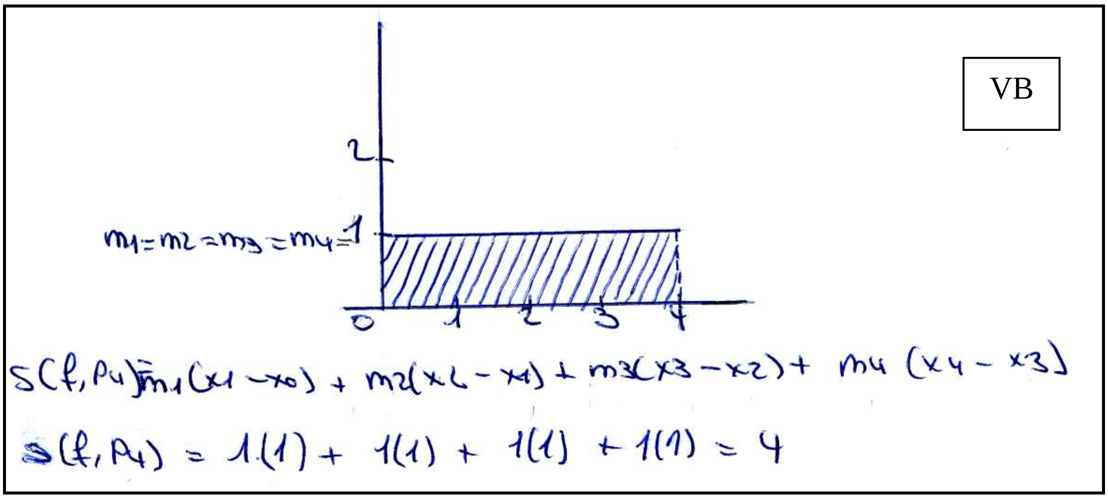
Gráficos X.4.1.9. Cálculo de los máximos en 4 subintervalos (ciclo de cierre).

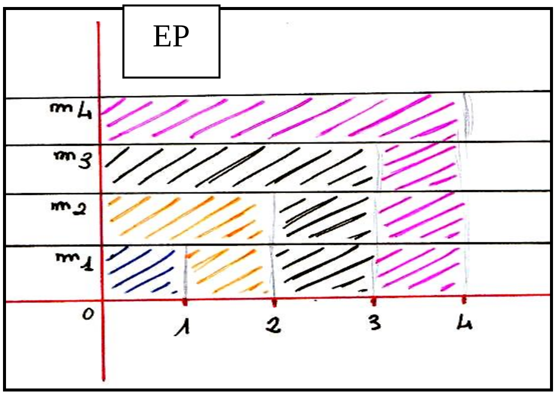
X.4.1.10. DSI4: Representa y calcula la suma inferior según DMIN4

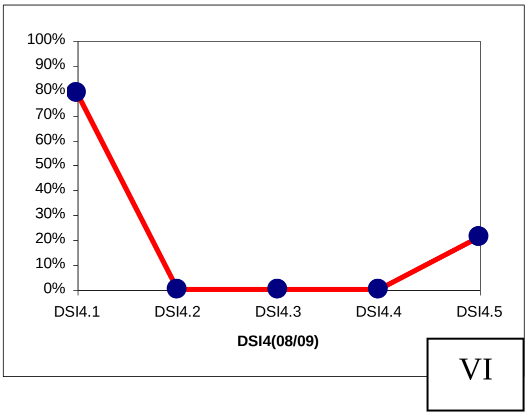
Actividad 10: Los alumnos deben determinar la suma inferior de la función de Dirichlet para los mínimos obtenidos en la categoría DMIN4.

Objetivo: Deseamos conocer el grado de comprensión de los estudiantes de la representación gráfica y su capacidad de expresión analítica de la suma inferior de Darboux de la función de Dirichlet asociada a una partición de cinco nodos del intervalo [0,4].

Análisis de los datos: La alumna VB dibuja y calcula s(f,P_4) de forma precisa. EP no calcula la suma inferior y la representación gráfica de la misma es totalmente disparatada[50].







Gráficos X.4.1.10. Representación y cálculo de s(f,P_4) (ciclo de cierre).

Reflexión: Los resultados de esta categoría siguen siendo muy pobres, aunque, como parece lógico, se mantienen respecto a las dos categorías de comprensión matemática anteriores.

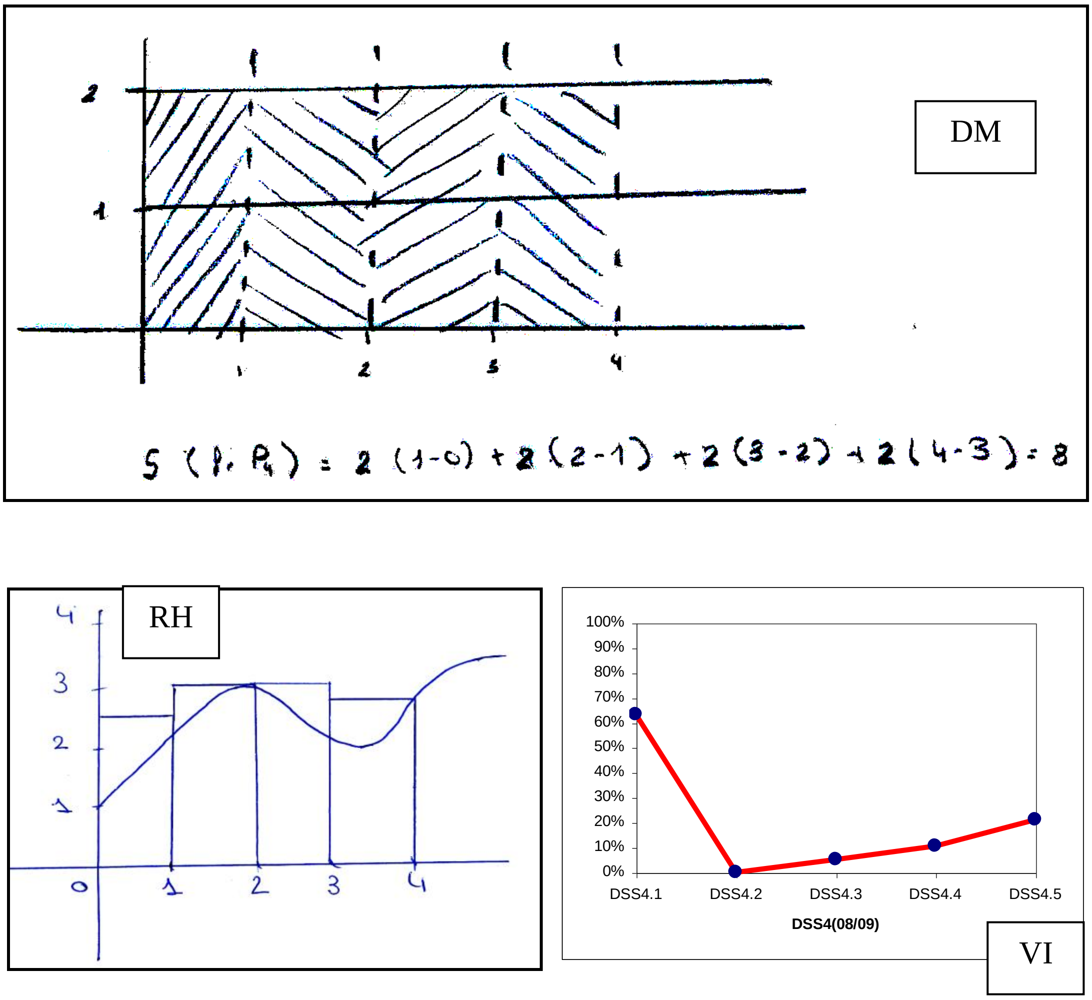
X.4.1.11. DSS4: Representa y calcula la suma superior según DMAX4

Actividad 11: Los alumnos deben determinar la suma superior de la función de Dirichlet para los máximos obtenidos en la categoría DMAX4.

[50] El PI preguntó a EP: *¿Cuánto piensas que puede valer la suma inferior?*
Esta alumna matizó, aunque no escribió: *"La suma de las superficies de cada color".*

Objetivo: Deseamos conocer el grado de comprensión de los estudiantes de la representación gráfica y su capacidad de expresión analítica de la suma superior de la función asociada a una partición de cinco nodos.

Análisis de los datos: El alumno DM dibuja y calcula correctamente S(f,P_4). La alumna RH expresa mal gráficamente la suma superior para cualquier función puesto que la altura del primer rectángulo es superior al máximo de la función en el intervalo [0,1].



Gráficos X.4.1.11. Representación y cálculo de S(f,P_4) (ciclo de cierre).

Reflexión: Cuatro alumnos representan y calculan correctamente la suma superior; dos hacen bien el dibujo y escriben, sin ninguna justificación, S(f,P_4)=8; solamente uno la representa y doce estudiantes no han sido capaces de determinar la superficie superior ni calcular su área.

X.4.1.12. DSI8: Dirichlet, suma inferior en 8 subintervalos

Actividad 12: Los alumnos deben determinar la suma inferior de la función de Dirichlet asociada a la partición $P_8 = \{i/8\}_{i=0}^{8} = \{i/2\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,4].

Objetivo: Pretendemos obtener el nivel de comprensión por parte de los alumnos del cálculo de s(f,P_8).

Análisis de datos: El alumno DM ha escrito m=1, entendemos que hace referencia a cada uno de los mínimos de cada subintervalo, y ha calculado correctamente la suma inferior. La alumna SM en lugar de escribir las amplitudes de los subintervalos ha escrito la suma de sus extremos, es decir, ha intentado expresar la suma inferior según la expresión genérica de la misma y no lo ha conseguido[51].

$m=1$

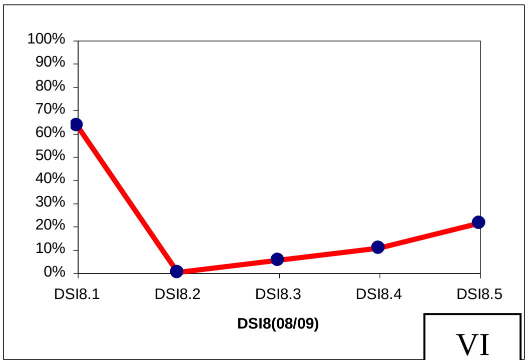
$s(f,P_8) = 1(0,5-0) + 1(1-0,5) + 1(1,5-1) + 1(2-1,5) + 1(2,5-2) + 1(3-2,5) + 1(3,5-3) + 1(4-3,5) = 8\cdot 0,5 = 4.$

DM

$s(f,P_8) = w_1(x_1+x_0) + w_2(x_2+x_1) + w_3(x_3+x_2) + w_4(x_4+x_3) + w_5(x_5+x_4) + w_6(x_6+x_5) + w_7(x_7+x_6) + w_8(x_8+x_7) = $ ______

SM

Reflexión: El análisis de las respuestas de los alumnos de 2º D a la presente categoría hace suponer que los estudiantes no estudian o no comprenden suficientemente los textos matemáticos y, como tal, los resultados son muy pobres.



VI

Gráficos X.4.1.12. Dirichlet, cálculo de la suma inferior en 8 subintervalos (ciclo de cierre).

[51] Pensamos que la alumna SM lee los textos matemáticos sin prestar la menor atención a las notaciones y a las ideas que transmiten.

X.4.1.13. DSS8: Dirichlet, suma superior en 8 subintervalos

Actividad 13: Los alumnos deben determinar la suma superior de la función de Dirichlet asociada a la partición $P_8 = \left\{\frac{4i}{8}\right\}_{i=0}^{8} = \left\{\frac{i}{2}\right\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,4].

Objetivo: Pretendemos obtener el nivel de comprensión por parte de los estudiantes del cálculo de S(f,P_8).

Análisis de datos: El alumno RS expresa y determina correctamente la suma superior. Sin embargo, el alumno AM ha calculado mal la diferencia de los extremos de cada subintervalo, no ha descubierto el valor de los ocho máximos y, al final, ha ignorado la expresión suma dando como solución el intervalo [0,4].

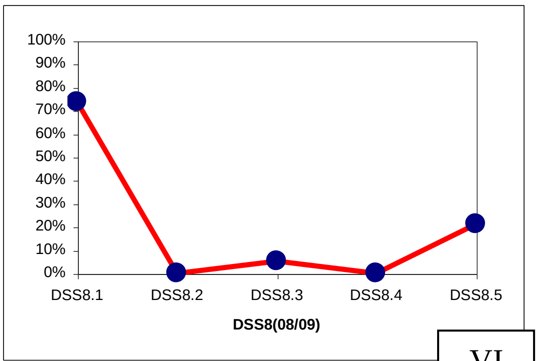
S(f,P₈) = 2·(0,5−0) + 2·(1−0,5) + 2·(1'5−1) +
+ 2·(2−1'5) + 2·(2'5−2) + 2·(3−2'5) +
+ 2·(3'5−3) + 2·(4−3'5) = 8

RS

S(f,P₈) = M1(0−0'5) + M2(0'5−1) + M3(1−1'5) +
+ M4(1'5−2) + M5(2−2'5) + M6(2'5−3) +
+ M7(3−3'5) + M8(3'5−4) = [0,4]

AM

Reflexión: Los resultados de esta categoría, similar a la anterior, no mejoran, incluso, podemos afirmar que empeoran. Nueve alumnos no contestan a la cuestión y cinco responden de forma imprecisa e incoherente dando respuestas análogas a la de AM.



VI

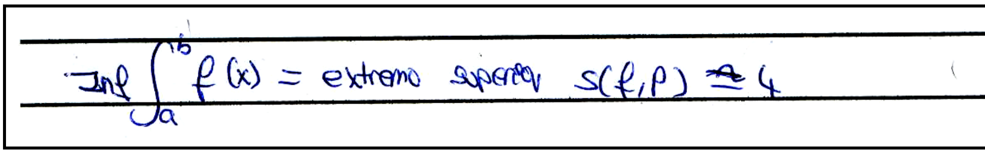
Gráficos X.4.1.13. Dirichlet, cálculo de la suma superior en 8 subintervalos (ciclo de cierre).

X.4.1.14. DIINF: Dirichlet integral inferior

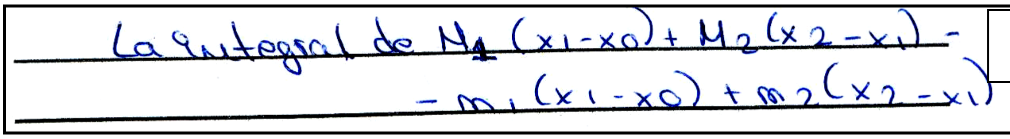
Actividad 14: Los alumnos deben calcular el extremo superior de las sumas inferiores, es decir, la integral inferior de la función de Dirichlet.

Objetivo: Se pretende concretar el grado de comprensión de los estudiantes del concepto de integral inferior de Darboux de la función de Dirichlet o del extremo superior de las sumas inferiores.

Análisis de los datos: La alumna VB ha expresado, en notación matemática, la integral inferior de Darboux, además, en un principio consideró que el valor de la misma es aproximadamente 4 y seguidamente ha rectificado estableciendo la igualdad. Por el texto escrito, creemos que la alumna RH ha considerado la integral inferior como la diferencia entre las suma superior e inferior, $S(f,P_2) - s(f,P_2)$, y ello nos hace suponer que ha intentado aplicar el teorema de caracterización de las funciones integrables.

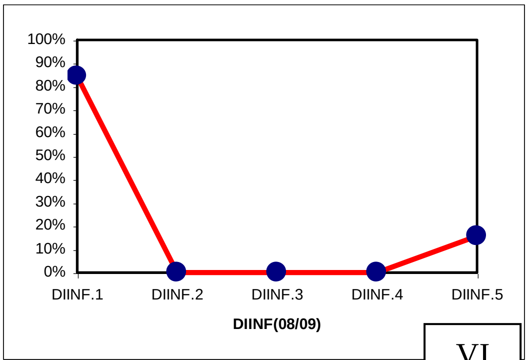

$\text{Inf} \int_a^b f(x) = \text{extremo superior } s(f,P) \simeq 4$

VB


La integral de $M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)-$
$-m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1).$

RH

Reflexión: Sólo tres estudiantes, 15,79%, han hallado correctamente la integral inferior de Darboux; el resto divagan (cuatro alumnos), o se limitan a no contestar (doce).



VI

Gráficos X.4.1.14. Dirichlet integral inferior (ciclo de cierre).

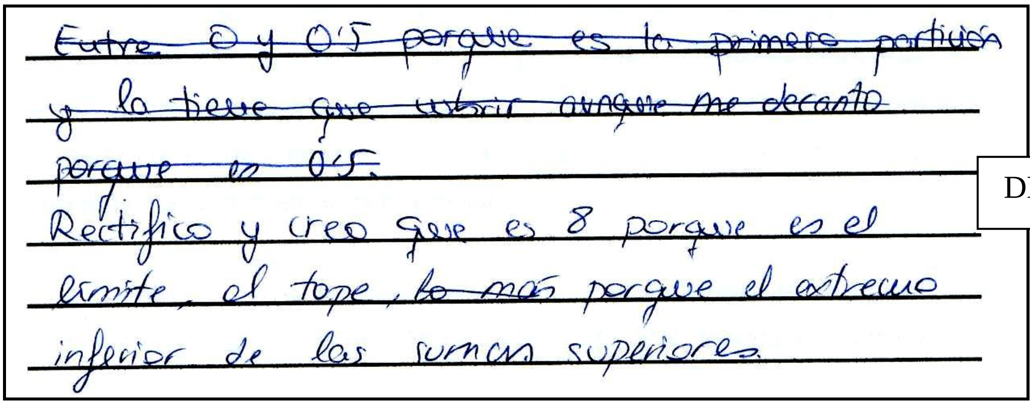
En este ciclo de cierre los resultados obtenidos hasta el momento, en las categorías correspondientes a la función de Dirichlet, son inferiores a los de los ciclos anteriores, lo cual nos hace sospechar que la mayoría de los estudiantes de este grupo tienen un bajo nivel matemático y su interés por esta ciencia puede considerarse prácticamente nulo.

X.4.1.15. DISUP: Dirichlet integral superior

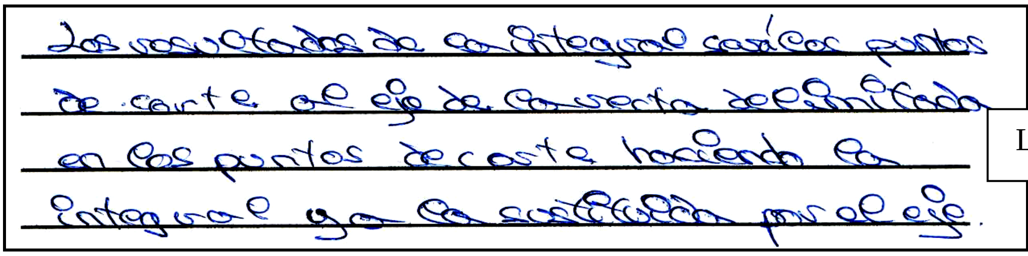
Actividad 15: Los alumnos deben calcular el extremo inferior de las sumas superiores, es decir, la integral superior de la función de Dirichlet.

Objetivo: Se pretende concretar el grado de comprensión de los estudiantes del concepto de integral superior de la función de Dirichlet o, lo que es lo mismo, el extremo inferior de las sumas superiores de Darboux.

Análisis de los datos: Pensamos que el alumno DB en un primer momento tomó el diámetro de la partición $P_8 = \{i/2^8\}_{i=0}$ y, posteriormente, rectificó dando la solución correcta. La respuesta de LB se comenta por sí misma.

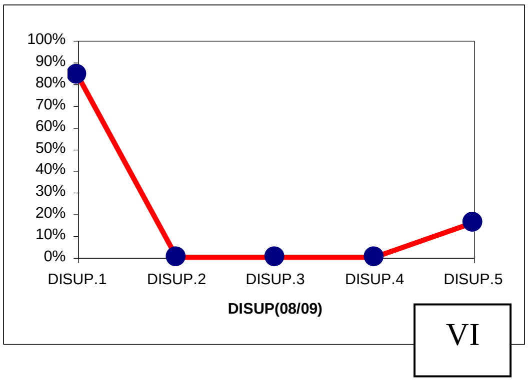

~~Entre 0 y 0'5 porque es la primera partición y la tiene que cubrir aunque me decanto porque es 0'5.~~
Rectifico y creo que es 8 porque es el límite, el tope, ~~lo más~~ porque el extremo inferior de las sumas superiores.

DB


Los resultados de la integral cambios puntos de corte al eje de la recta delimitado en los puntos de corte haciendo la integral ya la calculada por el eje.

LB

Reflexión: Los resultados de esta categoría son coincidentes con los de la anterior y confirman lo expresado previamente.



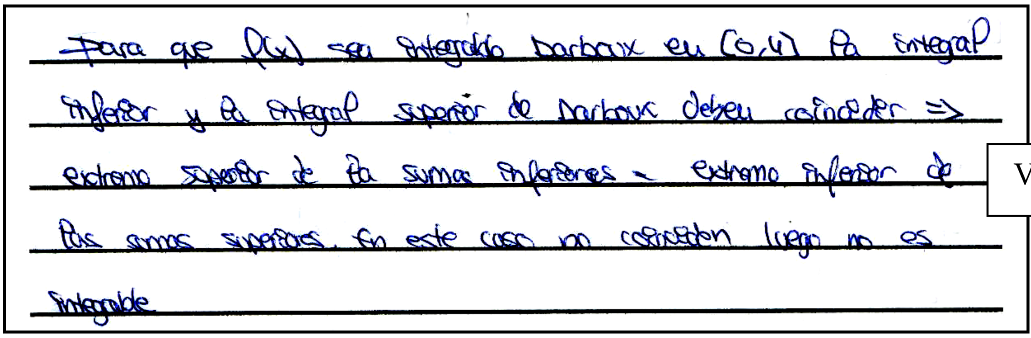
Gráficos X.4.1.15. Dirichlet integral superior (ciclo de cierre).

X.4.1.16. DNI: Dirichlet no integrable

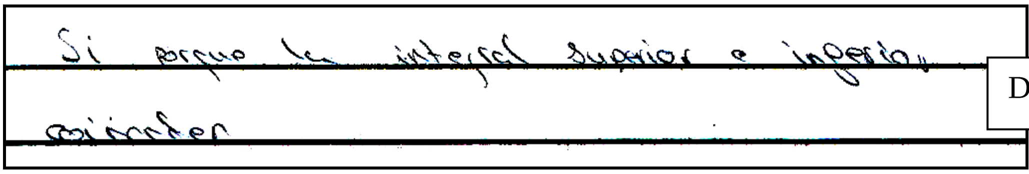
Actividad 16: Consiste en razonar si la función de Dirichlet, que ha sido estudiada anteriormente, es integrable o no en el sentido Darboux.

Objetivo: Se trata, mediante un ejemplo de función no integrable Darboux, de determinar el nivel de comprensión de los alumnos del concepto de integrabilidad en el sentido Darboux.

Análisis de los datos: La alumna VB lo explica muy bien puesto que define el concepto de integrabilidad y termina deduciendo que la función de Dirichlet no es integrable en el sentido Darboux. El alumno DT afirma erróneamente que es integrable aunque, previamente, no determinó las integrales inferior y superior de Darboux.

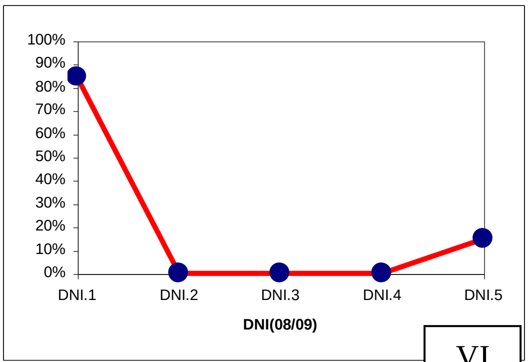

Para que f(x) sea integrable Darboux en [0,1] la integral inferior y la integral superior de Darboux deben coincidir ⇒ extremo superior de la suma inferiores = extremo inferior de las sumas superiores. En este caso no coinciden luego no es integrable

VB


Si porque la integral superior e inferior coinciden

DT

Reflexión: De nuevo, como en las dos categorías de comprensión matemática anteriores, tres alumnos deducen correctamente la no integrabilidad de la función de Dirichlet[52]. Muy pocos estudiantes representaron bien dicha función y en estas diez últimas categorías un porcentaje escaso de alumnos han sido los que han alcanzado el nive



VI

Gráficos X.4.1.16. Dirichlet no integrable (ciclo de cierre).

[52] Los tres estudiantes que obtienen el máximo nivel en esta categoría, también lo obtuvieron en las categorías de comprensión matemática DIINF y DISUP.

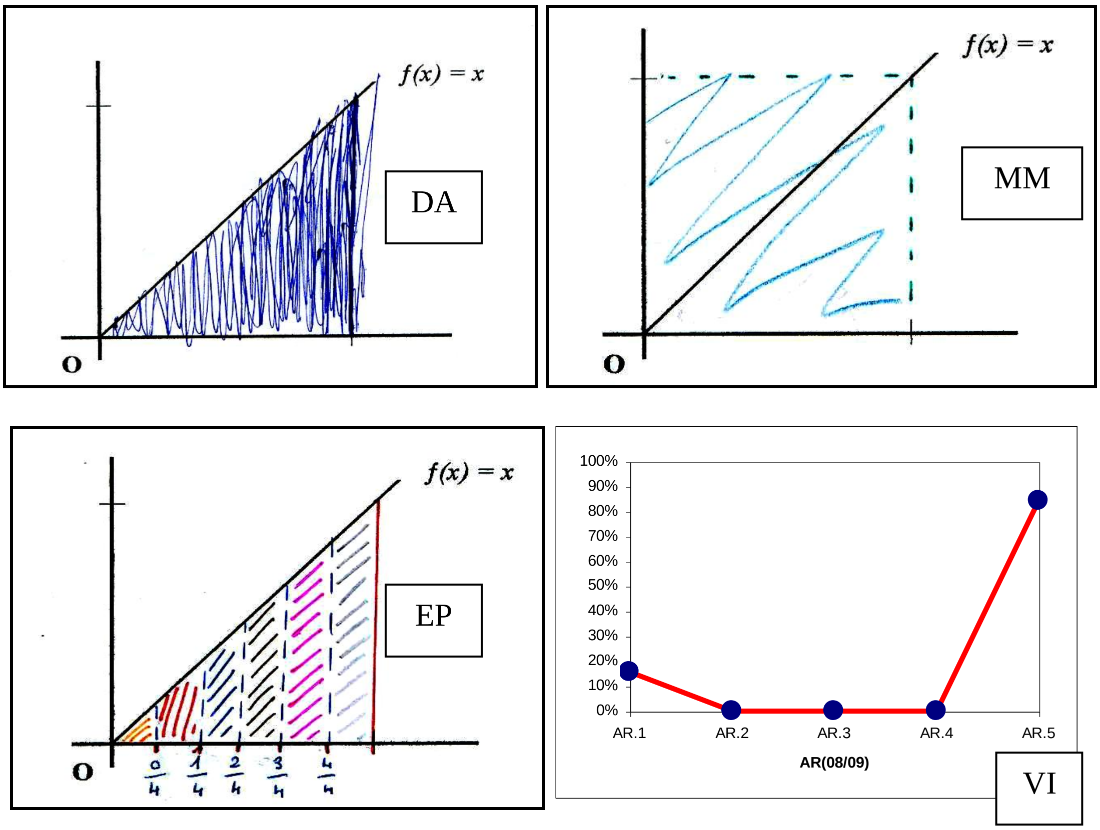
A partir de este momento y en las próximas 15 categorías estudiaremos la función afín *ƒ(x)=x* y seguiremos con categorías similares a las estudiadas anteriormente de la función de Dirichlet. Todas comienzan con la letra **A**.

X.4.1.17. AR: Representar el área determinada por la función afín

Actividad 17: Consiste en representar la superficie determinada por la función afín *ƒ(x)=x,* el eje de abscisas y las rectas verticales *x=0* y *x=1.*

Objetivo: El alumno debe determinar gráficamente, con total precisión, la superficie del área que posteriormente se pretende calcular.

Análisis de los datos: Puede considerarse que DA determina correctamente la superficie aunque de forma imprecisa, pensamos que la alumna MM desconoce quien es el eje de abscisas y EP no localiza como es debido los punto sobre el eje *OX*.



Gráficos X.4.1.17. Representar el área determinada por la función afín (ciclo de cierre).

Reflexión: En este ciclo, dieciséis alumnos representan correctamente la superficie pedida, dos lo hacen mal y uno no contesta. Los niveles de respuesta alcanzados en AR contrastan sustancialmente con los de DR.

X.4.1.18. AMIN4: Mínimos de la función afín para una partición de 4 subintervalos

Actividad 18: Los alumnos deben determinar los mínimos de la función afín en 4 subintervalos del intervalo [0,1].

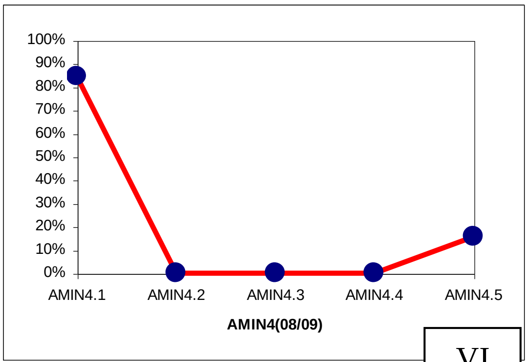
Objetivo: Se pretende controlar el nivel de comprensión, por parte de los estudiantes, del concepto de mínimo de una función en un subintervalo.

Análisis de los datos: DB ha considerado primeramente las amplitudes genéricas de cada subintervalo y después ha determinado correctamente cada uno de los mínimos. La solución primera dada por DB ha sido la respuesta de varios alumnos y otros han considerado la amplitud de cada uno de los subintervalos, es decir, $m_i = \frac{i}{4} - \frac{i-1}{4} = \frac{1}{4}$, desde *i*=1 hasta 4.

$\mathbf{m_1} = \cancel{(x_1 - x_0)}\ 0$; $\mathbf{m_2} = \cancel{(x_2 - x_1)}\ 0'25 = \frac{1}{4}$;
$\mathbf{m_3} = \cancel{(x_3 - x_2)}\ 0'50 = \frac{1}{2}$; $\mathbf{m_4} = \cancel{(x_4 - x_3)}\ 0'75 = \frac{3}{4}$

DB

Reflexión: Sólo tres alumnos determinan los cuatro mínimos; el resto no contestan o cometen errores iguales o similares a los comentados anteriormente y un alumno, en lugar de tomar los mínimos, selecciona los máximos.



VI

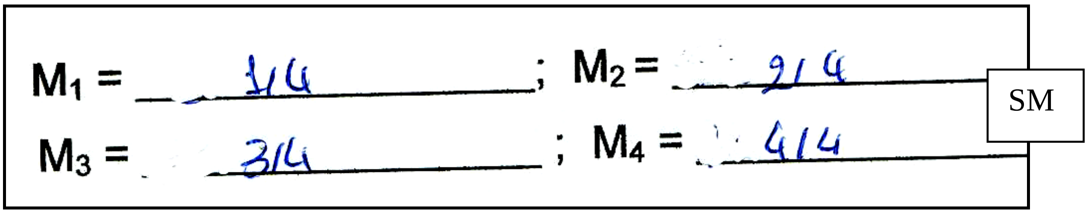
Gráficos X.4.1.18. Cálculo de los mínimos, afín, en 4 subintervalos (ciclo de cierre).

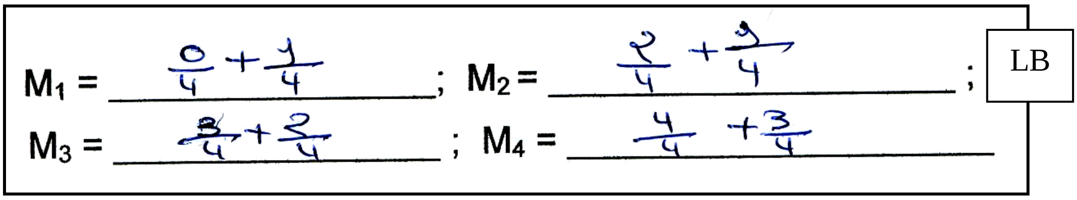
X.4.1.19. AMAX4: Máximos de la función afín para una partición de 4 subintervalos

Actividad 19: Los alumnos deben determinar los máximos de la función afín en 4 subintervalos del intervalo [0,1].

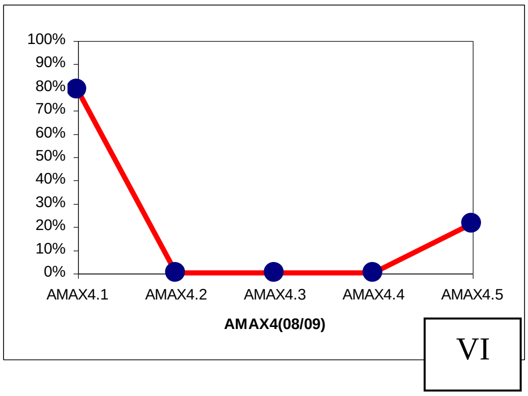
Objetivo: Deseamos determinar el nivel de comprensión, por parte de los estudiantes, del concepto de máximo de una función en un subintervalo.

Análisis de los datos: La alumna SM, después de rectificar, ha calculado los máximos. LB ha considerado la suma de los extremos de cada subintervalo y en la categoría anterior en lugar de sumar ha restado siendo el minuendo el extremo inferior y el sustraendo el extremo superior de cada subintervalo.





Reflexión: En esta categoría poco más de la quinta parte de los alumnos hallan los cuatro máximos y para el resto de las respuestas de los estudiantes sirve la reflexión anterior.



Gráficos X.4.1.19. Cálculo de los máximos, afín, en 4 subintervalos (ciclo de cierre).

X.4.1.20. ASI4: Representa y calcula la suma inferior según AMIN4

Actividad 20: Los estudiantes deben determinar, en primer lugar, la superficie asociada a $s(f,P_4)$ y, después, calcular $s(f,P_4)$.

Objetivo: Deseamos controlar el nivel de comprensión y asociación de los alumnos de los registros gráfico, algebraico y numérico de la suma inferior.

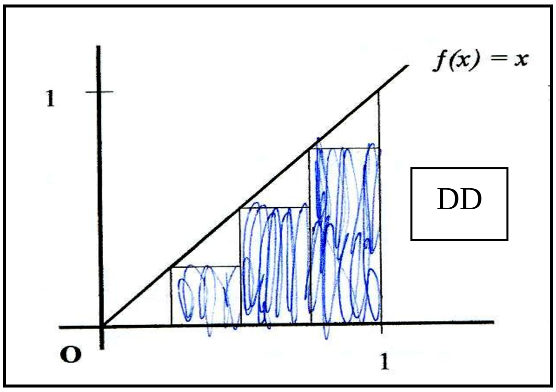
Análisis de los datos: El alumno DD ha señalado correctamente la superficie inferior y DM ha calculado con total precisión la suma inferior de la función afín asociada a la partición P_4={0; 0,25; 0,5; 0,75; 1}. RH ha considerado cada sumando igual a la amplitud del subintervalo correspondiente olvidándose de los respectivos mínimos, así pues, el error es manifiesto y esta alumna podía haberse percatado del mismo si hubiera sido más crítica con la propia solución obtenida.

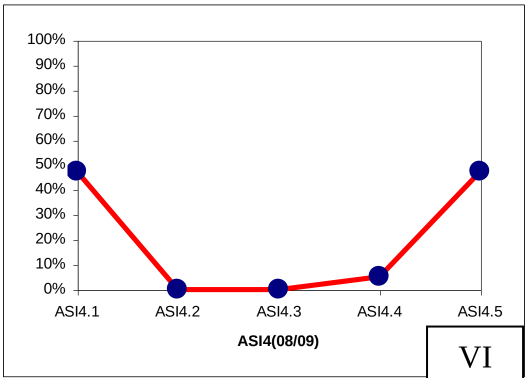
$s(f,P_4) =$ 0 (0,25 - 0) + 0,25 (0,5 - 0,25) + 0,5 (0,75 - 0,5) + 0,75 (1 - 0,75) = 0,0625 + 0,125 + 0,1875 = 0,375

DM

$s(f,P_4) =$ 0'25 + 0'25 + 0'25 + 0'25 = 1 = 1

RH





VI

Gráficos X.4.1.20. Representación y cálculo de la suma inferior de la función afín en 4 subintervalos (ciclo de cierre).

Reflexión: De todos los alumnos de 2º D, sólo el 50% de los mismos representan y calculan correctamente la suma inferior de Darboux de la función afín asociada a la categoría AMIN4.

X.4.1.21. ASS4: Representa y calcula la suma superior según AMAX4

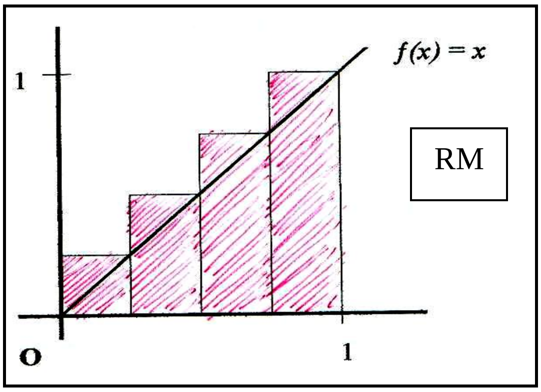
Actividad 21: Los estudiantes deben determinar, en primer lugar, la superficie asociada a $S(f,P_4)$ y, después, calcular $S(f,P_4)$.

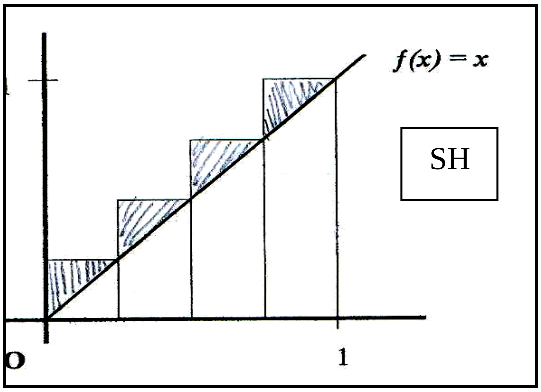
Objetivo: Deseamos controlar el nivel de comprensión y asociación de los alumnos de los registros gráfico, algebraico y numérico de la suma superior.

Análisis de los datos: El alumno RM señala con total precisión la superficie superior. La alumna SH considera que dicha superficie está formada por las porciones rectangulares que verifican la inecuación $y \geq x$.

Al calcular S(f,P_4) los alumnos comenten muchos errores y prueba de ello son las dos soluciones escaneadas: La alumna SM, si consideramos la segunda fracción de cada sumando, toma correctamente los cuatro máximos[53], además, en los dos primeros sumandos las amplitudes de los subintervalos son correctas y erróneas en los dos siguientes, sin embargo, la gravedad de su respuesta está en que realiza mal el producto de fracciones.

El estudiante DA aparenta expresar bien, teóricamente, la suma superior escribiendo todas las letras con mayúsculas; sin embargo, consideramos que lo hace mal puesto que la suma inferior la expresó exactamente igual pero con letras minúsculas y esto nos permite inferir que este alumno no ha captado el significado de $x_i – x_{i-1}$.





S(f,P_4) = 1/4 · 1/4 + 1/4 . 2/4 +
\+ 2/4 · 3/4 + 3/4 · 4/4 =
= 1/4 + 2/4 + 3/4 + 4/4 = 10/4

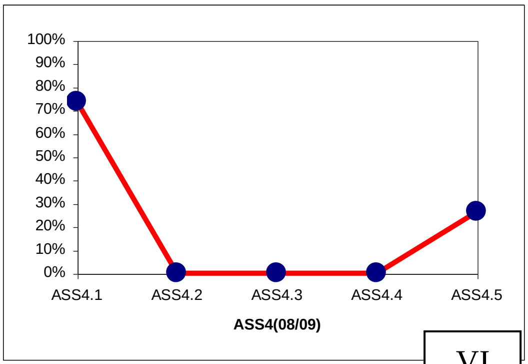
SM

S(f,P_4) = M₁ (X₁ − X₀) + M₂ (X₂ − X₁) +
\+ M₃ (X₃ − X₂) + M₄ (X₄ − X₃) =
= ________ = ________

DA

[53] Véase *Gráficos X.4.1.19-SM.*

Reflexión: Con los antecedentes redactados anteriormente, poco más de la quinta parte de los alumnos han representado y calculado correctamente S(f,P_4), según consta en el gráfico estadístico VI.



VI

Gráficos X.4.1.21. Representación y cálculo de la suma superior de la función afín en 4 subintervalos (ciclo de cierre).

X.4.1.22. ASI8: Afín, suma inferior en 8 subintervalos

Actividad 22: Los alumnos deben determinar la suma inferior de la función afín asociada a la partición $P_8 = \{i/8\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,1].

Objetivo: Pretendemos obtener el nivel de comprensión y la capacidad de cálculo de los estudiantes para hallar s(f,P_8).

Análisis de datos: El profesor investigador, en la cuestión pertinente, ha escrito dos sumandos de la suma inferior y los alumnos debían completarla y calcularla. El estudiante AM ha realizado correctamente la suma, aunque pensamos que en lugar de simplificar cada sumando podía haber considerado denominador común 64 y, posteriormente, simplificar la suma para obtener la solución final. Las operaciones del alumno DD son descabelladas, incoherentes y hacen pensar al profesor que tiene grandes dificultades para operar con fracciones numéricas.

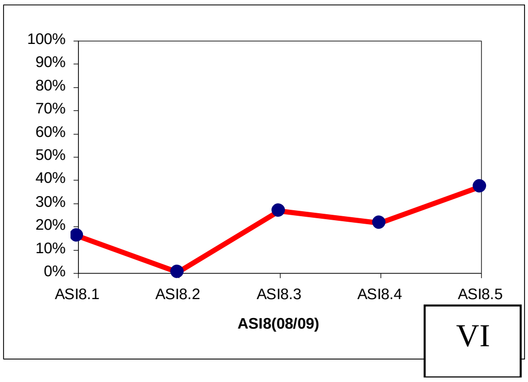
s(f,P₈) = 0·1/8 + 1/8·1/8 + 2/8 · 1/8 **+** 3/8 · 1/8 **+**
+ 4/8 · 1/8 **+** 5/8 · 1/8 **+** 6/8 · 1/8 **+ 7/8·1/8 =**
= 0+ 1/64 + 1/32 + 3/64 + 1/16 + 5/64 + 3/32 + 7/64 **=**
= 7/16

AM

s(f,P₈) = 0·1/8 + 1/8·1/8 + 2/8 · 1/8 **+** 3/8 · 1/8 **+**
+ 4/8 · 1/8 **+** 5/8 · 1/8 **+** 6/8 · 1/8 **+ 7/8·1/8 =**
= 8/8 · 1/8 **=**
= 9/8 · 1/8

DD

Reflexión: Consideramos que la orientación dada a los estudiantes para calcular la suma inferior asociada a una partición de 9 nodos hace que la mayoría de los alumnos escriban correctamente la expresión; sin embargo, descubrimos que los estudiantes del grupo 2º D cometen graves errores cuando realizan cálculos numéricos con fracciones.



VI

Gráficos X.4.1.22. Afín, cálculo de la suma inferior s(ƒ,P_8) (ciclo de cierre).

X.4.1.23. ASS8: Afín, suma superior en 8 subintervalos

Actividad 23: Los alumnos deben determinar la suma superior de la función afín *ƒ(x)=x* asociada a la partición $P_8 = \left\{ \frac{i}{8} \right\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,1].

Objetivo: Pretendemos obtener el nivel de comprensión y la capacidad de cálculo de los alumnos para hallar S(*ƒ*,P_8).

Análisis de datos: DB realiza con total precisión la suma superior y LB ha transformado la multiplicación (·) en diferencia (que escribe – o /), por tanto, consideramos que esta alumna no comprende la expresión analítica que determina cualquier suma superior.

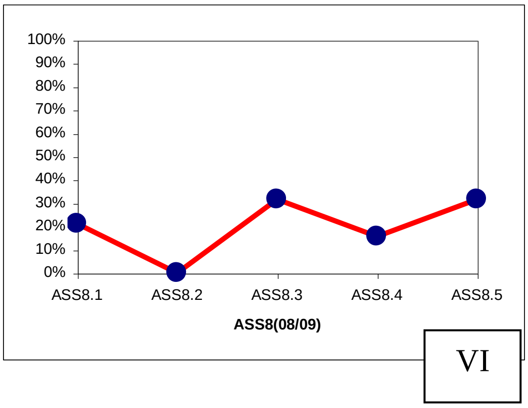
S(ƒ,P_8) = 1/8·1/8 + 2/8 · 1/8 **+ 3/8·1/8 +** 4/8 · 1/8 **+**
+ 5/8 · 1/8 **+** 6/8 · 1/8 **+** 7/8 · 1/8 **+** 8/8 · 1/8 **=**
= $\frac{1}{64} + \frac{2}{64} + \frac{3}{64} + \frac{4}{64} + \frac{5}{64} + \frac{6}{64} + \frac{7}{64} + \frac{8}{64}$ **=**
= $\frac{36}{64}$ = 0'5625.

DB

S(ƒ,P_8) = 1/8·1/8 + 2/8 – 1/8 **+ 3/8·1/8 +** 4/8 /1/8 **+**
+ 5/8 – 1/8 **+** 6/8 /1/8 **+** 7/8 – 1/8 **+** 8/8 – 1/8 **=**
= 0 + 1/8 + 2/8 + 3/8 + 4/8 + 5/8 + 6/8 + 7/8 **=**
= 28/8

LB

Reflexión: Los resultados obtenidos en esta categoría son similares a los de la anterior y, en consecuencia, confirmamos las dificultades de los estudiantes de este ciclo para trabajar con quebrados.



Gráficos X.4.1.23. Afín, cálculo de la suma superior S(ƒ,P_8) (ciclo de cierre).

X.4.1.24. ASIn: Afín, suma inferior en "n" subintervalos

Actividad 24: Los alumnos deben deducir el valor de la suma inferior s(ƒ,P_n) de la función afín asociada a la partición cuya distancia internodal es 1/n.

Objetivo: Por medio de esta categoría pretendemos controlar la capacidad de generalización de los alumnos de s(ƒ,P_n) conociendo s(ƒ,P_4) y s(ƒ,P_8).

Análisis de datos: La alumna MM ha determinado correctamente s(ƒ,P_n), mientras que el alumno DM no ha sido capaz de generalizar y ha cometido el error de considerar s(ƒ,P_n) = s(ƒ,P_4).

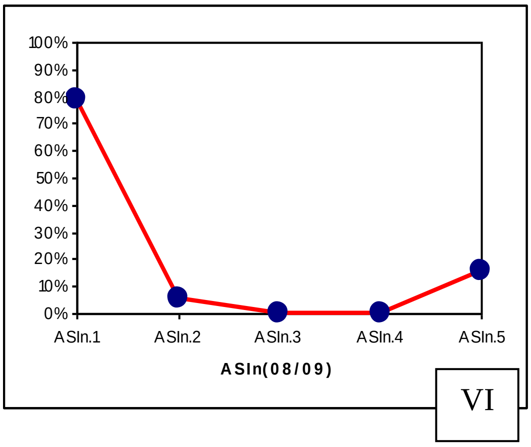
$$s(f,P_n) = \frac{0}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{0}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{4}{4}-\frac{3}{4}\right)$$

DM

$$s(f,P_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot n}$$

MM

Reflexión: A pesar del texto entregado en el cuadernillo, sólo tres estudiantes deducen la expresión de s(ƒ,P_n), diez alumnos no responden a la cuestión y seis dan respuestas que consideramos inaceptables.



Gráficos X.4.1.24. Afín, cálculo de la suma inferior s(ƒ,P_n) (ciclo de cierre).

X.4.1.25. ASSn: Afín, suma superior en “n” subintervalos

Actividad 25: Los alumnos deben determinar el valor de la suma superior S(f,P_n) de la función afín asociada a la partición $P_n = \{i/n\}_{i=0}^{n}$.

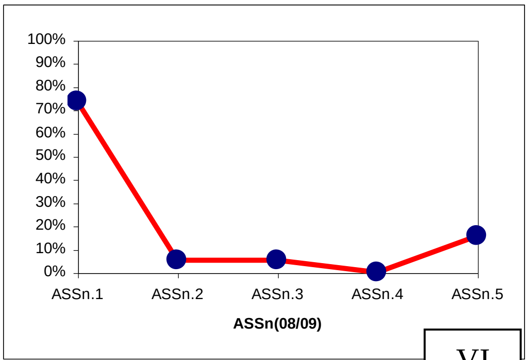
Objetivo: Por medio de esta categoría pretendemos controlar la capacidad de generalización de los alumnos de S(f,P_n) conociendo S(f,P_4) y S(f,P_8).

Análisis de datos: DT es el único alumno cuya respuesta es la suma de los “n” primeros términos de una sucesión[54], sin embargo, no ha efectuado la suma. DA no ha comprendido el concepto de suma superior de Darboux y lo único que hace es relacionarlo, si así se puede decir, con una partición de nueve nodos escritos con letras mayúsculas[55].

S(f,P_n) = $X_0 < X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5 < X_6 < X_7 < X_8$	DA

DT	**S(f,P_n) =** $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}$

Reflexión: Estudiadas las respuestas individualizadas de los alumnos en esta categoría y en la anterior, cada alumno obtiene el mismo nivel de respuesta en ambas categorías; salvo DT que en aquélla fue evaluado con nivel 5 y en ésta ha obtenido el nivel 3.



VI

Gráficos X.4.1.25. Afín, cálculo de la suma superior S(f,P_n) (ciclo de cierre).

X.4.1.26. AIINF: Afín integral inferior

Actividad 26: Los alumnos deben calcular el extremo superior de las sumas inferiores, es decir, la integral inferior de la función afín en el intervalo [0,1].

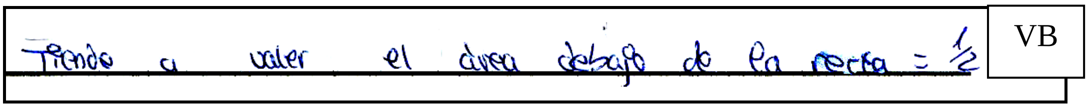
Objetivo: Se pretende concretar el grado de comprensión de los estudiantes del concepto de integral inferior de Darboux de la función $f(x)=x$ en [0,1].

---

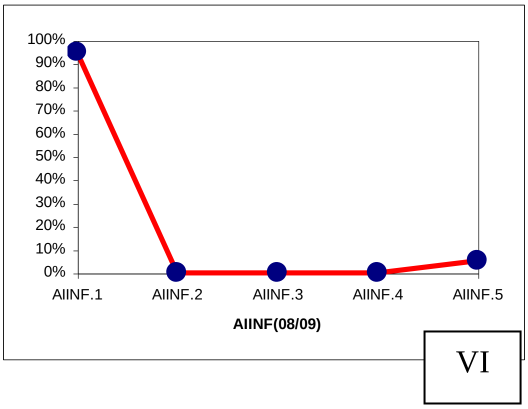
[54] En esta sucesión se puede considerar la suma de los “n” primeros términos de una progresión aritmética. Los estudiantes, en general, no recuerdan o desconocen la fórmula $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

[55] Véase *Gráficos X.4.1.21-DA.*

Análisis de los datos: VB escribe *"Tiende a valer (...)"*, no es totalmente correcta su respuesta, sin embargo, al realizar nuestra investigación en el nivel de secundaria, pensamos que esta alumna ha captado el concepto de integral inferior de Darboux y le otorgamos el máximo nivel. DT ni siquiera ha considerado que la integral inferior está acotada por el área del triángulo de base y altura 1, por tanto, nunca podrá ser la integral inferior superior a 0,5 unidades cuadradas.



Reflexión: Solamente la alumna VB alcanza el nivel 5 en esta categoría, trece alumnos no contestan y cinco dan respuestas que debemos considerarlas inaceptables.



Gráficos X.4.1.26. Integral inferior de la función afín (ciclo de cierre).

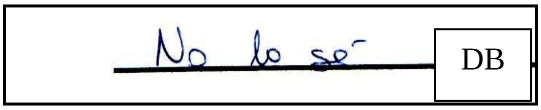
X.4.1.27. AISUP: Afín integral superior

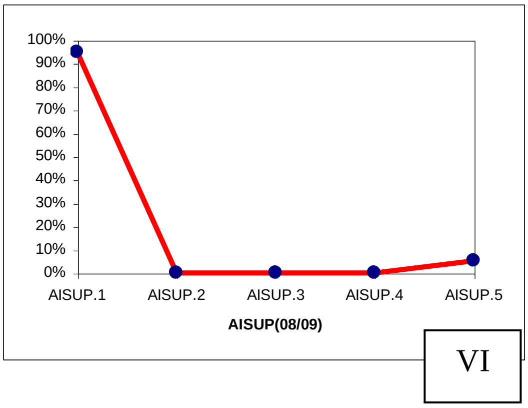
Actividad 27: Los alumnos deben calcular el extremo inferior de las sumas superiores, es decir, la integral superior de Darboux de la función afín en el intervalo [0,1].

Objetivo: Se pretende concretar el grado de comprensión de los estudiantes del concepto de integral superior de la función $f(x)=x$ en [0,1].

Análisis de los datos: DB es sincero en su respuesta; otros alumnos responden de tal manera que, posiblemente, ni ellos mismos estén convencidos de lo que escriben.

Reflexión: Para la presente categoría, suscribimos en su totalidad la reflexión anterior y, además, las respuestas individualizadas de los alumnos en estas dos últimas categorías pueden considerarse idénticas modificando, eso sí, el texto correspondiente.



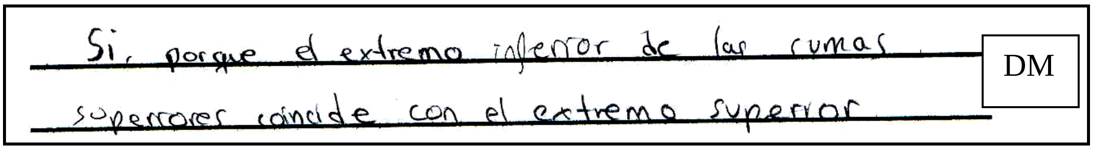


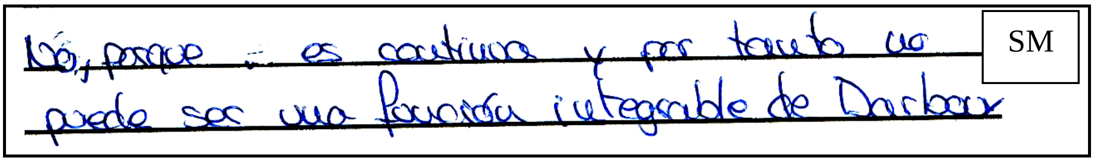
Gráficos X.4.1.27. Integral superior de la función afín (ciclo de cierre).

X.4.1.28. AI: Afín integrable

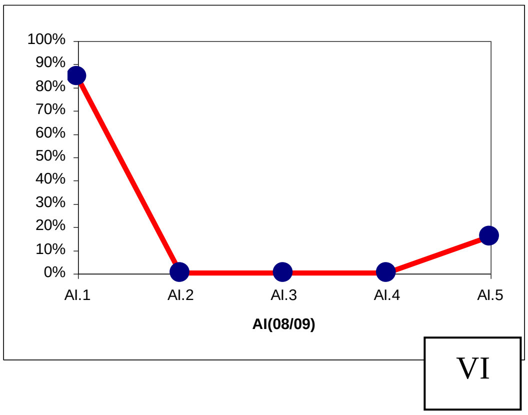
Actividad 28: Consiste en razonar si la función afín *ƒ(x)=x*, estudiada anteriormente, es integrable o no en el sentido Darboux.

Objetivo: Esta actividad pretende controlar el nivel de comprensión de los alumnos de la integrabilidad de la función afín *ƒ(x)=x* en el intervalo [0,1].





Análisis de los datos: El alumno DM confirma que la función es integrable y razona la respuesta aunque no determinó correctamente los valores de las integrales inferior y superior de Darboux. La alumna SM desconoce el teorema: *"Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es integrable en dicho intervalo".*



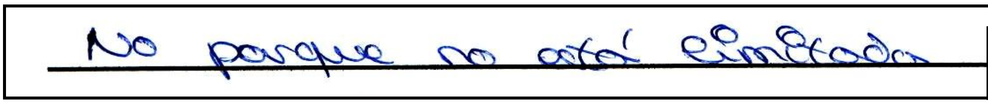
Gráficos X.4.1.28. Integrabilidad de la función afín (ciclo de cierre).

Reflexión: Únicamente tres alumnos, 15,79%, justifican adecuadamente la integrabilidad de la función *ƒ(x)=x* en [0,1] y los demás no contestan o lo hacen mal.

X.4.1.29. ACAFE: Cálculo del área mediante fórmulas elementales

Actividad 29: Los alumnos deben calcular el área de un triángulo mediante la clásica fórmula de base por altura dividido por dos.

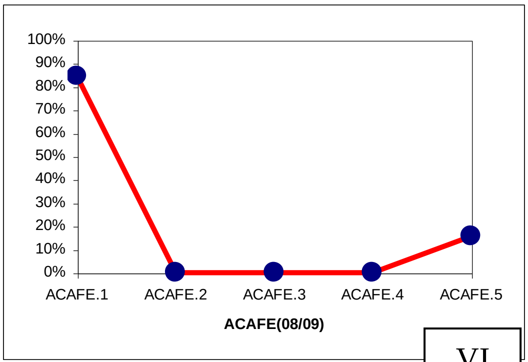
Objetivo: El objetivo que pretende esta actividad consiste en descubrir hasta qué punto los alumnos se abstraen del cálculo integral y hallan el área de un triángulo utilizando recursos aprendidos en Educación Primaria y en el primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria.



LB

Análisis de los datos: LB no se ha percatado del área que se pretende calcular y de ahí su respuesta. Sólo tres alumnos utilizan la fórmula del área de un triángulo[56].

Reflexión: Los alumnos de este grupo no prestan atención a los textos matemáticos y no relacionan los nuevos resultados matemáticos con sus conocimientos previos.



VI

Gráficos X.4.1.29. Cálculo de áreas mediante las fórmulas elementales de los polígonos (ciclo de cierre).

X.4.1.30. ACID: Cálculo del área por medio de la integral definida

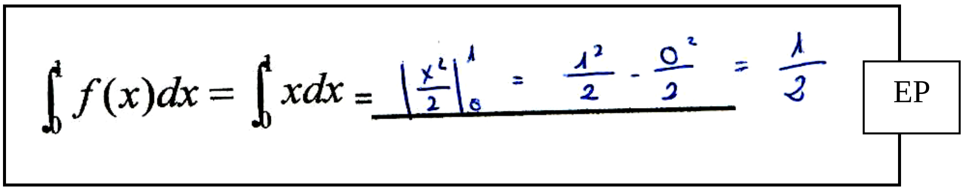
Actividad 30: Los alumnos deben calcular el área comprendida entre la función $f(x)=x$, el eje *OX* y las rectas $x=0$ y $x=1$ aplicando la teoría del cálculo integral, es decir, el teorema fundamental del cálculo[57].

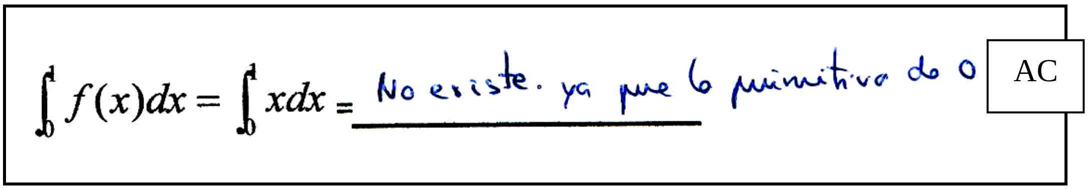
Objetivo: Por medio de esta categoría se pretende determinar si los alumnos aplican correctamente la regla de Barrow.

[56] No se ha considerado oportuno escanear una respuesta correcta por la evidencia de la solución de esta actividad.

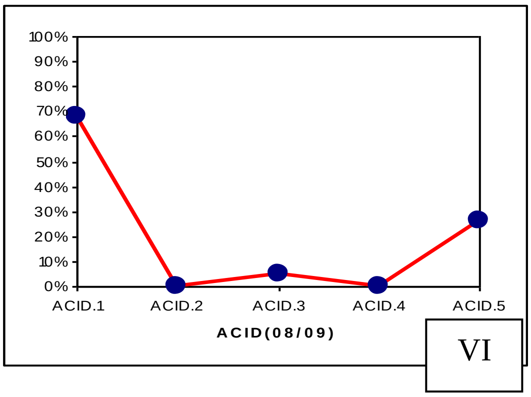
[57] A esta categoría debiéramos reconocerla como ATFCI (cálculo del área mediante el teorema fundamental del cálculo integral), sin embargo, no hemos creído conveniente utilizar esas siglas para no confundirla con la siguiente categoría ATCFI (cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables).

Análisis de datos: La alumna EP ha aplicado correctamente el teorema fundamental del cálculo y ello nos hace suponer que, a pesar de los múltiples errores cometidos en actividades anteriores, muestra interés por aprender matemáticas aunque le exigen un gran esfuerzo. El alumno AC confunde los conceptos de primitiva y derivada de una función.





Reflexión: A pesar de las múltiples ocasiones en las cuales se ha aplicado el teorema fundamental del cálculo, poco más de la cuarta parte de los alumnos han aplicado correctamente la regla de Barrow a este ejercicio tan elemental, el resto no han sido capaces de calcular el área mediante la integral definida.



Gráficos IX.4.1.30. Cálculo del área mediante la fórmula de Barrow (ciclo de cierre).

X.4.1.31. ATCFI: Cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables

Actividad 31: Los alumnos deben calcular el área comprendida entre la función *f(x)=x*, el eje de abscisas y las rectas *x=0* y *x=1* utilizando el teorema de caracterización de las funciones integrables, es decir, que para que una función sea integrable en un intervalo basta con fijar un valor tan pequeño como deseemos y encontrar una partición tal que la diferencia entre la suma superior e inferior de Darboux asociadas a dicha partición sea menor que el número predeterminado anteriormente.

Objetivo: Deseamos conocer el grado de comprensión de los estudiantes del teorema mencionado anteriormente y, por tanto, que existe otra forma alternativa de calcular el área.

Análisis de datos: VB calcula la diferencia entre las sumas superior e inferior y considera que S(f,P_n) – s(f,P_n) = $\frac{1}{n} < \varepsilon$, aunque no determina cuánto puede valer el área. LB sólo se limita a hallar s(f,P_8) y S(f,P_8) sin calcular ninguna diferencia.

$S(f,P_n) - s(f,P_n) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) = \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2n} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2n} = \frac{2}{2n} = \boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon}$

VB

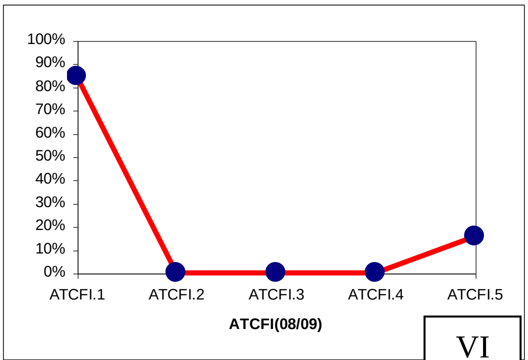
Para n=8, me dispongo a demostrar que:

$s(f,P_8) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.8} = 0{,}5 - 0{,}0625 = 0{,}4375$ y

$S(f,P_8) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.8} = 0{,}5 + 0{,}0625 = 0{,}5625$

LB

Reflexión: Es comprensible que pocos alumnos de 2º D del presente ciclo de cierre alcancen el nivel 5 en las respuestas de la presente categoría puesto que consideramos que el grado de abstracción de la misma es muy elevado y, además, así lo presagiaban los resultados obtenidos en las categorías anteriores.



VI

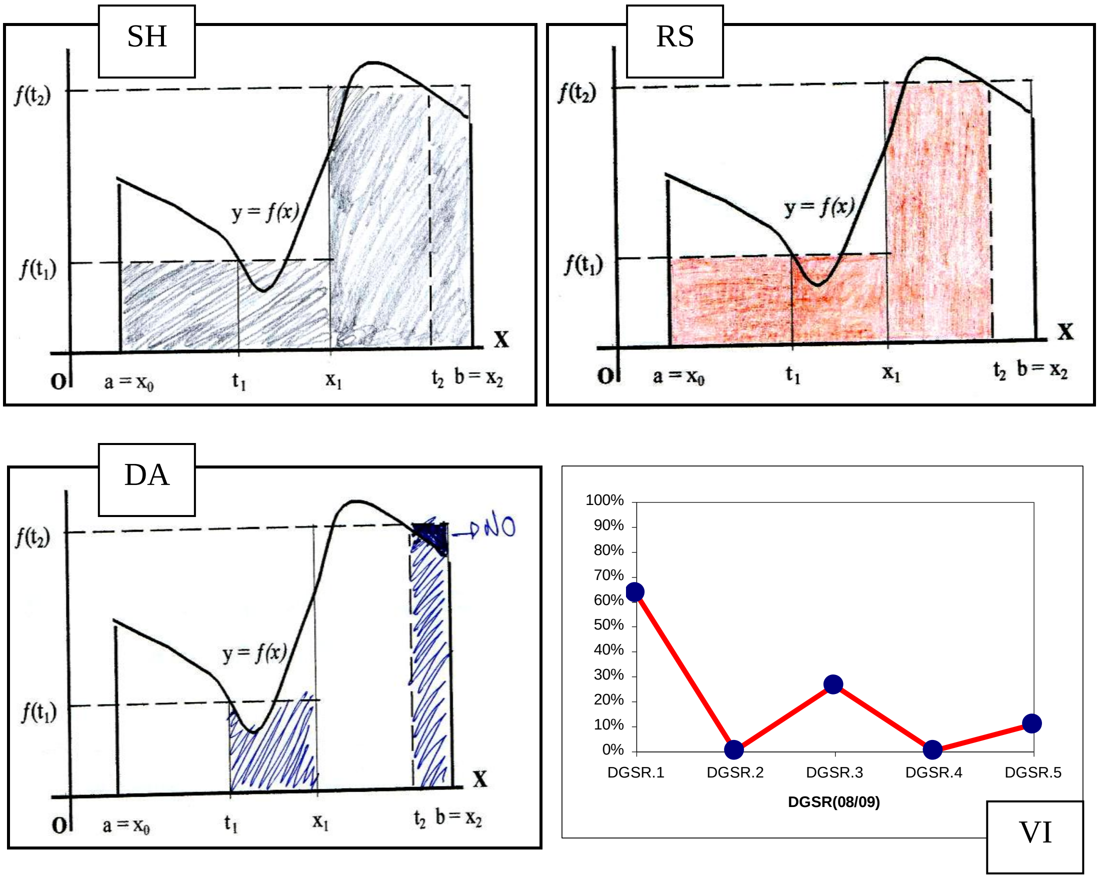
Gráficos IX.4.1.31. Cálculo de áreas mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables (ciclo de cierre).

X.4.1.32. DGSR: Determinación gráfica de las sumas de Riemann

Actividad 32: Consiste en señalar las superficies de los rectángulos que se obtienen al determinar como base de los mismos los subintervalos de una partición y alturas el valor que toma la función en cualquier punto del subintervalo correspondiente.

Objetivo: Obtener información de los estudiantes del grado de comprensión gráfica de las sumas de Riemann, sin embargo, no se busca la relación entre estas sumas y las inferiores y superiores de Darboux.

Análisis de datos: El gráfico de la alumna SH muestra la solución correcta, RS no señala el rectángulo cuya base es el segmento $\overline{t_2 x_2}$ y altura $f(t_2)$ y DA colorea la *"superficie de cada uno de los rectángulos de base* $\overline{t_i x_i}$ *y altura* $f(t_i)$*, siendo i=1,2 y que, además, está por debajo de la curva* $f(x)$*".* Tanto RS como DA no han determinado gráficamente la suma de Riemann, sin embargo, entendemos que DA no comprende la notación matemática que sustenta la definición de suma de Riemann.



Gráficos X.4.1.32. Determinación gráfica de las sumas de Riemann (ciclo de cierre).

Reflexión: Consideramos que es muy bajo el número de estudiantes que han señalado la respuesta correcta. El error cometido por el alumno RS lo hemos detectado en varios estudiantes del presente ciclo y de los anteriores.

X.4.1.33. IGTVMD: Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial

Actividad 33: Los alumnos desconocen el teorema de Rolle y, por tanto, no podemos demostrar analíticamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial[58], como alternativa, realizamos una demostración geométrica que los alumnos deben completar. Los estudiantes deben descubrir que la pendiente de la recta que pasa por los puntos *A(a,h(a))* y *B(b,h(b))* para una función *h(x)* continua en [*a,b*] y derivable en *(a,b)* coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto interior del intervalo [*a,b*].

Objetivo: Esta categoría pretende determinar el nivel de los estudiantes en la comprensión gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial, para ello deberán leer, comprender y cumplimentar el texto matemático en el cual se demuestra-justifica el teorema de los incrementos finitos.

Análisis de datos: El alumno RM, después de corregir, ha completado correctamente los tres términos que se pedían. RB debiera haber escrito que la pendiente de la recta es *h´(c)* aunque también es $\frac{h(b)-h(a)}{b-a}$ pero nunca $\frac{h(c)-h(a)}{b-a}$ y, evidentemente, la solución dada en la tercera parte de la cuestión es falsa[59].

> Nótese que la recta que pasa por los puntos $A(a, h(a))$ y B (b , h(b))
>
> tiene pendiente $\frac{h(b)-h(a)}{b-a}$. La recta que pasa por el punto $C(c, h(c))$ es tangente a la curva en dicho punto, por tanto su pendiente es h'(c).
>
> Al ser ambas rectas paralelas sus pendientes coinciden, es decir: $\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c)$, en consecuencia se obtiene: h(b) - h(a) $= h'(c)(b-a)$,
>
> lo que concluye la interpretación geométrica.

RM

[58] Este teorema también es reconocido como teorema del valor medio, teorema de Lagrange o teorema de los incrementos finitos. *"Lo de 'medio' en el nombre del teorema se refiere a la razón 'media' (promedio) de cambio de f en el intervalo [a,b]"* (Larson y Hostetler, 1990, pág. 191).

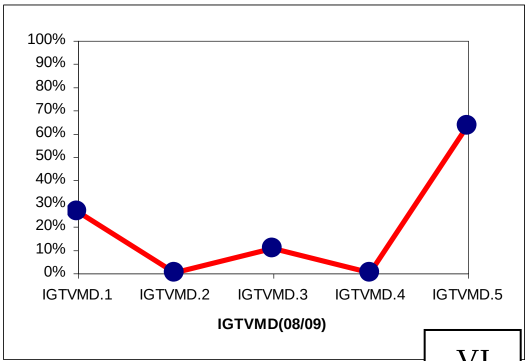
[59] El alumno RB ha dudado y ha contestado esta actividad con lápiz, cuando se considera seguro de sus respuestas las repasa con bolígrafo.

Nótese que la recta que pasa por los puntos $A(a,\ h(a))$ y B $(b\ (h(b)$ tiene pendiente $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}$. La recta que pasa por el punto $C(c,\ h(c))$ es tangente a la curva en dicho punto, por tanto su pendiente es $\dfrac{h(c)-h(a)}{b-a}$.

RB

Al ser ambas rectas paralelas sus pendientes coinciden, es decir: $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}=h'(c)$, en consecuencia se obtiene: $\dfrac{h(c)-h(a)}{b-a}$ $= h'(c)(b-a)$, lo que concluye la interpretación geométrica.

Reflexión: La gráfica estadística VI expresa que doce alumnos de 2º D han comprendido la interpretación geométrica del teorema de Lagrange (63,16%), dos han cometido un único error y el resto, cinco alumnos, tienen dos o tres errores.



VI

Gráficos X.4.1.33. Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial (ciclo de cierre).

X.4.1.34. TFCIS: Teorema fundamental cálculo integral (sumas)

Actividad 34: Los alumnos han de descubrir que las sumas de las diferencias del valor de la función entre dos nodos consecutivos coincide con la diferencia del valor de la función en los extremos del intervalo.

Objetivo: Esta categoría pretende controlar el nivel de comprensión de los alumnos de las expresiones analíticas conformadas con sumandos que a su vez se contrarrestan.

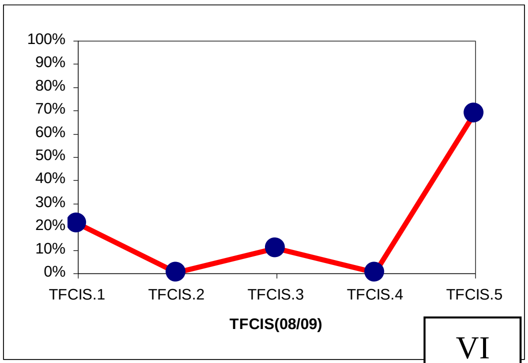
Análisis de datos: EP responde correctamente, MM en lugar de considerar la ordenada de los puntos toma sus abscisas y LB entendemos que ha renombrado la función *G(x)=y(x)* pero no comprendemos el primer paréntesis que abre, además, el nodo x_5 no existe.

$G(x_1) - \underline{G(x_0)} + G(x_2) - G(x_1) + \underline{G(x_3)} - G(x_2) + G(x_4) - \underline{G(x_3)} =$
$= G(b) - G(a)$. **EP**

$G(x_1) - \underline{X0} + G(x_2) - G(x_1) + \underline{X3} - G(x_2) + G(x_4) - \underline{X3} =$
$= G(b) - G(a)$. **MM**

$G(x_1) - \underline{(y(x_0)} + G(x_2) - G(x_1) + \underline{(y(x_3)} - G(x_2) + G(x_4) - \underline{(y(x_5)} =$
$= G(b) - G(a)$. **LB**

Reflexión: Poco menos del 70% de los estudiantes cumplimentan bien los tres apartados de la presente actividad, dos alumnos (10,53%) tienen un único error y cuatro alumnos obtienen el nivel 1 en sus respuestas.



VI

Gráficos X.4.1.34. Teorema Fundamental del Cálculo Integral, sumas de las diferencias internodales (ciclo de cierre).

X.4.1.35. TFCII: Teorema fundamental cálculo integral (incrementos)

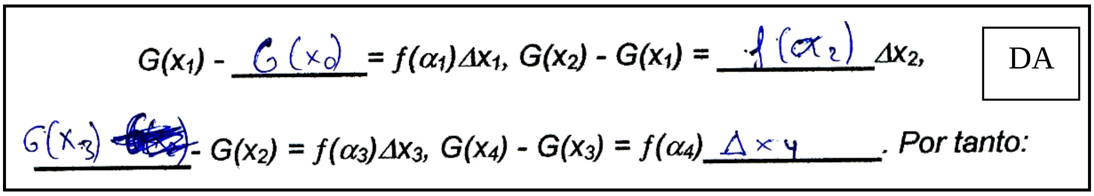
Actividad 35: Los alumnos deben aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial en cada subintervalo del intervalo original.

Objetivo: Esta categoría pretende controlar el nivel de comprensión de los alumnos del teorema de los incrementos finitos aplicado a cada subintervalo de los cuatro que forman la partición del intervalo [*a*,*b*].

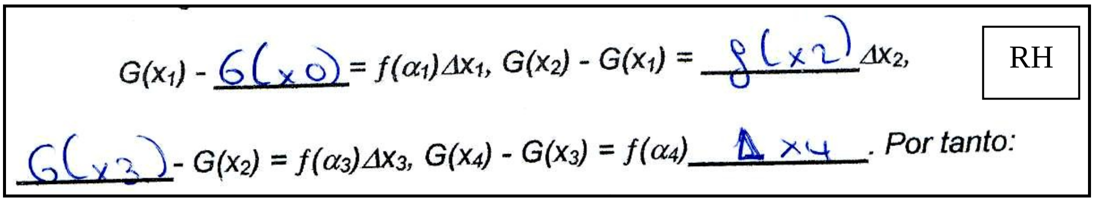
Análisis de datos[60]*:* DA, a pasar de la gran cantidad de errores cometidos en el cuadernillo, responde correctamente. RH confunde α_2 con x_2.

[60] Los niveles de respuesta para esta categoría han sido redefinidos y éstos son:

1. El alumno no contesta o falla en su totalidad.
2. El alumno completa correctamente un apartado y falla en tres.
3. El alumno completa correctamente dos apartados y falla en otros dos.
4. El alumno responde correctamente tres apartados y falla en uno.
5. El alumno completa correctamente los cuatro apartados.

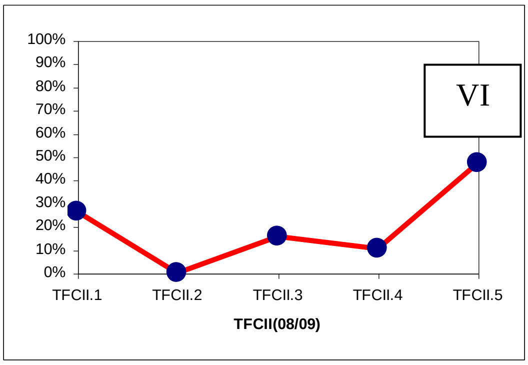

$G(x_1) - G(x_0) = f(\alpha_1)\Delta x_1$, $G(x_2) - G(x_1) = f(\alpha_2)\Delta x_2$, $G(x_3) - G(x_2) = f(\alpha_3)\Delta x_3$, $G(x_4) - G(x_3) = f(\alpha_4)\Delta x_4$. *Por tanto:*

DA


$G(x_1) - G(x_0) = f(\alpha_1)\Delta x_1$, $G(x_2) - G(x_1) = g(x_2)\Delta x_2$, $G(x_3) - G(x_2) = f(\alpha_3)\Delta x_3$, $G(x_4) - G(x_3) = f(\alpha_4)\Delta x_4$. *Por tanto:*

RH

Reflexión: Si consideramos los dos niveles más altos, el 60% de los alumnos ha comprendido la parte de la demostración del teorema fundamental del cálculo integral en la cual se utiliza el teorema de los incrementos finitos.



Gráficos X.4.1.35. Teorema Fundamental del Cálculo Integral, incrementos finitos internodales (ciclo de cierre).

X.4.1.36. TFCSI: Teorema fundamental cálculo integral (sumas e incrementos)

Actividad 36: Los alumnos deben comprender que las sumas de las diferencias del valor de la función entre dos nodos consecutivos coincide con la diferencia del valor de la función en los extremos del intervalo y, además, debe ser aplicado el teorema de los incrementos finitos en cada subintervalo.

Objetivo: Con esta actividad pretendemos controlar el nivel de comprensión de los alumnos de la parte final del teorema fundamental del cálculo integral en el cual cada uno de los sumandos coinciden con el valor de la función en un punto intermedio de su respectivo subintervalo por la amplitud del mismo.

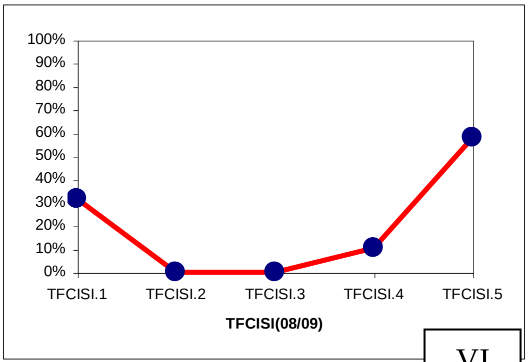
Análisis de datos[61]*:* La respuesta de DT es totalmente correcta; sin embargo, DD introduce una nueva función, F, que no aparece en ningún momento de la demostración del teorema, y confunde α_i con x_i.

[61] Sólo se admiten tres niveles de respuesta, a saber: 1 (mal), 5 (bien) y 4 (el alumno en lugar de escribir α_2 ha escrito a_2).

$G(b) - G(a) = f(\alpha_1)\Delta x_1 + f(\alpha_2)\ \Delta x_2 + f(\alpha_3)\Delta x_3 + f(\alpha_4)\Delta x_4 = R(f,P,T).$ DT

$G(b) - G(a) = f(\alpha_1)\Delta x_1 + F(x_2)\ \Delta x_2 + f(\alpha_3)\Delta x_3 + f(\alpha_4)\Delta x_4 = R(f,P,T).$ DD

Reflexión: No llegan al 70% los alumnos que han sido calificados con los niveles 4 y 5. El profesor investigador piensa que algunos estudiantes no han prestado la suficiente atención en el estudio de la demostración del teorema fundamental del cálculo integral puesto que en los dos ciclos anteriores los porcentajes de éxito fueron superiores.



VI

Gráficos X.4.1.36. Teorema Fundamental del Cálculo Integral, sumas e incrementos internodales (ciclo de cierre).

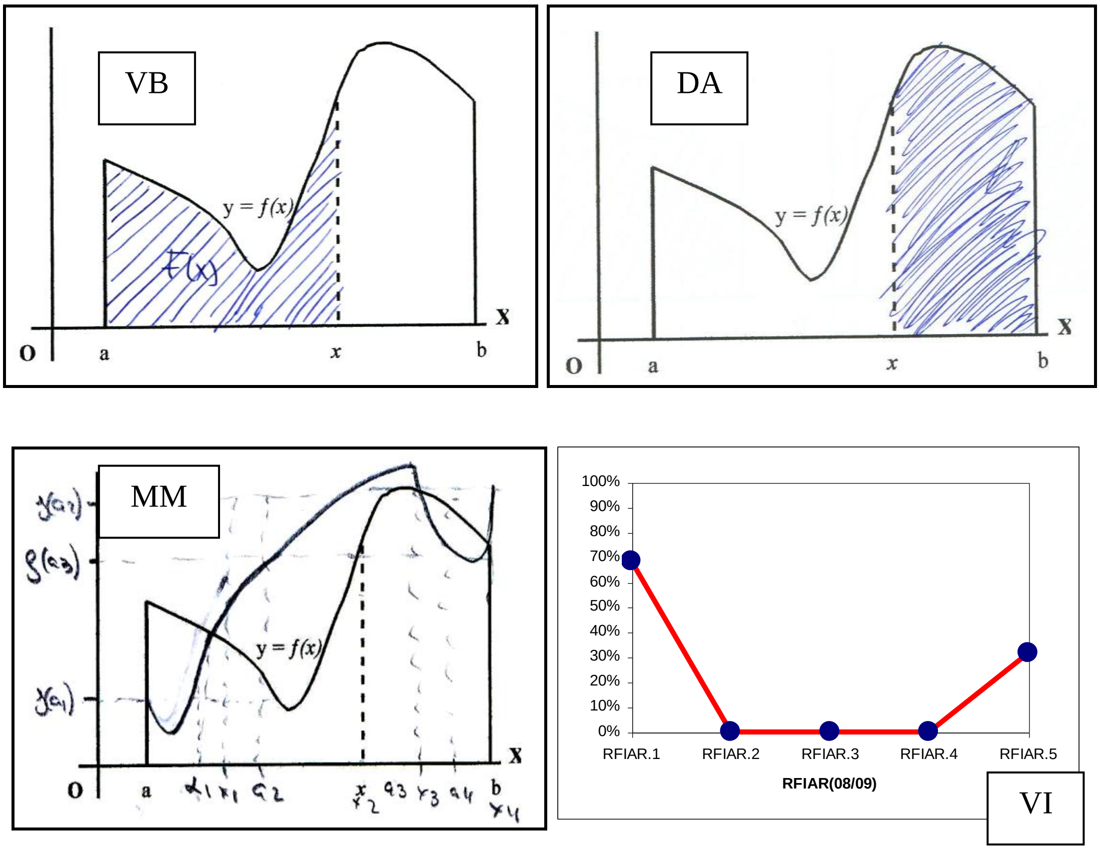
X.4.1.37. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida

Actividad 37: El alumno debe expresar gráficamente lo que entiende por función integral.

Objetivo: Se pretende averiguar si los alumnos comprenden, gráficamente, que la función *F(x)* es el área encerrada entre el eje de abscisas, la función *f(t)*, la recta *x=a* y una recta vertical que se desplaza entre *a* y *b*, según los valores de la variable *x*.

Análisis de los datos: La alumna VB es la única que ha escrito *F(x)* sobre la superficie determinada por $\int_a^x f(t)\,dt$ y otros cinco alumnos, solamente, se han limitado a colorear dicha superficie. DA ha vuelto a considerar la superficie derecha[62] y la alumna MM muestra una solución totalmente incoherente.

[62] Véase *Gráficos X.4.1.32-DA.*



Gráficos X.4.1.37. Representación de la función integral en función del área recorrida (ciclo de cierre).

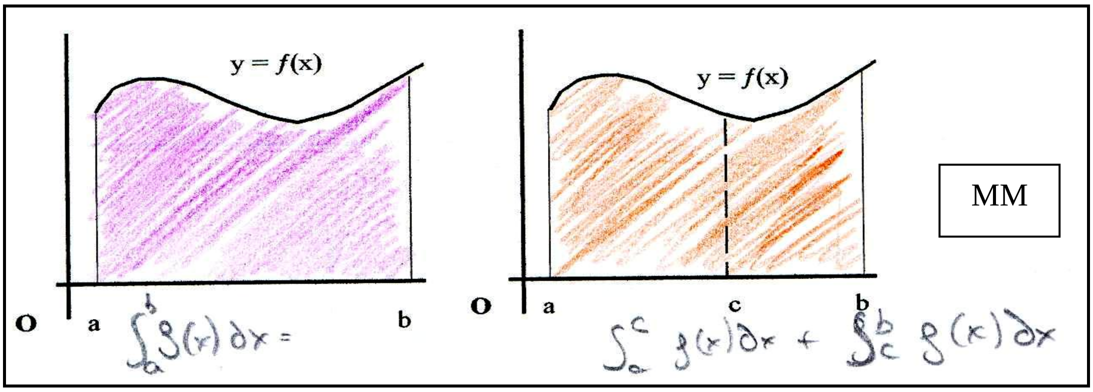
Reflexión: En esta categoría de comprensión matemática, menos de la tercera parte de los estudiantes establecen, gráficamente, que la función *F(x)* es el área comprendida entre la función *ƒ(x),* el eje de abscisas y las rectas $r_1=a$ y $r_2=x$, siendo $a \leq x \leq b$. Se constata que el grado de abstracción que exige el concepto función integral o integral indefinida hace difícil su comprensión para la mayoría de los estudiantes de 2º D.

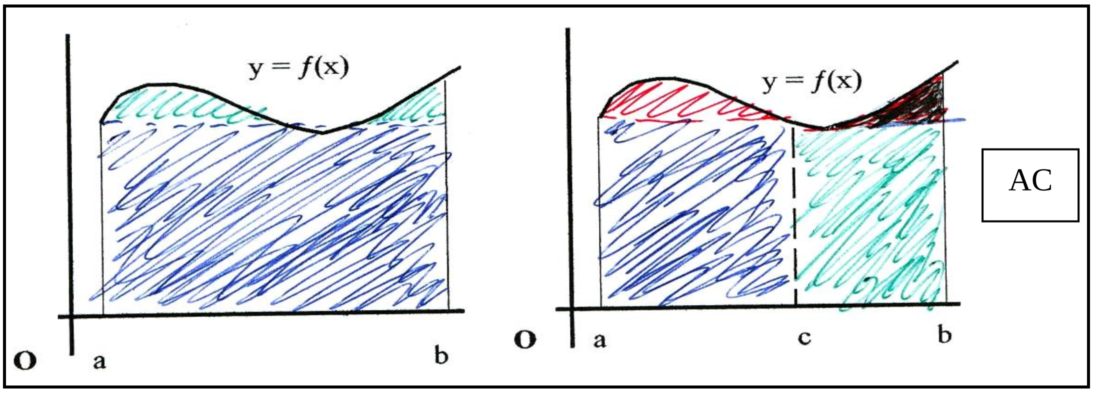
X.4.1.38. IGAI: Interpretación gráfica de la aditividad de la integral

Actividad 38: Consiste en determinar que la integral entre dos extremos de una función coincide con la suma de dos integrales uno de cuyos extremos (el superior de la primera y el inferior de la segunda) es un punto intermedio del intervalo original.

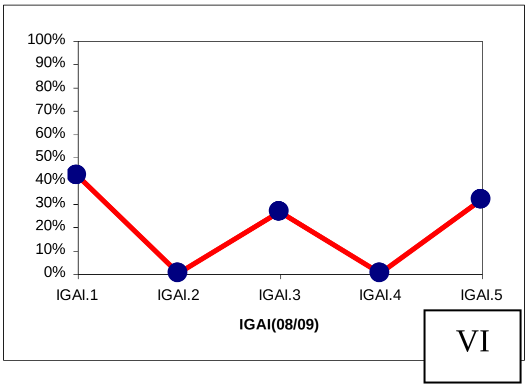
Objetivo: Se desea obtener información del nivel de comprensión de los alumnos sobre la propiedad de la aditividad de la integral.

Análisis de datos: La alumna MM ha entendido la aditividad de la integral, aunque debiera haber utilizado un tercer color. No comprendemos qué ha querido representar AC.





Reflexión: Once alumnos del grupo representan las distintas superficies correctamente, sin embargo, cinco de ellos no escriben las expresiones analíticas correspondientes y, por tanto, han sido valoradas sus respuestas con el nivel 3. Ocho estudiantes (42,11%) han dado soluciones erróneas.



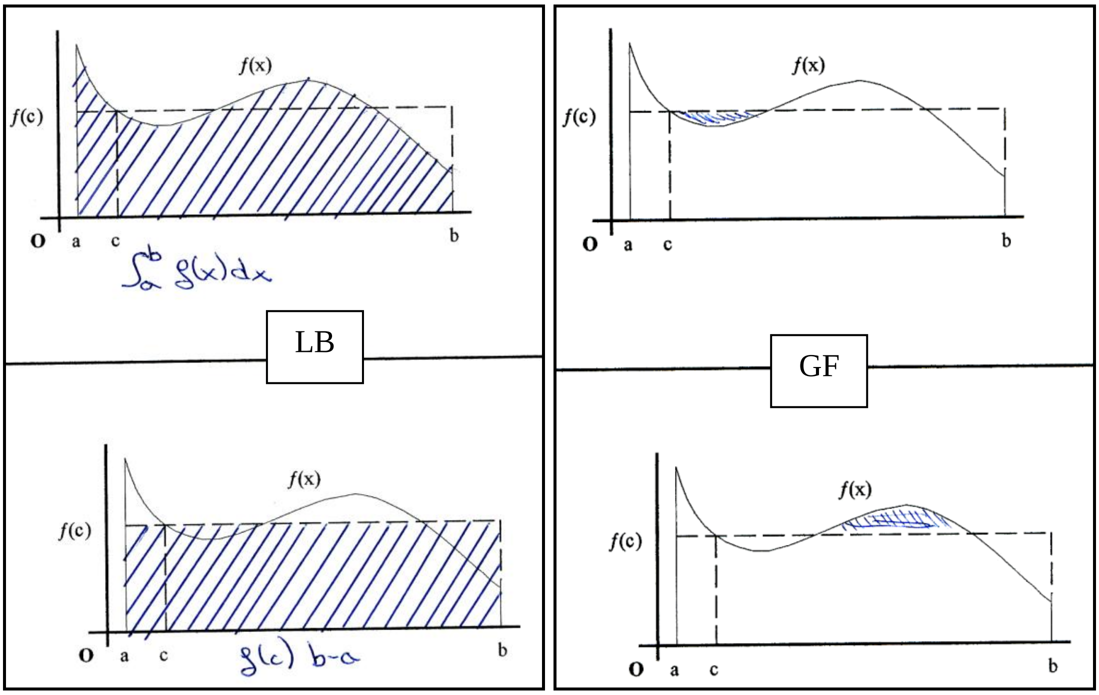
Gráficos X.4.1.38. Interpretación gráfica de la linealidad de la integral (ciclo de cierre).

X.4.1.39. IGTVMI: Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral

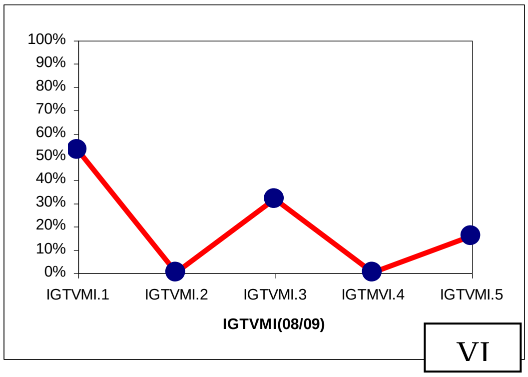
Actividad 39: El alumno debe descubrir que el área de una superficie curvilínea es igual al área de un rectángulo.

Objetivo: Obtener datos sobre la comprensión de los estudiantes de que el área permanece invariante aunque las superficies se deformen, es decir, analizar si los alumnos comprenden la aplicación del teorema del valor medio de la integral en relación con el área.

Análisis de datos: LB determina gráficamente las superficies[63] y expresa analíticamente[64] sus áreas mientras que la respuesta de GF es totalmente disparatada[65].



Reflexión: Solamente tres alumnos (15,79%) representan y expresan, correctamente, mediante la notación integral cada una de las superficies que intervienen en esta actividad; seis estudiantes (31,58%) se limitan a colorear las superficies sin determinarlas analíticamente y diez alumnos (52,63%) no contestan o lo hacen mal.



Gráficos X.4.1.39. Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral (ciclo de cierre).

El profesor investigador estima que no es difícil esta actividad y los alumnos de 2º D debieran haber obtenido mejores resultados en esta categoría de comprensión matemática.

[63] Considérense las dos figuras de la izquierda.

[64] Entendemos que, por despiste, LB debiera haber escrito $f(c)(b–a)$ en lugar de $f(c)\ b–a$.

[65] Observando las superficies marcadas, de las dos figuras de la derecha, no tienen el mismo área.

X.4.1.40. CP: Cálculo de primitivas

En todos los ciclos, salvo en el de exploración (I), se ha trabajado el cálculo mental mediante el cálculo de primitivas elementales. En este último ciclo de cierre, al explicar las derivadas[66] se practicó el cálculo de las mismas con mayor intensidad que en los cursos precedentes con el objetivo de que los estudiantes tuvieran más éxito, que en los ciclos de confirmación (II y III) y consolidación (IV y V), en el cálculo mental de primitivas elementales.

El PI, al comienzo del curso 2008-2009, se percató de que 2º D de segundo de bachillerato de ciencias sociales, en general, era un grupo con muy poco interés por los estudios y el bagaje matemático acumulado en sus años de escolarización era más bien escaso. Como complemento a la toma de datos sobre el cálculo mental de primitivas realizada mediante la consulta de los apuntes de los alumnos, las anotaciones del cuaderno del profesor y las grabaciones en audio de cada sesión; además, se ha realizado una prueba escrita específica, en la cual hemos incluido el cálculo de derivadas e integrales elementales[67], con el objetivo de obtener más información sobre el cálculo mental de derivadas e integrales inmediatas de cada estudiante.

Siguiendo el mismo criterio de los dos capítulos anteriores: en el anexo I escaneamos las respuestas de cuatro alumnos a las derivadas e integrales inmediatas y, en este apartado, analizamos dichas respuestas.

Actividad 40: Los estudiantes de ciclo de cierre deben calcular diez derivadas y veinte primitivas inmediatas.

Objetivo: Pretendemos evaluar la capacidad de cálculo mental de los alumnos con respecto a la derivación e integración, es decir, la agilidad mental para determinar derivadas y primitivas de ejercicios sencillos en los que las respuestas deben ser escritas lo más brevemente posible.

Niveles de respuesta: El profesor investigador en la corrección particular de cada una de las pruebas del cálculo de derivadas y primitivas las ha evaluado de 0 a 10. Para seguir el criterio de los niveles de respuesta de las categorías anteriores se ha establecido la siguiente tabla de conversión[68]:

[66] El cálculo de derivadas se realizó en la segunda quincena de octubre de 2008.

[67] Las integrales indefinidas propuestas en la práctica escrita no exigen ningún método de integración para su resolución.

[68] Dichos niveles se establecieron en los dos capítulos precedentes, sin embargo, para que la lectura de este capítulo sea secuencial, volvemos a incluir la misma tabla.

INTERVALO DE CALIFICACIÓN DEL CÁLCULO DE DERIVADAS E INTEGRALES INMEDIATAS	**NIVEL DE RESPUESTA**
[0; 2,5)	1
[2,5; 5)	2
[5; 7,5)	3
[7,5; 9)	4
[9; 10]	5

Tabla X.4.1.40. Equivalencia entre calificaciones y niveles de respuesta.

Análisis de los datos: Cada prueba realizada por los alumnos consta de tres problemas-ejercicios, el primero de derivadas y los otros dos de primitivas, y cada uno de ellos está compuesto de diez ejercicios elementales[69]. Analizamos, seguidamente, cuatro pruebas de otros tantos estudiantes:

1. La alumna VB comete errores al derivar cocientes de funciones, véase 1º-3 y 1º-10; funciones radicales, 1º-4 y 1º-8, cuando el índice de la raíz es distinto de dos y los ejercicios 1º-3, 1º-6 y 1º-10 nos hacen pensar que tiene dificultades al derivar funciones potenciales. Siete de las diez integrales del ejercicio 2 las realiza correctamente, además, aplica con precisión la linealidad de la integral, comete pequeños errores al determinar constantes, 2º-5 y 2º-10, y, por último, VB es consciente de que la solución propuesta para 2º-3 es incorrecta puesto que después de escribirla la elimina. Las soluciones del tercer ejercicio son menos acertadas que las del anterior, sin embargo, pensamos que esta alumna sigue actuando con la misma coherencia, aplica las propiedades de la integral indefinida y opera-simplifica la función integrando cuando es necesario, 3º-2 y 3º-10, eso sí, no recuerda que en clase se comentó que $x=e^{lnx}$ y comete dos errores muy graves, a saber: considerar la abreviatura del logaritmo neperiano, *ln*, una constante y no tiene inconveniente al escribir $\int \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx = \frac{1}{x}\int e^{\ln x}\,dx$. El profesor investigador considera que la alumna VB es reflexiva y crítica en sus razonamientos.

[69] Al referirnos a un ejercicio escribiremos nº-apdo, donde nº es el número del ejercicio y apdo el apartado correspondiente. Por ejemplo, 1º-2 se refiere al segundo apartado del primer ejercicio, es decir, deriva la función: $f(x)=\ln(x^2-2x)$.

2. El alumno RB no ha derivado bien ninguna función de las propuestas en el primer ejercicio y, sin embargo, el cálculo integral lo ha realizado mucho mejor de lo esperado. Creemos que 2º-2, 2º-5 y 2º-10 los podía haber tenido totalmente correctos si, solamente, hubiera comprobado la solución propuesta; los otros dos apartados de este ejercicio no han sido contestados, por tanto, no podemos intuir las dificultades encontradas pero, a tenor de las soluciones dadas en los otros apartados, posiblemente hubiera encontrado las soluciones si lo hubiese intentado con más ahínco. En el tercer ejercicio las soluciones dadas, en general, pueden considerarse correctas aunque debe precisar algunas constantes, 3º-3, 3º-5 y 3º-10; no entendemos el error cometido en 3º-9 al dar como solución $-\frac{5}{2}x\cos(x^2-5)+k$, posiblemente, si hubiese repasado la solución terminaría escribiendo $-\frac{5}{2}\cos(x^2-5)+k$. El profesor considera que RB, a pesar de las graves dificultades por las que pasó durante el primer trimestre del curso, ha realizado un trabajo encomiable y merece nuestro aplauso.
3. La alumna LB tiene gran confusión de ideas, duda, escribe de forma impulsiva, borra, vuelve a escribir, tacha y es desordenada en la resolución de las tareas propuestas. En el primer ejercicio se constata que, posiblemente, desconozca las funciones trigonométricas[70] pues en 1º-6 considera que $sen^6(2x^3)$ es un producto de funciones y no ha rescrito la función como tantas veces se ha hecho en clase $\left[sen(2x^3)\right]^6$ y en 1º-7 considera que $sen(2x)2 = sen(4x)$ lo cual nos permite deducir que no comprende las derivadas de las funciones circulares[71]. Esta alumna ha aprendido que $\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{(x)}}$ y, al decir el PI que el índice de la raíz cuadradas es 2, la generaliza mediante la fórmula $\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{n\sqrt{(x)}}$, lo cual es un evidente error. En el segundo ejercicio vemos que, en general, está aceptablemente resuelto

[70] La estudiante LB cursó, en 4º ESO, Matemáticas A.

[71] El profesor, para evitar errores, siempre aconseja a los alumnos que consideren:

1. $\left[sen\, f(x)\right]' = \left[sen\left(f(x)\right)\right]' = \left[f(x)\right]' \cos\left(f(x)\right) = f'(x)\cos f(x)$
2. $\left[\cos f(x)\right]' = \left[\cos\left(f(x)\right)\right]' = -\left[f(x)\right]' sen\left(f(x)\right) = -f'(x) sen f(x)$

aunque comete el error de no determinar coeficientes, 2º-2; convertir una suma en un producto, 2º-3; no hallar correctamente la potencia de una función, 2º-5; olvidarse de escribir los paréntesis[72], 2º-8 y dar la solución a una integral sospechando que no es la correcta[73], 2º-10. En el tercer ejercicio observamos que la integración de funciones radicales, 3º-5 y 3º-7, acarrea dificultades; no descubre que las integrales 3º-1 y 3º-9 son de funciones potenciales y, aunque multiplica los dos factores de 3º-10 lo hace incorrectamente puesto que considera $(\sqrt{x})^2 = \sqrt[4]{x^2}$ y, evidentemente, el operador raíz cuadrada no es idempotente y, además, no reconoce las identidades notables.

4. Los resultados de la alumna EG[74] son más bajos que los de los tres estudiantes anteriores y, entre sus errores más significativos destacamos: En el primer ejercicio considera que la derivada del producto es el producto de las derivadas, 1º-4 y 1º-7 y que la función potencial $sen^6(2x^3)$ es la función trigonométrica $sen(2x^3)^6$, 1º-6. En el segundo ejercicio no reconoce las integrales cuya solución es logarítmica, 2º-3 y 2º-4; ni las de tipo potencial, 2º-5, 2º-7 y 2º-9. En el tercero confunde las integrales tipo potencial con las integrales logarítmicas, 3º-1; considera que la integral del producto es el producto de las integrales, 3º-3 y la integral del cociente es el cociente de las integrales, 3º-8; no opera ni simplifica la función integrando 3º-2 y 3º-4 y no reconoce las identidades notables, 3º-10. En resumen, EG ha realizado una de las peores pruebas de integración, así se percibió en las diferentes sesiones de clase al realizar el cálculo mental de primitivas inmediatas y, además, el cuadernillo teórico-práctico de la integral lo cumplimentó solamente con las cinco primeras actividades y, seguidamente, lo abandonó[75].

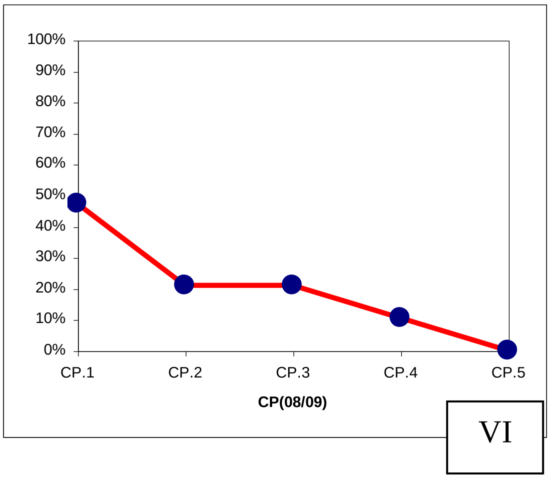
[72] No escribir paréntesis, cuando son necesarios, es un error muy frecuente en LB.

[73] El profesor, cuando entregó a los alumnos los ejercicios corregidos, preguntó a LB por qué consideraba $\int tag\,2x\,dx = \frac{1}{2} tag\,2x + k$, si no sospechaba que era incorrecto puesto que la primitiva es la mitad de la función integrando. Esta alumna contestó que: *"Estaba casi segura que la solución no estaba bien pero prefería dar una solución antes que dejarlo en blanco".*

[74] La alumna EG, en 4º ESO, cursó Matemáticas B y no las aprobó, sin embargo, no tenía pendientes Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I.

[75] El profesor investigador preguntó a EG por qué no había seguido con el cuadernillo. La respuesta no se hizo esperar: *"No entiendo nada".*

Reflexión: Si en este ciclo consideramos el cálculo mental mediante el cálculo de derivadas y primitivas elementales realizado en las distintas sesiones de clase de grupo[76] y los ejercicios escritos, cuyas preguntas han sido escaneadas en el anexo I, podemos concluir que los resultados obtenidos no son tan satisfactorios como sería de desear.



Gráficos X.4.1.40. Cálculo de derivadas y primitivas elementales (ciclo de cierre).

Ningún estudiante alcanza el nivel máximo, dos (10,53%) obtienen el nivel 4 y cuatro alumnos (21,05%) el nivel 3; si consideramos estos niveles con la calificación de aprobado entonces, solamente, el 31,58% de los estudiantes han obtenido un resultado satisfactorio. En el extremo opuesto hay nueve alumnos (47,37%) con nivel 1, es decir, su calificación no alcanza 2,5 puntos en una escala de 10; finalmente, algo mejor están los cuatro alumnos que son evaluados con el nivel 2.

Corroboramos la reflexión del capítulo anterior: *"Los resultados obtenidos en el cálculo mental de primitivas son altamente insatisfactorios"* y, además, añadimos: *"los resultados del cálculo mental de derivadas son muy bajos".*

En la prueba escrita hemos considerado oportuno no incluir ningún parámetro puesto que ya habían quedado constatadas la dificultades con las que se encontraban los alumnos, tampoco hemos considerado conveniente integrar funciones exponenciales[77] cuya base fuera distinta al número *e.*

Confirmamos todas y cada una de las reflexiones del CP del capítulo IX[78] y añadimos que, en general, los estudiantes bachilleres de ciencias sociales desconocen la definición de las funciones logaritmo y trigonométricas y, en consecuencia, no aplican sus propiedades; además, muchos de ellos, no reconocen las identidades notables.

[76] Las respuestas de los estudiantes de 2º D a los ejercicios de clase, como es sabido, eran orales y, posteriormente, el profesor o algún alumno las escribía en la pizarra. La mayoría de los alumnos copiaban los ejercicios resueltos en sus cuadernos de MACS II.

[77] Quedó establecido en la reflexión i) del epígrafe *IX.4.1.13. CP: Cálculo de primitivas.*

[78] Salvo e) de *IX.4.1.13* puesto que no se han calculado primitivas por cambio de variable.

X.4.2. TABLA RESUMEN DE LAS CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DEL CICLO DE CIERRE

Una vez analizadas las distintas respuestas a las categorías de comprensión matemática del ciclo de cierre procedemos a realizar la tabla resumen de las mismas, eso sí, no lo hacemos como en los ciclos de confirmación y de consolidación[79] puesto que en la nueva tabla establecemos el orden secuencial, tal y como fueron estudiadas en la sección anterior. Como no es posible, por la limitación física del espacio, poner en una única página las cuarenta categorías de comprensión matemática, hemos optado por distribuirlas en dos páginas, las cuales tienen la misma cabecera.

En la tabla resumen del ciclo de cierre, consideramos las respuestas de los cuadernillos de los diecinueve alumnos con una valoración cuantitativa y, además, damos la siguiente información:

- La primera columna contiene los códigos de las categorías.
- Como *Niveles de respuesta* tenemos los cinco que hemos establecido según la escala Likert y por cada nivel de cada una de las categorías se localizan dos datos, éstos son: la frecuencia n_i y el porcentaje del nivel obtenido para esa categoría[80].
- Tres parámetros, para cada categoría, denominados *Medidas*, éstos son: *Moda (Mo)* que es el nivel de mayor frecuencia, *Suma* (Σ) que es $\sum = \sum n_i \left(\textit{Nivel de respuesta de la categoría} \right)$ y *Media* ($\bar{x}$) que viene dada por el cociente $\bar{x} = \Sigma$/número total de alumnos[81].
- La última fila, denominada *TOTAL*, sigue el mismo procedimiento, sumando previamente las columnas de las frecuencias de cada uno de los niveles[82].

[79] Recuérdese que en los capítulos VIII y IX, véanse los epígrafes *VIII.4.2* y *IX.4.2*, en primer lugar se confeccionaron las tablas resumen de las categorías comunes con los ciclos anteriores y después las tablas de las nuevas categorías.

[80] Por ejemplo, para la categoría ESIS el nivel 5 tiene frecuencia 16 (han sido evaluadas 16 respuestas de los alumnos en esa categoría con un nivel 5) y el porcentaje que le corresponde es 84,21% (16 alumnos del total que son 19).

[81] Si consideramos ESIS, tenemos: *Mo* = 5 puesto que el nivel 5 tiene la frecuencia más alta (16), Σ=1x1+ 0x2 + 2x3 + 0x4 + 16x5 = 87 y $\bar{x}$ = 87/19 = 4,58 (19 alumnos del grupo 2º D).

[82] Por ejemplo, la frecuencia TOTAL del nivel 1 es la suma de todas las frecuencias de nivel 1 de las cuarenta categorías y asciende a 433; el 56,97% se obtiene de 43300/760 (760=19x40; 19 estudiantes y 40 categorías).

CATEGORÍAS	*FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA Y CÁLCULO MENTAL (CICLO VI) 1/2*												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\bar{x}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
DGA	3	15,79	0	0	0	0	0	0	16	84,21	5	83	4,37
DGSI	3	15,79	1	5,26	0	0	0	0	15	78,95	5	80	4,21
DGSS	9	47,37	0	0	0	0	0	0	10	52,63	5	59	3,11
RSISR	4	21,05	1	5,26	8	42,11	0	0	6	31,58	1	60	3,16
ESIS	1	5,26	0	0	2	10,53	0	0	16	84,21	5	87	4,58
EID	10	52,63	1	5,26	0	0	5	26,32	3	15,79	1	47	2,43
DR	11	57,89	0	0	6	31,58	0	0	2	10,53	1	39	2,05
DMIN4	15	78,95	0	0	0	0	0	0	4	21,05	1	35	1,84
DMAX4	14	73,68	0	0	0	0	0	0	5	26,31	1	39	2,05
DSI4	15	78,95	0	0	0	0	0	0	4	21,05	1	35	1,84
DSS4	12	63,16	0	0	1	5,26	2	10,53	4	21,05	1	43	2,26
DSI8	12	63,16	0	0	1	5,26	2	10,53	4	21,05	1	43	2,26
DSS8	14	73,68	0	0	1	5,26	0	0	4	21,05	1	37	1,95
DIINF	16	84,21	0	0	0	0	0	0	3	15,79	1	31	1,63
DISUP	16	84,21	0	0	0	0	0	0	3	15,79	1	31	1,63
DNI	16	84,21	0	0	0	0	0	0	3	15,79	1	31	1,63
AR	3	15,79	0	0	0	0	0	0	16	84,21	5	83	4,37
AMIN4	16	84,21	0	0	0	0	0	0	3	15,79	1	31	1,63
AMAX4	15	78,95	0	0	0	0	0	0	4	21,05	1	35	1,84
ASI4	9	47,37	0	0	0	0	1	5,26	9	47,37	3	58	3,05

Tabla X.4.2.(1/2). Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las categorías/niveles de la integral definida y el cálculo mental (curso 2008-2009).

CA TE GO RÍ AS	***FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LAS CATEGORÍAS/NIVELES DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA RELATIVAS AL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA Y CÁLCULO MENTAL (CICLO VI) 2/2***												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\bar{X}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
ASS4	14	73,68	0	0	0	0	0	0	5	26,32	1	39	2,05
ASI8	3	15,79	0	0	5	26,32	4	21,05	7	36,84	5	69	3,63
ASS8	4	21,05	0	0	6	31,58	3	15,79	6	31,58	4	64	3,37
ASIn	15	78,95	1	5,26	0	0	0	0	3	15,79	1	32	1,68
ASSn	14	73,68	1	5,26	1	5,26	0	0	3	15,79	1	34	1,79
AIINF	18	94,74	0	0	0	0	0	0	1	5,26	1	23	1,21
AISUP	18	94,74	0	0	0	0	0	0	1	5,26	1	23	1,21
AI	16	84,21	0	0	0	0	0	0	3	15,79	1	31	1,63
ACAFE	16	84,21	0	0	0	0	0	0	3	15,79	1	31	1,63
ACID	13	68,42	0	0	1	5,26	0	0	5	26,32	1	41	2,16
ATCFI	16	84,21	0	0	0	0	0	0	3	15,79	1	31	1,63
DGSR	12	63,16	0	0	5	26,32	0	0	2	10,53	1	37	1,95
IGTVMD	5	26,32	0	0	2	10,53	0	0	12	63,16	5	71	3,74
TFCIS	4	21,04	0	0	2	10,53	0	0	13	68,42	5	75	3,95
TFCII	5	26,32	0	0	3	15,79	2	10,53	9	47,37	5	67	3,53
TFCISI	6	31,58	0	0	0	0	2	10,53	11	58,89	5	69	3,63
RFIAR	13	68,42	0	0	0	0	0	0	6	31,58	1	43	2,26
AGAI	8	42,11	0	0	5	26,32	0	0	6	31,58	1	53	2,79
IGTVMI	10	52,63	0	0	6	31,58	0	0	3	15,79	1	43	2,26
CP	9	47,37	4	21,05	4	21,05	2	10,53	0	0	1	37	1,95
TOTAL	**433**	**56,97**	**9**	**1,18**	**59**	**7,76**	**23**	**3,03**	**236**	**31,06**	**1**	**1900**	**2,5**

Tabla X.4.2.(2/2). Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de las categorías/niveles de la integral definida y el cálculo mental (curso 2008-2009).

X.4.3. REFLEXIONES DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LOS CUADERNILLOS DEL CICLO DE CIERRE

Después de describir la acción, analizar los cuadernillos cumplimentados por los estudiantes y confeccionar la tabla resumen de los niveles/categorías de comprensión matemática de los alumnos del ciclo de cierre, debemos redactar las reflexiones a las cuales hemos llegado una vez estudiadas las producciones escritas de los estudiantes de 2º D, éstas son:

a) Un porcentaje muy elevado de alumnos no encuentran dificultad en la determinación geométrica de la superficie delimitada por la gráfica de una función continua y positiva, definida en un intervalo compacto y el eje de abscisas (DGA) y el 78,95% de los alumnos han comprendido gráficamente el concepto de suma inferior de Darboux (DGSI); no es menos cierto que sólo diez estudiantes (52,63%) de 2º D han señalado gráficamente el concepto de suma superior de Darboux (DGSS). Pensamos que tal disparidad puede ser debida a una lectura irreflexiva del texto matemático y a una escasa atención a la información transmitida por medio de las representaciones gráficas.

b) Seis alumnos (31,58%) comprenden y expresan correctamente la relación existente entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones (RSISR), en las cuales se da la relación de refinamiento, es decir, $P=\{a=x_0<x_1<x_2=b\}$ y $P'=\{a=x_0<x'_1<x_1<x_2=b\}$

c) Afirmamos que la interpretación geométrica del área y de las sumas de Darboux (inferior y superior) no es difícil para los estudiantes puesto que dieciséis (84,21%) lo realizan correctamente.

d) Tres alumnos (15,79%) explican rigurosamente los conceptos de integral inferior y superior de Darboux y otros cinco (26,32%) lo hacen de forma aceptable, sin incurrir en errores conceptuales.

e) Entendemos que los alumnos de bachillerato de ciencias sociales no perciben la densidad de los números racionales en los reales (ídem irracionales)[83] y, por ello, la función de Dirichlet[84] solo la representan correctamente dos estudiantes (10,53%; DR). Seis estudiantes al

[83] En Bachillerato no se define el concepto de densidad, aunque, en innumerable ocasiones se afirma: *"Entre dos números reales siempre podemos encontrar un número racional (ídem irracional)"*.

[84] $f(x)=\begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional\ en\ [0,4] \\ 2 & si\ x\ es\ irracional\ en\ [0,4] \end{cases}$

representarla lo hacen correctamente para los valores racionales mientras que para los valores irracionales del dominio de definición consideran no más de cinco puntos y, consecuentemente, la representación es incorrecta. Se detectó en los ciclos anteriores y se vuelve a constatar en este de cierre que al representar la función de Dirichlet varios alumnos señalan la superficie rectangular de vértices A(0,1), B(4,1), C(0,2) y D(4,2).

f) Poco menos de la cuarta parte de los estudiantes determinan los mínimos y máximos de la función de Dirichlet en cuatro subintervalos (DMIN4 y DMAX4) y en la misma proporción están los estudiantes que calculan las sumas inferiores y superiores (DSI4 y DSS4) asociadas a las dos categorías anteriores.

g) Si el número de nodos del intervalo [0,4] asciende a 9, no mejoran los porcentajes de los alumnos que calculan las correspondientes sumas inferiores y superiores (DSI8 y DSS8), puesto que mantienen la proporción de las dos categorías anteriores.

h) Como era de prever, sólo tres estudiantes (15,79%) justifican los valores de las integrales inferior y superior de Darboux de la función de Dirichlet (DIINF y DISUP respectivamente) y, además, afirman que dicha función no es integrable (DNI) en [0,4].

i) Determinar, gráficamente, el área limitada por la función afín *ƒ(x)=x,* el eje de abscisas y las rectas *x=0* y *x=1* (AR) no supone ninguna dificultad al 84,21% de los estudiantes. Sin embargo, calcular los mínimos y máximos de la función sobre una partición del intervalo original [0,1] de cinco nodos (AMIN4 y AMAX4) y la obtención de las sumas inferiores y superiores asociadas a la partición anterior (ASI4 y ASS4) arroja una media muy baja, el 27,5% de aciertos, valoradas conjuntamente las cuatro categorías.

j) Al aumentar el número de nodos a 9 y escribir, incompletas, las correspondientes sumas inferiores y superiores hace que se eleve el número de estudiantes que alcanzan los dos niveles máximos en las categorías ASI8 y ASS8, superando el 50%.

k) Sólo tres estudiantes (15,79%) son capaces de generalizar, una vez estudiado el texto matemático del cuadernillo, las sumas inferiores y superiores (ASIn y ASSn) de la función afín para $P_n = \{i/n\}_{i=0}^{n}$.

l) Una única estudiante de 2º D (VB; 5,28%) determina las integrales inferior y superior de Darboux de la función $f(x)=x$ en [0,1] (AIINF y AISUP) y tres alumnos, poco más del 15%, expresan coherentemente la integrabilidad de $f(x)$ en dicho intervalo.

m) El cálculo de áreas mediante fórmulas elementales[85], ACAFE, es realizado por, aproximadamente, la sexta parte de los alumnos. Poco más de la cuarta parte calculan el área por medio de la integral definida, ACID, aplicando la regla de Barrow[86]. De nuevo, la sexta parte de los estudiantes justifican el área mediante el teorema fundamental o teorema de caracterización óptima de las funciones integrables, ATCFI.

n) Es evidente que los alumnos de este ciclo no prestan la debida atención a las gráficas, o no las entienden, puesto que sólo dos (10,53%) determinan gráficamente las sumas de Riemann (DGSR) y este resultado es muy inferior a los de los cinco ciclos anteriores.

o) Combinar, en las explicaciones del profesor, los registros gráficos y analítico-algebraicos resulta enriquecedor para el aprendizaje de los estudiantes pues obtienen excelentes porcentajes, aproximadamente el 65%, en la interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial (IGTVMD) y en las tres categorías del teorema fundamental del cálculo integral (TFCIS, TFCII y TFCISI).

p) El 30% de los estudiantes realizan correctamente la representación gráfica, como superficie recorrida, de la función integral (RFIAR).

q) La tercera parte de los alumnos interpretan gráficamente y expresan analíticamente la propiedad de la aditividad de la integral (IGAI). La interpretación geométrica del teorema del valor medio de la integral, IGTVMI, junto con su expresión analítica sigue con un porcentaje muy bajo de respuestas correctas (15,79%), superior al de los ciclos de consolidación e inferior a los resultados de los tres primeros ciclos.

r) El cálculo mental de derivadas y primitivas elementales (CP) es muy difícil, para los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales del ciclo de cierre, puesto que no llegan a la tercera parte los alumnos que alcanzan un nivel igual o superior a 3.

[85] Área del triángulo.

[86] Reconocida como el Teorema Fundamental del Cálculo.

X.4.4. ANÁLISIS SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA

Sabemos que el modelo teórico bajo el cual realizamos la presente investigación es el *modelo de comprensión de Sierpinska*, el cual exige que se establezcan los actos de comprensión y los obstáculos y/o dificultades[87] asociados a la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida. Así lo hemos establecido en el capítulo III[88] y, además, lo hemos aplicado en nuestra investigación práctica de los ciclos de exploración (I), confirmación (II y III) y consolidación (IV y V) cuya memoria ha sido redactada en los capítulos VII, VIII y IX, respectivamente, de la presente tesis doctoral.

Procede, en estos momentos, determinar los actos de comprensión de Sierpinska y los obstáculos y/o dificultades encontrados en la investigación experimental del presente ciclo de cierre (VI, curso 2008-2009). Después de haber investigado cinco ciclos y por el proceso en espiral que conlleva el marco metodológico cualitativo de investigación-acción[89], muchos de los actos de comprensión del ciclo de cierre han sido descritos en los tres capítulos precedentes; sin embargo, con el objetivo de no dejar incompleta la redacción del presente capítulo y facilitar una mejor lectura del mismo[90], determinamos los actos de comprensión de los estudiantes de 2º D en el aprendizaje de la integral definida y en el desarrollo del cálculo mental de primitivas elementales según la fase de la acción, las grabaciones en audio, el cuaderno de campo del profesor-investigador, el análisis de cada uno de los cuadernillos teórico-prácticos de los estudiantes y la corrección de las pruebas escritas del cálculo de derivadas y primitivas inmediatas.

En esta sección determinamos los actos de comprensión y los obstáculos y/o dificultades, según se recoge en las tablas III.1.5.1 y III.1.5.2 del capítulo III[91], relativos a las treinta y nueve categorías de comprensión matemática

[87] Consideramos que, en nuestra investigación, los estudiantes no siempre encuentran obstáculos en la adquisición del conocimiento matemático, en ocasiones, tienen dificultades.

[88] Véase el epígrafe *III.1.5. El Modelo de Comprensión de Sierpinska.*

[89] Consúltese el *Capítulo II: Marco Metodológico Cualitativo* y, sobre todo, la *Figura II.2.3* del mismo capítulo.

[90] Consideramos que en estos momentos, para facilitar una lectura secuencial de la presente memoria, no es aconsejable remitirnos a la lectura de las secciones VII.4.4, VIII.4.4 y IX.4.4 y, aunque se vuelvan a repetir muchos de los actos de comprensión, es mejor volverlos a determinar.

[91] *Tabla III.1.5.1. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al aprendizaje de la integral definida. Tabla III.1.5.2. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al cálculo mental de primitivas.*

analizadas anteriormente y al *cálculo de primitivas (CP)*[92] del presente ciclo de cierre. Procediendo del mismo modo que en los cinco ciclos anteriores, los actos de comprensión de Sierpinska y los obstáculos y/o dificultades observados en el ciclo VI los reconocemos por sus códigos junto con los códigos de las correspondientes categorías de comprensión matemática (ambos códigos entre paréntesis)[93] y, además, son comentados a nivel general y no individual[94]. He aquí el análisis de las producciones de los estudiantes de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales del ciclo de cierre, según el marco o modelo teórico de Sierpinska:

Los estudiantes del ciclo de cierre identifican fácilmente una superficie delimitada por la gráfica de una función continua y positiva $f(x)$, el eje de abscisas y dos rectas verticales (CI_{11}; DGA). Reconocer e identificar una partición del intervalo $[a,b]$ de tres nodos, $P=\{a=x_0<x_1<x_2=b\}$, es sencillo para el 80% de los alumnos (CI_{12}) y tampoco tienen dificultades en identificar y discriminar gráficamente los extremos absolutos de $f(x)$ en los subintervalos $[a,x_1]$ y $[x_1,b]$ (CI_{14}); sin embargo, constatamos que el porcentaje de los que identifican la correspondiente suma inferior de Darboux, $s(f,P)$, (CI_{16}; DGSI) es superior al porcentaje de los estudiantes que determinan la suma superior de Darboux, $S(f,P)$, (OI_{16}; DGSS).

La deficiente identificación y discriminación entre la partición anterior, P, y un refinamiento de la misma, $P'=\{a=x_0<x'_1<x_1<x_2=b\}$, conlleva que más de la mitad de los alumnos tengan dificultades en establecer gráficamente los extremos absolutos de la función $f(x)$ en cada subintervalo de ambas particiones y, consecuentemente, en la identificación y discriminación de las respectivas sumas (inferiores y superiores) de Darboux sintetizándolas en la relación de desigualdad $s(f,P)\leq s(f,P')\leq S(f,P')\leq S(f,P)$ (OI_{16} y OI_{17}; RSISR).

Cuando los estudiantes deben relacionar pocos conceptos matemáticos, en contraposición a la categoría RSISR, entonces los resultados mejoran sustancialmente, así pues, los alumnos se sienten seguros al identificar y

---

[92] Entiéndase *cálculo mental de primitivas elementales.*

[93] Si, por ejemplo, se escribe (CI_{11}; DGA) significa que aparece el acto de compresión CI_{11}: *Identificación de una superficie delimitada por la gráfica de una función continua y positiva, el eje OX y las rectas $x=a$ y $x=b$* y, además, ello queda corroborado por la categoría de comprensión matemática DGA: *Determinación gráfica del área.* Así pues, cuando en el mismo paréntesis incluyamos códigos de actos u obstáculos y códigos de categorías, la sintaxis será:
(ACT-OBS, ACT-OBS,... y ACT-OBS; CAT, CAT,... y CAT).

[94] Consideramos que no debemos determinar los actos de comprensión según Sierpinska a nivel individual puesto que la presente investigación no contempla ningún estudio de casos.

generalizar las sumas inferior y superior de Darboux (CI_{13}, CI_{15} y CI_{17}; ESIS), aunque el número de nodos del intervalo [a,b] sea indeterminado.

Identificar y discriminar las integrales inferior y superior de Darboux (EID) es muy difícil para la mayoría de los alumnos (58%). Además, nuevamente podemos aseverar: *“Algunos estudiantes piensan que la integral inferior no se alcanza, más bien, se aproxima a un valor (ídem integral superior)”* (OI_{19a}, OI_{19b}, OI_{20a} y OI_{20b})[95].

El profesor investigador considera que, en general, los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales desconocen la complementariedad de los números racionales e irracionales en el conjunto de los números reales, además de la densidad de ambos conjuntos en el conjunto total o, si se han explicado implícitamente tales conceptos, se constata que estos alumnos tienen grandes dificultades e incluso existen importantes obstáculos en reconocer cada uno de los matices que acabamos de señalar. Así pues, partiendo de la reflexión previa, los resultados de los estudiantes de 2º D en todas las categorías de comprensión matemática relativas a la función de Dirichlet[96] arrojan niveles de comprensión muy pobres.

Las tres cuartas partes de los alumnos del ciclo de cierre consideran que los números irracionales en el intervalo [0,4] es un conjunto discreto (OI_{21}) y, como tal, muy pocos son capaces de identificar gráficamente la función de Dirichlet (CI_{21}; DR). Poco más de la quinta parte de los alumnos identifican y discriminan los extremos absolutos de dicha función en varios subintervalos de [0,4] (CI_{14} y CI_{15}; DMIN4 y DMAX4) y en la misma proporción se encuentran los que sintetizan, mediante los cálculos oportunos, las sumas inferiores y superiores de la función de Dirichlet asociadas a particiones con un número reducido de nodos (CI_{17}; DSI4, DSS4, DSI8 y DSS8)[97].

El 16% de los estudiantes identifican y discriminan las integrales inferior y superior de Darboux de la función de Dirichlet (CI_{19}; DIINF y DISUP) y, consecuentemente, los mismos alumnos lo sintetizan en la no integrabilidad de dicha función en el intervalo [0,4] (CI_{22}; DNI). Así pues, esto nos permite

[95] Este aserto, como es sabido, comenzó siendo una conjetura en los primeros ciclos de la investigación cuya veracidad se ha demostrado a lo largo de seis ciclos de investigación experimental con estudiantes de bachillerato de ciencias sociales.

[96] La función de Dirichlet de la presente investigación es: $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ racional\ en\ [0,4] \\ 2 & si\ x\ es\ irracional\ en\ [0,4] \end{cases}$

[97] Las particiones asociadas a las respectivas sumas de Darboux son: $P_4 = \{i\}_{i=0}^{4}$ y $P_8 = \{i/2\}_{i=0}^{8}$.

afirmar que un obstáculo importante para estos alumnos es reconocer la existencia de funciones que no son integrables en el sentido Darboux (OI_{22}).

Los estudiantes representan la función afín $f(x)=x$ sin mayores dificultades (CI_{11}; AR). Identificar y discriminar los extremos relativos de dicha función en los subintervalos $\left[\frac{i}{4},\frac{i+1}{4}\right]; \quad i=0,1,2,3;$ es muy difícil para el 70% de los alumnos, así como determinar sus respectivas sumas inferiores y superiores (OI_{14} y OI_{16}; AMIN4, AMAX4, ASI4 y ASS4). Si el profesor escribe algún término de las expresiones $s(f,P_8)$ y $S(f,P_8)$, siendo P_8={i/8}; i=0,...,8; entonces les resulta más fácil generalizar las respectivas sumas inferiores y superiores (CI_{14}, CI_{15} y CI_{16}; ASI8 y ASS8) y, de nuevo, el grado de dificultad es muy alto cuando se trata de generalizar y sintetizar las sumas de Darboux de la función afín en el intervalo [0,1] cuando la partición asociada a las mismas es P_n={i/n}, i=0,...,n (CI_{17}; ASIn y ASSn).

Identificar y discriminar las integrales inferior y superior de Darboux de la función afín (AIINF y AISUP) arroja unos niveles inferiores a los de las categorías precedentes, aunque mejoran en la síntesis de la integrabilidad de dicha función (AI). Constatamos, una vez más, que varios estudiantes consideran que las integrales inferior y superior de Darboux ($\underline{\int_0^1 x\,dx}, \quad \overline{\int_0^1 x\,dx}$, respectivamente) no alcanzan el valor 1/2, más bien, se aproximan a él (OI_{19a}, OI_{19b} y OI_{20a}).

Entendemos que los alumnos identifican y discriminan los polígonos más comunes (CI_2) y, en nuestro caso, pensamos que a muchos de ellos les resulta difícil considerar que el cálculo de áreas mediante la integral definida les permite generalizar y sintetizar los conocimientos previos adquiridos en primaria y en el primer ciclo de secundaria obligatoria para determinar áreas mediante: a) fórmulas elementales (CI_5; ACAFE), b) el teorema fundamental del cálculo o regla de Barrow (CI_{29} y CI_{31}; ACID) y c) el teorema de caracterización de las funciones integrables (OI_{20b}; ATCFI).

Los estudiantes de 2º D del sexto ciclo, discrepando radicalmente con los de los ciclos anteriores, consideran que el desconocimiento de los puntos intermedios asociados a una partición es un obstáculo, o al menos una dificultad, para poder sintetizar gráficamente la correspondiente suma de Riemann (OI_{23}; DGSR) y, en consecuencia, establecer la relación existente entre ésta y las sumas inferior y superior de Darboux de cualquier función positiva en el intervalo [a,b] asociadas a una partición *P* y un conjunto de puntos intermedios *T* de *P* (OI_{24}).

Queda corroborada la reflexión del capítulo anterior por la cual seguimos pensando que las visualizaciones e interpretaciones gráficas del teorema del valor medio del cálculo diferencial y del teorema fundamental del cálculo, efectuadas en las demostraciones-justificaciones de los mismos, han permitido a las dos terceras partes de los estudiantes de 2º D sintetizarlos sin dificultad (CI_{27}, CI_{28}, CI_{29} y CI_{36}; IGTVMD, TFCIS, TFCII y TFCISI).

Al menos dos de cada tres alumnos no son capaces de generalizar el concepto de función área (RFIAR) y transferirlo, previo paso por el concepto de integral definida, al concepto de integral indefinida sintetizándolo bajo la expresión $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ y, una vez más, constatamos que el obstáculo principal con el que se encuentran es la identificación del extremo superior de la integral con la variable de integración (OI_{30} y OI_{34}).

Los estudiantes del presente ciclo obtienen niveles muy bajos en las categorías de comprensión matemática relativas a las propiedades de la integral definida (IGAI e IGTMVI), que contrastan ampliamente con los ciclos de exploración (I) y confirmación (II y III), aunque son más próximos a los de los ciclos de consolidación (IV y V). Creemos que tales diferencias, más que a la dificultad por sintetizar dichas propiedades, puede ser debida a la saturación que tienen los alumnos al cumplimentar el amplio cuadernillo[98] y, consecuentemente, al final decaen en su interés por responder con rigor.

La cuadragésima y última categoría de comprensión matemática, *cálculo de primitivas (CP),* podemos considerarla ampliada en este ciclo y renombrarla como *cálculo mental de derivadas y primitivas elementales;* sin embargo, aunque en la tabla X.3.1.1 del presente capítulo hemos determinado los errores más comunes observados en las sesiones del aula de grupo, ahora debemos analizar las pruebas (orales y escritas) de los estudiantes según los *actos de comprensión de Sierpinska y*, sobre todo, *los obstáculos y/o dificultades* establecidos en la tabla III.1.5.2[99].

[98] El cuadernillo teórico-práctico del área y la integral definida se ha ido ampliando sucesivamente: en el ciclo de exploración quedaron definidas once categorías de comprensión matemática, en los ciclos de confirmación fueron veintisiete y en los tres últimos ciclos (consolidación y cierre) ascendieron a treinta y nueve categorías.

[99] Véase, en el capítulo III, la *Tabla III.1.5.2. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados al cálculo mental de primitivas.*

Afirmamos que más de la mitad de los estudiantes de 2º D tienen grandes dificultades, cuando no obstáculos importantes, en el cálculo de derivadas y ello es debido, entre otros motivos, a:

- Desconocimiento de las funciones más habituales (potencial, exponencial, racional, logarítmica, trigonométricas, etc.).
- Ignorar la “regla de la cadena” al considerar $\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x))$.
- Extender la “linealidad del operador derivada” al producto y cociente de funciones, es decir, $\left[g(x)\cdot f(x)\right]' = g'(x)\cdot f'(x)$ y $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- Escaso interés por comprender y aprender cualquier tabla de derivadas elementales.

Con los antecedentes anteriores del cálculo de derivadas, no es difícil deducir que los resultados obtenidos en el cálculo mental de primitivas elementales son altamente insatisfactorios y, entre otros, encontramos los siguientes motivos, obstáculos y/o dificultades:

- Desconocimiento de los distintos tipos de funciones primitivas (OM_4).
- Las manipulaciones algebraicas de las funciones integrando son deficientes y se cometen errores de forma habitual.
- Confusión entre derivación e integración (OM_3).
- Escaso interés por comprender y aprender cualquier tabla de integrales inmediatas (OM_7 y OM_9).
- Falta de concentración en el cálculo de primitivas (OM_8).
- Despreciar los factores constantes de integración (OM_{10}).
- La solución de $\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}\,dx,\ n \neq 1$ es $\ln\left|f(x)\right| + k$, o bien, $\ln\left|f^n(x)\right| + k$.
- Considerar algunas pseudopropiedades tales como (OM_6):

  $\int f(x)\,g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$, $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$ e $\int f(x)\,dx = g(x)\int \frac{1}{g(x)}\,f(x)\,dx$.
- No es necesario aprender nada de memoria puesto que se puede acceder a la información mediante las nuevas tecnologías (OM_{13}).
- Los estudiantes de ciencias sociales piensan que en sus estudios posteriores no necesitan el cálculo integral y, si se necesitara, siempre se puede recurrir a cualquier academia (OM_{12}).

X.5. INFORME Y ENCUESTAS

Si bien es cierto que el profesor investigador en los cinco primeros ciclos valoraba las opiniones de los estudiantes en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la integral[100], sin embargo, no se realizaron informes escritos al respecto. En este ciclo de cierre sí hemos solicitado el informe de un profesor observador externo y realizado una encuesta a los estudiantes partícipes en la investigación, por tanto, ello nos permite completar la triangulación de nuestra investigación.

X.5.1. INFORME DEL OBSERVADOR EXTERNO

El observador externo es el profesor FGF, Catedrático de Matemáticas y Jefe del Departamento de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos. Este profesor se personó en la clase del viernes día 12 de diciembre de 2008 y emitió el informe correspondiente el día 18 del mismo mes.

Como quedó establecido en la planificación[101] del ciclo VI, el día 12 de diciembre se impartió la séptima sesión de la unidad didáctica *Área e integral definida* y en ella se explicaron el *teorema del valor medio del cálculo diferencial* y el *teorema fundamental del cálculo (regla de Barrow).*

No pretendemos hacer ningún análisis riguroso del informe del observador externo, más bien especificar algunas de las apreciaciones emitidas por dicho profesor en el informe correspondiente, el cual se puede encontrar íntegramente en el anexo J de la presente memoria.

Efectivamente, en la clase del día 12-12-08 estaban presentes veintiún alumnos y en la investigación participaban diecinueve estudiantes, dos alumnas eran repetidoras y tenían aprobada la asignatura del curso anterior aunque asistían a la mayoría de las clases de MACS II como oyentes[102].

El observador considera que la metodología es heurística y que la docencia impartida por el profesor investigador parte de una revisión general de los

[100] Entiéndase en el sentido más amplio: *integral definida* realizada en las sesiones de las clases del aula del grupo, en el análisis de los cuadernillos y pruebas escritas de los alumnos, *cálculo mental* de primitivas y el uso de las *nuevas tecnologías* mediante *DERIVE* en el aula de informática.

[101] Véase la *Tabla X.2.3. Planificación del ciclo de cierre (ciclo VI, curso 2008-2009).*

[102] Dichas alumnas son VO y MR las cuales participaron en la investigación del ciclo V.

conocimientos previos de los alumnos (sumas de Riemann, concepto de primitiva, concepto de partición, etc.) para poder abordar de forma "intuitiva" el teorema de Lagrange. Asimismo, algunos alumnos intervienen e incluso interrumpen las explicaciones del profesor debido a constantes preguntas, "algunas con escasa profundización en los conceptos".

El profesor FGF afirma que "el tema es objetivamente muy difícil para el alumno medio de 2º de bachillerato", que el profesor investigador realiza "exposiciones cortas" ayudándose de "gráficos bastante claros" y que "más de la mitad de los alumnos tomaban notas, solamente observé a dos claramente despistados". Finalmente concluye: "mi impresión es que la relación entre integral definida y derivada que ellos [los alumnos] alcanzaron es 'bastante buena'".

Consideramos que el informe del observador externo constata las dificultades que tienen los alumnos de segundo de bachillerato de ciencias sociales para una correcta comprensión del teorema de Lagrange y del teorema fundamental del cálculo y, a su vez, percibimos que, en general, los estudiantes muestran interés inicial por aprender dichos teoremas.

X.5.2. ENCUESTA A LOS ALUMNOS

El profesor investigador, en la clase de matemáticas del día 23 de enero de 2009 realizó la encuesta a los alumnos de 2º D, entregó el texto de la misma a las 12:40 horas y lo recogió a las 13:10 horas. Seguidamente comenzó a explicar el Álgebra, que conforma la segunda parte de la asignatura.

La encuesta está compuesta por cuatro apartados, éstos son:

1. CÁLCULO MENTAL. Se refiere a la actividad desarrollada bajo este tópico, descrita y analizada en los epígrafes *X.3.1.1. Cálculo mental* y *X.4.1.40. Cálculo de primitivas*.
2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL (CUADERNILLO DE LA INTEGRAL). Se refiere a los cuadernillos teórico-prácticos sobre el área y la integral cumplimentados por cada uno de los estudiantes y analizados en *X.4. Análisis de los cuadernillos.*
3. UNIDAD DIDÁCTICA: ÁREA E INTEGRAL. Se refiere al conjunto de los materiales entregados, los recursos empleados, la calidad de la

docencia, el interés por el aprendizaje, etc. cuyo análisis se circunscribe básicamente a este capítulo y a la propuesta didáctica del capítulo V[103].

4. PRÁCTICA CON *DERIVE* (LA INTEGRAL). Se refiere a la clase práctica del área y la integral realizada con el programa de cálculo simbólico *DERIVE* en el aula de informática y en análisis de las respuestas del cuadernillo de prácticas informáticas. Como aún no se ha descrito la utilización de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de la integral, en este momento, no podemos incluir esta parte de la encuesta y la posponemos al capítulo siguiente: *Capítulo XI. Del lápiz y papel a las nuevas,* epígrafe *XI.3.4. Práctica con DERIVE, ciclo de cierre.*

Cada una de las cuatro partes de la encuesta consta de una serie de ítems cerrados, salvo el último, que deben ser respondidos por los alumnos según la escala 1-5, siendo 1 (mínimo) y 5 (máximo)[104]. El profesor investigador ha valorado el último ítem que permite dar una respuesta abierta con tres niveles: negativo, no contesta y positivo; además, algunas de esas respuestas están escaneadas en el anexo J de la presente memoria, con el fin de que pueda ser leído el texto "original" de los respectivos estudiantes.

A partir de este momento, en cada una de las tres primeras partes de la encuesta, incluimos el correspondiente *cuadro de texto de la encuesta* (en amarillo) y seguidamente analizamos las respuestas de los estudiantes en las correspondientes tablas. Hacemos constar que el número de cada ítem, salvo el último, del cuestionario coincide con el número de ítem de su respectiva tabla[105] y que las respuestas del último ítem están recogidas en un diagrama de barras, después de comentar algunas de ciertos alumnos.

[103] La teoría de la integral definida explicada a los estudiantes de 2º D de Bachillerato de Ciencias Sociales es una transposición didáctica de los apartados *V.3. El área como límite* y *V.4. Integral definida en MACS II.*

[104] Las respuestas a cada pregunta siguen la escala Likert.

[105] El tratamiento de los datos de las tres tablas siguientes sigue el mismo procedimiento que el de la tabla X.4.2, ampliamente explicado en el epígrafe X.4.2; por tanto, en estos momentos consideramos innecesario volverlo a detallar.

X.5.2.1. Cálculo mental

La primera parte de la encuesta, cálculo mental[106], realizada a los alumnos de 2º D fue contestada por los diecinueve estudiantes que formaron parte del ciclo final de la presente investigación. He aquí los diez ítems:

1.- CÁLCULO MENTAL

1.1.- Si consideras interesante el aprendizaje del cálculo de las integrales indefinidas (primitivas) al principio de las clases: __________

1.2.- Tu propio interés en el aprendizaje del cálculo de primitivas: __________

1.3.- Tus intervenciones en el cálculo de primitivas: __________

1.4.- Tu aprendizaje del cálculo de primitivas: __________

1.5.- El interés del profesor por la enseñanza del cálculo de primitivas: ___________

1.6.- La capacidad docente del profesor en la enseñanza del cálculo de primitivas: ____

1.7.- El orden, claridad y rigor del profesor en el cálculo de primitivas: ___________

1.8.- Las intervenciones de los demás alumnos en el cálculo de primitivas: __________

1.9.- El grado de dificultad en los ejercicios propuestos: ____________

1.10.- Describe, brevemente, tus impresiones sobre el cálculo mental desarrollado y lo que consideres importante mantener o cambiar en posteriores cursos: ______________
____

Cuadro X.5.2.1. Encuesta sobre el cálculo mental.

Calcular primitivas elementales mediante el cálculo mental supone una novedad importante para los alumnos de segundo de bachillerato de ciencias sociales puesto que durante sus años de escolarización sólo habían practicado el cálculo mental, esporádicamente, en sus estudios de primaria y en el primer ciclo de educación secundaria obligatoria, por tanto, les ha exigido un gran esfuerzo intelectual y un alto nivel de abstracción. Además, la docencia actual propuesta en los libros de texto analizados en el capítulo IV, salvo Casals, tampoco contemplan el cálculo mental de primitivas.

Los estudiantes consideran que para practicar el cálculo mental de primitivas “hace falta tener pensamiento abstracto”, VB; sin embargo, la preocupación de muchos de ellos se centra en superar los exámenes: “los ejercicios propuestos en el examen son un poco más difíciles que los de clase”, DD; “realmente las clases están muy bien planteadas y el profesor explica bien, pero por la razón que sea, luego en el examen no plasmo lo aprendido durante las clases y lo trabajado en casa”, MM.

[106] La prueba escrita del cálculo mental de derivadas e integrales inmediatas, realizada en el ciclo VI, puede consultarse en el anexo I.

Recopiladas las respuestas de los nueve primeros ítems de la encuesta del cálculo mental, los resultados vienen dados en la siguiente tabla:

Í T E M S	***FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LA ENCUESTA SOBRE EL CÁLCULO MENTAL (CICLO VI)***												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\overline{X}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
1.1	1	5,26	3	15,79	9	47,37	4	21,05	2	10,53	3	60	3,16
1.2	0	0	3	15,79	7	36,84	5	26,32	4	21,05	3	67	3,53
1.3	3	15,79	6	31,58	8	42,11	2	10,53	0	0	3	47	2,47
1.4	1	5,26	5	26,32	8	42,11	4	21,05	1	5,26	3	56	2,95
1.5	0	0	0	0	2	10,53	5	26,32	12	63,16	5	86	4,53
1.6	0	0	0	0	2	10,53	9	47,37	8	42,11	4	82	4,32
1.7	0	0	1	5,26	7	36,84	6	31,58	5	26,32	3	72	3,79
1.8	1	5,26	2	10,53	12	63,16	4	21,05	0	0	3	57	3
1.9	0	0	0	0	2	10,53	9	47,37	8	42,11	4	82	4,32
TOTAL	**6**	**3,51**	**20**	**11,70**	**57**	**33,33**	**48**	**28,07**	**40**	**23,39**	**3**	**609**	**3,56**

Tabla X.5.2.1. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de la encuesta sobre el cálculo mental (curso 2008-2009).

Los alumnos no están entusiasmados por la práctica del cálculo mental, valoran más el interés del profesor, minorado por el orden y claridad del mismo, que su propio interés por el aprendizaje del cálculo de primitivas por medio de este procedimiento.

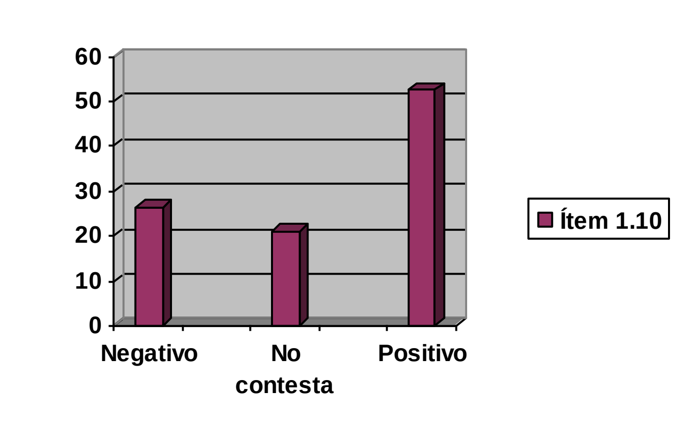


Gráfico X.5.2.1. Porcentajes de cada tipo de respuesta del ítem 1.10 (cálculo mental).

Las respuestas de los estudiantes al décimo ítem son: cinco lo consideran negativo, diez positivo y cuatro no responden.

X.5.2.2. Práctica con lápiz y papel (cuadernillo de la integral)

La segunda parte de la encuesta realizada a los alumnos del ciclo de cierre también fue contestada por todos ellos, diecinueve. Los cinco ítems que la componen son:

2.- PRÁCTICA DE LÁPIZ Y PAPEL (LA INTEGRAL)

2.1.- El grado de dificultad de la actividad propuesta: __________

2.2.- Tu propio interés por completar correctamente el cuadernillo: ___________

2.3.- La consulta de otras fuentes matemáticas para la realización de la práctica: ______

2.4.- Tu comprensión teórica de la integral definida después de realizar la práctica: ____

2.5.- Describe, brevemente, tus impresiones sobre la práctica propuesta de lápiz y papel, tu propio aprendizaje teórico de la integral definida una vez cumplimentado el cuadernillo y lo que consideres más interesante: ____
____
____

Cuadro X.5.2.2. Encuesta sobre la práctica de lápiz y papel (cuadernillo de la integral).

Recopiladas las respuestas de los cuatro primeros ítems sobre el cuadernillo teórico-práctico del área y la integral cumplimentado por los estudiantes, los resultados vienen dados en la tabla adjunta:

ÍTEMS	FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LA ENCUESTA SOBRE LA PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL, CUADERNILLO DE LA INTEGRAL (CICLO VI)												
	Niveles de respuesta										Medidas		
	1		2		3		4		5		*Mo*	Σ	$\bar{x}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
2.1	0	0	3	15,79	1	5,26	3	15,79	12	63,16	5	81	4,26
2.2	0	0	1	5,26	5	26,32	6	31,58	7	36,84	5	76	4
2.3	1	5,26	1	5,26	8	42,11	8	42,11	1	5,26	3	64	3,37
2.4	0	0	7	36,84	7	36,84	5	26,32	0	0	2,5	55	2,89
TOTAL	**1**	**1,32**	**12**	**15,79**	**21**	**27,63**	**22**	**28,95**	**20**	**26,32**	**4**	**276**	**3,63**

Tabla X.5.2.2. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de la encuesta sobre la práctica de lápiz y papel, cuadernillo de la integral, (curso 2008-2009).

Los alumnos consideran que las actividades propuestas en el cuadernillo del área y la integral definida[107] son difíciles de realizar según consta en los resultados obtenidos del primer ítem y, en general, los estudiantes muestran un alto interés por cumplimentar dicho cuadernillo.

La consulta de los alumnos a otras fuentes matemáticas para la realización del trabajo propuesto no es tan habitual como sería de desear, a pesar de la disponibilidad de las bibliotecas del instituto y del barrio de Gamonal y de los recursos disponibles en la red.

Los diecinueve estudiantes del ciclo VI de esta investigación consideran que es baja su propia comprensión de la integral definida, suponiendo que han contestado con sinceridad las tres preguntas anteriores, el profesor investigador piensa que la unidad didáctica del área y la integral definida es difícil para los alumnos de segundo de bachillerato de ciencias sociales y así queda corroborado por el cuarto ítem de esta segunda parte de la encuesta; así pues, deberemos estar atentos al resto de la encuesta para poder afirmar o desmentir la dificultad del aprendizaje de esta parte del análisis matemático.

Nueve estudiantes, menos del 50%, consideran positiva la práctica “después de la práctica comprendo un poco mejor la integral”, EG; dos no responden y ocho (42,11%) piensan que ha sido negativa su realización “yo creo que me quedé igual que si no hubiera hecho el cuadernillo”, AC.

Estudiadas con detenimiento las respuestas del quinto ítem, al margen de la clasificación anterior, el profesor investigador considera que los estudiantes están más interesados en la resolución de los ejercicios que en la comprensión de los distintos conceptos matemáticos y ello queda constatado por el escaso interés con que siguen la exposición teórica y las interrupciones de algunos alumnos durante la misma.

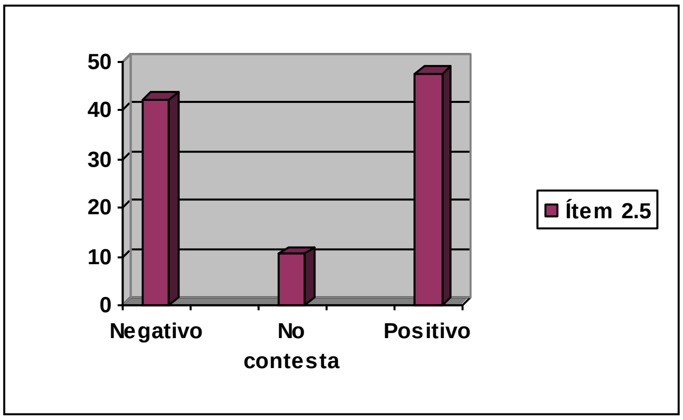


Gráfico X.5.2.2. Porcentajes de cada tipo de respuesta del ítem 2.5 (cuadernillo de la integral).

107 Véase el anexo F de esta memoria y la sección X.4 del presente capítulo.

X.5.2.3. Unidad didáctica: Área e integral definida

Todos los alumnos, diecinueve, contestaron los nueve primeros ítems de la tercera parte de la encuesta y dieciséis describieron lo que consideraban más interesante en el décimo ítem. He aquí el texto de la encuesta:

3.- UNIDAD DIDÁCTICA: ÁREA E INTEGRAL DEFINIDA

3.1.- El grado de dificultad de la unidad didáctica (área e integral definida): ________

3.2.- La exposición teórica, del profesor, del concepto de integral: _________

3.3.- Tu interés por el aprendizaje teórico de la integral definida: ________

3.4.- Los dificultad de los ejercicios propuestos y resueltos por el profesor: ________

3.5.- Tu grado de comprensión en la resolución de los ejercicios: _________

3.6.- Tu grado de concentración en clase: _________

3.7.- Tu interés por la realización, en casa, de las actividades propuestas por el profesor:_______

3.8.- El interés del profesor por transmitir los conocimientos matemáticos a los alumnos:________

3.9.- El grado de complicidad profesor-alumno en la enseñanza-aprendizaje: _______

3.10.- Describe, brevemente, tus impresiones sobre la enseñanza del profesor, tu propio aprendizaje y lo que consideres más interesante: _______________________________

____

____

Cuadro X.5.2.3. Encuesta sobre la unidad didáctica: Área e integral definida.

Analizando brevemente los resultados de la tabla X.5.2.3 queda constatado que la unidad didáctica que nos ocupa es considerada difícil por la mayoría de los estudiantes y la valoración de los mismos sobre la exposición teórica del profesor investigador es más baja de lo que sería de desear, pensamos que puede ser debido a:

- En los temas explicados anteriormente el profesor hizo menos incidencia en los contenidos teóricos.
- La exposición combinada mediante el *servidor*[108] y la pizarra supone que algunos estudiantes no se concentren suficientemente en las enseñanzas del profesor.
- La prioridad de los alumnos es resolver problemas, desinteresándose de la fundamentación teórica de los conceptos matemáticos.

[108] Compuesto por el ordenador, el cañón proyector y la pantalla.

ÍTEMS	FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LA ENCUESTA SOBRE LA UNIDAD DIDÁCTICA: ÁREA E INTEGRAL DEFINIDA (CICLO VI)												
	Niveles de respuesta										Medidas		
	1		2		3		4		5		*Mo*	Σ	$\bar{X}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
3.1	0	0	0	0	4	21,05	10	52,63	5	26,32	4	77	4,05
3.2	0	0	1	5,26	3	15,79	14	73,68	1	5,26	4	72	3,79
3.3	0	0	1	5,26	8	42,11	7	36,84	3	15,79	3	69	3,63
3.4	0	0	0	0	2	10,53	9	47,37	8	42,11	4	82	4,32
3.5	0	0	6	31,58	6	31,58	7	36,84	0	0	4	58	3,05
3.6	1	5,26	3	15,79	7	36,84	6	31,58	2	10,53	3	62	3,26
3.7	1	5,26	5	26,32	8	42,11	1	5,26	4	21,05	3	59	3,11
3.8	0	0	0	0	2	10,53	6	31,58	11	57,89	5	85	4,47
3.9	1	5,26	0	0	8	42,11	8	42,11	2	10,53	3,5	67	3,53
TOTAL	**3**	**1,75**	**16**	**9,36**	**48**	**28,07**	**68**	**39,77**	**36**	**21,05**	**4**	**631**	**3,69**

Tabla X.5.2.3. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de la encuesta sobre la unidad didáctica: Área e integral definida (curso 2008-2009).

En este cuestionario deducimos que el esfuerzo realizado por los alumnos en el aprendizaje del área y la integral, tanto en clase como fuera del aula, es medio y aunque ellos mismos consideran que el profesor muestra interés por transmitir conocimientos matemáticos, el grado de complicidad del profesor con los alumnos debiera ser mayor.

Dos estudiantes realizan comentarios negativos, tres no responden y catorce alumnos consideran que ha sido positivo el tratamiento dado a la unidad didáctica valorando más el trabajo del profesor que el suyo propio.

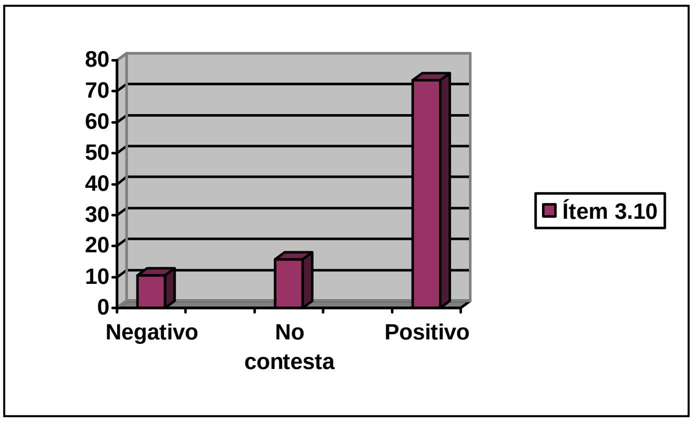


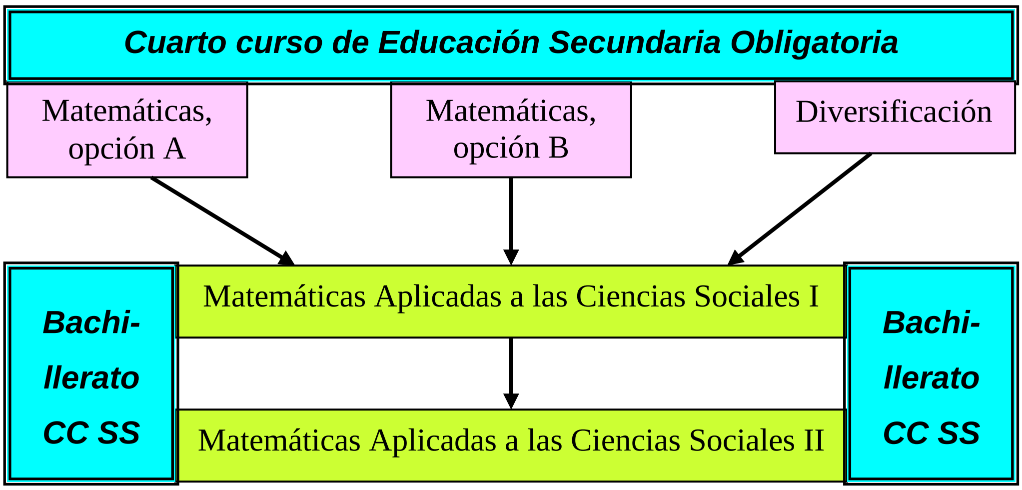
Gráfico X.5.2.3. Porcentajes de cada tipo de respuesta del ítem 3.10 (área e integral definida).

X.6 REFLEXIONES DEL CICLO DE CIERRE

En este último ciclo, descritas la planificación y la acción, analizados los cuadernillos cumplimentados por los estudiantes y estudiadas las tres primeras partes de la encuesta[109] realizada a los diecinueve alumnos, así como, efectuada la valoración del informe del profesor observador externo, nos proponemos redactar las reflexiones a las cuales hemos llegado, es más, muchas de ellas confirmarán las de los ciclos anteriores y otras serán redactadas por primera vez en el presente capítulo.

Consideramos que este apartado es la extensión natural de los epígrafes *X.3.2. Reflexiones de la acción*, *X.4.2. Reflexiones derivadas del análisis de los cuadernillos en el ciclo de cierre* y *X.4.3. Análisis según los actos de comprensión de Sierpinska* y, como tal, en este epígrafe redactamos aquellas reflexiones que no han sido recogidas en las secciones anteriores de este capítulo; éstas son:

a) Los estudios previos, en cuarto curso de ESO, de los alumnos que cursan MACS II son muy diversos, véase el esquema X.6, algunos de ellos no superaron la asignatura en dicho curso y, en general, los grupos que se forman son muy heterogéneos y con bajos y escasos conocimientos de matemáticas[110].



Esquema X.6. Estudios previos de los alumnos que cursan Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.

[109] La cuarta parte, y última, de la encuesta realizada a los estudiantes corresponde a la PRÁCTICA CON *DERIVE* (LA INTEGRAL) será estudiada en el capítulo XI de la presente memoria.

[110] Circunstancia agravada porque en todos los ciclos de nuestra investigación siempre ha habido alumnos con la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I pendiente del curso anterior y, además, al menos la tercera parte de los estudiantes han repetido algún curso académico.

b) Si bien es cierto que se ha trabajado el cálculo mental de primitivas elementales en este ciclo y en los cuatro anteriores, el profesor investigador percibió la importancia del *cálculo estimativo* y, sobre todo, en el presente ciclo de cierre ha considerado que debía trabajarlo más que en los ciclos de consolidación, por tanto, al resolver problemas de áreas se ha incidido en el cálculo aproximado de las mismas apoyándonos en tramas cuadriculadas. Consideramos que la experiencia ha sido muy positiva.

c) Un porcentaje elevado de alumnos tienen dificultades para reconocer las razones trigonométricas, las funciones circulares, la función logarítmica y la función exponencial. Asimismo, muchos estudiantes cometen errores al operar con fracciones, potencias y radicales.

d) Los alumnos cometen muchos errores al calcular integrales definidas de funciones definidas a trozos y/o en valor absoluto, pues no determinan correctamente la función integrando según se establezcan los extremos de la integración.

e) La ausencia de demostraciones matemáticas rigurosas en los cursos anteriores a segundo de bachillerato supone que se haya optado por realizar demostraciones gráfico-analíticas del teorema del valor medio del calculo diferencial y del teorema fundamental del cálculo integral.

f) Los alumnos, en general, no estudian los textos matemáticos, piden explicaciones al profesor en todo momento y no comprenden ciertas expresiones matemáticas; por ejemplo, si tenemos la suma inferior $s(f,P_4) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + m_4(x_4 - x_3)$ y solicitamos el valor de m_1, algunos alumnos escriben[111] $m_1 = (x_1 - x_0)$.

g) Muchos estudiantes desconocen las progresiones aritméticas y geométricas y, en consecuencia, no reconocen la fórmula de la suma de los "n" primeros términos de las progresiones aritméticas.

h) Los estudiantes consideran que el estudio de las matemáticas es secuencial, no retroalimentan sus conocimientos y ello queda constatado porque al rellenar los correspondientes cuadernillos ningún alumno rectificó una respuesta después de contestar a una cuestión posterior. Así pues, los estudiantes no suelen retomar los

[111] Véase, por ejemplo, *Gráficos X.4.1.8-DD.*

apuntes de matemáticas, no los repasan y no modifican, cuando es necesario, lo escrito anteriormente.

i) Algunos alumnos consideran prioritario contestar todas las cuestiones planteadas, aunque perciban que algunas de sus respuestas son erróneas, en lugar de no responder a tales preguntas.

j) Consideramos importante el descubrimiento por el cual algunos estudiantes consideran que aunque una función sea integrable Darboux, sus respectivas integrales inferior y superior no alcanzan el mismo valor, más bien, se aproximan a él.

k) El profesor investigador considera que es difícil enseñar el cálculo integral y más difícil ser aprendido por los estudiantes de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales; además, queda constatado que los responsables de las últimas convocatorias de las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León proponen pocos ejercicios en los cuales, para su resolución, deba aplicarse la integración. Cabe preguntarse: ¿Debe dejarse de enseñar un tema de matemáticas por el mero hecho de considerarlo difícil? ¿Podemos hurtar a los estudiantes una de las más bellas teorías matemáticas?

l) El observador externo considera que la metodología empleada por el profesor investigador es la correcta, en algunos momentos percibe que algunos alumnos tienen escasos conocimientos matemáticos, concluye que la unidad didáctica área e integral definida es muy difícil para los alumnos de nivel medio de segundo de bachillerato y termina escribiendo: *"Mi impresión es que la relación entre integral definida y derivada que ellos alcanzaron es 'bastante buena'".*

m) Los alumnos no consideran tan interesante el cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental como pueden considerarlo el director de la tesis y el profesor investigador.

n) Los alumnos son muy autocríticos con su propio aprendizaje de las primitivas utilizando el cálculo mental, consideran que, el profesor debe ser más ordenado y los ejercicios propuestos para resolver por este procedimiento tienen un alto grado de dificultad.

o) Los estudiantes consideran que la actividad propuesta en el cuadernillo teórico-práctico del área y la integral es difícil, su interés por realizarla correctamente es alto y, sin embargo, la comprensión teórica de los conceptos matemáticos que la sustentan es muy baja.

p) El profesor investigador considera que para muchos estudiantes de ciencias sociales las matemáticas se reducen a resolver problemas y piensan que la teoría no debe estudiarse y, de ahí, que el interés inicial de la mayoría de los alumnos por la consulta de diferentes fuentes científicas sea escaso o nulo.

q) Los alumnos también consideran, en la encuesta, que la enseñanza y el aprendizaje del área y la integral es difícil tanto para el profesor como para ellos y se constata que el interés del profesor por transmitir conocimientos matemáticos es insuficiente para que los estudiantes adquieran la ciencia matemática.

r) El profesor investigador confirma que, en general, los estudiantes de segundo de bachillerato de ciencias sociales no están entusiasmados por el aprendizaje de la integral, aunque tampoco muestran un amplio rechazo. Se percibe un tenue interés inicial por aprender la integral de Darboux que, en la mayoría de los casos, no es fortalecido con el estudio comprensivo, riguroso y reflexivo de los alumnos.

s) Es evidente que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en general y el cálculo integral en particular exige una buena relación profesor-alumno y un alto grado de estudio, esfuerzo intelectual y trabajo personal.

CAPÍTULO XI: DEL LÁPIZ Y PAPEL A LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS CON DERIVE 565

XI.1. INTRODUCCIÓN..565

XI.2. PRÁCTICAS CON LÁPIZ Y PAPEL..............................568

XI.2.1. OBJETIVOS..569

XI.2.2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL SEGUNDO CICLO ...570

XI.2.3. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL TERCER CICLO 577

XI.2.4. REFLEXIONES..583

XI.3. PRÁCTICAS CON DERIVE..586

XI.3.1. OBJETIVOS..589

XI.3.2. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLOS DE CONFIRMACIÓN.....591

XI.3.2.1. Planificación y texto de la práctica..............................591

XI.3.2.2. Acción 596

XI.3.2.3. Análisis de las respuestas 598

XI.3.2.4. Tablas resumen de las prácticas informáticas 599

XI.3.2.5. Reflexiones..602

XI.3.3. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLOS DE CONSOLIDACIÓN...604

XI.3.3.1. Planificación y texto de la práctica..............................604

XI.3.3.2. Acción 609

XI.3.3.3. Análisis de las respuestas 611

XI.3.3.4. Tablas resumen de las prácticas informáticas 614

XI.3.3.5. Reflexiones..615

XI.3.4. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLO DE CIERRE 617

XI.3.4.1. Planificación y texto de la práctica..............................617

XI.3.4.2. Acción 624

XI.3.4.3. Análisis de las respuestas 625

XI.3.4.4. Tabla resumen de las prácticas informáticas................................627

XI.3.4.5. Encuesta a los alumnos 628

XI.3.4.6. Reflexiones..630

XI.4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS CON DERIVE SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA.632

XI.5. REFLEXIONES GENERALES..638

XI.5.1. PRÁCTICAS CON LÁPIZ Y PAPEL 638

XI.5.2. PRÁCTICAS CON *DERIVE* 640

CAPÍTULO XI: DEL LÁPIZ Y PAPEL A LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS CON *DERIVE*

XI.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes se ha redactado la memoria de la investigación realizada sobre la *Integral Definida* y el *Cálculo Mental* de primitivas inmediatas; ahora debemos describir la investigación correspondiente a la tercera parte de la tesis doctoral, es decir, la enseñanza-aprendizaje de la integral mediante las *"Nuevas Tecnologías"* y, para ello, le dedicamos en exclusiva este capítulo.

La denominación: "DEL LÁPIZ Y PAPEL A LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS CON *DERIVE*", es debida a que en los dos ciclos de confirmación se consideró oportuno que los estudiantes realizaran una práctica de la integral con los únicos medios "tecnológicos" de lápiz, papel y calculadora no programable, posteriormente, en los ciclos de consolidación y cierre se descartó esta práctica. En todos los ciclos, salvo en el de exploración, se ha trabajado la integral definida en el aula de informática del instituto con las nuevas tecnologías utilizando el programa de cálculo simbólico *DERIVE*.

En el capítulo que nos ocupa se ha optado por no establecer las categorías mediante acrónimos y, como se verá posteriormente, la información extraída de los trabajos de los estudiantes será resumida sin que por ello quede sesgada nuestra investigación; además, en este capítulo y en el anexo K escaneamos algunas respuestas de los estudiantes que consideramos interesantes y nos referimos a ellas mediante el código asignado al alumno o alumnos autores de las mismas[1].

Todas las tablas resumen de los ítems/niveles que se incluyen en este capítulo tienen cinco niveles de respuesta según la escala Likert[2].

[1] Si a un alumno se le han escaneado varias respuestas en diferentes momentos, entonces nos referiremos a ellas con la siguiente notación: CÓDIGO_ALUMNO(LETRA), comenzando con la primera letra del abecedario y siguiendo correlativamente. Si la respuesta es conjunta de dos alumnos, entonces llevará los códigos de ambos alumnos separados por un guión.

[2] Consideramos innecesario especificar los cinco niveles de la escala Likert puesto que ya fueron detallados en los cuatro capítulos precedentes.

Las actividades las consideramos conjuntamente y, en primer lugar, en el análisis de cada una de las prácticas incluimos el texto de las mismas; además, el ordinal de cada ítem es la referencia del mismo[3].

Asimismo, los objetivos son conjuntos y generales para cada tipo de práctica[4] y los incluimos con anterioridad al estudio de cada uno de los ciclos y las reflexiones están redactadas no por ciclos individuales sino agrupados (confirmación, consolidación y cierre); posteriormente, analizamos las prácticas con *DERIVE* según los *actos de comprensión de Sierpinska* y, finalmente, redactamos las reflexiones generales.

En el primer ciclo de la presente investigación o ciclo de exploración, no fue posible realizar ninguna práctica de la integral, entre otros motivos por:

1. El desconocimiento del profesor investigador del funcionamiento del departamento de matemáticas del IES "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos puesto que era el primer curso con destino definitivo en dicho instituto y la falta de disponibilidad del aula de informática.
2. La programación del curso 2003-2004 establecía que el Análisis Matemático de la asignatura MACS II de segundo de Bachillerato debía impartirse el último trimestre del curso y, en consecuencia, al cálculo integral le correspondería el mes de mayo de 2004.
3. Mayo no es el mejor mes para impartir docencia puesto que los estudiantes deben realizar exámenes de asignaturas pendientes de primero de bachillerato, recuperaciones de las dos evaluaciones anteriores y exámenes finales, por tanto, enseñar y aprender el cálculo integral[5] resulta muy difícil para el profesor y los alumnos.
4. El profesor, utilizando el libro de texto como apoyo para los ejercicios, elaboró la unidad didáctica: "Área e integral"[6] que fue explicada, mediante la transposición adecuada, en todos los ciclos y no preparó ninguna práctica específica sobre el área y la integral.

[3] Si, por ejemplo, en el texto de la práctica tenemos: 18.- *¿Recuerdas alguna notación matemática que designe "A"?.* Entonces, a esta pregunta, nos referiremos como el ítem 18.

[4] Consideramos dos tipos de prácticas: prácticas con lápiz-papel y prácticas con *DERIVE.*

[5] De las tres partes en las cuales se divide MACS II: Probabilidad-Estadística, Álgebra y Análisis Matemático, es esta última la considerada más difícil y, dentro del Análisis, el Cálculo Integral concita un mayor rechazo entre el alumnado por su elevado nivel de abstracción y las dificultades que surgen en la resolución de problemas.

[6] Véanse las secciones *V.3. El área como límite* y *V.4. Integral Definida en MACS II* del capítulo V.

Desde el curso 2004-2005, inclusive, se realizaron prácticas de la integral definida y éstas, siguiendo la denominación del presente capítulo, fueron de dos tipos, a saber:

- ***Prácticas con lápiz y papel*** consistentes en dibujar una función, determinar y calcular sumas inferiores y superiores, áreas e integrales definidas, etc. con los únicos medios del lápiz y papel y calculadora no programable. Dichas prácticas fueron propuestas, solamente, a los alumnos de los ciclos de confirmación (II y III) para que las realizaran individualmente durante las correspondientes vacaciones de Navidad, una vez explicados los conceptos de área e integral.
- ***Prácticas con DERIVE*** realizadas en el aula de informática del instituto, propuestas en todos los ciclos de nuestra investigación, salvo en el de exploración; los estudiantes utilizaron los ordenadores por parejas. El programa de cálculo simbólico, *PCS*[7], utilizado ha sido *DERIVE* cuya difusión en España es muy amplia y de fácil adquisición. Las actividades propuestas a los estudiantes en dicho aula consistían en representar varias funciones, representar y calcular sumas inferiores y superiores, calcular áreas e integrales definidas, representar la superficie comprendida entre dos curvas y calcular su área y, por último, representar la función integral indefinida como la superficie comprendida entre la gráfica de una función, el eje de abscisas y dos rectas verticales (la primera fija y la segunda variable), así como, determinar la expresión analítica de dicha función.

Tanto en unas como en otras prácticas, el interés de los alumnos por su realización y las repuestas a las mismas son muy dispares; además, la escasa cultura matemática de muchos estudiantes de esta modalidad[8] de bachillerato hacen que, en general, pierdan el interés por la realización de las mismas y, lo que es más importante, no contrastan sus ideas con las fuentes del cálculo integral[9] y, en consecuencia, consideran que las matemáticas se reducen a resolver problemas pensando que la base teórica es muy difícil y no debe estudiarse.

[7] *Computer Algebra System, CAS,* o *Système de calcul formel, SCF,* en la literatura anglosajona o francesa, respectivamente.

[8] Humanidades y Ciencias Sociales.

[9] Libro de texto, apuntes y, sobre todo, cuadernillo entregado por el profesor investigador en el cual queda formalizada la integral definida.

XI.2. PRÁCTICAS CON LÁPIZ Y PAPEL

El profesor investigador y el director de la tesis consideraron oportuno, que después de explicar la unidad didáctica “Área e Integral”, los estudiantes realizaran una práctica sin ningún medio tecnológico, salvo calculadora no programable, en la cual los estudiantes debían representar la función $f(x)=x^2$, calcular una suma inferior y otra superior de Darboux y deducir la integrabilidad de $f(x)$ en el intervalo [1,3].

No deseando que este capítulo tenga excesiva extensión y considerando que, básicamente, es la misma práctica[10] en los dos ciclos de confirmación (II y III) se ha optado por hacer una puesta en común de los objetivos y las reflexiones de ambos ciclos; eso sí, entre unos y otras, describimos la acción y la analizamos en cada uno de ellos. Así pues, cada uno de los dos ciclos de los que componen las prácticas de la integral con lápiz y papel constará de los siguientes apartados[11]:

- Enunciado, en recuadro y con fondo azul, de la práctica propuesta.
- Algunas respuestas escaneadas de varios alumnos, las cuales hayamos considerado interesantes por: su precisión, los errores, los razonamientos, las justificaciones, etc. Dichas respuestas se pueden encontrar en el anexo K de la presente memoria.
- Análisis de las respuestas escaneadas y comentarios de otras, que habiendo sido analizadas, no han sido escaneadas pero que conforman nuestra investigación.
- Tabla resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de las prácticas con lápiz y papel de la integral en la cual los ítems corresponden con las cuestiones o preguntas del texto de la práctica y sus entradas-salidas gozan de las características descritas en las correspondientes tablas de los cuatro últimos capítulos.

[10] De ahora en adelante, siempre que no haya confusión, nos referiremos a la práctica de la integral con lápiz y papel, simplemente, como la práctica.

[11] Epígrafes XI.2.2 y XI.2.3.

XI.2.1. OBJETIVOS

La presente práctica, con lápiz y papel, de la integral definida persigue los siguientes objetivos:

a) Representar una función parabólica.

b) Determinar gráficamente y calcular una suma inferior y otra superior[12].

c) Reconocer los conceptos de partición, suma inferior y superior.

d) Estimar el área comprendida entre una función, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

e) Relacionar las sumas inferiores y superiores de dos particiones, las cuales, una de ellas es más fina que la otra.

f) Valorar la comprensión de los alumnos del aserto: Si tomamos la sucesión de particiones $P_n = \left\{ a + \frac{(b-a)i}{n} \right\}_{i=0}^{n}$ entonces los respectivos límites de las sucesiones de sumas inferiores, *L(n)*, y superiores, *U(n)*, coinciden con el área comprendida entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

g) Valorar la comprensión de los alumnos del hecho cierto: Si tomamos una sucesión cualquiera de particiones P_n, entonces, aunque existan los límites de las sucesiones *L(n)* y *U(n)*, no necesariamente coinciden con el área comprendida entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

h) Establecer la necesidad de definir los conceptos de integral inferior como el extremo superior de las sumas inferiores e integral superior como el extremo inferior de las sumas superiores.

i) Valorar la utilidad del teorema fundamental del cálculo integral para calcular áreas.

j) Considerar la posibilidad de utilizar las nuevas tecnologías para comprender los conceptos básicos de la integral definida y, como herramienta poderosísima, para resolver problemas.

k) Comprender y valorar que la generación actual es depositaria de los resultados obtenidos, a lo largo de los siglos, sobre el cálculo integral.

l) Valorar y apreciar la Ciencia Matemática como herramienta básica para el desarrollo de todas las Ciencias, incluso las Sociales.

[12] Al escribir suma inferior o suma superior, se entiende que, deben considerarse de Darboux.

XI.2.2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL SEGUNDO CICLO

La práctica propuesta del ciclo II de nuestra investigación se entregó a los veinte estudiantes de 2º E el jueves 16 de diciembre de 2004 y fue recogida el lunes 10 de enero de 2005. He aquí el texto:

Curso 2004-2005

PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

OBJETIVO: Estas prácticas permiten que el alumno consolide los conceptos de área bajo una curva, sumas inferior y superior de Darboux, integral definida, teorema fundamental de cálculo integral y regla de Barrow.

NORMAS QUE DEBEN TENERSE PRESENTES:

A) Es aconsejable que todas las representaciones se realicen en papel milimetrado.

B) Deben justificarse siempre todas las operaciones que se realicen y no resulten evidentes, así como los resultados que se obtengan y se apoyen en la teoría explicada.

C) Este trabajo será personal y se recogerá el 10 de enero de 2005.

PRÁCTICAS PROPUESTAS:

1.- Representa la función $f(x) = x^2$ y señala el área que determina dicha función, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=3.

2.- Representa, de nuevo, la función anterior y une los siguientes puntos: (1,0); (1,f(1)); (4/3,f(1)); (4/3,f(4/3)); (5/3,f(4/3)); (5/3,f(5/3)); (2,f(5/3)); (2,f(2)); (7/3,f(2)); (7/3,f(7/3)); (8/3,f(7/3)); (8/3,f(8/3)); (3,f(8/3)); (3,0) y (1,0).

2.1.- Calcula, con lápiz y papel, el área del polígono que acabas de dibujar.

2.2.- Calcula, con ayuda de la calculadora, el área del polígono que acabas de dibujar.

3.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1,0); (1,f(4/3)); (4/3,f(4/3)); (4/3,f(5/3)); (5/3,f(5/3)); (5/3,f(2)); (2,f(2)); (2,f(7/3)); (7/3,f(7/3)); (7/3,f(8/3)); (8/3,f(8/3)); (8/3,f(3)); (3,f(3)); (3,0) y (1,0).

3.1.- Calcula, con lápiz y papel, el área del polígono que acabas de dibujar.

3.2.- Calcula, con ayuda de la calculadora, el área del polígono que acabas de dibujar.

4.- ¿Qué es el conjunto {1, 4/3, 5/3, 2, 7/3, 8/3, 3} del intervalo [1,3]?

5.- ¿Qué te recuerda la suma obtenida en el apartado 2.1? Por comodidad llamemos a ese resultado L(6).

6.- ¿Qué te recuerda la suma obtenida en el apartado 3.1? Por comodidad llamemos a ese resultado U(6).

7.- Si "A" es el área señalada en el apartado 1 ¿Cuánto crees que puede valer?

8.- ¿En cuántos subintervalos se ha dividido anteriormente el intervalo [1,3]? ¿Se puede dividir en 12 subintervalos de igual amplitud? ¿Cuál es la amplitud de cada subintervalo?

9.- Calcula L(12) y U(12), represéntalo gráficamente si lo consideras necesario ¿Sigues pensando que "A" es el valor obtenido en el apartado 7?

10.- Ordena de menor a mayor U(12), U(6), L(6) y L(12). ¿Entre qué valores crees que estará, "A", el área que pretendemos calcular.

11.- Intenta encontrar una fórmula para L(n) y U(n), siendo "n" cualquier número natural y todos los subintervalos de igual amplitud.

12.- ¿Qué ocurre con L(n) y U(n) si "n" tiende a infinito? ¿Dónde crees que se encontrará "A"?

13.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en 1000 subintervalos, <u>no todos de la misma amplitud</u>, si calculamos L(1000) y U(1000) ¿Obligatoriamente se aproximarán a "A"?

14.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en "m" subintervos, de distintas amplitudes, como es obvio, se puede calcular L(m) y U(m) ¿Crees que ahora podemos tomar límites como se hizo con L(n) y U(n)?

15.- Ordena de menor a mayor, si es posible, L(m), U(m) y "A".

16.- Si "m" es cualquier valor, imagina que "s" es el extremo superior de los valores L(m) y "S" es el extremo inferior de los valores de U(m). Ordena de menor a mayor L(m), U(m), "A", "s" y "S".

17.- Si "s" y "S" coinciden ¿Qué ocurre con "A"?

18.- ¿Recuerdas alguna notación matemática que designe "A"?

19.- ¿Sabes calcular "A"? ¿Cuál es el resultado en el que te has apoyado?

20.- ¿Consideras que el tiempo empleado para obtener este área es excesivo? ¿Piensas que las nuevas tecnologías te pueden liberar de efectuar estos cálculos tan farragosos?

Cuadro XI.2.2. Práctica con lápiz y papel de la integral definida (ciclo II).

El enunciado de la presente práctica consta de veinte cuestiones o ítems los cuales son progresivos y combinan el componente teórico con el práctico e intentan convencer a los estudiantes de ciencias sociales de la importancia del teorema fundamental del cálculo y del uso de las nuevas tecnologías.

Sin más dilación, es el momento de considerar las respuestas de los alumnos y, como quedó establecido, en el anexo K reproducimos algunas de ellas y, seguidamente, las analizamos en el presente capítulo.

Análisis de las respuestas: La presente práctica ha sido realizada por los estudiantes con ánimos muy dispares, podemos considerar que la mitad de los alumnos no se han esforzado lo suficiente y han abandonado en el momento que han encontrado una pequeña dificultad, sin embargo, es encomiable el interés y el trabajo realizado por algunos de ellos cuyas respuestas son muy diversas e incluso originales, comentemos algunas:

La alumna NC representa correctamente, aunque incompleta, la función $f(x)=x^2$, no así los nodos[13] y, consecuentemente, algunas coordenadas de los puntos (x_i,M_i) no se encuentran sobre la parábola; sin embargo, podemos considerar "aceptable" la representación de la parábola, la localización de los nodos, el control de los máximos en cada subintervalo y la representación del polígono que determina la correspondiente superficie de la suma superior U(6) = $S(f,P_6)$. Previamente, escribe la expresión general de cualquier suma superior y calcula $S(f,P_6)$, operando con fracciones obtiene su valor exacto 271/27 y el valor aproximado, sin redondear, 10'03 unidades cuadradas. En el margen derecho hace la conversión 1 u^2 es 0,8 cm^2 y esto es falso puesto que en el papel cuadriculado cada cuadradito tiene 2 mm de lado y los cuadrados mayores tienen lado 8 mm, por tanto, la superficie de uno de estos últimos es 64 mm^2 = 0,64 cm^2 y no 0,8 cm^2; así pues: $S(f,P_6) = 271/27$ cuadrados mayores (8 mm de lado) $\cong$ 10'04 $u^2 \cong$ 6,43 cm^2. La imprecisión en la representación gráfica le ha llevado a cometer el error de determinar mal los cuadraditos, efectivamente, comprobando el documento original, son 170 los que conforman la superficie superior, si cada uno de ellos tiene una superficie de 4 mm^2, entonces, por este procedimiento se obtiene $S(f,P_6)$ = 170 cuadraditos = 680 mm^2 = 6,8 cm^2 lo que está en abierta contradicción con el resultado anterior; es evidente que si la representación hubiera sido correcta, entonces $S(f,P_6) \cong$ 160 cuadraditos. El trabajo de NC podemos considerarlo bueno[14], es de los pocos estudiantes que operan con fracciones y lo consideramos importante puesto que no arrastra ni acumula errores; además, se percibe que se ha esforzado por comprender la teoría y aplicarla en la práctica propuesta aunque las mayores dificultades de esta alumna las percibimos en la comprensión de los distintos conceptos de la integral.

[13] NC ha localizado los nodos sobre los vértices de cuadrículas del papel cuadriculado de 2 milímetros de lado considerando: $x_3-x_2=x_6-x_5=2(x_1-x_0)=2(x_2-x_1)=2(x_4-x_3)=2(x_5-x_4)$.

[14] Un error conceptual importante lo comete en el punto 9 al determinar U(12) = $S(f,P_{12})$ que escribe: *"Al no representar no puedo saber los valores de M_1, M_2 ,..., M_n. Si tomo los mismos valores que la suma inferior, obtendría el mismo resultado"*.

La alumna BM realiza su práctica sobre papel milimetrado y confecciona una tabla de valores, véase BM(A), con la particularidad de sustituir las fracciones por números decimales sin redondear, por tanto, el error es manifiesto y ello se aprecia en la representación de los nodos que no son equidistantes; además, siguiendo su criterio, el punto A(1’6,2) es A’(1’6,4) y el punto B(2,2) es B’(2,4), es más, bastaría observar la representación gráfica y haber adquirido la noción de suma superior para dibujar correctamente el rectángulo cuya base es el segmento A’B’ y altura 4, tal y como se ha hecho con los demás rectángulos que conforman la superficie superior. BM comete el mismo error que NC al determinar los cuadraditos que componen la superficie superior puesto que las bases de cada uno de ellos están mal representadas y, además, cada cuadradito tiene 1 mm de lado, por tanto, la superficie de cada uno de ellos es 1 mm^2 = 0,01 cm^2, es más, BM no relaciona los cálculos obtenidos con la concepción geométrica de las unidades de superficie 1 cm^2 y 1 mm^2 puesto que es totalmente inaceptable escribir la suma superior U(6) = 9,84 mm^2 y, sin embargo, no hubiera sido descabellado expresar U(6) = 9,84 cm^2. BM arrastra grandes obstáculos y dificultades al realizar operaciones con números fraccionarios e intenta evitarlos, no transfiere los conceptos abstractos a su aplicación práctica, no ensambla ni relaciona las representaciones gráficas con los resultados obtenidos y, según consta en BM(B), no comprende la mayoría de los conceptos teóricos que sustentan el cálculo integral.

La alumna RG escribe los vértices, con fracciones, que determinan la superficie superior, los calcula con números decimales escribiéndolos con lápiz; la representación de la superficie superior es correcta. RG no calcula el área de cada rectángulo por la fórmula elemental, más bien, halla el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por dos nodos consecutivos por medio de la regla de Barrow, finalmente suma dichas áreas. Es obvio que el desarrollo analítico-algebraico desplegado por RG es baldío puesto que no calcula U(6) = $S(f,P_6)$, más bien halla el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=3 y; además, ignorado la aditividad de la integral definida con lo que le hubiera sido suficiente hallar $\int_1^3 x^2 dx$. Consideramos que RG ha estudiado el texto matemático entregado por el profesor y su práctica contiene respuestas correctas junto a otras en las cuales se detectan importantes errores conceptuales.

La alumna MT hace una representación gráfica de la función *ƒ(x)=x²* muy precisa, véase MT(A), e incluso en el eje de abscisas localiza el conjunto de puntos $P = \{0.25\,i\}_{i=0}^{16}$ escribiendo alguno de ellos con lápiz y asignando un ordinal a cada uno de los vértices de la superficie superior que, asimismo, localiza en la gráfica. Lo que verdaderamente llama la atención del profesor investigador es la representación de la suma superior y el cálculo de su área, MT considera una "torre" de rectángulos, a cada uno le reconoce con una letra mayúscula y calcula su área, posteriormente suma todas ellas y así obtiene la suma superior[15], idéntico razonamiento emplea para la suma inferior y en ambos opera con números fraccionarios. A partir de este nuevo algoritmo, si se desean calcular las sumas inferiores y superiores comprendidas entre la gráfica de la función *ƒ(x)=x²*, el eje *OX* y las rectas *x=a* y *x=b*, siendo *a* y *b* valores positivos y asociadas a cualquier partición, tendremos:

$$L(n) = s(f, P_n) = (b-a)f(a) + (b-x_1)\left[f(x_1) - f(x_0)\right] + (b-x_2)\left[f(x_2) - f(x_1)\right] + \dots$$

$$\dots + (b-x_{n-1})\left[f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\right] = (b-a)f(a) + \sum_{i=1}^{n-1}(b-x_i)\left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right]$$

$$U(n) = S(f, P_n) = (b-a)f(x_1) + (b-x_1)\left[f(x_2) - f(x_1)\right] + (b-x_2)\left[f(x_3) - f(x_2)\right] + \dots$$

$$\dots + (b-x_{n-1})\left[f(x_n) - f(x_{n-1})\right] = (b-a)f(x_1) + \sum_{i=1}^{n-1}(b-x_i)\left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right]$$

En verdad nos ha sorprendido el proceder de MT y, desconociendo esta alumna la integral de Lebesgue, nos preguntamos: ¿Cómo es posible que MT haya sido capaz de considerar el eje de ordenadas para calcular las sumas inferiores y superiores de Darboux?[16].

En el gráfico MT(B) vemos que en la décima cuestión incurre en el error de confundir L(12) con U(12), en el ítem nº 11 intenta dar una fórmula siguiendo el criterio con el que determinó L(6) y U(6) y en la pregunta nº 12 afirma *"Que será lo mismo"* pero no especifica dónde se encontrará "A". Muy interesante es la respuesta dada al ítem 13 pues MT considera la partición en la cual los dos últimos nodos están "muy separados" dibuja la superficie

[15] Corrigiendo un pequeño error en el cálculo del área del rectángulo B, el área pedida es 271/27 u^2.

[16] Recordemos que Henri Lebesgue (1875-1941), desarrollando la idea de MT, amplió las integrales de Cauchy, Riemann y Darboux en su Tesis Doctoral: *Intégrale, longueur, aire*, defendida en 1902, dando origen a la integral de Lebesgue y siendo reconocida actualmente como *"Teoría de la medida"*. Véase, en el anexo B (capítulo V), el apartado *V.2.5.7. Integral de Lebesgue. Teoría de la medida.*

inferior y expresa con toda nitidez que *"El área perdida es la comprendida entre la función $f(x)=x^2$, la recta $y=f(x_{999})$ y las rectas $x=x_{999}$ y $x=x_{1000}$".* Negativa debe ser la respuesta de la pregunta nº 14 pues basta considerar la sucesión de particiones del intervalo [1,3]:

$$P_m = \begin{cases} \left\{1+\dfrac{2}{m}i\right\}_{i=0}^{m} & si \;\; m \;\; es \;\; par \\ \left\{1+\dfrac{1}{m-1}i\right\}_{i=0}^{m-1} \cup \{3\} & si \;\; m>1 \;\; es \;\; impar \end{cases}$$

y, en consecuencia, no existen y, por tanto, no coinciden los límites de las sucesiones *L(m)* y *U(m).*

Consideramos que la alumna MT ha estudiado la integral, ha sido capaz de aplicar el teorema fundamental del cálculo integral y piensa que las nuevas tecnologías nos pueden librar del tedioso trabajo mecánico y dedicarle más tiempo a la adquisición conceptual de la integral definida.

Un error detectado en la alumna SR es considerar el área igual a la semisuma de las sumas inferiores y superiores, es decir: A=[L(6)+U(6)]/2 obteniendo $9,2\widehat{7}$ que ni siquiera se ha molestado en contrastar aplicando la regla de Barrow puesto que no ha contestado el ítem 19.

Por último, la alumna SA comete un grave error al considerar $\int_1^3 x^2 dx = 8/3$ e intenta dar un algoritmo en el ítem 9 para calcular L(12) y U(12). El trabajo de SA tiene algunos aciertos y un número considerable de errores.

El profesor investigador, en cada uno de los apartados de las cuestiones 2 y 3 pretendía que los alumnos calcularan las sumas respectivas, primero, sin utilizar la calculadora operando con fracciones[17] y, posteriormente, utilizando la calculadora y que los propios estudiantes contrastasen si las soluciones de los dos apartados de la respectiva suma eran coincidentes o no. Ninguno ha actuado con este proceder y, como se ha visto, algunos estudiantes *"han estimado el área por medio de cuadraditos"*.

Tabla resumen de las prácticas con lápiz y papel: No deseamos extendernos en la redacción de este capítulo más de lo estrictamente necesario, por ello, la siguiente tabla goza de las mismas características que las de los capítulos anteriores y, por tanto, consideramos innecesario explicar de nuevo las características de las entradas-salidas de la misma.

[17] Constatamos que las fracciones producen un rechazo generalizado a los alumnos del grupo 2º E.

ÍTEMS	***FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LAS PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL CON LÁPIZ Y PAPEL (CICLO II)***												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\overline{X}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
1	5	25	0	0	0	0	1	5	14	70	5	79	3,95
2	5	25	6	30	2	10	4	20	3	15	2	54	2,7
3	7	35	3	15	1	5	8	40	1	5	4	53	2,65
4	11	55	2	10	1	5	1	5	5	25	1	47	2,35
5	8	40	0	0	2	10	0	0	10	50	5	64	3,2
6	9	45	0	0	2	10	0	0	9	45	3	60	3
7	8	40	2	10	1	5	2	10	7	35	1	58	2,9
8	8	40	0	0	1	5	4	20	7	35	1	62	3,1
9	13	65	4	20	2	10	0	0	1	5	1	32	1,6
10	15	75	1	5	1	5	0	0	3	15	1	35	1,75
11	15	75	3	15	2	10	0	0	0	0	1	27	1,35
12	16	80	0	0	0	0	2	10	2	10	1	34	1,7
13	15	75	1	5	1	5	0	0	3	15	1	35	1,75
14	14	70	2	10	0	0	1	5	3	15	1	41	2,05
15	16	80	1	5	0	0	0	0	3	15	1	33	1,65
16	18	90	0	0	0	0	0	0	2	10	1	28	1,4
17	16	80	0	0	0	0	1	5	3	15	1	35	1,75
18	15	75	1	5	0	0	2	10	2	10	1	35	1,75
19	15	75	0	0	2	10	1	5	2	10	1	35	1,75
20	13	65	0	0	3	15	1	5	3	15	1	41	2,05
TOTAL	**242**	**60,50**	**26**	**6,50**	**21**	**5,25**	**28**	**7**	**83**	**20,75**	**1**	**888**	**2,22**

Tabla XI.2.2. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de las prácticas de la integral con lápiz y papel (curso 2004-2005).

XI.2.3. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL TERCER CICLO

La práctica propuesta para los veinte estudiantes de 2º F del tercer ciclo de nuestra investigación se entregó el lunes 19 de diciembre de 2005 y fue recogida el martes 10 de enero de 2006. He aquí el texto:

CURSO 2005-2006

PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

OBJETIVO: Estas prácticas permiten que el alumno consolide los conceptos de área bajo una curva, sumas inferior y superior de Darboux, sumas de Riemann, integral definida, teorema fundamental de cálculo integral y regla de Barrow.

NORMAS QUE DEBEN TENERSE PRESENTES:

A) Es aconsejable que todas las representaciones se realicen en papel milimetrado.

B) Deben justificarse siempre todas las operaciones que se realicen y no resulten evidentes, así como los resultados que se obtengan y se apoyen en la teoría explicada.

C) Este trabajo será personal y se recogerá el 10 de enero de 2006.

PRÁCTICAS PROPUESTAS:

1.- Representa la función f(x) = x^2 y señala el área que determina la gráfica de dicha función, el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = 3.

2.- Representa, de nuevo, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1)); (1,5;f(1)); (1,5;f(1,5)); (2;f(1,5)); (2;f(2)); (2,5;f(2)); (2,5;f(2,5)); (3;f(2,5)); (3;0) y (1;0). Calcula el área del polígono que acabas de dibujar ¿Qué te recuerda la suma obtenida? Por comodidad llamemos a ese resultado L(4).

3.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,5)); (1,5;f(1,5)); (1,5;f(2)); (2;f(2)); (2;f(2,5)); (2,5;f(2,5)); (2,5;f(3)); (3;f(3)); (3;0) y (1;0). Calcula el área del polígono que acabas de dibujar ¿Qué te recuerda la suma obtenida? Por comodidad llamemos a ese resultado U(4).

4.- Representa f(x) = x^2 y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,25)); (1,5;f(1,25)); (1,5;f(1,75)); (2;f(1,75)); (2;f(2,25)); (2,5;f(2,25)); (2,5;f(2,75)); (3;f(2,75)); (3;0) y (1;0). Calcula el área del polígono que acabas de dibujar ¿Qué te recuerda la suma obtenida? Por comodidad llamemos a ese resultado R(4).

5.- ¿Qué es el conjunto P={1; 1,5; 2; 2,5; 3} del intervalo [1,3]? ¿Qué es el conjunto T={1,25; 1,75; 2,25; 2,75} respecto de P?

6.- Si "A" es el área señalada en el apartado 1 ¿Cuánto crees que puede ser su valor?

7.- ¿En cuántos subintervalos se ha dividido anteriormente el intervalo [1,3]? ¿Se puede dividir en 10 subintervalos de igual amplitud? ¿Cuál es la amplitud de cada subintervalo? Determina los puntos en los cuales queda dividido el intervalo, es decir, escribe la partición correspondiente. Escribe una familia de puntos intermedios asociados a la partición anterior.

8.- Calcula L(10), U(10) y R(10), represéntalo gráficamente si lo consideras necesario ¿Sigues pensando que "A" es el valor obtenido en el apartado 6?

9.- Ordena de menor a mayor U(10), U(4), L(4), L(10), R(4) y R(10). ¿Entre qué valores crees que estará, "A", el área que pretendemos calcular?

10.- Siendo "n" cualquier número natural, si dividimos el intervalo [1,3] en "n" subintervalos de la misma amplitud ¿Cuánto vale dicha amplitud? ¿Crees que es fácil encontrar fórmulas que expresen L(n), R(n) y U(n)?

11.- Calcula U(4) – L(4); U(10) – L(10). ¿Qué ocurre con U(n) – L(n) si "n" tiende a infinito? ¿Esto nos garantiza que la función f(x) sea integrable en el sentido Darboux?

12.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en 1000 subintervalos, **no todos de la misma amplitud**, si calculamos L(1000) y U(1000) ¿Se aproximarán obligatoriamente a "A"? ¿Tenderían a A al aumentar el número de subintervalos? Es muy importante que justifiques la respuesta.

13.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en "m" subintervos, de distintas amplitudes, como es obvio, se puede calcular U(m) – L(m) ¿Crees que cuando "m" tiende a infinito forzosamente U(m) – L(m) tiende a cero? Justifica la respuesta.

14.- Si es posible, ordena de menor a mayor L(m), U(m) y "A".

15.- Si "m" es cualquier valor, imagina que "s" es el extremo superior de los valores L(m) y "S" es el extremo inferior de los valores de U(m). Ordena de menor a mayor L(m), U(m), "A", "s" y "S".

16.- Si "s" y "S" coinciden ¿Qué ocurre con "A"? ¿Qué concepto matemático te recuerda? ¿Recuerdas alguna notación matemática que designe "A"?

17.- ¿Sabes calcular "A"? ¿Cuál es el resultado en el que te has apoyado?

18.- ¿Consideras que el tiempo empleado para obtener este área es excesivo? ¿Piensas que las nuevas tecnologías te pueden liberar de efectuar estos cálculos tan farragosos?

Cuadro XI.2.3. Práctica con lápiz y papel de la integral definida (ciclo III).

La presente práctica con lápiz y papel consta de dieciocho cuestiones o ítems, son progresivos y combinan el componente teórico con el práctico e intentan persuadir a los alumnos de la importancia del teorema fundamental del cálculo y del uso de las nuevas tecnologías. A partir de este momento reproducimos, en el anexo K, algunas respuestas de los estudiantes que seguidamente analizaremos.

Análisis de las respuestas: La presente práctica con lápiz-papel ha sido realizada por los estudiantes de 2º F con más interés que los del ciclo precedente, aunque varios de ellos han abandonado al encontrar alguna dificultad conceptual, e incluso, al realizar algunos de los cálculos pedidos.

Hemos encontrado respuestas muy dispares, algunas son rigurosas y están bien fundamentadas, otras las consideramos irreflexivas y muchas de ellas se debieran haber redactado mejor después de haber realizado una reflexión más profunda. En cualquier caso, analizamos los ejercicios escaneados y posteriormente incluimos la tabla resumen de los ítems/niveles de las respuestas de los alumnos a cada una de las cuestiones propuestas en la presente actividad.

La alumna MD es la que mejor ha presentado su trabajo[18], se ha esforzado por estudiar la teoría de la integral y sus respuestas, a pesar de los errores, han sido elaboradas con rigor y precisión. Los cálculos de L(4), U(4), L(10), U(10) y R(10) son correctos[19] y lo hubiera sido R(4) si en lugar de tomar f(1,5) hubiera elegido f(1,25). El concepto de partición no lo ha adquirido en su plenitud puesto que si P lo es, no es cierto que lo sea T puesto que faltan los extremos del intervalo original, por tanto, no puede darse la relación de inclusión, además, si hubiera sido cierta dicha inclusión, P sería más fina que T y no como se sobreentiende que *"T es más fina que P".* Posiblemente, a esta alumna, le parezca excesivo el valor de U(4) y se decanta por considerar el *"valor medio"* de L(4) y R(4), si así fuera, dicho valor es 7,855 y, sin embargo, considera *"Un valor posible 8"*, pensamos que MD ha combinado certeramente los cálculos algebraico-numériocos para hallar las sumas de Darboux y Riemann con la excelente representación de las superficies que las determinan y ello le ha llevado a tomar el valor mencionado que, con buen criterio, es corregido en MD(H).

MD ignora que R(4) sea una suma de Riemann y tanto de U(4) como de R(4) dice que *"Recuerda a la suma superior de Darboux"* y ello le lleva a cometer el error de considerar las desigualdades estrictas L(10)<A<R(10) que, evidentemente, no son ciertas. En su respuesta a la décima cuestión, considerando que la función $f(x)=x^2$ es creciente en [1,3] establece las sumas inferiores y superiores correctamente pues, efectivamente, $m_i=f(x_i)$ y

[18] Las gráficas realizadas por MD rozan la perfección.

[19] Por L(n), U(n) y R(n) entendemos, respectivamente, las sumas inferior y superior de Darboux y las sumas de Riemann.

$M_i = f(x_{i+1})$ en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ aunque no sustituye ni tampoco se percata de que la amplitud de cada subintervalo es 2/n.

MD no demuestra nada pero es muy interesante la reflexión que hace en el ítem nº 11: *"U(n) – L(n) ≅ 0 → ambas son casi iguales. Darboux dice que para que una función sea integrable el extremo superior de las sumas inferiores debe ser igual al extremo inferior de las superiores. Entonces ƒ(x) es integrable".* Pensamos que esta alumna intuye la importancia del concepto de integral de Darboux y ella misma "descubre intuitivamente" el teorema de caracterización de las funciones integrables en el sentido Darboux. Errores evidentes son las respuestas a la pregunta duodécima que no es necesario determinar y al ítem nº 15 al establecer las desigualdades estrictas $L(m)<s<A<S<U(m)$, si esto ocurriera, entonces no sería integrable $f(x)=x^2$ en [1,3].

El cálculo del área mediante el teorema fundamental del cálculo valida este buen trabajo de MD en el cual se percibe esfuerzo, dedicación, buen hacer, excelente presentación y se detecta la dificultad que tiene en la comprensión de la teoría del cálculo integral.

Pensamos que la alumna CB también ha realizado un buen trabajo aunque su presentación no alcanza la de su compañera. Todas las sumas de Darboux y de Riemann las calcula correctamente aunque no las reconoce como tales[20], en el ejercicio 10 se limita a manifestar *"que sería una ardua tarea trabajar con tanta fracción"* y en la cuestión nº 11 comete el error de escribir $\lim_{n\to\infty}[U(n)-L(n)] = \infty - \infty \cong 0$, debiendo ser $\lim_{n\to\infty}[U(n)-L(n)] = S - s = 0$, aunque le hace dudar y expresa *"si 'n' tiende a infinito el resultado de esa resta será cero o próximo"* para terminar afirmando que la función es integrable puesto que verifica el teorema de caracterización de las funciones integrables lo cual lo expresa con una gran precisión para el nivel de los estudios medios en el cual se desarrolla la presente investigación. Un conflicto encontramos en la respuesta a la cuestión 12, evidentemente *"<u>No obligatoriamente</u> L(1000) y U(1000) irregulares van a aproximarse a 'A', precisamente por dicha irregularidad"* y esto que es cierto no le permite reflexionar suficientemente y no rectifica la afirmación anterior *"ya que son*

[20] CB en el punto 4 escribe: *"La suma obtenida me recuerda a la suma superior de una parábola y se diferencia con la calculada en el ejercicio anterior en que es una nueva partición más exacta"* y, además, escribe en un recuadro *"R(4) = 8'62 u^2".*

de diferente amplitud, se aproximarán a ‘A’ pero no con la misma exactitud que lo haría si dichos subintervalos fueran de igual amplitud”.

CB piensa en el rigor de las matemáticas en su respuesta al ítem nº 13 y así lo expresa; el profesor investigador con esta pregunta pretendía crear la necesidad de definir la integral inferior de Darboux (superior de Darboux) mediante el nuevo concepto de extremo superior de las sumas inferiores (extremo inferior de las sumas superiores) y después de una profunda reflexión de los alumnos dar respuesta a la cuestión 15. Esta alumna asigna, correctamente, cada concepto con sus respectivos símbolos y, sin embargo, tiene graves errores conceptuales al escribir *“S”<L(m)<”A”<”s”<U(m)* puesto que esta secuencia es falsa y las desigualdades estrictas no pueden darse, además, afirma rotundamente: *“Extremo inferior de U(m) es menor que la suma inferior [falso], la suma inferior es menor que el área [verdadero] que a su vez es menor que el extremo superior de L(m) [falso] y menor que la suma superior [verdadero]”*[21]*.* Las consideraciones primera y tercera de la cuestión 16 están en abierta contradicción, por último, la reflexión del ejercicio 18, después de considerar la importancia del teorema fundamental del cálculo, la juzgamos sincera habida cuenta de la trayectoria de esta alumna a lo largo del curso y de sus progresos en matemáticas[22].

Hemos encontrado dos intentos fundamentados, en el alumno DC y en la alumna TE, al expresar *L(n), U(n)* y *R(n)* mediante las correspondientes fórmulas; pocos estudiantes han respondido de forma similar a la respuesta comentada de MD y la mayoría de los alumnos han contestado de forma imprecisa o, simplemente, se han limitado a ignorar la pregunta.

Si bien es cierto que la mayoría de los estudiantes están de acuerdo en el uso de las nuevas tecnologías para el aprendizaje y resolución de problemas del cálculo integral, no todos confían en ellas y así lo expresa RD: *“Hay programas para el ordenador, pero también es complicado realizarlo con ellos ya que todavía no están muy perfeccionados”.* Nuestro próximo objetivo, como es sabido, será el empleo de medios informáticos en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral.

---

[21] El texto entre corchetes es del profesor investigador y se ha considerado la función $f(x)=x^2$ en el intervalo [1,3] pues en caso contrario todo es falso, basta tomar la función $g(x)=5$ en [1,3].

[22] Recordamos que, en la descripción de las sesiones del anexo H (capítulo VIII), CB después de calcular un área cuyo resultado era una fracción lo multiplicaba por el denominador. Esto hizo reflexionar al profesor investigador y, desde ese momento, consideró oportuno “estimar” algunas áreas, lo cual ha quedado recogido en la redacción de la presente memoria.

Tabla resumen de las prácticas con lápiz y papel: Siguiendo el criterio de la tabla anterior, la presente corresponde a los estudiantes del ciclo III.

ÍTEMS	***FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LAS PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL CON LÁPIZ Y PAPEL (CICLO III)***												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\bar{x}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
1	8	40	0	0	1	5	0	0	11	55	5	66	3,3
2	5	25	1	5	3	15	2	10	9	45	5	69	3,45
3	6	30	0	0	1	5	1	5	12	60	5	73	3,65
4	7	35	0	0	1	5	3	15	9	45	5	67	3,36
5	7	35	0	0	0	0	10	50	3	15	4	62	3,1
6	7	35	0	0	6	30	0	0	7	35	3	60	3
7	7	35	0	0	0	0	0	0	13	65	5	72	3,6
8	7	35	4	20	3	15	2	10	4	20	1	52	2,6
9	13	65	1	5	0	0	2	10	4	20	1	43	2,15
10	10	50	4	20	3	15	1	5	2	10	1	41	2,05
11	11	55	2	10	3	15	0	0	4	20	1	44	2,2
12	7	35	11	55	1	5	0	0	1	5	2	37	1,85
13	18	90	0	0	0	0	0	0	2	10	1	28	1,4
14	13	65	0	0	0	0	0	0	7	35	1	48	2,4
15	11	55	0	0	0	0	0	0	9	45	1	56	2,8
16	11	55	0	0	0	0	0	0	9	45	1	56	2,8
17	10	50	0	0	0	0	0	0	10	50	1	60	3
18	9	45	0	0	0	0	3	15	8	40	1	61	3,05
TOTAL	**167**	**46,39**	**23**	**6,39**	**22**	**6,11**	**24**	**6,67**	**124**	**34,44**	**1**	**995**	**2,76**

Tabla XI.2.3. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de las prácticas de la integral con lápiz y papel (curso 2005-2006).

XI.2.4. REFLEXIONES

Una vez analizadas las prácticas con lápiz y papel de la integral definida[23] realizadas durante los cursos 2004-2005 y 2005-2006, ciclos II y III de nuestra investigación, debemos redactar las reflexiones a las cuales hemos llegado y así lo hacemos de forma conjunta:

a) A pesar de los esfuerzos del profesor y de su insistencia para que los alumnos entregaran las prácticas propuestas, no todos lo han hecho, han sido el 80% los que las han realizado[24].

b) Para los estudiantes es fácil representar las superficies que determinan las sumas inferiores y superiores de Darboux, sin embargo, no todos las reconocen como tales. A muchos alumnos les resulta imposible calcular las áreas de dichas superficies si se trabaja con fracciones[25], estos resultados mejoran sustancialmente en el momento en el cual se introducen decimales exactos[26].

c) Una alumna, MT, ha sorprendido al profesor investigador por el procedimiento del cálculo de las sumas inferiores y superiores puesto que ha dado "prioridad" al eje de ordenadas.

d) Algunos estudiantes han estimado las áreas o sumas superiores e inferiores, si la representación es imprecisa entonces los errores que cometen son abultados; además, no comparan los resultados obtenidos por distintos procedimientos debiendo ser iguales, por tanto, no descubren dichos errores y, lo que consideramos muy importante, no han interiorizado ni reconocen el valor real de superficies cuyo área es 1 mm^2, 1 cm^2 y 1 dm^2.

e) La mayoría de los estudiantes representan y calculan las sumas de Riemann, sin embargo, muchos de ellos no las reconocen como tales e incluso las confunden con las sumas superiores de Darboux.

f) Aproximadamente, la mitad de los alumnos reconocen una partición de un intervalo, bastantes menos reconocen un conjunto de puntos

---

[23] Recuérdese que el objetivo final era calcular el área comprendida entre la función $f(x)=x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=3$.

[24] Diecisiete alumnos del grupo 2º E (ciclo II) y quince alumnos de 2º F (ciclo III), ambos grupos constaban de veinte estudiantes cada uno.

[25] $S(f,P_6)$ y $s(f,P_6)$ en el ciclo II, siendo $P_6=\{1+i/3\}$, i=0,...,6.

[26] $S(f,P_4)$ y $s(f,P_4)$ en el ciclo III, siendo $P_4=\{1+0,5i\}$, i=0,...,4.

intermedios asociados a una partición. El concepto de la relación entre particiones *“P es más fina que Q”* es muy difícil para todos los alumnos puesto que desconocen las teorías del *“Álgebra de conjuntos”* y del *“Álgebra de Boole”.*

g) Estimar un área por medio de la semisuma de la suma inferior y superior asociadas a una partición es habitual entre los alumnos, otros aplican directamente el teorema fundamental del cálculo y calculan el valor exacto de la misma.

h) Determinar las expresiones particulares de las sumas de Darboux y Riemann $L(n)=s(f,P_n)$, $U(n)=S(f,P_n)$ y $R(n)=R(f,T_n)$, para la función $f(x)=x^2$ en [1,3] asociadas a la partición $P_n=\left\{1+\frac{2}{n}i\right\}_{i=0}^{n}$ y al conjunto de puntos intermedios $T_n=\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}i\right\}_{i=0}^{n-1}$ es una labor ardua y difícil para los estudiantes de segundo de bachillerato de ciencias sociales.

i) El concepto de límite de una sucesión es considerado como una aproximación y no como un valor[27], así pues, es frecuente encontrarse, para las sucesiones anteriores, $\lim_{n\to\infty}\left[U(n)-L(n)\right]\cong 0$.

j) Muy pocos estudiantes son conscientes de que pueden existir sucesiones de particiones P_m en las que las respectivas sucesiones $L(m)$ y $U(m)$ pueden no tener límite cuando m tiende a infinito[28] o, en caso de existir ambos límites, no tienen por qué coincidir[29]. Muchos alumnos consideran que todas sucesiones de particiones se comportan como $P_n=\left\{1+\frac{2}{n}i\right\}_{i=0}^{n}$ y piensan que cada una de las particiones de [1,3] debe tener los nodos consecutivos equidistantes.

[27] Suponiendo que exista el límite y este sea finito.

[28] Considérese, por ejemplo: $P_m=\begin{cases}\{1\}\cup\left\{2+\frac{1}{m-1}i\right\}_{i=0}^{m-1} & si\ \ m\ \ es\ \ par\\ \left\{1+\frac{1}{m-1}i\right\}_{i=0}^{m-1}\cup\{3\} & si\ \ m>1\ \ es\ \ impar\end{cases}$

[29] Considérese la sucesión de particiones $P_m=\left\{1+\frac{1}{m-1}i\right\}_{i=0}^{m-1}\cup\{3\}$

k) A los alumnos no les resulta evidente ordenar los valores *L(m), U(m), s, S* y A; es más, aunque los ordenen correctamente, alguno de ellos consideran las desigualdades estrictas.

l) Consideramos que no es más difícil definir la integral de Darboux mediante la igualdad de las integrales inferior y superior de Darboux (extremo superior de las sumas inferiores y extremo inferior de las sumas superiores) que por medio de la existencia de dos sucesiones, una de sumas inferiores y otra de sumas superiores cuyos límites existen y, además, coinciden. Pensamos que la primera definición es comprendida por la mayoría de los estudiantes[30].

m) Los alumnos consideran que el teorema fundamental del cálculo les libera de realizar cálculos que consideran innecesarios y es una herramienta imprescindible para el cálculo de áreas.

n) Queda constatado que el análisis matemático, en general, y el cálculo integral, en particular, es difícil para la mayoría de los alumnos de ciencias sociales y que muchos de ellos encuentran grandes diferencias entre su formalismo teórico y su aplicación práctica.

o) Ensamblar teoría y práctica en el cálculo integral es una actividad que requiere estudio continuado y una alta concentración, en resumen, un gran esfuerzo intelectual que, al menos la tercera parte de los alumnos, no saben o no están dispuestos a realizar.

p) Los estudiantes, en general, estudian y realizan el trabajo de forma secuencial, no retoman cuestiones anteriores ni vuelven a la teoría tantas veces como sea necesario y, en consecuencia, no corrigen los errores que han cometido con anterioridad aunque sean conscientes de dichos errores.

q) En contra de lo que pudiéramos pensar, algunos estudiantes no confían en las nuevas tecnologías como herramienta, complementaria a las sesiones de aula, por medio de la cual puede efectuarse una mejor enseñanza y aprendizaje del cálculo integral.

r) El PI y el director de la tesis consideran que son suficientes las dos prácticas propuestas con lápiz-papel, pues el objetivo principal es la utilización de *DERIVE* en la enseñanza-aprendizaje de la integral.

[30] Algunos estudiantes, informalmente, al definir las integrales inferior y superior de Darboux consideran que es, textualmente, *"un tremendo lío"*.

XI.3. PRÁCTICAS CON *DERIVE*

A partir de este momento describimos la tercera parte de nuestra investigación, es decir, la enseñanza del profesor y el aprendizaje de los estudiantes de la integral definida mediante el uso de las nuevas tecnologías utilizando el programa de cálculo simbólico *DERIVE.*

La práctica informática[31] con *DERIVE* fue realizada en todos los ciclos de nuestra investigación, salvo en el de exploración, en el aula de informática del instituto en horario extraoficial, por la tarde[32], cada práctica de cada uno de los ciclos tuvo una duración aproximada de 2:45 horas.

Los ordenadores eran suficientes para que los alumnos pudieran trabajar en parejas y eso se procuró hacer considerando que este tipo de distribución parece ser el más eficaz para diversos autores (Kutzler, 1997, pág. 21 y Cabezas, 2001, pág. 196). Si el número de alumnos de un determinado ciclo que realizaron la práctica era par, entonces, se colocaron de dos en dos frente a un ordenador, en caso contrario solamente un único estudiante disponía de un ordenador y los demás estaban emparejados. Las diferentes parejas las formaron los propios alumnos según sus simpatías y el profesor intervino lo menos posible en la formación de cada uno de los grupos.

La mayoría de los estudiantes desconocían *DERIVE*, es más, en el ciclo II de la investigación el profesor investigador tuvo que instalarlo en cada uno de los ordenadores y comprobar su funcionamiento unos días antes de la realización de la práctica informática con los alumnos.

En cada ciclo se realizó una única práctica, el día señalado en las correspondientes tablas de planificación[33], cuyo comienzo era a las 16:00 horas y finalización a las 19:00 horas, haciendo un breve descanso de un cuarto de hora de 17:30 a 17:45 horas.

Con el propósito de comenzar la práctica a la hora indicada, el profesor investigador, a partir de las 15:30 horas, encendió los ordenadores, preparó

[31] De ahora en adelante, siempre que no haya confusión, nos referiremos a la práctica informática con *DERIVE* como la práctica.

[32] Los estudiantes, al fijar las fechas de las prácticas, eran reticentes y muchos de ellos alegaban que por la tarde no podían ser obligatorias puesto que tenían otras actividades. El profesor, considerando la imposibilidad de la utilización del aula de informática por las mañanas, tuvo que exigirles la obligatoriedad de su asistencia por la tarde y, a pasar de ello, algunos alumnos no las realizaron. Constatamos que, una vez en el aula de informática, ningún alumno se desentendió de la práctica.

[33] Véanse en los capítulos VIII, IX y X las correspondientes tablas VIII.2.3, IX.2.3 y X.2.3.

su ordenador personal, el cañón proyector y la pantalla para que los alumnos en el momento de realizar la práctica les fuera más sencillo seguir las orientaciones del profesor. Una vez colocados los estudiantes en sus puestos, el profesor entregó a cada una de las parejas un cuadernillo en el cual estaban las instrucciones que debían seguir los alumnos y, además, tenía espacios en blanco que también debían cumplimentar[34]. Frente al teclado del ordenador se colocaba un alumno, su compañero le ayudaba en el seguimiento del cuadernillo y anotaba en el mismo las respuestas, consensuadas, a las correspondientes preguntas.

Tal y como se hizo con las prácticas de lápiz y papel, procurando que esta sección no tenga demasiada extensión y considerando la agrupación de los diferentes ciclos, analizaremos las prácticas con *DERIVE* en tres bloques: ciclos de confirmación (II y III), ciclos de consolidación (IV y V) y ciclo de cierre (VI). Con carácter general establecemos los objetivos y el análisis según los actos de comprensión de Sierpinska de todas las prácticas y, posteriormente, las reflexiones generales. Además, cada uno de los bloques consta de los siguientes apartados:

- Breve descripción de la planificación y enunciado, en recuadro y con fondo verde, de la práctica propuesta.
- Breve descripción de la acción.
- Algunas respuestas escaneadas de los estudiantes que hayamos considerado interesantes, entre otros motivos, por: su precisión, los razonamientos, las justificaciones y los errores conceptuales.
- Análisis de las respuestas de los alumnos.
- Tabla resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de las prácticas de la integral con *DERIVE* en la cual los ítems corresponden con los números de las preguntas y sus entradas y salidas tienen las mismas características que las descritas en las correspondientes tablas de los cuatro últimos capítulos.
- Reflexiones conjuntas de los ciclos que componen un mismo bloque.
- Exclusivamente, en el ciclo de cierre analizaremos las respuestas de la encuesta realizada a los estudiantes sobre la práctica informática.

[34] Salvo que estuviera un único alumno en el ordenador, en cuyo caso el cuadernillo lo cumplimentaba individualmente.

Según el marco metodológico cualitativo de investigación-acción bajo el cual se desarrolla el presente trabajo, en la figura XI.3.1 exponemos el esquema que hemos seguido en la enseñanza y aprendizaje del área y la integral con el uso de las nuevas tecnologías utilizando el programa de *software* matemático específico *DERIVE.*

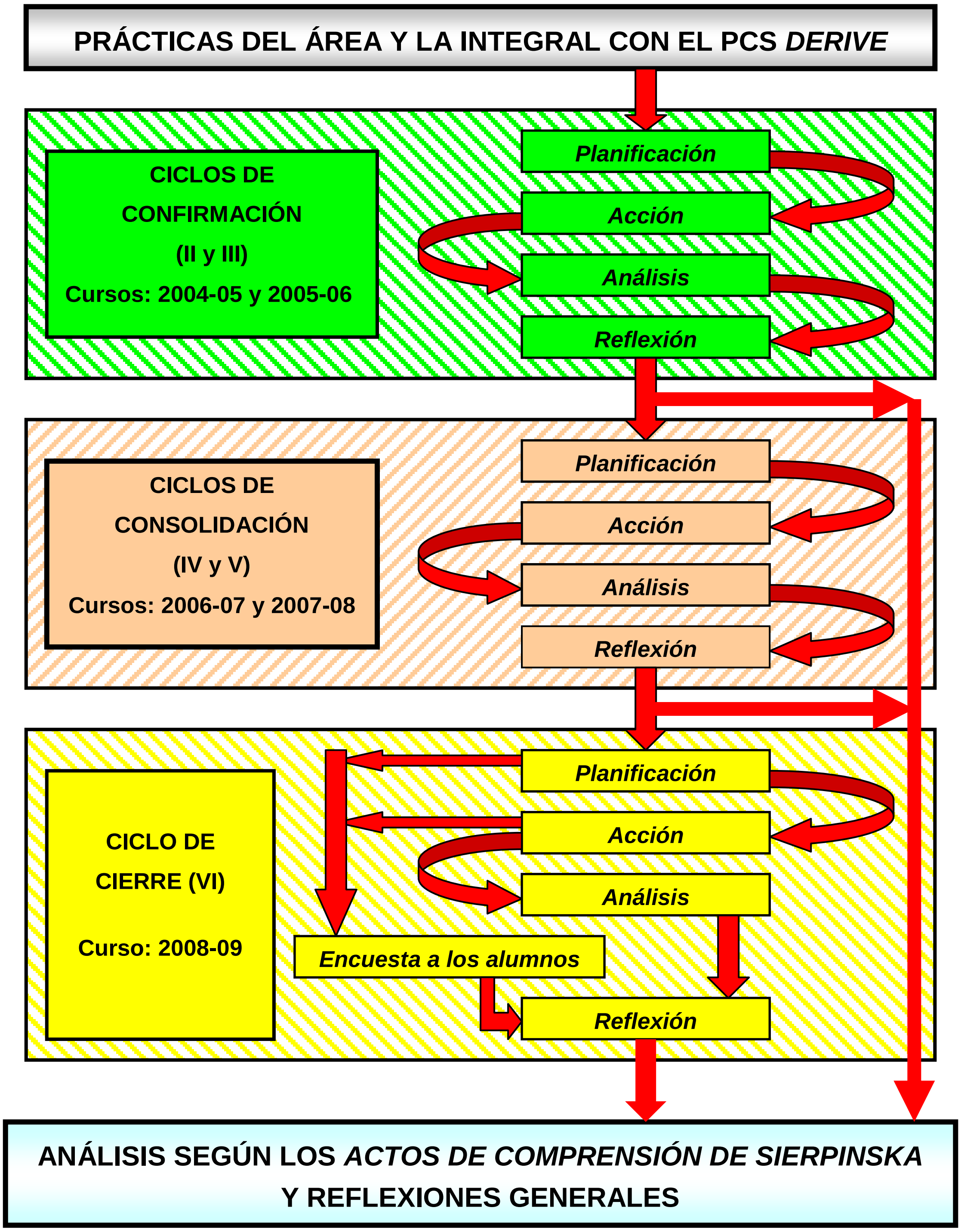


Figura XI.3. Proceso en espiral de las prácticas del área y la integral con DERIVE.

XI.3.1. OBJETIVOS

La adquisición de los estudiantes de los conceptos que conforman la integral definida mediante el uso del programa de cálculo simbólico *DERIVE* persigue los siguientes objetivos:

a) Demostrar que, utilizando el ordenador, es posible aprender conceptos matemáticos y, asimismo, resolver problemas; lo cual supone: *"Aprovechar las nuevas tecnologías para introducir ideas, es decir, que los ordenadores no solo sirvan como ayuda para facilitar cálculos o resolver cuestiones que sin ellos serían engorrosas, sino que además se pueden aprovechar para fundamentar conceptos"* (Guzmán y cols., 1999, pág. 18).

b) Representar la función $f(x)=x^2$ *y* realizar la construcción dinámica de superficies y sumas (superiores e inferiores) de Darboux en el intervalo [1,3], además de las sumas de Riemann.

c) Valorar la comprensión de los estudiantes del aserto: Al tomar la sucesión de particiones $P_n = \left\{ a + \frac{(b-a)i}{n} \right\}_{i=0}^{n}$, entonces los respectivos límites de las sucesiones de sumas inferiores, $s(f,P_n)$, y superiores, $S(f,P_n)$, coinciden con el área comprendida entre la curva de $f(x)=x^2$, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

d) Valorar la comprensión de los alumnos del hecho cierto: Si tomamos una sucesión cualquiera de particiones del intervalo [*a,b*], por ejemplo, $Q_n = \left\{ a + \frac{(b-a)i}{2n} \right\}_{i=0}^{n} \cup \{b\}$ entonces, aunque existen los límites de las sucesiones $s(f,Q_n)$ y $S(f,Q_n)$, no necesariamente coinciden con el área comprendida entre la curva de la función $f(x)$, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

e) Establecer la necesidad de definir los conceptos de integral inferior como el extremo superior de las sumas inferiores e integral superior como el extremo inferior de las sumas superiores.

f) Considerar que es posible establecer la integrabilidad de una función en un intervalo compacto mediante el "teorema de caracterización óptima de las funciones integrables".

g) Considerar que el valor aproximado de un área puede ser la semisuma de las sumas inferior y superior o la correspondiente suma de Riemann y compararlo con el valor real calculado mediante la regla de Barrow valorando la utilidad del teorema fundamental del cálculo para calcular áreas.

h) Discriminar los conceptos de integral definida y área entre la gráfica de una función, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

i) Considerar que no es suficiente, para hallar el área comprendida entre dos funciones, calcular la integral definida de la función diferencia entre las raíces inferior y superior y, en consecuencia, es necesario determinar “todas” las raíces de dicha función.

j) Considerar que para calcular el área comprendida entre dos funciones es suficiente calcular la integral definida del “valor absoluto la función diferencia” entre sus raíces inferior y superior.

k) Establecer la función integral como el área de la superficie recorrida por la gráfica de una función, el eje de abscisas, una recta fija vertical y otra recta que se desplaza a la derecha de la anterior.

l) Representar la función integral $H(x)=\int_a^x h(t)\,dt,\ a\le x$ de dos formas diferentes, a saber: mediante las coordenadas de los puntos *(*x*,H(x))* y como la superficie expresada anteriormente.

m) Valorar el uso de las nuevas tecnologías en general y de *DERIVE* en particular como una excelente herramienta para el aprendizaje de las matemáticas.

Si bien es cierto que estos son los objetivos generales que se pretenden alcanzar con las prácticas informáticas del área y la integral definida, posteriormente, en los cuadernillos[35] de las respectivas prácticas con *DERIVE* de los distintos ciclos quedan determinados, con las preguntas que deben contestar los estudiantes, los objetivos específicos que se desean alcanzar en cada momento.

[35] Los cuadernillos de práctica informáticas con *DERIVE* se componen de un número determinado de puntos que denominaremos ítems o cuestiones y cada ítem está formado por:

a) Texto en negrita que corresponde con la actividad que se debe realizar.
b) Sentencias e instrucciones informáticas necesarias para realizar la actividad con *DERIVE*.
c) Pregunta o preguntas que los estudiantes deben responder por escrito.

XI.3.2. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLOS DE CONFIRMACIÓN

XI.3.2.1. Planificación y texto de la práctica

Durante el curso 2003-2004 y el primer trimestre del curso siguiente el profesor investigador preparó la práctica de la integral que debían realizar los estudiantes en el aula de informática con *DERIVE*. Para ello, el profesor realizó las siguientes actuaciones:

1. Estudiar las escasas publicaciones existentes en las cuales se utilizan las nuevas tecnologías para la enseñanza-aprendizaje de la integral.
2. Elaborar un pequeño programa de utilidades que permita comprender a los alumnos los diferentes conceptos que componen la integral.
3. Preparar el aula de informática del instituto e instalar *DERIVE*, en diciembre de 2004, en cada uno de los ordenadores.
4. Redactar el cuadernillo de prácticas informáticas.

En el curso 2005-2006 se siguieron las actuaciones del ciclo anterior aunque se procuró mantener la misma estructura de la sesión del aula de informática, mejorada por la experiencia del año anterior; además, el cuadernillo de las prácticas informáticas fue común a los dos ciclos de confirmación con el objetivo de contrastar la información de ambos ciclos.

La primera práctica del área y la integral realizada con el programa de cálculo simbólico *DERIVE*, en el contexto de nuestra investigación, se llevó a cabo en el aula de informática del IES "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos el día 20 de enero de 2005, jueves, y en ella participaron dieciséis alumnos. La segunda práctica con las mismas características de la primera la realizaron diecisiete alumnos, del mismo centro en el mismo aula de informática, el lunes 23 de enero de 2006. Ambas prácticas corresponden con los ciclos de confirmación (II y III) de nuestra investigación.

A cada uno de los dos grupos se les entregó el mismo cuadernillo con idénticas instrucciones, eso sí, el profesor investigador con la experiencia adquirida del curso 2004-2005 fue más eficiente en el curso 2005-2006 al utilizar los recursos disponibles. He aquí el texto entregado a los estudiantes para realizar la práctica informática propuesta[36]:

[36] Las soluciones a la práctica informática se pueden encontrar en el anexo L (Capítulo XI): *Texto, programa y práctica DERIVE.*

PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA CON *DERIVE*

Cursos 2004-2005 y 2005-2006, ciclos de confirmación (II y III)

OBJETIVO: Estas prácticas permiten que el alumno, con ayuda de DERIVE 5 , consolide los siguientes conceptos: área bajo una curva, sumas inferior y superior de Darboux, integral definida, teorema fundamental de cálculo integral y área comprendida entre dos curvas.

NORMAS QUE DEBEN TENERSE PRESENTES:

A) Posiciona el cursor en el icono DERIVE .

B) Haz doble clic con el botón izquierdo del ratón en el icono DERIVE pulsa SÍ.

C) Abre el archivo D\integral\integral\practica1.3

D) Sigue las explicaciones del profesor.

PRÁCTICAS PROPUESTAS:

1.- Representa la función f(x) = x^2.

Escribe F(x):=x^2, posiciona el cursor en y pulsa el botón izquierdo, ve al icono y pulsa, posiciónate en Seleccionar/Rango de la gráfica, pulsa.

Escribe en Horizontal – 2, 8, 10 y Vertical – 4, 10, 14; pulsa SÍ. Selecciona y pulsa

¿Qué ocurre? ....

Posiciónate en Opciones/Pantalla/Puntos, pulsa; selecciona Unir/SÍ/Aceptar, pulsa.

Copia y pega y .

2.- Representa, de nuevo, la función anterior y une los siguientes puntos: (1,0); (1,f(1)); (4/3,f(1)); (4/3,f(4/3)); (5/3,f(4/3)); (5/3,f(5/3)); (2,f(5/3)); (2,f(2)); (7/3,f(2)); (7/3,f(7/3)); (8/3,f(7/3)); (8/3,f(8/3)); (3,f(8/3)); (3,0) y (1,0).

2.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

2.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Observa que el intervalo [1,3] se ha dividido en seis subintervalos de igual amplitud (3-1)/6 = 1/3. Sigamos con la instrucciones del programa:

Escribe RECTANGULOS_INFERIORES(6). Pulsa , pulsa y pulsa

¿Qué ocurre? ....

Copia y pega y Escribe SUMA_INFERIOR(6). Pulsa , pulsa y pulsa . Copia y pega y .

¿Qué ocurre? ....

Escribe VALOR_INFERIOR(6). Pulsa y pulsa

¿Qué has obtenido? ....

3.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1,0); (1,f(4/3)); (4/3,f(4/3)); (4/3,f(5/3)); (5/3,f(5/3)); (5/3,f(2)); (2,f(2)); (2,f(7/3)); (7/3,f(7/3)); (7/3,f(8/3)); (8/3,f(8/3)); (8/3,f(3)); (3,f(3)); (3,0) y (1,0).

3.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

3.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Escribe F(x). Pulsa , pulsa

Ve a Editar/Borrar todas las gráficas y pulsa. Pulsa

Pulsa en el icono superior derecho

Sigue los pasos del punto 2 escribiendo:

RECTANGULOS_SUPERIORES(6) SUMA_SUPERIOR(6) VALOR_SUPERIOR(6)

¿Qué has obtenido? ....

Compara, visualmente, las dos gráficas obtenidas.

4.- Se puede dividir el intervalo [1,3] en 12 subintervalos de igual amplitud, es decir, (3-1)/12=1/6.

Siguiendo los pasos anteriores, pero más resumido, haz:

Escribe [F(x), RECTÁNGULOS_SUPERIORES(12), SUMA_SUPERIOR(12), RECTÁNGULOS_INFERIORES(12), SUMA_INFERIOR(12)]

Pulsa , pulsa . Ve a Editar/Borrar todas las gráficas y pulsa. Pulsa

Pulsa en el icono (copia ventana gráfica) . Pulsa en el icono superior derecho

Pulsa en Edición, selecciona PEGAR.

¿Qué consideras que es la suma de las áreas de los rectángulos superiores y de los más pequeños? ....

5.- ¿Cuánto crees que vale el área de la parte coloreada que contiene la curva?

Supongamos que es la semisuma de los valores inferior y superior para n = 12

Escribe VALOR_MEDIO(n):=(VALOR_INFERIOR(n)+VALOR_SUPERIOR(n))/2, pulsa

Escribe VALOR_MEDIO(12). Pulsa y pulsa

¿Crees que ese será el valor? Razona la respuesta ....

6.- Intenta encontrar una fórmula para VALOR_INFERIOR(n), VALOR_MEDIO(n) y VALOR_SUPERIOR(n) siendo "n" cualquier número natural y todos los subintervalos de igual amplitud.

Observa que la amplitud de cada subintervalo es 2/n

Escribe [VALOR_INFERIOR(n), VALOR_MEDIO(n), VALOR_SUPERIOR(n)], pulsa

7.- ¿Qué ocurre con VALOR_INFERIOR(n), VALOR_MEDIO(n) y VALOR_SUPERIOR(n) si "n" tiende a infinito?

¿Dónde crees que se encontrará el valor del área "A"?

¿A qué tiende la amplitud de cada subintervalo cuando n tiende a infinito?

Pulsa en Cálculo/límites. Pon el cursor en Punto 0.

Selecciona ∞ (abajo derecha), pulsa Simplificar. Escribe 26/3, pulsa

Compara este valor con el obtenido en el punto 5

Si ahora no hemos tomado el extremo superior de los valores inferiores (en la teoría sumas inferiores) ni el extremo inferior de los valores superiores (en la teoría sumas superiores)

¿Por qué se da esta circunstancia?..

¿Crees que es equivalente lo que acabamos de hacer a considerar el extremo superior de los valores inferiores (integral inferior) y el extremo inferior de los valores superiores (integral superior)? ....

8.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en 1000 subintervalos, <u>no todos de la misma amplitud</u>, si calculamos el valor inferior y el valor superior para esos 1000 subintervalos, con otro algoritmo distinto a los anteriores, llamémoslos L(1000) y U(1000) respectivamente

¿Obligatoriamente esos valores se aproximarán a "A"? ....

Dibuja tal circunstancia ....

9.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en "m" subintervos, de distintas amplitudes

¿Crees que ahora podemos tomar límites cuando m tiende a infinito como se hizo con VALOR_INFERIOR(n) y VALOR_SUPERIOR(n)? ....

10.- Si "m" es cualquier valor, imagina que "s" es el extremo superior de los VALOR_INFERIOR(m) y "S" es el extremo inferior de los VALOR_SUPERIOR(m).

Ordena de menor a mayor VALOR_INFERIOR(m), VALOR_SUPERIOR(m), "A", "s" y "S" ....

11.- ¿Pueden coincidir "s", "S" y "A"? ....

12.- Veamos gráficamente el área que pretendemos calcular.

Escribe PlotInt(F(x),x,1,3), pulsa , pulsa , borra todas las gráficas y pulsa

Copia y pega y .

13.- Calculemos el valor de "A". Copia INT(F(x),x,1,3), pulsa

¿Coincide este valor con alguno de los obtenidos anteriormente? ....

14.- Comparemos valores inferiores, medios, superiores e integral.

Escribe COMPARA(n):=[VALOR_INFERIOR(n),VALOR_MEDIO(n),VALOR_SUPERIOR(n)] pulsa

Escribe COMPARA(6), pulsa , pulsa . Escribe COMPARA(12), pulsa , pulsa

Fíjate en estos resultados y en el valor de la integral.

Para las sumas de Riemann, de los tres valores de COMPARA(n), ¿Qué valor escogerías? ....

CÁLCULO DE INTEGRAL DEFINIDA Y ÁREA COMPRENDIDA ENTRE UNA FUNCIÓN, EL EJE DE ABSCISAS Y DOS RECTAS VERTICALES

15.- Introduce la función G(x)=x^3/2, representa el área determinada por esta función, el eje de abscisas y las rectas x=–2 y x=2.

Calcula la integral de dicha función entre los extremos – 2 y 2.

Calcula el comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas x=–2 y x=2.

Escribe G(x):=(x^3)/2, pulsa , Escribe PlotInt(G(x),x,-2,2), pulsa

Escribe en Horizontal – 2, 8, 10 y Vertical – 4, 10, 14; pulsa SÍ.

Borra todas las gráficas y pulsa . Copia y pega y .

Escribe Int(G(x),x,-2,2), pulsa

Controlemos el valor absoluto de la función:

Escribe PlotInt(abs(G(x)),x,-2,2), pulsa y , borra todas las gráficas y pulsa

Copia y pega y . Escribe Int(abs(G(x)),x,-2,2), pulsa

¿El primer cálculo a quién corresponde? ....

¿El segundo cálculo a quién corresponde? ....

¿Qué debes hacer para calcular el área comprendida entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales? ....

CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

16.- Introduce las funciones $P(x)=x^3+2$ y $Q(x)=2x^2+x$. Representa y calcula el área comprendida entre estas dos curvas.

Escribe [P(x):=x^3+2, Q(x):=2x^2+x, H(x):=P(x)-Q(x)] pulsa

Escribe H(x)=0, pulsa . Pulsa sucesivamente Resolver/Expresión/Resolver y se obtienen los puntos buscados, éstos son: –1, 1 y 2 (ordenados de menor a mayor).

Recuerda que los puntos encontrados son los comunes a las dos curvas, es decir, las abscisas donde se cortan dichas curvas.

Pulsa . Escribe en Horizontal – 4, 10, 14 y Vertical – 2, 18, 20; pulsa SÍ.

Escribo AreaBetweenCurves(P(x),Q(x),x,-1,2), observa que tomo los puntos menor y mayor, pulso y , borra todas las gráficas y pulsa

Copia y pega y .Escribo Int(abs(H(x)),x,-1,2) y calculo .

Explica brevemente lo que acabamos de hacer: ....

17.- *¿Consideras que has comprendido mejor el concepto de integral de Darboux, integral de Riemann y el cálculo de áreas? ....*

18.- *¿Crees que puedes calcular alguna integral indefinida? ¿Cómo lo harías? ....*

19.- *Explica tus impresiones sobre esta práctica ....*

Cuadro XI.3.2.1. Práctica de la integral con DERIVE (ciclos de confirmación).

XI.3.2.2. Acción

En el cuadro anterior se han incluido los diecinueve ítems de los cuales se componen las prácticas con *DERIVE* en los ciclos de confirmación. Los días asignados a la realización de dichas prácticas, el profesor estaba en el aula de informática del instituto desde las 15:30 horas y a la llegada de los alumnos a las 16 horas tenían encendidos todos los ordenadores de la sala; el ordenador personal del profesor estaba preparado, conectado al cañón proyector y la pantalla de proyección estaba dispuesta[37], además, por cada puesto de trabajo el profesor tenía depositado un cuadernillo de las prácticas informáticas que se debían realizar.

[37] La terna ordenador personal del profesor, cañón proyector y pantalla, funcionando conjuntamente, la reconocemos como "*servidor*".

Los alumnos, de dos en dos, estaban a las 16:05 horas frente al terminal del ordenador con el cual iban a trabajar, en este momento se enciende la grabadora, se deja la clase en penumbra y el profesor propone que uno de los dos alumnos tome el teclado del ordenador para introducir los datos y ejecutar las instrucciones correspondientes y el compañero de práctica le ayude orientándolo cuando sea preciso y, además, cumplimente (de forma consensuada con su compañero) el cuadernillo. El profesor, a la vez que explica, con ayuda del *servidor* da las instrucciones precisas para "cargar" *DERIVE* y el programa de utilidades y ya es posible comenzar.

Las primeras instrucciones se hacen confusas, los estudiantes hablan, se despistan con facilidad y el profesor investigador debe imponer su autoridad para mantener el orden. Cada cuestión es explicada y ejecutada por el profesor desde el *servidor* con el tiempo suficiente, seguidamente, todos los grupos han de ejecutarla en su terminal y responder, por escrito, a las preguntas de la cuestión o ítem correspondiente.

Los ritmos de ejecución de cada ítem son muy dispares, el interés varía de unos a otros alumnos de forma sustancial y el profesor debe acercarse por cada uno de los puestos para que los estudiantes no decaigan en su atención, además, el profesor aclara las dudas que van surgiendo a nivel general y personal a lo largo de la sesión práctica.

El tiempo pasa muy rápido, son las 17:30 horas y se propone un descanso de diez minutos, algunos estudiantes salen al pasillo, más de la mitad se quedan en el aula de informática resolviendo con el ordenador cuestiones similares a las resueltas hasta el momento y, varios de estos últimos, intentan establecer las relaciones conceptuales del área y la integral definida en los contextos informático y matemático.

A las 17:45 horas, aproximadamente, se renueva la sesión de prácticas y el profesor propone que los dos alumnos que formalizan cada uno de los grupos intercambien sus actividades, la mayoría de los grupos acepta la propuesta. Los estudiantes, en esta segunda parte, se encuentran más cansados, se distraen con más frecuencia y algunos, muy pocos, terminan por hacer caso omiso a las indicaciones del profesor.

Poco antes de las 19 horas se dan por concluidas las prácticas informáticas de la integral con *DERIVE*, los alumnos entregan sus cuadernillos, se recoge el material y se apagan los ordenadores. Consideramos que esta actividad docente en el aula de informática ha sido intensa y positiva.

XI.3.2.3. Análisis de las respuestas

Siguiendo el criterio, de forma resumida, de los capítulos anteriores, en primer lugar escribimos, en negrita, el número de ítem que le corresponde en el cuadernillo seguido de una respuesta escaneada a la misma y poniendo en un recuadro los códigos de sus autores. Posteriormente realizaremos un breve análisis de los cuadernillos de la práctica informática con *DERIVE*.

Ítem nº 4:

Sale en la misma gráfica la suma superior e inferior en la misma gráfica. La superior en gris y la inferior en amarillo

Observamos que el ~~rectangulo~~ rectángulo gris es la suma superior menos la suma inferior

NU-SC

Ítem nº 7:

YC-TE

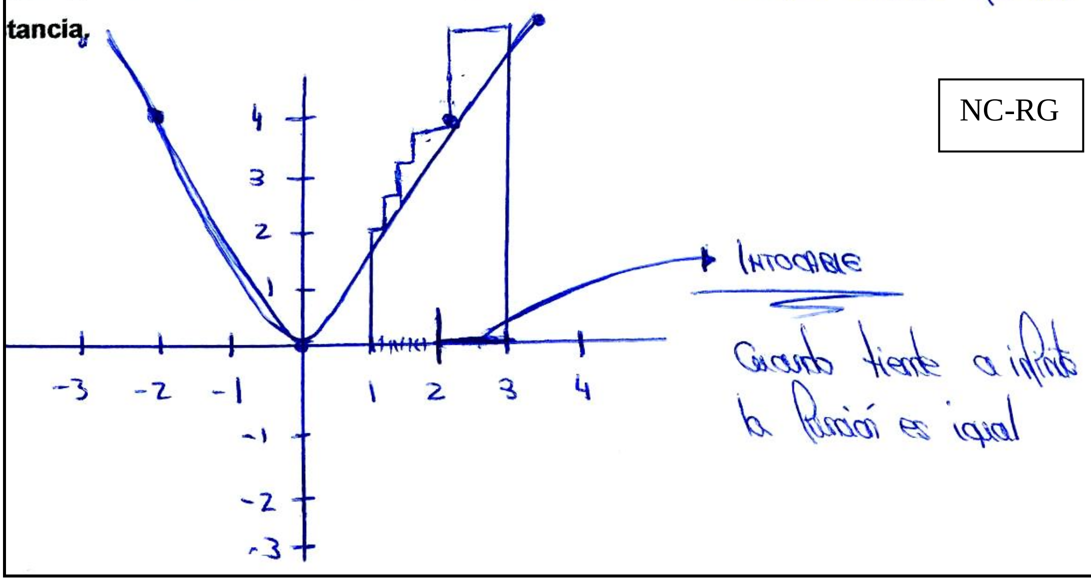
Porque la base de cada subintervalo se aproxima a cero.

Ítem nº 8:

¿Obligatoriamente esos valores se aproximarán a "A"? Nosotros creemos que no.

tancia.

NC-RG



Ítem nº 19:

Ha sido entretenida y la construcción de gráficas nos ha ayudado a comprenderlo mejor.

SF-BM

Las diecinueve cuestiones que componen cada cuadernillo de prácticas informáticas fueron contestadas por los alumnos de forma muy dispar, eso sí, en la primera parte de la sesión los estudiantes se mostraban más atentos en el seguimiento de las explicaciones orales del profesor y seguían con gran interés la exposición por medio del *servidor*, en consecuencia, ejecutaban las instrucciones de los ítems en su ordenador y cumplimentaban con interés el cuadernillo; después del descanso, los alumnos se mostraban más reacios a ejecutar las instrucciones informáticas para resolver los ítems pendientes y responder, por escrito, las preguntas planteadas.

Las respuestas analizadas de los cuadernillos de las prácticas informáticas no pueden considerarse en modo alguno independientes puesto que la interrelación entre los alumnos en el aula de informática es constante y son ellos mismos los que contrastan sus opiniones y, en consecuencia, las respuestas de algunos cuadernillos son prácticamente idénticas.

Los alumnos, por lo general, tienen una gran percepción visual, por tanto, las cuestiones[38] que llevan un componente gráfico importante son las que mejor comprenden y sus respuestas se pueden considerar con un buen nivel, en contraposición, las que exigen una mayor carga analítico-algebraica son las que conllevan respuestas de niveles inferiores.

Las respuestas escaneadas son una muestra ilustrativa de la información encontrada en todos los cuadernillos y, considerando que no existen otras respuestas relevantes que precisen ser señaladas, damos por concluido este breve análisis.

XI.3.2.4. Tablas resumen de las prácticas informáticas

Siguiendo la escala Likert damos a continuación las tablas que resumen los ítems[39] de las prácticas informáticas y, como sabemos, para no extendernos más de lo aconsejable en la redacción del capítulo, las entradas y salidas de las tablas tienen las características de las de los cuatro capítulos anteriores.

[38] Las cuestiones las podemos considerar de los siguientes tipos:

- Gráficas: 1, 2, 3, 4 y 15.
- Analítico-algebraicas: 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13 y 14.
- Gráficas y analítico-algebraicas: 16.
- Sin pregunta: 6 y 12.
- Encuesta: 17 y 19.
- Comandos de *DERIVE*: 18.

[39] Recuérdese que siguiendo el criterio de las prácticas de lápiz-papel el número de ítem coincide con el número de la cuestión.

ÍTEMS	***FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LAS PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL CON DERIVE (CICLO II)***												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		*Mo*	Σ	$\bar{X}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
1	2	12,5	0	0	0	0	4	25	10	62,5	5	68	4,25
2	0	0	0	0	2	12,5	4	25	10	62,5	5	72	4,5
3	0	0	0	0	4	25	2	12,5	10	62,5	5	70	4,375
4	2	12,5	0	0	0	0	2	12,5	12	75	5	70	4,375
5	2	12,5	0	0	6	37,5	2	12,5	6	37,5	4	58	3,625
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0	0	0	0	4	25	2	12,5	10	62,5	5	70	4,375
8	0	0	0	0	2	12,5	2	12,5	12	75	5	74	4,625
9	4	25	0	0	0	0	8	50	4	25	4	56	3,5
10	4	25	2	12,5	0	0	6	37,5	4	25	4	52	3,25
11	4	25	0	0	0	0	2	12,5	10	62,5	5	62	3,875
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	2	12,5	0	0	2	12,5	2	12,5	10	62,5	5	66	4,125
14	4	25	10	62,5	0	0	2	12,5	0	0	2	32	2
15	0	0	0	0	2	12,5	4	25	10	62,5	5	72	4,5
16	10	62,5	2	12,5	2	12,5	2	12,5	0	0	1	28	1,75
17	6	37,5	0	0	2	12,5	8	50	0	0	4	44	2,75
18	6	37,5	10	62,5	0	0	0	0	0	0	2	26	1,625
19	8	50	0	0	0	0	8	50	0	0	1	40	2,5
TOTAL	**54**	**19,85**	**24**	**8,82**	**26**	**9,56**	**60**	**22,06**	**108**	**39,71**	**5**	**960**	**3,53**

Tabla XI.3.2.4.1. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de las prácticas de la integral con DERIVE (curso 2004-2005).

ÍTEMS	FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LAS PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL CON DERIVE (CICLO III)												
	Niveles de respuesta										Medidas		
	1		2		3		4		5		*Mo*	Σ	$\bar{X}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
1	0	0	0	0	0	0	5	29,41	12	70,59	5	80	4,71
2	0	0	0	0	3	17,65	2	11,76	12	70,59	5	77	4,53
3	2	11,76	0	0	2	11,76	3	17,65	10	58,82	5	70	4,12
4	2	11,76	0	0	1	5,88	2	11,76	12	70,59	5	73	4,29
5	2	11,76	0	0	3	17,65	4	23,53	8	47,06	5	67	3,94
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0	0	0	0	2	11,76	5	29,41	10	58,82	5	76	4,47
8	2	11,76	0	0	1	5,88	6	35,29	8	47,06	5	69	4,06
9	4	23,53	0	0	1	5,88	6	35,29	6	35,29	5	61	3,59
10	6	35,29	3	17,65	0	0	4	23,53	4	23,53	1	48	2,82
11	3	17,65	0	0	2	11,76	0	0	12	70,59	5	69	4,06
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	2	11,76	0	0	3	17,65	0	0	12	70,59	5	71	4,18
14	2	11,76	9	52,94	4	23,53	0	0	2	11,76	2	42	2,47
15	2	11,76	1	5,88	0	0	2	11,76	12	70,59	5	72	4,24
16	8	47,06	3	17,65	4	23,53	2	11,76	0	0	1	34	2
17	4	23,53	3	17,65	0	0	8	47,06	2	11,76	4	52	3,06
18	6	35,29	9	52,94	0	0	2	11,76	0	0	2	32	1,88
19	2	11,76	5	29,41	2	11,76	6	35,29	2	11,76	4	52	3,06
TOTAL	**47**	**16,26**	**33**	**11,42**	**28**	**9,69**	**57**	**19,72**	**124**	**42,91**	**5**	**1045**	**3,62**

Tabla XI.3.2.4.2. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de las prácticas de la integral con DERIVE (curso 2005-2006).

XI.3.2.5. Reflexiones

Esta primera experiencia, en los ciclos de confirmación, de la enseñanza y el aprendizaje del área y la integral con el programa de *software* matemático *DERIVE*, el análisis de la misma y la elaboración de las tablas anteriores nos permite realizar las siguientes reflexiones:

a) La falta de conocimientos previos de los estudiantes del programa de cálculo simbólico *DERIVE* supone que el tiempo dedicado a cada ítem sea excesivo y que el profesor tenga que repetir infinidad de veces las mismas instrucciones tanto a nivel general como particular.

b) Los alumnos, en general, muestran interés por realizar la práctica informática propuesta aunque sea en horario extraoficial y tengan que renunciar a otras actividades.

c) El trabajo de los dos alumnos que conforman cada grupo es intenso y, además, solicitan constantemente información o la contrastan con los compañeros que están junto a ellos.

d) La exposición gráfica de varias sumas inferiores y superiores de Darboux hace que los alumnos capten con más nitidez los conceptos matemáticos que las definen.

e) El modelo de *"caja negra"* subyace en la mente de muchos alumnos[40]. Sin embargo, la propuesta del profesor investigador, mediante la implementación de pequeñas subrutinas, ha sido transformarlo en modelo *"caja gris"* con el objetivo de que los estudiantes controlen los procedimientos y adquieran los conceptos[41].

f) La dinámica de la clase en el aula informática es totalmente distinta a la del aula habitual, los alumnos se muestran más activos, interfieren

---

[40] El alumno DC de 2º F (ciclo III, curso 2005-2006), en el descanso, mantuvo la siguiente conversación con el profesor (P):
DC: *Todo esto está muy bien, pero ¿cómo se hace, por ejemplo, que salga en pantalla el dibujo de las sumas superiores?*
El profesor, mostrando en su ordenador el Programa Fuente, le contesta: *"En la línea 22 está escrito* SUMA_SUPERIOR(n) *que es una instrucción al ordenador que depende de algunas anteriores y ha sido implementada por el profesor para que pueda verse, por ejemplo, la gráfica de la cuestión 3".*
DC: *"Entonces hay que saber informática".*
P: *"Es necesario tener algunos conocimientos elementales, saber la teoría de la integral, hacer un pequeño programa informático, comprobar que funciona correctamente y ejecutarlo, por ejemplo, en la clase de prácticas informáticas de la integral".*
DC: *"Demasiado complicado".*

[41] Véase Sierra y Codes (2005) en el epígrafe *I.3.4. Dificultades en la adquisición del saber matemático (concepto de integral definida), en el uso de los programas de cálculo simbólico (PCS) y en el cálculo mental* del capítulo I.

más entre ellos y, por lo general, recurren al profesor en el momento que no son capaces de resolver la cuestión propuesta.

g) La imposibilidad de hacer varias gráficas en la pizarra o la simple exposición de la integral mediante el *servidor* hace que muchos estudiantes adquieran los conceptos que conforman la integral con más superficialidad que si ellos mismos utilizan *subprogramas* y *software* específicos para la construcción y formalización de la misma.

h) Algunos estudiantes, al utilizar las nuevas tecnologías, sólo se limitan a las representaciones gráficas sin interesarse lo más mínimo por los diferentes conceptos matemáticos que subyacen.

i) La práctica informática es demasiado larga por la inexperiencia de los alumnos con *DERIVE,* por tanto, deben reducirse los ítems puesto que los alumnos necesitan mucho tiempo para realizarla.

j) No es aconsejable utilizar los mismos nombres para conceptos distintos[42] ni nombres distintos para los mismos conceptos[43] en la práctica informática y en la formalización teórico-matemático de la integral en las clases del aula de grupo.

k) Es necesario modificar y ampliar el *programa fuente* para que la práctica sea más intuitiva y resulte más comprensible a los alumnos.

l) Los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales, en general, no se entusiasman por el aprendizaje de las matemáticas mediante las nuevas tecnologías, más bien, consideran las prácticas informáticas como un mero apéndice de las clases impartidas en su aula habitual.

m) Estamos convencidos de que la experiencia ha sido positiva, a pesar de las limitaciones técnicas y de falta de tiempo.

n) Pensamos que las administraciones educativas deben potenciar el uso de las nuevas tecnologías para el aprendizaje de las matemáticas en la enseñanza media asignando los recursos necesarios y estableciendo el tiempo que debe dedicarse a ello.

o) Consideramos que la labor altruista y desinteresada de algunos profesores por introducir las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas es plausible pero totalmente insuficiente.

[42] SUMA_INFERIOR en informática se refiere a la superficie inferior y la suma inferior en la clase teórica en el aula de grupo es el área de la superficie inferior (ídem superior).

[43] VALOR_INFERIOR en informática y suma inferior en la clase teórica son el mismo concepto (ídem superior).

XI.3.3. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLOS DE CONSOLIDACIÓN

XI.3.3.1. Planificación y texto de la práctica

En el mes de diciembre de 2006, el profesor investigador tenía gran cantidad de información de las prácticas de la integral realizadas en el aula de informática con el PCS *DERIVE*, en los dos cursos anteriores y, además, había hecho un estudio de dicha información.

La disponibilidad del aula de informática seguía siendo la misma que en los ciclos anteriores, por la tarde, puesto que en horario matinal no era posible bien porque no estaba libre cuando el profesor tenía clase de matemáticas con los grupos o cuando se disponía de la misma los alumnos tenían otras clases distintas a la de matemáticas.

El profesor, la primera semana lectiva de enero de 2007, había realizado las siguientes actuaciones:

1. Modificar y ampliar el *programa fuente* de los ciclos de confirmación.
2. Preparar el aula de informática del instituto y comprobar el funcionamiento de *DERIVE* en cada uno de los ordenadores.
3. Redactar un nuevo cuadernillo de prácticas informáticas.

Para el curso 2007-2008 se siguieron las actuaciones del ciclo anterior, se mantuvo la misma estructura de la sesión del aula de informática, mejorada por la experiencia de los tres cursos anteriores; además, el cuadernillo de las prácticas informáticas fue común a los dos ciclos de confirmación con el objetivo de contrastar la información entre ambos ciclos.

La tercera práctica del área y la integral realizada con el *software* matemático *DERIVE*, en el contexto de nuestra investigación, se llevó a cabo en el aula de informática del IES "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos, el viernes 19 de enero de 2007 y en ella participaron dieciocho alumnos del grupo 2º D. La cuarta práctica, con las mismas características de la tercera, la realizaron diecisiete alumnos del grupo 2º E del mismo centro en el mismo aula, el martes 22 de enero de 2008. Ambas prácticas corresponden con los ciclos de consolidación (IV y V) de la presente investigación.

A cada uno de los grupos se les entregó el mismo cuadernillo de prácticas informáticas con idénticas instrucciones y la exposición del profesor fue similar en ambos ciclos, aunque mejorada por la experiencia adquirida.

PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA CON *DERIVE*

Cursos 2006-2007 y 2007-2008, ciclos de consolidación (IV y V)

OBJETIVO: Estas prácticas permiten que el alumno, con ayuda de DERIVE 5 , consolide los siguientes conceptos: sumas inferior y superior de Darboux, suma de Riemann, área bajo una curva, integral definida, teorema fundamental de cálculo integral, regla de Barrow y área comprendida entre dos curvas.

NORMAS QUE DEBEN TENERSE PRESENTES:

A) Posiciona el cursor en el icono **DERIVE** .

B) Haz doble clic con el botón izquierdo del ratón en el icono **DERIVE** pulsa **SÍ**.

C) Abre el archivo **D\integral\integral\integral(programa)**.

D) Sigue las explicaciones del profesor.

PRÁCTICAS PROPUESTAS:

1º.- Representa la función F(x) = x^2.

Escribe: **F(x):=x^2**

Posiciona el cursor en el icono **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)]** y pulsa el botón izquierdo. Posiciona el cursor en el icono **[Ventana 2D]** y pulsa el botón izquierdo.

Posiciónate en **[Seleccionar/Rango de la Gráfica]** pulsa.

Escribe en **Horizontal** los siguientes valores: **– 4, 6, 10.**

Escribe en **Vertical** los siguientes valores: **– 2, 10, 12.** Pulsa **SÍ.**

Pulsa , copia y pega y .

Explica lo que ha ocurrido: ____

2º.- Representa, de nuevo, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1)); (1,5;f(1)); (1,5;f(1,5)); (2;f(1,5)); (2;f(2)); (2,5;f(2)); (2,5;f(2,5)); (3;f(2,5)); (3;0) y (1;0).

2.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

2.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Observa que el intervalo [1,3] se ha dividido en cuatro subintervalos de igual amplitud: (3 –1)/4 = 1/2 = 0,5.

Posiciónate en **[Opciones/Pantalla/Puntos]**, pulsa, selecciona **Unir/Sí/Aceptar**, pulsa.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_INFERIOR (4)],** y

Posiciónate en **[Opciones/Pantalla/Puntos]**, pulsa, selecciona **Unir/Sí/Aceptar**, pulsa.

[Representar Expresión, **]**, Copia y pega y .

Escribe: **SUMA_INFERIOR(4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

Explica lo que ha ocurrido: ____

3º.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,5)); (1,5;f(1,5)); (1,5;f(2)); (2;f(2)); (2;f(2,5)); (2,5;f(2,5)); (2,5;f(3)); (3;f(3)); (3;0) y (1;0).

3.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

3.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_SUPERIOR (4)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**, **[Ventana 2D,],**

[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]**, **[Representar Expresión,]**

Copia y pega y .

Escribe: **SUMA_SUPERIOR(4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

Explica lo que ha ocurrido: ____

4º.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,25)); (1,25;f(1,25)); (1,5;f(1,25)); (1,5;f(1,75)); (1,75;f(1,75)); (2;f(1,75)); (2;f(2,25)); (2,25;f(2,25)); (2,5;f(2,25)); (2,5;f(2,75)); (2,75;f(2,75)); (3;f(2,75)); (3;0) y (1;0).

4.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

4.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_RIEMANN (4)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**, **[Ventana 2D,],**

[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]**, **[Representar Expresión,]**

Copia y pega y . Escribe: **SUMA_RIEMANN(4)** y pulsa .

Explica lo que ha ocurrido: ____

5º.- Hagamos las representaciones anteriores de forma conjunta para observar las posibles diferencias:

5.1.- Colorea las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

5.2.- Calcula las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), COMPARA_SUPERFICIES(4)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**, **[Ventana 2D,],**

[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]**, **[Representar Expresión,]**

Copia y pega y . Escribe: **COMPARA_SUMAS(4)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**, **[**Aproximar, **]**

Explica cuánto crees que puede valer el área determinada por la función F(x) = x^2, el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = 3. ______________________________

6º.- Al objeto de confirmar o desmentir la respuesta anterior, dividamos el intervalo [1,3] en 8 subintervalos, todos ellos de la misma amplitud, y actuemos de forma análoga a los apartados anteriores:

6.1.- Colorea las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

6.2.- Calcula las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), COMPARA_SUPERFICIES(8)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)**,], **[Ventana 2D,],**

[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],** **[Representar Expresión,]**

Copia y pega y . Escribe: **COMPARA_SUMAS(8)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)**,], [Aproximar, **]**

¿Qué amplitud tiene cada uno de los nuevos subintervalos?

Explica cuánto crees que puede valer, con los nuevos cálculos, el área determinada por la función F(x) = x², el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = 3.

7º.- Al objeto de confirmar o desmentir las respuestas anteriores, no vamos a tomar particiones cuyo diámetro sea menor, ahora aplicamos las diferentes instrucciones de DERIVE:

7.1.- Colorea el área que pretendes calcular.

7.2.- Calcula el área.

Escribe: **AreaUnderCurve(F(x),x,1,3)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)**,], **[Ventana 2D,**],

[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],** **[Representar Expresión,]**

Copia y pega y . Escribe: **Int(F(x),x,1,3)**, y .

Comparemos este resultado con los anteriores:

Escribe: **[COMPARA_SUMAS(4), COMPARA_SUMAS(8)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)**,], [Aproximar, **]**

Razona por qué crees que has acertado o fallado en las respuestas anteriores.

8º.- DERIVE nos ha dado una respuesta, sin embargo, aún no estamos totalmente convencidos de la misma.

¿Serías capaz de confirmar dicha solución con lápiz y papel? Explica con todo lujo de detalles en qué te has basado para obtener tu solución ¿Coincide tu solución con la del programa informático?

CÁLCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE UNA FUNCIÓN, EL EJE DE ABSCISAS Y DOS RECTAS VERTICALES

9º.- Introduce la función $G(x)=x^3/8$, representa el área determinada por esta función, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$.

9.1.- Calcula la integral de dicha función entre los extremos -2 y 4.

9.2.- Calcula el área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$.

Escribe: **G(x):= (x^3)/8** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

Escribe: **PlotInt(G(x),x, – 2,4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **],**

[Ventana 2D, **],** **[**Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión, **]**

Copia y pega y .

Escribe: **Int(G(x), x, – 2, 4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

Escribe: **Int(G(x), x, 2, 4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

<u>Razona por qué crees que has obtenido estos resultados ¿Qué has calculado?</u>

____

Escribe: **PlotInt(abs(G(x)),x, – 2,4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

[Ventana 2D, **],** **[**Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión, **]** Copia y pega y .

Escribe: **Int(abs(G(x)), x, – 2, 4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

Escribe: **– Int(G(x), x, – 2, 0)** + **Int(G(x), x, 0, 4)** Pulsa

<u>Ahora has obtenido un nuevo resultado, distinto al anterior ¿Qué crees que has hecho? ¿Cuánto crees que vale el área comprendida entre la función $G(x) = x^3/8$, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$?</u> ______________________________

<u>¿Qué debes hacer para calcular el área comprendida entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales?</u> ____

CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

10º.- Introduce las funciones $P(x) = x^3 + 1$ y $Q(x) = 2x^2 + x - 1$. Representa y calcula el área comprendida entre estas dos curvas.

Escribe: **[P(x):= x^3 + 1, Q(x):= 2x^2 + x – 1, H(x):=P(x) – Q(x)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

Escribe: **Solve(H(x) = 0, x)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

¿Qué has obtenido con la ejecución de este último comando? Observa, si es necesario, la última representación gráfica. ________________________________

Escribe: **AreaBetweenCurves(P(x),Q(x),x, – 1,2)**

[Introducir y Simplificar **(Crtl + Intro),]**

[Ventana 2D,], [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión,] Copia y pega y

Escribe: **[Int(H(x),x,-1,1), Int(H(x),x,1,2), Int(abs(H(x)),x,-1,2)],**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

Explica brevemente lo que acabamos de hacer. ______________________________

Cuadro XI.3.3.1. Práctica de la integral con DERIVE (ciclos de consolidación).

XI.3.3.2. Acción

En el cuadro anterior hemos incluido los diez ítems de los que se componen cada una de las prácticas informáticas realizadas con *DERIVE* en los dos ciclos de consolidación y cuyos cuadernillos fueron entregados a los alumnos, agrupados de dos en dos, los días establecidos para la realización de dichas prácticas.

La acción de los ciclos de consolidación es similar a la de los dos ciclos de confirmación, eso sí, al ser estas prácticas más cortas que las anteriores, fue posible dedicarle más tiempo a cada ítem y entendemos que los estudiantes asimilaron mejor cada uno de los conceptos.

Aunque en un principio no estaba previsto en el ciclo IV y como sobraba tiempo, los últimos doce minutos se dedicaron al cálculo de integrales indefinidas elementales, con *DERIVE*, similares a las realizadas mediante el cálculo mental; posteriormente, en el ciclo V se volvió a dedicar un cuarto de hora al cálculo de primitivas elementales con el mismo PCS.

Los alumnos, aunque algo cansados, estaban interesados en resolver con el ordenador las integrales que tanto esfuerzo les suponían con el cálculo mental; por tanto, el profesor, dando las orientaciones precisas y utilizando el *servidor*, propuso que los estudiantes resolvieran con *DERIVE* las integrales que escribimos y resolvemos en el anexo L y, además, que comprobaran mentalmente cada una de las soluciones[44].

Para resolver las integrales propuestas, el profesor tuvo que exigir atención y trabajo a todos los alumnos y, haciendo los comentarios oportunos de cada tipo de función integrando[45], los estudiantes, siguiendo las instrucciones del profesor, resolvieron los ejercicios. Los alumnos, en lugar de comprobar mentalmente las soluciones, se limitaron a derivar con *DERIVE* cada una de las soluciones y comprobar que obtenían la correspondiente función integrando.

La resolución de $\int 5e^{x^2}\,dx$ supuso un pequeño debate entre varios alumnos que se trasladó al profesor y dos de ellos, RF y MR, desconfiaban de que no tuviera solución porque, según ellos: *"haciendo la derivada [con el ordenador] de la 'solución' da la función integrando".*

Consideramos que el cálculo de primitivas inmediatas con *DERIVE* ha supuesto a los estudiantes una nueva forma de abordar este pequeño campo de las matemáticas; sin embargo, constatamos que muchos de ellos no sienten la necesidad de aprender a integrar mediante el cálculo mental y/o la clásica técnica de lápiz y papel y, en consecuencia, una vez más el ordenador produce el efecto de *"caja negra"*, agravado por la creencia generalizada de que *"los resultados informáticos son indiscutibles".*

[44] Estas integrales se resolvieron en los dos ciclos, aunque no todas en cada uno de ellos.

[45] Obviamos los comentarios de cada tipo de función puesto que han sido realizados en los capítulos precedentes.

XI.3.3.3. Análisis de las respuestas

Siguiendo el criterio de los ciclos de confirmación, volvemos a escanerar algunas de las respuestas de los alumnos de los dos ciclos de consolidación en las cuales vemos sus errores o aciertos y, posteriormente, realizamos un análisis general.

Ítem nº 5:

SS-VV

Una vez representados las tres sumas obtenemos:

[6'75, 8'625, 10'75]

suma inferior — suma Riemann — suma superior

Y estimamos que el área entre la función $F(x) = x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$ tiene que encontrarse entre 6'75 (suma inferior) y 8'625 (suma de Riemann), mas o menos en torno a 7'5.

Ítem nº 9:

RP-MN

Hemos calculado la integral entre -2 y 4 y entre 2 y 4 y hemos observado que el resultado es el mismo porque se contrarresta la una con la otra.

Esta integral tiene un valor, pero no coincide con el área que queremos calcular.

Ítem nº 10:

BP-NV

$$\left[\int_{-1}^{1} H(x)\,dx,\ \int_{1}^{2} H(x),\ \int_{-1}^{2} |H(x)|\,dx\right] = \left[\frac{8}{3}, -\frac{5}{12}, \frac{37}{12}\right]$$

Hemos hecho la integral de los intervalos (-1, 1), (1, 2), (-1, 2)

$$\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{96+15}{36} = \frac{111}{36} \simeq 3'08$$

Ítem nº 4:

Hemos hallado la superficie de Riemann y nos dá el valor de $\frac{69}{8}$, dividido en intervalo $[1,3]$ en 8 partes.

AG-AS

Ítem nº 7:

No hemos acertado ni fallado porque no lo sabemos con certeza. La parte gris es mayor que el área, con la parte morada nos quedamos cortos y la parte azul puede ser próxima al área que calculamos pero no lo sabemos con seguridad. El valor exacto es 8,666.

AR-SR

Cuestión nº 8:

$$\int_1^3 f(x)=x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3} =$$

$$\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}.$$

Estamos convencidos

MR-SM

Los diez ítems que componen el cuadernillo de prácticas informáticas han sido realizados y contestados con más calma que los de los ciclos de confirmación y, aunque los estudiantes se interrelacionaban constantemente, las respuestas de algunos de ellos son muy distintas, incluso contrapuestas.

Los estudiantes, en general, responden muy bien a las cuatro primeras cuestiones, sin embargo sorprende que AG y AS escriban *"dividido el intervalo [1,3] en 8 partes"*, nosotros suponemos que están pensando en ocho subintervalos y no consideran cuatro subintervalos y un conjunto de cuatro puntos intermedios que es lo que en realidad formaliza la suma de Riemann de la función $f(x)=x^2$.

En el quinto ítem encontramos distintas respuestas: muy habitual es calcular el valor exacto según la expresión $\int_1^3 x^2 dx$, algunos alumnos estiman el área como la semisuma de las sumas inferior y superior, otros la media entre las dos sumas de Darboux y la suma de Riemann, también dan como buena la suma de Riemann cuyo conjunto de puntos intermedios son los puntos medios de cada subintervalo y, lo más sorprendente, hay quien estima el área como la semisuma de la suma inferior y la de Riemann.

En la sexta cuestión resulta difícil precisar la amplitud de cada subintervalo, varios alumnos no contestan o consideran que dicha amplitud es 2/16=0’125 y ello nos hace pensar que no han adquirido suficientemente los conceptos de partición y puntos intermedios asociados a una partición.

AR y SR analizan gráficamente el ítem nº 7 y confirman el área por medio de la regla de Barrow, es decir, relacionan y comparan los resultados gráficos con sus conocimientos teóricos. Contundentes son MR y SM que después de aplicar el teorema fundamental del cálculo integral escriben con rotundidad *“estamos convencidas”.*

Loa estudiantes ejecutaron las dos últimas cuestiones con ritmos muy diferentes, varios de ellos se despistaban y el profesor debía insistir personalmente a algunos de ellos para que siguieran atentos y continuaran con las prácticas informáticas. Terminar de cumplimentar esta parte final de los cuadernillos era una ardua tarea para los alumnos de 2º E y muchos de ellos no respondieron, por escrito, al noveno y décimo ítems.

En la cuestión 9, las alumnas RP y MN discriminan muy bien los conceptos de área e integral definida, aunque no dicen que es lo que *“se contrarrestan”.* En la última cuestión las alumnas BP y NV se han percatado de que para hallar el área pedida, basta tomar el valor absoluto de la segunda integral y sumarla con la primera.

Resolver integrales indefinidas con el ordenador ha supuesto que los alumnos vean una nueva utilidad de *DERIVE* y, a la vez, consideran que el cálculo mental de primitivas en el aula de clase no es tan necesario porque *“el cálculo de primitivas se puede realizar con el ordenador”.*

La forma de actuar de los estudiantes en cada una de las sesiones informáticas es similar a las de los ciclos de confirmación, es decir, en la primera parte (hasta el descanso) muestran más interés que en la segunda.

XI.3.3.4. Tablas resumen de las prácticas informáticas

Procediendo con los mismos criterios del apartado XI.3.2.4, resumimos en las dos tablas siguientes los niveles de respuesta[46] de cada ítem[47] de las prácticas informáticas realizadas en los dos ciclos de consolidación.

Una simple observación permite deducir que las prácticas realizadas con los alumnos de 2º D (ciclo IV) obtienen mejores niveles de respuesta que los de 2º E del ciclo siguiente, no entendemos la diferencia entre ambos grupos, sin embargo, podemos pensar que puede ser debida a que el segundo grupo es más heterogéneo y en el coexisten alumnos con intereses más dispares.

ÍTEMS	*FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LAS PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL CON DERIVE (CICLO IV)*												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		*Mo*	Σ	$\bar{X}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	18	100	5	90	5
2	0	0	0	0	0	0	4	22,22	14	77,78	5	86	4,78
3	0	0	0	0	0	0	2	11,11	16	88,89	5	88	4,89
4	0	0	0	0	0	0	6	33,33	12	66,67	5	84	4,67
5	0	0	0	0	6	33,33	8	44,45	4	22,22	4	70	3,89
6	2	11,11	0	0	8	44,45	6	33,33	2	11,11	3	60	3,33
7	6	33,33	0	0	0	0	6	33,33	6	33,33	3,33	60	3,33
8	8	44,45	0	0	2	11,11	2	11,11	6	33,33	1	52	2,89
9	0	0	8	44,45	2	11,11	2	11,11	6	33,33	2	60	3,33
10	2	11,11	6	33,33	2	11,11	0	0	8	44,45	5	60	3,33
TOTAL	**18**	**10**	**14**	**7,78**	**20**	**11,11**	**36**	**20**	**92**	**51,11**	**5**	**710**	**3,94**

Tabla XI.3.3.4.1. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de las prácticas de la integral con DERIVE (curso 2006-2007).

[46] Los niveles de respuesta siguen la escala Likert, conocida de capítulos anteriores.

[47] Recuérdese que el número de ítem de cada tabla coincide con el correspondiente número de ítem del cuadernillo de prácticas informáticas de la integral con *DERIVE*.

ÍTEMS	FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LAS PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL CON DERIVE (CICLO V)												
	Niveles de respuesta										Medidas		
	1		2		3		4		5		Mo	Σ	$\bar{X}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
1	0	0	0	0	0	0	4	23,53	13	76,47	5	81	4,76
2	0	0	0	0	2	11,76	3	17,65	12	70,59	5	78	4,59
3	2	11,76	0	0	4	23,53	2	11,76	9	52,94	5	67	3,94
4	2	11,76	0	0	2	11,76	3	17,65	10	58,82	5	70	4,12
5	4	23,53	0	0	5	29,41	4	23,53	4	23,53	3	55	3,24
6	10	58,82	3	17,65	2	11,76	2	11,76	0	0	1	30	1,76
7	6	35,29	0	0	3	17,65	4	23,53	4	23,53	1	51	3
8	8	47,06	2	11,76	1	5,88	0	0	6	35,29	1	45	2,65
9	8	47,06	0	0	4	23,53	3	17,65	2	11,76	1	42	2,47
10	4	23,53	2	11,76	6	35,29	3	17,65	2	11,76	3	48	2,82
TOTAL	**44**	**25,88**	**7**	**4,11**	**29**	**17,06**	**28**	**16,47**	**62**	**36,47**	**3**	**567**	**3,34**

Tabla XI.3.3.4.2. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de las prácticas de la integral con DERIVE (curso 2007-2008).

XI.3.3.5. Reflexiones

Realizadas las prácticas informáticas con *DERIVE* en los ciclos II y III, el profesor investigador había adquirido cierta experiencia y, en consecuencia, la planificación y ejecución de las correspondientes prácticas en los ciclos de consolidación fue más uniforme y precisa que en los de confirmación.

Muchas de las reflexiones detalladas en el epígrafe XI.3.2.5 pueden extrapolarse a este apartado, no es nuestro objetivo volverlas a escribir, más bien, consideramos más conveniente redactar las nuevas reflexiones que se deduzcan de la planificación, acción, análisis de las respuestas y de las tablas resumen de los ítems/niveles de las prácticas de la integral con *DERIVE* en los ciclos IV y V. Éstas son:

a) La reducción del número de ítems en el cuadernillo de prácticas informáticas supone que el tiempo dedicado a cada uno de ellos sea mayor y que los alumnos interrelacionen las gráficas y resultados que obtienen por medios informáticos con los conceptos teóricos que han sido explicados en la clase habitual del grupo.

b) Es muy eficaz que los mismos conceptos tengan los mismos nombres tanto en las clases habituales como en las prácticas informáticas pues facilita la labor docente del profesor en la sesión práctica con *DERIVE* y, además, los alumnos no se sienten confundidos.

c) Los estudiantes entienden mejor las sumas de Darboux que las sumas de Riemann, no descubren fácilmente un conjunto de puntos intermedios, *T*, asociado a una partición, *P*, y muchos de ellos se decantan por considerar la partición, *Q*, formada por la unión de los dos conjuntos anteriores, es decir, *Q=PUT*.

d) Algunos alumnos no interrelacionan suficientemente los conceptos matemáticos con las instrucciones informáticas que los soportan, por ejemplo, no captan que la instrucción *abs* es el valor absoluto.

e) Los estudiantes, por lo general, consideran que la partición P_n del intervalo [1,3] debe ser $P_n = \{1 + 2i/n\}_{i=0}^{n}$, por tanto, en el siguiente ciclo se deberán formalizar otras particiones.

f) Los alumnos no consideran prioritario realizar el cálculo de primitivas mediante el cálculo mental, piensan que para eso está el ordenador y basta con utilizar un buen programa informático.

g) El interés de los estudiantes decrece a partir de la hora y media de prácticas con el ordenador y, consecuentemente, el profesor debe redoblar sus esfuerzos para que los alumnos sigan sus explicaciones y realicen los trabajos propuestos.

h) Las respuestas orales de los alumnos son más ricas en matices que las escritas, les suele costar bastante trabajo escribir y ello hace que sus textos escritos sean muy pobres.

i) Consideramos que, al menos la tercera parte de los estudiantes, muestran muy poco interés por el uso de las nuevas tecnologías para el aprendizaje de las matemáticas y piensan que la utilización de *DERIVE* es una simple anécdota puesto que no figura en las programaciones habituales del departamento de matemática.

XI.3.4. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLO DE CIERRE

XI.3.4.1. Planificación y texto de la práctica

Esta es la última práctica, de nuestra investigación, que realizamos en el aula de informática para la enseñanza y el aprendizaje del área y la integral definida e indefinida por medio de las nuevas tecnologías utilizando *DERIVE.*

Los recursos del instituto son muy limitados, el aula de informática sigue siendo la misma que la de los cuatro ciclos precedentes y los ordenadores no han sido renovados en ningún momento. Por las razones aducidas en los ciclos anteriores, las prácticas deben realizarse una tarde del mes de enero.

El profesor investigador, basándose en las experiencias anteriores y en las reflexiones de los ciclos de confirmación y consolidación, con anterioridad al 16 de enero de 2009 había realizado las siguientes actuaciones:

1. Modificar y ampliar el *programa fuente* de los ciclos de consolidación, haciendo especial hincapié en la programación de instrucciones o subrutinas en las cuales los nodos consecutivos de algunas particiones no sean equidistantes.
2. Preparar el aula de informática del instituto para realizar las prácticas, reinstalar *DERIVE* y cargar el nuevo *programa fuente* en todos los ordenadores y comprobar su funcionamiento en cada uno de ellos[48].
3. Redactar un nuevo cuadernillo de prácticas informáticas y un cuestionario-encuesta sobre las mismas.

PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA CON *DERIVE*

Curso 2008-2009, ciclo de cierre (VI)

OBJETIVO: Estas prácticas permiten que el alumno, con ayuda de DERIVE 5, consolide los siguientes conceptos: sumas inferior y superior de Darboux, suma de Riemann, integral inferior y superior de Darboux, área bajo una curva, integral definida, teorema fundamental de cálculo integral, regla de Barrow, área comprendida entre dos curvas y función integral.

NORMAS QUE DEBEN TENERSE PRESENTES:

A) Posiciona el cursor en el icono **DERIVE**.

B) Haz doble clic con el botón izquierdo del ratón en el icono **DERIVE** pulsa **SÍ**.

C) Abre el archivo **D\integral\integral\integral(programa).Enero-09**

D) Sigue las explicaciones del profesor.

[48] El profesor de Tecnología, encargado del aula de informática, había formateado todos los ordenadores en septiembre de 2008.

1º.- Representa la función F(x) = x^2.

Escribe: **F(x):=x^2**

Posiciona el cursor en el icono [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)]** y pulsa el botón izquierdo. Posiciona el cursor en el icono **[Ventana 2D]** y pulsa el botón izquierdo.

Posiciónate en **[Seleccionar/Rango de la Gráfica]** pulsa.

Escribe en **Horizontal** los siguientes valores: **– 4, 6, 10.**

Escribe en **Vertical** los siguientes valores: **– 2, 10, 12.** Pulsa **SÍ.**

Posiciona el cursor en el icono y pulsa. Copia y pega y .

Explica lo que ha ocurrido: ____

2º.- Representa, de nuevo, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1)); (1,5;f(1)); (1,5;f(1,5)); (2;f(1,5)); (2;f(2)); (2,5;f(2)); (2,5;f(2,5)); (3;f(2,5)); (3;0) y (1;0).

2.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

2.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Observa que el intervalo [1,3] se ha dividido en cuatro subintervalos de igual amplitud: (3 –1)/4 = 1/2 = 0,5.

Posiciónate en **[Opciones/Pantalla/Puntos]**, pulsa, selecciona **Unir/Sí/Aceptar**, pulsa.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_INFERIOR (4)]**, pulsa y

Posiciónate en **[Opciones/Pantalla/Puntos]**, pulsa, selecciona **Unir/Sí/Aceptar**, pulsa.

[Representar Expresión,], Copia y pega y .

Escribe: **SUMA_INFERIOR(4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**]

Explica lo que ha ocurrido: ____

3º.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,5)); (1,5;f(1,5)); (1,5;f(2)); (2;f(2)); (2;f(2,5)); (2,5;f(2,5)); (2,5;f(3)); (3;f(3)); (3;0) y (1;0).

3.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

3.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_SUPERIOR (4)]**

Realiza: , , [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]** y

Copia y pega y .

Escribe: **SUMA_SUPERIOR(4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**]

Explica lo que ha ocurrido: ____

4º.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,25)); (1,25;f(1,25)); (1,5;f(1,25)); (1,5;f(1,75)); (1,75;f(1,75)); (2;f(1,75)); (2;f(2,25)); (2,25;f(2,25)); (2,5;f(2,25)); (2,5;f(2,75)); (2,75;f(2,75)); (3;f(2,75)); (3;0) y (1;0).

4.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

4.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_RIEMANN (4)]**

Realiza: , , [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]** y

Copia y pega y . Escribe: **SUMA_RIEMANN(4)** y pulsa

Explica lo que ha ocurrido: ____

5º.- Hagamos las representaciones anteriores de forma conjunta para observar las posibles diferencias:

5.1.- Colorea las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

5.2.- Calcula las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), COMPARA_SUPERFICIES(4)]**

Realiza: , , [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]** y

Copia y pega y . Escribe: **COMPARA_SUMAS(4).** Pulsa y

Explica cuánto crees que puede valer el área determinada por la función F(x) = x^2, el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = 3. __________________________

6º.- Al objeto de confirmar o desmentir la respuesta anterior, dividamos el intervalo* [*1,3*] *en 8 subintervalos, todos ellos de la misma amplitud, y actuemos de forma análoga a los apartados anteriores:

6.1.- Colorea las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

6.2.- Calcula las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), COMPARA_SUPERFICIES(8)]**

Realiza: , , [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]** y

Copia y pega y . Escribe: **COMPARA_SUMAS(8)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**], [Aproximar, **]**

¿Qué amplitud tiene cada uno de los nuevos subintervalos? ________________

Explica cuánto crees que puede valer, con los nuevos cálculos, el área determinada por la función F(x) = x^2, el eje de abscisas y las rectas x =1 y x=3.

____

7º.- Al objeto de confirmar o desmentir la respuesta anterior, dividamos el intervalo* [1,3] *en "n" subintervalos, todos ellos de la misma amplitud, y actuemos de forma análoga a los apartados anteriores. Sin embargo no podemos representar las superficies inferiores y superiores de Darboux ni las superficies de Riemann, aunque podemos calcular sus sumas:

Escribe: **COMPARA_SUMAS(n)**, **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

¿Qué amplitud tiene cada uno de los nuevos subintervalos? ____________________

Escribe cada una de las expresiones obtenidas junto a la expresión correspondiente: ____

SUMA_RIEMANN (n):

SUMA_INFERIOR DE DARBOUX (n):

SUMA_SUPERIOR DE DARBOUX (n):

Posiciónate y pulsa en **[Cálculo/Límites]**. También puedes ir al icono superior

Escribe en **Variable** la letra: **n**

Escribe en **Punto** el símbolo: ∞ (Tómalo de la parte inferior derecha de la pantalla)

Pulsa **Simplificar.**

¿Coinciden la integral inferior y superior? ____________________________

¿Es la función integrable? ¿Por qué? ________________________________

8º En el punto anterior la amplitud de cada uno de los subintervalos de la partición P_n era 2/n. A partir de este momento vamos a construir la sucesión de particiones

$Q_n = \bigcup_{i=0}^{n} \left| 1+i/n \right| \bigcup \left| 3 \right|$ ***del intervalo* [1,3], *donde los n primeros subintervalos tienen amplitud 1/n y el último subintervalo es* [2,3].**

A partir de este momento, las aplicaciones correspondientes llevarán el adjetivo IRREGULAR. Hagamos, con las nuevas particiones, de forma más resumida los puntos anteriores:

Tomemos la partición Q_8* = {1;1'125;1'25;1'375;1'5;1'625;1'75;1'875;2;3}** ***y actuemos de forma análoga al ejercicio número 6:

8.1.- Colorea las superficies de los polígonos que acabas de dibujar.

8.2.- Calcula las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

Escribe: **COMPARA_SUPERFICIES_IRREGULARES(8)**

Realiza: , , **[**Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]** y

Copia y pega y . Escribe: **COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(8)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**, **[**Aproximar, **]**

Limítate a observar las distintas superficies irregulares y el valor de sus áreas.

9º.- Dividamos el intervalo [1,3] en "n+1" subintervalos, según la partición Q_n, y actuemos de forma análoga al punto 7. No podemos representar las superficies inferiores y superiores de Darboux ni las superficies de Riemann, aunque podemos calcular sus sumas:

Escribe: **COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(n). [(Ctrl + Intro),]**

Escribe cada una de las expresiones obtenidas junto a la expresión correspondiente: ____

SUMA_RIEMANN_IRREGULAR(n):

SUMA_INFERIOR_IRREGULAR DE DARBOUX (n):

SUMA_SUPERIOR_IRREGULAR DE DARBOUX (n):

Posiciónate y pulsa en **[Cálculo/Límites]**. También puedes ir al icono superior

Escribe en **Variable** la letra: **n**

Escribe en **Punto** el símbolo: ∞ (Tómalo de la parte inferior derecha de la pantalla) Pulsa **Simplificar.** Copia la última línea, **Ctrl.+C**. Limpia la línea de entrada de datos y pega **Ctrl.+V**. Pulsa

Es evidente que los límites no coinciden ¿Crees que la función es integrable? ¿Por qué? ____

10º.- Al objeto de confirmar o desmentir las respuestas anteriores, aplicamos las diferentes instrucciones de DERIVE:

10.1.- Colorea el área que pretendes calcular.

10.2.- Calcula el área.

Escribe: **AreaUnderCurve(F(x),x,1,3); [(Ctrl + Intro),], [Ventana 2D,],**

[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]**, , Copia y pega y .

Escribe: **Int(F(x),x,1,3)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**, **[**Aproximar, **]**

Comparemos este resultado con los anteriores:

Escribe: **[COMPARA_SUMAS(4), COMPARA_SUMAS(8), COMPARA_SUMAS(n)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**, **[**Aproximar, **]**

Escribe: **[COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(4),**

COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(8),

COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(n)]

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**, **[**Aproximar, **]**

Razona por qué crees que has acertado o fallado en las respuestas anteriores.

____

11º.- DERIVE nos ha dado una respuesta, sin embargo, aún no estamos totalmente convencidos de la misma.

¿Serías capaz de confirmar dicha solución con lápiz y papel? Explica con todo lujo de detalles en qué te has basado para obtener tu solución ¿Coincide tu solución con la del programa informático? ______________________________________

CÁLCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE UNA FUNCIÓN, EL EJE DE ABSCISAS Y DOS RECTAS VERTICALES

12º.- Introduce la función $G(x)=x^3/8$, representa el área determinada por esta función, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$.

12.1.- Calcula la integral de dicha función entre los extremos -2 y 4.

12.2.- Calcula el área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$.

Escribe: **G(x):= (x^3)/8** Escribe: **PlotInt(G(x),x, – 2,4)**

[Ventana 2D, **],** **[**Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

Copia y pega y .

Escribe: **Int(G(x), x, – 2, 4)** Escribe: **Int(G(x), x, 2, 4)**

Razona por qué crees que has obtenido estos resultados ¿Qué has calculado?
____

Escribe: **PlotInt(abs(G(x)),x, – 2,4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

[Ventana 2D, **],** **[**Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión, **]** Copia y pega y .

Escribe: **Int(abs(G(x)), x, – 2, 4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

Escribe: **– Int(G(x), x, – 2, 0)** + **Int(G(x), x, 0, 4)** Pulsa

Ahora has obtenido un nuevo resultado, distinto al anterior ¿Qué crees que has hecho? ¿Cuánto crees que vale el área comprendida entre la función $G(x) = x^3/8$, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$? ______________________________

¿Qué debes hacer para calcular el área comprendida entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales? ______________________________________

CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

13º.- Introduce las funciones P(x) = x^3 + 1 y Q(x) = 2x^2 + x – 1. Representa y calcula el área comprendida entre estas dos curvas.

Escribe: **[P(x):= x^3 + 1, Q(x):= 2x^2 + x – 1, H(x):=P(x) - Q(x)]**

Escribe: **Solve(H(x) = 0, x)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

¿Qué has obtenido con la ejecución de este último comando? Observa, si es necesario, la última representación gráfica. __________________________________

Escribe: **AreaBetweenCurves(P(x),Q(x),x, – 1,2)** **[(Ctrl + Intro),]**

[Ventana 2D,], [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión,] Copia y pega y

Escribe: **[Int(H(x),x,-1,1), Int(H(x),x,1,2), Int(abs(H(x)),x,-1,2)], [(Ctrl + Intro),]**

Explica brevemente lo que acabamos de hacer. ________________________________

FUNCIÓN INTEGRAL

14º.- En clase se ha comentado que la función integral es el área recorrida entre la gráfica de una función, el eje de abscisas, la recta x=a y una recta vertical que se desplaza a la derecha de a.

Consideremos la función h(x)=x/4, sea $H(x) = \int_1^x h(t)\,dt$ ***siendo 1<x. Se pide:***

> ***14.1.- Calcula H(x).***
>
> ***14.2.- Representa H(x) como el área recorrida.***
>
> ***14.3.- Representa la función H(x) según la forma clásica.***

Escribe: **h(t):=t/4**, pulsa . Pulsa , marca Integral **Definida**, escribe en **Variable** t, **Límite Superior** x, **Límite Inferior** 1. Pulsa **Simplificar**.

Escribe: **FUNCION_INTEGRAL**, pulsa y .

Posiciónate en **[Seleccionar/Rango de la Gráfica]** pulsa.

Escribe en **Horizontal** los siguientes valores: **– 1, 11, 12.**

Escribe en **Vertical** los siguientes valores: **– 1, 7, 8**. Pulsa **SÍ.**

Pulsa . Copia y pega y .

Explica lo que ha ocurrido: ______________________________________

Cuadro XI.3.4.1. Práctica de la integral con DERIVE (ciclo de cierre).

XI.3.4.2. Acción

La sesión de prácticas informáticas, del área y la integral del ciclo de cierre, se llevó a cabo en el aula de informática del instituto el jueves 22 de enero de 2009 y en ella participaron dieciocho alumnos de segundo de bachillerato, grupo D, de la modalidad de ciencias sociales. Dicha sesión comenzó a las 16:00 horas y finalizó a las 19:00 horas, se hizo un pequeño descanso de un cuarto de hora a partir de las 17:30 horas.

El profesor, según la planificación realizada anteriormente, consideró que debía dedicar menos tiempo al estudio de las superficies y sumas[49] de la función *f(x)=x*^{2} asociadas a las particiones $P_n = \{1+2i/n\}_{i=0}^{n}$ y que en esta práctica final era prioritario estudiar las superficies y sumas asociadas a las particiones $Q_n = \{1+i/n\}_{i=0}^{n} \cup \{3\}$ y, por tanto, en ello se volcó. Los alumnos fueron conscientes que la elección de unas u otras particiones condicionan las respectivas superficies y sumas, sin embargo, el concepto de integrabilidad de una función en un intervalo en el sentido Darboux está por encima de la elección de las particiones y ello crea la necesidad de definir los conceptos de integral inferior y superior de Darboux. La observación gráfica de la ejecución de las instrucciones COMPARA_SUPERFICIES(8) y COMPARA_SUPERFICIES_IRREGULARES(8), la simple observación de los datos COMPARA_SUMAS(8) y COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(8) y el cálculo de los límites de las sucesiones COMPARA_SUMAS(n) y COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(n) hace que los alumnos confronten sus ideas y sea necesario recurrir al teorema de caracterización de las funciones integrables y a los conceptos de extremo superior de las sumas inferiores y extremo inferior de las sumas superiores.

La representación de la función integral, mediante aplicaciones informáticas, supone que los estudiantes incrementen y consoliden la comprensión de los ejercicios resueltos en las clases impartidas en su aula y detallados en el epígrafe *X.3.1.3. Otras aplicaciones de la integral* del capítulo X.

El cálculo de primitivas con *DERIVE* ha quedado descartado en las prácticas informáticas del ciclo de cierre, su tiempo ha sido dedicado a lo expuesto en los dos párrafos anteriores, el director de la tesis y el profesor investigador consideran que es suficiente el trabajo realizado con el cálculo mental.

[49] Superficies inferiores y superiores de Darboux y superficies de Riemann, ídem sumas.

XI.3.4.3. Análisis de las respuestas

Volvemos a seguir los criterios de los cuatro ciclos anteriores, es decir, escaneamos alguna de las respuestas de los estudiantes que consideramos interesantes y después realizamos el análisis de todas ellas en su conjunto.

Ítem nº 9:

No, porque la amplitud y los subintervalos de amplitud se cambian.

DA-EP

Ítem nº 13:

$\frac{8}{3}$; $-\frac{5}{12}$; $\frac{37}{12}$ → Área superior

→ Área inferior

→ Suma de Riemann

Suma de Riemann → $\frac{37}{12}$

Suma inferior → $\frac{8}{3}$

Suma superior → $\cancel{\frac{37}{12}}$ $-\frac{5}{12}$ 14

LB-SM

Ítem nº 13:

<u>dos rectas verticales?</u> Con el ordenador usar el Valor Absoluto

Con lapiz hacer dos integrales para que no se contrarreste

RS-GF

Los seis primeros ítems no aportan ningún matiz distinto de los encontrados en el análisis de las cuatro prácticas informáticas precedentes, los alumnos vuelven a responder de manera análoga a como lo hicieron sus compañeros de cursos anteriores.

El séptimo ítem es respondido por muchos estudiantes sin realizar un elemental análisis de cada una de las expresiones, así pues, intercambian SUMA_RIEMANN(n) y SUMA_INFERIOR DE DARBOUX(n) porque las tres sumas de la instrucción COMPARA_SUMAS(n) aparecen en pantalla en el orden: SUMA_INFERIOR(n), SUMA_RIEMANN(n) y SUMA_SUPERIOR(n) y no se percatan de las diferencias de las correspondientes expresiones[50].

La octava cuestión suscita varios comentarios entre los estudiantes, les hace comprender, después de observar con detenimiento las gráficas de la instrucción COMPARA_SUPERFICIES_IRREGULARES(8) que las tres sumas (irregulares)[51] difieren sustancialmente de las anteriores y RM, refiriéndose a las sumas inferiores, dice: *"Es como calcular las sumas inferiores de la función entre 1 y 2 y sumar el área del rectángulo de base 1 y altura 4, para las otras sumas es la misma idea".* Parece ser que los alumnos han entendido que la elección de las particiones es fundamental para el cálculo de las distintas sumas de Darboux y Riemann.

La primera parte del noveno ítem entraña dificultades análogas a las descritas en el séptimo y el interés del profesor investigador se centra en las respuestas a la segunda pregunta de la novena cuestión[52], las dudas surgen entre los alumnos: unos responden como DA y EP, otros piensan que no es integrables porque no coinciden los límites de las sumas (irregulares) y algunos de ellos dudan porque ahora no coinciden los límites y, sin embargo, anteriormente consideraron que la función era integrable y, además, no dudan en aplicar el teorema fundamental del cálculo $\int_1^3 x^2 dx = 26/3$.

Consideramos que la novena cuestión ha suscitado un conflicto intelectual en muchos estudiantes puesto que en un principio estaban convencidos de la integrabilidad de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo [1,3] con la sucesión de particiones P_n y al tomar las nuevas particiones Q_n no obtienen los resultados esperados. Es evidente que varios alumnos no han comprendido suficientemente el teorema de caracterización de las funciones integrables ni tampoco han descubierto que los extremos superior de las sumas inferiores y el extremo inferior de las sumas superiores coinciden.

[50] Véanse las expresiones de las tres sumas en la solución al ítem nº 7 del epígrafe L.3.2 del anexo L.

[51] Consideramos *superficies* y *sumas irregulares* porque los nodos consecutivos no son equidistantes.

[52] El profesor investigador ha considerado oportuno evaluar solamente las respuestas al texto: *"Es evidente que los límites no coinciden ¿Crees que la función es integrable? ¿Por qué?".*

El resto de las cuestiones, salvo la decimocuarta que ha suscitado los comentarios señalados con anterioridad, tienen respuestas análogas a las de los ciclos anteriores aunque LB y SM contestan mal a algunas de ellas.

XI.3.4.4. Tabla resumen de las prácticas informáticas

Procediendo de forma similar a las tablas de los cuatro ciclos anteriores, resumimos en la siguiente los niveles de respuesta de cada uno de los ítems[53] de las prácticas informáticas con *DERIVE* realizadas en el ciclo VI.

ÍTEMS	***FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LAS PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL CON DERIVE (CICLO VI)***												
	Niveles de respuesta										**Medidas**		
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		***Mo***	Σ	$\bar{x}$
	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**	n_i	**%**			
1	2	11,11	0	0	0	0	8	44,44	8	44,44	4,5	74	4,11
2	0	0	0	0	4	22,22	0	0	14	77,78	5	82	4,56
3	2	11,11	0	0	2	11,11	0	0	14	77,78	5	78	4,33
4	2	11,11	0	0	4	22,22	0	0	12	66,67	5	74	4,11
5	2	11,11	4	22,22	0	0	12	66,67	0	0	4	58	3,22
6	4	22,22	4	22,22	0	0	10	55,56	0	0	4	52	2,89
7	2	11,11	0	0	4	22,22	12	66,67	0	0	4	62	3,44
8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
9	10	55,56	0	0	0	0	0	0	8	44,44	1	50	2,78
10	2	11,11	6	33,33	0	0	4	22,22	6	33,33	3,5	60	3,33
11	4	22,22	2	11,11	2	11,11	0	0	10	55,56	5	64	3,56
12	2	11,11	2	11,11	4	22,22	4	22,22	6	33,33	5	64	3,56
13	6	66,67	4	22,22	6	66,67	2	11,11	0	0	2	40	2,22
14	8	44,44	0	0	6	33,33	0	0	4	22,22	3	46	2,56
TOTAL	**46**	**19,66**	**22**	**9,40**	**32**	**13,67**	**52**	**22,22**	**82**	**35,04**	**5**	**804**	**3,44**

Tabla XI.3.4.4. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de las prácticas de la integral con DERIVE (curso 2008-2009).

[53] Los niveles de respuesta siguen la escala Likert y el número del ítem de la tabla coincide con el correspondiente número de ítem del cuadernillo de prácticas informáticas.

XI.3.4.5. Encuesta a los alumnos

La cuarta parte de la encuesta realizada a los estudiantes, denominada *PRÁCTICA CON DERIVE (LA INTEGRAL)*, fue contestada por todos los alumnos que realizaron la práctica de la integral en el aula de informática[54].

Los ítems que debían contestar eran cinco: los cuatro primeros eran cerrados y los estudiantes debían valorar cada uno de ellos entre 1 (mínimo) y 5 (máximo)[55] y la quinta cuestión era abierta pues permitía responder mediante una pequeña reflexión. He aquí los ítems:

4.- PRÁCTICA CON DERIVE (LA INTEGRAL)

4.1.- El grado de dificultad de la práctica de ordenador: _________

4.2.- El interés del profesor en la utilización de las Nuevas Tecnologías para la enseñanza del área y la integral definida: _________

4.3.- Tu propio interés por el aprendizaje de los conceptos matemáticos utilizando las Nuevas Tecnologías: ________

4.4.- Tu comprensión de la integral definida después de realizar la práctica con Derive:__

4.5.- Describe, brevemente, tus impresiones sobre la práctica con Derive, tu propio aprendizaje práctico de la integral definida una vez utilizado el ordenador, la necesidad de controlar en todo momento lo que hace el ordenador y lo que consideres más interesante:____
____

Cuadro XI.3.4.5. Encuesta a los alumnos sobre la práctica informática con DERIVE.

Recopiladas las respuestas de los cuatro primeros ítems[56], los resultados vienen dados en la tabla XI.3.4.5 y su tratamiento es idéntico a los de todas las tablas anteriores.

Dado el escaso tiempo del que se disponía y los medios materiales tan limitados, el propósito que animaba al profesor investigador al realizar la práctica con *DERIVE* era que fuese sencilla para que los estudiantes no abandonaran en los primeros momentos, por tanto, la elección de la función $f(x)=x^2$ era el primer paso y así lo han valorado los alumnos pues no consideran difícil la práctica del área y la integral definida con *DERIVE.*

[54] La práctica de la integral en el aula de informática la realizaron todos los alumnos del grupo, salvo la estudiante VB que justificó su ausencia.

[55] La valoración sigue la escala Likert.

[56] Siguiendo los criterios anteriores, a cada ítem le reconocemos como el ítem cuyo ordinal es el correspondiente al texto de la encuesta de la práctica con *DERIVE*.

ÍTEMS	FRECUENCIAS, PORCENTAJES Y MEDIDAS DE LOS ÍTEMS/NIVELES DE LA ENCUESTA SOBRE LA PRÁCTICA CON DERIVE (CICLO VI)												
	Niveles de respuesta										Medidas		
	1		2		3		4		5		*Mo*	Σ	$\bar{x}$
	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%	n_i	%			
4.1	3	16,67	6	33,33	7	38,89	2	11,11	0	0	3	44	2,44
4.2	0	0	0	0	2	11,11	9	50	7	38,89	4	77	4,28
4.3	1	5,56	3	16,67	3	16,67	9	50	2	11,11	4	62	3,44
4.4	0	0	5	27,78	7	38,89	2	11,11	4	22,22	3	59	3,28
TOTAL	**4**	**5,56**	**14**	**19,44**	**19**	**26,39**	**22**	**30,56**	**13**	**18,06**	**4**	**242**	**3,36**

Tabla XI.3.4.5. Resumen de las frecuencias, porcentajes y medidas del tratamiento de los ítems/niveles de la encuesta sobre la práctica con DERIVE (curso 2008-2009).

Alta es la valoración otorgada al profesor por su interés en la utilización de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la integral y medio-alto es el interés de los alumnos por su propio aprendizaje de tal concepto. Los estudiantes consideran que su propia comprensión de la integral, después de realizar la práctica informática con *DERIVE*, ha alcanzado un nivel medio.

Dieciocho respuestas distintas, tantas como alumnos, se dan en el quinto ítem: un alumno no responde, tres escriben comentarios negativos y catorce consideran positiva la práctica informática[57].

En el gráfico adjunto quedan recogidos los porcentajes de cada tipo de respuesta de las reflexiones personales de los estudiantes sobre la práctica informática con *DERIVE.*

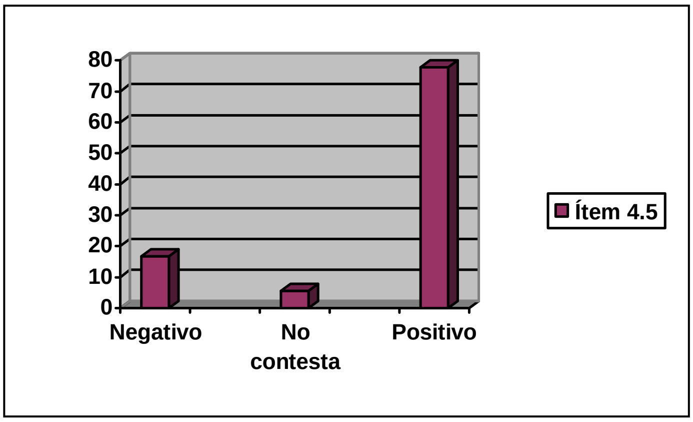


Gráfico XI.3.4.5. Porcentajes de cada tipo de respuesta del ítem 4.5.

[57] En el anexo J han sido escaneadas varias respuestas, entre ellas las consideradas negativas.

XI.3.4.6. Reflexiones

En este ciclo de cierre, procediendo de forma análoga a los anteriores, redactamos las reflexiones específicas del mismo a las cuales hemos llegado como consecuencia de realizar la práctica informática del área y la integral con el programa de cálculo simbólico *DERIVE*, éstas son:

a) Más del 80% de los alumnos desconocen *DERIVE* y consideran que las nuevas tecnologías pueden ser un instrumento importante para reforzar y consolidar sus conocimientos matemáticos sobre el área y la integral adquiridos en las clases impartidas en el aula de grupo.

b) Establecer particiones con nodos consecutivos no equidistantes[58] sorprende a los estudiantes y, para algunos de ellos, al no coincidir los respectivos límites de sus sumas inferiores y superiores les hace suponer que la función $f(x)=x^2$ no es integrable en [1,3]. No se ha estudiado ninguna sucesión de particiones cuyas sucesiones de sumas inferiores y superiores carezcan de límites.

c) Las sumas de Riemann son más difíciles de asimilar por los alumnos puesto que no controlan suficientemente el conjunto de puntos intermedios asociados a una partición.

d) A los alumnos les resulta difícil comprender los conceptos de integral inferior y superior de Darboux aunque no más que la comprensión del teorema de caracterización de las funciones integrables.

e) Para algunos estudiantes existe una clara disociación entre las notaciones clásicas de matemáticas y las instrucciones informáticas, no alcanzan a ver que los mismos conceptos son expresados en dos lenguajes distintos: matemático e informático.

f) Los estudiantes confían más en los resultados que muestra el ordenador que en sus propios conocimientos matemáticos y sus cálculos particulares, es más, acomodan los conocimientos adquiridos fuera del aula de informática a los datos de la pantalla del ordenador.

g) Muchos alumnos consideran iguales área e integral definida, no contemplan que en el cálculo del área total se hayan contrarrestado algunas áreas parciales, por tanto, no ven la necesidad de solventar el error, con *DERIVE*, tomando el valor absoluto de la función.

---

[58] Considérese, por ejemplo, la sucesión $Q_n = \{\ +i/n\}_{i=0}^{n} \cup \{\ \}$ mencionada en este capítulo.

h) Representar la función integral supone que los alumnos comprendan, no sin cierta dificultad, que dicha función admite dos representaciones distintas bajo la misma expresión analítica $H(x)=\int_1^x h(t)\,dt$.

i) Muchos estudiantes persiguen la inmediatez de los resultados, no relacionan los mismos con sus conocimientos previos y no establecen las posibles relaciones existentes entre las imágenes, los datos numéricos del ordenador y los distintos conceptos teóricos.

j) La ejecución de las prácticas informáticas en grupos de dos personas se muestra muy eficaz, aunque en algunos casos uno de los compañeros lleva todas las iniciativas y trabajos y el segundo tiene una actitud muy pasiva.

k) El profesor debe estar muy atento a cada uno de los grupos, en ciertas ocasiones algunos alumnos se entretienen con el ordenador y no realizan la parte de la práctica propuesta.

l) Según transcurre el tiempo de realización de la práctica, los alumnos muestran un interés decreciente por seguir trabajando en el aula de informática. Es aconsejable realizar las prácticas informáticas en dos sesiones distintas, sin embargo, no se ha actuado así por la imposibilidad de utilizar el aula de informática en horario de mañana y las múltiples dificultades para realizarla en horario extraescolar.

m) Los estudiantes son reticentes a contestar por escrito a las preguntas del cuadernillo, redactar párrafos superiores a tres líneas es imposible para la mayoría de ellos.

n) Los alumnos consideran que el profesor investigador muestra interés por la enseñanza de las matemáticas con las nuevas tecnologías, es de agradecer, y ello supone que debe seguir trabajando con los PCS.

o) Los estudiantes tienen interés en el aprendizaje de las matemáticas por medio de *DERIVE*, sin embargo, valoran con un nivel medio su propio aprendizaje de la integral definida con este PCS.

p) El interés de muchos estudiantes se centra en el tipo y dificultad de los exámenes más que en el aprendizaje de la integral, e incluso en la *“pérdida de actividades extraescolares, generalmente deportivas, y clases particulares”*.

XI.4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS CON *DERIVE* SEGÚN LOS ACTOS DE COMPRENSIÓN DE SIERPINSKA

En los capítulos anteriores quedó constatado que el modelo teórico bajo el cual realizamos la presente investigación es el *modelo de comprensión de Sierpinska*, el cual exige que se establezcan los actos de comprensión y los obstáculos y/o dificultades[59] asociados a la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida, en este caso, con las *Nuevas Tecnologías* utilizando el programa de *software* matemático *DERIVE.* Así lo hemos establecido en el capítulo III de esta memoria[60] y, en estos momentos, debemos determinar los actos de comprensión de Sierpinska y los obstáculos y/o dificultades encontrados en la investigación experimental de la enseñanza-aprendizaje del área y la integral con el programa de cálculo simbólico *DERIVE.*

La investigación experimental recogida en el presente capítulo tiene dos partes bien diferenciadas: prácticas con lápiz y papel y prácticas con *DERIVE.* Ambas prácticas pretenden determinar el grado de comprensión de los estudiantes de los distintos conceptos que componen la integral definida mediante la integrabilidad de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo [1,3].

En ningún momento hemos considerado prioritario, en nuestra investigación, realizar las mencionadas prácticas con lápiz y papel, por tanto, sólo las hemos propuesto en los ciclos de confirmación (II y III); sin embargo, consideramos que la experiencia ha sido muy positiva ya que complementan las actividades de los cuadernillos teórico-prácticos del área y la integral cuyo análisis se ha efectuado en el capítulo VIII de esta memoria de tesis doctoral[61], además, tales prácticas pueden considerarse como introductorias a las realizadas en el aula de informática. Así pues, pensamos que no debemos establecer los actos de comprensión y los obstáculos y/o dificultades de las prácticas de la integral realizadas por los estudiantes con lápiz y papel pues consideramos que esta parte de la investigación es secundaria y, en consecuencia, es suficiente remitirnos a los apartados *XI.2.3. Reflexiones* [de las prácticas con lápiz y papel] y *XI.5.1. Prácticas con lápiz y papel* [dentro de *XI.5. Reflexiones Generales*] del capítulo actual.

[59] Consideramos que, en nuestra investigación, los estudiantes no siempre encuentran obstáculos en la adquisición del conocimiento matemático, en ocasiones, tienen dificultades.

[60] Véase el epígrafe *III.1.5. El Modelo de Comprensión de Sierpinska*.

[61] *Capítulo VIII: Ciclos de Confirmación (II y III), Cursos 2004-2005 y 2005-2006.*

Por el contrario, con las prácticas realizadas en el aula de informática con *DERIVE*, debemos establecer los actos de comprensión, siguiendo el marco teórico de Sierpinska, y los obstáculos y/o dificultades asociados a la enseñanza-aprendizaje de la integral definida con las nuevas tecnologías.

La implementación de las prácticas informáticas se ha efectuado, salvo en el ciclo inicial, en todos los ciclos de nuestra investigación y, por el marco metodológico cualitativo de investigación-acción, hemos seguido un proceso en espiral el cual queda resumido en la *Figura XI.3. Proceso en espiral de las prácticas del área y la integral con DERIVE* del presente capítulo. Por tanto, según se recoge en la tabla III.1.5.3[62], procedemos a determinar, de forma generalizada y conjunta a todos los ciclos, los actos de comprensión y obstáculos de los alumnos[63] en el aprendizaje del área y la integral (definida e indefinida) por medio de las nuevas tecnologías con el PCS *DERIVE*[64]*.*

Todos los estudiantes identifican el *software* matemático *DERIVE* como una herramienta tecnológica válida y suficiente para la enseñanza-aprendizaje de la integral (CT_1); sin embargo, la primera dificultad importante con la que se encuentran, al menos cuatro de cada cinco alumnos, es el desconocimiento de los comandos e instrucciones necesarias para su correcta utilización, es por ello que, el profesor debe dedicar un tiempo inicial para presentar este PCS junto con las instrucciones más elementales para poder ejecutar las prácticas propuestas, es decir, debemos establecer la *"génesis instrumental"* (Artigue, 2003b)[65] (OT_1).

Sintetizar las instrucciones y las subrutinas del *programa de utilidades* (CT_4) y relacionarlas con las respectivas denominaciones conceptuales de las clases habituales de matemáticas permiten comprender mejor, a los alumnos, los diferentes conceptos de la integral[66] (CT_2). Los obstáculos más importantes con los que se encuentran los estudiantes son: considerar que el ordenador es una *"caja negra"* y que las representaciones informáticas y

[62] *Tabla III.1.5.3. Actos de comprensión, según el modelo de Sierpinska, y obstáculos y/o dificultades asociados a la utilización del programa de cálculo simbólico DERIVE* del capítulo III.

[63] El análisis según los actos de comprensión de Sierpinska es generalizado puesto que la presente investigación, como es sabido, no contempla ningún estudio de casos.

[64] En lo que sigue, los actos de comprensión u obstáculos quedan identificados entre paréntesis.

[65] Véase Artigue (2003b) en *I.3.2. Las Nuevas tecnologías en la Enseñanza de la Integral Definida* dentro de la sección *I.3. Antecedentes de la Investigación* del capítulo I.

[66] Considérense, por ejemplo: el concepto gráfico-numérico, explicado en clase de matemáticas, suma inferior $s(f,P_4)$ y las subrutinas informáticas SUPERFICIE_INFERIOR(4) y SUMA_INFERIOR(4).

matemáticas son independientes (OT_2 y OT_3); en consecuencia, el profesor investigador considera que estos obstáculos deben ser eliminados, o al menos minimizados, y para ello nos hemos propuesto que la construcción de la integral siga un proceso *enactivo*[67] o dinámico (Duval, 2006) mediante el modelo de *"caja gris"* y, además, procurando no disociar las actividades del aula de informática y las habituales de las clases de matemáticas en el aula del grupo (CT_3 y CT_4).

Consideramos que el mejor método para que los estudiantes identifiquen y discriminen conceptos tales como: partición, conjunto de puntos intermedios, máximo y mínimo absolutos, sumas inferior y superior de Darboux, sumas de Riemann, función integral, etc. es que ellos mismos programen las respectivas subrutinas asociadas a cada uno de estos conceptos (CT_5); sin embargo, esto no es posible para los estudiantes de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales por su desconocimiento total y absoluto de las técnicas más elementales de programación, circunstancia agravada por la gran cantidad de tiempo necesario para implementar correctamente cualquier subprograma informático básico con muy pocas instrucciones (OT_4 y OT_5). Por tanto, descartado informáticamente el modelo de *"caja blanca"*, el profesor investigador se siente con la obligación de realizar personalmente las tareas mencionadas anteriormente y, para ello, mediante la elaboración del *programa de utilidades* pretende que la herramienta informática sea transparente, romper el maleficio de *"caja negra"* y que los estudiantes bachilleres de ciencias sociales perciban el PCS *DERIVE*, al menos, como *"caja gris"* (Sierra y Codes, 2005)[68].

Así pues, el tratamiento instruccional ideal para una excelente enseñanza y aprendizaje de la integral mediante la metodología ACE de la teoría APOE no ha sido posible realizarlo en nuestra investigación, aunque no por ello se ha descartado en su totalidad. Además, hemos establecido nuestra propia descomposición genética de la integral[69].

---

[67] Representaciones *enactivas*, es decir, que dan sensación de cambio. Véase el apartado *III.1.8. Las representaciones semióticas de Duval* del capítulo III.

[68] Véase Sierra y Codes (2005) en *I.3.4. Dificultades en la adquisición del saber matemático (concepto de integral definida), en el uso de los programas de cálculo simbólico (PCS) y en el cálculo mental* del capítulo I.

[69] Véase el apartado *III.1.9. La teoría APOE* del capítulo III.
APOE, acrónimo de: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.
ACE, acrónimo de: Actividades con ordenador, discusiones en Clase y Ejercicios de afianzamiento.

Generalizar las sumas inferiores y superiores de Darboux y transferir estos conceptos a la síntesis de las respectivas integrales inferior y superior de Darboux y, al ser iguales ambas integrales, concluir que la función $f(x)=x^2$ es integrable en [1,3], conlleva el acceso a un nivel conceptual superior que consideramos muy importante y, para ello, se ha optado por establecerlo por dos/tres vías informático-matemáticas:

- Tomando límites: $\lim_{n\to\infty} s(f,P_n)$ y $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$; $P_n = \{1+2i/n\}_{i=0}^{n}$. Esto nos permite establecer $\int_1^3 x^2\,dx$ como el valor común de ambos límites.
- Por la desigualdad: $\lim_{n\to\infty} s(f,Q_n) \neq \lim_{n\to\infty} S(f,Q_n)$; $Q_n = \{1+i/n\}_{i=0}^{n} \cup \{3\}$ que no nos garantiza la integrabilidad ni la no integrabilidad de la función y, en consecuencia, recurrimos a:
    - El teorema de caracterización de las funciones integrables.
    - La coincidencia del extremo superior de las sumas inferiores (integral inferior de Darbox) con el extremo inferior de las sumas superiores (integral superior Darboux).

Confirmamos, una vez más, que sintetizar la integrabilidad (no integrabilidad) de una función en un intervalo compacto es muy difícil para, al menos, la mitad de los estudiantes; además, así quedó constatado en el análisis de los cuadernillos teórico-prácticos del área y la integral analizados en los cuatro capítulos anteriores y siendo corroborado con las prácticas informáticas del ciclo de cierre realizadas con *DERIVE* (ítems noveno y décimo)[70].

Asimismo, percibimos que el teorema fundamental del cálculo supone que los estudiantes se sientan liberados de comprender y, por extensión, de aprender los conceptos previos de la integral definida llevándolos a la generalización y síntesis erróneas del área determinada por una función integrable $f(x)$ en el intervalo compacto [*a*,*b*] mediante el valor numérico $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$, siendo *F(x)* una primitiva de $f(x)$ en [a,b] (OT_7).

La labor del profesor investigador en estos momentos consiste en presentar ejemplos sencillos por medio de los cuales los estudiantes sean capaces de discriminar las conceptos de área e integral definida (CT_7), así pues, hemos

[70] Véase el apartado *XI.3.4. Práctica con DERIVE, ciclo de cierre.*

considerado una función *g(x)* que cambia una única vez de signo en un intervalo [*a,*b][71] y de ahí, informáticamente, se ha calculado:

- La integral definida dada por ID= $\int_a^b g(x)\,dx$ que, en un principio, es considerada, erróneamente, como el área comprendida entre la gráfica de la función, el eje *OX* y las rectas *x=a* y *x=b* (OT_7).
- El área comprendida entre la gráfica de la función *g(x)*, el eje de abscisas y las rectas *x=a* y *x=b* mediante la expresión A= $\int_a^b |g(x)|\,dx$; sin embargo, más de la tercera parte de los estudiantes consideran verídica la igualdad $\int_a^b |g(x)|\,dx = \left|\int_a^b g(x)\,dx\right|$ (OT_6). Asimismo, hemos constatado fehacientemente que una función expresada en valor absoluto es un obstáculo, o al menos una dificultad, importante en la resolución de ejercicios y problemas con lápiz y papel y, en consecuencia, existe un conflicto cognitivo al considerar A= $\int_a^b |g(x)|\,dx$ en lugar de realizar el cálculo manual A=$-\int_a^c g(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx$.

Encontramos obstáculos similares a los descritos anteriormente al calcular el área comprendida entre dos curvas, pues el algoritmo explicado y aplicado en las sesiones habituales de clase se muestra innecesario en la clase de informática al calcular la integral definida del valor absoluto de la diferencia de las respectivas funciones; por tanto, los estudiantes consideran que los procedimientos utilizados informáticamente y manualmente (lápiz y papel) son distintos así como, en multitud de ocasiones, sus resultados (OT_{10}).

Avanzar del concepto integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, considerado estático, a otro dinámico como es el concepto integral indefinida, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (CT_8), conlleva una serie de dificultades y obstáculos, entre los que destacamos:

- *F(x)* no es fácil aceptarla como función pues su definición es analítica y no algebraica y, además, en multitud de ocasiones tampoco es posible expresarla algebraicamente[72].

[71] La función *g(x)* es negativa en [*a,c*) y positiva o nula en [*c,b*], siendo $a<c<b$.

- La variable independiente *x* de la función *F(x) y* la variable de integración *t* generan confusión entre los estudiantes y es preciso establecerlas con todo rigor al aplicar *DERIVE* puesto que ha de considerarse como *integral definida* cuyo *extremo superior es x* y *la variable independiente de la función integrando es t* (OT_8)*.* Este mismo concepto es considerado matemáticamente como *integral indefinida* y el concepto informático de *integral indefinida* es, matemáticamente, el de *primitiva* o *antiderivada.*
- Aunque los alumnos acepten el teorema fundamental del cálculo[73], no les resulta fácil comprender que *F(x)* también es una primitiva de la función continua *ƒ(x).*
- Las dos representaciones gráficas de la función *F(x)* realizadas conjuntamente en la práctica informática mediante la subrutina FUNCION_INTEGRAL en el ciclo de cierre son consideradas, por más de la mitad de los alumnos, independientes e inconexas[74].

Constatamos que, para nuestros alumnos, sintetizar el concepto de integral indefinida es el más difícil de los abordados en esta investigación.

Los estudiantes aceptan, y a la vez se sienten liberados, de que *DERIVE* calcule primitivas (CT_9) y, como tal, piensan que es superfluo calcular mentalmente las más elementales (OT_{9a}). Sin embargo, un importante obstáculo es considerar válida la solución dada por el ordenador y, para justificarlo, derivar (utilizando *DERIVE*) dicha solución y obtener la función integrando[75] (OT_{9b} y OT_{10}).

El director de la tesis, los alumnos y el profesor investigador consideramos que las nuevas tecnologías son un instrumento válido y poderoso para el aprendizaje de las matemáticas cuando los usuarios de las mismas somos críticos con las respuestas obtenidas (CT_{10}) y, sobre todo, los estudiantes no hacen un "acto de fe" ante los resultados que arroja el ordenador (OT_{10}).

---

[72] Considérese, por ejemplo, $F(x) = \int_a^x e^{t^2}\, dt$.

[73] Si *G(x)* es una primitiva de *f(x)* en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

[74] La primera representación gráfica de *F(x)* es la superficie recorrida entre la función *ƒ(x)* el eje de abscisas y las rectas $r_1=a$ y $r_2=x$. La segunda representación corresponde al grafo determinado por los puntos *(x,F(x))*. Véase el apartado *L.3. Práctica con DERIVE, Ciclo de Cierre* del anexo L.

[75] Véase $\int 5e^{x^2}\, dx$, en el apartado *L.2.3. Integrales Indefinidas* del anexo L.

XI.5. REFLEXIONES GENERALES

Analizadas las prácticas de la integral definida realizadas por los estudiantes mediante los recursos tradicionales de lápiz-papel y con el programa de *software* matemático *DERIVE*, es el momento de redactar las reflexiones generales más importantes a las cuales hemos llegado.

Dichas reflexiones proceden de todas las reflexiones (parciales) redactadas en este capítulo, así como, del análisis del uso de *DERIVE* según los actos de comprensión de Sierpinska. Muchas de ellas coinciden en los dos tipos de prácticas, sin embargo, creemos conveniente redactarlas de forma independiente puesto que las prácticas con lápiz-papel sólo se realizaron en los ciclos de confirmación (II y III) y las informáticas fueron realizadas, salvo en el ciclo inicial o de exploración, en todos los ciclos de la investigación.

XI.5.1. PRÁCTICAS CON LÁPIZ Y PAPEL

Las prácticas con lápiz-papel del área y la integral definida fueron realizadas por estudiantes de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales de los cursos 2004-2005 y 2005-2006 del Instituto de Enseñanza Secundaria "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos y, analizando cada uno de sus trabajos, obtenemos las siguientes reflexiones generales:

a) Los alumnos son muy reacios a realizar los trabajos propuestos por el profesor y, a pesar de la insistencia, muchos de ellos los entregan de forma descuidada tanto en su presentación como en los contenidos.

b) Los estudiantes se sienten más cómodos trabajando con números decimales que operando con fracciones.

c) Las áreas son difíciles de estimar para los estudiantes cuando realizan la representación gráfica de la correspondiente superficie ya que no tienen interiorizadas las unidades de superficies más comunes como son el mm^2, cm^2, dm^2 y m^2 ni asocian el espacio físico que ocupa cada una de ellas.

d) La relación entre particiones *"P es más fina que Q"* y el concepto de puntos intermedios asociados a una partición son difíciles de adquirir por los alumnos.

e) Los estudiantes reconocen con más facilidad las sumas inferiores y superiores de Darboux que las sumas de Riemann, se sienten inseguros ante el desconocimiento del valor de la función en un punto intermedio de cada subintervalo.

f) Varios estudiantes consideran el límite de una sucesión como una aproximación y no un valor, por tanto, es frecuente ver escrito $\lim_{n\to\infty} a_n \cong l$ en lugar de escribir $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

g) La sucesión de particiones $P_n = \left\{ a + \frac{b-a}{n} i \right\}_{i=0}^{n}$ del intervalo [*a,b*] es considerada prioritaria por los estudiantes y muchos de ellos no contemplan otras particiones.

h) La definición de los conceptos de integral inferior y superior de Darboux como el extremo superior de las sumas inferiores y el extremo inferior de las sumas superiores, respectivamente, es comprensible para muchos estudiantes; sin embargo, algunos piensan que aunque la función sea integrable en un intervalo no necesariamente deben coincidir las integrales inferior y superior.

i) Establecer la integrabilidad de una función mediante el teorema de caracterización óptima de las funciones integrables es difícil de asimilar por los alumnos, no perciben todos los matices que intervienen en dicho teorema y piensan que "*La diferencia entre las sumas superiores e inferiores asociadas a cualquier partición 'con muchos nodos' se hace tan pequeña como queramos".*

j) Podemos considerar que todos los alumnos reconocen el teorema fundamental del cálculo por su aplicación práctica mediante la regla de Barrow y, asimismo, consideran que es una herramienta "prodigiosa" para el cálculo de áreas.

k) Los estudiantes no perciben que el estudio de las matemáticas es constante, no lineal, debe reconstruirse en todo momento y retomar puntos que se consideraban superados. Esta aseveración queda constatada porque son reacios a modificar sus propios resultados escritos aunque estén en abierta contradicción en momentos distintos de su trabajo.

l) Muchos estudiantes se muestran remisos a consultar libros de texto y otras fuentes de la ciencia matemática, incluso la *web*; por tanto, realizan los trabajos con buena voluntad y según sus propios criterios pero carecen del mínimo espíritu investigador.

XI.5.2. PRÁCTICAS CON *DERIVE*

La enseñanza y el aprendizaje del área y la integral definida por medio de las nuevas tecnologías supone un reto al profesor investigador y a los estudiantes, no ha sido nuestro objetivo una enseñanza completa de estos tópicos utilizando los diferentes programas de *software* matemático existentes en el mercado, más bien, dada la escasez de tiempo y la limitación de los medios tecnológicos que posee el instituto eso no era posible. Tampoco hemos ignorado la oportunidad que se nos brindaba para realizar una pequeña práctica en la sala de ordenadores con el programa de cálculo simbólico *DERIVE* y a ello le hemos dedicado, aproximadamente, quince horas distribuidas en cinco sesiones de tres horas cada una de ellas. En el epígrafe XI.3 se han descrito las prácticas informáticas en los cinco ciclos en los cuales se han realizado, así pues, es el momento de redactar las reflexiones generales a las cuales hemos llegado:

a) La mayoría de los alumnos desconoce el PCS *DERIVE* y ello supone que el profesor debe dedicarle un tiempo a explicar las instrucciones básicas de dicho programa, en consecuencia, los progresos de los estudiantes en el manejo de *DERIVE* son muy dispares y los ritmos de ejecución de las diferentes partes de la práctica son muy distintos.

b) Los estudiantes se sienten cómodos trabajando con las nuevas tecnologías y el interés inicial por la realización de las prácticas informáticas es alto, aunque decrece rápidamente.

c) Debe existir una identificación total entre las notaciones matemáticas dadas en las clases de grupo y las subrutinas implementadas en el lenguaje informático cuando se refieren a los mismos conceptos.

d) La docencia impartida por el profesor en el aula de informática difiere sustancialmente de la impartida en la clase habitual ya que debe ser más individualizada y; además, existe una interacción muy fuerte alumno-profesor y alumno-alumno condicionada y mediatizada por las instrucciones informáticas y las respuestas obtenidas del ordenador.

e) La escritura completa y correcta de las instrucciones informáticas es dificultosa para los estudiantes, muchos consideran que es similar a la toma de apuntes o a la realización de exámenes escritos donde es habitual oír: *“Ya se entiende lo que quiero decir”.* El profesor debe hacerles comprender que el ordenador, no interpreta la voluntad del estudiante, ejecuta las órdenes que se le dan en su propio lenguaje.

f) La posibilidad de realizar varias gráficas en muy poco tiempo, o simultáneamente, hace que los alumnos, con las orientaciones del profesor, profundicen en la comprensión de los distintos conceptos matemáticos que subyacen en dichas representaciones.

g) No es aconsejable realizar las prácticas informáticas sin profundizar en el estudio y el análisis del producto final que entrega el ordenador puesto que los alumnos no ven conexión alguna entre la enseñanza tradicional y la impartida en el aula de informática; por tanto, los alumnos, con ayuda del profesor, deben descubrir las interrelaciones y complementariedades de ambas enseñanzas.

h) Los estudiantes consideran que los datos que muestra la pantalla del ordenador siempre son correctos e inapelables, no se plantean la posibilidad de la existencia de errores.

i) Los alumnos aceptan mejor las sumas de Darboux, $s(f,P_n)$ y $S(f,P_n)$, que las sumas de Riemann, $R(f,T_n)$, e incluso, algunos de ellos estiman que el área comprendida entre la gráfica de una función, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$ es $A=R(f,T_n)$, siendo el conjunto de puntos intermedios $T_n = \left\{ a + \frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n} i \right\}_{i=0}^{n-1}$.

j) Los estudiantes consideran prioritarias las particiones de un intervalo cuyos nodos consecutivos son equidistantes, otras particiones son más difíciles de comprender y asimilar.

k) Determinar una sucesión de particiones cuyos límites de sus respectivas sumas inferiores y superiores existan y no coincidan hace suponer a muchos alumnos que la función no es integrable, por tanto, no han asimilado correctamente el teorema de caracterización de las funciones integrables.

l) Para los alumnos es más fácil comprender la integrabilidad de una función $f(x)$ cuando coinciden las integrales inferior (s, extremo superior de las sumas inferiores) y superior (S, extremo inferior de las sumas superiores) que cuando se presentan dos sucesiones P_n y Q_n verificando: Existe los límites $s(f,P_n)$ y $S(f,P_n)$ y coinciden pero no existen los límites $s(f,Q_n)$ y $S(f,Q_n)$ o si existen no coinciden.

m) Los estudiantes tienen dificultades para interrelacionar los conceptos matemáticos en diferentes representaciones semióticas (externas):

lingüística, matemática e informática[76]. El lenguaje informático es difícil para los alumnos, sin embargo, su aprendizaje queda favorecido por sus conocimientos de inglés.

n) Muchos estudiantes delegan el cálculo de primitivas a la utilización de *DERIVE*, consideran innecesario aprender tablas de integrales inmediatas y el cálculo mental de primitivas elementales.

o) La representación gráfica de la función integral, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, como el área recorrida es menos aceptada que la representación determinada por los puntos *(x,F(x))*, es decir, el grafo de *F(x).*

p) Los estudiantes son reacios a anotar en el cuadernillo de prácticas informáticas sus propios descubrimientos y no consideran necesario describir las relaciones existente entre la teoría y la práctica de cada uno de los estadios de las prácticas informáticas.

q) La interacción entre los dos alumnos asignados a cada uno de los ordenadores es muy intensa y favorecedora de su propio aprendizaje; sin embargo, el profesor debe estar muy atento para que no se despisten realizando actividades que no corresponden en ese momento o que están fuera del campo de las matemáticas.

r) Según está establecido en el currículo de matemáticas de bachillerato y debido a la escasez de medios materiales es muy difícil realizar una enseñanza-aprendizaje eficaz de las matemáticas con las nuevas tecnologías, por tanto, los alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales consideran las prácticas informáticas como un mero apéndice de las clases impartidas en su aula habitual.

s) Los estudiantes agradecen la labor del profesor por introducir los PCS en el aula, sin embargo, consideramos que es insuficiente y las administraciones educativas debieran favorecer, regular y dotar de los recursos necesarios para que fuera una realidad la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con las nuevas tecnologías.

t) Hemos demostrado que las prácticas del área y la integral realizadas con *DERIVE*, por los alumnos de segundo de bachillerato de ciencias sociales, favorecen la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; así queda constatado en el presente capítulo.

[76] Véase *III.1.8. Las representaciones semióticas de Duval* del capítulo III.

CAPÍTULO XII: CONCLUSIONES, PROPUESTA CURRICULAR Y PROBLEMAS ABIERTOS............................*643*

XII.1. INTRODUCCIÓN..**643**

XII.2. CONCLUSIONES..**644**

XII.2.1. OBJETIVO 1. HIPÓTESIS: 1.1, 1.2 Y 1.3....................................**644**

XII.2.2. OBJETIVO 2. HIPÓTESIS: 2.1 Y 2.2..**651**

XII.2.3. OBJETIVO 3. HIPÓTESIS: 3.1, 3.2, 3.3 Y 3.4..............................**656**

XII.2.4. OBJETIVO 4. HIPÓTESIS: 4.1 Y 4.2..**671**

XII.2.5. DECÁLOGO DE CONCLUSIONES FINALES...........................**675**

XII.3. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN...................**676**

XII.4. APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN.................**677**

XII.5. PROPUESTA CURRICULAR..**680**

XII.6. PROBLEMAS ABIERTOS..**684**

CAPÍTULO XII: CONCLUSIONES, PROPUESTA CURRICULAR Y PROBLEMAS ABIERTOS

XII.1. INTRODUCCIÓN

El interés general del profesor investigador por mejorar su propia enseñanza y, asimismo, el aprendizaje de las Matemáticas de los estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, como quedó constatado en el *Prólogo*, nos llevó a definir, delimitar y acotar el problema objeto de nuestra investigación: *Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías* (capítulo I).

Dicho problema, una vez estudiados los *Antecedentes* (capítulo I), debía ser investigado bajo el marco metodológico cualitativo de *investigación-acción* (capítulo II) y el marco teórico del *modelo de comprensión de Sierpinska* (capítulo III), por el cual hemos establecido los *actos de comprensión, los obstáculos y/o dificultades asociados a la integral definida* (tabla III.1.5.1*), el cálculo mental de primitivas elementales* (tabla III.1.5.2*) y la utilización del programa de cálculo simbólico DERIVE* (tabla III.1.5.3*)*, de los estudiantes de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales.

Realizadas las correspondientes investigaciones teórica y experimental, a lo largo de varios cursos académicos, procede en estos momentos redactar las *Conclusiones* a las cuales hemos llegado. Sin embargo, consideramos que esto es insuficiente y, en consecuencia, también determinamos las *Limitaciones y Aportaciones* de esta investigación; además, realizamos una *Propuesta Curricular* para la enseñanza-aprendizaje de la integral definida a estudiantes de Bachillerato y, por último, especificamos un conjunto de *Problemas Abiertos* derivados de esta larga y laboriosa investigación en Didáctica de la Matemática.

XII.2. CONCLUSIONES

Muchas de las conclusiones están implícitas y dispersas en las distintas y múltiples *Reflexiones* de los capítulos precedentes, además, del *Análisis (de las producciones de los estudiantes) según los actos de comprensión de Sierpinska* de los ciclos de exploración (capítulo VII), confirmación (capítulo VIII), consolidación (capítulo IX) y cierre (capítulo X) y del *Análisis de la utilización de DERIVE según los actos de comprensión de Sierpinska* (capítulo XI). Sin embargo, no todas están incluidas en los apartados mencionados anteriormente, también debemos extraerlas de los seis primeros capítulos de esta memoria.

En el *Prólogo* quedó establecido el objetivo básico y fundamental de nuestra investigación en didáctica de la matemática[1]: *"Investigar los aprendizajes que se producen en los estudiantes de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales sobre la integral definida al integrar docencia tradicional, cálculo mental y nuevas tecnologías".* Este objetivo ha generado cuatro *Objetivos Generales* los cuales han sido determinados en el apartado I.5 (capítulo I) y asociados a cada uno de ellos se encuentran las *Hipótesis* del apartado III.3 (capítulo III). Por tanto, después de redactar cada uno de los objetivos generales con sus correspondientes hipótesis, determinamos las principales conclusiones a las cuales hemos llegado en esta investigación-acción[2]. Además, debido a la gran cantidad de conclusiones, las resumimos todas ellas en un decálogo de conclusiones finales.

XII.2.1. OBJETIVO 1. HIPÓTESIS: 1.1, 1.2 Y 1.3

Objetivo 1: *Analizar el desarrollo epistemológico de la integral y diferentes conceptualizaciones de la misma con el fin de establecer conexiones con el currículo actual y fundamentar la docencia y la investigación.*

Nuestra investigación cumple este primer objetivo y pensamos que el análisis del desarrollo epistemológico de la integral es suficiente, veámoslo en las conclusiones asociadas a las hipótesis de dicho objetivo:

[1] Véase la *Figura 0. Esquema de la investigación.*

[2] Los *objetivos*, las *hipótesis* y las *conclusiones* forman un diagrama en árbol. Es decir, los *objetivos* son reconocidos con un único dígito; las *hipótesis* con dos dígitos, el primero de ellos coincide con el del objetivo del cual procede y el segundo con el ordinal que le corresponde dentro de su propio grupo y, por último, cada una de las *conclusiones* tiene tres dígitos, los dos primeros coincidentes con el objetivo-hipótesis del que forma parte y el tercero con el ordinal del grupo en la cual ha sido ubicada.

Hipótesis 1.1: *El concepto de integral definida ha surgido de múltiples trabajos, de matemáticos muy ilustres, realizados durante veintitrés siglos.*

Conclusión 1.1.1: *Los científicos de la Grecia Clásica, entre los que destacamos a Arquímedes, se interesaron por la resolución de los problemas de cuadraturas y cubaturas.*

En el apartado *V.2.2. Edad Antigua y Edad Media* (véase el capítulo V y el anexo B) ha quedado constatado que los griegos en el siglo V a. C., a diferencia de los egipcios y babilonios, fueron los primeros que se plantearon la resolución teórica del cálculo de áreas y volúmenes; además, uno de sus mayores retos fue la cuadratura del círculo[3]. Hipócrates de Chíos calcula la superficie de las lúnulas, Demócrito determina el volumen del cono y del cilindro. Eudoxo, en lugar de utilizar procedimientos de aproximación por defecto o por exceso, propuso el *método de exhausción* que, generalmente por doble reducción al absurdo, permite, por ejemplo a Euclides en sus *Elementos*, calcular diferentes áreas y volúmenes. Arquímedes determina multitud de cuadraturas, entre ellas la de la parábola, y cubaturas también mediante la *exhausción*[4]*;* asimismo, este excepcional científico descubrió la relación existente entre la esfera de radio r, el cono cuyo radio de su base es r y altura 2r y el cilindro de radio r y altura el doble del radio[5] .

En la Edad Media encontramos a Oresme que, bajo un incipiente sistema de coordenadas, establece gráficamente la relación velocidad-tiempo.

Conclusión 1.1.2: *En el Renacimiento, con la vuelta a la antigüedad clásica, se retoman los problemas de cuadraturas y cubaturas y, ya en el Barroco (1600-1750), se dan soluciones particulares con métodos muy ingeniosos; además, se generalizan muchos resultados y Barrow culmina este periodo al establecer el Teorema Fundamental del Cálculo.*

En el punto *V.2.3. Del Renacimiento hasta Barrow* (capítulo V y anexo B) hemos reconocido a Stevin como el primer científico de este periodo que evitó el método de la exhausción para calcular el centro de gravedad de un

---

[3] Lindemann demostró, en 1882, que π es trascendente; en consecuencia, no es posible construir con regla y compás un círculo y un cuadrado con el mismo área.

[4] Arquímedes también demostró la cuadratura de la parábola mediante *El Método* [*Mecánico*], siendo obviado en esta memoria.

[5] La relación entre las tres figuras es 2:1:3. La demostración, por indivisibles, dada por Cavalieri de tal relación podemos encontrarla en el apartado *V.2.3. Del Renacimiento hasta Barrow* (anexo B).

triángulo. Kepler determinó el área del círculo y la elipse, y Galileo, retomando a Oresme, formalizó la *"Ley de caída libre de los cuerpos".*

Cavalieri, por medio de los *indivisibles*, calcula la superficie de la elipse, el volumen del cono y de la esfera. Roberval, Descartes y Torricelli realizan investigaciones y obtienen diversos resultados, entre otros, la determinación de la cuadratura de la cicloide y la parábola. Fermat, St. Vincent, Gregory, Huygens y Mercator también realizan investigaciones dignas de mención.

Pascal se aproximó al cálculo integral y de él partió Leibniz para configurar su teoría de la integral. Wallis aborda la integración geométricamente.

Isaac Barrow es el primer científico que, sin ser consciente de ello, relaciona el problema de las tangentes con el de las cuadraturas (véase la figura V.2.3 del capítulo V y la correspondiente demostración del teorema fundamental del cálculo realizada por Barrow) y poco después, de la mano de Newton y Leibniz, se establecen los fundamentos de la integración.

Conclusión 1.1.3: *Newton y Leibniz son los grandes genios que iniciaron el cálculo integral y sus avances en este campo fueron espectaculares.*

Newton dio un método general para el cálculo de áreas mediante la suma infinita de áreas infinitesimales, lo cual supuso que todos los procedimientos particulares y, generalmente, muy artificiosos fueran innecesarios para el cálculo de áreas pues su método englobaba y superaba a todos ellos (véase la figura V.2.4.1 del anexo B y la demostración analítica del teorema fundamental del cálculo realizada por Newton[6]). Simultáneamente, Leibniz establece la notación por la cual el avance del cálculo integral fue espectacular en muy pocos años, favorecido por las investigaciones de, entre otros, la familia Bernoulli y Euler.

Laplace, Fourier y Gauss obtienen resultados en el campo de las integrales que superan ampliamente el problema primitivo del cálculo de áreas; los cuales permiten avanzar, entre otros, en el estudio de las probabilidades y en el problema físico de la difusión del calor.

Así ha quedado visto en *V.2.4. Desde Newton y Leibniz hasta el concepto integral* (capítulo V y anexo B) y, a su vez, esto crea la necesidad de establecer una nueva teoría matemática la cual nos adentra en la siguiente:

[6] Newton utiliza por primera vez los momentos, en lenguaje actual incrementos, para demostrar dicho teorema.

Hipótesis 1.2: *Existen diferentes conceptos de integral definida debidos a la concepción de diversos tipos de sumas considerados en su definición.*

El cálculo integral ha adquirido tal magnitud, en el primer cuarto del siglo XIX, que ya no es posible considerar los resultados dispersos y, después de la *aritmetización* del cálculo realizada por Newton y Leibniz, se creó la necesidad de establecer la teoría o teorías de la integral.

Conclusión 1.2.1: *Las primitivas teorías de la integral priorizan el eje de abscisas sobre el eje de ordenadas.*

No existe una única teoría de la integral, la primera que podemos considerar como tal se debe a Cauchy (1823), seguida de la de Riemann (1854) y Darboux (1875)[7]; además de otras más modernas, entre las que destacamos la de Riemann-Stieltjes y Bourbaki-Diedonné[8]. Todas estas teorías tienen en común que establecen inicialmente una partición $P=\{a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b\}$ del intervalo cerrado y acotado [a,b] y, de ahí, dando unas condiciones iniciales a la función $f(x)$ definida en el compacto [a,b], por procedimientos varios se establece cada una de las teorías de la integral mencionadas anteriormente (véase el anexo B).

Conclusión 1.2.2: *Las teorías más avanzadas de la integral priorizan el eje de ordenadas sobre el eje de abscisas y, actualmente, son reconocidas como "teoría o teorías de la medida".*

En un principio se consideró que las integrales de Riemann y Darboux[9] de la conclusión anterior eran suficientes, sin embargo, determinados problemas constataron las carencias de las mismas (véase *V.2.5.6. Hacia la teoría de la medida* en el anexo B) y se hizo necesario ampliarlas.

El concepto de conjunto medible, establecido por Jordan y mejorado por Borel, fue el punto de partida para que Lebesgue (1902) definiera su propia integral. La diferencia sustancial de esta integral con las anteriores es que, retornando a los conceptos clásicos de longitud y área, Lebesgue toma una partición $P=\{m=m_0<m_1<...<m_{n-1}<m_n=M\}$ del intervalo [m,M] del eje de ordenadas, siendo $m\leq f(x)\leq M$ en [a,b], y procede a definir su integral.

[7] *V.2.5.1. Integral de Cauchy*, *V.2.5.2. Integral de Riemann* y *V.2.5.3. Integral de Darboux* (anexo B).

[8] *V.2.5.4. Integral de Riemann-Stieltjes* y *V.2.5.5. Integral mediante funciones escalonadas y regladas* de Bourbaki-Diedonné (anexo B).

[9] Dichas integrales son equivalentes, véase *V.4.1.3. Integral de Darboux versus Integral de Riemann.*

La formalización de la integral propuesta por Lebesque parte en cierta medida de los orígenes gráficos, sin embargo, en la actualidad se define de forma axiomática y es reconocida como *teoría de la medida* (véase *V.2.5.7. Integral de Lebesgue. Teoría de la medida* en el anexo B)[10].

Conclusión 1.2.3: *La integral de Darboux es apropiada y suficiente para realizar la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida con alumnos de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales.*

Somos conscientes de que las distintas teorías de la integral no pueden ser explicadas en Bachillerato. La legislación actual (*IV.1. Legislación)* y los contenidos de los libros de texto (*saber institucionalizado*, véase *III.1.6. La transposición didáctica de Chevallard*) establecen que la integral definida, reconocida comúnmente como integral de Riemann[11], debe ser objeto de estudio en segundo de Bachillerato (véase: *I.4. Delimitación del problema de la investigación, IV.2.2. Análisis curricular del concepto* y *anexo A)*.

La integral de Darboux (al establecer las sumas inferiores y superiores y, de ahí, las integrales inferior y superior de Darboux), es más fácil, completa y precisa que la integral de Riemann (debido a la imprecisión de los puntos intermedios asociados a una partición y a la dificultad en establecer su propia definición) para que los estudiantes de Bachillerato adquieran mejor el concepto de integral definida y, al ser ambas equivalentes (*V.4.1.3. Integral de Darboux versus Integral de Riemann*), damos cumplimiento al mandato establecido por la legislación vigente. Las restantes teorías de la integral quedan descartadas en la enseñanza media.

Hipótesis 1.3: *Los libros de texto de Bachillerato no contienen la epistemología de la integral definida y la construcción del concepto es confusa y muy pobre, si es que aparece.*

Nuestra amplia experiencia docente en Bachillerato nos permite manifestar que los diferentes libros de texto de MACS II dan un tratamiento insuficiente a la integral definida y en nuestra investigación hemos llegado a:

---

[10] La *teoría de la medida* en el contexto de la enseñanza actual está ubicada en los estudios superiores o universitarios.

[11] Los autores de los textos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (MACS II), por regla general, reconocen a la Integral Definida como Integral de Riemann y, constatamos, que en multitud de ocasiones confunden la integral de Daboux con la de Riemann. Es decir, no identifican correctamente ambas integrales y, por tanto, la ausencia de discriminación entre ellas es manifiesta.

Conclusión 1.3.1: *La epistemología del cálculo integral es ignorada o tratada muy superficialmente en los actuales libros de texto de MACS II.*

En el capítulo IV hemos establecido las *categorías de contenido matemático* (por las cuales hemos analizado once libros de texto de MACS II)[12] y, entre ellas, *la motivación por la introducción histórica (de la integral)* que confirma esta conclusión (véase *IV.2.3.9. MO: Motivación*) ya que únicamente dos manuales (Casals y Edebé) realizan un somero estudio epistemológico del área y la integral.

La epistemología de la integral es el nexo de unión entre las generaciones pasadas y la presente y es la mejor forma de comprender la necesidad de medir superficies (*IV.2.4. Reflexiones*, punto h)). Por tanto, es aconsejable en la docencia actual, con estudiantes de Bachillerato, realizar un breve estudio epistemológico del área y la integral definida el cual puede ser una transposición didáctica (*saber enseñado*) de *V.2. Epistemología del cálculo integral (anexo B)* y que concluye con *V.2.6. Síntesis y conclusiones epistemológicas* (Capace y Arrieche, 200, págs. 48-51); sin embargo, se percibe que los alumnos de sociales no muestran interés por la introducción histórica de la integral (*IX.3.2. Reflexiones de la acción,* punto d)).

Conclusión 1.3.2: *La construcción del concepto integral definida en los actuales libros de texto de MACS II, si existe, es confusa y no favorece la comprensión y el aprendizaje de los estudiantes.*

De nuevo, en el capítulo IV ha quedado constatado que el tratamiento curricular dado a la integral en los once manuales de MACS II analizados en esta memoria es insuficiente en las tres cuartas partes de los libros de texto[13] (véase *IV.2.2. Análisis didáctico de los libros de texto, IV.2.3. Tablas resumen de los textos/categorías* y *anexo A*).

El hecho más significativo que hemos encontrado en este análisis es que la integral de Darboux no se menciona y mucho menos llega a construirse; asimismo, la integral de Riemann[14] la establecen algunos textos mediante

[12] Los libros de texto de MACS II, reconocidos por sus editoriales, son: Anaya, Casals, Donostiarra, Ecir, Edebé, Edelvives, Editex, Hespérides, Marfil, McGraw-Hill y SM.

[13] Estableciendo una puntuación de 0 a 100, los únicos textos que alcanzan o superan los 50 puntos son: SM (64), Casals (54) y Edebé (50).

[14] La ausencia de identificación y discriminación de las integrales de Riemann y Darboux ha sido mencionada en la conclusión 1.2.3 y en la nota al pie de página nº 11.

sumas inferiores y superiores y tomando los límites, a pasar de que “la noción de límite lleva consigo graves dificultades de comprensión” (Blázquez, 1999, pág. 429), de dichas sumas sin detallar suficientemente la sucesión de particiones ni los diámetros de las mismas; ningún autor define la integral inferior como el extremo superior de las sumas inferiores ni la integral superior como el extremo inferior de las sumas superiores (véase *IV.2.4. Reflexiones*, punto c)).

Conclusión 1.3.3: *Los estudiantes comprenden y aprenden mejor la integral definida si se construye una secuencia didáctica adecuada.*

Quedó establecido en la última reflexión del capítulo IV que *“hay que construir una secuencia didáctica adecuada”* y, este mandato, se ha cumplido elaborando la unidad didáctica *Área e Integral* del capítulo V. Si bien es cierto que nuestra propuesta didáctica podemos considerarla como el *saber institucionalizado,* no es menos cierto que el *saber enseñado* impartido por el profesor investigador en los seis ciclos que componen la investigación no difiere en demasía de lo establecido en los epígrafes *V.3. El área como límite*[15] y *V.4. Integral definida en MACS II*[16]*;* sin embargo, la introducción histórica de la integral y la integración numérica realizada en las prácticas informáticas con el programa de cálculo simbólico *DERIVE* sí han sufrido restricciones y readaptaciones importantes partiendo de la propuesta inicial contemplada en *V.2. Epistemología del cálculo integral (anexo B)* y *V.5. Integración numérica.*

Adelantándolos a las conclusiones posteriores, afirmamos que *el saber de los alumnos* es muy dispar y, por lo general, muestran muy poco interés por la epistemología del cálculo integral y consideran que no es necesario establecer el área del rectángulo; sin embargo, la formalización de la integral de Darboux, las demostraciones de los teoremas de Lagrange y fundamental del cálculo[17] y el establecimiento de las propiedades de la integral definida arrojan un saldo positivo en el aprendizaje de los estudiantes[18].

[15] El apartado *V.3.2.1. Longitud de la circunferencia* no ha sido explicado en ningún ciclo.

[16] No se ha explicado el epígrafe *V.4.1.3. Integral de Darboux versus integral de Riemann,* el profesor investigador se ha limitado a afirmar que *“ambas integrales son equivalentes”.*

[17] Si $f(x)$ es una función integrable en $[a,b]$ y $G(x)$ es una primitiva suya en este intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

[18] *Del saber sabio al saber del alumno,* véase en *III.1.6. La transposición didáctica de Chevallard.*

Las conclusiones establecidas anteriormente derivan del primer objetivo y las hipótesis asociadas a él; además, podemos considerarlas dentro de los *fundamentos teóricos de la investigación*[19]. Sin embargo, pensamos que los *fundamentos prácticos de la investigación* o la *experimentación* es la parte que suscita mayor interés en la presente memoria, así pues, el resto de las conclusiones se refieren a cada una de las partes que componen la denominación de esta tesis doctoral: *Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías*, especificadas en tres objetivos generales y varias hipótesis asociadas a cada uno de ellos.

Sabemos que el marco teórico bajo el cual se ha realizado esta investigación es el *modelo de Sierpinska* (véase *III.1.5. El modelo de comprensión de Sierpinska)* y, como tal, se han establecido los *actos de comprensión, los obstáculos y/o dificultades asociados a la integral definida (tabla III.1.5.1), el cálculo mental de primitivas elementales (tabla III.1.5.2) y la utilización del programa de cálculo simbólico DERIVE (tabla III.1.5.3)*. Por tanto, en las conclusiones, que se determinen a partir de estos momentos, certificaremos las aseveraciones que hagamos con los correspondientes códigos (entre paréntesis) de los actos de comprensión y obstáculos establecidos en las tablas mencionadas anteriormente, así como las referencias según el índice establecido (también entre paréntesis) de los epígrafes que las sustentan.

XII.2.2. OBJETIVO 2. HIPÓTESIS: 2.1 Y 2.2

Objetivo 2: *Descubrir los logros y las dificultades que tienen los estudiantes al resolver mentalmente integrales indefinidas sencillas, que sean muy parecidas a las que figuran en las tablas de primitivas.*

En todos los ciclos de la investigación, salvo en el primero (*VII.5. Reflexiones del ciclo de exploración,* punto i))[20], se puso en práctica el cálculo mental de primitivas elementales en las sesiones de aula de los ciclos de confirmación (II y III), consolidación (IV y V) y cierre (VI) y, además, se hicieron pruebas escritas de resolución de integrales inmediatas[21]. He aquí las conclusiones de las hipótesis que componen este objetivo:

---

[19] Véase en el *Prólogo* la *Figura 0. Esquema de la investigación.*

[20] Para abreviar el texto, en la mayoría de las ocasiones, cuando tengamos que referirnos a situaciones de este tipo escribiremos (VII.5, i))

[21] Exclusivamente, en el ciclo de cierre también se realizó una prueba escrita de derivadas (X.1.1.40).

Hipótesis 2.1: *Los estudiantes pueden calcular muchas primitivas mentalmente, aunque pueden tener ciertas dificultades.*

Conclusión 2.1.1: *Los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales son reacios a aprender cualquier tabla de primitivas inmediatas, además, en multitud de casos desconocen el tipo de función integrando.*

Ha quedado constatado que más de la mitad de los alumnos no comprenden ni aprenden las tablas de derivadas e integrales inmediatas del libro de texto (OM_7 y OM_9), otros desconocen el tipo de función integrando (OM_4) y, en consecuencia, cometen errores en el cálculo de primitivas inmediatas (véase la *Descripción de la acción y las reflexiones* de los capítulos VIII, IX y X y anexos G y H). Además, la inseguridad de los estudiantes en la derivación, e incluso la confusión de algunos de ellos entre derivación e integración (OM_3 y OM_{10}), supone que sus avances en el cálculo de primitivas sean limitados y; sobre todo, obtengan resultados muy dispares entre unos y otros alumnos.

Conclusión 2.1.2: *Los alumnos de Bachillerato de Ciencias Sociales no están acostumbrados al cálculo mental de primitivas elementales.*

Los textos de MACS II, salvo Casals (IV.2.2 y anexo A), no contemplan el cálculo mental de primitivas (*IV.2.4. Reflexiones*, f)); en las investigaciones previas efectuadas por el profesor investigador no se ha encontrado literatura científica en la que se describan experiencias del cálculo mental de primitivas, por tanto, consideramos que nuestra investigación en este tópico es la primera con estas características (véase *I.3.3. Cálculo mental*).

Así pues, parece lógico que en un principio los estudiantes, en general, sean reacios a realizar cálculos mentales de primitivas elementales y, además, consideran que dicha actividad exige un gran esfuerzo intelectual en coordinar los operadores derivación e integración y, en consecuencia, es muy fácil cometer errores (OM_8). Estos estudiantes piensan que sus propios avances son discretos a pesar del tiempo dedicado a esta actividad (*X.5.2.1. Cálculo mental de primitivas,* ítems: 1.1, 1.2, 1.4 y 1.10).

Conclusión 2.1.3: *Los estudiantes aplican pseudopropiedades al cálculo mental de primitivas elementales.*

No podemos estar más de acuerdo con Brousseau (1983) cuando afirma que entre las características de los obstáculos están “los errores producidos que son resistentes a la corrección, no son esporádicos y suelen repetirse en situaciones análogas” (I.3.4 y III.1.3). En nuestra investigación, a pesar de las múltiples ocasiones en las cuales se han corregido los errores, queda constatado que son innumerables las ocasiones en las cuales los alumnos consideran que la integral de producto (cociente) es el producto (cociente) de la integrales (OM_6).

Pocos estudiantes reconocen e identifican las funciones más usuales: polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc. (CM_4) y, como tal, son muchos los que errores cometidos al manipularlas y, asimismo, las dificultades con las que se encuentran son incontables. No discriminar constantes, parámetros y variables es muy común entre los alumnos; no haber sintetizado la “regla de la cadena” conduce a errores tales como: $\int \cos(2x)dx = sen(2x) + k$, $\int e^{3x} dx = e^{3x} + k$, etc. (consúltese, entre otros, la tabla *X.3.1.1. Errores más comunes en el cálculo mental de primitivas inmediatas* del apartado *X.3.1.1. Cálculo mental* y la parte dedicada al cálculo de primitivas (CP) de los apartados *VIII.4.4, IX.4.4. y X.4.4. Análisis según los actos de comprensión de Sierpinska*).

Conclusión 2.1.4: *El cálculo de primitivas elementales es difícil para la mayoría de los alumnos y los resultados son muy dispares.*

Pensamos que muchas de las justificaciones de la conclusión anterior sirven para ésta y recíprocamente; además, podemos añadir a las anteriores un sinfín de razones por las cuales hemos llegado a esta conclusión como ha quedado constatado en las *Reflexiones de la acción* (véase VIII.3.2, puntos g), h) e i); IX.3.2, puntos g), h), i), j) y k) y X.3.2, puntos g), h), i), j) y l)); en la categoría de comprensión matemática *CP: Cálculo de primitivas* (VIII.4.1.17, IX.4.1.13 y X.4.1.40); en el epígrafe *X.3.1.1. Cálculo mental;* en las *Tablas resumen de las categorías de comprensión matemática* (VIII.4.2, IX.4.2 y X.4.2); en la parte final del *Análisis según los actos de comprensión de Sierpinska* (VIII.4.4, IX.4.4 y X.4.4) y en las *Reflexiones generales de los ciclos de confirmación, consolidación y cierre* (VIII.5, IX.5 y X.6).

Según el marco metodológico de investigación-acción (capítulo II) utilizado en nuestra investigación, habiendo llegado a la saturación, nos permite resumir los actos de comprensión y los obstáculos del cálculo de primitivas en los siguientes términos (VII.4.4 y X.4.4): el cálculo mental de primitivas elementales exige a los estudiantes un alto nivel de concentración (OM_8) y que los estudios previos al cálculo integral debe permitirles discriminar diferentes tipos de funciones para poder calcular integrales inmediatas (CM_4); sin embargo, los resultados generales alcanzan niveles discretos (CM_5, CM_6, CM_7, CM_8, CM_5 y CM_{10}).

Concluimos con una dura reflexión: "El cálculo mental de derivadas y primitivas elementales (CP) es muy difícil, para los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales del ciclo de cierre..." (X.4.3, punto r)).

Conclusión 2.1.5: *El profesor valora el esfuerzo de los alumnos al realizar cálculo mental de primitivas y considera que favorece la concentración y el aprendizaje de los estudiantes.*

Después de más de un cuarto de siglo de experiencia docente, afirmamos que la mayoría de los estudiantes se han esforzado en esta actividad, han sido muy activos en los minutos iniciales de las clases dedicados al cálculo mental, incluso en algunos momentos irreflexivos en sus respuestas debido a la precipitación de las mismas (véase, entre otros, la *Acción* en VIII.3, IX.3 y X.3). Sin embargo, constatamos que ellos mismos son muy rigurosos al evaluar su propio interés y aprendizaje valorándolo con un nivel medio (véase *X.5.2.1. Cálculo mental* del apartado *X.5.2. Encuesta a los alumnos*).

Hipótesis 2.2: *El cálculo mental de primitivas afianza a los alumnos en la comprensión del teorema fundamental del cálculo.*

Conclusión 2.2.1: *El teorema fundamental del cálculo, en Bachillerato, se aplica a funciones elementales y una forma rápida de comprobar la solución es por medio del cálculo mental.*

Establecida la necesidad del cálculo de primitivas derivada del teorema fundamental del cálculo y, para no distorsionar las matemáticas, éstas deben ser sencillas (Ortega, 2004)[22]; así pues, el cálculo de primitivas inmediatas se ha realizado combinando la técnica de lápiz-papel y el cálculo mental.

Entendemos que antes de calcular la diferencia de la primitiva en los extremos de la integración, los estudiantes han de comprobar mentalmente que dicha función es una primitiva de la función integrando. Así ha quedado confirmado en las diferentes sesiones, de los distintos ciclos de la investigación, en las cuales se han resuelto problemas del cálculo de áreas

[22] Véase *I.3.1. El concepto de integral definida* en la sección *I.3. Antecedentes en la investigación.*

siendo las funciones integrando muy sencillas, tales como: polinómicas, racionales, potenciales, exponenciales y trigonométricas elementales[23].

Consideramos que si es difícil el cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental, aún más lo es resolver mentalmente integrales indefinidas. Nuestra propuesta alternativa y complementaria por la cual hemos optado es el "cálculo estimativo" de áreas mediante la representación de las superficies respectivas y, en consecuencia, ver la concordancia de los resultados estimados con los obtenidos por procedimientos algebraico-numéricos (véanse las figuras IX.3.1.2 y IX.3.1.3 y la explicación de las mismas y, sobre todo, el epígrafe *X.3.1.2. Cálculo estimativo y cálculo de áreas*). Podemos afirmar que la breve investigación realizada en "cálculo estimativo" favorece la comprensión del teorema fundamental del cálculo y, a su vez, hace que los estudiantes se sientan seguros cuando los datos calculados no difieren en demasía con los estimados (X.3.2, punto o) y X.6, b)).

Conclusión 2.2.2: *El cálculo mental de primitivas elementales es una experiencia positiva que favorece la atención y el aprovechamiento de los alumnos de ciencias sociales.*

El equipo investigador considera que, con los datos obrantes en esta investigación (capítulos VIII, IX y X y anexos G, H e I), los estudiantes se sienten motivados y expectantes al calcular mentalmente primitivas elementales en las distintas sesiones de aula; además, muestran cierta competitividad entre ellos que favorece su propio aprendizaje. Sin embargo, estos mismos estudiantes perciben que en las pruebas escritas del cálculo de primitivas los resultados son inferiores a los esperados (X.6, m) y n)).

Acabamos de determinar, asociadas al segundo objetivo, las conclusiones más importantes a las cuales hemos llegado en nuestra investigación al realizar los alumnos el *cálculo mental* de primitivas elementales.

El tercer objetivo, dedicado a la enseñanza y el aprendizaje de la *integral definida* de los estudiantes de ciencias sociales, es prioritario y, asimismo, central puesto que él sustenta la mayor parte de la experimentación, tiene el mayor número de hipótesis asociadas y, a su vez, generan la mayor cantidad de conclusiones; además, el resto de los objetivos podemos considerarlos secundarios con relación a éste.

[23] Algunos alumnos desconocen las funciones circulares y logarítmicas por haber cursado en 4º ESO matemáticas, opción A, o un programa de diversificación (X.6, a)).

XII.2.3. OBJETIVO 3. HIPÓTESIS: 3.1, 3.2, 3.3 Y 3.4

Objetivo 3: *Explorar desde una perspectiva investigadora los aprendizajes que se producen en los estudiantes en el estudio de la integral definida utilizando los soportes clásicos: libro de texto, toma de apuntes y resolución de problemas con lápiz y papel.*

Para evaluar los logros alcanzados en este objetivo nos remitimos a los capítulos VII, VIII, IX y X y anexos G y H, en los cuales se han descrito las distintas fases de los seis ciclos de investigación-acción y, sobre todo, se han analizado los cuadernillos de las actividades teórico-prácticas del área y la integral definida cumplimentados por los estudiantes.

Hipótesis 3.1: *Los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales tienen serias dificultades en el aprendizaje del concepto integral definida.*

Conclusión 3.1.1: *Los alumnos no muestran interés por la epistemología del cálculo integral.*

Los estudiantes consideran que carece de importancia la evolución histórica del pensamiento matemático a lo largo de los siglos y, en consecuencia, ninguno de ellos muestra interés alguno por los científicos que se plantearon el problema clásico de las cuadraturas y los que fundamentaron la teoría inicial de la integral definida (IX.3.2, punto d) y X.3.2, a)).

Afirmamos que los alumnos, en general, consideran las matemáticas como una disciplina abstracta, impersonal e intemporal ajena a los avatares científico-históricos que han determinado su evolución; al menos así ocurre con el concepto de integral definida. Por tanto, admiten que existe un *saber sabio* sin preocuparse de cómo se ha llegado a él y su interés radica, más que en la fundamentación teórica, en la aplicación práctica de dicho saber al transformarse en *saber enseñado* (III.1.6; IX.3.2, b) y X.3.2, a)).

Conclusión 3.1.2: *Las fórmulas que determinan el área del rectángulo y el círculo son aceptadas como axiomas y, en consecuencia, los alumnos no consideran necesario la justificación de las mismas.*

Por lo general, los estudiantes de bachillerato de sociales han interiorizado desde sus estudios de educación secundaria obligatoria las fórmulas de las áreas de las superficies más comunes (cuadrado, rectángulo, triángulo y círculo) y en ningún momento consideran necesario volverlas a establecer

(VII.3.2, b); VIII.3.2, d); IX.3.2, e) y X.3.2, a)). El desconocimiento de la tipología numérica de la recta real (OI_4) y de las propiedades de los números racionales e irracionales (X.4.3, e)) suponen que los estudiantes consideren difícil la justificación del área del rectángulo (CI_4) y, además, la ausencia de síntesis de las funciones circulares y las dificultades intrínsecas del álgebra de límites son obstáculos para determinar el área del círculo (OI_{19a} y OI_{19b}).

Conclusión 3.1.3: *Los estudiantes obtienen mejores resultados en la comprensión gráfica de las sumas inferiores y superiores de Darboux que en la comprensión analítico-algebraica de dichas sumas.*

El análisis de las producciones de los alumnos arroja niveles superiores en los registros gráficos frente a los analítico-algebraicos, a pesar de que en estos últimos las instrucciones eran muy precisas y, básicamente, consistían en completar algunos sumandos de las sumas de Darboux (véase la comparación de las *categorías gráficas y analíticas* en VII.4.2. Además, puede consultarse: VII.5, d) y f); VIII.3.2, m); VIII.4.2, a), b) y c); VIII.4.3, b); VIII.5, d); IX.4.3 a), e), f), h), i) y j); X.3.2, e) y X.4.3, a), b), c), f) y g)).

Si consideramos los cuadernillos teórico-prácticos, las sumas de Darboux han sido determinadas para una función genérica *ƒ(x)* continua y positiva en [*a,b*], la función de Dirichlet $g(x)=\begin{cases}1 & si\ \ x\ \ es\ \ racional\ \ en\ \ [0,1]\\ 2 & si\ \ x\ \ es\ \ irracional\ \ en\ \ [0,1]\end{cases}$ y la función afín *h(x)*=*x* en [0,1][24]. He aquí algunos de los resultados obtenidos en nuestra investigación:

- Los estudiantes identifican una superficie delimitada por la gráfica de la función *ƒ(x)*, el eje *OX* y las rectas $r_1=a$ y $r_2=b$ (CI_{11}); también lo consiguen, al menos gráficamente, con las sumas inferior y superior de Darboux (CI_{12}, CI_{14} y CI_{16}). Además, el control gráfico de *s(ƒ,P)* y *S(ƒ,P)* supone que, asimismo, los alumnos identifiquen y discriminen los extremos absolutos de la función *ƒ(x)* en los subintervalos $[x_{i-1},x_i]$ que determinan la partición *P* (CI_{14}); (VII.4.3 y VIII.4.4).
- Un obstáculo importante es la representación de la función *g(x)* (OI_{21}); sin embargo, los resultados mejoran cuando los alumnos identifican y discriminan, gráficamente y analíticamente, las sumas inferiores y superiores de la función de Dirichlet (CI_{16}); (IX.4.4).

[24] Seguimos con el criterio: *"A funciones distintas, nombres distintos"*. Véase, entre otros, X.3.2, m).

- Los alumnos representan la función afín *h(x)* sin mayores dificultades (CI_{11}). Identificar y discriminar analíticamente los extremos absolutos de dicha función en los subintervalos [i/4;(i+1)/4]; i=0,...,3; así como determinar sus respectivas sumas inferiores y superiores es muy difícil para siete de cada diez alumnos (OI_{14} y OI_{16}). Si el profesor escribe algún término de las expresiones $s(h,P_8)$ y $S(h,P_8)$, siendo P_8={i/8}; i=0,...,8; entonces les resulta más fácil generalizar las respectivas sumas inferiores y superiores (CI_{14}, CI_{15} y CI_{16}); (X.4.4).

Conclusión 3.1.4: *Los ejemplos de funciones integrables y no integrables Darboux, según la definición de integrabilidad por la cual una función es integrable Darboux cuando coinciden las integrales inferior y superior de Darboux, son difíciles de comprender.*

Todos los estudiantes en un principio, antes de cumplimentar el cuadernillo teórico-práctico del área y la integral, consideran que todas las funciones son integrables Darboux. Posteriormente, algunos piensan que las integrales inferior y superior de Darboux no se alcanzan, más bien, se aproximan a un valor (OI_{19a}, OI_{19b}, OI_{20a} y OI_{20b}); incluso hay quien considera, sin aplicar el teorema fundamental del cálculo, que el valor de $\int_0^1 x\,dx$ es "próximo" a 0,5 (el estudiante ha calculado previamente las integrales inferior y superior de Darboux de la función *h(x)=x* en [0,1]); (VII.4.3; VIII.3.2, e) y VIII.4.1.16).

Constatamos que uno de cada tres alumnos, de los ciclos de consolidación (IV y V), identifican y discriminan las integrales superior e inferior de Darboux de la función de Dirichlet y, consecuentemente, sintetizan la no integrabilidad de dicha función (CI_{19} y CI_{22}); (IX.4.4). Tal proporción es similar en el ciclo III y bastante inferior en los ciclos II y VI.

La cuarta parte de los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales determinan, justifican y discriminan adecuadamente las integrales inferior y superior de Darboux de la función *h(x)=x* en [0,1]; sin embargo, a pesar de los resultados anteriores, la mitad de los estudiantes justifican y sinterizan, según la definición y/o el teorema de caracterización, la integrabilidad de la función afín (CI_{19} y CI_{20}); (VIII.4.3, k)).

Las justificaciones de esta conclusión en esta memoria son muy numerosas y entre otras, además de las mencionadas, se pueden encontrar en: VIII.4.3, i); IX.3.2, s); IX.4.3, c), g) y k); IX.4.4; X.4.3, d), h) y l); X.4.4 y X.6, j).

Conclusión 3.1.5: *El establecimiento de las sumas de Riemann y la integral de Riemann comporta mayores dificultades que las respectivas de Darboux.*

Identificar y generalizar gráficamente las sumas de Riemann es fácil para un porcentaje elevado de estudiantes (CI_{23}) y, según los datos de los cuales disponemos, son más los alumnos que identifican, discriminan y generalizan las sumas de Darboux (CI_{17} y CI_{18}); además, no les resulta difícil sintetizarlas en las desigualdades $s(f,P) \le R(f,P,T) \le S(f,P)$ (CI_{24})[25]. Afirmamos que todos los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales consideran iguales la integral de Darboux y la integral de Riemann, independientemente de sus respectivas definiciones, (CI_{26}) y ambas son reconocidas como "la integral" (véanse, entre otros: VIII.3.2, e); VIII.4.3, b) y m); VIII.4.4; IX.3.2, s); IX.4.3, a) y m); IX.4.4; X.3.2, c); X.4.3, a) y n) y X.4.4).

Dando un paso más: afirmamos que los estudiantes de Ciencias Sociales se desentienden de las definiciones de las integrales de Darboux y Riemann y sólo les interesa sus aplicaciones prácticas mediante el teorema fundamental del cálculo[26] (X.3.2, punto c)), además, sabemos que ambas son equivalentes (*V.4.1. Concepto de integral definida*); así pues, el equipo investigador considera que es más fácil el concepto de integral de Darboux que el de Riemann y como tal debe explicarse la primera y no la segunda a los estudiantes de Bachillerato (véase la *conclusión 1.2.3*).

Conclusión 3.1.6: *La función integral indefinida es el concepto más difícil con el que se encuentran los alumnos de Bachillerato en la comprensión y aprendizaje de esta unidad didáctica.*

Generalizar el concepto de función área y transferirlo al concepto de integral indefinida sintetizándolo mediante la expresión $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es muy difícil para los alumnos (CI_{34}); asimismo, cuando se pide su representación gráfica como el área de la superficie delimitada por una función continua y positiva $f(x)$, el eje OX y las rectas $r_1=a$ y $r_2=x$, entonces las respuestas válidas no alcanzan a la tercera parte de los estudiantes (VII.4.3; VIII.4.3, n); IX.4.3, m); IX.4.4 y X.4.3, p)). Además, un obstáculo importante está en considerar el extremo superior de la integral igual a la variable de integración (OI_{30} y OI_{34}).

[25] Los resultados obtenidos en el ciclo de cierre en las categorías relativas a las sumas de Darboux y Riemann son más discretos que los de los demás ciclos.

[26] Reconocido como regla de Barrow *(V.4.2.2. Teorema fundamental del cálculo (Fischer)).*

Utilizando *DERIVE* para representar la función integral se constata que los alumnos comprenden, no sin cierta dificultad, que dicha función admite dos representaciones distintas bajo la misma expresión analítica, que no algebraica: como el área recorrida según se ha expresado anteriormente y la dada por los puntos *(x,F(x))*, es decir, el grafo de *F(x).* Los estudiantes aceptan mejor la segunda representación que la primera (XI.3.4.6, h); XI.4; XI.5.2, o) y anexo L).

Los ejercicios en los cuales ha de aplicarse la función integral sorprenden a los alumnos y se percibe que muchos de ellos los aceptan sin demasiada convicción (existen multitud de referencias en las diferentes *descripciones de la acción,* consideramos que el apartado *X.3.1.3. Otras aplicaciones de la integral* es muy ilustrativo).

Así pues, esta misma conclusión está en la línea de los resultados obtenidos por investigadores en didáctica de la matemática, tales como: Dubinsky (1991), Harel y Kaput (1991), Abrahamson (1998) y Cordero (2005); (*I.3. Antecedentes de la investigación*).

Conclusión 3.1.7: *Los estudiantes priorizan las aplicaciones prácticas de la integral sobre la fundamentación teórica.*

Los estudiantes de sociales consideran innecesario aprender la construcción teórica de la integral definida desde el concepto básico de área. Asimismo, muestran un bajo interés por la definición de integral de Darboux y sólo les interesa algunas aplicaciones prácticas elementales mediante el teorema fundamental del cálculo, reconocido como regla de Barrow, considerando que no es necesario aprender la demostración del mismo (IX.3.1 y X.3.2, c)).

Los alumnos piensan que es suficiente calcular áreas sencillas determinadas por superficies curvilíneas; sin embargo, calcular áreas determinadas por: funciones definidas a trozos y/o en valor absoluto o entre dos curvas es dificultoso para muchos estudiantes (IX.3.2, w); X.3.1.2; X.3.1.4; X.3.2, q); X.3.6, g) y X.6, d)). Al resolver ejercicios con *DERIVE* encontramos un obstáculo importante al calcular el área comprendida entre dos curvas, pues el algoritmo explicado y aplicado en clase de matemáticas es innecesario en clase de informática al calcular la integral definida del valor absoluto de la diferencia de las respectivas funciones; por tanto, los estudiantes consideran que los procedimientos utilizados informáticamente y con lápiz-papel son totalmente distintos y desconectados entre sí (OT_{10}); (XI.3.5, d) y XI.4).

Aún no hemos determinado todas las conclusiones derivadas de la hipótesis 3.1, pensamos que debemos completarlo al establecer las conclusiones que surgen de las otras tres hipótesis (definición de integral de Darboux, teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux y teorema fundamental del cálculo) que acompañan al segundo objetivo.

Hipótesis 3.2: *No es más fácil establecer la integral definida por límites secuenciales que mediante extremos para establecer la integral de Darboux.*

Conclusión 3.2.1: *Los alumnos consideran prioritaria la sucesión de particiones* $P_n = \left\{ a + \frac{(b-a)\cdot i}{n} \right\}_{i=0}^{n}$ *del intervalo [a,b] y otras particiones tales como, por ejemplo,* $Q_n = \left\{ a + \frac{(b-a)\cdot i}{2n} \right\}_{i=0}^{n} \cup \{b\}$ *no son fáciles de aceptar.*

El estudio de la integrabilidad y no integrabilidad de la funciones afín y de Dirichlet nos permite afirmar que los estudiantes consideran prioritarias las particiones $P_n = \left\{ a + \frac{(b-a)\cdot i}{n} \right\}_{i=0}^{n}$ y muchos de ellos no son conscientes de que puedan existir otras (VIII.4.1.6; VIII.4.1.14; IX.4.1.1; IX.4.1.5; etc.).

La práctica de la integrabilidad de la función *ƒ(x)=x²* en [1,3] realizada en los ciclos de confirmación con lápiz y papel arroja el resultado de que ocho de cada diez estudiantes no contemplan otras particiones distintas a $P_n = \{1 + 2i/n\}_{i=0}^{n}$ como pueden ser las particiones $Q_n = \{1 + i/n\}_{i=0}^{n} \cup \{3\}$; (XI.2.1, f) y g); (XI.2.2, ítems: 11, 12 y 13); (XI.2.3, ítems: 10, 11 y 12); (XI.2.4, j); XI.5.1, i) y anexo K).

Asimismo, la práctica con el programa de utilidades y programa de cálculo simbólico *DERIVE* de la misma función también nos corrobora los resultados de los párrafos anteriores (XI.3.1, b), c) y d); (XI.3.3.5, e); XI.3.4.6, b); XI.4; XI.5.2, i), j), k) y l) y anexo L).

Conclusión 3.2.2: *La desigualdad* $\lim_{n\to\infty} s(f, Q_n) \neq \lim_{n\to\infty} S(f, Q_n)$ *hace suponer a algunos estudiantes que la función ƒ(x) no es integrable en [a,b] aunque se dé la igualdad* $\lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$.

Establecer y generalizar las sumas inferiores, *s(h,Pn),* y superiores, *S(h,Pn),* de la función afín *h(x)=x* en [0,1] asociadas a la partición $P_n = \{i/n\}_{i=0}^{n}$ es muy difícil para dos tercios de los estudiantes (CI_{17}); (IX.4.3, j); X.4.1.24; X.4.1.25; X.4.3, k); IX.4.4 y IX.4.4) y, además, calcular límites de sucesiones conlleva obstáculos nada desdeñables (Blázquez, 1999).

Si consideramos la práctica de la integrabilidad de la función $f(x)=x^2$ en [1,3] realizada con lápiz-papel en los ciclos II y III, las tres cuartas partes de los estudiantes no ven factible determinar las sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a la sucesión de particiones estándar $P_n = \{1+2i/n\}_{i=0}^{n}$ y, por tanto, calcular los límites de estas sucesiones de sumas inferiores y superiores es tarea imposible. Otras particiones distintas de las anteriores no se suelen contemplar, al menos teóricamente, y menos sus sumas (inferiores y superiores) así como los límites de dichas sumas (XI.2.1, f) y g); (XI.2.2); (XI.2.3, ítems); (XI.2.4, h; i), j) y k); XI.5.1, f), g), h) e i) y anexo K).

La misma práctica con el programa de utilidades y *DERIVE* también nos confirma y amplía lo anterior (XI.3.1, b), c) y d); XI.3.3.5, e) y XI.3.4.6, b)). Finalmente, determinar la sucesión de particiones, $Q_n = \{1+i/n\}_{i=0}^{n} \cup \{3\}$, cuyos límites de sus respectivas sumas inferiores y superiores existen y no coinciden, $\lim_{n\to\infty} s(f,Q_n) \neq \lim_{n\to\infty} S(f,Q_n)$, hace suponer a muchos estudiantes que la función no es integrable (véase: la justificación de la integrabilidad dada informáticamente en XI.4; XI.5.2, i), j), k) y l) y anexo L).

Conclusión 3.2.3: *El conjunto de particiones del intervalo compacto [a,b] es no numerable, por tanto, establecer la integral de Riemann mediante la igualdad* $\lim_{d(P)\to 0} s(f,P) = \lim_{d(P)\to 0} S(f,P),$ *P partición de [a,b], no es aconsejable en Bachillerato.*

Tal definición no es de la integral de Riemann (véase V.4.1.2) y aunque dicha integral sea equivalente a la de Darboux (V.4.1.1 y V.4.1.3) pensamos que no deben confundirse. Además, los estudiantes bachilleres desconocen la teoría de los cardinales, les resulta muy difícil comprender el concepto de diámetro de una partición y consideran que solamente se pueden tomar límites de sucesiones; por tanto, mal pueden comprender el concepto de integral de Riemann definido como lo acabamos de expresar y recogido en algunos libros de texto de MACS II (IV.2.4, punto c) y anexo A).

Conclusión 3.2.4: *Se ha observado que los alumnos tienen dificultades en la comprensión de la definición de integral inferior de Darboux como el extremo superior de las sumas inferiores de Darboux (ídem integral superior de Darboux).*

Las referencias a esta conclusión en esta memoria son innumerables, he aquí tres de ellas:

- Constatamos que los alumnos de los ciclos II y III tienen dificultades para identificar y discriminar las integrales inferior y superior de Darboux. Además, confirmamos la conjetura del ciclo I por la cual estamos en condiciones de afirmar que algunos alumnos piensan que las integrales inferior y superior de Darboux de una función *ƒ(x)* en un intervalo [a,b] no se alcanzan, más bien, se aproximan cada una de ellas a un valor (OI_{19a}, OI_{19b}, OI_{20a} y OI_{20b}); (VIII.4.4).
- Uno de cada tres estudiantes identifican y discriminan las integrales superior e inferior de Darboux de la función de Dirichlet en [0,4] (CI_{19} y CI_{22}); (IX.4.4).
- Identificar y discriminar las integrales inferior y superior de Darboux de la función afín *h(x)=x* en [0,1] arroja bajos niveles de comprensión y constatamos, una vez más, que varios estudiantes consideran que las respectivas integrales inferior y superior de Darboux ($\underline{\int_0^1 x\,dx}, \quad \overline{\int_0^1 x\,dx}$) no alcanzan el valor 1/2, más bien, se aproximan a él (OI_{19a}, OI_{19b} y OI_{20a}); (X.4.4).

Otras justificaciones a esta conclusión pueden encontrarse en: VII.3.2, c); VII.4.2; VIII.3.2, e); VIII.4.3, f) y k); VIII.4.4; IX.3.2, s); IX.4.3, c) y k); X.4.3, d); X.4.4; XI.2.4, l); XI.3.4.6, d); XI.4 y XI.5.1, h).

Conclusión 3.2.5: *Los estudiantes comprenden mejor el establecimiento de la integral de Darboux por medio de la igualdad de las integrales inferior y superior de Darboux que mediante la igualdad* $\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$*, siendo la sucesión de particiones* $P_n = \left\{a + \frac{(b-a)\cdot i}{n}\right\}_{i=0}^{n}$*.*

A pesar de los obstáculos y/o dificultades de los estudiantes de sociales en la comprensión de los conceptos de integral inferior y superior de Darboux señalados en la conclusión anterior, según nuestras investigaciones, éstas son inferiores a los obstáculos y/o dificultades asociadas a la determinación de la sucesión de particiones estándar P_n del intervalo [*a,b*] (los alumnos no aceptan fácilmente otras particiones distintas a las P_n –conclusión 3.2.1–, por otro lado, es desaconsejable definir el diámetro de una partición *P* y sintetizar la integral de Darboux en la igualdad $\lim_{d(P)\to 0} s(f,P) = \lim_{d(P)\to 0} S(f,P)$ –conclusión 3.2.3–). Así pues, aunque tengamos $P_n = \{a + (b-a)\cdot i/n\}_{i=0}^{n}$, para los alumnos de sociales es muy difícil: generalizar las sumas inferiores y superiores [$s(f,P_n)$ y $S(f,P_n)$], identificar los límites de las mismas cuando $n \to \infty$ y concluir sintetizando la integral de Riemann-Darboux bajo la expresión $\int_a^b f(x)dx$ por la igualdad $\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$ (CI_{26}; V.4).

Los libros de texto de MACS II analizados en esta memoria no contemplan otras definiciones de la integral (reconocida, en ocasiones, como de Riemann y nunca como integral de Darboux)[27] distintas a las establecidas por medio de límites (capítulo IV y anexo A).

Nuestra investigación experimental nos permite concluir que generalizar las sumas inferiores y superiores de Darboux de las funciones de Dirichlet y afín es difícil para los estudiantes; si a eso le añadimos el cálculo de límites de las expresiones generales de dichas sumas entonces, para muchos alumnos, los obstáculos son insalvables (las referencias a estos resultados son innumerables en los capítulos: VII-XI).

Por tanto, el equipo investigador ha considerado que la mejor opción para definir el concepto de función integrable Darboux en un intervalo compacto [*a,b*] es mediante la igualdad de las respectivas integrales inferior y superior de Darboux (V.4.1.1), es decir:

*Sea la función f(x) acotada en [a,b], diremos que es **integrable Darboux** en* [*a,b*] *si se verifica: Extremo superior* {*s(f,P)*} = *Extremo inferior* {*S(f,P)*}; *siendo P cualquier partición de [a,b].*

Para los alumnos es fácil comprender la integrabilidad de una función *f(x)* cuando coinciden las integrales inferior (*s*, extremo superior de las sumas inferiores) y superior (*S*, extremo inferior de las sumas superiores); (XI.5.2).

[27] Ninguno de los once libros de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II analizados en el capítulo IV identifica y discrimina las integrales de Riemann y Darboux.

Hipótesis 3.3: *Los alumnos comprenden mejor el teorema de caracterización óptima de las funciones integrables Darboux que el teorema de caracterización métrica.*

En el contexto de la hipótesis anterior, consideramos que los alumnos de ciencias sociales pueden comprender, sin excesiva dificultad, que:

"*Una función f es integrable Darboux en [a,b] sií para cualquier aproximación positiva de cero, ε, existe una partición P de [a,b] tal que la diferencia entre la suma superior de Darboux relativa a P y la correspondiente suma inferior es menor que ε (exista una partición, P, tal que la diferencia entre la suma superior e inferior se aproxima a cero más que cualquier número prefijado)".*

Conclusión 3.3.1: *Los estudiantes de Bachillerato desconocen la definición weierstrassiana del límite, por tanto, la caracterización métrica de las funciones* i*ntegrables Riemann es inviable.*

Otra alternativa al concepto de función integrable Darboux es: *"Una función $f(x)$ es **integrable Riemann** en [a,b] y su integral es el número real I_R si, y solo si, para cualquier ε>0, existe un δ>0 tal que $|I_R - R(f,T,R)|<\varepsilon$, para cualquier partición P que tenga diámetro menor que δ y cualquiera que sea el conjunto de puntos intermedios T de P". Si $f(x)$ es integrable Riemann, entonces se suele denotar por* $\lim\limits_{d(P)\to 0} R(f,T,P) = I_R$ *(V.4.1.2. Integral de Riemann).*

El establecimiento de la integral de Riemann en los términos expresados en el párrafo anterior es totalmente desaconsejable para ser enseñado a los estudiantes de Bachillerato, entre otras razones, por:

- El desarrollo legislativo de la LOGSE y de la LOE por el cual se establece el currículo de MACS II y no contempla en ningún momento la definición métrica de límite (véase la sección *IV.1. Legislación*).
- Los tratamientos curriculares de cada uno de los libros de texto analizados en el capítulo IV tampoco establecen la definición de la integral de Darboux-Riemann en términos "ε-δ" (véase *IV.2. Análisis curricular del concepto*).
- Debe demostrarse o, al menos, mencionarse que el número real I_R es único y, además, sinterizarlo mediante la igualdad $I_R = \int_a^b f(x)\,dx$ (CI_{25}).

- Los conceptos de diámetro de una partición, conjunto de puntos intermedios (CI_{23}) y sumas de Riemann conllevan obstáculos mayores que los de extremos absolutos en un intervalo (CI_{14} y CI_{15}) y sumas (inferiores, superiores) de Darboux (CI_{16} y CI_{17}).

En fin, consideramos que no debemos establecer la integral de Riemann porque comporta mayores obstáculos y dificultades que la de Darboux; además, los estudiantes las consideran iguales, independientemente de sus respectivas definiciones (CI_{26}), y ambas son reconocidas como "la integral" (VIII.4.4; IX.3.2, s); IX.4.4 y X.3.2, c)).

Conclusión 3.3.2: *La intuición de los estudiantes favorece la comprensión de la expresión "aproximación al concepto de límite". Sin embargo, les resulta difícil aceptar que si la diferencia* $S(f,P_n) - s(f,P_n)$ *es tan pequeña como deseemos, entonces la función es integrable.*

La "aproximación al concepto del límite" viene recogida en la legislación vigente (*IV.1.2. LOE, extracto del Decreto 42/2008)* y, como tal, los alumnos de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales deben reconocer el límite por procedimientos de aproximación; además, han practicado el cálculo de límites en primer curso de Bachillerato y, asimismo, poco antes de estudiar la integral definida.

Dada la partición $P_n=\{i/n\}; i=0,...,n;$ del intervalo [0,1] y la función $h(x)=x$, en el cuadernillo teórico-práctico del área y la integral entregado a los alumnos, se demuestra que $S(h,P_n)–s(h,P_n)=1/n$ (VI.4.2.24 y VI.4.2.25 y anexos D y F). Sin embargo, menos de la cuarta parte de los estudiantes bachilleres justifican adecuadamente la integrabilidad de dicha función en el intervalo [0,1]; (IX.4.3, l); IX.4.4; X.4.3, m) y X.4.4).

Confirmamos, con los datos obrantes de la investigación experimental en los ciclos de consolidación y cierre (capítulos IX y X), que los alumnos tienen dificultades en la comprensión del teorema de caracterización óptima de las funciones integrables. Asimismo, también queda constatado en las prácticas descritas en el capítulo XI (véanse, además, los anexos K y L).

Pensamos que tales obstáculos y/o dificultades en la comprensión del teorema de caracterización óptima de las funciones integrables pueden ser debidos a la deficiente comprensión de los estudiantes de los conceptos que intervienen en dicho teorema y, posiblemente, agravado por las imprecisas instrucciones dadas en el cuadernillo teórico-práctico del área y la integral.

Hipótesis 3.4: *Es más fácil demostrar el teorema fundamental del cálculo (Fischer)*[28]*, mediante el teorema de los incrementos finitos, que establecer el primer y segundo teoremas fundamentales del cálculo (Spivak)*[29]*.*

Hemos redactado las conclusiones, de las tres primeras hipótesis vinculadas al tercer objetivo, a las cuales hemos llegado al establecer la integral de Darboux-Riemann (CI_{26}); sin embargo, todo ello es claramente insuficiente puesto que la teoría de la integral aún está incompleta, así pues, se hace necesario determinar algún procedimiento sencillo por medio del cual se puedan calcular áreas sin necesidad de realizar las sumas de Darboux o Riemann para cada función integrable $f(x)$ en [*a,b*] y finalmente, según sea la función $f(x)$, por distintos procedimientos analítico-algebraico-numéricos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$.

El procedimiento al cual aludimos viene determinado por la regla de Barrow, sin embargo, el establecimiento de la misma no es único y nuestra propuesta es por dos vías alternativas, según los autores de cuyos textos matemáticos los hemos extraído, éstas son:

- El teorema fundamental del cálculo (Fischer).
- El primer y segundo teoremas fundamentales del cálculo (Spivak).

Conclusión 3.4.1: *El primer teorema fundamental del cálculo, según Spivak, es de muy difícil comprensión para los estudiantes y, además, se considera incompleto pues necesita de la regla de Barrow*[30]*.*

El concepto de función integral, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, es de muy difícil comprensión para los estudiantes de bachillerato (conclusión 3.1.6); además, si añadimos:

- La toma del ínfimo y el supremo en un entorno de un punto *c* de [*a,b*].

[28] Teorema fundamental del cálculo (Fischer). *Si f(x) es una función integrable en [a,b] y G(x) es una primitiva suya en este intervalo, entonces:* $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

[29] Primer teorema fundamental del cálculo (Spivak): *Si f(x) es una función integrable en [a,b], se define* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *sobre [a,b]. Si f(x) es continua en c de [a,b], entonces F(x) es derivable en c y F'(c)=f(c).* El segundo teorema fundamental del cálculo se le reconoce como regla de Barrow.

[30] Véanse los respectivos enunciados y las demostraciones en: *V.4.2.3. Primer teorema fundamental del cálculo* y *V.4.2.4. Segundo teorema fundamental del cálculo (regla de Barrow).*

- La monotonía del operador integral, $m_h h \leq \int_c^{c+h} f(t)dt \leq M_h h$.
- El establecimiento del cociente incremental, $m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h$.
- La toma del límite cuando *h* tiende a 0 de la desigualdad anterior y la condición de continuidad de la función *ƒ(x)* en [*a,b*].

Queda constatado que los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales encuentran obstáculos que dificultan sobremanera la comprensión del primer teorema fundamental del cálculo (Spivak) y, para más inri, se muestra insuficiente puesto que es necesario establecer el segundo teorema fundamental del cálculo (véase Ortega (2004) en *I.3.1. El concepto de integral definida* en la sección de *Antecedentes del capítulo I*).

Los autores de los once libros de texto de MACS II analizados en el capítulo IV también son conscientes de tales dificultades y poco más de la mitad los demuestran o justifican, incluso, en algunos manuales los dos teoremas fundamentales del cálculo son considerados como propiedades (IV.2.3.4; IV.2.3.5; IV.2.4, e) y anexo A).

Conclusión 3.4.2: *El teorema fundamental del cálculo, según Fischer, es de fácil comprensión para los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales.*

El director de la tesis, ante las dificultades señaladas en la conclusión anterior, propuso enunciar y demostrar el teorema fundamental del cálculo, TFC, (según la versión Fischer) a los estudiantes participantes en nuestra investigación. Tal propuesta estaba ausente en todos los textos analizados de MACS II (*IV.2. Análisis curricular del concepto*); sin embargo, varios investigadores en didáctica de la matemática la consideran factible y aconsejable (Abrahamson, 1998; Rouche, 2004 y Ortega, 2004).

El primer obstáculo importante con el que se ha encontrado el equipo investigador para la demostración del TFC es el desconocimiento de los alumnos de Bachillerato de Ciencias Sociales de los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial, TVMD, dificultad solventada mediante una interpretación geométrica rigurosa del TVMD (V.4.1.2) que, a tenor de los resultados de la investigación experimental, ha sido exitosa (CI_{27}); (IX.3.2, r); IX.4.4; X.3.2, n); X.4.3, o); X.4.4; X.5.1 y X.6, e)).

Aceptado por los estudiantes el TVMD, el siguiente reto ha sido enunciar y demostrar el TFC (tabla I.3.1.6; V.4.2.2 y IX.3.1); para ello se ha optado por tomar la partición $P=\{a=x_0<x_1<x_2<x_3<x_4=b\}$ del intervalo compacto $[a,b]$ y, a partir de ahí, mediante la suma telescópica (Abrahamson, 1998) y el TVMD por el cual se establece una suma de Riemann, realizar una demostración rigurosa del TFC combinando los registros gráficos y analítico-algebraicos.

Las referencias en esta memoria a los dos teoremas mencionados son innumerables y podemos concluir: "Confirmamos que las visualizaciones e interpretaciones gráficas del teorema del valor medio del cálculo diferencial y del teorema fundamental del cálculo (Fischer), efectuadas mediante las demostraciones-justificaciones de los mismos, han permitido a ocho de cada diez estudiantes sintetizarlos sin excesiva dificultad" (CI_{27}, CI_{28}, CI_{29} y CI_{36}); (VIII.3.2, f); IX.4.4; X.3.2, n); X.4.4; X.5.1; X.6, e); XI.2.4, g y m); IX.4; etc.).

Conclusión 3.4.3: *El teorema fundamental del cálculo de Fischer es más didáctico que los teoremas de Spivak.*

En los *Antecedentes* del primer capítulo quedó constatado que el teorema establecido por Fischer aventaja en todas las funciones de la demostración[31] al de Spivak (Ortega, 2004) y, con los resultados de nuestra investigación, además de las dos conclusiones anteriores, podemos confirmar que los estudiantes están en condiciones de comprender mejor la versión de Fischer que la de Spivak; por tanto, es más didáctica aquélla que ésta (IX.3.2, q) y r) y X.3.2, n)). Aún más, el teorema fundamental del cálculo de Fischer, por su propia demostración, permite generalizar el teorema del valor medio de la integral definida a tantos puntos intermedios como deseemos y, asimismo, establece un método rectangular de integración numérica (Ortega, 2004).

Por último, distintas investigaciones en didáctica de las matemáticas, con independencia de las versiones de Fischer o Spivak, proponen que en primer lugar se establezca la integral definida y posteriormente, como consecuencia de estos teoremas, se pase al cálculo de primitivas (Artigue, 2003a; Azcárate y cols., 1996; Llorens y Santonja, 1997; Ortega, 2004; etc.). Nuestra propuesta ha sido el cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental en la mayoría de las sesiones de la acción en el aula habitual de clase, la experiencia ha sido muy positiva aunque los resultados son más bien discretos (capítulos VII-X).

[31] Verificación, explicación, sistematización, comunicación y descubrimiento (DeVilliers, 1990).

Conclusión 3.4.4: *Los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales sintetizan la integral definida en la regla de Barrow, es decir, el teorema fundamental del cálculo (Fischer).*

Todos los estudiantes de sociales reconocen el teorema fundamental del cálculo por su aplicación práctica mediante la regla de Barrow y, asimismo, consideran que les libera de realizar cálculos innecesarios y que es una herramienta "prodigiosa" para el cálculo de áreas (XI.2.4, m) y XI.5.1, j)).

Percibimos que el teorema fundamental del cálculo (Fischer) supone que los alumnos se sientan liberados de comprender y, por extensión, de aprender los conceptos previos de la integral definida llevándolos a la generalización y síntesis erróneas del área determinada por una función integrable $f(x)$ en $[a,b]$ mediante el valor numérico $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$, siendo la función $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ en [a,b] (OI_{31} y OT_7); (XI.4).

Discriminar los conceptos de área e integral definida (CI_{30}) no es fácil para los alumnos y muchos de ellos consideran que la integral definida se reduce a resolver ejercicios prácticos por la regla de Barrow (VII.5, e); VIII.3.2, f); VIII.5, e); IX.3.2, r); XI.2.4, m) y X.6.2, p)).

Los estudiantes cometen importantes errores en el cálculo de áreas y no suelen contrastar los resultados obtenidos mediante una simple "estimación" de los mismos (IX.2.3, punto u), X.3.1.2 y X.3.2, o)). Asimismo, el obstáculo de determinar el dominio de definición de las funciones definidas a trozos y/o en valor absoluto conlleva que, un porcentaje considerable de estudiantes, tengan dificultades al calcular integrales definidas y áreas (X.3.1.2 y X.3.1.3).

Establecidas las conclusiones derivadas de los *fundamentos teóricos de la investigación* (objetivo 1), del *cálculo mental* de primitivas elementales (objetivo 2) y del aprendizaje de la *integral definida* con el empleo de recursos y técnicas tradicionales[32] (objetivo 3). Sólo nos resta determinar las correspondientes las *nuevas tecnologías* concretadas en el uso de *DERIVE* (objetivo 4) para la enseñanza y el aprendizaje del área y la integral definida. Ahora bien, las sesiones del aula de informática pueden considerarse complementarias de las impartidas en el aula habitual de cada grupo.

[32] Libro de texto, toma de apuntes, resolución de ejercicios con lápiz y papel y cumplimentación del cuadernillo teórico-práctico del área y la integral. Excepcionalmente, en algunos momentos nos hemos referido a las prácticas de lápiz-papel y con *DERIVE* cuya memoria está recogida en el capítulo XI.

XII.2.4. OBJETIVO 4. HIPÓTESIS: 4.1 Y 4.2

Objetivo 4: *Analizar la integración del programa de cálculo simbólico DERIVE, aplicado al desarrollo teórico-práctico de la integral definida, en el proceso de enseñanza del profesor y aprendizaje de los estudiantes.*

Hipótesis 4.1: *DERIVE ahorra tiempo en representaciones gráficas y cálculos tediosos, por tanto, puede dedicarse a tareas conceptuales.*

Conclusión 4.1.1: *El desconocimiento general de los estudiantes de las instrucciones propias del software de propósito matemático DERIVE dificulta, en un primer momento, la transferencia de registros-conceptos matemáticos a registros-conceptos informáticos.*

Todos los estudiantes identifican el *software* matemático *DERIVE* como una herramienta tecnológica válida y suficiente para la enseñanza y aprendizaje de la integral (CT_1); sin embargo, el primer obstáculo o dificultad importante con el que se encuentran, al menos cuatro de cada cinco alumnos, es el desconocimiento de los comandos e instrucciones básicos para su correcta utilización, es por ello que el profesor investigador, en los primeros minutos de cada sesión en el aula de informática, debió explicar a todos los estudiantes de los ciclos de confirmación (II y III), consolidación (IV y V) y cierre (VI) algunos comandos e instrucciones propios de *DERIVE*, es decir, debió establecer la *"génesis instrumental"* (Artigue, 2003b)[33] (OT_1); (XI.3.2.2; XI.3.2.5, a); .XI.3.4.6, a); XI.3.4.2; XI.4; XI.5.2 a), d) y e); etc.).

Otros obstáculos iniciales importantes con los que se han encontrado los estudiantes son: considerar que el ordenador es una *"caja negra"* y que las representaciones informáticas y matemáticas son independientes (OT_2 y OT_3); en consecuencia, con el *programa de utilidades* se ha seguido el modelo de *"caja gris"* (Sierra y Codes, 2005) y, además, procurando no disociar las actividades del aula de informática y las habituales de las clases de matemáticas en el aula del grupo (CT_3 y CT_4); (XI.4). En definitiva, sintetizar las instrucciones y las subrutinas del *programa de utilidades* (CT_4) y relacionarlas, mediante las mismas o similares denominaciones, con los respectivos conceptos matemáticos enseñados en el aula de clase han permitido comprender mejor los diferentes conceptos de la integral (CT_2).

[33] Véase Artigue (2003b) en *I.3.2. Las Nuevas tecnologías en la Enseñanza de la Integral Definida* dentro de la sección *I.3. Antecedentes de la Investigación* del capítulo I.

Conclusión 4.1.2: *El PCS DERIVE construye una realidad dinámica de los conceptos, frente a la dimensión estática de las clases tradicionales, que favorece la comprensión de los conceptos matemáticos.*

Las distintas visualizaciones y cálculos efectuados en muy poco tiempo por medios tecnológicos son favorecedoras de la enseñanza-aprendizaje de la integral, lo cual aventaja sustancialmente a la técnica clásica de lápiz y papel, pues esta última desvirtúa y enmascara los conceptos al exigir mucho tiempo en las representaciones gráficas y realizar cálculos tediosos. Sin embargo, uno de los mayores obstáculos con el que se encuentran los estudiantes bachilleres es considerar que los datos del ordenador son incontestables (OT_{10}); (XI.3.2.5, d); XI.3.4.6, i); XI.4 y XI.5.2, h)).

Las prácticas del área y la integral realizadas con *DERIVE* nos ha permitido establecer representaciones *enactivas* o dinámicas (Duval, 2006)[34] en las cuales se han integrado y han interactuado registros gráficos, numéricos y formales (mediante las respectivas denominaciones de las subrutinas del programa de utilidades) que han favorecido la comprensión y el aprendizaje de los conceptos por los estudiantes (CT_3, CT_4, CT_5 y CT_{10}).

Conclusión 4.1.3: *Las interacciones profesor-alumno y alumno-alumno en las clases con DERIVE son muy intensas, por tanto, favorecedoras de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.*

La dinámica de la clase en el aula informática es totalmente distinta a la del aula habitual, los estudiantes se muestran más activos, interfieren más entre ellos y existe una interacción muy fuerte alumno-profesor condicionada y mediatizada por las instrucciones dadas al ordenador y las respuestas obtenidas del mismo (XI.3.2.5, f) y XI.5.2, d)).

Corroboramos, con nuestra investigación experimental con el programa de cálculo simbólico *DERIVE*, los resultados de otras investigaciones por lo que constatamos que el ordenador se puede considerar como uno de los elementos más motivadores para el aprendizaje de la integral (Turégano, 1994), quedando favorecido por el hecho cierto de que en las clases con *DERIVE* se ha permitido y procurado que los estudiantes comparasen y discutiesen entre sí los resultados obtenidos, lo cual ha redundado en una mejor comprensión y adquisición de los conceptos (Depool, 2004).

[34] Representaciones *enactivas*, es decir, que dan sensación de cambio. Véase el apartado *III.1.8. Las representaciones semióticas de Duval* del capítulo III.

Hipótesis 4.2: *El aprendizaje con DERIVE es más eficaz si se combina con el cálculo mental o, al menos, el cálculo estimativo.*

Conclusión 4.2.1: *DERIVE es una herramienta informática válida para el cálculo de primitivas.*

En nuestra investigación solamente se han evaluado ejercicios orales y pruebas escritas de primitivas inmediatas, catalogadas por su sencillez y por los procedimientos de resolución de *cálculo mental*. Sin embargo, también se ha resuelto un reducido número de primitivas elementales con las nuevas tecnologías y ha quedado constatado que los alumnos confían en *DERIVE* para calcular integrales indefinidas[35] (CT_9).

El cálculo de primitivas inmediatas con el programa de *software* matemático *DERIVE* ha supuesto una nueva forma de abordar este pequeño campo de las matemáticas, por otro lado, constatamos que prácticamente todos los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales no sienten la necesidad de aprender a integrar mediante el cálculo mental y/o la clásica técnica de lápiz y papel (OT_{9a}) y; además, una vez más el ordenador produce el efecto de "caja negra", agravado por la creencia generalizada de que los resultados informáticos son indiscutibles aunque alguno de ellos sea erróneo (OT_{10}); (XI.3.3.2; XI.3.3.3; XI.3.3.5, f); XI.5.2 y anexo L).

Conclusión 4.2.2: *Las producciones gráfico-numéricas del ordenador deben ser contrastadas con sencillos cálculos, incluso mentales, y estimaciones puntuales para poder detectar posibles errores en la aplicación de los programas de cálculo simbólico.*

El equipo investigador ha considerado importante que los estudiantes reflexionaran ante las respuestas dadas por *DERIVE* al ejecutar las distintas instrucciones de las prácticas informáticas, sin embargo, los alumnos están ávidos de resultados informáticos que son aceptados en su totalidad (OT_{10}).

Así pues, en el cálculo de áreas con medios informáticos ningún estudiante se plantea que se puedan cometer errores y, como tal, no realizan cálculos aproximados o estimativos de las mismas; sin embargo, en la práctica de lápiz-papel algunos de ellos estiman áreas por medio de cuadraditos (XI.2.2; XI.2.4, d) y g); XI.3.4.6, f) y g); XI.4 y XI.5.1, d)).

[35] Las instrucciones de *DERIVE* no contemplan el término "primitiva" tal y como se entiende en esta memoria, éste es sustituido por "integral indefinida".

Conclusión 4.2.3: *El aprendizaje de la integral definida se torna más eficaz si se da un equilibrio entre las concepciones mentales, la clásica técnica de lápiz y papel y la más moderna técnica informática.*

Así lo corroboran los resultados de nuestra investigación, es decir, los estudiantes que han obtenido los niveles más altos en las categorías de comprensión matemática de los cuadernillos teórico-prácticos del área y la integral definida (cuya memoria ha sido recogida en los capítulos: VII, VIII, IX y X) coinciden con aquellos alumnos que alcanzan los mayores niveles en sus respuestas a los ítems de las prácticas informáticas del área y la integral con *DERIVE* (capítulo XI) y, además, sus intervenciones en las diferentes sesiones de la acción son las de mayor calidad científica (capítulos: VII–X).

Coincidimos con Drijvers (2002)[36] y, por ello, hemos procurado mantener un equilibrio entre las concepciones mentales y las nuevas y viejas tecnologías (figura I.3.4.4). Sin embargo, consideramos que la experiencia no ha sido totalmente satisfactoria puesto que por cada ciclo, salvo en el inicial o de exploración que no se realizaron prácticas informáticas, se ha realizado una única sesión práctica con *DERIVE*[37] y, en consecuencia, los estudiantes consideran que las prácticas con ordenador son un mero apéndice de las clases habituales (XI.5.2, punto r)).

Consideramos que las conclusiones que acabamos de redactar, clasificadas según los cuatro objetivos generales y las once hipótesis relacionadas con los mismos, son las más relevantes a las cuales hemos llegado en nuestra investigación científica en didáctica de la matemática y, lo que es más importante, responden al objetivo básico y fundamental de esta tesis doctoral: *“Investigar los aprendizajes que se producen en los estudiantes de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales sobre la integral definida al integrar docencia tradicional, cálculo mental y nuevas tecnologías”.*

[36] Véase Drijvers (2002) en el apartado *I.3.4. Dificultades en la adquisición del saber matemático (concepto de integral definida), en el uso de los programas de cálculo simbólico (PCS) y en el cálculo mental* del capítulo I.

[37] Cada una de las sesiones prácticas de la integral con *DERIVE* en el aula de informática comenzó a las 16:00 horas y finalizó a las 19:00 horas del día señalado al respecto. Véanse las correspondientes planificaciones de los ciclos de confirmación (VIII.2), consolidación (IX.2) y cierre (X.2); además, puede consultarse: XI.3.2.1, XI.3.2.2, XI.3.3.1, XI.3.3.2, XI.3.4.1 y XI.3.4.2.

XII.2.5. DECÁLOGO DE CONCLUSIONES FINALES

Pensamos que el elevado número de conclusiones, cuarenta, redactadas y justificadas anteriormente deben ser resumidas en el siguiente decálogo:

Conclusión 1: *La enseñanza y el aprendizaje de la integral definida es difícil para los profesores de Matemáticas y los estudiantes de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales.*

Conclusión 2: *La epistemología del área y la integral no se debe desdeñar si el profesor desea realizar una buena docencia de la integral definida.*

Conclusión 3: *Los estudiantes muestran interés por el cálculo mental de primitivas elementales, aunque los resultados obtenidos son discretos.*

Conclusión 4: *Los estudiantes comprenden mejor la integral de Darboux que la integral de Riemann, por tanto, en Bachillerato es más aconsejable establecer la integral de Darboux.*

Conclusión 5: *La integral de Darboux debe definirse mediante la igualdad de la integral inferior (extremo superior de las sumas inferiores) e integral superior (extremo inferior de las sumas superiores) en lugar de establecerla mediante la igualdad de los límites de sumas inferiores y superiores.*

Conclusión 6: *El teorema fundamental del cálculo (Fischer) se debe introducir por medio de sumas discretas y demostrarse mediante el teorema de los incrementos finitos; en lugar de tomar la función integral, proceder a derivarla y seguir con el segundo teorema fundamental del cálculo (Spivak).*

Conclusión 7: *El programa de software matemático DERIVE favorece la comprensión y adquisición, de los bachilleres, del concepto integral definida.*

Conclusión 8: *Los aprendizajes de los estudiantes han sido positivos al favorecer sus propias representaciones mentales mediante las distintas representaciones semióticas externas (lingüística y matemática), además de provocar que la representación semiótica interna (informática) sea externa y consciente mediante el programa de utilidades.*

Conclusión 9: *Los estudiantes de Bachillerato de Ciencias Sociales han aprendido, aceptablemente, los conceptos inherentes a la integral definida a pesar de su elevada dificultad.*

Conclusión 10: *Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de la integral definida no deben ser excusa para que las Administraciones Educativas la excluyan del currículo de Bachillerato de Ciencias Sociales.*

XII.3. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Aunque la metodología empleada en la presente investigación y los datos analizados han sido totalmente rigurosos, no por ello podemos ignorar ciertas limitaciones debidas a diferentes causas, éstas son:

- La reducida muestra de estudiantes, ciento veinticuatro, que han participado en la investigación a pesar del amplio número de ciclos.
- El agobio de los estudiantes de segundo curso de Bachillerato por la amplitud de los temarios de todas las materias, la pronta finalización de las clases (finales de mayo) y el elevado número de alumnos que tienen asignaturas pendientes de primero. Además del escaso interés por las Matemáticas y la diversidad de expectativas académicas y laborales en el inmediato futuro, puede suponer que las producciones de algunos estudiantes tengan un cierto déficit de esfuerzo personal.
- La dificultad en las transcripciones de las grabaciones de audio por la mala audición, en ciertos momentos, de las mismas y ausencia de entrevistas estructuradas.
- La ausencia generalizada de prácticas informáticas para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, agravada por la indisponibilidad de tiempo y medios materiales en horario lectivo. Por tanto, las prácticas con el *software* matemático *DERIVE* han sido realizadas como actividades extraescolares y, además, los alumnos han debido recibir las instrucciones básicas para el manejo de dicho programa.
- La valoración del profesor investigador del aprendizaje de los alumnos según las categorías e ítems establecidos en esta investigación que, a pesar del rigor, siempre tiene un componente de subjetividad.
- El excesivo tiempo empleado en la realización de la presente tesis debido, entre otras causas, al traslado del profesor investigador de la ciudad de Valladolid a la de Burgos lo que acarrea las consiguientes dificultades iniciales del desconocimiento del nuevo centro docente y la realización de múltiples desplazamientos Burgos-Valladolid.

Consideramos que estas son las limitaciones más importantes de nuestra investigación didáctica, sin embargo, una lectura atenta de esta memoria por cualquier persona interesada en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas detectará limitaciones y errores que provoquen la propia reflexión del lector y, posiblemente, una mejora de su práctica docente.

XII.4. APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación realizada en esta tesis doctoral ha generado gran cantidad de información, por tanto, de la presente memoria podemos mencionar las siguientes aportaciones que pueden ser tenidas en cuenta en posteriores investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas:

- Un estudio del estado previo de la investigación (capítulo I) que consideramos amplio, o al menos suficiente, por el cual se han establecido los *antecedentes de la investigación en: la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida, el cálculo mental y el uso de las nuevas tecnologías con programas de software matemático.* No se ha encontrado investigación alguna en la cual se utilice el cálculo mental para calcular primitivas elementales.
- Un breve estudio de las características propias de los modelos de investigación cuantitativo y cualitativo y un amplio resumen del marco metodológico cualitativo denominado *investigación en la acción* (capítulo II). El modelo *investigación-acción* es utilizado en multitud de investigaciones de didáctica, como es sabido, éste ha sido el elegido para nuestra investigación y, además, ha sido completado con datos cuantitativos expresados mediante gráficos y tablas.
- Un amplio resumen de varios marcos teóricos o modelos cognitivos (capítulo III), reconocidos por la comunidad científica, no excluyentes y bajo los cuales hemos establecido algunas relaciones con nuestra investigación experimental.
- Las características del *modelo de comprensión de Sierpinska* (III.1.5), bajo el cual realizamos esta investigación y el establecimiento, por el profesor investigador y el director de la tesis, de los *actos de comprensión, según Sierpinska, y los obstáculos y/o dificultades asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida, el cálculo de primitivas elementales mediante el cálculo mental y el uso de las nuevas tecnologías* (tablas III.1.5.1, III.1.5.2 y III.1.5.3); dichos actos han servido para analizar las producciones de los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales. Completamos este marco teórico haciendo un estudio del cumplimiento de los ocho criterios de Schoenfeld (2000), por el cual, se demuestra que el *modelo de comprensión de Sierpinska* es válido para nuestra investigación.

- Las características generales de la teoría APOE y la particular *descomposición genética de la integral*, véase el apartado III.1.9, elaborada por el equipo investigador; dicha descomposición ha sido utilizada en la elaboración de la unidad didáctica del área y la integral y en las prácticas informáticas con *DERIVE.*
- El análisis curricular del concepto integral definida según la legislación vigente, el establecimiento de las *categorías de contenido matemático (integral definida)* por las cuales analizamos varios textos de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II (capítulo IV y anexo A). Los resultados y las reflexiones de este análisis puede servir, entre otros casos, de punto de partida para elaborar unidades didácticas de la integral definida para estudiantes de bachillerato.
- Un resumen de la epistemología del área y el volumen (problema de las cuadraturas y cubaturas), hasta el establecimiento de la teoría de la integral, en el cual se incluyen procedimientos particulares de grandes sabios matemáticos de todos los tiempos (V.2 y anexo B).
- Un breve resumen de las teorías más comunes de la integral (Cauchy, Riemann, Darboux y Lebesgue) siguiendo, en la medida de lo posible, las notaciones de sus propios autores (V.2.5 y anexo B).
- La elaboración de la Unidad Didáctica: *Área e Integral Definida*, en la cual destacamos: el establecimiento del área del rectángulo y del círculo, la presentación de la integral de Darboux (según la docencia actual), el enunciado del teorema fundamental del cálculo y su demostración mediante sumas finitas y aplicando el teorema de los incrementos finitos, métodos elementales de integración numérica y algunas aplicaciones de la integral (V.3, V.4, V.5, V.6 y anexo C).
- El establecimiento de las *categorías de comprensión matemática* por las cuales se analizan los cuadernillos teórico-prácticos de la integral de los alumnos de los seis ciclos de la investigación (VI.4 y anexo D).
- El análisis exhaustivo y riguroso, siguiendo la metodología cualitativa de investigación-acción y el modelo teórico de Sierpinska, de los ciclos de exploración (I, capítulo VII), confirmación (II y III, capítulos VIII y XI), consolidación (IV y V, capítulos IX y XI) y cierre (VI, capítulos X y XI). Además, se ha seguido un proceso en espiral por el cual las reflexiones de un ciclo eran el punto de partida del siguiente.

- La localización y el reconocimiento de los actos de comprensión y los obstáculos, según el modelo teórico de Sierpinska[38], en las distintas producciones de los estudiantes de cada uno de los ciclos (VII.4.3, VIII.4.3, IX.4.3, X.4.4 y XI.4) siguiendo los contenidos establecidos en las tablas III.1.5.1, III.1.5.2 y III.1.5.3 del capítulo III. En nuestras investigaciones previas no se ha encontrado ninguna tesis doctoral o publicación científica en la cual se hayan establecido los actos de comprensión de Sierpinska para la integral definida.

- Una metodología específica por la cual los diez primeros minutos de clase se dedican al cálculo mental de primitivas elementales y el resto a la exposición de los contenidos matemáticos simultaneándolo con la resolución de ejercicios teórico-prácticos de la integral, procurando que la actividad y la participación de los estudiantes en clase sean elevadas.

- El establecimiento de ítems para la práctica de lápiz y papel (ciclos II y III) e ítems para las prácticas con *DERIVE* (en todos los ciclos, salvo el inicial) en la enseñanza-aprendizaje de la integral definida; además, del análisis riguroso de dichas prácticas (capítulo XI).

- La elaboración de los siguientes cuadernillos: teórico-prácticos del área y la integral definida (anexo F), de las prácticas con lápiz-papel (anexo K) y prácticas con *DERIVE* (anexo L).

- La elaboración de un protocolo del observador externo y un modelo de encuesta para los estudiantes (capítulos X y XI y anexo J).

- La elaboración de un programa de utilidades como complemento al programa de cálculo simbólico *DERIVE* con el objetivo de facilitar la comprensión de los conceptos a los estudiantes y realizar diferentes representaciones[39] (anexo L).

- La redacción de un amplio número de *Conclusiones* por las cuales los lectores puedan tener una visión generalizada de las limitaciones, logros y propuesta curricular de esta investigación y, lo que es más importante, puedan incitar a los profesores de enseñanza secundaria a reflexionar sobre su propia actividad docente.

---

[38] Identificación, discriminación, generalización y síntesis. Véase *III.1.5. El modelo de Sierpinska.*

[39] Enactivas, interactivas, gráficas, numéricas y formales. Véase *III.1.8. Las representaciones semióticas de Duval.*

XII.5. PROPUESTA CURRICULAR

Pensamos que las investigaciones en didáctica de la matemática no pueden ser independientes de la práctica docente y, como tal, consideramos que el material aportado en esta tesis doctoral, surgida de la inquietud del equipo investigador por investigar las dificultades en el aprendizaje de la integral definida de los estudiantes de bachillerato de ciencias sociales, no puede ser ignorado y, en consecuencia, pensamos que debemos establecer una propuesta curricular que mejore y amplíe la de los currículos oficiales y los respectivos desarrollos de los libros de texto.

Así pues, dada la importancia de la integral definida cuya presentación se realiza a los estudiantes de segundo curso de bachillerato, proponemos que con independencia de la modalidad de bachillerato[40] en la que se imparta este tópico se realicen las siguientes actuaciones:

Propuesta 1: *Epistemología de la integral definida y establecimiento del área del rectángulo y del círculo.*

Los estudiantes de bachillerato consideran que la teoría de la integral, tal y como se conoce actualmente, siempre ha existido; sin embargo, pensamos que los profesores de matemáticas deben presentar a los alumnos una breve introducción histórica de cómo se ha intentado resolver el problema del área a lo largo de los siglos y que gracias a las contribuciones de multitud de científicos se ha llegado a la actual teoría de la integral.

No podemos en modo alguno disociar los conocimientos previos adquiridos en educación secundaria obligatoria con los nuevos de bachillerato, por ello, consideramos que el nexo de unión entre el área y la integral puede ser el establecimiento del área del rectángulo según la tipología numérica de las longitudes de sus lados; además, partiendo de la trigonometría de cuarto curso de educación secundaria obligatoria consideramos aconsejable definir el número π y determinar la consabida fórmula del área del círculo.

Pensamos que esta propuesta es más idónea para los estudiantes de bachillerato de ciencias y tecnología que para los de sociales porque los primeros han cursado las matemáticas B en cuarto y el concepto de límite se estudia con mayor intensidad en el bachillerato científico-tecnológico.

---

[40] La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE: 4-5-2006) establece tres modalidades de bachillerato: a) Artes, b) Ciencias y Tecnología y c) Humanidades y Ciencias Sociales.

Propuesta 2: *Se debe priorizar la integral de Darboux sobre la de Riemann.*

Somos concientes de que la legislación educativa vigente y los libros de texto de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II y matemáticas II[41] no contemplan la integral de Darboux en segundo de bachillerato. Sin embargo, consideramos que inicialmente se deben establecer las sumas inferiores y superiores de Darboux y a partir de éstas definir las integrales inferior y superior de Darboux mediante las igualdades:

$$Inf \int_a^b f(x)\,dx = Extremo \;\; Superior \;\; \{ s(f,P) / P \;\; es \;\; una \;\; partición \;\; de \;\; [a,b] \}$$

$$Sup \int_a^b f(x)\,dx = Extremo \;\; Inferior \;\; \{ S(f,P) / P \;\; es \;\; una \;\; partición \;\; de \;\; [a,b] \}$$

Para concluir que la igualdad de éstas determina la integral de Darboux.

Presentada a los alumnos bachilleres la integral de Darboux, seguidamente se deberán definir las sumas de Riemann, establecer la relación de orden entre éstas y las de Darboux, definir la integral de Riemann y concluir que las integrales de Darboux y Riemann son equivalentes.

Las sumas de Riemann han de servirnos para justificar la integración numérica mediante el método rectangular[42].

Podemos considerar que las definiciones teóricas de las integrales inferior y superior de Darboux expresadas anteriormente es la mejor propuesta para las clases tradicionales de matemáticas, sin embargo, dicha propuesta no es operativa en las clases de informática, por tanto, proponemos que al utilizar cualquier programa de cálculo simbólico se visualicen, para determinadas funciones continuas y positivas, algunas superficies que determinan las sumas de Darboux y se calculen las respectivas sumas inferiores, $s(f,P_n)$, y superiores, $S(f,P_n)$, para varios valores n, siendo $P_n = \{a + (b-a)\cdot i / n\}_{i=0}^{n}$.

Así pues, para esas funciones, deben definirse:

$$Inf \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n)\,; \;\; Sup \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)\,.$$

Otra alternativa para estudiar, con las nuevas tecnologías, la integrabilidad de algunas funciones es mediante el teorema de caracterización óptima de

[41] Materia impartida en segundo de bachillerato de la modalidad de ciencias y tecnología.

[42] En segundo de bachillerato consideramos suficiente la integración numérica por el método de los rectángulos. El método de los trapecios, el de Simpson y cualquier otro no se contemplan en los currículos de bachillerato.

las funciones integrables, es decir, fijados varios valores ε>0, encontrar valores naturales *n* para los cuales se verifique $S(f,P_n) - s(f,P_n) < \varepsilon$.

Asimismo, las sumas de Riemann, $R(f,T_n,P_n)$, también deberán visualizarse y calcularse para diferentes funciones continuas y positivas, siendo P_n las particiones anteriores y los puntos intermedios $T_n = \left\{ a + \frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n} i \right\}_{i=0}^{n-1}$.

Finalmente, deberán compararse las sumas de Darboux y Rieman y calcular $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R(f,T_n,P_n)$ para concluir que ambas integrales son iguales.

Propuesta 3: *El teorema fundamental del cálculo es: "Sea f(x) una función integrable en [a,b] y G(x) una primitiva suya en [a,b], entonces* $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ *".*

Aunque los manuales de matemáticas de bachillerato no contemplan esta versión del teorema fundamental del cálculo, pensamos que ésta es la mejor como ha quedado constatado en nuestra investigación y, además, es la de más fácil comprensión para los estudiantes cuando se demuestra con apoyo gráfico y estableciendo sumas discretas.

Propuesta 4: *El cálculo mental de primitivas elementales debe formar parte de la enseñanza-aprendizaje de la integral.*

La complementariedad de los operadores derivación e integración adquiere su máxima intensidad mediante el cálculo mental de derivadas e integrales inmediatas; además, favorece la concentración de los alumnos y, asimismo, su propio aprendizaje de las matemáticas.

El equipo investigador considera que, previamente al estudio de la integral, los estudiantes deben practicar en primero y segundo de bachillerato el cálculo mental de derivadas sencillas, lo cual favorece: la identificación de los distintos tipos de funciones, el orden y la precisión, el aprendizaje de las derivadas más comunes y la seguridad y confianza de los propios alumnos.

El cálculo mental debe considerarse como el primer método de integración y éste debe realizarse con mayor intensidad al principio de clase no superando los ocho minutos, sin embargo, esto no excluye que en cualquier momento se recurra a él para resolver integrales indefinidas elementales.

Propuesta 5: *El cálculo estimativo de áreas no puede ser excluido de la didáctica de la integral definida.*

Se ha comprobado que los estudiantes cometen innumerables errores en el cálculo de áreas al aplicar erróneamente la regla de Barrow para funciones que cambian de signo, están definidas a trozos o en valor absoluto; además, tales errores persisten al calcular áreas comprendidas entre las gráficas de dos funciones que se cortan en más de dos puntos. Es más, en ocasiones, al obtener el valor exacto del área, si el resultado es fraccionario entonces se multiplica por el denominador y este nuevo valor se da como solución.

La mejor forma de detectar tales errores consiste en "estimar el área" y para ello, se debe representar con cierta calidad gráfica la superficie cuyo área se desea hallar y mediante una trama cuadriculada "calcular el área aproximada de dicho recinto" y compararla con la obtenida por medio del cálculo integral.

Esta propuesta tan elemental es sumamente eficaz por: establecer una relación entre las primitivas técnicas del cálculo de áreas y el cálculo integral; combinar representaciones gráficas y visualizaciones con registros algebraico-numéricos y, finalmente, permitir detectar errores aritméticos, procedimentales y conceptuales.

Propuesta 6: *Los ejercicios de la integral deben ser variados y en su resolución ha de mantenerse un equilibrio entre la técnica de lápiz-papel y las nuevas tecnologías.*

Consideramos que la integral definida ha superado el primitivo problema del cálculo de áreas y pensamos que los estudiantes de bachillerato deben ser conscientes de ello resolviendo problemas de otras Ciencias.

Somos conscientes de que no deben ignorarse los programas de *software* matemático para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tampoco consideramos que debe pasarse al extremo opuesto por el cual todos los ejercicios deban resolverse con medios informáticos. Por tanto, pensamos que debe mantenerse un equilibrio entre las viejas y nuevas técnicas de resolución de problemas y, además, que las prácticas informáticas deben estar muy bien planificadas para que todas ellas favorezcan la comprensión, adquisición y permanencia en el tiempo, por parte del mayor número posible de estudiantes, de todos los conceptos que configuran esta maravillosa teoría científica como es la integral definida.

XII.6. PROBLEMAS ABIERTOS

Para concluir la presente tesis doctoral es preceptivo establecer una relación de problemas que derivados de la misma, a nuestro juicio, pueden dar origen a nuevas investigaciones, éstos son:

- En las Comunidades Autónomas donde la legislación educativa establezca *la integral definida* en el currículo de Bachillerato de Ciencias Sociales puede investigarse este tema bajo otro marco teórico y en el cual el status de las prácticas informáticas, utilizando programas de cálculo simbólico, sea equivalente al de las clases impartidas en el aula habitual de grupo.
- Investigar el problema planteado en esta memoria con estudiantes de Bachillerato de Ciencias y Tecnología con una muestra más amplia (pudiendo ser del mismo centro o intercentros), estableciendo una relación de igualdad entre las prácticas informática y las sesiones de aula y realizando un tratamiento estadístico más profundo.
- Continuar nuestra investigación con estudiantes universitarios que realizan estudios de “Ciencias Sociales” y contrastar nuestras conclusiones con las obtenidas en la investigación propuesta.
- Poner en práctica la metodología ACE[43] de la teoría APOE[44] con alumnos universitarios de los Grados de Informática por la cual ellos mismos elaboren sus propias subrutinas de la integral de Darboux en un determinado lenguaje de programación, las contrasten con sus propios compañeros y el profesor[45] y, además, afiancen la adquisición de sus conocimientos resolviendo ejercicios con lápiz y papel.
- Investigar procedimientos particulares, dignos por su originalidad, de científicos que han vivido a lo largo de la historia, por los cuales se han resuelto problemas de longitudes, cuadraturas y cubaturas.
- Investigar las teorías más importantes de la integral definida, en su contexto histórico y notación original, que han surgido en los dos últimos siglos y, asimismo, establecer sus similitudes y diferencias.

---

[43] ACE: Actividades con ordenador, discusiones en Clase y Ejercicios de afianzamiento.

[44] Véase *III.1.9. La teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas).*

[45] Consideramos que el profesor de prácticas de matemáticas en el laboratorio de informática y el “profesor titular” de matemáticas deben recaer en la misma persona.

BIBLIOGRAFÍA..685

BIBLIOGRAFÍA

Abrahamson, D. L. (1998). Revisiting the Fundamental Theorem of Calculus. *Mathematics in College*. Office of Academic Affairs. The City University of New York. 535 East 80th Street. New York, NY 10021. Pp. 3-16.

Alejandre, M., Soler, X. y Toledo, F. J. (2002). *Análisis Matemático. Problemas de Matemáticas asistidos con Derive 5.* Elche: Universidad Miguel Hernández.

Amillo, J. M. y Arriaga, F. (1987). *Análisis Matemático con Aplicaciones a la Computación.* México: McGraw-Hill.

Apóstol, T. (1998). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal.* Barcelona: Reverté.

Arias, J. M., y Maza, I. (1998). *Matemáticas. Humanidades y Ciencias Sociales 2º Bachillerato.* Barcelona: Casals.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática, "una empresa docente"*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. Pp. 97-140.

Artigue, M. (2003a). ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, vol. X, nº 2,* pp. 117-134.

Artigue, M. (2003b). Aprendiendo matemáticas en un ambiente CAS: la génesis de una reflexión sobre la instrumentalización y la dialéctica entre el trabajo técnico y el conceptual. *IREM*. Extraído de la red, el 3 de marzo de 2007, desde http://www.mat.uson.mx./calculadora/artigue.htm

Arya, J. C. y Lardner, R. W. (1992). *Matemáticas Aplicadas a las Administración y a la Economía.* México: Prentice Hall.

Asiala, M., Brown, A., DeVriers, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2*, pp. 1-32.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, vol. X, nº 2,* pp. 135-149.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E. y Bosch, D. (1996). *Educación Matemática en Secundaria. Cálculo Diferencial e Integral.* Madrid: Síntesis.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Síntesis.

Badillo, E. R. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. "La derivada, un concepto a caballo entre la Matemática y la Física".* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Ballvé, M. E., Delgado, M., Jiménez, P., María, J. L. de, y Ulecia, T. (1996). *Elementos de Análisis Matemático*. Madrid: Sanz y Torres.

Ballvé, M. E. y Jiménez, P. (2010). *Borel, Baire y Lebesgue.* pp. 195-219. En: http://.www.scribd.com/doc/36870264/Apuntes_de_Teoria_de_la _Medida

Barrantes, H. (2006a). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, año I, número 2.*

Barrantes, H. (2006b). La Teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, año I, número 2.*

Biosca, A., Espinet, M. J. y Fandos, M. J. (1999). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Barcelona: Edebé.

Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de Bachillerato. *AULA, 10.* Salamanca. Pp. 119-135.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* pp. 67-82.

Boigues, F. J. y Pastor, J. (2007). La teoría Fuzzy como elemento para medir el grado de desarrollo en la comprensión de la integral. En: P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo: M. T. González (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM.* Huesca. Pp. 145-155.

Boigues, F. J. (2010a). Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería. *Jornadas de investigación en Análisis Matemático. Publicación del grupo de didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM,* febrero, Baeza. Pp. 42-61.

Boigues, F. J., Llinares, S. y Estruch, V. (2010b). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias sociales. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, RELIME, vol. 13 (3),* pp. 255-282.

Botella, L. M., Cascón, B., Martín, M. C., Millá, L. M., Pérez, C. y Salinas, E. (2000). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Alcoy: Marfil.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial.

Bouvier, A. y George, M. (1984). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Akal.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4 (2*), pp. 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (2),* pp. 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Burgos, J. (1995). *Cálculo infinitesimal de una variable.* Madrid: McGraw-Hill.

Cabañas, M. G. y Cantoral, R. (2007). La integral definida: un enfoque socioepistemológico. En: Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R. M., Carrillo, C., López, I. y Navarro, C. (2007). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos. Pp. 3-25.

Cabezas, J. (2001). *Modificaciones curriculares en matemáticas producidas por la introducción de las nuevas tecnologías*. Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral.* Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.

Camacho, M. (2005). La enseñanza y el aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (computer algebra system). *Investigación en Educación Matemática*. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática. SEIEM.* Córdoba. Pp. 97-110.

Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R. M., Lezama, J. y Romo, A. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2008). Socioepistemología de la contradicción. Un estudio sobre la noción de logaritmos de números negativos y el origen de la variable compleja. En: Cantoral, R. y cols. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos. Pp. 242-284.

Capace, L. y Arrieche, M. (2007). Algunas configuraciones epistémicas de la integral en una variable real desde su origen hasta su consolidación. *Enseñanza de la Matemática. Volúmenes 12 al 16. Número Extraordinario; 2003-2007*. *Diciembre de 2007. Asociación Venezolana de Educación Matemática*. Pp. 35-52.

Castro, E. y Castro E. (1997). Representaciones y Modelización. En: L. Rico (cordinador). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori-ICE. Universidad de Barcelona. Pp. 95-124.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: AIQUE.

Cockcroft W. H. y cols. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado.

Colera, J., García, R., y Oliveira, M. (1997). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Anaya.

Colera, J., García, R., Gaztelu, I. y Oliveira, M. (2001a). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid: Anaya.

Colera, J., García, R., Gaztelu, I. y Oliveira, M. (2001b). *Matemáticas 4º ESO, opción B*. Madrid: Anaya.

Colera, J., García, R. y Oliveira, M. (2003). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Anaya.

Colerus, E. (1959). *De la tabla de multiplicar a la integral. Las Matemáticas para todos.* Barcelona: Labor.

Collins Pocket Plus (1998). *Español-Inglés, English-Spanish*. Madrid: Grijalbo.

Consejería de Educación (2008). Decreto 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. *BOCyL: 11-06-2008.*

Contreras, A. (2000). La Enseñanza del Análisis Matemático en Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *IV Simposio de la SEIEM. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, *nº 9.* Noviembre. Sevilla. Pp. 71-86.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2003). El análisis de manuales de enseñanza de la Integral Definida. *Investigaciones en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española en Educación Matemática (SEIEM),* pp. 277-288.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2005). Análisis de significados personales de los estudiantes acerca de la integral definida. *Grupo de investigación: Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. IX Simposio SEIEM*. Córdoba. Pp. 1-14.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad Ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la Integral Definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*. México D. F. Pp. 65-84.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las Pruebas de Acceso a la Universidad en la Enseñanza de la Integral Definida en el Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28(3)*, pp. 367-384.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Relime, vol. 4, núm. 2, julio,* pp. 103-128.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Relime, vol. 8, núm. 3, noviembre,* pp. 265-286.

Cordero, P. M. (2006). La Integral de Lebesgue en su contexto histórico. En: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo//historia/La%20integral%20de%20Lebesgue.pdf

Coronado, J. L. y cols. (1994). *Prácticas de Matemáticas con DERIVE.* Ed.: Alfonsa García. Madrid: CLAGSA.

Cortes Generales (1978). Constitución Española. *BOE: 29-12-1978.*

Cortés, J. (2001). *Análisis de las estrategias del cálculo estimativo que utilizan los estudiantes de 2º de secundaria en Baja California*. Tesis de Maestría en Ciencias Educativas. Ensenada: UABC. México.

Cortés, J., Backhoff, E. y Organista, J. (2004). Estrategias del cálculo mental utilizadas por estudiantes del nivel de secundaria en Baja California. *Educación Matemática, vol. 16, nº 1, abril*. México: Santillana. Pp. 149-168.

Cortés, J., Backhoff, E. y Organista, J. (2005). Análisis de las estrategias del cálculo estimativo en escolares de secundaria considerados buenos estimadores. *Revista Mexicana de Investigación Educativa (REMIE), vol. 10, nº 25*. México. Pp. 543-558.

Costa, J. (2002). *Guía Práctica para usuarios Word 97.* Madrid: Anaya.

Courant, R. y Robbins, H. (1964). *¿Qué es la Matemática?* Madrid: Aguilar. Colección Ciencia y Técnica.

Czarnocha, B., Loch. S., Prabhu, V. y Vidakovic, D. (2001). The Concept of Definite Integral: Coordination of Two Schemas. En Maria van den Heuvel-Penhuizen (Ed.). *Proceedings of the XXV Conference of the PME.* Utrech: Freudenthal Institut. Pp. 297-304.

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de la enseñanza. *Enseñanza de la Matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática), 17 (1),* pp. 87-106.

Demidovich, B. P. y Maron, I. A. (1977). *Cálculo Numérico Fundamental*. Madrid: Paraninfo.

Depool, R. A. (2004). *La enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS).* Tesis Doctoral. Univ. de La Laguna.

Deulofeu, J. (2007). Los sistemas de representación y el uso de las CAS en el Análisis Matemático. Réplica a la ponencia "La enseñanza y el aprendizaje del análisis Matemático haciendo uso de las CAS (Computer Algebra System)" del profesor Matías Camacho. *Investigación en Educación Matemática XI,* pp. 393-397.

DeVilliers, M. (1990). The role and functions of demonstrations in mathematics. *Pythagoras, 24,* pp. 17-24.

Diccionario de Español-Francés Francés-Español (2004). Vol. 26. Madrid: Espasa Calpe. Biblioteca El Mundo.

Diccionario de Español-Inglés Inglés-Español (2004). Vol. 25. Madrid: Espasa Calpe. Biblioteca El Mundo.

Diccionario de la Lengua Española I y II (2004). Vols. 20-21. Madrid: Espasa Calpe. Biblioteca El Mundo.

Diccionario de Sinónimos y Antónimos I y II (2004). Vols. 23-24. Madrid: Espasa Calpe. Biblioteca El Mundo.

Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R. M., Carrillo, C., López, I. y Navarro, C. (2007). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Dowling, E. T. (1992). *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales.* Madrid: McGraw-Hill.

Dreyfus, T. (1991): Advanced Mathematical Thinking Process. En: Tall, D. (ed). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press. Pp. 25-41.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34 (5)*, pp. 221-228.

Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1990). Constructing Calculus Concept: cooperation in a computer laboratory*. Mathematical Association of America Notes, 24*, pp. 47-70.

Dubinsky, E. (1991): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En: Tall, D. (ed). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press. Pp. 95-123.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, vol. 8 (3),* pp*.* 24-41.

Dubinsky, E., Asiala, M., Brown, A., DeVriers, D. J., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2*, pp. 1-32.

Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study,* 7. Dordrecht: Kluwer. Pp. 273-280.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique e fusionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 5*. Strasbourg: IREM. Pp. 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in Mathematical Thinking. *Basic Issues for learning. Proceedings PME XXIII, vol. I*. México. Pp. 3-25.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, *vol. 9.1,* pp. 143-168.

Eco, U. (2001). *Como se hace una Tesis.* Barcelona: Gedisa.

Eisenberg, T. (1994). On Understanding the Reluctance to Visualize. *Z.D.M.*, *94(4),* pp. 109-113.

Elliott, J. (1997). *La investigación-acción en educación.* Madrid: Morata.

Faria, E. de (2008). Matemáticas y Nuevas Tecnologías en Costa Rica. En Cantoral y cols. (2008)*. Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Madrid: Díaz de Santos. Pp. 775-800.

Fernández, J. (1988). *Análisis Matemático I.* Madrid: UNED.

Fischer, E. (1983). *Intermediate Real Analysis.* New York: Springer Verlag.

Font, V. (2010). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas.*

En: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome14/font.pdf (consulta del 2-2-10).

Galaz-García, F. (2007). Definiciones originales de la integral y medida de Lebesgue. *Miscelánea Matemática, 44,* pp. 83-100.

García, A. y cols. (1994*). Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable.* Madrid: CLAGSA.

García, A., Martínez, A. y Miñano, R. (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas.* Madrid: Síntesis.

García Olivares, A. (2007). *Educación matemática atendiendo a la diversidad. Análisis de una metodología específica.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Gavilán, J. M. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Relime*, *vol. 9, núm. 1*, *marzo*. Pp. 117-150.

Goldin, G. (1998). Representation and the psychology of mathematics education II. *Journal of Mathematics Behaviour, 17 (2),* pp. 135-165.

Goldin, G. y Janvier, C. (1998). Representation and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour, 17 (1),* pp. 1-4.

Gómez, B. (1994). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo y los procesos cognitivos involucrados en los errores que cometen los estudiantes al aplicarlos*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

Gómez, B. (1995). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Investigaciones y Experiencias Didácticas. Enseñanza de las Ciencias*, *13 (3),* pp. 313-325.

Gómez, B. (1998). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Gómez, M. A. (2005). La transposición didáctica: Historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, volumen 1, julio-diciembre*, pp. 83-115.

González, C., Llorente, J. y Ruiz, M. J. (1997). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: Editex.

González, C., Llorente, J. y Ruiz, M. J. (2003). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: Editex.

González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las Ciencias*, *23 (1)*, pp. 81-96.

González-Martín, A. S. (2006). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

Gran Diccionario de Sinónimos y Antónimos (1989). Madrid: Espasa Calpe. Banco Bilbao Vizcaya.

Gran Enciclopedia Universal (2004). Vols. 1-18. Madrid: Espasa Calpe. Biblioteca El Mundo.

Guin, D. y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computer for Mathematical Learning, 3*, pp. 195-227.

Gutiérrez, J. F. (1999). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* San Sebastián: Donostiarra.

Guzmán, M. y cols. (1999). Debate sobre la enseñanza de las matemáticas realizado en la Academia de Ciencias. *Suma, 18,* pp. 15-18.

Harel, G. y Kaput, J. (1991). The Role of Conceptual Entities and their Symbols in Building Advanced Mathematical Concepts. En: Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/Boston/London. Pp. 82-93.

Hawking, S. (2010). *Dios creó los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la Historia*. Barcelona: Crítica.

Heid, M. K. (2002). How theories about the learning and knowing of mathematics can inform the use of CAS in school mathematics: One perspective. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 9(2),* pp. 95-112.

Hoare, G. T. Q., Lord, N. J. (2002). "Intégrale, longueur, aire" the centenary of the Lebesgue integral*. The Mathematical Gazette. Volume 86. Number 505. March*. Pp. 3-27.

Hopkins, D. (1989*). Investigación en el aula. Guía del profesor*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Ibañes, M., Pérez, M. F., Población, A. y Suárez, A. (1999). *Prácticas de Matemáticas de Bachillerato con Derive para Windows.* Madrid: Ra-Ma.

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Jefatura del Estado (1970). Educación. Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. *BOE: 06-08-1970.*

Jefatura del Estado (1985). Educación. Ley Orgánica 8/1985, de 3 de julio, reguladora del Derecho a la Educación. *BOE: 04-07-1985.*

Jefatura del Estado (1990). Educación. Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *BOE: 04-10-1990.*

Jefatura del Estado (2002). Educación. Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación. *BOE: 24-12-2002.*

Jefatura del Estado (2006). Educación. Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE: 04-05-2006.*

Jiménez, P. (2010). *Evolución de la integral en el siglo XIX, pp. 57-78.* En: http://www.pdfgratis.orr/viewpdf.php

Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). C*ómo planificar la investigación-acción.* Barcelona: Laertes.

Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico L. (1995). Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación Matemática*. Edts. Kilpatrick, Gómez y Rico. Editorial Iberoamericana S.A. de C.V. Universidad de los Andes, Universidad de Granada y Universidad de Georgia.

Kindt, M. (2011). *Aportaciones de la historia de las matemáticas a la educación moderna.* Freudenthal Institut. Universidad de Utrecht (Holanda). En:http://www.cimm.ucr.ac.ar/historia%20de%20las%20matematicas/archivos/M.%20Kindt.Aportaciones%20de%20la%20historia%20de%20las%20matematicas%20a%20la%20educacion%20moderna.%20Freudenthal%institut,%20Universidad%20de%20Utrech.%20Holanda.pdf

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días I y II.* Madrid: Alianza Editorial.

Kordaki, M. y Potari, D. (1998). A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld. *Computer and Education, 31,* pp. 405-422.

Kordaki, M. y Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computer for Mathematical Learning, 7(1),* pp. 65-100.

Kutzler, B. (1997). El impacto de *DERIVE* en la enseñanza y evaluación de matemáticas*. Delta,* pp. 11-23*.*

La Enciclopedia (2003). Vols. 1-20. Madrid: Salvat. El País.

La Santa Biblia (1989). Traducida de los textos originales bajo la dirección del Dr. Evaristo Martín Nieto. Madrid: Ediciones Paulinas.

Larson, R. E. y Hostetler, R. P. (1990). *Cálculo y Geometría Analítica.* México: McGraw-Hill.

Llorens, J. L. y Santonja, F. J. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas, noviembre, vol. 5, nº 1/2,* pp. 61-76.

Lois, A. E. y Milevicich, L. M. (2008). La enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Integral desde la perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación*, *nº 47/5, noviembre*. Edita: Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Pp. 1-15.

Macnab, D. y Cummine, J. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16. Un enfoque centrado en la dificultad.* Madrid: Visor

Martín, F. J. y Ruiz-Maya, L. (1995). *Estadística I: Probabilidad.* Madrid: AC.

Martín, L. J. y Velasco, J. A. (2001). Sumas de Riemann con Sistemas de Cálculo Simbólico. *Suma. Revista sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 38, noviembre,* pp. 47-52.

Martínez-Mediano, J. M., Cuadra, R. y Heras, A. (1997). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.* Madrid: McGraw-Hill.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime, vol. 6 (3),* pp. 221-278.

Ministerio de Educación y Ciencia (1992). Real Decreto 1178/1992, de 2 de octubre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de bachillerato. *BOE: 21-10-1992.*

Ministerio de Educación y Ciencia (1992). Real Decreto 1.179/1.992, de 2 de octubre, por el que se establece el currículo de bachillerato. *BOE: 21-10-1992.*

Ministerio de Educación y Ciencia (2001). Real Decreto 938/2001, de 3 de agosto, por el que se modifica el Real Decreto 1179/1992, de 2 de octubre, por el que se establece el currículo del bachillerato. *BOE: 07-09-2001.*

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan las enseñanzas mínimas. *BOE: 06-11-2007.*

Moreira, M. A. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la Enseñanza de las Ciencias y la investigación en el área*. Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias*, *7 (1)*. Porto Alegre. Pp. 1-28.

En: http://www.if.ufrsg.br/~moreira/vergnaudespagnhol.pdf

Muñoz, G. (2007). Rediseño del Cálculo Integral escolar fundamentado en la predicción. En: Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R. M., Carrillo, C., López, I. y Navarro, C. (2007). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos. Pp. 27-76.

Ortega, T. y Ortiz, M. (2002). *Cálculo mental.* Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática*.* Universidad de Valladolid.

Ortega, T. (2004). ¿Qué pintan un motor y una botella en el cálculo integral? Curso Corto de Didáctica, Proyecto BXX2000-0069 de la Dirección General de Enseñanza Superior. España. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame, vol. 17, tomo II,* pp. 515-526.

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona: Graó. Biblioteca Uno.

Ortega, T., Blázquez, S., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Relime, vol. 9, núm. 2, julio,* pp. 189-209*.*

Ortega, T. (2008) ¿Se pueden crear matemáticas desde la didáctica de la matemática? En: Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R. M., Lezama, J. y Romo, A. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos. Pp. 705-730.

Orton, A. (1980), An investigation into understanding of elementary calculus in adolescents and young adults, *Cognitive Development Research in science and Mathematics*, *14*, p. 235-250.

Orton, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics, 14(1),* pp. 1-14.

Panizza, M. (2003). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas.* En: http://www.crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf (consulta efectuada el 10-06-09).

Paz, J., Cámara, T. y Monteagudo, F. (1998). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: Edelvives.

Pecharromán, C. (2008). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Pérez, O. (2008). La Evaluación del Aprendizaje en la Educación Matemática. En: Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R. M., Lezama, J. y Romo, A. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos. Pp. 65-90.

Pérez González, F. J. (2008). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.* Universidad de Granada. Departamento Análisis Matemático. Pp. 500-502. En: http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_fun_una_ var.pdf

Pérez, G., Molfino, V., Lanzilotta, M. y Dalcín, M. (2002). Epistemología e Historia de la Matemática-Nivel Medio. Orígenes del Cálculo Infinitesimal: De la Antigüedad al Teorema Fundamental. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 15,* pp. 514-519.

Pérez Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes I. Métodos.* Madrid: La Muralla.

Perrin, M. J. (1990). L'aire et la mesure. *Petit x, 24*. Paris: IREM. Pp. 5-36

Piaget, J., Inhelder, B. y Szemisnka, A. (1970). *The child´s conception of geometry*. New York, USA: basic books, Inc. Publishers.

Piskunov, N. (1978). *Cálculo Diferencial e Integral*. Barcelona: Montaner y Simón.

Primo, A., Pérez, C., Serrano, G., Suárez, L., Grajal, L. y Ardanuy, R. (1998). *Matemáticas. Modalidad Humanidades y Ciencias Sociales, 2º Bachillerato.* Salamanca: Hespérides.

Ramírez, A. J., Esteve, R. y Deusa, M. (2003). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Valencia: Ecir.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la Lengua Española I y II*. Madrid: Espasa Calpe.

Recalde, L. (2007). Las raíces históricas de la integral de Lebesgue. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Educación e Historia, vol. XV, nº 2, diciembre,* pp. 103-127.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. (1951). *Análisis Matemático, vol. 1.* Hamburgo: Kapelusz.

Rey Pastor, J. y Babini, (1952). *Historia de la matemática.* Buenos Aires: Espasa Calpe.

Rey Pastor, J. (1973). *Curso de Cálculo Infinitesimal.* Madrid: Biblioteca Matemática.

Rouché, N. (2004). La dérivée, la primitive un univers de sens*. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public,* pp. 123-137.

Sánchez, A. y Rodríguez, M. D. (1997). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I.* Madrid: Bruño.

Schoenfeld, A. H. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Beavior, 18, 3,* pp. 243-261.

Seco, M. (2004). *Diccionario de Dificultades del Español. Vol. 19.* Madrid: Espasa Calpe. Biblioteca El Mundo.

Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, nº 17, vol. 7(1),* pp. 499-536.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6 (1)*, pp. 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18 (4)*, pp. 371-387.

Sierpinska, A. (1990): Some Remarks Understanding in Mathematics. *For the learning of Mathematics 10, 3, November*. Montreal, Quebec, Canada: FLM Publishing Association. Pp. 24-63.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Basingstoke. UK: Flamer. P. xi.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of education. *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer A. P. Pp. 827-876.

Sierra, M. y Codes, M. (2005). Entorno computacional y Educación Matemática: Una revisión del estado actual. *Grupo de investigación: Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. IX Simposio SEIEM*. Córdoba. Pp. 1-16.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77,* pp. 20-26.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Capítulo V*. Barcelona: ICE/Horsori. Pp. 125-154.

Spivak, M. (1991). *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Reverté.

Suárez, C. (2007). *Aceptación en España de los criterios rigurosos del Análisis Matemático durante los siglos XIX y XX*. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer. Pp. 3-21.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop y cols. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer. Pp. 289-325.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* pp. 151-169.

Tierney, C., Boyd, C. y Davis, G. (1990). Prospective Primary Teachers Conceptions of Area. *Proceedings of the 14th International Conference of Mathematics Education.* Oaxtepec. México. Pp. 307-315.

Trouche, L. (2002). Genèses instrumentales, aspects individuels et collectives. *Calculatrices symboliques. Transformer on outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions. Pp. 243-276.

Turégano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo integral.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula*. Ensayos, 21*, pp. 35-48.

Vera, F. (1970). *Científicos Griegos.* Madrid: Aguilar.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23),* pp. 133-170.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behaviour, 17 (2),* pp. 167-181.

Viloria, N. y Cadenas, R. (2007). Integral de Cauchy y Funciones Regladas. *Revista Notas de Matemática, vol. 3(1), nº 251,* pp. 45-71.

En: http://www.matemática.ula.es

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Pp. 65-81.

Vizmanos, J. R. y Anzola, M. (1997). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: SM.

Vox (1969). *Diccionario Manual Francés-Español, Español-Francés*. Barcelona: Biblograf.

http://www.euclides.org/menu/elements_esp/12/proposicion10libro12.htm

Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y
DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL:

INTEGRAL DEFINIDA, CÁLCULO MENTAL Y NUEVAS TECNOLOGÍAS

ANEXOS

Presentada por Mario Porres Tomé para optar al grado de doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por: Dr. D. Tomás Ortega del Rincón

Valladolid, julio de 2011

Memoria presentada para optar al grado de Doctor por la Universidad de Valladolid por D. Mario Porres Tomé, Licenciado en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Valladolid, en el Programa de Doctorado: *Investigación en Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales, y de la Matemática.*

Director de la Tesis Doctoral: *Dr. D. Tomás Ortega del Rincón.* Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid.

D. TOMÁS ORTEGA DEL RINCÓN, Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que la presente memoria, ***Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías,*** ha sido realizada por D. Mario Porres Tomé bajo mi dirección en la Universidad de Valladolid.

Valladolid, julio de 2011

Fdo.: Dr. D. Tomás Ortega del Rincón

A Pilar,

Alfonso y Javier

La sabiduría exalta a sus hijos,
y cuida de los que la buscan.
El que la ama, ama la vida;
y los que madrugan a buscarla
serán colmados de alegría.
Hijo, desde tu juventud ponte a aprender,
y hasta encanecer hallarás sabiduría.
Como el que ara y el que siembra acércate a ella
y espera sus buenos frutos.

Sirácida 4, 11-12 y 6, 18-19

INTRODUCCIÓN

Consideramos que debemos completar la Memoria de esta Tesis Doctoral, tal y como quedó establecido en el Prólogo, con una serie de *Anexos* que complementen uno o varios capítulos de los redactados anteriormente. He aquí dichos anexos así como una breve descripción de los mismos:

Anexo A (Capítulo IV): Análisis didáctico de los libros de texto. En el cual se incluye una breve descripción de los contenidos sobre la integral de los libros de texto de MACS II de las editoriales: Anaya, Casals, Donostiarra, Ecir, Edebé, Edelvives, Editex, Hespérides, Marfil, McGraw-Hill y SM.

Anexo B (Capítulo V): Epistemología del cálculo integral. Por el cual queda redactada la mayor parte de nuestra investigación realizada sobre la epistemología de la integral definida; además, este anexo corresponde con el apartado V.2 del capítulo V y como tal lleva el índice que le corresponde dentro de su propio capítulo.

Anexo C (Capítulo V): Algunas aplicaciones de la integral. Es la continuación natural del quinto capítulo en el que damos varias aplicaciones de la integral definida y, además, la relación de sus apartados continúa con la de dicho capítulo.

Anexo D (Capítulo VI): Categorías de comprensión matemática. En él se establecen cuarenta categorías de comprensión matemática donde incluimos la cuestión o cuestiones del cuadernillo teórico-práctico que las soportan para ser evaluadas.

Anexo E (Capítulos VI, VII, VIII, IX y X): Iniciación a las integrales. Es la unidad didáctica de la integral definida del libro de texto, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de segundo curso de Bachillerato de Colera, García y Oliveira (2003) y editado por Anaya, utilizado en los seis ciclos de la investigación.

Anexo F (Capítulos VI, VII, VIII, IX y X): Cuadernillo teórico-práctico del área y la integral definida. Es el texto de la actividad teórico-práctica del área y la integral que debieron cumplimentar los estudiantes del ciclo de cierre.

Anexo G (Capítulo VII): La acción en el ciclo de exploración. Donde se describe la acción del primer ciclo de la investigación y, además, se incluyen las reflexiones de la acción del mismo ciclo. El índice de este anexo es el que le corresponde en el capítulo VII.

Anexo H (Capítulo VIII): La acción en los ciclos de confirmación. Donde se describe la acción del segundo y el tercer ciclo de nuestra investigación y, asimismo, se incluyen las reflexiones de la acción de los dos ciclos. El índice de este anexo es el que le corresponde en el capítulo VIII.

Anexo I (Capítulos VIII, IX y X): Cálculo mental de primitivas elementales. Son los ejercicios escritos de algunos estudiantes de las pruebas propuestas para ser resueltas como derivadas y primitivas inmediatas.

Anexo J (Capítulos X y XI): Informe y encuestas. Se recoge el informe del profesor observador externo y algunas de las respuestas a la encuesta realizada a los estudiantes del ciclo de cierre.

Anexo K (Capítulo XI): Prácticas con lápiz y papel. Se incluye el enunciado del ejercicio práctico de la integrabilidad de la función $f(x)=x^2$ en [1,3], así como algunas respuestas, con lápiz-papel, de alumnos de los ciclos II y III.

Anexo L (Capítulo XI): Texto, programa y prácticas con DERIVE. En el último anexo incluimos el *programa fuente* elaborado por el profesor investigador así como el texto de la práctica informática del área y la integral entregado a los estudiantes y la solución a dicha práctica realizada con el programa de cálculo simbólico *DERIVE.*

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN ***1***

ANEXO A (CAPÍTULO IV): ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS LIBROS DE TEXTO ***3***

IV.2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS LIBROS DE TEXTO 4
IV.2.2.1. ANAYA... 4
IV.2.2.2. CASALS... 7
IV.2.2.3. DONOSTIARRA 10
IV.2.2.4. ECIR 13
IV.2.2.5. EDEBÉ 16
IV.2.2.6. EDELVIVES 19
IV.2.2.7. EDITEX. 22
IV.2.2.8. HESPÉRIDES 25
IV.2.2.9. MARFIL 27
IV.2.2.10. McGRAW-HILL 28
IV.2.2.11. SM 31

ANEXO B (CAPÍTULO V): EPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO INTEGRAL ***35***

V.2. EPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO INTEGRAL ***36***

V.2.1. INTRODUCCIÓN 36
V.2.2. EDAD ANTIGUA Y MEDIA 38
V.2.3. DEL RENACIMIENTO HASTA BARROW 51
V.2.4. DESDE NEWTON Y LEIBNIZ HASTA EL CONCEPTO INTEGRAL 66
V.2.5. LA INTEGRAL COMO OBJETO MATEMÁTICO 75
V.2.5.1. Integral de Cauchy 75
V.2.5.2. Integral de Riemann 78
V.2.5.3. Integral de Darboux 80
V.2.5.4. Integral de Riemann-Stieltjes. 80
V.2.5.5. Integal mediante funciones escalonadas y regladas 81
V.2.5.6. Hacia la teoría de la medida 82
V.2.5.7. Integral de Lebesgue. Teoría de la medida 86
V.2.6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES EPISTEMOLÓGICAS 91

ANEXO C (CAPÍTULO V): ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL... 95
V.6. ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL................................... 95
V.6.1. ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA 95
V.6.2. LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA 99
V.6.3. CÁLCULO DE VOLÚMENES... 102
V.6.4. CÁLCULO DE ÁREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN..... 106
V.6.5. LA CICLOIDE.. 108
V.6.6. INTEGRALES IMPROPIAS... 113
V.6.7. ESPACIO, VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y TIEMPO................. 116
V.6.8. TRABAJO... 116
V.6.9. CENTRO DE GRAVEDAD.. 118
V.6.10. FUERZA EJERCIDA POR UN FLUIDO 120
V.6.11. LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON..................................... 122
V.6.12. CRECIMIENTOS EXPONENCIAL Y LOGÍSTICO 123
V.6.13. ECONOMÍA 125
V.6.14. PROBABILIDAD... 128
V.6.15. CIENCIAS SOCIALES 133

ANEXO D (CAPÍTULO VI): CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA...135
VI.4. CATEGORÍAS.. 136
VI.4.1. INTRODUCCIÓN.. 136
VI.4.2. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA.................. 137
VI.4.2.1. DGA: Determinación gráfica del área...138
VI.4.2.2. DGSI: Determinación gráfica de las sumas inferiores 138
VI.4.2.3. DGSS: Determinación gráfica de las sumas superiores 139
VI.4.2.4. RSISR: Relación entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, la segunda un refinamiento de la primera................................140
VI.4.2.5. ESIS: Expresión analítica de las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición de 6 nodos 140
VI.4.2.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux..141
VI.4.2.7. DR: Representación de la función de Dirichlet...........................142
VI.4.2.8. DMIN4: Mínimos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos 142
VI.4.2.9. DMAX4: Máximos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos. 142
VI.4.2.10. DSI4: Representa y calcula la suma inferior según DMIN4 142
VI.4.2.11. DSS4: Representa y calcula la suma superior según DMAX4...143
VI.4.2.12. DSI8: Dirichlet, suma inferior en 8 subintervalos......................143
VI.4.2.13. DSS8: Dirichlet, suma inferior en 8 subintervalos.....................143
VI.4.2.14. DIINF: Dirichlet integral inferior..143
VI.4.2.15. DISUP: Dirichlet integral superior..144
VI.4.2.16. DNI: Dirichlet no integrable..144
VI.4.2.17. AR: Representar el área determinada por la función afín 144

VI.4.2.18. AMIN4: Mínimos de la función afín para una partición de 4 subintervalos 145
VI.4.2.19. AMAX4: Máximos de la función afín para una partición de 4 subintervalos 145
VI.4.2.20. ASI4: Representa y calcula la suma inferior según AMIN4 145
VI.4.2.21. ASS4: Representa y calcula la suma superior según AMAX4...146
VI.4.2.22. ASI8: Afín, suma inferior en 8 subintervalos....146
VI.4.2.23. ASS8: Afín, suma superior en 8 subintervalos....146
VI.4.2.24. ASIn: Afín, suma inferior en "n" subintervalos 147
VI.4.2.25. ASSn: Afín, suma superior en "n" subintervalos 148
VI.4.2.26. AIINF: Afín integral inferior....148
VI.4.2.27. AISUP: Afín integral superior....148
VI.4.2.28. AI: Afín integrable 148
VI.4.2.29. ACAFE: Cálculo del área mediante fórmulas elementales 149
VI.4.2.30. ACID: Cálculo del área por medio de la integral definida....149
VI.4.2.31. ATCFI: Cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables 149
VI.4.2.32. DGSR: Determinación gráfica de las sumas de Riemann....150
VI.4.2.33. IGTVMD: Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial 151
VI.4.2.34. TFCIS: Teorema fundamental del cálculo integral (sumas)....152
VI.4.2.35. TFCII: Teorema fundamental del cálculo integral (incrementos) 152
VI.4.2.36. TFCSI: Teorema fundamental del cálculo integral (sumas e incrementos)....153
VI.4.2.37. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida....153
VI.4.2.38. IGAI: Interpretación gráfica de la aditividad de la integral 154
VI.4.2.39. IGTVMI: Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral....155
VI.4.2.40. CP: Cálculo de primitivas....156

ANEXO E (CAPÍTULOS VI, VII, VIII, IX Y X): INICIACIÓN A LAS INTEGRALES....157

ANEXO F (CAPÍTULOS VI, VII, VIII, IX Y X): CUADERNILLO DE LA INTEGRAL DEFINIDA....181

ANEXO G (CAPÍTULO VII): LA ACCIÓN EN EL CICLO DE EXPLORACIÓN 205

VII.3. ACCIÓN 206
VII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN.... 206
VII.3.1.1. SESIÓN 1: Miércoles, 12 de mayo de 2004 206
VII.3.1.2. SESIÓN 2: Jueves, 13 de mayo de 2004.... ...209

VII.3.1.3. SESIÓN 3: Viernes, 14 de mayo de 2004..................................212
VII.3.1.4. SESIÓN 4: Martes, 18 de mayo de 2004...................................215
VII.3.1.5. SESIÓN 5: Miércoles, 19 de mayo de 2004 218
VII.3.1.6. SESIÓN 6: Jueves, 20 de mayo de 2004...................................222
VII.3.1.7. SESIÓN 7: Viernes, 21 de mayo de 2004..................................227
VII.3.1.8. SESIÓN 8: Martes, 25 de mayo de 2004 231
VII.3.1.9. SESIÓN 9: Miércoles, 26 de mayo de 2004 235
VII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN 238

ANEXO H (CAPÍTULO VIII): LA ACCIÓN EN LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN 241

VIII.3. ACCIÓN... 242

VIII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN 242
VIII.3.1.1. SESIÓN 1: Jueves (9-12-2004) y viernes (2-12-2005) 243
VIII.3.1.2. SESIÓN 2: Viernes (10-12-2004) y miércoles (7-12-2005)......245
VIII.3.1.3. SESIÓN 3: Lunes (13-12-2004) y viernes (9-12-2005) 247
VIII.3.1.4. SESIÓN 4: Miércoles (15-12-2004) y lunes (12-12-2005).......249
VIII.3.1.5. SESIÓN 5: Jueves (16-12-2004) y martes (13-12-2005) 251
VIII.3.1.6. SESIÓN 6: Viernes (17-12-2004) y miércoles (14-12-2005)....253
VIII.3.1.7. SESIÓN 7: Lunes (20-12-2004) y viernes (16-12-2005) 254
VIII.3.1.8. SESIÓN 8: Lunes (10-01-2005) y lunes (19-12-2005) 256
VIII.3.1.9. SESIÓN 9: Miércoles (12-01-2005) y martes (20-12-2005).....258
VIII.3.1.10. SESIÓN 10: Jueves (13-01-2005) y lunes (9-01-2006)...........260
VIII.3.1.11. SESIÓN 11: Viernes (14-01-2005) y martes (10-01-2006).....262
VIII.3.1.12. SESIÓN 12: Lunes (17-01-2005) y miécoles (11-01-2006)....264
VIII.3.1.13. SESIÓN 13: Miércoles (19-01-2005) y vienes (13-01-2006) .268
VIII.3.1.14. SESIÓN 14: Jueves (20-01-2005) y lunes (16-01-2006).........270
VIII.3.1.15. SESIÓN 15: Jueves (20-01-2005) y lunes (23-01-2006).........274
VIII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN... 274

ANEXO I (CAPÍTULOS VIII, IX Y X): CÁLCULO MENTAL DE PRIMITIVAS ELEMENTALES............277

I.1. INTRODUCCIÓN... 277
I.2. CICLOS DE CONFIRMACIÓN (II Y III) 278
I.3. CICLOS DE CONSOLIDACIÓN (IV Y V)... 286
I.4. CICLO DE CIERRE (VI) 290

ANEXO J (CAPÍTULOS X Y XI):INFORME Y ENCUESTAS......303

J.1. INFORME DEL OBSERVADOR EXTERNO.. 304
J.2. ENCUESTA A LOS ALUMNOS... 308

J.2.1. CÁLCULO MENTAL 309
J.2.2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL (CUADERNILLO).................... 310
J.2.3. UNIDAD DIDÁCTICA: ÁREA E INTEGRAL DEFINIDA............... 311
J.2.4. PRÁCTICA CON EL DERIVE (LA INTEGRAL) 312

ANEXO K (CAPÍTULO XI):
PRÁCTICAS CON LÁPIZ Y PAPEL..313
K.1. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL SEGUNDO CICLO 314
K.2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL TERCER CICLO..................... 323

ANEXO L (CAPÍTULO XI):
TEXTO, PROGRAMA Y PRÁCTICAS CON DERIVE.....................337
L.1. PRÁCTICA CON DERIVE, CICLOS DE CONFIRMACIÓN................. 338
L.1.1. PROGRAMA FUENTE 339
L.1.2. TEXTO DE LA PRÁCTICA Y SOLUCIÓN CON DERIVE 340
L.2. PRÁCTICA CON DERIVE, CICLOS DE CONSOLIDACIÓN................ 354
L.2.1. PROGRAMA FUENTE 355
L.2.2. TEXTO DE LA PRÁCTICA Y SOLUCIÓN CON DERIVE 356
L.2.3. INTEGRALES INDEFINIDAS 370
L.3. PRÁCTICA CON DERIVE, CICLO DE CIERRE 372
L.3.1. PROGRAMA FUENTE...373
L.3. 2. TEXTO DE LA PRÁCTICA Y SOLUCIÓN CON DERIVE.............376

ANEXO A (CAPÍTULO IV): ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS LIBROS DE TEXTO *3*

IV.2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS LIBROS DE TEXTO 4

IV.2.2.1. ANAYA 4

IV.2.2.2. CASALS 7

IV.2.2.3. DONOSTIARRA 10

IV.2.2.4. ECIR 13

IV.2.2.5. EDEBÉ 16

IV.2.2.6. EDELVIVES 19

IV.2.2.7. EDITEX 22

IV.2.2.8. HESPÉRIDES 25

IV.2.2.9. MARFIL 27

IV.2.2.10. McGRAW-HILL 28

IV.2.2.11. SM 31

ANEXO A (CAPÍTULO IV): ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS LIBROS DE TEXTO

En el *Capítulo IV: Tratamiento Curricular* se estableció que el análisis didáctico de once libros de texto de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de otras tantas editoriales (Anaya, Casals, Donostiarra, Ecir, Edebé, Edelvivies, Editex, Hespérides, Marfil, McGraw-Hill y SM) quedaba recogido en el presente anexo.

Al objeto de no romper el desarrollo secuencial del capítulo cuarto, este anexo lo reconocemos con el mismo índice y denominación que por derecho natural le corresponde dentro de su propio capítulo aunque, como quedó dicho, no se insertó en el mismo al perseguir más brevedad en la redacción de la memoria de la presente tesis doctoral.

IV.2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS LIBROS DE TEXTO

Analizamos, a partir de este momento, once libros de texto de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II de segundo curso de bachillerato y, como es obvio, nuestro análisis se centra en el estudio del tratamiento curricular dado por los textos al cálculo integral[1].

En este epígrafe, el análisis realizado a cada libro de texto será descriptivo y contendrá la siguiente información:

- Título, en mayúscula y cursiva, de la unidad didáctica o unidades didácticas. Breve comentario.
- Por cada sección que consideremos importante: Número y título, en cursiva, de la sección. Breve comentario.
- Un pequeño texto o figura escaneada de la unidad didáctica *"La Integral".*
- Una breve reflexión de la unidad o unidades analizadas.

IV.2.2.1. ANAYA

UNIDAD DIDÁCTICA 9: INICIACIÓN A LAS INTEGRALES

Brevísima reseña histórica del cálculo de áreas, hace referencia a Arquímedes, Kepler, Newton y Leibniz. Define el concepto de primitiva.

1. Para empezar, reflexiona y resuelve

Expone un ejemplo en el cual expresa gráficamente la velocidad de dos trenes (Talgo y mercancías) y propone que los alumnos hagan varios cálculos para concluir que las distancias recorridas coinciden con las áreas bajo las curvas respectivas. A continuación escribe tres ejemplos en los que determina "*la función cuya derivada es....*", y termina con un ejercicio cuyo enunciada comienza: "*Di cuál es la función cuya derivada es:...*". Hace referencia a la energía consumida como el área bajo la curva de la función potencia (en ediciones anteriores desarrolla un ejemplo, en ésta ha copiado el texto anterior y no el ejemplo). Termina diciendo que en esta unidad se verá el área bajo una curva y el cálculo de primitivas.

[1] Entiéndase: Integral indefinida, integral definida, calculo mental aplicado al cálculo de primitivas elementales y el uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizajes de la integral.

2. Primitivas. Reglas básicas para el cálculo

Da la definición y nomenclatura de la primitiva, nunca escribe *"dx"* en el cálculo integral. Escribe las propiedades de la linealidad de la integración, sigue con ejercicios resueltos y propuestos del cálculo de primitivas, concluye con un "*resumen de las reglas para el cálculo de primitivas*". Todo ello sin ninguna justificación.

3. Área bajo una curva

Considera importante saber el área bajo una curva y lo ilustra con tres ejemplos (velocidad, potencia e índices de natalidad-mortalidad), dice que "*el área es la integral entre a y b de ƒ*". Resuelve tres ejercicios, dos de ellos presentan sendas gráficas un tanto confusas. Define la función *"área bajo una curva"* y lo interpreta con varios ejemplos.

4. Teorema Fundamental del Cálculo

Enuncia, no demuestra, dicho teorema. Determina el procedimiento del cálculo de áreas según la regla de Barrow e incluso da una demostración de la misma. Acaba con varios ejemplos y proponiendo ejercicios, todos ellos de funciones polinómicas o trigonométricas elementales.

5. Cálculo del área entre una curva y el eje X

Detalla el procedimiento a seguir para el cálculo de dichas áreas y lo ilustra con tres ejercicios resueltos. No calcula, por medio de la integral definida, áreas de figuras conocidas como son el rectángulo, triángulo, trapecio y círculo. Propone la resolución de dos ejercicios.

6. Cálculo del área comprendida entre dos curvas

Considera que el área encerrada entre las gráficas de las funciones $y=f(x)$ e $y=g(x)$ es igual al área encerrada entre la función diferencia $y=(f-g)(x)$ y el eje X. Resuelve dos ejercicios, uno de ellos con dos recintos.

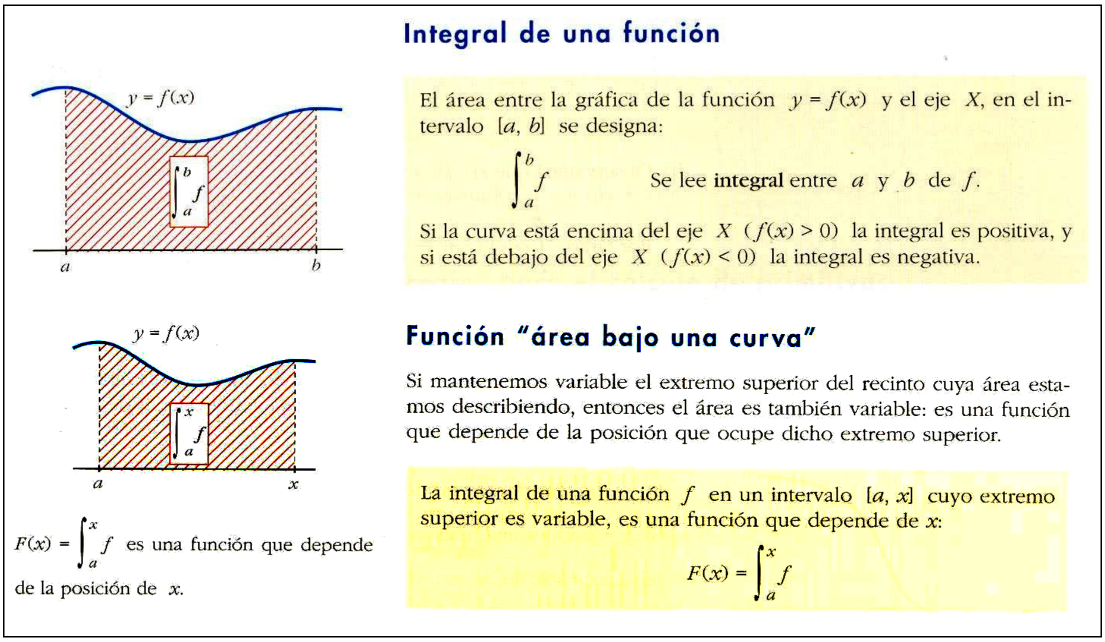
7. Ejercicios y problemas resueltos

Propone y resuelve ejercicios de varios tipos, a saber: cálculo de primitivas, área bajo una curva, teorema fundamental del cálculo y cálculo de áreas. Sigue sin justificar nada y no relaciona los resultados con áreas conocidas.

8. Ejercicios y problemas propuestos

La mayoría son ejercicios de aplicación inmediata, las cuestiones teóricas son muy simples y, ahora sí, propone que se determine el área de un rectángulo por medio de la integral definida. Hay cuatro ejercicios propuestos en las pruebas de acceso a la Universidad con la solución al final del libro y sin dar ninguna orientación.

Después de concluir *"La Integral"* y como colofón al *Análisis Matemático*, el texto de Anaya da unas orientaciones a los estudiantes para *mejorar su formación* y les propone dos pruebas de autoevaluación del *Análisis.*



Integral de una función

El área entre la gráfica de la función $y = f(x)$ y el eje X, en el intervalo $[a, b]$ se designa:

$\int_a^b f$ Se lee **integral** entre a y b de f.

Si la curva está encima del eje X ($f(x) > 0$) la integral es positiva, y si está debajo del eje X ($f(x) < 0$) la integral es negativa.

Función "área bajo una curva"

Si mantenemos variable el extremo superior del recinto cuya área estamos describiendo, entonces el área es también variable: es una función que depende de la posición que ocupe dicho extremo superior.

La integral de una función f en un intervalo $[a, x]$ cuyo extremo superior es variable, es una función que depende de x:

$$F(x) = \int_a^x f$$

$F(x) = \int_a^x f$ es una función que depende de la posición de x.

Figura IV.2.2.1. Área y función área.

Reflexión: Los autores de esta unidad no relacionan el viejo concepto de área explicado en la secundaria obligatoria con el nuevo y debieran haberlo realizado mediante "aproximaciones por defecto o exceso" al nuevo área. Es un error no escribir $\int_a^b f(x)\,dx$ ni $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ puesto que no es lo mismo el *"área"* que la *"función área"* y, además, según la figura IV.2.2.1 la función *F(x)* puede confundirse con $\int_a^b f(x)\,dx$ al ser ambas áreas similares.

El profesor investigador considera que la enseñanza de la integral que se propone en este libro es deficiente porque, entre otras razones, la integral definida debe mejorarse y están ausentes las nuevas tecnologías.

IV.2.2.2. CASALS

UNIDAD DIDÁCTICA 9: INTEGRAL INDEFINIDA

Comienza haciendo una referencia histórica de la integral definida y lo ilustra con un ejemplo de espacio-velocidad, continúa con primitivas e integral indefinida (primitivas, integral indefinida, propiedades de la integral indefinida y tabla de integrales inmediatas). Explica los siguientes métodos de integración: integración de funciones racionales con raíces reales simples y múltiples, integración por sustitución e integración por partes. Propone la resolución de varios ejercicios, algunos de ellos mediante el *"Cálculo Mental"* y el uso de la calculadora TI-92 y de *DERIVE* para el cálculo de primitivas.

UNIDAD DIDÁCTICA 10: INTEGRAL DEFINIDA

Continúa con la introducción histórica de la unidad anterior, citando a científicos tan ilustres como Newton, Leibniz, Barrow, Cauchy y Riemann.

1. Integral definida

Esta sección está estructurada en varios apartados que escribimos, en cursiva, entrecomillados y comentamos lo que contiene cada uno de ellos.

En *"Experimenta"*, propone al estudiante que calcule el área de cinco figuras planas conocidas (rectángulo, triángulo, trapecio, hexágono y círculo) para concluir que el área de una figura cualquiera puede hallarse mediante aproximaciones por defecto o exceso. Las superficies vienen dibujadas sobre papel cuadriculado, lo cual facilita los cálculos.

"Área bajo una curva y el eje OX". Hay varias representaciones gráficas, calcula áreas por defecto y por exceso para dos particiones distintas, termina escribiendo *"El **área bajo una curva** y=ƒ(x) y encima del eje OX en el intervalo [a,b] es el límite al que tienden las áreas inferiores, A_I, y las áreas superiores, A_S, cuando **dx** tiende a cero*"[2]. Se realiza la representación gráfica del área bajo el signo integral y se discriminan las funciones positivas, negativas y las que cambian de signo.

"Propiedades de la integral definida". Establece las propiedades clásicas de la integral definida salvo la linealidad. El teorema del valor medio del cálculo integral lo justifica mediante su interpretación geométrica.

[2] El texto en negrita es de los autores.

“La función área”. Se define, se interpreta geométricamente y enuncia, sin demostrarlo, el teorema fundamental del cálculo integral.

“La regla de Barrow”. Se enuncia y se aplica a un ejemplo.

Termina la sección proponiendo la resolución de varios ejercicios. En ningún momento construye la integral de Darboux ni la de Riemann.

2. Cálculo de áreas

En el apartado *“Experimenta”*, propone que el alumno calcule un área por el método tradicional y con la nueva técnica, es decir, la integral definida.

“Cálculo de un área entre una curva, el eje OX y las rectas x=a, x=b”. Da el procedimiento correspondiente y lo aplica a un ejemplo tomando el valor absoluto de las integrales entre dos raíces consecutivas.

“Cálculo del área entre dos curvas”. Resuelve un ejercicio después de dar el algoritmo. Como caso particular considera el área comprendida entre una función y el eje OX.

Termina proponiendo la resolución de siete ejercicios.

3. Aplicaciones de la integral definida

En *“Aplicaciones al ámbito de las Ciencias Sociales”* encontramos seis ejercicios interesantes, tres resueltos y tres propuestos.

4. Árbol de contenidos, notaciones y evitar errores

Resumen en formato organigrama de los conceptos más importantes que intervienen en la integral definida. Las notaciones son las de máximo, mínimo, áreas inferior y superior, integral definida y regla de Barrow.

5. Chequeos y problemas

Los primeros ejercicios contribuyen a consolidar los conocimientos teóricos adquiridos en esta unidad didáctica. Los problemas son de varios tipos, siete de ellos son de aplicación a otras Ciencias. Considero que hay pocos ejercicios (10) y problemas (10). Ninguna función está definida a trozos.

6. Cálculo mental, curiosidades y taller de investigación

Se proponen ejercicios de cálculo mental, una curiosidad y un problema que exige a los alumnos coordinar los conocimientos adquiridos de la integral.

7. Calculadora e Informática

Los autores dan las instrucciones precisas para calcular integrales definidas con la calculadora TI-92 y con el programa de cálculo simbólico *DERIVE* y proponen la resolución de varios ejercicios utilizando estas tecnologías.

CÁLCULO MENTAL

1. Calcula la primitiva que pase por el punto que se indica en cada caso:

$\int 2\,dx$	por el punto (0, 2)
$\int 2x\,dx$	por el punto (1, 1)
$\int (2x^3 - 2x)\,dx$	por el punto (0, 5)
$\int e^{x-1}\,dx$	por el punto (1, 2)
$\int \frac{1}{x}\,dx$	por el punto (e, 0)
$\int \cos x\,dx$	por el punto ($\pi/2$, 1)

2. Calcula las siguientes primitivas:

$\int 2\,dx$	$\int (x^3 + x^2 + x + 5)\,dx$
$\int e^{x-1}\,dx$	$\int \frac{dx}{x}$
$\int \cos 3x\,dx$	$\int \operatorname{sen}\frac{x}{5}\,dx$
$\int \operatorname{tg} 7x\,dx$	$\int 2^{3x+5}\,dx$
$\int 2x \operatorname{sen} x^2\,dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

CÁLCULO MENTAL

Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^{10} 2\,dx$ e) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

b) $\int_{-2}^{2} x\,dx$ f) $\int_{1}^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$

c) $\int_{-2}^{2} x^2\,dx$ g) $\int_0^1 2e^{2x}\,dx$

d) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ h) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+x^2}$

TALLER DE INVESTIGACIÓN

Dada la función $f(x) = \frac{2}{x}$, demuestra que el área del triángulo formado por la recta tangente a la función $f(x)$ y los ejes de coordenadas es constante. Calcula el valor de esa constante.

Figura IV.2.2.2. Cálculo mental y taller de investigación.

Reflexión: Consideramos que el tratamiento dado a la integral indefinida es amplio y aceptable la presentación de la integral definida.

Pensamos que es un error definir la integral definida como un límite puesto que no existe ninguna sucesión que haya sido definida, hubiera sido más correcto definir los conceptos de *integral inferior* y *superior* y exigir la condición de igualdad para definir la *integral definida.* Por tanto, consideramos que la formalización teórica de la integral definida debe ser más profunda y, al menos, debiera demostrarse la regla de Barrow.

Interesantes, aunque escasas, son las propuestas de *CÁLCULO MENTAL* de integrales y el *TALLER DE INVESTIGACIÓN* que pretende motivar a los alumnos en la ampliación de sus conocimientos matemáticos.

Las nuevas tecnologías están presentes en los dos capítulos dedicados a la integral, consideramos que es muy positiva su inclusión, además, pensamos que la elección de *DERIVE* es un acierto por lo intuitiva que es su utilización y la popularidad del mismo.

IV.2.2.3. DONOSTIARRA

UNIDAD DIDÁCTICA 9: INTEGRAL

No realiza ninguna introducción histórica y comienza directamente con la exposición "muy particular" de la unidad.

1. La Diferencial

Se define "*La diferencial de una función como el producto de su derivada por un incremento arbitrario de la variable independiente*", el autor considera que este concepto es indispensable para relacionar la derivada y la integral. Se demuestra la *"propiedad fundamental de la diferencial"*[3] y establece *"la derivada de una función como cociente de diferenciales"*[4].

2. Primitiva de una función, integral indefinida e integrales inmediatas

En estas secciones se incluyen los tópicos habituales, se demuestra por Cauchy que dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante. Se afirma que la función $f(x)=e^x/x$ no posee primitiva.

3. Métodos de integración

Propone el cálculo de primitivas *"por descomposición de sumando"*, no así de funciones racionales cuyo denominador posea raíces reales, *"integración por sustitución o cambio de variable"* e *"integración por partes".* Se resuelven varios ejercicios y se proponen otros en los cuales se da la solución pero no su resolución.

4. Función área e integral definida

Por medio de incrementos demuestra: "*La función que nos da el área comprendida entre una curva, el eje horizontal, una recta vertical fija y otra recta vertical variable es una primitiva de la función de la curva"*, es decir, el Teorema Fundamental del Cálculo que no es nombrado.

Se define el concepto de integral definida en los siguientes términos: *"La integral definida de una función $f(x)$ entre dos extremos a y b como el área*

---

[3] *"Siempre que la derivada de una función sea distinta de cero, la diferencial de la función y el incremento de la misma son dos infinitésimos equivalentes cuando $\Delta x \to 0$. $\Delta x \to 0 \Rightarrow dy \approx \Delta y$".*

[4] *"La derivada de una función es el cociente entre la diferencial de la función y la diferencial de la variable independiente".*

encerrada entre la curva y=ƒ(x) el eje horizontal y las rectas verticales x=a y x=b. Para representar la integral definida se utiliza la notación: $\int_a^b f(x)\,dx$ *".*

En el texto se calculan áreas por procedimientos geométricos elementales para *"funciones extraordinariamente sencillas"*[5].

5. Regla de Barrow y cambio de variable en una integral definida

Se demuestra dicha regla y se especifica su algoritmo. El autor propone que al efectuar el cambio de variable en una integral definida no se deshaga el cambio, más bien que se cambien los extremos de integración.

6. Aplicaciones de la integral definida[6]*: Área limitada por una curva y área encerrada entre dos curvas*

El cálculo de áreas sigue los procedimientos clásicos.

7. Actividades

Hay muy poca diversidad y faltan problemas específicos de las ciencias sociales, en todos incluye la solución, no su resolución.

Reflexión: La exposición teórica de la integral definida partiendo del concepto de diferencial de una función[7] nos parece interesante por salirse de las clásicas aproximaciones mediante sumas, sin embargo, creemos que no es la mejor alternativa de presentar la integral definida a alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales, entre otras razones, por las dificultades que tienen en asimilar el concepto de derivada y, pensamos, que se puede confundir con el concepto diferencial.

La estructura de la unidad didáctica es aceptable, aunque incompleta, hay demasiadas secciones[8] y se han encontrado algunos errores; además, no reconoce a esta integral como integral de Darboux o de Riemann. Es muy positivo que en todos los ejercicios propuestos se haya incluido la solución.

---

[5] Se resuelven tres ejemplos: El primero el área está por encima del eje de abscisas, el segundo el área está por debajo del eje *OX* y el tercero la función cambia de signo.

[6] Véase la *Figura IV.2.2.3. Aplicaciones prácticas de la integral definida.*

[7] El profesor investigador manifiesta que desconocía esta forma de fundamentar la integral definida.

[8] La unidad didáctica se compone de diecinueve secciones teórico-prácticas más la sección práctica de actividades finales.

El “viejo” concepto de área conocido por los alumnos le integra, mediante ejemplos, al “nuevo” concepto de área definida mediante la integral definida, lo consideramos positivo por no existir ninguna ruptura entre las dos definiciones de área, sin embargo, debiera haberse matizado que área e integral definida son conceptos distintos.

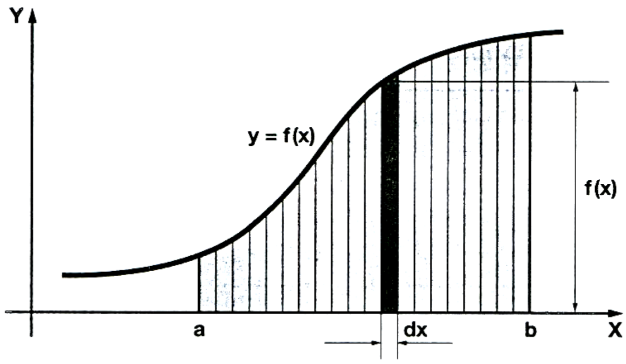
17. APLICACIONES PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Consideremos el recinto encerrado entre la curva de la figura, el eje horizontal y los segmentos verticales trazados desde éste sobre los puntos de abscisas a y b.

Si dividimos este recinto en franjas verticales y hacemos que la anchura de cada una de ellas tienda a 0, obtenemos infinitas de estas franjas, cada una de las cuales tiene una anchura dx y una altura $f(x)$, por lo tanto, la superficie de la misma es:

$$dA = f(x)\,dx$$

La integral de esta expresión, que no es otra cosa que la suma de las áreas de las infinitas franjas, nos da el área total del recinto considerado.



En general, independientemente del significado físico que tengan las variables, una integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se puede interpretar como una suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños, cada uno de los cuáles es $f(x)\,dx$.

Por ello, la integral definida es la herramienta matemática que es preciso utilizar cuando, después de haber evaluado la cuantía de una determinada cantidad infinitesimal de una magnitud, se precisa efectuar una suma de infinitos sumandos infinitesimales para obtener una cantidad finita.

Figura IV.2.2.3. Aplicaciones prácticas de la integral definida.

Esta unidad didáctica contiene muy poca variedad de problemas, no plantea ninguno relativo a las ciencias sociales e ignora las integrales definidas cuya función integrando está definida a trozos. En ningún momento se plantea la utilización de las nuevas tecnologías en el cálculo integral.

IV.2.2.4. ECIR

UNIDAD DIDÁCTICA 9: LA INTEGRAL

1. Primitiva de una función, integral indefinida e integrales inmediatas

Plantea el cálculo de primitivas como el proceso inverso de la derivación. Considera como el teorema fundamental del cálculo integral a: "*Si F y G son dos primitivas de una misma función ƒ en un intervalo I, entonces F y G se diferencian en una constante*", no lo demuestra[9]. Define el concepto de integral indefinida y presenta una reducida tabla de integrales inmediatas.

2. Propiedades de la integral indefinida e interpretación geométrica

Relaciona la integración y la derivación como operaciones inversas y expresa la linealidad del operador integral, se propone el cálculo de varias integrales indefinidas. Los autores representan la integral indefinida como *"una familia de curvas"* y demuestran el teorema: "*Si una función ƒ admite primitiva en I, existe una primitiva G de ƒ, y sólo una, que verifica G(a)=b, siendo a un punto de I y b un número real dado*".

3. Área bajo una curva e integral definida

Haciendo referencia a Arquímedes, para una función continua y positiva, toma una partición del intervalo cerrado y acotado [a,b] y calcula las sumas inferiores y superiores, concluye que el área por determinar está entre las dos. En cierta medida justifica la definición de integral definida[10], ésta es: "*Sea F una función continua en el intervalo [a,b] y sea F una primitiva de ƒ en [a,b]. El número real F(b)–F(a) se dice que es la integral definida, entre a y b, de la función ƒ"*, la escribe en su fórmula clásica y la reconoce como regla de Barrow.

---

[9] Esta versión del teorema fundamental del cálculo integral sólo aparece en este libro de texto. Pensamos que es un gravísimo error añadirle a este teorema el adjetivo "fundamental", consideramos que es suficiente reconocerle como "Proposición".

[10] Considera, sin demostrar, el siguiente teorema: *"Si f es una función continua en [a,b] entonces existe una primitiva de f en [a,b]"*. Entendemos que este teorema es falso si aplicamos la definición de primitiva de una función dada por los autores, considérese para ello la función de densidad de la distribución normal N(0,1) o la función del texto anterior $f(x)=e^x/x$ para $a>0$. Si consideramos la función *"A(x) como el área recorrida entre la gráfica de una función continua, el eje de abscisas, una recta vertical fija, x=a, y otra recta vertical variable, es decir,* $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *"*, entonces es cierto y, además, es reconocido como "Teorema Fundamental del Cálculo".

4. Función integral definida e interpretación geométrica de la integral definida

La función integral, $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, ha sido definida de forma muy precisa y la interpretación geométrica puede verse en la figura IV.2.2.4.

5. Propiedades de la integral definida

Aditividad del intervalo, demostrada aplicando la regla de Barrow, intercambio de los extremos de integración, linealidad y monotonía.

6. Cálculo de áreas planas

Se resuelven los problemas habituales y se estudia su casuística.

7. Resolución de problemas, formulario, ejercicios finales y autoevaluación

El texto incluye la resolución de varios ejercicios, hace un resumen de la unidad didáctica y propone la resolución de gran cantidad de problemas y ejercicios finales, aunque sólo dos son específicos de otras especialidades (Física y Economía). La autoevaluación consiste en un cuestionario tipo test de diez preguntas con cuatro respuestas posibles.

8. Apéndice: Algunos métodos de integración

Ampliación de la lista de primitivas inmediatas, integrales reducibles e inmediatas, integración por sustitución, integración por partes e integración de funciones racionales cuyo denominador tiene raíces reales.

Reflexión: Los autores de esta unidad didáctica han incluido gran cantidad de ejercicios y problemas resueltos y propuestos[11], aunque podemos considerar que todos ellos son los clásicos de orientación matemática y, testimonialmente, sólo uno está en el contexto de las ciencias sociales.

La exposición teórica de la integral definida no la consideramos acertada, pensamos que debiera haberse definido a partir de varias sumas inferiores y superiores, no es suficiente afirmar que la superficie A está comprendida entre "una" suma inferior A_1 y "otra" suma superior A_2. Craso error es considerar el teorema fundamental del cálculo integral a quien no lo es y, sin embargo, es un acierto matizar: *"Hay que señalar que el resultado [de] esta integral es una función de x y no de t, siendo t la variable de integración".*

[11] Haciendo un rápido repaso, son más de 50 ejercicios resueltos y los propuestos superan los 120.

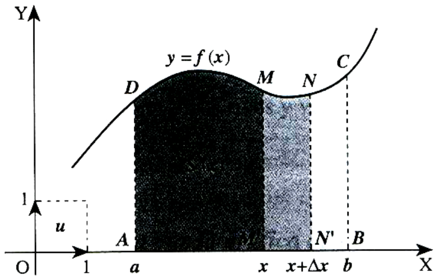
Consideramos que debiera haberse hecho una pequeña introducción histórica en la cual tendrían que estar incluidos Arquímedes, Newton, Leibniz y Riemann. Pensamos que en el amplio desarrollo de esta unidad didáctica debiera haberse dado cabida a las nuevas tecnologías.

8 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Sea f una función continua y positiva en $[a, b]$ y con gráfica como la de la figura, referida a un sistema ortonormal.

El conjunto $\mathscr{D} = \{P(x, y) \,/\, a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ se llama *trapecio mixtilíneo* y se le representa por $(ABCD)$.

A cada punto M de la gráfica, de abscisa x, con $x \in [a, b]$, se le asocia el trapecio mixtilíneo $(AM'MD)$. Su área, que aparece sombreada en la figura, depende de x y la representamos por $S(x)$, siendo $S(a) = 0$ y $S(b) =$ área de $(ABCD)$.



$S(x)$ está medida a partir de la unidad de superficie elegida, en este caso es el área del cuadrado u. En general, su medida se expresará en unidades de área $(u.a.)$.

Sea N un punto de la gráfica, de abscisa $x + \Delta x$, cercano a M. El área del trapecio mixtilíneo $(AN'ND)$ es $S(x + \Delta x)$ y la del trapecio mixtilíneo $(M'N'NM)$ es $S(x + \Delta x) - S(x)$.

Se puede comprender, con ayuda de la figura, que $S(x + \Delta x) - S(x)$ difiere poco de $f(x) \cdot \Delta x$ (área del rectángulo de dimensiones Δx y $f(x)$). Es decir:

$$S(x + \Delta x) - S(x) \simeq f(x) \cdot \Delta x$$

y de forma más precisa se puede demostrar que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x)$$

es decir: $S'(x) = f(x)$, y por tanto S es una primitiva de f en $[a, b]$.

Puesto que $S(x)$ es una primitiva de f en $[a, b]$ y se anula en $x = a$, entonces:

$$S(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\, dt$$

siendo F una primitiva cualquiera de f en $[a, b]$.

Hay que señalar que el resultado esta integral es una función de x y no de t, siendo t la variable de integración.

Figura IV.2.2.4. Interpretación geométrica de la integral definida[12].

Excelente idea es incluir *"Algunos métodos de integración"* en un *"Apéndice"* ya que podemos considerarlo un importante complemento de la integral.

[12] Por razón de espacio no se ha escaneado la parte final que representa la superficie entre la gráfica de la función *f(x)*, el eje *OX* y las rectas *x=a* y *x=b*. Concluye, de nuevo, con la regla de Barrow.

IV.2.2.5. EDEBÉ

UNIDAD DIDÁCTICA 9: INTEGRALES INDEFINIDAS

Comienza este tema con una brevísima referencia a Newton, Leibniz y Riemann, hace un pequeño esquema y prepara la unidad recordando las propiedades de las derivadas junto con la definición de los elementos de un polinomio y la descomposición factorial del mismo.

El desarrollo de este tema es el siguiente: Primitivas e integrales (primitiva de una función, integral indefinida, propiedades de la integral indefinida, integrales indefinidas inmediatas) y métodos básicos de integración (integración por descomposición, integración por cambio de variables, integración por partes y métodos de integración para funciones racionales).

UNIDAD DIDÁCTICA 10: LA INTEGRAL DEFINIDA Y APLICACIONES

Se inicia este capítulo afirmando que *"los griegos inventaron el método de exhaución para calcular áreas de figuras planas"*, sigue con los objetivos que se pretenden alcanzar, da un esquema de la unidad y recuerda al alumno las simetrías y traslaciones de gráficos, así como el área de algunas figuras planas (triángulo, romboide, trapecio y círculo).

1. Área bajo una curva

Construye, representa y calcula varias sumas inferiores y superiores para la función $f(x)=x^2+1$ en el intervalo [0,2] y *"con ayuda del ordenador"* concluye que el área buscada es 4,66... unidades cuadradas.

2. Integral definida. Concepto y propiedades

Aunque no lo expresa, gráficamente se observa que toma la sucesión de particiones $P_n = \{a+(b-a)i/n\}_{i=0}^{n}$ del intervalo [a,b], siendo $f(x)$ positiva y continua, define las sumas inferiores s_n y superiores S_n y tomando límites de estas sumas cuando n tiende a infinito, finalmente, concluye que es el área buscada; es decir, construye la integral de Darboux que llama de Riemann.

Expresa las propiedades clásicas de la integral definida[13], se olvida del teorema del valor medio, no demuestra ninguna y las justifica gráficamente.

[13] Linealidad, aditividad y monotonía. Relaciona los conceptos de área e integral definida según sea el signo de la función integrando.

3. Cálculo de integrales definidas: Regla de Barrow y métodos numéricos de integración

La regla de Barrow se enuncia, no se demuestra ni se justifica, se dan tres ejemplos resueltos y se propone la resolución de otros tres ejercicios.

Realiza la integración aproximada[14] mediante el método de los trapecios dando el procedimiento de su aplicación, resuelve tres ejemplos y propone otros tres. El método de Simpson, no lo justifica, expone el algoritmo a seguir pero no resuelve ni propone ejercicios[15].

4. Aplicaciones: Áreas de figuras planas, estudio del movimiento y análisis de fenómenos sociales

Las primeras son las habituales apoyadas con varios ejemplos y gran cantidad de gráficas. Las segundas calculan el espacio, la velocidad y la velocidad media de diferentes móviles. Por último, aplica el cálculo integral a dos ejemplos (Economía y Psicología).

5. Resolución de ejercicios y problemas

Los ejercicios resueltos tratan de aplicar todos los conceptos aprendidos en la unidad didáctica, uno de ellos calcula el área por la regla de Barrow, método de los trapecios y métodos de Simpson. Aplica la integral definida para calcular un capital final depositado a un interés determinado durante un periodo de tiempo cuando el *"crecimiento es instantáneo"*[16].

6. Resumen y actividades

El primero es sencillo y práctico. Los ejercicios finales son escasos (28) aunque recorren todos los tópicos presentados por los autores en este tema, varios de ellos son cuestiones teóricas y cinco de ellos corresponden al ámbito de las ciencias sociales. En todos ellos se incluye la solución.

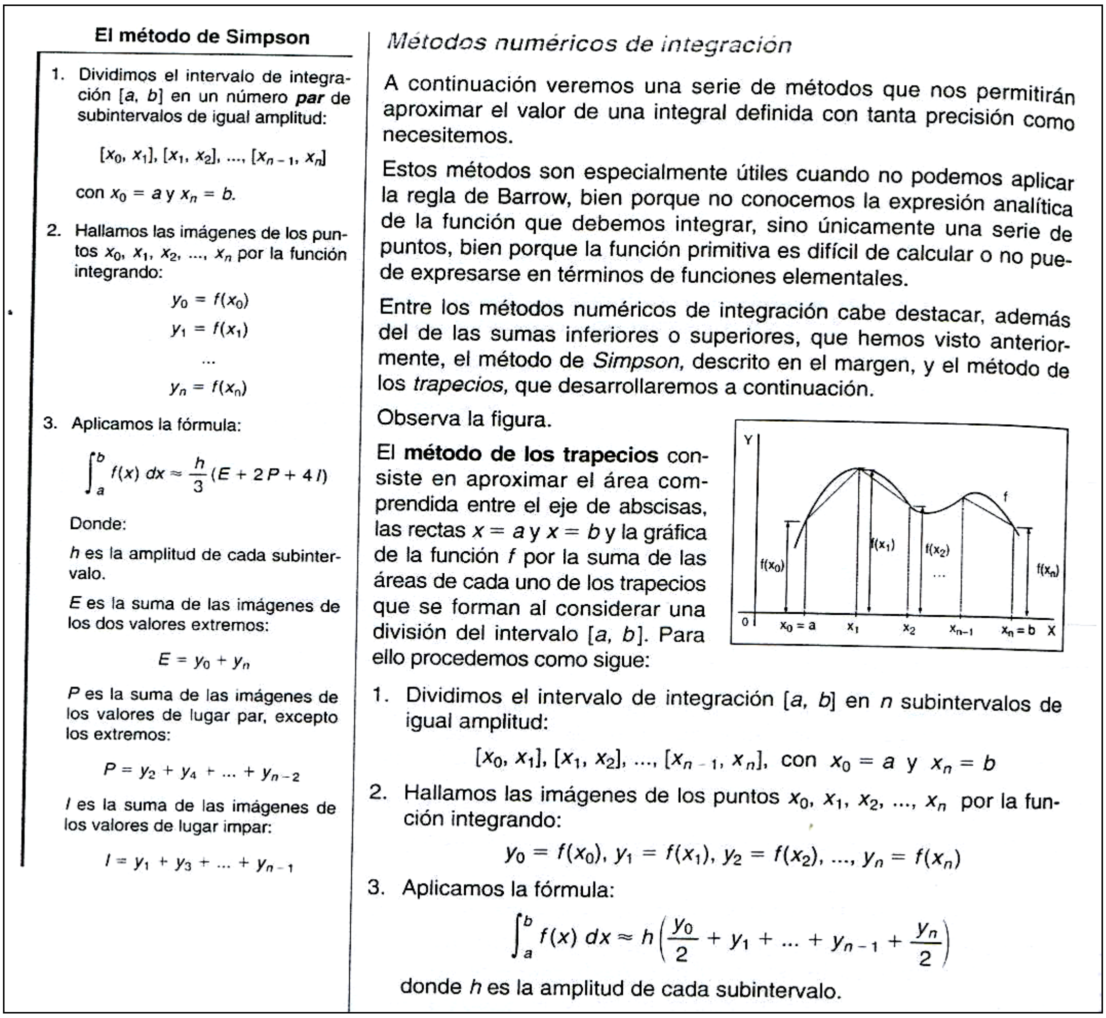
Reflexión: La formalización de la integral definida mediante la construcción de sucesiones de sumas inferiores y superiores es un paso importante, sin embargo, debiera haber matizado que *"el diámetro de la sucesión de*

[14] Matiza que las sumas inferiores y superiores también son métodos numéricos de integración.

[15] Véase, según los autores, el método de los trapecios y la regla de Simpson en la *Figura IV.2.2.5*.

[16] Consideramos que este ejercicio es más sencillo obteniendo la fórmula, mediante el cálculo de límites, $C_f = C_i e^{r\,t}$.

particiones debe tender a cero” o en su defecto escribir que *“la amplitud de cada subintevalo de la partición P_n es (b–a)/n”.*



El método de Simpson

1. Dividimos el intervalo de integración $[a, b]$ en un número ***par*** de subintervalos de igual amplitud:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

con $x_0 = a$ y $x_n = b$.

2. Hallamos las imágenes de los puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ por la función integrando:

$$y_0 = f(x_0)$$
$$y_1 = f(x_1)$$
$$\dots$$
$$y_n = f(x_n)$$

3. Aplicamos la fórmula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(E + 2P + 4I)$$

Donde:

h es la amplitud de cada subintervalo.

E es la suma de las imágenes de los dos valores extremos:

$$E = y_0 + y_n$$

P es la suma de las imágenes de los valores de lugar par, excepto los extremos:

$$P = y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}$$

I es la suma de las imágenes de los valores de lugar impar:

$$I = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}$$

Métodos numéricos de integración

A continuación veremos una serie de métodos que nos permitirán aproximar el valor de una integral definida con tanta precisión como necesitemos.

Estos métodos son especialmente útiles cuando no podemos aplicar la regla de Barrow, bien porque no conocemos la expresión analítica de la función que debemos integrar, sino únicamente una serie de puntos, bien porque la función primitiva es difícil de calcular o no puede expresarse en términos de funciones elementales.

Entre los métodos numéricos de integración cabe destacar, además del de las sumas inferiores o superiores, que hemos visto anteriormente, el método de *Simpson*, descrito en el margen, y el método de los *trapecios*, que desarrollaremos a continuación.

Observa la figura.

El **método de los trapecios** consiste en aproximar el área comprendida entre el eje de abscisas, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de la función f por la suma de las áreas de cada uno de los trapecios que se forman al considerar una división del intervalo $[a, b]$. Para ello procedemos como sigue:

1. Dividimos el intervalo de integración $[a, b]$ en n subintervalos de igual amplitud:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n], \text{ con } x_0 = a \text{ y } x_n = b$$

2. Hallamos las imágenes de los puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ por la función integrando:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

3. Aplicamos la fórmula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

donde h es la amplitud de cada subintervalo.

Figura IV.2.2.5. Dos métodos de integración numérica.

Consideramos que es un grave error no establecer el teorema fundamental del cálculo integral ni demostrar la regla de Barrow; además, no se calculan áreas de superficies planas conocidas por el nuevo procedimiento lo cual supone una desconexión total con los conocimientos adquiridos por los alumnos en los cursos anteriores. Sólo hay una función definida a trozos.

Las nuevas tecnologías no se consideran en ningún momento, por tanto, se ignoran las calculadoras y los programas de cálculo simbólico; sin embargo, entendemos que son herramientas imprescindibles para la enseñanza y el aprendizaje de la integral, además, pensamos que hoy en día una razón por la cual es importante el estudio de la integración numérica es por la facilidad de realizar los cálculos con medios informáticos.

IV.2.2.6. EDELVIVES

UNIDAD DIDÁCTICA 9: INTEGRAL INDEFINIDA

Expresa de forma clásica todos los tópicos de este concepto. Definición, interpretación geométrica, propiedades, integrales inmediatas, métodos de integración[17]. En los márgenes presenta a grandes matemáticos, se hacen pequeños comentarios y se recuerda la regla de Ruffini. Completa la unidad didáctica con numerosos ejercicios de integración.

UNIDAD DIDÁCTICA 10: INTEGRAL DEFINIDA

1. Área de recintos planos, integral definida y propiedades de la integral definida

Define la partición de un intervalo[18], enuncia el teorema de Weierstrass, establece las sumas inferiores y superiores de una función f(x), continua y positiva, asociada a una partición *P* de [a,b] y calcula las áreas por defecto y por exceso. Aplica todo esto a la función f(x) = 2x + 1 en el intervalo [1,4].

Tomando una sucesión de particiones cada vez más finas, afirma que la sucesión de sumas inferiores es creciente y la sucesión de sumas superiores es decreciente y establece[19]: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_{Sup}(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S_{Inf}(f, P_n)$.

No se olvida de ninguna propiedad importante, alguna de ellas las interpreta geométricamente y en las actividades propone que se calculen, para funciones afines, integrales definidas según las clásicas fórmulas de las áreas elementales.

2. Teorema de la media, función integral y regla de Barrow

Enuncia y hace la interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo integral. Define la función área $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ y realiza su representación gráfica, el teorema fundamental del cálculo integral es

[17] Por descomposición, cambio de variable, por partes e integración de funciones racionales cuando las raíces del denominador son reales.

[18] *"Los subintervalos de una partición no deben tener la misma amplitud, sin embargo, para nuestro propósito los subintervalos asociados a una partición tendrán la misma amplitud".*

[19] Esta definición de integral es correcta porque todos los subintervalos de cada una de las particiones P_n tienen la misma amplitud y ésta es (b–a)/n. En caso contrario, pueden no coincidir los límites y, sin embargo, la función ser integrable.

enunciado, no demostrado. La demostración de la regla de Barrow puede verse en la figura IV.2.2.6.

3. Cálculo de áreas de regiones planas y volúmenes de revolución

Se resuelven problemas de diferentes tipos de áreas planas y se hallan varios volúmenes de cuerpos de revolución aplicando directamente, sin justificación alguna, la fórmula $V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$.

4. Problemas, cuestiones y autoevaluación

Los problemas propuestos son abundantes y recorren todos los puntos explicados en la unidad didáctica, existen varios ejercicios de cálculo de integrales definidas en los cuales las funciones integrando están definidas a trozos, algunos problemas están en el del ámbito de las ciencias sociales.

Las cuestiones son teórico-prácticas y bastante completas y los ejercicios de autoevauación van desde los que pueden considerarse meramente operativos a los que contienen un alto contenido de comprensión teórica[20].

5. Acércate a la Universidad y el análisis en la actualidad

El texto contiene el enunciado de varios problemas propuestos en las pruebas de acceso de diferentes universidades españolas. Tres problemas actuales encuentran solución mediante el análisis matemático, uno de ellos es el problema rapaz-presa de Volterra[21].

Reflexión: Consideramos que el desarrollo de la integral en este texto es amplio y tiene gran cantidad de ejercicios, cuestiones y problemas, además, podemos considerar que tienen diferentes grados de dificultad.

Debemos objetar que los autores han incluido algunos problemas de física y ciencias sociales para ser resueltos por medio de la integral, sin embargo, no hemos encontrado ninguno cuya resolución esté en el libro.

---

[20] Ejercicio nº 8: Halla los posibles puntos extremos de la función $F(x)=\int_1^{x^2}(t^2-1)\,dt$.

[21] Ecuaciones rapaz-presa de Volterra: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a-by)\\ \dfrac{dy}{dt}=-y(c-dx)\end{cases}$, *x* es el número de presas, *y* el de rapaces, *t* el tiempo y *a*, *b*, *c* y *d* son constantes.

La exposición teórica tiene que ser más cuidada, en el teorema fundamental del cálculo integral debiera intercambiarse el extremo superior de la integral con la variable de integración y para derivar funciones dadas con la expresión integral debiera resolverse algún ejemplo aplicando la regla de la cadena. La demostración de la regla de Barrow es, al menos, confusa.

Regla de Barrow

Vamos a estudiar un teorema de suma importancia, que nos va a permitir calcular el valor de una integral definida conociendo una primitiva del integrando.

Regla de Barrow

Sea f (x) una función continua en [a, b], y sea F (x) una primitiva de f (x) en [a, b]; entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Demostremos este resultado: si F (x) es una primitiva de f (x), F (x) + C será otra de sus primitivas, en la que C es una constante; por tanto:

$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C$; haciendo $x = a$, se tiene que:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a);$$

luego: $\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$

Tomando ahora $x = b$, obtenemos: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Los valores a y b reciben el nombre de *límite inferior* y *límite superior de integración*, respectivamente. Se puede observar que el resultado obtenido en la integral no depende de la variable x, sino de los límites de integración.

Figura IV.2.2.6. Demostración de la regla de Barrow.

Informar que el análisis matemático resuelve problemas como el de Volterra es no decir nada porque los alumnos de bachillerato no tienen los recursos suficientes para poder hallar la solución, pensamos que más interesante hubiera sido hacer una introducción histórica del "problema del área". Las nuevas tecnologías son ignoradas.

Creemos que los autores al escribir los capítulos de la integral, más que en los alumnos de ciencias sociales, estaban pensando en los de tecnología.

IV.2.2.7. EDITEX

UNIDAD DIDÁCTICA 9: INTEGRALES INDEFINIDAS

Sucinta relación histórica de los "padres" del cálculo integral. Esquema conceptual de la integral indefinida. Conceptos de primitiva e integral indefinida, propiedades. Métodos de integración: integrales inmediatas, por partes, funciones racionales y cambio de variable. Tabla de integrales inmediatas y gran cantidad de ejercicios resueltos y propuestos.

UNIDAD DIDÁCTICA 10: INTEGRALES DEFINIDAS. APLICACIONES

Los autores afirman que Arquímedes (siglo III a. C.) calculó el área limitada por un arco de parábola, sin embargo, fue Isaac Barrow quien en el siglo XVII enunció la regla que lleva su nombre. Continúa con un esquema conceptual de la unidad didáctica y propone al estudiante el cálculo de tres áreas basándose en las fórmulas de las áreas de superficies conocidas.

1. Cálculo de áreas por el método exhaustivo

Arquímedes calculó el área del recinto limitado por la curva $y=x^2$, el eje OX y las rectas x=0, x=a, concluye que el área es: $A=a^3/3$ unidades cuadradas[22].

2. Áreas por recintos planos e integral definida

El objetivo es calcular el área del recinto limitado por la gráfica de una función f(x), continua y positiva en [a,b], el eje OX y las rectas x=a y x=b. Para ello realiza las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición, toma una sucesión de particiones P_n tales *"que cada una esté contenida en la siguiente, lo que quiere decir que la nueva partición contiene más subintervalos"*[23]. La sucesión de sumas inferiores es creciente, la de las superiores es decreciente y concluye[24] que $\lim_{n\to\infty} s(P_n) = A = \lim_{n\to\infty} S(P_n)$.

Con las hipótesis anteriores, siempre que la función sea positiva, define la *integral definida* a: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} S(P_n)$.

22 Los autores utilizan, al explicar el método exhaustivo "utilizado por Arquímedes", las sumas inferiores, superiores, el método de inducción completa (descubierto por Newton) y el cálculo de límites. Arquímedes, evidentemente, no pudo utilizar el procedimiento descrito en el libro.

23 Que una partición P contenga más subintervalos que otra Q , no necesariamente, $Q \subset P$.

24 Por la convergencia de sucesiones monótonas y acotadas.

3. Propiedades de la integral definida y regla de Barrow

Expresa varias propiedades (entre ellas la linealidad), alguna de ellas las ilustra gráficamente y omite el teorema del valor medio del cálculo integral. La regla de Barrow es enunciada, no demostrada, y la aplica a varias actividades resueltas con un grado creciente de dificultad.

4. Área encerrada por una y dos curvas

En esta sección procede como tantas veces se ha comentado.

5. Integrales con DERIVE

Los autores orientan en la utilización de *DERIVE 5* para el cálculo de integrales indefinidas y definidas, así como áreas de recintos planos. Creemos que es acertado y, además, muy importante la utilización de las nuevas tecnologías para que los estudiantes consoliden los conocimientos adquiridos en esta unidad didáctica.

6. Actividades resueltas de pruebas de acceso a la universidad, actividades de enseñanza-aprendizaje y actividades propuestas en pruebas de acceso

Cinco ejercicios resueltos, entre ellos, uno de física y otro de economía. Las actividades de enseñanza-aprendizaje sólo son de refuerzo, ninguna de ampliación ni de carácter teórico. Los problemas finales tienen las características de los propuestos y resueltos anteriormente.

Reflexión: Podemos considerar que la pequeña introducción histórica es suficiente, sin embargo, consideramos que es un error confundir las sumas de Darboux con el método exhaustivo de Eudoxo, utilizado por Arquímedes.

Hemos detectado un gravísimo error cuando se expresa taxativamente *"Una partición con n+1 puntos divide al intervalo [a,b] cuyas amplitud no tienen por qué ser iguales"*, si así fuera, puede encontrarse una sucesión de particiones *"tales que cada una esté contenida en la siguiente"*, los límites de las sumas inferiores y superiores existan, no coincidan y la función sea integrable.

Pensamos que no demostrar la regla de Barrow[25] hace que los alumnos la apliquen por imposición y no por el convencimiento que da su demostración.

[25] La exposición habitual que siguen los autores de los textos de matemáticas de segundo curso de bachillerato es la siguiente: Función Integral, Teorema Fundamental del Cálculo Integral (al menos enunciado) y demostración de la Regla de Barrow.

Se han resuelto algunos problemas de aplicación del cálculo integral a las ciencias sociales y hay varios propuestos. Varias integrales definidas tienen la función integrando definida a trozos o viene dada en valor absoluto.

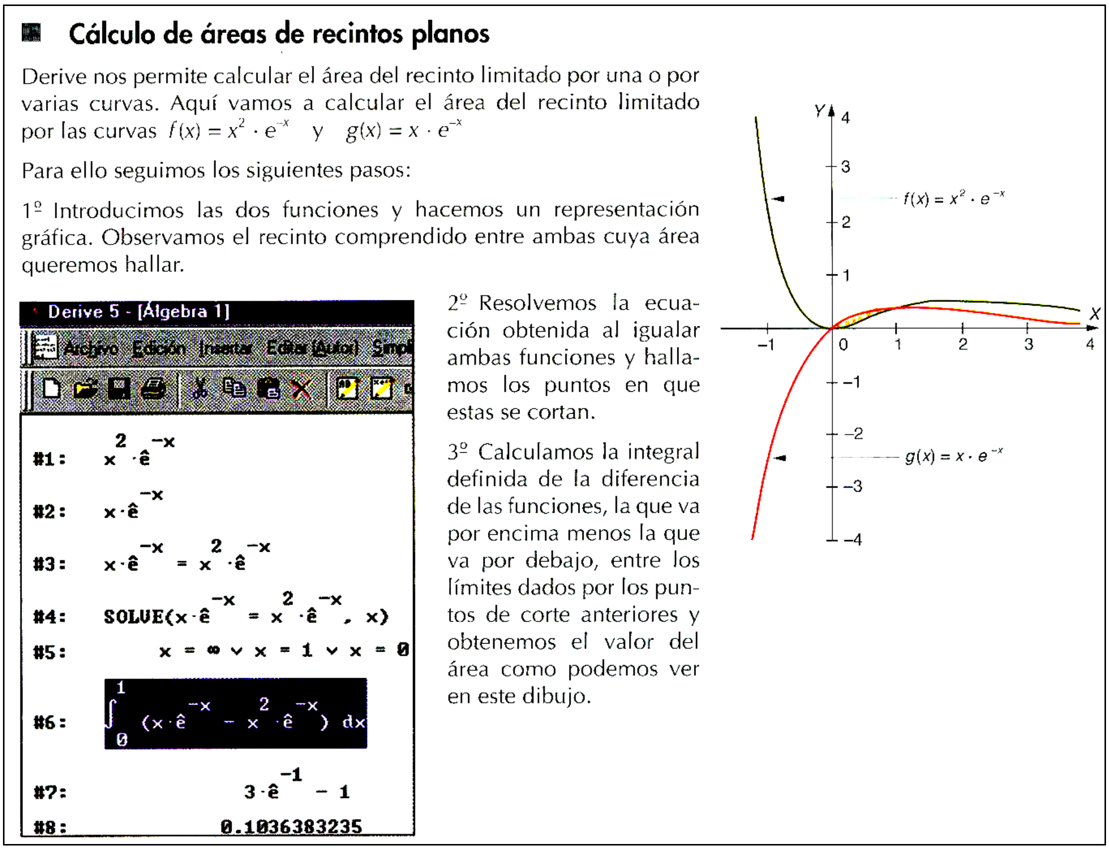


Figura IV.2.2.7. Cálculo del área comprendida entre dos curvas con DERIVE.

Plausible es la propuesta del cálculo del área comprendida entre dos funciones con *DERIVE* , sin embargo, somos muy críticos con las funciones elegidas, veamos por qué:

- Si *h(x)* = *f(x)* – *g(x)*, entonces, el área comprendida entre las dos curvas es $A = \int_0^1 h(x)\,dx + \left| \int_1^{\infty} h(x)\,dx \right|$ y la segunda integral es impropia.
- Los alumnos "confían" en las nuevas tecnologías cuando ellos mismos pueden comprobar los resultado y consideramos que en muy difícil calcular una primitiva de *h(x).*

Pensamos que debe utilizarse la Informática para el aprendizaje de las Matemáticas y debe existir una relación de continuidad entre los cálculos de lápiz y papel y los informáticos para que los estudiantes comprendan que los conceptos matemáticos permanecen bajo el nuevo lenguaje informático.

IV.2.2.8. HESPÉRIDES

LECCIÓN 8: INTEGRAL INDEFINIDA. CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Establece la integración como operación inversa de la derivación, continúa con integrales inmediatas, integración por cambio de variable[26], integración por partes e integración de algunas funciones racionales. Hay un número suficiente de ejercicios resueltos y propuestos.

LECCIÓN 9. INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

1. Idea de área bajo una curva y su relación con la integral definida

Comienza definiendo la función área y afirma que *"La función área A(x) es una primitiva de la función $f(x)$ en el intervalo* [*a,b*]*"*, demuestra este teorema y deduce la regla de Barrow[27].

2. Integral definida y propiedades

Directamente, sin ninguna justificación previa, escribe: *"Si f* ***es una función continua y positiva en el intervalo*** **[*a,b*]** *se ha definido la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *como un número real positivo que representa el área de la figura plana limitada por la curva y=$f(x)$ y el eje OX en el segmento intervalo* [*a,b*]*".*

Seguidamente, para el cálculo de áreas por medio de la integral definida, estudia los supuestos siguientes:

- Si f es continua y negativa a [a,b].
- Si f es continua en [a,b] y cambia de signo una vez en [a,b].
- Si f es continua en [a,b] salvo en algún punto.

Las propiedades sólo se limita a escribirlas. Se olvida del teorema del valor medio de la integral definida.

3. Cálculo de integrales definidas y cálculo de áreas

Se establecen los algoritmos del cálculo de áreas, se resuelven varios problemas y se aplica la integral definida a problemas de "otras ciencias".

---

[26] Función potencial, función exponencial, cociente de funciones y funciones trigonométricas.

[27] En ningún momento lo reconoce como teorema fundamental del cálculo integral ni se especifica que la fórmula demostrada es la regla de Barrow. Serán reconocidos en la sección 3.

4. Introducción a la integración numérica. Regla de los trapecios

Justifica esta integración y resuelve problemas mediante aproximación rectangular por defecto y por exceso y por la regla de los trapecios, después de demostrar su fórmula.

5. Ejercicios

Pocos problemas propuestos, seis de ellos de ciencias sociales.

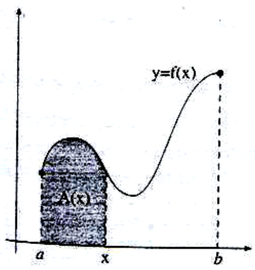
1 Idea de área bajo una curva y su relación con la integral definida

La integración aparece en matemáticas no sólo como operación inversa de la derivación sino también en otros problemas, en particular en el que nos afecta que es el cálculo de áreas de figuras planas.

Partamos de una función *f(x)* **continua y positiva en un intervalo** [*a*, *b*] y supongamos que su gráfica, que es una curva del plano, adopta la forma de la figura. Esta curva limita, junto con las rectas x = *a*, x = *b* y el eje OX, un recinto (figura sombreada); podemos decir, utilizando un lenguaje visual, que la curva y = f(x) «barre un área sobre el eje OX a partir del punto *a*», con lo que se tiene definida una nueva función, x→ A(x), que asigna a cada valor de x el área del recinto correspondiente, siendo el resultado final de este barrido el área A(*b*) de la superficie sombreada.

¿Qué relación existe entre este proceso de «barrer un área» y el proceso de integrar?

La respuesta a esta pregunta es la siguiente:



Función Área: x→ A(x)

La función área A(x) es una primitiva de f(x) en el intervalo [*a*, *b*].

Figura IV.2.2.8. Función área y su relación con la función integrando.

Reflexión: Creemos que esta lección no puede comenzar directamente con la función integral, no aceptamos que no se introduzca la integral definida partiendo del "problema del área" y, además, en ningún momento se justifica la relación existente entre $\int_a^b f(x)\,dx$ y el área, *se impone su igualdad,* y no hay ninguna conexión posible entre el nuevo concepto de área y el reconocido por los alumnos de cursos anteriores.

Pensamos que la exposición teórica de la integral definida es deficiente y descuidada, además, enuncia dos veces el teorema fundamental del cálculo integral y demuestra, por partida doble, la regla de Barrow.

En pocos temas es tan aconsejable una introducción histórica y la práctica con las nuevas tecnologías como en el de la integral, aquí se ignora aquélla y éstas se consideran inexistentes.

IV.2.2.9. MARFIL

UNIDAD DIDÁCTICA: INTEGRAL DEFINIDA

Plantea una serie de problemas[28], no resuelve ninguno ni da sugerencias para su resolución, y pide una serie de resultados que, posiblemente, la mayoría de los estudiantes sean incapaces de obtener.

1. Concepto de área y estimación del área

A partir del área del rectángulo se deducen las del triángulo, paralelogramo y, por descomposición, la encerrada por una línea poligonal cerrada.

El problema surge al determinar el área de un recinto encerrado por una línea curva y escribe *"se estima el área por medio de rectángulos inferiores, superiores y trapecios"*, se realiza la propuesta, se hace muy poco.

2. Integral definida y propiedades de la integral

Se limita a dar su definición y se escriben algunas de sus propiedades (no así el teorema del valor medio de la integral) e invita al lector a justificarlas[29]. Termina esta sección dando el procedimiento por el cual se puede calcular el área comprendida entre una función, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

3. Función área, teorema fundamental del cálculo integral y regla de Barrow

Se representa la primera y se enuncian el teorema[30] y la regla.

4. Actividades y complementos

Tres actividades propuestas y ninguna resuelta y los complementos se reducen a la definición de primitiva e integral indefinida, propiedades de la integral indefinida y la inclusión de una tabla de "seis" integrales inmediatas.

Reflexión: Se constata en esta unidad didáctica que los conceptos teóricos brillan por su ausencia, ejercicios y problemas resueltos y propuestos no

[28] Los problemas son: Consumo de luz, precipitaciones, agua en la ciudad, los caballitos, crecimiento de la población y rotura del acelerador.

[29] Se escribe textualmente: *"No te resultará difícil justificarlas si te apoyas en las propiedades conocidas del área"*.

[30] Los autores del texto proponen que el lector demuestre el teorema fundamental del cálculo integral dando una pequeña indicación.

existen y se descuida la notación al escribir $\int_a^b f$ en lugar de $\int_a^b f(x)\,dx$. Nada podemos decir en su favor por carecer de una mínima estructura matemática, en resumen, es una pésima unidad didáctica.

ROTURA DE ACELERADOR.

Un profesor de Matemáticas va a dar clase a su Instituto en coche (recorre todos los días 30 Km desde su casa al centro). Uno de esos días, mientras iba de camino, notó que el coche empezó a fallarle, sin saber bien por qué (después se enteraría que se había roto el cable del acelerador), hasta que de pronto se quedó sin propulsión a unos 260 m en línea recta de su Instituto. A partir de ese momento (t=0), y en los próximos t segundos, su velocidad v en metros por segundo viene dada por

$$v(t) = 20 - 0'05t^2$$

Dibuja la gráfica en papel milimetrado. ¿Qué distancia crees que recorrió hasta detenerse? ¿Llegó al Instituto?

Figura IV.2.2.9. La avería del coche del profesor de Matemáticas.

Sería aconsejable que el grupo **Eureka** hubiera resuelto el problema *"La rotura del acelerador"* o, en su defecto, nos hubiera dotado de los recursos y procedimientos necesarios para poderlo resolver.

IV.2.2.10. McGRAW-HILL

UNIDAD DIDÁCTICA 8: INTEGRALES

Inicia la unidad con la relación de *Objetivos* que se pretenden alcanzar y los *Procedimientos* que se van a utilizar, emplea el concepto de antiderivada y afirma: "*El cálculo diferencial e integral puede ser considerado como una obra maestra del pensamiento y la constancia del género humano*".

1. Integral definida

"Un problema de áreas". Considera una función $f(x)$ continua y positiva en [a,b], toma una partición del intervalo, establece las sumas inferiores y superiores asociadas a la partición y las relaciona con el área que se desea calcular. Se ilustra gráficamente y lo aplica a la función $f(x)=0'5x+2$ en [1,5].

"Hacia la integral definida". Afina la partición anterior[31] y por este procedimiento construye una sucesión de particiones estableciendo la

[31] Mediante la subdivisión de los subintervalos de la partición inicial.

relación de desigualdad entre "todas" las sumas inferiores y superiores y concluye que sus respectivos límites convergen al área[32], escribiéndola bajo la notación integral[33].

2. Teorema fundamental y otras aplicaciones

"Teorema fundamental del cálculo integral". Establece la aditividad de la integral definida, define la función integral[34] y enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo integral.

"Antiderivadas[35]: primitivas".

"Regla de Barrow". La demuestra y la aplica a dos ejemplos elementales.

"Otras propiedades de la integral definida". Incluye la linealidad y omite el teorema del valor medio de la integral.

3. Integrales inmediatas y técnicas de integración

Da una tabla de integrales inmediatas y calcula integrales por la propiedad de la linealidad y por cambio de variable.

4. Cálculo práctico de áreas y otras aplicaciones de la integral

Entre las primeras se resuelven los típicos ejercicios comentados en varias ocasiones. Se aplica la integral definida a la resolución de dos problemas (física y biología) cuyas funciones integrando son lineal y parabólica, finalmente, se propone un ejercicio de crecimiento demográfico.

5. Problemas propuestos, problemas resueltos y autoevaluación

Los problemas resueltos, once, se secuencian según ha sido expuesta la unidad didáctica y, de ellos, tres corresponden a las ciencias sociales. Las mismas características tienen los veinticuatro problemas propuestos. Los ejercicios de autoevaluación, dieciséis, son eminentemente prácticos[36].

---

[32] Obsérvese que el procedimiento es correcto porque el diámetro de una partición es la mitad del de la anterior y, en consecuencia, la sucesión de los diámetros de las particiones tiende a cero.

[33] En ningún momento es reconocida como integral de Darboux o de Riemann.

[34] Nunca la denomina "función área".

[35] Véase la "justificación" de este término y la definición de primitiva en la *Figura IV.2.2.10.*

[36] Sólo hay dos ejercicios teóricos, uno es el siguiente: *"¿Es cierto que la integral de un producto es igual al producto de las integrales? Compruébalo..."*

Reflexión: En esta unidad didáctica no existe una pequeña introducción histórica y tampoco se introducen las nuevas tecnologías, una vez más, expresamos nuestro desacuerdo por ignorar el pasado y silenciar los avances tecnológicos.

No se ha encontrado ningún ejercicio en el que deba calcularse alguna integral cuya función integrando esté definida a trozos o sea discontinua en varios puntos, creemos que la ausencia de este tipo de ejercicios no favorece a los estudiantes la adquisición del concepto integral.

Consideramos que doce problemas resueltos y propuestos, en el contexto de las ciencias sociales, es un buen número para que los alumnos comprendan que las Matemáticas, además de conformar un pensamiento riguroso, es una ciencia que permite avanzar a todas las demás.

✦ *Antiderivadas: primitivas*

Dada la función $F(x)$ es fácil hallar su derivada $F'(x)$. El proceso inverso, encontrar $F(x)$ a partir de $F'(x)$, se llama **antiderivación**.

Esto es,

$$F(x) \xrightarrow{\text{derivación}} F'(x) = f(x)$$

$$F(x) \xleftarrow{\text{antiderivación}} F'(x) = f(x)$$

En el ejemplo anterior hemos dado como antiderivada de $f(x) = 3x^2$ la función $F(x) = x^3 - 1$, que, efectivamente, lo es, pues

$$F'(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2$$

Otras antiderivadas de $f(x) = 3x^2$ son $G_1(x) = x^3$, $G_2(x) = x^3 + 12$ o, en general, $G(x) = x^3 + c$, con c = constante, pues en todos los casos

$$G'_1(x) = G'_2(x) = G'(x) = 3x^2$$

El conjunto de todas las antiderivadas de $f(x)$ se llama **primitiva** de esa función. Así, la primitiva de $f(x)$ es $F(x) + c$, siendo $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$ y c una constante arbitraria.

Con esto, la primitiva de $f(x) = 3x^2$ es $G(x) = x^3 + c$.

La derivación y la antiderivación son *operaciones* inversas, similares al cuadrado y raíz cuadrada o a la exponencial y el logaritmo.

Para hallar antiderivadas basta con aplicar al revés las fórmulas de derivación vistas en la unidad anterior. Como estos cálculos no son fáciles, es conveniente comprobar, derivando, que la antiderivada elegida es correcta.

Figura IV.2.2.10. Justificación de la “operación” antiderivación.

Pensamos que es un acierto escribir *“La derivación y la antiderivación son operaciones inversas, similares (...) a la exponencial y al logaritmo”* y un grave error considerar la primitiva de una función al conjunto de todas sus antiderivadas, la comunidad matemática reconoce la antiderivada como primitiva y al conjunto de todas las primitivas de una función como integral indefinida de la función integrando[37].

[37] Además, los autores definen la *“Integral definida”* en los términos señalados anteriormente.

IV.2.2.11. SM

UNIDAD DIDÁCTICA 10: INTEGRAL INDEFINIDA

Primitivas, integral indefinida y propiedades. Integración de las funciones potencial, logarítmica, exponencial y trigonométricas. Integración por cambio de variable y por partes. Ejercicios, problemas y cuestiones.

UNIDAD DIDÁCTICA 11: INTEGRAL DEFINIDA

1. Área de polígonos y área de trapecios curvilíneos

Comienza por definir el área de un rectángulo y seguidamente expresa el área del paralelogramo, trapecio y triángulo. Se define el *concepto de trapecio curvilíneo* y se calcula su área por *"aproximación"* del área del *trapecio rectilíneo.*

2. Área bajo una curva: Regla del trapecio

Se toma una partición, P_n, de [a,b] en la que todos los subintervalos tienen amplitud *h=(b–a)/n* y se considera una *aproximación* del área[38] A a la dada por la fórmula del trapecio y concluye que el área A es el límite de la sucesión de sumas de las áreas de los trapecios rectilíneos cuando $n \to \infty$.

3. Área por rectángulos superiores e inferiores. Integral definida y propiedades.

Dada la partición anterior, P_n, se establecen las sumas inferiores, superiores y trapezoidales para concluir que si se toman los límites de las mismas coinciden con el área del recinto R(f(x), [a,b]).

Establece la definición de la integral definida como el límite común de las sumas inferiores, superiores y *"de rectángulos medios"*[39] y la expresa mediante su notación convencional.

Expone todas las propiedades fundamentales[40], algunas las interpreta gráficamente y el teorema del valor medio del cálculo integral es demostrado, comentado e interpretado gráficamente.

---

[38] Área comprendida entre la gráfica de una función continua y positiva, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

[39] Los rectángulos medios es la suma de Riemann asociada a la partición P_n .

[40] Se afirma textualmente: *"Las funciones integrables en [a,b] forman un **espacio vectorial**"*.

4. Función integral, derivada de la función integral y teorema de Barrow

Define la función integral de la forma clásica. Específico de este texto es el siguiente ejemplo: Representa, en papel milimetrado, la función f(x)=1/x, cuenta los cuadraditos entre la gráfica, el eje de abscisa, la recta fija x=1 y las rectas variables x=2, x=3 y x=4 y hace observar que es una aproximación de los valores ln2, ln3 y ln4.

Demuestra que la derivada de la función integral es la función integrando[41] y lo interpreta gráficamente. Seguidamente demuestra la regla de Barrow[42].

5. Integrales con calculadora y ordenador

Las nuevas tecnologías tienen cabida en esta unidad didáctica mediante la utilización de la calculadora TI-92 Plus y el programa informático *DERIVE.*

6. Ejercicios, problemas y cuestiones

Amplia propuesta que persigue la consolidación, por parte del estudiante, de los contenidos explicados.

UNIDAD DIDÁCTICA 12: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. Área del recinto donde interviene una función

Los autores del texto explican ampliamente la casuística y utilizan multitud de gráficas representadas con fondo cuadriculado.

2. Área del recinto donde intervienen dos funciones

No establece el respectivo algoritmo, lo que consideramos una grave omisión, se limita a calcular áreas por medio de recintos[43] y, para ello, sugiere que se representen las funciones.

3. Otras aplicaciones: Física, economía, biología...

Se resuelven cinco ejercicios en diferentes contextos y, para ello, se sirve de la calculadora gráfica. Se valora positivamente este apartado.

[41] Este teorema no es reconocido en ningún momento como teorema fundamental del cálculo integral.

[42] Los autores reconocen la regla de Barrow como teorema de Barrow y pensamos que es debido a la importancia que tiene dicha regla-teorema.

[43] Para calcular el área de un recinto realiza la diferencia de las integrales de las funciones en lugar de la integral de la diferencia de las funciones.

4. Ejercicios, problemas y cuestiones

Los ejercicios están estructurados con dificultad creciente y considerándose todos ellos dentro del contexto de análisis matemático, las cuestiones son teóricas. Sólo considera tres problemas de los que pueden encuadrarse dentro de "otras aplicaciones".

5. Hacia la Universidad

Se resuelve un problema de integración de una función definida a trozos[44] y, seguidamente, se propone la resolución de catorce problemas.

Cálculo de integrales definidas

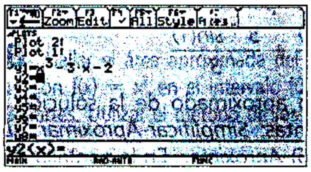
En algunas calculadoras Casio existe una tecla específica: $\boxed{\int dx}$

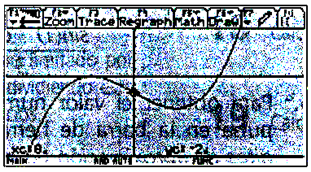
Para hallar una integral definida se pulsa esta tecla y a continuación se introduce la expresión de la función seguida de los dos límites, separados por comas, y, si se desea, el número de divisores del intervalo de integración que debe utilizar para el cálculo.

Con las calculadoras Texas Instrument, por ejemplo para la TI-92 Plus, existe la instrucción $\boxed{\int}$ del menú $\boxed{\text{MATH}}$ que permite obtener integrales definidas del siguiente modo:

Hallar $\int_0^2 (x^3 - 3x - 2)\, dx$

1. Pulsando $\boxed{\text{Y=}}$ se accede al editor de funciones donde se introduce la función dada.
2. Pulsando $\boxed{\text{GRAPH}}$ se obtiene la gráfica de la función.
3. Con la instrucción $\int f(x)\, dx$ del menú $\boxed{\text{MATH}}$, e introducido el extremo inferior (lower limit) y el extremo superior (upper limit) se obtiene el área rayada y el valor de la integral definida.





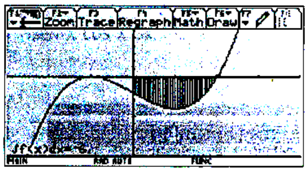


Figura IV.2.2.11. Integral definida con calculadora.

Reflexión: Pensamos que los autores de este texto consideran *"la integral"* un tema prioritario de enseñanza-aprendizaje para los alumnos de ciencias sociales y le asignan tres capítulos de su libro de texto.

Todas las definiciones y conceptos importantes están en un recuadro, la presentación teórica es muy buena[45] estando favorecida con las gráficas en papel cuadriculado. Los problemas propuestos son suficientes.

[44] Segmento parabólico y rectilíneo.

[45] Pensamos que la regla de los trapecios se debiera haber explicado, solamente, como método de integración numérica.

ANEXO B (CAPÍTULO V): EPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO INTEGRAL *35*

V.2. EPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO INTEGRAL **36**

V.2.1. INTRODUCCIÓN **36**

V.2.2. EDAD ANTIGUA Y EDAD MEDIA **38**

V.2.3. DEL RENACIMIENTO HASTA BARROW **51**

V.2.4. DESDE NEWTON Y LEIBNIZ HASTA EL CONCEPTO INTEGRAL **66**

V.2.5. LA INTEGRAL COMO OBJETO MATEMÁTICO **75**

V.2.5.1. Integral de Cauchy 75

V.2.5.2. Integral de Riemann 78

V.2.5.3. Integral de Darboux 80

V.2.5.4. Integral de Riemann-Stieltjes 80

V.2.5.5. Integral mediante funciones escalonadas y regladas 81

V.2.5.6. Hacia la teoría de la medida 82

V.2.5.7. Integral de Lebesgue. Teoría de la medida 86

V.2.6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES EPISTEMOLÓGICAS **91**

ANEXO B (CAPÍTULO V):
EPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO INTEGRAL

En el *Capítulo V: Estudio Epistemológico. La Docencia Actual. Área e Integral* quedó especificado que el apartado V.2 correspondiente a la *Epistemología del cálculo integral* constaba de un breve resumen del texto que inicialmente estaba previsto para ser incluido en la memoria.

Sin embargo, consideramos que es aconsejable no despreciar el texto original del punto V.2 y pensamos que debemos incluirlo en su totalidad en el presente anexo y, además, lo reconocemos con la denominación que le corresponde dentro de su propio capítulo.

V.2. EPISTEMOLOGÍA DEL CÁLCULO INTEGRAL

V.2.1. INTRODUCCIÓN

Sin ánimo de ser exhaustivos, pretendemos dar una visión muy generalizada del desarrollo histórico del cálculo integral que será descrito por etapas.

Los orígenes los encontramos en el antigua Grecia, cuyos representantes más importantes son: Antifonte, Brison, Anaxágoras, Hipócrates de Chíos, Demócrito, Eudoxo, Euclides (autor de los Elementos, en el cual se incluye el método de exhausción de Eudoxo) y, sobre todo, Arquímedes (considerado uno de los mayores sabios de todos los tiempos). Todos estos autores desarrollan el embrión del cálculo infinitesimal a partir de problemas concretos, entre otros, la cuadratura de la parábola y el volumen del cono. Su resolución se consigue mediante la utilización de procedimientos específicos para cada tipo de problema.

Desde la invasión de Grecia por Roma no existen personajes históricos cuyos trabajos sean dignos de mención para el avance del cálculo integral. En la Baja Edad Media encontramos a Nicolás de Oresme que introduce la representación de los conceptos tiempo-velocidad y a partir de la misma deduce, de forma incipiente, la velocidad media y el espacio recorrido. Hasta este punto consideraremos la primera etapa de la epistemología del cálculo integral, denominada *“Edad Antigua y Edad Media”.*

La segunda etapa, *“Del Renacimiento hasta Barrow”,* comprende 270 años a partir de 1500 y al principio los avances son muy limitados; sin embargo, ya se percibe una generalización del problema del cálculo de áreas y los científicos más importantes que hacen estudios al respecto son: Stevin, Kepler, Galileo, Cavalieri, Roberval, Torricelli, Wallis, Fermat, Pascal, Descartes y Barrow; todos ellos emplean procedimientos particulares. Isaac Barrow, maestro de Newton, es el primer científico que demuestra el teorema fundamental del cálculo aunque no percibe su importancia.

La tercera etapa, *“Desde Newton y Leibniz hasta la formalización de la integral como objeto matemático”*, se inicia con la toma de posesión de la Cátedra Lucasiana de Matemáticas en la Universidad de Cambridge por Isaac Newton, acaecida en 1669, y su final con la publicación de la célebre *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier en 1822.

Además de los estudios y publicaciones de tan egregios científicos (Newton y Leibniz) destacamos los trabajos de los hermanos Bernouilli, Euler, Laplace, Fourier y Gauss, e incluso, Legendre y Abel también son grandes representantes de esta época aunque no exponemos las publicaciones de estos dos últimos. Los resultados de este periodo son muy importantes, se dan métodos generales para resolver el problema del área y se encuentran nuevas aplicaciones de la integral definida en otros ámbitos de la ciencia.

La cuarta etapa, *"La formalización de la integral como objeto matemático"*, consiste en construir la base matemática rigurosa del concepto que nos ocupa. Su inicio es en 1823, con la publicación de *Resume des leçons sur le calcul infinitesimal* de Cauchy y llega hasta nuestros días. En este apartado hacemos mención a varias teorías de la integración, éstas son: Integral de Cauchy, Integral de Riemann, Integral de Darboux, Integral de Riemann-Stieltjes, Integral de Funciones Escalonadas y Regladas (Bourbaki-Dieudonné) e Integral de Lebesgue (esta última es la más general y la más importante, además, es reconocida como *"Teoría de la Medida"*).

En los diferentes apartados hemos intentado seguir, en la medida de lo posible, los razonamientos originales de los diferentes autores a lo largo de los siglos, así como las teorías de la integral definida. En este punto sólo podemos afirmar que *"El Cálculo Integral aún tiene un recorrido insospechado en las diferentes Ciencias y seguirá siendo una sólida herramienta para el progreso de la Humanidad".*

Terminamos la epistemología del cálculo integral con *Síntesis y Conclusiones Epistemológicas* (Capace y Arrieche, 2007)[1].

Nuestro objetivo no es hacer un estudio pormenorizado del desarrollo histórico de la cuestión que nos ocupa, más bien, dar unas pinceladas con las cuales podamos tener una visión generalizada del cálculo integral. No se ha podido incluir a todos los autores, eso sí, pensamos que están los más importantes y, a pesar de ello, no creamos que ellos fueran los únicos cuyos estudios hicieron que el avance del análisis matemático fuera espectacular, nada de ello hubiera sido posible sin el trabajo anónimo de tantas personas a lo largo de los siglos.

[1] Capace, L. y Arrieche, M. (2007). Algunas configuraciones epistémicas de la integral en una variable real desde su origen hasta su consolidación. *Enseñanza de la Matemática. Volúmenes 12 al 16. Número Extraordinario; 2003-2007. Diciembre de 2007. Asociación Venezolana de Educación Matemática*. Pp. 35-52.

V.2.2. EDAD ANTIGUA Y EDAD MEDIA

El estudio del tránsito noción-concepto-definición nos ha llevado a una serie de autores que han ido construyendo los conceptos de área e integral definida, si embargo, debemos constatar que la noción de integral es mucho más antigua que la de derivada. Los orígenes del cálculo integral podemos encontrarlos en la Grecia clásica al estudiar los problemas de áreas y volúmenes, eso sí, tratados aisladamente. **Antifonte,** hacia el año 430 a.C., define el área del círculo mediante una sucesión de polígonos regulares inscritos cuyo número de lados crece suficientemente. En realidad, el concepto de límite, es decir, la idea de crecimiento indefinido, no aparece todavía; y lo mismo acontece a su contemporáneo **Brison**, que completó el concepto, considerando también los polígonos circunscritos y creyendo, equivocadamente, que el área del círculo es el promedio de las áreas de cada par de polígonos correspondientes (Rey Pastor, 1973)[2].

Anaxágoras, maestro de Pericles, en el primer cuarto del siglo V a.C. se ocupó del problema de la cuadratura del círculo, es decir, construir utilizando regla y compás un cuadrado de área igual a la del círculo. Esta cuestión fascinó a innumerables matemáticos durante casi veinticuatro siglos, además, la importancia del problema matemático planteado por Anaxágoras radica en que, a diferencia de los egipcios y babilonios, no se trata de la aplicación del conocimiento a una faceta práctica de la vida sino de una cuestión puramente teórica en la que el papel fundamental lo juega la precisión de los cálculos y la exactitud del pensamiento (Boyer, 1986)[3].

Hipócrates de Chíos, contemporáneo de Anaxágoras y algo más joven que él, formuló el siguiente teorema: *“Segmentos semejantes de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases”*. Este teorema parece ser la primera afirmación precisa sobre la medida de figuras curvilíneas y a partir del mismo consiguió la primera cuadratura en la historia de figuras curvilíneas (Boyer, 1986, págs. 98-100).

Una lúnula es una superficie comprendida entre dos arcos de circunferencia. Por ejemplo: consideremos el diámetro de una semicircunferencia, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos tienen el vértice común sobre dicha semicircunferencia y, a su vez, éstos son los diámetros de dos

[2] Rey Pastor, J. (1973). *Curso de Cálculo Infinitesimal*. Madrid: Biblioteca Matemática.

[3] Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

nuevas semicircunferencias; la superficie comprendida entre las tres semicircunferencias se conocen como las lúnulas de Hipócrates (véase la figura V.2.2.1). Este autor descubrió que la superficie de dichas lúnulas coincide con la del triángulo rectángulo ABC que las determinan.

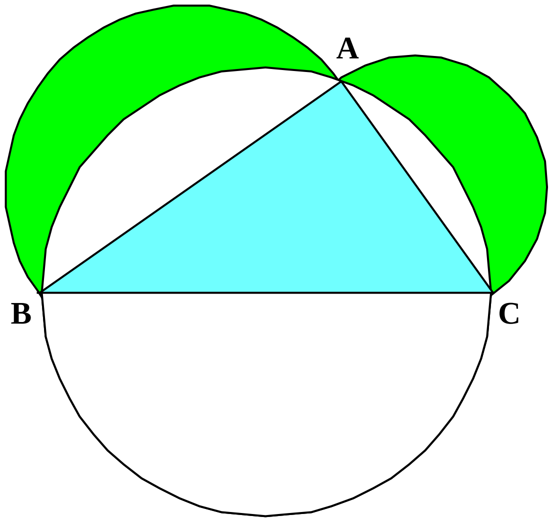


Figura V.2.2.1. Lúnulas de Hipócrates de Chíos.

Demócrito (460-370 a.C.) descubrió que los volúmenes de un cono y de una pirámide son iguales a un tercio de los volúmenes de un cilindro y un prisma que tienen la misma base y la misma altura. Demócrito consideró al cono como una serie de capas muy finas e indivisibles (figura V.2.2.2), pero se encontró con la dificultad de que si las capas fueran todas iguales daría un cilindro y si fueran distintas la superficie del cono no sería lisa (Kline, 1992)[4].

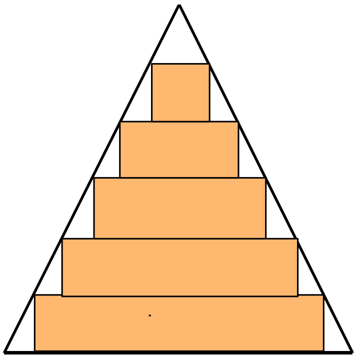


Figura V.2.2.2. Descomposición de un cono, por capas, según Demócrito.

[4] Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días I y II.* Madrid: Alianza Editorial.

Eudoxo (408-355 a.C.), discípulo de Platón, gran matemático y astrónomo griego que demostró las fórmulas de los volúmenes del cono y de la pirámide descubiertas por Demócrito. El problema que se deseaba resolver era el de la comparación de figuras curvilíneas y rectilíneas, científicos anteriores habían sugerido que lo mejor era inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea y proceder a multiplicar el número de lados o caras indefinidamente, con lo que las figuras rectilíneas se aproximaban cada vez más a la figura curvilínea; sin embargo, no sabían como cerrar el razonamiento puesto que necesitaban el concepto de límite, formalizado pasados más dos milenios. Eudoxo fue el pensador que consiguió solventar tamaña dificultad al afirmar[5]: *"Dadas dos magnitudes que tengan una razón, que sean del mismo tipo y ninguna de las dos sea cero, entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra"*. A partir de este axioma es fácil demostrar, por doble reducción al absurdo, la siguiente proposición: *"Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano".* Esta proposición conocida con el nombre de ***"propiedad o método de exhausción"*** (nombre dado en el siglo XVII por Gregory de St. Vincent**,** que significa *"exhausto o agotado"*), determina, en lenguaje moderno, que si *M* es una magnitud dada, ε es otra magnitud arbitraria del mismo tipo, y *r* es un número tal que ½ ≤r<1. Entonces podemos encontrar un entero positivo *N* tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo número natural que verifique $n > N$, es decir, $\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$ (Boyer, 1986, págs. 128-129).

Este procedimiento, lejos de ser incompleto, es riguroso y no necesita del concepto de *"límite"* y se considera como el embrión del cálculo integral, pues, según se comprueba en los *Elementos* de **Euclides** (hacia 300 a.C.) en su *Libro XII: Geometría de sólidos y esfera* que contiene dieciocho teoremas sobre áreas y volúmenes, la idea que domina es la del método de *exhausción.*

Consideremos un ejemplo para la mejor comprensión del mismo, para ello, incluimos la demostramos de la décima proposición.

5 Este aserto es conocido como axioma de Eudoxo, axioma de Arquímedes o propiedad arquimediana.

Proposición 10: *Cualquier cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base y la misma altura*[6].

Demostración[7]:

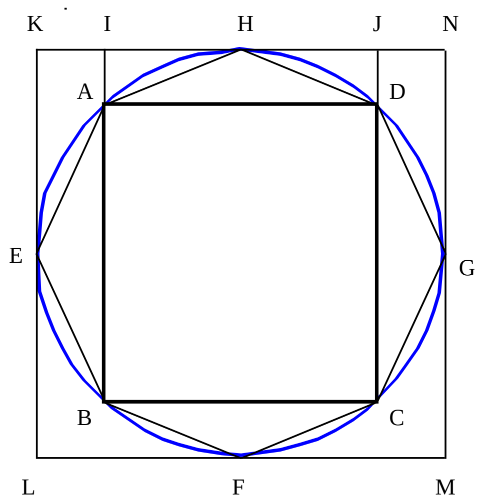


Figura V.2.2.3. Base de un cono.

Sea un cono con la misma base, el círculo ABCD, de un cilindro y de igual altura.

Yo digo que el cono es la tercera parte del cilindro, es decir, que el cilindro es el triple del cono. Porque si el cilindro no es el triple del cono, entonces el cilindro será o bien mayor o bien menor que el triple del cono.

Sea, primero, mayor que el triple.

Inscríbase el cuadrado ABCD en el círculo ABCD y circunscríbase el cuadrado KLMN, entonces el área del cuadrado inscrito es mayor que la mitad del área del círculo porque aquélla es la mitad del área del cuadrado circunscrito, que a su vez es mayor que el área del círculo. Desde el cuadrado ABCD levántese un prisma de igual altura que el cilindro. [IV 6][8].

---

[6] http://www.euclides.org/menu/elements_esp/12/proposicion10libro12.htm

[7] Esta demostración, según Euclides, se debe a Eudoxo, además, se hace en el contexto del tiempo en el que vivieron. Cuando se inserte entre corchetes números romanos seguidos de uno o dos dígitos hará referencia al Libro de los Elementos de Euclides con la Proposición correspondiente, por ejemplo: [IV 7] Libro IV de los Elementos, Proposición 7, seguidamente se transcribirá tal proposición.

[8] [IV 6] Inscribir un cuadrado en un círculo dado.

Entonces el prisma levantado es mayor que la mitad del cilindro, porque el área del cuadrado inscrito ABCD es la mitad del área del cuadrado circunscrito KLMN, y los sólidos levantados a partir de ellos son prismas paralelepípedos de igual altura, ya que los sólidos paralelepípedos de igual altura son unos a otros como sus bases, entonces el prisma levantado a partir del cuadrado ABCD es la mitad del prisma levantado a partir del cuadrado KLMN y, en consecuencia, el prisma levantado a partir del cuadrado ABCD y de igual altura que el cilindro es mayor que la mitad del cilindro. [IV 7][9] [XI 32][10] [IV 6][11] [XI 28][12] [XII 6][13] [XII 7][14].

Tomemos los puntos medios de los arcos de circunferencia AB, BC, CD y DA, sean éstos E, F, G y H y tracemos las cuerdas AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH y HA. Entonces cada triángulo AEB, BFC, CGD y DHA es mayor que la mitad del segmento del círculo ABCD en el que está. Para ello, basta considerar, el rectángulo DJIA, el triángulo DHA y el segmento circular DHA o DA. [XII 2][15].

En cada uno de los triángulos AEB, BFC, CGD y DHA, levántense prismas de igual altura que el cilindro, entonces cada uno de los prismas levantados es mayor que la mitad del segmento de cilindro en el que está, considérese de nuevo, el triángulo DHA cuyo área es la mitad de la del rectángulo DJIA y mayor que la mitad del segmento circular DHA o DA; el prisma levantado sobre el triángulo DHA es la mitad del prisma levantado sobre el rectángulo DJIA y aquél es mayor que la mitad del segmento de cilindro levantado sobre el segmento circular DHA o DA, por tanto también los prismas sobre los triángulos AEB, BFC, CGD, DHA son mayores que la mitad de segmentos de cilindro en el que están. [I 31][16].

[9] [IV 7] Circunscribir un cuadrado en torno a un círculo dado.

[10] [XI 32] Los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

[11] [IV 6] Inscribir un cuadrado en un círculo dado.

[12] [XI 28] Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano según las diagonales de los planos opuestos, el sólido será dividido en dos partes iguales por el plano.

[13] [XII 6] Las pirámides que tienen la misma altura y tienen polígonos como base son una a la otra como sus bases.

[14] [XII 7] Cualquier prisma que tenga como base un triángulo se divide en tres prismas iguales entre sí que tienen triángulos como base.

[15] [XII 2] Los círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros.

[16] [I 31] Construcción de una recta paralela a una dada por un punto dado.

Así pues, tomamos los puntos medios de los arcos de circunferencia que van surgiendo, añadamos los prismas triangulares al prisma resultante de base el último polígono regular obtenido y así repetidamente, además, dejamos algunos segmentos del cilindro que son menores que el exceso con que el cilindro excede al triple del cono. [X 1][17].

Dejemos estos segmentos del círculo y, para fijar ideas, sean las cuerdas AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH y HA. Entonces el prisma resultante con base poligonal AEBFCGDH y la misma altura que el cilindro es triple de la pirámide con base poligonal AEBFCGDH y el mismo vértice del cono. Por lo tanto la pirámide con base poligonal AEBFCGDH y el mismo vértice que el cono es mayor que el cono con base circular ABCD. [XII 7][18]. Pero también es menor porque está incluida en él, lo cual es imposible. Concluimos que el cilindro no es mayor que el triple del cono.

Yo digo ahora que en ningún caso el cilindro es menor que el triple del cono. Porque si fuera posible el cilindro sería menor que el triple del cono. Entonces, por inversión, el cono es mayor que la tercera parte del cilindro.

Inscríbase el cuadrado ABCD en el círculo ABCD, sabemos que, el área del cuadrado ABCD es mayor que la mitad del área del círculo ABCD. [IV 6][19].

Ahora levántese desde el cuadrado ABCD una pirámide con el mismo vértice que el cono. Entonces la pirámide levantada es mayor que la mitad del cono, porque, como hemos demostrado antes, si circunscribimos el cuadrado KLMN el área del cuadrado inscrito ABCD es la mitad del área del cuadrado circunscrito KLMN, y levantamos desde esos cuadrados sólidos paralelepípedos de igual altura que el cono, que también llamaremos prismas, entonces el sólido levantado desde el cuadrado ABCD es la mitad que el levantado desde el cuadrado KLMN, porque son uno a otro como sus bases. [XI 32][20].

De este modo los tercios están también en la misma razón. Por lo tanto la pirámide levantada desde el cuadrado ABCD es la mitad de la pirámide

[17] [X 1] Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

[18] [XII 7] Cualquier prisma que tenga como base un triángulo se divide en tres prismas iguales entre sí que tienen triángulos como base.

[19] [IV 6] Inscribir un cuadrado en un círculo dado.

[20] [XI 32] Los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

levantada desde el cuadrado KLMN y esta pirámide es mayor que el cono porque le incluye. Por tanto, la pirámide con base ABCD y el mismo vértice que el cono es mayor que la mitad del cono.

Tomemos, de nuevo, los puntos medios de los arcos de circunferencia AB, BC, CD y DA, sean éstos E, F, G y H y tracemos las cuerdas AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH y HA. Entonces cada triángulo AEB, BFC, CGD y DHA es mayor que la mitad del segmento del círculo ABCD en el que está. [XII 2][21].

En cada uno de los triángulos AEB, BFC, CGD y DHA, levántense pirámides con el mismo vértice que el cono. Entonces cada pirámide levantada de la misma manera es mayor que la mitad del segmento de cono en la que está.

Así pues, tomamos los puntos medios de los arcos de circunferencia que van surgiendo, levantando pirámides en cada triángulo con el mismo vértice que el cono y, haciendo esto repetidamente, dejaremos algunos segmentos de cono que son menores que el exceso con que el cono excede a la tercera parte del cilindro. [X 1][22].

Dejemos estos segmentos de cono y, para fijar ideas, sean las cuerdas AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH y HA. Entonces la pirámide resultante con base poligonal AEBFCGDH y el mismo vértice que el cono, es mayor que la tercera parte del cilindro. Pero la pirámide con base poligonal AEBFCGDH y el mismo vértice que el cono es la tercera parte del prisma con base poligonal AEBFCGDH y la misma altura que el cilindro, entonces el prisma con base poligonal AEBFCGDH y la misma altura que el cilindro es mayor que el cilindro con base circular ABCD. Pero también es menor porque lo incluye, lo cual es imposible.

Entonces el cilindro no es menor que el triple del cono. Pero ha sido demostrado que tampoco es mayor que el triple.

Entonces *“el cilindro es el triple del cono, de modo que el cono es la tercera parte del cilindro”*. Por tanto:

> *“Cualquier cono es la tercera parte de un cilindro con la misma base e igual altura”.*

[21] [XII 2] Los círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros.

[22] [X 1] Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Arquímedes (287-212 a.C.), nacido y muerto en Siracusa, es considerado el científico más importante de la Antigüedad y junto con Newton (1642-1727) y Gauss (1777-1855) uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos. Arquímedes, escribió varios tratados y uno de ellos conocido como *El Método*[23] tiene una importancia excepcional porque revela una faceta de su pensamiento que no aparece en ningún otro científico, así pues, mediante un *"método mecánico"* de equilibrio descubrió el área de un segmento parabólico: *cuatro tercios del triángulo inscrito*[24]*.* En su libro *Cuadratura de la Parábola* da dos métodos para hallar el área del segmento parabólico, según el propio Arquímedes: "He descubierto este teorema primero por consideraciones de mecánica, y luego por razonamientos geométricos", el primero de ellos es semejante al argumento mecánico expuesto en el *Método* y el segundo, el cual demostramos seguidamente, lo hace apoyado por la Geometría.

Cuadratura de la parábola de Arquímedes[25]

El método geométrico aplicado por Arquímedes es el exhaustivo que, como sabemos, consiste en inscribir en la curva figuras iguales de la misma clase limitadas por rectas. Una multiplicidad siempre creciente de estas figuras cada vez menores determina que las figuras limitadas por rectas se ajusten cada vez más a la curva, hasta que, después de una repetición infinita, se llega, en las figuras limitadas por rectas, a unas rectas límite tan pequeñas que pueden considerarse como elementos de la curva. Falta aún, sin embargo, efectuar el segundo paso esencial: hemos de estar en condiciones de sumar las áreas del número infinito de figuras limitadas por rectas, pues sólo tal suma infinita nos puede proporcionar el área "agotada" de la figura limitada por curvas, expresada mediante las áreas de las primeras. Más

---

[23] La única copia superviviente del Método fue descubierta en un palimpsesto (pergamino que la escritura original ha tratado de ser borrada y sustituida por otra diferente) en Constantinopla por el científico J. L Heiberg en el año 1906.

[24] Puede verse la demostración, por el *método mecánico,* en:
Boyer (1986, págs. 182-184).
Kline (1992, tomo I, págs. 154-157).
Vera, F. (1970). *Científicos Griegos*. Madrid: Aguilar. Pp. 223-232.

[25] La demostración *geométrica* de la *cuadratura de la parábola* de la presente memoria procede de: Colerus, E. (1959). *De la tabla de multiplicar a la integral. Las Matemáticas para todos*. Barcelona: Labor. Reimpresión. Pp. 269-276. El procedimiento que emplea Colerus, según sus propias palabras, es: "Para ello nos valdremos exclusivamente de sus estudios geométricos, prescindiendo de sus métodos estáticos, excesivamente pesados". Otras demostraciones pueden encontrarse en Kline (1992, tomo I, págs. 157-160) y Boyer (1986, págs. 174-175).

adelante veremos cómo puede efectuarse esta suma; por ahora dibujaremos un arco cualquiera de una “parábola ordinaria”, de la cual ya, en tiempo de Arquímedes, se conocían numerosas propiedades (figura V.2.2.4).

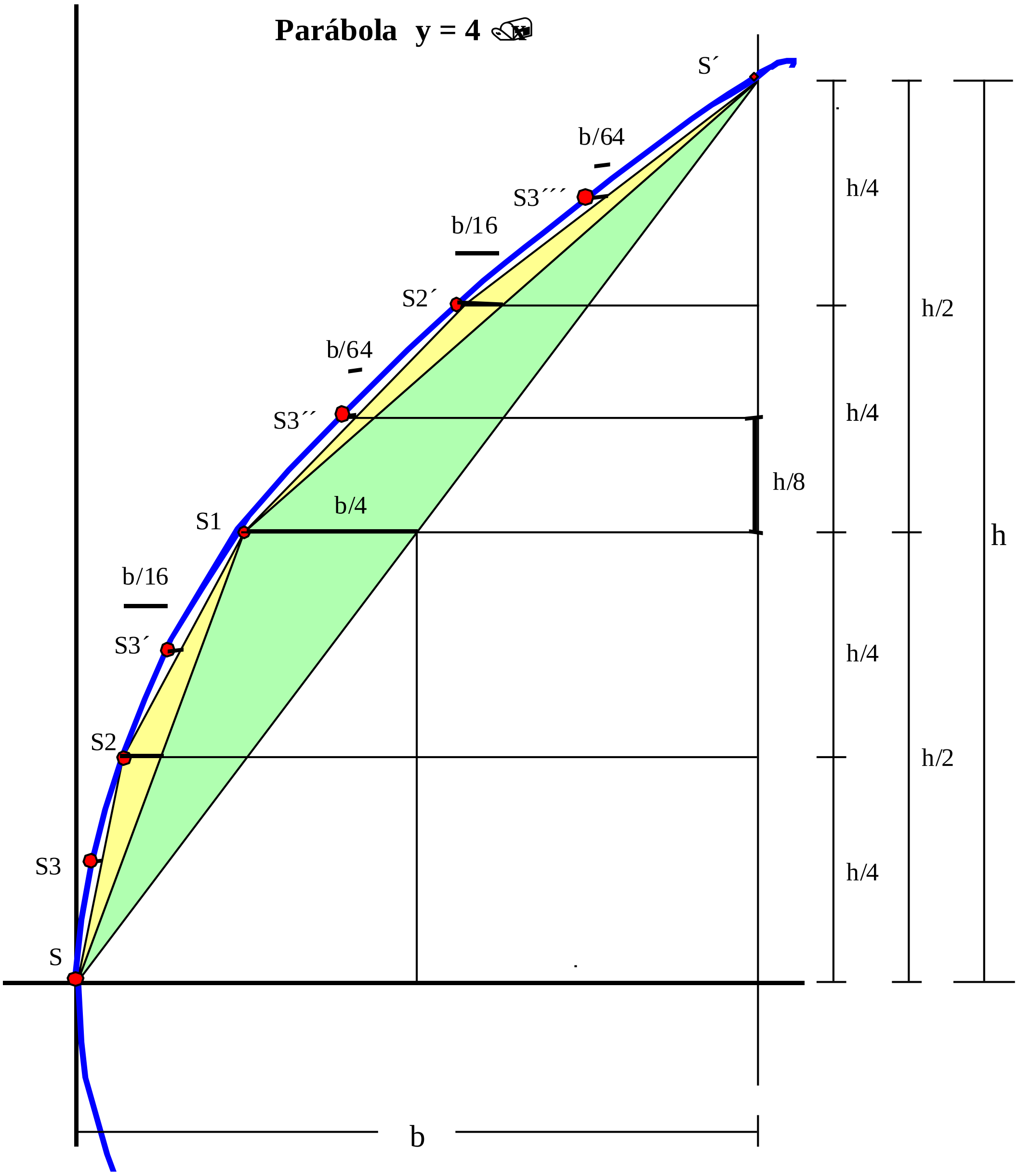


Figura V.2.2.4. Segmento parabólico.

Se busca el área de una sección de parábola de la figura llamada segmento parabólico. Inscribimos a este segmento un triángulo cuyo vértice coincida con el de la parábola. Para mayor sencillez nos limitaremos a la mitad superior del segmento, en el que estará comprendido ahora un gran triángulo rectángulo (la mitad del triángulo inscrito completo), cuya hipotenusa se extiende desde el vértice de la parábola hasta el punto en el que se corta la cuerda que limita el segmento. Los catetos de este triángulo que designaremos con el nombre de “triángulo grande” son un segmento del eje de la parábola y otro segmento perpendicular al eje e igual a la mitad de la cuerda. Y ahora empecemos con el “agotamiento”. Para ello tomaremos la hipotenusa del “triángulo grande” como la base de un nuevo triángulo (de color verde en la figura), que ya no será rectángulo. Sobre los otros dos lados de este triángulo verde tienen a su vez sus bases dos triángulos amarillos, cuyos vértices, como todos los de los triángulos que consideramos, están sobre la parábola. Sigamos ahora mentalmente este proceso. Sobre cada uno de los dos lados libres de los triángulos amarillos podemos apoyar las bases de otros dos triángulos menores, cuyos vértices, han de estar sobre la parábola, y así hasta el infinito. Se ve inmediatamente que estos triángulos han de terminar por rellenar completamente el semisegmento de parábola, pero ¿cómo obtendremos la suma de las áreas de este número infinito de triángulos?

En este punto veremos brillar en todo se esplendor el genio matemático de los griegos, admirándonos, a la vez, de la claridad y sencillez casi increíbles con que resolvieron este problema aparentemente insoluble. Arquímedes decía que una suma infinita sólo podía estar construida por una serie decreciente cuyos términos se hallaran entre sí en una relación racional cualquiera. Así se sabía, por ejemplo, que la suma de la serie 1 + 1/2 + 1/4 + + 1/8 + 1/16 +... daba un valor racional a pesar de sumarse un número infinito de términos: el valor 2. Si se consigue, pues, que el área de nuestros triángulos, cada vez menores, llegue a estar en una relación disminutiva constante, el problema se habrá convertido en la suma de una serie decreciente. Y el “triángulo grande” podrá ser tan grande como se quiera, pues tomándolo igual a 1, y expresando los demás triángulos en fracciones de esa unidad, para obtener el resultado bastará, después de efectuada la suma de la serie, multiplicar el valor obtenido por el área real del “triángulo grande”. El resultado final debe expresar, de un modo racional y exacto, la cuadratura de la parábola.

Arquímedes consiguió, efectivamente, este objetivo. Siguiendo el curso de sus ideas de modo simplificado, para lo cual nos rendirá un excelente servicio el esquema de la figura V.2.2.4, recordaremos que la parábola posee propiedades muy notables. Como su exposición nos llevaría demasiado lejos, nos limitaremos a citar que todas las paralelas al eje (que cortan a la parábola en los puntos S, S3, S2, S3´, etc.) se llaman diámetros de la parábola, y que en la parábola, cuando la porción del diámetro comprendida entre una cuerda y la curva tiene una longitud máxima, el diámetro divide a la cuerda en dos partes iguales. Indiquemos, además, que los griegos y, desde luego Arquímedes, sabían perfectamente que el segmento de eje *b* estaba, con una cualquiera de sus partes, en la misma razón que h^2 en el cuadrado de la perpendicular trazada desde el punto de división de la parábola, lo que en nuestro lenguaje moderno significa precisamente la ecuación analítica de la parábola ordinaria[26],

$$y^2 = x, \quad o \quad y = \sqrt{x} \ .$$

Y ahora, a la vista de la figura V.2.2.4, correspondiente a la parábola $y = 4\sqrt{x}$, entremos de lleno en el estudio del problema.

El "triángulo grande" tiene por catetos *b* y *h* y por hipotenusa, SS´; su área es *bh/2.* Trazamos en el punto *h/2* un "diámetro, buscando un punto S1 de intersección con la parábola e inscribiendo a este nuevo segmento el triángulo SS´S1, lo podemos imaginar dividido por el segmento *b/4* en dos triángulos parciales, ambos de base *b/4* y altura *h/2*, que juntos tendrán por área $2\times\left(\frac{b}{4}\times\frac{h}{2}\right):2$, lo que supone que el triángulo SS´S1 tiene un área $\frac{bh}{8}$.

Esto supone que el triángulo verde es la cuarta parte del "triángulo grande". Tracemos ahora otros dos diámetros por *h/4* y *3h/4*, es decir, volvemos a dividir *h/2* en dos mitades. Los diámetros de estos puntos de división dan lugar a dos nuevos puntos de intersección S2 y S2´ en la parábola. Y como a los nuevos segmentos SS2S1 y S1S2´S´ les podemos inscribir dos nuevos triángulos SS2S1 y S1S2´S´ que corresponden a los triángulos amarillos, se repite, de nuevo, las mismas propiedades y el procedimiento anterior. Tenemos cuatro triángulos parciales separados por la base *b/16*, cada dos de ellos forman un triángulo amarillo, cada triángulo parcial tiene un área $\left(\frac{b}{16}\times\frac{h}{4}\right):2$ y los cuatro juntos $4\times\left(\frac{b}{16}\times\frac{h}{4}\right):2$, o sea, $\frac{bh}{32}$, lo que significa que los dos triángulos amarillos son la cuarta parte del triángulo verde.

Si seguimos aplicando la misma ley formativa y dividimos en la figura los *h/4*, obtendremos mediante los cuatro nuevos diámetros los cuatro nuevos

---

[26] Las abscisas del punto extremo *x* y del punto de división *x'* se hallan entonces en la misma relación que los cuadrados de las ordenadas correspondientes y^2 e $(y')^2$. Por tanto, todos los puntos de la parábola se hallan expresados por $y^2=x$.

puntos de intersección S3, S3´, S3´´ y S3´´´, y con ellos cuatro “triángulos exhaustivos” que formarán en conjunto ocho triángulos parciales de base *b/64*, cuya área total será $8\times\left(\frac{b}{64}\times\frac{h}{8}\right):2$, es decir, $\frac{bh}{128}$, siendo la cuarta parte del área de los triángulos amarillos.

Concluimos que nuestro “agotamiento”, bajo la condición de la continua división en dos mitades de *h*, trazado de diámetros y formación de triángulos, forman una serie decreciente que cumple: El “triángulo” grande es cuatro veces mayor que el verde. El triángulo verde es cuatro veces mayor que los triángulos amarillos. Los triángulos amarillos son cuatro veces mayores que los triángulos de vértices S3, S3´, S3´´ y S3´´´, etc., y así hasta el infinito. Si tomamos ahora por unidad el “triángulo grande”, cosa que podemos hacer, obtendremos la serie: 1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 +... , puesto que en esta serie cada término es 1/4 del precedente. Por tanto, el área del segmento parabólico será el área del “triángulo grande” por la suma de la serie[27]. Por procedimientos modernos, sabemos que esa serie es geométrica de razón 1/4, por tanto la suma es[28]: $S_\infty=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$.

Por último, debemos decir que el primer triángulo no necesita ser triángulo rectángulo, pudiendo haber cogido cualquier segmento oblicuo como triángulo inicial y debiéndose haberlo hecho así para conseguir la completa generalización. De hacerlo así, se determina el paralelogramo que pasa por los vértices opuestos del mismo dividiendo dicho paralelogramo en la relación 2/3 a 1/3 y todos los triángulos “exhaustivos” valen 1/3 del triángulo de partida cuya base es la cuerda del segmento[29].

Así pues: *“El área del segmento parabólico es el cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento”.*

---

27 Arquímedes desconocía la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, sin embargo, por medio de la doble reducción al absurdo (similar a la realizada para calcular el volumen del cono) obtiene el valor 4/3. Una demostración, por doble reducción al absurdo, de la cuadratura de un segmento parabólico puede encontrarse en: Pérez González, F. J. (2008). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.* Universidad de Granada. Departamento Análisis Matemático. Pp. 500-502. En: http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_fun_una_var.pdf

28 Recuérdese la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica donde r es la razón $0<r<1$ y a_a el primer término, esto es, Suma = $a_1/(1-r)$.

29 Colerus obvia esta demostración, a nosotros nos resultaría fácil utilizando el cálculo integral moderno y, si es necesario, realizando previamente un cambio de coordenadas.

En la Baja Edad Media, el único autor que destaca es el obispo de Lisieux, **Nicolás Oresme** (1323-1382), el cual se le ocurrió hacer un dibujo o gráfica de la misma manera que las cosas varían, según sus palabras: *"Todo lo que varía se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo".* Oresme dibuja en la gráfica velocidad-tiempo[30] en la que los puntos de la recta horizontal representa los distintos instantes de tiempo (longitud) y, para cada uno de esos instantes traza un segmento (latitud) perpendicular a la recta de longitudes en dicho punto cuya longitud representa la velocidad en dicho instante[31]. Los extremos superiores de todos estos segmentos están en una recta y si el movimiento uniformemente acelerado parte del reposo, entonces la totalidad de todos los segmentos forman un triángulo rectángulo cuyo área corresponde con el espacio recorrido (figura V.2.5)[32]. Además, la velocidad en el punto medio es la mitad de la velocidad que hay al final del intervalo. Oresme, al ser conocedor y estudioso de la proporcionalidad, observó que si se divide el intervalo en dos partes iguales el área de la primera mitad es a 1 como la de la segunda es a 3; si se divide en tres partes la relación es 1, 3 y 5; si se divide en cuatro la relación es 1, 3, 5 y 7[33]. En el siglo XVII, Galileo retomando el punto donde lo dejó Oresme, descubrió que las distancias estarán entre sí como los números impares y la suma de la progresión aritmética de los n primeros números impares es n^2, lo que le llevó a formular la *Ley de caída de los cuerpos.*

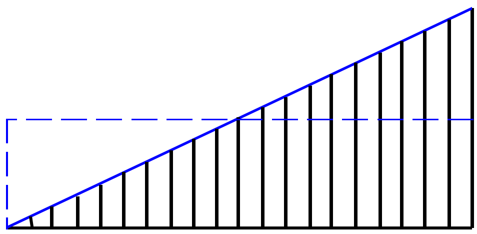


Figura V.2.2.5. Gráfica velocidad-tiempo de Oresme.

[30] El mérito de Oresme está en representar, por primera vez, el movimiento por medio de una gráfica.

[31] Las longitudes es el equivalente a las abscisas y las latitudes es equivalente a las ordenadas.

[32] Sin necesidad de representar la función tiempo-velocidad, expresado el movimiento de un móvil en distancia-tiempo los filósofos escolásticos ya habían descubierto que: *"Si un cuerpo se desplaza con un movimiento uniformemente acelerado, la distancia recorrida es igual a la de otro cuerpo moviéndose durante el mismo tiempo a la velocidad uniforme del primero en el punto medio del intervalo"*, este aserto se conoce como *"regla de Merton College"* (Boyer, 1986, pág. 336).

[33] En nuestra concepción moderna consiste en el cálculo de integrales definidas en cada uno de los subintervalos [b(i–1)/n, bi/n], i=1,2,...,n del intervalo original [0,b].

V.2.3. DEL RENACIMIENTO HASTA BARROW

Transcurridos más de 1750 años desde la muere de Arquímedes, aparecen los primeros avances, a partir de los cuales y con continuidad en el tiempo, en el cálculo infinitesimal de la mano del ingeniero holandés **Simon Stevin** (1548-1620), quien conociendo los métodos del genio de la antigüedad deseaba evitar la exhausción, este autor razona del siguiente modo para la obtención del centro de gravedad de un triángulo[34]:

Inscríbase en un triángulo ABC (figura V.2.3.1) un cierto número de paralelogramos de la misma altura y cuyos lados sean dos a dos paralelos a uno de los lados, por ejemplo AB, del triángulo y a la mediana trazada desde el vértice opuesto, sea esta CM. El centro de gravedad de la figura formada por la unión de todos los paralelogramos inscritos estará situado sobre la mediana, por el principio arquimediano de que las figuras bilateralmente simétricas están en equilibrio. Sin embargo, podemos inscribir en el triángulo una cantidad infinita de tales paralelogramos, y como a mayor número de paralelogramos menor será la diferencia entre la figura inscrita y el triángulo, diferencia que puede hacerse tan pequeña como se quiera, la conclusión es que el centro de gravedad del triángulo debe estar situado también sobre la mediana (Boyer, 1986, págs. 408-409).

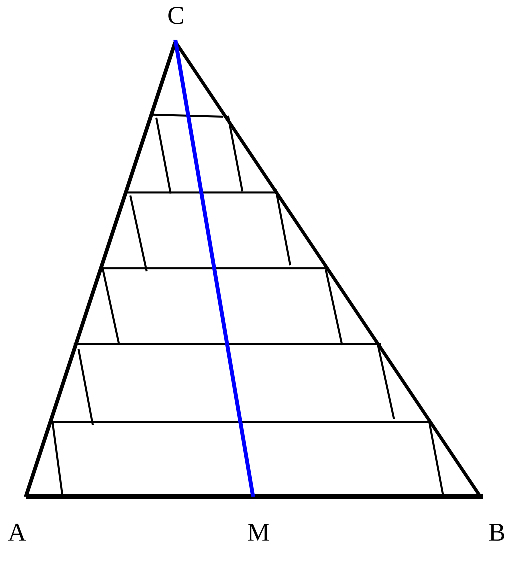


Figura V.2.3.1. Centro de gravedad de un triángulo.

[34] Aparece en su tratado de *Estática*, publicado en 1586, casi un siglo antes de que Newton y Leibniz publicaran sus trabajos de cálculo (Boyer, 1986, pág. 408).

Kepler (1571-1630), alemán, motivado por una gran cosecha de uva en Austria, renuncia a la doble reducción al absurdo utilizada hasta entonces, da una teoría de cubicación de toneles resolviendo 92 tipos de problemas diferentes, descomponiendo en pequeñas cuñas llega a cubicar el toro (Rey Pastor, 1973, págs. 443-450).

En 1609 enunció las dos primeras leyes astronómicas: 1.- *Los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas, uno de cuyos focos es el Sol.* 2.- *El radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales*. Kepler para esta segunda ley suponía que el área estaba formada por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol y los otros dos en la órbita del planeta pero infinitamente próximos.

Por ejemplo, para calcular el área del círculo razona del siguiente modo: Consideremos el círculo descompuesto en triángulos infinitamente estrechos, todos ellos con un vértice en el centro del círculo, la altura de todos ellos es "casi igual" al radio *"r"* del círculo y si consideramos las bases infinitamente pequeñas *"b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ..."* de cada uno de ellos sobre la circunferencia obtendremos al sumar todas las áreas de los triángulos (ver figura V.2.3.2).

$$A = \frac{1}{2}rb_1 + \frac{1}{2}rb_2 + \frac{1}{2}rb_3 + \ldots + \frac{1}{2}rb_n + \ldots = \frac{1}{2}r\left(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots\right)$$

y como la suma de las bases es la circunferencia se concluye que el área del círculo es $A = \frac{1}{2}rC$, siendo r el radio del círculo y *C* la longitud de la circunferencia. Además, Kepler llegó a deducir el área de la elipse, no así su longitud que consideraba una aproximación la dada por $\pi(a + b)$.

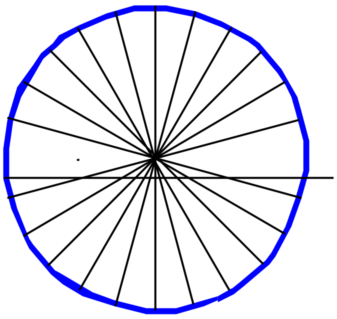


Figura V.2.3.2. Área del círculo por medio de triángulos infinitamente pequeños.

Galileo Galilei (1564-1642)[35], considerado el padre de la ciencia moderna, retomando las ideas de Oresme las precisa y les da las concepciones matemáticas de las cuales carecían permitiéndole formalizar, como se dijo anteriormente, la ley de *"Caída libre de los cuerpos"*, es decir, integra la función $g \cdot t$ llegando a obtener $gt^2/2$.

Como resultado de la descomposición del movimiento del lanzamiento de un proyectil, componente horizontal uniforme y componente vertical uniformemente acelerada, concluyó que éste describe una trayectoria parabólica. Galileo estaba interesado en lo infinitamente pequeño o grande, sin embargo sus estudios fueron muy limitados y prueba de ello transcribimos sus ideas al respecto: *"Si doblamos un segmento para formar un cuadrado o un octógono regular, hemos conseguido dividirlo en cuatro, ocho partes iguales. Si doblamos dándole la forma de circunferencia hemos reducido a una presencia aquel número infinito de partes de las que constaba el segmento pues la circunferencia se considera un polígono de infinitos lados".* En este punto el científico reflexiona del siguiente modo: *"Los infinitos y los indivisibles transcienden nuestro entendimiento finito, los primeros por su excesiva magnitud y los segundos por su pequeñez"* (Boyer, 1986, págs. 414-416).

Cavalieri (1598-1647), discípulo de Galileo, evita sumar elementos infinitesimales, por tanto, un área puede considerarse formada por segmentos rectilíneos (indivisibles) y un volumen estará compuesto por secciones o áreas (indivisibles), lo cual supone que los indivisibles tienen una dimensión menos que el objeto estudiado. Es importante observar que mientras Kepler pretende sumar elementos infinitesimales en los que se puede descomponer una figura, el jesuita Cavalieri se limita a comparar dos figuras para deducir la extensión de una mediante la otra. Con el fin de aclarar ideas, consideró que una superficie plana está formada por infinidad de cuerdas paralelas y para ello definió las potencias de todas las líneas calculando la integral de x^k para $k = 1, 2, ..., 9$. Lo más original y discutido de Cavalieri es la formulación de sus principios[36], éstos son:

[35] Consideramos interesante mencionar que el año de su nacimiento coincide con la muerte de uno de los mayores genios de todos tiempos, Miguel Ángel Buonarroti (1475-1564) y el año de su muerte vuelve a coincidir con el nacimiento de otro genio excepcional, Isaac Newton (1642-1727).

[36] Pérez, G., Molfino, V., Lanzilotta, M. y Dalcín, M. (2002). Epistemología e Historia de la Matemática-Nivel Medio. Orígenes del Cálculo Infinitesimal: De la Antigüedad al Teorema Fundamental. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 15,* pp. 514-519.

1. *Si dos figuras planas tienen la misma altura y si sus secciones determinadas por líneas paralelas a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces las áreas de las dos figuras están también en la misma razón.*
2. *Si dos cuerpos sólidos tienen la misma altura y si las secciones que determinan planos paralelos a las bases y a distancias iguales de ellas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los dos sólidos están también en la misma razón.*

Como aplicación del primer principio calculemos el área de la elipse (véase la figura V.2.3.3). Para ello consideramos la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\, a>b$ y la circunferencia $x^2+y^2=a^2$.

Ambas pueden ser escritas de la forma: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

La razón entre las ordenadas correspondientes, es decir, las cuerdas verticales de la elipse y la circunferencia es *b/a*, por tanto, por el primer principio obtendremos:

Área de la elipse = (b/a)Área del círculo = (b/a)πa^2 = πab. Por tanto:

“La superficie de una elipse es π por el producto de los semiejes”.

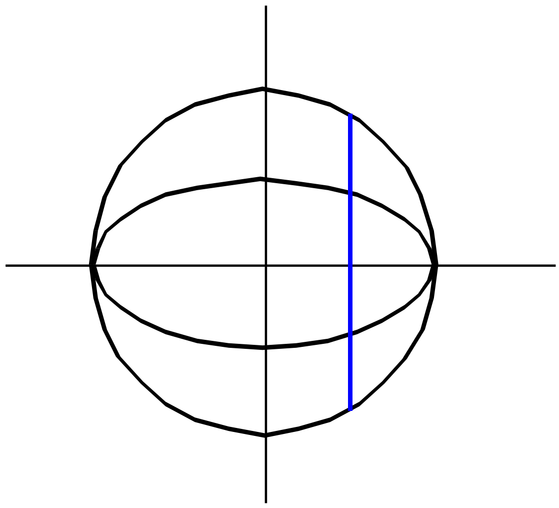


Figura V.2.3.3. Área de la elipse por indivisibles.

Como aplicación del segundo principio de Cavalieri, calculemos los volúmenes de un cono y de una esfera.

"El volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro que tiene la misma base e igual altura".

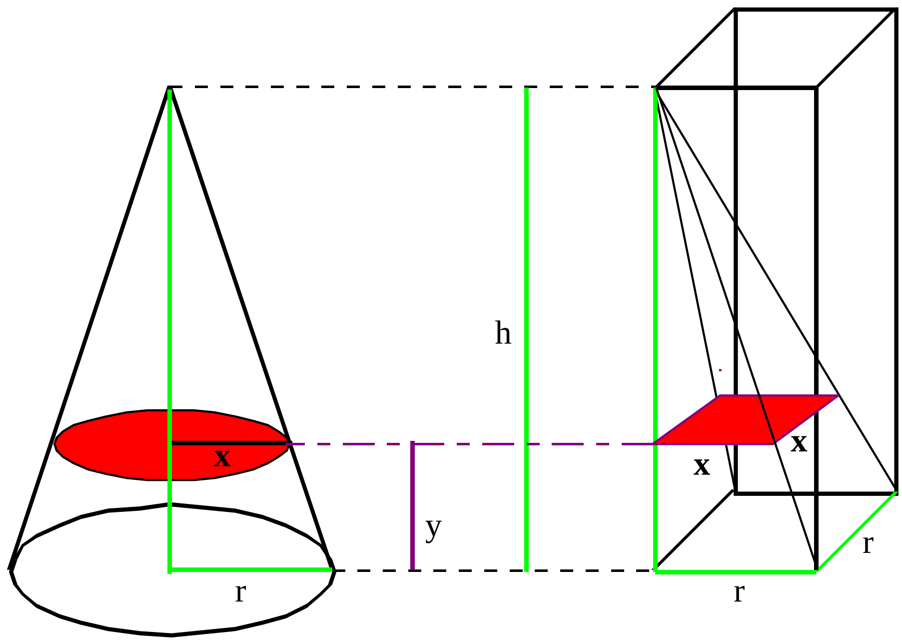


Figura V.2.3.4.Volumen del cono por indivisibles.

Consideremos la pirámide de radio *r* y altura *h* y el prisma de base cuadrada de lado *r* y altura *h.* A una determinada altura *y* de sus respectivas bases el área del círculo de la pirámide es πx^2 y el área del cuadrado de la pirámide formada por la base del prisma y uno cualquiera de sus vértices superiores es x^2, por tanto, por el segundo principio, el volumen del cono es π por el volumen de la pirámide y el volumen de ésta es la tercera parte de volumen del prisma mencionado anteriormente, concluimos lo siguiente:

"Volumen del cono = π por volumen de la pirámide = π por la tercera parte del volumen del prisma = $\pi\left(\frac{1}{3}r^2h\right)$ *= la tercera parte del volumen del cilindro de radio r y altura h =* $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ *".*

"El volumen de la esfera es las dos terceras partes del cilindro cuya base es el radio de la circunferencia y la altura su diámetro, o lo que es lo mismo, las cuatro terceras partes de π por el radio al cubo".

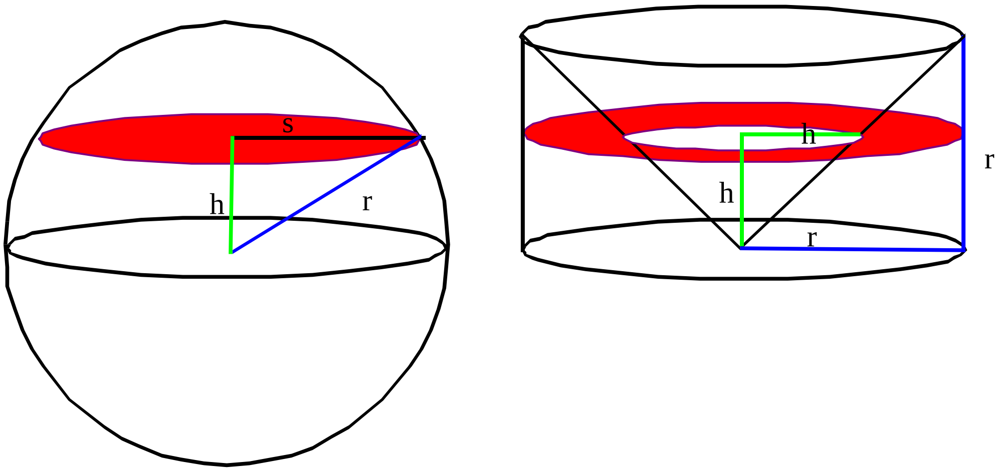


Figura V.2.3.5.Volumen de la esfera por indivisibles.

Sea el plano *P* que corta a la esfera por el ecuador, sea un cilindro cuyo radio de su base y su altura coincidan con el radio *r* de la circunferencia. Entonces:

$$\text{Área del círculo de radio } s = \pi s^2 = \pi(r^2 - h^2)$$

$$\text{Área de la corona circular } = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)$$

Aplicando el segundo principio de Cavalieri y el resultado anterior se obtiene:

"Volumen de la esfera = 2 (volumen de la semiesfera) = 2 (volumen del cilindro – volumen del cono) = $2(\pi r^3 - \pi r^3/3) = (4/3)\pi r^3$ *= Dos tercios del volumen del cilindro circunscrito".*

Como un resultado interesante concluimos que[37]:

> *La esfera de radio r, el cono cuyo radio de su base es r y su altura es 2r y el cilindro que circunscribe a ambas figuras, es decir, de radio r y altura 2r están en la relación 2:1:3.*

[37] Esta relación ya era conocida por Arquímedes y tan sorprendido quedó de la misma que dejó indicado que fuera su epitafio.

Pierre de Fermat (1601-1665), abogado de oficio y matemático aficionado, llegó a estudiar Matemáticas por puro deleite y los descubrimientos que realizó, aún asombran a los profesionales de esta ciencia. A modo de ejemplo realizamos la integral de la curva $y=x^n$ entre $x=0$ y $x=a$ para cualquier valor *"n"* natural o racional positivo[38].

Consideremos la curva $y=x^n$ y calculemos el área comprendida entre dicha curva, el eje de abscisas y las recta $x=0$ y $x=a$, es decir, $\int_0^a x^n dx$; el procedimiento que sigue Fermat es subdividir el intervalo [0,a] en infinitos subintervalos tomando como abscisas: a, aE, aE^2, aE^3, ..., siendo $0 < E < 1$ y considera los rectángulos superiores de base $aE^{n-1} - aE^n$ y altura los puntos de abscisa aE^{n-1}, tal y como muestra la figura V.2.3.6, cuyas áreas suman:

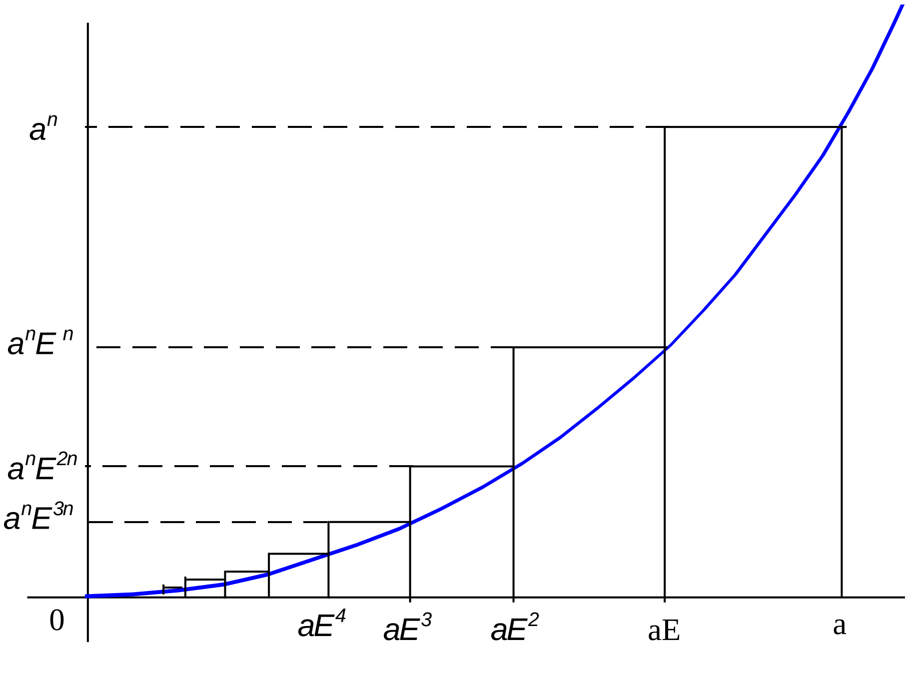


Figura V.2.3.6. Integral de Fermat.

$a^n(a - aE) + a^nE^n(aE - aE^2) + a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3) + a^nE^{3n}(aE^3 - aE^4) + \dots$

que es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $0 < E^{n+1} < 1$, por tanto, ésta es: $\dfrac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \dfrac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\dots+E^n}$.

[38] Tal integral la realizó Cavalieri para n = 1, 2, ..., 9. Fermat la resolvió para cualquier valor de *"n"* entero o fraccionario, salvo para $n = -1$ (Pérez González, 2008, pág. 508).

Si E tiende a 1 las bases de los rectángulos son cada vez más estrechas y el área de todos ellos se aproxima al área bajo la curva. Si hacemos E = 1 en la fórmula anterior obtenemos el área buscada y ésta es $\frac{a^{n+1}}{n+1}$. Para generalizar esta fórmula cuando *n* es racional positivo, tómese *n=p/q* y la suma de la progresión geométrica anterior es:

$$a^{(p+q)/q}\left(\frac{1-F^{q}}{1-F^{p+q}}\right)=a^{(p+q)/q}\left(\frac{1+F+F^{2}+\ldots+F^{q-1}}{1+F+F^{2}+\ldots+F^{p+q-1}}\right), \text{ siendo } F=E^{1/q}$$

Si hacemos E = 1, también se hace F = 1 y obtenemos: $\frac{q}{p+q}a^{(p+q)/q}$.

Si se desease calcular $\int_a^b x^n dx$ bastaría con hacer $\int_0^b x^n dx - \int_0^a x^n dx$.

Fermat también calcula el área de esa curva para valores negativos de *n*, salvo para $n = -1$. Para ello toma E > 1 y calcula el área comprendida entre la curva, el eje de abscisas desde *x=a* hasta infinito y en lugar de la demostración indirecta, por reducción al absurdo, lo que hace es que el número de rectángulos tienda a infinito y toma el límite (Boyer, 1986, págs. 441-443)[39].

Gregory de St. Vincent (1584-1667) resolvió el problema de la integración de la función hiperbólica para ello demostró que si tomamos a lo largo del eje *OX* puntos a partir de la recta *x=a* tales que los intervalos que determinan van creciendo en progresión geométrica, y si en dichos intervalos levantamos las ordenadas correspondientes a la hipérbola *xy=1* entonces el área entre dos ordenadas sucesivas son iguales, entiéndase en nuestro lenguaje moderno[40] $\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln b - \ln a$. Por medio de este resultado queda completada la integral de la función x^n.

[39] La cuadratura de la parábola $y=x^2$ puede verse en Kline (1992, tomo I, págs. 464-466) y, más interesante, la cuadratura de la hipérbola generalizada $y=x^{-2}$ para $x \geq a$ puede encontrarse en Pérez González (2008, págs. 508-509).

[40] Actualmente se define $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt,\ x > 0$; entiéndase log x = ln x (Spivak, 1991, pág. 468).

Roberval (1602-1675) consiguió la cuadratura de la cicloide[41] en 1634 y éste demostró, utilizando el método de los indivisibles de Cavalieri, que *"el área encerrada bajo un arco de dicha curva es igual a tres veces el área del círculo que la engendra"* (Pérez González, 2008, pág. 507).

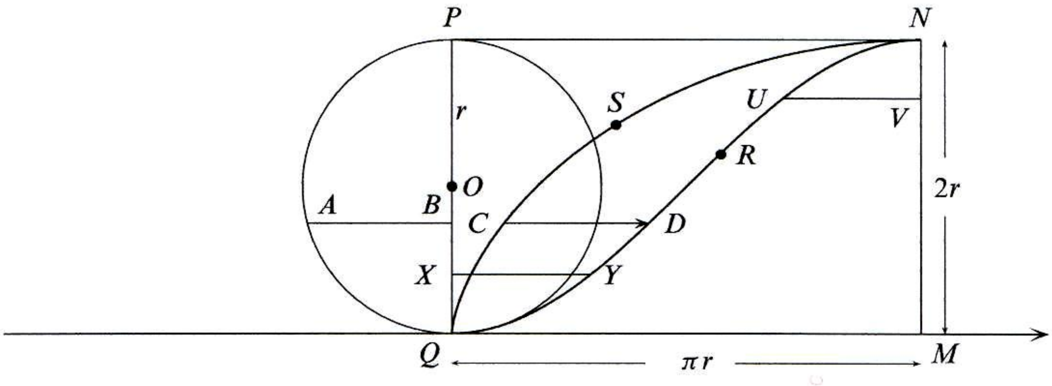


Figura V.2.3.7. Cuadratura de la cicloide.

Sea *QMNS* la mitad de la región del arco de cicloide generado por el círculo de radio *r* centrado en *O.* El área del rectángulo *QMNP* es el doble de la del círculo. Construimos segmentos horizontales, *AB*, con longitud determinada por la distancia horizontal entre el diámetro *PQ* y la semicircunferencia izquierda. El correspondiente punto *C* (en la horizontal de *AB*) de la cicloide se traslada horizontalmente al punto *D*, así pues, *AB=CD* y se obtiene la curva *QRN*, llamada curva asociada a la cicloide[42]. Por la construcción las secciones horizontales del semicírculo izquierdo y la región comprendida entre la cicloide y su asociada tienen segmentos de igual longitud, por tanto, el área de cada una de ellas es $\pi r^2/2$.

La curva asociada a la cicloide divide en dos partes iguales al rectángulo *QMNP*, pues, Roberval demuestra que "las secciones horizontales de altura *a* y *2r – a* dan en cada una de las partes en las que dicha curva divide al rectángulo, segmentos iguales *XY* y *UV*". Deducimos que el área de la superficie *QMNS* es $\pi r^2 + \pi r^2/2$, lo cual demuestra el aserto anterior.

René Descartes (1596-1650), dos años después que Roberval, también consiguió lograr la cuadratura de la cicloide.

[41] Lugar geométrico de un punto *P* de un círculo de radio *r* rodando, sin deslizarse, sobre una recta.

[42] En nuestra notación moderna la ecuación de curva asociada a la cicloide es $y = rsen(x/r)$, donde *r* es el radio de la circunferencia generatriz, con tal de que el origen esté en el punto medio *QRN* y el eje de abscisas sea paralelo a la recta *QM* (Kline, 1992, tomo I, pág. 463).

Torricelli (1608-1647) llegó a presentar veintiuna formas diferentes de la cuadratura de la parábola utilizando los indivisibles de Cavalieri y el método de exhausción[43]. En lo que concierne a nuestra investigación, añadimos que: *"Al pasar, Torricelli, de la ecuación para la distancia en función del tiempo a la velocidad en función del tiempo y recíprocamente, se dio cuenta del carácter inverso que presentan los problemas de cuadraturas y de determinación de tangentes"* (Boyer, 1986, págs. 450-451).

Un resultado sorprendente para este autor fue el descubrimiento de un volumen finito para un cuerpo infinito (Pérez y cols., 2002, pág. 517).

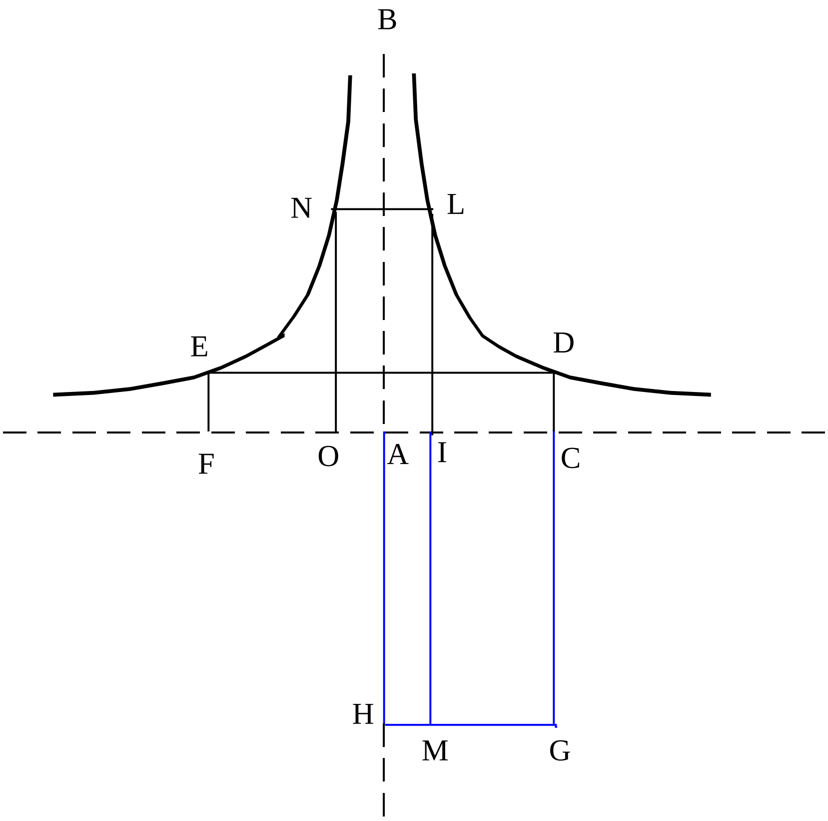


Figura V.2.3.8. Volumen finito de un cuerpo infinito.

Consideremos (figura superior) el sólido infinito engendrado por la rotación del arco LD infinito de hipérbola equilátera y del segmento CD alrededor de la asíntota HB. Torricelli demuestra que el volumen de ese sólido es igual al del cilindro que tiene como base el círculo de diámetro AH; siendo AH el doble de la distancia del punto A a la hipérbola; y cuya altura, constante, es

[43] Este método, como sabemos utiliza la doble reducción al absurdo, también llamado *"apagógico"* en el siglo XVII, según Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. (1951). *Análisis Matemático, vol. 1.* Hamburgo: Kapelusz. P. 684.

AC. Siendo ED una línea horizontal fija, se puede ver que para cualquier posición de la línea NL, paralela a ED, el cilindro de altura NO y diámetro OI tiene un área lateral igual a la de la sección transversal IM del cilindro ACGH. Pero así como las superficies laterales de los cilindros NLIO "llenan" el volumen del sólido de revolución; las superficies de los círculos de diámetro IM "llenan" el volumen del cilindro ACGH. Por tanto, concluimos que los dos volúmenes son iguales.

Pascal (1623-1662) contribuyó de forma notable al Cálculo Integral, aclarando el concepto integral, calculando algunas áreas que equivalen a las integrales definidas entre *O* y *a* de las potencias de $\sqrt{a^2 - x^2}$ que en la actualidad conducen a integrales de productos de funciones trigonométricas. Pero, sobre todo, llegó a las formulas de integración por partes y cálculo de integrales dobles por medio de dos integrales simples (Rey Pastor, 1973, pág. 445). En el contexto de la integración de la función seno en su obra *"Tratado sobre los senos de un cuadrante de círculo"*, de 1658, Pascal se aproximó extraordinariamente al descubrimiento del cálculo integral, pues en palabras de Leibniz: "fue leyendo esta obra cuando se le ocurrió la teoría de la integración"[44].

Huygens (1629-1695) obtuvo excelentes resultados en distintas disciplinas, tales como el principio de su propio nombre en la teoría de la luz, mediante la observación de los anillos de Saturno, y por la verdadera invención del reloj de péndulo[45]. Sus logros en Matemáticas también se consideran importantes, algunos de los cuales son la demostración de que la catenaria no es una curva algebraica y, además, fue el primero en calcular áreas de superficies diferentes a la esfera, así pues, obtuvo el área de un segmento de paraboloide de revolución, el conocido como "conoide de Arquímedes".

---

[44] "Si Pascal no hubiera muerto, como Torricelli, poco después de cumplir 39 años, (...) o se hubiera visto más atraído por los métodos algorítmicos (...), no cabe prácticamente la duda de que se hubiera anticipado a Newton y Leibniz en sus grandes descubrimientos. Pascal es sin duda, el más grande 'podía-haber-sido' de toda la historia matemática" (Boyer, 1986, pág. 460).

[45] En su libro *Horologium oscillatorium publicado en 1673* trata sobre el reloj de péndulo e incluía: la ley de fuerza centrípeta para el movimiento circular, la ley de Huygens para el movimiento del péndulo, el principio de conservación de la energía cinética y otros importantes resultados de mecánica y, además, sirvió de introducción a los *Principia* de Newton publicados 15 años después (Boyer, 1986, pág. 477).

Wallis (1616-1703) abandona el método geométrico y aborda la integración aritméticamente, como consecuencia, obtiene la integración de potencias de cualquier exponente y la integral[46] $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, esto es, el área del círculo en forma de producto de infinitos factores y obtiene este desarrollo:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times 2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\ldots}{1\times 3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\ldots}=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$ (Fórmula de Wallis).

Expresión que, actualmente, se obtiene de $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^{\pi/2} sen^n x\,dx}{\int_0^{\pi/2} sen^{n+1} x\,dx}=1$ y de

$$\int_0^{\pi/2} sen^m x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!} & si\ m\ impar\\[2ex] \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\dfrac{\pi}{2} & si\ m\ par\end{cases}$$

, siendo *m*!!=*m(m–2)(m–4)..,* terminando en 1 ó en 2 según sea *m* impar o par respectivamente (Boyer, 1986, págs. 482-483 y Kline, 1992, tomo I, pág. 467).

Sin embargo, el verdadero mérito de John Wallis consiste en haber establecido claramente la noción de límite con el rigor necesario, esto es, con la condición de que la diferencia entre la variable y el límite sea *quavis assignabili minor* (Rey Pastor, 1973, pág. 445).

James Gregory (1638-1675)[47], por medio de la "división larga" sabía que $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$, además, conocía que el área encerrada por la curva[48] $y=\dfrac{1}{1+t^2}$ desde *t=0* hasta *t=x* es *arctg x* y por integración obtiene el resultado[49]: $\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\,dt = arctg\ x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{4}-\dfrac{x^7}{7}+\dfrac{x^9}{9}-\ldots$

[46] Euler generaliza esta integral con las funciones beta y gamma.

[47] Los trabajos de James Gregory y Nicolaus Mercator llegan a resultados tan sorprendentes como la suma de series, e incluso se adelantan a los desarrollos en serie de Taylor y MacLaurin.

[48] Atribuido al italiano Pietro Mengoli (1625-1686).

[49] Se conoce como *"Serie de Gregory".*

Nicolaus Mercator (1620-1687), de nuevo, por medio de la "división larga" obtiene que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ...$ y, conociendo el resultado de Gregory de St. Vincent que establecía que el área de la hipérbola $y = \frac{1}{1+t}$ desde $t = 0$ hasta $t = x$ es *ln(1 +x)*, e integrando término a término llega a la siguiente igualdad[50]: $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - ...$

Isaac Barrow (1630-1677), cierra este periodo iniciado con el ingeniero Simon Stevin, es el maestro de Newton y la mejor explicación posible del momento en el que se encuentra el análisis matemático y la contribución de Barrow al mismo viene dada por Rey Pastor (1973, pág. 447):

> Contemplamos en esta breve reseña dos ríos caudalosos de ideas que avanzan paralelos. Uno tiene su origen en el **problema del área** (...) para formar un cuerpo de doctrina que se puede llamar Cálculo Integral, el cual avanza lentamente, resolviendo los problemas uno a uno con artificios especiales, a veces ingeniosísimos, porque la sumación se presenta de modo distinto en cada uno y se carece de un método general. El otro caudal de ideas está formado por las numerosas aportaciones al **problema de la tangente**; se persigue un procedimiento general válido para todas las curvas y cada matemático inventa uno distinto en apariencia, todos ellos basados en el cálculo con infinitésimos (...)
>
> Cada país del continente dispara su flecha sin dar plenamente en el blanco, gloria reservada a un teólogo inglés, aficionado a las matemáticas, el cual ideó la determinación de la tangente por el cociente de incrementos. Tal es la sencilla idea de Barrow que oscureció a todas las demás.
>
> El Cálculo diferencial encontró su cauce en Isaac Barrow, pero sus aguas habían corrido estérilmente, mientras el Cálculo integral, incomparablemente más fecundo, quedaba estancado en su progreso. Faltaba la idea genial que fundiese en uno ambos caudales de pensamiento y también fue Barrow quien dio la solución. El área es una función primitiva del integrando; o bien, con el lenguaje de entonces: el problema del área es inverso al problema de la tangente. El dificilísimo problema de la sumación de elementos quedaba así reducido al cálculo de la tangente, mucho más sencillo. Y el mismo año

[50] Se conoce como *"Serie de Mercator"*.

> memorable de 1669 en el que se desata este nudo inextricable con el que forcejearon cientos de gigantes durante dos mil años, cede su cátedra de Geometría a su discípulo predilecto Newton y se consagra de nuevo a la Teología.
>
> Desde este momento culminante en el que confluyen las dos grandes corrientes, sólo falta elaborar el algoritmo diferencial, ir complicando los problemas, crear la notación adecuada. Todo ello es simple cuestión de tecnicismo; y si a la técnica se suma el genio se comprende cómo pudo crecer inconmensurablemente en tan breve periodo, en manos de Isaac Newton y de Guillermo Leibniz.

El cálculo diferencial tal y como se conoce en la actualidad parte de los trabajos de Fermat[51] y el método de Barrow "para la determinación de tangentes que es prácticamente idéntico al que se usa en el cálculo diferencial y en él aparecen dos cantidades que equivalen, en términos modernos, a Δx e Δy" (Boyer, 1986, pág. 488). Así pues, estos dos científicos, aficionados a las Matemáticas, utilizando procedimientos geométrico-analíticos son los fundadores del cálculo diferencial[52].

En la presente Memoria, nuestro interés se centra en el cálculo integral y, efectivamente, a Isaac Barrow le cupo el privilegio de establecer el Teorema Fundamental del Cálculo cuyo enunciado y demostración aparece en la Lección X, Proposición 11 de las *Lectiones Geometricae*. Éste es[53]:

- La curva *ZE*E*, figura V.2.3.9, representa una función monótona.
- La curva *VF*F* representa el área encerrada entre el eje horizontal, la curva *ZE*E*, y la rectas verticales *DE* y *VZ.* Esta es una función de la abscisa *D.* Las longitudes *a** y *a* representan, respectivamente, las áreas de *VD*E*Z* y *VDEZ.*
- El punto *T* es construido de tal modo que la longitud del segmento *DT* es igual al cociente *DT = FD/ED = a/y.*

Afirmación: *La línea TF es una tangente a la curva VF*F.*

---

[51] Laplace considera a Fermat el descubridor del cálculo diferencial (Boyer, 1986, pág. 440).

[52] Las diferenciales de Fermat y Barrow pueden verse en: Boyer (1986, págs. 439-441 y 487-489) y Kline (1992, tomo I, págs. 455-458).

[53] Kindt, M. (2011). *Aportaciones de la historia de las matemáticas a la educación moderna.* Freudenthal Institut. Universidad de Utrecht (Holanda). En: http://www.cimm.ucr.ac.ar/historia%20de%20las%20matematicas/archivos/M.%20Kindt.Aportaciones%20de%20la%20historia%20de%20las%20matematicas%20a%20la%20educacion%20moderna.%20Freudenthal%institut,%20Universidad%20de%20Utrech.%20Holanda.pdf

Supongamos que *K* es un punto de *TF* entre *T* y *F.* Veamos que *K* es un punto a la derecha de la curva *VF*F.*

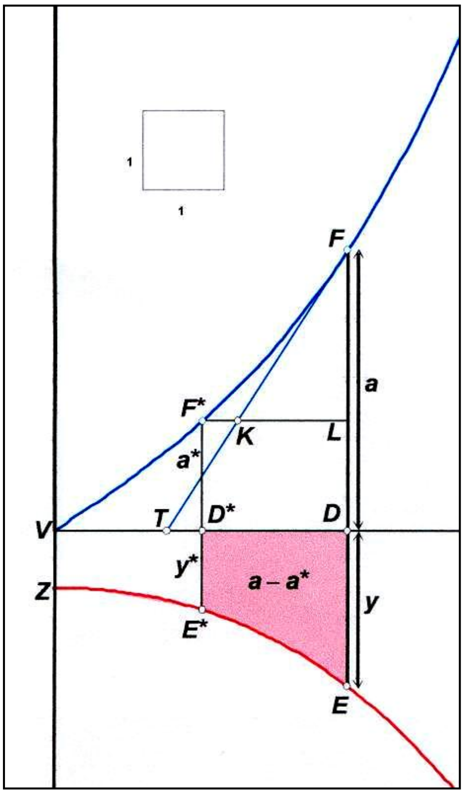


Figura V.2.3.9. Teorema Fundamental del Cálculo.

Por la construcción de *T* tenemos:

FL/LK = *FD/DT* = *ED* = *y*, lo cual implica que *FL* = *LK·y* (1)

De otro lado: *FL* = *a* – *a** = área *VDEZ* – área *VD*E*Z* = área *D*DEE** < *D*D·y,* es decir, *FL* < *D*D·y* (2), puesto que la curva *ZE*E* representa una función monótona.

De (1) y (2) se obtiene *LK* < *D*D* y, por construcción, *LK* < *LF**

Prolongando la recta *TF* demostramos, de modo análogo, que cada punto de la parte prolongada está a la derecha de *VF*F.*

Entonces todos los puntos de la recta, salvo *F*, están a la derecha de la curva, por tanto, *TF* es tangente a la curva en *F.*

Barrow no fue consciente de su descubrimiento y, en notación moderna, estableció la relación entre el problema de la tangente (mediante el cociente incremental) y el problema del área (mediante productos incrementales) como operaciones inversas[54], tal y como muestra la figura V.2.3.10.

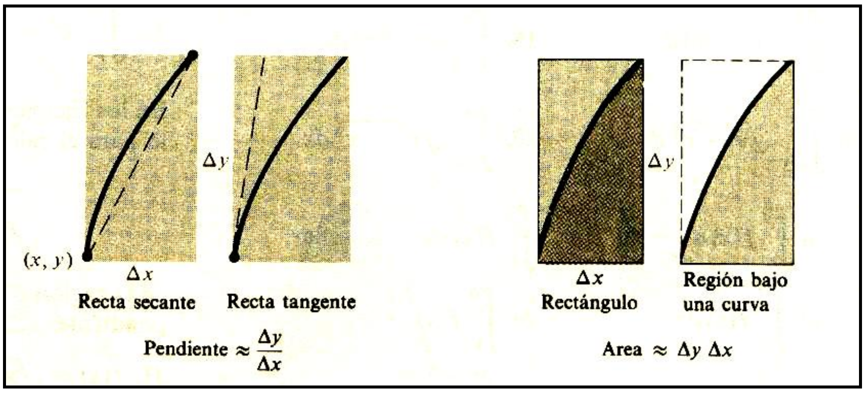


Figura V.2.3.10. Cálculo diferencial e integral (relación inversa).

54 Larson, R. E. y Hostetler, R. P. (1990). *Cálculo y Geometría Analítica.* México: McGraw-Hill. Tercera Edición. P. 314.

V.2.4. DESDE NEWTON Y LEIBNIZ HASTA EL CONCEPTO INTEGRAL

Barrow descubrió el teorema fundamental del cálculo, en forma geométrica, y ni siquiera se dio cuenta de su significado. Además, si hasta ahora los métodos habían resuelto casos particulares, quedaba la generalización de los mismos y como indicaba James Gregory: "La verdadera división de las matemáticas no era en geometría y aritmética, sino en lo universal y lo particular" (Kline, 1992, tomo I, pág. 471). Lo universal fue proporcionado por dos científicos excepcionales: Newton y Leibniz.

Isaac Newton (1642-1727), posiblemente el mayor científico de todos los tiempos[55], comienza por elaborar la teoría de las series de potencias y logra desarrollar la exponencial, el logaritmo, la potencia del binomio cualquiera que sea su exponente y las funciones circulares. En el Cálculo Integral resuelve los problemas de rectificación de arcos y cuadratura de superficies y construye tablas de integrales. En el Cálculo Diferencial resuelve los problemas de máximos y mínimos, concavidad, convexidad e inflexión. Newton era ante todo físico y como tal le interesaba el cálculo como instrumento de investigación, sin preocuparse de la pureza de sus conceptos y de la sencillez de su notación; así por ejemplo definía *"la tangente por la condición de tener dos puntos consecutivos de una curva"* (Rey Pastor, 1973, pág. 447).

En 1667 Newton entregó a sus amigos un trabajo titulada *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (Sobre el Análisis por medio de ecuaciones con un número infinito de términos), siendo publicado en 1711. En él realiza lo siguiente[56]:

Supone que tiene una curva, y que el área z bajo esa curva viene dada por $z = ax^m$, donde m es entero o fraccionario. A un incremento infinitesimal de x lo llama momento de x y lo representa por o para facilitar la resolución efectiva. Al área acotada por la curva (figura V.2.4.1), el eje OX, el eje OY y la ordenada en $x + o$, la llama $z + oy$, donde oy es el momento del área. Entonces: $z+oy=a(x+o)^m$. Aplica el teorema del binomio al segundo miembro,

[55] Con sus propias palabras: *"Si he conseguido ver más lejos que Descartes ha sido porque me he incorporado sobre los hombros de gigantes"*.

[56] Para ampliar información, consúltese: Boyer (1986, págs. 497-499) y Kline (1992, tomo I, págs. 475-476).

obteniendo una serie infinita cuando *m* es fraccionario, resta de la expresión obtenida la primera, divide por o y desprecia los términos que contienen o y obtiene $y=max^{m-1}$. En el lenguaje actual, el cambio relativo del área en cualquier *x*, es el valor de *y* de la curva para ese valor *x.* Recíprocamente, si la curva es $y=max^{m-1}$, el área encerrada por dicha curva es $z=ax^m$ (Kline, 1992, tomo I, págs. 475-476).

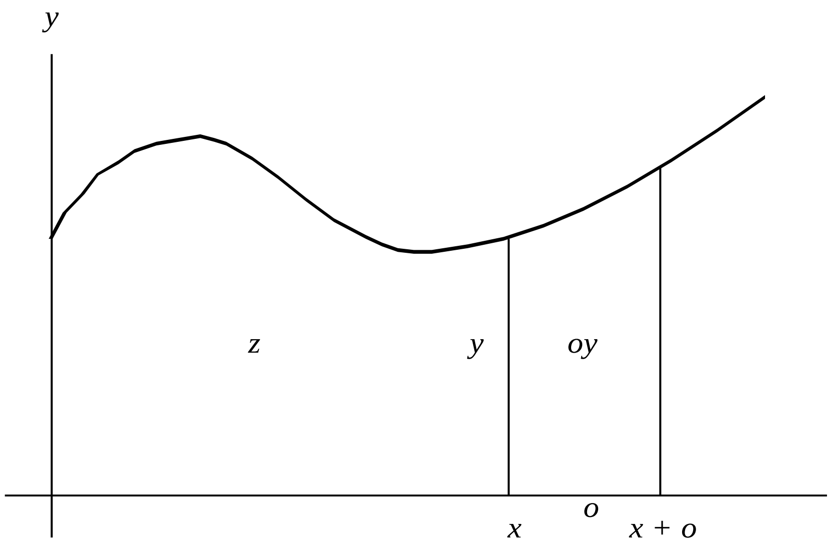


Figura V.2.4.1. Teorema fundamental del cálculo según Newton.

En este proceso[57], Newton dio un método general para el cálculo de áreas y, además, como éstas se obtenían por una sumación infinita de áreas infinitesimales dio una respuesta generalizada a la infinidad de procedimientos particulares desarrollados durante más de dos milenios. Hoy se conoce este resultado como *"Teorema Fundamental del Cálculo".* Incluso estableció la linealidad de la integral y realizó integraciones de series infinitas ampliando las de Gregory y Mercator.

Newton no sólo fue un matemático de primerísimo orden, también dejó una huella indeleble en la Física (recuérdese la Ley de Gravitación Universal) y la Astronomía, que por consideraciones de nuestro trabajo no nos podemos extender. La publicación de *Philosophiae naturalis principia mathematica*[58], en 1687, marca un hito en la Historia de la Ciencia.

[57] "Esta parece ser la primera vez en la historia de la matemática que se calcula un área mediante un proceso inverso de lo que llamamos diferenciación" (Boyer, 1986, pág. 499).

[58] "El tratado científico más admirado de todos los tiempos" (Boyer, 1986, pág. 500).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), hombre de saber enciclopédico, destacó en Teología, Derecho, Filosofía y Matemáticas y sus trabajos en estas dos últimas disciplinas son de los mejores que se han producido hasta la actualidad; además, fue un incansable viajero por Europa llevando innumerables asuntos diplomáticos, entre ellos el acceso de un Hannover al trono de Inglaterra[59]. Leibniz al ser filósofo se interesaba por el rigor lógico y la pureza de los conceptos: sus definiciones de función algebraica y transcendente, de parámetros y, sobre todo, de diferencial son intachables y la notación utilizada por él hizo posible que el Cálculo Diferencial e Integral avanzara a pasos agigantados (Rey Pastor, 1973, págs. 447-448).

Sabemos que estudiando el *“Tratado sobre los senos de un cuadrante de círculo”* de Pascal le sugirió que la determinación de las tangentes a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias, así como las cuadraturas dependen de la suma de las ordenadas o de los rectángulos infinitamente pequeños que constituyen el área. Veamos cómo razona al respecto (Kline, 1992, tomo I, págs. 495-497):

El triángulo (figura V.2.4.2), utilizado por Pascal, considera Leibniz limitado por *dx, dy* y *la cuerda PQ* que consideró *la curva entre P y Q* y *parte de la tangente en T.* Aunque habla de este triángulo como infinitamente pequeño, mantiene que es semejante a un triángulo *STU* formado por la subtangente *SU*, la ordenada en *T* y la longitud de la tangente *ST*. Por tanto, *dx* y *dy* son elementos últimos y su cociente tiene un significado definido. A partir de los triángulos semejantes *PQR* y *STU* se obtiene *dy/dx=TU/SU.*

Posteriormente, resuelve un problema, en la figura V.2.4.2, la normal[60] es *TV* y la subnormal *p* es *UV.* De la semejanza de triángulos *PRQ* y *TVU* obtiene $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$, es decir, *pdx=ydy.* Pero la curva tiene la propiedad de que *p=b/y*, donde *b* es la constante de proporcionalidad. Entonces $dx=\frac{y^2}{b}dy$, por tanto, $\int dx=\int\frac{y^2}{b}dy$, obteniendo el resultado $x=\frac{y^3}{3b}$.

[59] Jorge I, en 1714 (Boyer, 1986, pág. 503).

[60] Obsérvese que el triángulo *STV* es rectángulo.

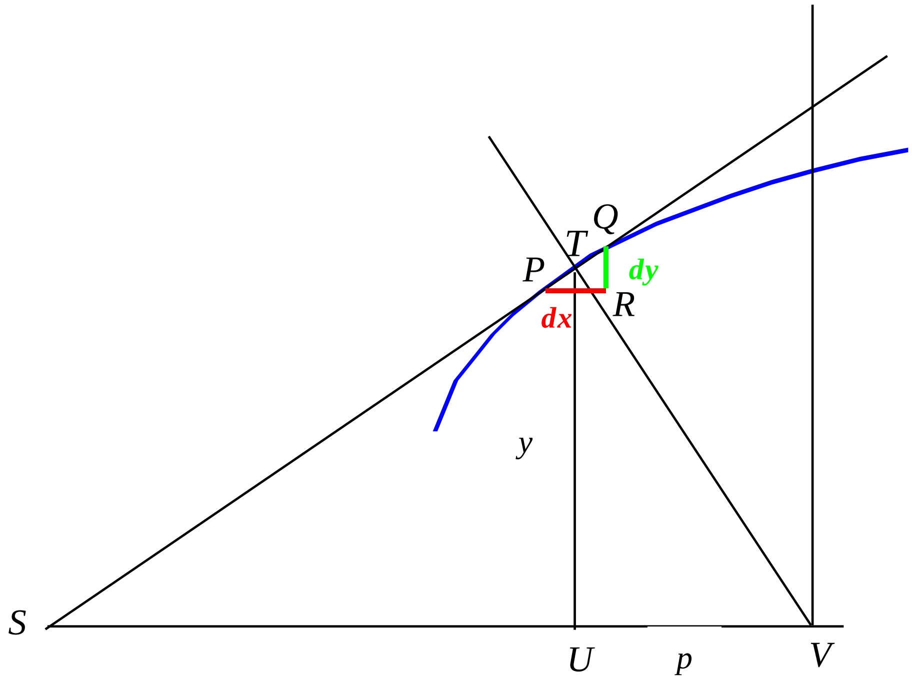


Figura V.2.4.2. Triángulo de Pascal-Leibniz.

Para Leibniz una integral es una suma de infinitos rectángulos infinitesimales y el símbolo que ideó para representarla es "$\int$" que corresponde con una "s" alargada; además, es la primera letra de la palabra latina *summa*[61].

Aunque se generó una agria polémica con Newton por la prioridad del descubrimiento del cálculo integral, hoy sabemos que ambos lo desarrollaron independientemente. Además, Leibniz obtuvo resultados tan sorprendentes como: la convergencia de las series alternadas, derivación parcial, diferenciación de productos, cocientes y exponenciales, derivada enésima e integral enésima de un producto, ecuación explícita de la cicloide, derivación de integrales respecto de parámetros, ecuaciones de evolutas y envolventes, integración por partes, de funciones racionales por descomposición, cálculo de longitudes de curva y volúmenes de revolución de una curva alrededor del eje *OX*, etc. y todo ello siendo prácticamente autodidacta, lo que le llevo a redescubrir resultados de otros científicos (Rey Pastor, 1973, pág. 448).

[61] Amplios resúmenes del cálculo integral de Leibniz puede encontrase en: Kline (1992, tomo I, págs. 490-495) y Pérez González (2008, págs. 514-517).

Tanto **Newton** como **Leibniz**, a pesar de sus diferencias mantenidas durante más de un siglo por los matemáticos continentales y británicos, fueron dos gigantes de las Matemáticas y éstas fueron sus aportaciones (Pérez y cols. 2002, pág. 508):

- El desarrollo de un *método general* para el cálculo de la variación de una variable con respecto al tiempo, en el cálculo de Newton; o la diferencial de una variable, en el cálculo de Leibniz.
- El conocimiento claro y contundente, de nuevo con generalidad, de que los problemas de las tangentes y las cuadraturas son recíprocos, lo que suponía una nueva herramienta para el cálculo de áreas. Frente al contenido geométrico y parcial que le dio Barrow, Newton y Leibniz le dieron en primer lugar una generalidad en su aplicación, en segundo lugar una presentación más analítica y en tercer lugar la importancia que dicho resultado tiene dentro del cálculo.
- Añadimos que a ambos se les considera los fundadores el *Cálculo*, pues ellos fueron los que *aritmetizaron* el cálculo ya que lo empezaron a construir con *conceptos algebraicos.*

Por último, a modo de ilustración, damos una tabla de las notaciones usadas por ambos egregios contrincantes (Rey Pastor, 1973, pág. 448)[62]:

Notaciones de Newton	**Notaciones de Leibniz**	**Notaciones actuales**
Quantitas correlata		Variable independente: t
Fluente		Función: y
o	dt (antes t/d)	Incremento: dt
Fluxión: y	dy/dx	Derivada: y´ = dy/dx
Momento: y.*o*	Diferencial: dy	Diferencial: dy
Integral: y	Omnia: ∫ l; ∫y.dx.	Integral: ∫y.dx

Tabla V.2.4. Notaciones diferenciales e integrales de Newton y Leibniz.

62 La notación de Leibniz es la que se usa en la actualidad, favorecida por “el simbolismo matemático que automatiza los cálculos y permite formular fácilmente procesos algorítmicos (...) El cálculo de Leibniz triunfó en el continente europeo gracias a los trabajos de los hermanos Bernoulli y al libro de texto del Marqués de L’Hôpital [*Analyse des infiniment petits*, publicado en 1696] que divulgó las técnicas del cálculo leibniziano por toda Europa” (Pérez González, 2008, págs. 514-517).

Los hermanos **Bernoulli**[63], **Jacques** (1654-1705) quien utilizó por primera vez la palabra *"integral"* en el *Acta Eruditorum* de 1690 (años después Leibniz consideraba mejor el término *calculus integralis* que *calculus summatorius* como inverso del *calculus differentialis*)[64] y **Jean** (1667-1748) fueron dos científicos suizos que divulgaron el cálculo de Leibniz por Europa continental; además, no sólo fueron meros transmisores de los nuevos conocimientos matemáticos, también fueron partícipes de su desarrollo y de los avances espectaculares que se realizaron, sus investigaciones e importantes descubrimientos científicos contribuyeron a ello.

Leonhard Euler (1707-1783), discípulo de Jean Bernoulli, nuevo coloso de las Matemáticas y a la altura de Arquímedes, Newton y Gauss. Nadie como él fue más prolífico ni más diestro en utilizarla; nadie llegó a dominar y utilizar los recursos del álgebra, la geometría y el análisis para obtener tantos resultados admirables. Euler tuvo una magnífica inventiva metodológica y una gran habilidad técnica; nos encontramos con su nombre en todas las ramas de las Matemáticas. De su ciclópea obra extraemos alguna de sus contribuciones: El concepto de función $f(x)$, la expresión de la exponencial como límite de la potencia $(1+ x/n)^n$, la notación de la e para la base de los logaritmos naturales y de la letra i para la unidad imaginaria, la medición de los ángulos en *radianes,* la relación entre la exponencial y las funciones circulares, las reglas para calcular límites indeterminados que completan la de L´Hôpital, la teoría completa de máximos y mínimos para varias variables, las integrales elípticas, las integrales eulerianas, la integración aproximada de ecuaciones de primer orden, las ecuaciones características de las funciones analíticas (erróneamente llamadas de Cauchy-Riemann), la ecuación fundamental del cálculo de variaciones, los polinomios de Euler, líneas de Euler, constantes de Euler, fórmulas de Euler, grafos eulerianos,... y con la resolución del *problema de las siete puentes de Koenigsberg*, en 1736, dio inicio a la *Teoría de Grafos.* Tenía conocimientos de Teología, Medicina, Astronomía, Física; hablaba varios idiomas; viajó por varios países europeos y fue muy prolífico, tuvo trece hijos, a los que procuró su educación y bienestar (Kline, 1992, tomo II, pág, 537).

63 Leibniz reconoció que el cálculo era tanto de Jacques y Jean Bernoulli como suyo (Kline, 1992, tomo I, pág. 500).

64 Boyer (1986, pág. 525).

La contribución de Euler a las Matemáticas no ha sido igualada ni mucho menos superada por ningún científico a lo largo de la Historia. He aquí las expresiones de las funciones beta y gamma, así como la relación entre ambas.

Integral euleriana de primera especie o función gamma:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad para \quad x > 0$$

Verifica las igualdades: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ y para *"n"* natural $\Gamma(n) = (n-1)!$

Integral euleriana de segunda especie o función beta:

$$\mathrm{B}(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt; \quad para \quad u, v > 0$$

Y la relación existente entre ambas integrales es: $\mathrm{B}(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\cdot\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$

Laplace (1749-1827), consolidó la teoría de probabilidades a partir del cual se considera una rama propia de las Matemáticas, y fue uno de los primeros que demostró, en su *Théorie analytique des probabilités* del año 1812, la igualdad $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. El método que utilizó es artificioso, sin embargo, podemos razonar como sigue:

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \,.\, \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$, cambiando a coordenadas polares se obtiene $\int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr\, d\theta$, la cual puede calcularse fácilmente y, finalmente, se obtiene $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Asimismo, dicha obra contiene la *"Transformada de Laplace"*, ésta es: $F(x) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-xt} dt$, llamándose a la función *F(x) la transformada de Laplace de la función h(t)* (Boyer, 1986, págs. 617-619).

Fourier (1768-1830), Euler estableció el concepto de función de la forma *y*=f(x), sin embargo, existen funciones que no pueden ser expresadas de forma explícita como es el caso de la *ecuación de la difusión del calor* dada en derivadas parciales por: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$, conocida como difusión del calor en el espacio, donde *a* es un escalar. Si *u(x, y, z, t)* designa la temperatura en un instante *t* en el punto de coordenadas *(x, y, z)* de un sólido conductor homogéneo, la función *u* verifica una ecuación en la que *a* depende de la naturaleza del sólido (Bouvier y George, 1984, pág. 254)[65].

Si consideramos una barra unidimensional, entonces la ecuación que relaciona la temperatura *T* de abscisa *x* en un tiempo *t* es[66]:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}; \quad x \in [-\pi, \pi].$$

En la solución de esta ecuación en derivadas parciales, Fourier en su libro *Théorie analytique de la chaleur*[67], publicado en 1822, llega a la conclusión de que con la condición original dada por T(x,0)=f(x), puede desarrollarse la función f(x) por, en lugar de las series de potencias de Taylor, una serie trigonométrica conocida como serie de Fourier, es decir:

$$f(x) = (1/2)a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots$$
$$+ \; b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \dots + b_n \operatorname{sen} nx + \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \; ; \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \; ; \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

La importancia de esta serie radica en que pueden desarrollarse funciones no derivables en algún punto e incluso discontinuas. Dirichlet dio, al menos, dos teoremas sobre la convergencia de estas series[68]. Por último, los desarrollos en serie de Fourier tienen múltiples aplicaciones en la actualidad.

---

[65] Bouvier, A. y George, M. (1984). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Akal.

[66] Recalde, L. (2007). Las raíces históricas de la integral de Lebesgue. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Educación e Historia, vol. XV, nº 2, diciembre*, pp. 103-127.

[67] Considerado por Kelvin como *"un poema matemático"* (Boyer, 1986, pág. 686).

[68] Para mayor información consúltese:
Piskunov, N. (1978). *Cálculo Diferencial e Integral*. Barcelona: Montaner y Simón.
Hawking, S. (2010). *Dios Creo los Números. Los Descubrimientos Matemáticos que Cambiaron la Historia.* Barcelona: Crítica.

Gauss (1777-1855), reconocido como *"Príncipe de los Matemáticos"* y considerado junto con Arquímedes y Newton los tres científicos más determinantes en esta disciplina científica, arrojó innumerables resultados en el campo de las Matemáticas, entre ellos el Teorema Fundamental del Álgebra. Nosotros sólo indicaremos que la *curva de Gauss* o *campana de Gauss* tiene la ecuación cartesiana $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ (figura V.2.4.3) que representa la función de densidad de la *variable aleatoria normal reducida N(0,1)*: $F(x) = \varphi(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ (figura V.2.4.4).

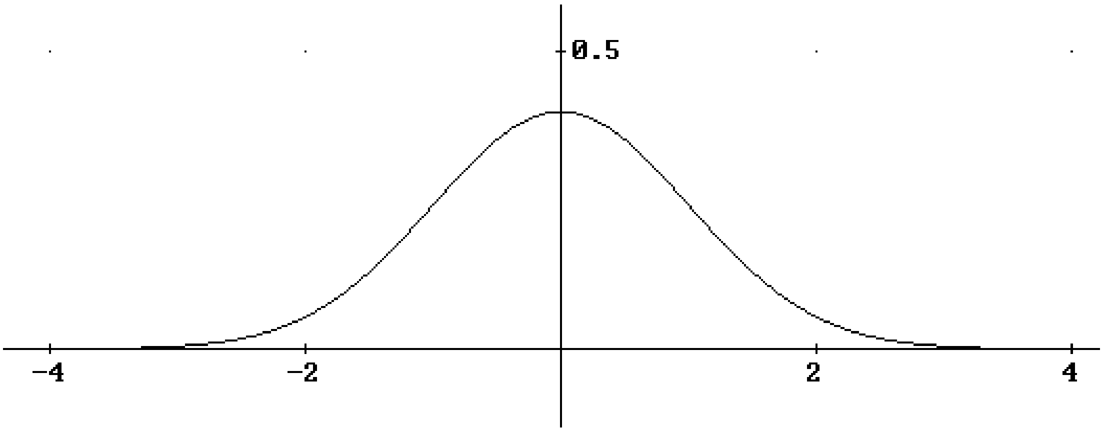


Figura V.2.4.3. Campana de Gauss $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

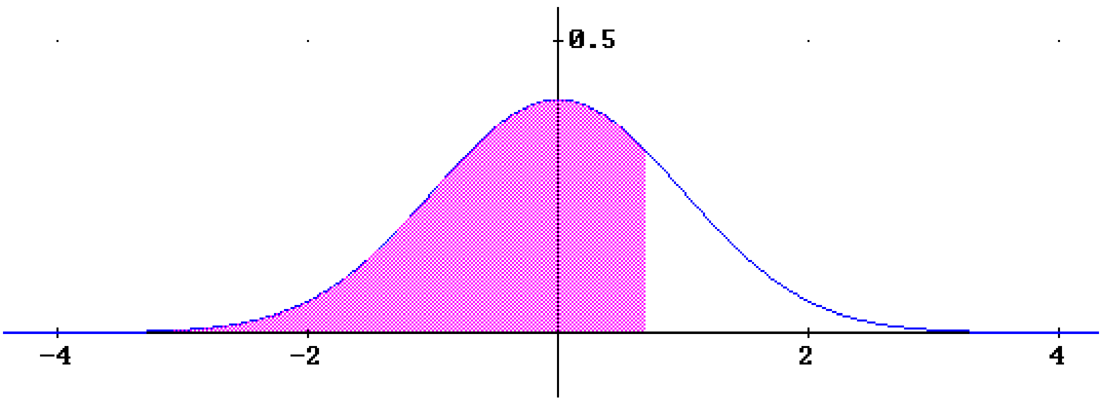


Figura V.2.4.4. Distribución de probabilidad de N(0,1). $F(x) = \varphi(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

V.2.5. LA INTEGRAL COMO OBJETO MATEMÁTICO

Es evidente que ante la ingente contribución de los científicos durante tantos siglos era necesario que se creara una Teoría de la Integral (se entiende Integral Definida, aunque posteriormente se ampliará), para ello se adopta el símbolo “ $\int$ ”, introducido por Leibniz en lugar *“omn.”*, la palabra *“integral”*, utilizada por primera ver por Jacques Bernoulli en 1690 en su *Acta Eruditorum* y, finalmente, fue Fourier quien la expresó en su concepción moderna “ $\int_a^b f(x)dx$ ” (Recalde, 2007, pág. 115). Además, ello no hubiera sido posible sin la definición de función dada por Euler. El honor de definir el concepto moderno de integral le corresponde al francés Augustin-Louis Cauchy, posteriormente otros autores formalizarán y ampliarán dicho concepto terminando con la moderna teoría de la integración (en su sentido más amplio, *“Teoría de la Medida”*) del también francés Henri Léon Lebesgue. Aunque nuestro propósito no es explicar detalladamente las teorías más importantes de la integral, sí pretendemos dar la concepción original de las mismas, en la medida de nuestras posibilidades.

V.2.5.1. Integral de Cauchy

El rigor del Cálculo, entiéndase Análisis Matemático, llegó de la mano de **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857), el cual considera la necesidad de demostrar la existencia de integrales[69], basada en el concepto de límite y presenta la definición de integral como límite de una suma, además, da una formulación rigurosa del Teorema Fundamental del Cálculo. En el *Résumé des Leçons sur le Calcul Infinitésimale* (1823) de la École Polytechnique de París, entre otras cosas, dice lo siguiente (Suárez, 2007, págs. 113-126)[70]:

Lección veintiuno. Cauchy introduce el concepto de integral definida. Considera una función $y=f(x)$ en un intervalo comprendido entre x_0 y X. Comienza dividiendo el intervalo en *n* partes, no necesariamente iguales

$$x_1 - x_0,\ \ x_2 - x_1,\ \ldots,\ \ X - x_{n-1}$$

[69] La Teoría de Fourier creó la necesidad de integrar funciones que no eran continuas y, por tanto, Cauchy considera que debe elaborarse una Teoría de la Integral.

[70] Suárez, C. (2007). *Aceptación en España de los criterios rigurosos del Análisis Matemático durante los siglos XIX y XX.* Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.

Multiplica cada uno de esos elementos por los valores de la función en el punto de origen de ese intervalo, esto es, $f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ y forma la suma

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Cauchy prueba primero que el valor de la suma S, si el número n de subdivisiones es considerablemente grande se hace “insensible” al modo de dividir el intervalo. Para ello considera que la suma S es igual a la suma de los elementos $x_i - x_{i-1}$ multiplicada por una media de los coeficientes $f(x_i)$, en tal caso toma como media $f[x_0+\theta(X-x_0)]$ donde θ es un número comprendido entre 0 y 1. De aquí se tiene que $S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$

Continúa, Cauchy, diciendo que para cada uno de los intervalos en los que se ha dividido el intervalo $[x_0, X]$, por el mismo razonamiento se puede considerar para i se tiene $(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f[x_{i-1} + \theta_{i-1}(x_i - x_{i-1})]$ siendo todos los θ_{i-1} menores que la unidad y positivos, de donde se tiene que

$$S = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] +$$

$$+ (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (X - x_{n-1})\, f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]$$

Teniendo en cuenta que

$$f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \varepsilon_0,$$

$$f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] = f(x_1) \pm \varepsilon_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}$$

Se llega a la expresión

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) +$$

$$\pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \ldots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})$$

de donde la expresión $\pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \ldots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})$ es igual al producto de $X - x_0$ por una media de los valores $\pm \varepsilon_0, \pm \varepsilon_1, \pm \ldots \pm \varepsilon_{n-1}$ y como estos valores “no son muy diferentes de cero”, resulta que la suma S no se altera sensiblemente por los modos de dividir el intervalo $[x_0, X]$.

Por lo tanto, cuando *n* se hace muy grande el valor de la suma *S* tiende a un valor fijo, e indica que ese es el valor de la *integral definida* que depende únicamente de la función $f(x)$ y de los valores x_0 y X. A este valor, dice, se le puede denominar por:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx, \qquad \int f(x)dx \begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix}, \qquad \int f(x)dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix};$$

e indica que la primera es más simple y se debe a Fourier.

Lección veintiséis. Cauchy prueba el Teorema Fundamental del Cálculo tal y como sigue: Si reemplazamos el límite X de la integral por una variable x, obtendremos por resultado una nueva función de x, que será lo que llamamos integral obtenida a partir del *origen* $x = x_0$. Sea $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$.

Si la función $f(x)$ es continua y finita después de $x=x_0$ hasta $x=X$, lo mismo se cumplirá en la función $F(x)$. Además $F'(x) = f(x)$.

Para demostrarlo se basa en propiedades demostradas anteriormente y razona del siguiente modo:

$F(x) = (x - x_0)f[x_0 + \theta(x - x_0)]$ con $0 \leq \theta \leq 1$ que se basa en el Teorema del Valor Medio que había obtenido en la lección 22. Por tanto, $F(x_0)=0$ y se tiene la relación:

$$F(x+\alpha) - F(x) = \int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x+\theta\alpha)$$

de donde $\dfrac{F(x+\alpha)-F(x)}{\alpha} = f(x+\theta\alpha)$ y tomando límites cuando $\alpha \to 0$ se tiene que $F'(x)=f(x)$.

Poco después llega a la conclusión $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = F(X) - F(x_0)$.

Debemos observar que Cauchy no demuestra que $F(x)$ es una función continua, sin embargo es de suponer que este científico tenía en mente la idea de continuidad[71].

71 En Hawking (2010, págs. 571-586) pueden encontrarse íntegramente las lecciones 21, 22, 23 y 24 del Cálculo Integral de Cauchy. Es muy interesante la lectura de Suárez (2007, págs. 118-126) donde se hace referencia, del texto de Cauchy, a la integración de funciones de varias variables, de funciones de variable compleja y, además, obtiene los desarrollos de Taylor y MacLaurin por medio de la integración.

V.2.5.2. Integral de Riemann

La primera generalización importante de la integral de Cauchy la dio **Bernhard Riemann** (1826-1866) en su tesis doctoral de 1854, cuya publicación póstuma fue debida a Dedekind en 1868. Este autor plantea una función $f(x)$ de variable real definida en un intervalo [a, b] y define la suma (Suárez, 2007, págs. 148-152 y Hawking, 2010, págs. 745-747):

$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$ donde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ son valores ordenados comprendidos entre a y b, siendo $\delta_1 = x_1 - a$, $\delta_2 = x_2 - x_1$, $\delta_3 = x_3 - x_2$, ..., $\delta_n = b - x_{n-1}$; y los ε_i son números positivos menores que la unidad. Cuando la suma S tiene la propiedad de tener límite cuando los δ tienden a cero, cualquiera que sea la manera de escoger los δ y los ε, entonces este límite es la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$.

En primer lugar supone el caso más restrictivo, cuando la función $f(x)$ no se hace infinita en el intervalo [a,b] y que la suma S converja cuando los δ tienden a cero. Entonces designa por D_1 la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la función en el intervalo [a,x_1], lo mismo para D_2 en el intervalo [x_1,x_2], ..., y D_n en el intervalo [x_{n-1},b].

Entonces en este caso la suma $\delta_1D_1 + \delta_2D_2 + \delta_3D_3 + \ldots + \delta_nD_n$ será un número infinitamente pequeño con las cantidades de δ. Supongamos que el valor mayor que esta suma puede tomar, cuando todos los δ son más pequeños que d, es Δ; por lo que Δ será una función de d que disminuye y se hace infinitamente pequeña con d.

Si la suma total de aquellos intervalos para los que las oscilaciones D_i son más grandes que una cantidad σ es s, la contribución de estos intervalos será, como es evidente, superior o igual a σs. Por tanto se tiene:

$\sigma s \leq \delta_1D_1 + \delta_2D_2 + \delta_3D_3 + \ldots + \delta_nD_n \leq \Delta$, de donde $s \leq \Delta/\sigma$. Por otro lado, si σ es fijo y dado de antemano s puede hacerse infinitamente pequeño con una elección conveniente de d.

Riemann enuncia la siguiente proposición:

> Para que la suma S converja, cuando todos los δ se hacen infinitamente pequeños, hace falta no sólo que la función permanezca finita, sino que la suma total de los intervalos para los cuales las oscilaciones son más

> grandes que σ, cualquiera que sea éste, puede hacerse infinitamente pequeña por una elección conveniente de *d*.

Y la proposición recíproca:

> Si la función $f(x)$ es siempre finita, y si, por el crecimiento indefinido de todas las cantidades δ, la magnitud total s de intervalos en los que las oscilaciones de la función son más grandes que una cantidad dada σ puede hacerse siempre infinitamente pequeña, la suma *S* converge cuando todos los δ tienden a cero.

En segundo lugar considera el caso en el cual la función es infinita en un único valor *c* del intervalo *(a,b)* y si $\int_a^{c-\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha_2}^{b} f(x)\,dx$ cuando α_1 y α_2 se hacen infinitamente pequeños, se aproxima a un punto fijo, se entiende por $\int_a^b f(x)dx.$ este valor límite.

Finalmente Riemann afirma:

> Para que la integración sea posible en todo el recorrido (...) interviene (...) la condición de que la función *sólo* se haga infinita al aproximarse el argumento a valores *aislados*, y de que se obtenga un determinado valor límite cuando los límites de integración se aproximen infinitamente a dichos valores (Hawking, 2010, pág. 747).

Bernhard Riemann ha construido una teoría de la integral, que amplía a la de Cauchy, en la cual acoge funciones con un alto grado de discontinuidades y él mismo propone el siguiente ejemplo:

$$g(x) = \begin{cases} x - n & \text{donde } n \text{ es el entero más próximo a } x \\ \\ 0 & \text{cuando } \; x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots \end{cases}$$

Tomando como base *g(x)* se define la sucesión $\{g_n(x)\}$, donde $g_n(x)=g(nx)$ y la función $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(x)}{i^2}$ la función $f(x)$ es discontinua en el conjunto de puntos de la forma $x = \frac{p}{2q}$, siendo *p* impar y primo con *q*, y, además, es un conjunto denso (Recalde, 2007, pág. 116).

V.2.5.3. Integral de Darboux

Jean Gaston Darboux (1842-1917) propone, en 1875, otra teoría de la integral, básicamente, es ésta:

Dada una función $f(x)$ acotada en un intervalo [a,b] y una partición $x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$ de dicho intervalo. Sean m_i el *ínfimo* de la función $f(x)$ en el subintervalo [x_{i-1},x_i] y M_i el *supremo* de la función $f(x)$ en [x_{i-1},x_i].

Se definen suma inferior y suma superior de la función $f(x)$, en el intervalo [a,b], asociadas a la partición anterior a las expresiones, respectivamente:

$$s = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + ... + m_n(x_n - x_{n-1})$$

$$S = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + ... + M_n(x_n - x_{n-1})$$

Darboux denomina integral inferior de la función $f(x)$ en el intervalo [a,b] al extremo superior de las sumas inferiores e integral superior al extremo inferior de las sumas superiores cuando varían las particiones (denotadas respectivamente por $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx$).

Si las dos integrales coinciden, se dirá que la función $f(x)$ es integrable en el intervalo [a,b] y tal evento se indicará mediante la expresión $\int_a^b f(x)dx.$.

Surge la pregunta ¿son equivalentes las integrales de Riemann y Darboux? La respuesta es afirmativa[72].

V.2.5.4. Integral de Riemann-Stieltjes

El holandés **T. J. Stieltjes** (1856-1894) amplió el concepto de integral de Riemann y formuló una nueva teoría de la integral conocida como integral de Riemann-Stieltjes. He aquí cómo la define:

Dadas dos funciones g y F definidas en el intervalo [a,b] y una partición del intervalo P={$x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$}, para cada i elegimos un punto intermedio c_i del intervalo [x_{i-1}, x_i] y llamaremos *norma* de la partición a $||P||$=máx {$x_i - x_{i-1}$}.

[72] Más adelante se detallará esta integral y se demostrará la equivalencia de las integrales de Riemann y Darboux.

Sea la *suma parcial de Riemann-Stieltjes* $S(P,g,F)=\sum_{i=1}^{n} g(c_i)\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]$

Stieltjes establece que $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,g,F)=I$ si y sólo si dado ε>0, existe un δ>0 tal que para toda partición *P* de [*a,b*] (con sus correspondientes puntos intermedios c_i) con ||*P*|| < δ, se cumple | *S(P,g,F)* – *I* | < δ

Por último, se define la integral de Riemann-Stieljes de *g* respecto a *F* en el intervalo [*a,b*] si existe $\lim_{\|P\|\to 0} S(P,g,F)=I$, en cuyo caso se denota por:

$$\int_a^b g\,dF = \int_a^b g(x)\,dF(x).$$

En el supuesto de que se cumpla *F*(*x*)=*x* se obtiene la integral de Riemann.

V.2.5.5. Integral mediante funciones escalonadas y regladas

En el marco de la óptica francesa Bourbaki-Dieudonné, a mediados de los años cincuenta del siglo pasado, se definirá una alternativa a la integral de Riemann por medio de las funciones regladas como convergencia uniforme de sucesiones de funciones escalonadas haciéndolo más natural e intuitivo el concepto teórico de la integral[73]:

Diremos que una función ϕ definida en el intervalo [*a,b*] es *escalonada* si existe una partición *P* = {$x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$} del intervalo tal que $\phi(x)=\phi_i$ siendo $x_{i-1} < x < x_i$. Nótese que ϕ debe estar definida en los extremos de cada subintervalo y, por ejemplo, una función escalonada es la función *parte entera de x* denotada *E*(*x*)=[*x*]. Diremos que una función *ƒ(x)* es *reglada* si, y sólo si, existe una sucesión de funciones escalonadas $\phi_1, \phi_3, ..., \phi_n, ...$ en [*a,b*] que convergen hacia la función *ƒ(x)* en dicho intervalo.

Sea ϕ una función escalonada, se define *la integral de la función escalonada* ϕ *sobre el intervalo* [*a, b*] al valor: $\int_a^b \phi(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\phi_i\left(x_i-x_{i-1}\right)$.

[73] Viloria, N. y Cadenas, R. (2007). Integral de Cauchy y Funciones Regladas. *Revista Notas de Matemática, vol. 3(1), nº 251,* pp. 45-71. En: http://www.matemática.ula.es

Sea *f(x)* una función reglada en [*a,b*] y sea $\phi_1, \phi_3, \ldots, \phi_n, \ldots$ una sucesión de funciones escalonadas que convergen a *f(x)*, se define *la integral de la función reglada f(x) sobre el intervalo* [*a,b*] a: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx$

Creemos importante aclarar que deben demostrarse, aunque nosotros sólo los mencionamos, los siguientes teoremas:

- La integral de la función reglada es independiente de la sucesión de funciones escalonadas que se haya elegido.
- La integral de una función reglada es única.
- En estas condiciones se cumple que la integral del límite es el límite de las integrales, es decir, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx$.
- Todas las funciones continuas en un intervalo compacto son regladas $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx$

Por último, según los profesores Amillo y Arriaga[74], existe la **Integral de McShane** y, además, toda función integrable Riemann es integrable McShane y las dos integrales coinciden para dicha función. No es nuestro propósito explicar dicha integral, nos remitimos a la bibliografía recomendada.

V.2.5.6. Hacia la teoría de la medida

Sin embargo, a pesar de todas estas teorías de la integral, no son suficientes para resolver determinadas cuestiones de gran importancia, veamos algunos problemas que motivaron la necesidad de una nueva integral[75]:

1. Para el cálculo de las series de Fourier surge la pregunta: ¿es lo mismo la integral de una suma infinita de funciones que la suma infinita de las integrales de dichas funciones?, en otras palabras, ¿es

[74] Amillo, J. M. y Arriaga, F. (1987). *Análisis Matemático con Aplicaciones a la Computación.* México: McGraw-Hill.

[75] Cordero, P. M. (2006). *La Integral de Lebesgue en su contexto histórico.* http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo//historia/La%20integral%20de%20Lebesgue.pdf

lo mismo $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$? Fourier supuso que sí, hoy sabemos que se equivocó.

2. El Teorema Fundamental del Cálculo Integral establece que $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ pero los trabajos de Ulisse Dini y Vito Volterra concluyeron que existen funciones con derivada acotada y no integrables, por tanto, este teorema no puede ser aplicado en tales circunstancias[76].
3. Weierstrass se dio cuenta de que existían funciones continuas y monótonas que no eran diferenciables en ningún punto, lo cual invalidaba la conocida fórmula de la longitud de una curva $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ en el cálculo de la longitud de las curvas dadas por aquellas funciones.
4. Para las integrales dobles sobre recintos rectangulares, en algunas circunstancias no se cumple la consabida fórmula:

$$\int_R f(x,y)dR = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \text{ , } \; a<x<b,\ c<y<d.$$

5. Añadimos que la función de Dirichlet, definida sobre un intervalo [*a,b*] que toma el valor 0 para los racionales de ese intervalo y el valor 1 en el resto, no es integrable en el sentido Riemann.

Todas estas consideraciones y otras, hacen ver la necesidad de ampliar la formalización de la teoría de la integral. Además, al fin y al cabo las teorías anteriores, incluso la integral de funciones escalonadas y regladas, empiezan por dar unas condiciones más o menos débiles a las funciones de partida y siempre toman particiones del intervalo [*a,b*] ¿Se habrá agotado esta forma de proceder?

Exponemos, seguidamente, cómo se razonó en su desarrollo histórico la nueva teoría de la integral, reconocida posteriormente, como *"Teoría de la Medida"*.

[76] Véase un ejemplo en: Galaz-García, F. (2007). Definiciones originales de la integral y medida de Lebesgue. *Miscelánea Matemática, 44,* pp. 83-100.

Camille Jordan (1838-1922) en su artículo *Remarques sur les intégrales définies*, de 1882, define los siguientes conceptos (Cordero, 2006, págs. 3-5 y Recalde, 2007, págs. 117-118):

Sea *S* un conjunto acotado de números reales. Sean $I_1, I_2, I_3, ..., I_n$ cualquier conjunto finito de intervalos.

Se define *contenido externo de S* a $C_e(S)$ = ínfimo de $\sum_{k=1}^{n} L(I_k)$, donde $L(I_k)$ es la longitud del intervalo I_k y la unión de todos ellos recubre *S.* Análogamente, el *contenido interno de S* es $C_i(S)$ = supremo de $\sum_{k=1}^{n} L(I_k)$, donde $L(I_k)$ es la longitud del intervalo I_k, los intervalos son disjuntos dos a dos y la unión de todos ellos está dentro de *S.*

Un conjunto es *Jordan-medible*, también llamado *J-medible*, cuando ambos contenidos coinciden y en tal caso se expresa $C(S) = C_e(S) = C_i(S)$.

Sea *E* un conjunto acotado de puntos del plano, si en lugar de tomar intervalos, tomamos triángulos entonces, por extensión de la definición anterior, se definen los *contenidos externo e interno* de *E* y se dirá que *E* es *J-medible* si ambos contenidos coinciden.

Jordan por medio de los conjuntos *J-medibles,* da dos nuevas caracterizaciones de la integral de Riemann para una función $f(x)$ definida y acotada en un intervalo [*a,b*], éstas son:

- *Primera:* Sea *E* el conjunto de puntos del plano limitados por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas *x=a, x=b.* Entonces $f(x)$ es Riemann-integrable si y sólo si el conjunto *E* es Jordan-medible y $\int_a^b |f(x)|dx = C(E);\quad \int_a^b f(x)dx = C(E^+) - C(E^-)$, donde E^+ y E^- son los puntos del semiplano positivo y negativo, respectivamente, del eje de ordenadas.

- *Segunda:* Por la equivalencia de las integrales de Riemann y de Darboux, sabemos que $f(x)$ es Riemann-integrable si se verifica $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Sea [*a,b*], sea E_i una colección finita de conjuntos *J-medibles* disjuntos dos a dos y tales que su unión es [*a,b*], sean m_i y M_i el ínfimo y el supremo, respectivamente, de la función en el conjunto E_i. Consideremos las sumas $L=\sum_{i=1}^{n} m_i C(E_i)$ y $U=\sum_{i=1}^{n} M_i C(E_i)$; Jordan demuestra que el supremo de las sumas *L* es $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ y el ínfimo de las sumas *U* es $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, por tanto, al ser equivalentes las integrales de Riemann y Darboux queda concluida la segunda caracterización.

Emile Borel (1871-1956) en su libro *Leçons sur la théorie des fonctions*, de 1898, da la definición de una nueva medida, conocida en la actualidad como *medida de Borel* e introduce los conjuntos *bolerianos* o *B-medibles.* La base fundamental del proceso de medir se sustenta en la longitud de un segmento, Borel comienza estudiando subconjuntos del intervalo [0,1]; la medida del intervalo [*a,b*] es la longitud del segmento de extremos *a* y *b* y ésta es $b-a$. Desde este momento comienza a construir su teoría de la medida y considera que la medida de la unión de dos conjuntos disjuntos es la suma de las medidas de cada uno de ellos; es más, la medida de cualquier unión finita o numerable de conjuntos disjuntos dos a dos también es la suma de las medidas de cada conjunto. Termina demostrando que la medida de un conjunto numerable es cero y la potencia del conjunto formado por todos los subconjuntos del intervalo [0,1] es mayor que la potencia del continuo. En definitiva, Borel considera que la medida nunca puede ser negativa, que la longitud de un intervalo debe conservarse con la nueva medida y la aditividad, con ciertas condiciones, debe mantenerse[77].

---

[77] Puede ampliarse la información en: Cordero (2006, págs. 5-6), Recalde (2007, págs. 118-119) y Hawking (2010, págs. 915-918).

Además, consideramos que son muy interesantes los artículos:

- Ballvé, M. E. y Jiménez, P. (2010). *Borel, Baire y Lebesgue.* pp. 195-219.
  En: http://.www.scribd.com/doc/36870264/Apuntes_de_Teoria_de_la _Medida
- Jiménez, P. (2010). *Evolución de la integral en el siglo XIX*, pp. 57-78.
  En: http://www.pdfgratis.orr/viewpdf.php

El artículo de Jiménez (2010) es un excelente resumen de evolución de las ideas sobre la integral desde el establecimiento de la misma por Cauchy hasta la necesidad de crear una nueva teoría de la integral (integral de Lebesgue, en el umbral del siglo XX). Si las integrales de Riemann y Darboux están comprendidas entre las otras dos (Cauchy y Lebesgue), la idea fundamental que motivó la nueva teoría de la integral fue el concepto de conjunto medible de Jordan y Borel.

V.2.5.7. Integral de Lebesgue. Teoría de la medida

Es el francés **Henri Léon Lebesgue** (1875-1941) quien da una concepción distinta del concepto integral y, además, una generalización de la misma. La ideas originales fueron expuestas el 29 de abril de 1901 en los *Comptes Rendus* de la Academia de Ciencias de París con el Título:

ANALYSE MATHÉMATIQUE
Sur une généralisation de l'intégrale définie.
Note de M. H. Lebesgue, présentée par M. Picard.

Lebesgue presentó su teoría de la integración en su Tesis Doctoral: *Intégrale, longueur, aire*[78]; defendida en la Universidad de Nancy en 1902. Aquí está el embrión de lo que actualmente se conoce como *Teoría de la Medida e Integral de Lebesgue*[79], cuya formalización con el paso de los años ha sufrido grandes cambios. Nuestro objetivo consiste en expresar las ideas originales de este genio de las Matemáticas[80].

Supongamos que tenemos una función $y(x)$ real de variable real sobre un intervalo $[a,b]$, acotada, sean m y M dos números reales tales que verifican $-\infty < m \leq y(x) \leq M < \infty;\ a \leq x \leq b$. Sea $m_0, m_1, m_2, ..., m_n$ un conjunto finito de números tales que $m = m_0 < m_1 < m_2 < ... < m_n = M$. Consideremos ahora los conjuntos: $E_0 = y^{-1}(m),\ E_i = y^{-1}((m_{i-1}, m_i]);\ \ i = 1, 2, ..., n$ (figura V.2.5.7).

Antes de definir las medidas λ_0, λ_i de los conjuntos E_0, E_i. Lebesgue afirma:

> Consideremos una u otra de dos sumas $m_0\lambda_0 + \sum m_i\lambda_i;\quad m_0\lambda_0 + \sum m_{i-1}\lambda_i;$ si la diferencia máxima entre dos m_i consecutivos tiende a cero, estas sumas tienden a un mismo límite independientemente de los m_i elegidos, este límite será por definición la integral de y, que será llamada *integrable* (Cordero, 2006, págs. 11-12 y Galaz-García, 2007, pág. 96)[81].

---

[78] Un excelente artículo puede encontrarse en: Hoare, G. T. Q., Lord, N. J. (2002). "Intégrale, longueur, aire" the centenary of the Lebesgue integral. *The Mathematical Gazette. Volume 86. Number 505. March*. Pp. 3-27. Además, consideramos muy interesante el capítulo que Hawking (2010, págs. 909-952) le dedica a Henri Lebesgue.

[79] El presente trabajo de la integral de Lebesgue procede de las investigaciones de: Hoare y Lord (2002), Cordero (2006), Galaz-García (2007), Recalde (2007) y Hawking (2010).

[80] En la redacción de este apartado seguiremos el desarrollo esquematizado del trabajo de Lebesgue aunque en algunos momentos, para facilitar la lectura, procuraremos una redacción en lenguaje matemático más moderno.

[81] Esta definición corresponde a *Sur una généralisation de l'intégrale définie* (29-4-1901). La dada por Lebesgue en su Tesis Doctoral puede encontrarse en Hawking (2010, pág. 930).

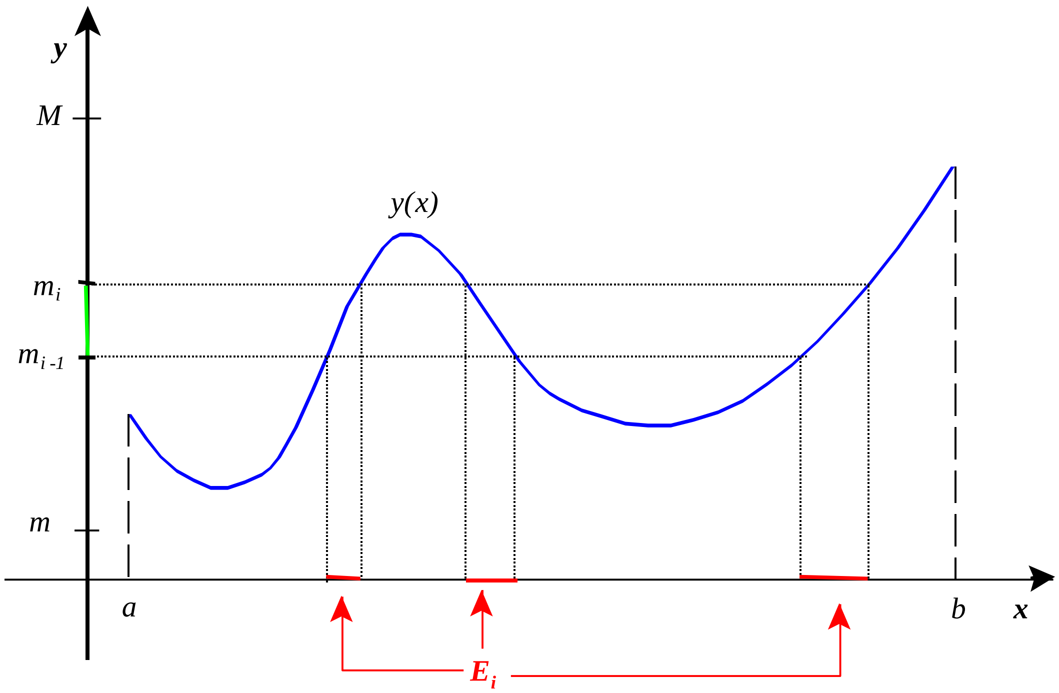


Figura V.2.5.7. Construcción de la integral de Lebesgue.

Lebesgue considera que cualquier medida debe satisfacer las condiciones siguientes:

L_1: Existe algún conjunto E cuya medida es distinta de cero.

L_2: Dos conjuntos iguales tienen la misma medida.

L_3: La medida de la unión de un número finito o infinito numerable de conjuntos disjuntos entre sí, es la suma de la medida de estos conjuntos.

El procedimiento que realiza para la construcción de la medida es:

Definición 1: Sea E un subconjunto acotado de $\Re$. Considerando que hay infinitas maneras de encerrar los puntos de E dentro de un número finito o infinito numerable de intervalos abiertos, sea el conjunto:

$$B = \sum m(I_k);\ E \subset \bigcup I_k \quad , I_k=(a_k,b_k);\ -\infty < a_k \leq b_k < \infty\ ;\ m(I_k)=longitud(I_k)= b_k-a_k.$$

Llamamos *medida exterior* de E al límite inferior de B, es decir, $m_e(E)= \text{ínf}(B)$.

Como consecuencia de esta definición se obtiene que la medida exterior de un punto y del conjunto vacío es cero; $m_e([a,b])=m((a,b))$; si $E_1 \subset E_2$, entonces $m_e(E_1) \leq m_e(E_2)$ y si $E \subset \bigcup E_k$, entonces $m_e(E) \leq \sum m_e(E_k)$.

Definición 2: Sea *E* un subconjunto del intervalo [*a,b*]. Llamamos *medida interior* de *E* al valor $m_i(E) = m([a,b]) - m_e(C(E))$; siendo *C(E)* el conjunto de puntos que pertenecen al intervalo [*a,b*] y no pertenecen a *E.*

Definición 3: Sea *E* un subconjunto de [*a,b*]. Se dice que *E* es *medible* si coinciden las medidas *exterior* e *interior* de *E*, es decir: $m(E)=m_e(E)=m_i(E)$. En tal caso se dirá que *E* es *L-medible.*

Lebesgue prueba las condiciones L_1, L_2 *y* L_3 y, además, demuestra las siguientes propiedades:

> P_1*:* La unión de un número finito o infinito numerable de conjuntos medibles es medible.
>
> P_2*:* La intersección de un número finito o infinito numerable de conjuntos medibles es medible.
>
> P_3*:* Existen conjuntos *L-medibles* que no son *J-medibles* ni *B-medibles*[82].

A partir de este momento interesa trasladar el concepto de medida lineal definida anteriormente a conjuntos *E* de $\Re^2$, para ello recuerda el área de un triángulo, continúa como sigue:

Definición 4: Sea *E* un conjunto acotado de $\Re^2$, Considerando que hay infinitas maneras de encerrar los puntos de *E* dentro de un número finito o infinito numerable de triángulos, sea el conjunto:

$$B = \left\{ \sum m(\Delta_k);\ E \subset \bigcup \Delta_k;\ \Delta_k \text{ es un triánguo} \right\},\ m(\Delta_k)=\text{área}(\Delta_k).$$

Llamamos *medida exterior* de *E* al límite inferior de *B,* es decir*,* $m_e(E)=\text{ínf}(B)$.

Definición 5: Sea *E* un conjunto que está contenido en un triángulo ΔABC. Llamamos *medida interior* de *E* al valor $m_i(E) = m(\Delta ABC) - m_e(C_\Delta(E))$; siendo $C_\Delta(E) = \Delta ABC - E$.

Definición 6: Sea *E* un conjunto acotado de $\Re^2$. Se dice que *E* es *medible* si coinciden las medidas *exterior* e *interior* de *E*, es decir: $m(E)=m_e(E)=m_i(E)$. En tal caso se dirá que *E* es *L-medible* en $\Re^2$*.*

---

[82] El ejemplo propuesto por Lebesgue, en su Tesis Doctoral, puede encontrarse en: Recalde (2007, pág. 121) y Hawking (2010, págs. 921-922).

Este científico ya está en condiciones de definir la nueva integral, para ello explica que el problema de las cuadraturas fue tratado por Arquímedes y que en su época los procesos infinitos se trataban por el *método exhaustivo*. Posteriormente Cauchy, Riemann y Darboux comienzan estableciendo particiones del intervalo donde se pretende integrar la función. Lebesgue cambia sustancialmente y toma particiones del recorrido o imagen de la función operando como sigue:

Sea $f(x)$ una función real de variable real definida en $[a,b]$ tal que:

1. Existen *m y M,* tales que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$.
2. *Para todo c y d,* entre m y M, el conjunto $\{ x \in [a,b]$ tal que $c \leq f(x) \leq d \}$ es medible.

Consideremos una partición P del intervalo $[m,M]$, $P=\{ m=y_0, y_1, y_2, ..., y_n=M \}$ y sean los conjuntos $E_i = \{ x \in [a,b]: f(x) = y_i \}$, para cada $i = 0, 1, 2, ..., n$ y los conjuntos $F_i = \{ x \in [a,b]: y_i < f(x) < y_{i+1} \}$, para cada $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Todos ellos medibles.

Sean las sumas $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} y_i m(E_i) + \sum_{i=0}^{n-1} y_i m(F_i)$ y $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} y_i m(E_i) + \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} m(F_i)$

Definición 7: Diremos que $f(x)$ es *integrable Lebesgue* si cuando n tiende a infinito y el diámetro de la partición, *d(P)*, tiende a cero las dos sumas coinciden, en tal caso, designamos: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(P)\to 0}} \sigma_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(P)\to 0}} \delta_n$

A las funciones que cumplen esta condición se les llama *L-integrables.*

No es nuestro objetivo demostrar que la integral de Lebesgue incluye a la de Riemann y, por ende, a todas las demás que hemos visto; además, resuelve los problemas clásicos que comentamos al comienzo de este apartado e, incluso, el conjunto de funciones *L-integrables* es completo[83]. Entre los innumerables trabajos surgidos a raíz de la Tesis Doctoral de Lebesgue: *Intégrale, longueur, aire;* Carathéodory (1918) desarrolló los trabajos sobre medidas abstractas liberándolas de argumentos topológicos; Wiener (1922) fue el precursor de las medidas de probabilidad que, posteriormente, por medio de la axiomática de Kolmogoroff (1933) se estableció la relación entre la Teoría de la Probabilidad y la Teoría de la Medida (así llamada a la integral de Lebesgue en su acepción más amplia) la cual es indisoluble.

[83] Resultado demostrado por Fisher y Riesz en 1907.

El problema de las cuadraturas fue estudiado por los griegos en un contexto geométrico, poco a poco, derivó en la búsqueda de soluciones mediante procedimientos analíticos, rechazando razonamientos geométricos, que permitieron la construcción de diferentes teorías de la integral (Cauchy, Riemann, Darboux) las cuales no son suficientes para resolver determinados problemas. Henri Lebesgue, recurriendo a las magnitudes elementales establecidas por los griegos, considerando la concepción geométrica de la medida de los objetos la amplía a la medida de los conjuntos para establecer una nueva teoría de la integral que engloba a todas las conocidas hasta el momento y, además, trasciende ampliamente los objetivos primigenios.

Si consideramos las sumas $SR_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ y $SL_n = \sum_{i=0}^{n} y_i m(E_i^*)$ de Riemman y de Lebesgue, respectivamente[84]. Entonces, según Lebesgue:

> La diferencia entre su integral [la de Lebesgue] y la de Riemann estaba en que los integradores anteriores sumaban indivisibles, grandes o pequeños, según iban apareciendo en orden de izquierda a derecha, mientras que él prefería agrupar indivisibles de tamaños parecidos antes de sumarlos. Es decir, que sustituía las sumas de Riemann por las de Lebesgue y a continuación hacía tender a cero los Δy_i (Boyer, 1986, pág. 759).

¡La manera de Lebesgue parece más eficiente![85].

Con esta sencilla referencia histórica de la *Integral de Lebesgue* hemos pretendido reivindicar el contexto geométrico-analítico del cual surgió pues hoy es enseñada como *Teoría de la Medida* de forma axiomática por medio de *σ-álgebras* privando a los estudiantes de su desarrollo histórico, tan rico en matices y realizado de forma magistral.

[84] Aunque no hemos deducido dichas fórmulas, consideramos que no es difícil obtenerlas de las exposiciones realizadas de las integrales de Riemann y Lebesgue.

[85] El profesor Fausto Arturo Contreras del Departamento de Matemáticas y Física de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (México) afirma que existe la *"Integral de Norma"* o *"Integral de Henstock-Kurzweil"*, que generaliza las de *Riemann* y *Lebesgue* y fue introducida entre los años 1957 y 1962; nosotros no hemos conseguido más información de la misma, salvo unas pequeñas notas por internet del citado profesor. También, según Boyer (1986, pág. 760), se han propuesto las integrales de Denjou, Haar y Lebesgue-Stieltjes.

V.2.6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES EPISTEMOLÓGICAS

Habiendo realizado un breve estudio epistemológico del área y la integral a lo largo de los últimos 2500 años, seguidamente elaboramos unas tablas resumen (Capace y Arrieche, 2007, págs. 48-51) de las características más importantes de las configuraciones del área y la integral en cada uno de los periodos en los cuales hemos dividido el estudio epistemológico.

Seis tablas componen nuestro resumen y las hemos clasificado, por parejas, en tres grupos, éstos son:

1. *Génesis del problema de las cuadraturas y cubaturas y la resolución de problemas particulares.* La primera parte corresponde con la resolución de problemas particulares de áreas y volúmenes mediante procedimientos de la antigüedad clásica y la segunda el intento de generalizar los procedimientos del cálculo de áreas y volúmenes de figuras determinadas por distintas familias de funciones.
2. *Generalización de las cuadraturas y cubaturas, evolución y desarrollo de la solución general: Newton y Leibniz.* Las investigaciones de estos dos científicos permiten encontrar la relación existente entre el problema de las tangentes y el problema de las cuadraturas, por tanto, se establece y demuestra con todo rigor el teorema fundamental del cálculo, el cual permite hacer generalizaciones para determinar áreas y volúmenes.
3. *Consolidación del Cálculo Integral.* El problema de las áreas ha trascendido al concepto *Integral*, el cual, debe formalizarse con rigor matemático. Cauchy es el primero en conformar una *Teoría de la Integral* que será ampliada por Riemann y Darboux (primera tabla). Retomando los primitivos conceptos de longitud y área de los griegos, Jordan, Borel y Lebesgue establecen los conceptos de *conjunto medible* y *función medible*[86] que permiten la creación de la *Integral de Lebesgue* que resuelve todos los problemas de áreas y cubaturas de los griegos, amplia la integral de Riemann-Darboux y conserva todos sus resultados y, además, es el origen de la *Teoría de la Medida* (segunda tabla) que está en constante expansión y tiene multitud de aplicaciones en diferentes ámbitos de la Ciencia.

He aquí las seis tablas resumen a las cuales hemos hecho referencia:

[86] Sumable en la terminología de Lebesgue.

1.- "Génesis del problema de las cuadraturas y cubaturas y la resolución de problemas particulares".

Configuración epistemológica en la Edad Antigua y Edad Media.	
Situaciones	Cuadraturas, cubaturas.
Acciones	Se determinan por el método de exhausción las mejores aproximaciones numéricas que representen áreas y volúmenes.
Lenguaje	Básicamente geométrico, también aritmético.
Conceptos	Los básicos de medida de área y volumen (cuadraturas y cubaturas). Nociones de continuo e infinito.
Propiedades	Fórmulas de áreas y volúmenes. Método de exhausción de Eudoxo. Axiomas de Arquímedes. Propiedades de las razones.
Argumentos	La doble reducción al absurdo utilizada en la Grecia Clásica y las proporciones de Oresme.

Configuración epistemológica de acuerdo a la resolución de los problemas originarios del cálculo integral: Periodo del Renacimiento hasta Barrow.	
Situaciones	Los problemas se plantean para determinar áreas y volúmenes de regiones y sólidos generados por funciones de tipo algebraico y algunas transcendentes.
Acciones	Las integraciones se hacen de forma numérica, es decir, por aproximaciones numéricas con las cuales se determinan cuadraturas de parábolas, hipérbolas, cicloides, elipses y círculos. Se asume que la superficie puede estar compuesta por infinitos elementos infinitesimales de iguales dimensiones. Se emplean progresiones para calcular cuadraturas.
Lenguaje	Geométrico, aritmético y algebraico.
Conceptos	Infinitésimo, serie, cuadratura, cubatura, centro de gravedad, arcos, series infinitas, indivisible e infinitamente pequeño.
Propiedades	Series infinitas, método de exhausción sin doble reducción al absurdo. Método inductivo aplicado por Wallis para su integración.
Argumentos	Los propios del método de la exhausción y del método inductivo y deductivo.

Tablas V.2.6.1. Área e integral desde la antigüedad hasta Newton-Leibniz.

2.- "Generalización de las cuadraturas y cubaturas, evolución y desarrollo de la solución general: Newton y Leibniz".

Configuración epistemológica impulsada por los trabajos de Newton y que tiene que ver con la relación inversa entre diferenciación e integración.	
Situaciones	Problemas que requieren un mayor número de elementos matemáticos para su solución, como ejemplo, los fluentes y las fluxiones de Newton.
Acciones	Expresar funciones como series infinitas de potencias y calcular el área como la inversa de la diferenciación. Utilizar series infinitas de potencias como una técnica de integración.
Lenguaje	Geométrico, simbólico, notaciones y gráficos.
Conceptos	Series de potencias, cuadraturas, curvaturas, tangentes, fluentes-fluxiones y cantidades infinitamente pequeñas.
Propiedades	Utiliza la recién conocida relación inversa entre el problema de la tangente y el problema de la cuadratura. Desarrollos binomiales.
Argumentos	La integración como suma infinita. Utiliza rigurosamente el método deductivo el cual le permite hacer generalizaciones.

Configuración epistemológica impulsada por los trabajos de Newton y Leibniz que tiene que ver con el concepto de integral visto como una suma de elementos infinitesimales.	
Situaciones	Se quiere generalizar la Integral a un grupo más amplio de problemas y elaborar símbolos, notaciones y lenguaje para éstos.
Acciones	Emplea el sumatorio como la inversa de la diferenciación. Las cuadraturas como suma de infinitos rectángulos. Se demostró rigurosamente el Teorema Fundamental del Cálculo.
Lenguaje	Simbólico y numérico.
Conceptos	Series infinitas, secuencias de diferencias, cuadraturas, curvaturas, tangentes y procesos infinitos.
Propiedades	Para obtener el área de una región cerrada basta con sumar el área de los rectángulos inscritos porque los triángulos que contienen la curva son infinitamente pequeños.
Argumentos	Rigor en el método deductivo, el cual permite hacer generalizaciones.

Tablas V.2.6.2. Generalización de los problemas de cuadraturas y cubaturas.

3.- "Consolidación del Cálculo Integral".

Configuración epistemológica impulsada por el desarrollo teórico de la Integral. Teorías de la Integración de Cauchy-Riemann-Darboux.	
Situaciones	Fundamentación de los conceptos esenciales del Cálculo Integral, las aplicaciones son secundarias y el rigor matemático es prioritario. Se consolidan varias teorías: Cauchy, Riemann, Darboux, etc.
Acciones	Las más importantes son: Incluir procesos aritméticos en la integración, generalizar la Integral de Cauchy a un número más amplio de funciones, los conceptos de límite e infinitésimos, la definición de integral como límite de una suma y, finalmente, integración de funciones que no tienen primitiva en todo el intervalo de integración.
Lenguaje	Simbólico y numérico.
Conceptos	Función, límite, infinitésimo, continuidad y discontinuidad, series convergentes, derivada, diferencial e integral definida.
Propiedades	Unicidad de la Integral Definida, Teorema Fundamental del Cálculo, Teorema del Valor Medio de la Integral, Linealidad de la Integral Definida, Equivalencia de las integrales de Riemann y Darboux. Desarrollos en Series de Fourier, etc.
Argumentos	Los propios del rigor matemático en la definición de los conceptos y en las demostraciones.

Configuración epistemológica impulsada por la Teoría de la Medida.	
Situaciones	Generalizar el concepto Integral por medio de la Teoría de la Medida.
Acciones	Generalización de la Integral de Riemann-Darboux. Demostraciones más amplias del Teorema Fundamental del Cálculo y del Teorema del Valor Medio de la Integral.
Lenguaje	El propio del Análisis en términos conjuntistas y topológicos.
Conceptos	Integral, conjunto medible, función medible, sumas superiores e inferiores, supremo e ínfimo.
Propiedades	Las propias de la Integral de Lebesgue y la Teoría de la Medida.
Argumentos	Deducción rigurosa apoyada en la Teoría de la Integral, la Teoría de Borel y la Teoría de la Medida.

Tablas V.2.6.3. Generalización de la Integral. Teoría de la Medida.

ANEXO C (CAPÍTULO V):
ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL*.................... *95

V.6. ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL.................................95
V.6.1. ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA..95
V.6.2. LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA 99
V.6.3. CÁLCULO DE VOLÚMENES..102
V.6.4. CÁLCULO DE ÁREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN.106
V.6.5. LA CICLOIDE 108
V.6.6. INTEGRALES IMPROPIAS 113
V.6.7. ESPACIO, VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y TIEMPO.............116
V.6.8. TRABAJO 116
V.6.9. CENTRO DE GRAVEDAD 118
V.6.10. FUERZA EJERCIDA POR UN FLUIDO......................................120
V.6.11. LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON...................................122
V.6.12. CRECIMIENTOS EXPONENCIAL Y LOGÍSTICO 123
V.6.13. ECONOMÍA 125
V.6.14. PROBABILIDAD 128
V.6.15. CIENCIAS SOCIALES 133

ANEXO C (CAPÍTULO V): ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL

V.6. ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL

La continuación natural del *Capítulo V: Estudio epistemológico. La docencia actual. Área e integral* es este Anexo C en el cual desarrollamos algunas aplicaciones de la integral y, para constatar dicha continuidad, seguimos con la enumeración secuencial de los epígrafes del capítulo V.

V.6.1. ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

1.1. Si la función, dada en forma explícita, es positiva: El área entre su gráfica, el eje *OX* y las rectas *x=a* y *x=b* (figura V.6.1.1) es: $A = \int_a^b f(x)dx$.

1.2. Si la función, dada en forma explícita, cambia de signo: El área entre su gráfica, el eje de abscisas y las rectas *x=a* y *x=b* (figura V.6.1.2), viene dada por: $A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$

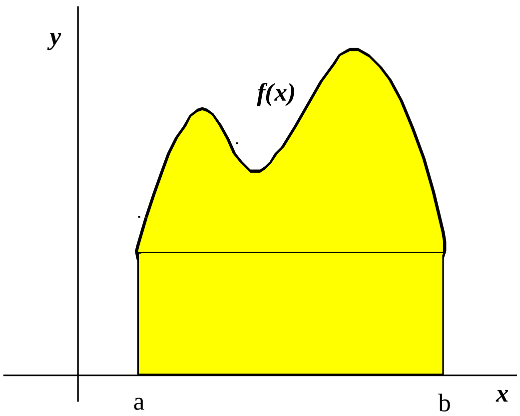


Figura V.6.1.1. La función es positiva.

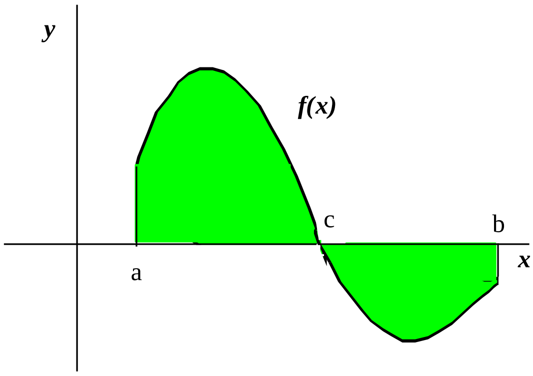


Figura V.6.1.2. La función cambia de signo.

1.3. Si la función está expresada en paramétricas, donde *x=x(t)* e *y=y(t)*. El área encerrada por la gráfica de la curva, el eje *OX* y las rectas verticales cuyas abscisas son $a=x(t_1)$ y $b=x(t_2)$ (figura V.6.1.3) es: $A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$

1.4. Si la función está expresada en forma polar $\rho = \rho(\theta)$. El área encerrada por la gráfica entre los argumentos $\alpha \ y \ \beta; 0 < \alpha < \beta < 2\pi$ (figura V.6.1.4) es: $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta)d\theta$.

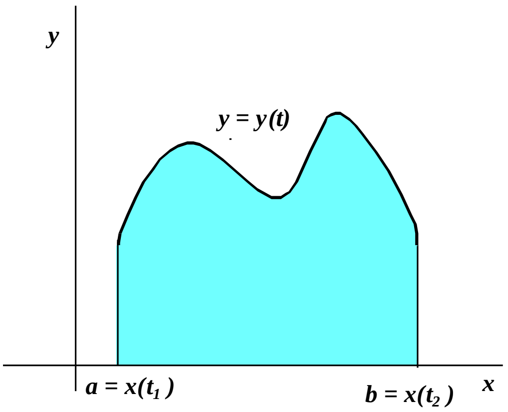


Figura V.6.1.3. La función está en paramétricas.

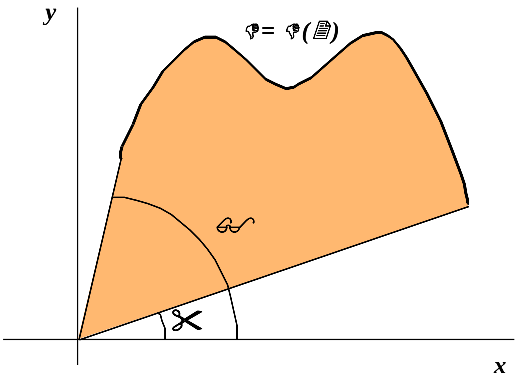


Figura V.6.1.4. La función está en polares.

1.5. El área encerrada entre dos curvas definidas en forma explícita (figura V.6.1.5) viene dada por la expresión[1]: $A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$

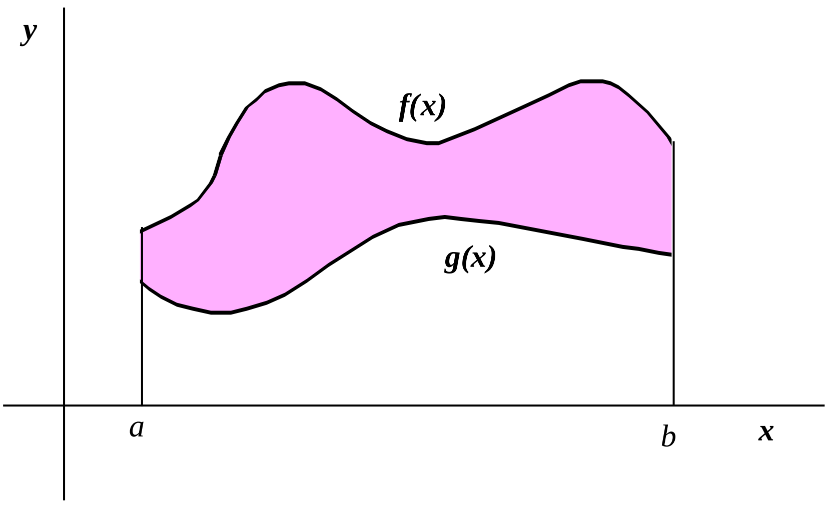


Figura V.6.1.5. Área encerrada entre dos curvas.

[1] Además de la expresión señalada, existe un algoritmo que ha sido detallado en los capítulos en los cuales hemos redactado los ciclos de la investigación.

Ejemplo 1: Calcule la siguientes áreas:

1.1. La limitada por la parábola $y=x^2$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$.

1.2. La limitada por la función $y=senx$ entre $x=0$ y $x=2\pi$.

1.3. La encerrada por la elipse de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\,sen(t) \end{cases}$.

1.4. La encerrada por la lemniscata de Bernoulli cuya ecuación polar es: $\rho(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}$.

1.5. La encerrada entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

Solución:

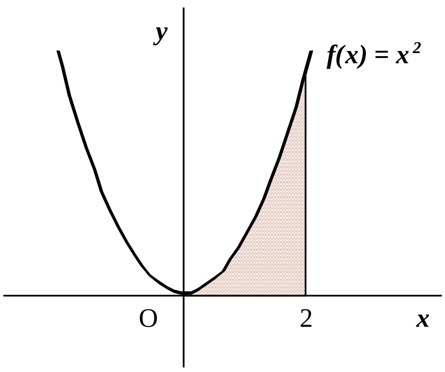


Figura V.6.1.6. Parábola $y=x^2$.

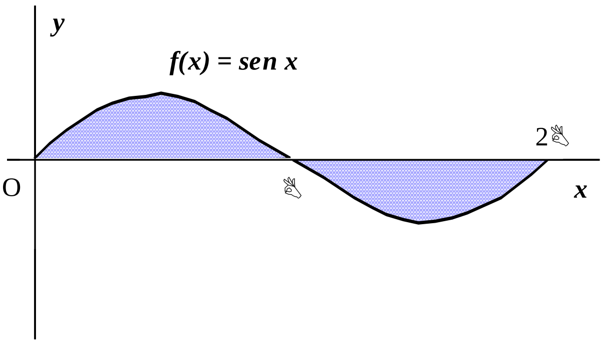


Figura V.6.1.7. Función seno.

1.1. $A = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}u^2$

1.2. $A = \int_0^{\pi} sen\,x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} sen\,x\,dx = 2\int_0^{\pi} sen\,x\,dx = 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2\left[-\cos\pi + \cos 0\right] = 4u^2$

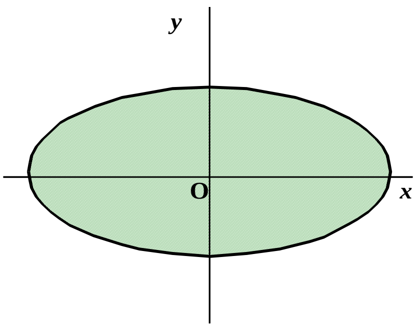


Figura V.6.1.8. Elipse.

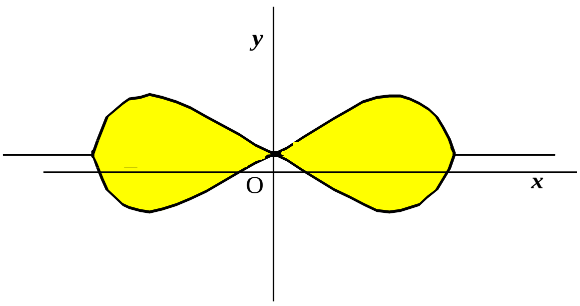


Figura V.6.1.9. Lemniscata de Bernoulli.

1.3. El área de la elipse es cuatro veces la de la parte superior derecha:

$$A = 4\int_{\pi/2}^{0} y(t)x'(t)dt = 4\int_{\pi/2}^{0}(bsent)(-asent)dt = -4ab\int_{\pi/2}^{0} sen^2 tdt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 4ab\left[\frac{t}{2} - \frac{sen2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = 4ab\frac{\pi}{4} = \pi ab \quad u^2$$

1.4. El área de la lemniscata de Bernoulli[2] es cuatro veces la de la parte superior derecha, esto es:

$$A = 4\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho^2(\theta)d\theta = 2\int_0^{\pi/4} a^2\cos(2\theta)d\theta = a^2\left[sen(2\theta)\right]_0^{\pi/4} = a^2 \ u^2$$

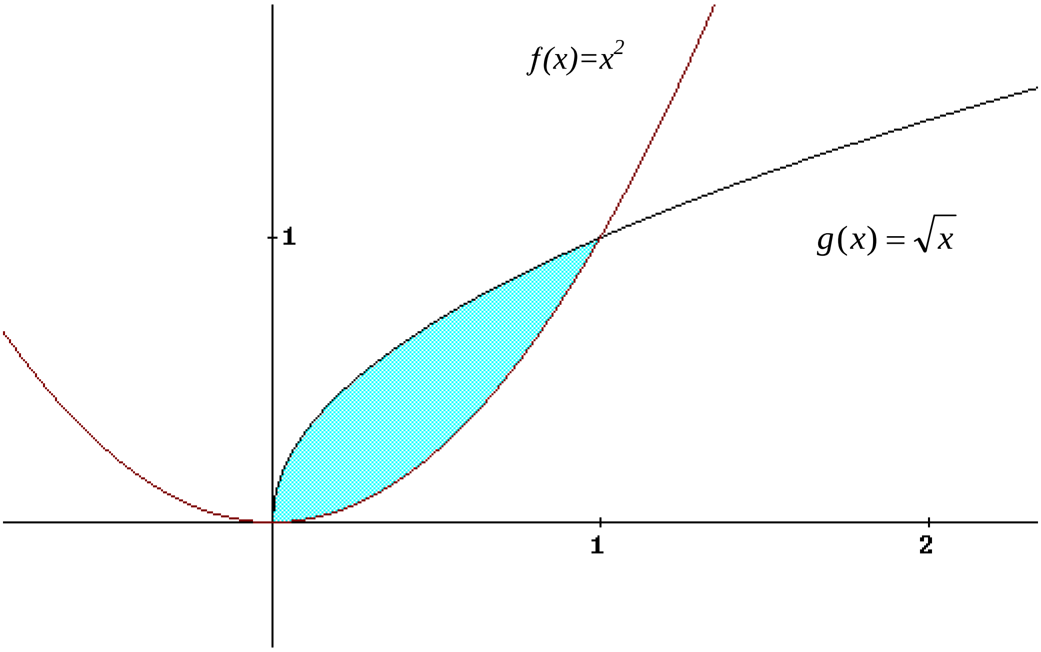


Figura V.6.1.10. Superficie encerrada entre dos curvas.

1.5. Los puntos de corte de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$ son $a=0$ y $b=1$; y el área pedida es:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}u^2$$

[2] Burgos, J. (1995). *Cálculo infinitesimal de una variable.* Madrid. McGraw-Hill. Pág. 402.

V.6.2. LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

2.1. Si la función viene dada en forma explícita, *y=f(x)*, es derivable en [*a,b*] y su derivada es continua, entonces la longitud de la curva entre los puntos *A* y *B* es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

2.2. Si la función está expresada en paramétricas, donde $x=x(t)$ e $y=y(t)$. La longitud del arco de dicha curva entre las abscisas $a= x(t_1)$ y $b=x(t_2)$ es:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt$$

2.3. Si la función está expresada en forma polar, $\rho = \rho(\theta)$. La longitud del arco de curva entre los argumentos $\alpha \ y \ \beta; 0<\alpha<\beta<2\pi$ es:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\rho(\theta)\right]^2+\left[\rho'(\theta)\right]^2}\,d\theta\,.$$

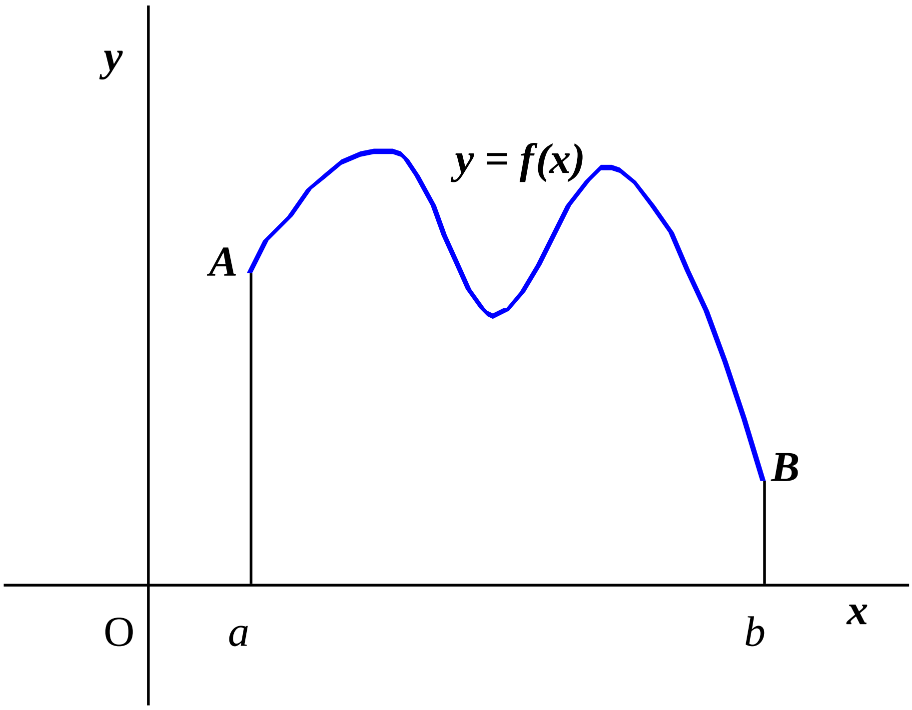


Figura V.6.2.1. Longitud de un arco de curva entre los puntos A y B.

Ejemplo 2: Calcule la siguientes longitudes de curvas:

2.1. La de un cable eléctrico que cuelga de dos torres distantes entre sí 80 metros. La ecuación del cable o catenaria[3] es:

$$f(x) = 30\cosh\frac{x}{30} = 30\left(\frac{e^{x/30} + e^{-x/30}}{2}\right)$$

2.2. La del astroide[4], cuya ecuación implícita es $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. También admite las ecuaciones paramétricas $x(t)=a\cos^3 t$, $y(t)=a\,\mathrm{sen}^3 t$, $0 \le t < 2\pi$.

2.3. La del cardioide[5] cuya ecuación polar es: $\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$

Solución:

2.1. Longitud de la catenaria.

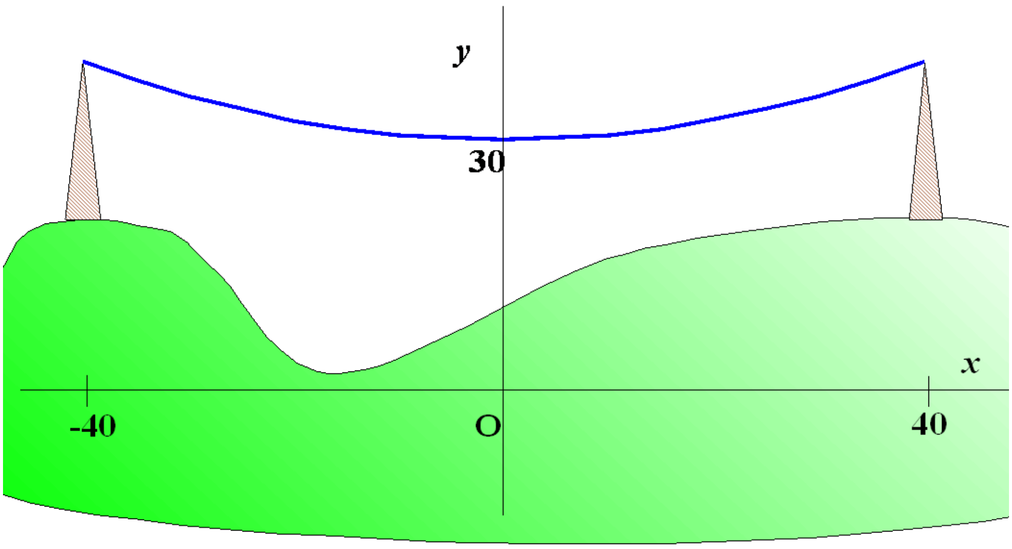


Figura V.6.2.2. Catenaria: $f(x) = 30\cosh\frac{x}{30} = 30\left(\frac{e^{x/30} + e^{-x/30}}{2}\right)$

---

[3] Catenaria: *Curva que describe un cable flexible uniforme suspendido entre dos puntos y sometido únicamente a la fuerza de la gravedad.* Larson, R. E. y Hostetler, R. P. (1990). *Cálculo y Geometría Analítica.* Tercera Edición. México. McGraw-Hill. Págs. 401 y 467.

[4] Astriode con cuatro puntos de retroceso: *Es la curva engendrada por un punto M de un círculo de radio a/4 rodando interiormente sin deslizarse sobre un círculo de radio a* (Bouvier y George, 1984, pág. 70 y Burgos, 1995, pág. 412).

[5] Cardioide: *Es la curva engendrada por un punto de un círculo de radio a que rueda exteriormente sin deslizarse sobre otro círculo de igual radio* (Bouvier y George, 1984, pág. 114 y Burgos, 1995, pág. 424).

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x/30}-e^{-x/30}\right); \quad \left[f'(x)\right]^2=\frac{1}{4}\left(e^{x/15}-2+e^{-x/15}\right)$$

$$1+\left[f'(x)\right]^2=\frac{1}{4}\left(e^{x/15}+2+e^{-x/15}\right)=\left[\frac{1}{2}\left(e^{x/30}+e^{-x/30}\right)\right]^2$$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=\int_{-40}^{40}\frac{1}{2}\left(e^{x/30}+e^{-x/30}\right)dx=2\int_0^{40}\frac{1}{2}\left(e^{x/30}+e^{-x/30}\right)dx=$$

$$=30\left[e^{x/30}-e^{-x/30}\right]_0^{40}=30\left(e^{40/30}-e^{-40/30}\right)=30\left(e^{4/3}-e^{-4/3}\right)\approx 105{,}902\ \textit{metros}.$$

2.2. Longitud del astroide: *$x(t)=a\cos^3 t$; $y(t)=a\,sen^3 t$; $0 \le t < 2\pi$.*

$x'(t) = -3a\cos^2 t\, sen\,t$; $y'(t) = 3a\,sen^2 t \cos t$;

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\ sen^2 t+9a^2 sen^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}3a\sqrt{\cos^2 t\ sen^2 t}\,dt=12a\int_0^{\pi/2}sent\cos t\ dt=6a\left[sen^2 t\right]_0^{\pi/2}=6a\ \ unidades$$

2.3. Longitud del cardioide: $\rho(\theta)=a\left(1+\cos\theta\right)$; $\qquad \rho'(\theta)=-a\,sen\theta$

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[\rho(\theta)\right]^2+\left[\rho'(\theta)\right]^2}\,d\theta=2\int_0^\pi\sqrt{\left[a(1+\cos\theta)\right]^2+\left[-a\,sen\theta\right]^2}\,d\theta=$$

$$=2a\int_0^\pi\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=4a\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a\left[sen\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi=8a\ \ unidades$$

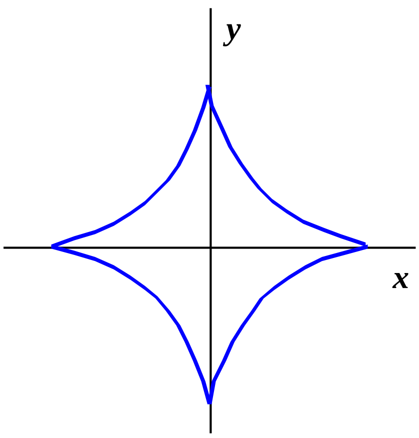


Figura V.6.2.3. Astroide.

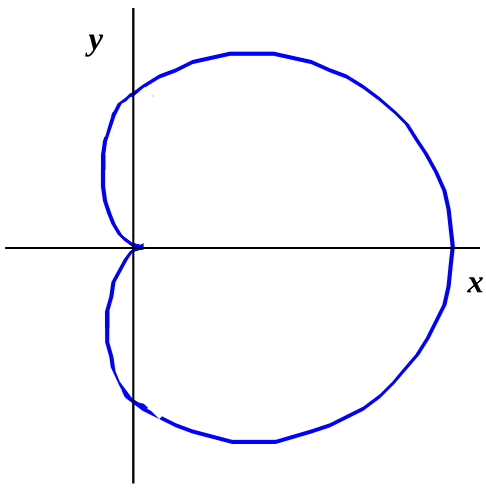


Figura V.6.2.4. Cardioide.

V.6.3. CÁLCULO DE VOLÚMENES

3.1. El volumen de un cuerpo de revolución engendrado por la función *y=f(x)* al girar alrededor del eje *OX,* entre *x=a* y *x=b* es: $V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$

3.2. El volumen de un cuerpo de revolución engendrado por la función *y=f(x)* al girar alrededor del eje *OY,* entre *x=a* y *x=b* es: $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$

3.3. El volumen de un cuerpo de revolución engendrado por las funciones *y=f(x), y=g(x)* al girar alrededor del eje *OX,* entre *x=a* y *x=b* es:

$$V = \pi \int_a^b \left| \left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2 \right| dx$$

3.4. Si la función está expresada en paramétricas, donde *x=x(t)* e *y=y(t).* El volumen engendrado al girar la curva alrededor del eje *OX* entre las abscisas $a=x(t_1)$ y $b=x(t_2)$ es: $V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\left|x'(t)\right| dt$

3.5. Si la función está expresada en paramétricas, donde *x=x(t)* e *y=y(t).* El volumen engendrado al girar la curva alrededor del eje *OY* entre las abscisas $a=x(t_1)$ y $b=x(t_2)$ es: $V = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)\left|x'(t)\right| dt$

3.6. Si la función está expresada en forma polar, $\rho = \rho(\theta)$. El volumen que se obtiene al girar la superficie limitada por la curva y los radios vectores $\theta=\alpha$ y $\theta=\beta$ alrededor del eje polar[6] es: $V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \left[\rho(\theta)\right]^3 sen\theta \, d\theta$.

3.7. Si tenemos un cuerpo tal que al cortarlo por un plano perpendicular al eje *OX* da lugar en cada punto de abscisa *x*, a una sección de área *A(x)*, el volumen de dicho cuerpo comprendido entre los planos perpendiculares al eje *OX* entre *x=a* y *x=b* es[7]: $V = \int_a^b A(x)\,dx$

[6] No es el volumen generado entre la curva y el eje polar. Obsérvese la figura V.6.1.4. El volumen es el generado al girar la superficie coloreada alrededor del eje *OX.*

[7] De forma análoga se puede definir para los volúmenes de sólidos comprendidos entre planos perpendiculares a los ejes *OY* y *OZ.*

Ejemplo 3: Calcule los siguientes volúmenes[8]:

3.1. El generado por la rotación de la catenaria $f(x) = a\cosh\dfrac{x}{a} = a\left(\dfrac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\right)$ alrededor del eje de abscisas, desde *x*=–*b* hasta *x*=*b.*

3.2. Determina el volumen de un cono de radio *r* y altura *h.*

3.3. Un mecánico perfora un agujero a través del centro de una esfera de metal de 5 cm de radio, el agujero tiene un radio de 3 cm. Calcule el volumen del anillo resultante.

3.4. Determine el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado *b* y altura *h.*

Solución:

3.1. La ecuación de la catenaria es $f(x) = a\cosh\dfrac{x}{a} = a\left(\dfrac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\right)$ y el volumen que genera el sólido de revolución al girar alrededor del eje *OX,* entre $x = \pm\, b$ viene dado por:

$$V = \pi\int_{-b}^{b}\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\int_{-b}^{b}\left[a\left(\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\right)\right]^2 dx = 2\frac{\pi a^2}{4}\int_0^b\left[e^{2x/a}+2+e^{-2x/a}\right]dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}\left[\frac{a}{2}e^{2x/a}+2x-\frac{a}{2}e^{-2x/a}\right]_0^b = \frac{\pi a^3}{4}\left[e^{2b/a}-e^{-2b/a}\right]+\pi a^2 b = \frac{\pi a^2}{2}\left[2b+a\,\mathrm{senh}\frac{2b}{a}\right]$$

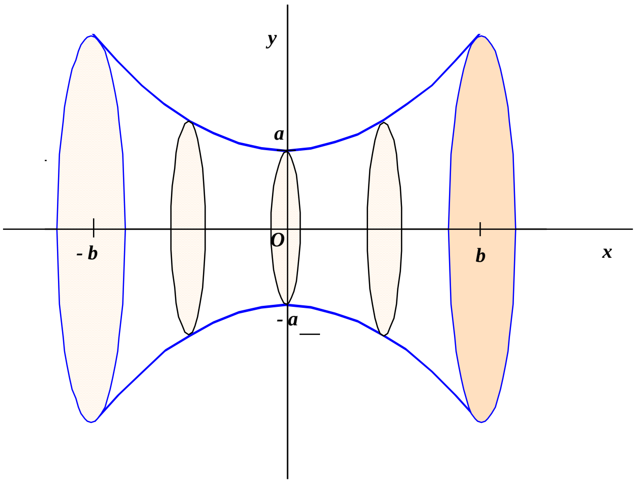


Figura V.6.3.1. Volumen generado por rotación de la catenaria.

[8] No es nuestro objetivo desarrollar todas las aplicaciones de la integral en el cálculo de volúmenes, más bien, dar alguna aplicación muy sencilla para así poder constatar la potencia del Cálculo Integral.

3.2. El volumen del cono de radio *r* y altura *h* lo calculamos por dos procedimientos, el primero considerando la altura sobre el eje *OY* (figura V.6.3.2.1) y el segundo con la altura sobre el eje *OX* (figura V.6.3.2.2).

3.2.1. La ecuación de la recta que pasa por los puntos *P(r,0)* y *Q(0,h)* es $y = -\frac{h}{r}(x-r)$. Al girar el segmento *PQ* alrededor del eje *OY*, obtenemos:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx = 2\pi \int_0^r x\left[-\frac{h}{r}(x-r)\right]dx = -\frac{2\pi h}{r}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2 r}{2}\right]_0^r = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad u^3$$

3.2.2. La ecuación de la recta que pasa por los puntos *S(h,0)* y *T(0,r)* es $y = -\frac{r}{h}(x-h)$. Al girar el segmento *ST* alrededor del eje *OX*, obtenemos:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx = \pi \int_0^h \left[-\frac{r}{h}(x-h)\right]^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{(x-h)^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad u^3$$

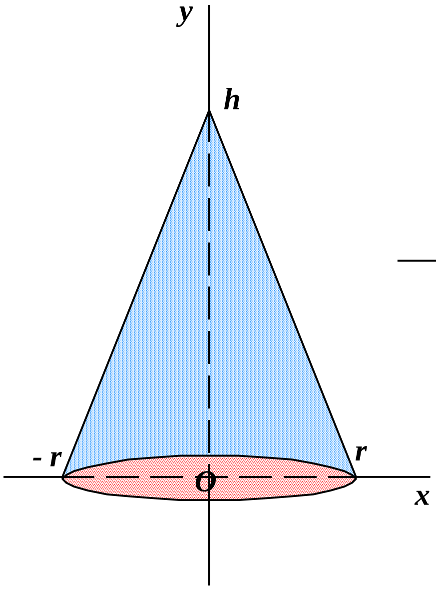


Figura V.6.3.2.1. Giro alrededor del eje OY

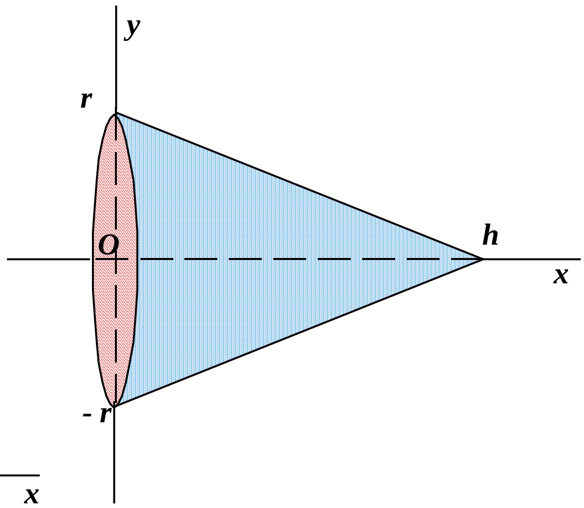


Figura V.6.3.2.2. Giro alrededor del eje OX

3.3. Consideremos la pieza[9] de tal forma que el eje imaginario del hueco esté sobre el eje *OX*, dicho eje medirá 8 cm (figura V.6.3.3 y teorema de Pitágoras). La esfera está generada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 5^2$. Tomando $f^2(x) = 25 - x^2$ y $g(x) = 3$. Tenemos:

[9] Larson y Hostelter (1990, págs. 424-425).

$$V = \pi \int_a^b \left| [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right| dx = \pi \int_{-4}^{4} \left| 25 - x^2 - 3^2 \right| dx = 2\pi \int_0^4 (16 - x^2)\, dx =$$

$$= 2\pi \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{256\pi}{3} \quad cm^3 \approx 268 \quad cm^3$$

3.4. Para determinar el volumen de una pirámide de base cuadrada[10] de lado *b* y altura *h* (figura V.6.3.4), procederemos por medio de las secciones cuadradas de la pirámide a una determinada altura *y* de la base cuya superficie cuadrada tiene lado *m.* Por semejanza de triángulos obtenemos $\frac{m}{b} = \frac{h-y}{h}$; por tanto $m = \frac{b}{h}(h-y)$ y el área de la sección cuadrada de la pirámide a la altura *y* es $A(y) = m^2 = \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2$. El volumen pedido es:

$$V = \int_a^b A(y)\, dy = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2\, dy = \frac{b^2}{h^2}\left[-\frac{(h-y)^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} b^2 h \quad u^3$$

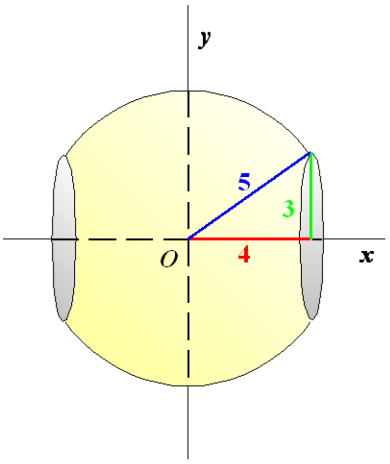


Figura V.6.3.3. Esfera perforada.

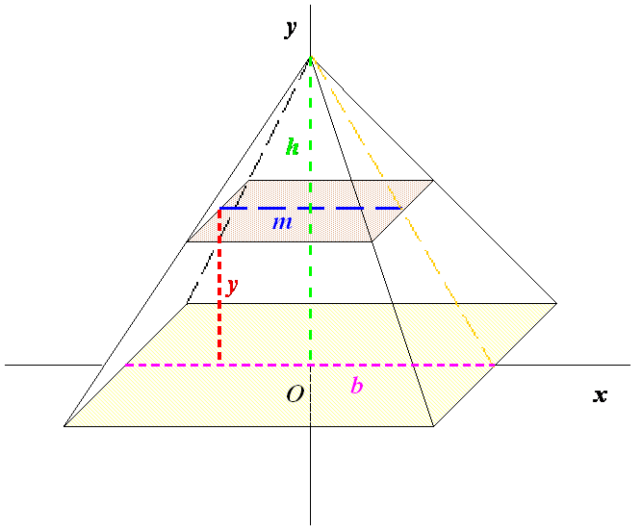


Figura V.6.3.4. Pirámide de base cuadrada.

[10] Larson y Hostetler (1990, págs. 426-427).

V.6.4. CÁLCULO DE ÁREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

4.1. El área de la superficie de revolución engendrada por la función *y=f(x)* al girar alrededor del eje *OX,* entre *x=a* y *x=b* es: $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

4.2. El área de la superficie de revolución engendrada por la función *y=f(x)* al girar alrededor del eje *OY,* entre *x=a* y *x=b* es: $S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

4.3. Si la función viene dada en paramétricas, *x=x(t)* e *y=y(t).* El área de la superficie de revolución engendrada, al girar la curva alrededor del eje *OX*, entre las abscisas $a=x(t_1)$ y $b=x(t_2)$ es: $S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$

4.4. Si la función viene dada en paramétricas, *x=x(t)* e *y=y(t).* El área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva alrededor del eje *OY* entre las abscisas $a=x(t_1)$ y $b=x(t_2)$ es: $S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$

4.5. Si la función está expresada en forma polar, $\rho = \rho(\theta)$. El área de la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva alrededor del eje polar es: $S = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\theta) sen\,\theta \sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,d\theta$

Ejemplo 4: Calcule las siguientes áreas de superficies de revolución[11]:

4.1. La generada por rotación de la catenaria $f(x) = a\cosh\frac{x}{a} = a\left(\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\right)$ alrededor del eje de abscisas, desde $x = -b$ hasta $x = b.$

4.2. La generada al girar la gráfica de la parábola $y = x^2$ en el intervalo $[0, \sqrt{6}]$, alrededor del eje *OY.*

Solución:

4.1. La superficie de revolución, alrededor de *OX,* entre x = ± b, generada por la rotación de la catenaria $f(x) = a\cosh\frac{x}{a} = a\left(\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\right)$ es:

[11] En este ejercicio solamente calculamos dos áreas de superficies de revolución, si se desea más información puede recurrirse a diferentes Textos de Análisis Matemático.

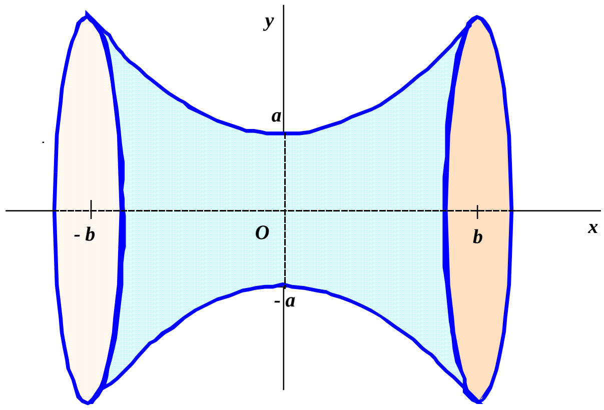
$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right);\quad \left[f'(x)\right]^2=\frac{1}{4}\left(e^{2x/a}-2+e^{-2x/a}\right)$$

$$1+\left[f'(x)\right]^2=\frac{1}{4}\left(e^{2x/a}+2+e^{-2x/a}\right)=\left[\frac{1}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)\right]^2$$

$$S=2\pi\int_{-b}^{b} f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=2\pi\int_{-b}^{b} a\left(\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\right)\frac{1}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)dx=$$

$$=4\pi\frac{a}{4}\int_0^b\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)^2dx=\pi\, a\int_0^b\left(e^{2x/a}+2+e^{-2x/a}\right)dx=$$

$$=\pi\, a\left[\frac{a}{2}\left(e^{2x/a}-e^{-2x/a}\right)+2x\right]_0^b=\pi\, a\left[\frac{a}{2}\left(e^{2b/a}-e^{-2b/a}\right)+2b\right]=\pi\, a\left[2b+a\,senh\frac{2b}{a}\right]\ u^2$$



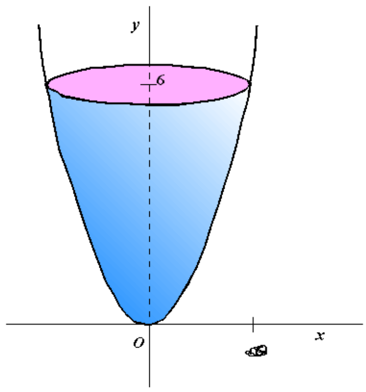


Figura V.6.4.1 (izquierda). Superficie de revolución de la catenaria.
Figura V.6.4.2 (derecha). Superficie de revolución de la parábola y =x² alrededor del eje OY.

4.2. La superficie de revolución generada por la parábola $y=x^2$ en el intervalo $[0,\sqrt{6}]$, al girar alrededor del eje *OY* es:

$$S=2\pi\int_0^{\sqrt{6}} x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=2\pi\int_0^{\sqrt{6}} x\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\frac{2\pi}{8}\int_0^{\sqrt{6}} 8x\left(1+4x^2\right)^{1/2}dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{\left(1+4x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{6}}=\frac{\pi}{4}\left[\frac{125}{3/2}-\frac{1}{3/2}\right]=\frac{62\pi}{3}$$ *unidades cuadradas.*

V.6.5. LA CICLOIDE

La cicliode es el lugar geométrico de los puntos del plano descrito por un punto de la circunferencia cuando ésta rueda sobre una línea recta (figura V.6.5.1). La ecuación de la cicloide en coordenadas paramétricas viene dada por[12]: $\begin{cases} x(t) = a\,(t - sen\,t) \\ y(t) = a\,(1 - \cos t) \end{cases}$

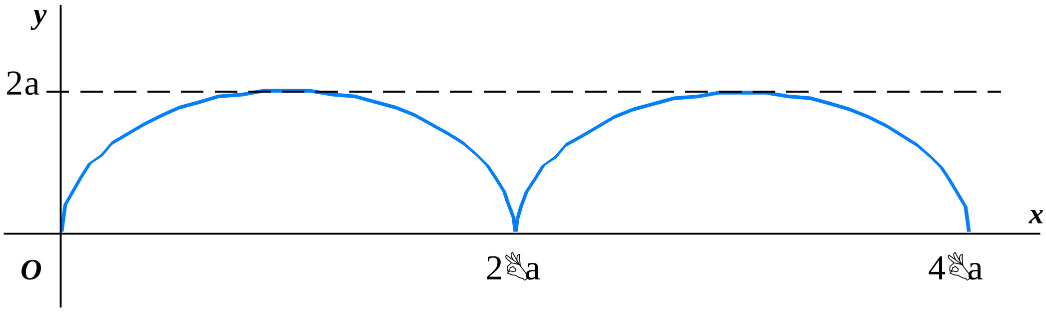


Figura V.6.5.1. Cicloide.

Ejemplo 5: Sea A el arco de cicloide comprendido entre *t=0* y *t=2π.* Calcular:

5.1. El área de la superficie, S, encerrada por A y el eje *OX.*

5.2. La longitud del arco A.

5.3. El volumen generado al girar S alrededor del eje *OX.*

5.4. El volumen generado al girar S alrededor del eje *OY.*

5.5. El volumen generado al girar S alrededor de la recta *y=2a.*

5.6. El área lateral de la superficie generada al girar A alrededor del eje *OX.*

5.7. El área lateral de la superficie generada al girar A alrededor del eje *OY.*

Solución:

La ecuación paramétrica de la cicloide es: $\begin{cases} x(t) = a\,(t - sen\,t) \\ y(t) = a\,(1 - \cos t) \end{cases}$

5.1. El área es:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt = \int_0^{2\pi} a^2(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt =$$

[12] Las deducción de las ecuaciones paramétricas de la cicloide puede encontrase en Larson y Hostetler (1990, pág. 696).

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2})\, dt = a^2 \left[\frac{3}{2} t - 2sen\, t + \frac{1}{4} sen\, 2t \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \quad u^2$$

5.2. La longitud del arco de la cicloide es:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a\, sen^2 t}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} sen \frac{t}{2}\, dt = 4a \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a \quad \textit{unidades.}$$

5.3. El volumen generado al girar la superficie S alrededor del eje *OX* es:

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) |x'(t)|\, dt = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 a (1-\cos t)\, dt =$$

$$= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt = a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt = a^3 \pi [I_1 + I_2 + I_3]$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t)\, dt = [-3sent]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} 3\cos^2 t\, dt = 3 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{3}{2} \left[t + \frac{1}{2} sen 2t \right]_0^{2\pi} = 3\pi$$

Para calcular I_3 hacemos el cambio *sent = s,* por tanto *cost dt = ds,* de donde $\cos^3 t\, dt = \cos^2 t \cos t\, dt = (1-sen^2 t) \cos t\, dt = (1-s^2)\, ds$, consecuentemente:

$$I = \int \cos^3 t\, dt = \int (1-s^2)\, ds = s - \frac{1}{3} s^3 = sen\, t - \frac{1}{3} sen^3 t \text{ ;}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = \left[sen\, t - \frac{1}{3} sen^3 t \right]_0^{2\pi} = 0$$

Concluimos que el volumen pedido es:

$$V_x = a^3 \pi [I_1 + I_2 + I_3] = a^3 \pi [2\pi + 3\pi + 0] = 5\pi^2 a^3 \quad \textit{unidades cúbicas.}$$

5.4. El volumen generado al girar la superficie S alrededor del eje *OY* es:

$$V_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t) |x'(t)|\, dt = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - sent) a(1-\cos t) a(1-\cos t)\, dt =$$

$$= 2a^3 \pi \int_0^{2\pi} (t - sent)(1-\cos t)^2\, dt =$$

$$= 2a^3\pi \int_0^{2\pi} \left(-sen\,t + 2sent\cos t - \cos^2 t\, sent - 2t\cos t + t\cos^2 t\right)dt = 2a^3\pi \left(I_4 + I_5 + I_6\right)$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \left(-sen\,t + 2sent\cos t - \cos^2 t\, sent\right)dt = \left[\frac{t^2}{2} + \cos t + sen^2 t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

Para calcular I_5, por partes: *u = t, dv = cost dt; du = dt, v = sent.*

$$I = \int t\cos t\,dt = t\,sen\,t - \int sen\,t\,dt = t\,sen\,t + \cos t$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} -2t\cos t\,dt = -2\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt = -2\left[sen\,t + \cos t\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} t\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} t\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(t + t\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(I_7 + I_8\right)$$

$$I_7 = \int_0^{2\pi} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

Para calcular I_8, por partes: *u = t, dv = cos2t dt; du = dt, v = (1/2)sen2t.*

$$I = \int t\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t\,sen\,2t - \int \frac{1}{2}sen\,2t\,dt = \frac{1}{2}t\,sen\,2t + \frac{1}{4}\cos 2t$$

$$I_8 = \int_0^{2\pi} t\cos 2t\,dt = \left[\frac{1}{2}t\,sen\,2t + \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^{2\pi} = 0\ ;\ I_6 = \frac{1}{2}\left(I_7 + I_8\right) = \pi^2$$

El volumen pedido es:

$V_y = 2a^3\pi\left(I_4 + I_5 + I_6\right) = 2a^3\pi\left(\pi^2 + 0 + \pi^2\right) = 6a^3\pi^3$ *unidades cúbicas.*

5.5. El volumen generado al girar la superficie S alrededor de la recta *y=2a.*

Si cortamos el volumen generado por un plano que contenga a los ejes *OX, OY;* la sección resultante es la parte coloreada de la figura V.6.5.2.

Para calcular ese volumen hallaremos el volumen del cilindro cuyo radio de su base mide *2a* y altura $2\pi a$, éste es: $V_c = \pi(2a)^2 2\pi a = 8\pi^2 a^3$ u^3.

Seguidamente hallaremos el volumen generado por la parte blanca de la figura al rotar sobre la recta en cuestión, nótese que para hallar este volumen debemos hacerlo por medio de áreas de superficies transversales, es decir, círculos de radio *2a – y(x).* Precedemos como sigue:

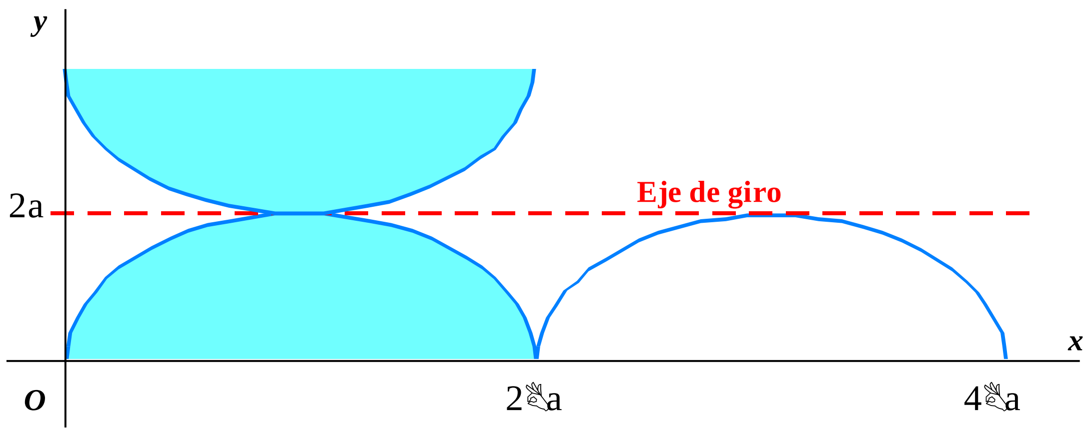


Figura V.6.5.2. Sección de la cicloide al girar alrededor de la recta y=2a.

$$V_b = \int_0^{2\pi a} S(x)\,dx = \int_0^{2\pi a} \pi\left(2a - y(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^{2\pi}\left(2a - a(1-\cos t)\right)^2 a(1-\cos t)dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi}\left[4(1-\cos t) - 4(1-\cos t)^2 + (1-\cos t)^3\right]dt = \pi a^3\left[I_9 + I_{10} + I_{11}\right]$$

$$I_9 = \int_0^{2\pi} 4(1-\cos t)dt = 4\left[t - \operatorname{sen} t\right]_0^{2\pi} = 8\pi$$

$$I_{10} = \int_0^{2\pi} -4(1-\cos t)^2 dt = -4\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = -4\times 3\pi = -12\pi \quad \text{(Véase 5.1).}$$

$$I_{11} = \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt = I_1 + I_2 + I_3 = 5\pi$$

$$V_b = \pi a^3\left[I_9 + I_{10} + I_{11}\right] = \pi a^3\left[8\pi - 12\pi + 5\pi\right] = \pi^2 a^3$$

El volumen pedido es: $V = V_c - V_b = 8\pi^2 a^3 - \pi^2 a^3 = 7\pi^2 a^3 \;\; u^3.$

5.6. El área lateral de la superficie generada al girar A alrededor del eje *OX:*

$$S_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\,dt = 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2 - 2\cos t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = 2\pi a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^3}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^3\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\right]^3 dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3\frac{t}{2}\,dt\,.$$

Haciendo el cambio *cos(t/2) = s, – (1/2)sen(t/2) dt = ds, sen(t/2) dt = – 2ds;* por tanto, tenemos $sen^3(t/2)dt = sen^2(t/2)\ sen(t/2)dt = (1\text{-}cos^2(t/2))\ sen(t/2)dt = -2\ (1\text{-}s^2)ds$, consecuentemente:

$$I = \int -2(1-s^2)\,ds = -2(s - \frac{s^3}{3}) = -2\left[\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]$$

Concluimos que el área de la superficie de revolución, alrededor de *OX,* es:

$$S_x = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} sen^3\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2\left[-2\left[\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]\right]_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2 \quad u^2.$$

5.7. El área lateral de la superficie generada al girar A alrededor del eje *OY:*

$$S_y = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi} a(t - sen\,t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 sen^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(t - sen\,t)\sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t - sen\,t)\sqrt{\frac{1 - 1\cos t}{2}}\,dt =$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t - sen\,t)\,sen\frac{t}{2}\,dt = 4\pi a^2\left[\int_0^{2\pi} t\,sen\frac{t}{2}\,dt - \int_0^{2\pi} sen\,t\ sen\frac{t}{2}\,dt\right] = 4\pi a^2\left[I_{12} - I_{13}\right]$$

Para calcular I_{12}, por partes: *u = t, dv =sen(t/2) dt; du = dt, v = –2cos(t/2)*

$$I_{12}^* = \int t\,sen\frac{t}{2}dt = -2t\cos\frac{t}{2} + \int 2\cos\frac{t}{2}dt = -2t\cos\frac{t}{2} + 4sen\frac{t}{2}$$

$$I_{12} = \int_0^{2\pi} t\,sen\frac{t}{2}\,dt = \left[-2t\cos\frac{t}{2} + 4sen\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

$$I_{13}^* = \int sent\ sen\frac{t}{2}\,dt = \int 2sen\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}sen\frac{t}{2}\,dt = 2\int\cos\frac{t}{2}sen^2\frac{t}{2}\,dt = \frac{4}{3}sen^3\frac{t}{2}$$

$$I_{13} = \int_0^{2\pi} sent\ sen\frac{t}{2}\,dt = \left[\frac{4}{3}sen\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Concluimos que el área de la superficie de revolución, alrededor del eje *OY,* es: $S_y = 4\pi a^2\left[I_{12} - I_{13}\right] = 4\pi a^2\left[4\pi - 0\right] = 16\pi^2 a^2$ *unidades cuadradas.*

V.6.6. INTEGRALES IMPROPIAS

No pretendemos exponer rigurosamente el concepto de integral impropia, más bien, ampliar la integral definida y analizar algunos problemas en los cuales, por ejemplo, las figuras son infinitas y tienen área finita.

Sabemos que la definición de $\int_a^b f(x)dx$ requiere que la función esté acotada en el intervalo y éste sea finito. Se dirá que la integral es impropia si alguno de los extremos del intervalo son infinitos (integral impropia de primera especie) o si la función tiene un número finito de discontinuidades infinitas (integral impropia de segunda especie)[13].

Ejemplo 6: Resuélvanse los siguientes ejercicios:

6.1. Representar y calcular el área de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ entre $\pm\infty$.

6.2. Representar y calcular el área de la función $f(x)=\ln x$ entre *x=0* y *x=1.*

6.3. Representar y calcular la longitud de la espiral[14]: $\rho(\theta)=e^{\theta}, \quad -\infty<\theta<0$.

6.4. Representar y calcular el volumen y la superficie de revolución de la función $f(x)=1/x, \quad 1\le x$. Conocido como cuerno o trompeta de Gabriel[15].

Solución:

6.1. Representar y calcular el área de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ entre $\pm\infty$.

Aunque Laplace y Gauss dieron la solución a la Integral de Gauss, nosotros nos proponemos estudiar otra función distinta a la anterior, sin embargo su representación gráfica (figura V.6.6.1) nos recuerda a la de aquélla.

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\lim_{a\to-\infty}\left[arc\ tag\ e^x\right]_a^0+\lim_{b\to\infty}\left[arc\ tag\ e^x\right]_0^b=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{\pi}{4}-arc\ tag\ e^a\right]+\lim_{b\to\infty}\left[arc\ tag\ e^b-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{4}-0+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

Así pues, el área de la superficie infinita es finita y su valor es $A=\dfrac{\pi}{2}\quad u^2$

[13] Nótese que los dos tipos de integral impropia no son excluyentes.

[14] Reconocida como *espiral logarítmica* o *espiral de Bernoulli* (Boyer, 1986, págs. 433, 525-526).

[15] Larson y Hostetler (1990, pág. 557).

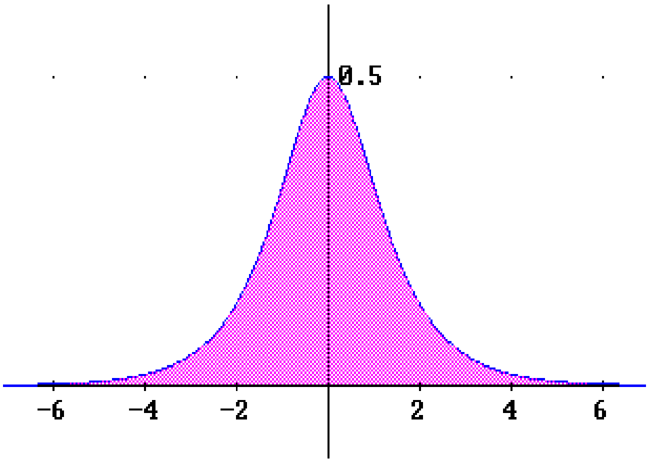


Figura V.6.6.1. Función $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

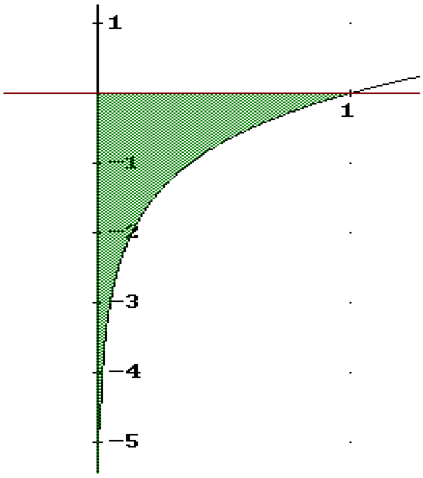


Figura V.6.6.2. Función $f(x) = \ln x$

6.2. Representar y calcular el área de la función $f(x) = \ln x$ entre *x=0* y *x=1.*

Para calcular $\int \ln x dx$, por partes, *u = lnx, dv = dx; du = (1/x) dx, v = x.*

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{a \to 0^+} \left[x \ln x - x \right]_a^1 = \lim_{a \to 0^+} \left[-1 - a \ln a + a \right] = -1 - \lim_{a \to 0^+} a \ln a$$

Para calcular el límite, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{a \to 0^+} a \ln a = \lim_{a \to 0^+} \frac{\ln a}{1/a} = \lim_{a \to 0^+} \frac{(\ln a)'}{(1/a)'} = \lim_{a \to 0^+} \frac{1/a}{-1/a^2} = \lim_{a \to 0^+} -a = 0$$

$\int_0^1 \ln x \, dx = -1 - \lim_{a \to 0^+} a \ln a = -1 - 0 = -1$. Por consiguiente, el área buscada es el valor absoluto de la integral impropia, esto es: $A = \left| \int_0^1 \ln x \, dx \right| = \left| -1 \right| = 1 \quad u^2$

6.3. Representar y calcular la longitud de la espiral $\rho(\theta) = e^{\theta}, \quad -\infty < \theta < 0$.

Al estar la espiral en forma polar su longitud viene dada por la fórmula:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\rho(\theta)\right]^2 + \left[\rho'(\theta)\right]^2} d\theta = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}} d\vartheta = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{2} e^{\theta} \, d\theta = .$$

$$= \sqrt{2} \lim_{a \to -\infty} \left[e^{\theta} \right]_a^0 = \sqrt{2} \lim_{a \to -\infty} \left[1 - e^{a} \right] = \sqrt{2} \text{ unidades.}$$

A pesar de ser la espiral logarítmica infinita, da infinitas vueltas, su longitud es finita: $L = \sqrt{2} \quad unidades$.

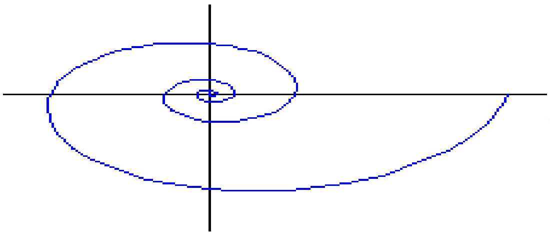


Figura V.6.6.3. Espiral logarítmica
$\rho(\theta)=e^{\theta}, \quad -\infty<\theta<0.$

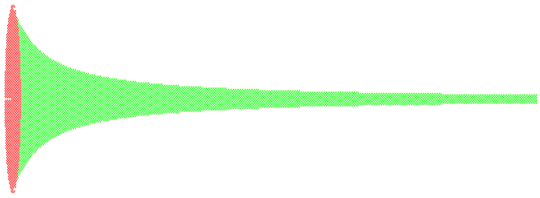


Figura V.6.6.4. Trompeta de Gabriel.

6.4. Representar y calcular el volumen y la superficie de revolución de la función $f(x)=1/x, \quad 1\leq x$. Conocido como cuerno o trompeta de Gabriel.

El volumen de revolución alrededor del eje de abscisas entre 1 e infinito es:

$$V=\pi\int_1^{\infty}(f(x))^2\,dx=\pi\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx=\pi\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\pi\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right]=\pi$$

Concluimos que el volumen del cuerno de Gabriel es $V=\pi \quad u^3$

El área de la superficie de revolución, alrededor del eje *OX*, queda determinada por la fórmula:

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=2\pi\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx=2\pi\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx$$

Si $x^2=t$; $2xdx=dt$, entonces: $dx=(1/2x)dt$, $(1/x^3)dx=(1/x^3)(1/2x)dt=(1/2x^4)dt=$ $=(1/2t^2)dt$ y, además, $x^4=t^2$ y utilizando la fórmula[16]

$$\int\frac{\sqrt{u^2\pm a^2}}{u^2}=\frac{-\sqrt{u^2\pm a^2}}{u}+\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+K;\ \ 0<a$$

$$2\pi\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx=2\pi\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}}{2t^2}dt=\pi\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}dt=\pi\lim_{b^2\to\infty}\left[\frac{-\sqrt{t^2+1}}{t}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_1^b=$$

$$=\pi\lim_{b^2\to\infty}\left[\frac{-\sqrt{t^2+1}}{t}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_1^b=\pi\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-\sqrt{x^4+1}}{x^2}+\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+1}\right|\right]_1^b=$$

$$=\pi\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-\sqrt{b^4+1}}{b^2}+\ln\left|b^2+\sqrt{b^4+1}\right|\right]-\pi\left[\frac{-\sqrt{1^4+1}}{1^2}+\ln\left|1^2+\sqrt{1^4+1}\right|\right]=$$

$$=\pi\left[-1+\infty\right]-\pi\left[-\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]=+\infty$$

Esto nos hace concluir que la trompeta de Gabriel tiene volumen finito y, a la vez, la superficie que lo determina tiene área infinita.

[16] Larson y Hostetler (1990). Apéndice G Tablas de Integrales A27. Fórmula 30.

V.6.7. ESPACIO, VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y TIEMPO

Las relaciones existentes entre estas magnitudes son: La derivada del espacio respecto del tiempo es la velocidad y la derivada de la velocidad respecto del tiempo es la aceleración.

Ejemplo 7: Un tren de alta velocidad, partiendo del reposo, inicia un recorrido con una aceleración de 1,5 m/s^2 hasta alcanzar la velocidad punta de 216 Km/h. Calcular el espacio recorrido en los cinco primeros minutos de movimiento.

Solución:

Si designamos por *s(t), v(t)* y *a(t)* el espacio, la velocidad y la aceleración, respectivamente. El tren parte del reposo, hasta que alcanza la velocidad punta, ésta será $v(t)=\int_0^t a(x)\,dx+v(0)=\int_0^t 1{,}5\,dx=1{,}5\,t$. Como 216 Km/h = 60 m/s, se obtiene 1,5*t*=60; *t*=40 segundos. El tren alcanza los 216 Km/h a los 40 segundos de iniciar la marcha y la velocidad viene dada por la expresión: $v(t)=\begin{cases}1{,}5t & si\ \ 0\le t\le 40\\ 60 & si\ \ 40<t\end{cases}$. Puesto que cinco minutos son trescientos segundos, entonces:

$$s(300)=\int_0^{300}v(x)\,dx+s(0)=\int_0^{40}1{,}5t\ dx+\int_{40}^{300}60\,dt=\left[\frac{1{,}5}{2}t^2\right]_0^{40}+\left[60t\right]_{40}^{300}=16800\ \ m$$

Concluimos que el espacio recorrido por el tren en los cinco primeros minutos de su trayecto es de 16,8 Km.

V.6.8. TRABAJO

Tanto los físicos como los ingenieros, utilizan en multitud de ocasiones el concepto de *Trabajo* y éste queda definido por: $W=\int_a^b F(x)\,dx$, donde *F(x)* es la fuerza aplicada a un objeto para desplazarlo desde la posición *a* hasta la posición *b*[17].

[17] En el Sistema Internacional la unidad básica de fuerza es la *dina* (que es la fuerza que se requiere para producir una aceleración de un centímetro por segundo a una masa de un gramo). El trabajo se expresa en ergios (dinas x centímetros) y julios (newton x metros), siendo 1 julio = 10^7 ergios (Larson y Hostelter, 1990, pág. 437).

Ejemplo 8:

8.1. La gran pirámide Keops en la necrópolis de Gizeh en Egipto se construyó en 20 años. Sabiendo que el peso específico de la piedra empleada en su construcción es ρ = *3000 Kg/m*^{3} que la pirámide es cuadrangular de 225 m de lado de su base y 125 m de altura. Calcular el trabajo realizado en su construcción[18].

8.2. La comprensión *d* de un muelle helocoidal es proporcional a la fuerza aplicada[19]. Calcular el trabajo necesario para comprimir un muelle 5 cm si es preciso aplicar un peso de 2 kg para comprimirlo 1 cm.

Solución:

8.1. A una altura *h* y por semejanza de triángulos (figura V.6.8.1) se verifica $\frac{225}{125} = \frac{l}{125-h}$, siendo l el lado del cuadrado comprendido entre la base y el vértice de la pirámide. Así pues $l = \frac{225}{125}(125-h)$ y el peso de la zona azulada es $\rho\, l^2 dh = 3000\,\frac{kg}{m^3}\,9{,}8\,\frac{Nw}{kg}\left(\frac{225}{125}(125-h)\right)^2 dh$.

Como el peso hay que subirlo a una altura *h*, el trabajo empleado para la construcción de la pirámide es:

$$W = \int_0^{125} 9{,}8\times 3000\times\left(\frac{225}{125}(125-h)\right)^2 h\,dh = 9{,}8\times 3000\times\left(\frac{225}{125}\right)^2\int_0^{125}(125-h)^2\,h\,dh =$$

$$= 9{,}8\times 3000\times\left(\frac{9}{5}\right)^2\left[125^2\,\frac{h^2}{2} - 250\,\frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4}\right]_0^{125} \approx 1{,}938\times 10^{12} \quad julios\,.$$

8.2. Designamos por *s,* en metros, la comprensión helocoidal, sustituyendo las condiciones iniciales en la Ley de Hooke, *F=ks,* obtenemos *2=k·0,01*; por tanto *k=200* y *F=200s* (figura V.6.8.2).

El trabajo necesario para comprimir el muelle 5 cm es:

[18] García y cols. (1994b, pág. 481).

[19] Ley de Hooke: *"La fuerza F requerida par comprimir o estirar un muelle dentro de sus límites de elasticidad es proporcional a la distancia d que representa la diferencia entre la longitud del muelle comprimido o estirado y la longitud original, es decir, F = kd donde la constante de proporcionalidad k depende de las características del muelle"* (Larson y Hostelter, 1990, pág. 439).

$$W = \int_0^{0,05} F\,ds = \int_0^{0,05} 200\,s\,ds = 200\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^{0,05} = 0,25\,kg\,m = 0,25\times 9,8\,Nw\,m = 2,45\ julios$$ [20].

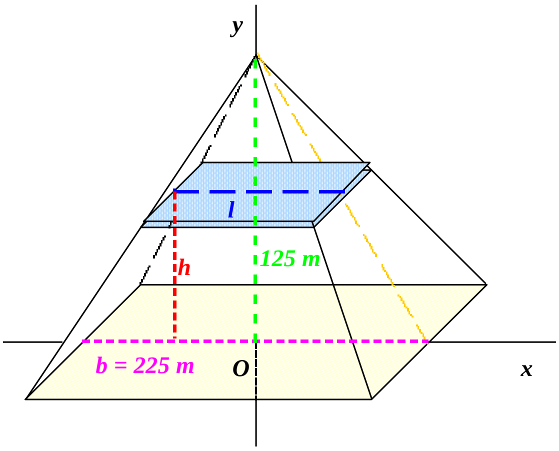


Figura V.6.8.1. Pirámide de Keops.

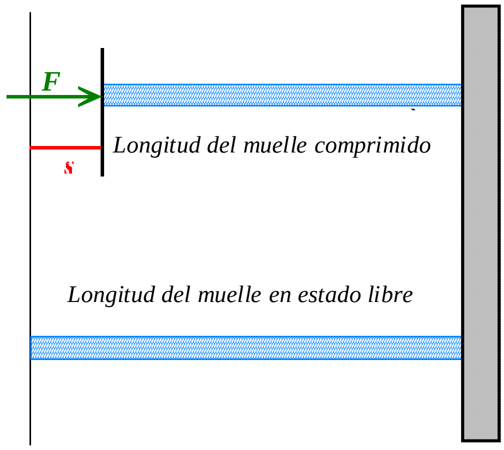


Figura V.6.8.2. Muelle comprimido/libre.

V.6.9. CENTRO DE GRAVEDAD

9.1. Supongamos que tenemos una lámina de densidad constante, limitada por las funciones *f(x) y g(x)* entre las rectas *x=a* y *x=b.* Se define el *centro de gravedad*[21] como el punto del plano $G(x_c, y_c)$ siendo:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\,[f(x)-g(x)]\,dx}{\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx};\quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\,dx}{\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx}$$

9.2. Supongamos que tenemos una figura en el espacio de densidad constante, donde (por simetría) el *centro de gravedad* es $G(x_c, 0, 0)$ siendo:

$$x_c = \frac{\int_0^h x\,dm}{\int_0^h dm}$$; *h* la altura, constante, respecto de *x* y *dm* la diferencial de la masa.

[20] Piskunov, N. (1978). *Cálculo Diferencial e Integral*. Barcelona. Montaner y Simon. Pág. 531.

[21] También llamado *punto de equilibrio.*

Ejemplo 9: Calcular el *centro de gravedad* de las siguientes figuras con densidad constante:

9.1. Del segmento de la parábola $y^2 = ax$ limitado por la recta $x=a$.

9.2. Del cono de radio r y altura h.

Solución:

9.1. Consideramos que el segmento de la parábola $y^2 = ax$ está limitado por las funciones $f(x) = \sqrt{ax}$ *y* $g(x) = -\sqrt{ax}$ (figura V.6.9.1). Entonces:

$$f(x) - g(x) = 2\sqrt{ax}; \quad f(x) + g(x) = 0$$

$$x_c = \frac{\int_0^a x\left[f(x)-g(x)\right]dx}{\int_0^a \left[f(x)-g(x)\right]dx} = \frac{\int_0^a x\,2\sqrt{ax}\,dx}{\int_0^a 2\sqrt{ax}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{a}\left[x^{5/2}\right]_0^a}{\frac{2}{3}\sqrt{a}\left[x^{3/2}\right]_0^a} = \frac{3}{5}a$$, es evidente que $y_c=0$.

Esto supone que el centro de gravedad del segmento parabólico está a *(3/5)a*, es decir, la distancia del vértice al centro de gravedad, situado sobre el eje de la parábola, es *0,6a unidades.*

9.2. Consideremos el cono cuya altura está sobre el eje *OX* (figura V.6.9.2). Al ser la densidad, ρ, constante, tenemos $dm=\rho dV(x)=\rho A(x)dx$, siendo $V(x)$ el volumen y $A(x)$ el área del cono en el círculo de radio $\frac{r \cdot x}{h}$ (basta considerar la semejanza de triángulos), por tanto, $dm=\rho dV(x)=\rho A(x)dx=\rho\pi\left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$ y, en consecuencia:

$$x_c = \frac{\int_0^h x\,dm}{\int_0^h dm} = \frac{\int_0^h x\,\rho\pi\left(\frac{r\,x}{h}\right)^2 dx}{\int_0^h \rho\pi\left(\frac{r\,x}{h}\right)^2 dx} = \frac{\rho\pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h}{\rho\pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h} = \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3}{4}h$$

Esto supone que el centro de gravedad del cono está sobre el eje del cono a *(3/4)h unidades* de distancia al vértice, así lo muestra la figura V.6.9.2.

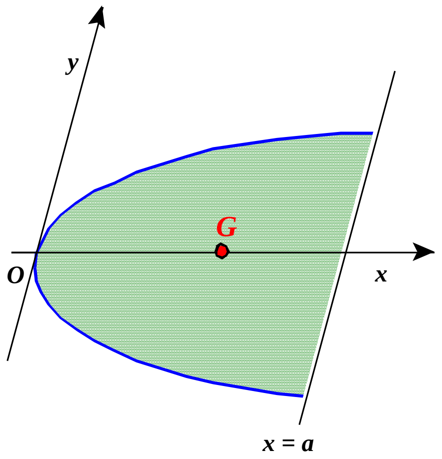


Figura V.6.9.1. Centro de gravedad parábola.

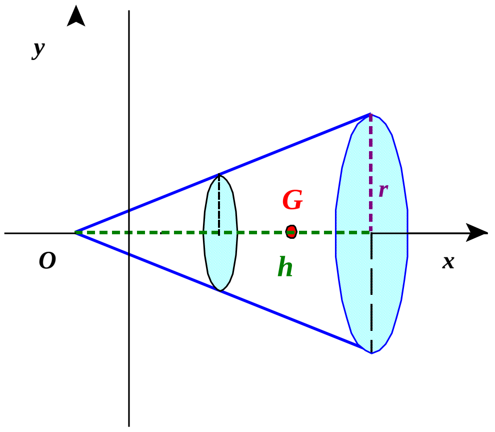


Figura V.6.9.2. Centro de gravedad cono.

V.6.10. FUERZA EJERCIDA POR UN FLUIDO

El *principio de Pascal* establece que: *"La presión ejercida por un fluido a una profundidad h es la misma en todas las direcciones"*[22].

Se define la *fuerza ejercida por un fluido* de densidad, ρ, constante contra una región plana sumergida verticalmente desde *y=c* hasta *y=d* al valor dado por $F = \rho \int_c^d h(y)\, L(y)\, dy$ donde *h(y)* es la profundidad del fluido en *y* y *L(y)* es la longitud horizontal de la región en *y.*

Ejemplo 10: Una ventana circular de observación de un barco científico tiene un radio de 30 centímetros y el centro de la misma está 4 metros bajo el nivel del agua. Calcula la fuerza ejercida por el fluido en la ventana del barco si la densidad del agua marina es ρ=1025 kg/m^3.

Solución: Para aprovechar la simetría de la ventana, figura V.6.10, situamos el origen de coordenadas en el centro de la ventana y, como el perímetro de la ventana es la circunferencia $x^2 + y^2 = 0{,}3^2$.

Tenemos: $x = \sqrt{0{,}3^2 - y^2}$, entonces, la distancia (medida horizontalmente) de un extremo a otro de la ventana es $L(y) = 2 \cdot x = 2\sqrt{0{,}3^2 - y^2}$ y la profundidad de la ventana en *y* es $h(y) = 4 - y$.

[22] Larson y Hostelter (1990, págs. 445-450).

Como $F = \rho \int_c^d h(y)\,L(y)\,dy = 1025 \int_{-0,3}^{0,3} (4-y)\,2\sqrt{0,3^2 - y^2}\,dy = 2050\,[I_1 - I_2]$

$I_1 = 4\int_{-0,3}^{0,3} \sqrt{0,3^2 - y^2}\,dy$ que es cuatro veces el área del semicírculo determinado por la circunferencia anterior o doble del área del círculo, es decir, $I_1 = 2\pi\, 0,3^2 = 0,18\pi$.

$I_2 = \int_{-0,3}^{0,3} y\sqrt{0,3^2 - y^2}\,dy$ que al ser el integrando una función impar y los límites de integración simétricos respecto del origen la integral es nula, esto es, $I_2 = 0$.

Concluimos que la fuerza es F = 2050 [I_1 – I_2] = 369π kg ≈ 1158,675 kg ≈ ≈11355 Nw.

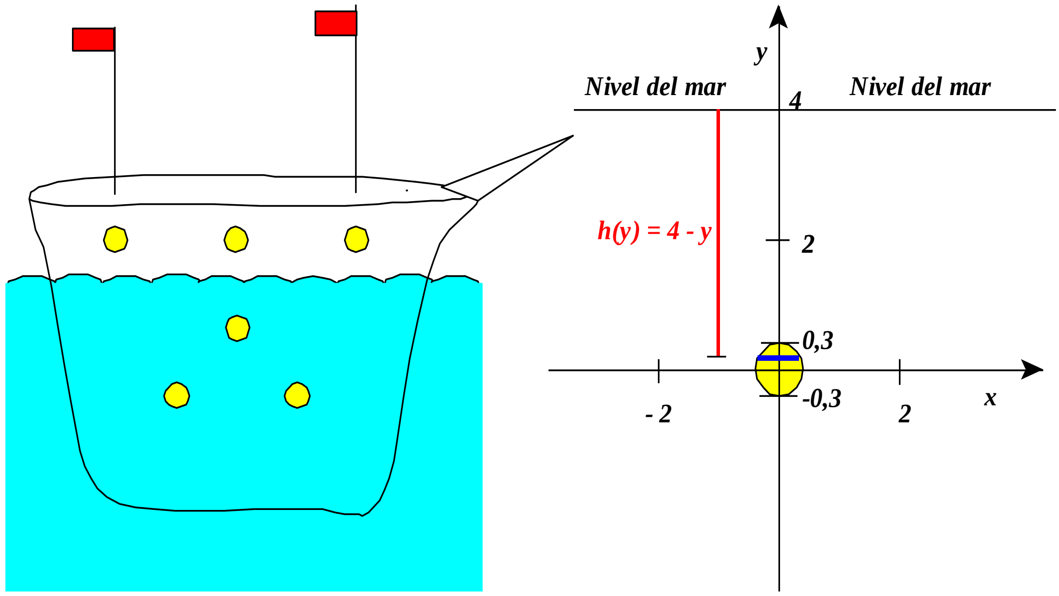


Figura V.6.10. Fuerza ejercida por un fluido sobre la ventana de un barco.

V.6.11. LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

La *Ley de enfriamiento de Newton* afirma que: *"La temperatura de un cuerpo en proceso de enfriamiento decrece a una velocidad directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente".*

Para modelizar esta ley de enfriamiento consideramos *y(t)* es la temperatura del cuerpo en un instante *t* y *A* la temperatura ambiente, entonces, tendremos $\frac{dy}{dt} = k\,(y - A)$. Resolvemos la ecuación diferencial: *dy=k(y - A)dt;*

$\frac{dy}{y-A} = k\,dt$, integrando $\int \frac{dy}{y-A} = k \int dt$, obtenemos $\ln|y - A| = kt + C$, por tanto, $y - A = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C}$, en consecuencia: $y(t) = A + e^{C}e^{kt}$.

De forma análoga para la ley de calentamiento se obtiene $y(t) = A - e^{D}e^{kt}$

Ejemplo 11: Una brigada de la policía descubre un cadáver en la calle, con signos evidentes de asesinato, a las 05:00 AM, se le toma la temperatura y ésta es de 32 grados. Al cabo de una hora, cuando llega el juez de guardia, se le vuelve a tomar la temperatura y es de 29 grados; si la temperatura ambiente es de 10 grados. Calcular la hora en la que se produjo el fallecimiento[23].

Solución: Si el instante de partida *t=0* son las 5 horas, sustituyendo en la ecuación $y(t) = A + e^{C}e^{kt}$ queda $32 = 10 + e^{C}e^{0}$, por tanto $C = \ln 22$ y volviendo a sustituir en *t=1* se obtiene $29 = 10 + 22e^{k}$, lo cual nos permite determinar $k=\ln(19/22)$. Suponiendo que la temperatura inicial, en el momento del deceso, era de 37 grados; sustituyendo, una vez más, en la ecuación $y(t) = A + e^{C}e^{kt}$ para poder calcular *t:* $37 = 10 + 22e^{\ln(19/22)\,t}$ y, operando, obtenemos $t=\ln(27/22)/\ln(19/22)=-1{,}396927417$ que corresponde con una hora y veinticuatro minutos antes de la llegada de la policía. Concluimos, pues, que el posible asesinato se produjo a las 3 horas y 36 minutos de la madrugada.

[23] Alejandre, M. , Soler, X. y Toledo, F. J. (2002). *Problemas de Matemáticas asistidos con Derive 5. Análisis Matemático*. Universidad Miguel Hernández. Elche. Págs. 81-110.

V.6.12. CRECIMIENTOS EXPONENCIAL Y LOGÍSTICO

Hay magnitudes en la naturaleza cuyo crecimiento (decrecimiento) en un instante es directamente proporcional a la cantidad de magnitud existente en ese momento. Matemáticamente queda formalizado como $\frac{dy}{dt} = ky$ y resolviendo esta ecuación diferencial con la condición inicial *y(0),* se concluye: $y(t) = y(0)e^{kt}$. Esta expresión se conoce como *Ley exponencial de crecimiento* cuando *k>0,* o *Ley exponencial de decrecimiento* si *k<0.*

Sin embargo, por diferentes causas el crecimiento anterior no puede ser ilimitado en ciertas poblaciones (por ejemplo: presencia de depredadores, recursos limitados, etc.). Supongamos, ahora, que la población está limitada por un tamaño máximo *M* y que el crecimiento en un instante es directamente proporcional a la población existente en ese momento y a la diferencia entre el máximo posible y la población del momento. En resumen, estas condiciones suponen $\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$, resolviendo la ecuación diferencial por medio de la integración de funciones racionales, en concreto separación de raíces simples, la solución de dicha ecuación diferencial es:

$y(t) = \dfrac{M\, e^{CM} e^{Mkt}}{e^{CM} e^{Mkt} + 1}$, conocida como *función logística* o *de Verhulst-Pearl*[24].

Ejemplo 12:

12.1. La radioactividad es muy útil para datar restos arqueológicos de origen orgánico. Las plantas y otros organismos vivos contienen cierta cantidad de carbono 14 radiactivo ^{14}C además del carbono ordinario ^{12}C, mientras el organismo sigue vivo la proporción entre los dos tipos de carbono se mantiene constante, cuando el organismo muere los átomos de ^{12}C permanecen y los átomos ^{14}C decaen exponencialmente; de este modo comparando los dos tipos de carbono podemos datar la antigüedad de un fósil. Se sabe que la vida media (tiempo transcurrido para que la cantidad de materia se reduzca a la mitad) del ^{14}C es de 5600 años.

[24] Alejandre y cols. (2002, págs. 81-110).

Imaginemos que se ha descubierto una herramienta prehistórica de madera de pino y la proporción entre los carbonos ^{14}C y ^{12}C del pino actual es del 0,12% y la de la herramienta del 0,043%. Determinar la antigüedad aproximada de la herramienta.

12.2. De la población de cierto número de bacterias se sabe que por disponibilidad de recursos no pueden pasar de 200.000, la población inicial es de 12.500 y al cabo de 10 horas es de 14.000 bacterias. Calcular el tiempo, desde la primera observación, que será necesario que transcurra para alcanzar los 170.000 individuos.

Solución:

12.1. Imaginemos que del ^{14}C tenemos, en el momento de partida, una unidad y como la vida media es de 5600 años, y según la *Ley de crecimiento exponencial* se verifica: $0{,}5=1\cdot e^{k\cdot 5600}$, $k = -0{,}0001237762822.$ Para calcular los años, aproximados, de la herramienta tomamos como condición inicial $y(0) = 0{,}12;$ sustituyendo en la ecuación $y(t) = y(0)\, e^{k\,t}$, obtenemos: queda $0{,}043 = 0{,}12\; e^{-0{,}0001237762822\,t}$, por tanto $t = 8291{,}504711.$

Afirmamos que la antigüedad aproximada de la herramienta es 8290 años.

12.2. Sustituyendo en la *función de Verhulst-Pear* $y(t) = \dfrac{M\, e^{C\,M}\, e^{M\,k\,t}}{e^{C\,M}\, e^{M\,k\,t} + 1}$ con las condiciones iniciales *t=0, y(0)=12.500* y *M=200.000* se obtiene el valor de la constante $C=-1{,}354025100\cdot 10^{-5}.$ Haciendo *t=0, y(10)=14.000* y sustituyendo en la función logística con los datos conocidos *M* y *C,* entonces, obtenemos $k=6{,}068049478\cdot 10^{-8}.$ El tiempo transcurrido desde la cepa de 12.500 bacterias hasta la de 170.000 obtiene al resolver la ecuación:

$$170.000 = \frac{200.000\, e^{-1{,}354025\cdot 10^{-5}\cdot 200.000}\, e^{200.000\cdot 6{,}068049478\cdot 10^{-8}\cdot t}}{e^{-1{,}354025\cdot 10^{-5}\cdot 200.000}\, e^{200.000\cdot 6{,}068049478\cdot 10^{-8}\cdot t} + 1}$$

que, calculándolo con *DERIVE*, obtenemos t=366 horas, es decir, deben transcurrir quince días y seis horas.

V.6.13. ECONOMÍA[25]

Sea *y* la proporción de ingresos que recibe la proporción *x* de asalariados con ingresos mínimos. Por ejemplo si *x=1/2* e *y=1/4* supone que el 50% de la población que recibe el ingreso más bajo reciben el 25% de la masa salarial total. Como ambas son fracciones de un todo y suponiendo que no hay nadie que obtenga 0 ingresos, si $y=f(x)$, se verifica: $0\leq f(x)\leq 1$, con $0 \leq x \leq 1$ y, además, $f(0)=0$, $f(1)=1$. La gráfica de la función $f(x)$ que describe la distribución de ingresos se denomina *curva de Lorentz.*

Se denomina *coeficiente de desigualdad* al cociente entre el área comprendida ente la función $f(x)$ y la recta $y=x$ y el área comprendida entre esta última función, el eje de abscisas y las rectas $x=0,\ x=1$ (véase figura V.6.13.1). Matemáticamente es:

$$L = \frac{\text{Área comprendida entre la función } f(x) \text{ y la recta } y = x}{\text{Área comprendida entre la recta } y = x, \text{ el eje } X \text{ y las rectas } x = 0,\ x = 1}$$

El numerador es $\int_0^1 [x - f(x)]\,dx$ y el denominador es el área del triángulo rectángulo de base y altura 1, por tanto dicho área es 1/2. Sustituyendo, se obtiene: $L = 2\int_0^1 [x - f(x)]\,dx$ [26].

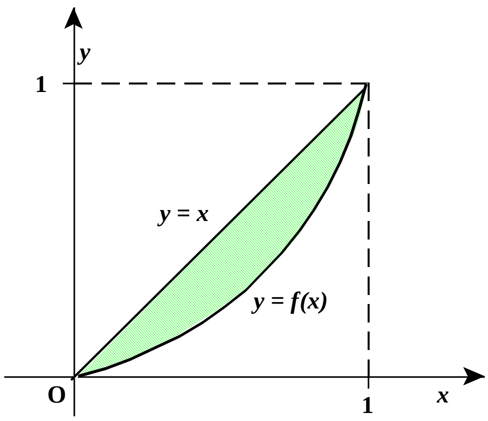


Figura V.6.13.1. Curva de Lorentz.

[25] Arya, J. C. y Lardner, R. W. (1992). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía* Tercera Edición. México. Prentice Hall. Págs. 710-720.

[26] El *coeficiente de desigualdad* estará entre 0 y 1. Si es 0 la distribución del ingreso es uniforme, si está próximo a 1 habrá gran desigualdad en las distribuciones salariales. Además el *coeficiente de desigualdad* es el doble del área comprendida entre la bisectriz del primer cuadrante y la curva de Lorentz.

Sean $p=f(x)$ la curva de demanda de cierto artículo y $p=g(x)$ la curva de oferta del mismo artículo, figura V.6.13.2. La variable x denota las unidades del artículo que pueden venderse o comprarse a un precio p por unidad, en general los consumidores compran pocas unidades si el precio por unidad aumenta y los productores fabrican muchas unidades si el precio por unidad es alto; por tanto $f(x)$ es decreciente y $g(x)$ es creciente y ambas curvas se encuentran en el llamado punto de equilibrio (x_0, p_0) lo cual significa que a un precio p_0 por unidad los compradores y los productores están dispuestos a comprar y producir el mismo número de unidades x_0.

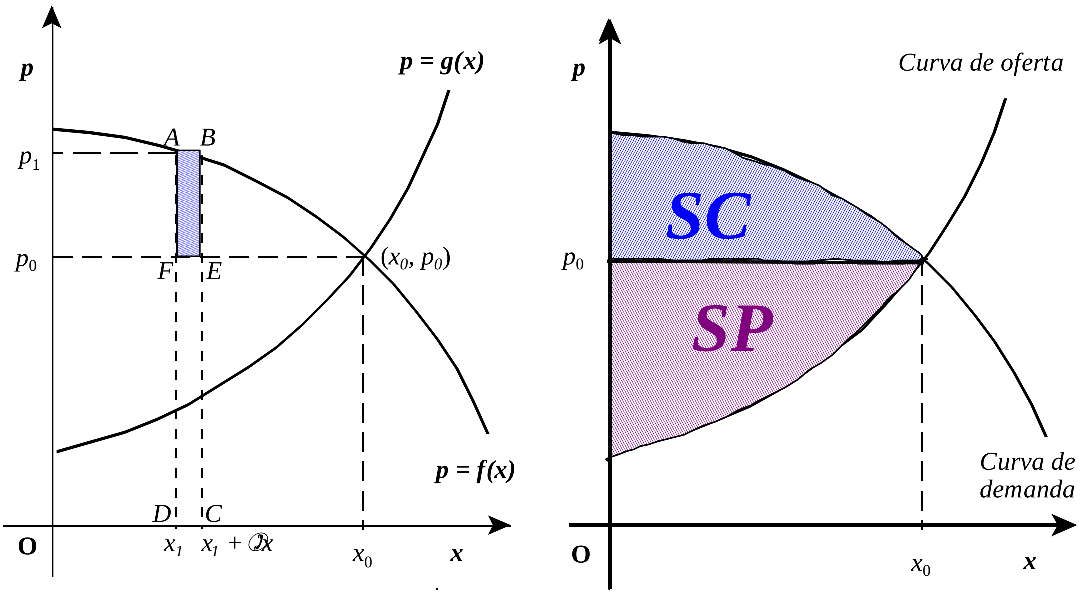


Figura V.6.13.2. Superávit del consumidor y del productor.

Analizando la curva de la demanda, hay consumidores que están dispuestos a comprar un artículo a un precio superior al precio de equilibrio p_0, suponiendo que el mercado es de libre competencia, esos consumidores se ahorran dinero pues compran la unidad a p_0. Consideremos la cantidad Δx de unidades entre x_1 y $x_1+\Delta x$. El área $p_1\Delta x$ del rectángulo *ABCD* de la figura puede interpretarse como la cantidad total de dinero que los consumidores pagarían por estas Δx unidades si el precio fuera $p_1=f(x_1)$ por unidad, como el precio del mercado es p_0 por esas unidades pagan $p_0\Delta x$ ahorrándose $p_1\Delta x - p_0\Delta x = [f(x_1) - p_0]\Delta x$ estas unidades, este área es igual a la del rectángulo *ABEF.* Si tomamos una partición del intervalo $[0,x_0]$ y procedemos a la suma de las diferentes áreas rectangulares, ésta es la suma de Riemann cuyo límite es la integral de Riemann de la función de demanda en el intervalo mencionado. A esta integral se le conoce como *superávit de los consumidores (SC)* cuya expresión matemática es:

$$SC = \int_0^{x_0} \left[f(x) - p_0 \right] dx = \int_0^{x_0} f(x)\, dx - p_0 x_0$$

De manera similar la competencia también existe para los productores que están dispuestos a vender el artículo a un precio menor que el del equilibrio, en tal circunstancia los productores también obtienen un beneficio denominado *superávit de los productores (SP)* y razonando de forma análoga se obtiene: $SP = \int_0^{x_0} \left[p_0 - g(x) \right] dx = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\, dx$

Ejemplo 13:

13.1. Supóngase que una *curva de Lorentz* viene dada por la función $f(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$. Interpretar el significado de la misma para *x=0,2; x=0,5* y calcular el *coeficiente de desigualdad.*

13.2. Las funciones de oferta y demanda de cierto producto vienen dadas por: *Oferta: p = g(x) = 52 + 2x* *Demanda: p = f(x) = 100 – x^2*

Calcúlese el superávit del consumidor y del productor sabiendo que se ha producido el equilibrio en el mercado.

Solución:

13.1. Como la curva de Lorentz es $f(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$, basta sustituir por los valores indicados. $f(0{,}2) = \frac{15}{16}(0{,}2)^2 + \frac{1}{16}0{,}2 = 0{,}05$; $f(0{,}5) = \frac{15}{16}(0{,}5)^2 + \frac{1}{16}0{,}5 = 0{,}2656$

Esto supone que el 20% de los que perciben los ingresos más bajos reciben el 5% de la masa salarial y el 50% de los que perciben los ingresos más bajos reciben el 26,56% de la masa salarial.

El coeficiente de desigualdad es:

$$L = 2\int_0^1 \left[x - f(x) \right] dx = 2\int_0^1 \left[x - \left(\frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x \right) \right] dx = 2\int_0^1 \left[\frac{15}{16}x - \frac{15}{16}x^2 \right] dx = \frac{15}{8}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{15}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

13.2. Para hallar el punto de equilibrio *(x_0,p_0)* igualamos las expresiones de oferta y demanda y posteriormente resolvemos: *g(x)=ƒ(x), 52 + 2x=100 − x^2*. Obteniéndose las soluciones *x=6* y *x=–8*, por el contexto del problema aceptamos la primera y rechazamos la segunda.

Entonces: $x_0 = 6$, $p_0 = 52 + 2\,x_0 = 64$; el punto de equilibrio es (6, 64).

$$SC = \int_0^{x_0} \left[f(x) - p_0\right] dx = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0 = \int_0^{6} \left(100 - x^2\right) dx - 6\times 64 =$$

$$= \left[100x - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 - 384 = 600 - 72 - 384 = 144.$$

$$SP = \int_0^{x_0} \left[p_0 - g(x)\right] dx = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx = 6\times 48 - \int_0^{6} \left(52 + 2x\right) dx =$$

$$= 384 - \left[52x + x^2\right]_0^6 = 384 - 312 - 36 = 36.$$

Así pues, el superávit de los consumidores, SC, es de 144 y el superávit de los productores, SP, es de 36 unidades monetarias.

V.6.14. PROBABILIDAD[27]

El concepto de probabilidad tiene gran importancia y existen infinidad de aplicaciones del mismo y, además, cada día el campo de su aplicación se agranda considerablemente. Nosotros no pretendemos hacer un estudio pormenorizado del mismo, para ello podemos recurrir a cualquier texto que lo desarrolle. Sin embargo, recordamos que dada una *variable aleatoria continua, X,* que toma valores en el intervalo [*a,b*], entonces la probabilidad de que los valores que tome *X* entre *c* y *d,* siendo $a \le c \le d \le b$, viene dada por la expresión $P(c \le X \le d)$ y en la mayoría de los casos existe una función *ƒ(x)* denominada *función de densidad* tal que la probabilidad queda definida del siguiente modo: $P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)\,dx$, cuya interpretación geométrica viene dada en la figura V.6.14.1 y siempre se verifica la desigualdad $0 \le f(x)$.

[27] Arya y Lardner (1992, págs 442-450).

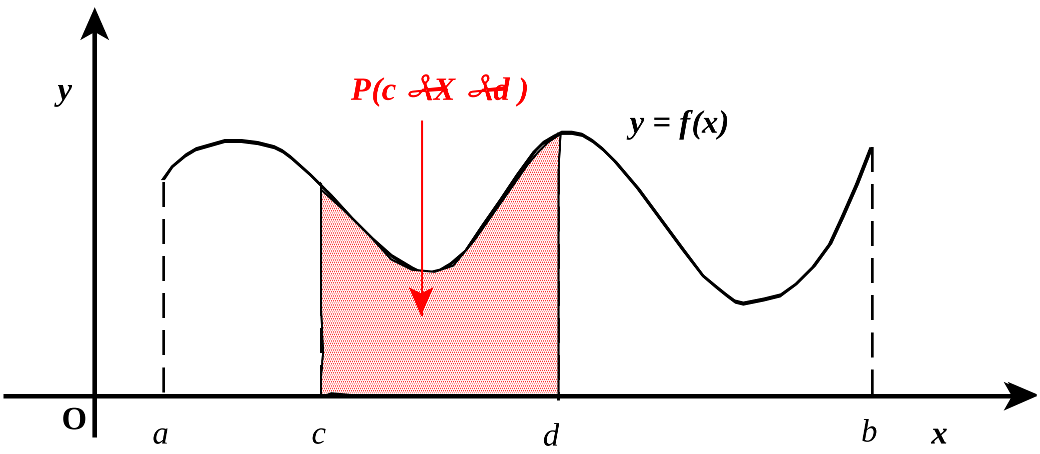


Figura V.6.14.1. $P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)\,dx$

Cuando el intervalo en el que toma valores la variable aleatoria no es finito, también puede existir la *función de densidad* de la variable aleatoria correspondiente y se amplia el concepto de probabilidad a la resolución de una integral impropia. Entre otros, dos son los casos que mencionaremos: *Distribuciones exponencial* y *normal de probabilidad.* (figura V.6.14.2)

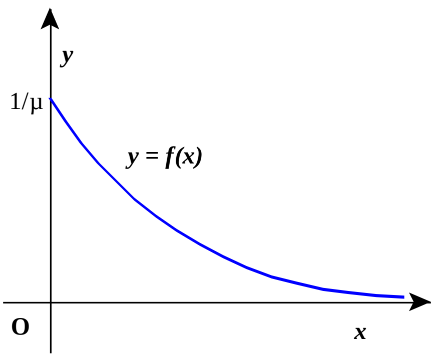
Distribución exponencial de probabilidad, figura V.6.14.2, es aquélla cuya función de densidad viene dada por: $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{\mu} e^{-x/\mu} & si \quad 0 \le x < \infty \end{cases}$; *siendo* $\mu > 0$

Distribución normal de probabilidad (figura V.6.14.3, designada *N(*μ *,*σ*)*, es aquélla cuya función de densidad viene dada por: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{(x-\mu)^2/2\sigma^2}$

y, en consecuencia, la probabilidad es: $P(c \le X \le d) = \int_c^d \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$.

Debemos aclarar que esta integral no es posible calcularla y para resolverlo existen tablas de la normal estándar *N(0,1)*, si tenemos *N(*μ*,*σ*)* se *tipifica* dicha normal y se busca la probabilidad en la *N(0,1).*

También existen *distribuciones de probabilidad bidimensionales* y *multidimensionales* como extensión de las *unidimensionales*, no nos detendremos en su formalización teórica; sin embargo, resolveremos el *Problema de la aguja de Buffon.*



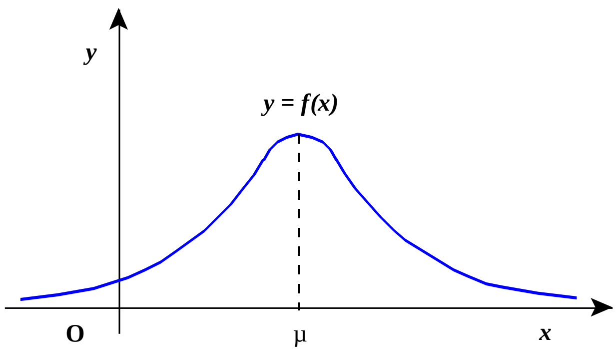


Figura V.6.14.2 (izquierda). Función de densidad exponencial.
Figura V.6.14.3 (derecha). Función de densidad normal.

Ejemplo 14:

14.1. El tiempo, en horas, de vida útil de un tipo de focos incandescentes obedece a una distribución exponencial cuya función de densidad es: $f(x)=\dfrac{1}{200}e^{-x/200}\ ;\ \ 0\le x<\infty$

a) Calcular la probabilidad de que un foco dure más de 100 horas y menos de 300.

b) Calcular la probabilidad de que un foco dure más de 200 horas.

14.2. Los consumidores llegan a cierta gasolinera según una distribución exponencial con un promedio de 20 clientes por hora. Si el encargado deja rápidamente su puesto para fumarse un cigarrillo en 2 minutos, calcúlese la probabilidad de que llegue un cliente mientras está ausente el encargado.

14.3. Sea una serie de rectas de longitud infinita situadas entre sí a una distancia constante igual a *d.* Se lanza al azar una aguja de longitud *L,* siendo *L* < *d.* Determínese la probabilidad de que la aguja corte a alguna recta[28].

[28] Este problema se conoce como *"La aguja de Buffon".* Fue propuesto y resuelto por el conde de Buffon en su *"Essai d'arithmétique morale"* en 1777. Treinta y cinco años después Laplace resolvió el problema de la aguja en una superficie cuadriculada (Boyer, 1986, págs. 573-574 y 618). Nosotros lo resolveremos siguiendo el procedimiento del texto de Martín F. J. y Ruiz-Maya, L. (1995). *Estadística I: Probabilidad.* Madrid. AC. Págs. 444-445.

Solución:

14.1. Al ser una distribución exponencial, siendo $f(x)=\frac{1}{200}e^{-x/200};\ 0\le x<\infty$ su función de densidad, si *X* es la variable aleatoria que denota la vida útil de un foco, entonces la probabilidad viene dada por:

$$P(a<X<b)=\int_a^b \frac{1}{200}e^{-x/200}dx\ ;\ 0<a\le b.$$

a) $P(100<X<300)=\int_{100}^{300}\frac{1}{200}e^{-x/200}dx=\left[-e^{-x/200}\right]_{100}^{300}=-e^{-3/2}+e^{-1/2}\approx 0{,}38$

Esto supone que aproximadamente el 38% de los focos duran entre 100 y 300 horas.

b) $P(200<X)=\int_{200}^{\infty}\frac{1}{200}e^{-x/200}dx=\left[-e^{-x/200}\right]_{200}^{\infty}=e^{-2/2}-\lim\limits_{b\to\infty}e^{-b/200}=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$

Podemos afirmar que alrededor del 37% de los focos duran más de 200 horas.

14.2. Como los consumidores llegan con un promedio de 20 a la hora, esto supone que cada tres minutos llega uno. Si consideramos la variable aleatoria *X* que determina el tiempo transcurrido hasta que llega un nuevo cliente, entonces, al ser $\mu = 3$, y al ser la distribución exponencial, la función de densidad es $f(x)=\frac{1}{3}e^{-x/3};\ 0\le x<\infty$ y la función distribución de probabilidad es: $P(a<X<b)=\int_a^b\frac{1}{3}e^{-x/3}dx$; $0<a\le b$. Como el tiempo que debe transcurrir hasta que llegue un nuevo cliente debe ser superior a dos minutos, entonces, el tiempo del que dispone el empleado es:

$$P(0\le X\le 2)=\int_0^2\frac{1}{3}e^{-x/3}dx=\left[-e^{-x/3}\right]_0^2=-e^{-2/3}+e^{0}\approx 0{,}49$$

El empleado tiene, aproximadamente, un 49% de posibilidades de fumarse un cigarrillo en dos minutos sin que aparezca ningún cliente en la gasolinera.

14.3. Si la longitud de la aguja es *L*, consideremos *2m=L*, por tanto *2m < d.* Denotemos por *x* la distancia, perpendicular, del punto medio de la aguja a la recta más próxima y por θ el ángulo formado por la aguja y la perpendicular (figura V.6.14.4).

Al lanzar la aguja, la distancia *x* puede tomar cualquier valor entre 0 y *d/2* y el ángulo θ, que es independiente de *x,* que determina la inclinación de la aguja con respecto a la perpendicular puede tomar cualquier valor[29] entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Ambas funciones tienen distribución uniforme y sus respectivas funciones de densidad son:

$$f(x)=\frac{1}{\frac{d}{2}-0}=\frac{2}{d} \quad si \quad 0\le x\le \frac{d}{2}; \qquad g(\theta)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\pi} \quad si \quad -\frac{\pi}{2}\le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Como las dos son independientes, la función de densidad de la distribución bidimensional es el producto de las anteriores, es decir:

$$h(x,\theta)=f(x)\times g(\theta)=\frac{2}{d}\times\frac{1}{\pi}=\frac{2}{d\,\pi}; \quad 0\le x\le\frac{d}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

La aguja cortará una recta si $x<m\cos\theta$, condición que puede representarse por el área de la figura V.6.14.4, entonces:

P(la aguja corte una recta)=

$$=P(x<m\cos\theta)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{m\cos\theta}\frac{2}{\pi\,d}\,dx\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{2}{\pi\,d}\Big[x\Big]_0^{m\cos\theta}d\theta=$$

$$=\frac{2}{\pi\,d}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}m\cos\theta\,d\theta=\frac{2m}{\pi\,d}\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{2m}{\pi\,d}\Big[1-(-1)\Big]=\frac{4m}{\pi\,d}=\frac{2L}{\pi\,d}$$

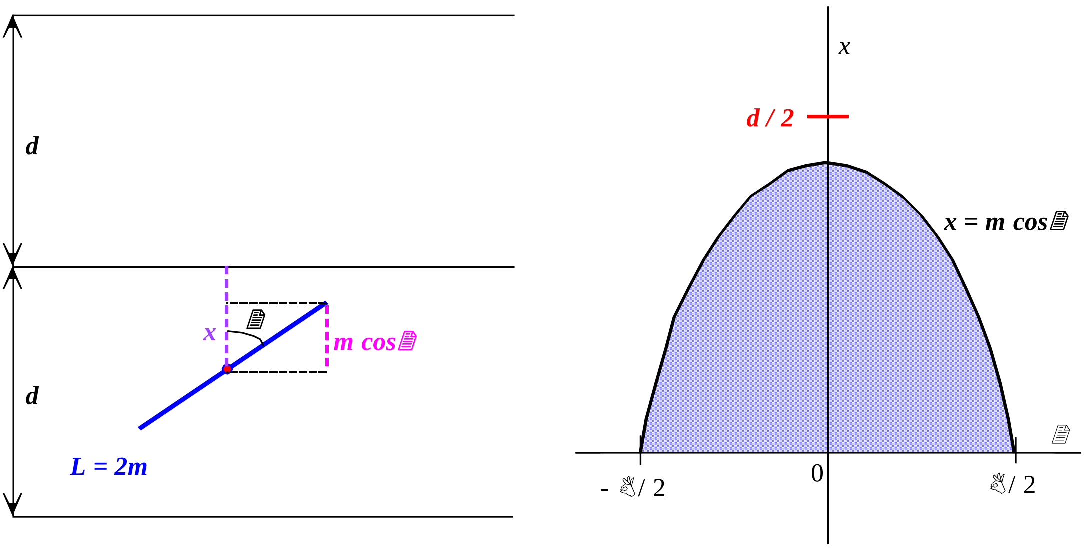


Figura V.6.14.4. Aguja de Buffon.

[29] Suponiendo que las rectas son paralelas al eje *OX*, entonces: $0\le\theta\le\pi/2$ si la posición de la aguja tiene pendiente positiva o nula y $-\pi/2\le\theta<0$ en caso contrario.

V.6.15. CIENCIAS SOCIALES[30]

Incluimos, por último, una serie de ejemplos sencillos, variados y de fácil comprensión en los cuales volvemos a aplicar el Cálculo Integral, y, aunque hay infinidad de problemas que encuentran solución en el concepto que nos ocupa, nosotros bajo la amplitud de Ciencias Sociales terminamos las Aplicaciones del Cálculo Integral.

Ejemplo 15:

15.1. La droga es un problema social y económico de primer orden y la sensibilidad a la droga se mide por el tipo de reacción de la persona a una droga particular. Si la sensibilidad de una persona a una droga específica *t* horas después de su consumo es $S'(t) = \frac{3}{t} + \frac{4}{t^2}$, donde *S* se mide en unidades convenientes. Calcular la intensidad de reacción total desde *t=1* hasta *t= 8.*

15.2. Una tubería en una plataforma de alta mar se ha averiado y derrama petróleo a razón de $f(t) = 35t + 80$ barriles por hora. Calcular los barriles derramados en primer día.

15.3. Los biólogos han calculado que una planta invasora, en un paraje protegido, se extiende cada año a razón de $E(t)= [3t^2 - t + 1/(t + 2)^2]$ que determina la superficie (en metros cuadrados por año) ocupada por dicha planta, siendo *t* el año desde la constatación de su aparición en el paraje. Calcular la superficie que ocupará entre los años 4 y 6 y la superficie total en los 25 primeros años en su nuevo hábitat.

15.4. De una mina de oro se extrae este metal a razón, en toneladas, $G'(t) = 4{,}8e^{0{,}016t}$ y las reservas estimadas son de 1500 toneladas. Calcular la extracción total de oro en los 10 primeros años de explotación y el número de años necesarios para extraer todo el metal.

15.5. Se depositan diez mil euros a un interés compuesto continuo del 8%. Calcular el valor promedio del dinero en los próximos cinco años.

[30] Dowling, E. T. (1992). *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. Madrid. McGraw-Hill. Págs. 230-250.

Solución:

15.1. Si $S'(t)=\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}$, entonces la intensidad de reacción total pedida desde *t=1* hasta *t=8* es:

$$S(t)=\int_1^8 S'(t)\,dt=\int_1^8\left[\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}\right]dt=\left[3\ln t-\frac{4}{t}\right]_1^8=\left[3\ln 8-\frac{4}{8}\right]-\left[3\ln 1-\frac{4}{1}\right]=3\ln 8+3{,}5\approx 9{,}7$$

15.2. El número de barriles de crudo derramado en un día, es decir, en 24 horas es:

$$N(t)=\int_0^{24} f(x)dx=\int_0^{24}(35t+80)\,dt=\left[17{,}5\,t^2+80\,t\right]_0^{24}=10\,080+1920=12\,000 \quad \textit{barriles}$$

15.3. La superficie invadida entre el cuarto y sexto año viene dada por:

$$S_{(4,6)}=\int_4^6 C(t)\,dt=\int_4^6\left[3t^2-t+\frac{1}{(t+2)^2}\right]dt=\left[t^3-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{t+2}\right]_4^6\approx 62\ m^2$$

La superficie invadida en el primer cuarto de siglo será:

$$S_{(0,25)}=\int_0^{25} C(t)\,dt=\int_0^{25}\left[3t^2-t+\frac{1}{(t+2)^2}\right]dt=\left[t^3-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{t+2}\right]_0^{25}\approx 15\,313\ m^2=1\,ha\ \ 53\,a\ \ 13\,ca$$

15.4. La extracción en los diez primeros años viene dada por:

$$G(t)=\int_0^{10} G'(t)\,dt=\int_0^{10} 4{,}8\,e^{0{,}016t}\,dt=300\left[e^{0{,}016t}\right]_0^{10}=300\left[e^{0{,}16}-1\right]\approx 52\ \ \textit{toneladas}$$

Para determinar el número de años de explotación de la mina, supongamos que son *"n"*, entonces calculamos *G(n)* e igualamos a 1500 que son las reservas y despejamos *"n"*, es decir: $G(n)=300\left(e^{0{,}016n}-1\right)=1500$; $e^{0{,}016\,n}-1=5$, n=(ln 6)/0,016 ≈ 112 años.

15.5. Si el interés es compuesto continuo del 8%, depositando 10000 €, el capital final al cabo de t años es *C(t)=10000e*$^{0{,}08\,t}$ y el promedio en 5 años es: $m=\frac{1}{5-0}\int_0^5 10\,000\,e^{0{,}08t}dt=\frac{125\,000}{5}\left[e^{0{,}08t}\right]_0^5=25\,000\left(e^{0{,}4}-1\right)\approx\ 12\,296\ \ \text{€}/\textit{año}.$

ANEXO D (CAPÍTULO VI): CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA **135**

VI.4. CATEGORÍAS **136**

VI.4.1. INTRODUCCIÓN **136**

VI.4.2. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA **137**

VI.4.2.1. DGA: Determinación gráfica del área 138
VI.4.2.2. DGSI: Determinación gráfica de las sumas inferiores 138
VI.4.2.3. DGSS: Determinación gráfica de las sumas superiores 139
VI.4.2.4. RSISR: Relación entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, la segunda un refinamiento de la primera..............................140
VI.4.2.5. ESIS: Expresión analítica de las sumas inferior y superior asociadas a una partición de 6 nodos 140
VI.4.2.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux 141
VI.4.2.7. DR: Representación de la función de Dirichlet 142
VI.4.2.8. DMIN4: Mínimos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos 142
VI.4.2.9. DMAX4: Máximos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos 142
VI.4.2.10. DSI4: Representa y calcula la suma inferior según DMIN4 142
VI.4.2.11. DSS4: Representa y calcula la suma superior según DMAX4........143
VI.4.2.12. DSI8: Dirichlet, suma inferior en 8 subintervalos...........................143
VI.4.2.13. DSS8: Dirichlet, suma superior en 8 subintervalos.........................143
VI.4.2.14. DIINF: Dirichlet integral inferior 143
VI.4.2.15. DISUP: Dirichlet integral superior 144
VI.4.2.16. DNI: Dirichlet no integrable...144
VI.4.2.17. AR: Representar el área determinada por la función afín 144
VI.4.2.18. AMIN4: Mínimos de la función afín para una partición de 4 subintervalos 145
VI.4.2.19. AMAX4: Máximos de la función afín para una partición de 4 subintervalos 145
VI.4.2.20. ASI4: Representa y calcula la suma inferior según AMIN4 145
VI.4.2.21. ASS4: Representa y calcula la suma superior según AMAX4........146
VI.4.2.22. ASI8: Afín, suma inferior en 8 subintervalos..................................146
VI.4.2.23. ASS8: Afín, suma superior en 8 subintervalos................................146
VI.4.2.24. ASIn: Afín, suma inferior en “n” subintervalos 147
VI.4.2.25. ASSn: Afín, suma superior en “n” subintervalos 148
VI.4.2.26. AIINF: Afín integral inferior..148
VI.4.2.27. AISUP: Afín integral superior 148
VI.4.2.28. AI: Afín integrable..148
VI.4.2.29. ACAFE: Cálculo del área mediante fórmulas elementales 149
VI.4.2.30. ACID: Cálculo del área por medio de la integral definida 149
VI.4.2.31. ATCFI: Cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables..149
VI.4.2.32. DGSR: Determinación gráfica de las sumas de Riemann 150

VI.4.2.33. IGTVMD: Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial 151
VI.4.2.34. TFCIS: Teorema fundamental cálculo integral (sumas) 152
VI.4.2.35. TFCII: Teorema fundamental cálculo integral (incrementos) 152
VI.4.2.36. TFCSI: Teorema fundamental cálculo integral (sumas e incrementos) 153
VI.4.2.37. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida 153
VI.4.2.38. IGAI: Interpretación gráfica de la aditividad de la integral 154
VI.4.2.39. IGTVMI: Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral 155
VI.4.2.40. CP: Cálculo de primitivas 156

ANEXO D (CAPÍTULO VI): CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

El presente anexo, tal y como quedó establecido en el capítulo VI, contiene todas las *categorías de comprensión matemática* utilizadas en nuestra investigación experimental.

Con el objetivo de facilitar la comprensión de las categorías utilizadas en esta memoria hemos considerado oportuno incluir en este anexo el apartado V..4.1 de la tesis doctoral por el cual se clasifican todas las categorías. Además, para facilitar la ubicación del anexo en la memoria se ha seguido el índice que le corresponde dentro del capítulo en el que está incardinado.

El apartado V.4.2 del anexo D goza de las mismas características que su homónimo del capítulo VI, ampliando cada *categoría de comprensión matemática* con: “El texto, enmarcado, del cuadernillo teórico-práctico del área y la integral que valida la categoría, incluyendo la pregunta o preguntas realizadas a los estudiantes”.

VI.4. CATEGORÍAS

VI.4.1. INTRODUCCIÓN

La investigación-acción exige el establecimiento de categorías para facilitar la investigación, acortar la redacción de la memoria y hacer más fácil la lectura y el estudio de la tesis, así pues, siguiendo este mandato tan importante, nosotros hemos establecido varios tipos de categorías, a saber:

- *Categorías de contenido matemático relativas al concepto de integral definida*. Alfabéticas y, además, son acrónimos[1] de los conceptos básicos que las sustentan, han sido definidas en el capítulo IV, epígrafe IV.2.1, para poder realizar el análisis curricular del concepto de los once libros de texto de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, por tanto, no es necesario volverlas a incluir.
- *Categorías de comprensión matemática.* La mayoría son alfabéticas y muy pocas alfanuméricas, también son acrónimos y se han establecido para el análisis de los cuadernillos teórico-prácticos realizados por los alumnos de los seis ciclos de nuestra investigación. En el siguiente epígrafe detallamos cada una de ellas.
- *Categorías de comprensión práctica con lápiz y papel.* Alfanuméricas, el número de cada categoría corresponde con el número de ítem del ejercicio práctico de la integral con lápiz y papel. Estas categorías se utilizan solamente en los dos ciclos de confirmación y son independientes las del ciclo II de las del ciclo III, no las explicitamos en este momento pues quedan perfectamente determinadas en el capítulo XI, apartado *XI.2. Prácticas con lápiz y papel.*
- *Categorías de comprensión práctica con DERIVE.* Alfanuméricas, el número de cada categoría corresponde con el número de ítem del cuadernillo del ejercicio práctico en el aula de informática. Tres grupos de categorías conforman las de este tipos, éstos son:
    - Ciclos de confirmación, comunes a los ciclos II y III.
    - Ciclos de consolidación, comunes a los ciclos IV y V.
    - Ciclo de cierre, pertenecientes al ciclo VI.

[1] Entiéndase en su sentido más amplio, no estricto.

Las categorías de comprensión práctica con *DERIVE* tampoco son determinadas en este momento, serán detalladas en el capítulo XI, apartado *XI.3. Prácticas con DERIVE.*

Hemos excluido las *categorías de interacción didáctica profesor-alumno y alumno-alumno* porque consideramos que no aportan ninguna ventaja a la redacción de la presente memoria y menos a su lectura.

VI.4.2. CATEGORÍAS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

Las *categorías de comprensión matemática* se expresan para evaluar la relación entre los estudiantes y el saber enseñado, es decir, el nivel de comprensión de los alumnos sobre la materia enseñada. Las categorías se diseñan cuando se pone en práctica por primera vez la exposición de la unidad didáctica del área y la integral definida y durante los ciclos posteriores que, como establece el marco metodológico cualitativo de investigación-acción, deberán completarse hasta llegar a la saturación. Para determinar dichas categorías hemos considerado la *descomposición genética de la integral* (*teoría APOE*) y los *actos de comprensión de la integral, según el modelo de Sierpinska,* establecidos en el capítulo III.

A continuación escribimos las cuarenta categorías de *comprensión matemática* del ciclo de cierre que contiene todas las de los ciclos anteriores[2] y cada una de ellas viene determinada por:

- Código, en mayúscula y negrita, por el cual es reconocida.
- Frase, en negrita, que le caracteriza.
- Breve texto explicativo de la actividad propuesta.
- Texto, enmarcado, del cuadernillo teórico-práctico del área y la integral que valida la categoría, incluyendo la pregunta o preguntas realizadas a los estudiantes.

En las siguientes páginas detallamos todas las *categorías de comprensión matemática* del concepto integral que intervienen en nuestra investigación.

[2] Consideramos que las categorías de comprensión matemática del ciclo de cierre son representativas de las del resto de los ciclos y, si en alguno de ellos hay alguna modificación, se hará saber en la redacción de la parte experimental del ciclo o ciclos correspondientes.

VI.4.2.1. DGA: Determinación gráfica del área

Actividad 1: El alumno tiene que señalar el área comprendida entre una función positiva, $y=f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$.

INTEGRAL DEFINIDA

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

En la geometría elemental se deducen fórmulas para el área de algunas figuras planas, en general, basándose en las áreas del triángulo y del círculo. Hasta la aparición del Cálculo Infinitesimal fue imposible hallar de manera sistemática el área de figuras planas delimitadas por curvas definidas por funciones. Nosotros no pretendemos hacer un estudio exhaustivo de la integral definida, más bien, dar unas pinceladas donde se exponga lo esencial.

Estudiemos, por ejemplo, cómo se puede calcular el área encerrada entre el eje de abscisas, la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x=a; x=b$.

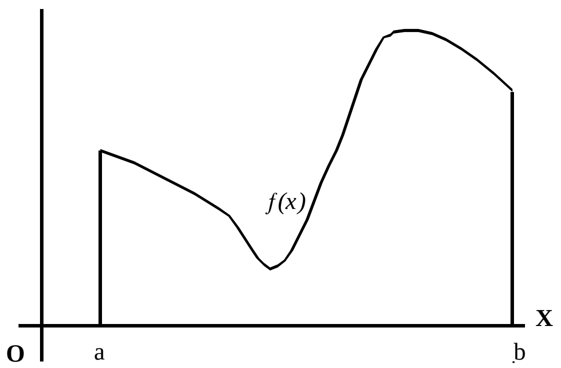


Figura 1.2.1.1

RAYA O COLOREA, EN LA FIGURA, EL ÁREA QUE SE PRETENDE CALCULAR

VI.4.2.2. DGSI: Determinación gráfica de las sumas inferiores

Actividad 2: Los alumnos deben señalar gráficamente la suma inferior de la función anterior según una partición concreta del intervalo [a,b]. Se pide, además, que determinen la suma inferior de la misma función para un refinamiento de la partición anterior.

Veamos lo que es una suma inferior y una suma superior, para el área de la Figura 1.2.1.1 Consideramos una partición del intervalo $[a, b]$, la dada por, $P=\{a=x_0, x_1, x_2=b\}$; sean m_i = *extremo inferior* $\{ f(t)$ tal que $t \in [x_{i-1},x_i] \}$, $i = 1, 2$ y sean M_i = *extremo superior* $\{ f(t)$ tal que $t \in [x_{i-1},x_i] \}$, $i = 1, 2$; como muestran la Figura 1.2.1.2 (Suma inferior) y la Figura 1.2.1.3 (Suma superior).

Consideremos otra partición más fina, contiene los puntos de la partición anterior y alguno más, $P' = \{x_0, x'_1, x_1, x_2\}$ y hagamos las respectivas sumas inferiores y superiores, ver Figuras 1.2.1.4 y 1.2.1.5

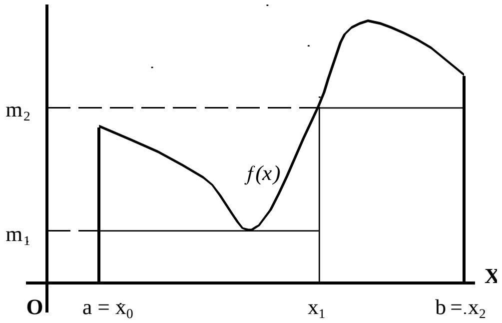


Figura 1.2.1.2

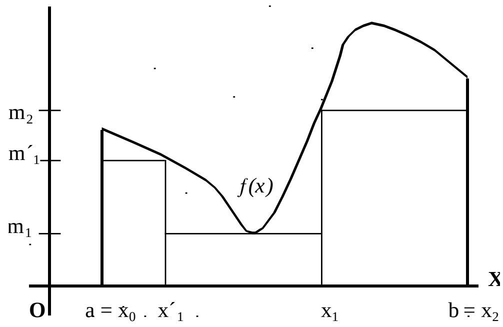


Figura 1.2.1.4

Suma inferior$(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1)$ *(Izquierda)*

Suma inferior$(f,P') = m'_1(x'_1 - x_0) + m_1(x_1 - x'_1) + m_2(x_2 - x_1)$ *(Derecha)*

RAYA LA SUMA INFERIOR

RAYA LA SUMA INFERIOR PARA LA NUEVA PARTICIÓN

VI.4.2.3. DGSS: Determinación gráfica de las sumas superiores

Actividad 3: Los alumnos, siguiendo el criterio anterior, deben señalar gráficamente las sumas superiores de una función positiva asociada a las particiones *P* y *P´* del intervalo [a,b], siendo *P´* un refinamiento de *P.*

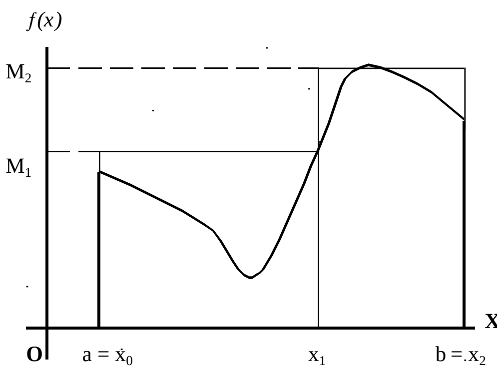


Figura 1.2.1.3

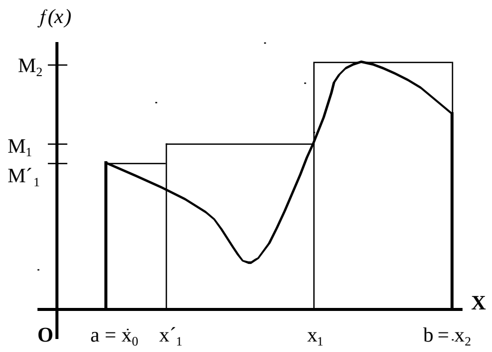


Figura 1.2.1.5

Suma superior$(f,P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1)$ *(Izquierda)*

Suma superior$(f,P') = M'_1(x'_1 - x_0) + M_1(x_1 - x'_1) + M_2(x_2 - x_1)$ *(Derecha)*

RAYA LA SUMA SUPERIOR

RAYA LA SUMA SUPERIOR PARA LA NUEVA PARTICIÓN

VI.4.2.4. RSISR: Relación entre las sumas inferiores y superiores de dos particiones, la segunda un refinamiento de la primera

Actividad 4: El estudiante debe encontrar la relación existente entre el área que se pretende calcular, las sumas inferiores y superiores asociadas a una partición y a un refinamiento de la primitiva partición.

FÍJATE EN LOS GRÁFICOS ANTERIORES Y COMPLETA LO QUE FALTA

Es obvio que se cumple:

Suma inferior(ƒ,P) $\leq$ ________________________________ $\leq$ *Área*

Área $\leq$ *Suma superior(ƒ,P')* $\leq$ ________________________________

Este proceso se podría repetir y siempre ocurre que las áreas superiores de las particiones más finas disminuyen y las áreas inferiores, de las particiones más finas, aumentan. Así pues, concluimos, que para cualquier partición de *[a,b]* se verifica:

Suma inferior $\leq$ *Área* $\leq$ *Suma superior*

VI.4.2.5. ESIS: Expresión analítica de las sumas inferior y superior asociadas a una partición de 6 nodos

Actividad 5: El estudiante tiene que saber generalizar las expresiones analíticas de las sumas inferior y superior de Darboux de una función asociadas a una partición de 6 nodos.

INTEGRAL DE DARBOUX

Sea *[a,b]* un intervalo cerrado y acotado, llamamos *partición* de *[a,b]* a todo conjunto de la forma: $P = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$. Sean *P y Q* dos particiones de *[a,b],* diremos que *P* es *más fina* que *Q* si $Q \subset P$ (*P* contiene todos los puntos de *Q* y alguno más) .

Sea *ƒ* una función acotada, definida en *[a,b],* sean:

m = *extremo inferior* $\{ f(t) \,/\, t \in [a,b] \}$, M = *extremo superior* $\{ f(t) \,/\, t \in [a,b] \}$,

m_i = *extremo inferior* $\{ f(t) \,/\, t \in [x_{i-1},x_i] \}$ y M_i = *extremo superior* $\{ f(t) \,/\, t \in [x_{i-1},x_i] \}$,

$i = 1, 2, 3, 4, 5$. Llamamos *suma inferior y superior de Darboux* [*s(ƒ,P)* y *S(ƒ,P)* respectivamente], asociadas a *ƒ* y a *P*, a:

COMPLETA LO QUE FALTA

s(ƒ,P) $= m_1(x_1 - x_0) +$ _________________________ + ___________________________ +
+ ___________________________ $+ m_5(x_5 - x_4)$

S(ƒ,P) = _____________________________ + ___________________________________ +
$+ M_3(x_3 - x_2)$ + __________________________ + ___________________________

VI.4.2.6. EID: Explicación de las integrales inferior y superior de Darboux

Actividad 6: Los alumnos deben expresar literalmente lo que entienden por integral inferior y superior de Darboux, previamente, han sido definidas matemáticamente ambas integrales.

Es obvio que se cumple: $m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$, con lo que los conjuntos formados por las sumas inferiores y superiores asociados a una función están acotados. Además, si *P* es una partición más fina que *Q*, también se verifica: $s(f,Q) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,Q)$. Incluso para cualquier par de particiones *P y Q*, también se cumple: $s(f,P) \leq S(f,Q)$ (para demostrar este aserto basta considerar *P* $\cup$ *Q* como refinamiento común).

Sea *ƒ(x)* una función acotada en el intervalo *[a,b],* se define *integral inferior de Darboux* de *ƒ* en *[a,b]* al valor:

$$Inf \int_a^b f(x)dx = Extremo\ Superior\ \{s(f,P) / P\ es\ partición\ de\ [a,b]\}$$

Sea *ƒ(x)* una función acotada en el intervalo *[a,b],* se define *integral superior de Darboux* de *ƒ* en *[a,b]* al valor:

$$Sup \int_a^b f(x)dx = Extremo\ Inferior\ \{S(f,P) / P\ es\ partición\ de\ [a,b]\}$$

EXPRESA LO QUE ENTIENDES POR:

INTEGRAL INFERIOR DE DARBOUX:____

____

____

____

____

INTEGRAL SUPERIOR DE DARBOUX:____

____

____

____

____

Definición: Sea *ƒ* una función acotada en *[a,b]*, diremos que es **integrable Darboux** en *[a,b]* si las dos integrales anteriores coinciden, en cuyo caso se denota por: $\int_a^b f(x)\,dx$, y se lee *"integral entre a y b de ƒ de x diferencial de x".*

VI.4.2.7. DR: Representación de la función de Dirichlet

Actividad 7: Consiste, recordando la función de Dirichlet, en representar la función anterior que toma un determinado valor en los puntos racionales del intervalo [0,4] y otro valor en los puntos irracionales del mismo intervalo.

Analicemos si la función $f(x)=\begin{cases}1 & si \quad x \quad es\,racional\,en\,[0,4]\\ 2 & si \quad x \quad es\,irracional\,en\,[0,4]\end{cases}$ es integrable Darboux en el intervalo [0,4].

REPRESENTA LA FUNCIÓN $f(x)$

VI.4.2.8. DMIN4: Mínimos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos

Actividad 8: Los alumnos deben determinar los mínimos de la función de Dirichlet en 4 subintervalos, de igual amplitud, del intervalo [0,4].

Considera la partición del intervalo *[0,4]* dada por $P_4 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$.

CALCULA: $m_1 =$ _____; $m_2 =$ _____ ; $m_3 =$ _____ ; $m_4 =$ _____

VI.4.2.9. DMAX4: Máximos de la función de Dirichlet para una partición de 4 subintervalos

Actividad 9: Los alumnos deben determinar los máximos de la función de Dirichlet en los 4 subintervalos anteriores.

CALCULA: $M_1 =$ _____; $M_2 =$ _____ ; $M_3 =$ _____ ; $M_4 =$ _____

VI.4.2.10. DSI4: Representa y calcula la suma inferior según DMIN4

Actividad 10: Los estudiantes deben determinar la suma inferior de la función de Dirichlet para los mínimos obtenidos en la categoría DMIN4.

***REPRESENTA y CALCULA*: $s(f,P_4)$**

VI.4.2.11. DSS4: Representa y calcula la suma superior según DMAX4

Actividad 11: Los estudiantes deben determinar la suma superior de la función de Dirichlet para los máximos obtenidos en la categoría DMAX4.

***REPRESENTA y CALCULA*: S(f,P_4)**

VI.4.2.12. DSI8: Dirichlet, suma inferior en 8 subintervalos

Actividad 12: Los estudiantes deben determinar la suma inferior de la función de Dirichlet asociada a la partición $P_8 = \{4i/8\}_{i=0}^{8} = \{i/2\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,4].

> Imagina que tomamos una partición más fina que *P_4*.
> Sea la nueva partición: *P_8 = {0, 0'5, 1, 1'5, 2, 2'5, 3, 3'5, 4}* del intervalo *[0,4].*
>
> ***DESARROLLA y CALCULA:***
>
> ***s(f,P_8)*** = ______________ + ____________ + _____________ + _________________ +
> +____________ +___________ + ______________ + __________ = _______________

VI.4.2.13. DSS8: Dirichlet, suma superior en 8 subintervalos

Actividad 13: Los alumnos deben determinar la suma superior de la función de Dirichlet asociada a la partición $P_8 = \{4i/8\}_{i=0}^{8} = \{i/2\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,4].

> ***DESARROLLA y CALCULA:***
>
> ***S(f,P_8)*** = ______________ + _____________ + _____________ + _______________ +
> +____________ +___________ +_____________ + __________ = _______________

VI.4.2.14. DIINF: Dirichlet integral inferior

Actividad 14: Los alumnos deben calcular el extremo superior de las sumas inferiores, es decir, la integral inferior de la función de Dirichlet.

> ***RAZONA CUÁNTO PUEDE VALER EL EXTREMO SUPERIOR DE LAS SUMAS INFERIORES***
>
> ____
>
> ____

VI.4.2.15. DISUP: Dirichlet integral superior

Actividad 15: Los alumnos deben calcular el extremo inferior de las sumas superiores, es decir, la integral superior de la función de Dirichlet.

RAZONA CUÁNTO PUEDE VALER EL EXTREMO INFERIOR DE LAS SUMAS SUPERIORES

VI.4.2.16. DNI: Dirichlet no integrable

Actividad 16: Consiste en razonar si la función de Dirichlet, que ha sido estudiada anteriormente, es integrable o no en el sentido Darboux.

¿ ES $f(x)$ INTEGRABLE EN EL SENTIDO DE DARBOUX EN EL INTERVALO [0,4]? JUSTIFICA LA RESPUESTA

VI.4.2.17. AR: Representar el área determinada por la función afín

Actividad 17: Consiste en representar la superficie determinada por la función afín $f(x)=x$, el eje de abscisas y las rectas verticales x=0 y x=1.

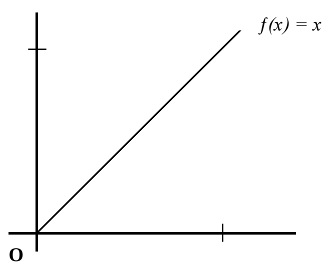
Teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux

Sea $f:[a,b] \longrightarrow P$. Una condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea integrable Darboux en *[a,b]* es que para cada $\varepsilon > 0$, exista una partición *P* de *[a,b]* tal que *Suma superior(f,P) – Suma inferior(f,P)* < ε (exista una partición tal que la diferencia entre la suma superior e inferior se aproxima a cero más que cualquier número prefijado).

Corolarios: Toda función continua en *[a,b]* es integrable Darboux. Toda función monótona (creciente o decreciente) en *[a,b]* es integrable Darboux.

Ejemplo: Calcular la integral, si existe,
de la función $f(x)=x$, en el intervalo *[0,1].*
La Figura 1.2.1.6, de la derecha, es su representación.

RAYA EL ÁREA QUE SE PRETENDE CALCULAR



VI.4.2.18. AMIN4: Mínimos de la función afín para una partición de 4 subintervalos

Actividad 18: Los alumnos deben determinar los mínimos de la función afín en 4 subintervalos del intervalo [0,1].

Imagina que $P_4 = \{ 0 = 0/4 < 1/4 < 2/4 < 3/4 < 4/4 = 1\}$ es una partición del intervalo [0,1].

CALCULA:

m_1 = ____________; m_2 = ___________ ;m_3 = ___________ ; m_4 = ____________

VI.4.2.19. AMAX4: Máximos de la función afín para una partición de 4 subintervalos

Actividad 19: Los alumnos deben determinar los máximos de la función afín en 4 subintervalos del intervalo [0,1].

CALCULA:

M_1 = ____________; M_2 = ___________ ;M_3 = ___________ ; M_4 = ____________

VI.4.2.20. ASI4: Representa y calcula la suma inferior según AMIN4

Actividad 20: Los estudiantes deben determinar, en primer lugar, la superficie asociada a $s(f,P_4)$ y, después, calcular $s(f,P_4)$.

RAYA $s(f,P_4)$

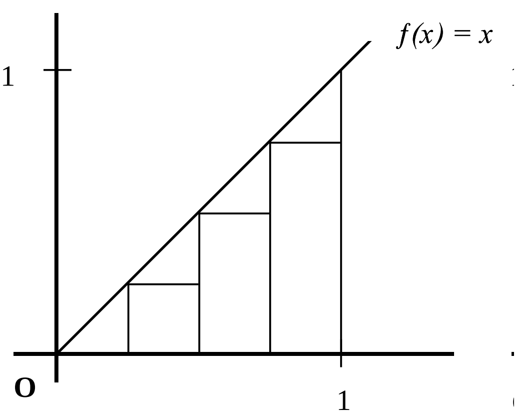


Figura 1.2.1.7 *Suma inferior:* $s(f,P_4)$

CALCULA:

$s(f,P_4)$=___________+___________+

+____________+ _____________=

=_________________________ =

=____________

VI.4.2.21. ASS4: Representa y calcula la suma superior según AMAX4

Actividad 21: Los estudiantes deben determinar, en primer lugar, la superficie asociada a $S(f,P_4)$ y, después, calcular $S(f,P_4)$.

RAYA S(ƒ,P₄)

CALCULA:

S(ƒ,P₄)=____________+____________+

+____________+ _____________=

=__________________________ =

=____________

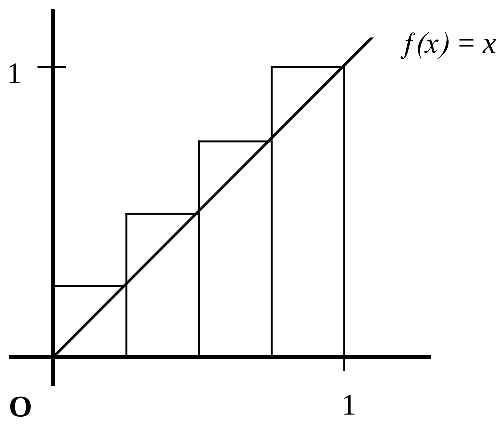


Figura 1.2.1.8 *Suma superior:* S(*ƒ,P₄*)

VI.4.2.22. ASI8: Afín, suma inferior en 8 subintervalos

Actividad 22: Los alumnos deben determinar la suma inferior de la función afín asociada a la partición $P_8 = \{i/8\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,1].

DESARROLLA y CALCULA:

s(ƒ,P₈) = 0·1/8 + 1/8·1/8 + ______________ + _______________ + _____________ +

+___________ + ___________ + 7/8·1/8 = _________________________ =________

VI.4.2.23. ASS8: Afín, suma superior en 8 subintervalos

Actividad 23: Los alumnos deben determinar las sumas superiores de la función afín asociada a la partición $P_8 = \{i/8\}_{i=0}^{8}$ del intervalo [0,1].

DESARROLLA y CALCULA:

S(ƒ,P₈) = 1/8·1/8 + ______________ + 3/8·1/8 + ___________ + _____________ +

+___________ + ___________ + ____________ = ___________________=________

VI.4.2.24. ASIn: Afín, suma inferior en "n" subintervalos

Actividad 24: Los alumnos deben deducir el valor de la suma inferior $s(f,P_n)$ de la función afín asociada a la partición cuya distancia internodal es 1/n.

Fijamos un número $\varepsilon>0$, sabemos que existe un número natural *n* tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ y sea la partición $P_n = \{ 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1\}$, con $x_i = i/n$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Hallemos la diferencia entre la suma superior, $S(f,P_n)$, y la suma inferior, $s(f,P_n)$. Obsérvese que M_i = *extremo superior de f(x) = supremo de f(x) = sup f(x)* $= x_i$ y m_i = *extremo inferior de f(x) = ínfimo de f(x) = inf f(x)* $= x_{i-1}$, siendo $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) = x_1(x_1 - x_0) + x_2(x_2 - x_1) + \ldots + x_i(x_i - x_{i-1}) + \ldots + x_n(x_n - x_{n-1}) -$$
$$- x_0(x_1 - x_0) - x_1(x_2 - x_1) - \ldots - x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - \ldots - x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \ldots + (x_i - x_{i-1})^2 + \ldots + (x_n - x_{n-1})^2 = n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Así pues, obtenemos: $S(f,P_n) - s(f,P_n) = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Lo cual nos demuestra que $f(x)$ es integrable, pues hemos encontrado la partición a la cual se refiere el teorema de caracterización.

Calculemos el valor de la integral, para fijar ideas sea n = 4 y, por tanto, tomemos la partición $P_4 = \{ 0 = 0/4 < 1/4 < 2/4 < 3/4 < 4/4 = 1\}$.

$$s(f,P_4) = \frac{0}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{0}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{4}-\frac{3}{4}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{i-1}{4}\left(\frac{i}{4}-\frac{i-1}{4}\right) = \sum_{i=1}^{4} \frac{i-1}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} = 0{,}5 - 0{,}125 = 0{,}375$$
$$S(f,P_4) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{0}{4}\right) + \frac{2}{4}\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right) + \frac{4}{4}\left(\frac{4}{4}-\frac{3}{4}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{i}{4}\left(\frac{i}{4}-\frac{i-1}{4}\right) = \sum_{i=1}^{4} \frac{i}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} = 0{,}5 + 0{,}125 = 0{,}625$$

Para n = 8, no es difícil demostrar que: $s(f,P_8) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 8} = 0{,}5 - 0{,}0625 = 0{,}4375$ y $S(f,P_8) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 8} = 0{,}5 + 0{,}0625 = 0{,}5625$

Nótese que en las fórmulas anteriores se ha aplicado la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

¿CUÁNTO CREES QUE PUEDE VALER LA SIGUIENTE SUMA?

$s(f,P_n)$ =____________________________________

VI.4.2.25. ASSn: Afín, suma superior en “n” subintervalos

Actividad 25: Los alumnos deben determinar el valor de la suma superior $S(f,P_n)$ de la función afín asociada a la partición $P_n = \{i/n\}_{i=0}^{n}$.

> ***¿CUÁNTO CREES QUE PUEDE VALER LA SIGUIENTE SUMA?***
>
> **$S(f,P_n)$ =**______________________________

VI.4.2.26. AIINF: Afín integral inferior

Actividad 26: Los alumnos deben calcular el extremo superior de las sumas inferiores, es decir, la integral inferior de la función afín en el intervalo [0,1].

> ***RAZONA CUÁNTO PUEDE VALER EL EXTREMO SUPERIOR DE LAS SUMAS INFERIORES***

VI.4.2.27. AISUP: Afín integral superior

Actividad 27: Los alumnos deben calcular el extremo inferior de las sumas superiores, es decir, la integral superior de Darboux de la función afín en el intervalo [0,1].

> ***RAZONA CUÁNTO PUEDE VALER EL EXTREMO INFERIOR DE LAS SUMAS SUPERIORES***

VI.4.2.28. AI: Afín integrable

Actividad 28: Consiste en razonar si la función afín $f(x)=x$, estudiada anteriormente, es integrable o no en el sentido Darboux.

> ***¿ ES $f(x) = x$ INTEGRABLE EN EL SENTIDO DARBOUX EN EL INTERVALO [0,1]? JUSTIFICA LA RESPUESTA.***

VI.4.2.29. ACAFE: Cálculo del área mediante fórmulas elementales

Actividad 29: Los alumnos deben calcular el área de un triángulo mediante la clásica fórmula de base por altura dividido por dos.

CALCULA, SI EXISTE, LA ANTERIOR INTEGRAL

FÍJATE EN LAS FIGURAS 1.2.1.6, 1.2.1.7 y 1.2.1.8

____

____

VI.4.2.30. ACID: Cálculo del área por medio de la integral definida

Actividad 30: Los alumnos deben calcular el área comprendida entre la función *ƒ(x)=x*, el eje OX y las rectas x=0 y x=1 aplicando la teoría del cálculo integral, es decir, el teorema fundamental del cálculo integral[3].

CALCULA, SI EXISTE:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

VI.4.2.31. ATCFI: Cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables

Actividad 31: Los alumnos deben calcular el área comprendida entre la función *ƒ(x)=x*, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=1 utilizando el teorema de caracterización de las funciones integrables, es decir, que para que una función sea integrable basta con fijar un valor tan pequeño como deseemos y que encontremos una partición asociada al intervalo tal que la diferencia entre la suma superior e inferior sea menor que el número predeterminado anteriormente.

JUSTIFICA EL VALOR CALCULADO ANTERIORMENTE

____

____

[3] A esta categoría debiéramos reconocerla como ATFCI (cálculo del área mediante el teorema fundamental del cálculo integral), sin embargo, no hemos creído conveniente utilizar esas siglas para no confundirla con la siguiente categoría ATCFI (cálculo del área mediante el teorema de caracterización de las funciones integrables).

VI.4.2.32. DGSR: Determinación gráfica de las sumas de Riemann

Actividad 32: Consiste en señalar el área de los rectángulos que se obtienen al determinar como base de los mismos los subintervalos de una partición y alturas el valor que toma la función en cualquier punto del subintervalo correspondiente.

INTEGRAL DE RIEMANN

Recordando la Figura 1.2.1.1. Consideramos una partición del intervalo $[a,b]$, la dada por, $P = \{x_0, x_1, x_2\}$; sean $m_i = \inf\{ f(t)$ tal que $t \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = 1, 2$ y sean $M_i = \sup\{ f(t)$ tal que $t \in [x_{i-1}, x_i] \}$, $i = 1, 2$; como mostraban la Figura 1.2.1.2 (Suma inferior) y la Figura 1.2.1.3 (Suma superior).

Tomemos el conjunto $\{ f(t_i)$ *con* $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \}$, $i = 1, 2$ (t_i es un punto cualquiera del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$), al ser $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$, para todo i, se obtiene:

Suma inferior$(f,P) \leq \boldsymbol{f(t_1)\,(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1)} \leq$ *Suma superior*(f,P).

RAYA EL ÁREA DE LA SIGUIENTE FIGURA QUE CORRESPONDE CON LA PARTE AMPLIADA Y ESCRITA EN NEGRITA (SUMA DE RIEMANN)

Esta circunstancia queda ilustrada en la Figura 1.2.1.9

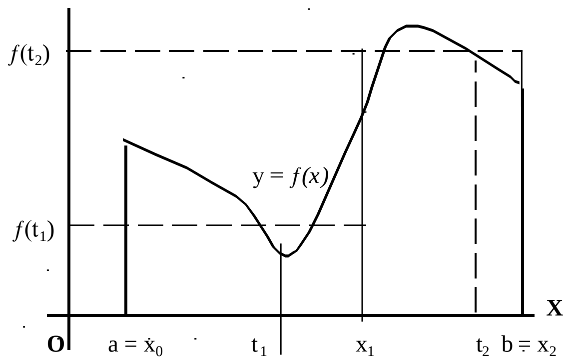


Figura 1.2.1.9

Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado, $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$,

Sea $T = \{ t_1, t_2, \dots, t_n\}$ un conjunto de puntos intermedios asociado *a* P ($t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$). Se denomina *suma de Riemann* asociada a f, a P y a T al número:

$$R(f,P,T) = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \dots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$$

Concluimos que para cualquier conjunto de puntos intermedios, T, asociados a la partición P se verifica: $s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P)$. Así pues, por el teorema del encaje, podemos calcular la integral de Darboux por medio de las sumas de Riemann (por eso muchos autores confunden la integral de Darboux con la de Riemann, aunque ambas integrales coinciden).

VI.4.2.33. IGTVMD: Interpretación gráfica del teorema del valor medio del cálculo diferencial

Actividad 33: Los alumnos desconocen el teorema de Rolle y no podemos demostrar analíticamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial[4], como alternativa, realizamos una demostración geométrica que los alumnos deben completar. Los estudiantes deben descubrir que la pendiente de la recta que pasa por los puntos *A(a,h(a))* y *B(b,h(b))* para una función *h(x)* continua en [*a,b*] y derivable en *(a,b)* coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto interior del intervalo [*a,b*].

Como puede observar el lector, aún no hemos obtenido un método general para poder calcular el área comprendida entre una función positiva, el eje de abscisas y dos rectas verticales. El teorema fundamental del cálculo integral resuelve dicho problema, sin embargo, para efectuar su demostración necesitamos conocer antes el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Diremos que la función F(x) es una primitiva de *ƒ(x)* en [a,b] si F´(x) = *ƒ(x).*

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL O DE LAGRANGE O TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS

Si *h* es una función continua en *[a,b]* y derivable en *(a,b)*, entonces existe un punto interior *c* del intervalo *(a,b)* tal que *h(b) – h(a) = h'(c)(b – a).*

Demostración. Por desconocimiento del teorema de Rolle, la demostración del teorema del valor medio se omite. Sin embargo hacemos la interpretación geométrica del mismo, ésta es:

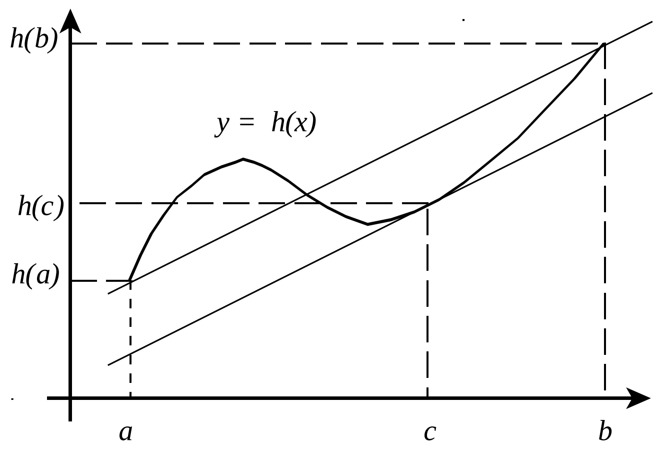


Figura 2.2.2. Interpretación geométrica del teorema del valor medio

[4] Este teorema también es reconocido como teorema del valor medio de Lagrange o teorema de los incrementos finitos.

COMPLETA LO QUE FALTA:

Nótese que la recta que pasa por los puntos $A(a, h(a))$ y B__________ tiene pendiente $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}$. La recta que pasa por el punto $C(c, h(c))$ es tangente a la curva en dicho punto, por tanto su pendiente es __________**.**

Al ser ambas rectas paralelas sus pendientes coinciden, es decir: $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c)$, en consecuencia se obtiene: ___________ $= h´(c)(b-a)$, lo que concluye la interpretación geométrica.

VI.4.2.34. TFCIS: Teorema fundamental cálculo integral (sumas)

Actividad 34: Los alumnos han de descubrir que las sumas de las diferencias del valor de la función entre dos nodos consecutivos coincide con la diferencia del valor de la función en los extremos del intervalo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si f es integrable Riemann en *[a,b]* y *G* es una primitiva suya sobre este intervalo, entonces: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

Este teorema, es uno de los más importantes del Análisis, ya que relaciona el cálculo diferencial con el integral, dando un método de cálculo (a esta fórmula se le conoce como regla de Barrow).

COMPLETA LO QUE FALTA:

Demostración. Al objeto de facilitar la comprensión del teorema consideremos una partición con 5 nodos, sea $P = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = b\}$ una partición arbitraria de *[a,b].* Entonces tenemos:

$G(x_1)$ – _______+ $G(x_2) - G(x_1)$ + _______ – $G(x_2) + G(x_4)$ – _________ $= G(b) - G(a)$.

Por el teorema del valor medio, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,..., 4$, existe un α_i, interior, tal que $G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = G'(\alpha_i)\Delta x_i = f(\alpha_i)\Delta x_i$, por ser *G* una primitiva de f y, además, tal y como se muestra en las dos figuras siguientes se verifican las igualdades:

VI.4.2.35. TFCII: Teorema fundamental cálculo integral (incrementos)

Actividad 35: Los alumnos deben aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial en cada subintervalo del intervalo original.

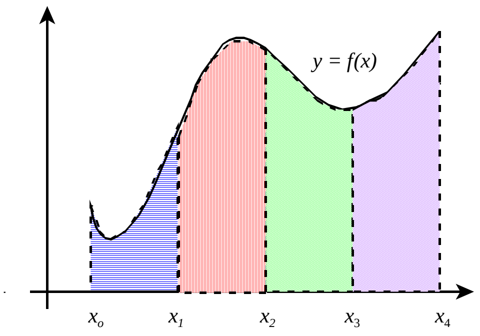


Figura 2.2.3.1

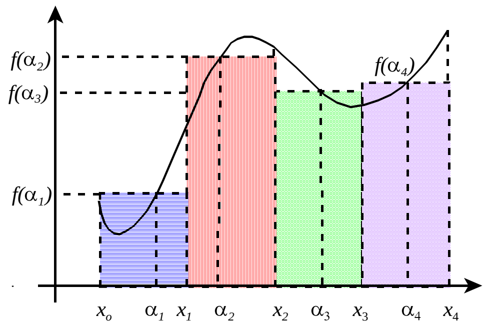


Figura 2.2.3.2

COMPLETA LO QUE FALTA:

$G(x_1)$ – ________ $= f(\alpha_1)\Delta x_1$, $G(x_2) - G(x_1) =$ ________ Δx_2,

________ $- G(x_2) = f(\alpha_3)\Delta x_3$, $G(x_4) - G(x_3) = f(\alpha_4)$________.

VI.4.2.36. TFCSI: Teorema fundamental cálculo integral (sumas e incrementos)

Actividad 36: Los alumnos deben comprender que las sumas de las diferencias del valor de la función entre dos nodos consecutivos coincide con la diferencia del valor de la función en los extremos del intervalo y, además, debe ser aplicado el teorema de los incrementos finitos en cada subintervalo.

COMPLETA LO QUE FALTA:

Por tanto: $G(b) - G(a) = f(\alpha_1)\Delta x_1 +$ __________ $+ f(\alpha_3)\Delta x_3 + f(\alpha_4)\Delta x_4 = R(f,P,T)$.
Si $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ es el conjunto de puntos intermedios asociados a P, al estar acotadas las sumas de Riemann por las de Darboux, se obtiene:

$$s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P).$$

Por otra parte, como P es una partición arbitraria, deducimos:

$$Inf \int_a^b f(x)\,dx \leq G(b) - G(a) \leq Sup \int_a^b f(x)\,dx$$

Al ser $f(x)$ integrable obtenemos: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ c. q. d.

VI.4.2.37. RFIAR: Representación gráfica de la función integral en función del área recorrida

Actividad 37: El alumno debe expresar gráficamente lo que entiende por función integral.

Por otro lado, si f es una función integrable Riemann en *[a,b],* para cada *x* de *[a,b],* la función, *F(x),* existe y se llama ***integral indefinida*** *de* f, siendo: *F(x)* = $\int_a^x f(t)\,dt$

DIBUJA, EN EL SIGUIENTE GRÁFICO, LA FUNCIÓN F(x)

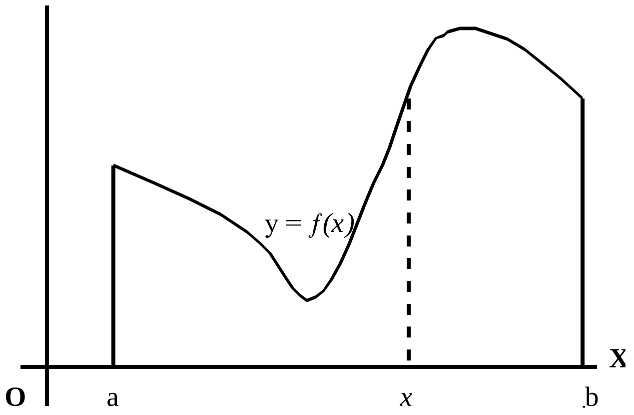


Figura 2.2.4. Función integral.

Además si f es integrable y tiene una primitiva, *G*, entonces la integral indefinida es una primitiva de f, así pues, para todo *x* del intervalo *[a,b],* se tiene:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)$$

y, por tanto, dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante.

VI.4.2.38. IGAI: Interpretación gráfica de la aditividad de la integral

Actividad 38: Consiste en determinar que la integral entre dos extremos de una función coincide con la suma de dos integrales uno de cuyos extremos (el superior de la primera y el inferior de la segunda) es un punto intermedio del intervalo original.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

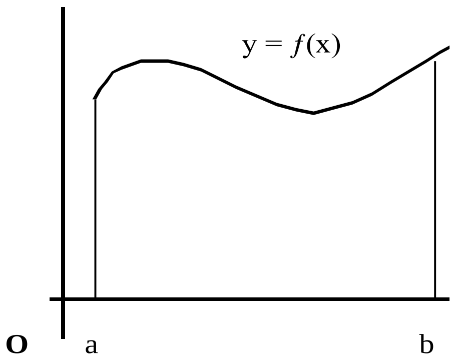
1. Si los límites de integración coinciden, la integral es nula. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. Si los extremos se intercambian, la integral cambia de signo.

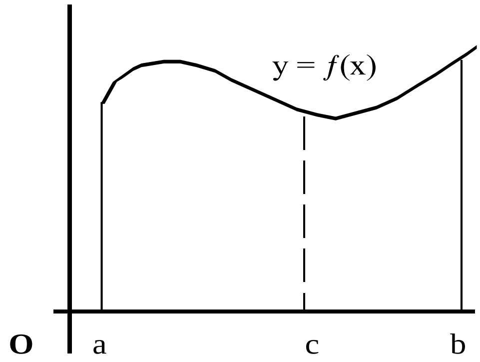
$$\int_b^a f(x)\,dx \;=\; -\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Si *c* es un punto del intervalo [a,b], se verifica:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx \;+\; \int_c^b f(x)\,dx$$

RAYA LAS SUPERFICIES CORRESPONDIENTES CON DISTINTOS COLORES Y ESCRIBE SOBRE ELLAS SU EXPRESIÓN ANALÍTICA





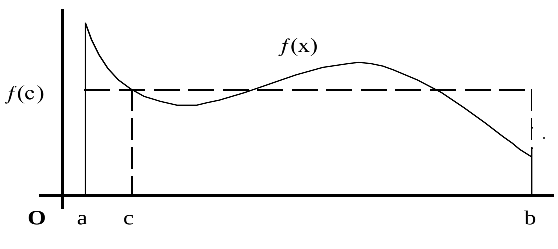
VI.4.2.39. IGTVMI: Interpretación gráfica del teorema del valor medio de la integral

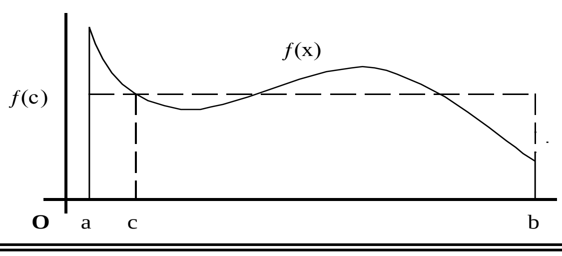
Actividad 39: El estudiante debe descubrir que el área de una superficie curvilínea es igual al área de un rectángulo.

4. Si K es una constante, se verifica: $\int_a^b K\, f(x)\,dx \;=\; K\int_a^b f(x)\,dx$

5. Si f es una función continua en [a,b], entonces existe un punto c del intervalo [a,b], tal que: $\int_a^b f(x)\,dx \;=f(\text{c})(\text{b-a})$

RAYA LAS SUPERFICIES CORRESPONDIENTES CON DISTINTOS COLORES Y ESCRIBE SOBRE ELLAS SU EXPRESIÓN ANALÍTICA





VI.4.2.40. CP: Cálculo de primitivas

Actividad 40: En todos los ciclos, salvo en el de exploración, se ha trabajado el cálculo mental mediante el cálculo de primitivas elementales, no obstante, a esta categoría la designamos *"CP: Cálculo de primitivas"* porque consideramos que la actividad desarrollada es algo más amplia que el cálculo mental de integrales inmediatas y, sobre todo, porque la toma de datos correspondientes a esta categoría también incluye pruebas escritas.

En cada una de las categorías anteriores hemos incluido la cuestión o cuestiones que las determinan, en esta no es posible por la gran cantidad de ejercicios que se han resuelto, así pues, en la descripción de cada uno de los ciclos de la investigación se especificará el CP realizado.

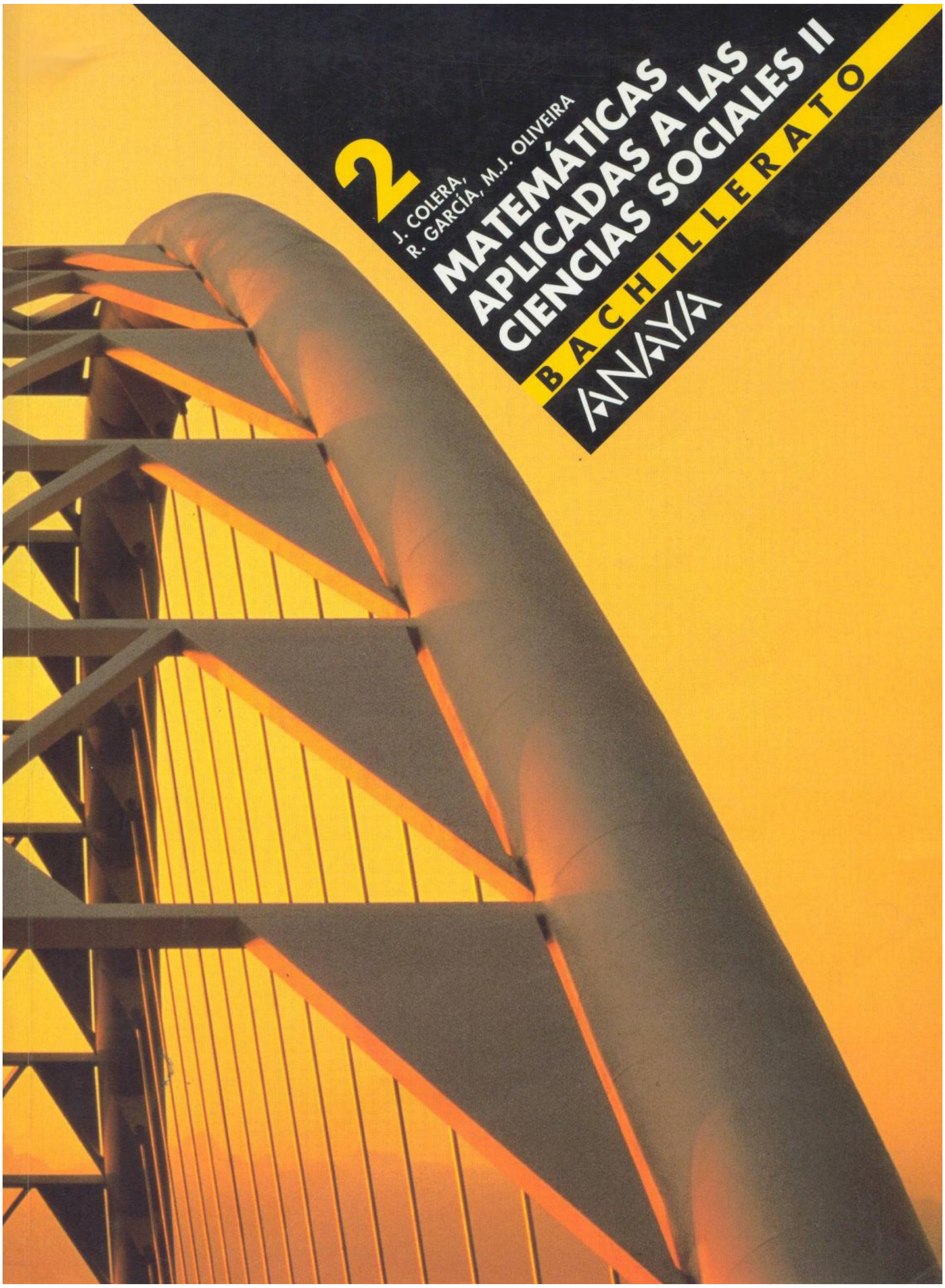
ANEXO E (CAPÍTULOS VI, VII, VIII, IX Y X):
***INICIACIÓN A LAS INTEGRALES*...157**

ANEXO E (CAPÍTULOS VI, VII, VIII, IX Y X):

INICIACIÓN A LAS INTEGRALES

En este anexo hemos escaneado la unidad didáctica del texto de matemáticas utilizado durante los seis ciclos de la investigación con el objeto de poder facilitar la lectura de los capítulos VI, VII, VIII, IX y X de esta memoria, sin necesidad de recurrir al manual.

El libro de texto utilizado es el de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de segundo curso de Bachillerato, editorial Anaya, de los autores Colera, García y Oliveira (2003) y la unidad didáctica donde desarrolla el cálculo integral es la novena denominada *Iniciación a las Integrales.*


2
J. COLERA,
R. GARCÍA, M.J. OLIVEIRA
MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II
BACHILLERATO
ANAYA

9 INICIACIÓN A LAS INTEGRALES

Como ya hemos dicho, **Arquímedes** (siglo III a.C.) obtuvo el área de algunos recintos curvos (círculo, segmento de parábola, ...). Lo hizo sumando "infinitos" trocitos de áreas prácticamente nulas, mediante un procedimiento que contenía la idea no precisada de paso al límite. De forma similar, **Kepler** (primera mitad del siglo XVII) obtuvo longitudes de curvas y volúmenes de cuerpos de revolución. Otros muchos matemáticos resolvieron problemas similares, pero cada uno de dichos problemas necesitó un procedimiento específico de resolución.

El primer paso de unificación del enfoque de esos problemas fue advertir que todos ellos podían expresarse de la misma forma: cálculo del área encerrada entre una cierta curva y el eje X.

La gran aportación de **Newton** y **Leibnitz**, por la cual se les consagra como *inventores* del cálculo infinitesimal, fue relacionar este problema con el problema de la tangente:

— La pendiente de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto, x_0, es su derivada en ese punto: $f'(x_0)$

— El área bajo una curva, $y = f(x)$, se obtiene a partir de una función, $F(x)$, cuya derivada es $f(x)$.

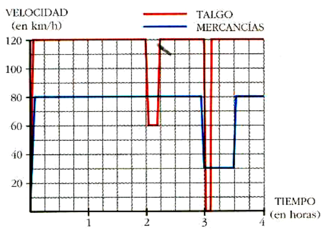
La función $F(x)$ *cuya derivada es* $f(x)$ se llama **primitiva** de $f(x)$. Es decir, F (área bajo la curva de f) es la primitiva de f. Este resultado hace relevante la búsqueda de las primitivas de algunas funciones.

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Dos trenes

Un Talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Estas son las gráficas TIEMPO - VELOCIDAD *de ambos movimientos.*



Como podemos ver en la gráfica de la izquierda, el Talgo, a las dos horas, reduce su velocidad.

¿A qué puede deberse? ¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren?

A las tres horas ambos trenes modifican su marcha: el Talgo para durante breves minutos, mientras que el de mercancías va muy despacio durante media hora.

- Para hacernos una idea, realicemos algunos cálculos:

  a) El Talgo, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

  b) De 2 a $2\frac{1}{4}$, el Talgo disminuye su velocidad. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

208

c) El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?

d) ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?

Haciendo los cálculos anteriores, podrás comprobar que:

Ambos trenes recorren 240 km a velocidad normal. Reducen la velocidad en el mismo lugar y recorren, así, otros 15 km (puede ser debido a obras en la vía) y, a continuación, recupera cada cual su velocidad normal. (Es decir, el tren de mercancías no frena *cuando* el Talgo, pero sí *donde* el Talgo.) Más adelante el Talgo para en una estación.

e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el Talgo?

f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o azul. Señala los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

¿Cuál es la función cuya derivada es...?

La función cuya derivada es $2x$ es ... x^2

La función cuya derivada es $\cos x$ es ... $\operatorname{sen} x$

La función cuya derivada es $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ es ... $\sqrt{x}$

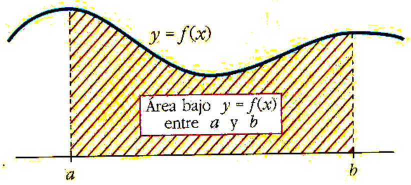
Di cuál es la función cuya derivada es:

a) $2x$	b) x	c) $5x$
d) $3x^2$	e) x^2	f) $5x^2$
g) $4x^3$	h) x^3	i) $2x^3$
j) 1	k) 4	l) $\sqrt{2}$
m) $3x^2 + 4x^3$	n) $5x^2 + 7x^3$	ñ) $-\operatorname{sen} x$
o) $\operatorname{sen} x$	p) $5 \operatorname{sen} x$	q) $\cos x$
r) e^x	s) $3 \cdot e^x$	t) e^{-x}
u) $2^x \cdot \ln 2$	v) 2^x	w) $5 \cdot 2^x$

EN ESTA UNIDAD VERÁS

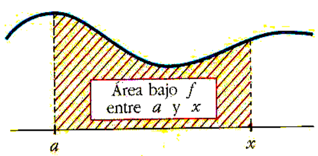
En los dos problemas anteriores hemos visto que el área bajo la gráfica de una función *velocidad-tiempo* es el camino recorrido, y que el área bajo una función potencia es la energía consumida.

Con frecuencia, el área bajo la gráfica de una función es una magnitud cuyos valores interesa averiguar.



Para ello son fundamentales los siguientes resultados:

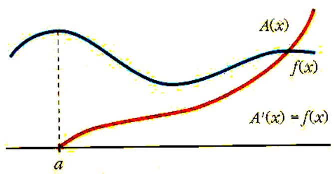
■ Si el extremo superior del intervalo es variable, también lo es el área. Es decir, al variar x, varía el área.



■ La función:

$$x \longrightarrow A(x) = \text{“Área bajo } f\text{”}$$

es derivable. Su derivada es, precisamente, $f(x)$.



■ Para averiguar $A(x)$ nos preguntaremos, como hemos hecho en el problema de arriba, *¿cuál es la función cuya derivada es $f(x)$?*

La función cuya derivada es $f(x)$ se llama **primitiva** de $f(x)$ y se designa así:

$$\int f(x)$$

La unidad empezará, precisamente, sistematizando este juego de encontrar la función cuya derivada es una función dada.

209

9.1 PRIMITIVAS. REGLAS BÁSICAS PARA SU CÁLCULO

Definición y nomenclatura

$F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$. Esto se expresa así:

$$\int f(x) = F(x)$$

Cada función tiene infinitas primitivas, pues si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ [es decir, si $F'(x) = f(x)$], entonces $F(x) + k$ también lo es, pues $D[F(x) + k] = F'(x) = f(x)$. Y esto es cierto cualquiera que sea la constante k. Por eso se suele escribir:

$$\int f(x) = F(x) + k$$

A la expresión $\int f(x)$ se la llama también **integral indefinida** o, simplemente, **integral** de $f(x)$. Por eso, al cálculo de primitivas se le suele llamar **cálculo de integrales** o **integración**.

Propiedades

Puesto que el proceso de integración es opuesto al de derivación, muchas de sus propiedades se deducen, inmediatamente, de las propiedades de las derivadas. Las más importantes son:

- $\int [f(x) + g(x)] = \int f(x) + \int g(x)$
- $\int c f(x) = c \int f(x)$

TEN EN CUENTA

- La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de ellas.
- La integral del producto de un número por una función es igual al producto del número por la integral de la función.
- La integral del producto de dos funciones **no es** el producto de las integrales, pues la derivada de un producto no es igual al producto de las derivadas.

Integral de una potencia

- $\int 1 = x + k$
- $\int x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$, si $n \neq -1$
- $\int \dfrac{1}{x} = \int x^{-1} = ln\,|x| + k$

Por ejemplo:

$$\int x^2 = \frac{x^{2+1}}{2+1} + k = \frac{x^3}{3} + k$$

$$\int x^7 = \frac{x^{7+1}}{7+1} + k = \frac{x^8}{8} + k$$

$$\int x = \frac{x^{1+1}}{1+1} + k = \frac{x^2}{2} + k$$

$$\int \sqrt{x} = \int x^{1/2} = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + k = \frac{2}{3}x^{3/2} + k = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$$

210

Integrales trigonométricas y exponenciales

- $\int sen\,x = -cos\,x + k$
- $\int cos\,x = sen\,x + k$
- $\int e^x = e^x + k$
- $\int a^x = \frac{1}{ln\,a} a^x + k$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar las siguientes integrales:*

a) $\int 3x^5$

b) $\int \frac{1}{x^3}$

c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x}}$

e) $\int (3x^3 - 5x^2 + 3)$

f) $\int (2^x + 3^x)$

g) $\int (3\,cos\,x - 5\,e^x + 4)$

a) $\int 3x^5 = 3\int x^5 = 3\frac{x^6}{6} + k = \frac{x^6}{2} + k$

b) $\int \frac{1}{x^3} = \int x^{-3} = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + k = \frac{x^{-2}}{-2} + k = -\frac{1}{2x^2} + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}} = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + k = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + k = 3\sqrt[3]{x} + k$

d) $\int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x}} = \int \frac{\sqrt{2}\,x^{1/2}}{\sqrt[3]{5}\,x^{1/3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}} \int x^{1/6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}} \frac{x^{7/6}}{7/6} + k = \frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{x^7}}{7\sqrt[3]{5}} + k$

e) La integral de una suma es la suma de las integrales de los sumandos:

$$\int (3x^3 - 5x^2 + 3) = \int 3x^3 - \int 5x^2 + \int 3 = 3\int x^3 - 5\int x^2 + \int 3 =$$

$$= 3\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 3x + k = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x + k$$

f) $\int (2^x + 3^x) = \frac{1}{ln\,2}\cdot 2^x + \frac{1}{ln\,3}\cdot 3^x + k$

g) $\int (3\,cos\,x - 5\,e^x + 4) = 3\int cos\,x - 5\int e^x + \int 4 = 3\,sen\,x - 5\,e^x + 4x + k$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 7x^4$ b) $\int \frac{1}{x^2}$ c) $\int \sqrt{x}$

d) $\int \sqrt[3]{5x^2}$ e) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}$ f) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}}$

2. Calcula:

a) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x}$ b) $\int (5\,cos\,x + 3^x)$

c) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}$ d) $\int (10^x - 5^x)$

La regla de la cadena y el cálculo de primitivas

Recordemos la derivada de una función compuesta $g[f(x)]$:

$D(g[f(x)]) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$

Por tanto:

$$\int g'[f(x)] \cdot f'(x) = g[f(x)] + k$$

RECUERDA

$\int g'[f(x)] \cdot f'(x) = g[f(x)]$

La aplicación de esta regla no suele ser fácil, pues pocas veces es evidente la presencia de las funciones f y f'. Por ejemplo:

$$\mathrm{I} = \int cos\,(x^2 - 5x + 3) \cdot (2x - 5)$$

Si observamos que $D(x^2 - 5x + 3) = 2x - 5$, la integral es inmediata aplicando la regla anterior, pues es $\int cos\, f(x) \cdot f'(x)$.

$$\mathrm{I} = \int cos\, f(x) \cdot f'(x) = sen\, f(x) + k = sen\,(x^2 - 5x + 3) + k$$

Un caso particular de la regla anterior especialmente importante es cuando $f(x) = ax + b$ y, por tanto, $f'(x) = a$:

RECUERDA

$\int g'(ax + b) = \dfrac{g\,(ax + b)}{a}$

Si $\int f(x) = F(x) + k$, entonces $\int f(ax + b) = \dfrac{1}{a} F(ax + b) + k$

Por ejemplo: $\int cos\,(3x + 5) = \dfrac{sen\,(3x + 5)}{3} + k$

Resumen de las reglas para el cálculo de primitivas

SUMA		$\int [f(x) + g(x)] = \int f(x) + \int g(x)$	
PRODUCTO POR UN NÚMERO		$\int k\ f(x) = k \int f(x)$	
POTENCIAS	$x^n,\ n \neq -1$	$\int x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\int f(x)^n\ f'(x) = \dfrac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k$
	$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\int x^{-1} = \int \dfrac{1}{x} = ln\,\lvert x\rvert + k$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} = ln\lvert f(x)\rvert + k$
EXPONENCIALES	a^x	$\int a^x = \dfrac{a^x}{ln\ a} + k$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) = \dfrac{a^{f(x)}}{ln\ a} + k$
	e^x	$\int e^x = e^x + k$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{f(x)} + k$
TRIGONOMÉTRICAS	$sen\ x$	$\int sen\ x = -cos\ x + k$	$\int sen\ f(x) \cdot f'(x) = -cos\ f(x) + k$
	$cos\ x$	$\int cos\ x = sen\ x + k$	$\int cos\ f(x) \cdot f'(x) = sen\ f(x) + k$

212

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar las primitivas (o integrales) de las siguientes funciones:*

a) $g(x) = (3x-5)^4$

b) $g(x) = (x^2+3x)^4 \cdot (2x+3)$

c) $g(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$

d) $g(x) = sen\, x \; cos\, x$

e) $g(x) = x\, e^{x^2}$

f) $g(x) = e^{-2x+3}$

g) $g(x) = cos\, 3x$

h) $g(x) = cos\left(x^2+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot(2x)$

i) $g(x) = tg\, x$

a) $\displaystyle\int (3x-5)^4 = \frac{(3x-5)^5}{5}\cdot\frac{1}{3} + k = \frac{(3x-5)^5}{15} + k$

b) Observamos que si $f(x) = x^2+3x$, entonces $f'(x) = 2x+3$.

Por tanto: $\displaystyle\int (x^2+3x)^4\cdot(2x+3) = \frac{(x^2+3x)^5}{5} + k$

c) Observamos que si $f(x) = x^2-5x+6$, entonces $f'(x) = 2x-5$.

Por tanto: $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6} = ln\,|x^2-5x+6| + k$

d) Observamos que si $f(x) = cos\, x$, entonces $f'(x) = -\, sen\, x$. Por tanto:

$$\int sen\, x\; cos\, x = -\int (cos\, x)\,(-sen\, x) = -\frac{(cos\, x)^2}{2} + k = -\frac{cos^2 x}{2} + k$$

e) Observamos que si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$. Por tanto:

$$\int x\, e^{x^2} = \frac{1}{2}\int (2x)\cdot e^{(x^2)} = \frac{1}{2}\, e^{(x^2)} + k = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + k$$

f) $\displaystyle\int e^{-2x+3} = \frac{e^{-2x+3}}{-2} + k = -\frac{1}{2}\, e^{-2x+3} + k$ g) $\displaystyle\int cos\, 3x = \frac{sen\, 3x}{3} + k$

h) Observamos que si $f(x) = x^2 + \dfrac{\pi}{2}$, entonces $f'(x) = 2x$.

Por tanto: $\displaystyle\int cos\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)\cdot(2x) = sen\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right) + k$

i) Puesto que $tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x}$ y si $f(x) = cos\, x$ es $f'(x) = -sen\, x$, será:

$$\int tg\, x = \int \frac{sen\, x}{cos\, x} = -\int \frac{-sen\, x}{cos\, x} = -\int \frac{f'(x)}{f(x)} = -ln\,|cos\, x| + k$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Halla las primitivas de estas funciones:

a) $f(x) = (x^3-5x+3)^2\,(3x^2-5)$

b) $f(x) = (5x+1)^3$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2-3}{x^3-3x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-3x}$

e) $f(x) = cos\, x\; sen^3 x$

4. Busca las primitivas de:

a) $f(x) = x\; 2^{x^2}\, ln\, 2$

b) $f(x) = x\; 2^{x^2}$

c) $f(x) = 2^{3x-5}$

d) $f(x) = sen\; 3x$

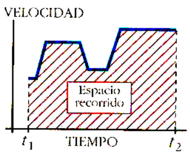
e) $f(x) = sen\,(x^3-4x^2)\,(3x^2-8x)$

f) $f(x) = \dfrac{cos\, x}{sen\, x}$

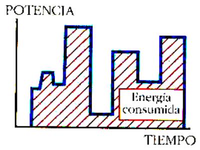
9.2 ÁREA BAJO UNA CURVA

Importancia de conocer el área bajo una curva

Hay ocasiones en que resulta fundamental averiguar el área bajo una curva. Por ejemplo:



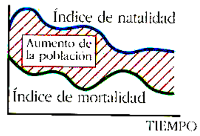
El área bajo la gráfica de la función $v = f(t)$ (velocidad en función del tiempo) entre los instantes t_1 y t_2 es el espacio recorrido por el móvil en ese intervalo de tiempo.



El área bajo la curva

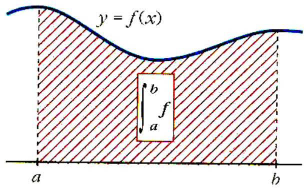
Potencia $= f(t)$

es la energía consumida.



El área entre las curvas que nos dan el índice de natalidad y el índice de mortalidad de una cierta población es el aumento de población en el intervalo de tiempo que estamos considerando.

Integral de una función



El área entre la gráfica de la función $y = f(x)$ y el eje X, en el intervalo $[a, b]$ se designa:

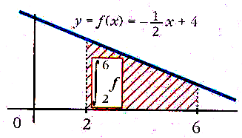
$$\int_a^b f \qquad \text{Se lee } \textbf{integral} \text{ entre } a \text{ y } b \text{ de } f.$$

Si la curva está encima del eje X $(f(x) > 0)$ la integral es positiva, y si está debajo del eje X $(f(x) < 0)$ la integral es negativa.

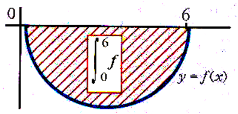
EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar las integrales representadas en estas gráficas:*

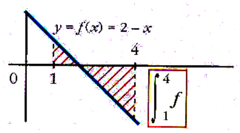
a)



b)



c)



a) La figura cuya área queremos hallar es un trapecio de bases 3 y 1 y de altura 4. Su área es $A = \frac{3+1}{2} \cdot 4 = 8$. Puesto que toda el área está encima del eje X la integral es positiva. Por tanto:

$$\int_2^6 \left(-\frac{x}{2} + 4\right) = 8$$

b) La figura es una semicircunferencia de radio 3. Su área es $A = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = 4{,}5\pi$. Como está bajo el eje X, la integral es negativa.

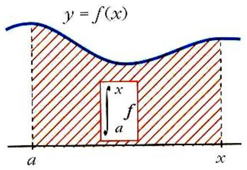
$$\int_0^6 f = -\frac{9}{2}\pi = -4{,}5\pi = -14{,}137$$

c) El triángulo pequeño tiene un área de 0,5 y está sobre el eje X. El triángulo grande tiene de área 2 y está bajo el eje X. Por tanto:

$$\int_1^4 (2 - x) = 0{,}5 - 2 = -1{,}5$$

214

Función "área bajo una curva"



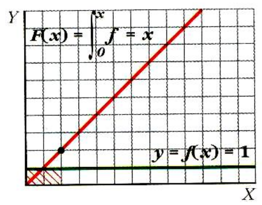
$F(x) = \int_a^x f$ es una función que depende de la posición de x.

Si mantenemos variable el extremo superior del recinto cuya área estamos describiendo, entonces el área es también variable: es una función que depende de la posición que ocupe dicho extremo superior.

La integral de una función f en un intervalo $[a, x]$ cuyo extremo superior es variable, es una función que depende de x:

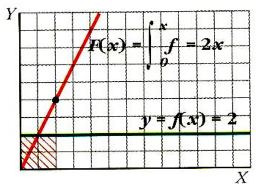
$$F(x) = \int_a^x f$$

Veamos algunos ejemplos:



- Si la función es $f(x) = 1$, constante, $F(x) = \int^x f$ es el área acumulada bajo la recta $y = 1$, desde 0 hasta x. Por ejemplo, para $x = 2$ se ha acumulado un área de 2 unidades. Es fácil ver que

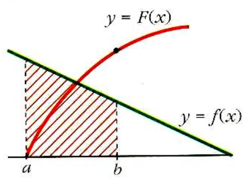
$$F(x) = \int_0^x f = x$$



- Si la función es $f(x) = 2$, el área acumulada bajo ella aumenta con el doble de rapidez que la del ejemplo anterior. Por ejemplo, para $x = 2$ se ha acumulado un área de 4 unidades.

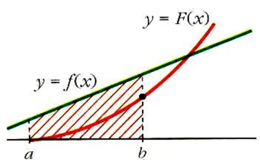
  En general:

$$F(x) = \int_0^x f = 2x$$



- Si $f(x)$ es decreciente, el área acumulada bajo ella aumenta cada vez más despacio.

$$F(x) = \int_a^x f \text{ crece cada vez más despacio}$$



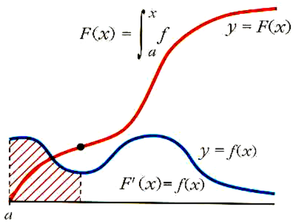
- Si $f(x)$ es creciente, el área acumulada bajo ella aumenta cada vez más deprisa.

$$F(x) = \int_a^x f \text{ crece cada vez más deprisa}$$

En general, la rapidez de crecimiento de una función $y = F(x) = \int_a^x f$ viene dada por el valor de $f(x)$. Es decir, $f(x)$ tiene que ver con la derivada de $F(x)$. Este resultado, importantísimo, se explicita en el siguiente apartado.

9.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Los resultados insinuados en el apartado anterior se concretan en este mediante un importante teorema que relaciona el cálculo de primitivas con el cálculo de áreas.



Teorema fundamental del cálculo

Si $y = f(x)$ es una función continua, el área bajo su gráfica en un intervalo variable $[a, x]$ es una función, $F(x) = \int_a^x f$ cuya derivada es $f(x)$:

$$F(x) = \int_a^x f \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Aplicando este teorema, podríamos obtener razonadamente áreas bajo curvas $y = f(x)$, siempre que supiéramos obtener una primitiva de $f(x)$. Sin embargo, el próximo resultado nos simplifica aún más la tarea.

Regla práctica para el cálculo de integrales

Regla de Barrow

Para hallar la integral $\int_a^b f$ se procede así:

1. Se halla una primitiva de la función $f(x)$: $G(x) = \int f(x)$
2. Se calculan los valores de $G(b)$ y $G(a)$.
3. La integral buscada es: $\int_a^b f = G(b) - G(a)$

TEN EN CUENTA

$F(a) = \int_a^a f$ es cero, evidentemente, pues se trata del área acumulada en un intervalo sin longitud.

Demostración:

$F(x) = \int_a^x f$ es una primitiva de $f(x)$, pues por el teorema fundamental del cálculo sabemos que $F'(x) = f(x)$.

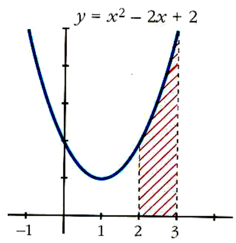
$G(x)$ es otra primitiva de $f(x)$.

Por tanto, $F(x) = G(x) + k$, es decir, $F(x) = \int_a^x f = G(x) + k$.

Puesto que $F(a) = 0$, $F(a) = G(a) + k = 0 \Rightarrow k = -G(a)$

Por tanto, $F(x) = G(x) - G(a)$. Para $x = b$ obtenemos $F(b) = G(b) - G(a)$.

En definitiva: $\int_a^b f = G(b) - G(a)$



Un ejemplo: Calculemos $\int_2^3 (x^2 - 2x + 2)$:

1. Hallamos una primitiva de $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $G(x) = \int (x^2 - 2x + 2) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 2x$
2. Calculamos $G(b)$ y $G(a)$: $G(3) = 6$, $G(2) = \dfrac{8}{3}$
3. $\int_2^3 (x^2 - 2x + 2) = G(3) - G(2) = 6 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{10}{3}$

216

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Calcular las siguientes integrales:*

a) $\int_0^{\pi} sen\ x$

b) $\int_{\pi}^{2\pi} sen\ x$

c) $\int_0^4 (x^3 - 4x^2 + 3x)$

a) • Se halla una primitiva: $G(x) = \int sen\ x = -\cos x$

• Se calculan $G(b)$ y $G(a)$:

$G(\pi) = -\cos \pi = -(-1) = 1$; $G(0) = -\cos 0 = -1$

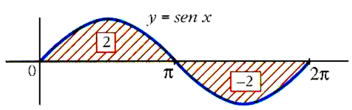
• $\int_0^{\pi} sen\ x = G(\pi) - G(0) = 1 - (-1) = 2$

b) • Ya hemos obtenido en el ejercicio anterior $G(x) = -\cos x$.

• $G(2\pi) = -\cos 2\pi = -1$; $G(\pi) = 1$

• $\int_{\pi}^{2\pi} sen\ x = G(2\pi) - G(\pi) = -1 - 1 = -2$

Veamos la interpretación geométrica de este ejercicio y del anterior:



El área de cada bucle de la función seno es 2. Cuando el bucle queda sobre el eje X, la integral es positiva $\left(\int_0^{\pi} sen\ x = 2\right)$.

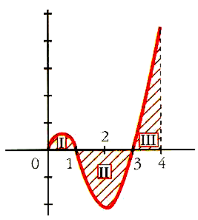
Y cuando queda bajo el eje X, la integral es negativa $\left(\int_{\pi}^{2\pi} sen\ x = -2\right)$.

c) • $G(x) = \int (x^3 - 4x^2 + 3x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2}$

• $G(4) = \dfrac{4^4}{4} - \dfrac{4 \cdot 4^3}{3} + \dfrac{3 \cdot 4^2}{2} = \dfrac{8}{3}$; $G(0) = 0$

• $\int_0^4 (x^3 - 4x^2 + 3x) = \dfrac{8}{3} - 0 = \dfrac{8}{3}$

Veamos la interpretación geométrica:



La curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ determina tres recintos entre el eje X y las abscisas $x = 0$ y $x = 4$.

Área de I – Área de II + Área de III = $\dfrac{8}{3}$

Con este resultado nos quedamos, pues, sin conocer el valor de cada una de estas tres áreas.

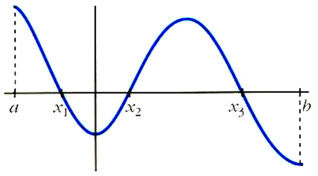
EJERCICIOS PROPUESTOS

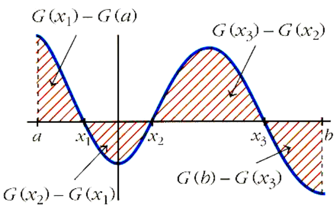
1. Halla e interpreta estas integrales:

a) $\int_0^{4\pi} sen\ x$ b) $\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)$

2. Halla la siguiente integral e interprétala geométricamente: $\int_0^2 e^x$

9.4 CÁLCULO DEL ÁREA ENTRE UNA CURVA Y EL EJE *X*





Para calcular el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje X y las abscisas $x = a$ y $x = b$, se procede así:

I. Se resuelve la ecuación $f(x) = 0$ para averiguar los puntos de corte de la curva con el eje X.

II. Se seleccionan las raíces comprendidas entre a y b. Supongamos que son x_1, x_2, x_3.

III. Se halla una primitiva de $f(x)$: $G(x) = \int f(x)$.

IV. Se calcula $G(a)$, $G(x_1)$, $G(x_2)$, $G(x_3)$, $G(b)$.

V. Las áreas de los recintos son los valores absolutos de las diferencias:

$G(x_1) - G(a)$, $G(x_2) - G(x_1)$, $G(x_3) - G(x_2)$, $G(b) - G(x_3)$

VI. El área pedida es la suma de las áreas de los recintos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar el área encerrada entre la curva $y = x^2 - 1$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 3$.*

I. Empezamos averiguando los puntos de corte de la curva con el eje X:

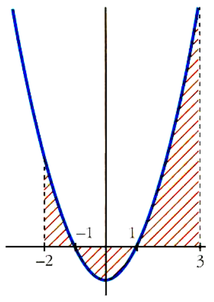
$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 1$

II. Los dos puntos de corte están dentro del intervalo. Por tanto, habrá tres recintos:

$[-2, -1]$, $[-1, 1]$ y $[1, 3]$

III. Obtenemos una primitiva de la función:

$$G(x) = \int (x^2 - 1) = \frac{x^3}{3} - x$$



IV. Hallamos el valor de la primitiva en los extremos de todos los intervalos:

$$G(-2) = -\frac{2}{3} \qquad G(-1) = \frac{2}{3} \qquad G(1) = -\frac{2}{3} \qquad G(3) = 6$$

V. Calculamos el área de cada recinto:

$$\int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) = G(-1) - G(-2) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \rightarrow \text{ÁREA } [-2, -1] = \frac{4}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1) = G(1) - G(-1) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{ÁREA } [-1, 1] = \frac{4}{3}$$

$$\int_{1}^{3} (x^2 - 1) = G(3) - G(1) = 6 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{3} \rightarrow \text{ÁREA } [1, 3] = \frac{20}{3}$$

VI. ÁREA TOTAL: $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}$ u^2

218

2. *Hallar el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 4$.*

(En el ejercicio resuelto 1.c de la página 217 se calculó la integral entre 0 y 4 de la misma función. Aquí se verá la diferencia que hay entre una integral y el área delimitada por una curva).

I. Puntos de corte con el eje X:

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = 1,\ x_3 = 3 \end{cases}$$

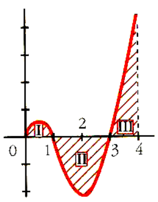
II. Las tres raíces son válidas. La primera coincide con el extremo inferior del intervalo. Hay pues, tres recintos:

$$[0, 1],\ [1, 3]\ \text{y}\ [3, 4]$$

III. $G(x) = \int (x^3 - 4x^2 + 3x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2}$

IV. $G(0) = 0$, $G(1) = \dfrac{5}{12}$, $G(3) = -\dfrac{9}{4}$, $G(4) = \dfrac{8}{3}$

V. Hallamos el área de cada recinto:



ÁREA I $= |G(1) - G(0)| = \left|\dfrac{5}{12} - 0\right| = \dfrac{5}{12}$

ÁREA II $= |G(3) - G(1)| = \left|-\dfrac{9}{4} - \dfrac{5}{12}\right| = \left|-\dfrac{32}{12}\right| = \dfrac{32}{12}$

ÁREA III $= |G(4) - G(3)| = \left|\dfrac{8}{3} - \left(-\dfrac{9}{4}\right)\right| = \dfrac{59}{12}$

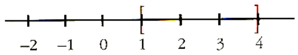
VI. ÁREA TOTAL = ÁREA I + ÁREA II + ÁREA III $= \dfrac{5}{12} + \dfrac{32}{12} + \dfrac{59}{12} = \dfrac{96}{12} = 8$

El área encerrada en los tres recintos es, en total, de 8 u^2.

3. *Hallar el área comprendida entre la curva $y = x^3 - 4x$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.*

I. Puntos de corte de la curva con el eje X:

$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$

II.  Solo nos sirve la raíz 2.

Hay dos recintos: I [1, 2]; II [2, 4]

III. $G(x) = \int (x^3 - 4x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^2}{2} = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$

IV. $G(1) = -\dfrac{7}{4}$, $G(2) = -4$, $G(4) = 32$

V. ÁREA DEL RECINTO I $= |G(2) - G(1)| = \left|-4 - \left(-\dfrac{7}{4}\right)\right| = 2{,}25$

ÁREA DEL RECINTO II $= |G(4) - G(2)| = |32 - (-4)| = 36$

VI. ÁREA TOTAL $= 2{,}25 + 36 = 38{,}25\ u^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla el área comprendida entre la función $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 5$.

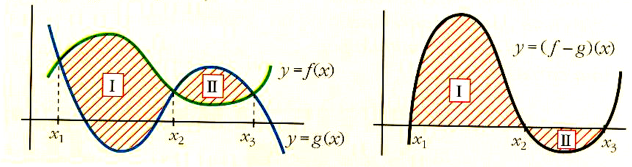
2. Halla el área comprendida entre:

$y = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje X

9.5 CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

Con lo que sabemos hasta ahora, este problema es de fácil solución gracias a la siguiente propiedad:

El área encerrada entre las gráficas de dos funciones, $y = f(x)$, $y = g(x)$, es igual al área encerrada entre la función diferencia $y = (f - g)(x)$ y el eje X.



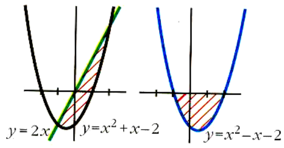
EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar el área encerrada entre las gráficas de las funciones siguientes:*

$y = x^2 + x - 2$

$y = 2x$

- La función diferencia es:
  $y = (x^2 + x - 2) - 2x = x^2 - x - 2$
  Hallamos el área entre la función $y = x^2 - x - 2$ y el eje X.



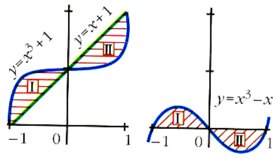
- Puntos de corte con el eje X:
  $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 2.$ Intervalo $[-1, 2]$
- Primitiva de la función: $G(x) = \int (x^2 - x - 2) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$
- $G(-1) = \frac{7}{6},\quad G(2) = -\frac{10}{3}$
- $\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2) = G(2) - G(-1) = -\frac{10}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{9}{2} \rightarrow$ ÁREA $= \frac{9}{2}$ u^2

2. *Hallar el área encerrada entre las gráficas de las funciones siguientes:*

$f(x) = x^3 + 1$

$g(x) = x + 1$

- $f(x) - g(x) = (x^3 - x)$
- $x^3 - x = 0 \rightarrow x_1 = -1,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 1$
- $G(x) = \int (x^3 - x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$
- $G(-1) = -\frac{1}{4},\quad G(0) = 0,\quad G(1) = -\frac{1}{4}$



- RECINTO I: ÁREA $[-1, 0] = |G(0) - G(-1)| = \left|0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{4}$
- RECINTO II: ÁREA $[0, 1] = |G(1) - G(0)| = \left|-\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{4}$
- ÁREA TOTAL $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ u^2

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla el área encerrada entre las gráficas de las funciones siguientes:

$f(x) = x^3 - x^2 + 4$

$g(x) = x^2 + 3x + 4$

220

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

9

1. Cálculo de primitivas

Halla una primitiva de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} + x}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = sen\,(3x + \pi)$

c) $f(x) = \left(\sqrt{3x} + 1\right)^2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5x-2}}$

e) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

f) $f(x) = (2x^2 + 3)^2$

g) $f(x) = e^{4x-3}$

h) $f(x) = cos\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)$

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{cos^2 x}$

a) Descomponemos la fracción en suma de otras dos y expresamos cada sumando como potencia:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} + x^{1-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \left(x^{-\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$$

b) $$\int sen\,(3x+\pi) = -\frac{1}{3}\int -3sen\,(3x+\pi) = -\frac{1}{3}cos\,(3x+\pi) + k$$

ya que $D[cos\,(3x+\pi)] = -3sen\,(3x+\pi)$

c) Efectuamos el cuadrado:

$$\int (3x + 2\sqrt{3x} + 1) = \int (3x + 2\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}} + 1) =$$

$$= \frac{3x^2}{2} + 2\sqrt{3}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x + k = \frac{3x^2}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3} + x + k$$

d) Expresamos como potencia:

$$\int (5x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}\int 5\,(5x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}\,\frac{(5x-2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + k = \frac{3}{10}\sqrt[3]{(5x-2)^2} + k$$

e) $$\int x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + k$$

f) Desarrollamos el cuadrado del binomio:

$$\int (4x^4 + 12x^2 + 9) = \frac{4x^5}{5} + \frac{12x^3}{3} + 9x + k = \frac{4x^5}{5} + 4x^3 + 9x + k$$

g) $$\int e^{4x-3} = \frac{1}{4}\int 4\,e^{4x-3} = \frac{1}{4}\,e^{4x-3} + k$$

h) $$\int cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 2\int \frac{1}{2}\,cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 2\,sen\left(\frac{x-\pi}{2}\right) + k$$

i) $$\int \frac{\sqrt{3}}{cos^2 x} = \sqrt{3}\int\frac{1}{cos^2 x} = \sqrt{3}\;tg\,x + k \quad \left[\text{ya que } D(tg\,x) = (1 + tg^2 x) = \frac{1}{cos^2 x}\right]$$

221

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

2. Cálculo de primitivas

Calcula las ocho primitivas siguientes:

a) $\int \frac{2}{3x-1}$

b) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}$

c) $\int \frac{3x^2-2x+1}{x^2}$

d) $\int \frac{2x^2-3x+5}{2x+1}$

e) $\int \frac{\ln x}{x}$

f) $\int tg\, 3x$

g) $\int \cos 4x \;\; sen^2\, 4x$

h) $\int x^2\, e^{x^3-1}$

a) $2\int \frac{1}{3x-1} = \frac{2}{3}\int \frac{3}{3x-1} = \frac{2}{3}\ln|3x-1| + k$

Hemos multiplicado el numerador por 3 para obtener la derivada del denominador.

b) Observamos que multiplicando el numerador por 2, obtenemos la derivada del denominador.

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + k$$

c) Descomponemos en sumas y restas:

$$\int \frac{3x^2-2x+1}{x^2} = \int\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 3x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + k$$

d) Dividimos para descomponer la fracción:

$$\frac{2x^2-3x+5}{2x+1} = x - 2 + \frac{7}{2x+1}$$

$$\int \frac{2x^2-3x+5}{2x+1} = \int\left(x-2+\frac{7}{2x+1}\right) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{7}{2}\ln|2x+1| + k$$

e) Observamos que el logaritmo está multiplicado por su derivada. Es de la forma $f'(x)\cdot f(x)$:

$$\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'}\,\underbrace{\ln x}_{f} = \frac{(\ln x)^2}{2} + k$$

f) Como $tg\,3x = \frac{sen\,3x}{\cos 3x}$, multiplicando por -3 el numerador obtenemos la derivada del denominador:

$$\int tg\,3x = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\,sen\,3x}{\cos 3x} = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + k$$

g) Es necesario multiplicar por 4 para completar la derivada de $sen\,4x$:

$$\frac{1}{4}\int \underbrace{4\cos 4x}_{f'}\;\underbrace{sen^2\,4x}_{f^2} = \frac{1}{4}\,\frac{sen^3\,4x}{3} + k$$

h) La derivada del exponente es $3x^2$. Multiplicamos por 3:

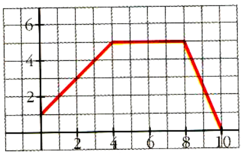
$$\int x^2\, e^{x^3-1} = \frac{1}{3}\int 3x^2\, e^{x^3-1} = \frac{1}{3}e^{x^3-1} + k$$

222

3. Área bajo una curva

a) Calcula el área bajo la gráfica de la derecha en los intervalos [0, 2] y [2, 6].

b) Si esta gráfica representa la velocidad (m/s) de un móvil en función del tiempo, ¿qué representa cada una de las áreas anteriores?



a) ■ El área en el intervalo [0, 2] es la de un trapecio rectángulo de bases 1 y 3 y altura 2.

$$A_{[0,\,2]} = \frac{1+3}{2}\cdot 2 = 4 \rightarrow \int_0^2 f = 4$$

■ En el intervalo [2, 6], el área es la suma de las áreas de un trapecio y de un rectángulo.

$$A_{[2,\,6]} = \frac{3+5}{2}\cdot 2 + 2\cdot 5 = 18 \rightarrow \int_2^6 f = 18$$

b) En una gráfica *velocidad-tiempo*, estas áreas representan el espacio recorrido por un móvil en los intervalos de tiempo [0, 2] y [2, 6].

4. La función área

a) Represente la función

$$f(x) = 2x$$

y halla el área limitada por f en los intervalos [0, 1], [0, 2], [0; 2,5] y [0, 3].

b) Haz una tabla de valores de la función $F(x) = \int_0^x f$ y represéntala.

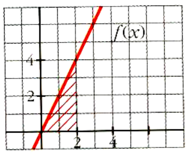
c) ¿Cuál de estas ecuaciones corresponde a la expresión analítica de F(x)?

I) $y = \frac{x^2}{2}$ II) $y = 2x^2$

III) $y = x^2$ IV) $y = x^2 + 1$

d) Comprueba que la derivada de la función área coincide con la función que limita esa área.

a) Tenemos que hallar en cada caso el área de un triángulo cuya base es la amplitud del intervalo correspondiente y cuya altura es $2x$:

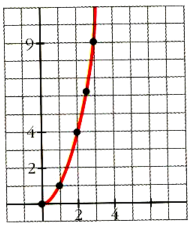


$A_{[0,\,1]} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$ $A_{[0,\,2]} = \frac{2\cdot 4}{2} = 4$

$A_{[0;\,2,5]} = \frac{2,5\cdot 5}{2} = 6,25$ $A_{[0,\,3]} = \frac{3\cdot 6}{2} = 9$

b)

x	0	1	2	2,5	3	4	5
$F(x)$	0	1	4	6,25	9	16	25



c) Observamos que solo la III pasa por todos los puntos de la tabla de valores del apartado b).

d) Como $F(x) = x^2 \rightarrow F'(x) = 2x = f(x)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

5. Teorema Fundamental del Cálculo

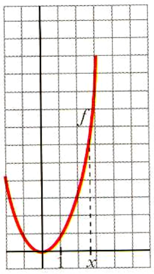
Sabiendo que esta gráfica corresponde a $f(x) = x^2$, justifica cuál de las siguientes funciones es

$$F(x) = \int_1^x f :$$

a) $F(x) = x^3 - 1$

b) $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$

c) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{3}$



Como debe cumplirse que $F'(x) = f(x)$, no puede ser $F(x) = x^3 - 1$, ya que $F'(x) = 3x^2$.

Cualquiera de las otras dos cumple que:

$$F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x).$$

Tiene que verificarse, además, que $F(1) = 0$.

Por ello, descartamos el caso b), en el que $F(1) = \dfrac{1}{3}$.

La solución es la c): $\displaystyle\int_1^x f = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$

6. Teorema Fundamental del Cálculo

a) Dada la función:

$$f(x) = x + 1$$

Obtén $F(x) = \displaystyle\int_3^x f.$

b) Halla después $\displaystyle\int_3^5 f$.

a) Empezamos buscando la función que cumpla $F'(x) = f(x)$.

Será $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + k$, pues $F'(x) = \dfrac{2x}{2} + 1 = x + 1$.

Además, $F(3) = 0 \rightarrow \dfrac{9}{2} + 3 + k = 0 \rightarrow k = -\dfrac{15}{2}$.

Por tanto: $\boxed{F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{15}{2}}$

b) $\displaystyle\int_3^5 f = F(5) = \frac{25}{2} + 5 - \frac{15}{2} = 10$

7. Cálculo de áreas

Calcula el área limitada por la función $y = x^3$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

- Puntos de corte de la función y el eje X: $x^3 = 0 \rightarrow x = 0$.

  El punto de corte está dentro del intervalo $[-1, 2]$; por lo tanto, habrá dos recintos: $[-1, 0]$ y $[0, 2]$.

- Hallamos una primitiva de la función: $G(x) = \displaystyle\int x^3 = \frac{x^4}{4}$

- Calculamos el valor de la primitiva en los extremos de los intervalos:

  $G(-1) = \dfrac{1}{4}$; $G(0) = 0$; $G(2) = 4$

- Obtenemos las áreas de cada recinto:

  $\displaystyle\int_{-1}^0 x^3 = G(0) - G(-1) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \rightarrow$ Área $[-1, 0] = \dfrac{1}{4}$

  $\displaystyle\int_0^2 x^3 = G(2) - G(0) = 4 - 0 = 4 \rightarrow$ Área $[0, 2] = 4$

  Área total $= \dfrac{1}{4} + 4 = \dfrac{17}{4}$ u^2

224

8. Cálculo de áreas

Halla el área del recinto limitado por las curvas:

$$y = \sqrt{5x} \quad e \quad y = \frac{1}{5}x^2$$

Representa el recinto.

- Calculamos los puntos de intersección de ambas curvas:

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{5x} \\ y = \dfrac{1}{5}x^2 \end{array}\right\} \quad \sqrt{5x} = \frac{1}{5}x^2 \rightarrow 5x = \frac{1}{25}x^4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 125x - x^4 = 0 \rightarrow x(125 - x^3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

- Función diferencia: $y = \sqrt{5x} - \frac{1}{5}x^2$.

- Primitiva de la función diferencia:

$$G(x) = \int \left(\sqrt{5x} - \frac{1}{5}x^2\right) = \frac{2\sqrt{5x^3}}{3} - \frac{x^3}{15}$$

- Hallamos el valor de G en $x = 0$ y en $x = 5$:

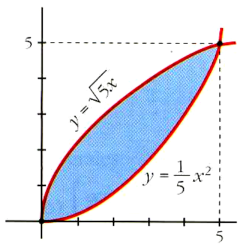
$$G(0) = 0; \quad G(5) = \frac{2 \cdot 25}{3} - \frac{125}{15} = \frac{25}{3}$$

- Calculamos el área:

$$\int_0^5 \left(\sqrt{5x} - \frac{1}{5}x^2\right) = G(5) - G(0) = \frac{25}{3}$$

$$\text{Área} = \frac{25}{3}\ \text{u}^2$$

- El área que hemos hallado es la representada en la figura de la derecha.



9. Cálculo de áreas

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones:

$$y = x^4 - 4x^3$$
$$y = x^2 - 4x^3$$

- Puntos de intersección: $x^4 - 4x^3 = x^2 - 4x^3 \rightarrow x^4 - x^2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

- Primitiva de la función diferencia: $G(x) = \int (x^4 - x^2) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$

- Valores de G en los puntos de corte:

$$G(0) = 0; \quad G(-1) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2}{15}; \quad G(1) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}$$

- Calculamos el área:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-1}^{0} (x^4 - x^3) = G(0) - G(-1) = -\frac{2}{15} \rightarrow \text{Área } [-1, 0] = \frac{2}{15} \\ \displaystyle\int_{0}^{1} (x^4 - x^3) = G(1) - G(0) = -\frac{2}{15} \rightarrow \text{Área } [0, 1] = \frac{2}{15} \end{array}\right\}$$

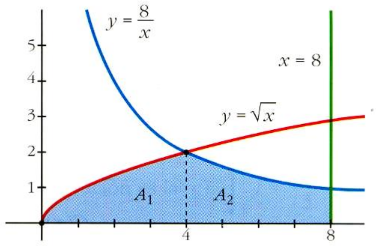
$$\text{Área pedida} = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\ \text{u}^2$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

10. Cálculo de áreas

Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = \frac{8}{x}$, $y = \sqrt{x}$, el eje X y la recta $x = 8$.

- Representamos las funciones para determinar el recinto del cual debemos calcular su área.



- Hallamos la abscisa del punto de intersección de las curvas $y = \frac{8}{x}$ e $y = \sqrt{x}$:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{8}{x} \\ y = \sqrt{x} \end{array}\right\} \quad \frac{8}{x} = \sqrt{x} \;\rightarrow\; \frac{64}{x^2} = x \;\rightarrow\; x^3 = 64 \;\rightarrow\; x = 4$$

- Dividimos el recinto en dos partes para poder calcular sus áreas aplicando la regla de Barrow:

  A_1: será el recinto limitado por la curva $y = \sqrt{x}$ y el eje X entre las abscisas $x = 0$ y $x = 4$.

  A_2: será el recinto limitado por la curva $y = \frac{8}{x}$ y el eje X entre las abscisas $x = 4$ y $x = 8$.

- Calculamos el área de A_1:

$$\int_0^4 \sqrt{x} = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^4 = \frac{2\sqrt{4^3}}{3} = \frac{16}{3}$$

Área $A_1 = \frac{16}{3}$ u^2

- Calculamos el área de A_2:

$$\int_4^8 \frac{8}{x} = \Big[8\, ln\, |x|\Big]_4^8 = 8\, ln\, 8 - 8\, ln\, 4 = 8\, ln\, \frac{8}{4} = 8\, ln\, 2$$

Área $A_2 = 8\, ln\, 2$

- El área pedida será la suma de las áreas calculadas:

Área pedida $= A_1 + A_2 = \left(\frac{16}{3} + 8\, ln\, 2\right)$ u^2

226

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

9

PARA PRACTICAR

1 Halla una primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 1$ b) $f(x) = 2x - \sqrt{3}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{2} + x^2$ d) $f(x) = -8x^3 + 3x^2$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ f) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{3}{5x^4}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{x}{3}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

2 Calcula:

a) $\int \sqrt{3x}$ b) $\int \sqrt[3]{5x^2}$ c) $\int \dfrac{x + x^2}{\sqrt{x}}$ d) $\int \dfrac{x^3 - 2}{x^2}$

e) $\int \dfrac{3}{x}$ f) $\int \dfrac{2}{x + 1}$ g) $\int \dfrac{x - 2}{x^2}$ h) $\int \dfrac{3 - 2x}{x}$

3 Resuelve:

a) $\int sen\ 3x$ b) $\int cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $\int \dfrac{1}{cos^2 5x}$ d) $\int (1 + tg^2\ 3x)$

e) $\int \dfrac{cos\ x}{sen\ x}$ f) $\int \left(1 - sen\ \dfrac{x}{2}\right)$

g) $\int sen\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ h) $\int cos\ \dfrac{\pi}{2}\ x$

4 Calcula:

a) $\int e^{x+3}$ b) $\int e^{2x-1}$ c) $\int 2^{x-7}$ d) $\int 3^{\frac{x}{2}}$

5 Calcula:

a) $\int (x - 3)^3$ b) $\int (2x + 1)^5$

c) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$ d) $\int \sqrt{3x - 5}$

e) $\int \sqrt[3]{\dfrac{x + 3}{2}}$ f) $\int \dfrac{3}{2x - 1}$

g) $\int \dfrac{2x}{x^2 + 2}$ h) $\int \dfrac{x}{3x^2 - 4}$

6 Calcula:

a) $\int x\sqrt{5x^2 + 1}$ b) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3 - 3}}$

c) $\int \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 3}$ d) $\int x\,e^{x^2}$

e) $\int \dfrac{5x}{3x^2 + 2}$ f) $\int sen^2 x\ cos\ x$

g) $\int \dfrac{x^3}{x^4 - 4}$ h) $\int x\ sen\ x^2$

7 Calcula:

a) $\int 3e^{5x}$ b) $\int x^2 \cdot 2^{-x^3+5}$

c) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ e^{\sqrt{x}}$ d) $\int \dfrac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 2}}$

e) $\int \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x + 5}$ f) $\int \dfrac{3x - 2}{\sqrt{3x - 2}}$

8 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$ b) $\int \dfrac{x^2 + 5x - 7}{x + 3}$

c) $\int \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ d) $\int \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$

☛ *Divide y transforma la fracción así:*

$$\frac{\textit{Dividendo}}{\textit{divisor}} = \textit{cociente} + \frac{\textit{resto}}{\textit{divisor}}$$

9 Calcula:

a) $\int \dfrac{1}{x^2}\ sen \dfrac{1}{x}$ b) $\int sen\ x\ \ cos\ x$

c) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}$ d) $\int \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

e) $\int (2x^2 + 1)^2$ f) $\int \dfrac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}}$

g) $\int \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2}$ h) $\int \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

i) $\int \dfrac{2}{x}\ \ ln\ x$ j) $\int \dfrac{1}{e^x}\ cos\ e^{-x}$

227

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

10 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int_2^5 (-3x^2)$ b) $\int_4^6 (2x - 1)$

c) $\int_{-2}^2 (x^3 + x)$ d) $\int_1^4 \sqrt{3x}$

e) $\int_1^e \frac{1}{x}$ f) $\int_{-1}^3 e^{x-2}$

g) $\int_0^\pi (sen\ x - cos\ x)$ h) $\int_{-\pi}^\pi sen\ 2x$

11 **S** Halla, en cada caso, el área limitada por:

a) $f(x) = x^2 - 4$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

b) $f(x) = 2x - x^2$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y el eje X.

d) $f(x) = 1 - x^2$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

e) $f(x) = e^x$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

f) $f(x) = x^2 + 1$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

12 Halla las integrales de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ en $[0, 2]$

b) $f(x) = 2\ cos\ x$ en $[0, \pi/2]$

c) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 2)$ en $[-1, 2]$

d) $f(x) = sen\ \frac{x}{4}$ en $[0, \pi]$

PARA RESOLVER

13 **S** Calcula el área comprendida entre las curvas:

a) $y = x^2$; $y = x$ b) $y = x^2$; $y = 1$

c) $y = x^2$; $y = x^3$ d) $y = x^2$; $y = -x^2 + 2x$

e) $y = 2x^2 + 5x - 3$; $y = 3x + 1$

f) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$; $x = -2$; $x = 2$

14 **S** Calcula el área de los recintos limitados por:

a) La función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y los ejes de coordenadas.

b) La curva $y = x^3$, la recta $x = 2$ y el eje X.

c) La función $y = sen\ x$, el eje de abscisas y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = -\frac{\pi}{4}$.

d) La función $y = cos\ x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = \pi$.

15 **S** Calcula el área comprendida entre las curvas:

a) $y = x^2$ e $y = 3 - 2x$

b) $y = 4 - x^2$ e $y = 3x^2$

c) $y = x$ e $y = x^2 - 2$

d) $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 4$

e) $y = (x + 2)^2 (x - 3)$ y el eje de abscisas.

16 **S** Halla el área comprendida entre la curva $y = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.

17 **S** Calcula el área limitada por las siguientes curvas:

a) $y = x^3 + x^2$; $y = x^3 + 1$; $x = -1$; $x = 1$

b) $y = x^2$; $y = 1 - x^2$; $y = 2$

c) $y = x(x - 1)(x - 2)$; $y = 0$

d) $y = x^2 - 2x$; $y = x$

e) $y = x^3 - 2x$; $y = -x^2$

f) $y = 2x - x^3$; $y = x^2$

18 Un depósito se vacía de forma variable según la función $v(t) = 5 - 0{,}1t$ (t en min, v en l/min). Calcula lo que se ha vaciado el depósito entre los minutos 100 y 200.

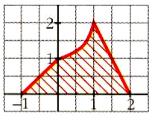
19 **S** Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función: $m = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$ siendo m la cantidad de material en kg y t la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?

20 **S** Calcula el área limitada por la gráfica de $y = x + x^2$, la tangente a esa curva en $x = 2$ y el eje de abscisas.

228

21 Dada $y = x^3 - 2x^2 + x$, halla la ecuación de su tangente en el origen y calcula el área de la región encerrada entre la curva y la tangente.

22 Halla el área de la figura sabiendo que el lado curvo corresponde a la función $y = x^2 + 1$.



23 Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, escribe las ecuaciones de las tangentes a f en los puntos de corte con el eje de abscisas. Halla el área comprendida entre las rectas tangentes y la curva.

24 Dada $f(x) = x + 1$, halla:

a) $\int_0^x f$ b) $\int_1^x f$ c) $\int_{-1}^x f$ d) $\int_1^3 f$

25 a) Halla el área limitada por $y = |2x - 4|$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

b) Calcula $\int_{-2}^{3} |2x - 4|$.

26 Calcula: a) $\int_0^2 f(x)$ b) $\int_{-1}^3 g(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

27 S Dada la función $f(x)$, halla el área limitada por $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < \dfrac{-1}{2} \\ -x^2 + 3x & \dfrac{-1}{2} \le x \le 3 \\ |x + 3| & x > 3 \end{cases}$$

28 Halla una función f de la cual sabemos que: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$ y que $f(1) = 0$

29 Halla la función primitiva de la función $y = 3x^2 - x^3$ que pase por el punto $(2, 4)$.

30 Halla la función que tome el valor 2 en $x = 1$ y cuya derivada es $f'(x) = 3x^2 + 6$.

31 Halla la primitiva de $f(x) = 1 - x - x^2$ que corte al eje de abscisas en $x = 3$.

CUESTIONES TEÓRICAS

32 Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de f, ¿se verifica necesariamente que $F(x) = k + G(x)$? Justifica la respuesta.

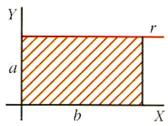
33 Siendo $F(x) = \int_1^x f = 3x^2 - 5x$, halla la función f.

Calcula $F(0)$ y $F(2)$.

34 Calcula el área bajo la curva $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo variable $[1, x]$.

Halla el área para $x = 4$.

35 Demuestra, utilizando integrales, que el área del rectángulo es $A = b \cdot a$.



☛ *Halla la ecuación de la recta r y calcula el área limitada por r y el eje OX entre $x = 0$ y $x = b$.*

PARA PROFUNDIZAR

36 S Dada la función $f(x) = a\, e^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}$ $(x \ne 0)$:

a) Calcula $\int_1^2 f(x)$ en función de a.

b) Se sabe que F es una primitiva de f. Calcula a si $F(1) = 0$ y $F(2) = 1/2$.

37 S Expresa por una integral el área del triángulo de vértices $(0, 3)$, $(7, 3)$ y $(7, 10)$. Explica el significado de la integral escrita.

38 S Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 4)$ y $C(-1, 1)$, en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la de ecuación $y = x^2$.

39 S La curva $y = a[1 - (x - 2)^2]$, con $a > 0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a.

ANEXO F (CAPÍTULOS VI, VII, VIII, IX Y X):

CUADERNILLO DE LA INTEGRAL DEFINIDA *181*

ANEXO F (CAPÍTULOS VI, VII, VIII, IX Y X):
CUADERNILLO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

En el presente anexo hemos incluido el cuadernillo de la integral definida entregado a los alumnos de 2º D, de bachillerato de ciencias sociales del ciclo de cierre, que debían cumplimentar para poder ser analizadas las cuarenta categorías de comprensión matemática.

Este anexo completa el texto de las categorías de comprensión matemática establecidas en el capítulo VI y, a su vez, sirve de guía para una mejor lectura y comprensión de los capítulos VII, VIII, IX y X. Evidentemente, todas las categorías no están incluidas en todos los ciclos de la investigación aunque son progresivas, por tanto, en cada uno de ellos se distribuyó un cuadernillo específico, así ha quedado constatado en la redacción de los capítulos anteriores, y, para no extender en demasía el presente anexo, hemos considerado suficiente incluir solamente el cuadernillo de la integral definida de diciembre de 2008.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

LA INTEGRAL

Curso 2008/09

NOMBRE:...

Lee detenidamente las páginas siguientes y recordando lo expuesto en clase, contesta lo que se te pide.

Es obligatorio entregar este trabajo antes del 15 de enero de 2009 y debe hacerse de forma individualizada.

Burgos, diciembre de 2008

1.2. INTEGRAL DEFINIDA.

1.2.1. CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA.

En la geometría elemental se deducen fórmulas para el área de algunas figuras planas, en general, basándose en las áreas del triángulo y del círculo. Hasta la aparición del Cálculo Infinitesimal fue imposible hallar de manera sistemática el área de figuras planas delimitadas por curvas definidas por funciones. Nosotros no pretendemos hacer un estudio exhaustivo de la integral definida, más bien, dar unas pinceladas donde se exponga lo esencial.

Estudiemos, por ejemplo, cómo se puede calcular el área encerrada entre el eje de abscisas, la función $f(x)$ y las rectas $x = a; x = b$.

RAYA O COLOREA, EN LA SIGUIENTE FIGURA, EL ÁREA QUE SE PRETENDE CALCULAR

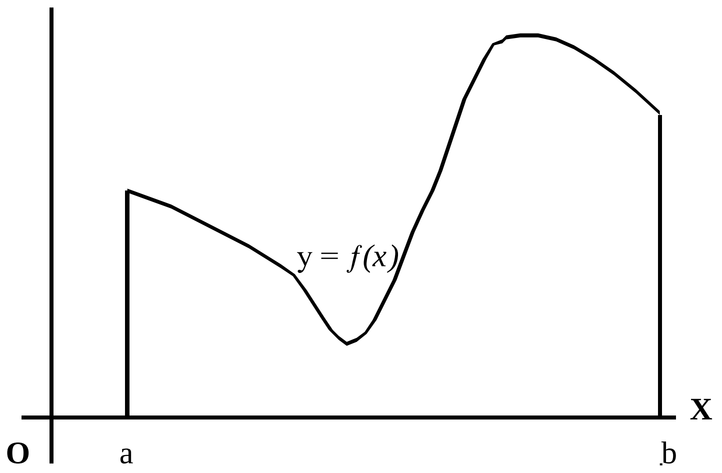


Figura 1.2.1.1

Veamos lo que es una suma inferior y una suma superior, para el área de la Figura 1.2.1.1 Consideramos una partición del intervalo $[a, b]$, la dada por, $P = \{ a = x_0, x_1, x_2 = b \}$; sean m_i = *extremo inferior* $\{ f(t) / t \in [x_{i-1}, x_i] \}$, $i = 1, 2$ y sean M_i = *extremo superior* $\{ f(t) / t \in [x_{i-1}, x_i] \}$, $i = 1, 2$; como muestran las Figuras 1.2.1.2 (Suma inferior) y Figura 1.2.1.3 (Suma superior).

RAYA LA SUMA INFERIOR

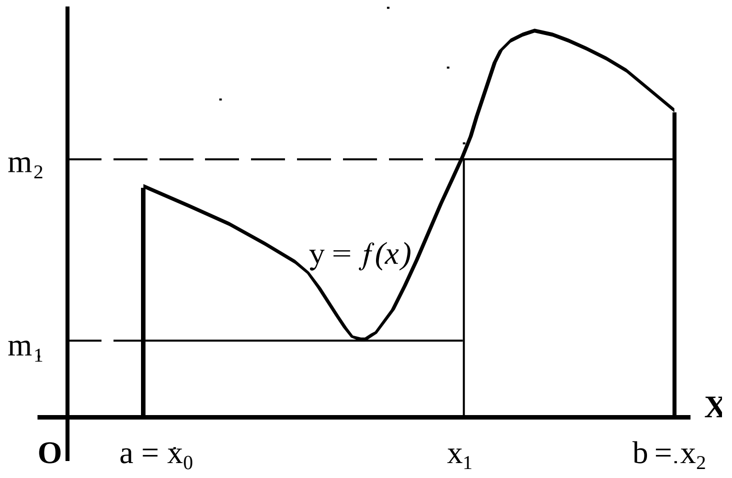


Figura 1.2.1.2

Suma inferior$(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1)$

RAYA LA SUMA SUPERIOR

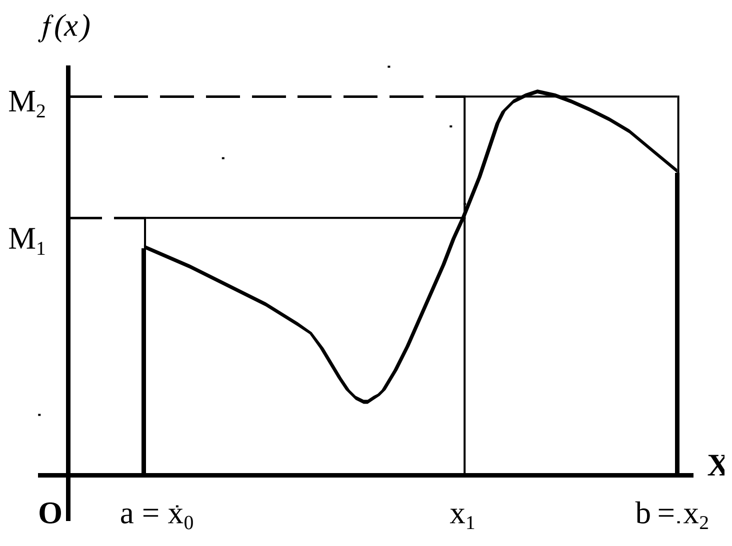


Figura 1.2.1.3

Suma superior$(f,P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1)$

Consideremos otra partición más fina, contiene los puntos de la partición anterior y alguno más, $P' = \{x_0, x'_1, x_1, x_2\}$ y hagamos las respectivas sumas inferiores y superiores, ver Figuras 1.2.1.4 y 1.2.1.5

RAYA LA SUMA INFERIOR PARA LA NUEVA PARTICIÓN

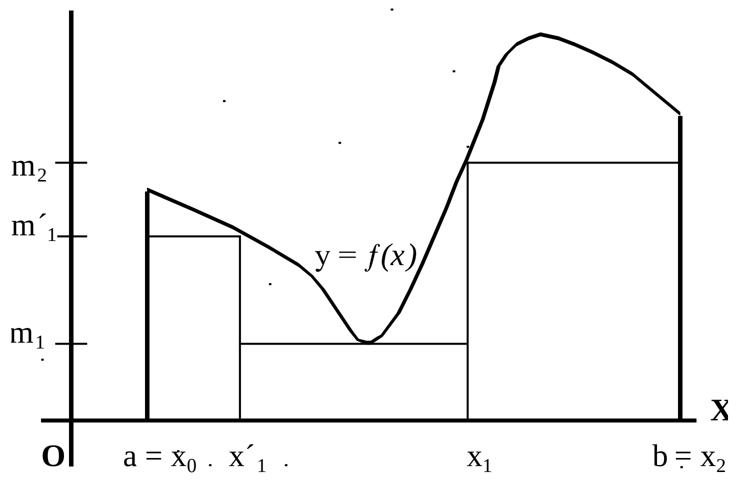


Figura 1.2.1.4

Suma inferior$(f,P') = m'_1(x'_1 - x_0) + m_1(x_1 - x'_1) + m_2(x_2 - x_1)$

RAYA LA SUMA SUPERIOR PARA LA NUEVA PARTICIÓN

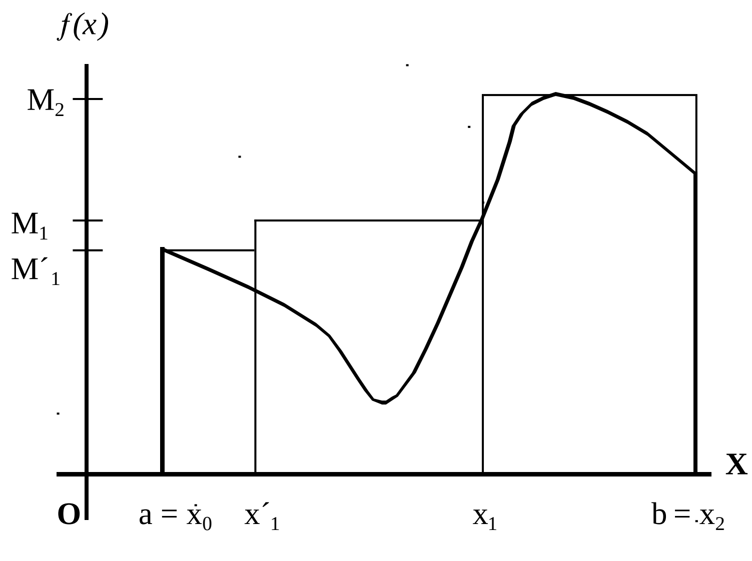


Figura 1.2.1.5

Suma superior$(f,P') = M'_1(x'_1 - x_0) + M_1(x_1 - x'_1) + M_2(x_2 - x_1)$

FÍJATE EN LOS GRÁFICOS ANTERIORES Y COMPLETA LO QUE FALTA

Es obvio que se cumple:

Suma inferior(ƒ,P) $\leq$ ________________________________ $\leq$ *Área*

Área $\leq$ *Suma superior(ƒ,P')* $\leq$ _______________________________

Este proceso se podría repetir y siempre ocurre que las áreas superiores de las particiones más finas disminuyen y las áreas inferiores, de las particiones más finas, aumentan. Así pues, concluimos, que para cualquier partición de *[a, b]* se verifica:

Suma inferior $\leq$ *Área* $\leq$ *Suma superior.*

A. INTEGRAL DE DARBOUX.

Sea *[a, b]* un intervalo cerrado y acotado, llamamos *partición* de *[a, b]* a todo conjunto de la forma: $P = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$. Sean *P y Q* dos particiones de *[a, b],* diremos que *P* es *más fina* que *Q* si $Q \subset P$ (*P* contiene todos los puntos de *Q* y alguno más) .

Sea *ƒ* una función acotada, definida en *[a,b],* sean:

m = *extremo inferior* $\{ f(t) \,/\, t \in [a,b] \}$, M = *extremo superior* $\{ f(t) \,/\, t \in [a,b] \}$,

m_i = *extremo inferior* $\{f(t) \,/\, t \in [x_{i-1},x_i]\}$ *y* M_i = *extremo superior* $\{f(t) \,/\, t \in [x_{i-1},x_i]\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Llamamos *suma inferior y superior de Darboux* [*s(ƒ,P)* y *S(ƒ,P)* respectivamente], asociadas a *ƒ* y a *P*, a:

COMPLETA LO QUE FALTA

s(ƒ,P) = $m_1(x_1 - x_0)$ + _____________________ +______________________ + +___________________________+ $m_5(x_5 - x_4)$

S(f,P) = ______________________________+ ___________________________ +
+ $M_3(x_3 - x_2)$ +___________________________+____________________________

Es obvio que se cumple: $m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$, con lo que los conjuntos formados por las sumas inferiores y superiores asociados a una función están acotados. Además, si *P* es una partición más fina que *Q*, también se verifica: $s(f,Q) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,Q)$. Incluso para cualquier par de particiones *P y Q*, también se cumple: $s(f,P) \leq S(f,Q)$ (para demostrar este aserto basta considerar *P* $\cup$ *Q* como refinamiento común).

Sea *ƒ(x)* una función acotada en el intervalo *[a,b],* se define *integral inferior de Darboux* de *ƒ* en *[a, b]* al valor:

$$Inf \int_a^b f(x)dx = Extremo\ Superior\ \{s(f,P) / P\ es\ partición\ de\ [a,b]\}$$

Sea *ƒ(x)* una función acotada en el intervalo *[a,b],* se define *integral superior de Darboux* de *ƒ* en *[a,b]* al valor:

$$Sup \int_a^b f(x)dx = Extremo\ Inferior\ \{S(f,P) / P\ es\ partición\ de\ [a,b]\}$$

EXPRESA LO QUE ENTIENDES POR:

*INTEGRAL INFERIOR DE DARBOUX:*____

____

____

____

____

____

____

____

____

INTEGRAL SUPERIOR DE DARBOUX:

Definición: Sea f una función acotada en *[a,b]*, diremos que es **integrable Darboux** en *[a, b]* si las dos integrales anteriores coinciden, en cuyo caso se denota por: $\int_a^b f(x)dx$, y se lee *"integral entre a y b de f de x diferencial de x".*

Analicemos si la función es $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \quad es\, racional\, en\; [0,4] \\ 2 & si \quad x \quad es\, irracional\, en\; [0,4] \end{cases}$ es integrable Darboux en el intervalo [0, 4].

REPRESENTA LA FUNCIÓN $f(x)$

Considera la partición del intervalo *[0, 4]* dada por $P_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

CALCULA: m_1 = ______; m_2 = _____ ; m_3 = ______ ; m_4 = ______

REPRESENTA y CALCULA: $s(f, P_4)$

CALCULA: M_1 = ______; M_2 = ______ ; M_3 = _____ ; M_4 = ______

REPRESENTA y CALCULA: $S(f, P_4)$

Imagina que tomamos una partición más fina que P_4. Sea la nueva partición: $P_8 = \{0, 0'5, 1, 1'5, 2, 2'5, 3, 3'5, 4\}$ del intervalo $[0, 4]$.

DESARROLLA y CALCULA:

$s(f, P_8)$ = ________________ + _______________ + ______________ +
+ ____________________ + ___________________ + ______________ +
+ ____________________ + ________________ = ___________________

$S(f, P_8)$ = ________________ + _______________ + ______________ +
+ ____________________ + ___________________ + ______________ +
+ ____________________ + ________________ = ___________________

RAZONA CUÁNTO PUEDE VALER EL EXTREMO SUPERIOR DE LAS SUMAS INFERIORES

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

RAZONA CUÁNTO PUEDE VALER EL EXTREMO INFERIOR DE LAS SUMAS SUPERIORES

¿ ES $f(x)$ INTEGRABLE EN EL SENTIDO DE DARBOUX EN EL INTERVALO [0, 4]? JUSTIFICA LA RESPUESTA.

Teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.

Sea f:*[a, b]* $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$. Una condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea integrable Darboux en *[a, b]* es que para cada $\varepsilon > 0$, exista una partición *P* de *[a, b]* tal que *Suma superior(f,P) – Suma inferior(f,P)* < ε (exista una partición tal que la diferencia entre la suma superior e inferior se aproxima a cero más que cualquier número prefijado).

Corolarios: Toda función continua en *[a, b]* es integrable Darboux. Toda función monótona (creciente o decreciente) en *[a, b]* es integrable Darboux.

Ejemplo: Calcular la integral, si existe, de la función $f(x) = x$, en el intervalo *[0, 1].* La Figura 1.2.1.6 es su representación:

RAYA EL ÁREA QUE SE PRETENDE CALCULAR

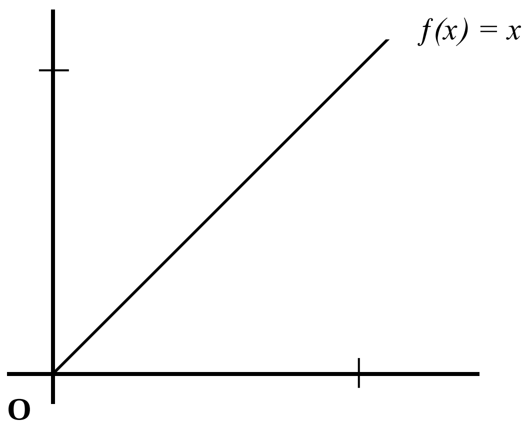


Figura 1.2.1.6

Imagina que $P_4 = \{ 0 = 0/4 < 1/4 < 2/4 < 3/4 < 4/4 = 1\}$ es una partición del intervalo [0,1].

RAYA $s(f,P_4)$ y $S(f,P_4)$

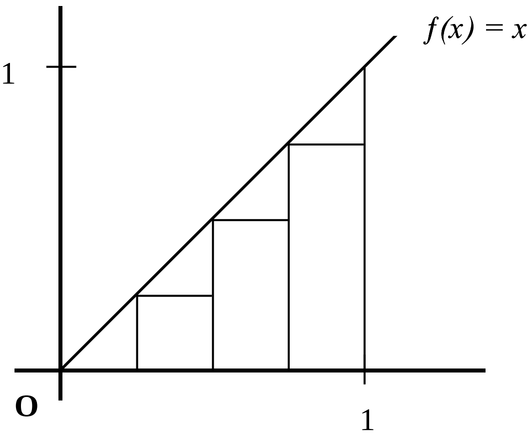


Figura 1.2.1.7 *Suma inferior:* $s(f,P_4)$

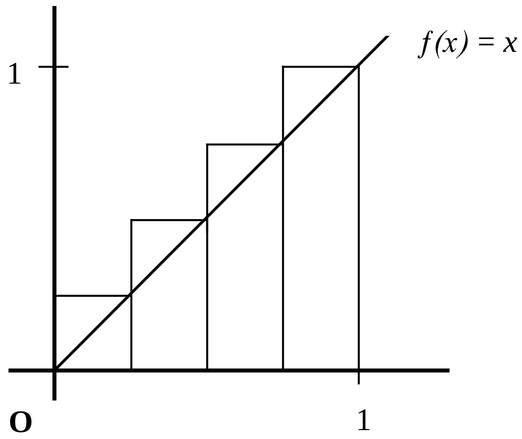


Figura 1.2.1.8 *Suma superior:* $S(f,P_4)$

CALCULA:

m_1 = ____________________; m_2 = _____________________ ;

m_3 = ___________________ ; m_4 = _______________________

M_1 = ___________________; M_2 = _______________________ ;

M_3 = ___________________ ; M_4 = _______________________

$s(f,P_4)$ =____________________+________________________+

+___________________________+_________________________=

=____ = ___________

$S(f,P_4)$ =____________________+_______________________+

+___________________________+_________________________=

=____ = ___________

Imagina que $P_8 = \{ 0 = 0/8 < 1/8 < 2/8 < 3/8 < 4/8 < 5/8 < 6/8 < 7/8 < 8/8 = 1\}$ es una nueva partición, más fina que la anterior, del intervalo [0,1].

DESARROLLA y CALCULA:

$s(f,P_8) = 0·1/8 + 1/8·1/8 +$ _____________ + __________ +

+ ___________ + _____________ + __________ + 7/8·1/8 =

= ____ =

= ____

$S(f,P_8) =$ 1/8·1/8 + __________ + 3/8·1/8 + __________ +

+ ___________ + ___________ + _________ + _________ =

= ____ =

= ____

RAZONA CUÁNTO PUEDE VALER EL EXTREMO SUPERIOR DE LAS SUMAS INFERIORES

____

____

____

____

____

____

RAZONA CUÁNTO PUEDE VALER EL EXTREMO INFERIOR DE LAS SUMAS SUPERIORES

¿ ES $f(x) = x$ INTEGRABLE EN EL SENTIDO DE DARBOUX EN EL INTERVALO [0,1]? JUSTIFICA LA RESPUESTA.

CALCULA, SI EXISTE, LA ANTERIOR INTEGRAL.

FÍJATE EN LAS FIGURAS 1.2.1.6, 1.2.1.7 y 1.2.1.8

Fijamos un número $\varepsilon>0$, sabemos que existe un número natural *n* tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ y consideremos la partición $P_n=\{ 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n =1\}$, con $x_i = i/n;\ \ i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Hallemos la diferencia entre la suma superior, $S(f,P_n)$, y la suma inferior, $s(f,P_n)$.

Obsérvese que M_i=*extremo superior de f(x)=supremo de f(x)=sup f(x)* $= x_i$ y m_i =*extremo inferior de f(x)=ínfimo de f(x)=inf f(x)*$=x_{i-1}$, siendo $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) = x_1(x_1 - x_0) + x_2(x_2 - x_1) + \ldots + x_i(x_i - x_{i-1}) + \ldots + x_n(x_n - x_{n-1}) -$$

$$- x_0(x_1 - x_0) - x_1(x_2 - x_1) - \ldots - x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - \ldots - x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \ldots +(x_i - x_{i-1})^2 + \ldots +(x_n - x_{n-1})^2 = n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Así pues, obtenemos: $S(f,P_n) - s(f,P_n) = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Lo cual nos demuestra que $f(x)$ es integrable, pues hemos encontrado la partición a la cual se refiere el teorema de caracterización. Calculemos el valor de la integral, para fijar ideas sea n = 4 y, por tanto, $P_4 = \{ 0 = 0/4 < 1/4 < 2/4 < 3/4 < 4/4 = 1\}$.

$$s(f,P_4) = \frac{0}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{0}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{4}{4}-\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\frac{i-1}{4}\left(\frac{i}{4}-\frac{i-1}{4}\right)=\sum_{i=1}^{4}\frac{i-1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}=0{,}5-0{,}125=0{,}375$$

$$S(f,P_4) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{0}{4}\right)+\frac{2}{4}\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)+\frac{4}{4}\left(\frac{4}{4}-\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\frac{i}{4}\left(\frac{i}{4}-\frac{i-1}{4}\right)=\sum_{i=1}^{4}\frac{i}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}=0{,}5+0{,}125=0{,}625$$

Para n = 8, no es difícil demostrar que:

$$s(f,P_8) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 8} = 0{,}5 - 0{,}0625 = 0{,}4375 \text{ y}$$

$$S(f,P_8) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 8} = 0{,}5 + 0{,}0625 = 0{,}5625$$

Nótese que en las fórmulas anteriores se ha aplicado la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

¿CUÁNTO CREES QUE PUEDEN VALER LAS SIGUIENTES SUMAS?

s(f,P$_n$) =

S(f,P$_n$) =

CALCULA, SI EXISTE:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

JUSTIFICA EL VALOR CALCULADO ANTERIORMENTE

B. INTEGRAL DE RIEMANN.

Recordando la Figura 1.2.1.1. Consideramos una partición del intervalo *[a, b],* la dada por, $P = \{x_0, x_1, x_2\}$; sean $m_i = \inf \{ f(t) \,/\, t \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = 1, 2$ y sean $M_i = \sup \{ f(t) \,/\, t \in [x_{i-1}, x_i] \}$, $i = 1, 2$; como mostraban las Figuras 1.2.1.2 (Suma inferior) y Figura 1.2.1.3 (Suma superior).

Tomemos el conjunto $\{ f(t_i) \text{ con } t_i \in [x_{i-1}, x_i] \}$, $i = 1, 2$ (t_i es un punto cualquiera del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$), al ser $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$, para todo i, se obtiene:

RAYA EL ÁREA DE LA SIGUIENTE FIGURA QUE CORRESPONDE CON LA PARTE AMPLIADA Y ESCRITA EN NEGRITA (SUMA DE RIEMANN)

$$\textit{Suma inferior}(f,P) \leq \mathbf{f(t_1)\,(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1)} \leq \textit{Suma superior}(f,P).$$

Esta circunstancia queda ilustrada el la Figura 1.2.1.9

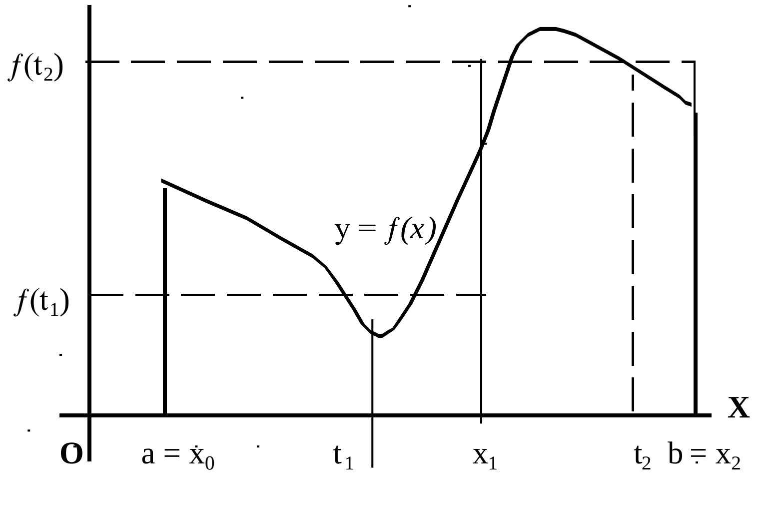


Figura 1.2.1.9

Sea *[a, b]* un intervalo cerrado y acotado, $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una partición de *[a, b],* Sea $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ un conjunto de puntos intermedios asociado *a* P ($t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$). Se denomina *suma de Riemann* asociada a f, a P y a T al número:

$$R(f,P,T) = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$$

Concluimos que para cualquier conjunto de puntos intermedios, *T*, asociados a la partición *P* se verifica: $s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P)$. Así pues por el teorema del encaje, podemos calcular la integral de Darboux por medio de las sumas de Riemann (por eso muchos autores confunden la integral de Darboux con la de Riemann aunque ambas integrales coinciden).

Como puede observar el lector, aún no hemos obtenido un método general para poder calcular el área comprendida entre una función positiva, el eje de abscisas y dos rectas verticales. El siguiente teorema resuelve el problema en cuestión.

Diremos que la función F(x) es una primitiva de $f(x)$ en [a, b] si $F'(x) = f(x)$.

COMPLETA LO QUE FALTA EN LOS DOS TEOREMAS SIGUIENTES:

2.2.2. TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE LAGRANGE O TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS

Si h es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un punto interior c del intervalo (a, b) tal que $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

Demostración. Por desconocimiento del teorema de Rolle, la demostración del teorema del valor medio se omite. Sin embargo hacemos la interpretación geométrica del mismo, ésta es:

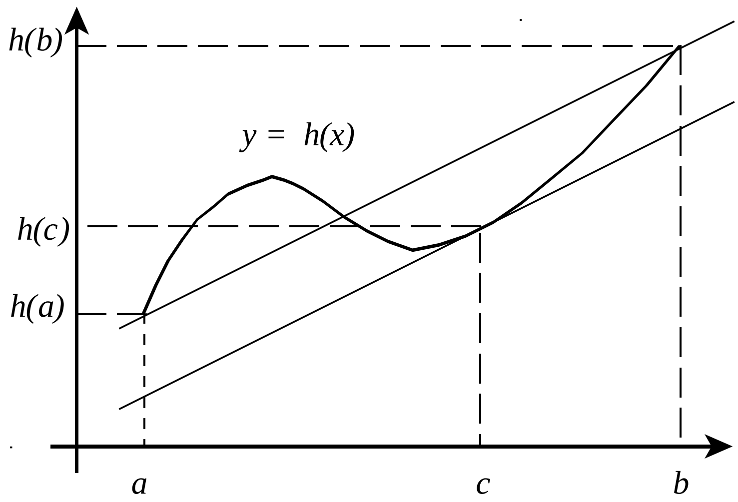


Figura 2.2.2 Interpretación geométrica del teorema del valor medio

Nótese que la recta que pasa por los puntos $A(a, h(a))$ y B__________ tiene pendiente $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}$. La recta que pasa por el punto $C(c, h(c))$ es tangente a la curva en dicho punto, por tanto su pendiente es ___________.

Al ser ambas rectas paralelas sus pendientes coinciden, es decir: $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c)$, en consecuencia se obtiene: ___________ $= h'(c)(b - a)$, lo que concluye la interpretación geométrica.

2.2.3. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.

Si f es integrable Riemann en *[a, b]* y *G* es una primitiva suya sobre este intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Este teorema, es uno de los más importantes del Análisis, ya que relaciona el cálculo diferencial con el integral, dando un método de cálculo (a esta fórmula se le conoce como regla de Barrow).

Demostración. Al objeto de facilitar la comprensión del teorema consideremos una partición con 5 nodos, sea $P = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = b\}$ una partición arbitraria de *[a, b].* Entonces tenemos:

$G(x_1)$ - __________ + $G(x_2) - G(x_1)$ + __________ - $G(x_2) + G(x_4)$ - _________ =

$= G(b) - G(a).$

Por el teorema del valor medio, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots, 4,$ existe un α_i, interior, tal que $G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = G'(\alpha_i)\Delta x_i = f(\alpha_i)\Delta x_i$, por ser *G* una primitiva de f y, además, tal y como se muestra en las dos figuras siguientes se verifican las igualdades:

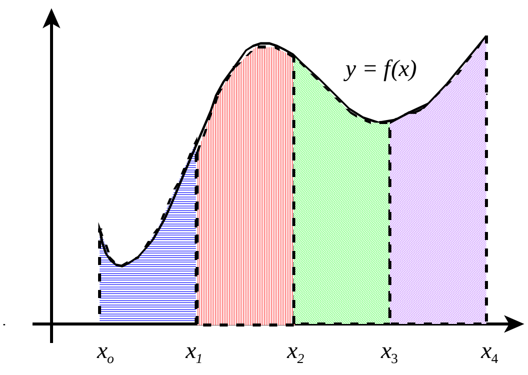


Figura 2.2.3.1

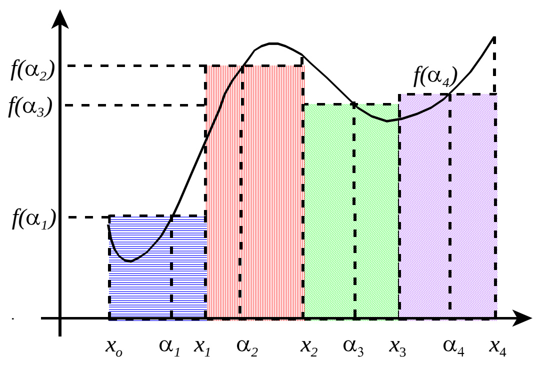


Figura 2.2.3.2

$G(x_1)$ - _________ $= f(\alpha_1)\Delta x_1$, $G(x_2) - G(x_1) =$ __________ Δx_2,

__________ $- G(x_2) = f(\alpha_3)\Delta x_3$, $G(x_4) - G(x_3) = f(\alpha_4)$ ___________. *Por tanto:*

$G(b) - G(a) = f(\alpha_1)\Delta x_1 +$ ______________ $+ f(\alpha_3)\Delta x_3 + f(\alpha_4)\Delta x_4 = R(f,P,T).$

Si *T* = {$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$} es el conjunto de puntos intermedios asociados a *P*, al estar acotadas las sumas de Riemann por las de Darboux, se obtiene: $s(f,P) \leq R(f,P,T) \leq S(f,P)$.

Por otra parte, como *P* es una partición arbitraria, deducimos:

$$Inf \int_a^b f(x)dx \leq G(b) - G(a) \leq Sup \int_a^b f(x)dx$$

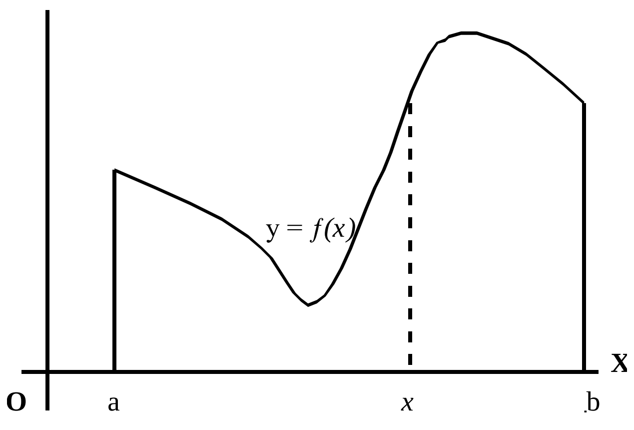
Al ser $f(x)$ integrable obtenemos: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ c. q. d.

Por otro lado, si f es una función integrable Riemann en *[a, b],* para cada *x* de *[a, b],* la función, *F(x),* existe y se llama ***integral indefinida*** *de* f,

siendo: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Además si f es integrable y tiene una primitiva, *G*, entonces la integral indefinida es una primitiva de f, así pues, para todo *x* del intervalo *[a, b],* se tiene: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)$ y por tanto dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante.

DIBUJA, EN EL SIGUIENTE GRÁFICO, LA FUNCIÓN F(x)



Además si f es integrable y tiene una primitiva, *G*, entonces la integral indefinida es una primitiva de f, así pues, para todo *x* del intervalo *[a, b],* se tiene: $F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$

2.2.4. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

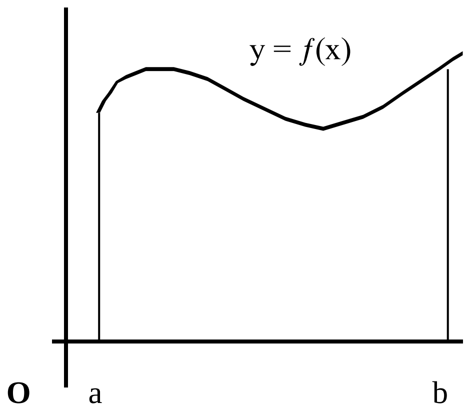
1. Si los límites de integración coinciden, la integral es nula. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. Si los extremos se intercambian, la integral cambia de signo.

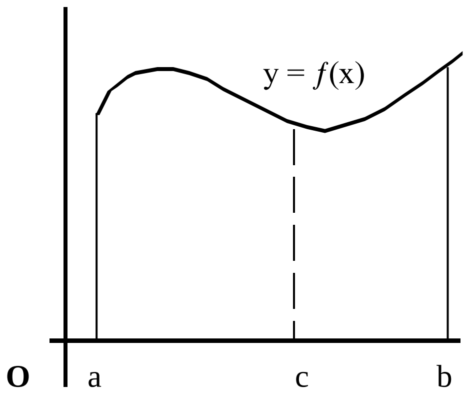
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Si c es un punto del intervalo [a, b], se verifica:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

RAYA LAS ÁREAS CORRESPONDIENTES CON DISTINTOS COLORES Y ESCRIBE SOBRE ELLA SU EXPRESIÓN ANALÍTICA

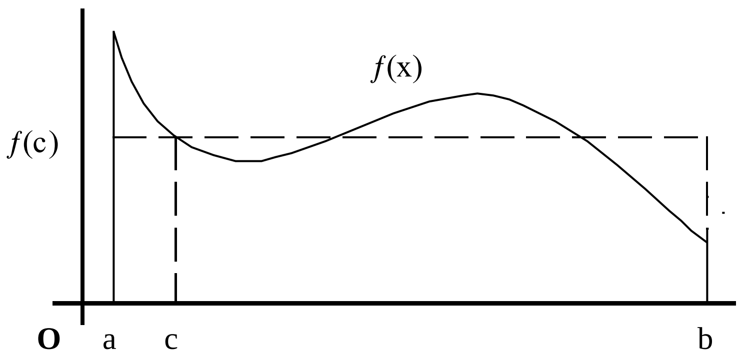


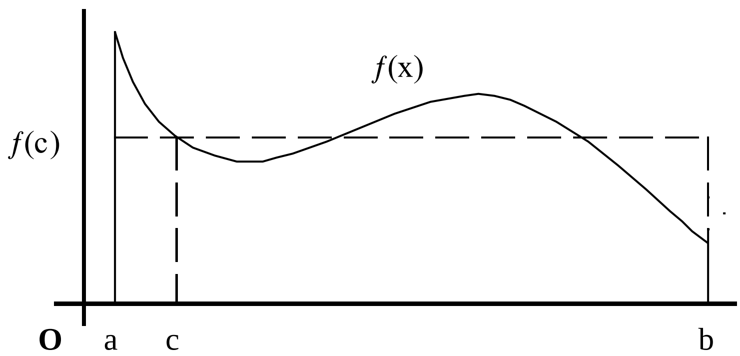


4. Si *K* es una constante, se verifica: $\int_a^b K\,f(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx$

5. Si f es una función continua en *[a, b],* entonces existe un punto *c* del intervalo *[a, b],* tal que: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

RAYA LAS ÁREAS CORRESPONDIENTES CON DISTINTOS COLORES Y ESCRIBE SOBRE ELLA SU EXPRESIÓN ANALÍTICA





ANEXO G (CAPÍTULO VII):* LA ACCIÓN EN EL CICLO DE EXPLORACIÓN**...205***

VII.3. ACCIÓN **206**

VII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN..206

VII.3.1.1. SESIÓN 1: Miércoles, 12 de mayo de 2004.................................206

VII.3.1.2. SESIÓN 2: Jueves, 13 de mayo de 2004 209

VII.3.1.3. SESIÓN 3: Viernes, 14 de mayo de 2004....................................212

VII.3.1.4. SESIÓN 4: Martes, 18 de mayo de 2004.....................................215

VII.3.1.5. SESIÓN 5: Miércoles, 19 de mayo de 2004.................................218

VII.3.1.6. SESIÓN 6: Jueves, 20 de mayo de 2004 222

VII.3.1.7. SESIÓN 7: Viernes, 21 de mayo de 2004....................................227

VII.3.1.8. SESIÓN 8: Martes, 25 de mayo de 2004.....................................231

VII.3.1.9. SESIÓN 9: Miércoles, 26 de mayo de 2004.................................235

VII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN 238

ANEXO G (CAPÍTULO VII): LA ACCIÓN EN EL CICLO DE EXPLORACIÓN

Quedó establecido, en el capítulo VII, que la redacción de la *acción* del ciclo de exploración se completaba en el correspondiente anexo, así pues, en estos momentos lo presentamos y, una vez más, para facilitar la ubicación del anexo G en la memoria se ha seguido el índice que le corresponde dentro del capítulo en el que está incardinado.

Pensamos que el apartado *VII.3.2. Reflexiones de la acción* de la memoria también debemos incluirlo para dar solución de continuidad a la *descripción de la acción* redactada en este anexo y, en consecuencia, así lo hacemos.

VII.3. ACCIÓN

Tal y como quedó especificado en el capítulo VII, la acción se desarrolló con 25 alumnos de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales. El profesor investigador se ha servido para la redacción de este texto de su cuaderno de campo, la observación de clase, los apuntes y comentarios de los alumnos, etc. Además, en este apartado también se describe la observación directa de la misma de forma muy puntual, utilizando las anotaciones del profesor efectuadas en momentos posteriores a la finalización de cada una de las clases. He aquí el resultado de la acción o implementación del primer ciclo de la investigación, reconocido como de exploración (curso 2003-2004).

VII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN

VII.3.1.1. SESIÓN 1: Miércoles, 12 de mayo de 2004

Los alumnos se hacen los remolones, les cuesta comenzar la clase y prestar atención, el profesor, mientras tanto, prepara el material necesario para desarrollar la clase, es decir: proyector, transparencias, borra la pizarra, etc. Transcurridos unos minutos el profesor comenta a los alumnos que después de estudiados los distintos tópicos del Análisis Matemático (límites, continuidad, derivabilidad, representación gráfica de funciones y problemas de optimización), sólo resta la última parte del mismo, denominada Integral (definida e indefinida). La clase se dedica a hacer una breve introducción histórica del tema, definir el concepto de área, determinar el área del rectángulo y del círculo y, posteriormente, se formaliza el concepto de integral definida[1]. Todo ello lo explica el profesor-investigador con ayuda de transparencias y, apoyándose, con notaciones precisas en la pizarra.

Todos los estudiantes están expectantes por el desarrollo de esta primera sesión con los nuevos materiales, muchos de ellos quedan sorprendidos y, posiblemente, la mayoría prestan más atención a la manipulación de dichos materiales que a los contenidos científicos que se pretenden enseñar. El ambiente de clase es de cierto nerviosismo, no demasiado, los alumnos hablan entre sí y muestran poca atención a las explicaciones del profesor. Además, al principio protestan porque, según ellos, no pueden tomar apuntes puesto que la clase está en penumbra; el profesor manifiesta que no es necesario tomar apuntes al pie de la letra y lo que se pretende, de

[1] Véase Área e Integral del capítulo V de la presente memoria.

momento, es que comprendan la necesidad de encontrar nuevos procedimientos para el cálculo de áreas. Después de establecer el orden y matizar las normas de actuación comienza la clase como sigue:

DESARROLLO HISTÓRICO DE LA INTEGRAL

Con una breve introducción, se hace un comentario muy superficial de los científicos más importantes (Eudoxo, Arquímedes, Riemann y Darboux), cuyos trabajos han sido fundamentales para el cálculo de áreas[2].

EL ÁREA COMO LÍMITE

El profesor expone cómo puede calcularse el área de un rectángulo cuya base y altura son números enteros positivos (naturales), a los alumnos les resulta evidente que dicho área es base por altura y el resultado es un número entero de unidades cuadradas. Si las dimensiones del rectángulo son racionales positivas, los alumnos tienden a aplicar la fórmula anterior; sin embargo, la demostración de tal aserto exige expresar las dimensiones lineales como fracciones irreducibles y, posteriormente, tomar el mínimo común múltiplo de los denominadores, expresar las fracciones anteriores mediante otras equivalentes de igual denominador, establecer la unidad cuadrada de superficie como el total de los cuadraditos que se obtienen del común denominador al cuadrado y, a partir de este momento, determinar las unidades cuadradas de la superficie del rectángulo[3]. Si alguna de las dimensiones del rectángulo son irracionales, entonces el profesor investigador aproxima la base y la altura por medio de sendas sucesiones de números racionales o fraccionarios, por tanto, estaríamos en el supuesto anterior y el producto de ambas sucesiones tenderá al área que pretendemos calcular, es decir, el límite del producto de las sucesiones coincide con el producto de los límites de dichas sucesiones y, en consecuencia, el área de dicho rectángulo es base por altura[4].

[2] En general, los alumnos, consideran que la introducción histórica no es importante y su actitud en estos momentos es muy pasiva. Una alumna observa que el problema del área ha sido investigado a lo largo de muchos siglos y el profesor comenta que es importante la resolución de dicho problema.

[3] Muchos estudiantes consideran que este procedimiento es demasiado artificioso e innecesario puesto que según uno de ellos, corroborado por la mayoría, se llega a lo que ya sabíamos: *"Área del rectángulo es base por altura".*

[4] Una dificultad añadida para los alumnos es el desconocimiento de la densidad del cuerpo de los números racionales en el cuerpo de los reales. Éstos aceptan, considerando casi una imposición, que cualquier número irracional se puede obtener como límite de una sucesión de números racionales.

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y ÁREA DEL CÍRCULO

El profesor-investigador sugiere que para calcular la longitud de una circunferencia es suficiente determinar los perímetros de polígonos regulares inscritos en la misma y mediante el paso al límite de una sucesión de esos perímetros se obtiene la longitud de la circunferencia, previamente se establece el valor de π como límite de una sucesión trigonométrica[5]. Asimismo, podemos determinar el área del círculo mediante el cálculo del límite de la sucesión de las áreas de los polígonos regulares anteriores[6].

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA. INTEGAL DE DARBOUX

El profesor proyecta, por medio de transparencias, un ejemplo gráfico y pretende calcular su área[7]; además, comenta que no resulta tan fácil puesto que la superficie tiene un lado curvilíneo. Introduce el concepto de partición junto con las sumas inferiores y superiores y pregunta: ¿Qué ocurriría si en lugar de subdividir el intervalo inicial en dos subintervalos, uno de estos subintervalos lo volvemos a dividir en otros dos subintervalos?[8]. Se concluye que: la nueva suma inferior es mayor que la anterior y la suma superior obtenida ahora es menor que la de la primera partición, además estos resultados se aproximan más al valor que deseamos conocer.

Se constata que si tomamos una partición del intervalo con muchos puntos (nodos), entonces, las sumas inferior y superior de la función asociadas a dicha partición se aproximan suficientemente al área que pretendemos calcular; además, se concluye que la suma inferior siempre es menor o igual que el área y ésta es menor o igual que la suma superior[9].

---

[5] El establecimiento del número π es considerado por los estudiantes complicado y difícil puesto que tienen grandes dificultades con la comprensión y la formalización de las razones trigonométricas y con el cálculo de límites, así pues, $\pi = \lim_{n\to\infty} n \cdot sen(360/2n)$. Los alumnos tienen interiorizado el valor de $\pi \approx 3{,}14$ y con eso les es suficiente.

[6] Para una gran mayoría de alumnos, la determinación de la longitud de la circunferencia y el área del círculo por medio de las longitudes y las áreas de polígonos regulares inscritos en el círculo es demasiado artificioso e incluso algunos lo consideran innecesario. Muchos de ellos dicen que la longitud de la circunferencia es $L=2\pi r$ y el área del círculo es $A=\pi r^2$ *¡Porque sí!*

[7] Área comprendida entre la gráfica de una función positiva $f(x)$, el eje OX y las rectas x=a y x=b.

[8] Se toma la partición P´ que tiene los mismos nodos que P más uno.

[9] Los estudiantes, en general, consideran que este procedimiento es demasiado laborioso; sin embargo, muestran una atención superior a la habitual y están expectantes por los resultados que se van obteniendo.

Una dificultad añadida para los estudiantes es que no se pueden tomar límites de sucesiones de sumas inferiores y superiores puesto que el conjunto de particiones de un intervalo no es numerable, para ello, consideramos el extremo superior de las sumas inferiores (integral inferior de Darboux) y el extremo inferior de las sumas superiores (integral superior de Darboux)[10], si ambos extremos coinciden, diremos que la función es integrable Darboux[11] y coincide con el área que pretendemos calcular, es decir[12]: $\acute{A}rea = \int_a^b f(x)dx \quad unidades \quad cuadradas$.

Veamos un ejemplo, dice el profesor, para calcular el área comprendida entre la función *f(x)*=*x*, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=1, se determina una partición de "n+1" nodos del intervalo [0,1], las sumas inferior y superior y, por medio de cálculos, concluimos que dicho área es 0,5 unidades cuadradas[13].

La clase termina con cierta decepción por parte de los alumnos puesto que piensan que ha sido demasiado teórica y complicada, además, no han tomado apuntes y su preocupación es si *"¿esto lo vas a preguntar?"*[14].

VII.3.1.2. SESIÓN 2: Jueves, 13 de mayo de 2004

Esta es la segunda sesión en la cual se sigue explicando la integral definida, la clase es la quinta de la jornada, después del segundo recreo, y los alumnos están nerviosos, hablando entre ellos, siguen con su tiempo de recreo y el profesor después de varias llamadas de atención generalizadas y algunas particulares puede comenzar la clase.

---

[10] Los conceptos extremo superior de las sumas inferiores y extremo inferior de las sumas superiores se explican a los estudiantes por primera vez y son de difícil comprensión, es más, no ven la necesidad de dichos conceptos. A algunos alumnos las definiciones de integral inferior y superior de Darboux les parecen un *"trabalenguas"* y muchos de ellos consideran que ambas integrales coinciden.

[11] Las notaciones $\inf \int_a^b f(x)dx, \quad \sup \int_a^b f(x)dx \quad y \quad \int_a^b f(x)dx$ son consideradas, por la inmensa mayoría de los alumnos, incomprensibles.

[12] El procedimiento es considerado muy complicado y el resultado obtenido es confuso, las protestas son generalizadas y el profesor se ve obligado a restablecer el orden. No se ha explicado el teorema de caracterización de las funciones integrables Darboux.

[13] Definitivamente, los alumnos desisten puesto que para calcular las sumas inferiores y superiores ha sido necesario determinar la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética y, según ellos, nunca lo han visto o no lo recuerdan.

[14] El profesor matiza que lo importante es que entiendan el concepto de función integrable Darboux.

Nuevamente, mediante el uso de transparencias, el profesor-investigador recuerda lo expuesto en la sesión anterior, además, se incide en la importancia de las sumas inferiores y superiores junto con la matización de la toma de extremo superior e inferior de dichas sumas. Los alumnos siguen considerando que los extremos superior e inferior de las sumas inferiores y superiores, respectivamente, son conceptos difíciles de entender[15].

INTEGRAL DE RIEMANN

El profesor recuerda que para establecer la integral de Darboux tomábamos los mínimos y máximos de cada subintervalo, ahora tomamos el valor de la función en un punto cualquiera del subintervalo y, por tanto, dicho valor estará comprendido entre el mínimo y el máximo absolutos anteriores.

El profesor, después de poner las transparencias de las sumas inferiores y superiores de Darboux, pregunta: ¿Qué ocurrirá con el área determinada por la suma de las áreas de los rectángulos de amplitud el subintervalo y altura el valor de la función comentado anteriormente? Una alumna descubre que la nueva suma está entre las dos anteriores[16].

Pensad, dice el profesor, qué ocurriría con las sumas de Riemann si las sumas inferiores y las superiores son "casi" iguales, es decir, si la integral inferior y superior de Darboux coinciden o, lo que es lo mismo, que la función es integrable Darboux. Al final se concluye que por el teorema del encaje o del sándwich[17] podemos calcular la integral de Darboux por medio de las sumas de Riemann[18] y, en consecuencia, sin definir rigurosamente la integral de Riemann se acepta que coincide con la de Darboux[19].

Los alumnos consideran que todo esto es demasiado teórico, sólo se ha calculado un área, y aún no se ha encontrado un método general por el cual se pueda calcular áreas. En efecto, dice el profesor, estamos formalizando

[15] Las definiciones de integral inferior y superior de Darboux e integral de Darboux siguen siendo incomprensibles para muchos estudiantes, así como la notación de las mismas.

[16] Los alumnos comprenden estas desigualdades con ayuda de las transparencias correspondientes y aceptan sin ninguna objeción que las sumas de Riemann están comprendidas entre las inferiores y superiores de Darboux.

[17] Risas generalizadas, el profesor insta a que haya silencio para poder continuar la clase y después de un rato se prosigue con la actividad docente.

[18] Calcular una integral por medio de las sumas de Riemann, en palabras de un alumno, es *"descabellado e imposible"*.

[19] Para los alumnos ambas integrales son la misma, no necesitan ningún teorema que lo demuestre.

teóricamente el concepto de integral y dentro de muy poco acabaremos la exposición de esta unidad didáctica[20].

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

El profesor, después de definir el concepto de primitiva[21] de una función, enuncia y demuestra, por medio de transparencias, el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)[22]; los alumnos se sienten perplejos ante tal teorema y consideran que es demasiado elevado para sus expectativas; además, los repetidores alegan que en el curso pasado no se explicó, por tanto, consideran que es innecesario que se haga en este curso.

El profesor pide paciencia y después de incidir en la hipótesis y la tesis del mismo afirma que este resultado es, posiblemente, el más importante del Análisis Matemático y, como tal, se le denomina *"Teorema Fundamental del Calculo"* y en muchos textos es reconocido como regla de Barrow. Termina introduciendo el concepto de integral indefinida.

¿No preguntarás este teorema en el examen? No entiendo nada, es la reacción general de los estudiantes[23]. El profesor comenta que lo único que será necesario saber es su aplicación práctica y para ello vuelve a resolver el problema del día anterior[24] aplicando el TFC y concluye:

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \textit{unidades} \quad \textit{cuadradas}$$

La sorpresa general de los alumnos es manifiesta y la mayoría de ellos considera que el resultado ha merecido la pena, algunos repetidores piensan que, como en el curso anterior, era suficiente haber dado la regla de Barrow.

El profesor expresa la necesidad de justificar matemáticamente todos los resultados, no se pueden dar "recetas" y considera fundamental asimilar los

[20] El descontento es generalizado, las protestas aumentan de tono y al cabo de, aproximadamente, minuto y medio retomamos el control de la clase.

[21] El profesor escribe en el encerado varias primitivas elementales: $f(x) = 2x,\ F(x) = x^2$; $g(x) = x^5,\ G(x) = \frac{x^6}{6}$; etc. Los alumnos se consideran más seguros en sus respuestas y algunos de ellos, pocos, retoman el interés por las explicaciones del profesor.

[22] La demostración que hemos tomado es la de Fischer, véanse los capítulos I y V de esta tesis.

[23] El alumnado, en general, está pendiente de los exámenes y más al final de curso como es el momento actual en el cual se está explicando la integral.

[24] Área encerrada por la curva de la función *f(x)=x*, el eje de abscisas y las rectas *x=a* y *x=b*.

distintos conceptos matemáticos y reflexionar sobre los mismos. Al final concluyen los alumnos que el teorema fundamental del cálculo es muy eficaz[25], salvo por el inconveniente del cálculo de primitivas[26].

No sólo se pueden calcular áreas, afirma el profesor, además la integral permita calcular longitudes de curvas, volúmenes y superficies de revolución, centros de gravedad, etc. y tiene múltiples aplicaciones en las Ciencias Sociales. Nuestro objetivo principal es calcular áreas muy sencillas.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Se exponen geométricamente las propiedades fundamentales de la integral definida (linealidad y teorema del valor medio del cálculo integral) y, los alumnos, las aceptan como evidentes.

Todo esto que he explicado os lo voy a entregar ahora en un cuadernillo donde he borrado cierta información, dice el profesor investigador, vosotros debéis completarlo y el próximo martes a la hora de clase os lo recogeré. Se hace entrega del cuadernillo, mientras tanto el profesor pide a los alumnos que repasen las derivadas.

Protestas generalizadas de los alumnos, dicen: *"tenemos exámenes todos los días, no hemos entendido nada".* Suena el timbre, algunos alumnos se marchan a sus casas puesto que esta misma tarde tienen un examen, ha habido demasiadas interrupciones y un cierto desinterés, se percibe un desánimo generalizado.

VII.3.1.3. SESIÓN 3: Viernes, 14 de mayo de 2004

La clase comienza a las 10:35 horas, después del primer recreo, los alumnos están más tranquilos que el día anterior pero con muy poco interés por comenzar la clase, algunos llegan tarde[27]. El profesor prepara el material (libro de texto, cuaderno de notas, borra el encerado, etc.), los alumnos no saben qué hacer, el profesor les comunica que a partir de este momento no se utilizarán las transparencias y que sus útiles de trabajo deben ser el libro de texto y el cuaderno de matemáticas.

[25] Es evidente que a los alumnos no les interesa la demostración del TFC, sólo pretenden aplicarlo y según los repetidores es la *"Regla de Barrow"*.

[26] El profesor informa que en las clases posteriores nos dedicaremos al cálculo de primitivas.

[27] Por regla general, varios alumnos, se suelen quejar de la puntualidad del profesor y alguno de ellos se demoran dos o tres minutos en acceder a la clase.

En primer término se recuerda el concepto de primitiva de una función y, como en la sesión anterior se escriben varios ejemplos elementales, seguidamente se define el concepto de integral indefinida[28], para la mayoría de los alumnos primitiva e integral indefinida son iguales[29].

INTEGRAL INDEFINIDA

Teniendo como guía los ejercicios propuestos[30] del libro de texto[31] se resuelven una serie de integrales indefinidas, entre otras:

Ejercicio 1: $a)\int 7x^2dx,\quad b)\int \frac{1}{x^2}dx,\quad c)\int \sqrt[3]{5x^2}dx,\quad d)\int \left(x^3+\sqrt{x}\right)dx,\quad e)\int \frac{x^3+\sqrt{x}}{x}dx$

Parece que la primera integral les resulta muy sencilla, pero la segunda no tanto y, aunque se ha comentado la linealidad de la integral indefinida, algunos alumnos resuelven $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{\int 1dx}{\int x^2dx} = \frac{x}{x^3/3} = \frac{3}{x^2}$, el profesor sugiere que comprueben el resultado[32] y, evidentemente, es erróneo[33]. Una alumna expresa la función $1/x^2 = x^{-2}$ y le resulta inmediata la integral considerando la función integrando como función potencial. La integración de funciones radicales sencillas tales como $\int \sqrt[3]{5x^2}dx$ plantea dificultades a los alumnos puesto que no saben expresar el integrando como una función potencial[34] y algunos se desaniman al no recordar las propiedades de los radicales[35].

---

28 En las transparencias la integral indefinida era la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, nosotros, como el libro de texto, por criterios de operatividad aceptamos la integral indefinida como la expresión $\int f(x)dx$.

29 El profesor debe aclarar que las funciones $F_1(x)=\frac{x^3}{3}-4$ y $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+5$ son dos primitivas distintas de la función $f(x)=x^2$.

30 Ejercicios 1 y 2, pág. 211 y ejercicio 3, pág. 213.

31 En el Anexo B se ha escaneado la novena unidad didáctica: *Iniciación a las integrales* del libro de texto: Colera, J., García, R. y Oliveira, M. (2003). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: Anaya.

32 Varios alumnos no saben como hacerlo, una vez más dice el profesor: *"Derivad la función obtenida y comprobad que es la función integrando".*

33 Muchos alumnos piensan que la linealidad de la integral indefinida puede generalizarse al cociente y al producto.

34 Nos referimos a la identidad $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}=\left[g(x)\right]^{1/n}$.

35 Un alumno repetidor propone que se resuelva por sustitución, el profesor comenta que también es inmediata y, posiblemente, si se considera oportuno se calcularán primitivas por sustitución.

La resolución del ejercicio 1 d) se realiza aplicando la linealidad de la integral; sin embargo, para el 1 e) hay alumnos que comenten el error comentado anteriormente[36] y se corrigen unos a otros expresando la función integrando como suma de dos funciones, simplificando y, ahora sí, aplicando *"la integral de la suma es la suma de las integrales".*

Ejercicio 2: $a)\int\left(senx+e^{x}\right)dx,\quad b)\int\left(\cos(2x)+e^{5x}\right)dx,\quad c)\int\left(x^{e}+e^{x}\right)dx,\quad d)\int 3x^{2}sen\left(x^{3}\right)dx$

Es evidente que muchos alumnos no tienen asimilada suficientemente la tabla de derivadas, tienen dificultades para aplicar la regla de la cadena en la derivación y, consecuentemente, para agilizar el cálculo de primitivas. El profesor insta a los alumnos a que tengan frente a ellos la tabla de primitivas del libro de texto, seguidamente se procede a la resolución del ejercicio número 2 propuesto y otros afines a él.

La integración de funciones trigonométricas sencillas se suele realizar sin muchas dificultades[37], las funciones exponenciales de base distinta al número *e* no se han resuelto[38], sin embargo, aproximadamente la mitad de los alumnos consideran que $\int\left(x^{e}+e^{x}\right)dx=x^{e}+e^{x}+k$; ello supone que tienen dificultades, entre otras, para discriminar la función potencial y la función exponencial (Sierpinska, 1990).

La resolución de $\int 3x^{2}sen\left(x^{3}\right)dx$ lleva a responder de forma generalizada $x^{3}\cdot\cos\left(x^{3}\right)+k$, el profesor pide que lo comprueben, no es correcta[39] y, después de varios intentos entre los alumnos, algunos con la ayuda del profesor, se llega a la solución correcta.

El ambiente de clase, en general, es de desánimo y cansancio, el profesor debe mantener el orden y con gran paciencia proponer el cálculo de primitivas, continuamos con el ejercicio 3:

$a)\int\left(x^{3}+5x\right)^{4}\left(3x^{2}+5\right)dx,\quad b)\int xe^{3x^{2}}dx,\quad c)\int sen\left(x^{3}-e^{3x}\right)\cdot\left(x^{2}-e^{3x}\right)dx,\quad d)\int senx\cdot\cos x\,dx$

[36] Siguen considerando que *"la integral del cociente es el cociente de las integrales".*

[37] Generalmente no suelen multiplicar o dividir por las constantes necesarias y algunos estudiantes consideran que $\int\cos(2x)dx=sen(2x)+k$.

[38] El profesor no lo considera oportuno, piensa que es un motivo de confusión para los alumnos.

[39] Persiste el error: *"La integral del producto es el producto de las integrales".*

Es obvio que muchos alumnos siguen teniendo dificultades para calcular las integrales de las funciones potenciales y exponenciales[40]. En la primera los que más se aproximan dan la solución $(x^3+5x)^5+k$, una sencilla reflexión hace que perciban la necesidad de dividir por 5. Mayor dificultad entraña la segunda y, aunque el profesor investigador escribe en la pizarra la primitiva correspondiente a la tabla de integrales del libro de texto[41] e, incluso, hace ejercicios de aplicación inmediata, muchos estudiantes no son capaces de descubrir la solución y una vez mostrada dudan de la misma. El resto de los ejercicios entrañan dificultades análogas a los anteriores[42] y, después de establecer cierto orden en clase, se calculan las primitivas.

Suena el timbre. El profesor pide silencio, propone (con la ayuda de la tabla de integrales inmediatas) que se resuelvan varios ejercicios[43] para el próximo martes y recuerda que deben entregar el cuadernillo debidamente cumplimentado. Las protestas de los alumnos son generalizadas.

VII.3.1.4. SESIÓN 4: Martes, 18 de mayo de 2004

A las 9.25 horas es el comienzo de la clase. Los alumnos están impacientes y algunos dudan si deben entregar el cuadernillo, el profesor dice que, efectivamente, hoy era el día; se recoge el cuadernillo a todos salvo a seis que no lo han traído a clase o no lo han cumplimentado y preguntan si pueden entregarlo el próximo día, sí se les permite.

INTEGRAL INDEFINIDA

El profesor pregunta por los ejercicios propuestos el último día y por las dificultades que han tenido para su resolución. Las respuestas son muy variadas y se constata que muy pocos alumnos, menos de la cuarta parte, han resuelto algunos ejercicios de manera aceptable[44].

¿Por qué no habéis resuelto prácticamente ningún ejercicio?, pregunta el profesor. Muchos alumnos hablan a la vez, las respuestas son muy variadas

[40] Además, siguen transfiriendo la linealidad al producto.

[41] $\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + k$.

[42] Un alumno escribe: $\int senx \cdot \cos xdx = \cos x \cdot senx + k$.

[43] Ejercicios 6, 7 y 8, pág. 227, libro de texto.

[44] Esto nos confirma la necesidad de explicar la integral en otra época del curso y no al final.

y una alumna dice: *"No tenemos tiempo, entre el cuadernillo y los exámenes no da tiempo a nada. No entiendo nada. Esto es muy complicado".*

El profesor pide calma y pasados, aproximadamente, cinco minutos desde el comienzo oficial de la clase dice: empecemos a resolverlos y, para ello, tengamos sobre la mesa la tabla de integrales inmediatas que debéis memorizarla lo antes posible pues en el examen no se permitirá tenerla.

Siguen las protestas de los alumnos y al cabo de un rato hay un ambiente aceptable para poder comenzar a resolver los ejercicios propuestos de la sesión anterior, algunas integrales de dichos ejercicios son:

Ejercicio 6: $a)\int x\sqrt{5x^2+1}\,dx$, $b)\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}}\,dx$, $c)\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$, $d)\int sen^2 x\cdot\cos x\,dx$,

$e)\int x\cdot senx^2\,dx$.

Para calcular la primera primitiva muchos alumnos dudan y recurren a expresar el radical como una potencia y, sin embargo, la mayoría no saben cómo continuar. El profesor comenta que el día anterior se resolvió otro con las mismas características y una alumna sugiere que puede ser del tipo potencial, después de una pequeña discusión se determina la solución. Un alumno, repetidor, dice que se puede resolver por cambio de variable puesto que el año pasado se hacía así; el profesor pide que realice el cambio y él, sin dudarlo, expresa $t=\sqrt{5x^2+1}$; sin embargo, tiene dificultades para seguir operando. El profesor resuelve el ejercicio con el cambio propuesto por el alumno, el resto de la clase queda confundida y los estudiantes rechazan mayoritariamente este método de integración[45].

La siguiente integral no comporta grandes dificultades a los alumnos y, teniendo como guía la anterior y consultado la tabla de integrales inmediatas, la resuelven entre ellos[46].

Para calcular la integral racional $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$, siguiendo el procedimiento anterior, varios alumnos escriben $\int (2x+1)\left(x^2+x-3\right)^{-1}dx$ e intentan resolverla como si fuera potencial, aquellos que han encontrado por este procedimiento

[45] Aunque en un principio estaba previsto el cálculo de primitivas por cambio de variable, el profesor investigador considera en este momento que no debe aplicarse este método puesto que es una dificultad añadida para la mayoría de los estudiantes.

[46] Algunos alumnos requieren la ayuda del profesor.

la solución dudan de la misma[47] y el profesor les invita a que comprueben el resultado, al fin, se concluye que no es la integral de una función potencial. El profesor sugiere que recuerden la derivada del neperiano y que observen la relación entre el numerador y el denominador de esa función racional[48], el murmullo de los alumnos es generalizado y el desinterés va en aumento[49], el profesor exige que haya silencio y, con escasa atención, se concluye que la solución es el neperiano del denominador.

Para que los alumnos consoliden la integración de funciones con radicales (solución potencial) y racionales (solución potencial y solución neperiano) se escriben varios ejemplos y se especifican las diferencias sustanciales entre unas y otras.

Las dos últimas integrales, del ejercicio expresado anteriormente, confunden a muchos estudiantes y no saben distinguir entre una función potencial y otra trigonométrica, parece ser que las han comprendido mejor al rescribirlas[50] el profesor y su solución es "aceptada" por la mayoría de ellos. Eso sí, debemos resolver varios ejemplos similares a los anteriores para que los alumnos discriminen los diferentes tipos de integrales[51].

Ejercicio 7: $a)\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$, $b)\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}} dx$, $c)\int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5} dx$, $d)\int \frac{x-3}{x^2-6x+2} dx$

Resolver la primera es difícil para la mayoría de los estudiantes, después de varias propuestas una alumna dice que $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y, por tanto, el resultado es $e^{\sqrt{x}} + k$, el profesor pide que reflexione y al final da la solución correcta. Un alumno dice que el resultado es $\frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} + k$, el profesor le pide que

47 Hay quien dice: *"Un número elevado a cero es 1"*.

48 La integración de funciones racionales se limitará a aquéllas en las cuales su solución sea el logaritmo neperiano del denominador o a las que al realizar la división del numerador entre el denominador el resultado de la integral sea un polinomio más un logaritmo neperiano. No se resolverán según el tipo de raíz del denominador. Se tendrá en cuenta la simplificación de la función.

49 Los alumnos muestran muy poco interés por aprender, están dispersos y es muy baja su atención.

50 $\int sen^2 x \cdot \cos x \, dx = \int [senx]^2 \cdot [\cos x] dx;\quad \int x \cdot senx^2 dx = \int x \cdot sen\left(x^2\right) dx = \int \left[sen\left(x^2\right)\right] \cdot x \, dx$

51 Las soluciones del ejercicio nº 6 están al final del libro y muchos alumnos las comprueban rápidamente cuando se resuelven los correspondientes apartados en clase.

justifique la respuesta[52] y un tercero[53] la resuelve correctamente por cambio de variable.

El resto de las integrales de este ejercicio recuerdan a otras similares y su resolución no es dificultosa, sin embargo, hubo que matizar $\frac{\sqrt{x+5}}{x+5}=\frac{1}{\sqrt{x+5}}$.

Ejercicio 8: $a)\int \frac{x^2-3x+4}{x-1}dx,\quad b)\int \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}dx,\quad c)\int \frac{x^2+3x-1}{x^2-1}dx$

En este ejercicio basta dividir[54] numerador entre denominador y aplicando la linealidad de la integral la resolución es inmediata, así lo han entendido la mayoría de los alumnos después de practicar la división[55] de polinomios.

¡Atención!, dice el profesor, para mañana haced los ejercicios 9 y 10 del libro, comenzad ahora.

Pero si el 10 no es igual que el 9, dice un alumno.

El 9 es integral indefinida y el 10 integral definida, responde el profesor, controladlo por medio del libro, en cualquier caso ya se ha explicado y si no sabéis resolverlo hacedlo como si fuera integral indefinida, eso sí, dejad un espacio para poner la solución final. Mañana es el último día para entregar el cuadernillo.

Algunos alumnos intentan resolver los ejercicios, otros consultan al profesor, muchos muestran una pasividad total y seis recogen el material antes de tiempo, a los tres minutos suena el timbre.

VII.3.1.5. SESIÓN 5: Miércoles, 19 de mayo de 2004

Hoy los alumnos están más animados, algunos comentan que el cálculo de primitivas *“no es tan difícil”.* El profesor se siente satisfecho por este comentario y da ánimos a todos los estudiantes, se recogen cinco de los seis

[52] El alumno razona como sigue: *“Una constante que multiplica dentro de la integral puede salir fuera de la integral, lo has dicho tú (refiriéndose al profesor), y la integral de* e^x *es* e^x*, por tanto,* $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{\sqrt{x}}\int e^{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}+k$ *”.*

[53] El alumno repetidor que se mencionó anteriormente.

[54] Sugerencia del libro: *“Divide y transforma la fracción así:* $\frac{Dividendo}{Divisor}=Cociente+\frac{Resto}{Divisor}$ *”.*

[55] Algunos alumnos no recuerdan la división de polinomios, dos de ellos quieren aplicar la regla de Ruffini en la tercera división.

cuadernillos que faltaban, el alumno que no entrega el cuadernillo no ha venido a clase (había abandonado las matemáticas y, con frecuencia, faltaba a las clases de la asignatura).

INTEGRAL INDEFINIDA

El profesor pregunta a los alumnos por los ejercicios propuestos el último día y por las dificultades que han tenido para su resolución, en particular por el de la integral definida.

Las respuestas son muy variadas, los estudiantes han trabajado más los deberes que el día anterior[56], la mayoría han resuelto la integral definida[57] como indefinida y sólo dos alumnas lo han hecho correctamente[58].

Bien, dice el profesor, la integral definida la trabajaremos en esta clase, empecemos a resolverlos y también supongo que habéis aprendido las integrales inmediatas[59], podéis consultar la tabla de primitivas.

Ejercicio 9: $a)\int \frac{1}{x^2}\, sen \frac{1}{x}\, dx\,, \quad b)\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx, \quad c)\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx, \quad d)\int \frac{2}{x}\, \ln x dx, \quad e)\int \frac{1}{e^x} \cos e^{-x} dx$

En la resolución del presente ejercicio[60], varios alumnos responden que en algunos apartados han tenido ciertas dificultades pero viendo la solución han sido capaces de resolverlos. La tercera parte, aproximadamente, comentan que están totalmente perdidos.

Notad, dice el profesor investigador, que los apartados a), d) y e) están relacionadas con la regla de la cadena[61], también pueden resolverse por cambio de variable[62]. Intentadlo.

---

[56] El interés por el cálculo integral ha aumentado en la mayoría de los estudiantes, no obstante, para alguno de ellos *"es muy difícil".*

[57] Los alumnos, en general, han seguido la consigna del profesor del día anterior: *"Resolved el ejercicio nº 10 como el nº 9 y dejad un espacio para escribir la solución"* y, por tanto, para las integrales definidas han calculado una primitiva sin sustituir en los límites de integración.

[58] Una de ellas ha dicho: *"Lo ha resuelto así porque me he fijado cómo lo hacía el libro".*

[59] Algunos alumnos se ríen, el profesor sospecha que aún no han aprendido la tabla de primitivas del libro de texto y, como tal, obra en consecuencia.

[60] De este ejercicio, varios apartados tienen la solución al final del libro de texto.

[61] El profesor intenta que los alumnos establezcan la relación entre el cálculo de derivadas y el cálculo de primitivas.

[62] Se procura mantener la atención del alumno repetidor, aunque no se exige este procedimiento de integración a ningún alumno.

En grupos y, a veces con las sugerencias y ayudas del profesor, resuelven sin grandes dificultades las integrales[63]. Para consolidar los conocimientos adquiridos el profesor escribe en la pizarra varios ejemplos similares a los del ejercicio y los alumnos, unos individualmente y otros consultando con los compañeros más próximos, los resuelven con cierta rapidez[64].

Hasta ahora, dice el profesor, hemos resuelto integrales indefinidas inmediatas; sin embargo, para el cálculo de primitivas existen varios métodos de integración[65] e incluso muchas no tienen solución. Con esto damos por finalizada la integral indefinida[66]. A partir de este momento y hasta final del curso veremos la resolución de integrales definidas, el cálculo de áreas y, si es posible, alguna aplicación muy sencilla de este concepto tan importante de las matemáticas[67].

Después de un cierto revuelo, al filo de las 9:55 horas, se pasa a:

INTEGRAL DEFINIDA

El siguiente ejercicio, afirma el profesor, consiste en el cálculo de diferentes integrales definidas, veamos el algoritmo[68]:

1. Debemos calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$
2. Resolvemos la integral indefinida $\int f(x)dx$
3. Sea G(x) una primitiva de f(x) obtenida anteriormente.
4. Se calcula G(b) y G(a).
5. La solución de la integral definida es: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

[63] Todavía hay tres alumnos y dos alumnas que no distinguen las integrales logarítmicas de las potenciales; el resto, algunos con dudas, discriminan unas de otras.

[64] Por abreviar la redacción de esta sesión no describimos las circunstancias y apreciaciones generales de la resolución de estos ejercicios puesto que son similares a las de las anteriores sesiones, eso sí, los alumnos están adquiriendo cierta fluidez en el cálculo de primitivas elementales y los errores conceptuales son menos frecuentes.

[65] Sólo, atendiendo a la indicación de un estudiante, se ha explicado el cambio de variable.

[66] Protestas generalizadas, quieren seguir calculando primitivas, empiezan a sentirse seguros.

[67] Los estudiantes consideran que queda poco tiempo y aún tenemos muchas cosas pendientes.

[68] El algoritmo lo escribe el profesor en el encerado, después de dibujar la correspondiente representación gráfica.

Recordad, dice el profesor, el teorema fundamental del cálculo integral[69] y la regla de Barrow; además, su expresión es[70]: $\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$.

Ejercicio 10: $a)\int_2^5 3x^2 dx,\quad b)\int_1^4 \sqrt{3x}\, dx,\quad c)\int_1^e \frac{1}{x} dx,\quad d)\int_{-1}^3 e^{x-2} dx;\quad e)\int_{-\pi}^{\pi} sen 2x\, dx$

El profesor, siguiendo los pasos del algoritmo[71], resuelve el primer ejemplo, después lo denota según la fórmula reducida y da el resultado[72].

Como otras veces, dice el profesor, con ayuda del compañero resolved el resto de las integrales definidas.

Un alumno dice: *"La máxima dificultad está en hallar la primitiva y luego se debe tener mucho cuidado con los extremos de la integral, pero no es demasiado dificil"*[73].

Entre los alumnos hay ciertas discusiones porque algunos no reconocen el número *"e"*, han olvidado que la base de los logaritmos neperianos es dicho número[74] y no recuerdan que el dominio de definición de las funciones logarítmicas son los números reales positivos.

Recordad la definición de la función logaritmo, dice el profesor, y la de la función exponencial ¿Qué relación tienen? Una alumna, de las dos que habían resuelto el ejercicio 10, dice: *"La una es la contraria de la otra"*[75]*.* Se resuelven el c) y el d) dando las explicaciones pertinentes y se constata que el grado de dificultad es medio.

---

[69] Un alumno dice: *"¡Ah sí! Ese teorema tan importante".* Algunas alumnas manifiestan su preocupación por si deben aprender la demostración del teorema, el profesor dice a todos los estudiantes que sólo deben saber aplicarlo. Hay un alivio generalizado.

[70] El profesor escribe la expresión en la pizarra, después de enmarcar el algoritmo. Un alumno, repetidor, dice: *"¿Por qué no se puede poner F mayúscula en lugar de G mayúscula como el año pasado?* El profesor contesta que es indiferente y, posteriormente, se verá en los siguientes ejemplos.

[71] En clase hay dos pizarras, el algoritmo está escrito en la pizarra de la derecha y los ejercicios se resuelven en la de la izquierda.

[72] La sorpresa de los alumnos es general, hay un aluvión de comentarios, algunos de ellos son: *"Es muy fácil, es igual que calcular la integral indefinida, no hace falta escribir la constante k, este es muy fácil pero luego aparecerán las dificultades, etc.".*

[73] No todos están de acuerdo con esta afirmación , los más próximos a él discuten con el interesado.

[74] Un alumno dice: *"El número e es 2,71 porque lo da la calculadora".* Varios alumnos, calculadora en mano, corroboran tal afirmación.

[75] Entendemos que son funciones inversas o recíprocas.

Para resolver el último debéis recordar las funciones trigonométricas[76], dice el profesor, además es importante que sepáis cómo se miden los ángulos[77] y pensad que π[78] viene dado en radianes[79].

¡Atención! Para mañana haced los ejercicios 11 y 13 del libro. Representad previamente las funciones. Comenzad ya.

Pero si tenemos examen, responden la mayoría de los alumnos, y además tienen muchos apartados. Desorden y jaleo. Empiezan de mala gana, algunos alumnos van al final del libro para ver las soluciones del 13, otros recogen el material, dos alumnas preguntan dudas al profesor, la mayoría habla entre sí. Poco después toca el timbre.

VII.3.1.6. SESIÓN 6: Jueves, 20 de mayo de 2004

La sexta sesión transcurre entre las 12:40 horas y las 13:30 horas, después del segundo recreo. Cuando el profesor accede al aula, más de la mitad de los alumnos no han entrado en la misma, uno de los que están se queja de la puntualidad del profesor, dos alumnas dicen que el grupo ha tenido un examen, en fin, da la impresión de que las condiciones son poco favorables para impartir con cierto éxito la clase de matemáticas[80]. Mientras tanto, el profesor borra las dos pizarras, extrae de su maletín el material necesario para impartir la clase y, después de transcurridos tres minutos, aún hay alumnos que ni siquiera han sacado de la mochila el cuaderno y el libro de texto. Se ha recogido el cuadernillo que faltaba.

[76] Muchos alumnos afirman no recordar prácticamente nada de las funciones trigonométrica, incluso alguno de ellos dice que las estudió muy poco porque en 4º ESO cursó Matemáticas Opción A. Según consta en el libro de actas del Departamento de Matemáticas en primero de Bachillerato de Ciencias Sociales del curso anterior sólo se utilizaron dichas funciones en el cálculo de derivadas.

[77] Las mayoría de los alumnos piensan que los ángulos se miden en grados sexagesimales, muy pocos recuerdan el radián y sólo tres de ellos son capaces de expresar la medida de los ángulos en las dos unidades.

[78] Al igual que el número e, muchos alumnos dicen: *"π es 3,14 porque siempre ha sido así y, además, lo da la calculadora"*

[79] Constatadas las dificultades que tienen los estudiantes para resolver integrales trigonométricas, el profesor-investigador ha decidido no resolver más ejercicios de este tipo.

[80] Es la quinta clase para los estudiantes, el día caluroso, la apatía general y el nerviosismo de los alumnos debido, entre otras cosas, al examen que han realizado con anterioridad hace suponer, al profesor, que los estudiantes tendrán un aprovechamiento bajo de la presente clase de matemáticas.

Hoy, dice el profesor, nos dedicaremos al cálculo de áreas[81], resolvamos los ejercicios que propusimos ayer.

ÁREA ENCERRADA POR UNA CURVA, EL EJE DE ABSCISAS Y LAS RECTAS x=a Y x=b.

El profesor desea conocer las dificultades de los alumnos en la representación de las funciones del ejercicio número 11[82]. El profesor viendo, rápidamente, los cuadernos de los alumnos observa que algunos estudiantes, pocos, representan bien[83] la mayoría de las funciones y tres de ellos tienen graves dificultades para representar una parábola; ningún alumno ha calculado las áreas propuestas[84].

El profesor, una vez más, vuelve ha decir: *"Pensad cómo van las ramas de la parábola según el signo del coeficiente principal"[85].* Todos los apartados del ejercicio, dice el profesor, salvo el e)[86], podéis representar las áreas que nos piden, representadlas, contrastadlo con vuestros compañeros, dejad un pequeño espacio y después calculamos dichas áreas.

En pequeños grupos y con apoyos del profesor todos ellos representan las parábolas y las superficies sin dificultad[87].

---

[81] La primera parte de la clase se dedicará al área encerrada por una curva, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b. En la segunda parte se calcularán áreas comprendidas entre dos curvas.

[82] Ejercicio nº 11, pág. 228. Halla, en cada caso, el área limitada por:

a) $f(x) = x^2 - 4$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.
b) $f(x) = 2x - x^2$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y el eje X.
d) $f(x) = 1 - x^2$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.
e) $f(x) = e^x$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.
f) $f(x) = x^2 + 1$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

[83] Una alumna dice: *"Todas las curvas son parábolas, salvo una que es la función exponencial".* Esta estudiante ha representado bien todas las funciones.

[84] El profesor propuso el día anterior que si tenían dificultad para calcular el área, sólo se representaran las funciones.

[85] La mayoría de las veces, cuando se ha representado una parábola, el profesor ha incidido en la importancia del signo del coeficiente principal para determinar las tendencias de la misma. Se establece una pequeña discusión entre los alumnos y, al final, recuerdan la relación existente entre dicho coeficiente y las tendencias.

[86] El profesor pretende que los alumnos no desvíen la atención hacia la función exponencial.

[87] Los alumnos se sienten seguros al representar todas las parábolas y varios de ellos colorean la superficie a calcular con colores distintos a los de la gráfica.

Bien, dice el profesor, ahora debemos ser capaces de calcular el área pedida, para ello debemos aplicar el TFC o regla de Barrow[88]. Una alumna dice que la ha aplicado al apartado a) y el área le sale negativa, afirma que no puede ser[89]. En efecto, dice el profesor, el área nunca puede ser negativa, toma el valor absoluto del resultado que hayas obtenido[90].

Después cierta incertidumbre, el profesor pide silencio y comenta que si algo no se entiende deben pedirse explicaciones, eso sí, primero representamos el recinto cuyo área vamos a calcular[91]. Como podéis ver, dice el profesor, el área, efectivamente, no puede ser negativa fijaos cuando se explicaba la integral de Darboux, recordad que la función estaba por encima del eje de abscisas y, por tanto, los mínimos y máximos eran positivos. Ahora bien, si la función hubiera estado por debajo de dicho eje los mínimos y máximos serían negativos y debiéramos tomar valores positivos para el cálculo de las sumas inferiores y superiores, de ahí la toma del valor absoluto[92].

Veámoslo con un ejemplo más sencillo, para ello el profesor-investigador calcula, ayudándose de la representación gráfica, el área comprendida entre la función y=4, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=5, aplicando la fórmula del área del rectángulo y la regla de Barrow. Seguidamente hace lo mismo para la función y = – 4, el eje OX y las rectas anteriores; los alumnos se sorprenden que al aplicar la regla de Barrow dé resultado negativo y, en consecuencia, tomamos el valor absoluto.

“Entonces siempre que la función sea negativa se tomará el valor absoluto”, dice la alumna cuyo área le daba negativa. Sí, contesta el profesor, de ahí la importancia de la correcta representación de la superficie cuyo área se

---

88 El profesor, en la pizarra de la derecha, representa una función positiva y dos rectas x=a y x=b, pinta de color amarillo la superficie comprendida entre la gráfica de la función, el eje de abscisas y las dos rectas anteriores y escribe a la derecha del recinto pintado: *“Área =* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, *siendo F(x) una primitiva de f(x)”.*

89 Dicha alumna es la que representó bien todas las funciones y, mientras los demás estaban con las gráficas, ella con ayuda del libro ha calculado algunas de las áreas que se piden.

90 Comentarios de todo tipo de los alumnos, incredulidad y sensación de falta de rigor.

91 El profesor representa la superficie en la pizarra de la izquierda y junto a ella escribe la expresión $\int_0^2 \left(x^2 - 4\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 4\cdot 2\right] - \left[\frac{0^3}{3} - 4\cdot 0\right] = \frac{8}{3} - 8 = \frac{8-24}{3} = -\frac{16}{3}$.

92 Ante las dudas de los alumnos y algunos comentarios como *“No acabo de entenderlo”*, el profesor opta por poner un ejemplo muy sencillo.

pretende calcular y, por tanto, el resultado del apartado a) es 16/3 unidades cuadradas, es decir, 16/3 u^2.

El profesor invita a los alumnos a que resuelvan el b) y, transcurridos un par de minutos, un alumno comienza a resolver el ejercicio en la pizarra[93] y obtiene como resultado 4/3+2/3=2 u^2. Algunos alumnos consultan el ejercicio número 10 y dudan de que la solución sea correcta[94].

El profesor dicta y los estudiantes copian en su cuaderno*: "Cuando tenemos varios recintos siempre calcularemos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, de esta forma, determinamos los recintos que configuran el área. Se calcularán las áreas de cada uno de ellos, prestando especial atención en los que se encuentran por debajo del eje de abscisas cuyas áreas deben ser positivas, y el área total es la suma de todas ellas".*

Se borran las pizarras y dos alumnos, uno en cada pizarra, representan las superficies y resuelven los ejercicios c) y d)[95], el resto de los apartados se propone que los resuelvan esta tarde en casa[96]. Son las 13:12 horas y es el momento de pasar a:

ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

Este ejercicio[97], dice el profesor, tiene la particularidad de pedir el área comprendida entre dos curvas, lo habitual es representar dichas funciones y

---

93 Previamente se ha mantenido el siguiente diálogo entre el profesor (P) y el alumno (A):
P: *¿Cuánto os da?*
A: *2/3.*
P: *Si lo has representado bien ¿Piensas que es ese valor u otro mayor?*
A: *Posiblemente sea mayor, al menos eso parece, tendría que representarlo mejor.*
P: *Seguro que tienes un área por encima y otro por debajo del eje de abscisas, sepáralas.*
A: *(Al cabo de unos segundos y observando la representación). Podemos hacer la integral entre –1 y 0 que al ser negativa deberemos tomar el valor absoluto y la integral entre 0 y 1 que es positiva, después las sumamos.*
P: *Muy bien, sal al encerado a calcular el área.*

94 Muchos alumnos no discriminan correctamente los conceptos integral definida y área.

95 El profesor ha hecho la observación: $Área = 2\left[A_1 + A_2\right],\quad A_1 = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)dx,\quad A_2 = -\int_1^2 \left(1 - x^2\right)dx$.

96 Protestas de todo tipo de los alumnos, incluso algunos dicen no saber representar la función exponencial. El profesor la dibuja sin más dilación.

97 Se refiere al ejercicio nº 13 del manual (pág. 228) cuyo texto es el siguiente:
Calcula el área comprendida entre las curvas:

a) $y = x^2,\ y = x$
b) $y = x^2,\ y = 1$
c) $y = x^2,\ y = x^3$
d) $y = x^2,\ y = -x^2 + 2x$
e) $y = 2x^2 + 5x - 3,\ y = 3x + 1$

determinar el recinto o los recintos que encierran, además, coincide con el área encerrada por la función diferencia[98].

Los alumnos no tienen interés por la resolución de este ejercicio, hablan, copian con desgana lo que dice y escribe el profesor y se exigir silencio.

El profesor resuelve y explica el apartado a): Las funciones[99] $f(x)=x^2$ y $g(x)=x$ determinan el área representada en la pizarra[100] y para calcular los puntos de corte de ambas funciones basta determinar la función diferencia $h(x)=f(x)-g(x)$, igualarla a 0, y resolver la ecuación correspondiente (en este caso tenemos dos soluciones x=0 y x=1). Resolvemos $\int_0^1 (x^2 - x)dx$ cuyo resultado es –1/6, al ser negativo, tomamos el valor absoluto y concluimos que el área pedida es: 1/6 u^2.

Resolved los siguientes apartados en pequeños grupos, dice el profesor, y comprobad vuestra solución con la del libro de texto[101].

Los alumnos consideran que el ejemplo resuelto es de fácil comprensión, se animan y resuelven los tres apartados siguientes[102], los dos últimos no da tiempo puesto que toca el timbre y se acabó la clase.

¡Atención! Para mañana haced los ejercicios 15, 16 y 17 del libro de texto[103]. Protestas por parte de algunos alumnos, indiferencia de la mayoría.

---

f) $y = 4 - x^2$, $y = 8 - 2x^2$, $x = 2$, $x = -2$

[98] El profesor dibuja y escribe en la pizarra izquierda lo siguiente:
Dibuja el área comprendida entre dos funciones cualesquiera *f(x)* y *g(x)* que se cortan en tres puntos de abscisas a, b y c.
Escribe el algoritmo para calcular el área comprendida entre dos curvas:

1. Se determina la función diferencia $h(x) = f(x) - g(x)$
2. Se resuelve $h(x)=0$, sean, por ejemplo, las raíces: a, b y c
3. Se calcula el área de cada uno de los recintos: $A_1 = \left|\int_a^b h(x)dx\right|$, $A_2 = \left|\int_b^c h(x)dx\right|$
4. El área comprendida entre las dos curvas es: $A = A_1 + A_2$

[99] El profesor insiste que *"a funciones distintas, nombres distintos"* y, por tanto, para dos funciones distintas escribiremos *f(x)* y *g(x).*

[100] La representación de las funciones es rigurosa, así como la superficie comprendida entre ellas y los puntos de corte de ambas funciones, haciendo especial incidencia en las abscisas de dichos puntos.

[101] Cada apartado de este ejercicio tiene la solución al final del libro.

[102] Vistas las representaciones de las superficies cuyas áreas han de determinarse, una alumna pregunta: *"¿Es obligatorio representar siempre las funciones?".* El profesor dice a toda la clase: *"¡Atención! En general, no es necesario representar las funciones para calcular el área comprendidas entre las mismas, eso sí, debemos seguir los pasos (algoritmo) que se ha indicado".*

VII.3.1.7. SESIÓN 7: Viernes, 21 de mayo de 2004

Suena el timbre a las 10:35 horas, se acabó el recreo y, como siempre, más de la mitad de los alumnos no han accedido al aula, los que están dentro hablan entre sí y no tienen ningún interés por empezar a trabajar. A las 10:39 horas todos los alumnos se han sentado y tienen abiertos sus cuadernos y sus libros de matemáticas[104], las pizarras están borradas y ya puede comenzar la clase. Previamente, el profesor, ha observado con rapidez si los alumnos habían realizado los deberes propuestos el día anterior, dieciocho estudiantes no han hecho absolutamente nada, el resto ha ido desde el mero intento (dos alumnos), la resolución aceptable (dos alumnos) y resolución total (tres alumnos).

Vista la situación, el profesor pide que todos hagan una lectura rápida de los ejercicios y que determinen los que les parezcan más difíciles. Las opiniones generales coinciden y vienen a decir que *"algunos apartados de los mismos son muy parecidos a los del día anterior".* Los alumnos, mayoritariamente, consideran que de los tres ejercicios propuestos deben resolverse: 15 d) y e) y 17 a), b) y f).

El profesor pide a los estudiantes[105] que hagan el 15 d)[106] y para ello deben representar las funciones $f(x)=4-x^2$ y $g(x)=x^2-4$, señalar la superficie comprendida entre sus curvas y calcular el área pedida[107]. Al cabo de cuatro minutos la mayoría de los alumnos[108] tienen "su solución", sin embargo, todas no son iguales.

Muchos estudiantes han operado como sigue:

$h(x)=f(x) - g(x)= -2x^2+8$, $A=\int_{-2}^{2}\left(-2x^2+8\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+8x\right]_{-2}^{2}=\frac{64}{3}u^2$, dos alumnos que están sentados juntos comentan que *"la integral les ha dado el mismo*

[103] Véase el anexo B.

[104] Algún alumno comparte el libro de texto con su compañero.

[105] El profesor considera importante la resolución de este apartado para que los estudiantes consoliden el algoritmo de la sesión anterior por el cual se calculaba el área comprendida entre dos curvas.

[106] Calcula el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 4$.

[107] El objetivo fundamental es que los alumnos interrelacionen los registros gráfico, algebraico y analítico de esta actividad.

[108] Los estudiantes resuelven el ejercicio consultando los apuntes del día anterior, contrastando las opiniones de sus compañeros y solicitando la ayuda del profesor. Cinco alumnos tienen dificultades para resolver la ecuación $-2x^2+8=0$.

valor en negativo y, posteriormente, han tenido que tomar el valor absoluto de dicho valor ¿por qué?". El profesor les pide que reflexionen, al cabo de unos segundos, uno de ellos responde: *"Porque hemos tomado las funciones ′al revés′ y el integrando es el opuesto, por eso hay que cambiarlo de signo".*

Para el apartado 15 e)[109], los alumnos se sienten perdidos, preguntan: *"¿Hay que elevar al cuadrado y multiplicar?, ¿Tenemos que representar la función?, ¿Cómo empezamos?".* El profesor, pide que observen el ejercicio anterior y que razonen si era necesario representar las funciones, una alumna dice que *"no es necesario pero que antes había dos funciones y ahora sólo hay una"*, el profesor recuerda, una vez más, que el eje de abscisas viene dado por la recta y=0. La misma alumna dice *"a la función anterior hay que restarle* 0*"*, duda un momento, *"y calcular sus raíces"*, se concluye[110] que la función es polinómica, está factorizada, tiene dos raíces y la solución viene dada por el valor absoluto de[111]: $\int_{-2}^{3}(x+2)^2\cdot(x-3)dx$.

El ejercicio 17 a)[112] confunde a los estudiantes, según uno de ellos *"hay demasiadas funciones".* El profesor sugiere que "ignoren, de momento" las rectas verticales y que calculen los puntos de corte de las dos primeras funciones, al cabo de un rato, una alumna dice: *" las funciones se cortan en los puntos x*= –1 y *x*=1 *y no sé seguir"*, el profesor, en la pizarra, representa las dos funciones y señala los puntos comunes, después, con otro color, dibuja las rectas *x*= –1 y *x*=1, los alumnos hacen lo mismo en sus cuadernos y al señalar la superficie encerrada entre las dos curvas, un alumno dice que *"las rectas no son necesarias"*, después de una pequeña discusión entre los estudiantes se concluye que, efectivamente, son datos irrelevantes[113]. El problema queda resuelto sin dificultades dignas de ser mencionadas y pensamos que su solución ha sido comprendida por los estudiantes.

109 Calcula el área comprendida entre la curva $y = (x + 2)^2(x – 3)$ y el eje de abscisas.

110 Con ayuda del profesor, puesto que varios alumnos no saben extraer las raíces.

111 Seis alumnos afirman no recordar las identidades notables.

112 Calcula el área limitada por las siguientes curvas $y = x^3 + x^2$, $y = x^3 +1$, $x = –1$, $x = 1$.

113 Algunos alumnos desconfían y dicen que *"si son innecesarios ¿para qué los ponen?"*. Es evidente que en la resolución de problemas tienen dificultades en discriminar las informaciones irrelevantes o redundantes.

El ejercicio 17 b)[114] exige, después de representar gráficamente la superficie cuyo área se desea calcular, una reflexión serena para descomponerla como suma o diferencia de recintos.

Los alumnos se despistan, hablan entre ellos, hay demasiado ruido y el profesor pide silencio, son las 10:52 horas, continuamos con el ejercicio.

Una alumna dice: *"la representación la entiendo, el área que tengo que calcular sé la que es, no soy capaz de determinar los recintos"*, muchos alumnos asienten, otros están despistados. El profesor explica[115] mientras dibuja, escribe y señala en la pizarra, los estudiantes muestran apatía y desgana, copian en sus cuadernos, un alumno dice: *"tengo demasiadas funciones"*, mientras tanto, el profesor sigue explicando[116].

Después de varias interrupciones y aclaraciones se concluye que el área[117] pedida es: $A = 2A_1 - 2A_2$.

Los alumnos calculan las distintas primitivas con facilidad, el problema surge con los extremos superiores de integración, un alumno pregunta: *"¿Podemos sustituir $\sqrt{2}$ por 1,41?".* El profesor contesta que no es aconsejable, que deben trabajar con radicales[118] y al final, una vez obtenida la solución, se puede aproximar haciendo la sustitución propuesta. Casi todos los alumnos, en pequeños grupos, calculan el área pedida.

Un alumno manifiesta que es demasiado complicado el cálculo de las áreas de cada uno de los recintos y que no lo ha entendido, sin embargo, afirma entender la representación gráfica de las funciones y el cálculo de las raíces.

---

[114] Calcula el área limitada por las siguientes curvas $y = x^2$, $y = 1 - x^2$, $y = 2$.

[115] Dice el profesor: *"No resulta demasiado complicado. Vayamos por partes, vamos a llamar a las funciones $f(x)=x^2$, $g(x)=1-x^2$ y $h(x)=2$. Si calculamos los puntos comunes de $f(x)$ y $g(x)$ obtenemos $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$; los puntos comunes de $f(x)$ y $h(x)$ son $x_3=-\sqrt{2}$ y $x_4=\sqrt{2}$ ¿Lo habéis entendido?"* Nadie contesta afirmativamente, algunos asienten con la cabeza.

[116] El profesor señala los recintos con distintos colores y, a la vez; dice: *"El primer recinto viene determinado por las funciones $f(x)$ y $h(x)$, el segundo es la superficie comprendida entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$, así pues, el área es la diferencia de las áreas de esos recintos; además, como la superficie es simétrica se puede calcular el área de la mitad de cada uno de los recintos y, posteriormente, multiplicar por dos la diferencia de las nuevas áreas"*

[117] $A_1=\left|\int_0^{\sqrt{2}}\left(x^2-2\right)dx\right|$, $A_2=\left|\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(-2x^2+1\right)dx\right|$.

[118] Los alumnos, en general, son reacios a operar con radicales y prefieren, desde un principio, trabajar con números decimales.

Pasa un minuto de las 11 horas y nos proponemos resolver el 17 f)[119], este ejercicio no entraña dificultades[120] importantes a los alumnos aunque ha de determinarse el área de dos recintos y, como tal, no le comentamos.

Seguidamente, el profesor dice a los estudiantes que terminen los ejercicios propuestos para esta sesión esta misma tarde[121] puesto que en este momento pasamos a resolver los siguientes problemas. Continuamos, afirma el profesor, con la integral definida, sin embargo, ampliamos su campo de aplicación y ahora resolveremos dos problemas en los cuales intervienen diferentes conceptos matemáticos.

El enunciado del problema número 18[122], en su primera lectura, sorprende a los alumnos y la expresión más habitual es *"no entiendo nada".* Para situarlos en el contexto del problema, el profesor dice: *"Recordad cómo se construyó la integral de Darboux, básicamente nos daban una función continua y pretendíamos calcular el área encerrada entre la curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales, por tanto, representad la función v(t)".* Los alumnos la representan, algunos, inicialmente, tienen dificultades puesto que el eje de abscisas no lo asocian con la variable independiente *t* y el eje de ordenadas tampoco lo asocian con la variable dependiente *v(t).*

Coloread, dice el profesor, la superficie comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas t=100 y t=200 ¿Qué os sugiere? Una alumna opina que *"la parte rayada le recuerda al área de Darboux, que posiblemente debamos hacer la integral de la función entre 100 y 200"*[123].

En efecto, dice el profesor, debemos calcular $\int_{100}^{200} v(t)\,dt$ y así obtendremos los litros que se han vaciado en ese periodo de tiempo, hacedlo[124].

---

[119] Calcula el área limitada por las siguientes curvas $y = 2x - x^3$, $y = x^2$.

[120] Una vez más debemos recordar cómo se pueden determinar las raíces de una ecuación de tercer grado, en este caso hemos sacado factor común x.

[121] Protestas generalizadas de los alumnos.

[122] Un depósito se vacía de forma variable según la función $v(t) = 5 - 0{,}1t$ (*t* en minutos y *v(t)* en litros/minuto). Calcula lo que se ha vaciado el depósito entre los minutos 100 y 200.

[123] El profesor le pregunta *¿por qué crees que es la integral?* La alumna responde *"porque estamos en clase de integrales".* Risas de muchos alumnos, el profesor acepta la respuesta y no pide ni da más explicaciones.

[124] Los estudiantes, con poco interés, calculan la integral definida y dan por concluido el problema.

El problema número 19[125] tiene las mismas características del anterior, el profesor pide que lo lean detenidamente y que lo resuelvan. Varios alumnos consideran que es difícil representar la función y preguntan si es necesario[126], al fin, se concluye que la solución viene dada por $\int_0^{24} m(t)\,dt$.

Estos dos últimos problemas les han resultado interesantes a algunos estudiantes y uno de ellos ha comentado *"es curioso, la integral definida también sirve para resolver problemas distintos del cálculo de áreas".*

Son las 11:23 horas, los alumnos están nerviosos y charlatanes, el profesor considera que no debe proponer nuevos deberes[127] para el próximo día, no obstante, pide que estudien el Análisis el fin de semana puesto que para la próxima semana tendrán el examen final de esta parte de las Matemáticas.

Suena el timbre, se acabó la clase, los alumnos se sienten aliviados[128].

VII.3.1.8. SESIÓN 8: Martes, 25 de mayo de 2004

Comienza la segunda clase del día para los alumnos, son las 9:25 horas, el profesor apremia para que preparen el material, se hacen los desentendidos y poco a poco, con actitud pasiva, se sienten en disposición de trabajar aunque con muy poco interés.

Después de una lectura detallada del problema número 20[129] la mayoría de los alumnos no saben cómo empezar, no recuerdan la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto.

El profesor dice: *"No resolváis nada y representad lo que se os pide, de momento, no es necesario hallar la ecuación de la recta tangente"*. Sin

[125] Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función: $m = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$ siendo *m* la cantidad de material en kg y *t* la hora del día ¿Cuánto material arroja cada día?

[126] El profesor dice que no es necesario, basta controlar el dominio de definición que por el contexto del problema es [0,24] y, si la función está bien definida debe ser positiva.

[127] Indiferencia en la mayoría, alegría en algunos y comentarios tales como: *"Tenemos que estudiar muchísimo, no nos da tiempo a nada".*

[128] El profesor investigador, después de impartir siete sesiones de cálculo integral, considera que los alumnos no prestan la atención debida y ello hace suponer que explicar la integral a final de curso no es el momento más adecuado. Así pues, en los próximos ciclos debe hacerse todo lo posible por impartir el cálculo integral en otros periodos del curso académico.

[129] Calcula el área limitada por la gráfica de $y=x+x^2$ la tangente a esa curva en $x=2$ y el eje *OX*.

dificultad representan la parábola y la mayoría de los alumnos dibujan la recta tangente con cierta maestría.

Interviene el profesor diciendo: *"La recta tangente tiene una ecuación muy sencilla ¿Sabéis cuál es?"* Una alumna, consultando sus apuntes[130], da la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto. Muy bien, interviene el profesor, a la vez que escribe la ecuación en la pizarra, calculadla para este ejercicio.

Muchos alumnos se sienten perdidos, muy pocos saben lo que realmente deben hacer, no avanzan. La clase se alborota, todos hablan, nadie escucha. Ha de intervenirse con autoridad y se impone el silencio.

El profesor calcula la ecuación de la recta tangente y en la pizarra pinta de color amarillo la superficie cuyo área ha de hallar. No intentéis, dice, calcular el área de una única vez, sería aconsejable determinar dos recintos.

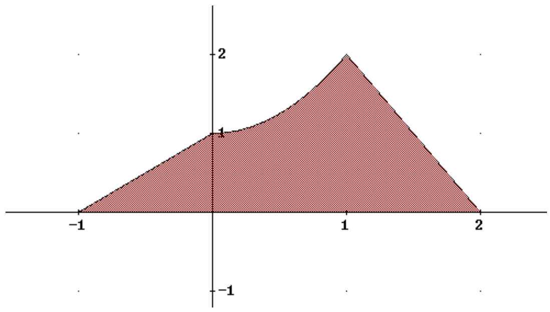
La alumna anterior dice: *"creo que podemos calcular el área de la función entre 0 y 2, después el área de la tangente entre el punto de corte de ésta con el eje de abscisas y 2. Finalmente restamos y así obtenemos la solución".* Así es, corrobora el profesor, lo has comprendido perfectamente y se termina resolviendo el problema en la pizarra.

Los ejercicios 21 y 23 siguen el mismo procedimiento que el que acabamos de resolver, afirma el profesor, escribe las soluciones en la pizarra y propone que los hagan esta misma tarde.

A continuación se pasa a resolver el problema 22[131]. La figura sorprende a los alumnos, dos de ellos consideran que la expresión analítica de la función está incompleta y como tal debe calcularse. El resto duda y el profesor pide que reflexionen cómo se puede calcular ese área. Finalmente, todos están

[130] Esta alumna muestra interés por las matemáticas y sabe buscar información cuando la precisa.

[131] Halla el área de la figura sabiendo que el lado curvo corresponde con la función $y = x^2 + 1$.



de acuerdo que la superficie coloreada viene determinada por tres recintos, dos de ellos triangulares y el central cuyo área es $\int_0^1 (x^2+1)dx$.

Para el cálculo de las áreas triangulares, tres alumnos proponen que se determinen las ecuaciones de las rectas que contienen los segmentos y se calculen las correspondientes integrales[132], el profesor muestra su sorpresa, un alumno propone *“calcular las áreas de los triángulos utilizando la fórmula clásica: área del triángulo, base por altura entre dos”.*

Los alumnos no muestran ningún interés por hacer más ejercicios, el profesor exige silencio y propone resolver los ejercicios 25, 26 y 38.

El ejercicio 25[133] viene dado mediante una función en valor absoluto[134]. Los alumnos protestan y el profesor aconseja que *“se represente la función si resulta sencillo o, en caso contrario, se escriba su expresión analítica por medio de su definición a trozos”.*

Dos alumnos, recordando las representación de funciones, proponen que *“se represente la recta y=2x–4 y, después de ‘doblar’ la recta por el eje OX se obtiene la representación de la función valor absoluto y, de esto, su definición a tozos”.* La mayoría opta por resolver la ecuación *2x–4=0.*

Para resolver el apartado a) la mayoría de los estudiantes no saben cómo actuar, se entabla una pequeña discusión[135] y, al final, estudiado el recinto gráfico determinado por la función valor absoluto, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=5 se opta por sumar las áreas de los dos triángulos que componen la superficie sin necesidad de efectuar el cálculo integral[136].

---

[132] Estos alumnos no utilizan los conocimientos previos y se obcecan en el cálculo integral.

[133] a) Halla el área limitada por $y=|2x-4|$, el eje X y las rectas x=0 y x=5.

b) Calcula $\int_{-2}^{3} |2x-4|\, dx$.

[134] Los alumnos rechazan las funciones de este tipo, muchos de ellos tienen serias dificultades para definirlas a trozos.

[135] Unos proponen que se calcule $\int_0^5 (2x-4)dx$, lo cual es erróneo. Un alumno expresa que el área viene determinada por $A=\int_0^2 (-2x+4)dx+\int_2^5 (2x-4)dx$.

[136] Los alumnos desconfían de las representaciones gráficas y consideran más riguroso hacer los cálculos algebraico-numéricos empleando las expresiones analíticas de las funciones; además, piensan que *“en clase de cálculo integral, los problemas deben resolverse por medio de integrales”.*

La resolución del 25 b) ha sido realizada, mayoritariamente, mediante la suma de dos integrales porque, según un alumno, *"no tiene sentido calcular el área de dos triángulos".*

En el ejercicio número 26[137] tenemos dos funciones definidas a trozos, para realizar las correspondientes integrales, a pesar de que se acaba de resolver el 25 con las mismas características, aún hay siete alumnos que no saben cómo comenzar, ocho dudan y, en primer lugar representan las funciones; otros tres alumnos hacen la integral pero tomando sólo la primera parte de la función definida a trozos sin tener en cuenta los extremos de la integración, el resto escribe bien las integrales y proceden a calcularlas.

El profesor, para que los alumnos comprendan mejor el ejercicio, dibuja la función *f(x)*, pinta de color azul la superficie comprendida entre la función *f(x)*[138], el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=1 y debajo de la superficie escribe $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx$. Procede del mismo modo para la superficie de la derecha (color amarillo) y ahora escribe la expresión $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (2-x)\,dx$.

Por último, sumando ambas integrales calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Los alumnos, en general, han seguido con sumo interés la resolución de la primera parte del ejercicio 26, la mayoría han coloreado las superficies con distintos colores y ha habido algún comentario como *"¡Qué fácil! ahora lo entiendo todo"*[139].

Los alumnos están animados, muestran interés por resolver la segunda parte del ejercicio y muchos comienzan dibujando[140] la función *g(x)*.

Faltan seis minutos para que finalice la clase y es el momento de hacer el último ejercicio[141] propuesto, el 38. Para resolver este problema, dice el

[137] Calcula: *a)* $\int_0^2 f(x)\,dx, \quad b)\int_{-1}^3 g(x)\,dx,$ siendo:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad 0\le x\le 1 \\ 2-x & si \quad 1<x\le 2\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x & si \quad -1\le x\le 1 \\ x^2+1 & si \quad 1<x\le 3\end{cases}$$

[138] Escribe sobre la gráfica de la función y por encima de la superficie azul $y = x^2$.

[139] La combinación de los registros gráfico, analítico y algebraico ayuda a los estudiantes a comprender la resolución del ejercicio.

[140] El profesor ha comentado: *"No es necesario representar la función"*. Un alumno dice: *"Yo lo entiendo mejor con la representación gráfica"*.

profesor, no debéis tener ninguna dificultad insalvable, su resolución es idéntica a la del problema 22. Es aconsejable hacer el dibujo y calcular algunas áreas aplicando las fórmulas más sencillas (por ejemplo: cuadrado, rectángulo, triángulo, trapecio y círculo). Comenzad a resolverlo.

Los alumnos, desanimados, representan el triángulo mixtilíneo e intentan calcular el área con ayuda de sus compañeros y del profesor.

Un alumno dice: *“Para calcular el área puede obtenerse del área del cuadrado de lado 4 menos la integral entre –2 y –1 de* x^2 *menos el área del trapecio cuya semisuma de las bases es 2,5 y altura 3”.* Es muy interesante tu aportación, dice el profesor, calcula el área pedida[142].

Más de la mitad de los alumnos han optado por calcular el área del trapecio mediante $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ siendo $f(x)$ la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y C. Otros alumnos han calculado el área del trapecio sumando las áreas de un rectángulo y un triángulo.

Suena el timbre, sólo tres alumnos han terminado el ejercicio, cuatro continúan resolviéndole y el resto recoge el material. El profesor dice que el próximo día se resolverán ejercicios propuestos en las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León.

VII.3.1.9. SESIÓN 9: Miércoles, 26 de mayo de 2004

Es el último día de clase de los alumnos de segundo curso de bachillerato[143], son las 9:25 horas y están nerviosos, no muestran interés por comenzar la clase, hablan, no preparan el material, las fotocopias con los ejercicios de selectividad no las han traído muchos de ellos y deben recolocarse para compartirlas[144].

[141] Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices A(2,4), B(–2,4) y C(–1,1), en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la de ecuación $y=x^2$.

[142] El alumno, al pedirle la justificación el profesor, ha girado el cuaderno 90º a la derecha y así ha determinado el área del trapecio.

[143] Las clases se suspenden el miércoles 26 de mayo a las 14:25 horas, los dos días siguientes se dedican a hacer los exámenes finales y la evaluación final será el próximo lunes 31 de mayo.

[144] El profesor, a mediados de octubre de 2003, entregó a cada uno de los alumnos fotocopias, de los últimos cinco años, de las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León (selectividad) de la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.

La lectura del primer ejercicio[145] causa cierta perplejidad a los estudiantes, puesto que deben utilizarse varios conceptos matemáticos para su correcta resolución[146].

La segunda parte del problema supuso que más de las dos terceras partes de los alumnos hicieran el producto de los factores y después calcularan la integral pedida[147], sólo dos alumnos descubrieron que es la integral de una función potencial y escribieron $\int_0^2 2(x-1)\left(x^2-2x-2\right)dx = \left[\frac{\left(x^2-2x-2\right)^2}{2}\right]_0^2$, todos supieron calcular la integral aunque con algunos errores operacionales.

La interpretación geométrica del resultado no supieron darla puesto que el resultado es 0. Algunos alumnos piensan que, si no hubiese sido cero[148], es el área comprendida entre la función *f(x)*, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=2. El profesor sugiere que reflexionen y que hagan un pequeño boceto de la representación gráfica de la función *f(x)*, una vez controlada la función, representamos la superficie determinada por la función y el eje de abscisas desde 0 hasta 2. Pregunta el profesor: *¿Qué es esto? ¿Por qué vale 0? ¿Es el área comprendida entre la gráfica de f(x), el eje X y las rectas x=0 y x=2? ¿Cómo puede calcularse dicho área?* Se establece un pequeño debate y al final se concluye que se ha calculado la integral definida, no el área[149], y una alumna dice: *"Visto el resultado, el área es* $A = 2\int_0^1 f(x)\,dx$ *"*. La clase, en general, considera que este problema es muy difícil[150].

145 Septiembre 2003, Bloque A: Se considera la función $f(x) = 2(x-1)(x^2-2x-2)$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en su punto de inflexión.
b) Halla la integral de *f(x)* entre x=0 y x=2, interpretando geométricamente el resultado obtenido.

146 Nosotros, por el contenido de la presente memoria sólo comentamos las incidencias del cálculo integral, sin embargo, en clase los problemas que se resolvieron lo fueron en su totalidad.

147 Esos alumnos no se plantearon por qué estaba dada esa función como producto de factores y la relación existente entre ellos.

148 Dice un alumno: *"Si el resultado fuera negativo tomaríamos el valor absoluto"*. Algunos compañeros asienten.

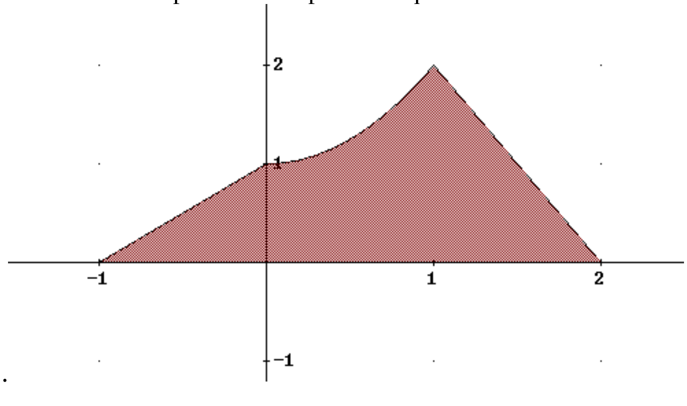
149 Los alumnos tienen errores conceptuales, confunden área con integral definida.

150 Varios alumnos dicen que esto no se ha dado en clase.

El segundo problema[151] que resolvemos resulta conocido para los alumnos, se hizo en clase[152], la única dificultad con la que se han encontrado cinco estudiantes ha sido escribir la parábola en forma genérica, otro alumno con voz contundente ha dicho. *"Escribe $f(x)=ax^2+bx+c$, derivas, controlas el mínimo y calculas la función".* Más de la mitad de los alumnos se han fijado en la resolución del día anterior y, directamente, han considerado la función $f(x)=x^2+1$. Los comentarios ahora son opuestos y hay quien dice: *"¡Qué fácil!, si lo preguntan le hago perfecto".*

El tercer problema[153] es original para los alumnos, en un principio, dibujan las dos funciones[154] y el cuadrado. Colorean los tres recintos con distintos colores y, la mayoría de los estudiantes calculan: $A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$, $A_2 = \left|\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx\right| = \frac{1}{3}$ y, razonan, como el área del cuadrado es 1 entonces $A_3 = \frac{1}{3}$. Los comentarios que suscita este problema entre algunos alumnos son positivos y consideran que: *"En selectividad, no son tan difíciles los problemas del cálculo integral".*

[151] Junio 2003, Bloque A: Halla el área del recinto de la figura siguiente:
Sabiendo que el tramo curvo corresponde a una parábola que tiene un mínimo en el punto (0,1).



[152] Corresponde con el número 22 del libro de texto, pág. 229, que fue resuelto el día anterior.

[153] Septiembre 2002, Bloque B:

a) Representa gráficamente las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x - x^2$.
b) Comprueba que estas funciones dividen al cuadrado de vértices (0,0), (0,1), (1,0) y (1,1) en tres regiones de la misma área.

[154] A los alumnos les resulta más fácil dibujar *f(x)* que *g(x)*, representan ambas funciones con cierta rapidez dando valores a cada una de ellas sin hacer ningún estudio de las mismas.

Vamos retrocediendo en el tiempo y el siguiente problema[155] que encontramos es considerado por los alumnos muy sencillo, están muy animados y ellos mismos lo resuelven sin ayuda del profesor. Solamente dos alumnos no muestran interés por las matemáticas puesto que las han abandonado aunque hoy están en clase.

Queda poco tiempo, siete minutos, el último problema[156] que planteamos los estudiantes lo consideran muy complicado, cunde el desánimo, no muestran ningún interés por resolverlo, hablan, no atienden las explicaciones del profesor[157] y cada cual está a lo suyo. El ejercicio no se puede resolver, faltan tres minutos para que terminen, con esta, las clases de matemáticas de este grupo de segundo de bachillerato.

Finalmente, el profesor agradece la atención prestada durante todo el curso, desea suerte a todos los alumnos en la evaluación final y comenta que después de la entrega de notas y hasta la víspera de las pruebas de selectividad habrá clases de preparación intensiva de las mismas. Los alumnos muestran su preocupación por los resultados de los exámenes y, a su vez, agradecen al profesor su dedicación y esfuerzo.

VII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN

El análisis de los datos descritos sobre las notas del cuaderno de campo del profesor investigador y sobre las observaciones (comportamiento, grado de motivación, avances en el aprendizaje, indisciplina, grado de integración entre los alumnos, etc.) llevadas a cabo durante la acción en la enseñanza y aprendizaje de la integral, con alumnos de segundo curso de bachillerato de ciencias sociales, nos permite enunciar las siguientes reflexiones:

---

[155] Junio 2001, Bloque B:

a) Calcula las integrales definidas $\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x\right)dx$ y $\int_{0}^{1}(1-2x)dx$.
b) Representa en la misma gráfica las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 1 - 2x$.
c) Halla el área del recinto limitado por las dos funciones.

[156] Junio 2001, Bloque A: Se considera la función $f(x) = -x^2 + ax - 4$.

a) Calcula el valor de a para que la recta tangente a la función en el punto x=3 corte al eje OX en el punto x=5.
b) Calcula, además, el área de la región limitada por dicha tangente, el eje OX y la función $f(x)$, para el valor a obtenido anteriormente.

[157] El profesor lo único que puede hacer es representar una parábola con las ramas hacia abajo y una recta tangente con las condiciones del problema, no podemos calcularla por la imposibilidad de impartir docencia en estos momentos finales de la última clase de Matemáticas con el grupo E de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales del curso 2003-2004.

a) En un principio sorprende a los estudiantes la exposición, mediante transparencias[158], de los conceptos teóricos del área y la integral definida. A los alumnos, durante su permanencia en el instituto, siempre se les habían presentado los temas de matemáticas mediante la exposición magistral del profesor y utilizando como únicos recursos tiza, pizarra y, excepcionalmente, calculadora.

b) La exposición teórica[159] hace que los alumnos se desentiendan de ella, consideran innecesario justificar el área de un rectángulo y el establecimiento del número π.

c) Los alumnos consideran muy difícil la definición de la integral inferior de Darboux mediante el extremo superior de las sumas inferiores[160] (ídem integral superior) y de un nivel superior al que corresponde a segundo curso de bachillerato. Para todos ellos son iguales las integrales de Darboux y Riemann, además, el teorema fundamental de cálculo lo reconocen como regla de Barrow.

d) Los alumnos muestran más interés por hacer los ejercicios prácticos cuando disponen de más tiempo en clase, el profesor en esta unidad didáctica ha personalizado más la docencia y, sorprende la predisposición de los alumnos a aprender, se sienten protagonistas directos de su propio aprendizaje[161]. Las interacciones entre el profesor y los alumnos son más intensas y se crea un mayor grado de complicidad en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

e) El momento en el cual se ha impartido la docencia del tema no ha sido el más idóneo, los estudiantes pierden concentración en la realización de las actividades puesto que están finalizando el curso y tienen que realizar muchas pruebas durante el mes de mayo, concentrándose las mismas en la segunda quincena.

f) El libro de texto sólo se ha utilizado para tomar los problemas de él y resolverlos, la teoría explicada en clase ha sido la del capítulo V de la

[158] Sólo se ha utilizado ese material en las dos primeras sesiones.

[159] Los alumnos consideran que la formalización teórica de los conceptos matemáticos no es importante o es demasiado abstracta y, como tal, no muestran ningún interés, simplemente la aceptan.

[160] Una alumna preguntó *"si se podían tomar límites cuando n tiende a infinito*".

[161] El profesor se ha pasado por los pupitres de los estudiantes con más frecuencia que durante el resto del curso resolviendo dudas y orientando en la realización de las actividades, los alumnos han trabajado más y mejor que en los meses anteriores.

presente memoria[162]. Los alumnos, en un principio, se sorprendieron por ser la primera vez que se hace esto durante el curso.

g) El profesor, durante el curso, siempre lleva a clase tizas de diferentes colores, para el cálculo de áreas son de gran utilidad[163], ello favorece la comprensión de los conceptos matemáticos de los alumnos[164].

h) El cálculo de primitivas es difícil para los alumnos[165], no aprenden ninguna tabla de integrales inmediatas y prefieren consultar la del libro de texto.

i) La combinación de los registros gráfico y analítico-algebraico hace que los alumnos comprendan mejor los conceptos teóricos y tengan más éxito en la resolución de problemas[166].

j) En este ciclo de exploración el considerar a las personas con nombre genérico (un alumno, una alumna) obstaculiza la redacción de la presente memoria; por tanto, en el resto de los ciclos se grabarán todas las sesiones y nos referiremos a cada alumno con dos letras mayúsculas[167].

k) La experiencia puede considerarse positiva aunque incompleta, así pues, en los siguientes ciclos deberemos ampliar el campo de acción calculando primitivas elementales mediante el cálculo mental y utilizando las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida; además, consideramos prioritario implementar la fase de la acción en otra época del curso escolar.

.

---

162 Quedó establecido en la hipótesis 1.3 del capítulo III y en la reflexión j) del capítulo IV la necesidad de elaborar una Unidad Didáctica del Área y la Integral.

163 Siguiendo el principio: *"A recintos distintos, colores distintos"*.

164 Varios estudiantes han utilizado esta técnica para resolver problemas de áreas.

165 La mayoría de los alumnos no tienen fluidez en el cálculo de derivadas y, consecuentemente, tienen grandes dificultades para el cálculo de integrales inmediatas.

166 Los alumnos, por regla general, consideran más importante el registro analítico-algebraico que el gráfico, a éste se le percibe como un apéndice, a veces innecesario, del anterior.

167 Generalmente constarán de la primera letra del nombre y del primer apellido y en caso de coincidir varios alumnos serán la primera del nombre y primera del segundo apellido.

***ANEXO H (CAPÍTULO VIII):* LA ACCIÓN**
EN LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN............... 241

VIII.3. ACCIÓN...242
VIII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN 242
VIII.3.1.1. SESIÓN 1: Jueves (9-12-2004) y viernes (2-12-2005) 243
VIII.3.1.2. SESIÓN 2: Viernes (10-12-2004) y miércoles (7-12-2005).......245
VIII.3.1.3. SESIÓN 3: Lunes (13-12-2004) y viernes (9-12-2005) 247
VIII.3.1.4. SESIÓN 4: Miércoles (15-12-2004) y lunes (12-12-2005)........249
VIII.3.1.5. SESIÓN 5: Jueves (16-12-2004) y martes (13-12-2005) 251
VIII.3.1.6. SESIÓN 6: Viernes (17-12-2004) y miércoles (14-12-2005).....253
VIII.3.1.7. SESIÓN 7: Lunes (20-12-2004) y viernes (16-12-2005) 254
VIII.3.1.8. SESIÓN 8: Lunes (10-01-2005) y lunes (19-12-2005) 256
VIII.3.1.9. SESIÓN 9: Miércoles (12-01-2005) y martes (20-12-2005)......258
VIII.3.1.10. SESIÓN 10: Jueves (13-01-2005) y lunes (9-01-2006) 260
VIII.3.1.11. SESIÓN 11: Viernes (14-01-2005) y martes (10-01-2006) 262
VIII.3.1.12. SESIÓN 12: Lunes (17-01-2005) y miércoles (11-01-2006)...264
VIII.3.1.13. SESIÓN 13: Miércoles (19-01-2005) y viernes (13-01-2006).268
VIII.3.1.14. SESIÓN 14: Jueves (20-01-2005) y lunes (16-01-2006) 270
VIII.3.1.15. SESIÓN 15: Jueves (20-01-2005) y lunes (23-01-2006) 274
VIII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN...274

ANEXO H (CAPÍTULO VIII): LA ACCIÓN EN LOS CICLOS DE CONFIRMACIÓN

Quedó establecido, en el capítulo VIII, que la redacción de la *acción* de los ciclos de confirmación se completaba en el correspondiente anexo, así pues, en estos momentos lo presentamos y, una vez más, para facilitar la ubicación del anexo H en la memoria se ha seguido el índice que le corresponde dentro del capítulo en el que está incardinado.

Pensamos que el apartado *VIII.3.2. Reflexiones de la acción* de la memoria también debemos incluirlo para dar solución de continuidad a la *descripción de la acción* redactada en este anexo y, en consecuencia, así lo hacemos.

VIII.3. ACCIÓN

Las fases de la acción de los ciclos de confirmación se desarrollaron con dos grupos, 2º E y 2º F, de dos cursos lectivos distintos; ambos grupos constaban de 20 alumnos cada uno y el periodo establecido para ello fueron los meses de diciembre y enero. Novedades importantes con respecto a la acción del ciclo de exploración son: el incremento del número de sesiones, la puesta en práctica del cálculo mental y el uso de las nuevas tecnologías. Los instrumentos de toma de datos fueron los del ciclo anterior y, además, cada una de las sesiones ha sido grabada en audio.

Conviene aclarar que el cálculo mental no tiene una o varias sesiones específicas de la acción, está dentro de todas las sesiones dedicadas a la integral. El uso de las nuevas tecnologías, en concreto, el programa de *software* matemático específico *DERIVE* tiene una sesión específica en el aula de informática del instituto que se describirá oportunamente.

VIII.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN

Las sesiones de trabajo realizadas al poner en práctica la docencia de la integral se describen a continuación, asimismo, incluimos en la descripción los hechos objetivos más relevantes extraídos de las anotaciones del cuaderno de campo del profesor y de la audición de las cintas grabadas en cada una de las sesiones, así como las distintas apreciaciones del profesor investigador.

Es evidente que redactar cada sesión para dos ciclos diferentes comporta un grado de dificultad superior al del ciclo de exploración, para ello hemos optado por poner en el epígrafe correspondiente las dos fechas[1] en las cuales se desarrolla la acción y, como las clases del aula de cada grupo no corresponden a la misma fecha ni al mismo periodo lectivo, consideramos que cada una de ellas comienza en el minuto 0 y acaba en el minuto 50.

Las sesiones del aula de informática en las cuales se aplican las nuevas tecnologías recibirán una atención específica en el capítulo XI de la presente memoria de tesis doctoral.

[1] La primera fecha corresponderá al grupo 2º E del curso 2004-2005 y la segunda a 2º F del curso siguiente.

Cuando haya diferencias sustanciales entre un grupo y otro, aún en la misma sesión, se especificará y al referirnos a un alumno determinado lo haremos mediante su código. Las tres últimas sesiones de la tabla VIII.2.3 no serán descritas como las anteriores.

Desde este momento no serán utilizadas las transparencias, serán sustituidas por el ordenador y un cañón que proyectarán en una pantalla la información que el profesor considere oportuna.

VIII.3.1.1. SESIÓN 1: Jueves (9-12-2004) y viernes (2-12-2005)

LA INTEGRAL

El profesor prepara el ordenador y el cañón para proyectar sobre la pantalla la exposición teórica, además, coloca sobre su mesa la grabadora. Los alumnos se sienten sorprendidos por el despliegue realizado para impartir esta primera clase sobre el cálculo integral; transcurridos, aproximadamente, cinco minutos el profesor puede comenzar a impartir la clase, sin embargo, al estar el aula en penumbra, TF pregunta si deben tomar apuntes, el profesor dice a todos los alumnos que *“no es necesario tomar apuntes, lo comunicará cuando sea menester y se entregará un resumen de la exposición de estos días”.*

Los alumnos están en silencio, el profesor lee el texto de la pantalla y a la vez lo comenta, comienza con una somera introducción histórica del problema del cálculo de áreas, los estudiantes prestan mucha atención y ellos mismos, también, leen de la misma pantalla. La introducción histórica les ha resultado interesante, a MA le sorprende que Arquímedes calculara áreas de recintos parabólicos; muchos alumnos reconocen a Newton y ninguno a Leibniz, salvo SR que dice “*creo que también era filósofo”.*

A los 13 minutos el profesor comienza con el concepto de área, los alumnos lo consideran evidente, y determina la fórmula del área del rectángulo[2], en estos momentos se sirve del ordenador y combina la explicación haciendo los correspondientes dibujos y anotaciones en la pizarra; los alumnos están relajados, distendidos y permiten que el profesor trabaje con comodidad, no interrumpen. La justificación de esta fórmula ha necesitado 9 minutos.

[2] La demostración del área del rectángulo según sean las longitudes de su base y altura es igual que la realizada en la primera sesión del ciclo de exploración y los alumnos actúan de forma similar sin que haya que constatar diferencias sustanciales que deban ser recogidas en este momento.

Estamos en el ecuador de la clase, los estudiantes prestan atención, el profesor se siente satisfecho por el discurrir de la clase y propone que calculemos la longitud de la circunferencia y el área del círculo. AM, MT, YC, entre otros comentan *”¿para qué lo vamos a calcular si ya lo conocemos?”*, el profesor contesta que hay que establecer esas fórmulas y nosotros vamos a utilizar un procedimiento que, cuando menos, resulta sorprendente.

Para fijar ideas, el profesor propone que el área del círculo se determine mediante una sucesión de áreas de polígonos regulares inscritos en el mismo, a los alumnos les parece una buena idea, sin embargo, el problema surge en el momento de calcular las áreas poligonales, JM pregunta *¿cómo se hace eso?*, varios alumnos suscriben la misma pregunta. El profesor, en la pizarra, hace los dibujos pertinentes y al escribir las expresiones en las cuales intervienen razones trigonométricas, se suscitan protestas de los estudiantes tales como: SA *“No recuerdo el seno y el coseno”*, BB[3] *“Lo explicaste en 4º de la ESO pero se me ha olvidado todo y como no me gustan las matemáticas, por eso, elegí Sociales”*, NU *“Yo hice las matemáticas fáciles de cuarto”*[4] y más comentarios, similares a estos.

El profesor se siente obligado a explicar las razones trigonométricas, para ello suspende el cálculo del área del círculo, recoge la pantalla sobre la cual proyecta el cañón, borra las pizarras y define las funciones circulares *seno* y *coseno.* Asimismo, pide a los alumnos que tomen apuntes[5], las protestas y el desánimo son generalizados. Al final de la clase, el profesor escribe el número π como un límite[6], para los alumnos es suficiente asignar a π el valor 3’14, y la fórmula del área del círculo. Suena el timbre y la clase concluye, el profesor recoge el material.

Consideramos que la docencia de esta primera sesión ha sido la misma en los dos grupos, el comportamiento de los estudiantes puede considerarse bueno, mejor 2º E que 2º F. Deberemos estar vigilantes en las próximas sesiones si la actitud de los alumnos sigue siendo positiva y qué diferencias sustanciales hay entre los dos grupos.

[3] JA, RA, BB, RD, TE, MA, AP y DS cursaron Matemáticas, Opción B, en 4º ESO durante el curso 2003-2004, impartidas por PI. Actualmente son alumnos de 2º de Bachillerato, grupo F.

[4] Matemáticas 4º ESO, opción A.

[5] Muchos de ellos se sienten desmotivados y les cuesta tomar apuntes. JG, BM, LM, JC y MC no escriben absolutamente nada en el cuaderno.

[6] $\pi = \lim_{n\to\infty} n \cdot sen(360/2n)$.

VIII.3.1.2. SESIÓN 2: Viernes (10-12-2004) y miércoles (7-12-2005)

Realizada la primera sesión y como reflexión inicial de la presente consideramos que las sesiones de los ciclos de confirmación deben llevar un ritmo más pausado que las del primero y, en consecuencia, pensamos que la enseñanza y el aprendizaje de la integral logrará metas superiores a las del ciclo de exploración; eso nos hemos propuesto desde un principio y así obramos.

De nuevo, el profesor prepara el material necesario para comenzar la clase[7], los alumnos están satisfechos, MT comenta que la exposición del día anterior fue interesante pero que el cálculo del área del círculo es demasiado complicado, SR pregunta si es necesario aprenderlo y MD considera que esto es muy elevado para segundo de bachillerato; el profesor les contesta que *"uno de los objetivos del día anterior era mostrar otras matemáticas distintas a las que habitualmente se enseñan".* Han transcurrido cuatro minutos desde el inicio de la clase, los alumnos están en sus pupitres y ya es posible comenzar esta nueva sesión.

El profesor comenta a los alumnos que no es suficiente saber el área del rectángulo, del círculo y de los polígonos regulares para poder calcular el área de superficies "más irregulares", por tanto, deberemos aplicar algún procedimiento nuevo para encontrar la solución a este tipo de problemas, así pues, comenzamos con:

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA. INTEGAL DE DARBOUX

El profesor investigador proyecta una superficie y se propone calcular su área[8], los alumnos prestan atención, no hablan entre sí, solamente BR y MC están totalmente despistados. Se establecen las sumas inferiores y superiores de Darboux[9] y el intercambio de ideas entre el profesor y los estudiantes es constante.

CP manifiesta que *"la suma inferior y la suma superior, según el dibujo, están muy alejadas del área que deseamos calcular"*, EG contesta que podíamos *"aproximarlo más si tomamos más puntos del intervalo"*, los

[7] Ordenador, cañón proyector, borra las pizarras, prepara la pantalla y la grabadora.

[8] Área comprendida entre una función positiva $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b.

[9] En este punto se sigue la metodología de la primera sesión del ciclo de exploración, con una exposición más pausada e interviniendo más los estudiantes que en el ciclo anterior.

alumnos prestan atención e, incluso, intercambian ideas entre ellos. DC[10] dice que *"eso se hacía con integrales".* El profesor sigue explicando y los alumnos muestran interés, están atentos, intervienen y, después de transcurridos 28 minutos desde el inicio de la clase, estamos en disposición de definir las integrales inferior y superior de Darboux.

La definición de la integral inferior de Darboux[11] hace que muchos alumnos pierdan interés por las explicaciones del profesor, DS está atento pero parece no comprender la definición, no lo manifiesta. El profesor, con distintos colores, dibuja en la pizarra tres sumas inferiores asociadas a tres particiones con la relación de refinamiento y pregunta *¿hasta dónde llegaría la mayor de las sumas inferiores?*, MN contesta, rápidamente, hasta el área A, la mayoría de sus compañeros asienten. Los alumnos se sienten liberados de la teoría y dan como buena la definición de integral de Darboux.

Restan doce minutos para que finalice la clase, el profesor propone que se calcule el área comprendida entre la función $f(x)=x$, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=1 por dos procedimientos distintos, a saber: el área de un triángulo y mediante la integral de Darboux.

DR y CB no dudan en afirmar que *"la superficie es un triángulo rectángulo de base 1 y altura 1, por tanto, el área es 0,5"*, todos están de acuerdo, nadie lo duda. El segundo procedimiento, mediante el cálculo de sumas inferiores y superiores, suscita la apatía de la mayoría de los alumnos, el profesor se ve obligado a pedir silencio en varias ocasiones y muchos de ellos se desentienden de las explicaciones.

El profesor investigador pide a los estudiantes que estos días repasen las derivadas, pero ellos están más interesados en el fin de semana (2º E) o en la proximidad del mismo con un día festivo previo. Se acabó la clase.

En esta sesión podemos destacar el interés inicial de los alumnos, sobre todo, en la primera media hora; después muchos de ellos, según su propia expresión, "han desconectado" y su atención se ha desviado a asuntos ajenos a la clase de matemáticas. Los alumnos de 2º F son más inquietos que los de 2º E, se despistan con más frecuencia y hablan más en clase, eso sí, todos son educados y respetuosos con el profesor y sus compañeros.

[10] Alumno repetidor que, el año anterior, cursó la asignatura con otro profesor del departamento.

[11] Ídem integral superior de Darboux.

VIII.3.1.3. SESIÓN 3: Lunes (13-12-2004) y viernes (9-12-2005)

Son las 9:25 horas del lunes y las 12:40 horas del viernes, el profesor supone que esta sesión puede ser más provechosa para los estudiantes de 2º E que para los de 2º F[12]. Se prepara el material de las sesiones anteriores, los alumnos del primer grupo están tranquilos en sus asientos, los del segundo vienen del recreo y se hacen los remolones, no muestran ningún interés por comenzar la clase.

El PI recuerda el concepto de integral de Darboux, los alumnos lo aceptan sin más, y comenta que en la sesión anterior se calculó un área triangular utilizando el procedimiento de las sumas inferiores y superiores, HL dice que *"esto es muy difícil y no se puede aprender"*, AP y RS consideran que *"este procedimiento lo complica todo y no nos lleva a ningún sitio"*, la mayoría de los alumnos de 2º E están apáticos y muchos de 2º F protestan.

Así han transcurrido ocho minutos, el profesor tranquiliza a los alumnos[13] y, seguidamente establece las sumas de Riemann y posteriormente la integral de Riemann[14], concluye afirmando que esta integral coincide con la de Darboux y, en adelante, nos referiremos a ambas como integral definida.

Es necesario cambiar de estrategia, debemos hacer que los estudiantes vuelvan a reencontrarse con la actividad científica y que sean partícipes activos de su propio aprendizaje, así pues, el profesor define el concepto de primitiva y los alumnos comienzan a interesarse de nuevo por este contenido de la clase de matemáticas.

Durante varios minutos nos dedicamos al cálculo de primitivas elementales[15]; a AM, SC, MG, SB y MA les resultan sencillas; DA, BM, JM, BB y JC consideran que son muy difíciles y el resto de los alumnos son indiferentes a los cálculos de las mismas.

---

[12] Son simples conjeturas que deberemos aceptarlas o rechazarlas en función del discurrir de la presente sesión.

[13] Vuelve a insistir que lo expuesto hasta el momento es la formalización teórica para poder calcular áreas y que uno de los objetivos de estas sesiones iniciales es presentar la integral desde una perspectiva más científica de la que se considera habitualmente en bachillerato.

[14] Algunos alumnos se sienten superados por las circunstancias y el profesor, viendo las actitudes que toman muchos de ellos, decide abreviar esta parte teórica.

[15] Para ello el PI escribe varios ejemplos en la pizarra y va comprobando las posibles soluciones. He aquí algunos ejercicios: $\int x^4 dx, \quad \int \frac{3}{x} dx, \quad \int senx\, dx, \quad \int e^x dx, \quad \int (x+5)^6 dx, \quad etc.$

Estamos en el minuto 32, es el momento de dar a conocer el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), el profesor lo proyecta en la pantalla, determina la hipótesis y la tesis del mismo y lee su demostración. Los alumnos están atentos, algunos se impacientan porque dicen que no entienden nada. La primera aplicación práctica del TFC consiste en calcular el área triangular de la sesión anterior y el resultado es, nuevamente, 0,5 u^2

Algunos alumnos repetidores[16] afirman que *"el TFC es la regla de Barrow"*, a la mayoría les sorprende la aplicación y el profesor propone que se dibuje la superficie y calculen el área de la región limitada por la función $f(x)=x^2$, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=3. Todos los alumnos, salvo RA y RS representan correctamente la superficie, algunos han dudado y han solicitado la ayuda de algunos de sus compañeros, la dificultad surge al calcular el área. El profesor sugiere que relean el TFC[17] y, fijándose en el ejercicio resuelto anteriormente, deben saber resolver este. La alumna MT dice que *"una primitiva de x^2 es x^3 y el área es $3^3 - 1^3 = 26$"*, el PI sugiere que observe la figura y piense si es posible que mida 26 unidades cuadradas; definitivamente, la alumna se convence de que no puede ser. Se establece un pequeño debate y, entre los estudiantes, determinan una primitiva de la función $f(x)=x^2$ y calculan sin dificultad el área pedida[18].

En los últimos seis minutos, como ejercicio práctico se propone que calculen el área entre la función $f(x)=x$, el eje de abscisas y las rectas x=–2 y x=2. La solución para la mayoría de los alumnos es inmediata pero errónea, el resultado no puede ser 0. El profesor pide que representen la región y que determinen el área de dos triángulos. Al final se resuelve el ejercicio correctamente y, seguidamente, se explican las propiedades de la integral.

Esta es la última sesión, dice el profesor, en la cual utilizamos el ordenador y el cañón proyector, la exposición teórica ha concluido y a partir de este momento trabajaremos más los ejercicios prácticos[19].

Las intuiciones iniciales del profesor no han sido descabelladas, los alumnos de 2º E han sido más receptivos y activos que los de 2º F, los cuales han estado menos atentos, han molestado más y han trabajado menos.

[16] BM, JM y DC.

[17] Está proyectado en la pantalla.

[18] La sorpresa es mayúscula entre los alumnos, NC y MN, entre otros, consideran que *"con saber aplicar el teorema fundamental del cálculo es suficiente"*.

[19] Los alumnos consideran que pueden obviar la teoría y sólo deben recordar la regla de Barrow.

VIII.3.1.4. SESIÓN 4: Miércoles (15-12-2004) y lunes (12-12-2005)

Desde este momento, pasamos a resolver ejercicios prácticos, no insistiremos más sobre la formalización teórica de la integral. Los alumnos sienten que, de nuevo, se vuelve a la rutina de las clases de matemáticas y, en general, se muestran pasivos al comienzo de la clase. El profesor sugiere que todos los alumnos tengan, a la vista, las tablas de derivadas e integrales inmediatas[20], después de tres minutos, ya es posible comenzar.

El profesor, para situar a los alumnos en contexto, relaciona los conceptos de derivación e integración: escribe varias funciones sencillas en la pizarra y las deriva, seguidamente, la derivada de cada función la integra y hace ver a los alumnos que vuelven a obtenerse las funciones originales[21].

Estamos, aproximadamente, en el minuto 8 y es el momento de comenzar a resolver los ejercicios número 3[22] y nº 4[23], pág. 213 del libro de texto[24]. No es nuestra pretensión volver a repetir las actuaciones del ciclo de exploración, más bien, escribiremos las intervenciones más novedosas y que, a la vez, tengan un cierto interés didáctico.

RG considera que *“3 a) es muy sencilla, basta multiplicar y dividir por 3 y el resultado es* $\frac{1}{3}(x^3-5x+1)^3+k$*, porque tiene que ser un grado mayor”.* BM, JM y algunos alumnos más dudan; el profesor recurre a la derivada-integral de la función potencial para explicar el resultado y, los alumnos, parece que comprenden la solución dada por RG.

---

[20] Páginas 157 (derivadas) y 212 (primitivas) del libro de texto.

[21] En palabras de SA y DS: *“La integración es lo contrario de la derivación”.* Apreciación corroborada por varios alumnos de los dos grupos.

[22] Ejercicio nº 3. Halla las primitivas de estas funciones:

$a)\ f(x)=(x^3-5x+3)^2(3x^2-5)$ $\quad b)\ f(x)=(5x+-1)^3$ $\quad c)\ f(x)=\frac{3x^2-3}{x^3-3x}$

$d)\ f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-3x}$ $\quad e)\ f(x)=\cos x\, sen^3 x$

[23] Ejercicio nº 4. Busca las primitivas de:

$a)\ f(x)=x\,2^{x^2}\ln 2$ $\quad b)\ f(x)=x\,2^{x^2}$ $\quad c)\ f(x)=2^{3x-5}$

$d)\ f(x)=sen3x$ $\quad e)\ f(x)=sen(x^3-4x^2)(3x^2-8x)$ $\quad f)\ f(x)=\frac{senx}{\cos x}$

[24] En el anexo B se ha escaneado la novena unidad didáctica: *Iniciación a las integrales* del libro de texto: Colera, J., García, R. y Oliveira, M. (2003). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Madrid: Anaya.

El 3 c) suscita ciertas dificultades, sin embargo LM observa que *"la derivada del denominador es el numerador"* y el PI pregunta si conoce alguna derivada o integral donde aparezca esa relación, los alumnos buscan en las dos tablas, CP comenta que puede ser un *"neperiano"*, se discute la propuesta, el profesor escribe varios ejemplos sencillos de integración logarítmica y, al final, la mayoría de los alumnos escriben la solución[25]. El primer grupo está atento, pocos se suelen despistar, el segundo es más inquieto e intentan ralentizar la clase[26]. Se acaba el ejercicio nº 3.

El tiempo avanza, han pasado 23 minutos desde el inicio de la clase y con el grupo 2º E se ha optado por resolver el ejercicio nº 4, no así en 2º F que, posteriormente, se justificará la opción tomada.

El cálculo de las tres primeras primitivas del nº 4, es difícil para los alumnos, la derivada de la función exponencial no la tienen suficientemente interiorizada y, peor aún, si la base no es el número *e.* Resolver el 4 a) ha sido un continuo ir y venir de las derivadas a las integrales, los alumnos se despistan, se desmoralizan, hablan, interrumpen constantemente e incluso jalean a DR cuando dice: *"Esto no hay quien lo entienda".* El profesor ha optado, en lugar de resolver 4 c) sustituirlo por el cálculo de $\int e^{3x-5}dx$ y otras similares[27], ahora parece que entienden mejor las soluciones, incluso EG comenta a sus compañeros más próximos: *"Esto es más fácil".* El resto del nº 4 se hace con cierta celeridad, algunos alumnos se desentienden y no prestan atención, aunque no molestan.

Realizada esta experiencia en el ciclo II, el equipo investigador[28] considera que la dificultad añadida del nº 4 no aporta un incremento equivalente a los estudiantes en la consolidación de los contenidos matemáticos y, como tal, se decidió que en los ciclos sucesivos no se resolvieran integrales exponenciales de base distinta al número *"e"*. Consideramos que los alumnos deben pensar más, escribir menos y relacionar con fluidez la derivación con la integración, es decir, potenciar el cálculo mental y, en

[25] El profesor investigador comenta que debe escribirse el logaritmo neperiano del valor absoluto de la función denominador, los alumnos no lo consideran importante y debe aclararse que sólo existen logaritmos de valores positivos.

[26] Como ejemplo, basta decir que el profesor no puede poner tantos ejemplos como en el anterior grupo, debe ser más conciso.

[27] El PI ha considerado oportuno proponer ejercicios de integración exponencial con base el número *e*.

[28] El director de la tesis y el profesor investigador.

consecuencia, en esta sesión se sustituyó en 2º F dicho ejercicio por el nº 1 de la página 227[29].

Los alumnos de 2º F con los cuatro primeros apartados del ejercicio se sienten, en general, seguros al resolverlos. Llama la atención que al calcular una primitiva de $\sqrt{3}$ hay alumnos que tienen dificultades, incluso TE dice que *"$\sqrt{3}$ es* 3 *elevado a ½ y se calcula como una función potencial"* y, sin embargo, les resulta evidente que una primitiva de 3 es 3x.

El cálculo de las cuatro últimas primitivas comporta mayores dificultades, expresar $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ y $\sqrt{x} = x^{1/2}$ no es fácil para muchos estudiantes y si le añadimos la integración de una función con potencia negativa o fraccionaria, entonces, el error está garantizado para la mayoría de ellos, además, el ruido y las interrupciones son constantes.

VIII.3.1.5. SESIÓN 5: Jueves (16-12-2004) y martes (13-12-2005)

En la sesión anterior, la integración de funciones exponenciales supuso un grado de dificultad elevado para 2º E, en 2º F no se resolvieron. En la presente sesión se ha optado, en primer lugar, por la resolución del nº 6[30].

Algunos alumnos están desorientados, tienen los exámenes de la primera evaluación y no hacen los ejercicios propuestos, es más, se percibe que únicamente dedican tiempo a las matemáticas durante la clase y no se avanza suficientemente.

El profesor considera que en primer lugar debe hacerse el 6 c), hace observar a los alumnos la relación entre el numerador y el denominador, SB

[29] Ejercicio nº 1. Halla una primitiva de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = x+1$ $\quad b)\ f(x) = 2x - \sqrt{3}$ $\quad c)\ f(x) = \frac{x}{2} + x^2$ $\quad d)\ f(x) = -8x^3 + 3x^2$

$e)\ f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ $\quad f)\ f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{5x^4}$ $\quad g)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}$ $\quad h)\ f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

[30] Ejercicio nº 6. Calcula:

$a)\ \int x\sqrt{5x^2+1}$ $\quad b)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}}$ $\quad c)\ \int \frac{2x+1}{x^2+x-3}$ $\quad d)\ \int x\, e^{x^2}$

$e)\ \int \frac{5x}{3x^2+2}$ $\quad f)\ \int sen^2 x \cos x$ $\quad g)\ \int \frac{x^3}{x^4-4}$ $\quad h)\ \int x\, sen\, x^2$

comenta que *"el numerador es la derivada del denominador"*, no resulta complicada la solución y los alumnos, consultando algunos de ellos la tabla de primitivas, escriben la solución logarítmica. El PI propone que se resuelva el siguiente ejercicio $\int \frac{2x+1}{(x^2+x-3)^5}dx$, NC considera que la solución es el neperiano del denominador, se suscita la duda, hay controversia; se propone reescribir la integral de la forma $\int (2x+1)\cdot(x^2+x-3)^{-5}dx$, AM dice que es del tipo potencial; el profesor hace ver las diferencias entre las dos integrales y MT da la solución correcta.

Este segundo ejercicio sugiere que también pueden considerarse de tipo potencial 6 a) y 6 b) y surge, de nuevo, la dificultad de expresar los radicales en forma potencial; BB duda y hay que explicárselo personalmente, el resto de los alumnos hallan la solución[31]. El 6 d), con cierta dificultad, lo resuelven los estudiantes de 2º E; muy difícil es para los de 2º F y el profesor debe poner ejemplos más sencillos donde el exponente es un polinomio de primer grado. El resto del ejercicio exige un tiempo prudencial para ser explicado y parece que los estudiantes van comprendiendo la solución de la integral de cada uno de los apartados.

Es evidente que, hasta el momento actual, los alumnos de 2º E están más atentos y captan mejor la resolución de los ejercicios que los de 2º F, éstos interrumpen más las clases y se despistan con mayor facilidad.

En este momento, los estudiantes han perdido su concentración, hablan, no tienen interés por hacer más ejercicios. El profesor exige silencio e impone su autoridad.

Estamos en el minuto 37 y pasamos al ejercicio nº 9[32]. Sólo se resuelven los cinco primeros apartados y las mayores dificultades encontradas son: en el primero y en el segundo que según MC *"la integral del producto es el*

---

[31] Los alumnos suelen ayudarse mutuamente y son frecuentes los errores que cometen al determinar los factores constantes integración.

[32] Ejercicio nº 9. Calcula:

$a)\ \int \frac{1}{x^2} sen \frac{1}{x}$ $\quad b)\ \int senx \cos x$ $\quad c)\ \int \sqrt{x\sqrt{x}}$ $\quad d)\ \int \frac{1}{x^2+2x+1}$ $\quad e)\ \int (x^2+1)^2$

$f)\ \int \frac{x}{\sqrt{3x^2-2}}$ $\quad g)\ \int \frac{3x^2+2x-1}{x-2}$ $\quad h)\ \int \frac{e^x}{1+e^x}$ $\quad i)\ \int \frac{2}{x}\ln x$ $\quad j)\ \int \frac{1}{e^x}\cos e^{-x}$

producto de las integrales" y, en los tres siguientes, donde muchos alumnos tienen serias dificultades para operar con radicales y potencias.

Para el día siguiente, los estudiantes deben terminar este ejercicio. Algunos de ellos no se molestan en anotarlo y recogen el material con desgana.

VIII.3.1.6. SESIÓN 6: Viernes (17-12-2004) y miércoles (14-12-2005)

Aún no pasamos al cálculo de áreas, seguimos con las primitivas, pensamos que los alumnos comienzan a adquirir ciertas habilidades en el cálculo de las mismas. Terminamos de resolver el nº 9, propuesto en la sesión anterior.

El apartado f) hace suponer a HL que la solución es el neperiano del denominador, TF hace saber que no es posible por tener una raíz cuadrada y el numerador no es la derivada del denominador, entre los mismos alumnos y con ayuda del profesor se concluye que la solución es de tipo potencial y, cuadrando las constantes, se obtiene dicha solución. En el siguiente, a sugerencia del PI, deben dividirse los polinomios[33] y, al final, aplicando la linealidad de la integración el resultado es la suma de una función polinómica y otra logarítmica. La resolución del resto del ejercicio comporta dificultades análogas a las del ciclo de exploración.

Han transcurrido 20 minutos y el profesor considera que los alumnos deben consolidar el cálculo de integrales inmediatas, para ello propone a los estudiantes que resuelvan el nº 2 de la página 227[34]. Insistimos, los estudiantes tienen dificultades en las manipulaciones algebraicas, sobre todo, en a), b) y c) donde persisten las dudas y los errores al simplificar radicales[35], la integración de las fracciones algebraicas parece ser más sencilla y los alumnos, ayudándose mutuamente y solicitando en algunos momentos la ayuda del profesor, la realizan correctamente[36].

[33] El PI debe recordar el algoritmo de la división de polinomios, muchos alumnos tienen dificultades para realizarla correctamente.

[34] Ejercicio nº 2. Calcula:

$$a)\ \int\sqrt{3x} \qquad b)\ \int\sqrt[3]{5x^2} \qquad c)\ \int\frac{x+x^2}{\sqrt{x}} \qquad d)\ \int\frac{x^3-2}{x^2}$$

$$e)\ \int\frac{3}{x} \qquad f)\ \int\frac{2}{x+1} \qquad g)\ \int\frac{x-2}{x^2} \qquad h)\ \int\frac{3-2x}{x}$$

[35] Para BM, JM, DA, RA y MC operar con radicales les supone una dificultad casi insalvable.

[36] SA, NC, TF, JG, AM CP, MT, CB, YC y MN consideran que este ejercicio ha sido fácil y expresan su satisfacción personal por entender que *"saben integrar"*.

Hemos llegado al minuto 38, los alumnos están animados, en particular 2º E, a propuesta del profesor, debe resolverse el nº 3[37], recurren a la tabla de primitivas inmediatas, muchos muestran su desaprobación por los ejercicios de integración trigonométrica.

El PI considera que c) y d) no aportan nada nuevo y, sin embargo, al no haber realizado ejercicios de derivadas de la función tangente, ha decidido obviar estos dos. Sin ánimo de ser exhaustivo, la mayor dificultad que han encontrado los estudiantes es dudar si $\pi/2$ es una constante o una variable[38] y, consecuentemente, algunos de ellos han tenido que rectificar las soluciones. Este ejercicio se ha terminado con apuros de tiempo, para la siguiente sesión se proponen los ejercicios 5 y 8 del libro de texto.

VIII.3.1.7. SESIÓN 7: Lunes (20-12-2004) y viernes (16-12-2005)

Esta sesión, dice el profesor, es la última que dedicamos al cálculo específico de primitivas. Una observación generalizada de los cuadernos de los alumnos permite ver que muy pocos han resuelto parte de los ejercicios propuestos, podemos considerar que los han trabajado la tercera parte de los estudiantes de ambos grupos.

El PI propone que los alumnos resuelvan el ejercicio nº 5[39], después será el nº 8, y que lo hagan conjuntamente con los compañeros más próximos, mientras tanto, el profesor resolverá las dudas personalmente. No les desagrada la idea y con mayor interés que en las sesiones precedentes comienzan a resolver cada uno de los apartados, se entablan discusiones entre los mismos compañeros, piden ayuda al profesor y éste exige que se restablezca el orden y que hablen en voz baja.

---

[37] Ejercicio nº 3. Calcula:

$$a)\ \int sen\,3x \qquad b)\ \int \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad c)\ \int \frac{1}{\cos^2 5x} \qquad d)\ \int \left(1+tag^2 3x\right)$$

$$e)\ \int \frac{\cos x}{sen\,x} \qquad f)\ \int \left(1-sen\,\frac{x}{2}\right) \qquad g)\ \int sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \qquad h)\ \int \cos\frac{\pi}{2}x$$

[38] Hecho constatado en el anterior ciclo de exploración.

[39] Ejercicio nº 5. Calcula:

$$a)\ \int (x-3)^3 \qquad b)\ \int (2x+1)^5 \qquad c)\ \int \frac{1}{\sqrt{x+2}} \qquad d)\ \int \sqrt{3x-5}$$

$$e)\ \int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}} \qquad f)\ \int \frac{3}{2x-1} \qquad g)\ \int \frac{2x}{x^2+2} \qquad h)\ \int \frac{x}{3x^2-4}$$

La percepción del profesor es positiva y pasados varios minutos, propone a los estudiantes, de dos en dos[40], que vayan resolviendo en el encerado el apartado asignado a cada uno, ninguno se niega a salir, algunos son más impulsivos y quieren ser los primeros en mostrar su solución. Señalamos en este momento que los alumnos no han tenido dificultades dignas de mención en el cálculo de estas primitivas de tipo potencial y logarítmico.

Han transcurrido veintitrés minutos y se da por concluido el ejercicio nº 5, seguidamente se pasa al nº 8[41] y, después de recordar el profesor la necesidad de efectuar la división como lo indica la sugerencia, pueden calcular la solución. Dividir polinomios confunde a los alumnos y son varios los que cometen errores, el profesor efectúa la división primera y exige que "todos" estén atentos y, posteriormente, escribe la solución. El resto de los apartados los hacen los alumnos como se hicieron los del ejercicio anterior y tres de ellos exponen sus resultados en la pizarra.

Faltan diez minutos, el profesor investigador escribe en la pizarra media docena de integrales tipo exponencial para que los alumnos las resuelvan en el tiempo que resta de clase. No tienen grandes dificultades, algunos solicitan ayuda, y se da por zanjado el cálculo de primitivas.

Pensamos que, después del ciclo inicial de exploración y de estos dos de confirmación, es el momento de hacer una reflexión que consideramos importante, ésta es: *"El cálculo de primitivas inmediatas, sin utilizar ningún método de integración, termina convirtiéndose en algo pesado y tedioso, donde los alumnos no encuentran una aplicación práctica de dicho cálculo".*

Así pues, en aras de una mejor calidad de la enseñanza-aprendizaje de la integral proponemos que, en los siguientes ciclos, se combine el cálculo de primitivas con el cálculo de áreas e integrales definidas. Además, según el mandato del segundo objetivo[42], deberemos practicar más el cálculo mental.

---

[40] En clase hay dos pizarras, a cada uno de los dos alumnos se le asigna una de ellas.

[41] Ejercicio nº 8. Resuelve las siguientes integrales:

$$a)\ \int \frac{x^2-3x+4}{x-1} \qquad b)\ \int \frac{x^2+5x-7}{x+3} \qquad c)\ \int \frac{2x^2-3x+1}{2x-1} \qquad d)\ \int \frac{x^2+3x-1}{x^2-1}$$

Sugerencia: *"Divide y transforma la fracción así:* $\frac{Dividendo}{Divisor} = Cociente + \frac{Resto}{Divisor}$ *".*

[42] Objetivo 2: *"Descubrir los logros y las dificultades que tienen los estudiantes al resolver mentalmente integrales indefinidas sencillas, que sean parecidas a las que figuran en las tablas de primitivas".*

VIII.3.1.8. SESIÓN 8: Lunes (10-01-2005) y lunes (19-12-2005)

Hoy, comenta el profesor, calcularemos áreas y, para ello, resolveremos el ejercicio número 11[43], debéis estar atentos y comprender cómo se hace cada apartado, son algunas de las aplicaciones prácticas de la integral.

Los alumnos están expectante, muestran interés por ver el primer ejercicio práctico donde se calcula un área, el profesor dice: *“Aunque no es necesario representar la función, para calcular las áreas es aconsejable realizar una buena representación gráfica de la función integrando. Representad la primera función”.*

Los alumnos, algunos con lentitud, representan la función y el profesor investigador pide que coloreen la superficie cuyo área se desea calcular, lo están entendiendo y, hasta el momento, saben hacerlo. El profesor recuerda la construcción de la integral de Darboux mediante las sumas inferiores y superiores y el teorema fundamental del cálculo, así pues, pide que se calcule $\int_0^2 (x^2 - 4)\,dx$ y, el resultado les da –16/3, los alumnos se sorprenden y, el profesor, hace observar que la superficie está por debajo del eje de abscisas, por tanto, las alturas (señalándolo en la pizarra) son negativas y, en consecuencia, deberemos tomar el valor absoluto. Algunos alumnos[44] se sorprenden de este “truco”, BR considera que el problema está en el cálculo de primitivas y el PI contesta que las funciones serán fáciles de integrar y, además, se deberán calcular áreas de distintos “recintos”. Hay gente que duda de la solución dada, para aclarar ideas, se propone calcular el área de un rectángulo de base cinco y altura dos unidades por el procedimiento integral[45], los estudiantes parece que se han convencido de la solución una vez realizado el dibujo y calculado el área.

---

[43] Ejercicio nº 11. Halla, en cada caso, el área limitada por:

a) $f(x) = x^2 - 4$, el eje X y las rectas x = 0 y x = 2.

b) $f(x) = 2x - x^2$, el eje X y las rectas x = –1 y x = 1.

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y el eje X.

d) $f(x) = 1 - x^2$, el eje X y las rectas x = –2 y x = 2.

e) $f(x) = e^x$, el eje X y las rectas x = –1 y x = 3.

f) $f(x) = x^2 + 1$, el eje X y las rectas x = –1 y x = 3.

[44] RG, BM, AM, UN, BB, EM y MG entre otros.

[45] Calcular el área encerrada entre la función $f(x) = -2$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

Han transcurrido doce minutos desde el comienzo de la clase, debemos resolver el 11 b), representamos la parábola, determinamos la superficie e intentamos calcular el área. Varios estudiantes escriben y calculan $\int_{-1}^{1}(2x-x^2)\,dx$, el profesor pregunta sobre el dibujo realizado *"¿Puede ser ese área 2/3, es decir, menor que 1?"*, DC piensa que es muy poco y, al hilo de este matiz, se propone que calculen $\int_{-1}^{0}(2x-x^2)\,dx$ e $\int_{0}^{1}(2x-x^2)\,dx$, operen como corresponda y obtengan la solución correcta. Al final concluimos, en palabras de MN, *"que para hallar áreas debemos determinar los recintos que las componen y calcular el área de cada uno de ellos, después hay que sumarlas"*.

El c) no comporta ninguna dificultad, el d) exige que se descomponga la superficie inicial en dos superficies por encima del eje de abscisas y otra por debajo. El PI advierte que dichas superficies son simétricas y es aconsejable calcular $A_1 = \int_0^1 \left(1-x^2\right)dx$ y $A_2 = \left|\int_1^2 \left(1-x^2\right)dx\right|$ y el área total viene dada por: $A = 2\cdot\left(A_1 + A_2\right)$, el profesor lo resuelve en la pizarra. Los alumnos se interesan por calcular áreas de este tipo y, en pequeños grupos, hacen los dos últimos apartados del ejercicio 11.

Estamos en el minuto 39 y proponemos que se resuelvan los apartados a) y c) del número 12[46]; además, hay que calcular el área comprendida entre la función correspondiente, el eje de abscisas y los extremos del intervalo[47].

Primeramente calculamos $\int_0^2 \left(3x^2-6x\right)dx$ y después $\int_0^3 \left(3x^2-6x\right)dx$.

Seguidamente, representamos la función *f(x)=3x²–6x* y determinamos la superficie comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=2, debe calcularse su área. Asimismo, de nuevo, volvemos a representar la misma función y ahora coloreamos la superficie comprendida entre la gráfica de *f(x)=3x²–6x*, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=3, y, una vez más, los alumnos han de calcular el área de la superficie señalada.

---

[46] Ejercicio nº 12. Halla las integrales de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:
a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ en [0, 2] b) $f(x) = 2\cos x$ en [0, π/2]
c) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 2)$ en [– 1, 2] d) $f(x) = \text{sen}(x/4)$ en [0, π]

[47] El objetivo es que los alumnos discriminen entre integral definida y área.

Los estudiantes muestran interés por resolver estas cuatro cuestiones, representan, en sus cuadernos, la función con precisión y controlan los recintos en los cuales se descompone la superficie entre la función, el eje OX y las rectas x=0 y x=3.

El cálculo de la integral definida $\int_0^3 (x^2 - 6x)\,dx$ = 0, no suscita controversias; sin embargo, calcular el área, según la representación gráfica, no puede ser 0 unidades cuadradas y SR propone que se calcule por recintos. El profesor advierte que debemos tener cuidado porque las área por encima y por debajo del eje de abscisas se contrarrestan y puede salir 0, por tanto, es fundamental controlar los recintos.

Los estudiantes de los dos grupos, en general, han estado atentos en la resolución de este tipo de problemas y, en palabras de MD, *"esto es más interesante que el cálculo de primitivas".*

VIII.3.1.9. SESIÓN 9: Miércoles (12-01-2005) y martes (20-12-2005)

Los alumnos de 2º E no están desmotivados, tienen más interés por comenzar la clase que los de 2º F, éstos hablan más y se hacen los remolones, además, es víspera de vacaciones y se encuentran más cansados que los del ciclo anterior puesto que ya las han disfrutado.

Hoy corresponde hacer el ejercicio nº 13[48] y con él nos proponemos calcular el área comprendida entre dos curvas.

Previamente, el profesor ha representado dos funciones cualesquiera *f(x)* y *g(x)* las cuales se cortan en tres puntos y, seguidamente, escribe y explica el algoritmo por el cual se calcula el área comprendida entre ambas[49].

[48] Ejercicio nº 13. Calcula el área comprendida entre las curvas:

a) $y = x^2,\ y = x$	b) $y = x^2,\ y = 1$
c)) $y = x^2,\ y = x^3$	d) $y = x^2,\ y = -x^2 + 2x$
e) $y = 2x^2 + 5x - 3,\ y = 3x + 1$	f) $y = 4 - x^2,\ y = 8 - 2x^2,\ x = -2,\ x = 2$

[49] El profesor, en la pizarra derecha, escribe:
Para determinar el área comprendida entre las funciones *f(x)* y *g(x)* seguiremos los siguientes pasos:

1.- Se construye la función $h(x)=f(x) - g(x)$.
2.- Se calculan las raíces de *h(x)*, sean, por ejemplo: a, b y c.
3.- Se calculan las integrales $I_1 = \int_a^b h(x)\,dx$ e $I_2 = \int_b^c h(x)\,dx$.
4.- El área es la suma de los valores absolutos de las dos integrales anteriores.

Los alumnos copian el algoritmo en sus cuadernos y representan las funciones del ejercicio 13 a), todos lo hacen sin dificultad, salvo JA y MC que ni siquiera lo intentan, seguidamente deben colorear la superficie comprendida entre las dos funciones[50] y, con las explicaciones del profesor, resuelven el ejercicio. Al calcular la integral de *g(x)*=x, JA dice que es *"uno mismo"*, algunos compañeros echan una carcajada y otros se sonríen[51].

Doce minutos han sido necesarios para realizar lo anterior, ahora debemos resolver b), los alumnos proceden de forma similar y, el profesor orientando a los más rezagados, hace que todos finalicen el ejercicio. Los demás apartados se van resolviendo sin mayores dificultades. SF y SR preguntan si siempre es necesario dibujar las funciones, el PI contesta que *"no es necesario representarlas pero sí es aconsejable"*[52].

En general, los alumnos están muy motivados, el tiempo pasa muy rápido, se propone que el 13 f) sea resuelto en casa y se pasa a un nuevo ejercicio.

Restan once minutos para que finalice la clase y es el momento de resolver el ejercicio número 20[53], la primera dificultad importante que encuentran muchos alumnos es recordar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto[54]. BM, JM, DR, JA, BB y MC no la saben, a petición del profesor, la recuerda TF y EM y se escribe en la pizarra. El profesor investigador pide que se represente la curva y también, sin calcularla, de forma aproximada la recta tangente y que se coloree la superficie cuyo área se desea calcular.

El PI, dando un tiempo prudencial a los estudiantes, hace lo indicado en el encerado. JA piensa que también debe señalarse la superficie comprendida entre los ejes de coordenadas y la recta tangente[55], se relee el ejercicio y se concluye que eso no se pide. Se calcula la recta tangente y se determina el punto de corte de la misma con el eje de abscisas. Los alumnos, con ayuda de la representación gráfica, parecen comprender el problema.

---

[50] El profesor, asimismo, en la pizarra izquierda representa las dos funciones y colorea la superficie cuyo área se desea calcular.

[51] Algunos alumnos siguen confundiendo la integración con la derivación.

[52] El PI considera que los alumnos adquieren mejor los conocimientos matemáticos si se combinan los registros gráfico, algebraico-analítico y numérico.

[53] Ejercicio nº 20. Calcula el área limitada por la gráfica de $y=x+x^2$, la tangente a esa curva en $x=2$ y el eje de abscisas.

[54] Los dos grupos han realizado tres exámenes, hasta la fecha, de análisis matemático y en dos de ellos debían conocer dicha ecuación.

[55] Según JA, debe añadirse el área del triángulo cuyos vértices son O(0,0); A(0'8,0) y B(0,–4).

SF pregunta *"¿por qué no se resta?"*, se le contesta que ahora no es el área comprendida entre dos curvas y exclama *"¡Ah, ya lo entiendo!".* El profesor propone que se calcule el área como diferencia de dos áreas.

Los alumnos conjeturan y terminan aceptando que el área pedida es la diferencia de la integral definida de la función entre 0 y 2 y el área del triángulo de base 1,2 y altura 6. Previamente, el profesor y los alumnos han pintado los recintos con diferentes colores.

Los estudiantes han considerado interesante este ejercicio, la mayoría han seguido las explicaciones con interés y han procurado representarlo y hacer los cálculos con un cierto orden y limpieza.

Visto el interés que ha suscitado este ejercicio, el profesor propone que se resuelvan, para el día siguiente, los ejercicios 21 y 23 y si no es posible su resolución que, al menos, se representen las superficies. Suena el timbre y la clase se acabó.

VIII.3.1.10. SESIÓN 10: Jueves (13-01-2005) y lunes (9-01-2006)

En este nuevo año, es la tercera clase de matemáticas para los alumnos de 2º E que no tardan en preparar el material y es la primera para los de 2º F que no saben qué problemas quedaron pendientes y siguen hablando de sus recientes vacaciones.

Para situarnos en el contexto, el profesor dicta el siguiente problema: *"Un automóvil va a una velocidad constante de 100 km/h ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al cabo de 5 horas?".* El problema resulta elemental a los alumnos y responden, inmediatamente, que ha recorrido 500 km.

El profesor confirma la respuesta y propone resolverlo mediante integrales, así pues, dice: *"Si al eje de abscisas le asignamos el tiempo en horas y al eje de ordenadas la velocidad en km/h. Representad la función velocidad".*

Los alumnos, dando valores enteros y decimales, representan la función. El profesor investigador sugiere que, observando la gráfica, calculen $\int_0^5 100\, dt$ y, ante la sorpresa de la mayoría de los estudiantes, obtienen el resultado conocido anteriormente.

Este sencillo ejercicio nos permite resolver los problemas 18[56] y 19[57]. El primero de ellos, después de una representación gráfica, es resuelto por los alumnos con cierta facilidad; no podemos decir lo mismo del segundo, surgen las dudas, se entablan discusiones[58] y, al final se determina la solución. El PI piensa que no todos los alumnos han quedado convencidos y para favorecer su comprensión lo compara con el del automóvil.

Ha pasado la mitad del tiempo de clase resolviendo los problemas anteriores y recordando el problema nº 20, a partir de este momento, nos proponemos resolver los problemas 21 y 23.

El primer ejercicio[59], a propuesta del profesor, deben representarse[60] la función y la recta tangente. Los alumnos, aunque lentos, se sienten seguros y realizan la representación, el cálculo de la recta tangente les resulta más fácil que el día anterior, al final colorean la superficie; el cálculo del área viene dado por $\int_0^2 \left(x^3 - 2x^2\right) dx$. A la vista del resultado, MG dice: *"No es necesario representar la función, basta considerar el área comprendida entre la función que nos dan y la recta tangente y=x que también es una función, por tanto, basta considerar el área entre las dos funciones".* RD se sorprende y comenta que si en el 20 se representaron, ahora también habrá que hacer

[56] Ejercicio nº 18. Un depósito se vacía de forma variable según la función *v(t)=5–0,1t* (*t* en minutos, *v* en litros/minuto). Calcula lo que se ha vaciado el depósito entre los minutos 100 y 200.

[57] Ejercicio nº 19. Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la función $m = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$ siendo *m* la cantidad de material en kg y *t* la hora del día ¿Cuánto material arroja cada día?

[58] Este es el diálogo mantenido entre el profesor (P) y la alumna (TF).
Previamente se ha realizado una representación gráfica, aproximada, de la función *m*.
P: *No escribáis m, poned m(t) y considerad que es la cantidad de material arrojado en kg/hora.*
TF: *Creo que el material acumulado es m(24).*
P: *Fíjate en la representación gráfica, entre la primera y la segunda hora tenemos 1,23; 1,45; 1,82; etc. ¿Cuántos valores existen entre 1 y 2?*
TF: *Muchísimos, infinitos.*
P: *Contrólalo sobre la gráfica ¿Piensas que puede ser m(1), m(2) o qué puede ser?*
TF: *Pues este trozo (señalando la superficie correspondiente).*
P: *¿Qué es este trozo?*
TF: *¿Puede ser la integral entre 1 y 2? (dudando).*
P: *Pienso que la cantidad arrojada al cabo de un día es la integral entre 0 y 24 de la función m(t).*
TF: *¡Ah, creo que lo entiendo!*

[59] Ejercicio nº 21. Dada $y = x^3 - 2x^2 + x$, halla la ecuación de su tangente en el origen y calcula el área de la región encerrada entre la curva y la tangente.

[60] El PI considera que este problema es propicio para recordar el procedimiento de representación de las funciones y, como tal, los estudiantes deben comprender que el cálculo integral está incardinado dentro del Análisis Matemático.

lo mismo. El PI pide que lean los enunciados de ambos problemas y reflexionen sobre ellos, después de un buen rato, se considera que la diferencia está en el matiz *"y el eje de abscisas".*

Quedan nueve minutos y pasamos al ejercicio número 23[61]. Los alumnos se sienten seguros representando la función, determinando gráficamente las tangentes[62] y coloreando, después de alguna duda, la superficie. Una pequeña dificultad para algunos de ellos es calcular la tangente en x=–2, no así en x=2. El profesor aconseja que se calcule la mitad del área puesto que resulta más fácil, después se hallará el área total; pide algún voluntario para salir a la pizarra y terminar el problema.

La alumna AP[63], señala, dice y escribe A_1 es el área del triángulo de base 2 y altura 8; $A_2 = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx$, y el área total es $A = 2\cdot(A_1 - A_2)$.

No ha habido tiempo para calcular la solución, el profesor dice que el ejercicio debe terminarse en casa y se da por concluido.

VIII.3.1.11. SESIÓN 11: Viernes (14-01-2005) y martes (10-01-2006)

El objetivo que nos proponemos hoy, dice el PI, es consolidar el cálculo de áreas comprendidas entre dos curvas, para ello vamos a resolver los ejercicios 16 y 17, propuestos en años anteriores en pruebas de selectividad.

Tenéis unos minutos para hacer el 16[64]. Los alumnos lo consideran sencillo, AM, MT y MN lo resuelven directamente, el resto, lo representan previamente y aplicando el algoritmo correspondiente obtienen como resultado 32/3. CB dice que a ella le ha dado 32, se establece un diálogo[65] y, al final, se concluye que el área es 32/3 unidades cuadradas.

---

[61] Ejercicio nº 23. Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, escribe las ecuaciones de las tangentes a f en los puntos de corte con el eje de abscisas. Halla el área comprendida entre las rectas tangentes y la curva.

[62] BM, JM, MT, RA y JC solicitan ayuda del profesor para representar, aproximadamente, las tangentes sin calcular sus ecuaciones.

[63] AP actúa con seguridad y aplomo.

[64] Ejercicio nº 16. Halla el área comprendida entre la curva $y = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.

[65] Este es el diálogo entre el profesor (P) y la alumna (CB).
P: *¿Por qué te ha salido 32?*
CB: *32/3 lo he multiplicado por 3.*
P: *No puedes multiplicarlo por 3.*
CB: *¿Por qué?*

El ejercicio 17[66] exige todo el tiempo del resto de la clase. Veamos cómo se ha resuelto cada uno de sus apartados:

El 17 a) es resuelto por los alumnos[67] sin mayores dificultades después de dibujar con precisión la región.

El 17 b) comporta una dificultad muy alta, en primer lugar, los alumnos[68] han dedicado demasiado tiempo a precisar la superficie. El PI, a la vez que señala en la pizarra, dice: *"El área que se desea calcular es la diferencia de dos áreas, la primera 'surge' de la recta y la función $f(x)=x^2$ y la segunda área 'surge' de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=1-x^2$".*

Sí, ha costado determinar gráficamente los recintos y calcular los puntos comunes de la recta y la función $f(x)$ y los de las dos funciones[69] ha supuesto un gran esfuerzo. Además, se desencadena el caos en 2º F, nadie ve nada, dicen no entender, confiesan no saber racionalizar, juegan con la calculadora, hablan constantemente, etc. ¡Imposible continuar este apartado con los alumnos de 2º F! Los alumnos del primer grupo prestan poca atención, sin embargo, el profesor calcula el área de cada una de las superficies parciales y, finalmente, halla el área pedida.

La experiencia obtenida por el PI a lo largo de sus años de docencia[70] le hace pensar que ejercicios como el 17 b) son complicados de resolver en

---

P: *Porque el valor del área es 32/3 y no 32.*
CB: *No entiendo, siempre se puede multiplicar por el denominador.*
P: *En efecto, una ecuación siempre se puede multiplicar por un número distinto de cero; sin embargo, el resultado que hemos obtenido no es una ecuación, es una solución. Por ejemplo, resuelve la ecuación* $\frac{1}{3}x = \frac{2}{5}$.
CB: *¡Claro, cuando obtenía la solución de una ecuación, el resultado no le multiplicaba por ningún número!*

[66] Ejercicio nº 17. Calcula el área limitada por las siguientes curvas:
a) $y = x^3 + x^2,\ y = x^3 + 1,\ x = -1,\ x = 1$ b) $y = x^2,\ y = 1 - x^2,\ y = 2$
c)) $y = x(x-1)(x-2),\ y = 0$ d) $y = x^2 - 2x,\ y = x$
e) $y = x^3 - 2x,\ y = -x^2$ f) $y = 2x - x^3,\ y = x^2$

[67] Algunos dudan y solicitan la ayuda de sus compañeros o del profesor.

[68] Los alumnos de 2º E están más concentrados, los de 2º F se despistan con mayor facilidad y empiezan a desanimarse.

[69] Los puntos comunes de la recta y $f(x)$ son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ y los puntos comunes de las dos funciones son $-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

[70] El profesor investigador ha impartido docencia, ininterrumpidamente en diferentes Institutos de Enseñanza Secundaria, desde el curso académico 1984-1985.

clase y considera que son demasiado difíciles para proponerlos en las Pruebas de Acceso a la Universidad puesto que el objetivo fundamental de dichas pruebas es detectar si los estudiantes saben calcular el área comprendida entre dos curvas.

Faltan siete minutos para finalizar la clase, el profesor propone que los alumnos resuelvan el 17 c), comienzan con desánimo, les resulta fácil y ellos mismos consideran que el área es la suma de dos áreas[71].

Sin terminar este apartado, se propone que se finalice en casa y para el próximo día deberá terminarse el ejercicio número 17.

VIII.3.1.12. SESIÓN 12: Lunes (17-01-2005) y miércoles (11-01-2006)

Ya nos hemos repuesto del caos de la sesión anterior, los alumnos opinan que no pueden preguntarse ejercicios tan difíciles y que los de los exámenes tienen que ser más fáciles, el profesor contesta que serán más sencillos y no tendrán radicales, en cualquier caso, se debe saber calcular áreas comprendidas entre dos curvas, es decir, ejercicios tipo 13, 15, 16 y 17, excluyendo 17 b). Los alumnos sienten que son atendidas sus peticiones[72] y ya podemos comenzar una nueva sesión del cálculo integral.

En este momento no podemos considerar que los dos grupos tengan algo en común en esta sesión, es evidente que ambos son diferentes y hemos optado por analizar dicha sesión individualmente.

Grupo 2º E, curso 2004-2005

El PI propone la resolución del problema número 25[73]. Expresar una función en valor absoluto produce rechazo en muchos estudiantes[74], el profesor escribe la función definiéndola a trozos, algunos alumnos dudan[75]. Para

[71] Como anteriormente se representaron funciones, a los alumnos les resulta sencillo recordar que los puntos de corte de la función y=x(x–1)(x–2) son 0, 1 y 2; además, las tendencias de la misma las consideran evidentes por ser el coeficiente principal del polinomio de tercer grado positivo.

[72] Es decir, se respeta el contrato didáctico.

[73] Ejercicio nº 25.

a) Halla el área limitada por $y = |2x - 4|$, el eje X y las rectas x=0 y x=5.

b) Calcula $\int_{-2}^{3} |2x-4|$.

[74] EG: *“No me gusta nada el valor absoluto”.* Esta expresión es corroborada por muchos alumnos.

[75] RG: *“Hasta 2 es un tipo de función y después otro”.*

conectar con conceptos anteriores el profesor dice: *"Posiblemente la función no sea derivable en un punto, ¿dónde?".* LM afirma: *"En x=2, ya lo hemos visto en continuidad y derivabilidad".*

La función está definida a trozos, los alumnos deben dibujarla y determinar la superficie cuyo área se desea calcular, observando la figura consiste en sumar el área de dos triángulos con bases y alturas conocidas. El profesor pide a los alumnos que expresen el área por medio de una integral, dudan, no saben qué escribir, CP y JG consideran que el área es $A = \int_0^5 (2x-4)\,dx$, pero el resultado no es el obtenido anteriormente; observando la gráfica y la expresión de la función se acepta que $A = \int_0^2 (-2x+4)\,dx + \int_2^5 (2x-4)\,dx$.

El segundo apartado se calcula sin ningún problema mediante la suma de las áreas de dos triángulos o, también, sumando dos integrales tal y como se hizo anteriormente. Es evidente que la representación gráfica de la función valor absoluto ha ayudado a los estudiantes a comprender la solución analítica y, además, la propiedad de la aditividad de la integral.

Estamos en el minuto 12 y, al hilo de este problema, debemos hacer el 27[76].

Los alumnos dudan, SC y MT quieren eliminar el valor absoluto y no saben qué hacer con la integral. El profesor propone que *"observen el dominio de definición de cada una de las ramas"*, AM dice: *"cuando x es menor que – ½ o es mayor que 3, no interesa para calcular la integral".* Los alumnos dibujan la parte central de la función, señalan el área y, prácticamente por unanimidad, escriben y calculan $A = \int_0^3 \left(-x^2+3x\right)dx$.

El ejercicio 26[77] les parece sencillo, el profesor propone que dibujen las funciones, los estudiantes no tienen mayores dificultades para representar

[76] Ejercicio nº 27.
Dada la función *f(x)*, halla el área limitada por *f(x)*, el eje *OX* y las rectas *x*=0 y *x*=3:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x < -1/2 \\ -x^2+3x & -1/2 \le x \le 3 \\ |x+3| & x > 3 \end{cases}$$

[77] Ejercicio nº 26. Calcula: a) $\int_0^2 f(x)$ y b) $\int_{-1}^3 g(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x & si \quad -1 \le x \le 1 \\ x^2+1 & si \quad 1 < x \le 3 \end{cases}$$

funciones definidas a trozos[78], colorean las superficies que les corresponden a cada una de las integrales y, por medio de la aditividad, calculan las integrales pedidas. El PI hace observar que si el enunciado hubiera sido: *"calcular el área comprendida entre la función g(x), el eje de abscisas y las rectas* $x=-1$ y $x=3$ *¿Coincidiría con* $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx$ *?".* La mayoría de los alumnos observan el dibujo, no tarda en contestar SR: *"No, porque* $\int_{-1}^{1} 2x\,dx$ *es cero y el área no es cero".* JM duda, su compañera BM le explica que la integral vale cero porque "se contrarrestan" las áreas de los dos triángulos[79].

Faltan 8 minutos para terminar la clase y el profesor propone el ejercicio 24[80] que considera más teórico. Los alumnos no entienden el enunciado y el PI, recordando la integral definida, escribe $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, siendo $f(x)$ cualquier función positiva y pide a los alumnos que hagan la correspondiente interpretación geométrica. Hay algunas dudas, HL la dibuja en el encerado, todos parecen comprender el significado analítico y geométrico; el profesor investigador, a la vez que señala un punto entre *a* y *b*, pregunta: *"¿Puedo señalar un punto cualquiera entre a y b? ¿Cómo le llamamos?"*, contestan a coro "equis"; el profesor escribe *"x"* a la izquierda de *b* y colorea la superficie comprendida entre f, el eje de abscisas y las rectas $r_1=a$ y $r_2=x$, después dice que lo expresen analíticamente y muchos de ellos escriben $\int_{a}^{x} f(x)\,dx$, sin embargo, dudan[81] y SA dice: *"Que la x de dentro no puede ser igual que la de arriba".* El profesor marcando un punto entre *a* y *x* pregunta si se le puede llamar *t*, los alumnos dicen *"sí"*, entonces, dice el profesor, *"expresad bien la superficie coloreada".* CP dice: *"Integral entre a y x de* $f(t)$*",* el profesor escribe $\int_{a}^{x} f(t)\,dt$ y los alumnos parecen haberlo entendido. Sólo ha dado tiempo a hacer el 24 a), se propone que el resto se hagan en casa.

---

[78] La representación gráfica de funciones, entre ellas las definidas a trozos, se ha realizado en el mes de noviembre.

[79] Es evidente que hay alumnos que discriminan los conceptos de área e integral definida.

[80] Ejercicio nº 24. Dada $f(x) = x + 1$, halla: $a)\int_{0}^{x} f \quad b)\int_{1}^{x} f \quad c)\int_{-1}^{x} f \quad d)\int_{1}^{3} f$

[81] Consúltese en *Antecedentes*, capítulo I: Abrahamson (1998), Harel y Kaput (1991), Ortega (2004) y Contreras y Ordóñez (2005).

Grupo 2º F, curso 2005-2006

Con este grupo no es posible resolver los ejercicios de la sesión duodécima del ciclo anterior, así pues, para consolidar los conocimientos se ha optado por terminar el nº 17[82] y seguir con el nº 15.

Al proponer estas actividades, los alumnos se sienten más cómodos con este tipo de problemas puesto que han asimilado el procedimiento algorítmico del cálculo de áreas comprendidas entre dos curvas, el PI dice: *"No es necesario representar las funciones, sin embargo, vosotros debéis representarlas[83], señalar la superficie y calcular el área".*

El 17 d) es muy fácil, según DC que lo resuelve en el encerado. El 17 e) necesita más tiempo porque los estudiantes son muy lentos para representar polinomios de tercer grado y parábolas con coeficiente principal negativo, además, muchos estudiantes no poseen recursos suficientes para resolver ecuaciones de tercer grado[84] y al poseer tres puntos comunes la función diferencia, $h(x)$, consideran que el área viene dada por $A = \left| \int_{-2}^{1} h(x)\,dx \right|$ en lugar de calcular $A = \left| \int_{-2}^{0} h(x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{1} h(x)\,dx \right|$. El 17 f), teniendo como guía el anterior, es resuelto por los alumnos sin excesiva dificultad.

Han pasado 24 minutos de clase y es el momento de hacer el nº 15[85]. Hacer este ejercicio anima a los alumnos; los dos primeros los resuelven, a la vez, uno en cada pizarra DA y MA; el tercero y cuarto son resueltos por EM y YC. El último, al resolverlo individualmente los estudiantes, encontramos que tiene dificultades para calcular las raíces RA que realiza los productos de los factores y después desea calcular las raíces[86] del polinomio resultante y MC, para calcular la integral, piensa que es de tipo potencial[87].

[82] Véase el enunciado del ejercicio en la sesión anterior.

[83] El PI considera que los estudiantes consolidan mejor los conocimientos matemáticos si combinan adecuadamente los registros gráficos y analítico-algebraicos.

[84] Entiéndase, como tal, entre otros: factorizar, divisores del término independiente, regla de Ruffini, identidades notables, etc.

[85] Ejercicio nº 15. Calcula el área comprendida entre las curvas:

a) $y = x^2$ e $y = 3 - 2x$ b) $y = 4 - 2x^2$ e $y = 3x^2$ c) $y = x$ e $y = x^2 - 2$

d) $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 2$ e) $y = (x+2)^2(x-3)$ y el eje de abscisas.

[86] RA no se ha percatado de que el polinomio está factorizado.

[87] Además, MC no recuerda las identidades notables y es muy lento al realizar los productos.

VIII.3.1.13. SESIÓN 13: Miércoles (19-01-2005) y viernes (13-01-2006)

Estas dos últimas clases, dice el profesor, las dedicaremos a resolver problemas de selectividad[88] y comenzaremos por los últimos propuestos, retrocediendo en el tiempo. Los alumnos, se hacen los remolones, sacan las fotocopias de los exámenes[89], algunos no las encuentran y después de un par de minutos ya es posible leer, detenidamente, el primer ejercicio.

Este problema[90] anima a los estudiantes, recuerdan las condiciones de continuidad de las funciones definidas a trozos y, alrededor de la mitad de ellos, calculan mecánicamente los límites laterales en *x*=–1 y los igualan, obteniendo *a*=10. BM, JM, UN, DA RA y MC, entre otros, no saben cómo resolver la segunda parte, el profesor les sugiere que rescriban la función con el nuevo valor de *a* y que la representen. Previamente AM y YC escriben $A=\int_{-1}^{1}\left(3x^2-9x+7\right)dx$ directamente y lo calculan, no han representado la función[91] y el PI preguntan si están seguros que la función f(x) es positiva, terminan comprobándolo. El profesor modifica las condiciones del segundo apartado siendo la primera recta x=–2 y la segunda la misma. Los alumnos[92], salvo JM y MC, después de la observación gráfica y las explicaciones generales del profesor saben determinar analíticamente el área y calcularla.

Han transcurrido doce minutos desde que comenzó la clase, los estudiantes sienten que el ejercicio resuelto no es difícil. Es el momento de abordar el siguiente problema[93] y su lectura les causa confusión[94], el apartado b) se ha

---

[88] Con ese sustantivo son conocidas las Pruebas de Acceso a la Universidad.

[89] A mediados de octubre, el profesor entregó fotocopiados los exámenes de MACS II de las Pruebas de Acceso a las Universidades de Castilla y León a todos los alumnos.

[90] Septiembre 2004, Bloque B: Dada la siguiente función: $f(x)=\begin{cases}-9x+2a-10 & x\le -1\\ 3x^2-9x+a-3 & -1<x\le 2\end{cases}$

a) Determina *a* para que la función $f(x)$ sea continua.
b) Calcula el área del recinto acotado determinado por la función obtenida en el apartado anterior, el eje OX y las rectas x = –1 y x = 1.

[91] Los alumnos, en general, al representar la rama parabólica la continúan para x > 2.

[92] SC, EG, BR, RA y DS han necesitado las orientaciones de sus propios compañeros o del profesor.

[93] Septiembre 2003, Bloque A: Se considera la función $f(x)=2(x-1)(x^2-2x-2)$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en su punto de inflexión.
b) Halla la integral de *f(x)* entre x=0 y x=2, interpretando geométricamente el resultado obtenido.

[94] Para DR: *"Es muy fuerte juntar recta tangente y punto de inflexión".*

resuelto calculando $\int_0^2 (x^3-6x^2+4)\,dx$, nadie se ha percatado de que la derivada del segundo factor es la primera parte del producto y no la han integrado como función potencial. La interpretación geométrica les confunde y el profesor dice que hagan una aproximación de la representación gráfica de la función, los alumnos al extraer las raíces de la función recurren al integrando expresado anteriormente, NC comenta que una raíz del primer factor es x=1 y las otras dos se obtienen al resolver la ecuación $x^2–2x–2=0$. Confunde a todos que las raíces sean $1\pm\sqrt{3}$, no saben qué hacer; al final el profesor determina los puntos de corte aproximados y, según las tendencias, representa la función y colorea la superficie cuya integral se ha calculado anteriormente y hace que los alumnos interpreten el resultado[95]. Los dos grupos, en general, consideran que este problema es muy difícil[96].

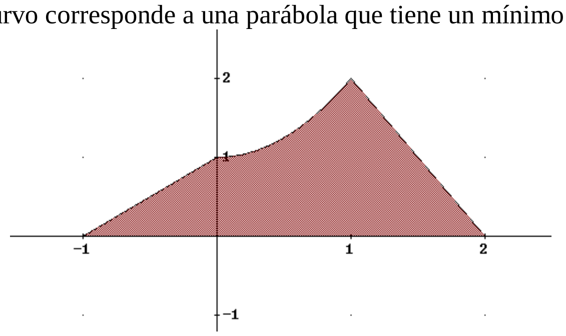
Ha transcurrido media hora desde el inicio de la clase, los alumnos están desanimados, el profesor comenta que el problema nº 22 (pág. 229) del libro de texto es el mismo que el que se va a resolver a continuación y, después de unos momentos de relajación, se hace una lectura detallada del mismo[97] y comenzamos su resolución.

No detallamos el procedimiento utilizado para la obtención de la función. Para calcular el área los alumnos de 2º E no tienen dificultad, la hallan como la suma de tres recintos; los de 2º F dudan y el profesor debe detallar las tres superficies que la componen y hallar cada una de las áreas. El PI hace observar a todos los estudiantes que es un error calcular $A=\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx$.

[95] Según se vio en sesiones precedentes y asumiendo la expresión del PI, los alumnos contestan a coro: *"Las áreas se contrarrestan, por eso vale cero"*.

[96] Varios alumnos afirman que no sabrían resolverlo en selectividad.

[97] Junio 2003, Bloque A: Halla el área del recinto de la figura siguiente:
Sabiendo que el tramo curvo corresponde a una parábola que tiene un mínimo en el punto (0,1).



El cuarto problema[98] hace que los alumnos representen el cuadrado, las funciones y determinen las tres regiones y, gráficamente aprecian que cada superficie mide un tercio del área del cuadrado[99]. Se calculan las áreas del siguiente modo: $A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$, $A_2 = \left|\int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \frac{1}{3}$ y según AM el $A_3 = 1/3$ porque el área total es 1.

Está a punto de terminar la clase, los alumnos han estado atentos y, finalmente, el profesor pregunta: *"¿Qué os parecen los problemas de selectividad?".* Hay multitud de opiniones y la apreciación general es que *"Los problemas de selectividad pueden ser muy fáciles y muy difíciles, este ha sido más sencillo que el anterior, esperemos que los pongan fáciles".*

VIII.3.1.14. SESIÓN 14: Jueves (20-01-2005) y lunes (16-01-2006)

Al igual que en la duodécima sesión, en la presente redactamos por separado cada una de las sesiones de ambos grupos, además, pueden considerarse dentro del contexto de resolución de ejercicios de selectividad.

Grupo 2º E, curso 2004-2005

Esta es la última sesión del grupo impartida en su aula, los estudiantes son conscientes de ello y el profesor propone resolver los ejercicios del libro de texto incluidos bajo el epígrafe: *Para profundizar*[100].

Los estudiantes, inicialmente, muestran interés por la resolución del problema 36[101] pero, al leerlo con detenimiento, desisten la mayoría de ellos, no saben cómo empezar.

---

[98] Septiembre 2002, Bloque B:

a) Representa gráficamente las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x - x^2$.
b) Comprueba que estas funciones dividen al cuadrado de vértices (0,0), (0,1), (1,0) y (1,1) en tres regiones de la misma área.

[99] El PI ha propuesto a los alumnos que estimen cuánto puede medir cada una de las tres áreas si el cuadrado mide una unidad cuadrada.

[100] El grado de dificultar de estos problemas, consideran los autores del libro de texto, es superior al de los demás ejercicios de la unidad didáctica.

[101] Problema nº 36. Dada la función $f(x) = a\,e^{x/3} + \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$:

a) Calcula $\int_1^2 f(x)$ en función de *a*.
b) Se sabe que *F* es una primitiva de *f*. Calcula *a* si *F*(1) = 0 y *F*(2) = 1/2.

El profesor propone que se calcule una primitiva de $f(x)$, SF pregunta: *"¿Qué significa en función de a?"*, dudan del significado de *a*, no saben si es constante o variable[102], el profesor dice que consideren *a* como una constante y que se suele denominar "parámetro"[103], además, escribe en la pizarra que calculen $\int\left(a\,e^{x/3}+\frac{1}{x^2}\right)dx$. A los estudiantes les resulta evidente aplicar la linealidad de la integral[104], no así la igualdad $\int a\,e^{x/3}dx = a\int e^{x/3}dx$ que suscita dudas razonables[105] y, finalmente, se obtiene la primitiva *F*(*x*) sumándole al final la constante *k.* Los alumnos parece haber entendido el cálculo de *F*(*x*), la solución del apartado a) no les termina de convencer por estar expresada "en función de *a*" y la resolución del apartado b) les sume en una apatía general porque aunque consiste en resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas[106], al aplicar la reducción y considerar $e^{2/3}-e^{1/3}\neq 0$, por tanto, *a*=0, creen que es demasiado complicado y artificioso e innecesaria la primera parte de la función f(x)[107]. Demasiado tiempo se ha empleado en este problema, veinte minutos.

El problema 37[108] es fácil de representar para todos los alumnos y sencillo calcular el área del triángulo[109] por la fórmula elemental. Determinar las ecuaciones de las rectas que contienen los lados vertical y horizontal no es difícil; sin embargo, calcular la ecuación de la recta oblicua supone a muchos alumnos dudas e incertidumbres[110] y hallar el área mediante la integral, una vez determinadas las rectas, les ha resultado fácil aunque innecesario

---

[102] SF pregunta: *¿a es igual que x?*

[103] Aún no se ha estudiado el Álgebra de Matemáticas CC SS II y los alumnos no están familiarizados con el término "parámetro".

[104] Entiéndase la propiedad: *"La integral de la suma es la suma de las integrales".*

[105] RG, JG y MT, entre otros, dicen refiriéndose al profesor: *"Has dicho que una función no se puede sacar de la integral".* El profesor responde a toda la clase que *"a es una constante que debemos calcular y, por tanto, sí es posible sacarla del integrando".*

[106] AM dice: *"Las incógnitas son parámetros y los parámetros son constantes ¿Qué es esto?"*

[107] CP dice: *"¡Qué ganas de liarse si al final no es necesario ae$^{x/3}$!".*

[108] Problema nº 37. Expresa por una integral el área del triángulo de vértices (0, 3); (7, 3) y (7, 10). Explica el resultado de la integral escrita.

[109] Triángulo rectángulo de base y altura 7 unidades.

aplicar un procedimiento para calcular un resultado que ya se conocía de antemano[111].

Los estudiantes hablan y no desean continuar haciendo más problemas, el profesor propone que se resuelva el 38[112]. Se representa el triángulo, determinamos los recintos y calculamos el área[113].

Faltan cuatro minutos para terminar la clase, el profesor dice que se han terminado las integrales y esta tarde, a las 16:15 horas, tendremos una práctica de la integral en el aula de informática del instituto[114] y, además, *"la información que ha generado este tema forma parte de una investigación de Didáctica de la Matemática donde vosotros sois protagonistas".*

Grupo 2º F, curso 2005-2006

Seguimos, dice el profesor, resolviendo problemas de selectividad y hoy vamos a hacer los propuestos en el curso pasado.

El primero[115] sorprende a la mayoría de los alumnos por pedir el cálculo de la recta tangente, no saben cómo empezar, CB, EM y MN ojean algunos de los ejercicios resueltos en los cuales había que determinar la tangente. El PI, viendo el desconcierto inicial y, para fijar ideas, representa una parábola genérica con las ramas hacia abajo y una recta tangente que simule las características del problema[116], el profesor escribe la ecuación general de la

[110] TF propone que se calcule por la fórmula punto-pendiente, muchos alumnos no saben cómo hacerlo. Al final se halla mediante la expresión $y = ax + b$. Además, el profesor investigador aconseja que los puntos siempre sean nombrados con letras mayúsculas, en este caso: A, B y C.

[111] EG dice: *"¡Tanto lío para nada!"*.

[112] Problema nº 38. Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 4)$ y $C(-1, 1)$, en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la ecuación $y = x^2$.

[113] El problema es resuelto por el profesor en la pizarra dando las explicaciones pertinentes, no detallamos más porque las intervenciones se consideran irrelevantes.

[114] DR dice: *"Esta tarde no puedo venir, tengo academia".* El profesor le contesta: *"Olvídese de la academia y venga al instituto".*

[115] Junio 2005, Bloque A: Se considera la función $f(x) = -ax^2 + 5x - 4$.

a) Calcula el valor de a para que la recta tangente a la función en el punto $x=3$ corte al eje OX en el punto $x=5$.
b) Calcula, además, el área de la región limitada por dicha tangente, el eje OX y la función $f(x)$, para el valor a obtenido anteriormente.

[116] Los estudiantes aseguran comprender el boceto de la representación, aunque el profesor duda de las respuestas, JA dice: *"Hay que echarle mucha imaginación".*

recta tangente[117] y la calcula en función del parámetro *a* para el punto *x*=3. Hacer comprender a los estudiantes que la recta pasa por el punto *P*(5,0) es difícil para el profesor y calcular el valor de *a* resulta imposible para la mayoría de los alumnos[118], finalmente se determina dicho valor.

Si *a*=1, dice el profesor: *"Representad la función, calculad y dibujad la recta tangente"*. Los alumnos se sienten más seguros, consultando con sus compañeros y pidiendo ayuda al profesor, realizan lo propuesto y el área la calculan la mayoría de ellos mediante una diferencia.

El desánimo es generalizado, los comentarios referentes a la dificultad no cesan y el profesor, después de pedir y exigir silencio, propone resolver un nuevo problema[119].

La lectura de este ejercicio anima a todos los alumnos, se sienten capaces de resolverlo y la representación gráfica de las funciones la realizan con cierta rapidez, además, colorean el área limitada por las dos curvas; hallar el área les resulta muy fácil aplicando, una vez más, el algoritmo. Este ejercicio ha insuflado ánimos a la inmensa mayoría de los alumnos.

Quedan 17 minutos y resolvemos el último ejercicio[120] de esta sesión, los alumnos hablan, se hacen los remolones, el profesor ha de pedir silencio y, por fin, comienzan a leer el problema.

El profesor no hace este ejercicio en la pizarra, deben hacerlo los alumnos y si tienen dificultades han de consultar con sus compañeros, mientras tanto, el profesor va pasando por cada uno de los pupitres para observar cómo trabajan los estudiantes y resolver sus dudas[121]. Hallar el área pedida, en general, no les resulta complicado pues surge de la diferencia de una integral definida y el área de un trapecio[122].

[117] Al menos la mitad de los alumnos no la recuerdan.

[118] JA, BB, TE, MA y MC han desistido de comprender la resolución del problema y no atienden, e incluso, se dedican a molestar.

[119] Junio 2005, Bloque B:

a) Representa gráficamente las curvas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 1 - 2x$.
b) Calcula el área del recinto que limita dichas curvas.

[120] Septiembre 2005, Bloque A: Se considera la parábola $p(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x$ y sea $s(x)$ la línea poligonal que se obtiene uniendo los puntos (0,0), (1,1), (2,1) por segmentos de recta. Representa el recinto limitado por la parábola y la poligonal y calcula su área.

[121] Algunos alumnos no entienden el significado del adjetivo poligonal.

[122] Sean los puntos O(0,0); A(1,1); B(2,1); C(2,0) y D(1,0). El trapecio lo componen el triángulo OAD y el cuadrado ABCD.

Faltan cinco minutos, el profesor dice que el próximo lunes a partir de las 16:15 horas realizaremos una práctica en el aula de informática y con esto se da por terminada la integral.

VIII.3.1.15. SESIÓN 15: Jueves (20-01-2005) y lunes (23-01-2006)

Esta sesión ha transcurrido, aproximadamente, desde las 16:15 horas hasta las 18:45 horas en el aula de informática del instituto, previamente el profesor investigador había preparado el material necesario para impartir la clase y, además, había implementado un pequeño programa informático.

Los estudiantes, colocados de dos en dos ante los monitores, se han sentido motivados, han mostrado interés por seguir las orientaciones del profesor y exigían constantemente la presencia del PI para resolver sus dudas.

El trabajo con ordenadores exige del PI: explicar la práctica[123], mantener un cierto orden en clase, procurar que todos los alumnos realicen el trabajo propuesto y optimizar el tiempo para que los estudiantes comprendan los conceptos matemáticos utilizando el programa matemático *DERIVE.*

El profesor investigador y el director de la tesis, pretendiendo unificar la investigación realizada en la enseñanza y aprendizaje de la integral con las nuevas tecnologías en todos y cada uno de los ciclos, han decidido incluirlo en un capitulo específico, por tanto, en el capítulo XI de la presente memoria redactaremos las sesiones de esta parte de la investigación.

VIII.3.2. REFLEXIONES DE LA ACCIÓN

Las sesiones descritas de los ciclos de confirmación se han basado en el cuaderno de campo del profesor, las grabaciones en audio de las clases, las anotaciones realizadas por el profesor inmediatamente posteriores a cada una de las sesiones, los cuadernos de trabajo de los alumnos y los cuadernillos de las actividades propuestas. La información recopilada por los medios mencionados nos ha permitido avanzar en el conocimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral llevado a cabo durante la acción y, para ello, hemos anotado los sucesos que lo conforman, destacando entre otros: el comportamiento y grado de motivación de los

[123] El PI utiliza el cañón proyector, conectado a su ordenador personal, para impartir la clase práctica.

alumnos, avances en el aprendizaje, indisciplina y grado de integración entre los estudiantes; ello nos permite enunciar las siguientes reflexiones:

a) Pensamos que ha sido un acierto impartir la integral definida durante los meses de diciembre y enero por permitirnos dedicarle más tiempo y no sentir la presión de final de curso.

b) La explicación de los conceptos teóricos de la integral definida por medio del ordenador y el cañón proyector[124] hace que los alumnos, en los primeros momentos, se sientan desorientados, sin embargo, poco después prestan más atención que si la exposición fuera la clásica clase magistral.

c) La grabación en audio de las clases, salvo en los minutos iniciales de la primera sesión, es aceptada con total normalidad por los alumnos.

d) Los estudiantes habían interiorizado el área del rectángulo y del círculo desde el primer ciclo de educación secundaria obligatoria, por tanto, no perciben la necesidad de justificar científicamente dichas áreas ni de formalizar el número π.

e) Los alumnos piensan que la integral inferior, integral superior e integral de Darboux "siempre" coinciden para cualquier función, es decir, no discriminan la integrabilidad de la no integrabilidad. Además, consideran iguales las integrales de Darboux y Riemann.

f) El teorema fundamental del cálculo es considerado muy útil por los estudiantes, sin embargo, una dificultad importante para ellos es el cálculo de primitivas[125].

g) El cálculo de primitivas, tal y como se descubrió en el ciclo de exploración, sigue siendo difícil para los alumnos[126], no aprenden ninguna tabla de integrales inmediatas y prefieren consultarla.

h) Consideramos que el cálculo de primitivas elementales no puede localizarse en varias sesiones concretas y específicas[127], pensamos que las clases no pueden ser monográficas y, en consecuencia,

[124] Ordenador y cañón proyector sólo se han utilizado en las tres primeras sesiones.

[125] Sólo se han calculado primitivas elementales, no se ha aplicado ningún método de integración.

[126] La mayoría de los estudiantes no tienen fluidez en el cálculo de derivadas y, consecuentemente, tienen grandes dificultades para el cálculo de integrales inmediatas.

[127] Sesiones: 4, 5, 6 y 7.

parece más razonable aplicar la primera parte de cada clase al cálculo de primitivas y el resto a aplicaciones prácticas de la integral.

i) El cálculo mental, aunque se ha realizado, pensamos que debemos potenciarlo aún más en todas las sesiones y ha de ser la herramienta principal para el cálculo de primitivas elementales.

j) El tiempo dedicado a la enseñanza y el aprendizaje de la integral en cada uno de los ciclos de confirmación, excluyendo las sesiones de evaluación y repaso final, se ha incrementado en 2/3 con respecto al ciclo de exploración. Esto ha supuesto que nos haya permitido tener una sesión práctica en el aula de informática y los estudiantes hayan tenido más tiempo para asimilar y consolidar los conceptos.

k) Corroboramos la reflexión del ciclo anterior por la cual consideramos que personalizar la enseñanza supone mayor protagonismo de los alumnos en su propio aprendizaje.

l) El libro de texto ha servido de guía para realizar las actividades, no así para presentar la teoría puesto que se ha expuesto según lo establecido en el capítulo V.

m) Las representaciones gráficas han de ser de buena calidad, es importante matizar lo fundamental y aconsejable utilizar diferentes colores para combinar los registros gráficos, analíticos y algebraicos. Creemos que ello favorece la mejor comprensión de los conceptos teóricos y facilita la resolución de los problemas a los alumnos.

n) Las nuevas tecnologías han tenido un destacado protagonismo en estos ciclos de confirmación, se ha utilizado el programa de cálculo simbólico *DERIVE*, además, el profesor ha implementado varios subprogramas con el objetivo de que los estudiantes comprendan de forma dinámica[128] diferentes conceptos matemáticos frente a la exposición y realización estática de la pizarra o lápiz y papel.

o) La mayoría de los estudiantes desconocen el programa de cálculo simbólico *DERIVE* y, en consecuencia, al ejecutar dicho programa supone que los alumnos presten más atención a los comandos que a la adquisición de los conceptos matemáticos mediante las nuevas

[128] Entendemos por “forma dinámica” la construcción de varios gráficos y la realización de distintos cálculos en un corto periodo de tiempo frente a la “forma estática” que es la realización, durante un tiempo prudencial, de un único cálculo apoyado por un único gráfico.

tecnologías. Sin embargo, a pesar de estas dificultades, el uso del ordenador resulta motivador para los estudiantes de los ciclos de confirmación. Estas dos últimas reflexiones serán contrastadas en el capítulo XI, que estará dedicado al desarrollo de la docencia en el aula de informática.

ANEXO I (CAPÍTULOS VIII, IX Y X): CÁLCULO MENTAL DE PRIMITIVAS ELEMENTALES *277*

I.1. INTRODUCCIÓN **277**

I.2. CICLOS DE CONFIRMACIÓN (II Y III) **278**

I.3. CICLOS DE CONSOLIDACIÓN (IV Y V) **286**

I.4. CICLO DE CIERRE (VI) **290**

ANEXO I (CAPÍTULOS VIII, IX Y X):
CÁLCULO MENTAL DE PRIMITIVAS ELEMENTALES

I.1. INTRODUCCIÓN

En la acción de todos los ciclos, salvo el inicial o de exploración, hemos realizado el cálculo mental de primitivas elementales con los alumnos participantes en nuestra investigación y así ha quedado recogido en los capítulos VIII, IX y X de nuestra memoria.

Pensamos que el cálculo de primitivas realizado en las distintas sesiones (clases impartidas en el correspondiente aula de grupo) ha quedado suficientemente detallado en los capítulos mencionados anteriormente; sin embargo, al analizar la categoría *cálculo de primitivas (CP)* hemos hecho referencia a los ejercicios escritos de varios alumnos y, en honor a la brevedad, no hemos considerado oportuno escanearlos anteriormente, por tanto, procede en este anexo incluir las pruebas mencionadas.

Cada uno de los epígrafes posteriores lo reconocemos por la denominación de los ciclos investigados conjuntamente (confirmación y consolidación) o individualmente (ciclo de cierre).

Por último, todos los textos escaneados son los originales de los estudiantes autores de los mismos, salvo las correcciones realizadas en color rojo por el profesor investigador, y la referencia de cada una de las pruebas es el código de su autor y el ciclo al cual pertenece.

I.2. CICLOS DE CONFIRMACIÓN (II Y III)

EG, II

Ejercicio nº 1.-

a) $\int (4x^4 - 4) = \boxed{\frac{4x^5}{5} - 4x}$ β

b) $\int \frac{2}{x} = 2\int \frac{1}{x}\,dx = \boxed{2\ln|x| + k}$ β

Ejercicio nº 2.-

a) $\int \frac{6x-2}{3x^2-2x} = \boxed{\ln|3x^2-2x| + k}$ β

b) $\int 5x^2 e^{x^3} = \boxed{\frac{5}{3} e^{x^3} + k}$ θ

Ejercicio nº 3.-

a) $\int \left(3x^3 - \frac{2}{5}x^2\right) = \boxed{\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{15} + k}$ β

b) $\int -\operatorname{sen} 3x = \boxed{\frac{\cos 3x}{3} + k}$ β

Ejercicio nº 4.-

a) $\int \frac{9x^2}{3x^3+1} = \boxed{\ln|3x^3+1| + k}$ β

b) $\int 2x^2 \cdot \cos(x^3-2) = \boxed{\frac{2}{3}\operatorname{sen}(x^3-2) + k}$ θ

Ejercicio nº 5.-

a) $\int \left(x^5 + \frac{5x^2}{4}\right) = \boxed{\frac{x^6}{6} + \frac{5x^3}{12} + k}$ β

b) $\int e^{x+1} = \boxed{e^{x+1} + k}$ β

EG, II

Ejercicio nº 6.-

a) $\int (x-3)^2 = \int (x^2 - 6x + 9)\, dx = \boxed{\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 9x + k}$ B

b) $\int e^{-x} = \boxed{-e^{-x} + k}$ ✓

Ejercicio nº 7.-

a) $\int 2x(x^2+1)^7 = \boxed{\frac{(x^2+1)^8}{8} + k}$ B

b) $\int \frac{2e^x}{2+e^x} = \left(\int \frac{2e^x}{2} + \int \frac{2e^x}{e^x} \right) dx = \int e^x + 2\, dx = \cancel{\boxed{e^x + 2x.}}$

Ejercicio nº 8.-

a) $\int \left(-7x^3 + \frac{3}{2}\right) = \boxed{\frac{-7x^4}{4} + \frac{3}{2}x + k}$ B

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^{1/2}}\, dx = \frac{1}{2} \int x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + k = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} + k}$ B

Ejercicio nº 9.-

a) $\int (x^3-3x)^5 \cdot (3x^2-3) = \boxed{\frac{(x^3-3x)^6}{6} + k.}$ B

b) $\int \frac{3x}{x^2-1} = \left(\int \frac{3x}{x^2} - \int \frac{3x}{1} \right) dx = 3 \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{3x}{1}\, dx = \cancel{\boxed{3 \ln|x| - \frac{3x^2}{2}}}$

Ejercicio nº 10.- **Halla las primitivas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{6x-3}{2\sqrt{3x^2-3x}} = \cancel{\boxed{2 \ln|3x^2 - 3x| + k.}}$

b) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^4-2x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3-4x}{x^4-2x^2}\, dx = \boxed{\frac{1}{4} \ln|x^4 - 2x^2| + k.}$

B

2

LM, II

Ejercicio nº 1.-

a) $\int(4x^4 - 4) = \frac{4x^5}{5} - 4x + c$ β

b) $\int \frac{2}{x}$

Ejercicio nº 2.-

a) $\int \frac{6x-2}{3x^2-2x} = \ln|3x^2-2x| + c$ β

b) $\int 5x^2 e^{x^3} = \frac{5x^3}{3} \cdot e^{3x} + c$

Ejercicio nº 3.-

a) $\int\left(3x^3 - \frac{2}{5}x^2\right) = \frac{3x^4}{4} - \frac{\frac{2}{5}x^3}{3} + c$ β

b) $\int - \operatorname{sen} 3x = \cos 3x$ 0

3

Ejercicio nº 4.-

a) $\int \frac{9x^2}{3x^3+1} = \ln|3x^3| + c$

b) $\int 2x^2 \cdot \cos(x^3-2) = \frac{2x^3}{3} \cdot (-\operatorname{sen}(x^3-2)) + c$

Ejercicio nº 5.-

a) $\int\left(x^5 + \frac{5x^2}{4}\right) = \left(\frac{x^6}{6} + \frac{5x^3}{12}\right)$ β

b) $\int e^{x+1} = e^1$

LM, II

Ejercicio nº 6.-

a) $\int (x-3)^2 = \dfrac{(x-3)^3}{3} + c$ β

b) $\int e^{-x} = -e^{x} + c$

Ejercicio nº 7.-

a) $\int 2x(x^2+1)^7 = \cancel{x^2} \left(\dfrac{x^2+1}{8}\right)^8 + c$

b) $\int \dfrac{2e^x}{2+e^x} = 2\ln|2+e^x| + c$

Ejercicio nº 8.-

a) $\int \left(-7x^3 + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{-7x^4}{4} + \dfrac{3}{2}x + c$

b) $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \int \dfrac{1}{2x^{1/2}} =$

Ejercicio nº 9.-

a) $\int (x^3-3x)^5 \cdot (3x^2-3) = \left(\dfrac{x^4}{4} - 3x\right)^5 \cdot \left(\dfrac{3x^3}{3} - 3\right) + c$

b) $\int \dfrac{3x}{x^2-1} = \dfrac{3}{2} \ln|x^2-1| + c$

Ejercicio nº 10.- **Halla las primitivas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{6x-3}{2\sqrt{3x^2-3x}} = \int \dfrac{6x-3}{2\cdot(3x^2-3x)^{1/2}} = 6x-3 \cdot 2\,(3x^2-3x)^{-1/2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^4-2x^2} = \dfrac{1}{4}\ln|x^4-2x^2| + c$

DC, III

Prácticas del cálculo de primitivas

1. a) $\int (4x^4 - 4) = \frac{4x^5}{5} - 4x + K$ B

b) $\int \frac{2}{x} = 2 \cdot \ln |x| + K$ B

2. a) $\int \frac{6x-2}{3x^2-2x} = \ln |3x^2 - 2x| + K$ B

b) $\int 5x^2 e^{x^3} = 5\int \frac{1}{3} \cdot 3x^2 \cdot e^{x^3} = \frac{5}{3}\int 3x^2 \cdot e^{x^3} = \frac{5}{3} \cdot e^{x^3} + K$ B

3. a) $\int \left(3x^3 - \frac{2}{5}x^2\right) = \frac{3x^4}{x^4} - \frac{2}{5}\frac{x^3}{3} = \frac{3x^4}{x^4} - \frac{2x^3}{15} + K$ B

b) $\int -\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{3}\int -\operatorname{sen} 3x \cdot 3 = \frac{1}{3} \cos 3x + K$ B

4. a) $\int \frac{9x^2}{3x^3+1} = \ln |3x^3 + 1| + K$ B

b) $\int 2x^2 \cdot \cos(x^3 - 2) = 2\int \frac{1}{3} \cdot 3x^2 \cdot \cos(x^3 - 2) = \frac{2}{3} \operatorname{sen}(x^3 - 2) + K$ B

5. a) $\int \left(x^5 + \frac{5x^2}{4}\right) = \frac{x^6}{6} + \frac{5}{4}\frac{x^3}{3} = \frac{x^6}{6} + \frac{5x^3}{12} + K$ B

b) $\int e^{x+1} = \int e^{x+1} \cdot 1 = e^{x+1} + K$ B

6. a) $\int (x-3)^2 = \int 1(x-3)^2 = \frac{(x-3)^3}{3} + K$ B

b) $\int e^{-x} = \int \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^x}\int \frac{e^x}{e^x} = \frac{1}{e^x} \cdot \ln |e^x| + K$

No

DC, III

$$7.\ a)\ \int 2X(X^2+1)^7 = \frac{(X^2+1)^8}{8} + K$$

$$b)\ \int \frac{2e^x}{2+e^x} = 2\cdot \ln|e^x+2| + K$$

$$8.\ a)\ \int\left(-7X^3+\frac{3}{2}\right) = -\frac{7X^4}{4} + \frac{3}{2}X + K$$

$$b)\ \int \frac{1}{2\sqrt{X}} = X^{\frac{1}{2}}\cdot \ln|2\sqrt{X}| + K$$

$$9.\ a)\ \int (X^3-3X)^5\cdot(3X^2-3) = \frac{(X^3-3X)^6}{6} + K$$

$$b)\ \int \frac{3X}{X^2-1} = \frac{3}{2}\cdot \ln|X^2-1| + K$$

$$10.\ a)\ \int \frac{6X-3}{2\sqrt{3X^2-3X}} = \int \frac{6X-3}{2(3X^2-3X)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{(3X^2-3X)^{-\frac{1}{2}}\,6X-3}{2(3X^2-3X)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{(3X^2-3X)^{1/2}}\cdot \ln|2\sqrt{3X^2-3X}| + K$$

$$b)\ \int \frac{X^3-X}{X^4-2X^2} = \frac{1}{4}\int \frac{4(X^3-X)}{X^4-2X^2} = \frac{1}{4}\cdot \ln|X^4-2X^2| + K$$

MG, III

Nº1) A) $\int(4x^4-4)$

$\int 4x^4 - \int 4 = \frac{4x^5}{5} - 4x$ B

B) $\int\frac{2}{x} = 2\int\frac{1}{x} = 2\int x$

Nº2) a) $\int\frac{6x-2}{3x^2-2x} = \ln|3x^2-2x| + k$ B

$6x-2$

b) $\int 5x^2 e^{x^3} \; \frac{1}{5}\int 10x \cdot e^{x^3} = \frac{1}{5} e^{x^3} + k$

$5x^2 \to 10x$

Nº3) a) $\int 3x^3 - \frac{2}{5}x^2 = \int 3x^3 - \int\frac{2}{5}x^2 = \frac{3x^4}{4} - ?$

b) $\int -\operatorname{sen} 3x = \frac{+\cos 3x}{3} + k$ B

Nº4) a) $\int\frac{9x^2}{3x^3+1} = \ln|3x^3+1| + k$ B

b) $2x^2 \cdot \cos(x^3-2) = \int \cos(x^3-2) \cdot 4x = \operatorname{sen}(x^3-2) + k$

$4x \quad 3x^2$

Nº5) a) $\int\left(x^5 + \frac{5x^2}{4}\right) = \int x^5 + \int\frac{5x^2}{4} = \frac{x^6}{6} + k + \int\frac{5x^2}{4}$ R

b) $\int e^{x+1} = e^{x+1} + k$ B

$(x-3)^2 = 2($

Nº6) a) $\int(x-3)^2 = \frac{(x-3)^3}{3} \cdot \frac{1}{2} + k = \frac{(x-3)^3}{6} + k$ R

b) $\int e^{-x} = \int\frac{1}{e^x} = \int e^{-x} \cdot 1 = \int e^{-x} = -e^{-x} + k$

MG, III

Nº 7) a) $\int 2x\,(x^2+1)^7 = \frac{(x^2+1)^8}{8} + k$ β

$7(x^2+1)^6$

b) $\int \frac{2e^x}{2+e^x} = \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{2+e^x} = \frac{1}{2}\int \frac{(e^x+2)'}{2+e^x} = \frac{1}{2}\int \ln|e^x+2| + k$ β

Nº 8) a) $\int\left(-7x^3+\frac{3}{2}\right) = \int -7x^3 + \int \frac{3}{2} = \frac{-7^4}{4} + k + \int \frac{3}{2}$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} = \ln|2\sqrt{x}| + k$

Nº 9) a) $\int (x^3-3x)^5 \cdot (3x^2-3) = \int \frac{(x^3-3)^6}{6} + k$ β ?

$5(x^3-3x)^4 \quad 6x$

b) $\int \frac{3x}{x^2-1} = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2-1} = \frac{3}{2}\ln(x^2-1) + k$ β

Nº 10) a) $f(a) = \frac{6x-3}{2\sqrt{3x^2-3x}} =$?

6

$2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^2-3x}} \cdot 6x-3 = \frac{2}{2\sqrt{3x^2-3x}} \cdot 6x-3 = \sqrt{3x^2-3x} \cdot 6x-3$

b) $f(a) = \frac{x^3-x}{x^4-2x^2} = \frac{1}{-2x}\int \ln|x^4-2x^2| + k$

$3x-x$

$4x-4x$

I.3. CICLOS DE CONSOLIDACIÓN (IV Y V)

Enunciamos los ejercicios propuestos, de cálculo de primitivas elementales, a los alumnos de los ciclos de consolidación. Posteriormente escaneamos cuatro pruebas de otros tantos alumnos identificadas por sus códigos.

Ejercicios propuestos

Ejercicio nº 1.- Calcula las siguientes integrales:

$$\int\left(e^{3x}+\frac{5}{x^2}\right)dx \qquad \int\left(7x\cdot\sqrt[3]{5x^2+3}+\frac{x-3}{x^2-6x+20}\right)dx$$

Ejercicio nº 2.- Calcula las siguientes integrales:

$$\int\left(x\sqrt{3x^2-5}+\frac{e^x}{7e^x+5}\right)dx \qquad \int\left(sen^4 3x\cdot\cos 3x+\frac{6x^2-4x+5}{x+2}\right)dx$$

Pruebas escaneadas

MR, V

a) $\int\left(e^{3x}+\frac{5}{x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx+\int\frac{5}{x^2}dx=\boxed{\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{5x^{-1}}{-1}+K}$ B

$\int\frac{5}{x^2}dx=\int 5\cdot x^{-2}dx=5\int x^{-2}dx=\frac{5x^{-1}}{-1}$

$\int\left(7x\sqrt[3]{5x^2+3}+\frac{x-3}{x^2-6x+20}\right)dx=\frac{1}{10}\int 10\cdot 7x(5x^2+3)^{1/3}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2(x-3)}{x^2-6x+20}dx$ B

$=\boxed{\frac{7x(5x^2+3)^{4/3}}{10\cdot 4/3}+\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+20|+K}$ B

GM, IV

Ejercicio nº1

$e^{3x} = e^{3x} \cdot 3$ integral $e^{3x} + K$

$\int \left(e^{3x} + \frac{5}{x^2}\right) dx = \int e^{3x} dx + \int \frac{5}{x^2} dx =$

$\int \frac{5}{x^2} dx ; 5 \int x^{-2} ;$

$5 \int \frac{x^{-1}}{-1} = 5 \frac{x^{-1}}{-1}$

$5 \frac{1}{x} = -\frac{5}{x}$

$\frac{1}{3} \int 3 \cdot e^{3x} dx + \int \frac{5}{x^2} dx$

$\frac{1}{3} \cdot e^{3x} \quad - \frac{5}{x} = \boxed{\frac{e^{3x}}{3} + \frac{5}{x} + K}$ B

$\int \left(7x^3 \sqrt[3]{5x^2+3} + \frac{x-3}{x^2-6x+20}\right) dx =$

$\int 7x^3 \cdot (5x^2+3)^{1/2} dx + \int \frac{x-3}{x^2-6x+20} dx = .$

$\int \cancel{(35x^5 + 21x^3)}^{1/2} dx =$

$\frac{(35x^5+21x^3)^{1/2+1}}{3/2}$

$\frac{2}{3} \sqrt{(35x^5+21x^3)^3}$

$\frac{1}{2} \int \frac{2(x-3)}{x^2-6x+20}$

$\boxed{\frac{1}{2} \ln |x^2-6x+20| + K}$

$\frac{2}{3} \sqrt{(35x^5+21x^3)^3} + \frac{1}{2} \ln |x^2-6x+20| + K$ B

M

DA, IV

$$\int\left(x\sqrt{3x^2-5}+\frac{e^x}{7e^x+5}\right)dx$$

Las hago por separado

$$\int x(3x^2-5)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}(3x^2-5)^{3/2} = \frac{1}{9}(3x^2-5)^{3/2}$$ B

$$* \int e^x(7e^x+5)^{-1} = \cancel{\frac{(7e^x+5)^{-2}}{-2}}$$

NEPERIANO

El total.

$$\frac{1}{9}(3x^2-5)^{3/2}+\cancel{\frac{(7e^x+5)^{-2}}{-2}}$$

$$\int\left(\text{sen}^4 3x\cdot\cos 3x+\frac{6x^2-4x+5}{x+2}\right)dx$$

las hago por separado.

$$* \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}(\text{sen}\,3x)^5 \to \frac{\text{sen}^5 3x}{15}$$ B

* No sé dividir polinomios   Es muy fácil

SR, V

1) $\int x\sqrt{3x^2-5} + \frac{e^x}{7e^x+5}\,dx = \int x\sqrt{3x^2-5}\,dx + \int \frac{e^x}{7e^x+5}\,dx$

$\int x\sqrt{3x^2-5}\,dx = \frac{1}{6}\int 6x\,(3x^2-5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\frac{(3x^2-5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{6}\frac{(3x^2-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$

B $= \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(3x^2-5)^3} = \underline{\frac{1}{9}\sqrt{(3x^2-5)^3} + k}$ B

$\int \frac{e^x}{7e^x+5}\,dx = \frac{1}{7}\int\left(\frac{e^x}{e^x+5}\right) = \frac{1}{7}\ln|e^x+5|$ B

$\int x\sqrt{3x^2-5} + \frac{e^x}{7e^x+5}\,dx = \underline{\frac{1}{9}\sqrt{(3x^2-5)^3} + \frac{1}{7}\ln|e^x+5| + k} =$ B

$\int \text{sen}^4 3x\cdot\cos 3x\,dx + \int \frac{6x^2-4x+5}{x+2}\,dx$

$\int \text{sen}^4 3x\cdot\cos 3x\,dx = \frac{(-\cos 3x)^5}{5}$

$\int \frac{6x^2-4x+5}{x+2}\,dx = \frac{1}{6}\int (6x-16)(x+2) + \int 37 = \frac{1}{6}\frac{(6x-16)^2}{2} + 37x$

$\int\left(\text{sen}^4 3x\cdot\cos 3x + \frac{6x^2-4x+5}{x+2}\right)dx = \frac{(-\cos 3x)^5}{5} + \frac{1}{6}\frac{(6x-16)^2}{2} + 37 +$

$$\begin{array}{rrr|l} 6x^2 & -4x & +5 & x+2 \\ -6x^2 & -12x & & \hline 6x-16 \\ \hline & -16x & +5 & \\ & +16x & +32 & \\ \hline & & 37 & \end{array}$$

I.4. CICLO DE CIERRE (VI)

VB

1º.- Deriva las siguientes funciones:

1.- $f(x) = sen(2x)$ $\quad f'(x) = 2\cos(2x)$

B

2.- $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{(x^2-2x)} \cdot (2x-2)$

B

R

3.- $f(x) = \dfrac{x^5 - \cos(3x)}{4x^3}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(5x^4 + sen(3x)\cdot 3) \cdot 4x^3 - (x^5 - \cos(3x))\, 12x^2}{(4x^3)^2} = \cancel{\dfrac{20x^3 + 4sen(3x)}{(4x^3)^2}}$

$\cancel{\dfrac{12x^5 - \cos(36x)}{(4x^3)^2}}$

4.- $f(x) = (x^2 + \sqrt{x})e^{2x}$ $\quad f'(x) =$

R

5.- $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\cos(4x-5)}$ $\quad f'(x) = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \left((\cos(4x-5))^{1/3}\right)'} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \cancel{\dfrac{1}{3}\cos(4x-5)}$

B

6.- $f(x) = sen^6(2x^3)$ $\quad f'(x) = \cancel{\cos^6(2x^3) \cdot 6x}$

7.- $f(x) = sen(2x)\cos(2x)$ $\quad f'(x) = (2\cos(2x)) \cdot (\cos(2x)) + (sen(2x)) \cdot (-sen(2x)) \cdot 2$

B−

8.- $f(x) = \sqrt[3]{e^x + \sqrt{5x}}$ $\quad f'(x) = (e^x + \sqrt{5x})^{1/3} = (e^x + (5x)^{1/2})^{1/3} = \cancel{(e^x + \tfrac{1}{2}5x)^{1/2} = \tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{1}{4}5x}$

9.- $f(x) = e^{tagx}$ $\quad f'(x) = e^{tagx} \cdot (1 + tg^2 x)$

B

10.- $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^3}{sen^2 x^5}\right)$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\left(\frac{2x^3}{sen^2x^5}\right)} \cdot \left(\cancel{\dfrac{2x^3}{sen^2x^5}}\right)' \cancel{\dfrac{(6x^2)\cdot(sen^2x^5) - (2x^3)\,(\cos^2x^5 \cdot 10x)}{(sen^2x^5)^2}}$

$= \dfrac{(6x)\cdot(sen^2x^5)\cdot(2x^3)\cdot(\cos^2x^5 \cdot 10x)}{(sen^2x^5)^2} =$

VB

2º.- Calcula las siguientes integrales:

1.- $\int (3x^5 + 0{,}3x)dx = \boxed{3\frac{x^6}{6} + 0'3\frac{x^2}{2} + K}$ β

2.- $\int (5e^{2x} + senx)dx = 5\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx + \int senx\,dx = \boxed{\frac{5}{2}e^{2x} - \cos x + K}$ β

3.- $\int \frac{5}{7+4x}dx = \cancel{\int 5\cdot(7+4x)^{-1}dx = 5\frac{1}{4}\int 4(7+4x)^{-1} = \frac{5}{4}(7+4x)}$

4.- $\int \left(\frac{3}{2x} + \frac{5}{x^2} - \frac{7x}{9}\right)dx = \frac{3}{2}\int\frac{1}{x}dx + 5\int\frac{1}{x^2}dx - \frac{7}{9}\int x\,dx = \boxed{\frac{3}{2}\ln|x| + 5\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{7}{9}\frac{x^2}{2} + K}$ β β β β

• $5\int\frac{1}{x^2}dx = 5\int x^{-2} = 5\frac{x^{-1}}{-1}$

5.- $\int senx\cos^4 x\,dx = \boxed{-\cancel{\frac{1}{4}}\frac{\cos x^5}{5} + K}$ R

6.- $\int e^{5x+7}dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x+7}dx = \boxed{\frac{1}{5}e^{5x+7} + K}$ β

7.- $\int (x+3)(x^2+6x-15)^3 dx = \frac{1}{2}\int 2(x+3)(x^2+6x-15)^3dx = \boxed{\frac{1}{2}\frac{(x^2+6x-15)^4}{4} + K}$ β

8.- $\int \frac{x-2}{x^2-4x+12}dx = \boxed{\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+12| + K}$ β

9.- $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+12)^6}dx = \frac{1}{2}\int 2(x-2)(x^2-4x+12)^{-6} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+12)^{-5}}{-5} + K}$ β

10.- $\int tag2x\,dx = \boxed{-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + K}$ R

3º.- Calcula las siguientes integrales:

VB

1.- $\int \frac{senx}{\cos^3 x}dx =$ $\boxed{-\frac{(\cos x)^4}{4} + K}$

2.- $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x}dx =$ $\int \frac{x}{x}\partial x + \int \frac{x^{1/2}}{x}\partial x = \int x\,\partial x + \int x^{1/2-1}\partial x = \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + K}$

• $\int x^{1/2-1}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{1/2}}{1/2}$

B

3.- $\int \cos \pi x e^{sen\pi x}dx =$ $\boxed{\frac{1}{\pi} e^{\text{sen}\pi x} + K}$ R

4.- $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx =$ $\frac{1}{x}\frac{1}{\ln}\int \ln e^{\ln x}\partial x = \boxed{\frac{1}{x\ln} e^{\ln x} + K}$

5.- $\int x\sqrt{x^2+9}dx =$ $\int x(x^2+9)^{1/2}\partial x = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+9)^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{(x^2+9)^{1/2+1}}{1/2+1} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{(x^2+9)^{3/2}}{3/2} + K}$ B

6.- $\int 7xe^{5x^2+7}dx =$ $\frac{7}{10}\int 10x\, e^{5x^2+7} = \boxed{\frac{7}{10}e^{5x^2+7} + K}$ B

7.- $\int \cos x\sqrt{senx}dx =$ $\frac{1}{\frac{1}{2}}\int \frac{1}{2}\cos x \cdot (\text{sen}x)^{1/2} = 2\frac{\text{sen}x^{1/2+1}}{1/2+1} = \boxed{2\frac{\text{Sen}x^{3/2}}{3/2} + K}$ B

8.- $\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + senx}dx =$

9.- $\int 5xsen(x^2-12)dx =$ $5\frac{1}{2}\int 2x\,\text{sen}(x^2-12) = \boxed{\frac{5}{2}\frac{\text{Sen}(x^2-12)^2}{2} + K}$

10.- $\int (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})dx =$ $\int (4 + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - (\sqrt{x})^2)\partial x = \int 4 - (\sqrt{x})^2\partial x = \int 4\partial x - \int x\,\partial x =$ $\boxed{4x - \frac{x^2}{2} + K}$ B

RB

1º.- Deriva las siguientes funciones:

1.- $f(x) = sen(2x)$ $f'(x) = 2\cos 2x$

2.- $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ $f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x}$

3.- $f(x) = \dfrac{x^5 - \cos(3x)}{4x^3}$ $f'(x) = \dfrac{-12x^6+20x^4-36x^2 - sen\,12x^4 + \cos 36x^2}{(4x^3)^2}$ B

4.- $f(x) = (x^2 + \sqrt{x})e^{2x}$ $f'(x) = 2e^{2x}(x^2+\sqrt{x})$

5.- $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\cos(4x-5)}$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{-sen(4x-5)\cdot 4}{3\sqrt[3]{[\cos(4x-5)]^2}}$ B

6.- $f(x) = sen^6(2x^3)$ $f'(x) = 6\,sen^5(2x^3)\cdot\cos x$

7.- $f(x) = sen(2x)\cos(2x)$ $f'(x) =$

8.- $f(x) = \sqrt[3]{e^x + \sqrt{5x}}$ $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{[e^x+\sqrt{5x}]^2}}\cdot\left(e^x + \dfrac{5}{2\sqrt{5x}}\right)$

9.- $f(x) = e^{tagx}$ $f'(x) = e^{tgx}$

10.- $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^3}{sen^2x^5}\right)$ $f'(x) =$

2º.- Calcula las siguientes integrales:

RB

1.- $\int (3x^5 + 0{,}3x)dx =$ $3\cdot\frac{x^6}{6} + 0{,}3\frac{x^2}{2} + K$ B

2.- $\int (5e^{2x} + senx)dx =$ $\frac{1}{2}\, 5e^{2x} + \cos x + K$ B –

3.- $\int \frac{5}{7+4x}dx =$

4.- $\int \left(\frac{3}{2x} + \frac{5}{x^2} - \frac{7x}{9}\right)dx =$

5.- $\int senx \cos^4 x dx =$ $-\frac{(\cos x)^5}{5} + K$ B –

6.- $\int e^{5x+7}dx =$ $\frac{1}{5}\cdot e^{5x+7} + K$ B

7.- $\int (x+3)(x^2+6x-15)^3 dx =$ $\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+6x-15)^4}{4} + K$ B

8.- $\int \frac{x-2}{x^2-4x+12}dx =$ $\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+12| + K$ B

9.- $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+12)^6}dx =$ $\frac{1}{2}\,\frac{(x^2-4x+12)^{-5}}{-5} + K$ B

10.- $\int tag2xdx =$ $\ln|\cos 2x| + K$

3º.- Calcula las siguientes integrales:

RB

1.- $\int \frac{senx}{\cos^3 x} dx =$ $\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} + K$ B

2.- $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x} dx =$ —

3.- $\int \cos \pi x e^{sen \pi x} dx =$ $\frac{1}{\pi} e^{sen \cdot \pi x} + K$ R —

4.- $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx =$ $e^{\ln x} + K$ B

5.- $\int x\sqrt{x^2+9} dx =$ $\frac{1}{2} \frac{(x^2+9)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + K$ R

6.- $\int 7xe^{5x^2+7} dx =$ $\cancel{\frac{7x}{5x}\, e^{5x^2+7} + K}$ $\frac{7}{10} e^{5x^2+7} + K$ B

7.- $\int \cos x \sqrt{senx} dx =$ $\frac{(sen\, x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + K$ B

8.- $\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + senx} dx =$ $\ln |e^x + sen x| + K$ B

9.- $\int 5xsen(x^2-12) dx =$ $-\frac{5}{2} \cancel{\cos} (x^2-12) + K$ —

10.- $\int (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x}) dx =$ $-\frac{x^2}{2} + 4x + K$ R

1º.- Deriva las siguientes funciones:

LB

1.- $f(x) = sen(2x)$ $\quad f'(x) = \cancel{\text{sen}2x \cdot 2\cos}$

2.- $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{(x^2 2x)}(2x-2)$ β⁻

3.- $f(x) = \dfrac{x^5 - \cos(3x)}{4x^3}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(5x^4 + 0)(4x^3) - (x^5 - \cos(3x))(12x^2)}{(4x^3)^2}$ β⁻

$\cancel{\dfrac{18x^7 + sen 12x^3 - \cos 36x^3}{(4x)}}$ hoja

4.- $f(x) = (x^2 + \sqrt{x})e^{2x}$ $\quad f'(x) = \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{2x} + (x^2 + \sqrt{x})(e^{2x} \cdot 2)$ β

5.- $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\cos(4x-5)}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{-sen(4x-5) \cdot 4}{3\sqrt[3]{\cos(4x-5)^2}}$ R

6.- $f(x) = sen^6(2x^3)$ $\quad f'(x) = \cancel{(6\cos^5)} \cdot (2x^3) + (sen^6)(6x) = NO$

no es un producto

7.- $f(x) = sen(2x)\cos(2x)$ $\quad f'(x) = (\cos(2x) \cdot 2)(\cos(2x)) + (sen 2x)(-sen(2x) \cdot 2)$

$(sen(2x) \cdot 2)(\cos(2x)) + (\cancel{sen\, x^2})$ R⁺

sen 4x

8.- $f(x) = \sqrt[3]{e^x + \sqrt{5x}}$ $\quad f'(x) = \cancel{\dfrac{e^x + \frac{5}{2\sqrt{5x}}}{3\sqrt{e^x + \sqrt{5x}}}}$

9.- $f(x) = e^{tagx}$ $\quad f'(x) = e^{tagx}\left(\dfrac{sen\,x}{\cos x}\right)'$ R

10.- $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^3}{sen^2 x^5}\right)$ $\quad f'(x) =$

2º.- Calcula las siguientes integrales:

LB

1.- $\int(3x^5+0{,}3x)dx = \int 3x^5dx + \int 0{,}3x\,dx = 3\int x^5dx + 0{,}3\int x\,dx = \frac{3x^6}{6} + 0{,}3\frac{x^2}{2} + K$ B

2.- $\int(5e^{2x}+senx)dx = \int 5e^{2x}dx + \int senx = 5\int e^{2x}dx + \int senx = \frac{5}{2}e^{2x} - \cos x + K$ B-

3.- $\int\frac{5}{7+4x}dx = \frac{5}{7}\int\frac{1}{4x}dx = \frac{5}{7\cdot 4}\int\frac{1}{x}dx = \frac{5}{28}\ln x + K$

4.- $\int\left(\frac{3}{2x}+\frac{5}{x^2}-\frac{7x}{9}\right)dx = \int\frac{3}{2x}dx + \int\frac{5}{x^2}dx - \int\frac{7x}{9}dx = \frac{3}{2}\int\frac{1}{x}dx + 5\int\frac{1}{x^2}dx - \frac{7}{9}\int x\,dx = \frac{3}{2}\ln x + 5\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{7}{9}\frac{x^2}{2} + k$ B B B B

5.- $\int senx\cos^4 xdx = \frac{1}{4}\int 4senx\cos^4 dx = -\frac{1}{5}\cos^5 + K$ R

6.- $\int e^{5x+7}dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x+7}dx = \frac{1}{5}e^{5x+7}$ B

7.- $\int(x+3)(x^2+6x-15)^3dx = \frac{1}{2}\int 2(x+3)(x^2+6x-15)^3dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+6x-15)^4}{4} = \frac{(x^2+6x-15)^4}{8} + K$ B

8.- $\int\frac{x-2}{x^2-4x+12}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2(x-2)}{x^2-4x+12}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4x-12| + K$ B

9.- $\int\frac{x-2}{(x^2-4x+12)^6}dx = \int(x-2)(x^2-4x+12)^{-6}dx = \frac{1}{2}\int 2(x-2)(x^2-4x+12)^{-6}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+12)^{-5}}{-5} = \frac{(x^2-4x+12)^{-5}}{-10} + K$ B

10.- $\int tag2xdx = \frac{1}{2}\int 2\,tag2x\,dx = \frac{1}{2}\cancel{tag2x} + K$

3º.- Calcula las siguientes integrales:

LB

1.- $\int \frac{senx}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{3}\int 3\cdot\frac{senx}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{3} \ln|\cos^3 x| + K$

2.- $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x}{x} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x}{x} dx + \int \frac{x^{1/2}}{x} dx =$

$\int \frac{x}{x} + \int x^{-1/2} = x + \frac{x^{1/2}}{1/2} = x + 2\frac{x^{1/2}}{\cancel{2}} + K$ β

3.- $\int \cos \pi x e^{sen \pi x} dx =$

4.- $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx = e^{\ln x} + K$ β

5.- $\int x\sqrt{x^2+9} dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+9} dx = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+9} + K$

6.- $\int 7xe^{5x^2+7} dx = 7\int x e^{5x^2+7} dx = 7\frac{1}{10}\int 10x e^{5x^2+7} dx =$

$\frac{7}{10} e^{5x^2+7} + K$ β

7.- $\int \cos x\sqrt{senx} dx = \sqrt{senx} + K$

8.- $\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + senx} dx = \ln|e^x + senx| + K$ β

9.- $\int 5x sen(x^2 - 12) dx = 5\int x\, sen(x^2-12) dx = \frac{1}{2}\cdot 5\int 2x\, sen(x^2-12) dx =$

$\frac{5}{2}\int 2x\, sen(x^2-12) dx = \frac{5}{2}\cdot\frac{sen(x^2-12)^2}{2}$

10.- $\int (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x}) dx = \int (4 + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^2}) dx =$

$\int 4dx + \int 2\sqrt{x}dx - \int 2\sqrt{x}dx - \int \sqrt[4]{x^2} dx = 4x + 4\frac{x^{2/3}}{3} - 4\frac{x^{2/3}}{3} - \frac{6x^{6/4}}{4} + K$

EG

1º.- Deriva las siguientes funciones:

1.- $f(x) = sen(2x)$ $\quad f'(x) = \cos(2x)\cdot(2x)' = \cos(2x)\cdot 2$ $\quad \beta$

2.- $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x^2-2x}\cdot(x^2-2x)' = \frac{1}{x^2-2x}\,(2x-2)$ $\quad \beta^-$

3.- $f(x) = \dfrac{x^5 - \cos(3x)}{4x^3}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(x^5-\cos(3x))'\cdot(4x^3) - (x^5-\cos(3x))\cdot(4x^3)'}{(4x^3)^2} =$

$= \dfrac{(5x^4 + \mathrm{sen}\,3x\cdot 3)\cdot 4x^3 - (x^5 - \cos 3x)\cdot 12x^2}{(4x^3)^2}$ $\quad R^+$

4.- $f(x) = (x^2 + \sqrt{x})e^{2x}$ $\quad f'(x) = \cancel{\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}x^{1/2}\right)\cdot e^{2x}} = \cancel{2x+}$

$\cancel{2x + \frac{1}{2(\sqrt{x})^2}\cdot e^{2x}}$

5.- $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\cos(4x-5)}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{\cos(4x-5)}\right)^2}\cdot(\cos(4x-5))' =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\cos 4x-5}\right)^2}\cdot\left(-\mathrm{sen}(4x-5)\right)\cdot 4$ $\quad \beta^-$

6.- $f(x) = sen^6(2x^3)$ $= \mathrm{sen}(2x^3)^6$ $\quad f'(x) = \cancel{\mathrm{sen}\,(\cos(2x^3))^6\cdot(2x^3)'}\cdot$

$6[\cancel{\cos(2x^3)}]^5\cdot(2x^3)' = 6\,\cancel{\cos(2x^3)}^5\cdot 6x^2$

7.- $f(x) = sen(2x)\cos(2x)$ $\quad f'(x) = \cancel{\cos(2x)\cdot(2x)'\cdot -\mathrm{sen}(2x)}\cdot(2x)' =$

$= \cancel{\cos(2x)\cdot 2\cdot(-\mathrm{sen}(2x))}\cdot 2$

8.- $f(x) = \sqrt[3]{e^x + \sqrt{5x}}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{e^x+\sqrt{5x}}\right)^2}\cdot\cancel{\left(\sqrt[3]{e^x+\sqrt{5x}}\right)'}(e^x+\sqrt{5x})' =$

$= \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{e^x+\sqrt{5x}}\right)^2}\cdot\left(e^x + \frac{1}{(\sqrt{5x})^2}\cdot 5\right)$ $\quad \beta^-$

9.- $f(x) = e^{tagx}$ $\quad f'(x) = e^{\mathrm{tag}\,x}\cdot\cancel{\mathrm{tg}}(\mathrm{tag}\,x)' = e^{\mathrm{tag}\,x}\cdot\cancel{\mathrm{tag}\ \mathrm{tag}\,x}\,(1+\mathrm{tag}^2 x)$ $\quad \beta^-$

10.- $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^3}{sen^2x^5}\right)$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\frac{2x^3}{\mathrm{sen}^2x^5}}\cdot\left(\dfrac{2x^3}{\mathrm{sen}^2x^5}\right)' = \dfrac{1}{\frac{2x^3}{\mathrm{sen}^2x^5}}\cdot\dfrac{6x^2\cdot\mathrm{sen}^2x^3 - 2x^3\cdot\cancel{(2\cos x^5\cdot 5x^4)}}{(\mathrm{sen}^2x^5)^2}$

$\dfrac{2x^3}{\mathrm{sen}^2x^5} = \dfrac{(2x^3)'\cdot(\mathrm{sen}^2x^5) - (2x^3)\cdot(\mathrm{sen}^2x^5)'}{(\mathrm{sen}^2x^5)^2} = \dfrac{6x^2\cdot\cancel{(\mathrm{sen}^2x^5)} - 2x^3\cdot(2\cos x^5\cdot 5x^4)}{(\mathrm{sen}^2x^5)^2}$

$(\mathrm{sen}^2x^5)' = ((\mathrm{sen}\,x^5)^2)' = 2\cos x^5\cdot(x^5)' = 2\cos x^5\cdot 5x^4$

2º.- Calcula las siguientes integrales:

EG

1.- $\int (3x^5 + 0{,}3x)dx =$ $\cancel{15}\ \frac{3x^6}{6} + \frac{0'3x^2}{2} + K$ β

2.- $\int (5e^{2x} + senx)dx =$ $\frac{5}{2} e^{2x} - \cos x + K$ β^-

3.- $\int \frac{5}{7+4x}dx =$ $5 \int \frac{1}{7+4x} dx = \cancel{5}$

4.- $\int \left(\frac{3}{2x} + \frac{5}{x^2} - \frac{7x}{9} \right) dx =$ $3 \int \frac{1}{2x} + 5 \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{9} \int \frac{7x}{\cancel{9}} = \cancel{3}\ \cancel{1}$

$3 \cdot \int \frac{1}{2x} + 5 \cdot \frac{x^{1-2+1}}{x^{2+1}} - \frac{1}{9} \cdot \frac{7x^{1+1}}{1+1} = 3 \cdot\ \ + 5 \cdot \frac{x^{-1}}{x^3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{7 \cdot x^2}{2} + K$

5.- $\int senx \cos^4 xdx =$ $\cancel{-\cos x \cdot 5}\ \cdot \int \cancel{sen^4 x}$

$= \frac{(sen\, x)^{4+1}}{4+1} = \frac{sen\, x^5}{5} + K$

6.- $\int e^{5x+7}dx =$ $\frac{1}{5} e^{5x+7} + K$ β^-

7.- $\int (x+3)(x^2+6x-15)^3 dx =$

8.- $\int \frac{x-2}{x^2-4x+12}dx =$ $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 12| + K$ β^-

9.- $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+12)^6}dx =$ $-\ln |x^2 - 4x + 12|^6 + K$

10.- $\int tag2xdx =$ $\cancel{tag\, 2x \cdot 2 + K}$

3º.- Calcula las siguientes integrales:

EG

1.- $\int \frac{senx}{\cos^3 x}dx = -\ln|\cos^3 x| + K$

2.- $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{x}{x}dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \frac{1}{1} + \frac{x^{1/2}}{x} = x + \frac{x^{1/2+1}}{1}$

3.- $\int \cos \pi x e^{sen\pi x}dx = \cancel{sen\pi x \cdot e^{sen \pi x}} \; sen\,\pi x \cdot e^{sen\pi x - \cos \pi x} + K$

4.- $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx = \frac{e^{\ln x}}{1} = + e^{\ln x} + K$ β

5.- $\int x\sqrt{x^2+9}dx =$

6.- $\int 7xe^{5x^2+7}dx = \cancel{e^{5x^2+7}} \; \frac{7}{10}\int 10x\, e^{5x^2+7}dx = \frac{7}{10}e^{5x^2+7} + K$ β

7.- $\int \cos x\sqrt{senx}dx = \int \frac{\cos x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{\cos x^{3/2}}{3/2} + K$ β

8.- $\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + senx}dx = \frac{e^x - \overset{sen}{\cancel{\cos}}\, x}{e^x + \cos x} + K$

9.- $\int 5xsen(x^2-12)dx = \cancel{-\cos(x^2-12)+K} \; \frac{1}{5} - \cos(x^2-12) + K$

10.- $\int (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})dx =$

ANEXO J (CAPÍTULOS X Y XI):* INFORME Y *ENCUESTAS*..*303

J.1. INFORME DEL OBSERVADOR EXTERNO 304

J.2. ENCUESTA A LOS ALUMNOS...308

J.2.1. CÁLCULO MENTAL..309

J.2.2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL (CUADERNILLO) 310

J.2.3. UNIDAD DIDÁCTICA: ÁREA E INTEGRAL DEFINIDA............311

J.2.4. PRÁCTICA CON *DERIVE* (LA INTEGRAL) 312

ANEXO J (CAPÍTULOS X Y XI):
INFORME Y ENCUESTAS

En el presente anexo recogemos el informe del profesor observador externo emitido el día 18 de diciembre de 2008 y algunas de las respuestas de los alumnos a la encuesta realizada el día 23 de enero de 2009.

Con el propósito de facilitar la lectura del anexo nombramos cada uno de los epígrafes y en los correspondientes a los alumnos incluimos el enunciado del ítem al cual responden las respuestas escaneadas de los estudiantes cuya identificación la determina el correspondiente código del alumno.

J.1. INFORME DEL OBSERVADOR EXTERNO

PROTOCOLO DE OBSERVACIÓN

TEMA: Cálculo Integral **Fecha:**

Tratamiento y metodología

1.- Finalidad y grado de adecuación del diseño:

· Objetivos
- COMPRENDER LOS TEOREMAS RELATIVOS AL CÁLCULO INTEGRAL, QUE RELACIONAN ESTE CON EL CÁLCULO DIFERENCIAL.
- UTILIZAR EL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA PARA CALCULAR ÁREAS DE RECINTOS PLANOS

· Contenidos TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.
REGLA DE BARROW

· Metodología HEURÍSTICA

2.- ¿Se hace una especificación adecuada de los diferentes contenidos?

PREVIAMENTE, EL PROFESOR HACE UNA REVISIÓN INICIAL DEL NIVEL DE CONOCIMIENTOS NECESARIOS PARA LA COMPRENSIÓN DE LOS CONTENIDOS PROPUESTOS EN (1): SUMAS DE RIENMAN, CONCEPTO DE PRIMITIVA, INDEPENCIA DEL RESULTADO DE LA SUMA DE LA PARTICIÓN ELEGIDA... Y HACE UNA DEMOSTRACIÓN "INTUITIVA" DEL TEOREMA DE LAGRANGE

3.- Desviaciones y motivos observables que lo justifiquen.

EL DESARROLLO EXPOSITIVO FUE ALTERADO POR PREGUNTAS DE ALGUNOS ALUMNOS CON DIFICULTAD PARA CONTEXTUALIZAR EL CONTENIDO, ALGUNAS CON ESCASA PROFUNDIZACIÓN EN LOS CONCEPTOS

4.- Viabilidad y utilidad práctica del tratamiento: ¿Ha sido posible o no? Inconvenientes observados en su caso.

EL OBSERVADOR CREE QUE EL TRATAMIENTO DEL TEMA, PERMITIÓ UN ACEPTABLE NIVEL DE COMPRENSIÓN Y ASIMILACIÓN DE LOS OBJETIVOS PROPUESTOS

5.- Tiempo: ¿Se ajusta el desarrollo al tiempo previsto? ¿Qué modificaciones son necesarias en el tiempo?

EN 50' EL PROFESOR EXPLICÓ LOS CONTENIDOS DE (1) Y SE PRODUJERON DIVERSAS INTERVENCIONES DE ALUMNOS. LOS ALUMNOS ESTABAN FAMILIARIZADOS PREVIAMENTE CON EL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

1

Texto J.1.(1/4). Informe del profesor observador externo.

Profesor

1.- Comportamiento y papel durante el desarrollo: Actitud, interés, atención, ordenado o desordenado, ...

CORRECTA EN TODOS LOS ASPECTOS QUE AQUÍ SE SUGIEREN.
EXPOSICIONES CORTAS Y POSTERIORES PREGUNTAS. GRÁFICOS BASTANTE CLAROS

2.- Participación y tipo de participación: explica, pregunta, ...

NADA QUE AÑADIR A LO ESCRITO EN EL APARTADO ANTERIOR

3.- Calidad y claridad de las intervenciones.

BUENAS; EL PROFESOR, ERA CONSCIENTE EN SU INTERVENCIÓN DE LA DIFICULTAD DE LOS CONCEPTOS QUE INTERVIENEN EN LOS CONTENIDOS, PARA LOS ALUMNOS

4.- Tiempo de intervención.

DE UNA CLASE DE 50', A LA TAREA EXPOSITIVA EL PROFESOR DEDICÓ 35' APROXIMADAMENTE. EL RESTO DEL TIEMPO, SE DEDICÓ AL DIÁLOGO CON ALUMNOS Y LOS ÚLTIMOS MINUTOS PARA EL CÁLCULO DE UN AREA (TRAPECIO), PRIMERO CONVENCIONALMENTE Y DESPUÉS CON LA INTEGRAL.

Alumnos

1.- Actividad central durante el desarrollo del tratamiento ¿Qué hacen?

SE TRATABA DE UN GRUPO DE 21 ALUMNOS DE 2.º BACH. C.S. MÁS DE LA MITAD TOMABAN NOTAS, SOLAMENTE OBSERVÉ A DOS CLARAMENTE DESPISTADOS.

2.- Participación y tipo de participación.

APROXIMADAMENTE CINCO INTERVENCIONES FUERON A PREGUNTAS DEL PROFESOR OTRAS TANTAS POR INICIATIVA DE LOS ALUMNOS.

3.- Tipo de preguntas que realizan.

HICE REFERENCIA YA EN EL APARTADO (3) ANTERIOR. VARIAS CON RELACIÓN AL INTERVALO-DOMINIO, RECORDAR LA PRIMITIVA, .. NINGUNA DE ACOTACIÓN

4.- Atención y asimilación: ¿Atienen a las explicaciones?, ¿Parece que entienden las explicaciones?, ¿Por qué se puede deducir esto o en qué se basan las afirmaciones realizadas?

EL TEMA ES OBJETIVAMENTE MUY DIFÍCIL PARA EL ALUMNO MEDIO QUE ESTÁ EN 2.º DE BACH. DICHO HECHO ESTO, MI IMPRESIÓN ES QUE LA RELACIÓN ENTRE INTEGRAL DEFINIDA Y DERIVADA. QUE ELLOS ALCANZARON ES "BASTANTE BUENA"

2

Texto J.1.(2/4). Informe del profesor observador externo.

5.- Interacciones entre los alumnos: Hablan, discuten, no hacen nada, etc.

EXCEPTO DOS, ESTABAN ATENTOS A LO QUE DECÍA EL PROFESOR.
OBSERVÉ DOS O TRES PETICIONES DE AYUDA DE UNO A OTRO.

6.- Actitud general: Positiva, neutra, negativa, desgana, etc.

POSITIVA

7.- Tiempo de intervención.

APROXIMADAMENTE DIEZ MINUTOS.

Interacciones profesor-alumnos

1.- ¿Individual y/o de grupo? Frecuencia: Nunca, rara vez, a menudo, constantemente. Duración de las intervenciones.

INDIVIDUAL. LOS ALUMNOS ESTABAN DISTRIBUIDOS EN GRUPOS DE DOS

Grupo 1:	Grupo 2:	Grupo 3:	Grupo 4:
Grupo 5:	Grupo 6:	Grupo 7:	Grupo 8:

2.- Tipo:

· Ninguna interacción, monólogo del profesor (es el único protagonista).

· Situaciones intermedias.

· El alumno es el protagonista absoluto.

3

Texto J.1.(3/4). Informe del profesor observador externo.

Recursos y condiciones materiales

1.- Idoneidad de los recursos empleados en relación con el tratamiento.

PIZARRA Y CALCULADORA.

2.- Inconvenientes materiales observados.

NINGUNO.

3.- Otras observaciones.

Incidencias especiales

1.- Retrasos dignos de mención, puntualidad.

NADA MENCIONABLE

2.- Disfunciones e inconvenientes producidos. Posibles motivos observados.

NINGUNO.

3.- Imprevistos observados.

NINGUNO.

4.- Otras incidencias observadas (especificar).

BURGOS, 18-12-08

Fdo: FRANCISCO GONZALEZ FEITO

PROFESOR MATEMATICAS I.E.S "FELIX RODRIGUEZ DE LA FUENTE" BURGOS

4

Texto J.1.(4/4). Informe del profesor observador externo.

J.2. ENCUESTA A LOS ALUMNOS

El profesor, en la clase de matemáticas del día 23 de enero de 2009 realizó la encuesta a los alumnos de 2º D, entregó el texto de la misma a las 12:40 horas y la recogió a las 13:10 horas; seguidamente se comenzó con el Álgebra que conforma la segunda parte de la asignatura.

La encuesta está compuesta por cuatro apartados, éstos son:

1. CÁLCULO MENTAL. Se refiere a la actividad desarrollada bajo este tópico, descrita y analizada en los epígrafes *X.3.1.1. Cálculo mental* y *X.4.1.40. Cálculo de primitivas*.
2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL (LA INTEGRAL). Se refiere a los cuadernillos sobre el área y la integral realizados por cada uno de los alumnos y analizados en *X.4. Análisis de los cuadernillos.*
3. UNIDAD DIDÁCTICA: ÁREA E INTEGRAL. Se refiere al conjunto de los materiales entregados, los recursos empleados, la calidad de la docencia, el interés por el aprendizaje,... cuyo análisis no puede circunscribirse exclusivamente a esta capítulo, más bien, abarca diferentes partes de la presente Tesis.
4. PRÁCTICA CON *DERIVE* (LA INTEGRAL). Se refiere a la clase práctica del área y la integral realizada con el programa de cálculo simbólico *DERIVE* en el aula de informática y en análisis de las respuestas del cuadernillo de prácticas informáticas. Como aún no se ha descrito la utilización de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de la integral, en este momento, no podemos incluir esta parte de la encuesta y la posponemos al capítulo siguiente: *Capítulo XI, Del lápiz y papel a las nuevas,* epígrafe *XI.3.4. Prácticas con DERIVE, ciclo de cierre.*

J.2.1. CÁLCULO MENTAL

1.10.- Describe, brevemente, tus impresiones sobre el cálculo mental desarrollado y lo que consideres importante mantener o cambiar en posteriores cursos: _______________

Me ha parecido muy interesante y sobre todo distinto a lo que llevaba dando hasta ahora (a excepción de las derivadas). Para entender el mecanismo de las integrales y primitivas hace falta tener pensamiento abstracto.

VB

Creo que su trabajo es inmejorable, creo que el que falla soy yo, por diversas razones.

AM

Creo que hubiera que emplear más horas del curso en la parte de análisis, ya que para mí es la parte más complicada.

RM

Al principio pensaba que la integral no me iba a servir para nada, pero con el paso del tiempo he visto que me puede llegar a ser útil

RH

consideres importante mantener o cambiar en posteriores cursos: Creo que existe un fallo, a la hora de los exámenes, los ejercicios propuestos en el mismo son un poco más difíciles y nos hacen dudar mucho más que los de clase, deberíamos hacerlos más difíciles en clase aunque nos cueste más.

DD

consideres importante mantener o cambiar en posteriores cursos: Mantengo todo, todo está bien. Poner los exámenes más fáciles para poder entenderlos y sacar la asignatura. Cambiar los exámenes y mantener el alto nivel en lo que nos enseñan.

LB

consideres importante mantener o cambiar en posteriores cursos: Yo creo que todo lo que hemos dado es lo importante y esencial saberlo e imprescindible para selectividad y más adelante.

DB

consideres importante mantener o cambiar en posteriores cursos: Realmente las clases están muy bien planteadas y el profesor explica bien; pero por la razón que sea, luego en el examen no plasmo lo aprendido durante las clases y lo trabajado en casa.

MM

J.2.2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL (CUADERNILLO)

2.5.- Describe, brevemente, tus impresiones sobre la práctica propuesta de lápiz y papel, tu propio aprendizaje teórico de la integral definida una vez cumplimentado el cuadernillo y lo que consideres más interesante: ____

consideres más interesante: Yo creo que habernos mandado realizar el cuadernillo sin previamente habernos explicado quien era Maths y su teoria y o Reiman no tiene mucho sentido. A mi me a costado mucho hacerlo y hay muchas cosas que no entiendo.

DT

Yo creo que me puede igual que sino hubiera hecho el cuadernillo, pero lo único aprendí la fórmula pero no más.

AC

consideres más interesante: La práctica estubo bien, yo creo que si hubiese habido un ambiente con más calma se podrían haber resuelto dudas sobre la integral y haberla podido entender mejor.

EP

consideres más interesante: Me ha parecido una práctica muy completa, que partiendo de lo sencillo se ha complicando y me ha resultado útil para entender mejor la integral definida.

BB

consideres más interesante: Los ejercicios propuestos en la práctica me parecen muy complicados.
Después de la práctica comprendo ~~mejor~~ un poco mejor la integral.

EG

consideres más interesante: La práctica era muy difícil además parte de la práctica no lo habíamos dado bien en clase.

RB

consideres más interesante: Había ejercicios que me parecieron muy complicados

SH

consideres más interesante: Después de realizar la práctica me quedaron más claras las ideas sobre las areas inferiores y superiores y la práctica de lápiz difícil pero interesante. Mejor en la práctica de ordenador.

LB

J.2.3. UNIDAD DIDÁCTICA: ÁREA E INTEGRAL DEFINIDA

3.10.- Describe, brevemente, tus impresiones sobre la enseñanza del profesor, tu propio aprendizaje y lo que consideres más interesante: ______________________________

aprendizaje y lo que consideres más interesante: El profesor se interesa mucho para que todos entendamos lo que estamos estudiando, y lo que menos me gusta es hallar el área porque es lo que más fácil me parece.

SM

aprendizaje y lo que consideres más interesante: El profesor ~~se~~ intenta que todos lo entendamos y podamos aprobar, viniendo por la tarde un dia, cogiendo horas libres para refuerzo .... Sobre mi aprendizaje me cuesta entender los problemas. Es interesante el calculo de areas, pero sencillos.

DM

aprendizaje y lo que consideres más interesante: Este año me ha resultado mas sencillo. Me pareció mejor ~~a~~ la forma de explicarlo, con mas detenimiento.

GF

La enseñanza del profesor ha sido buena ya que ha intentado que todos aprendamos. Mi aprendizaje a sido mínimo ya que consideraba muy difícil este temario.

DA

Yo no he visto nada interesante en las integrales porque se que no las voy a tener que utilizar más que en este curso.

aprendizaje y lo que consideres más interesante: Yo creo que las matemáticas en general son interesantes pero como me cuesta entenderlas también cuesta que resulten interesantes.

RS

Mi grado de aprendizaje puede ser medio.

aprendizaje y lo que consideres más interesante: En mi opinión la forma de enseñanza del profesor es buena, no hay problema; mi propio aprendizaje yo creo que es muy malo, por el hecho de que los primeros dias de clase estaba perdida y no he vuelto a retomarlos ni siquiera teniendo clases particulares.

EP

Los ejercicios que hago en casa algunos me salen pero luego voy al examen y me resultan más dificiles

AC

La enseñanza del profesor me parece normal.

J.2.4. PRÁCTICA CON *DERIVE* (LA INTEGRAL)

4.5.- Describe, brevemente, tus impresiones sobre la práctica con Derive, tu propio aprendizaje práctico de la integral definida una vez utilizado el ordenador, la necesidad de controlar en todo momento lo que hace el ordenador y lo que consideres más interesante:____

Creo que es una buena forma de llegar a los alumnos ya que nos hace trabajar con algo que nos gusta.

AM

Utilizar nuevas tecnologías no es lo mío, pero yo creo que me quedé igual ya que iva siguiendo los pasos que marcaba el profesor así que no mucho aprendí.

AC

La práctica me pareció interesante porque yo nunca había utilizado ese programa, pero fue muy larga.

SH

La práctica con el Derive no me pareció interesante ya que ya sabía utilizarlo. Los ejercicios apenas me enseñaron la integral definida.
Es importante saber controlar programas matemáticos, pero a la hora de hacer el examen quizás puedes fallar ya que te acostumbras a que lo haga el ordenador.

RB

Utilizar el PC para entender mejor lo que es la integral me sirvió para que entendiera finalmente los puntos y las dudas que tenía sobre la integral, sobre rieman....

RM

Está muy bien y enseña muy bien las integrales "divirtiéndote"

DB

La práctica de Derive me pareció muy interesante porque a parte de saberlo hacer normal también nos lo enseñó a hacer en ordenador y esto a algunos les puede ayudar a aclarar algunas cosas.

SM

Yo creo que no aprendimos mucho, porque con ese programa no te esperaba como se hacían los ejercicios. La realización de actividades en ordenadores no debe hacerse por las tardes pues tenemos ~~otras~~ clases extraescolares y ya perdemos bastantes viniendo hacer los examenes de la mayoría de las asignaturas.

DT

ANEXO K (CAPÍTULO XI): ***PRÁCTICAS CON LÁPIZ Y PAPEL*****...313**

K.1. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL SEGUNDO CICLO............314

K.2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL TERCER CICLO...............323

ANEXO K (CAPÍTULO XI): PRÁCTICAS CON LÁPIZ Y PAPEL

En el presente anexo incluimos el enunciado, en un recuadro, de las prácticas de la integral definida propuestas a los estudiantes para su resolución con lápiz, papel y calculadora no programable; además, escaneamos algunas de las respuestas de los estudiantes, cuya identificación la determina el correspondiente código del alumno.

Solamente en los ciclos de confirmación (II y III) se han realizado tales prácticas y básicamente se reducen a calcular el área comprendida entre la función $f(x)=x^2$, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=3.

K.1. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL SEGUNDO CICLO

La práctica propuesta del ciclo II de nuestra investigación se entregó a los veinte estudiantes de 2º E el jueves 16 de diciembre de 2004 y fue recogida el lunes 10 de enero de 2005. He aquí el texto:

Curso 2004-2005

PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

OBJETIVO: Estas prácticas permiten que el alumno consolide los conceptos de área bajo una curva, sumas inferior y superior de Darboux, integral definida, teorema fundamental de cálculo integral y regla de Barrow.

NORMAS QUE DEBEN TENERSE PRESENTES:

A) Es aconsejable que todas las representaciones se realicen en papel milimetrado.

B) Deben justificarse siempre todas las operaciones que se realicen y no resulten evidentes, así como los resultados que se obtengan y se apoyen en la teoría explicada.

C) Este trabajo será personal y se recogerá el 10 de enero de 2005.

PRÁCTICAS PROPUESTAS:

1.- Representa la función $f(x) = x^2$ y señala el área que determina dicha función, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=3.

2.- Representa, de nuevo, la función anterior y une los siguientes puntos: (1,0); (1,f(1)); (4/3,f(1)); (4/3,f(4/3)); (5/3,f(4/3)); (5/3,f(5/3)); (2,f(5/3)); (2,f(2)); (7/3,f(2)); (7/3,f(7/3)); (8/3,f(7/3)); (8/3,f(8/3)); (3,f(8/3)); (3,0) y (1,0).

2.1.- Calcula, con lápiz y papel, el área del polígono que acabas de dibujar.

2.2.- Calcula, con ayuda de la calculadora, el área del polígono que acabas de dibujar.

3.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1,0); (1,f(4/3)); (4/3,f(4/3)); (4/3,f(5/3)); (5/3,f(5/3)); (5/3,f(2)); (2,f(2)); (2,f(7/3)); (7/3,f(7/3)); (7/3,f(8/3)); (8/3,f(8/3)); (8/3,f(3)); (3,f(3)); (3,0) y (1,0).

3.1.- Calcula, con lápiz y papel, el área del polígono que acabas de dibujar.

3.2.- Calcula, con ayuda de la calculadora, el área del polígono que acabas de dibujar.

4.- ¿Qué es el conjunto {1, 4/3, 5/3, 2, 7/3, 8/3, 3} del intervalo [1,3]?

5.- ¿Qué te recuerda la suma obtenida en el apartado 2.1? Por comodidad llamemos a ese resultado L(6).

6.- ¿Qué te recuerda la suma obtenida en el apartado 3.1? Por comodidad llamemos a ese resultado U(6).

7.- Si "A" es el área señalada en el apartado 1 ¿Cuánto crees que puede valer?

8.- ¿En cuántos subintervalos se ha dividido anteriormente el intervalo [1,3]? ¿Se puede dividir en 12 subintervalos de igual amplitud? ¿Cuál es la amplitud de cada subintervalo?

9.- Calcula L(12) y U(12), represéntalo gráficamente si lo consideras necesario ¿Sigues pensando que "A" es el valor obtenido en el apartado 7?

10.- Ordena de menor a mayor U(12), U(6), L(6) y L(12). ¿Entre qué valores crees que estará, "A", el área que pretendemos calcular.

11.- Intenta encontrar una fórmula para L(n) y U(n), siendo "n" cualquier número natural y todos los subintervalos de igual amplitud.

12.- ¿Qué ocurre con L(n) y U(n) si "n" tiende a infinito? ¿Dónde crees que se encontrará "A"?

13.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en 1000 subintervalos, <u>no todos de la misma amplitud</u>, si calculamos L(1000) y U(1000) ¿Obligatoriamente se aproximarán a "A"?

14.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en "m" subintervos, de distintas amplitudes, como es obvio, se puede calcular L(m) y U(m) ¿Crees que ahora podemos tomar límites como se hizo con L(n) y U(n)?

15.- Ordena de menor a mayor, si es posible, L(m), U(m) y "A".

16.- Si "m" es cualquier valor, imagina que "s" es el extremo superior de los valores L(m) y "S" es el extremo inferior de los valores de U(m). Ordena de menor a mayor L(m), U(m), "A", "s" y "S".

17.- Si "s" y "S" coinciden ¿Qué ocurre con "A"?

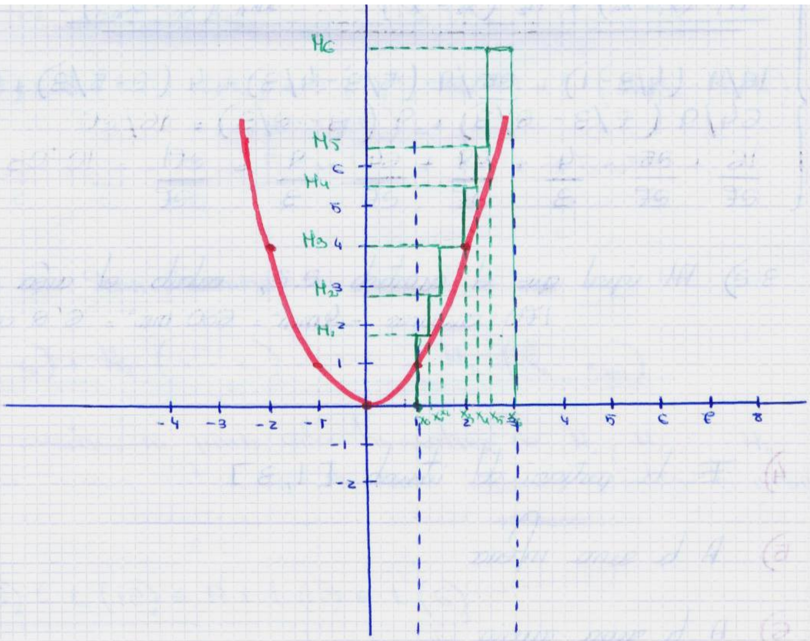
18.- ¿Recuerdas alguna notación matemática que designe "A"?

19.- ¿Sabes calcular "A"? ¿Cuál es el resultado en el que te has apoyado?

20.- ¿Consideras que el tiempo empleado para obtener este área es excesivo? ¿Piensas que las nuevas tecnologías te pueden liberar de efectuar estos cálculos tan farragosos?

Cuadro K.1. Práctica con lápiz y papel de la integral definida (Ciclo II).

3)



(1,0)
$(1, f(4/3)) = (1, 16/9)$
$(4/3, f(4/3)) = (4/3, 16/9)$
$(4/3, f(5/3)) = (4/3, 25/9)$
$(5/3, f(5/3)) = (5/3, 25/9)$
$(5/3, f(2)) = (5/3, 4)$
$(2, f(2)) = (2, 4)$
$(2, f(7/3)) = (2, 49/9)$
$(7/3, f(7/3)) = (7/3, 49/9)$
$(7/3, f(8/3)) = (7/3, 64/9)$
$(8/3, f(8/3)) = (8/3, 64/9)$
$(8/3, f(3)) = (8/3, 9)$
$(3, f(3)) = (3, 9)$
(3,0)
(1,0)

NC

3.1) Suma Superior:

$$H_1(x_1-x_0) + H_2(x_2-x_1) \ldots H_n(x_n-x_{n-1})$$

$$\frac{16}{9}\left(\frac{4}{3}-1\right) + \frac{25}{9}\left(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\right) + 4\left(2-\frac{5}{3}\right) + \frac{49}{9}\left(\frac{7}{3}-2\right) + \frac{64}{9}\left(\frac{7}{3}-\frac{8}{3}\right) + 9\left(3-\frac{8}{3}\right) =$$

$$\frac{16}{27} + \frac{25}{27} + \frac{4}{3} + \frac{49}{27} + \frac{64}{27} + \frac{9}{3} = \frac{271}{27} = 10'03\ u^2$$

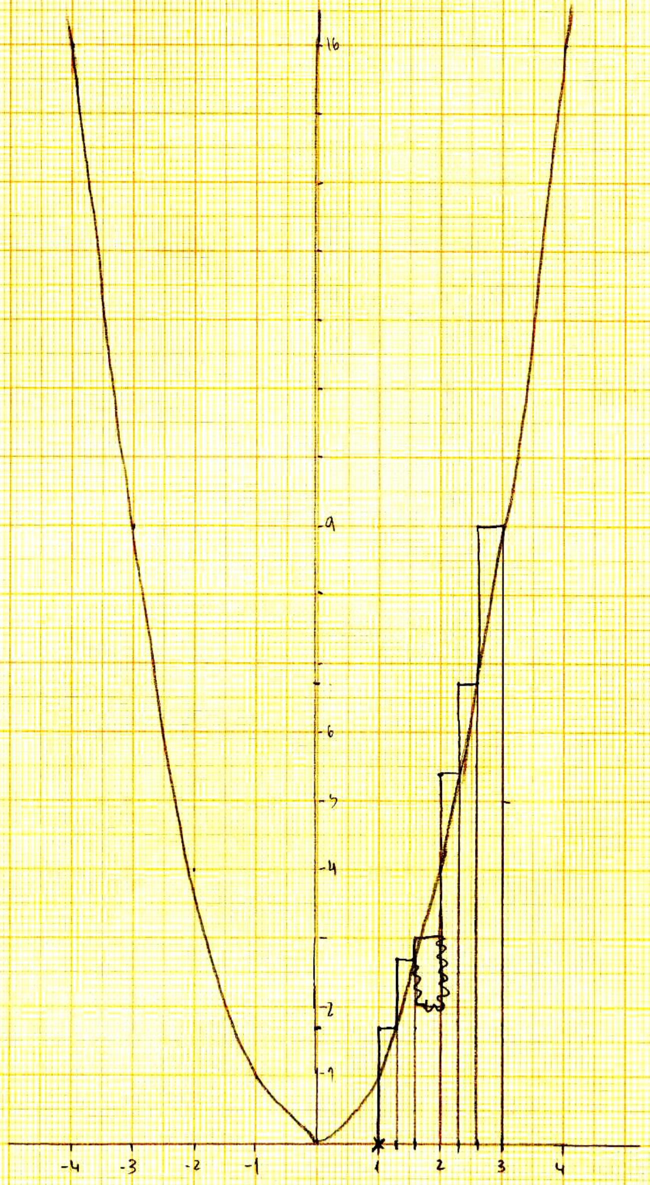
$1u^2 \rightarrow 0'8\ cm^2$
$10'03 \rightarrow x$
$x = 8'024\ cm^2$

3.2) Al igual que el apartado 2.2, calculo el área contando cuadros:
170 cuadros $\cdot$ 4mm² = 680 mm² = 6'8 cm²

3. Representa la función anterior y une los siguientes puntos: (1,0)...

X	1	1	1,3	1,3	1,6	1,6	2	2	2,3	2,3	2,6	2,6	3	3	
Y	0	1,7	1,7	2,7	2,7	2	2	5,4	5,4	6,7	6,7	9	9	0	

$\underbrace{2 \quad 2}_{¿\text{No sé?}}$



BM(A)

Lo que he tachado en la gráfica no lo entiendo.

3.1 Hay 984 cuadraditos → $984 \cdot 0'01 = 9,84\ mm^2$ → A.

3.2 Es = que en el punto 3.1.

$\left.\begin{matrix} 0'1 \\ \square\ 0.1 \end{matrix}\right\} 0.1 \cdot 0.1 = 0.01\ m^2$

10. Ordena de Mayor a Menor $U(12), U(6), L(6), L(12)$

$U(6) > L(12) > U(12) > L(6)$

Para hacerlo me he guiado de las representaciones gráficas anteriores.

BM(B)

11. Busca una fórmula para $L(N)$ y $U(N)$ ...

$L(n) = x_1 - x_0,\ x_2 - x_1 \ldots\ x_n - x_{n-1}$

$L(U) = x_1 - x_0,\ x_2 - x_1 \ldots\ x_n - x_{n-1}$

12. ?

13. Creo que no se aproxima a "A" porque las particiones están alineados Unas veces están por encima de la gráfica y otras veces por debajo.

14. No se puede porque falta una constancia

15 Ordena de < a > ($L(m)$, $U(m)$ y "A").

$A < L(m) < U(m)$ → Según las act. anteriores

16. Ordena de menor a mayor $L(m)$, $U(m)$, "A", "s", "S".

"S" < "s" < "A" < $L(m) < U(m)$

17. "A", vale, lo que valga "S" o "s".

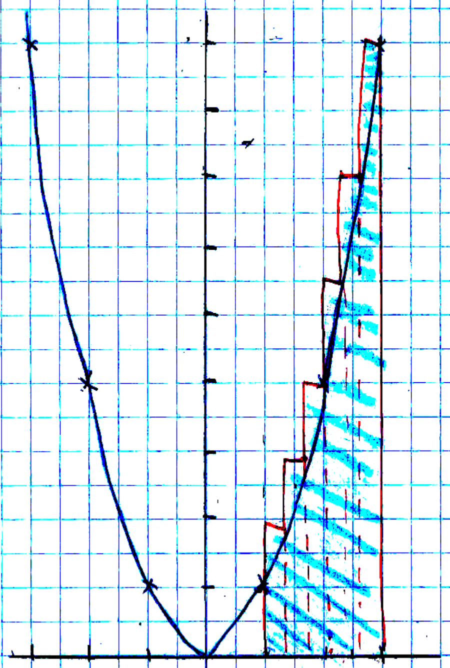
18. $A = p \cdot q \cdot u^2 = 6u^2$. ¿Puede ser??

19. La integral definida de Darboux

20. A las dos preguntas Sí, eso espero.

③ Representa una vez mas, la función anterior y une los siguientes puntos: $(1,0)$; $(1, f(4/3))$; $(4/3\ f(4/3))$; $(4/3, f(5/3))$; $(5/3\ f(5/3))$; $(5/3, f(2))$; $(2, f(2))$; $(2, f(7/3))$; $(7/3, f(7/3))$; $(7/3; f(8/3))$; $(8/3; f(8/3))$; $(8/3, f(3))$; $(3, f(\frac{9}{3}))$; $(3,0)$ y $(1,0)$

RG



$$\int_1^3 (x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[\frac{3^3}{3}\right] - \left[\frac{1^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8{,}66.$$

$$\int_1^{1,33} (x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{1,33} = \left[\frac{1{,}33^3}{3}\right] - \left[\frac{1^3}{3}\right] =$$

$$= 0{,}784 - 0{,}\widehat{33} = 0{,}451\ u^2.$$

$$\int_{1,33}^{1,66} = (x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1,33}^{1,66} = \left[\frac{1{,}66^3}{3}\right] - \left[\frac{1{,}33^3}{3}\right] =$$

$$= 1{,}52 - 0{,}784 = 0{,}756\ u^2$$

$$\int_{1,66}^{2} (x^2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_{1,66}^{2} = \left[\frac{2^3}{3}\right] - \left[\frac{1{,}66^3}{3}\right] =$$

$$= 2{,}66 - 1{,}52 = 1{,}14.$$

$$\int_2^{2,33} (x^2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_2^{2,33} = \left[\frac{2{,}33^3}{3}\right] - \left[\frac{2^3}{3}\right] = 4{,}21 - 2{,}66 = 1{,}55\ u^2$$

$$\int_{2,33}^{2,66} (x^2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_{2,33}^{2,66} = \left[\frac{2{,}66^3}{3}\right] - \left[\frac{2{,}33^3}{3}\right] = 6{,}27 - 4{,}21 = 2{,}06.$$

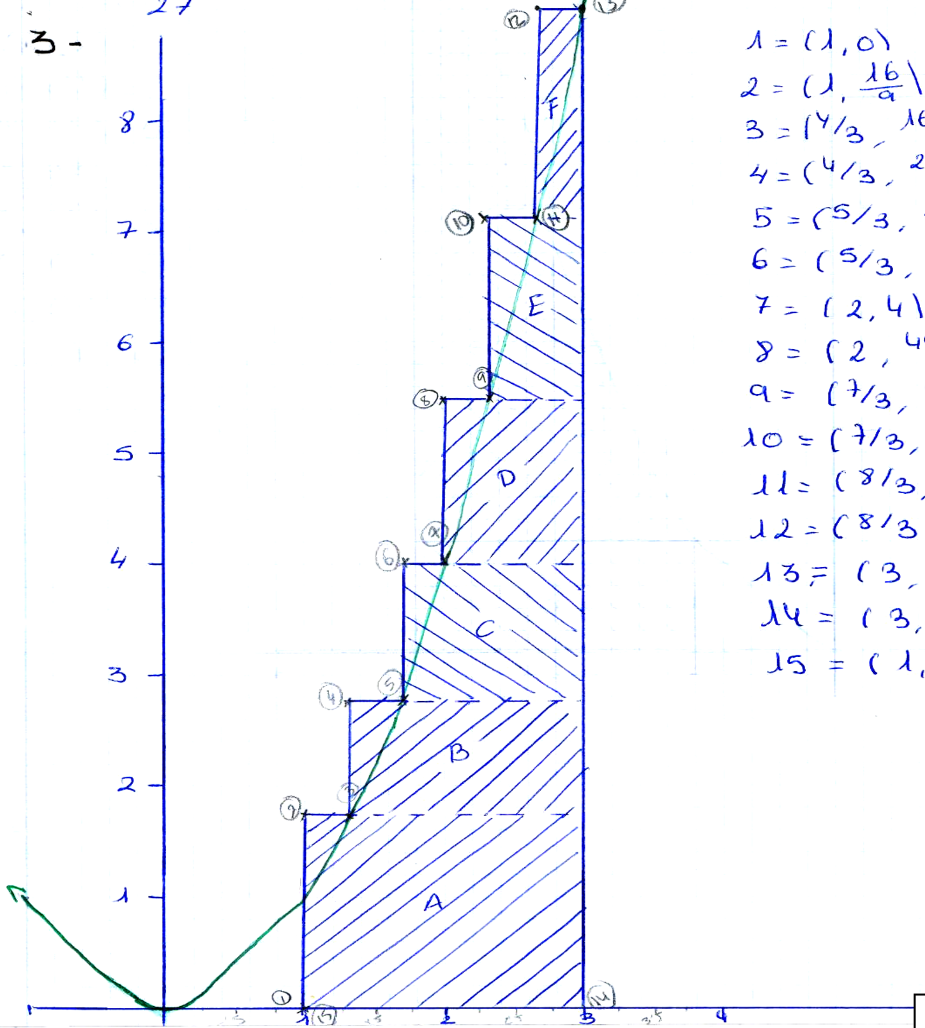
$$\int_{2,66}^{3} (x^2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_{2,66}^{3} = \left[\frac{3^3}{3}\right] - \left[\frac{2{,}66^3}{3}\right] = 9 - 6{,}27 = 2{,}7.$$

$A_T = 8{,}687$

$$\int_0^3 (x^2)\,dx \quad \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^3 = \left(\frac{3^3}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9$$

2.2 - $\frac{229}{27} = 8'48\overline{148}$

3 -



MT(A)

3.1 -

(A) $(3-1)\cdot\left(\frac{16}{9}-0\right) = 2\cdot\frac{16}{9} = \frac{32}{9}$

(B) $\left(3-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{25}{9}-\frac{16}{9}\right) = \left(\frac{9}{3}-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{11}{9} = \frac{5}{3}\cdot\frac{11}{9} = \frac{55}{27}$

(C) $\left(3-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{25}{9}\right) = \left(\frac{9}{3}-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{36}{9}-\frac{25}{9}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{11}{9} = \frac{44}{27}$

(D) $(3-2)\cdot\left(\frac{49}{9}-4\right) = 1\cdot\left(\frac{49}{9}-\frac{36}{9}\right) = 1\cdot\left(\frac{13}{9}\right) = \frac{13}{9}$

(E) $\left(3-\frac{7}{3}\right)\cdot\left(\frac{64}{9}-\frac{49}{9}\right) = \left(\frac{9}{3}-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{15}{9} = \frac{2}{3}\cdot\frac{15}{9} = \frac{30}{27}$

(F) $\left(3-\frac{8}{3}\right)\cdot\left(9-\frac{64}{9}\right) = \left(\frac{9}{3}-\frac{8}{3}\right)\cdot\left(\frac{81}{9}-\frac{64}{9}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{17}{9} = \frac{17}{27}$

$A+B+C+D+E+F = \frac{32}{9}+\frac{55}{27}+\frac{44}{27}+\frac{13}{9}+\frac{30}{27}+\frac{17}{27} =$

$= \frac{96}{27}+\frac{55}{27}+\frac{44}{27}+\frac{39}{27}+\frac{30}{27}+\frac{17}{27} = \boxed{\frac{281}{27}}$

3.2 - $\frac{281}{27} = 10'40740$

10 - $L(6) \leq U(12) \leq$ Area real $\leq U(12) \leq U(6)$

11 -

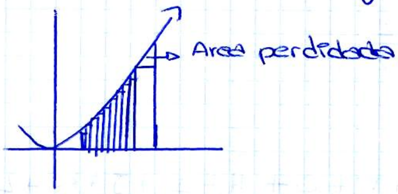
$$L(A) = \frac{(x_n - x_0)}{(n)} \cdot (f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_n)$$

$$U(A) = \frac{(x_n - x_0)}{(n)} \cdot (f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

12 - Que será lo mismo

13 - Depende de como sean los intervalos, si cojo un intervalo muy grande y 999 muy pequeños, el área NO se aproxima al área real o al valor de los intervalos que sean iguales.

MT(B)



14 - Si

15 - $L(m) \leq$ Área $\leq U(m)$

16 - $L(m) \leq s \leq A \leq S \leq U(m)$

17 - Que se consigue hallar el valor buscado mediante las aproximaciones (suma inferior y suma superior).

18 - $\int_1^3 x^2\,dx$ La integral definida

19 - $f(x) = \int_1^3 x^2$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \simeq 8'\widehat{6}$$

20 - El tiempo empleado para obtener este área es excesivo, un gran paso es el saber hacer la integral definida (ejercicio 19) porque sino habría que hacer excesivas aproximaciones y nunca daríamos con el valor exacto. Por supuesto que hay nuevas tecnologías, que hacen esto más sencillo.

4 Son los valores de x que delimitan el área del polígono.

SR

7 La suma de ~~la~~ $L(6)$ y $U(6)$ dividido entre dos.
9,27

4.- Indican la anchura por la que hemos subdividido el área.

5.- Es un resultado que ha de ser menor que el de la integral

6.- Es un resultado que ha de ser mayor que el resultado de la integral.

7.- $F(x) \int_1^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 \quad \frac{9}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

SA

8.- En 6 subintervalos
No.
Más o menos $\frac{1}{3}$ para 6 subintervalos;
y $\frac{1}{6}$ para 12 subintervalos

9.- $L(12)$ 7 y $U(12)$ 10

Para calcular $L(n)$

1º- Se calcula la amplitud de cada subintervalo ... $\frac{1}{6} = 0'17$
$\frac{B-A}{N}$ (N → Nº de subintervalos)

2º- Se calcula el valor de los puntos de cada subintervalo → $A + \left(\frac{B-A}{N}\right) \cdot \alpha$
$\alpha \in [0,12]$

3º- Calcular el valor de la función de cada punto → $f\left[A + \left(\frac{B-A}{N}\right) \cdot \alpha\right]$

4º- Por cada valor hallado se representa también el valor del punto anterior obtenido → $f\left[A + \left(\frac{B-A}{N}\right) \cdot \alpha - 1\right]$

5º- Unir los puntos.

* Para calcular $U(n)$ es lo mismo, con diferencia de la 4ª fase, que en vez de restar, se suma 1. porque es el valor en el punto siguiente.

Gráficos K.1. Respuestas a las prácticas con lápiz y papel de la integral definida (Ciclo II).

K.2. PRÁCTICA CON LÁPIZ Y PAPEL DEL TERCER CICLO

La práctica propuesta para los veinte estudiantes de 2º F del tercer ciclo de nuestra investigación se entregó el lunes 19 de diciembre de 2005 y fue recogida el martes 10 de enero de 2006. He aquí el texto:

CURSO 2005-2006

PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

OBJETIVO: Estas prácticas permiten que el alumno consolide los conceptos de área bajo una curva, sumas inferior y superior de Darboux, sumas de Riemann, integral definida, teorema fundamental de cálculo integral y regla de Barrow.

NORMAS QUE DEBEN TENERSE PRESENTES:

A) Es aconsejable que todas las representaciones se realicen en papel milimetrado.

B) Deben justificarse siempre todas las operaciones que se realicen y no resulten evidentes, así como los resultados que se obtengan y se apoyen en la teoría explicada.

C) Este trabajo será personal y se recogerá el 10 de enero de 2006.

PRÁCTICAS PROPUESTAS:

1.- Representa la función $f(x) = x^2$ y señala el área que determina la gráfica de dicha función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

2.- Representa, de nuevo, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1)); (1,5;f(1)); (1,5;f(1,5)); (2;f(1,5)); (2;f(2)); (2,5;f(2)); (2,5;f(2,5)); (3;f(2,5)); (3;0) y (1;0). Calcula el área del polígono que acabas de dibujar ¿Qué te recuerda la suma obtenida? Por comodidad llamemos a ese resultado L(4).

3.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,5)); (1,5;f(1,5)); (1,5;f(2)); (2;f(2)); (2;f(2,5)); (2,5;f(2,5)); (2,5;f(3)); (3;f(3)); (3;0) y (1;0). Calcula el área del polígono que acabas de dibujar ¿Qué te recuerda la suma obtenida? Por comodidad llamemos a ese resultado U(4).

4.- Representa $f(x) = x^2$ y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,25)); (1,5;f(1,25)); (1,5;f(1,75)); (2;f(1,75)); (2;f(2,25)); (2,5;f(2,25)); (2,5;f(2,75)); (3;f(2,75)); (3;0) y (1;0). Calcula el área del polígono que acabas de dibujar ¿Qué te recuerda la suma obtenida? Por comodidad llamemos a ese resultado R(4).

5.- ¿Qué es el conjunto P={1; 1,5; 2; 2,5; 3} del intervalo [1,3]? ¿Qué es el conjunto T={1,25; 1,75; 2,25; 2,75} respecto de P?

6.- Si “A” es el área señalada en el apartado 1 ¿Cuánto crees que puede ser su valor?

7.- ¿En cuántos subintervalos se ha dividido anteriormente el intervalo [1,3]? ¿Se puede dividir en 10 subintervalos de igual amplitud? ¿Cuál es la amplitud de cada subintervalo? Determina los puntos en los cuales queda dividido el intervalo, es decir, escribe la partición correspondiente. Escribe una familia de puntos intermedios asociados a la partición anterior.

8.- Calcula L(10), U(10) y R(10), represéntalo gráficamente si lo consideras necesario ¿Sigues pensando que “A” es el valor obtenido en el apartado 6?

9.- Ordena de menor a mayor U(10), U(4), L(4), L(10), R(4) y R(10). ¿Entre qué valores crees que estará, “A”, el área que pretendemos calcular?

10.- Siendo “n” cualquier número natural, si dividimos el intervalo [1,3] en “n” subintervalos de la misma amplitud ¿Cuánto vale dicha amplitud? ¿Crees que es fácil encontrar fórmulas que expresen L(n), R(n) y U(n)?

11.- Calcula U(4) – L(4); U(10) – L(10). ¿Qué ocurre con U(n) – L(n) si “n” tiende a infinito? ¿Esto nos garantiza que la función f(x) sea integrable en el sentido Darboux?

12.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en 1000 subintervalos, **<u>no todos de la misma amplitud</u>**, si calculamos L(1000) y U(1000) ¿Se aproximarán obligatoriamente a “A”? ¿Tenderían a A al aumentar el número de subintervalos? Es muy importante que justifiques la respuesta.

13.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en “m” subintervos, de distintas amplitudes, como es obvio, se puede calcular U(m) – L(m) ¿Crees que cuando “m” tiende a infinito forzosamente U(m) – L(m) tiende a cero? Justifica la respuesta.

14.- Si es posible, ordena de menor a mayor L(m), U(m) y “A”.

15.- Si “m” es cualquier valor, imagina que “s” es el extremo superior de los valores L(m) y “S” es el extremo inferior de los valores de U(m). Ordena de menor a mayor L(m), U(m), “A”, “s” y “S”.

16.- Si “s” y “S” coinciden ¿Qué ocurre con “A”? ¿Qué concepto matemático te recuerda? ¿Recuerdas alguna notación matemática que designe “A”?

17.- ¿Sabes calcular “A”? ¿Cuál es el resultado en el que te has apoyado?

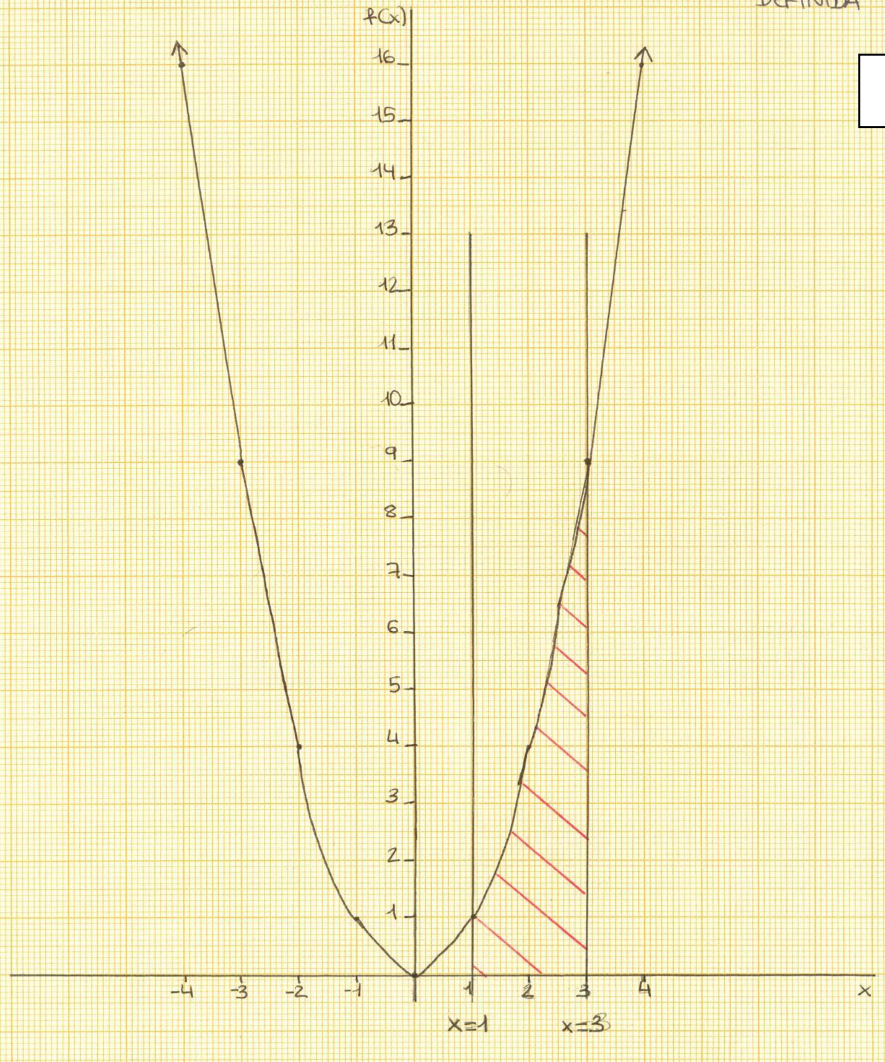
18.- ¿Consideras que el tiempo empleado para obtener este área es excesivo? ¿Piensas que las nuevas tecnologías te pueden liberar de efectuar estos cálculos tan farragosos?

Cuadro K.2. Práctica con lápiz y papel de la integral definida (Ciclo III).

MARÍA DIEZ. 2º BACH F. PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

MD(A)

1-



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	16	9	4	1	0	1	4	9	16

La zona rayada en color rojo es el área que determina la función $f(x)=x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=3$.

MD(B)

2_

x	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	1	2,25	4	6,25	9

Para calcular el área rayada en rojo, hay que sumar todas las áreas de cada uno de los rectángulos.

$A = 1\ (1{,}5-1) + 2{,}25\ (2-1{,}5) + 4\ (2{,}5-2) + 6{,}25\ (3-2{,}5) =$

$= (1 \cdot 0{,}5) + (2{,}25 \cdot 0{,}5) + (4 \cdot 0{,}5) + (6{,}25 \cdot 0{,}5) = 6{,}75.$

Recuerda a la suma inferior de Darboux.

$L\ (4) = 6{,}75.$

MD(C)

3_

x	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	1	1,25	4	6,25	9

Para calcular el área rayada en rojo, hay que sumar todas las áreas de cada uno de los rectángulos.

$A = 2,25\,(1,5-1) + 4\,(2-1,5) + 6,25\,(2,5-1,5) + 9\,(3-2,5) =$

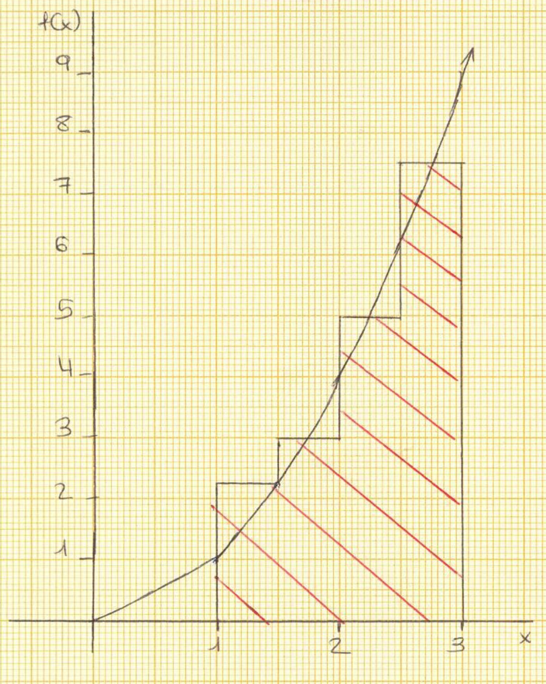
$= (2,25 \cdot 0,5) + (4 \cdot 0,5) + (6,25 \cdot 0,5) + (9 \cdot 0,5) = 10,75$

Recuerda a la suma superior de Darboux

$U\,(4) = 10,75$

MD(D)

4_



x	1	1,25	1,75	2	2,25	2,75	3
f(x)	1	1,25	3,06	4	5,06	7,56	9

Para calcular el área rayada en rojo, hay que sumar todas las áreas de cada uno de los rectángulos.

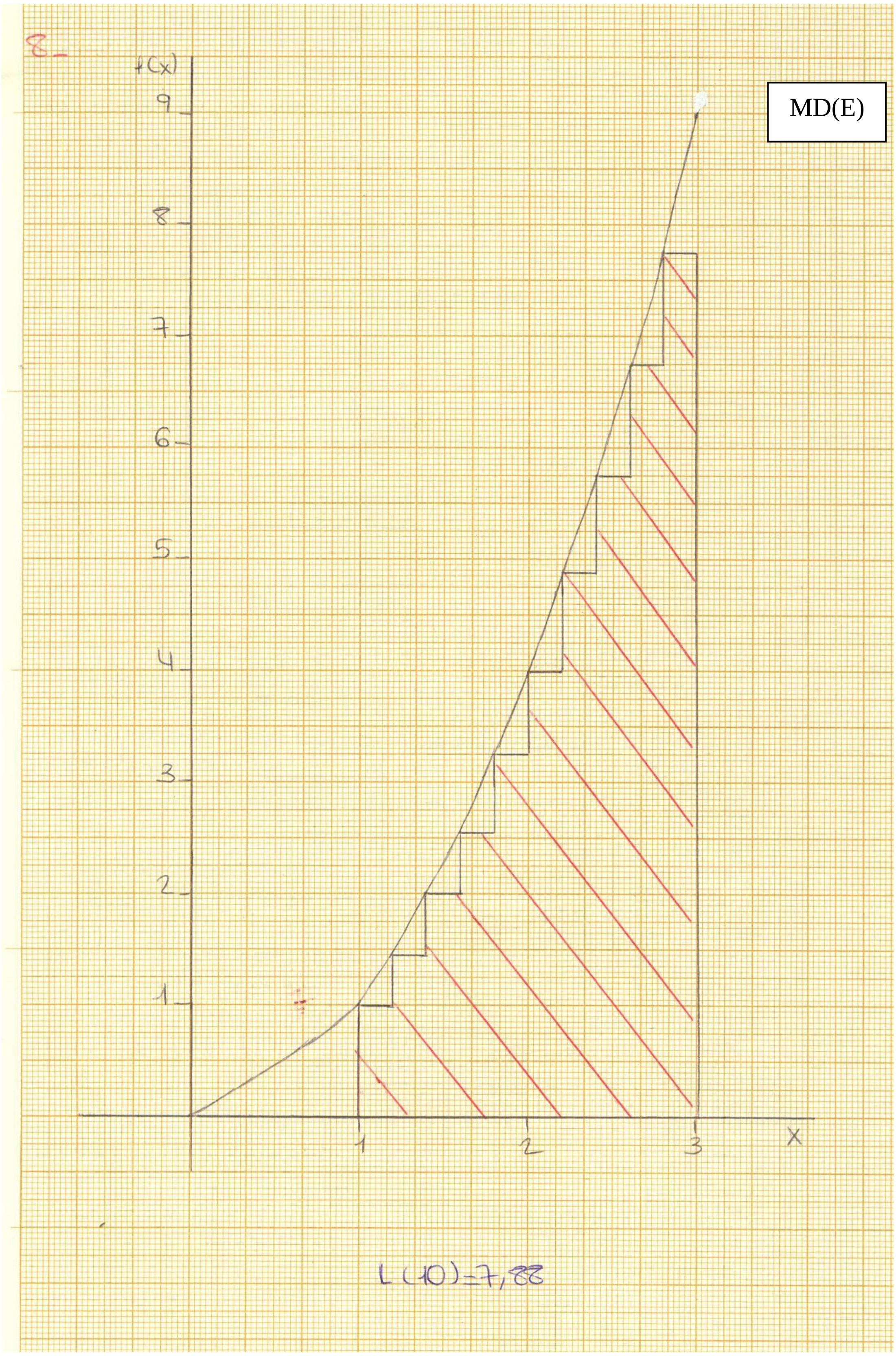
$A = 2{,}25\ (1{,}5-1) + 3{,}06\ (2-1{,}5) + 5{,}06\ (2{,}5-2) + 7{,}56\ (3-2{,}5) =$

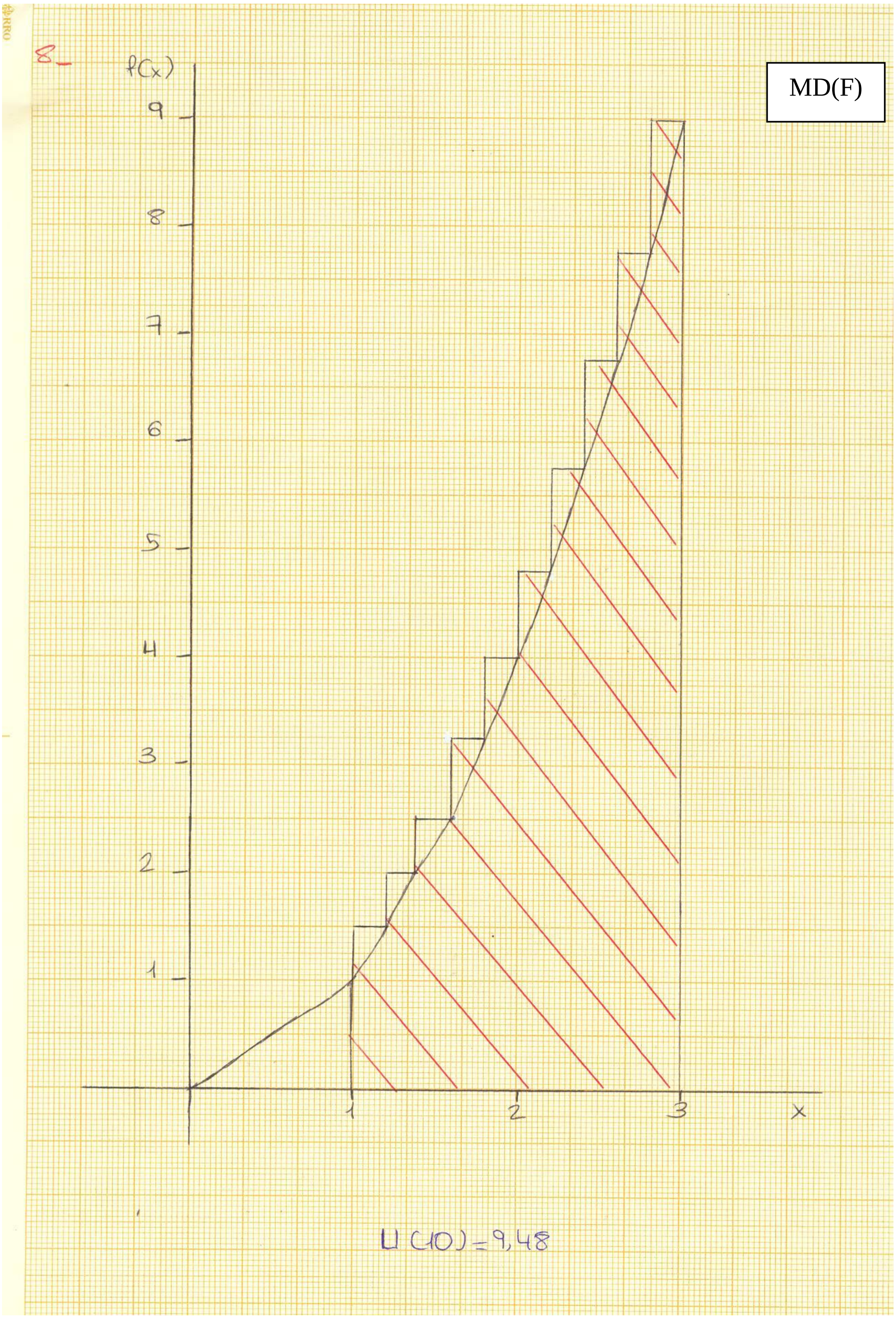
$= (2{,}25 \cdot 0{,}5) + (3{,}06 \cdot 0{,}5) + (5{,}06 \cdot 0{,}5) + (7{,}56 \cdot 0{,}5) = 8{,}96$

Recuerda a la suma superior de Darboux

$R(4) = 8{,}96$

MD(E)





MD(F)

5.- El conjunto P={1, 1'5, 2, 2'5, 3} del intervalo [1,3] es una partición de dicho intervalo.

El conjunto T={1'25, 1'75, 2'25, 2'75} también es una partición del intervalo [1,3] pero como T⊂P, es una partición más fina.

MD(G)

6- El resultado del área del ejercicio 1 está entre el valor más alto de las sumas inferiores y el más bajo de las superiores

$$L(4) < A < R(4)$$

$$6'75 < A < 8{,}96$$

Un valor posible podría ser 8 (valor medio).

7- El intervalo [1,3] se ha dividido anteriormente en 4 subintervalos.

Sí se puede dividir en 10 subintervalos de igual amplitud.

$\dfrac{3-1}{10} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$ es la amplitud de cada subintervalo.

P_{10} = {1, 1'2, 1'4, 1'6, 1'8, 2, 2'2, 2'4, 2'6, 2'8, 3}

T = {1'1, 1'3, 1'5, 1'7, 1'9, 2'1, 2'3, 2'5, 2'7, 2'9}

8-

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
f(x)	1	1,44	1,96	2,56	,24	4	4,84	5,76	6,76	7,84	9

$L(10) = 1\,(1{,}2-1) + 1{,}44\,(1{,}4-1{,}2) + 1{,}96\,(1{,}6-1{,}4) + 2{,}56\,(1{,}8-1{,}6) +$

$3{,}24\,(2-1{,}8) + 4\,(2{,}2-2) + 4{,}84\,(2{,}4-2{,}2) + 5{,}76\,(2{,}6-2{,}4) +$

$6{,}76\,(2{,}8-2{,}6) + 7{,}84\,(3-2{,}8) = (1\cdot 0{,}2) + (1{,}44\cdot 0{,}2) +$

$(1{,}96\cdot 0{,}2) + (2{,}56\cdot 0{,}2) + (3{,}24\cdot 0{,}2) + (4\cdot 0{,}2) + (4{,}84\cdot 0{,}2) +$

$(5{,}76\cdot 0{,}2) + (6{,}76\cdot 0{,}2) + (7{,}84\cdot 0{,}2) = 7{,}88$

$U(10) = 1,44(1,2-1) + 1,96(1,4-1,2) + 2,56(1,6-1,4) + 3,24(1,8-1,6) +$
$4(2-1,8) + 4,84(2,2-2) + 5,76(2,4-2,2) + 6,76(2,6-2,4) +$
$7,84(2,8-2,6) + 9(3-2,8) = (1,44\cdot 0,2) + (1,96\cdot 0,2) + (2,56\cdot 0,2) +$
$(3,24\cdot 0,2) + (4\cdot 0,2) + (4,84\cdot 0,2) + (5,76\cdot 0,2) + (6,76\cdot 0,2) +$
$(7,84\cdot 0,2) + (9\cdot 0,2) = 9,48.$

x	1	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3
f(x)	1	1,21	1,69	2,25	2,89	3,61	4,41	5,29	6,25	7,29	8,41	9

MD(H)

$R(10) = 1,21(1,2-1) + 1,69(1,4-1,2) + 2,25(1,6-1,4) + 2,89(1,8-1,6) +$
$3,61(2-1,8) + 4,41(2,2-2) + 5,29(2,4-2,2) + 6,25(2,6-2,4) +$
$7,29(2,8-2,6) + 8,41(3-2,8) = (1,21\cdot 0,2) + (1,69\cdot 0,2) +$
$(2,25\cdot 0,2) + (2,89\cdot 0,2) + (3,61\cdot 0,2) + (4,41\cdot 0,2) + (5,29\cdot 0,2) +$
$(6,25\cdot 0,2) + (7,29\cdot 0,2) + (8,41\cdot 0,2) = 8,66$

El posible valor 8 del ejercicio 6 no creo que sea, será un valor mayor.

9_ $U(10) = 9,48$ $\quad L(4) = 6,75$ $\quad R(4) = 8,96$

$U(4) = 10,75$ $\quad L(10) = 7,88$ $\quad R(10) = 8,66$

$$L(4) < L(10) < R(10) < R(4) < U(10) < U(4)$$

$$6,75 < 7,88 < 8,66 < 8,96 < 9,48 < 10,75$$

El área A que pretendemos calcular está entre los siguientes valores:

$$L(10) < A < R(10)$$

$$7,88 < A < 8,66$$

10_ Amplitud $= \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

No es fácil encontrar una fórmula para L(n), R(n) y U(n) ya que es la suma de unos productos. Sin embargo, se podría calcular por medio de un sumatorio.

$L(n) = \sum^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$

$U(n) = \sum^{n} f(x_i+1)(x_{i+1} - x_i)$

MD(I)

11_ $U(4) - L(4) = 10{,}75 - 6{,}75 = 4$

$U(10) - L(10) = 9{,}48 - 7{,}88 = 1{,}6$

$U(n) - L(n) \rightarrow$ el resultado es cero ya que la recta se va haciendo cada vez más pequeña.

$U(n) - L(n) \simeq 0 \rightarrow$ ambas son casi iguales. Darboux dice que para que una función sea integrable el extremo superior de las sumas inferiores debe ser igual al extremo inferior de las superiores. Entonces $f(x)$ es integrable.

12_ Aunque los subintervalos sean de diferente amplitud al ser 1000 serían muy pequeños, por tanto, los rectángulos se aproximarían al borde de la curva y el valor del resultado se acercaría obligatoriamente a "A".

13_ Podríamos hallar el límite y el resultado sería 0, sin embargo, no se podría calcular por medio de una fórmula ya que no podríamos obtener todos los intervalos al ser distintos.

14_ $L(m) < A < U(m)$

15_ $L(m) < s < A < S < U(m)$

16_ Si $s = S$, por tanto, $s = S = A$. Los tres valores serían iguales. Recuerda a la integral de Darboux, el valor del área bajo la curva $f(x)$ en un intervalo cerrado.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

17_ $A = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8'\widehat{666}$

10 - La amplitud de cada subintervalo valdrá $\frac{2}{n}$

- No creo que sea fácil encontrar una fórmula para $L(n)$, $R(n)$ y $U(n)$ ya que hay que trabajar con términos medios de cada subintervalo $\frac{2}{n}$ por lo que sería una ardua tarea trabajar con tanta fracción, se hallaría más fácilmente dando un valor a "n".

CB(A)

11 - $U(4)-L(4)$?; $U(10)-L(10)$; $U(n)-L(n) \to n=\infty$?

- $\boxed{U(4)-L(4)} \Rightarrow 10'75 - 6'75 \Rightarrow \boxed{4}$

- $\boxed{U(10)-L(10)} \Rightarrow 9'48 - 7'88 \Rightarrow \boxed{1'6}$

- $\boxed{U(n)-L(n)}_{n\to\infty} \Rightarrow \infty - \infty \simeq \boxed{0}$ si "n" tiende a infinito el resultado de esa resta será cero o próximo

- Si, esto nos garantiza que la función $\boxed{f(x)=x^2}$ es integrable de Darboux ya que, una condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea integrable de Darboux en $[a,b]$ es para cualquier partición tal que la diferencia entre la suma superior e inferior se aproxima a cero más que cualquier número prefijado.

12 $L(1000)$ y $U(1000)$ del intervalo $[1,3]$, teniendo en cuenta que dicho intervalo ha sido dividido en 1000 partes irregulares ya que son de diferente amplitud, se aproximarán a "A" pero no con la misma exactitud que lo haría si dichos subintervalos fueran de igual amplitud. No obligatoriamente $L(1000)$ y $U(1000)$ irregulares van a aproximarse a "A", precisamente por dicha irregularidad. Como anteriormente he mencionado si el intervalo $[1,3]$ estuviese dividido en 1000 subintervalos regulares, de igual amplitud, las sumas de $L(1000)$ y $U(1000)$ serían mucho más fiables que las que ya tenemos calculadas en ejercicios anteriores $[L(4), U(4), L(10), U(10)]$.

13 No se podrán tomar límites ya que al estar dividido en "m" subintervalos, los cuales son irregulares, no se puede calcular $U(m)$ o $L(m)$ cuando "m" tiende a infinito. La matemática es una ciencia exacta en la que hay que seguir rigurosamente una serie de normas y reglas que no admiten modificaciones ni aproximaciones por lo tanto, debido a la irregularidad de los subintervalos no se puede calcular de forma matemática cuando "m" tiende a infinito.

16 • Si "s" y "S" coinciden la integral es nula por lo tanto no hay "A", deja de existir ya que al coincidir "s" y "S" en un punto "A" se reduce a nada y desaparece dicha área ("A").
• El concepto matemático al que recurro para la anterior afirmación es la primera propiedad de la integral definida, la cual enuncia que "Si los límites de integración coinciden, la integral es nula."
• La notación matemática que designa "A", sin tener en cuenta lo que ocurre cuando "s" y "S" coinciden, es la integral definida ya que "A" está definida entre dos puntos del eje de abscisas y una parábola y la función esencial o principal de las integrales es calcular áreas comprendidas entre curvas.

CB(B)

17
• $\text{"A"} \Rightarrow \text{ÁREA} \Rightarrow \int_1^3 f(x)\,dx \Rightarrow \int_1^3 (x^2)\,dx \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 \Rightarrow \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} \Rightarrow$

$$\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{26}{3} \simeq \boxed{8'\widehat{6}\ u^2}$$

$$\boxed{\text{"A"} \Rightarrow 8'\widehat{6}\ u^2}$$

• Me he apoyado en el resultado del ejercicio 6 ya que considero que es la forma más fiable y rápida para calcular "A".

18 • Sí, considero realmente excesivo el tiempo empleado para calcular el área "A" ya que con una simple y rápida integral definida hubiésemos llegado al resultado final mucho más deprisa y de forma fiable. Por otra parte, opino que estos ejercicios me han servido para reforzar y afianzar conceptos que anteriormente no tenía consolidados dentro de mis conocimientos matemáticos, por lo tanto, para mí han sido útiles.
• Sí, creo que las nuevas tecnologías pueden ayudar a efectuar estos cálculos tan laboriosos de forma más sencilla mediante programas especializados en matemáticas.

DC

10. - Cualquier nº. ~~que no tenga decimales~~.
Se pueden hacer todos los subintervalos que quieras.

- $U(n) = a\left((1+1a)^2+(1+2a)^2+(1+3a)^2 \ldots + (1+na)^2\right)$

a = amplitud del intervalo $L(n) = a\left(1+(1+2a)^2+(1+3a)^2 \ldots +(1+na)^2\right)$

$a = \frac{2}{n}$

$R(n) = a\left(\left(1+\left(a-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(1+\left(2a-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \ldots \left(1+\left(na-\frac{a}{2}\right)\right)^2\right)$

11.
- $U(4) - L(4)$ $\quad$ $U(10) - L(10)$

$10{,}25 - 10{,}125 = 0{,}125$ $\quad$ $9{,}48 - 9{,}392 = 0{,}088$

- $U(n) - L(n) = a^2 + 2a = \left(\frac{2}{n}\right)^2 + 2\cdot\frac{2}{n} = \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{4}{n}$ *

* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{4}{n} = 0$

12. Se aproximarían a A con mayor exactitud si los subintervalos fueran de la misma amplitud. Es una función continua por lo tanto no puede haber subintervalos de distinta amplitud.

13. Yo creo que no se pueden tomar subintervalos de distintas amplitudes, pero si se puede ~~no~~ podríamos calcular límites ya que ~~no~~ es lo mismo que lo anterior pero con m.

Ejer. nº 10

$L(n) = \frac{2}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + f\left(+2\cdot\frac{2}{n}\right)\right]$

$U(n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1} f\left(1+\frac{2}{n}i\right).$

TE

$R(n) = \frac{2}{n}\sum\left(f\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}i\right)$

Gráficos K.2. Respuestas a las prácticas con lápiz y papel de la integral definida (Ciclo III).

ANEXO L (CAPÍTULO XI): TEXTO, PROGRAMA Y PRÁCTICAS CON DERIVE ***337***

L.1. PRÁCTICA CON DERIVE, CICLOS DE CONFIRMACIÓN 338

L.1.1. PROGRAMA FUENTE 339

L.1.2. TEXTO DE LA PRÁCTICA Y SOLUCIÓN CON *DERIVE* 340

L.2. PRÁCTICA CON DERIVE, CICLOS DE CONSOLIDACIÓN 354

L.2.1. PROGRAMA FUENTE 355

L.2.2. TEXTO DE LA PRÁCTICA Y SOLUCIÓN CON *DERIVE* 356

L.2.3. INTEGRALES INDEFINIDAS..370

L.3. PRÁCTICA CON DERIVE, CICLO DE CIERRE.................................372

L.3.1. PROGRAMA FUENTE 373

L.3.2. TEXTO DE LA PRÁCTICA Y SOLUCIÓN CON *DERIVE* 376

ANEXO L (CAPÍTULO XI): TEXTO, PROGRAMA Y PRÁCTICAS CON DERIVE

Incluimos en el presente anexo, por cada uno de los ciclos agrupados, el *programa fuente* elaborado por el profesor investigador así como el texto de la práctica informática del área y la integral entregado a los estudiantes y la solución a dicha práctica realizada con *DERIVE.*

Además, en los dos ciclos de consolidación se resolvieron con *DERIVE* varias integrales indefinidas, las cuales incluimos junto con sus soluciones, en este anexo. Confirmamos que no se resolvieron todas las integrales en cada uno de los ciclos.

L.1. PRÁCTICA CON DERIVE, CICLOS DE CONFIRMACIÓN

La primera práctica de la integral realizada con el programa de cálculo simbólico *DERIVE*, en el contexto de nuestra investigación, se llevó a cabo en el aula de informática del IES "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos el jueves día 20 de enero de 2005 y en ella participaron dieciséis alumnos. La segunda práctica con las mismas características de la anterior la realizaron diecisiete estudiantes del mismo centro en el mismo aula de informática el lunes 23 de enero de 2006. Ambas prácticas corresponden con los ciclos de confirmación (II y III) de nuestra investigación.

A cada uno de los dos grupos se les entregó el mismo cuadernillo con idénticas instrucciones, eso sí, el profesor investigador con la experiencia adquirida del curso 2004-2005 fue más eficiente en el curso 2005-2006 al utilizar los recursos disponibles.

Así pues, en el presente epígrafe, para los dos ciclos de confirmación incluimos los siguientes apartados:

- **Programa Fuente:** Fichero elaborado por el profesor investigador con el objetivo de que los alumnos comprendan mejor los diferentes conceptos de la integral.
- **Texto de la práctica y solución con *DERIVE:*** La entrega del cuadernillo de trabajo a los alumnos[1] se compone de diferentes cuestiones o ítems[2]. En el presente anexo el texto, las instrucciones de manejo del PCS[3] y los ítems que le acompañan las escribimos en recuadros[4]. Las respuestas informáticas[5] vienen dadas por los correspondientes "códigos fuente" junto con las gráficas, si las hubiere, que se hayan generado[6].

[1] El cuadernillo de las prácticas con *DERIVE* se entregó a los alumnos de dos en dos, salvo que el total de estudiantes que realizaron la práctica fuera impar.

[2] Los ítems los enumeramos correlativamente.

[3] PCS: Programa de cálculo simbólico, por extensión nos referimos a *DERIVE*.

[4] El criterio es, salvo que no haya confusión, cada ítem en un recuadro.

[5] Si una cuestión o ítem no tiene respuesta informática, no se incluye nada después de su enunciado.

[6] Hemos borrado, salvo en casos excepcionales, el texto "código máquina" por ser incomprensible y carecer de interés alguno en la presente investigación.

L.1.1. PROGRAMA FUENTE

#1: Fichero INTEG1.MTH

#2: $F(x) := x^2$

#3: $a := 1$

#4: $b := 3$

#5: $\xi(i,\ n) := a + \dfrac{(b - a)\cdot i}{n}$

#6: $\mathrm{VP}(n) := \mathrm{VECTOR}(\mathrm{IF}(|F(\xi(i,\ n))| > |F(\xi(i - 1,\ n))|,\ i,\ i - 1),\ i,\ 1,\ n)$

#7: $\mathrm{V}(n) := \mathrm{APPEND}([0],\ \mathrm{VP}(n))$

#8: $\mathrm{GVH}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \xi(i,\ n) & F(\xi(i,\ n)) \\ \xi(i + 1,\ n) & F(\xi(i,\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$

#9: $\mathrm{GVV}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \xi(i,\ n) & 0 \\ \xi(i,\ n) & F(\xi((\mathrm{V}(n))_{i + 1},\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$

#10: $\mathrm{GVP}(n) := \mathrm{APPEND}\left(\mathrm{GVH}(n),\ \mathrm{GVV}(n),\ \begin{bmatrix} \xi(n,\ n) & 0 \\ \xi(n,\ n) & F(\xi(n - 1,\ n)) \end{bmatrix}\right)$

#11: $\mathrm{GLH}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \xi(i,\ n) & F(\xi(i + 1,\ n)) \\ \xi(i + 1,\ n) & F(\xi(i + 1,\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$

#12: $\mathrm{VPL}(n) := \mathrm{VECTOR}(\mathrm{IF}(|F(\xi(i,\ n))| < |F(\xi(i + 1,\ n))|,\ i + 1,\ i),\ i,\ 1,\ n - 1)$

#13: $\mathrm{VL}(n) := \mathrm{APPEND}([1],\ \mathrm{VPL}(n))$

#14: $\mathrm{GLV}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \xi(i,\ n) & 0 \\ \xi(i,\ n) & F(\xi((\mathrm{VL}(n))_{i + 1},\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$

#15: $\mathrm{UGRAF}(n) := \mathrm{APPEND}\left(\mathrm{GLH}(n),\ \mathrm{GLV}(n),\ \begin{bmatrix} \xi(n,\ n) & 0 \\ \xi(n,\ n) & F(\xi(n,\ n)) \end{bmatrix}\right)$

#16: $\mathrm{LGRAF}(n) := \mathrm{APPEND}\left(\mathrm{GVH}(n),\ \mathrm{GVV}(n),\ \begin{bmatrix} \xi(n,\ n) & 0 \\ \xi(n,\ n) & F(\xi(n - 1,\ n)) \end{bmatrix}\right)$

#17: $\mathrm{L}(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} \dfrac{F(\xi(i,\ n))\cdot(b - a)}{n}$

#18: $\mathrm{U}(n) := \sum_{i=1}^{n} \dfrac{F(\xi(i,\ n))\cdot(b - a)}{n}$

#19: $\mathrm{L\_F}(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} F(\xi(i,\ n))\cdot \mathrm{CHI}(\xi(i,\ n),\ x,\ \xi(i + 1,\ n))$

#20: SUMA_INFERIOR(n) := PlotInt(L_F(n), x, 1, 3)

#21: $\mathrm{U\_F}(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} F(\xi(i + 1,\ n))\cdot \mathrm{CHI}(\xi(i,\ n),\ x,\ \xi(i + 1,\ n))$

#22: SUMA_SUPERIOR(n) := PlotInt(U_F(n), x, 1, 3)

#23: RECTANGULOS_INFERIORES(n) := LGRAF(n)

#24: RECTANGULOS_SUPERIORES(n) := UGRAF(n)

#25: VALOR_INFERIOR(n) := L(n)

#26: VALOR_SUPERIOR(n) := U(n)

#27: $\mathrm{VALOR\_MEDIO}(n) := \dfrac{\mathrm{VALOR\_INFERIOR}(n) + \mathrm{VALOR\_SUPERIOR}(n)}{2}$

#28: [VALOR_INFERIOR(n), VALOR_MEDIO(n), VALOR_SUPERIOR(n)]

#29: COMPARA(n) := [VALOR_INFERIOR(n), VALOR_MEDIO(n), VALOR_SUPERIOR(n)]

L.1.2. TEXTO DE LA PRÁCTICA Y SOLUCIÓN CON *DERIVE*

PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA CON *DERIVE*

Cursos 2004-2005 y 2005-2006, ciclos de confirmación (II y III)

OBJETIVO: Estas prácticas permiten que el alumno, con ayuda de DERIVE 5, consolide los siguientes conceptos: área bajo una curva, sumas inferior y superior de Darboux, integral definida, teorema fundamental de cálculo integral y área comprendida entre dos curvas.

NORMAS QUE DEBEN TENERSE PRESENTES:

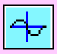
E) Posiciona el cursor en el icono **DERIVE**.

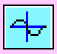
F) Haz doble clic con el botón izquierdo del ratón en el icono **DERIVE** pulsa **SÍ**.

G) Abre el archivo **D\integral\integral\práctica1.3**

H) Sigue las explicaciones del profesor.

1.- Representa la función f(x) = x^2.

Escribe F(x):=x^2, posiciona el cursor en  y pulsa el botón izquierdo, ve al icono  y pulsa, posiciónate en Seleccionar/Rango de la gráfica, pulsa.

Escribe en Horizontal – 2, 8, 10 y Vertical – 4, 10, 14; pulsa SÍ. Selecciona y pulsa 

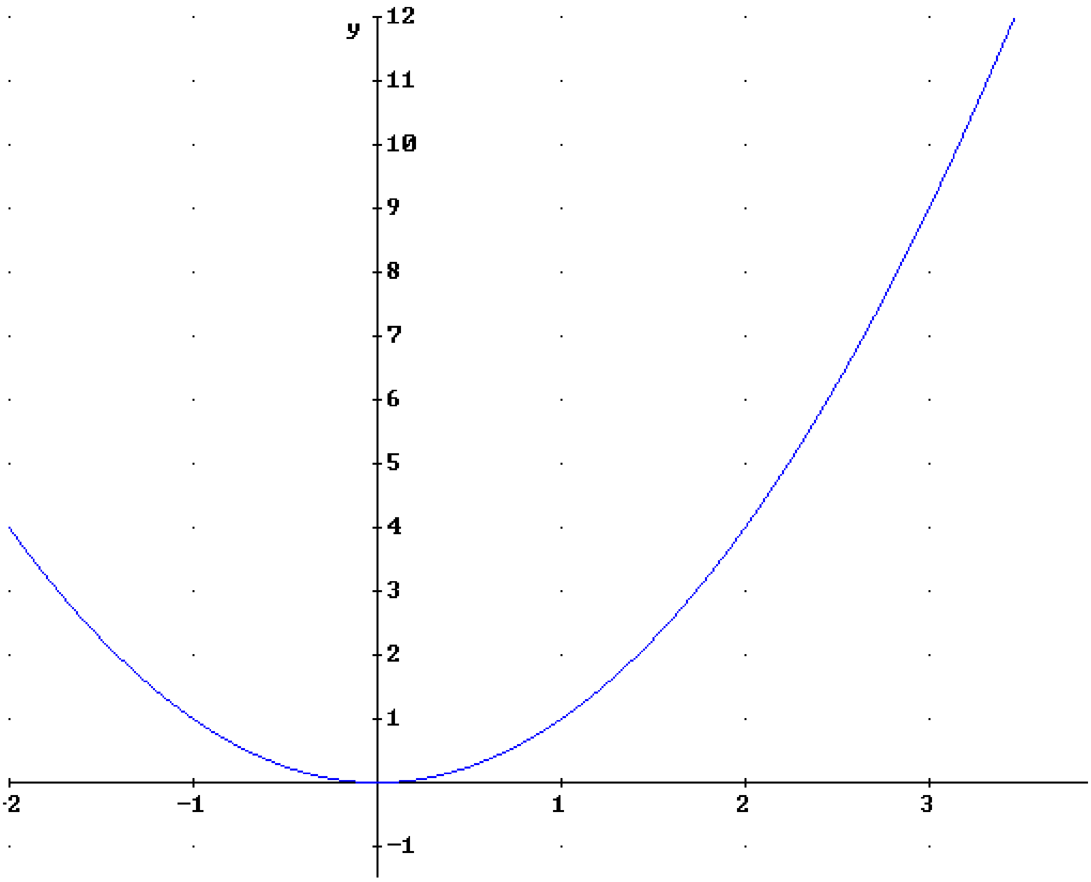
¿Qué ocurre? ....

Posiciónate en Opciones/Pantalla/Puntos, pulsa; selecciona Unir/SÍ/Aceptar, pulsa.

Copia  y pega  y 

#30: $F(x) := x^2$

#31: x^2



2.- Representa, de nuevo, la función anterior y une los siguientes puntos: (1,0); (1,f(1)); (4/3,f(1)); (4/3,f(4/3)); (5/3,f(4/3)); (5/3,f(5/3)); (2,f(5/3)); (2,f(2)); (7/3,f(2)); (7/3,f(7/3)); (8/3,f(7/3)); (8/3,f(8/3)); (3,f(8/3)); (3,0) y (1,0).

2.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

2.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Observa que el intervalo [1,3] se ha dividido en seis subintervalos de igual amplitud (3-1)/6 = 1/3. Sigamos con la instrucciones del programa:

Escribe RECTANGULOS_INFERIORES(6). Pulsa , pulsa y pulsa

¿Qué ocurre? ....

Copia y pega y

Escribe SUMA_INFERIOR(6). Pulsa , pulsa y pulsa

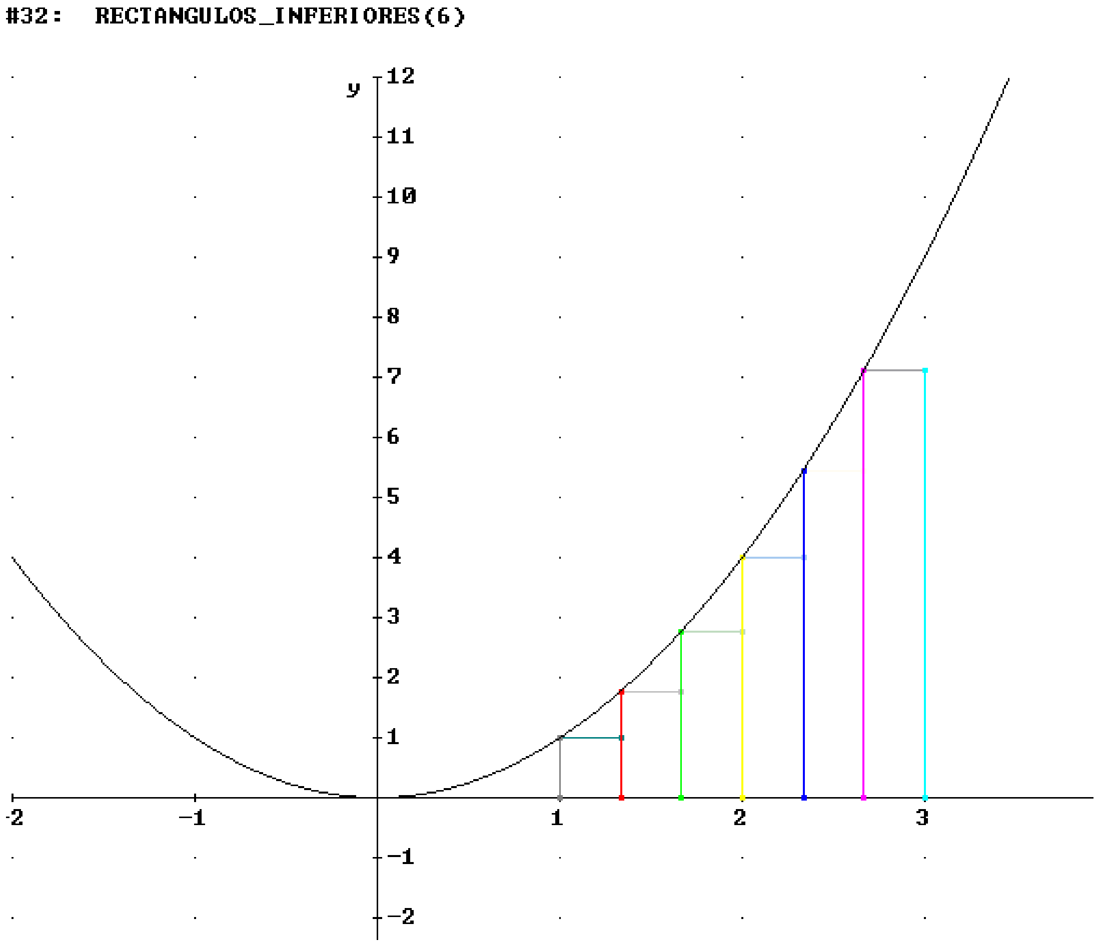
¿Qué ocurre? ....

Pulsa en el icono (copia ventana gráfica) . Pulsa en el icono superior derecho

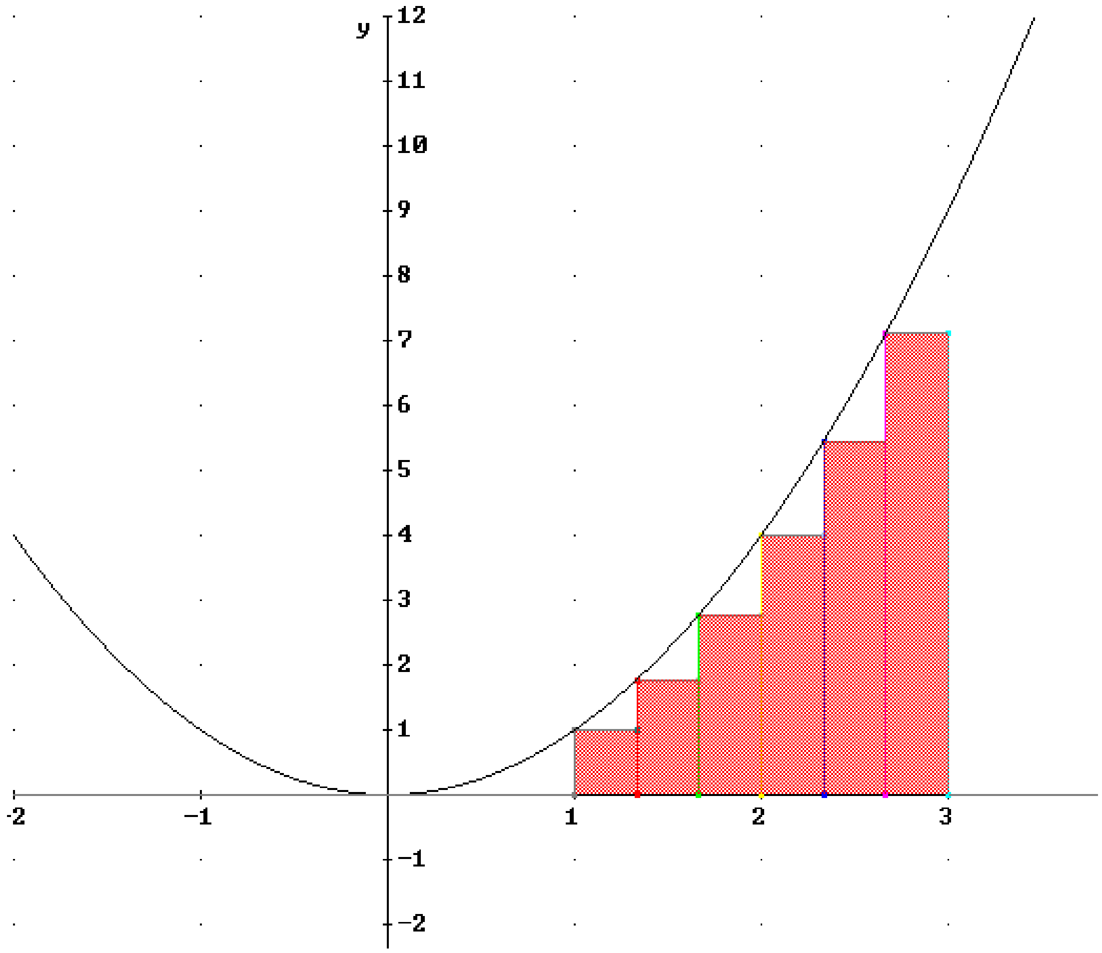
Pulsa en Edición, selecciona PEGAR.

Escribe VALOR_INFERIOR(6). Pulsa y pulsa

¿Qué has obtenido? ....



```
#33:   SUMA_INFERIOR(6)
```




```
#34:   VALOR_INFERIOR(6)
```

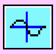
$$\#35: \quad \frac{199}{27}$$

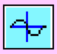
```
#36:                                           7.370370370
```

3.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1,0); (1,f(4/3)); (4/3,f(4/3)); (4/3,f(5/3)); (5/3,f(5/3)); (5/3,f(2)); (2,f(2)); (2,f(7/3)); (7/3,f(7/3)); (7/3,f(8/3)); (8/3,f(8/3)); (8/3,f(3)); (3,f(3)); (3,0) y (1,0).

3.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

3.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Escribe F(x). Pulsa , pulsa 

Ve a Editar/Borrar todas las gráficas y pulsa. Pulsa 

Pulsa en el icono superior derecho 

Sigue los pasos del punto 2 escribiendo:

RECTANGULOS_SUPERIORES(6)

SUMA_SUPERIOR(6)

VALOR_SUPERIOR(6)

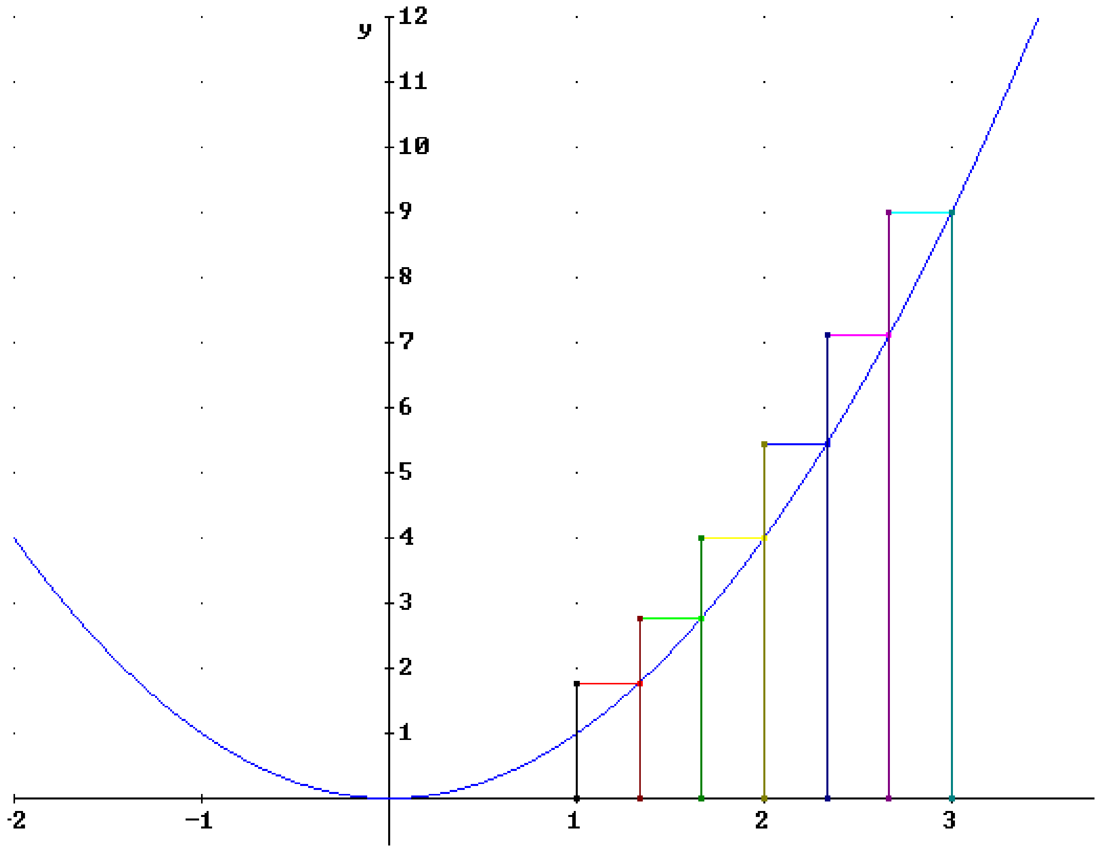
¿Qué has obtenido? ....

Compara, visualmente, las dos gráficas obtenidas.

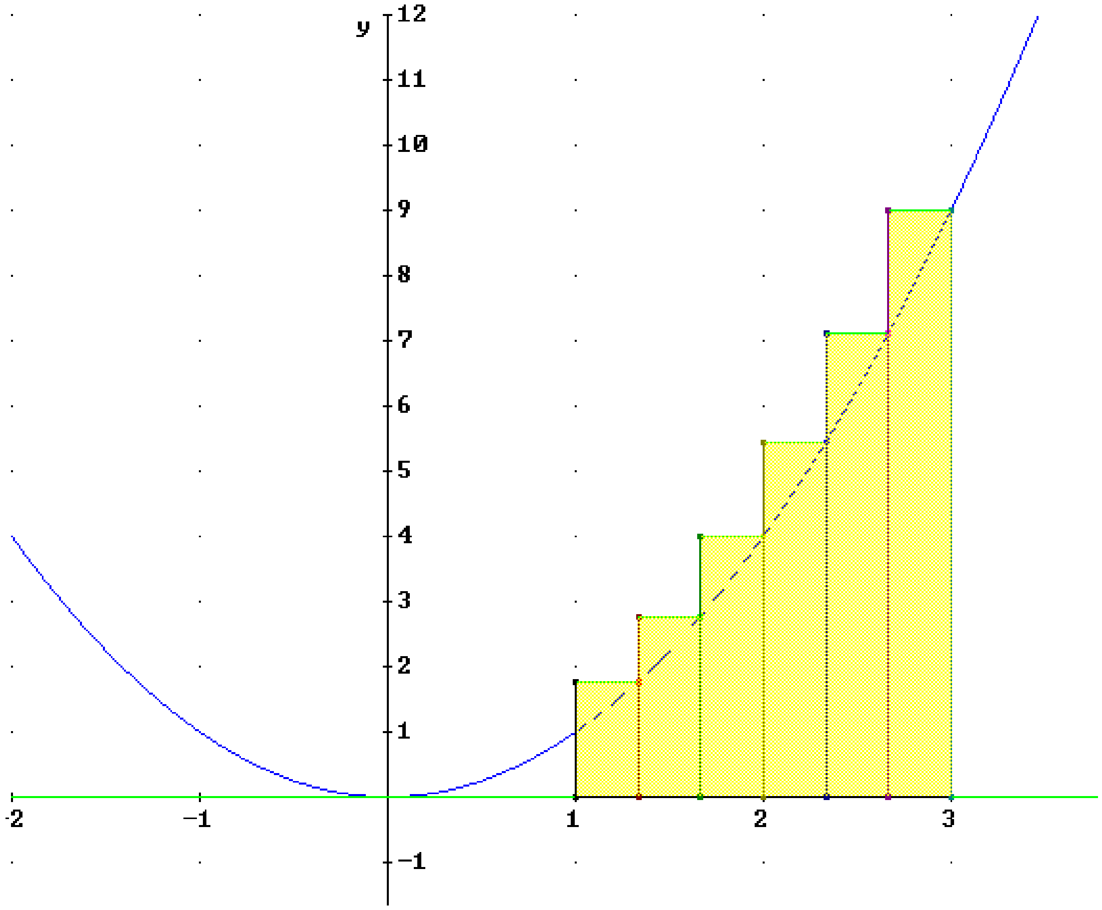
#37: F(x)

#38: x^2

#39: RECTANGULOS_SUPERIORES(6)



#40: SUMA_SUPERIOR(6)



#41: VALOR_SUPERIOR(6)

#42: $\frac{271}{27}$

#43: 10.03703703

4.- Se puede dividir el intervalo [1,3] en 12 subintervalos de igual amplitud, es decir, (3-1)/12=1/6.

Siguiendo los pasos anteriores, pero más resumido, haz:

Escribe [F(x), RECTÁNGULOS_SUPERIORES(12), SUMA_SUPERIOR(12),
RECTÁNGULOS_INFERIORES(12), SUMA_INFERIOR(12)]

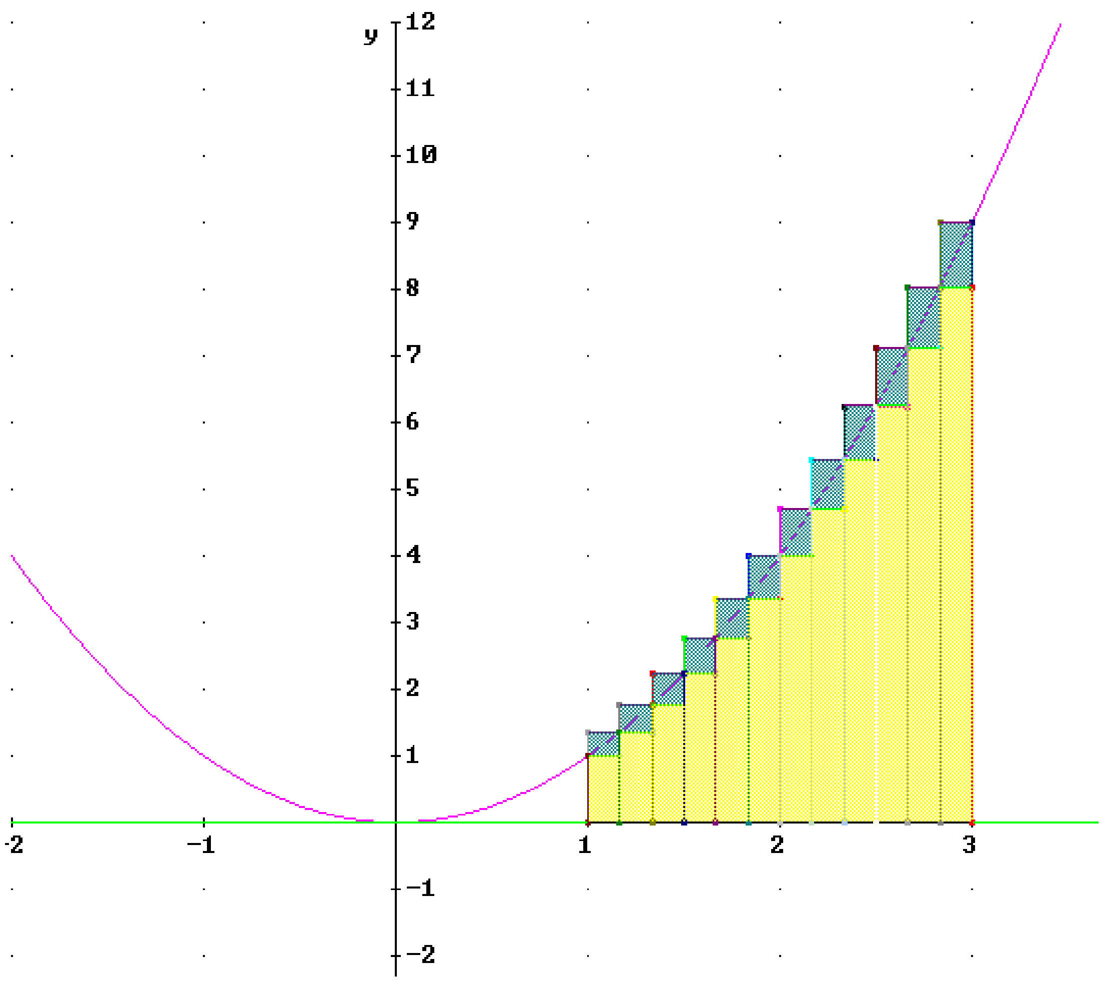
Pulsa , pulsa . Ve a Editar/Borrar todas las gráficas y pulsa. Pulsa

Pulsa en el icono (copia ventana gráfica) . Pulsa en el icono superior derecho

Pulsa en Edición, selecciona PEGAR.

¿Qué consideras que es la suma de las áreas de los rectángulos superiores y de los más pequeños? ....

#44: [F(x), RECTANGULOS_SUPERIORES(12), SUMA_SUPERIOR(12), RECTANGULOS_INFERIORES(12), SUMA_INFERIOR(12)]



5.- ¿Cuánto crees que vale el área de la parte coloreada que contiene la curva?

Supongamos que es la semisuma de los valores inferior y superior para n = 12

Escribe VALOR_MEDIO(n):=(VALOR_INFERIOR(n)+VALOR_SUPERIOR(n))/2, pulsa

Escribe VALOR_MEDIO(12). Pulsa y pulsa

¿Crees que ese será el valor? Razona la respuesta ....

#45: $\text{VALOR\_MEDIO}(n) := \dfrac{\text{VALOR\_INFERIOR}(n) + \text{VALOR\_SUPERIOR}(n)}{2}$

#46: $\dfrac{2\cdot(13\cdot n^2 + 2)}{3\cdot n^2}$

#47: VALOR_MEDIO(12)

#48: $\dfrac{937}{108}$

#49: 8.675925925

6.- Intenta encontrar una fórmula para VALOR_INFERIOR(n), VALOR_MEDIO(n) y VALOR_SUPERIOR(n) siendo "n" cualquier número natural y todos los subintervalos de igual amplitud.

Observa que la amplitud de cada subintervalo es 2/n

Escribe [VALOR_INFERIOR(n), VALOR_MEDIO(n), VALOR_SUPERIOR(n)], pulsa

7.- ¿Qué ocurre con VALOR_INFERIOR(n), VALOR_MEDIO(n) y VALOR_SUPERIOR(n) si "n" tiende a infinito?

¿Dónde crees que se encontrará el valor del área "A"?

¿A qué tiende la amplitud de cada subintervalo cuando n tiende a infinito?

Pulsa en Cálculo/límites. Pon el cursor en Punto 0.

Selecciona ∞ (abajo derecha), pulsa Simplificar. Escribe 26/3, pulsa

Compara este valor con el obtenido en el punto 5

Si ahora no hemos tomado el extremo superior de los valores inferiores (en la teoría sumas inferiores) ni el extremo inferior de los valores superiores (en la teoría sumas superiores)

¿Por qué se da esta circunstancia?...

¿Crees que es equivalente lo que acabamos de hacer a considerar el extremo superior de los valores inferiores (integral inferior) y el extremo inferior de los valores superiores (integral superior)? ....

#50: [VALOR_INFERIOR(N), VALOR_MEDIO(N), VALOR_SUPERIOR(N)]

#51: $$\left[\frac{2\cdot(13\cdot N^2 - 12\cdot N + 2)}{3\cdot N^2}, \frac{2\cdot(13\cdot N^2 + 2)}{3\cdot N^2}, \frac{2\cdot(13\cdot N^2 + 12\cdot N + 2)}{3\cdot N^2}\right]$$

#52: $$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{2\cdot(13\cdot N^2 - 12\cdot N + 2)}{3\cdot N^2}, \frac{2\cdot(13\cdot N^2 + 2)}{3\cdot N^2}, \frac{2\cdot(13\cdot N^2 + 12\cdot N + 2)}{3\cdot N^2}\right]$$

#53: $$\left[\frac{26}{3}, \frac{26}{3}, \frac{26}{3}\right]$$

#54: 8.666666666

8.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en 1000 subintervalos, <u>no todos de la misma amplitud</u>, si calculamos el valor inferior y el valor superior para esos 1000 subintervalos, con otro algoritmo distinto a los anteriores, llamémoslos L(1000) y U(1000) respectivamente

¿Obligatoriamente esos valores se aproximarán a "A"? ....

Dibuja tal circunstancia ....

9.- Imagina que el intervalo [1,3] se divide en "m" subintervos, de distintas amplitudes

¿Crees que ahora podemos tomar límites cuando m tiende a infinito como se hizo con VALOR_INFERIOR(n) y VALOR_SUPERIOR(n)? ....

10.- Si "m" es cualquier valor, imagina que "s" es el extremo superior de los VALOR_INFERIOR(m) y "S" es el extremo inferior de los VALOR_SUPERIOR(m).

Ordena de menor a mayor VALOR_INFERIOR(m), VALOR_SUPERIOR(m), "A", "s" y "S" ....

11.- ¿Pueden coincidir "s", "S" y "A"? ....

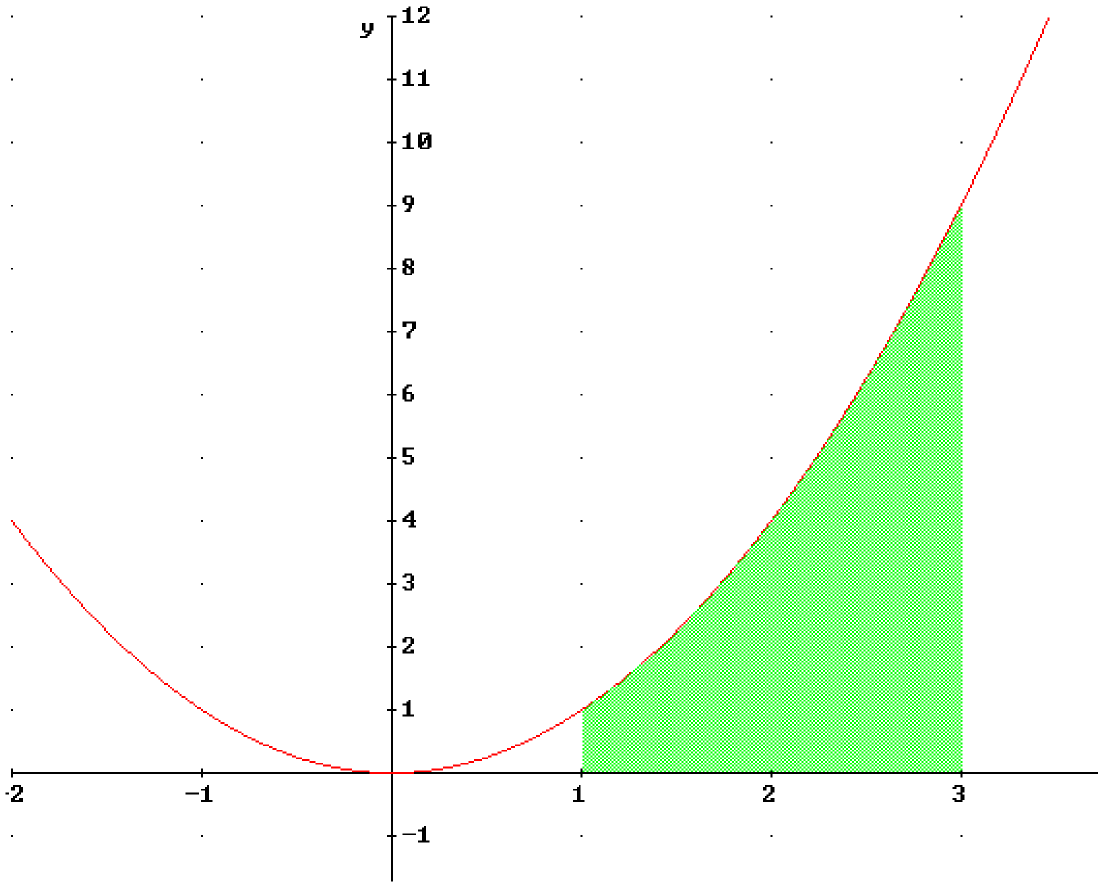
12.- Veamos gráficamente el área que pretendemos calcular.

Escribe PlotInt(F(x),x,1,3), pulsa , pulsa , borra todas las gráficas y pulsa

Copia y pega y .

#55: PlotInt(F(x), x, 1, 3)

#56: $$\left[x^2,\ y < x^2 \wedge 0 < y \wedge 1 \le x \le 3,\ x^2 < y \wedge y < 0 \wedge 1 \le x \le 3\right]$$



13.- Calculemos el valor de "A".

Pulsa el icono, introduce INT(F(x),x,1,3), pulsa

¿Coincide este valor con alguno de los obtenidos anteriormente? ....

#57: $\int_{1}^{3} F(x)\ dx$

#58: $\frac{26}{3}$

14.- Comparemos valores inferiores, medios, superiores e integral.

Escribe COMPARA(n):=[VALOR_INFERIOR(n),VALOR_MEDIO(n),VALOR_SUPERIOR(n)] pulsa

Escribe COMPARA(6), pulsa, pulsa. Escribe COMPARA(12), pulsa, pulsa

Fíjate en estos resultados y en el valor de la integral.

Para las sumas de Riemann, de los tres valores de COMPARA(n), ¿Qué valor escogerías?
....

#59: COMPARA(n) := [VALOR_INFERIOR(n), VALOR_MEDIO(n), VALOR_SUPERIOR(n)]

#60: $$\left[\frac{2\cdot(13\cdot n^2 - 12\cdot n + 2)}{3\cdot n^2}, \frac{2\cdot(13\cdot n^2 + 2)}{3\cdot n^2}, \frac{2\cdot(13\cdot n^2 + 12\cdot n + 2)}{3\cdot n^2}\right]$$

#61: COMPARA(6)

#62: $$\left[\frac{199}{27}, \frac{235}{27}, \frac{271}{27}\right]$$

#63: [7.370370370, 8.703703703, 10.03703703]

#64: COMPARA(12)

#65: $$\left[\frac{865}{108}, \frac{937}{108}, \frac{1009}{108}\right]$$

#66: [8.009259259, 8.675925925, 9.342592592]

CÁLCULO DE INTEGRAL DEFINIDA Y ÁREA COMPRENDIDA ENTRE UNA FUNCIÓN, EL EJE DE ABSCISAS Y DOS RECTAS VERTICALES

15.- Introduce la función $G(x)=x^3/2$, representa el área determinada por esta función, el eje de abscisas y las rectas x=–2 y x=2.

Calcula la integral de dicha función entre los extremos – 2 y 2.

Calcula el comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas x=–2 y x=2.

Escribe G(x):=(x^3)/2, pulsa , Escribe PlotInt(G(x),x,-2,2), pulsa

Escribe en Horizontal – 2, 8, 10 y Vertical – 4, 10, 14; pulsa SÍ.

Borra todas las gráficas y pulsa . Copia y pega y .

Escribe Int(G(x),x,-2,2), pulsa

Controlemos el valor absoluto de la función:

Escribe PlotInt(abs(G(x)),x,-2,2), pulsa y , borra todas las gráficas y pulsa

Copia y pega y . Escribe Int(abs(G(x)),x,-2,2), pulsa

¿El primer cálculo a quién corresponde? ....

¿El segundo cálculo a quién corresponde? ....

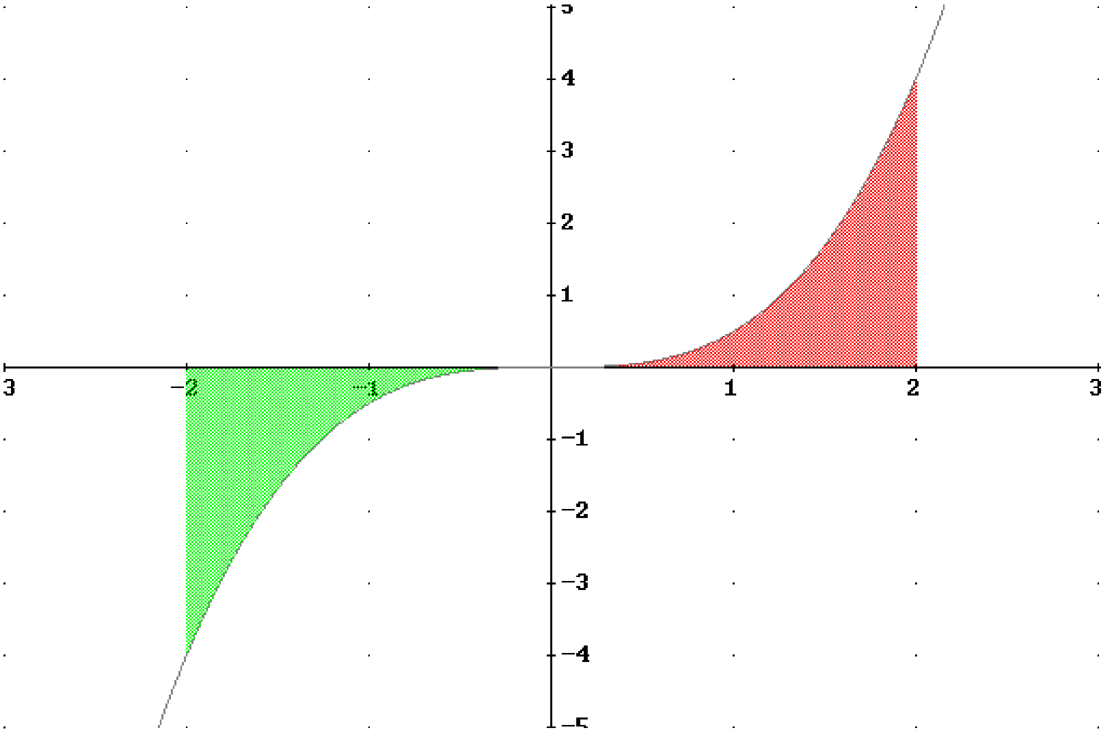
¿Qué debes hacer para calcular el área comprendida entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales? ....

#67: $G(x) := \frac{x^3}{2}$

#68: $$\frac{x^3}{2}$$

#69: PlotInt(G(x), x, -2, 2)

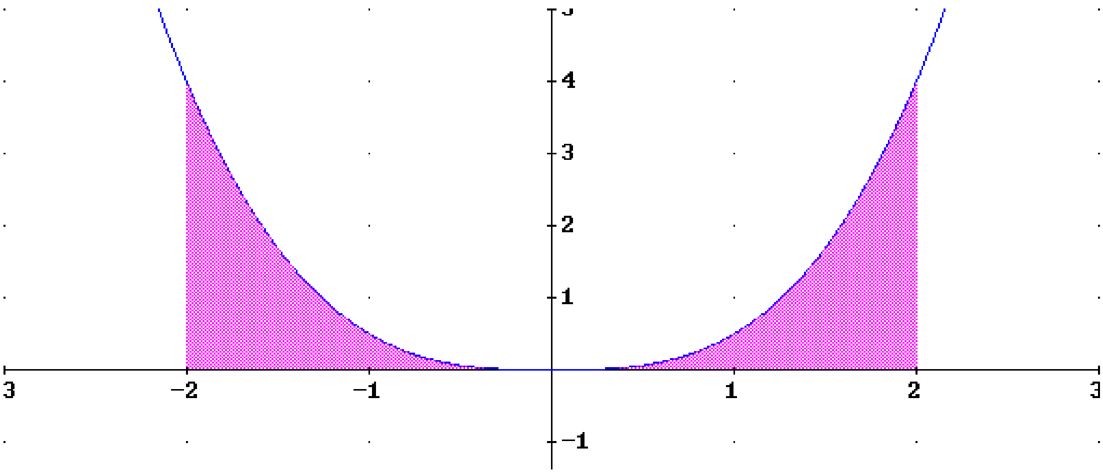
#70: $\left[\frac{x^3}{2},\ y < \frac{x^3}{2} \wedge 0 < y \wedge -2 \le x \le 2,\ \frac{x^3}{2} < y \wedge y < 0 \wedge -2 \le x \le 2\right]$



#71: $\int_{-2}^{2} G(x)\ dx$

#72: 0

#73: PlotInt(|G(x)|, x, -2, 2)



#74: $\int_{-2}^{2} |G(x)|\ dx$

#75: 4

CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

16.- Introduce las funciones P(x)=x^3+2 y Q(x)=2x^2+x. Representa y calcula el área comprendida entre estas dos curvas.

Escribe [P(x):=x^3+2, Q(x):=2x^2+x, H(x):=P(x)-Q(x)] pulsa

Escribe H(x)=0, pulsa . Pulsa sucesivamente Resolver/Expresión/Resolver y se obtienen los puntos buscados, éstos son: –1, 1 y 2 (ordenados de menor a mayor).

Recuerda que los puntos encontrados son los comunes a las dos curvas, es decir, las abscisas donde se cortan dichas curvas.

Pulsa . Escribe en Horizontal – 4, 10, 14 y Vertical – 2, 18, 20; pulsa SÍ.

Escribo AreaBetweenCurves(P(x),Q(x),x,-1,2), observa que tomo los puntos menor y mayor, pulso y , borra todas las gráficas y pulsa

Copia y pega y .Escribo Int(abs(H(x)),x,-1,2) y calculo .

Explica brevemente lo que acabamos de hacer: ....

17.- *¿Consideras que has comprendido mejor el concepto de integral de Darboux, integral de Riemann y el cálculo de áreas? ....*

18.- *¿Crees que puedes calcular alguna integral indefinida? ¿Cómo lo harías? ....*

19.- *Explica tus impresiones sobre esta práctica ....*

#76: $\left[P(x) := x^3 + 2,\ Q(x) := 2\cdot x^2 + x,\ H(x) := P(x) - Q(x)\right]$

#77: $\left[x^3 + 2,\ 2\cdot x^2 + x,\ x^3 - 2\cdot x^2 - x + 2\right]$

#78: $H(x) = 0$

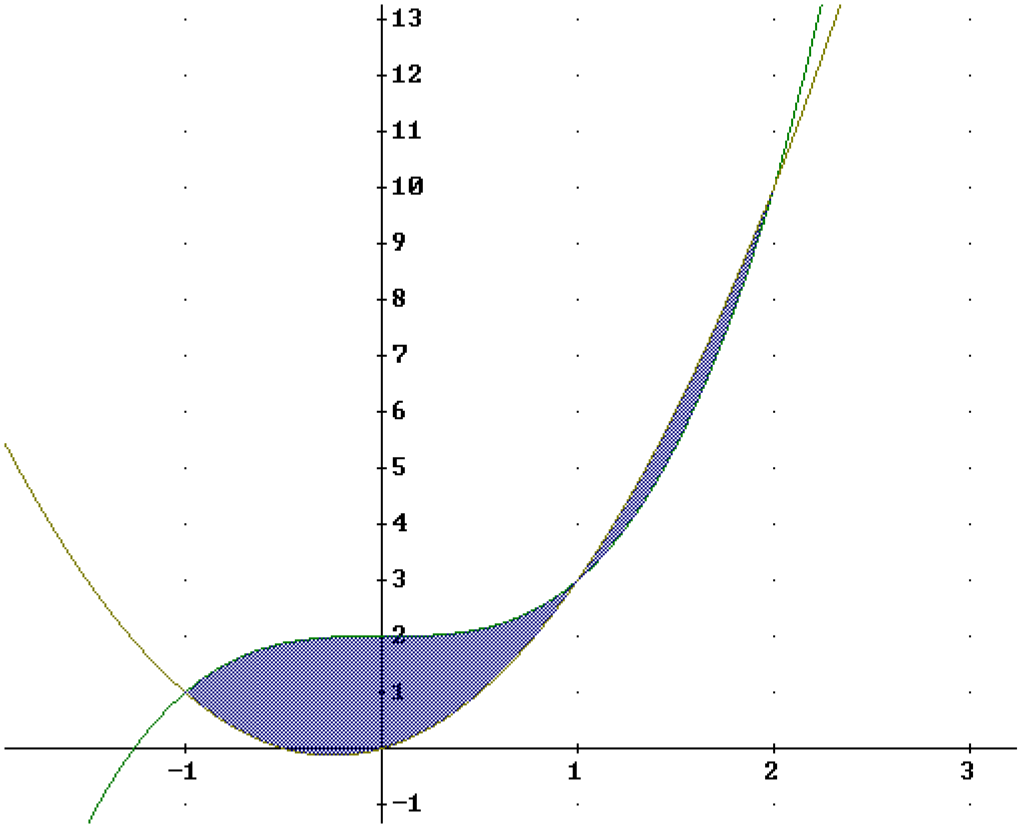
#79: $x^3 - 2\cdot x^2 - x + 2 = 0$

#80: $\mathrm{SOLVE}(x^3 - 2\cdot x^2 - x + 2 = 0,\ x)$

#81: $x = 2 \vee x = -1 \vee x = 1$

#82: AreaBetweenCurves(P(x), Q(x), x, -1, 2)

#83: $\left[x^3 + 2,\ 2\cdot x^2 + x,\ x \le 2 \wedge -1 \le x \wedge (y - x^3 - 2)\cdot(x\cdot(2\cdot x + 1) - y) > 0\right]$



#84: $\int_{-1}^{2} |H(X)| \, dX$

#85: $\frac{37}{12}$

#86: 3.083333333

L.2. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLOS DE CONSOLIDACIÓN

Las prácticas informáticas tercera y cuarta en la enseñanza-aprendizaje de la integral utilizando *DERIVE* se llevaron a cabo, en el aula de informática del instituto, el viernes 19 de enero de 2007 en la que participaron dieciocho alumnos y el martes 22 de enero de 2008 con diecisiete alumnos. Dichas prácticas corresponden a los ciclos de consolidación (IV y V).

A los dos grupos se les entregó el mismo cuadernillo de prácticas informáticas[7] que, partiendo de los cuadernillos de los dos ciclos anteriores, fue mejorado sustancialmente exponiendo cada cuestión con más claridad y dando más precisión a las instrucciones de manejo y utilización del PCS, además, las cuestiones planteadas pasaron de diecinueve de los ciclos de confirmación a diez de los ciclos de consolidación.

Las dos sesiones de los ciclos IV y V en el aula de informática pueden considerarse que fueron más dinámicas y enriquecedoras que las de los ciclos precedentes debido a la experiencia adquirida y acumulada por el profesor, tanto en las sesiones de la acción en el aula del grupo de los diferentes ciclos realizados hasta el momento actual, como las del aula de informática de años anteriores.

En el presente epígrafe, siguiendo el criterio anterior, para los dos ciclos de confirmación incluimos los siguientes apartados:

- **Programa Fuente:** Fichero modificado, mejorado y ampliado del anterior programa fuente, elaborado por el profesor investigador con el objetivo dar más fluidez y coherencia a las prácticas informáticas.
- **Texto de la práctica y solución con *DERIVE:*** En un recuadro incluimos la correspondiente cuestión con las instrucciones de *DERIVE* necesarias para resolverla con el ordenador; seguidamente, fuera del recuadro, vienen dadas las respuestas informáticas con los correspondientes "códigos fuente" junto con las gráficas, si las hubiere, que se hayan generado[8].
- **Integrales indefinidas:** Incluimos en este punto las integrales indefinidas calculadas con *DERIVE* en los ciclos IV y V.

[7] Los cuadernillos de ambos grupos coincidieron en los mismos ítems, aunque el de enero de 2008 tuvo pequeñas mejoras operativas respecto del cuadernillo de prácticas informáticas del año anterior.

[8] No hemos incluido, salvo en casos excepcionales, el texto "código máquina" por ser incomprensible y carecer de interés alguno en la presente investigación.

L.2.1. PROGRAMA FUENTE

#1: Fichero INTEG1.MTH

#2: $F(x) := x^2$

#3: $a := 1$

#4: $b := 3$

#5: $\xi(i, n) := a + \frac{(b - a)\cdot i}{n}$

#6: $UP(n) := VECTOR(IF(|F(\xi(i, n))| > |F(\xi(i - 1, n))|, i, i - 1), i, 1, n)$

#7: $V(n) := APPEND([0], UP(n))$

#8: $GUH(n) := VECTOR\left(\begin{bmatrix} \xi(i, n) & F(\xi(i, n)) \\ \xi(i + 1, n) & F(\xi(i, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$

#9: $GUV(n) := VECTOR\left(\begin{bmatrix} \xi(i, n) & 0 \\ \xi(i, n) & F(\xi((V(n))_{i + 1}, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$

#10: $GUP(n) := APPEND\left(GUH(n), GUV(n), \left[\begin{bmatrix} \xi(n, n) & 0 \\ \xi(n, n) & F(\xi(n - 1, n)) \end{bmatrix}\right]\right)$

#11: $GLH(n) := VECTOR\left(\begin{bmatrix} \xi(i, n) & F(\xi(i + 1, n)) \\ \xi(i + 1, n) & F(\xi(i + 1, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$

#12: $VPL(n) := VECTOR(IF(|F(\xi(i, n))| < |F(\xi(i + 1, n))|, i + 1, i), i, 1, n - 1)$

#13: $VL(n) := APPEND([1], VPL(n))$

#14: $GLV(n) := VECTOR\left(\begin{bmatrix} \xi(i, n) & 0 \\ \xi(i, n) & F(\xi((VL(n))_{i + 1}, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$

#15: $UGRAF(n) := APPEND\left(GLH(n), GLV(n), \left[\begin{bmatrix} \xi(n, n) & 0 \\ \xi(n, n) & F(\xi(n, n)) \end{bmatrix}\right]\right)$

#16: $LGRAF(n) := APPEND\left(GUH(n), GUV(n), \left[\begin{bmatrix} \xi(n, n) & 0 \\ \xi(n, n) & F(\xi(n - 1, n)) \end{bmatrix}\right]\right)$

#17: $L(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} \frac{F(\xi(i, n))\cdot(b - a)}{n}$

#18: $U(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{F(\xi(i, n))\cdot(b - a)}{n}$

#19: $L\_F(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} F(\xi(i, n))\cdot CHI(\xi(i, n), x, \xi(i + 1, n))$

#20: $U\_F(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} F(\xi(i + 1, n))\cdot CHI(\xi(i, n), x, \xi(i + 1, n))$

#21: SUMA_INFERIOR(n) := L(n)

#22: SUMA_SUPERIOR(n) := U(n)

#23: SUPERFICIE_INFERIOR(n) := [F(x), LGRAF(n), PlotInt(L_F(n), x, 1, 3)]

#24: SUPERFICIE_SUPERIOR(n) := [F(x), UGRAF(n), PlotInt(U_F(n), x, 1, 3)]

#25: $\alpha(i, n) := a + \frac{(b - a)\cdot i}{n} + \frac{b - a}{2\cdot n}$

$$\#26: \quad \mathrm{RLH}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \xi(i, n) & F(\alpha(i, n)) \\ \xi(i + 1, n) & F(\alpha(i, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$$

$$\#27: \quad \mathrm{RPL}(n) := \mathrm{VECTOR}(i, i, 1, n - 1)$$

$$\#28: \quad \mathrm{RL}(n) := \mathrm{APPEND}([0], \mathrm{RPL}(n))$$

$$\#29: \quad \mathrm{RLV}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \xi(i, n) & 0 \\ \xi(i, n) & F(\alpha((\mathrm{RL}(n))_{i + 1}, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$$

$$\#30: \quad \mathrm{ALTURA}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \alpha(i, n) & 0 \\ \alpha(i, n) & F(\alpha((\mathrm{RL}(n))_{i + 1}, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$$

$$\#31: \quad \mathrm{RGRAF}(n) := \mathrm{APPEND}\left(\mathrm{RLV}(n), \mathrm{RLH}(n), \mathrm{ALTURA}(n), \left[\begin{bmatrix} \xi(n, n) & 0 \\ \xi(n, n) & F(\alpha(n - 1, n)) \end{bmatrix}\right]\right)$$

$$\#32: \quad \mathrm{R\_F}(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} F(\alpha(i, n))\cdot \mathrm{CHI}(\xi(i, n), x, \xi(i + 1, n))$$

$$\#33: \quad \mathrm{SUPERFICIE\_RIEMANN}(n) := [F(x), \mathrm{RGRAF}(n), \mathrm{PlotInt}(\mathrm{R\_F}(n), x, 1, 3)]$$

$$\#34: \quad \mathrm{R}(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} \frac{F(\alpha(i, n))\cdot(b - a)}{n}$$

$$\#35: \quad \mathrm{SUMA\_RIEMANN}(n) := \mathrm{R}(n)$$

$$\#36: \quad \mathrm{COMPARA\_SUMAS}(n) := [\mathrm{SUMA\_INFERIOR}(n), \mathrm{SUMA\_RIEMANN}(n), \mathrm{SUMA\_SUPERIOR}(n)]$$

$$\#37: \quad \mathrm{COMPARA\_SUPERFICIES}(n) := [\mathrm{SUPERFICIE\_SUPERIOR}(n), \mathrm{SUPERFICIE\_RIEMANN}(n), \mathrm{SUPERFICIE\_INFERIOR}(n)]$$

L.2.2. TEXTO DE LA PRÁCTICA Y SOLUCIÓN CON *DERIVE*

PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA CON *DERIVE*

Cursos 2006-2007 y 2007-2008, ciclos de consolidación (IV y V)

OBJETIVO: Estas prácticas permiten que el alumno, con ayuda de DERIVE 5, consolide los siguientes conceptos: sumas inferior y superior de Darboux, suma de Riemann, área bajo una curva, integral definida, teorema fundamental de cálculo integral, regla de Barrow y área comprendida entre dos curvas.

NORMAS QUE DEBEN TENERSE PRESENTES:

A) Posiciona el cursor en el icono **DERIVE**.

B) Haz doble clic con el botón izquierdo del ratón en el icono **DERIVE** pulsa **SÍ**.

C) Abre el archivo **D\integral\integral\integral(programa)**.

D) Sigue las explicaciones del profesor.

1º.- Representa la función F(x) = x^2.

Escribe: **F(x):=x^2**

Posiciona el cursor en el icono [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)]** y pulsa el botón izquierdo. Posiciona el cursor en el icono **[Ventana 2D]** y pulsa el botón izquierdo.

Posiciónate en **[Seleccionar/Rango de la Gráfica]** pulsa.

Escribe en **Horizontal** los siguientes valores: **– 4, 6, 10.**

Escribe en **Vertical** los siguientes valores: **– 2, 10, 12.** Pulsa **SÍ.**

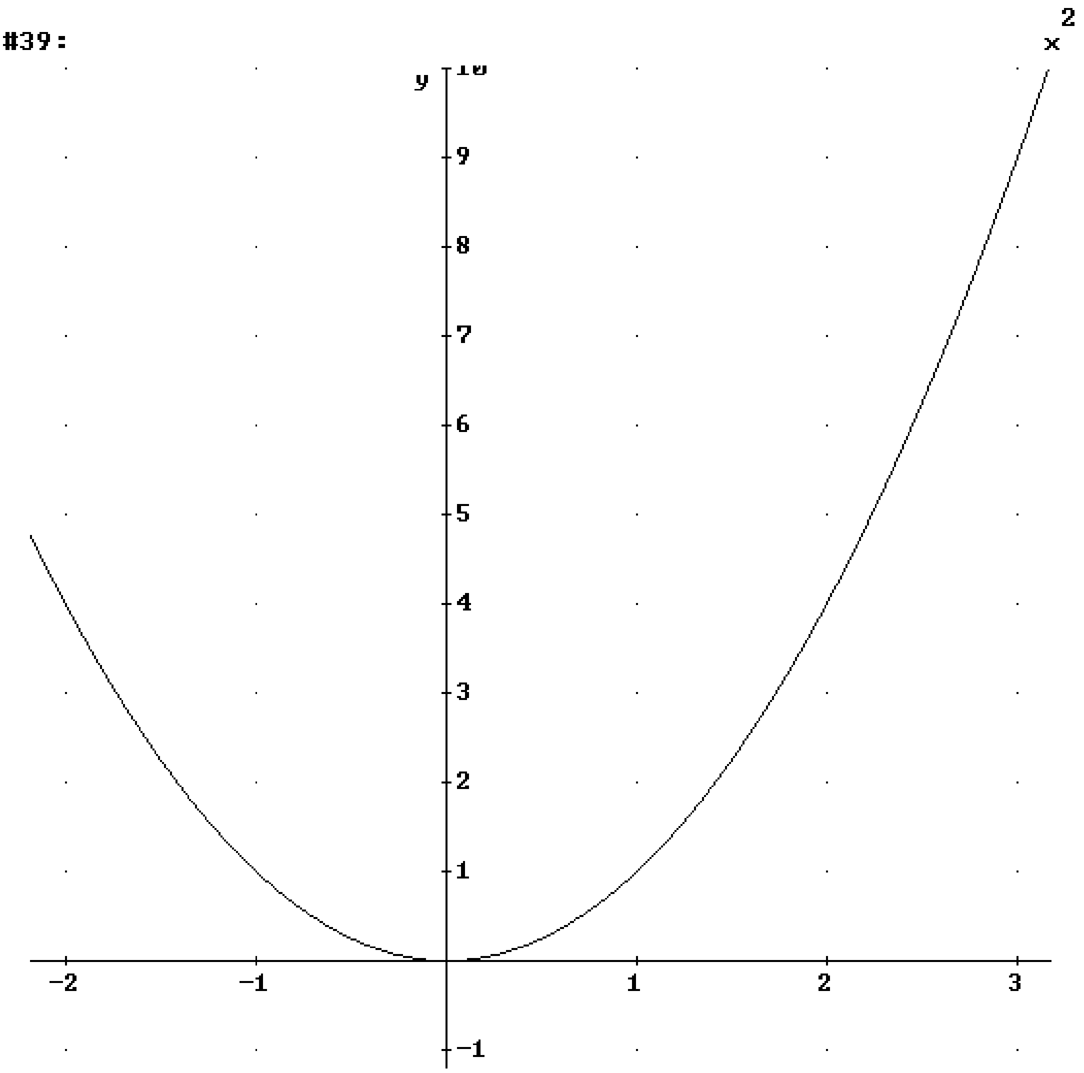
Posiciona el cursor en el icono **[Representar Expresión]** y pulsa.

Copia y pega y .

Explica lo que ha ocurrido: ____

#38: $F(x) := x^2$

#39:



2º.- Representa, de nuevo, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1)); (1,5;f(1)); (1,5;f(1,5)); (2;f(1,5)); (2;f(2)); (2,5;f(2)); (2,5;f(2,5)); (3;f(2,5)); (3;0) y (1;0).

2.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

2.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Observa que el intervalo [1,3] se ha dividido en cuatro subintervalos de igual amplitud: (3 –1)/4 = 1/2 = 0,5.

Posiciónate en **[Opciones/Pantalla/Puntos]**, pulsa, selecciona **Unir/Sí/Aceptar**, pulsa.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_INFERIOR (4)], [**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **],** **[Ventana 2D,** **]**

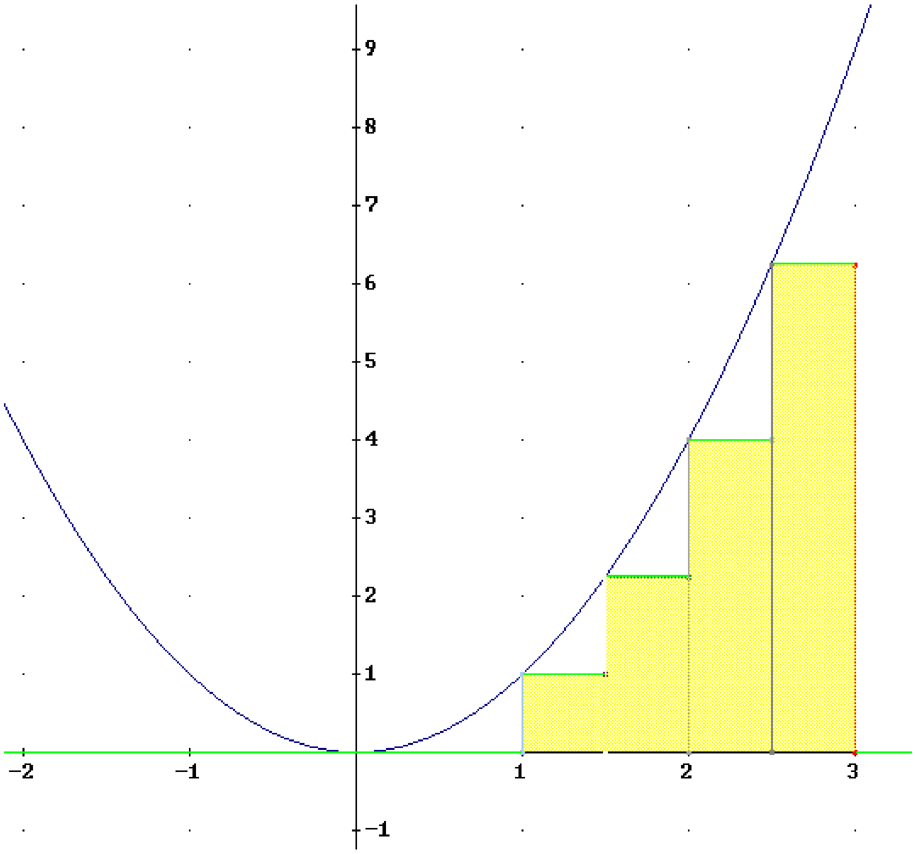
Posiciónate en **[Opciones/Pantalla/Puntos]**, pulsa, selecciona **Unir/Sí/Aceptar**, pulsa.

[Representar Expresión, **]**, Copia y pega y .

Escribe: **SUMA_INFERIOR(4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

<u>Explica lo que ha ocurrido:</u> ____

#40: SUPERFICIE_INFERIOR(4)



#41: SUMA_INFERIOR(4)

#42: $\frac{27}{4}$

3º.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,5)); (1,5;f(1,5)); (1,5;f(2)); (2;f(2)); (2;f(2,5)); (2,5;f(2,5)); (2,5;f(3)); (3;f(3)); (3;0) y (1;0).

3.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

3.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_SUPERIOR (4)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**], **[Ventana 2D,**],

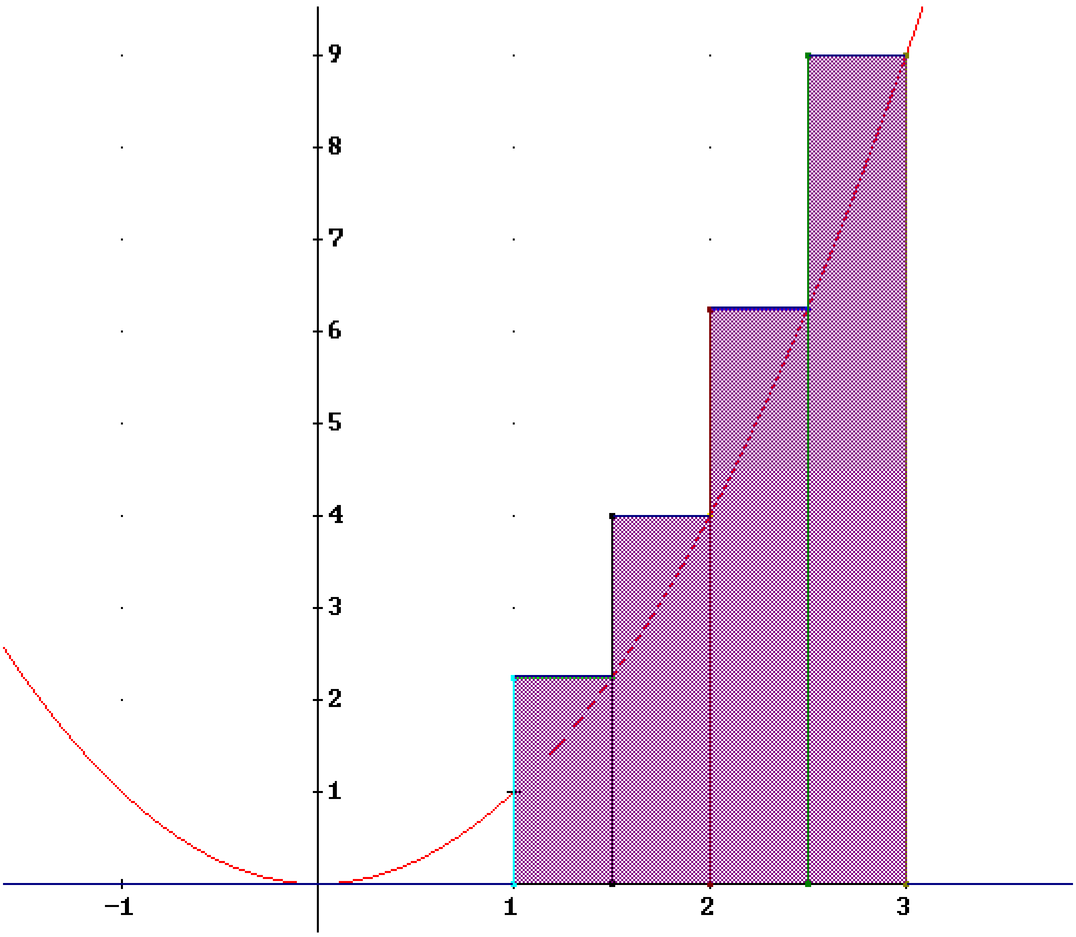
[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],** **[Representar Expresión,**]

Copia y pega y .

Escribe: **SUMA_SUPERIOR(4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**]

<u>Explica lo que ha ocurrido:</u> ____

#43: [F(X), SUPERFICIE_SUPERIOR(4)]



#44: SUMA_SUPERIOR(4)

#45: $\frac{43}{4}$

4º.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,25)); (1,25;f(1,25)); (1,5;f(1,25)); (1,5;f(1,75)); (1,75;f(1,75)); (2;f(1,75)); (2;f(2,25)); (2,25;f(2,25)); (2,5;f(2,25)); (2,5;f(2,75)); (2,75;f(2,75)); (3;f(2,75)); (3;0) y (1;0).

4.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

4.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_RIEMANN (4)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**, **[Ventana 2D,]**,

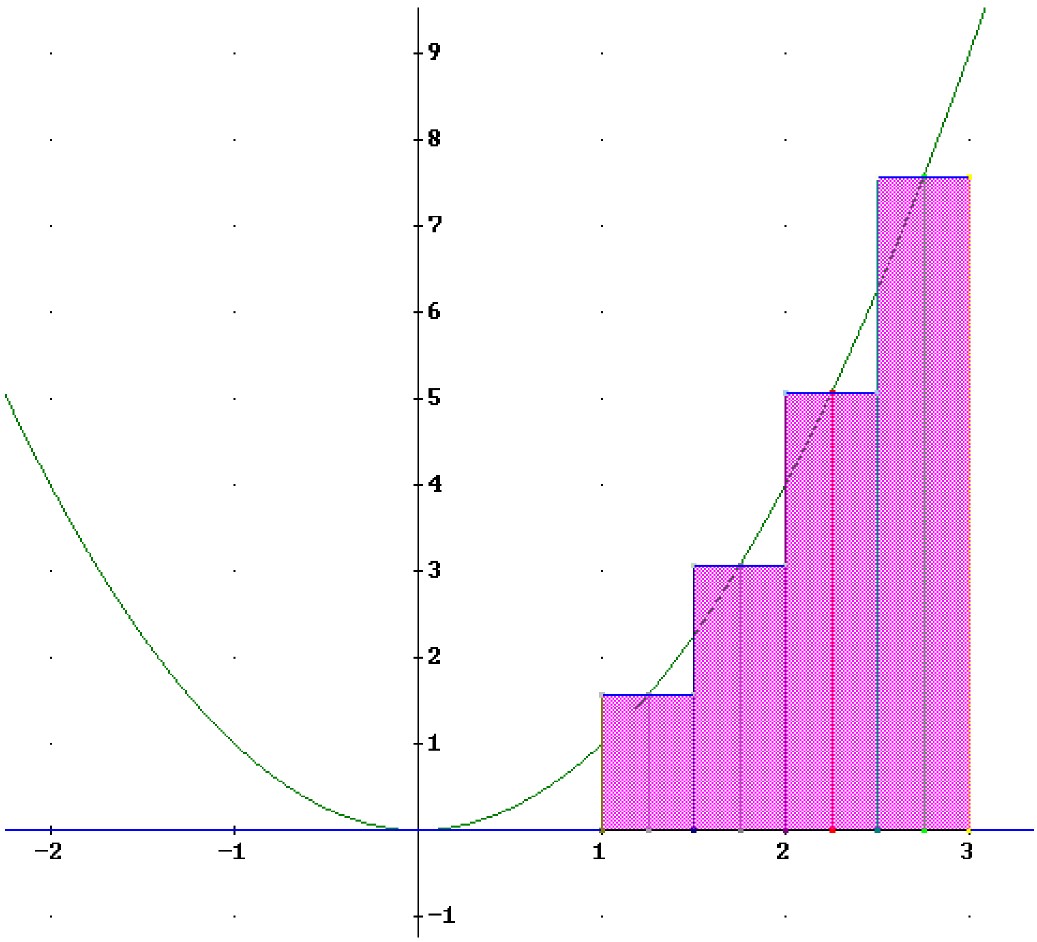
[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]**, **[Representar Expresión,]**

Copia y pega y .

Escribe: **SUMA_RIEMANN(4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

<u>Explica lo que ha ocurrido:</u> ____

#46: [F(X), SUPERFICIE_RIEMANN(4)]



#47: SUMA_RIEMANN(4)

#48: $\frac{69}{8}$

5º.- Hagamos las representaciones anteriores de forma conjunta para observar las posibles diferencias:

5.1.- Colorea las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

5.2.- Calcula las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), COMPARA_SUPERFICIES(4)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**], **[Ventana 2D,**],

[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],** **[Representar Expresión,**]

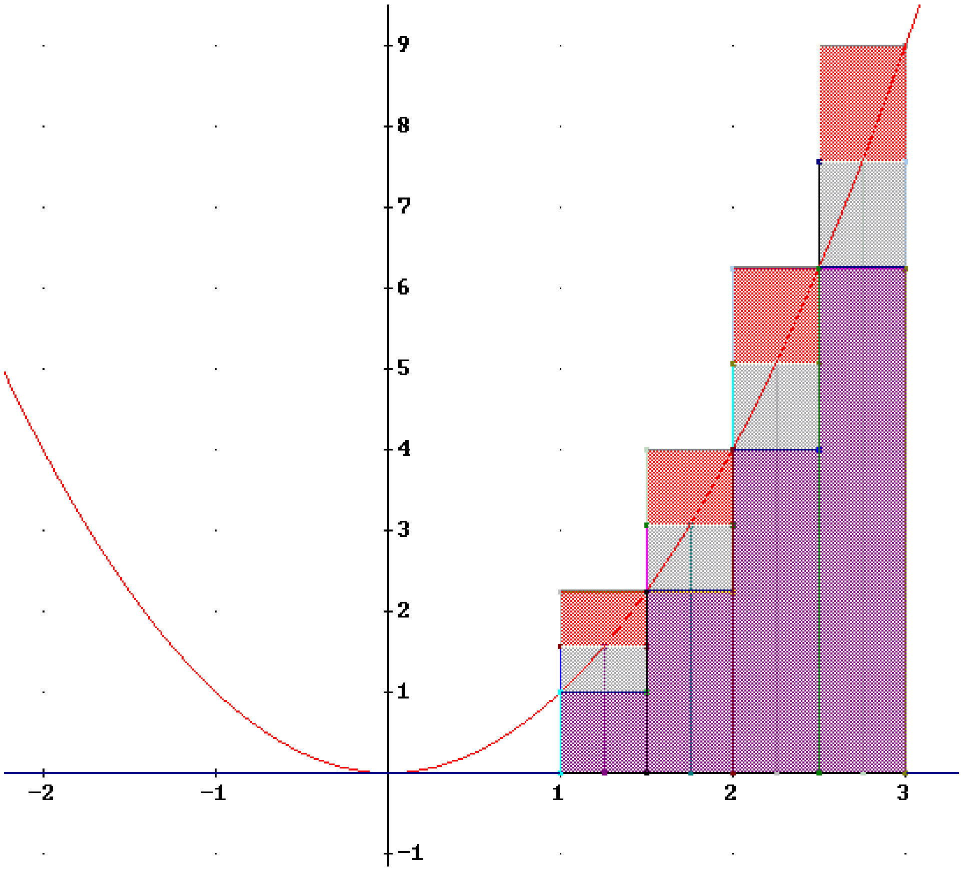
Copia y pega y .

Escribe: **COMPARA_SUMAS(4)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**], [Aproximar,]

Explica cuánto crees que puede valer el área determinada por la función $F(x) = x^2$, el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = 3. ________________________________

#49: [F(X), COMPARA_SUPERFICIES(4)]



#50: COMPARA_SUMAS(4)

#51: $\left[\frac{27}{4}, \frac{69}{8}, \frac{43}{4}\right]$

#52: [6.75, 8.625, 10.75]

6º.- Al objeto de confirmar o desmentir la respuesta anterior, dividamos el intervalo [1,3] en 8 subintervalos, todos ellos de la misma amplitud, y actuemos de forma análoga a los apartados anteriores:

6.1.- Colorea las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

6.2.- Calcula las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), COMPARA_SUPERFICIES(8)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**], **[Ventana 2D,**],

[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],** **[Representar Expresión,**]

Copia y pega y .

Escribe: **COMPARA_SUMAS(8)**

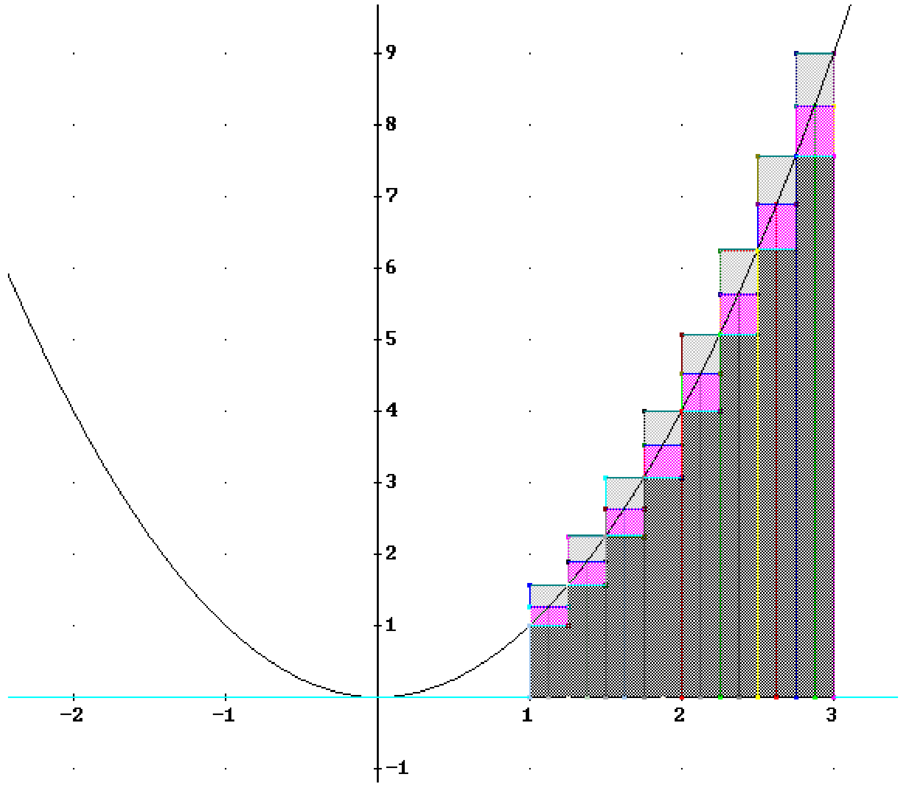
[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**], [Aproximar,]

¿Qué amplitud tiene cada uno de los nuevos subintervalos? ____________________

Explica cuántos crees que puede valer, con los nuevos cálculos, el área determinada por la función $F(x) = x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

____

#53: [F(X), COMPARA_SUPERFICIES(8)]



#54: COMPARA_SUMAS(8)

#55: $\left[\frac{123}{16}, \frac{277}{32}, \frac{155}{16}\right]$

#56: [7.6875, 8.65625, 9.6875]

7º.- Al objeto de confirmar o desmentir las respuestas anteriores, no vamos a tomar particiones cuyo diámetro sea menor, ahora aplicamos las diferentes instrucciones de DERIVE:

7.1.- Colorea el área que pretendes calcular.

7.2.- Calcula el área.

Escribe: **AreaUnderCurve(F(x),x,1,3)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**], **[Ventana 2D,** **],**

[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],** **[Representar Expresión,** **]**

Copia y pega y .

Escribe: **Int(F(x),x,1,3)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**], **[**Aproximar, **]**

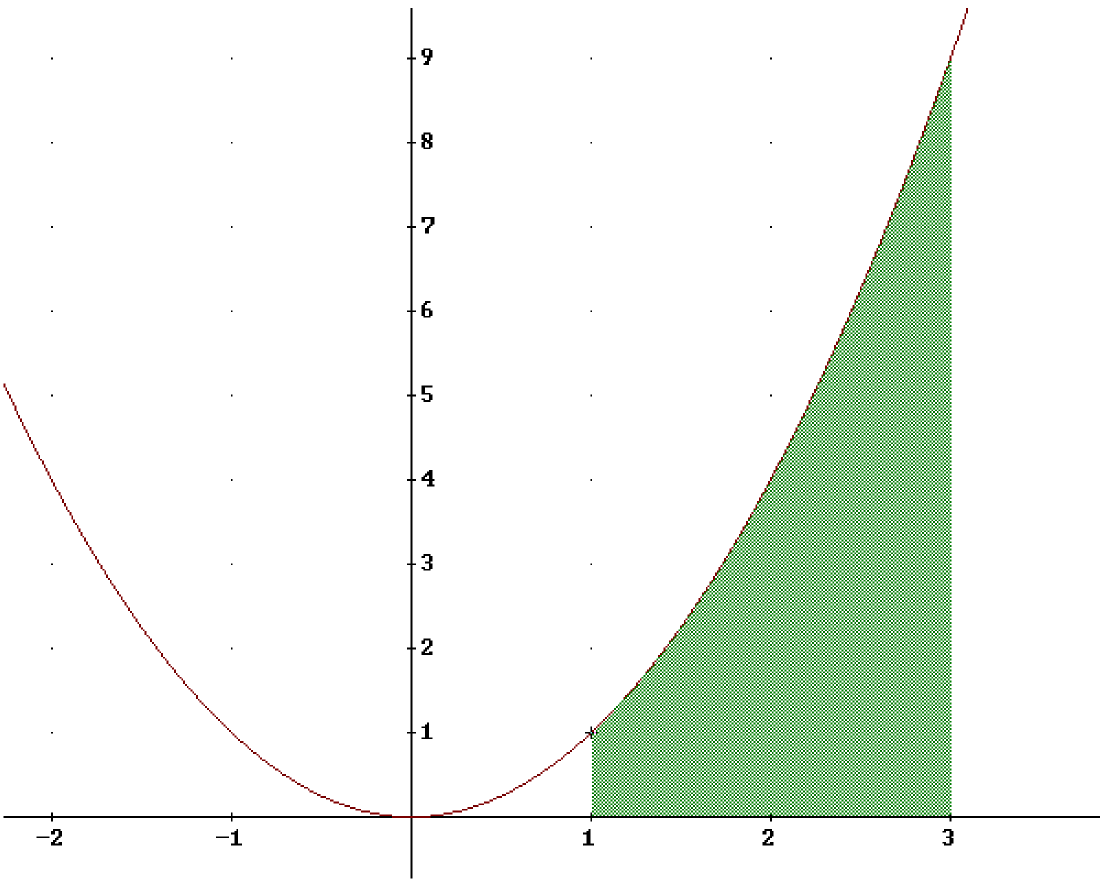
Comparemos este resultado con los anteriores:

Escribe: **[COMPARA_SUMAS(4), COMPARA_SUMAS(8)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**], **[**Aproximar, **]**

Razona por qué crees que has acertado o fallado en las respuestas anteriores.

```
#57:   AreaUnderCurve(F(X), X, 1, 3)
```



#58: $\int_{1}^{3} F(X)\, dX$

#59: $\frac{26}{3}$

#60: 8.666666666

#61: [COMPARA_SUMAS(4), COMPARA_SUMAS(8)]

#62: $\begin{bmatrix} \frac{27}{4} & \frac{69}{8} & \frac{43}{4} \\ \frac{123}{16} & \frac{277}{32} & \frac{155}{16} \end{bmatrix}$

#63: $\begin{bmatrix} 6.75 & 8.625 & 10.75 \\ 7.6875 & 8.65625 & 9.6875 \end{bmatrix}$

8º.- DERIVE nos ha dado una respuesta, sin embargo, aún no estamos totalmente convencidos de la misma.

<u>¿Serías capaz de confirmar dicha solución con lápiz y papel? Explica con todo lujo de detalles en qué te has basado para obtener tu solución ¿Coincide tu solución con la del programa informático?</u> ____

CÁLCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE UNA FUNCIÓN, EL EJE DE ABSCISAS Y DOS RECTAS VERTICALES

9º.- Introduce la función $G(x)=x^3/8$, representa el área determinada por esta función, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$.

9.1.- Calcula la integral de dicha función entre los extremos -2 y 4.

9.2.- Calcula el área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$.

Escribe: **G(x):= (x^3)/8** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**]

Escribe: **PlotInt(G(x),x, – 2,4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **],**

[Ventana 2D, **],** **[**Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión, **]**

Copia y pega y .

Escribe: **Int(G(x), x, – 2, 4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

Escribe: **Int(G(x), x, 2, 4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

<u>Razona por qué crees que has obtenido estos resultados ¿Qué has calculado?</u>

____

Escribe: **PlotInt(abs(G(x)),x, – 2,4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

[Ventana 2D, **],** **[**Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión, **]** Copia y pega y .

Escribe: **Int(abs(G(x)), x, – 2, 4)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**

Escribe: **– Int(G(x), x, – 2, 0)** + **Int(G(x), x, 0, 4)** Pulsa

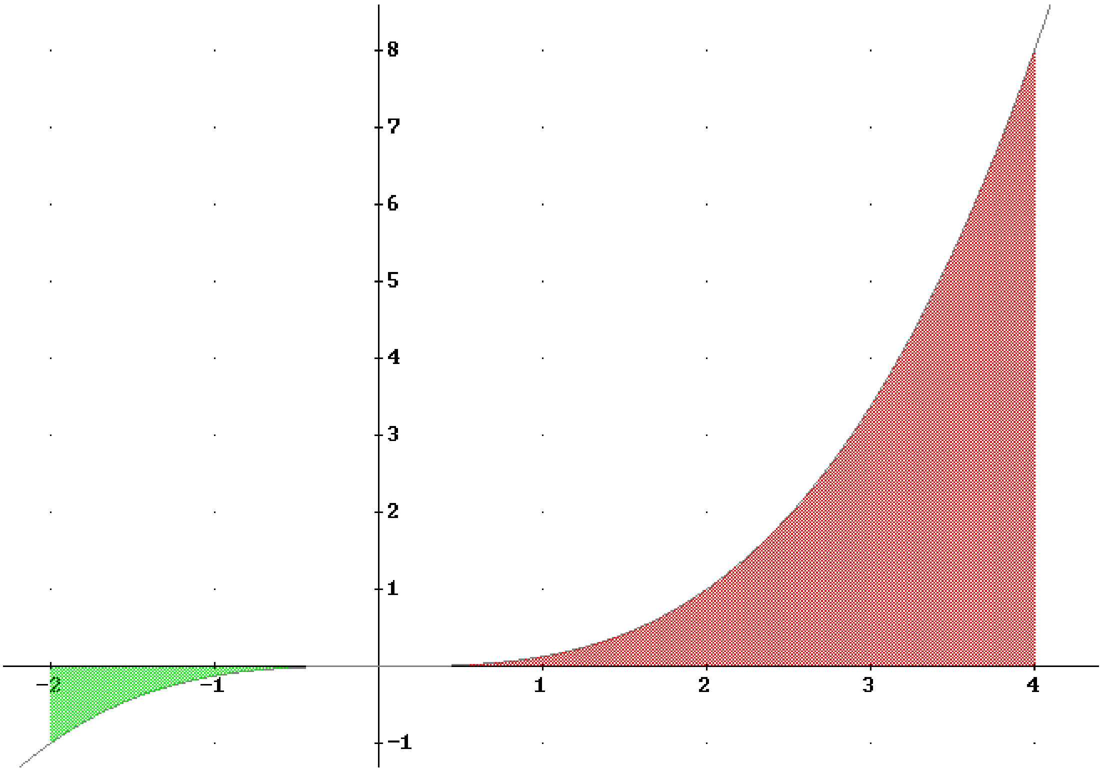
<u>Ahora has obtenido un nuevo resultado, distinto al anterior ¿Qué crees que has hecho? ¿Cuánto crees que vale el área comprendida entre la función $G(x) = x^3/8$, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$?</u> ____________________________________

<u>¿Qué debes hacer para calcular el área comprendida entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales?</u> ____

#64: $G(x) := \frac{x^3}{8}$

#65: $\frac{x^3}{8}$

#66: PlotInt(G(X), X, -2, 4)



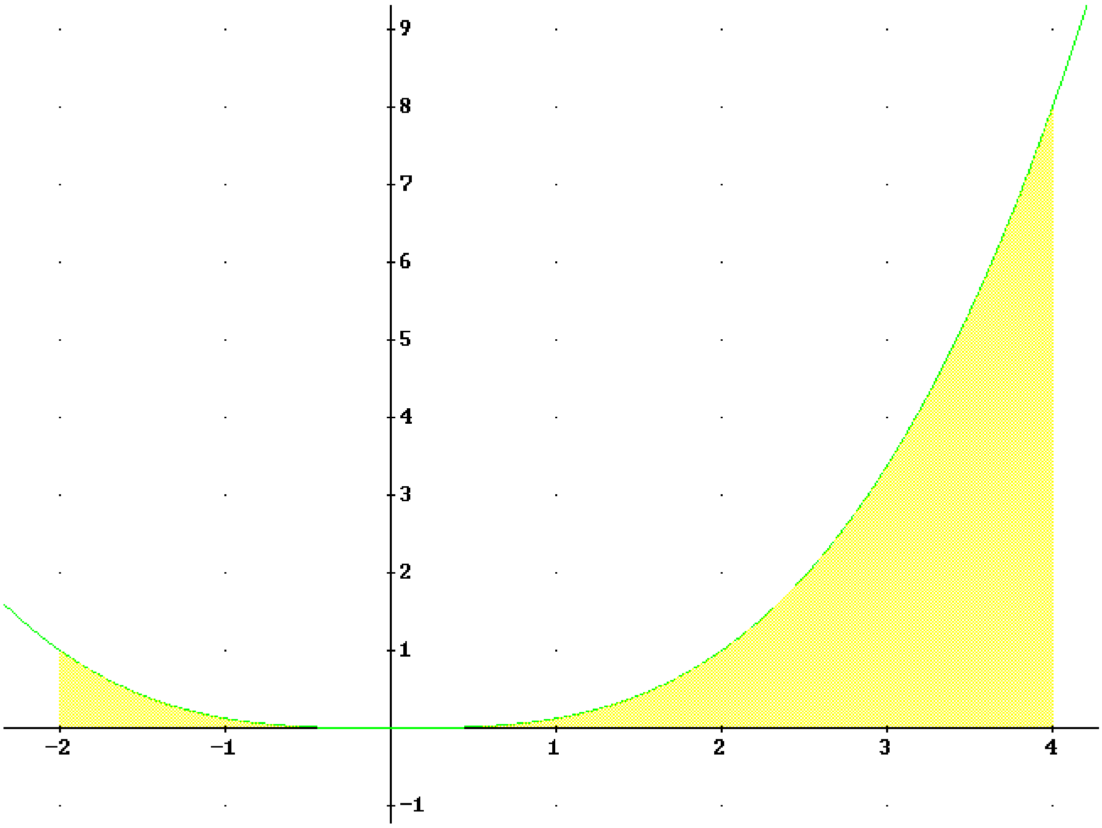
#67: $\int_{-2}^{4} G(X)\, dX$

#68: $\frac{15}{2}$

#69: $\int_{2}^{4} G(X)\, dX$

#70: $\frac{15}{2}$

#71: PlotInt(|G(X)|, X, -2, 4)



#72: $\int_{-2}^{4} |G(X)| \, dX$

#73: $\frac{17}{2}$

#74: $-\int_{-2}^{0} G(X) \, dX + \int_{0}^{4} G(X) \, dX$

#75: $\frac{17}{2}$

CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

10º.- Introduce las funciones $P(x) = x^3 + 1$ y $Q(x) = 2x^2 + x - 1$. Representa y calcula el área comprendida entre estas dos curvas.

Escribe: **[P(x):= x^3 + 1, Q(x):= 2x^2 + x – 1, H(x):=P(x) - Q(x)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)**,]

Escribe: **Solve(H(x) = 0, x)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)**,]

¿Qué has obtenido con la ejecución de este último comando? Observa, si es necesario, la última representación gráfica. ______________________________

Escribe: **AreaBetweenCurves(P(x),Q(x),x, – 1,2)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)**,]

[Ventana 2D, **],** **[**Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión, **]** Copia y pega y

Escribe: **[Int(H(x),x,-1,1), Int(H(x),x,1,2), Int(abs(H(x)),x,-1,2)],**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)**,]

Explica brevemente lo que acabamos de hacer. ______________________________

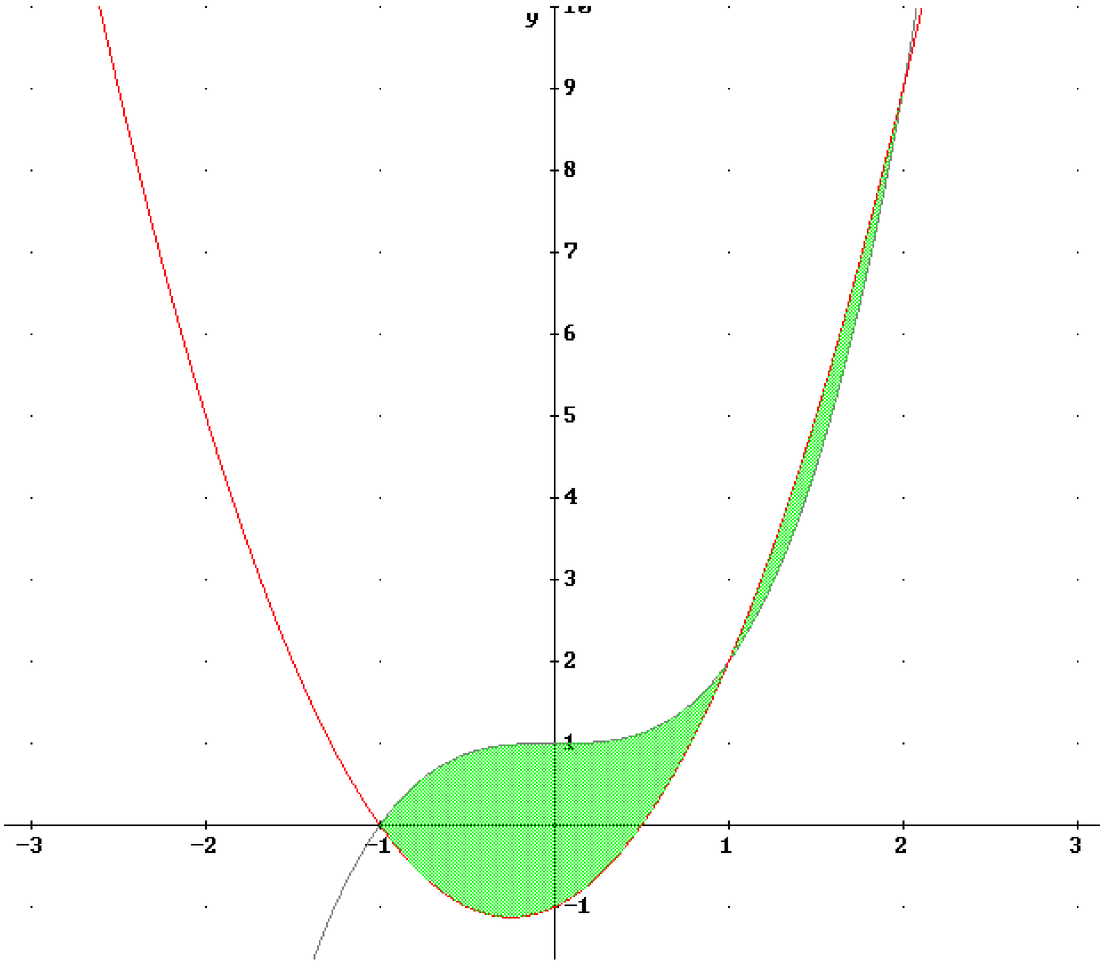
#76: $\left[P(x) := x^3 + 1,\ Q(x) := 2\cdot x^2 + x - 1,\ H(x) := P(x) - Q(x)\right]$

#77: $\left[x^3 + 1,\ 2\cdot x^2 + x - 1,\ x^3 - 2\cdot x^2 - x + 2\right]$

#78: SOLVE(H(X) = 0, X)

#79: $X = 2 \vee X = -1 \vee X = 1$

#80: AreaBetweenCurves(P(X), Q(X), X, -1, 2)



#81: $\left[\int_{-1}^{1} H(X)\, dX,\ \int_{1}^{2} H(X)\, dX,\ \int_{-1}^{2} |H(X)|\, dX\right]$

#82: $\left[\frac{8}{3},\ -\frac{5}{12},\ \frac{37}{12}\right]$

L.2.3. INTEGRALES INDEFINIDAS

#1: $\mathrm{INT}(x^3 + 5\cdot x,\ x,\ k)$

#2: $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5\cdot x^2}{2} + k$

#3: $\mathrm{INT}(\sqrt{x},\ x,\ k)$

#4: $\dfrac{2\cdot x^{3/2}}{3} + k$

#5: $\mathrm{INT}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x,\ k\right)$

#6: $2\cdot\sqrt{x} + k$

#7: $\mathrm{INT}(\mathrm{COS}(a\cdot x + b),\ x,\ k)$

#8: $\dfrac{\mathrm{SIN}(a\cdot x + b)}{a} + k$

#9: $\mathrm{INT}\left(\dfrac{x^2}{x^3 + 5},\ x,\ k\right)$

#10: $\dfrac{\mathrm{LN}(x^3 + 5)}{3} + k$

#11: $\mathrm{INT}\left(\dfrac{x^2}{(x^3 + 5)^{10}},\ x,\ k\right)$

#12: $k - \dfrac{1}{27\cdot(x^3 + 5)^9}$

#13: $\mathrm{INT}\left(\dfrac{x^2}{(x^3 + 5)^{1/10}},\ x,\ k\right)$

#14: $\dfrac{10\cdot(x^3 + 5)^{9/10}}{27} + k$

#15: $\mathrm{INT}(\mathrm{SIN}(x)\cdot\mathrm{COS}(x),\ x,\ k)$

#16: $\dfrac{\mathrm{SIN}(x)^2}{2} + k$

#17: $\mathrm{INT}(\mathrm{SIN}(x)^4\cdot \mathrm{COS}(x), x, k)$

#18: $$\frac{\mathrm{SIN}(x)^5}{5} + k$$

#19: $\mathrm{INT}(\hat{e}^{2\cdot x}, x, k)$

#20: $$\frac{\hat{e}^{2\cdot x}}{2} + k$$

#21: $\mathrm{INT}\left(5\cdot x\cdot \hat{e}^{x^2}, x, k\right)$

#22: $$\frac{5\cdot \hat{e}^{x^2}}{2} + k$$

#23: $\mathrm{INT}\left(5\cdot \hat{e}^{x^2}, x, k\right)$

#24: $$k - \frac{5\cdot \sqrt{\pi}\cdot \hat{\imath}\cdot \mathrm{ERF}(\hat{\imath}\cdot x)}{2}$$

#25: $\mathrm{INT}(\mathrm{TAN}(x), x, k)$

#26: $$k - \mathrm{LN}(\mathrm{COS}(x))$$

#27: $\mathrm{INT}((3\cdot x + 8)^{1/3}, x, k)$

#28: $$\frac{(3\cdot x + 8)^{4/3}}{4} + k$$

#29: $\mathrm{INT}((3\cdot x + 8)^{2/3}, x, k)$

#30: $$\frac{(3\cdot x + 8)^{5/3}}{5} + k$$

#31: $\mathrm{INT}\left(\frac{1}{(3\cdot x + 8)^{1/3}}, x, k\right)$

#32: $$\frac{(3\cdot x + 8)^{2/3}}{2} + k$$

#33: $\mathrm{INT}(5^x, x, k)$

#34: $$\frac{5^x}{\mathrm{LN}(5)} + k$$

#35: $\mathrm{INT}(x^5, x, k)$

#36: $$\frac{x^6}{6} + k$$

L.3. PRÁCTICA CON *DERIVE*, CICLO DE CIERRE

La quinta y última práctica informática de enseñanza-aprendizaje de la integral utilizando *DERIVE* se realizó en el aula de informática del instituto el jueves 22 de enero de 2009 y participaron dieciocho alumnos. Dicha práctica corresponde con el ciclo de cierre (VI) de nuestra investigación.

Los alumnos recibieron un nuevo cuadernillo de prácticas informáticas que partiendo de los anteriores: reelaboraba las cuestiones o ítems, ordenaba los conceptos, clarificaba las instrucciones de utilización de *DERIVE*, además, hacía especial hincapié en el cálculo de sumas[9] asociadas a particiones cuyos nodos consecutivos no son equidistantes y en la construcción de la función integral como el área de la superficie recorrida por la gráfica de una función, el eje de abscisas, una recta vertical fija y otra recta variable que se desplaza a la derecha de la primera. El cuadernillo de prácticas informáticas del ciclo de cierre se compone de catorce ítems.

Esta última sesión práctica con el PCS validó las cuatro anteriores y adquirió mayor fluidez que las precedentes, los alumnos fueron protagonistas activos de su propio aprendizaje y el profesor investigador dirigió las diferentes actividades de forma estructurada y escalonada, además, realizó una docencia más individualiza para que los estudiantes mantuvieran el interés por la adquisición de conocimientos con las nuevas tecnologías.

En el presente epígrafe del ciclo de cierre, siguiendo los criterios de los cuatro ciclos anteriores, incluimos los siguientes apartados:

- **Programa Fuente:** Fichero modificado, mejorado y ampliado de los anteriores programas fuentes, elaborado por el profesor investigador para una correcta realización de las prácticas propuestas.
- **Texto de la práctica y solución con *DERIVE:*** En varios recuadros incluimos los ítems con las instrucciones de *DERIVE* necesarias para resolverlas con el ordenador. Si el ítem fue resuelto en los ciclos de consolidación entonces su solución se remite a los mismos, en caso contrario la solución viene dada por las respuestas informáticas con sus “códigos fuente” y las gráficas que se hayan generado[10].

[9] Sumas inferiores y superiores de Darboux y sumas de Riemann.

[10] No hemos incluido, salvo en casos excepcionales, el texto “código máquina” por ser incomprensible y carecer de interés alguno en la presente investigación.

L.3.1. PROGRAMA FUENTE

#1: Fichero INTEG1.MTH

#2: $F(x) := x^{2}$

#3: $a := 1$

#4: $b := 3$

#5: $\xi(i, n) := a + \dfrac{(b - a)\cdot i}{n}$

#6: $VP(n) := VECTOR(IF(|F(\xi(i, n))| > |F(\xi(i - 1, n))|, i, i - 1), i, 1, n)$

#7: $V(n) := APPEND([0], VP(n))$

#8: $GUH(n) := VECTOR\left(\begin{bmatrix} \xi(i, n) & F(\xi(i, n)) \\ \xi(i + 1, n) & F(\xi(i, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$

#9: $GUV(n) := VECTOR\left(\begin{bmatrix} \xi(i, n) & 0 \\ \xi(i, n) & F(\xi((V(n))_{i + 1}, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$

#10: $GUP(n) := APPEND\left(GUH(n), GUV(n), \left[\begin{bmatrix} \xi(n, n) & 0 \\ \xi(n, n) & F(\xi(n - 1, n)) \end{bmatrix}\right]\right)$

#11: $GLH(n) := VECTOR\left(\begin{bmatrix} \xi(i, n) & F(\xi(i + 1, n)) \\ \xi(i + 1, n) & F(\xi(i + 1, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$

#12: $VPL(n) := VECTOR(IF(|F(\xi(i, n))| < |F(\xi(i + 1, n))|, i + 1, i), i, 1, n - 1)$

#13: $VL(n) := APPEND([1], VPL(n))$

#14: $GLV(n) := VECTOR\left(\begin{bmatrix} \xi(i, n) & 0 \\ \xi(i, n) & F(\xi((VL(n))_{i + 1}, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n - 1\right)$

#15: $UGRAF(n) := APPEND\left(GLH(n), GLV(n), \left[\begin{bmatrix} \xi(n, n) & 0 \\ \xi(n, n) & F(\xi(n, n)) \end{bmatrix}\right]\right)$

#16: $LGRAF(n) := APPEND\left(GUH(n), GUV(n), \left[\begin{bmatrix} \xi(n, n) & 0 \\ \xi(n, n) & F(\xi(n - 1, n)) \end{bmatrix}\right]\right)$

#17: $L(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} \dfrac{F(\xi(i, n))\cdot(b - a)}{n}$

#18: $U(n) := \sum_{i=1}^{n} \dfrac{F(\xi(i, n))\cdot(b - a)}{n}$

#19: $L\_F(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} F(\xi(i, n))\cdot CHI(\xi(i, n), x, \xi(i + 1, n))$

#20: $U\_F(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} F(\xi(i + 1, n))\cdot CHI(\xi(i, n), x, \xi(i + 1, n))$

#21: SUMA_INFERIOR(n) := L(n)

#22: SUMA_SUPERIOR(n) := U(n)

#23: SUPERFICIE_INFERIOR(n) := [F(x), LGRAF(n), PlotInt(L_F(n), x, 1, 3)]

#24: SUPERFICIE_SUPERIOR(n) := [F(x), UGRAF(n), PlotInt(U_F(n), x, 1, 3)]

#25: $\alpha(i, n) := a + \dfrac{(b - a)\cdot i}{n} + \dfrac{b - a}{2\cdot n}$

$$\#26:\quad \mathrm{RLH}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \xi(i,\ n) & F(\alpha(i,\ n)) \\ \xi(i + 1,\ n) & F(\alpha(i,\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$$

$$\#27:\quad \mathrm{RPL}(n) := \mathrm{VECTOR}(i,\ i,\ 1,\ n - 1)$$

$$\#28:\quad \mathrm{RL}(n) := \mathrm{APPEND}([0],\ \mathrm{RPL}(n))$$

$$\#29:\quad \mathrm{RLV}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \xi(i,\ n) & 0 \\ \xi(i,\ n) & F(\alpha((\mathrm{RL}(n))_{i + 1},\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$$

$$\#30:\quad \mathrm{ALTURA}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \alpha(i,\ n) & 0 \\ \alpha(i,\ n) & F(\alpha((\mathrm{RL}(n))_{i + 1},\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$$

$$\#31:\quad \mathrm{RGRAF}(n) := \mathrm{APPEND}\left(\mathrm{RLV}(n),\ \mathrm{RLH}(n),\ \mathrm{ALTURA}(n),\ \left[\begin{bmatrix} \xi(n,\ n) & 0 \\ \xi(n,\ n) & F(\alpha(n - 1,\ n)) \end{bmatrix}\right]\right)$$

$$\#32:\quad \mathrm{R\_F}(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} F(\alpha(i,\ n))\cdot \mathrm{CHI}(\xi(i,\ n),\ x,\ \xi(i + 1,\ n))$$

$$\#33:\quad \mathrm{SUPERFICIE\_RIEMANN}(n) := [F(x),\ \mathrm{RGRAF}(n),\ \mathrm{PlotInt}(\mathrm{R\_F}(n),\ x,\ 1,\ 3)]$$

$$\#34:\quad \mathrm{R}(n) := \sum_{i=0}^{n - 1} \frac{F(\alpha(i,\ n))\cdot(b - a)}{n}$$

$$\#35:\quad \mathrm{SUMA\_RIEMANN}(n) := \mathrm{R}(n)$$

$$\#36:\quad \mathrm{COMPARA\_SUMAS}(n) := [\mathrm{SUMA\_INFERIOR}(n),\ \mathrm{SUMA\_RIEMANN}(n),\ \mathrm{SUMA\_SUPERIOR}(n)]$$

$$\#37:\quad \mathrm{COMPARA\_SUPERFICIES}(n) := [\mathrm{SUPERFICIE\_SUPERIOR}(n),\ \mathrm{SUPERFICIE\_RIEMANN}(n),\ \mathrm{SUPERFICIE\_INFERIOR}(n)]$$

$$\#38:\quad \mu(i,\ n) := a + \frac{(b - a)\cdot i}{2\cdot n}$$

$$\#39:\quad \mathrm{VP\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{VECTOR}(\mathrm{IF}(|F(\mu(i,\ n))| > |F(\mu(i - 1,\ n))|,\ i,\ i - 1),\ i,\ 1,\ n)$$

$$\#40:\quad \mathrm{V\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{APPEND}([0],\ \mathrm{VP\_IRREGULAR}(n))$$

$$\#41:\quad \mathrm{GUH\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \mu(i,\ n) & F(\mu(i,\ n)) \\ \mu(i + 1,\ n) & F(\mu(i,\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$$

$$\#42:\quad \mathrm{GUV\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \mu(i,\ n) & 0 \\ \mu(i,\ n) & F(\mu((\mathrm{V\_IRREGULAR}(n))_{i + 1},\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$$

$$\#43:\quad \mathrm{GUP\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{APPEND}\left(\mathrm{GUH\_IRREGULAR}(n),\ \mathrm{GUV\_IRREGULAR}(n),\ \left[\begin{bmatrix} \mu(n,\ n) & 0 \\ \mu(n,\ n) & F(\mu(n - 1,\ n)) \end{bmatrix}\right]\right)$$

$$\#44:\quad \mathrm{GLH\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \mu(i,\ n) & F(\mu(i + 1,\ n)) \\ \mu(i + 1,\ n) & F(\mu(i + 1,\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$$

$$\#45:\quad \mathrm{VPL\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{VECTOR}(\mathrm{IF}(|F(\mu(i,\ n))| < |F(\mu(i + 1,\ n))|,\ i + 1,\ i),\ i,\ 1,\ n - 1)$$

$$\#46:\quad \mathrm{VL\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{APPEND}([1],\ \mathrm{VPL\_IRREGULAR}(n))$$

$$\#47:\quad \mathrm{GLV\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \mu(i,\ n) & 0 \\ \mu(i,\ n) & F(\mu((\mathrm{VL\_IRREGULAR}(n))_{i + 1},\ n)) \end{bmatrix},\ i,\ 0,\ n - 1\right)$$

$$\#48:\quad \mathrm{UGRAF\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{APPEND}\left(\mathrm{GLH\_IRREGULAR}(n),\ \mathrm{GLV\_IRREGULAR}(n),\ \left[\begin{bmatrix} \mu(n,\ n) & 0 \\ \mu(n,\ n) & F(\mu(n,\ n)) \end{bmatrix}\right]\right)$$

$$\#49:\quad \mathrm{LGRAF\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{APPEND}\left(\mathrm{GUH\_IRREGULAR}(n),\ \mathrm{GUV\_IRREGULAR}(n),\ \left[\begin{bmatrix} \mu(n,\ n) & 0 \\ \mu(n,\ n) & F(\mu(n - 1,\ n)) \end{bmatrix}\right]\right)$$

$$\#50:\quad \mathrm{L\_IRREGULAR}(n) := \left(\sum_{i=0}^{n - 1} \frac{F(\mu(i,\ n))\cdot(b - a)}{2\cdot n}\right) + 4$$

$$\#51:\quad \mathrm{U\_IRREGULAR}(n) := \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{F(\mu(i,\ n))\cdot(b - a)}{2\cdot n}\right) + 9$$

$$\#52:\quad \mathrm{SUMA\_INF\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{L\_IRREGULAR}(n)$$

$$\#53:\quad \mathrm{SUMA\_SUP\_IRREGULAR}(n) := \mathrm{U\_IRREGULAR}(n)$$

$$\#54: \quad \text{L\_F\_IRREGULAR}(n) := \left(\sum_{i=0}^{n-1} F(\mu(i, n)) \cdot \text{CHI}(\mu(i, n), X, \mu(i+1, n)) \right) + 4 \cdot \text{CHI}(2, X, 3)$$

$$\#55: \quad \text{SUPERFICIE\_INF\_IRREGULAR}(n) := [F(X), \text{LGRAF\_IRREGULAR}(n), \text{PlotInt}(\text{L\_F\_IRREGULAR}(n), X, 1, 3)]$$

$$\#56: \quad \text{U\_F\_IRREGULAR}(n) := \left(\sum_{i=0}^{n-1} F(\mu(i+1, n)) \cdot \text{CHI}(\mu(i, n), X, \mu(i+1, n)) \right) + 9 \cdot \text{CHI}(2, X, 3)$$

$$\#57: \quad \text{SUPERFICIE\_SUP\_IRREGULAR}(n) := [F(X), \text{UGRAF\_IRREGULAR}(n), \text{PlotInt}(\text{U\_F\_IRREGULAR}(n), X, 1, 3)]$$

$$\#58: \quad \beta(i, n) := a + \frac{(b-a) \cdot i}{2 \cdot n} + \frac{b-a}{4 \cdot n}$$

$$\#59: \quad \text{RLH\_IRREGULAR}(n) := \text{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \mu(i, n) & F(\beta(i, n)) \\ \mu(i+1, n) & F(\beta(i, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n-1 \right)$$

$$\#60: \quad \text{RPL\_IRREGULAR}(n) := \text{VECTOR}(i, i, 1, n-1)$$

$$\#61: \quad \text{RL\_IRREGULAR}(n) := \text{APPEND}([0], \text{RPL\_IRREGULAR}(n))$$

$$\#62: \quad \text{RLV\_IRREGULAR}(n) := \text{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \mu(i, n) + \frac{1}{2 \cdot n} & 0 \\ \mu(i, n) + \frac{1}{2 \cdot n} & F(\beta((\text{RL\_IRREGULAR}(n))_{i+1}, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n-1 \right)$$

$$\#63: \quad \text{RLV\_IRREG}(n) := \text{APPEND}\left(\text{RLV\_IRREGULAR}(n), \left[\begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 2.5 & F(2.5) \end{bmatrix} \right] \right)$$

$$\#64: \quad \text{ALTURA\_IRREGULAR}(n) := \text{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \beta(i, n) & 0 \\ \beta(i, n) & F(\beta((\text{RL\_IRREGULAR}(n))_{i+1}, n)) \end{bmatrix}, i, 0, n-1 \right)$$

$$\#65: \quad \text{RGRAF\_IRREGULAR}(n) := \text{APPEND}(\text{RLV\_IRREG}(n), \text{RLH\_IRREGULAR}(n), \text{ALTURA\_IRREGULAR}(n))$$

$$\#66: \quad \text{R\_F\_IRREGULAR}(n) := \left(\sum_{i=0}^{n-1} F(\beta(i, n)) \cdot \text{CHI}(\mu(i, n), X, \mu(i+1, n)) \right) + F(2.5) \cdot \text{CHI}(2, X, 3)$$

$$\#67: \quad \text{SUPERFICIE\_RIEMANN\_IRREGULAR}(n) := [F(X), \text{RGRAF\_IRREGULAR}(n), \text{PlotInt}(\text{R\_F\_IRREGULAR}(n), X, 1, 3)]$$

$$\#68: \quad \text{R\_IRREGULAR}(n) := \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(\beta(i, n)) \cdot (b-a)}{2 \cdot n} \right) + F(2.5)$$

$$\#69: \quad \text{SUMA\_INFERIOR\_IRREGULAR}(n) := \text{L\_IRREGULAR}(n)$$

$$\#70: \quad \text{SUMA\_SUPERIOR\_IRREGULAR}(n) := \text{U\_IRREGULAR}(n)$$

$$\#71: \quad \text{SUMA\_RIEMANN\_IRREGULAR}(n) := \text{R\_IRREGULAR}(n)$$

$$\#72: \quad \text{SUP\_INF\_IR}(n) := \text{SUPERFICIE\_INF\_IRREGULAR}(n)$$

$$\#73: \quad \text{SUP\_SUP\_IR}(n) := \text{SUPERFICIE\_SUP\_IRREGULAR}(n)$$

$$\#74: \quad \text{SUP\_RIE\_IR}(n) := \text{SUPERFICIE\_RIEMANN\_IRREGULAR}(n)$$

$$\#75: \quad \text{COMPARA\_SUMAS\_IRREGULARES}(n) := [\text{L\_IRREGULAR}(n), \text{R\_IRREGULAR}(n), \text{U\_IRREGULAR}(n)]$$

$$\#76: \quad \text{SUPERFICIE\_INFERIOR\_IRREGULAR}(n) := \text{SUPERFICIE\_INF\_IRREGULAR}(n)$$

$$\#77: \quad \text{SUPERFICIE\_SUPERIOR\_IRREGULAR}(n) := \text{SUPERFICIE\_SUP\_IRREGULAR}(n)$$

$$\#78: \quad \text{COMPARA\_SUPERFICIES\_IRREGULARES}(n) := [\text{SUP\_SUP\_IR}(n), \text{SUP\_RIE\_IR}(n), \text{SUP\_INF\_IR}(n), F(X)]$$

$$\#79: \quad \text{FUNCION\_INTEGRAL} := \left[\text{AreaUnderCurve}\left(\frac{X}{4}, X, 1, 100 \right), \int_1^X \frac{t}{4} \cdot \text{CHI}(1, t, 100)\, dt \right]$$

L.3.2. TEXTO DE LA PRÁCTICA Y SOLUCIÓN CON *DERIVE*

PRÁCTICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA CON *DERIVE*

Curso 2008-2009, ciclo de cierre (VI)

OBJETIVO: Estas prácticas permiten que el alumno, con ayuda de DERIVE 5, consolide los siguientes conceptos: sumas inferior y superior de Darboux, suma de Riemann, integral inferior y superior de Darboux, área bajo una curva, integral definida, teorema fundamental de cálculo integral, regla de Barrow, área comprendida entre dos curvas y función integral.

NORMAS QUE DEBEN TENERSE PRESENTES:

A) Posiciona el cursor en el icono **DERIVE**.

B) Haz doble clic con el botón izquierdo del ratón en el icono **DERIVE** pulsa **SÍ**.

C) Abre el archivo **D\integral\integral\integral(programa).Enero-09**

D) Sigue las explicaciones del profesor.

1º.- Representa la función F(x) = x^2.

Escribe: **F(x):=x^2**

Posiciona el cursor en el icono [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)]** y pulsa el botón izquierdo. Posiciona el cursor en el icono **[Ventana 2D]** y pulsa el botón izquierdo.

Posiciónate en **[Seleccionar/Rango de la Gráfica]** pulsa.

Escribe en **Horizontal** los siguientes valores: **– 4, 6, 10.**

Escribe en **Vertical** los siguientes valores: **– 2, 10, 12.** Pulsa **SÍ.**

Posiciona el cursor en el icono y pulsa. Copia y pega y .

Explica lo que ha ocurrido: ____

2º.- Representa, de nuevo, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1)); (1,5;f(1)); (1,5;f(1,5)); (2;f(1,5)); (2;f(2)); (2,5;f(2)); (2,5;f(2,5)); (3;f(2,5)); (3;0) y (1;0).

2.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

2.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Observa que el intervalo [1,3] se ha dividido en cuatro subintervalos de igual amplitud: (3 –1)/4 = 1/2 = 0,5.

Posiciónate en **[Opciones/Pantalla/Puntos]**, pulsa, selecciona **Unir/Sí/Aceptar**, pulsa.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_INFERIOR (4)]**, pulsa y

Posiciónate en **[Opciones/Pantalla/Puntos]**, pulsa, selecciona **Unir/Sí/Aceptar**, pulsa.

[Representar Expresión,], Copia y pega y .

Escribe: **SUMA_INFERIOR(4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

Explica lo que ha ocurrido: ____

3º.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,5)); (1,5;f(1,5)); (1,5;f(2)); (2;f(2)); (2;f(2,5)); (2,5;f(2,5)); (2,5;f(3)); (3;f(3)); (3;0) y (1;0).

3.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

3.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_SUPERIOR (4)]**

Realiza: , , [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]** y

Copia y pega y .

Escribe: **SUMA_SUPERIOR(4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

Explica lo que ha ocurrido: ____

4º.- Representa, una vez más, la función anterior y une los siguientes puntos: (1;0); (1;f(1,25)); (1,25;f(1,25)); (1,5;f(1,25)); (1,5;f(1,75)); (1,75;f(1,75)); (2;f(1,75)); (2;f(2,25)); (2,25;f(2,25)); (2,5;f(2,25)); (2,5;f(2,75)); (2,75;f(2,75)); (3;f(2,75)); (3;0) y (1;0).

4.1.- Colorea el área del polígono que acabas de dibujar.

4.2.- Calcula el área del polígono que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), SUPERFICIE_RIEMANN (4)]**

Realiza: , , [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]** y

Copia y pega y . Escribe: **SUMA_RIEMANN(4)** y pulsa

Explica lo que ha ocurrido: ____

5º.- Hagamos las representaciones anteriores de forma conjunta para observar las posibles diferencias:

5.1.- Colorea las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

5.2.- Calcula las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), COMPARA_SUPERFICIES(4)]**

Realiza: , , [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]** y

Copia y pega y . Escribe: **COMPARA_SUMAS(4).** Pulsa y

Explica cuánto crees que puede valer el área determinada por la función $F(x) = x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. __________________________

6º.- Al objeto de confirmar o desmentir la respuesta anterior, dividamos el intervalo [1,3] en 8 subintervalos, todos ellos de la misma amplitud, y actuemos de forma análoga a los apartados anteriores:

6.1.- Colorea las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

6.2.- Calcula las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

Escribe: **[F(x), COMPARA_SUPERFICIES(8)]**

Realiza: , , [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]** y

Copia y pega y . Escribe: **COMPARA_SUMAS(8)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**, **[**Aproximar, **]**

¿Qué amplitud tiene cada uno de los nuevos subintervalos? __________________

Explica cuánto crees que puede valer, con los nuevos cálculos, el área determinada por la función $F(x) = x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x =1$ y $x=3$.

____

Las soluciones de las cuestiones 1-6 pueden encontrarse en la sección: XXX.2. Práctica con *DERIVE*, ciclos de consolidación.

7º.- Al objeto de confirmar o desmentir la respuesta anterior, dividamos el intervalo [1,3] en "n" subintervalos, todos ellos de la misma amplitud, y actuemos de forma análoga a los apartados anteriores. Sin embargo no podemos representar las superficies inferiores y superiores de Darboux ni las superficies de Riemann, aunque podemos calcular sus sumas:

Escribe: **COMPARA_SUMAS(n)**, **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro)**, **]**

¿Qué amplitud tiene cada uno de los nuevos subintervalos? ___________________

Escribe cada una de las expresiones obtenidas junto a la expresión correspondiente: ____

SUMA_RIEMANN (n):

SUMA_INFERIOR DE DARBOUX (n):

SUMA_SUPERIOR DE DARBOUX (n):

Posiciónate y pulsa en **[Cálculo/Límites]**. También puedes ir al icono superior lim

Escribe en **Variable** la letra: **n**

Escribe en **Punto** el símbolo: ∞ (Tómalo de la parte inferior derecha de la pantalla)

Pulsa **Simplificar.**

¿Coinciden la integral inferior y superior? ___________________________________

¿Es la función integrable? ¿Por qué? ____

#80: COMPARA_SUMAS(n)

#81: $$\left[\frac{2\cdot(13\cdot n^2-12\cdot n+2)}{3\cdot n^2}, \frac{2\cdot(13\cdot n^2-1)}{3\cdot n^2}, \frac{2\cdot(13\cdot n^2+12\cdot n+2)}{3\cdot n^2}\right]$$

#82: $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot(13\cdot n^2-12\cdot n+2)}{3\cdot n^2}, \frac{2\cdot(13\cdot n^2-1)}{3\cdot n^2}, \frac{2\cdot(13\cdot n^2+12\cdot n+2)}{3\cdot n^2}\right]$$

#83: $$\left[\frac{26}{3}, \frac{26}{3}, \frac{26}{3}\right]$$

#84: SUMA_INFERIOR(n)

#85: $$\frac{2\cdot(13\cdot n^2-12\cdot n+2)}{3\cdot n^2}$$

#86: SUMA_RIEMANN(n)

#87: $$\frac{2\cdot(13\cdot n^2-1)}{3\cdot n^2}$$

#88: SUMA_SUPERIOR(n)

#89: $$\frac{2\cdot(13\cdot n^2+12\cdot n+2)}{3\cdot n^2}$$

8º En el punto anterior la amplitud de cada uno de los subintervalos de la partición P_n era 2/n. A partir de este momento vamos a construir la sucesión de particiones $Q_n = \bigcup_{i=0}^{n} \{1+i/n\} \bigcup \{3\}$ ***del intervalo* [1,3], d*onde los n primeros subintervalos tienen amplitud 1/n y el último subintervalo es* [2,3].**

A partir de este momento, las aplicaciones correspondientes llevarán el adjetivo IRREGULAR. Hagamos, con las nuevas particiones, de forma más resumida los puntos anteriores:

Tomemos la partición Q_8 =* {1;1'125;1'25;1'375;1'5;1'625;1'75;1'875;2;3}** ***y actuemos de forma análoga al ejercicio número 6:

8.1.- Colorea las superficies de los polígonos que acabas de dibujar.

8.2.- Calcula las áreas de los polígonos que acabas de dibujar.

Escribe: **COMPARA_SUPERFICIES_IRREGULARES(8)**

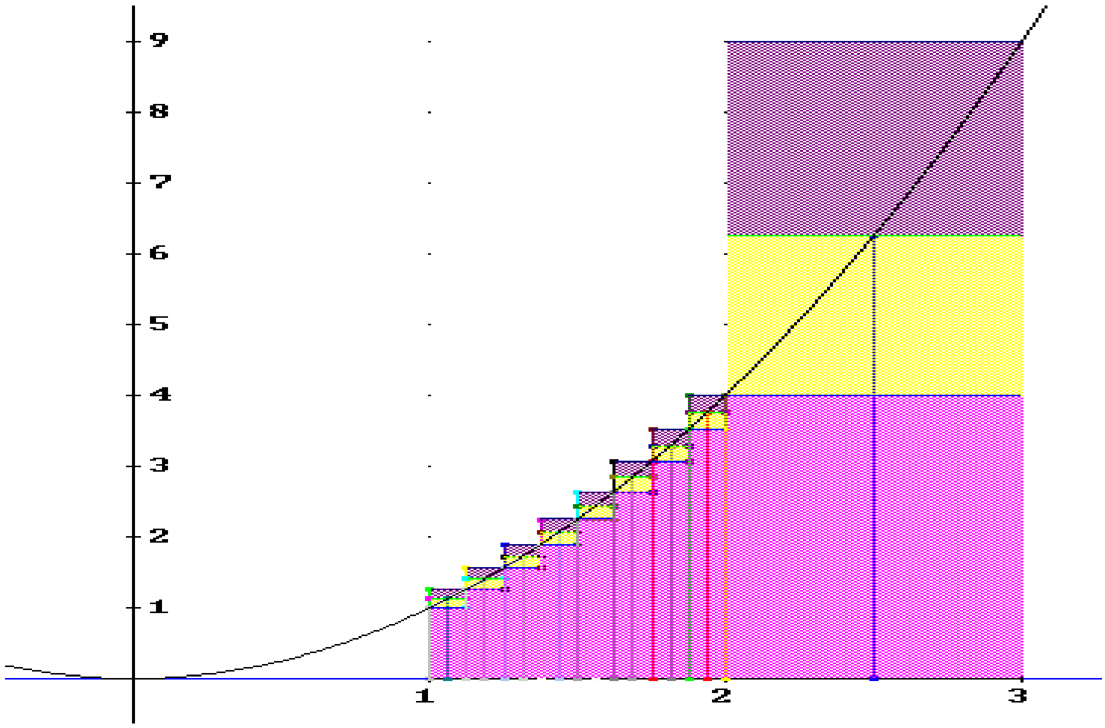
Realiza: , , **[**Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)]** y

Copia y pega y . Escribe: **COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(8)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **]**, **[**Aproximar, **]**

<u>Limítate a observar las distintas superficies irregulares y el valor de sus áreas.</u>

#90: COMPARA_SUPERFICIES_IRREGULARES(8)



#91: COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(8)

#92: $\left[\dfrac{787}{128}, \dfrac{2197}{256}, \dfrac{1475}{128}\right]$

#93: [6.1484375, 8.58203125, 11.5234375]

9º.- Dividamos el intervalo [1,3] en "n+1" subintervalos, según la partición Q_n, y actuemos de forma análoga al punto 7. No podemos representar las superficies inferiores y superiores de Darboux ni las superficies de Riemann, aunque podemos calcular sus sumas:

Escribe: **COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(n). [(Ctrl + Intro),]**

Escribe cada una de las expresiones obtenidas junto a la expresión correspondiente: ____

SUMA_RIEMANN_IRREGULAR(n):

SUMA_INFERIOR_IRREGULAR DE DARBOUX (n):

SUMA_SUPERIOR_IRREGULAR DE DARBOUX (n):

Posiciónate y pulsa en **[Cálculo/Límites]**. También puedes ir al icono superior lim

Escribe en **Variable** la letra: **n**

Escribe en **Punto** el símbolo: ∞ (Tómalo de la parte inferior derecha de la pantalla) Pulsa **Simplificar.** Copia la última línea, **Ctrl.+C**. Limpia la línea de entrada de datos y pega **Ctrl.+V**. Pulsa ≈

Es evidente que los límites no coinciden ¿Crees que la función es integrable? ¿Por qué? ____

#94: COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(n)

#95: $$\left[\frac{38\cdot n^2 - 9\cdot n + 1}{6\cdot n^2}, \frac{103\cdot n^2 - 1}{12\cdot n^2}, \frac{68\cdot n^2 + 9\cdot n + 1}{6\cdot n^2}\right]$$

#96: $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{38\cdot n^2 - 9\cdot n + 1}{6\cdot n^2}, \frac{103\cdot n^2 - 1}{12\cdot n^2}, \frac{68\cdot n^2 + 9\cdot n + 1}{6\cdot n^2}\right]$$

#97: $$\left[\frac{19}{3}, \frac{103}{12}, \frac{34}{3}\right]$$

#98: [6.333333333, 8.583333333, 11.33333333]

#99: SUMA_INFERIOR_IRREGULAR(n)

#100: $$\frac{38\cdot n^2 - 9\cdot n + 1}{6\cdot n^2}$$

#101: SUMA_RIEMANN_IRREGULAR(n)

#102: $$\frac{103\cdot n^2 - 1}{12\cdot n^2}$$

#103: SUMA_SUPERIOR_IRREGULAR(n)

#104: $$\frac{68\cdot n^2 + 9\cdot n + 1}{6\cdot n^2}$$

10º.- Al objeto de confirmar o desmentir las respuestas anteriores, aplicamos las diferentes instrucciones de DERIVE:

10.1.- Colorea el área que pretendes calcular.

10.2.- Calcula el área.

Escribe: **AreaUnderCurve(F(x),x,1,3)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **],** **[Ventana 2D,** **],**

[Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],** **[Representar Expresión,** **]**

Copia y pega y .

Escribe: **Int(F(x),x,1,3)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **],** **[**Aproximar, **]**

Comparemos este resultado con los anteriores:

Escribe: **[COMPARA_SUMAS(4), COMPARA_SUMAS(8), COMPARA_SUMAS(n)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **],** **[**Aproximar, **]**

Escribe: **[COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(4),**

COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(8),

COMPARA_SUMAS_IRREGULARES(n)]

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),** **],** **[**Aproximar, **]**

<u>Razona por qué crees que has acertado o fallado en las respuestas anteriores.</u>

____

Las respuestas a esta cuestión pueden encontrarse en el punto 7 del epígrafe anterior y en las cuestiones 7, 8 y 9 del presente ciclo de cierre.

11º.- DERIVE nos ha dado una respuesta, sin embargo, aún no estamos totalmente convencidos de la misma.

<u>¿Serías capaz de confirmar dicha solución con lápiz y papel? Explica con todo lujo de detalles en qué te has basado para obtener tu solución ¿Coincide tu solución con la del programa informático?</u> ____

CÁLCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE UNA FUNCIÓN, EL EJE DE ABSCISAS Y DOS RECTAS VERTICALES

12º.- Introduce la función $G(x)=x^3/8$, representa el área determinada por esta función, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$.

12.1.- Calcula la integral de dicha función entre los extremos -2 y 4.

12.2.- Calcula el área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$.

Escribe: **G(x):= (x^3)/8** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**]

Escribe: **PlotInt(G(x),x, – 2,4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**],

[Ventana 2D,], [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión,]

Copia y pega y .

Escribe: **Int(G(x), x, – 2, 4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**]

Escribe: **Int(G(x), x, 2, 4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**]

Razona por qué crees que has obtenido estos resultados ¿Qué has calculado?

Escribe: **PlotInt(abs(G(x)),x, – 2,4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**]

[Ventana 2D,], [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión,] Copia y pega y .

Escribe: **Int(abs(G(x)), x, – 2, 4)** [Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),**]

Escribe: **– Int(G(x), x, – 2, 0)** + **Int(G(x), x, 0, 4)** Pulsa

Ahora has obtenido un nuevo resultado, distinto al anterior ¿Qué crees que has hecho? ¿Cuánto crees que vale el área comprendida entre la función $G(x) = x^3/8$, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 4$?

¿Qué debes hacer para calcular el área comprendida entre una curva, el eje de abscisas y dos rectas verticales?

CÁLCULO DEL ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

13º.- Introduce las funciones $P(x) = x^3 + 1$ y $Q(x) = 2x^2 + x - 1$. Representa y calcula el área comprendida entre estas dos curvas.

Escribe: **[P(x):= x^3 + 1, Q(x):= 2x^2 + x – 1, H(x):=P(x) - Q(x)]**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

Escribe: **Solve(H(x) = 0, x)** **[**Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

¿Qué has obtenido con la ejecución de este último comando? Observa, si es necesario, la última representación gráfica. ______________________________

Escribe: **AreaBetweenCurves(P(x),Q(x),x, – 1,2)**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

[Ventana 2D,], [Editar/Borrar Todas las Gráficas **(Crtl + D)],**

[Representar Expresión,] Copia y pega y

Escribe: **[Int(H(x),x,-1,1), Int(H(x),x,1,2), Int(abs(H(x)),x,-1,2)],**

[Introducir y Simplificar **(Ctrl + Intro),]**

Explica brevemente lo que acabamos de hacer. ______________________________

Las soluciones de estas dos últimas cuestiones coinciden con la novena y la décima de los ciclos de confirmación.

FUNCIÓN INTEGRAL

14º.- En clase se ha comentado que la función integral es el área recorrida entre la gráfica de una función, el eje de abscisas, la recta x=a y una recta vertical que se desplaza a la derecha de a.

Consideremos la función h(x)=x/4, sea $H(x) = \int_1^x h(t)\,dt$ ***siendo 1<x. Se pide:***

> ***14.1.- Calcula H(x).***
>
> ***14.2.- Representa H(x) como el área recorrida.***
>
> ***14.3.- Representa la función H(x) según la forma clásica.***

Escribe: **h(t):=t/4**, pulsa . Pulsa , marca Integral **Definida**, escribe en **Variable** t, **Límite Superior** x, **Límite Inferior** 1. Pulsa **Simplificar**.

Escribe: **FUNCION_INTEGRAL**, pulsa y .

Posiciónate en **[Seleccionar/Rango de la Gráfica]** pulsa.

Escribe en **Horizontal** los siguientes valores: **– 1, 11, 12.**

Escribe en **Vertical** los siguientes valores: **– 1, 7, 8**. Pulsa **SÍ.**

Pulsa . Copia y pega y .

Explica lo que ha ocurrido: ____

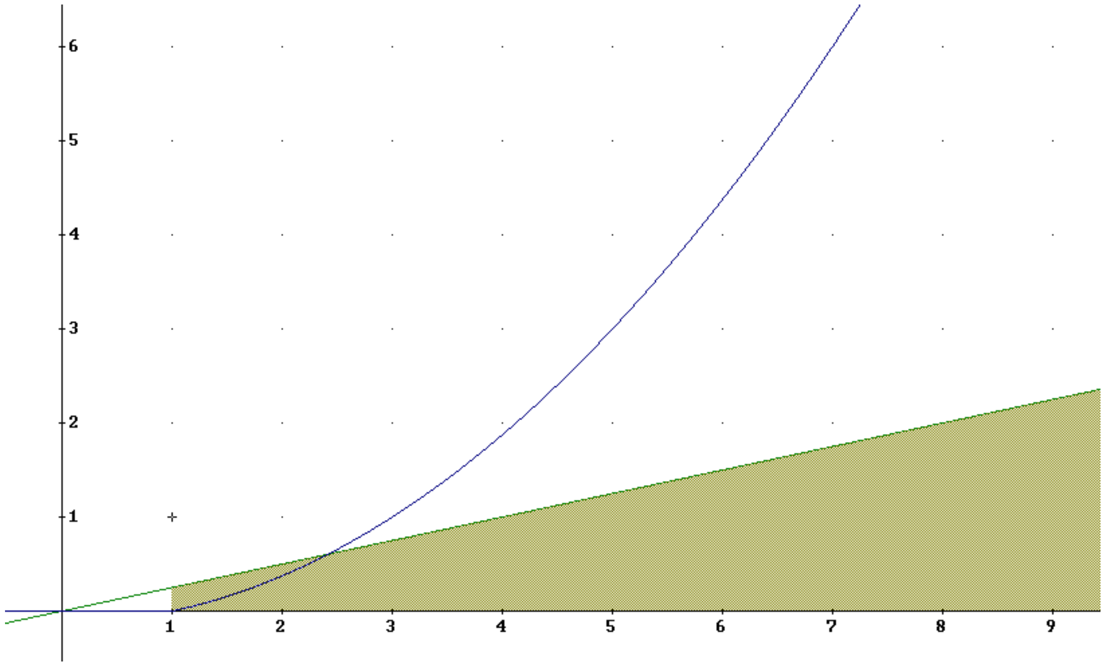
#105: $h(t) := \frac{t}{4}$

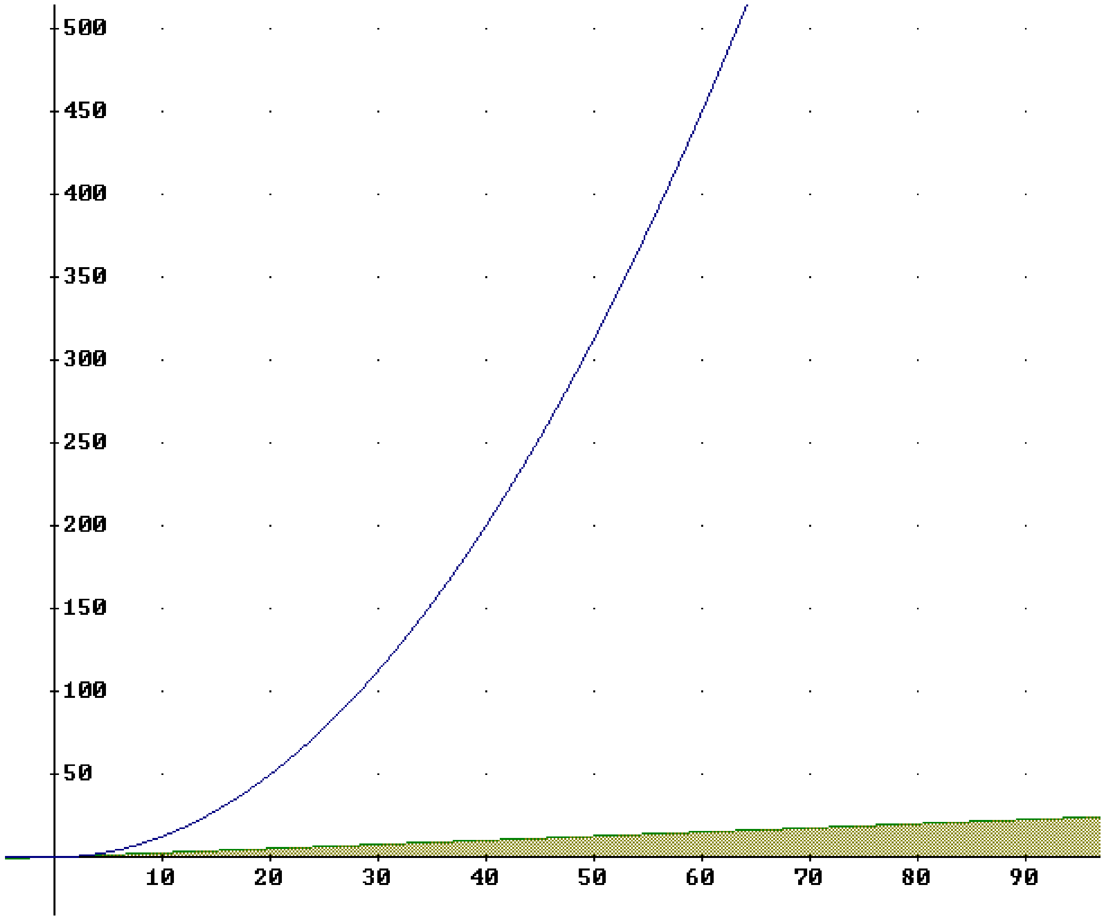
#106: $\frac{t}{4}$

#107: $\int_1^x \frac{t}{4}\,dt$

#108: $\frac{x^2 - 1}{8}$

#109: FUNCION_INTEGRAL


6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9


500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
10
20
30
40
50
60
70
80
90