Universidad de Valladolid

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Especialidad de Matemáticas). Curso 2014-2015

CURVAS CÓNICAS DESDE SU ORIGEN HASTA SUS APLICACIONES EN LA ACTUALIDAD

Presentado por:

Alberto Muñoz González

Dirigido por:

Dra. Mª Encarnación Reyes Iglesias

Valladolid, junio de 2015

0. ÍNDICE

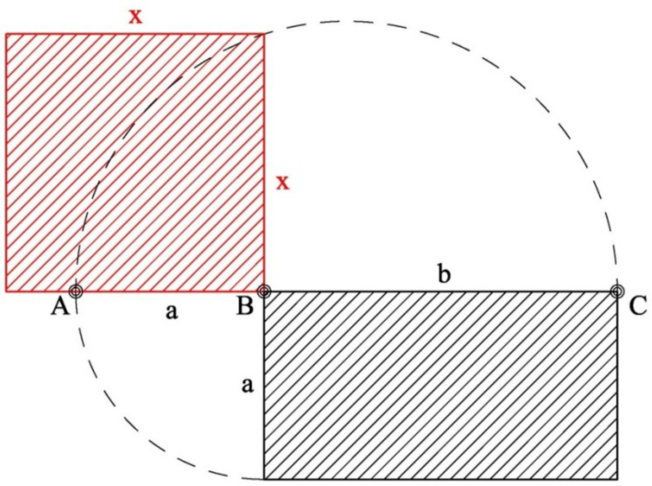
1. HISTORIA DE LAS CÓNICAS

BREVE RECORRIDO HISTÓRICO DE LAS CURVAS CÓNICAS

Pericles, orador y político ateniense, murió en el año 429 a.C. a causa de la peste que asoló Atenas. La catástrofe de la peste parece que motivó uno de los tres problemas clásicos de la antigüedad: la duplicación del cubo o problema de Delos. Se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delos para preguntar cómo podría conjurarse la peste, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo. Este problema se enuncia así: dado un cubo de lado a, construir utilizando sólo regla y compás, otro cubo cuyo volumen sea el doble del primero.

Los griegos conocían la forma de cuadrar un rectángulo, es decir si el rectángulo tiene por lados a y b, encontrar un cuadrado cuya área es ab. Este problema equivale a verificarse la proporción continua:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$



$$a \cdot b = x^2$$

Así mismo, intentaron cómo interpolar dos medias entre a y b:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Fue **Hipócrates de Quios** (470 a.C. - 410 a.C.) el primero en reconocer que este problema era equivalente a resolver la duplicación del cubo y **Menecmo** (380 a.C. - 320 a.C.), el primero en descubrir que existían curvas con la propiedad deseada.
En efecto, de la proporción se deduce el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ay = x^2 \\ ab = xy \\ xb = y^2 \end{cases}$$

En términos de curvas, el problema se reduce a encontrar la intersección de dos de estas curvas. Se toman dos de las ecuaciones, que en lenguaje de hoy son dos parábolas:

$$\begin{cases} ay = x^2 \\ xb = y^2 \end{cases}$$

Despejando y de la primera:

$$y = \frac{x^2}{a}$$

y sustituyendo en la segunda:

$$xb = \frac{x^4}{a^2}$$

Al considerar $b = 2a$:

$$x \cdot 2a = \frac{x^4}{a^2}$$

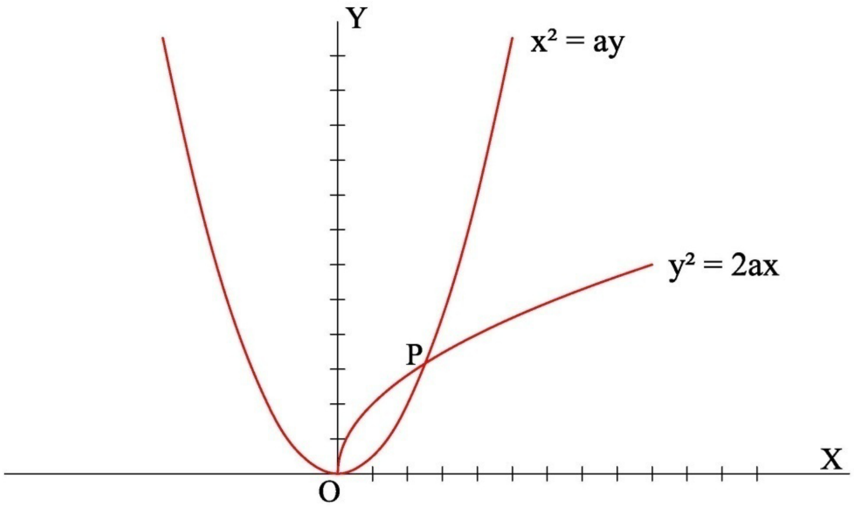
Y operando llegamos a la expresión:

$$2a^3 = x^3$$

de donde se obtiene:

$$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$$

$$y = a\sqrt[3]{4}$$



Si se toman ahora las ecuaciones:

$$\begin{cases} xb = y^2 \\ ab = xy \end{cases}$$

Despejando y de la segunda:

$$y = \frac{ab}{x}$$

y al sustituir en la primera:

$$xb = \left(\frac{ab}{x}\right)^2$$

Si $b = 2a$:

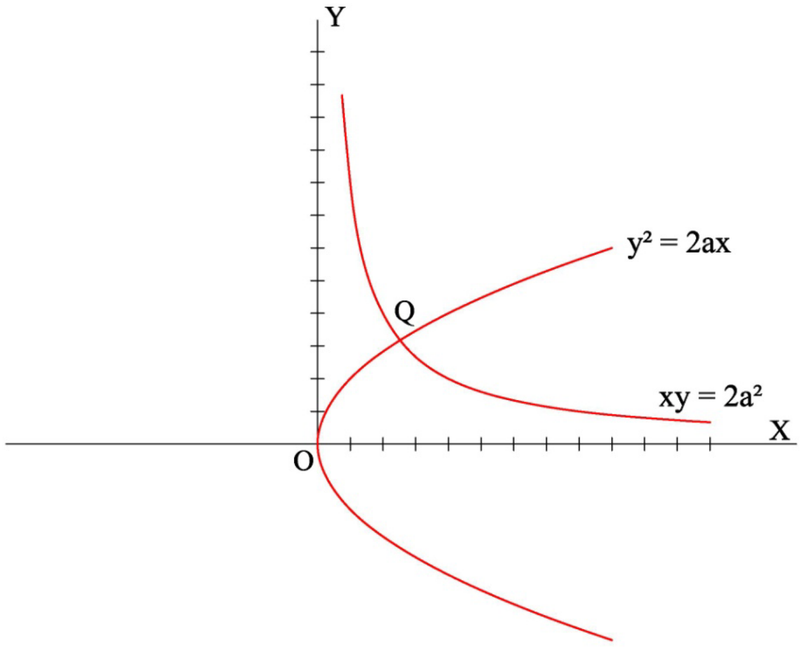
$$2ax = \left(\frac{2a^2}{x}\right)^2 \; ; \;\; 2ax = \frac{4a^4}{x^2}$$

$$2ax^3 = 4a^4$$

Y operando llegamos a la expresión:

$$x^3 = 2a^3$$

que coincide con la hallada anteriormente.



Por último si tomamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ ab = xy \end{cases}$$

Despejando a de la primera:

$$a = \frac{x^2}{y}$$

y sustituyendo en la segunda:

$$\frac{x^2}{y} b = xy$$

Al considerar $b = 2a$:

$$\frac{x^2}{y} \cdot 2\left(\frac{x^2}{y}\right) = xy$$

Operando:

$$\frac{x^2}{y} \cdot \frac{2x^2}{y} = xy; \qquad \frac{2x^4}{y^2} = xy$$

$$2x^4 = xy^3$$

$$2x^3 = y^3$$

Despejando y:

$$y = \sqrt[3]{2x^3} = x\sqrt[3]{2}$$

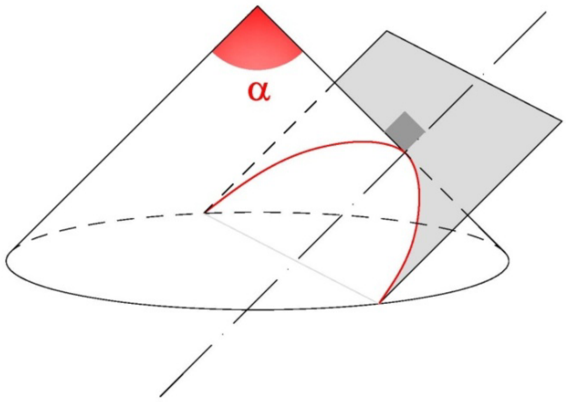
El valor de x es el del lado buscado del cubo. Sin embargo este número no es construible con regla y compás (Wantzel, 1837). Es decir, el problema de la duplicación del cubo es irresoluble con regla y compás.

Menecmo no utilizó este lenguaje analítico sino que se basaría en la construcción de puntos de las curvas al intersecar un cono con un plano, como se indica a continuación. Algunos historiadores sugieren que Menecmo tuvo que tener conocimientos de cierta geometría analítica.

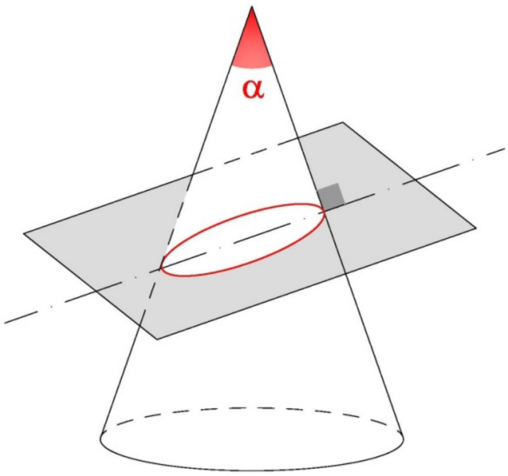
Menecmo, (380 a.C. - 320 a.C.), uno de los maestros de Alejandro Magno, obtuvo las curvas por corte de un cono circular de una sola hoja con un plano perpendicular a una generatriz del mismo. Las curvas buscadas eran parábolas: $ay = x^2$, $xb = y^2$ o hipérbolas $xy = 2a^2$, sin embargo aparecieron también las elipses.

Los conos que utilizó Menecmo fueron:

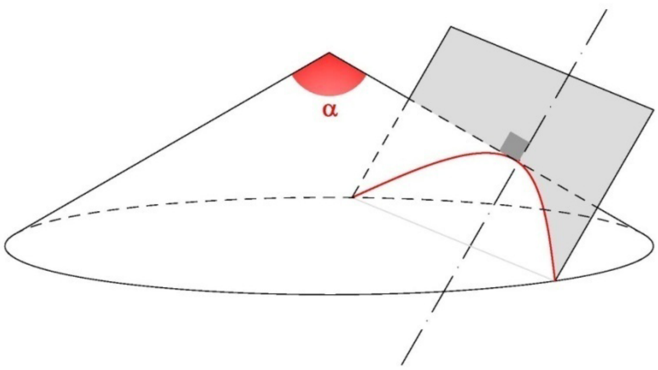
- Un cono circular de semi abertura 45 grados (cono rectángulo), con el que obtuvo la parábola al seccionar el cono con un plano perpendicular a una generatriz.



- Un cono de semi abertura menor de 45 grados (cono acutángulo), con el que obtuvo la elipse al ser seccionado el cono con un plano perpendicular a una generatriz.



- Un cono de semi abertura mayor de 45 grados (cono obtusángulo), con el que obtuvo la hipérbola cuando el cono se interseca con un plano perpendicular a una generatriz.



Euclides (325 a.C. - 265 a.C.), además de sus famosos *Elementos*, escribió un libro sobre cónicas, pero no se ha conservado.

Arquímedes (287 a.C. - 212 a.C.) consiguió cuadrar un segmento de parábola (libro: *La cuadratura de la parábola*) y calculó el área de una elipse (libro: *Sobre Conoides y esferoide*s). Dice la leyenda que conocedor de las propiedades de la parábola, utilizó ésta para ganar la batalla de Siracusa, quemando las naves enemigas mediante espejos reflectores. Estudios más recientes desmienten la hazaña.

Apolonio de Perga, (262 a.C. - 180 a.C), cuyos ocho libros *Cónicas* no sólo resumían el conocimiento sobre el tema que existía hasta ese momento, sino que ampliaban y sistematizaban el mismo. Según los escritos y comentarios conservados sobre las *Cónicas* de Apolonio que hizo Eutocio, (480 - 540), Apolonio fue el primero en probar que cualquier plano que interseque a cualquier cono siempre produce una cónica (degenerada o no), conservándose las propiedades de las curvas obtenidas. Es decir, no era necesario un cono recto, o agudo, u obtuso en el sentido de los conos de Menecmo, ni que el plano cortase perpendicularmente a una generatriz del cono. Así pues, de cualquier cono se pueden obtener las tres secciones cónicas sin más que variar la inclinación del plano que corte al cono. Además, Apolonio definió el cono de dos hojas de la siguiente forma:

“Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo, se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble”

Esta definición de cono circular se conserva tal cual hoy día.

Después de esta definición Apolonio convirtió la hipérbola en la curva de dos ramas tal como se considera actualmente. Los antiguos geómetras hablaban de dos hipérbolas.
Respecto a la denominación de estas secciones cónicas, también fue Apolonio el que utilizó las palabras elipse, hipérbola y parábola para nombrarlas. Los pitagóricos griegos ya habían utilizado los vocablos *ellipsis* (deficiencia), e *hyperbola* (exceso) asociados a la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante áreas, y Arquímedes ya había utilizado el de *parábola* (equiparación, es decir, ni deficiencia, ni exceso) para referirse a la sección de un cono rectángulo.

Apolonio utilizó estos nombres, no en referencia a los ángulos del plano con el cono para producir la sección (interpretación errónea de Eutocio en uno de sus comentarios al tratado de Apolonio *Cónicas*), sino como consecuencia de la técnica pitagórica de la *Aplicación de las Áreas* que se cumplen en las tres secciones cuando se considera el *“latus-rectum”*, *l*, que las caracteriza.

$$y^2 < lx\ (elipse), y^2 > lx\ (hipérbola), y^2 = lx\ (parábola)$$

A **Pappus de Alejandría** (290 d.C. - 350 d.C.) se debe la noción de foco de una parábola y directriz de una sección cónica. También se debe a Pappus la siguiente definición:

Una sección cónica se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que las distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz) están en una razón constante (excentricidad).Si esta razón es uno, la sección es una parábola, si es menor que uno, es una elipse y si es mayor que uno es una hipérbola.

El poeta y matemático persa **Omar Khayyám** (1048 - 1131) trabajó con los libros *Cónicas* de Apolonio, después de ser traducidos al árabe, y utilizó las secciones cónicas para resolver ecuaciones cúbicas.

Galileo Galilei (1564 - 1642), descubrió que los proyectiles, despreciando la resistencia del aire, seguían trayectorias parabólicas.

Kepler, Johann (1571-1630)
Demostró, en su conocida primera ley, que las órbitas de los planetas son trayectorias elípticas en uno de cuyos focos está el sol. En su segunda ley probó que el radio vector que une el sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

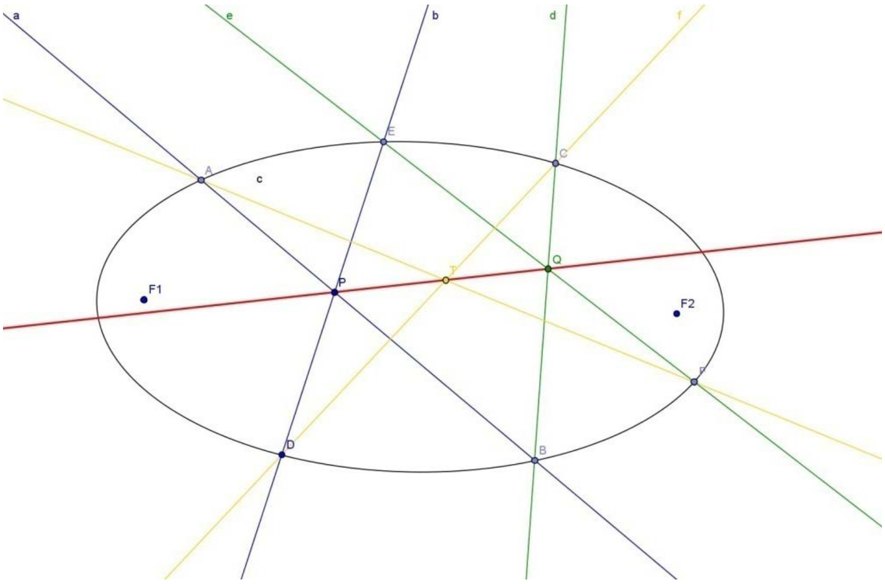
Kepler consideró las infinitas secciones cónicas que se obtienen por el llamado *principio de continuidad* que se explica a continuación: a partir de una sección cónica formada por dos rectas cuyos focos coinciden en su intersección, se obtiene una familia de hipérbolas cuando uno de los focos se va alejando gradualmente del otro. Cuando este foco se ha alejado infinitamente se obtiene una parábola y si el foco móvil traspasa el punto del infinito acercándose de nuevo por el otro lado, se obtiene un conjunto infinito de elipses; finalmente, cuando los dos focos coinciden de nuevo, se origina una circunferencia. Así pues Kepler consideraba cinco tipos de cónicas: dos rectas que se cortan, hipérbola, parábola, elipse y circunferencia.

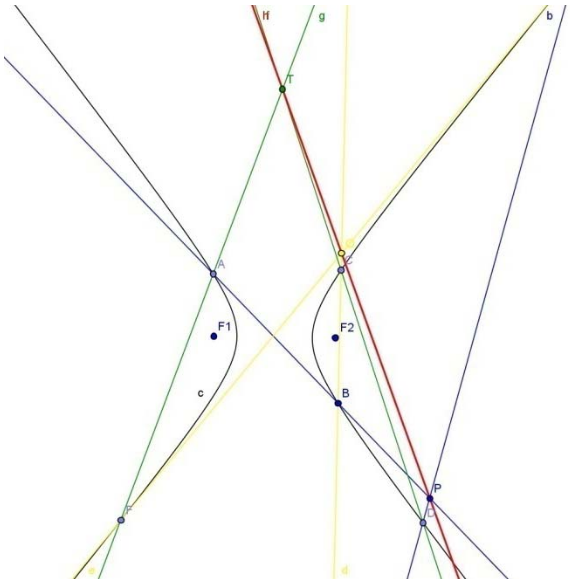
Desargues, Girad, (1591 - 1661), arquitecto e ingeniero militar francés, en el contexto de los trabajos de perspectiva del Renacimiento, utilizó una incipiente geometría proyectiva para el estudio de cónicas, no reconocida en su tiempo, al coincidir con los triunfos del álgebra, la geometría analítica y los progresos hacia el cálculo infinitesimal.

René Descartes, (1596 - 1650), su recién descubierta Geometría Analítica sería aplicada al estudio de las cónicas, reduciendo los problemas geométricos de éstas a su tratamiento algebraico.

Pierre de Fermat (1601 - 1665), a principios de 1636 en su *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introducción a los lugares planos y sólidos), utilizando el leguaje algebraico de Vieta, estudia las curvas que se pueden expresar mediante ecuaciones de primer y segundo grado demostrando que son respectivamente las rectas y las cónicas.

Blaise Pascal (1623 - 1662) discípulo de Desargues, a los dieciséis años publicó su *Essay pour les coniques*, artículo de una única página que contiene su famoso teorema (*misterium hexagrammicum*) o teorema de Pascal:
Si se inscribe un hexágono en una cónica, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos están alineados.





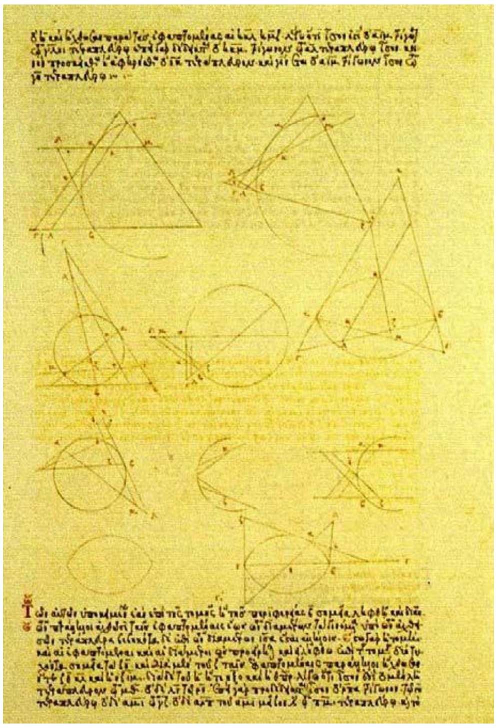
Isaac Newton (1642 - 1727), en el libro I, titulado *El movimiento de los cuerpos* de su famosa obra *Principia*, relaciona su Ley de gravitación universal con el movimiento que describen las órbitas celestes, demostrando que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica.

Poncelet, Jean-Victor (1788 - 1867), verdadero fundador de la geometría proyectiva, en su artículo "Recherches sur la determination d'un hyperbole equilatere" aparece el teorema de la circunferencia de los nueve puntos, conocido también con el nombre de *circunferencia de Feuerbach* (1800 - 1834).

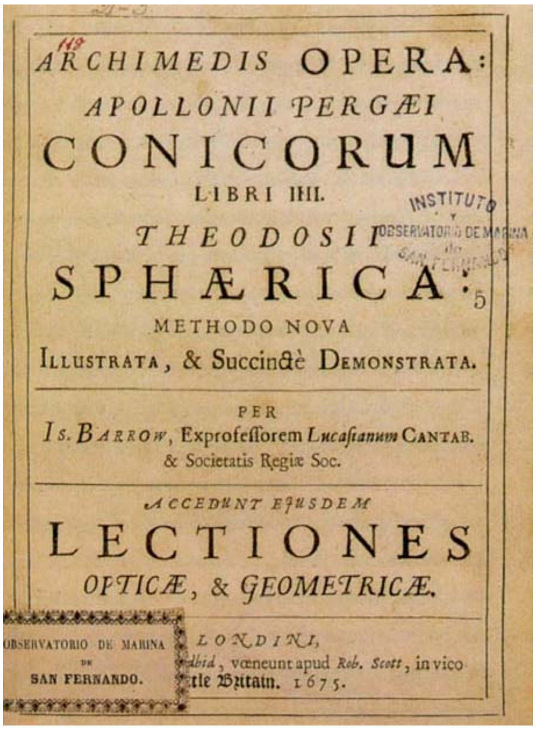
Germinal Pierre Dandelin (1794 –1847) matemático y profesor de ingeniería, autor en 1822 del teorema que demuestra que si un cono es cortado por un plano en una sección cónica, los focos de dicha cónica son los puntos donde el plano es tangente a dos esferas inscritas en el cono y tangentes al plano. Este teorema se conoce como teorema de Dandelin o teorema de las esferas de Dandelin.

Después de la aparición del cálculo matricial (**Cayley**, **Sylvester**, ...) en el s. XIX se adoptó este lenguaje para representar y estudiar las curvas cónicas.

Hoy día, además de continuar la investigación sobre las curvas cónicas, se buscan nuevas aplicaciones, por ejemplo, en el diseño paramétrico para simplificar y abstraer figuras reales.



Páginas de *Las Cónicas de Apolonio*. Colección vaticana (1536)



ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII
SPHÆRICA:
METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.
PER
IS. BARROW, Exprofessorem Lucasianum CANTAB.
& Societatis Regiæ Soc.
ACCEDUNT EJUSDEM
LECTIONES
OPTICÆ, & GEOMETRICÆ.
LONDINI,
...bid, vœneunt apud Rob. Scott, in vico
...tle Britain. 1675.

Edición de I. Barrow de *Las Cónicas* de Apolonio (Londres, 1675)

2. SECCIÓN DEL CONO

Como hemos visto, Menecmo trató de dar solución al problema de Delos mediante la intersección de dos curvas cónicas, y descubrió que éstas se obtienen al seccionar un cono de revolución por un plano. Inicialmente Menecmo tomó varios conos y los seccionó siempre con un plano perpendicular a la generatriz, de tal forma que, dependiendo del ángulo de apertura del cono (α), el plano producía una cónica distinta. Así, como apreciamos en la figura 1, un cono agudo, al ser cortado por un plano perpendicular a una de sus generatrices producía una elipse; si el cono era recto, la sección del plano originaba una parábola y en el caso de un cono obtuso, una hipérbola.

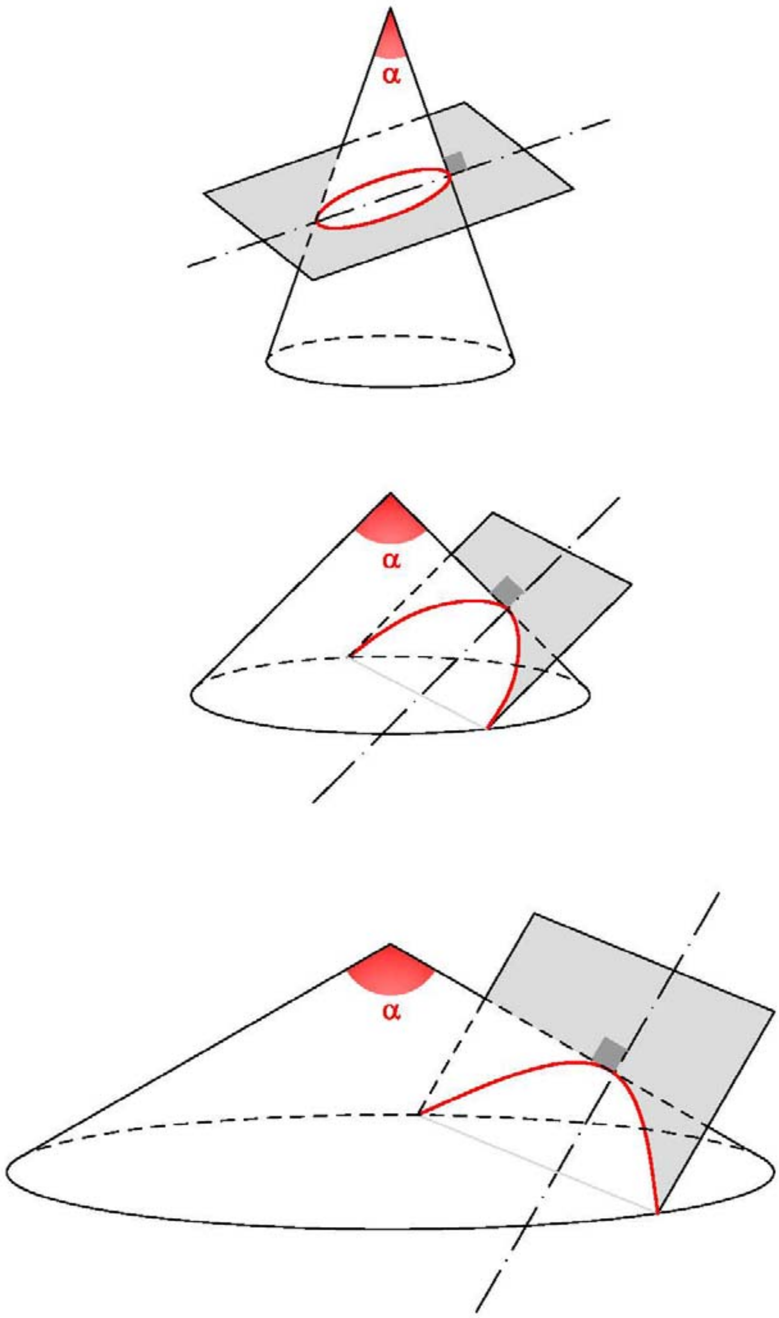
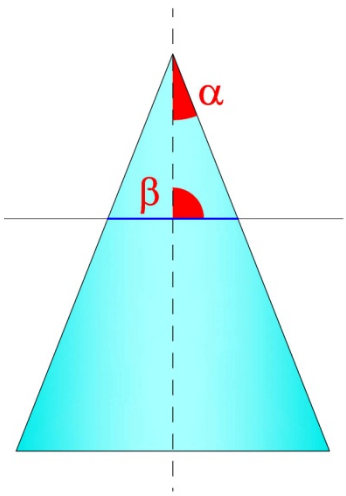
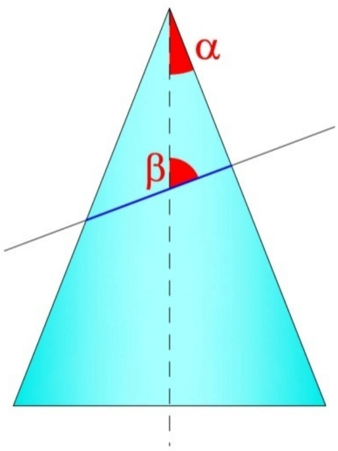


figura 1

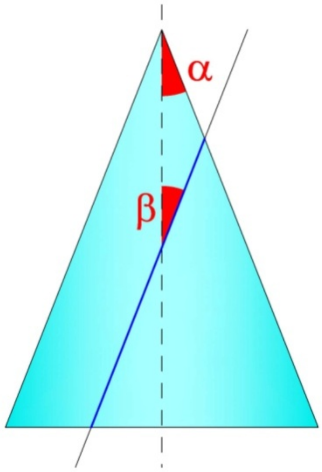
Apolonio generalizó el tipo de sección cónica que produce un plano al seccionar a cualquier cono, sea cual sea la amplitud del mismo. La curva resultante de dicha sección depende de la relación entre el ángulo que forma el eje del cono con una generatriz y el ángulo formado por el eje del cono y el plano de corte.



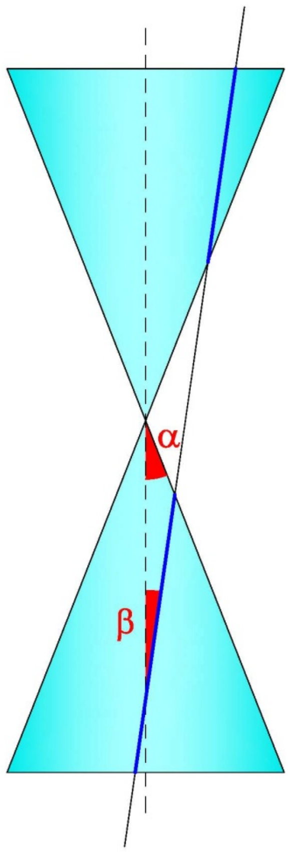
Si $\beta = 90º \rightarrow$ Circunferencia



Si $\beta > \alpha \rightarrow$ Elipse



Si $\beta = \alpha \rightarrow$ Parábola



Si $\beta < \alpha \rightarrow$ Hipérbola

Existen otros tipos de secciones que se producen cuando un plano corta a un cono de revolución pasando por el vértice del mismo. Son las llamadas *cónicas degeneradas*. En estos casos, se obtienen un punto o rectas, según el caso.

Así, un plano perpendicular al eje pasando por el vértice dará como resultado un punto, que es el propio vértice del cono. Si el plano, pasando por el vértice del cono, se apoya en una de sus generatrices, se obtiene una recta; y si el plano secciona totalmente al cono, siempre pasando por su vértice, el resultado son dos rectas que se cortan en un punto, el propio vértice (figura 2).

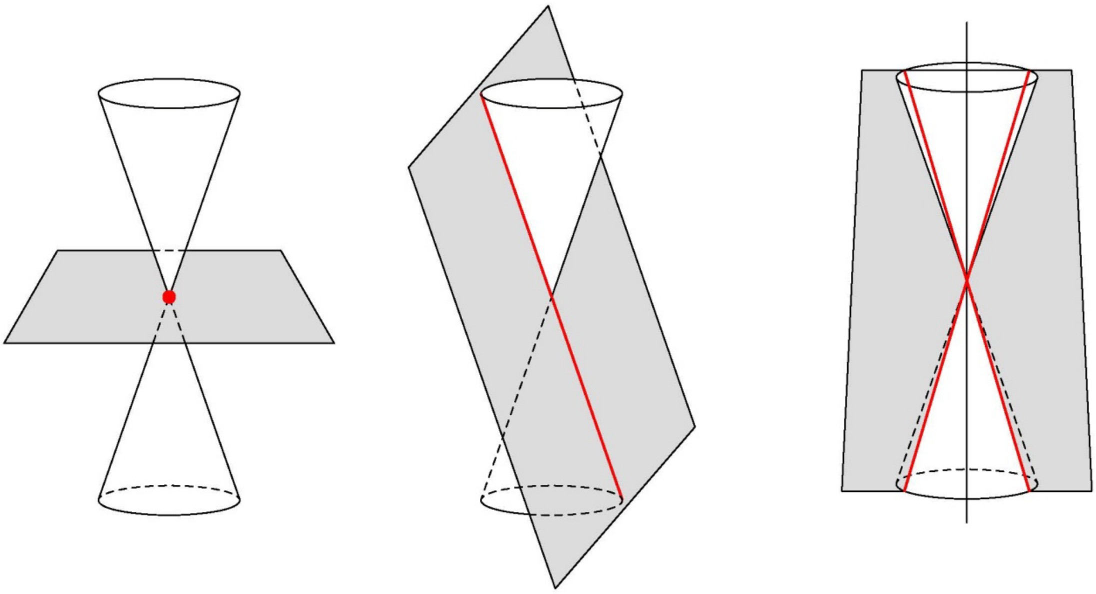


figura 2

3. ELIPSE

3.1. Ejemplos cotidianos donde aparecen elipses

Dentro de la familia de las curvas cónicas, la elipse es quizás la más conocida, gracias en parte a su presencia frecuente en nuestro entorno cotidiano.

Por ejemplo, un gesto tan común como inclinar ligeramente un vaso con agua nos da como resultado una elipse. El corte oblicuo de cualquier barra cilíndrica es elíptico. La luz del sol nos proporciona multitud de ejemplos, ya que la sombra que proyecta cualquier objeto esférico (como un balón) o circular (señal de tráfico), es una elipse, así como la luz emitida por una lámpara o flexo, también dibujará sobre una superficie esta curva cónica.

3.2. Definición de elipse

Como sección del cono
La elipse es la curva obtenida al seccionar un cono de revolución por un plano, de tal forma que el ángulo que forma el plano con el eje del cono es mayor que el formado por el eje y cualquier generatriz del cono.

Como lugar geométrico
Llamamos elipse al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos prefijados llamados focos es constante.

3.3. Elementos de la elipse

- **Vértices, ejes y centro**
  La recta que une los focos corta a la elipse en dos puntos, llamados **vértices**. El segmento que une los vértices es el **eje mayor** de la elipse, y su punto medio, el **centro** de la elipse. La cuerda que pasa por el centro y es ortogonal al eje mayor, se llama **eje menor**, y sus puntos de corte con la elipse son también **vértices**. En definitiva, la elipse tiene cuatro vértices. Se denota por $2a$ la medida del eje mayor, y por $2b$ la medida del eje menor. Los segmentos mitades de los ejes mayor y menor se llaman **semiejes mayor y menor** respectivamente.

- **Focos**
  Son dos puntos prefijados, situados sobre el eje mayor, ambos a la misma distancia del centro, uno a la derecha de éste y otro a la izquierda. La situación de los focos de la elipse está en relación con la longitud de los ejes. La **distancia focal** tiene valor $2c$. Al eje mayor se le llama también **eje focal** y al menor **eje no focal**.

- **Radios vectores**
  Los segmentos que unen cualquier punto de la elipse con los focos se denominan radios vectores.

- **Circunferencia principal**
  Es la circunferencia que tiene por centro el de la elipse y radio a, es decir, la medida del semieje mayor. Se obtiene como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las tangentes a la elipse.

- **Circunferencia focal**
  Es la circunferencia que tiene por centro un foco de la elipse y radio $2a$.

- **Diámetro de la elipse**
  Es cualquier cuerda que pasa por el centro de la elipse.

- **Diámetro conjugado**
  Dado un diámetro de la elipse, su diámetro conjugado es el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas paralelas al primero. Los ejes son dos diámetros conjugados, y los únicos que son perpendiculares entre sí.

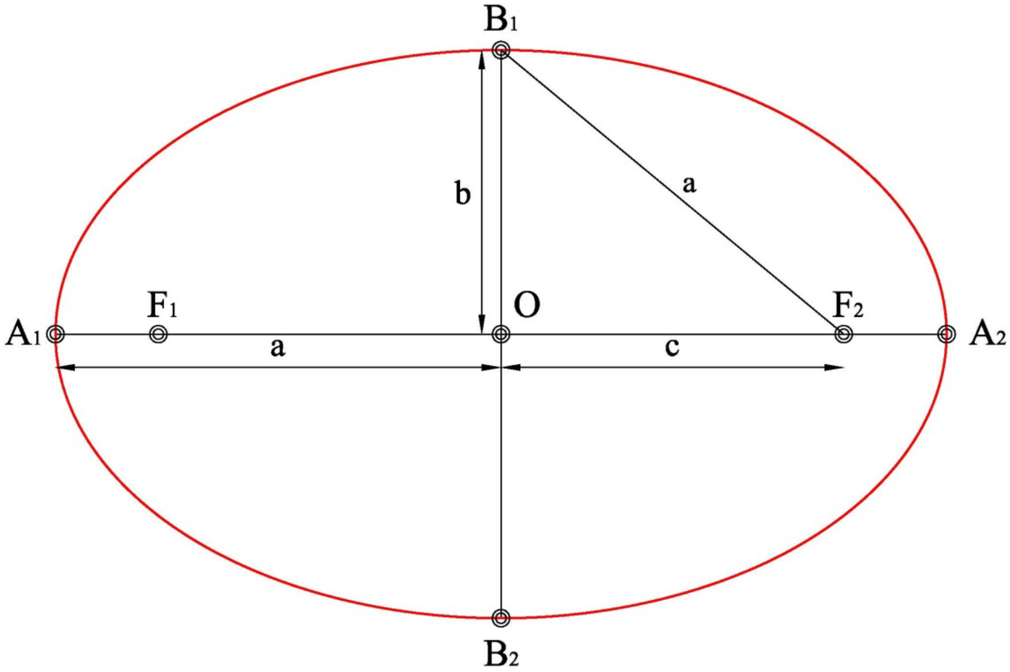


figura 1

La elipse es una curva cerrada y simétrica respecto a sus dos ejes.

3.4. Ecuación reducida de la elipse

Sea R={O,B} la referencia canónica del plano.

Determinemos la ecuación de una elipse cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas O = (0,0), cuyos ejes están sobre los ejes coordenados y sus focos sobre el eje X. La semidistancia focal es c, y las medidas de sus semiejes son a y b, con $a \geq b$.

En esta referencia, las coordenadas de los focos, de los vértices A y B y del punto P se muestran en la figura 2.

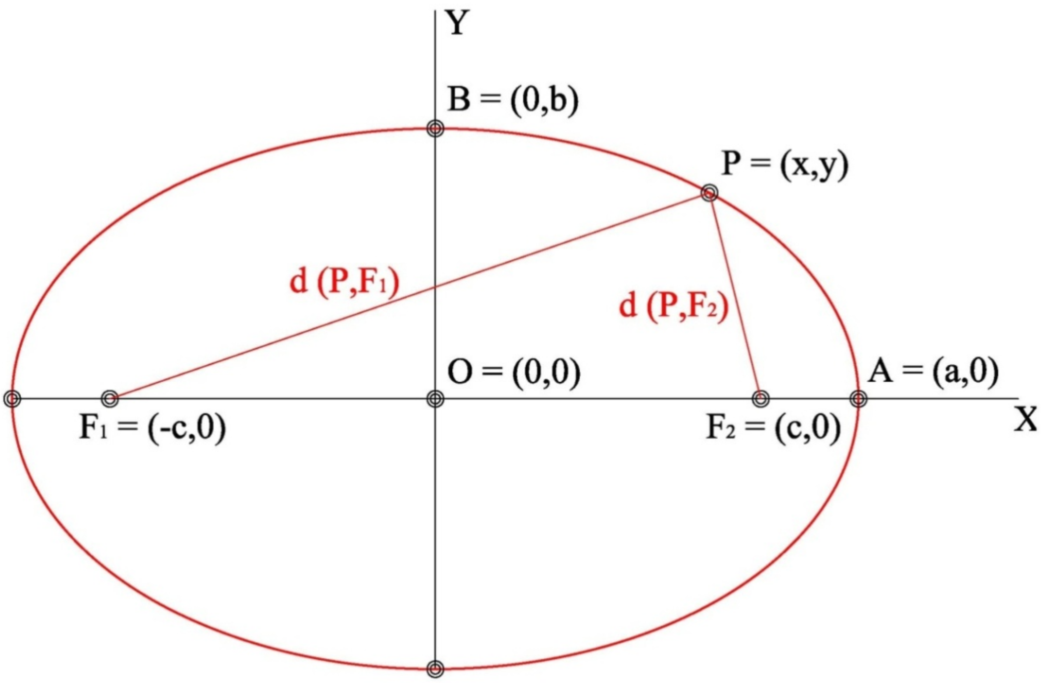


figura 2

El punto P = (x,y) estará en la elipse si:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = k$$

es decir:

$$d[(x,y),(c,0)] + d[(x,y),(-c,0)] = k \qquad donde\ k = constante.$$

El valor de la constante k es 2a, en efecto, realizando esta operación con el vértice A = (a,0) obtenemos:

$$k = d[(a,0),(c,0)] + d[(a,0),(-c,0)] = a - c + a + c = 2a \text{ (figura 2)}$$

Si tomamos el punto el B = (0,b):

$$2a = d[(0,b),(c,0)] + d[(0,b),(-c,0)] = \sqrt{c^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + b^2}$$

Es decir, de esta expresión deducimos que:

$$2a = 2\sqrt{c^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Esta relación métrica, fundamental en la elipse, determina que *a* es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos *b* y *c* (figura 1).

La expresión de las distancias planteadas es:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Pasando el primer sumando al segundo miembro y elevando ambos términos al cuadrado, obtenemos:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2+c^2+2xc+y^2=4a^2+x^2+c^2-2xc+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Reduciendo y simplificando:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$$

Elevando de nuevo al cuadrado y operando llegamos a la siguiente expresión:

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Y como $a^2-c^2=b^2$, la expresión adopta la forma:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividiendo ambos términos de la igualdad por $a^2b^2, (a,b\neq 0)$, obtenemos la ecuación:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

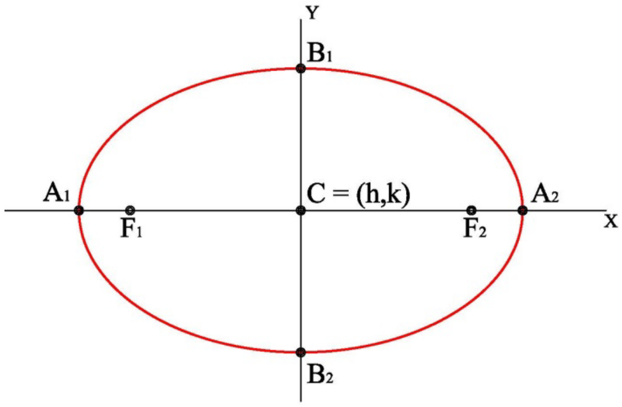
Esta es la ecuación reducida de una elipse cuyo centro está en el origen de coordenadas y sus ejes mayor y menor están sobre los ejes coordenados *X* e *Y* respectivamente.

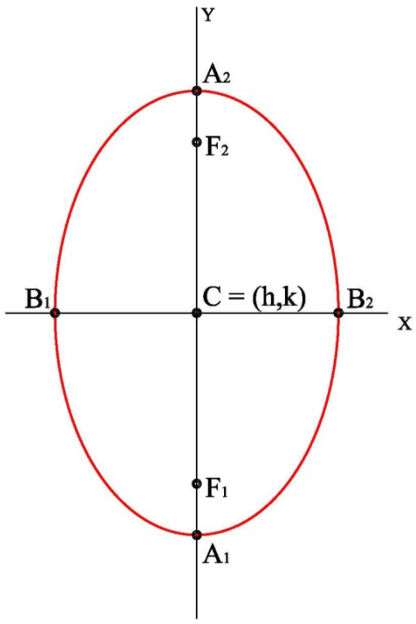
En el caso de que la elipse tenga su centro en el punto *(h,k)* y sus ejes sean paralelos a los ejes de coordenadas, su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Tabla resumen

A continuación se escriben las ecuaciones y se resumen los principales elementos de una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados (elipse bien posicionada).





Elipse bien posicionada con centro en $C=(h,k)$		
Eje mayor	Horizontal	Vertical
Ecuación	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
Vértices	$A_1=(h-a,k)$ $A_2=(h+a,k)$ $B_1=(h,k+b)$ $B_2=(h,k-b)$	$A_1=(h,k-a)$ $A_2=(h,k+a)$ $B_1=(h-b,k)$ $B_2=(h+b,k)$
Focos	$F_1=(h-c,k)$ $F_2=(h+c,k)$	$F_1=(h,k-c)$ $F_2=(h,k+c)$

3.5. Excentricidad de una elipse

A toda elipse se puede asociar un número real $e \in [0,1)$ llamado **excentricidad**, definida por el cociente:

$$e = \frac{c}{a}$$

La excentricidad nos da idea de lo lejos que está la elipse de ser una circunferencia.
En la figura 3 podemos apreciar claramente que, a medida que los focos se acercan al centro, la excentricidad toma un valor que se va aproximando a 0, y cuando coinciden los dos focos con el centro de la elipse, ésta es una circunferencia.

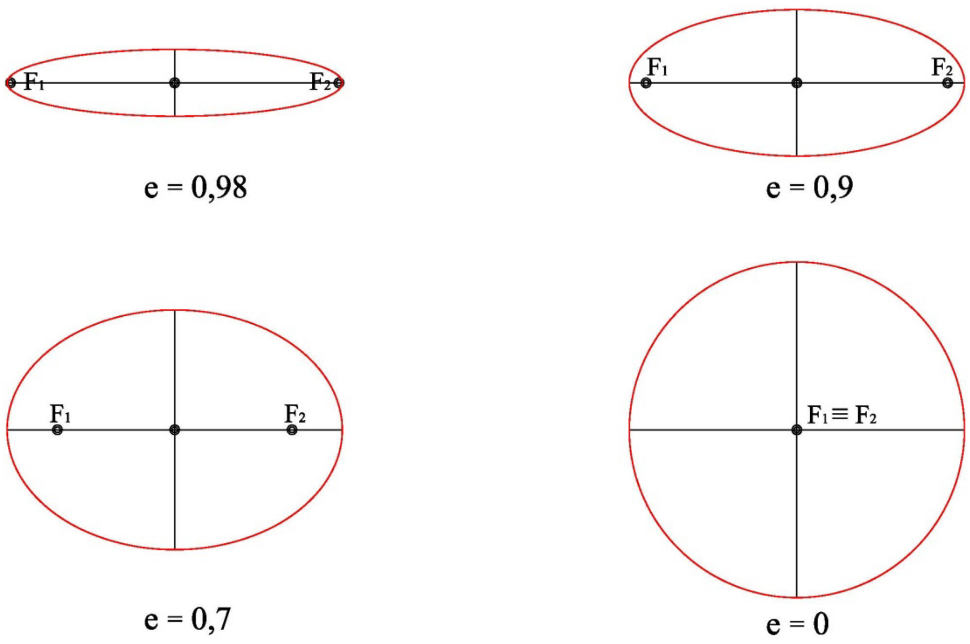


figura 3

3.6. Tangente a una elipse en un punto de la misma

Calcularemos en este apartado la ecuación de la recta tangente a la elipse en un punto (x_0 , y_0) cualquiera de ella, en la referencia *R* dada.

Se considera la ecuación reducida de una elipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

El valor de la derivada de una función en un punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a dicha función en ese punto.

Derivamos en forma implícita:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0$$

Despejamos:

$$\frac{yy'}{b^2} = -\frac{x}{a^2}; \qquad yy' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot x$$

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

En el punto (x_0 , y_0), tendremos:

$$y'(x_0) = -\frac{b^2\, x_0}{a^2\, y_0}$$

La ecuación (forma punto-pendiente) de la recta tangente es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

donde *m* es la pendiente de la recta, es decir:

$$m = -\frac{b^2\, x_0}{a^2\, y_0}$$

Sustituyendo:

$$y - y_0 = -\frac{b^2\, x_0}{a^2\, y_0}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{b^2\, x_0}{a^2\, y_0} \cdot x + \frac{b^2\, {x_0}^2}{a^2\, y_0}$$

$$a^2 y_0 y - a^2 {y_0}^2 = -b^2 x_0 x + b^2 {x_0}^2$$

$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 {y_0}^2 + b^2 {x_0}^2$$

Como (x_0 , y_0) es un punto de la elipse, entonces:

$$\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1 \iff {x_0}^2 b^2 + {y_0}^2 a^2 = a^2 b^2$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2$$

Y dividiendo por a^2b^2 $(a, b \neq 0)$ se tiene:

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Obtenemos de esta forma la ecuación de la recta tangente a la elipse en un punto (x_0 , y_0) de la misma.

A partir de la ecuación de la recta tangente, también podemos hallar la de la recta normal a la elipse en el mismo punto.

Si tenemos en cuenta que las rectas tangente y normal a la elipse en un punto de ella son perpendiculares entre sí, las pendientes, *m y m'* respectivamente de ambas rectas cumplirán la siguiente condición:

$$m \cdot m' = -1$$

Así pues:

$$m' = -\frac{1}{m}, \quad (m \neq 0)$$

Si $m = 0$, las rectas tangente y normal son paralelas, respectivamente, a los ejes X e Y.

$$m = -\frac{b^2\, x_0}{a^2\, y_0}; \qquad m' = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$$

Y la ecuación de la recta normal a la elipse en un punto (x_0 , y_0) vendrá dada por la expresión:

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$$

3.7. Esferas de Dandelin

El Teorema de Dandelin enuncia y demuestra que al cortar un cono con un plano, las esferas inscritas a dicho cono y tangentes a él, y además tangentes al plano que produce la sección, determinan los focos de la curva cónica que se genera, y éstos son los puntos de tangencia de las esferas con el plano.

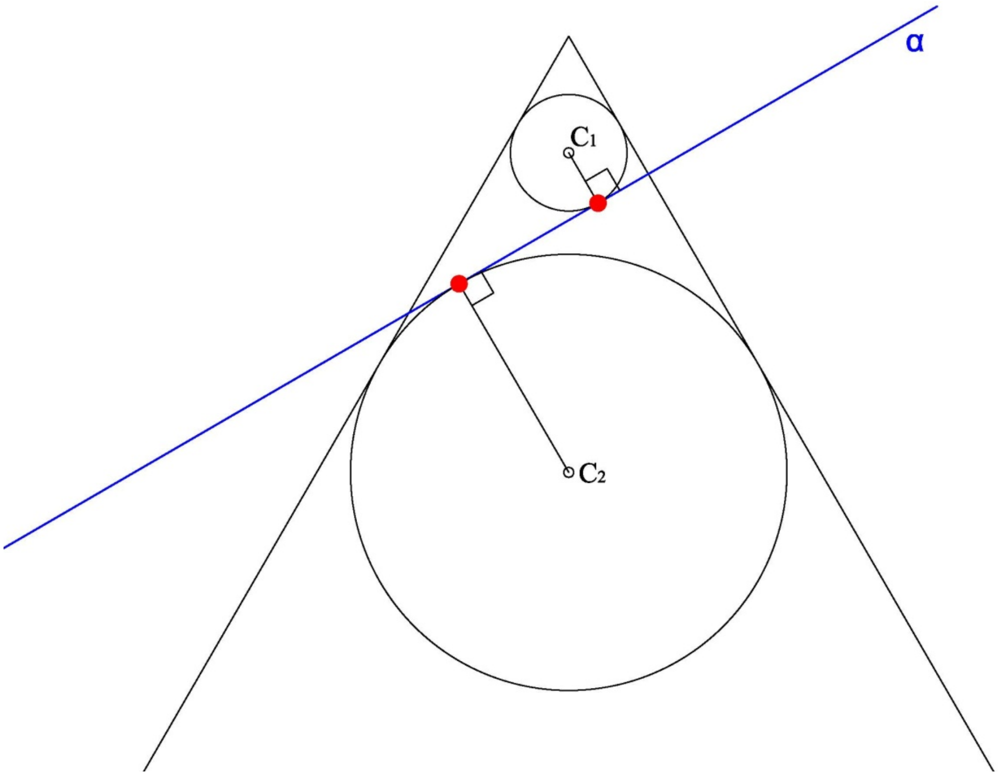


figura 4

La demostración se puede encontrar en muchos libros y tratados. Aquí presento una demostración teniendo en cuenta la didáctica de las matemáticas y la transversalidad de la educación, enlazando la asignatura de matemáticas con la de dibujo técnico, ya que en ambas materias las curvas cónicas se estudian en los dos cursos de bachillerato.

El proceso es el siguiente. Partimos de un cono visto en alzado, al que cortamos con un plano α de tal forma que, siguiendo las características que ya conocemos, obtenemos una elipse. En este alzado dibujamos las dos esferas tangentes al cono y al plano, cuyos centros son C_1 y C_2. Trazamos en alzado los puntos de tangencia de dichas esferas con el plano. Estos puntos serán los focos de la elipse (figura 4).

Uno de los temas que se estudian en dibujo técnico, dentro de los dedicados al sistema diédrico, es la sección de sólidos por planos, siendo uno de estos sólidos, precisamente, el cono. Así, tal y como se muestra en la figura 5, a través de las proyecciones vertical y horizontal (alzado y planta) del cono y el plano α, obtenemos las proyecciones de la elipse que se obtiene. Esta elipse puede dibujarse en verdadera magnitud y forma, abatiendo el plano α, como se muestra en la imagen. Teniendo los ejes de la elipse, hallamos los focos F_1 y F_2.

Una vez obtenida la elipse, el último paso consiste en superponerla sobre la imagen del cono en alzado, (figura 6) comprobando que los focos de la elipse coinciden exactamente con los puntos de tangencia de las esferas y el plano α.

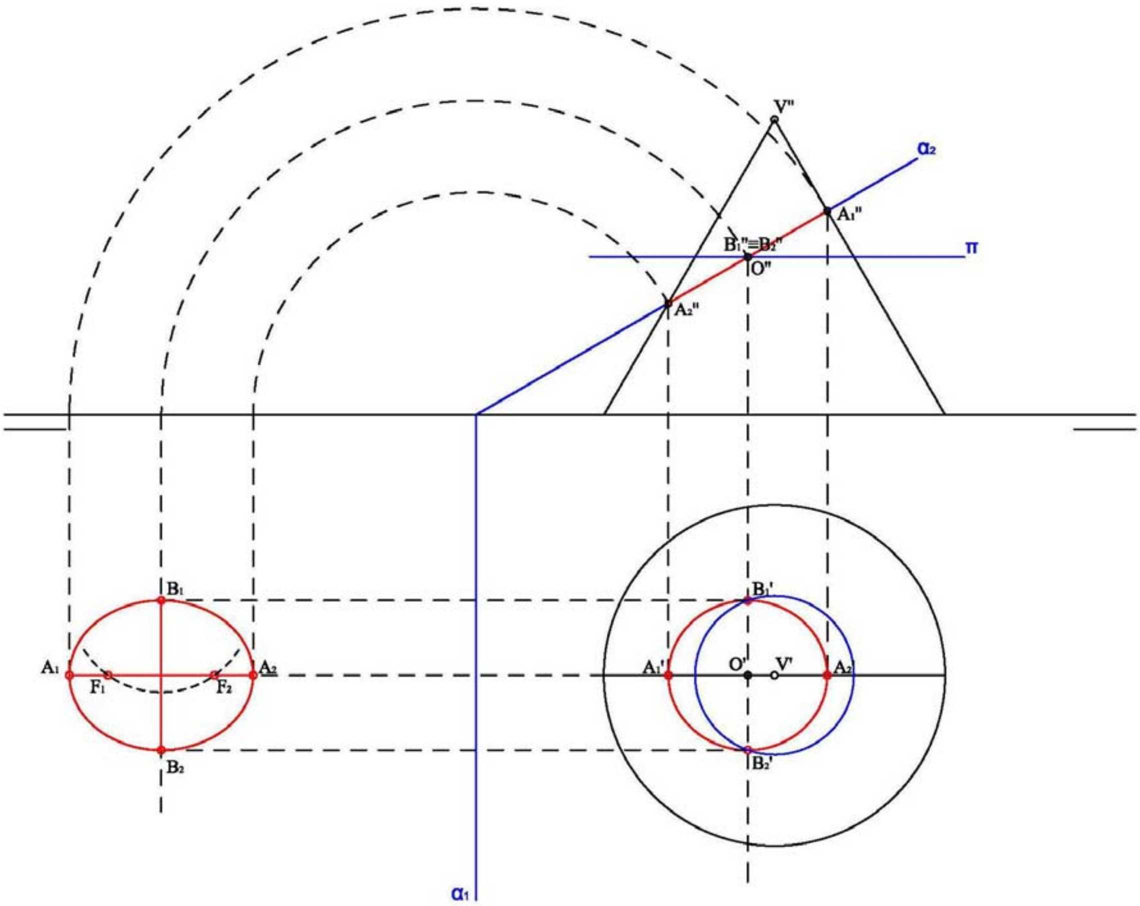


figura 5

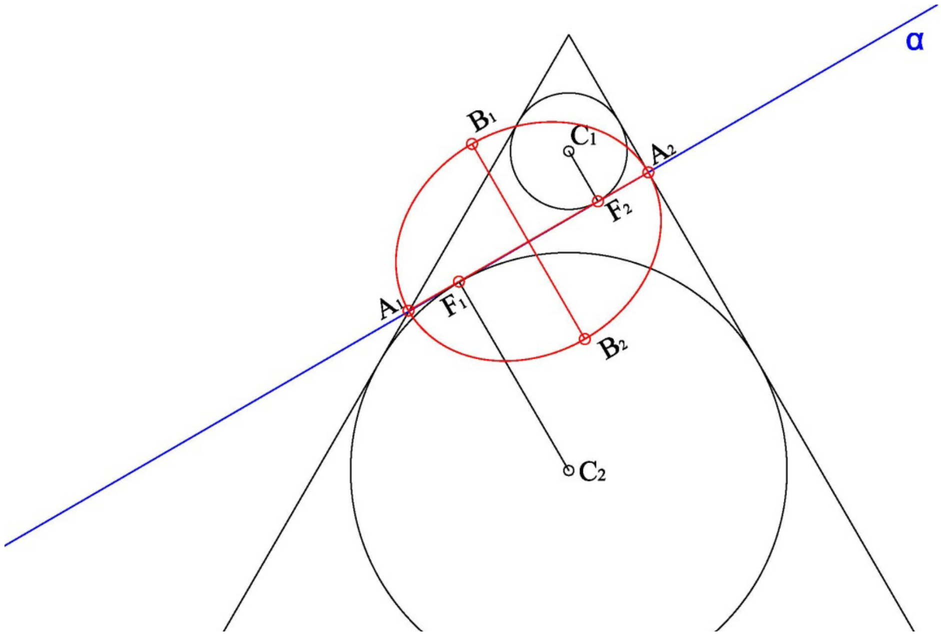


figura 6

3.8. Construcciones de la elipse

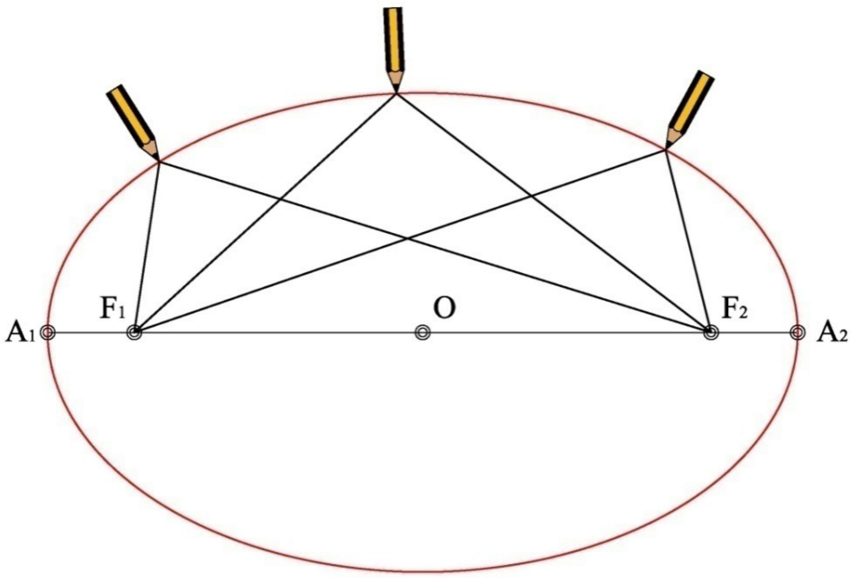
Existen varios métodos de construir una elipse; veremos aquí algunos de ellos, pasando desde los más simples, que se sirven de objetos cotidianos, hasta los más precisos utilizados en dibujo técnico.

Método del jardinero

Quizá el más sencillo y antiguo, ya que fue descubierto por los hermanos Muhammad, Ahmad y al-Hasan Banú Musá ibn Shakir en el siglo IX, que lo publicaron en el libro *Kitab al-shakl al-mudawwar al-mustatil (Book on an oblong round figure).*

Consiste en clavar dos chinchetas o puntas sobre una superficie y atar en ellas los dos extremos de una cuerda no tensa. La cuerda debe tener una longitud igual a la medida que queramos dar al eje mayor. Colocando un rotulador sobre la cuerda de manera que ésta quede tensa, observaremos que al desplazarlo por el papel, y siempre manteniendo la cuerda tensa, vamos trazando una elipse.

Esta forma puede utilizarse para trazar una elipse sobre un terreno, usando dos estacas a modo de clavos y un objeto que marque un surco. De aquí viene el nombre de "método del jardinero". Como podemos observar, los dos clavos o estacas resultan ser los focos de la elipse.



Por puntos (Dibujo Técnico). Figura 7

Aunque existen varios métodos para construir una elipse, muchos de ellos incluidos en el currículo de la asignatura de Dibujo Técnico en Bachillerato, vamos a ver el método de construcción por puntos, basado en la definición de la elipse como lugar geométrico.

Dados los ejes $\overline{A_1A_2}$ de medida $2a$ y $\overline{B_1B_2}$ de medida $2b$, se dibujan perpendicularmente los ejes de modo que el punto medio de ambos coincida en un punto O, que será centro de la elipse.

Con el compás, haciendo centro en B_1 o B_2 y tomando como radio a, se traza un arco que cortará al eje mayor en dos puntos, F_1 y F_2, focos de la curva.

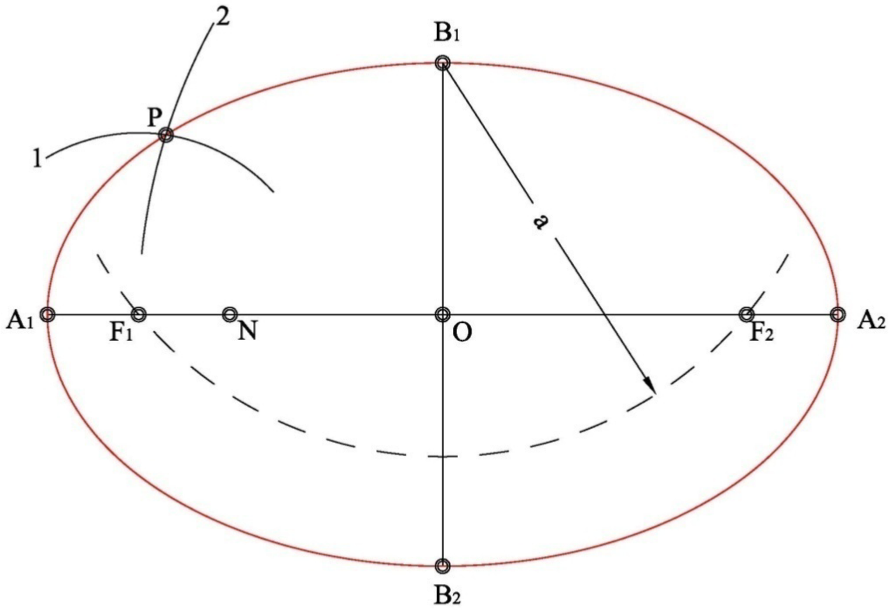


figura 7

A continuación se toma un punto N cualquiera en el eje mayor. Con radio $\overline{A_1N}$ y centro en F_1 se traza el arco 1, y con radio $\overline{A_2N}$ y centro en F_2 se traza el arco 2. Estos dos arcos se cortan en un punto P de la elipse. Repetimos el proceso tomando otros puntos sobre el eje mayor entre F_1 y F_2, y así vamos definiendo la curva, para finalmente unirlos con una plantilla de curvas. Es conveniente decir que, al ser la elipse simétrica respecto a ambos ejes, podemos hallar varios puntos de un cuarto de la curva y posteriormente hallar los simétricos respecto a los ejes mayor y menor.

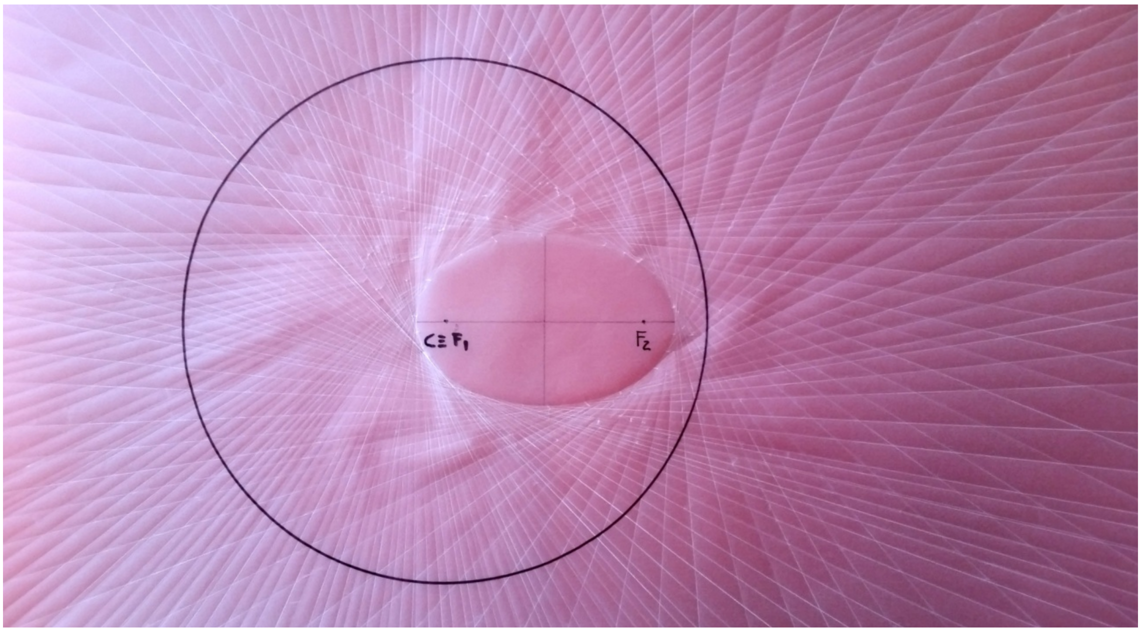
De esta forma, resulta evidente que:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_1N} + \overline{NA_2} = 2a$$

Papel plegado

Otra forma de obtener una elipse es a través del plegado de un papel (papiroflexia). Se consigue de la siguiente forma:

Sobre un papel dibujamos una circunferencia y dentro de ella, a una distancia menor que el radio, marcamos un punto. Comenzamos a hacer dobleces al papel de manera que hagamos coincidir el punto que hemos señalado con la circunferencia. Se marca bien el doblez y a continuación se desdobla, para seguidamente hacer coincidir de nuevo el punto sobre la circunferencia, en lugar distinto del anterior, y se repite la operación. Así, desplazando el punto a lo largo de toda la circunferencia y marcando los dobleces resultantes, obtendremos una serie de tangentes a la elipse que dejarán a ésta perfectamente definida en el papel. La elipse queda determinada como la envolvente de las tangentes. Como es evidente, el punto que desplazamos por la circunferencia será un foco, y el otro es el centro de la propia circunferencia. La circunferencia que hemos trazado al principio resulta tener como radio la longitud del eje mayor de la elipse, y al tener el centro en uno de los focos de ésta, entonces la circunferencia base de la construcción es una de las circunferencias focales de la elipse.



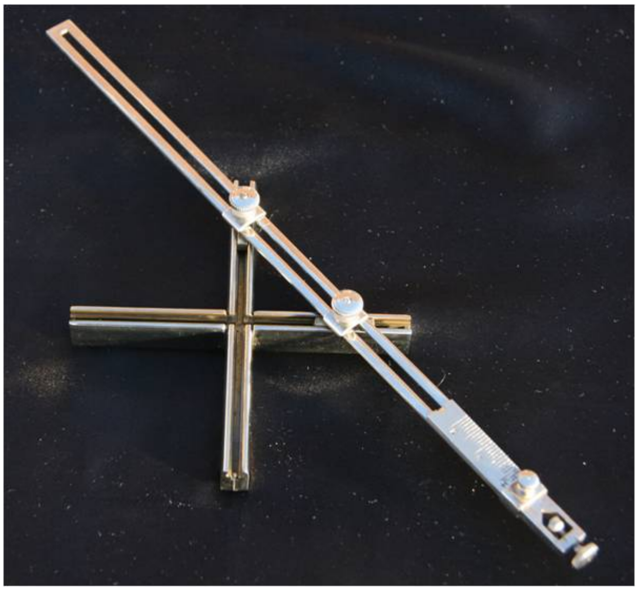
Elipsógrafos

Un elipsógrafo es un mecanismo para trazar elipses. Hasta la irrupción de los ordenadores los elipsógrafos eran profusamente usados, existiendo diversos tipos y marcas.

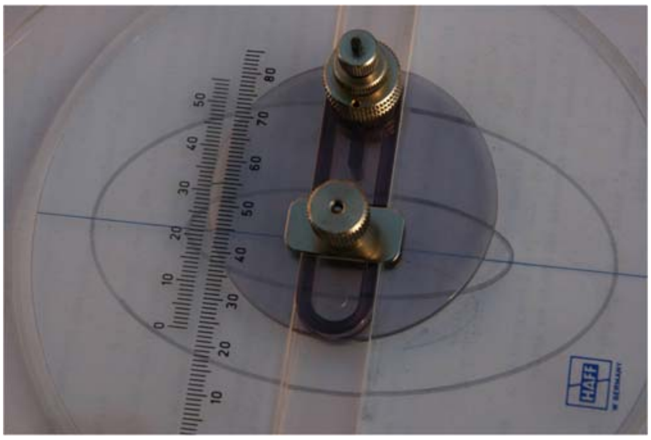
Uno de los más simples se llama elipsógrafo de Arquímedes o *trasmallo* de Arquímedes basado en la propiedad siguiente:

Si un segmento de longitud fija, cuyos extremos apoyados en dos ejes perpendiculares, se deslizan sobre ellos, durante el movimiento, un punto P fijo del segmento traza un cuarto de elipse en el cuadrante que contiene al segmento.

Este elipsógrafo es conocido como el trasmallo de Arquímedes aunque no hay evidencias claras de que lo inventara él.



Trasmallo de Arquímedes.
Colección particular MJGC-MMLM



Elipsógrafo actual HAFF
Colección particular MJGC-MMLM

Programas de Geometría dinámica
En la actualidad existen varios programas que facilitan enormemente las construcción geométricas, y que se usan cada vez más en el proceso de enseñanza-aprendizaje, durante la etapa de secundaria obligatoria, bachillerato, e incluso en universidad. El más habitual es Geogebra por su gratuidad, pero hay otros como Cabri o Cinderella que también son similares, pero no son libres.

Programas de diseño gráfico
Algunos programas como AutoCad permiten una rápida construcción de elipses.

Programas de cálculo simbólico
Son herramientas más complejas, como Maple, Mathematica o MatLab que dibujan las elipses a partir de sus ecuaciones paramétricas o implícitas.

3.9. Propiedades ópticas de la elipse

Como veremos a lo largo de este trabajo, todas las curvas cónicas tienen propiedades ópticas muy interesantes y de gran utilidad.

Si se coloca una fuente de luz en uno de los focos de un espejo elíptico, entonces la luz reflejada en el espejo se concentra en el otro foco.

Esta propiedad se enuncia geométricamente como:

La recta tangente a una elipse en un punto P forma ángulos iguales con los radios vectores que unen los focos con el punto P. Así mismo, los ángulos formados por los mismos radios vectores con la recta normal a la curva en el punto P, también son iguales.

En la figura 8 se aprecia perfectamente que los ángulos α y γ son complementarios, así como los ángulos β y δ. Es decir, que si los ángulos α y β son iguales, necesariamente γ y δ también son iguales, ya que las rectas t y n (tangente y normal) son perpendiculares.

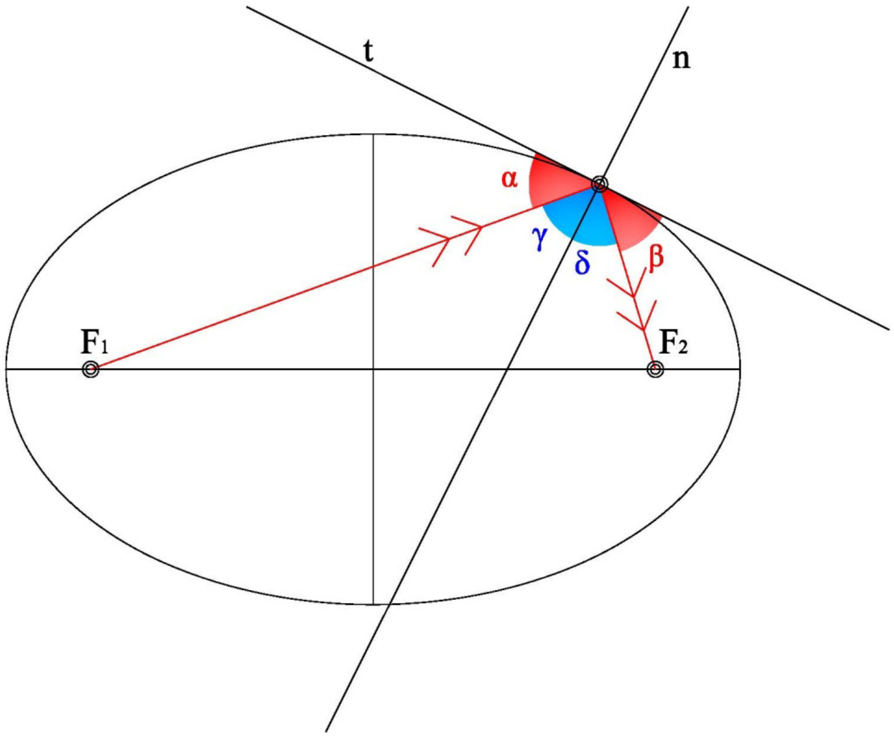


figura 8

Esta propiedad se utiliza en acústica con el objeto de diseñar y construir "galerías de murmullos"; si la cúpula de un auditorio o de una galería tiene forma elipsoidal, entonces un susurro o murmullo emitido desde un foco del elipsoide sólo es percibido en el otro foco, siendo el efecto aún más impresionante cuanto más separados estén los focos. Así ocurre, por ejemplo, en el Salón de las Estatuas del Capitolio de Washington D.C. cuya cúpula tiene forma de medio elipsoide de revolución (superficie que se obtiene al hacer girar una elipse en torno a uno de sus ejes) o en el Convento del Desierto de los Leones, cerca de la ciudad de México.

En la fabricación de hornos en los que se requiere concentrar el calor en un determinado punto, por ejemplo para hacer crecer cristales, se sitúa la fuente de calor en uno de los focos de una elipse y en el otro se coloca el crisol que se quiere calentar.

Esta propiedad encuentra en medicina la siguiente aplicación: la litotricia extracorpórea por ondas de choque es un tratamiento no invasivo que utiliza un pulso acústico para romper los cálculos renales y los cálculos biliares. La primera generación de estos dispositivos tenía una pieza en forma de medio elipsoide que se abre hacia el paciente. El pulso acústico se genera en el punto focal del elipsoide, que se encuentra más alejado del paciente, y el cálculo posicionado en el punto focal opuesto, recibe la onda de choque localizada, destruyendo el cálculo renal.

3.10. Otras aplicaciones y ejemplos del uso de elipses

Astronomía

Quizá uno de los ejemplos más conocidos de la existencia de la elipse a nuestro alrededor sea la órbita de los planetas. Fue en el siglo XVII cuando el astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler (1571-1630) descubrió la verdadera trayectoria que siguen los planetas en su recorrido periódico alrededor del sol.

Kepler construyó toda su teoría y descubrió las leyes del movimiento de los planetas basándose en las precisas observaciones de Tycho Brahe sobre las posiciones de Marte. La primera de sus famosas leyes pone a la elipse en el primer plano de la ciencia:

Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el sol.

Edmond Halley en 1705 demostró que el cometa que hoy lleva su nombre traza una órbita elíptica alrededor del sol.

Arquitectura

Debido a su forma y a la relativa facilidad para trazarla (método del jardinero, por ejemplo) la elipse fue la curva cónica que más se usó en arquitectura desde su descubrimiento. En el Imperio Romano todas las grandes ciudades tenían un anfiteatro donde se realizaban espectáculos de diversa naturaleza (gladiadores, etc.). Uno de los monumentos por excelencia de la ciudad de Roma es el Coliseo, afortunadamente conservado. Su planta se compone de elipses perfectas concéntricas, desde la línea exterior hasta la arena. Comprobaremos a continuación, de forma sencilla, la planta elíptica de esta impresionante construcción.

Conocemos las medidas del Coliseo. La longitud máxima de la planta es de 188 m., es decir, ésta es la medida del eje mayor de la elipse exterior. La dibujamos sobre la planta y trazamos los ejes (figura 9), pudiendo así obtener fácilmente los focos. Tomamos un punto cualquiera del perímetro y medimos la distancia de ese punto a cada uno de los focos. Efectivamente, tal y como indica la definición de la elipse, la suma de esas dos distancias coincide exactamente con la medida, 188 m., del eje mayor (figura 10).

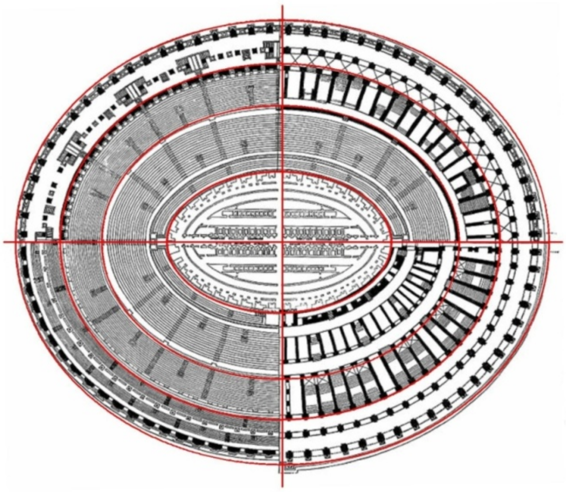


figura 9

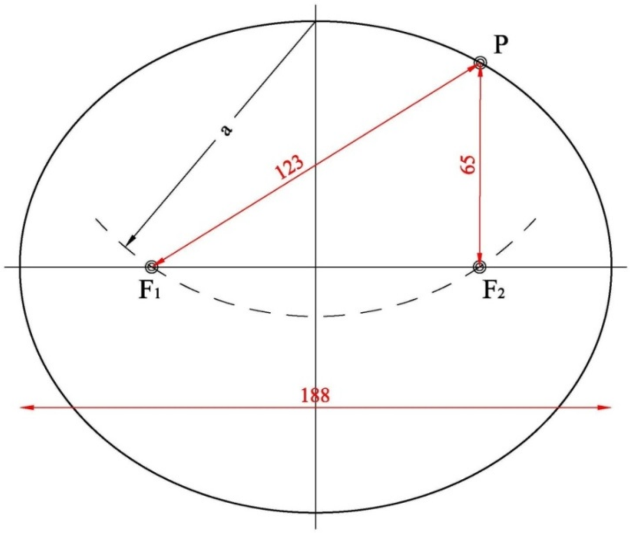


figura 10

Algunos tipos de arcos muy utilizados en construcción, especialmente en los siglos XVI y XVII, (aunque ya habían aparecido algunos ejemplos en el arte románico) huyen de los modelos habituales de arco de medio punto y arco ojival o apuntado (ambos generados con arcos de circunferencia) y usan la elipse como forma más innovadora. El primer puente construido con arco elíptico fue el Puente de Santa Trinidad, en Florencia, sobre el rio Arno, diseñado por el arquitecto Bartolomeo Ammanati entre 1567 y 1569. El 8 de agosto de 1944, en su retirada de la Segunda Guerra Mundial, las tropas alemanas lo destruyeron. En 1958 se reconstruyó rescatando las piedras del Arno o tomando sus reemplazos de la cantera donde fueron extraídas las originales.

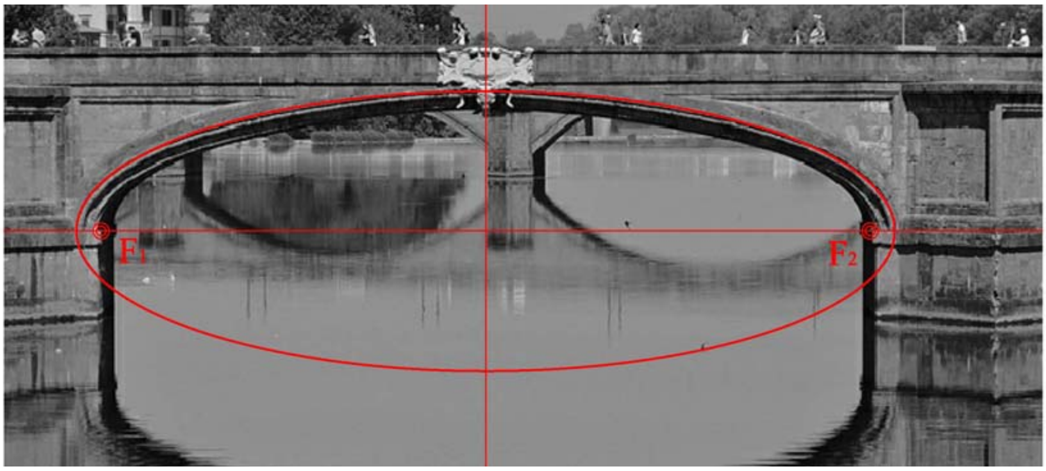


figura 11

En la arquitectura barroca encontramos numerosos ejemplos de composiciones que tienen como base la elipse. Sirva como ejemplo la iglesia de Sant'Andrea al Quirinale, en Roma, diseñada por el gran artista Gian Lorenzo Bernini.

A partir de la planta central elíptica, esta curva domina toda la composición hasta la bóveda y el lucernario (figura 12).

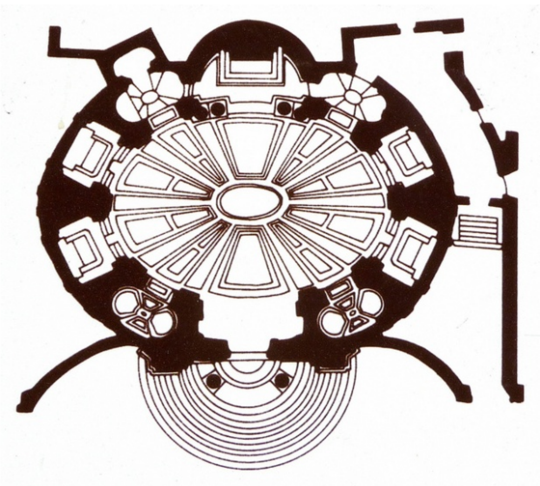


figura 12

La arquitectura contemporánea nos ofrece ejemplos de elipses generadas de una forma pura y sencilla, esto es, como sección de un cilindro por un plano inclinado. Es el caso del Planetario Tycho Brahe, en Copenhague, diseñado por el arquitecto Knud Munk en 1988.

3.11. Ejercicios y problemas

Se propone a continuación una pequeña muestra de ejercicios con distintos grados de dificultad, basados en las características que hemos estudiado de la elipse, perfectamente aplicables al currículo de Bachillerato.
Los seis primeros se ajustan a los contenidos mínimos exigidos en la Unidad Didáctica y los siguientes para alumnos más destacados, atendiendo a la diversidad.

1. Calcular las coordenadas de los focos de la elipse de semiejes de longitudes 3 y 5, de centro el punto (0,0) y ejes los coordenados. Dibujarla.

2. Hallar la ecuación reducida de la elipse sabiendo que tiene por focos F = (2,0) y F' = (-2,0) y suma de distancias 5.

3. Hallar la ecuación reducida de la elipse sabiendo que el semieje mayor es 5 y la semidistancia focal 3.

4. Hallar la ecuación reducida de la elipse que tiene un vértice en A = (6,0) y su distancia focal es 10.

5. Hallar la ecuación de la elipse conociendo A = (10,0), A' = (-10,0) y la excentricidad e = 0,2.

6. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la elipse $4x^2 + 5y^2 = 24$ en el punto P = (1,2).

7. Deseamos construir un arco en forma de media elipse, de manera que sus medidas sean 2 m. de alto y 5 m. de ancho. Por el método del jardinero, ¿qué longitud debe tener la cuerda usada? ¿A qué distancia debemos separar sus focos?

8. Una carretera de un sólo carril debe atravesar una serie de túneles de igual altura que anchura. El constructor quiere que estos túneles sean de forma semielíptica y que permitan el paso de todo camión con dimensiones máximas de 1,8 m. de ancho y 3,6 m. de alto. ¿Cuál es la altura del túnel más bajo que sirve para este propósito?

Ejercicios para trabajar con Geogebra:

9. Usa la herramienta elipse  para dibujar una elipse con focos en puntos F1, F2 y que pasa por un punto P. Crea un punto nuevo punto A que pertenezca a la elipse y con la herramienta tangentes traza la tangente a la elipse por el punto A.
   Comprueba la propiedad óptica de la elipse.

10. Usa la herramienta elipse  para dibujar una elipse con focos en puntos F1, F2 y que pasa por un punto P. Traza dos rectas r1 y r2 paralelas entre sí y que sean secantes a la elipse. Sean A, B los puntos de corte de r1 con la cónica y C, D los puntos de corte de la recta r2 con la cónica. Construye los puntos:

$$E = \overline{AC} \cap \overline{BD} \text{ y } F = \overline{AD} \cap \overline{BC}$$

La recta EF corta a la cónica en dos puntos G y H. Comprueba que las tangentes a la cónica en los puntos G y H son paralelas a las rectas r1 y r2.

3.12. La circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. También podemos definirla como la curva obtenida al seccionar un cono de revolución por un plano perpendicular a su eje.

La circunferencia se puede interpretar como un caso particular de elipse, cuyos focos coinciden y están sobre el centro. Según la fórmula de la excentricidad de la elipse:

$$e = \frac{c}{a}$$

en la circunferencia la distancia focal es 0, luego la excentricidad también es 0.

Para determinar la ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio r, procedemos de la siguiente manera. Dada una referencia *R*={O,B}, tomamos un punto P = (*x,y*) cualquiera de la circunferencia, y sabiendo que la distancia de cualquier punto de ella al centro es el radio, y considerando que el centro está sobre el origen de coordenadas, calculamos la ecuación de la circunferencia:

$$d(P,C) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

Elevando al cuadrado los dos términos de la igualdad obtenemos:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si la circunferencia tiene su centro en un punto (h,k), su ecuación es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

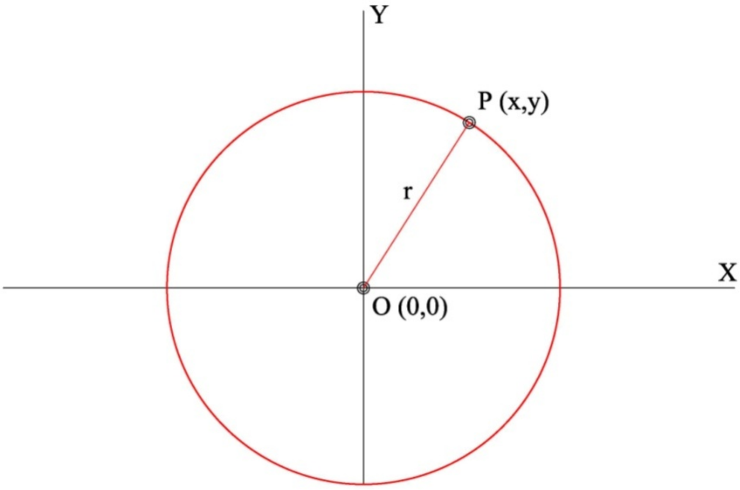


figura 13

Debido a la perfección de la circunferencia en muchos aspectos, es la curva cónica mas utilizada en arquitectura desde el mundo clásico, tanto como generador de proporciones, como elemento compositivo y estructural.

Uno de los mejores ejemplos de uso de la circunferencia es el Panteón de Agripa Roma, erigido por el emperador Adriano entre los años 118 y 125 d.C. Es de planta circular que, además, genera su sección de forma que en el interior del templo se aloja una esfera cuyo radio es igual que el de la circunferencia de la planta (figura 14).

La circunferencia se ha usado, y aún se utiliza, para construir arcos. Si bien es cierto que los griegos, quienes como hemos visto fueron los descubridores de las cónicas, no usaban las curvas en su arquitectura debido al predominante carácter arquitrabado de ésta, los romanos sí recogieron el testigo y construyeron grandes edificios y obras de ingeniería basándose en el arco de medio punto, esto es, media circunferencia, debido a su excelente rendimiento estructural.

En la Edad Media siguió utilizándose el arco de medio punto; de hecho éste es uno de los elementos que caracteriza la arquitectura románica (siglos X-XII).

A partir del siglo XIII, pero especialmente en los siglos XIV y primera mitad del XV, aparece un nuevo modelo artístico muy marcado en la arquitectura: el gótico. El gótico es, a grandes rasgos, un estilo derivado de enormes avances estructurales que permiten construir grandes templos y catedrales más grandes y sobre todo más altos y más luminosos.

El elemento fundamental de este cambio es el arco ojival o apuntado, que sustituye al de medio punto. La diferencia en realidad es muy simple: en lugar de construir arcos usando media circunferencia de centro el del vano, ahora se toman dos centros y se trazan dos arcos de circunferencia del mismo radio, uniéndose en la clave (figura 15).

En épocas posteriores, la tipología de arcos fue creciendo llegando a construirse una gran variedad de ellos cuya base es la circunferencia: herradura, conopial, trebolado, festoneado, ...

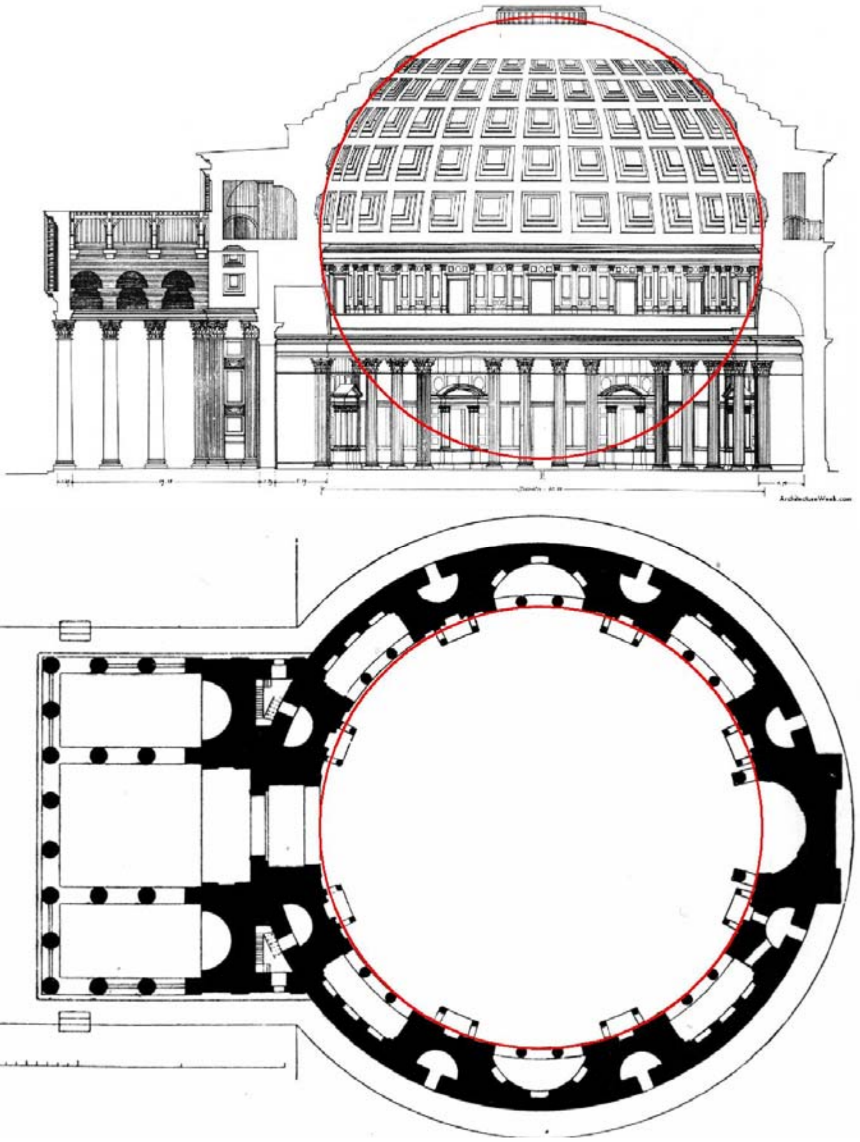


figura 14

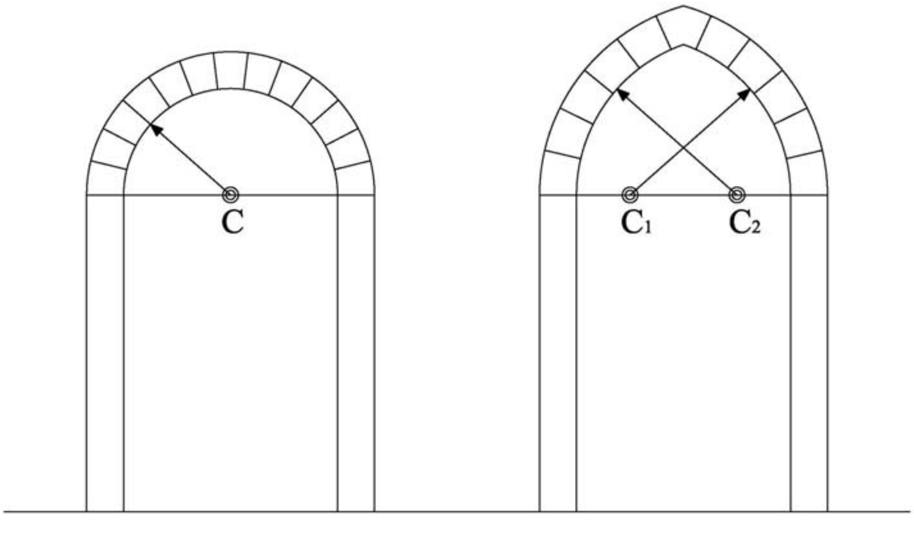
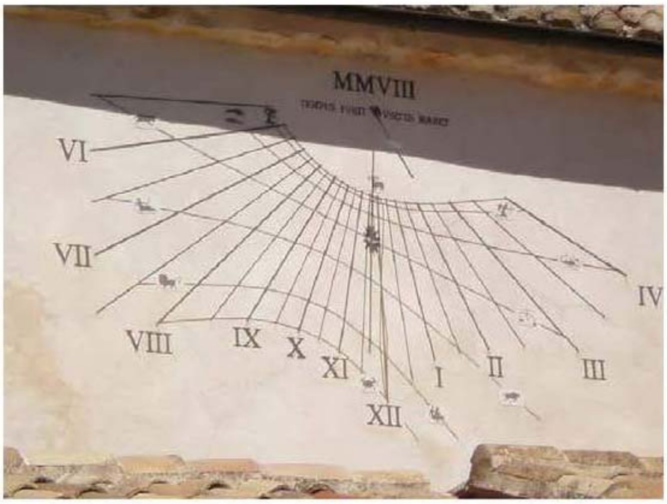


figura 15

4. HIPÉRBOLA

4.1. Ejemplos cotidianos donde aparecen hipérbolas

La siguiente curva de la familia de las secciones cónicas que vamos a estudiar es la hipérbola. Antes de entrar en su definición, elementos y propiedades, vemos que, tal y como sucedía con la elipse, la hipérbola está también presente a nuestro alrededor. Una lámpara con pantalla cónica o troncocónica, con la inclinación precisa puede proyectar en la pared, de forma muy nítida, una hipérbola.



También podemos encontrar esta curva, aunque de manera menos explícita, en un reloj de sol. El elemento que produce la sombra en el reloj de sol se denomina gnomon. Los rayos de sol que unen éste con el extremo del gnomon recorren a lo largo del día parte de la superficie de un cono imaginario, cuya superficie se corta por el plano donde se sitúa el reloj. Así pues, la línea que dibuja es una curva cónica.

En latitudes entre 38º y 42º, donde se sitúa la Península Ibérica, esa curva es siempre una hipérbola, salvo en los equinoccios de primavera y de otoño, dos días en los que el gnomon proyecta una línea recta en todos los lugares de la Tierra.

En definitiva, en muchos relojes de sol nos encontramos ya dibujadas las hipérbolas que marcan la trayectoria de la sombra del extremo del gnomon.

Por último, cuando sacamos punta a lápiz de caras planas, gesto muy cotidiano, las curvas que se generan como intersección de la parte pintada con la que se ha afilado son, precisamente, hipérbolas, por ser la intersección de un cono (la parte afilada del lápiz) con un plano paralelo al eje del mismo (las caras del lápiz).

4.2. Definición de hipérbola

Como sección del cono
La hipérbola es la curva obtenida al seccionar un cono de revolución por un plano, de modo que el ángulo que forma el plano con el eje del cono es menor que el formado por el eje y cualquier generatriz del cono.

Como lugar geométrico
Se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano tales que, el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, prefijados llamados *focos,* es constante.

4.3. Elementos de la hipérbola

- **Vértices, ejes y centro.**
  La recta que pasa por los focos corta a la hipérbola en dos puntos, llamados **vértices** y se llama **eje principal**. El punto medio del segmento que une los vértices es el **centro** de la hipérbola. El segmento que une los vértices se llama **eje mayor** y su medida es $2a$. La recta que pasa por el centro y es ortogonal al eje principal de la hipérbola se llama **eje secundario.** Este eje no corta a la hipérbola, que tiene dos ramas, una a cada lado del eje. El segmento de medida a, mitad del eje mayor se llama **semieje mayor**.

- **Focos**
  Son dos puntos distintos prefijados, situados sobre el eje principal, ambos a la misma distancia c del centro. Llamamos **distancia focal** a la distancia entre los dos focos, es decir, $2c$. Al eje principal se le llama también **eje focal** y al secundario, **eje no focal**.

- **Eje menor**
  Es el segmento que une los puntos B_1 y B_2, obtenidos por intersección de la circunferencia de centro uno de los vértices y radio *c*, con el eje secundario de la hipérbola.

- **Radios vectores**
  Son los segmentos que unen cualquier punto de la hipérbola con los focos.

- **Circunferencia principal**
  Es la circunferencia que tiene por centro el de la hipérbola y radio a, es decir, el semieje mayor. Se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las tangentes.

- **Circunferencia focal**
  Es la circunferencia que tiene por centro un foco de la hipérbola y radio el eje mayor.

- **Asíntotas**
  Son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola y hacia las que se aproximan progresivamente las ramas de la misma, sin llegar a tocarla. Es decir, son las tangentes a la hipérbola en el infinito.

  Las ecuaciones de estas dos rectas se obtienen teniendo en cuenta que sus pendientes son $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$ (ver figura 1). Así pues, para una hipérbola cuyo centro esté en el punto (h,k) y su eje principal sea paralelo al eje X, las ecuaciones de sus asíntotas serán:

$$y - k = \frac{b}{a}(x - h)$$

$$y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$$

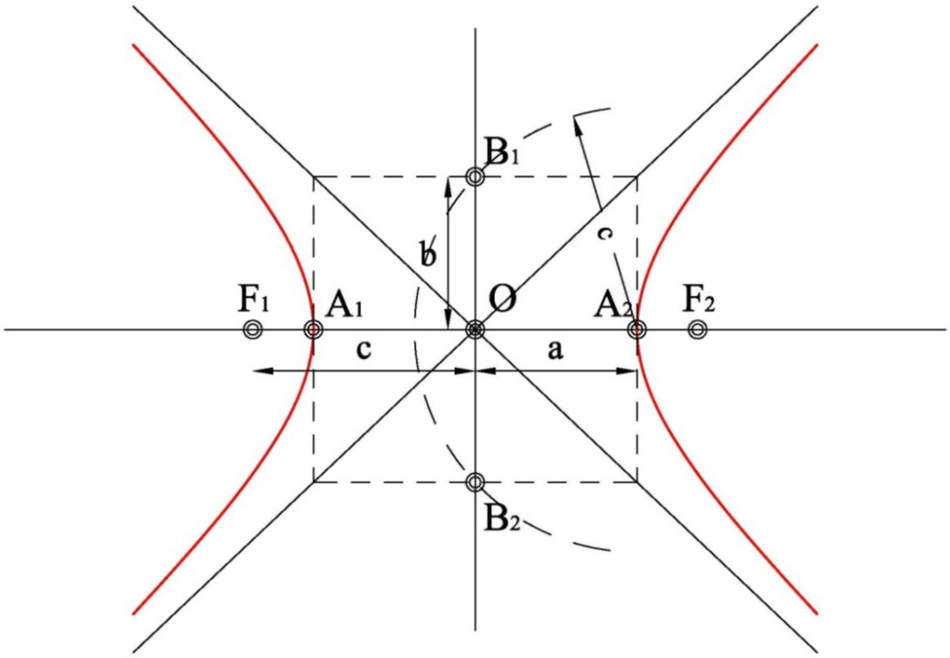


figura 1

La hipérbola es una curva con dos ramas infinitas y es simétrica respecto a sus ejes.

4.4. Relación métrica fundamental de la hipérbola

Consideramos las medidas de la hipérbola; a , medida del semieje mayor, b la del semieje menor y c la semidistancia focal.

Teniendo en cuenta la construcción del semieje menor a partir de la circunferencia centrada en A_2 y radio c, se verifica (figura 2):

$$c^2 = a^2 + b^2$$

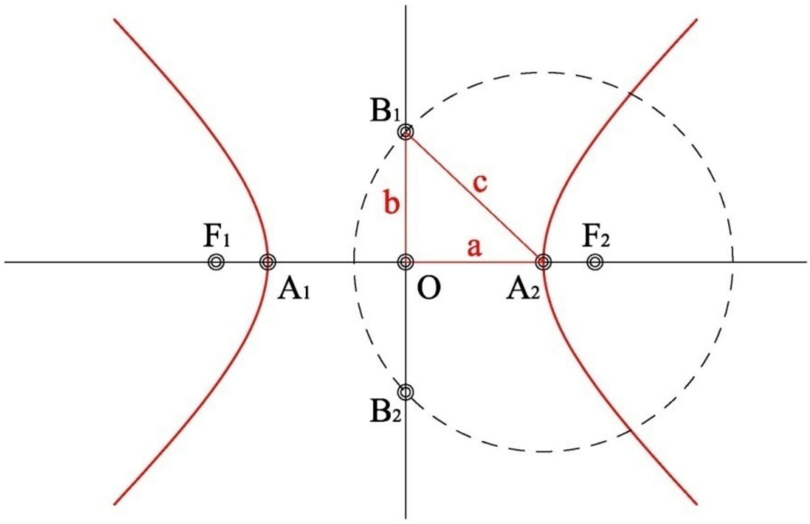


figura 2

4.5. Ecuación reducida de la hipérbola

Sea R={O,B} la referencia canónica del plano.

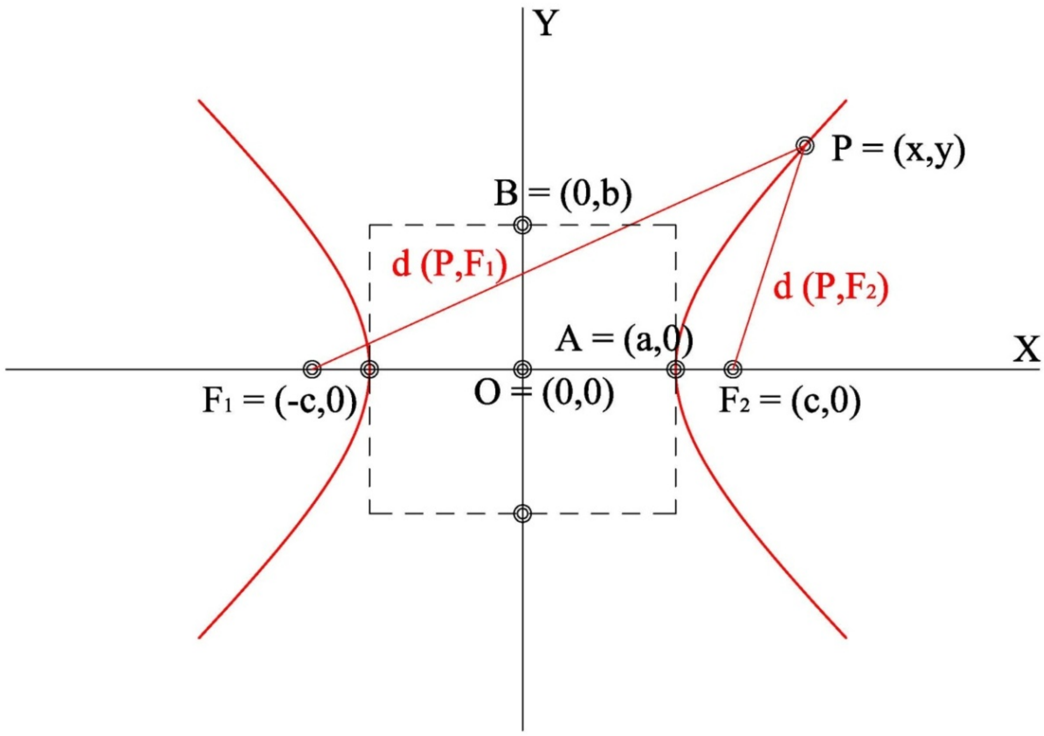


figura 3

Determinemos la ecuación de una hipérbola cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas O = (0,0), sus ejes coinciden con los ejes coordenadas y sus focos estén sobre el eje X. Sea *2c* la distancia focal, y a y b las medidas de sus semiejes mayor y menor respectivamente.

El punto P = (x,y) estará en la hipérbola si:

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = k$$

es decir:

$$|d[(x,y),(-c,0)] - d[(x,y),(c,0)]| = k \qquad donde\ k = constante$$

Realizando esta operación con el vértice A = (a,0) obtenemos que k = *2a*:

$$|d[(a,0),(-c,0)] - d[(a,0),(c,0)]| = |c + a - (c - a)| = 2a$$

La expresión de las distancias planteadas es:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Pasando el segundo sumando a la derecha y elevando al cuadrado ambos términos, obtenemos la siguiente expresión:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Operando y reduciendo:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + [(x-c)^2 + y^2] \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Simplificando:

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando de nuevo al cuadrado y operando, se tiene:

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Y como $b^2 = c^2 - a^2$, sustituyendo en la expresión anterior obtenemos:

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

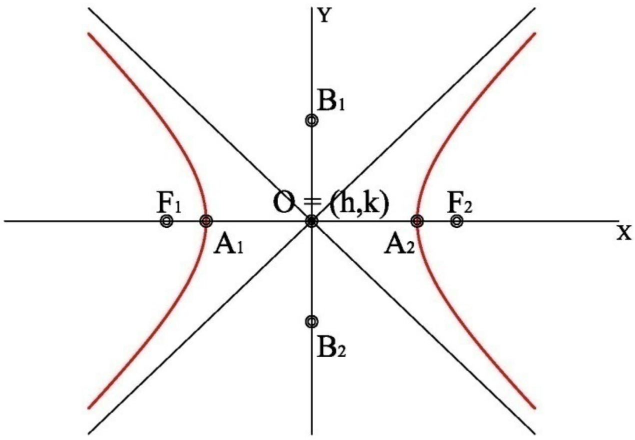
Dividiendo ambos términos de la igualdad por a^2b^2 $(a, b \neq 0)$, obtenemos la ecuación reducida de una hipérbola que tiene su centro en el origen de coordenadas y sus ejes, principal y secundario, coinciden con los ejes *X* e *Y,* respectivamente.

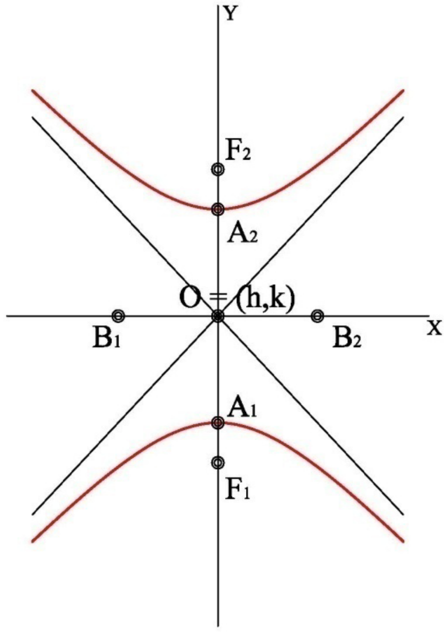
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

En el caso de que la hipérbola tenga su centro en el punto *(h,k)* y sus ejes sean paralelos a los ejes coordenados X e Y, la ecuación obtenida quedaría de esta forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Tabla resumen





Hipérbola bien posicionada con centro en $O = (h, k)$		
Eje principal	Horizontal	Vertical
Ecuación	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Vértices	$A_1 = (h-a, k)$ $A_2 = (h+a, k)$ $B_1 = (h, k+b)$ $B_2 = (h, k-b)$	$A_1 = (h, k-a)$ $A_2 = (h, k+a)$ $B_1 = (h-b, k)$ $B_2 = (h+b, k)$
Focos	$F_1 = (h-c, k)$ $F_2 = (h+c, k)$	$F_1 = (h, k-c)$ $F_2 = (h, k+c)$
Asíntotas	$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$	$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$

4.6. Excentricidad de una hipérbola

A toda hipérbola se le puede asignar un número real $e \in (1,+\infty)$ llamado **excentricidad**, que mide lo abiertas o cerradas que están sus ramas. Este valor se define como el cociente entre la c (mitad de la distancia focal) y a (medida del semieje mayor).

$$e = \frac{c}{a}$$

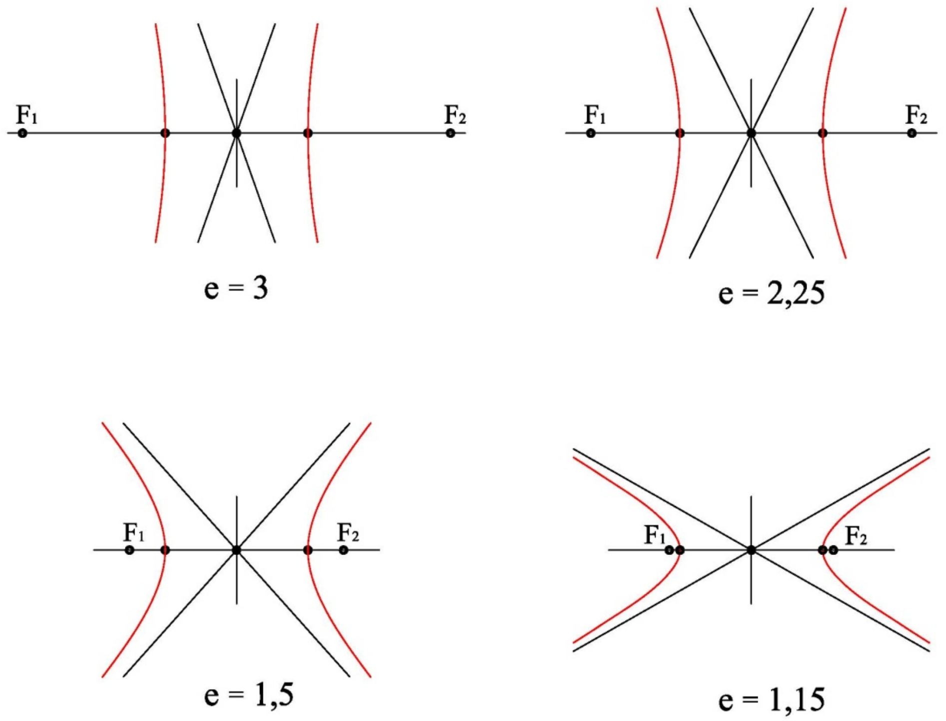


figura 4

Un valor muy grande de e indica que las ramas son muy abiertas, y un valor de e próximo a 1 implica que las ramas están bastante cerradas.

En la figura 4 podemos apreciar que, a medida que los focos se acercan a los vértices, la excentricidad se acerca a 1, haciendo que las ramas de la hipérbola sean más cerradas.

4.7. Hipérbola equilátera

Un caso particular de hipérbola es la llamada **hipérbola equilátera**, que se caracteriza por tener los semiejes mayor y menor de las misma medida, es decir $a = b$. Su ecuación reducida es:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Su excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

Sus asíntotas son $y = x$ e $y = -x$, es decir, las bisectrices de los cuadrantes (parte izquierda de la figura 5).

Una hipérbola equilátera puede girarse un ángulo de 45º (parte derecha figura 5), de manera que las asíntotas se convierten en los ejes coordenados, y sus ejes principal y secundario, en las rectas $y = x$ e $y = -x$, respectivamente. Veamos que en estas condiciones, es decir, la hipérbola referida a sus asíntotas, su ecuación es $xy = k$ donde k es una constante.

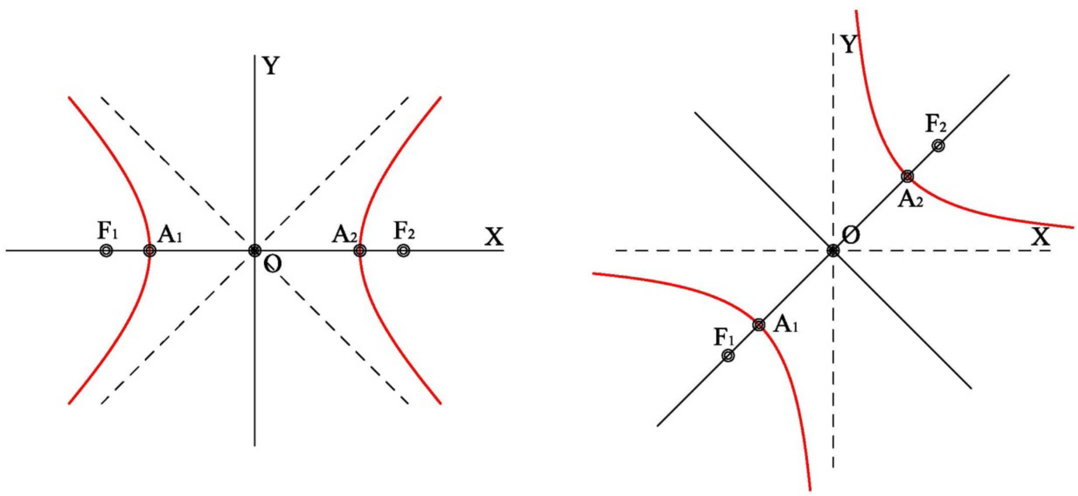


figura 5

En la figura 6 se muestra el eje principal de una hipérbola equilátera girado 45º respecto al eje X, y sobre él, el vértice A_2 y el foco F_2 de la curva. Por ser el ángulo indicado 45º, se forma un triángulo rectángulo isósceles de vértices O, A_2 y el punto proyección del punto A_2 sobre el eje X. La abscisa de este punto puede hallarse aplicando el teorema de Pitágoras. Teniendo en cuenta que los catetos del triángulo formado son iguales, el valor obtenido es $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

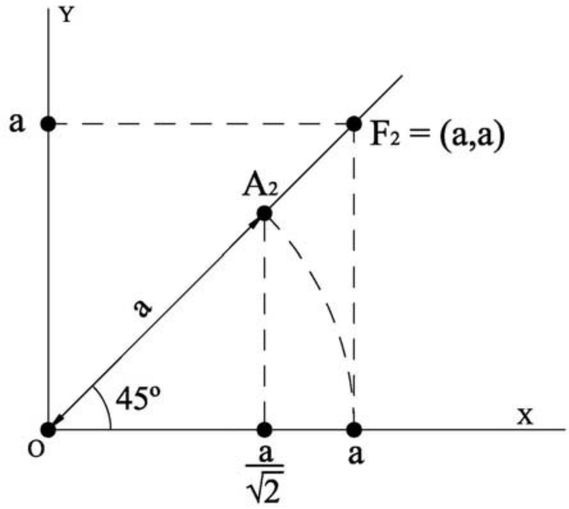


figura 6

Abatiendo a continuación la longitud a sobre el eje X, formamos otro triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos tienen una longitud a. Conocemos la relación métrica fundamental de la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$; en este caso, por ser $a = b$, se tiene $c^2 = a^2 + a^2$, cuya representación geométrica es el triángulo rectángulo de la figura 6, demostrando así que la distancia del origen O al foco F_2 es $c = a\sqrt{2}$, y que las coordenadas del foco F_2 son (a,a); el foco F_1 tendrá por coordenadas (-a,-a).

Conociendo este dato, y aplicando la definición de hipérbola, se tiene:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a; \qquad \overline{PF_1} = 2a + \overline{PF_2}$$

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = 2a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}$$

Operando esta expresión:

$$x + y - a = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}$$

Eliminando la raíz:

$$x^2 + y^2 + a^2 + 2xy - 2ax - 2ay = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2$$

Simplificando:

$$2xy = a^2$$

Por tanto:

$$xy = \frac{a^2}{2}; \qquad xy = k$$

De esta forma vemos que toda función del tipo $y = \frac{k}{x}$ $(x \neq 0)$ será una hipérbola con centro en el origen de coordenadas, cuyos ejes son las bisectrices de los cuadrantes, y teniendo además los ejes coordenados como asíntotas.

Estas funciones se conocen como funciones de proporcionalidad inversa y se estudian en varios cursos de ESO y, por supuesto, en Bachillerato, por lo que conocer las características de una hipérbola equilátera es fundamental para los alumnos.

4.8. Tangente a una hipérbola en un punto de la misma

Calcularemos en este apartado la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en un punto (x_0 , y_0) cualquiera de ella.

Suponemos la ecuación reducida de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Derivamos en forma implícita:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

Simplificando:

$$\frac{x}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 0$$

Despejando:

$$\frac{x}{a^2} = \frac{yy'}{b^2}; \qquad yy' = \frac{b^2}{a^2} \cdot x$$

$$y' = \frac{b^2x}{a^2y}$$

En el punto (x_0, y_0), tendremos:

$$y'(x_0) = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

donde *m* es la pendiente de la recta, es decir:

$$m = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

Sustituyendo:

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot x - \frac{b^2 {x_0}^2}{a^2 y_0}$$

$$a^2 y_0 y - a^2 {y_0}^2 = b^2 x_0 x - b^2 {x_0}^2$$

$$b^2 {x_0}^2 - a^2 {y_0}^2 = b^2 x_0 x - a^2 y_0 y$$

Como (x_0, y_0) es un punto de la hipérbola, entonces:

$$\frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1$$

Multiplicando por $a^2 b^2$:

$${x_0}^2 b^2 - {y_0}^2 a^2 = a^2 b^2$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$a^2 b^2 = b^2 x_0 x - a^2 y_0 y$$

Y finalmente:

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Obtenemos de esta forma la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en un punto (x_0 , y_0) de la misma.

A partir de la ecuación de la recta tangente podemos hallar la de la recta normal a la hipérbola en el mismo punto, ya que ambas rectas son perpendiculares y se cumple que:

$$m' = -\frac{1}{m}, \quad (m \neq 0)$$

donde m y m' son las pendientes de las rectas tangente y normal a la hipérbola respectivamente en el punto (x_0 , y_0).

Si $m = 0$ las rectas tangentes son paralelas al eje Y y la normal es el eje X.

Por tanto:

$$m = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}; \qquad m' = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$$

Y la ecuación de la recta normal vendrá dada por la expresión:

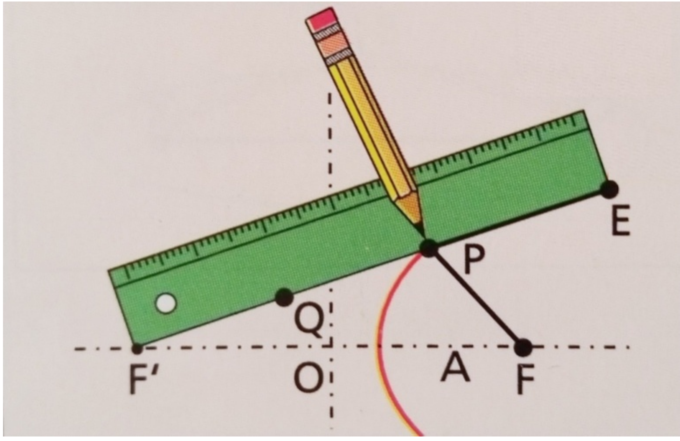
$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$$

4.9. Construcciones de la hipérbola

Existen numerosos métodos para construir una hipérbola, desde los que usan una simple hoja de papel, hasta programas informáticos variados.

Con cuerdas

Se toma una regla de longitud cualquiera L mayor que la distancia entre dos puntos fijos F y F' y un hilo de longitud H, siendo la diferencia L-H constante y menor que la distancia entre F y F'.



Se fija el extremo del hilo en un extremo E de la regla y los extremos libres de ambos se colocan respectivamente sobre F y F'. Basta deslizar un lápiz a lo largo de la regla manteniendo tenso el hilo y quedará dibujada una rama de la hipérbola. Invirtiendo las posiciones de los extremos libres se dibuja la otra rama.

Por circunferencias concéntricas

Podemos construir también una hipérbola utilizando una trama de circunferencias concéntricas, cuyos centros son los focos de la hipérbola.

En primer lugar se fijan los dos centros citados, que serán los focos. A continuación se marcan dos puntos colocados respectivamente a la misma distancia de los dos focos y en la recta que los une, y por tratarse de una hipérbola, esos dos puntos estarán entre los focos, y van a ser los vértices de la curva. Se dibujan las circunferencias concéntricas desde ambos focos, todas a la misma distancia (cuidando de que sean tangentes por parejas) y haciendo coincidir una de cada lado con los puntos que hemos señalado como vértices. A partir de aquí se van marcando los puntos de intersección de las circunferencias que se van alejando de los respectivos centros. Uniendo esos puntos obtendremos la hipérbola, como se muestra en la figura 7.

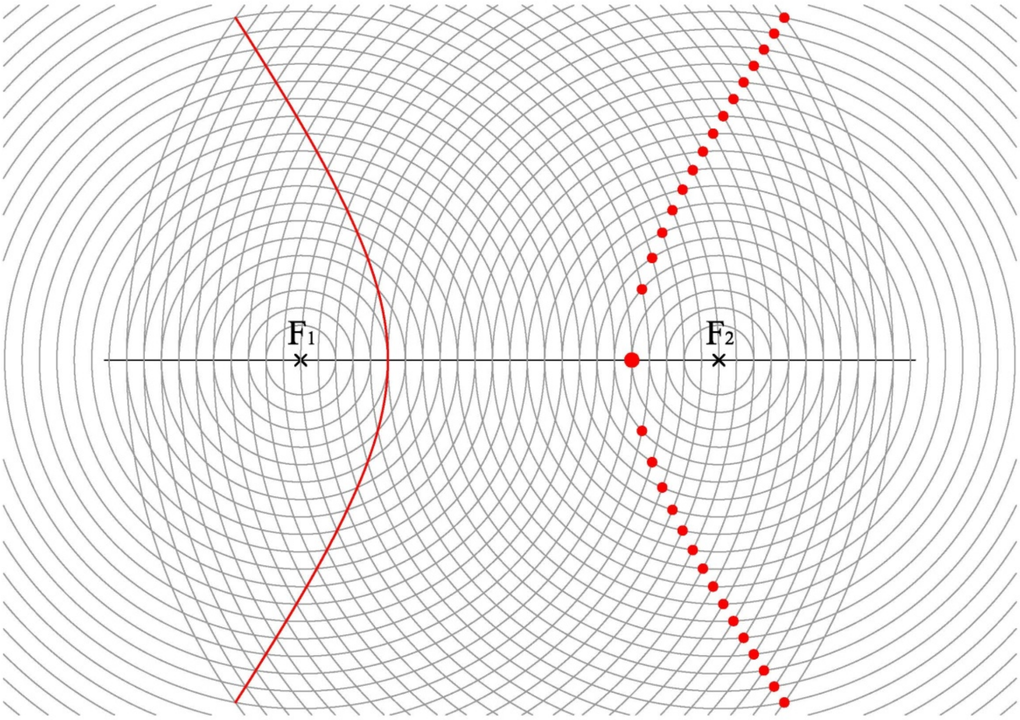


figura 7

Por puntos (Dibujo Técnico). Figura 8
En el currículo de Bachillerato de la asignatura de Dibujo Técnico se estudian varios métodos para dibujar una hipérbola. El que vamos a estudiar aquí, por estar basado estrictamente en la definición de la curva como lugar geométrico, es el método para trazar la hipérbola por puntos.

Los datos que nos dan pueden ser los ejes mayor y menor, con lo cual tendríamos que hallar los focos, o de manera más habitual el eje mayor $\overline{A_1A_2}$ de medida *2a* y la distancia focal *2c*, medida del segmento $\overline{F_1F_2}$. Tomamos un punto N sobre el eje principal, que esté situado a la izquierda de F_1. Con centro en F_1 y radio $\overline{A_1N}$ trazamos el arco 1. A continuación, con centro en F_2 y radio $\overline{A_2N}$ trazamos el arco 2. Los puntos donde se cortan los arcos 1 y 2, puntos P_1 y P_2, son dos puntos de la hipérbola, simétricos respecto al eje principal. Repetimos el proceso tomando otros puntos cada vez más a la izquierda de N, obteniendo puntos de la rama izquierda de la hipérbola. Por simetría respecto del eje secundario se puede dibujar la otra rama de la hipérbola.

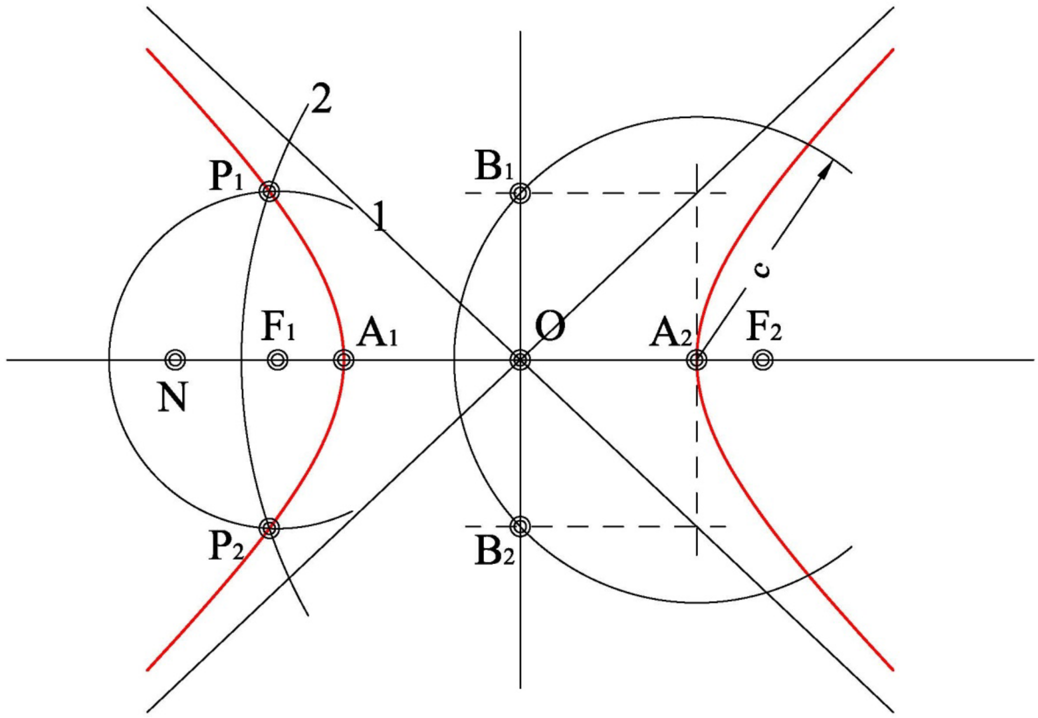


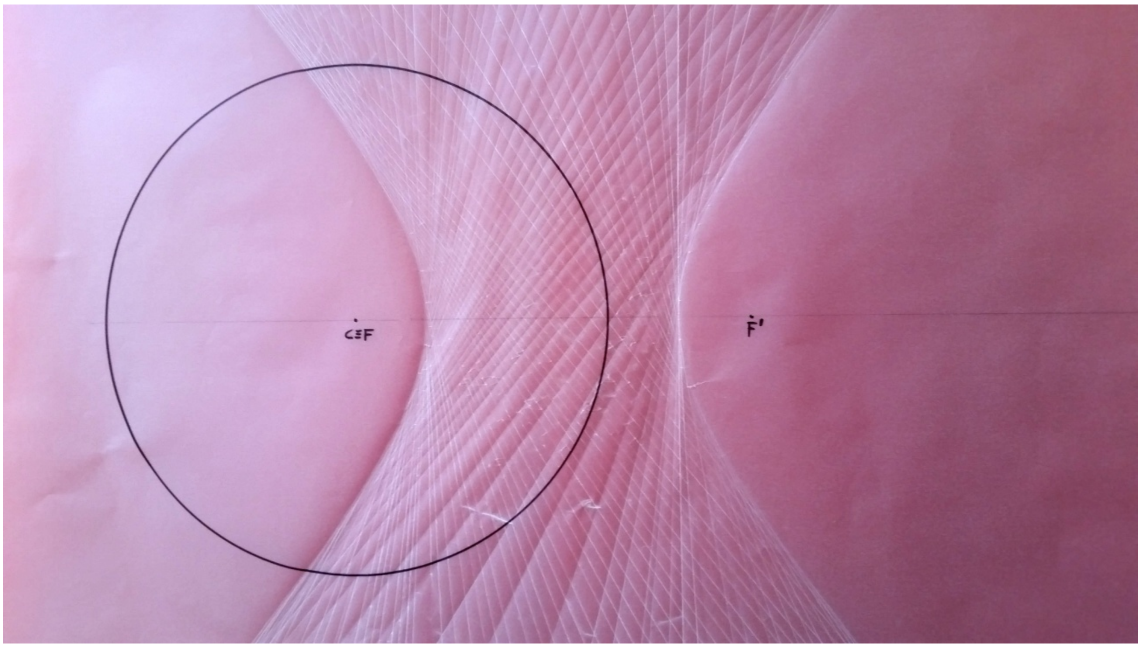
figura 8

También, si fuera necesario, pueden dibujarse las asíntotas de la siguiente manera. Según la propiedad métrica fundamental de la hipérbola, la circunferencia de centro en A_2 y radio $\overline{OF_2}$, al cortar al eje secundario determina B_1 y B_2, extremos del eje menor de la hipérbola. Desde A_2 trazamos una recta perpendicular al eje principal y desde B_1 y B_2 trazamos sendas rectas paralelas al eje principal. Los puntos donde se cortan estas rectas son puntos de las asíntotas, que se obtienen uniendo dichos puntos con el centro O de la curva.

Papel plegado

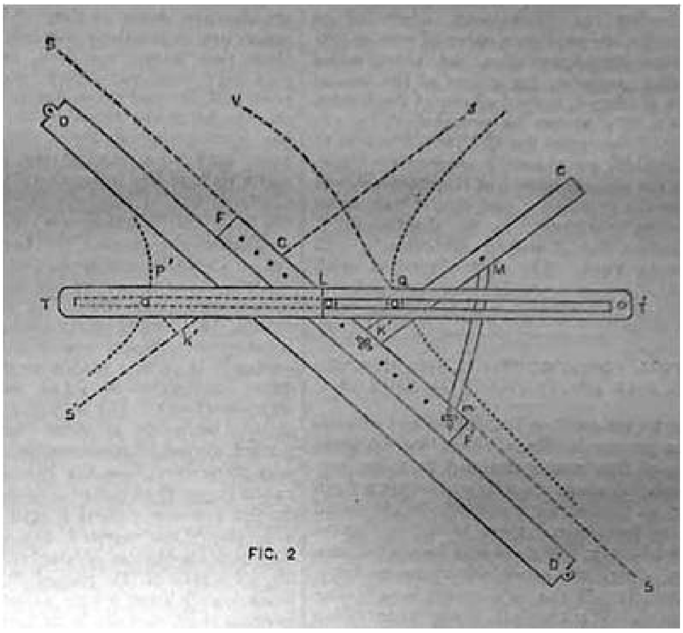
Se puede trazar una hipérbola mediante doblado de papel (papiroflexia), que consiste en hacer que los dobleces sean las tangentes de la curva. Veamos cómo hacerlo:

En un folio dibujamos una circunferencia; si en el caso de la elipse marcábamos un punto dentro de ella, en este caso lo haremos fuera. Comenzamos a hacer dobleces al papel de manera que hagamos coincidir el punto que hemos señalado con la circunferencia. Se marca bien el doblez y a continuación se desdobla, para seguidamente hacer coincidir nuevamente el punto sobre la circunferencia, en lugar distinto del anterior, y se repite la operación. Así, desplazando el punto a lo largo de toda la circunferencia y marcando los dobleces resultantes, obtendremos una serie de tangentes que envuelven a la hipérbola, tanto a una rama como a la otra, y que dejarán a ésta perfectamente definida en el papel. La hipérbola queda generada como envolvente de las tangentes. Como es evidente, el punto que desplazamos por la circunferencia será un foco, y el otro es el centro de la propia circunferencia. En este caso también comprobamos que la circunferencia trazada inicialmente resulta ser una de las circunferencias focales de la hipérbola.

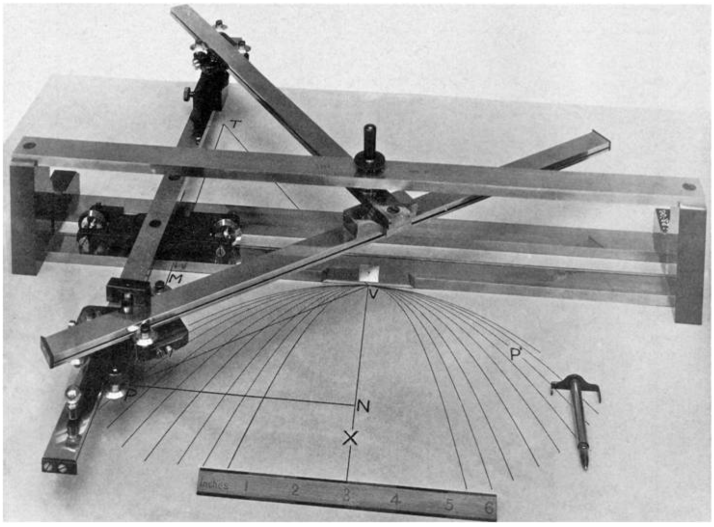


Hiperbológrafos

Son instrumentos diseñados y fabricados para trazar hipérbolas, de mucho uso antes del cálculo computacional.



Hiperbológrafo de Penrose. 1850



Hiperbológrafo de J. Payne, Marca Coradi.
Finales del s. XIX
Science Museum, Londres

Programas de Geometría dinámica, de diseño gráfico y de cálculo simbólico
Sirven los mismos programas que, de cada tipo, se ha descrito para el caso de la elipse.

4.10. Propiedades ópticas de la hipérbola

Si un rayo de luz parte de un foco de la hipérbola impactando en un punto P de ella, y siempre que la superficie de la curva propicie la reflexión de la luz, entonces, después de ésta, el rayo sale en dirección de la recta que pasa por el punto P y por el otro foco.

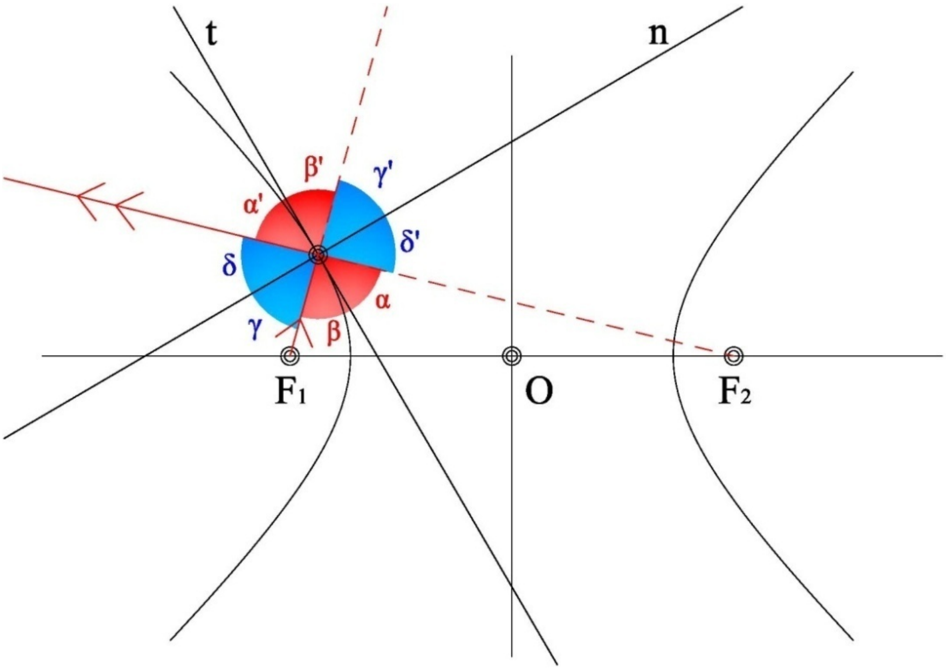


figura 9

El par de ángulos (α , β) que forma la tangente *t* a la hipérbola en el punto P (punto de impacto del rayo) con los radios vectores $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ son iguales (α=β) (figura 9). Al ser la tangente y la normal en P perpendiculares, los ángulos δ y γ son iguales y complementarios de α y β respectivamente. Deducimos los valores de los ángulos α', β', γ' y δ', iguales respectivamente a α, β, γ y δ por ser opuestos por el vértice.

Las rectas tangente y normal son las bisectrices de los radios vectores.

4.11. Aplicaciones y ejemplos

Astronomía

Las curvas cónicas están muy presentes en el universo. Veíamos como los planetas describen órbitas elípticas alrededor del sol. Pero también la hipérbola se hace presente en los movimientos de los astros, y podemos apreciarla, por ejemplo, en la trayectoria de los cometas. Estos cuerpos viajan por el universo y en ocasiones se adentran en el Sistema Solar. Al principio están lejos del sol y por tanto del alcance de su fuerza gravitacional, y se desplazan siguiendo trayectorias muy cercanas a una línea recta, aunque en realidad recorren la rama de una hipérbola. A medida que se acercan al sol van siendo sometidos a la influencia de la fuerza de atracción de los planetas y del propio sol, influencias que si consiguen torcer lo suficiente su trayectoria hasta cerrarla, la convertirán en una elipse y por tanto el cometa pasará a formar parte del Sistema Solar (como por ejemplo, el cometa Halley). Pero si la influencia no es tan fuerte, el cometa saldrá del Sistema describiendo una trayectoria hiperbólica, por lo que, en su viaje de entrada y salida, ha descrito una rama completa de hipérbola.

Sistema de navegación LORAN

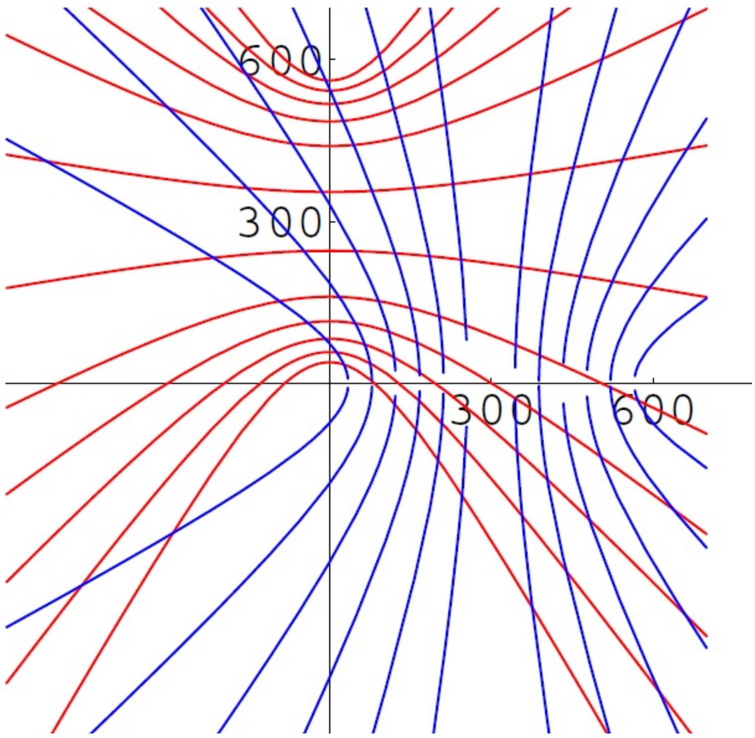
La propiedad que define la hipérbola como lugar geométrico, es decir, los puntos del plano cuya diferencia (en valor absoluto) de distancias a dos puntos fijos es constante, se utiliza en la navegación, gracias a un sistema conocido como Sistema de navegación LORAN. El matemático Pedro Alegría describe con detalle este sistema:

"Loran, abreviatura de la expresión Long Range Navigation (navegación de largo alcance), correspondiente a un sistema de navegación por radio desarrollado durante la II Guerra Mundial.

Loran es uno de los muchos sistemas que permiten a los navegantes determinar la posición de su barco o avión, a partir de la diferencia de recepción de las señales de radio procedentes de dos emisores sincronizados distantes entre sí. El sistema emisor loran se compone de una estación maestra y otra esclava. La maestra emite cada 0,05 *segundos una pequeña señal, que es repetida por la esclava, controlada por radio desde la maestra, 0,001 segundos más tarde.*

Ambas señales se reciben en el barco o avión, se amplifican y se registran como pequeñas ondas sobre la pantalla de un tubo de rayos catódicos. Los circuitos del receptor están dispuestos de forma que la distancia entre las señales corresponda a la diferencia de tiempos de llegada de las señales de ambas estaciones. El receptor posee además un dispositivo temporizador electrónico que permite medir dicha diferencia en microsegundos (millonésimas de segundo). Como las ondas de radio viajan a una velocidad constante de 300,000 km por segundo, la ubicación de todos los puntos en los que las señales de las dos estaciones están separadas un determinado intervalo de tiempo se puede representar mediante una curva concreta que es una hipérbola, cuyos focos se encuentran en ambas estaciones emisoras. El navegante dispone de un mapa con muchas de estas curvas, denominadas curvas de posición loran, y tras determinar la diferencia de tiempos, por ejemplo, 3 microsegundos, sabe que la posición de su nave se halla en algún punto de la curva de 3 microsegundos del mapa. Sintonizando una pareja de emisores loran y repitiendo este proceso, el navegante es capaz de detectar otra curva que represente la posición de la nave; la posición real del aparato se halla en la intersección de las dos curvas loran."

Alegría, P. (2014). Las Cónicas y sus Aplicaciones. (1ª ed.) [PDF].
Disponible en: http://www.ehu.es/~mtpalezp/conicas.pdf [Accedido 26 Mayo 2015].



Avión supersónico

La hipérbola también posee algunas aplicaciones en acústica, ya que es la frontera de la zona de audibilidad. Se plantea el siguiente problema: un avión vuela con un movimiento rectilíneo a una altura constante h con una velocidad supersónica constante v. Podemos trazar la región de la superficie de la tierra en la que se oye o se ha oído el avión.

Se denota por O' el punto donde se encuentra el avión, y O su proyección sobre la tierra; A' el punto donde se encontraba el avión hace t segundos, y A la proyección de ese punto sobre la superficie. Por tanto la distancia $\overline{OA} = vt$. En ese intervalo de tiempo el ruido que emite el avión se propaga desde A' mediante una esfera de radio ut, siendo u la velocidad del sonido. Si el radio de esta esfera es mayor que la altura h a la que se encuentra el avión, el sonido llega a un círculo sobre la tierra cuyo radio podemos deducir con el Teorema de Pitágoras, y que tendrá como valor $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$. A medida que el avión se desplaza el valor t disminuye, por lo que también lo hace el radio ya que las otras dos magnitudes se consideran constantes. Para que un punto en la tierra reciba el sonido del avión, es decir, esté en la zona de audibilidad debe estar dentro de uno de estos círculos cuyo radio disminuye a medida que su centro se acerca a O. La frontera de esa zona, como se aprecia en la figura 10 es la envolvente de estos círculos, y es una hipérbola.

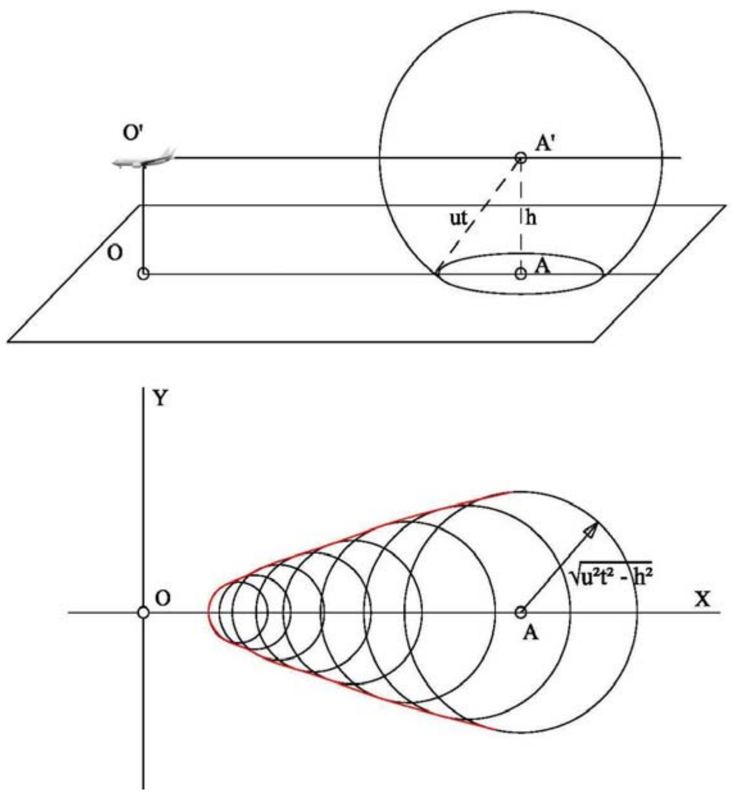


figura 10

Arquitectura

A diferencia de la elipse y la circunferencia, la hipérbola (y también la parábola), debido a la mayor complejidad en su construcción, ha empezado a ser utilizada en arquitectura en época reciente. Quizá los ejemplos más tempranos se encuentran en la obra de Antonio Gaudí, quien en su búsqueda de una arquitectura orgánica, diseñó los pilares de algunos de sus edificios con forma de hiperboloide, basándose en las estructuras óseas. El hiperboloide de revolución es una superficie que se obtiene al rotar una hipérbola en torno a su eje secundario.

Un ejemplo claro y conocido del uso de la hipérbola es la Catedral de Brasilia, obra Óscar Niemeyer, inaugurada en 1970. Niemeyer diseña una planta circular con 16 hipérbolas de hormigón en su perímetro a modo de pilares.

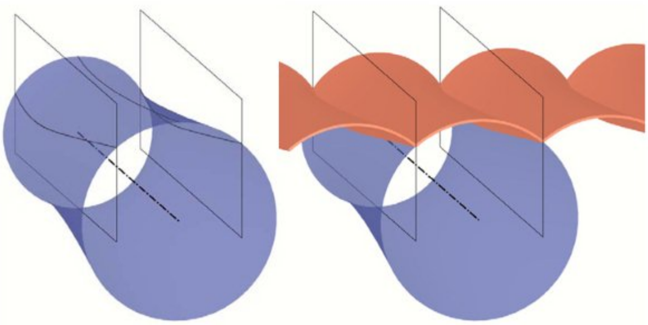
El uso del hiperboloide es muy habitual en las torres de refrigeración de las centrales térmicas, construidas así por razones tanto prácticas como estructurales. En el siglo XX encontramos otros ejemplos de esta superficie cuadrática o cuádrica, como por ejemplo la Torre Port Kobe, en Japón o el Planetario McDonnell en St. Louis Missouri, ambos construidos en 1963.

Planetario McDonnell en St Louis Missouri

Central térmica en Ascó, Tarragona

Torre Port Kobe

La cubierta del hipódromo de la Zarzuela, en Madrid, obra de Eduardo Torroja en 1934, se genera a partir de secciones de hiperboloide, dando como resultado una estructura esbelta y formalmente atractiva.



4.12. Ejercicios y problemas

Se propone aquí una pequeña muestra de ejercicios basados en las características que hemos estudiado de la hipérbola, con distintos grados de dificultad, perfectamente aplicables al currículo de Bachillerato. Los seis primeros responden a los contenidos mínimos exigidos en la Unidad Didáctica y los siguientes pueden realizarlos alumnos más destacados, atendiendo a la diversidad.

1. Determinar la ecuación de la hipérbola con focos en (-1,2) y (5,2), y vértices en (0,2) y (4,2). Dibujarla. Calcular sus asíntotas y su excentricidad.

2. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola $2x^2 - 3y^2 = 6$ paralelas a la bisectriz del primer cuadrante.

3. Hallar la ecuación reducida de la hipérbola sabiendo que tiene por focos F = (3,0) y F' = (-3,0) y diferencia de distancias 4.

4. Hallar la ecuación reducida de la hipérbola sabiendo que tiene por vértices A = (10,0) y A' = (-10,0) y la excentricidad es e = 2.

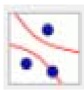
5. Hallar la ecuación reducida de la hipérbola sabiendo que el semieje mayor es 3 y la semidistancia focal es 5.

6. Hallar los valores a, b, c y e de la hipérbola, sabiendo que su ecuación es
$$16x^2 - 9y^2 = 144.$$

7. Determinar la ecuación de la hipérbola con vértices en (3,-5) y (3,1), y asíntotas $y = 2x - 8$, $y = -2x + 4$. Obtener sus focos y dibujarla.

8. Escribir la ecuación, referidas a los ejes, de la hipérbola equilátera $xy = 2$.

   Ejercicio para trabajar con Geogebra:

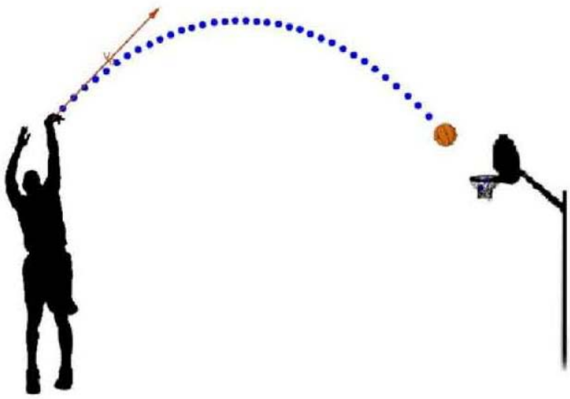
9. Usa la herramienta hipérbola  para dibujar una hipérbola con focos en puntos F1, F2 y que pasa por un punto P.
   Crea un punto nuevo A que pertenezca a la hipérbola y con la herramienta tangentes traza la tangente a la hipérbola por el punto A. Comprueba la propiedad óptica de la hipérbola.

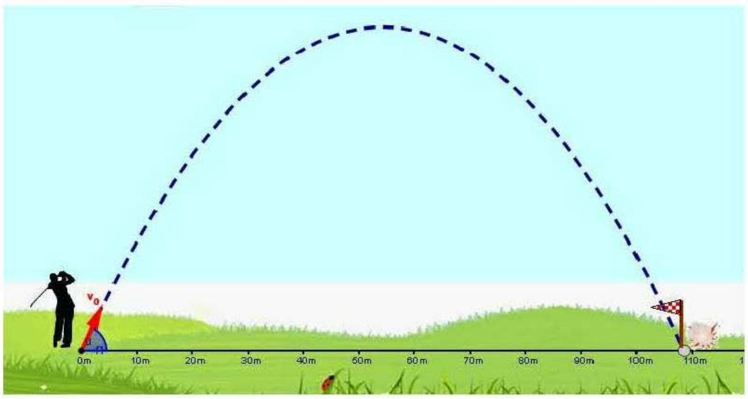
5. PARÁBOLA

5.1. Ejemplos cotidianos donde aparecen parábolas

La tercera curva cónica que estudiaremos en este trabajo es la parábola, distinta de las dos anteriores en el sentido de que sólo tiene un foco en lugar de dos, o considerándolo de otra forma, es una cónica con dos focos, uno de los cuales está en el infinito.

La parábola está presente de una forma muy significativa en nuestra vida cotidiana, aunque no seamos plenamente conscientes de ello. De hecho, fue Galileo quien descubrió que la bala disparada por un cañón, si despreciamos el rozamiento con el aire, describe una trayectoria parabólica. En realidad cualquier lanzamiento de un objeto traza una parábola en el aire. El lanzamiento de un jugador de baloncesto, el pelotazo de un jugador de futbol o el tiro de un golfista son ejemplos de parábolas que vemos con mucha frecuencia. Incluso en las fuentes, cuando se dispara un chorro de agua vemos esta curva cónica.





También estamos acostumbrados a ver antenas parabólicas a nuestro alrededor, que son paraboloides de revolución (superficies que se generan al girar una parábola en torno a su eje) y que tienen esta forma debido a la propiedad óptica de la parábola, y que veremos más adelante. Es también el motivo por el que los faros de los coches e incluso las luminarias de los faros marítimos estén basados en esta curva. Al igual que en el caso de las otras dos cónicas, una lámpara puede proyectar una parábola de luz en la pared si tiene la inclinación adecuada.

5.2. Definición de parábola

Como sección del cono

La parábola es la curva obtenida al seccionar un cono de revolución por un plano, de tal forma que el ángulo que forma el plano con el eje del cono es igual que el formado por el eje y cualquier generatriz del cono.

Como lugar geométrico

Se llama parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *foco* y de una recta que no pasa por el foco, llamada *directriz*.

5.3. Elementos de la parábola

- **Eje y vértice**
  La recta ortogonal a la directriz y que pasa por el foco es el **eje** de la parábola. Este eje corta a la parábola en un único punto llamado **vértice**.

- **Foco**
  Es un punto fijo que se denota por F y está sobre el eje.

- **Directriz**
  Es una recta fija que no pasa por el foco y es perpendicular al eje. Se denota por d.

- **Parámetro**
  Es la distancia del foco a la directriz, y se designa por $2p$. El vértice está en el punto medio del segmento que une perpendicularmente el foco con la directriz; así pues, la distancia del vértice al foco es p y la distancia del vértice a la directriz también es p.

- **Radio vector**
  Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.

- **Cuerda focal**
  Es un segmento que une dos puntos de la parábola y que pasa por el foco. La mínima cuerda focal, es decir, la que es perpendicular al eje, es el *latus rectum* de la parábola.

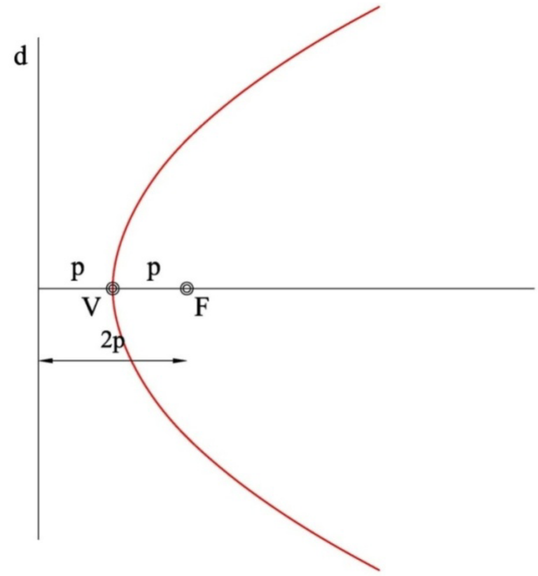


figura 1

5.4. Ecuación reducida de la parábola

Sea *R*={O,B} la referencia canónica del plano.

Determinemos la ecuación de una parábola cuyo vértice está en el origen de coordenadas O = (0,0), su eje coincide con el eje X y su foco está en el semieje de abscisas positivo. Llamamos p a la distancia entre el foco y el vértice, y a la distancia entre el vértice y la directriz, es decir, *2p* es el parámetro de la parábola.

Un punto P = (x,y) estará en la parábola si cumple que (figura 2):

$$d(P,F) = d(P,d)$$

La distancia entre el punto P y el foco F viene dada por la siguiente expresión:

$$d(P,F) = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

La distancia entre el punto P y la directriz viene es:

$$d(P,d) = |x+p|$$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}\right)^2 = (x+p)^2$$

$$(x-p)^2+y^2 = x^2+p^2+2xp$$

$$x^2+p^2-2xp+y^2 = x^2+p^2+2xp$$

Simplificando la expresión, obtenemos:

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Esta es la ecuación reducida de una parábola con vértice en el origen de coordenadas, eje el de abscisas y orientada hacia la derecha.

En el caso de que la parábola tenga su centro en el punto (h,k) y su eje sea paralelo al eje OX, su ecuación es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

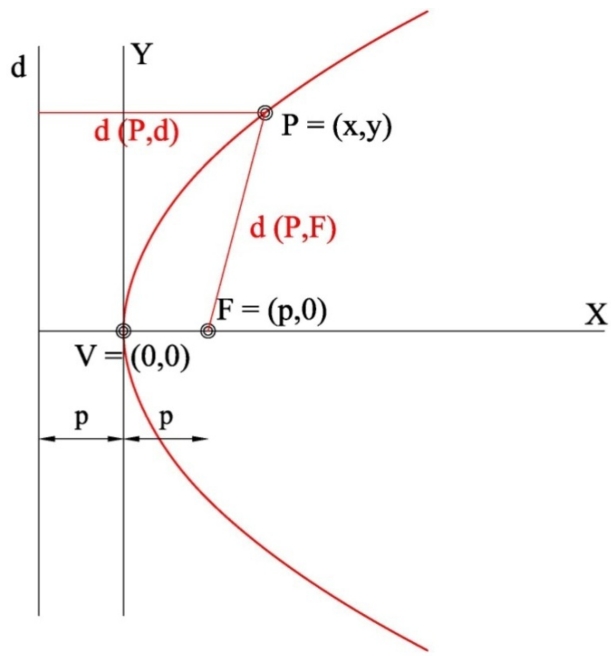


figura 2

La ecuación $y^2 = 4px$ se puede expresar también de la forma $y^2 = lx$. El valor $l = 4p$ es la medida de la mínima cuerda focal o "latus rectum". La ecuación $y^2 = lx$ se interpreta geométricamente diciendo que el área del cuadrado construido sobre la ordenada y de un punto de la curva, es igual al área del rectángulo de dimensiones x y l (figura 3).

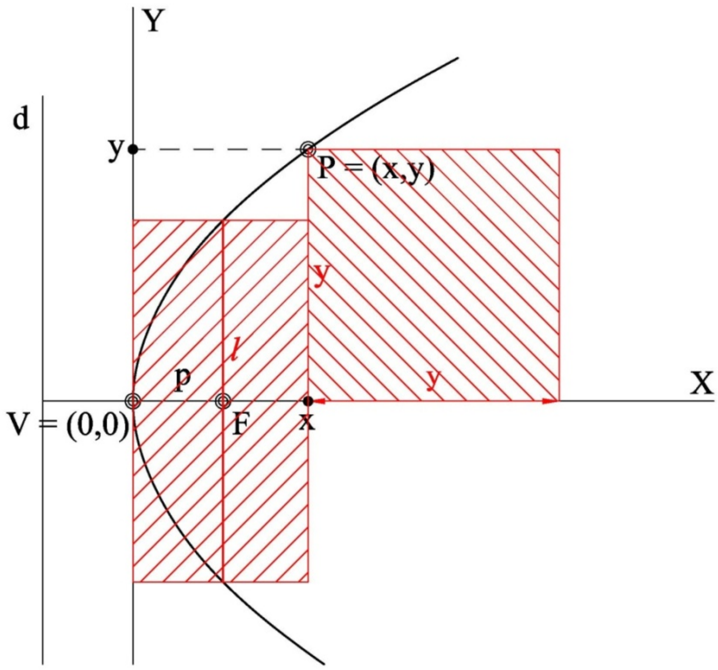
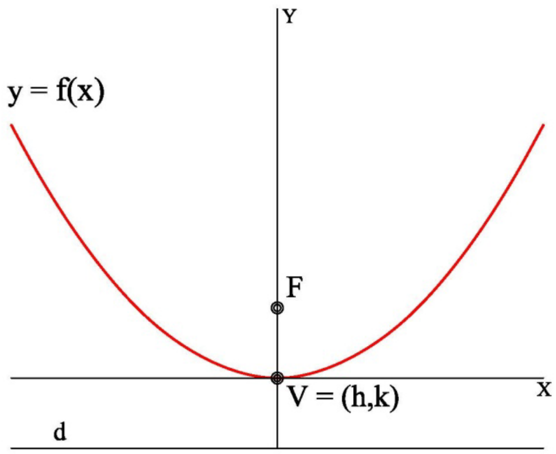
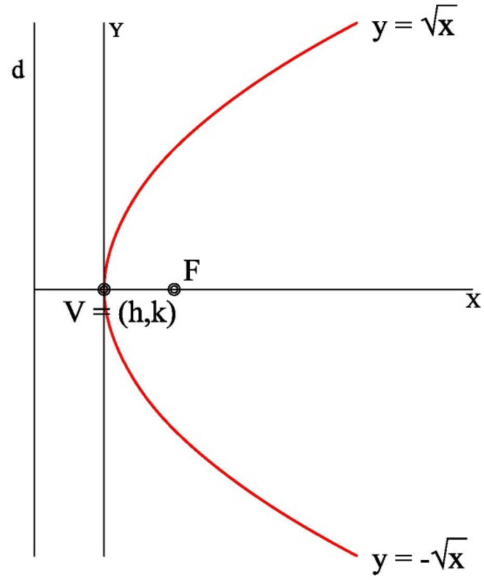


figura 3

Tabla resumen





Parábola bien posicionada con vértice en $V = (h, k)$		
Eje de simetría	Vertical	Horizontal
Ecuación	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
Eje	$x = h$	$y = k$
Foco	$F = (h, k+p)$	$F = (h+p, k)$
Directriz	$y = k - p$	$x = h - p$

5.5. Excentricidad de una parábola

Sea P un punto cualquiera de la parábola; se llama **excentricidad** de la parábola a la razón de las distancias de P al foco y de P a la directriz d, es decir:

$$e = \frac{d(P,F)}{d(P,d)}$$

Ya que en la parábola las distancias de un punto al foco y a la directriz son iguales, se tiene que la excentricidad de la parábola siempre tiene valor 1 (e = 1).

5.6. Tangente a una parábola en un punto de la misma

Calculemos la ecuación de la recta tangente a una parábola en un punto cualquiera de ella, al que le damos las coordenadas genéricas (x_0 , y_0).

Sea la ecuación de una parábola cuyo vértice está en el origen de coordenadas y su eje coincide con el eje de ordenadas:

$$x^2 = 4py$$

Derivando respecto de x:

$$2x = 4py'$$

En el punto (x_0 , y_0) tendremos:

$$2x_0 = 4py'(x_0)$$

$$y'(x_0) = \frac{x_0}{2p} = m$$

La ecuación forma punto-pendiente de la recta tangente es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Sustituyendo en este caso:

$$y - y_0 = \frac{x_0}{2p}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{x_0}{2p}x - \frac{{x_0}^2}{2p}$$

$$\frac{x_0}{2p}x - y - \frac{{x_0}^2}{2p} + y_0 = 0$$

Como ${x_0}^2 = 4py_0$ por pertenecer (x_0 , y_0) a la parábola, se tiene:

$$\frac{x_0}{2p}x - y - \frac{4py_0}{2p} + y_0 = 0$$

$$\frac{x_0}{2p}x - y - 2y_0 + y_0 = 0$$

$$\frac{x_0}{2p}x - y - y_0 = 0$$

$$x_0 x = 2p(y + y_0)$$

Obtenemos de esta forma la ecuación de la recta tangente a la parábola en un punto (x_0 , y_0) de la misma.

A partir de la ecuación de la recta tangente podemos hallar la de la recta normal a la parábola en el mismo punto, ya que ambas rectas son perpendiculares y se cumple que:

$$m \cdot m' = -1$$

donde m y m' son las pendientes de las rectas tangente y normal, respectivamente, a la parábola en un punto.

Por tanto:

$$m = \frac{x_0}{2p}; \qquad m' = -\frac{2p}{x_0}, \;\; x_0 \neq 0$$

Si $x_0 = 0$, las rectas tangente y normal son, respectivamente, los ejes X e Y.

Y la ecuación de la recta normal vendrá dada por la expresión:

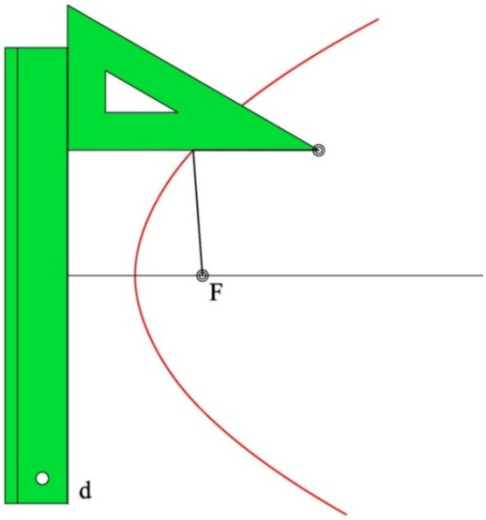
$$y - y_0 = -\frac{2p}{x_0}(x - x_0)$$

5.7. Construcciones de la parábola

Con cuerda

Este método se basa en la definición de la parábola como lugar geométrico. Para ello se utiliza un cartabón, una regla, una cuerda y una chincheta. Se fijan en primer lugar la directriz y el foco; sobre la directriz se apoya la regla, que ha de quedar fija para poder deslizar sobre ella el cartabón. La cuerda, que debe tener la misma longitud que el cateto mayor del cartabón, se ata en uno de sus extremos a la chincheta, y esta se clava en el foco. El otro extremo de la cuerda se fija en el cartabón, justo en el vértice de este que forman el cateto mayor y la hipotenusa.

A continuación se apoya el cartabón en la regla (que tenemos fijada sobre la directriz) sobre su cateto menor, y mientras deslizamos éste por la regla, con un lápiz mantenemos tensa la cuerda, lo que nos dibujará una parábola.



Método del sastre

Se dibuja un ángulo cualquiera. Se marcan divisiones iguales en cada uno de los dos lados de dicho ángulo, y se numeran de la forma en que se aprecia en la figura 3. Se unen los puntos con números iguales mediante segmentos que serán tangentes a la parábola. La curva queda definida como envolvente de los segmentos tangentes (figura 3).

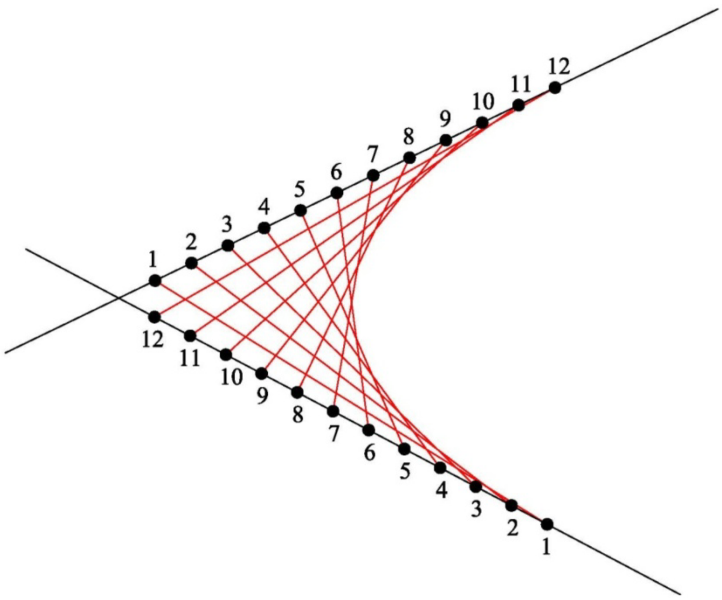
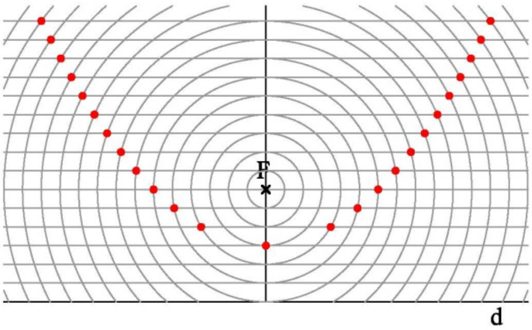
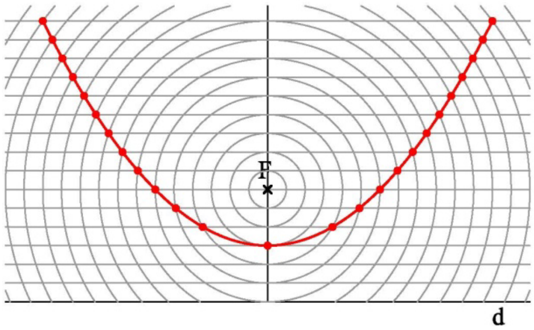


figura 3

Mediante circunferencias concéntricas

Se parte de un punto fijo F, el foco, y una recta también fija *d*, la directriz. Trazamos rectas paralelas equidistantes a la directriz (una de ellas pasando por el foco) y con esa misma distancia como radio, dibujamos circunferencias concéntricas de centro F. El vértice de la parábola estará a la misma distancia de F y de *d*, y ese punto (vértice) es el de tangencia de una recta y una circunferencia. Tomando la siguiente recta en dirección hacia el foco, buscamos su intersección con la circunferencia de radio una unidad más que la anterior; esos dos puntos serán puntos de la parábola. Repetimos el proceso con las rectas y las circunferencias sucesivas, obteniendo puntos que posteriormente unimos para obtener la parábola buscada.





Por puntos (Dibujo Técnico). Figura 4

Partimos de los siguientes datos conocidos: el eje de la parábola, la directriz y el foco. A partir de aquí hallamos el vértice V, punto medio del segmento $\overline{AF}$, siendo A el punto de intersección del eje con la directriz.

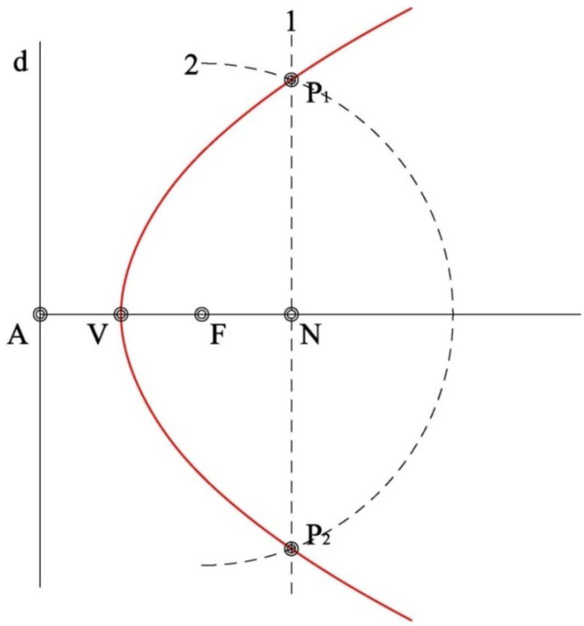
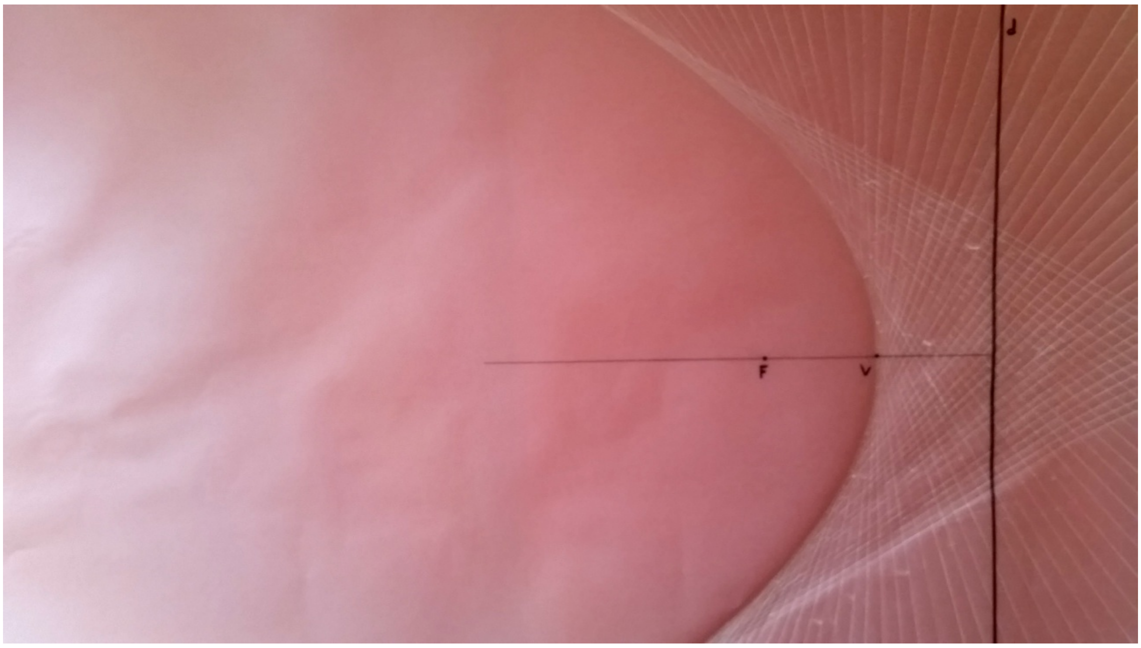


figura 4

Tomamos puntos sobre el eje, siendo recomendable tomar al menos uno entre V y F y varios a partir de F. Por uno de estos puntos escogidos, N, trazamos una recta (1) perpendicular al eje. A continuación, con centro en F y radio $\overline{AN}$ trazamos un arco (2) que cortará a la recta (1) en dos puntos P_1 y P_2, que serán puntos de la parábola. Repetimos el proceso tomando otros puntos sobre el eje para hallar nuevos puntos de la curva, que finalmente se unen con una plantilla de curvas.

Papel plegado

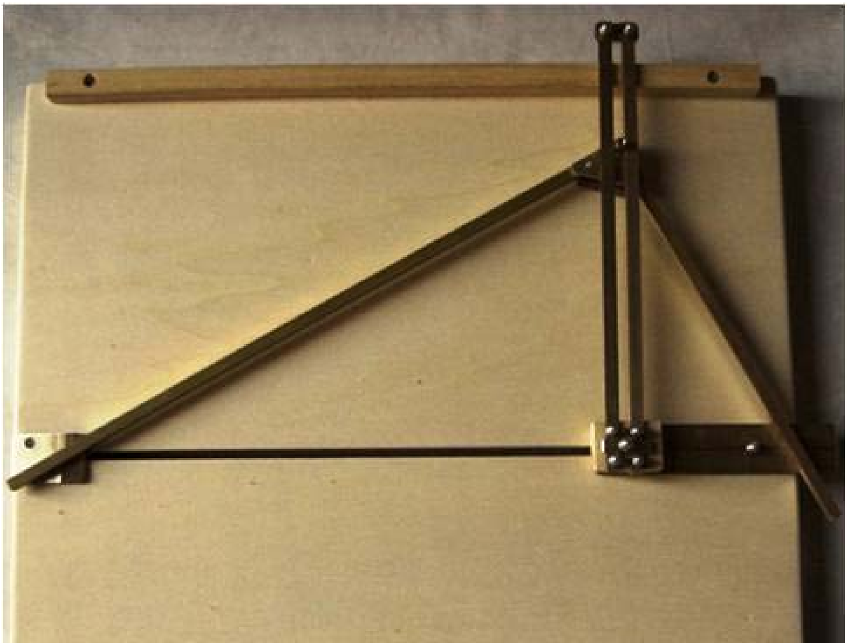
También la parábola puede obtenerse mediante papiroflexia. El sistema es similar al descrito para los casos de la elipse y de la hipérbola, con una salvedad. Si en las dos anteriores dibujábamos una circunferencia cuyo centro sería uno de los focos de la curva, y elegíamos un punto (el otro foco) que íbamos desplazando mediante dobleces por la circunferencia dibujada, en este caso, al tener la parábola un sólo foco, en lugar de una circunferencia trazaremos una recta, la directriz, que es la que nos servirá de guía para ir doblando el papel de manera que vayamos haciendo coincidir el punto elegido sobre la recta. Los dobleces serán, como en los casos anteriores, las tangentes a la parábola, quedando ésta dibujada sobre el papel. Es decir, la parábola se genera como envolvente de las tangentes (dobleces).



Parabológrafos

Son instrumentos diseñados y fabricados para trazar parábolas, muy usados antes de la irrupción de la informática.

Réplica del parabológrafo diseñado por Leonardo da Vinci. Museo Galileo-Istituto di Storia della Scienza.
Florencia, 2001



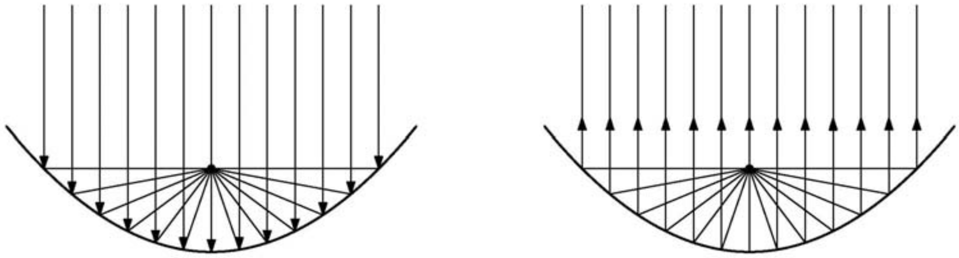
Parabológrafo de Cavalieri

Programas de Geometría dinámica, de diseño gráfico y de cálculo simbólico

Sirven los mismos programas que, de cada tipo, se han descrito para el caso de la elipse.

5.8. Propiedades ópticas de la parábola

Todos los rayos con direcciones paralelas al eje de una parábola que inciden en la misma, tras reflejarse, pasan por el foco. O también, si se coloca un punto de luz en el foco de una parábola, los rayos se reflejan en ésta y salen en direcciones paralelas al eje de la parábola.



Esta propiedad es equivalente a uno de los siguientes hechos geométricos siguientes:

1. En todo punto P de la parábola, el ángulo α que forma la tangente t en dicho punto con el radio vector $\overline{PF}$ es igual al ángulo que forma la tangente con el eje de la parábola, o la recta paralela al eje que pasa por P.

2. La normal n a la parábola en el punto P forma ángulos iguales β con el radio vector $\overline{PF}$ y con el eje de la parábola, o la recta paralela a éste que pasa por P.

3. Las rectas tangente y normal a una parábola en un punto P son las bisectrices del ángulo que forman el radio vector $\overline{PF}$ y la recta paralela al eje que pasa por P.

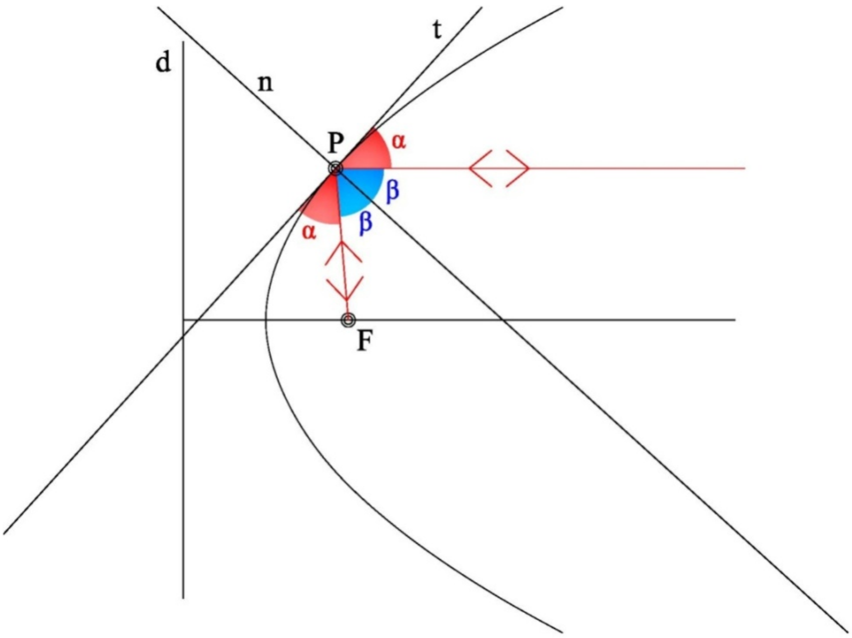


figura 5

5.9. Aplicaciones y ejemplos

Antenas parabólicas

Como acabamos de ver, la propiedad óptica de la parábola hace que los rayos que inciden sobre ella en dirección paralela a su eje, tras reflejarse en la superficie curva se concentren en un punto fijo, que es el foco. Esta es la propiedad en que se basan las antenas parabólicas, llamadas así precisamente por ser paraboloides de revolución. Así, por muy pequeña que sea la señal que recibe la antena, al converger todas las ondas en un sólo punto, ésta se amplía miles e incluso millones de veces.

Por este motivo las antenas construidas con fines astronómicos tienen grandes tamaños, ya que tienen que captar señales débiles.

Esta propiedad también se usa en algunas centrales solares, como la de Odiello, en Francia, que basa su funcionamiento en la propiedad de concentrar los rayos del sol en un foco, produciendo el calor necesario para alimentar un horno en forma de paraboloide que transforma el agua en vapor, generando electricidad.

La propiedad también funciona en el sentido inverso. Si se coloca una fuente de luz en el foco de una parábola o paraboloide, los rayos que reboten en la parábola o en el paraboloide saldrán reflejados en la dirección paralela al eje. De ahí la forma parabólica de los faros de los coches o las linternas. También se utiliza en los faros de mar, tal y como describe el profesor José del Río:

"El primer reflector parabólico para un faro de mar fue construido por William Hutchinson en 1752 y consistía en un conjunto de pequeños espejos planos adheridos a la parte cóncava de un soporte de yeso en forma de paraboloide de revolución. Luego se sustituyeron estos espejos por una chapa de cobre y plata batidos a mano y, hacia 1800, prácticamente todos los faros empleaban este tipo de reflector parabólico."

Antes, Newton había construido un telescopio reflectante de visión indirecta, consistente en un espejo parabólico que refleja la imagen de un astro y se recoge invertida en un plano que pasa por el foco, donde es observada mediante un microscopio especial llamado ocular del telescopio.

Esta propiedad también es la que se utiliza en el diseño de los altavoces en muchos recintos deportivos, ya que emitiendo las ondas sonoras desde un foco, al tener el altavoz forma de paraboloide, se reflejan en él y salen en direcciones paralelas al eje, que está orientado hacia el recinto.

Tiro parabólico (parábola de seguridad)

Galileo estudió la trayectoria de la bala disparada por un cañón, y detectó que, despreciando la resistencia del aire, dicha trayectoria era una parábola. Este hecho implica que todo lanzamiento que se haga de un objeto, al estar sometido a la gravedad terrestre, va a describir una parábola, desde la bala de cañón hasta el chorro de agua de una fuente, pasando por el lanzamiento de un balón o la jabalina en atletismo.

Posteriormente, Torricelli, discípulo de Galileo, llegó aún más lejos demostrando que si lanzamos un objeto desde un punto, todas las posibles trayectorias parabólicas tendrán una envolvente común que también es una parábola. Esto implica que si se dispara una bala desde un punto, por más que varíe el ángulo o la dirección del tiro, nunca va a sobrepasar esa parábola. De ahí que reciba el nombre de *parábola de seguridad* (figura 6).

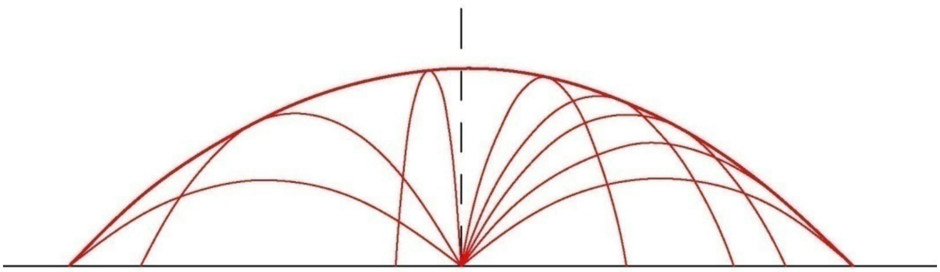


figura 6

Arquitectura

Paralelamente a lo que hemos visto en el caso de circunferencias y elipses, aunque en este caso de manera mucho más evidente, la primera aplicación de la parábola en arquitectura fue en el diseño de arcos.

Gaudí, pionero en el uso de la curva catenaria en arquitectura, también utilizó la parábola en alguna de sus obras.

Es fundamental distinguir la curva catenaria de la parábola, pues aunque formalmente puedan parecer similares, sus ecuaciones son muy distintas (la catenaria tiene por ecuación $ch\, x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ mientras que la parábola es una función polinómica de segundo grado.

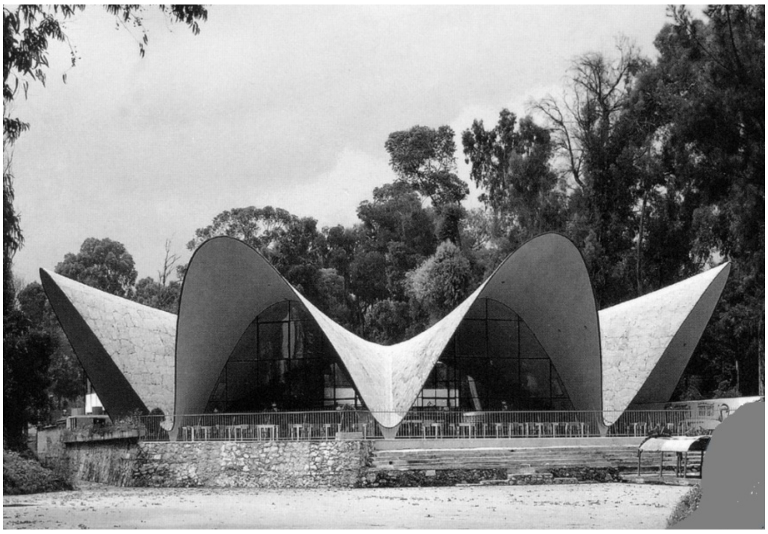

Berliner Bogen Office Building. Hamburgo. Frener & Reifer

Hoy en día la parábola es una de las formas estructurales más utilizadas en la construcción de grandes puentes porque los pesos se distribuyen equidistantemente en la horizontal (tablero).


Puente Gateshead.
Newcastle
Gifford & Partners


Puente sobre el Guadiana
Mérida
Santiago Calatrava

Derivada de la parábola encontramos la superficie cuádrica llamada paraboloide hiperbólico, superficie alabeada de secciones parabólicas o hiperbólicas que es el resultado del desplazamiento de una recta que se desliza sobre otras dos rectas que se cruzan en el espacio.



Restaurante Los Manantianles
Ciudad de México
Félix Candela

L'Oceanografic
Valencia
Félix Candela

5.10. Ejercicios y problemas

Se propone una pequeña muestra de ejercicios basados en las características que hemos estudiado de la parábola, perfectamente aplicables al currículo de Bachillerato y con distintos grados de dificultad, perteneciendo los cinco primeros a los contenidos mínimos exigidos en la Unidad Didáctica y los siguientes para alumnos más destacados, atendiendo a la diversidad.

1. Determinar la ecuación de las siguientes parábolas:
   a) Vértice en (2,1) y foco en (2,4)
   b) Vértice en (2,1) y foco en (5,1)
   c) Vértice en (1,1) y directriz $y = 7$
   d) Vértice en (1,1) y directriz $x = 7$

2. Determinar los elementos y ecuaciones reducidas de las parábolas:
   a) $y = 4x^2$
   b) $4y^2 = x$

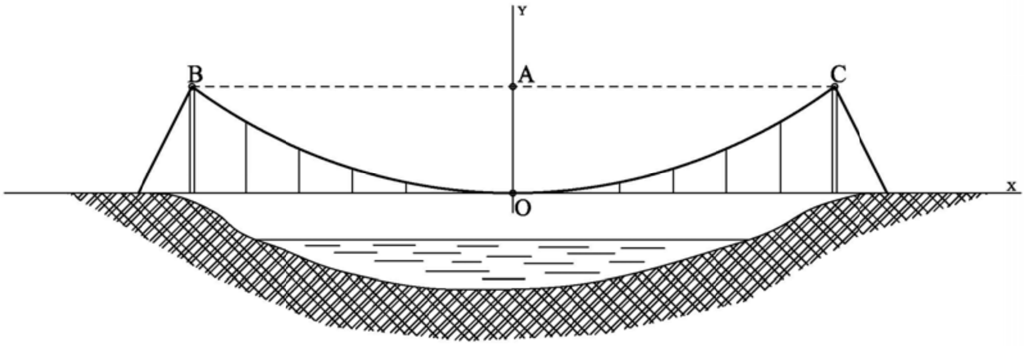
3. Hallar el valor del parámetro p de modo que la parábola de ecuación $y = 2px$ pase por el punto P = (3,-1).

4. Hallar el valor del parámetro a para que la recta $4x - 3y + a = 0$ sea tangente a la parábola $3y = 3x^2 + 10x + 4$.

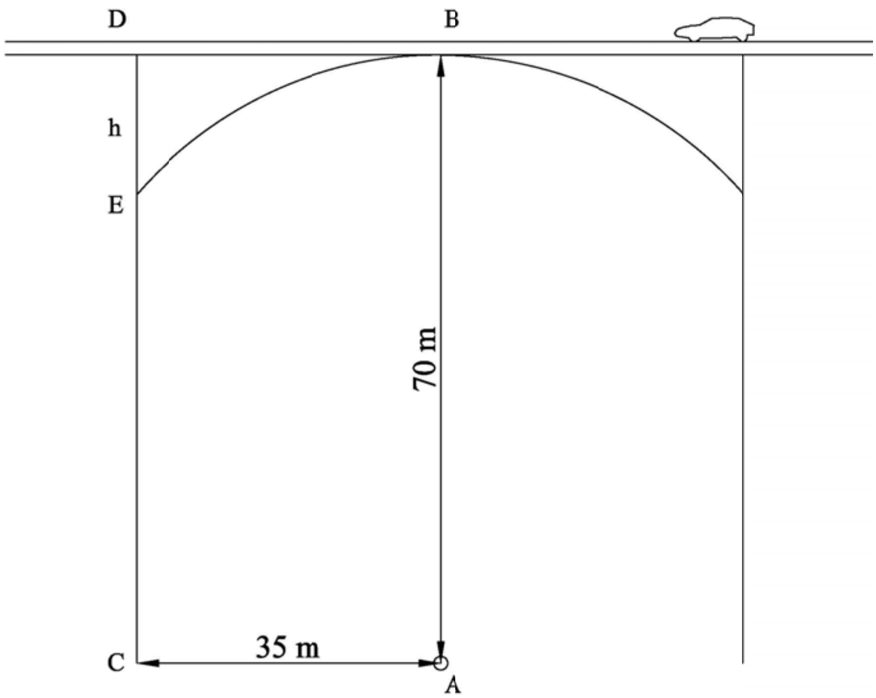
5. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la parábola $y^2 = 2px$ en el punto P = (9,6).

6. Demostrar que la longitud de la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola $y^2 = 4px$ es$4p$.

7. La cuerda del puente colgante de la figura tiene forma de parábola. Se quiere conocer la ecuación de esta parábola respecto a los ejes coordenados señalados en la figura, sabiendo que d(O,A) = 10 y d(B, C) = 60. ¿Cuáles son las coordenadas del foco de esta parábola?



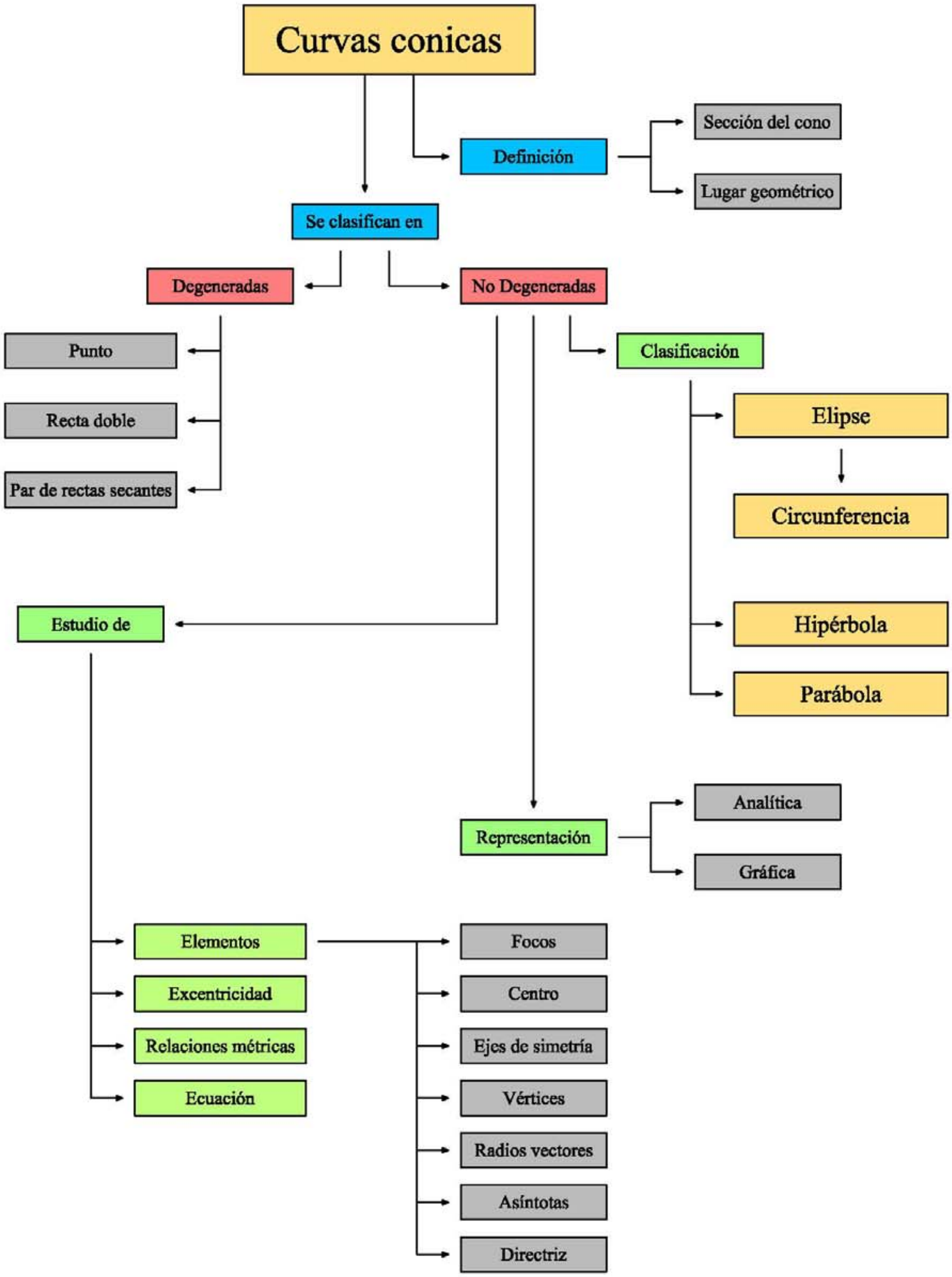
8. Se construye un puente con su estructura de apoyo en forma de parábola. Si el foco de la parábola se localiza 70 m por debajo del centro del puente y a 35 m de cada lado, ¿cuál debe ser la altura, h = d(E,D), de los soportes de cada lado?



Ejercicio para trabajar con Geogebra:

9. Usa la herramienta parábola  para dibujar una parábola con foco en el punto F y directriz la recta AB.
Crea un punto nuevo C que pertenezca a la parábola y con la herramienta tangentes traza la tangente a la parábola por el punto C. Comprueba la propiedad óptica de la parábola.

6. CUADRO RESUMEN



7. DIDÁCTICA DE LAS CURVAS CÓNICAS

7.1. Las curvas cónicas en el currículo de Secundaria

El estudio de las curvas cónicas aparece por primera vez en el primer curso de Bachillerato, y se estudia, tanto en la asignatura de Matemáticas, como en la de Dibujo Técnico. Vamos a ir desgranando en qué modalidades de bachillerato, asignaturas y cursos se estudian las curvas cónicas.

Primero vemos lo que marca el **RD** 1467/2007 (LOE) en el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Modalidad de Ciencias y Tecnología.

<u>Matemáticas I (primer curso)</u>
"Bloque 2. Geometría:
[...]
- *Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas.*

<u>Dibujo Técnico II (segundo curso)</u>
"Bloque 1. Trazados geométricos:
[...]
- *Curvas cónicas y técnicas.*

Modalidad de Artes.

Dibujo Técnico II (segundo curso)
"Bloque 1. Trazados geométricos:
[...]
- *Curvas cónicas y técnicas.*

No aparecen, por tanto, las curvas cónicas ni en segundo curso de bachillerato en la asignatura de Matemáticas II ni en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, donde tan sólo se explica, en el bloque dedicado al estudio de funciones, que una ecuación de segundo grado es una cónica, sin entrar a profundizar sobre ella.

Tampoco se estudian las curvas cónicas en primero de bachillerato en la asignatura de Dibujo Técnico. No parece lógico en absoluto que un mismo tema, que podría estudiarse de manera transversal, no sea impartido en el mismo curso, dando así a entender a los alumnos que son conceptos totalmente distintos cuando, en realidad, se estudia lo mismo desde dos enfoques, que trabajados a la vez sería mucho más enriquecedor y facilitaría el estudio y comprensión para los estudiantes.

Veremos ahora cuáles son los contenidos que especifica el **BOCyL** en el *Decreto 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León* sobre el tema de las curvas cónicas.

Modalidad de Ciencias y Tecnología.

Matemáticas I (primer curso)
"Bloque 2. Geometría:
[...]
- *Idea de lugar geométrico en el plano. Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola: definición geométrica, elementos característicos y ecuación canónica. Método de completar cuadrados.*
- *Utilización de programas de geometría dinámica para construir e investigar relaciones geométricas."*

Además, para este curso, el objetivo nº 6 de la asignatura dice lo siguiente:
"Identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano en distintas situaciones de la vida real, obtener, a partir de su definición como lugar geométrico, la ecuación de una cónica e identificar sus elementos característicos."

Dibujo Técnico I (primer curso)
"Bloque 2. Trazados geométricos:
[...]
- *Curvas cónicas. La elipse. Definiciones y trazado de la elipse y de sus elementos. Diámetros conjugados. La hipérbola. Definiciones y trazado de la hipérbola y de sus elementos. Asíntotas. La parábola. Definiciones y trazado de la parábola. Curvas cíclicas. Definición de curvas cíclicas."*

Dibujo Técnico II (segundo curso)
"Bloque 1. Trazados geométricos:
[...]
- *Curvas cónicas. La elipse. Tangencias e intersección con una recta. La hipérbola. Tangencias e intersección con una recta. La parábola. Tangencias e intersección con una recta. Aplicaciones. Curvas técnicas. Óvalo, ovoide, espiral y voluta. Aplicaciones. Curvas cíclicas. Cicloide, Epicicloide, Hipocicloide. Conocimiento de la forma y de las características de cada una de ellas. Formas de generarse. Evolvente de la circunferencia. Aplicaciones.*

Además, en los criterios de evaluación, el punto 4 dice:
"Resolver problemas geométricos relativos a las curvas cónicas en los que intervengan elementos principales de las mismas, intersecciones con rectas o rectas tangentes. Trazar curvas técnicas a partir de su definición."

Modalidad de Artes

Las asignaturas de Dibujo Técnico I y Dibujo Técnico II de la Modalidad de Artes detallan los mismos contenidos que en la modalidad de Ciencias y Tecnología.

En el caso del BOCyL existe una mayor coherencia en lo que se refiere al marco temporal en que se explican las curvas cónicas en ambas asignaturas, siendo muy interesante el trabajo conjunto de los profesores de Matemáticas y Dibujo Técnico para una visión global y completa de las curvas cónicas en el mismo periodo de tiempo.

7.2. Uso de las TICs

En la actualidad tenemos a nuestro alcance infinidad de herramientas que nos van a permitir impartir las clases de matemáticas recurriendo a metodologías mas participativas para los alumnos, mas interactivas y que despierten una mayor motivación en los alumnos.

Programas de Geometría Dinámica
Existen una serie de programas informáticos que nos van a permitir experimentar con las curvas cónicas y comprender sus propiedades métricas, su excentricidad, etc. de una forma interactiva, intuitiva y amena. Es el caso de Geogebra, un programa muy sencillo de utilizar y cuyo uso está muy extendido gracias a su gratuidad, estando presente ya en la mayoría de los centros educativos.

Con él podemos trazar elipses, hipérbolas o parábolas y sobre ella variar las longitudes de sus semiejes, la distancia focal, etc. y ver de qué forma afecta a la curva, calcular y variar la excentricidad, etc., es decir, trabajar en geometría dinámica.

El hecho de que los alumnos dibujen por sí mismos las curvas cónicas y no se limiten a verlas representadas en un libro o en la pizarra, les ayudará a comprenderlas mejor, a razonar sus propiedades, sus características, etc.

Pizarra digital
En el caso de que el aula disponga de una pizarra digital, todas las ventajas que acabamos de ver en el uso de programas de geometría dinámica, como Geogebra, podremos tenerlas sin necesidad de salir de la propio aula. Además, es mucho más cómodo y útil tener la posibilidad de apoyar la explicación teórica con representaciones gráficas precisas en lugar de dibujar las curvas en la pizarra tradicional, aunque no por ello debe ser desechada esta opción.

La posibilidad de contar con una pizarra digital evitaría la siguiente problemática: normalmente se inicia la explicación de las curvas cónicas en el aula con métodos tradicionales (pizarra de tiza, libros, etc.) y una vez vistas, puede solicitarse el aula de informática del centro para trabajar con Geogebra u otros programas. Esto hace que no se consiga una visión global de ambas explicaciones, y además limita mucho tener que utilizar un aula que suele estar bastante solicitada. En cambio, si tenemos una pizarra digital en el aula, podemos explicar y dibujar las cónicas de manera simultánea, lo que supone un beneficio importante a la hora de la comprensión del tema por parte de los alumnos.

Internet
La red es una gran base de datos donde los alumnos pueden buscar información sobre cualquier tema. En el caso de las curvas cónicas puede ser de gran utilidad una búsqueda de ejemplos de curvas cónicas en la vida real, así como sus aplicaciones.

Uno de los problemas a los que se enfrenta el profesorado de matemáticas, es el hecho de transmitir que aquello que se está estudiando tiene aplicaciones en nuestro día a día. En el caso que nos ocupa, las curvas cónicas existen mucho antes que el propio ser humano, por ejemplo en las órbitas de los planetas y cuerpos celestes, y el hombre posteriormente las utiliza con multitud de fines. Este puede ser un trabajo interesante de cara al inicio del tema sobre las curvas cónicas en bachillerato: realizar una búsqueda y posterior puesta en común de ejemplos de estas curvas en la vida real.

Además de este enfoque, existen muchas páginas webs sumamente interesantes donde podemos encontrar características, propiedades, curiosidades, etc. de las cónicas que contribuyen a que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea significativo.

Medios audiovisuales
Unas herramientas que también podemos usar son el proyector y la pantalla. Señalaba en el punto anterior una actividad interactiva para hacer con los alumnos, como es la búsqueda de ejemplos de curvas cónicas en la vida cotidiana, en la tecnología, en la astronomía, etc. y su posterior puesta en común. Efectivamente, la mejor forma de compartir los ejemplos encontrados por los alumnos es proyectarlos y comentarlos de manera conjunta, para poder además trabajar sobre ellos.

Existen además vídeos muy interesantes desde el punto de vista educativo sobre este tema, como es el caso del realizado por el matemático Antonio Pérez Sanz titulado "Cónicas: del baloncesto a los cometas" dentro de la serie de TVE "Más por menos", aunque hay otros muchos ejemplos que podemos utilizar de forma gratuita.

7.3. Innovación docente en la enseñanza de las curvas cónicas

Hemos visto en los apartados correspondientes a cada curva cónica una variedad de métodos para trazarlas que van desde procesos manuales como el uso de chinchetas y cuerdas (método del jardinero) o la papiroflexia, hasta trazados más técnicos con regla y compás.

Es evidente, como ya hemos dicho en el punto anterior, que los alumnos aprenderán más y mejor acerca de las cónicas si las trabajan y las manipulan, y no se limitan a atender a la explicación del profesor y verlas dibujadas en el libro.

Un elemento que ayuda mucho a comprender las secciones del cono que dan como resultado las curvas cónicas es el llamado "*cono de Apolonio*", herramienta manipulativa que puede utilizarse perfectamente en el aula durante la explicación.

Quizá la propuesta más global, que implicaría una colaboración entre departamentos, es el trabajo conjunto en las asignaturas de Matemáticas y Dibujo Técnico, a la hora de estudiar y trabajar las curvas cónicas, ya que muchos de los trazados geométricos que se aprenden en Dibujo están basados en la definición de las cónicas como lugar geométrico, además de una manera muy evidente. Por ejemplo, la construcción de una elipse por puntos evidencia que la suma de las distancias de un punto a los focos es constante e igual a la longitud del eje mayor.

Otro ejemplo que hemos visto es la construcción de las curvas cónicas mediante papiroflexia, donde una vez realizado, vemos varias de sus propiedades. Este trazado se puede realizar también en dibujo técnico, método que se conoce como *trazado por envolventes*.

8. ANEXO

OTROS ESTUDIOS Y RESULTADOS SOBRE CURVAS CÓNICAS

8.1. Estudio matricial

Del mismo modo que toda ecuación de primer grado en x e y representa una recta en R^2, toda ecuación de segundo grado representa una cónica (degenerada o no). Por tanto, toda cónica $\mathcal{C}$ posee, por ejemplo, en la referencia canónica *R={O;B}* una ecuación del tipo:

$$\mathcal{C} \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta ecuación también se puede escribir de forma matricial de la siguiente forma:

$$\mathcal{C} \equiv (1, x, y) \begin{pmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & B/2 \\ E/2 & B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Esta matriz, o cualquiera obtenida de ella multiplicada por un escalar, se llama matriz asociada a la cónica en la referencia *R*. La denotamos por *M(*$\mathcal{C}$*,R)* o simplemente *M*. La submatriz de *M:*

$$M_{11}(C, R) = M_{11} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

se denomina matriz de los términos cuadráticos de $\mathcal{C}$ en *R*. Un primer resultado que puede obtenerse a partir de M es:

$\mathcal{C}$ es una cónica no degenerada $\Leftrightarrow$ det $(M) \neq 0$

Para clasificar una cónica, buscamos su ecuación reducida, es decir, la ecuación de $\mathcal{C}$ lo mas simple posible (haciendo que muchos coeficientes sean 0). Esto se consigue expresando su ecuación en una referencia adecuada. El proceso puede llevarse a cabo desde dos puntos de vista:

- Algebraicamente:
  Eliminando el término *xy* mediante un giro y a continuación completando cuadrados (cuyo significado geométrico es una traslación).

- Matricialmente:
  Buscando una referencia, sin cambiar el origen, *R'={O;B'}* en la que la matriz de los términos cuadráticos de $\mathcal{C}$ sea lo más simple posible (es decir, sea diagonal).

Sabemos que toda matriz simétrica real es diagonalizable, por tanto M_{11} lo es. Pero es más, esta diagonalización siempre puede hacerse mediante una matriz de paso ortogonal. Este hecho nos permite encontrar B' para que $P_{11}^t M_{11} P_{11} = M'_{11}$ sea diagonal. Además, si queremos que este enfoque sea análogo al algebraico debemos ordenar los vectores de B' de forma que $det\ (P_{11}) = 1$, para que se corresponda con un giro.

Una vez diagonalizada ortogonalmente M_{11} procederíamos a completar cuadrados como en el enfoque algebraico.

8.2. Cónicas de ejes paralelos a los coordenados.

Toda cónica cuyos ejes sean paralelos a los coordenados, posee una ecuación de segundo grado del tipo:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Vemos que en la ecuación general no aparece el término B, que es el coeficiente de xy, y por tanto su matriz asociada es:

$$(1, x, y)\begin{pmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & 0 \\ E/2 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

y la matriz de los términos cuadráticos es:

$$M_{11}(\mathcal{C}, R) = M_{11}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Atendiendo a lo anterior, para una cónica no degenerada (det $M \neq 0$) de ecuación $\mathcal{C} \equiv Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se tiene:

$$AC = det\ (M_{11}) \begin{cases} > 0 \Rightarrow \mathcal{C}\ es\ una\ elipse \\ = 0 \Rightarrow \mathcal{C}\ es\ una\ parábola \\ < 0 \Rightarrow \mathcal{C}\ es\ una\ hipérbola \end{cases}$$

Además, si $A = C$ la elipse es una circunferencia.

Completar cuadrados

Para obtener las ecuaciones reducidas de las cónicas con ejes paralelos a los coordenados se procede a completar cuadrados, teniendo en cuenta las siguientes igualdades:

$$x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$$
$$x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$$

Veamos algunos ejemplos:

- Dada la ecuación de segundo grado: $x^2 + 2x + y^2 - 6x - 4 = 0$,
  Obtener su ecuación reducida, decir qué tipo de cónica es y determinar el valor de sus semiejes.

  A partir de las dos expresiones anteriores, realizamos la siguiente operación:

  $$(x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 = 4$$
  $$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 14$$

  Por tanto es una circunferencia de centro el punto (-1,3) y radio $\sqrt{14}$

- Dada la ecuación de segundo grado: $x^2 - 3x + 4y^2 - 7y = 0$,
  Obtener su ecuación reducida, decir qué tipo de cónica es y determinar el valor de sus semiejes.
  Procedemos de la siguiente forma:

$$x^2 - 2\frac{3}{2}x + 4\left(y^2 - \frac{7}{4}y\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4\left(y^2 - 2\cdot\frac{7}{8}y\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4\left[\left(y - \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{49}{64}\right] = \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{49}{16} = \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{85}{16}$$

Dividiendo ambos términos por $\frac{85}{16}$ se tiene:

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{85}{16}}+\frac{4\left(y-\frac{7}{8}\right)^2}{\frac{85}{16}}=1$$

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{85}{16}}+\frac{\left(y-\frac{7}{8}\right)^2}{\frac{85}{64}}=1$$

Por tanto vemos que se trata de una elipse cuyo centro está en el punto $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{8}\right)$ y cuyos semiejes miden:

$$a=\sqrt{\frac{85}{16}}=\frac{\sqrt{85}}{4}$$

$$b=\sqrt{\frac{85}{64}}=\frac{\sqrt{85}}{8}$$

8.3. Ecuaciones paramétricas de las cónicas

Además de las ecuaciones que hemos visto en cada caso y de la ecuación general y matricial anteriores, las curvas cónicas pueden determinarse mediante ecuaciones paramétricas que son las que usan, por ejemplo, los programas de diseño gráfico.

Elipse

Dada la ecuación reducida de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Podemos escribirla de la forma:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

Teniendo en cuenta que

$$cos^2t+\ sen^2t=1$$

Llamando:

$$\frac{x}{a} = \cos t$$

$$\frac{y}{b} = \operatorname{sen} t$$

Se obtienen las ecuaciones paramétricas de la elipse:

$$\boxed{\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0\,, 2\pi)}$$

Unas ecuaciones paramétricas racionales de la elipse son:

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ \\ y = b\,\dfrac{2u}{1+u^2} \end{cases} \qquad (-\infty < u < \infty)$$

En efecto:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2 + \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 = \frac{1+u^4-2u^2+4u^2}{(1+u^2)^2} =$$

$$= \frac{1+u^4+2u^2}{(1+u^2)^2} = \frac{(1+u^2)^2}{(1+u^2)^2} = 1$$

Hipérbola

Dada la ecuación reducida de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Podemos escribirla de la forma:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Teniendo en cuenta que:

$$ch\ t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad sh\ t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$ch^2 t - sh^2 t = 1$$

Tomando:

$$\frac{x}{a} = \operatorname{ch} t$$

$$\frac{y}{b} = \operatorname{sh} t$$

Se deducen las ecuaciones paramétricas de la hipérbola:

$$\boxed{\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t \end{cases} \quad t \in (-\infty\,, +\infty)}$$

De esta relación deriva el nombre de *funciones hiperbólicas*.

Unas ecuaciones paramétricas racionales de la hipérbola son:

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{1+u^2}{1-u^2} \\ \\ y = b\,\dfrac{2u}{1-u^2} \end{cases} \qquad (-1 < u < 1)$$

En efecto, operando de manera similar al caso de la elipse, obtenemos:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Parábola

Dada la ecuación reducida de la parábola:

$$x^2 = 4py$$

Unas ecuaciones paramétricas de la parábola son:

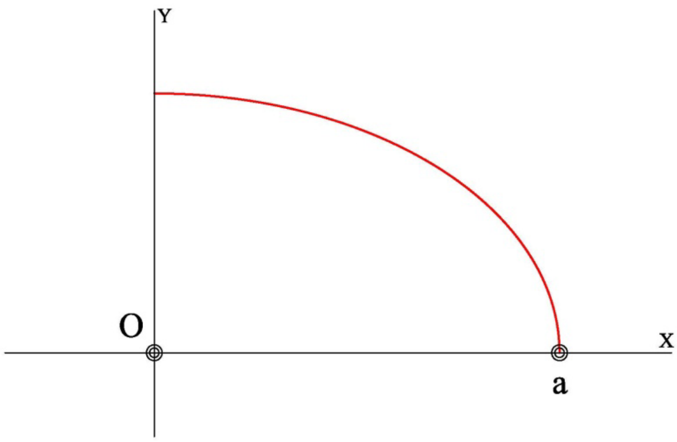
$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{4p} t^2 \end{cases} \quad t \in R}$$

8.4. Cálculo del área de la elipse

El área de una elipse es $A = \pi ab$ siendo a y b las medidas de los semiejes mayor y menor respectivamente.

Existen varios métodos para calcular este valor del área. El que podemos utilizar en Bachillerato es el cálculo mediante una integral de una variable, ya que es el nivel que tienen estos alumnos.

Hallamos el área de un cuarto de elipse limitado por los ejes positivos X e Y. La elipse tiene por centro el origen de coordenadas y su eje mayor está sobre el eje X; por tanto el vértice A tiene como abscisa $x = a$.



Tomamos la ecuación reducida de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Despejando la ordenada *y* para este cuarto de elipse:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Por tanto el área se puede calcular mediante la integral:

$$A = \int_0^a y\,dx = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = b\int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$

Utilizando la igualdad fundamental:

$$sen^2 t + cos^2 t = 1$$

Y poniendo:

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen} t\,; \qquad dx = a \cdot \cos t \cdot dt$$

Veamos los valores que puede tomar *t*:

$$t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$$

Si $x = 0 \ \rightarrow t = 0$
Si $x = a \ \rightarrow t = arcsen 1 = \frac{\pi}{2}$

Por tanto:

$$A = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sen^2 t} \ \cdot a \cos t \, dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t \, dt$$

Como:

$$cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

Se tiene:

$$A = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{ab}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \, dt \right] =$$

$$= \frac{ab}{2} \left\{ [t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} = \frac{ab}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2 \frac{\pi}{2}}{2} - \operatorname{sen} 0 \right] = \frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi ab}{4}$$

Este valor es, por tanto, el área de este cuarto de elipse, luego el área A_t de la elipse completa será:

$$A_t = 4 \left(\frac{\pi ab}{4} \right) = \pi ab$$

9. BIBLIOGRAFÍA

Libros

- Alegría, P. y otros. (2002). *La utilidad de las matemáticas. Capítulo 11. Las cónicas y sus aplicaciones.* (pp. 273-304) (1ª ed.). Murcia: AVL.

- Boyer, Carl. B. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

- Burgos, J. (1982). *Curso de Álgebra y Geometría.* Madrid: Ed. Alhambra Universidad.

- Burgos, J. (1997). *Álgebra lineal*. Madrid: McGraw Hill.

- Hernández, E. (1994). Álgebra y geometría. *Capítulo 11. Secciones cónicas* (pp. 475-525). (2ª ed.). Salamanca: Addison-Wesley.

- Markushévich, A. I. (1984) *Curvas maravillosas*. (2ª ed.). Moscú: Editorial MIR.

- Pérez Sanz, A. (2011). Más por menos. Entiende las matemáticas. *Capítulo 5. Cónicas: del baloncesto a los cometas* (pp. 79-95). Madrid: Espasa.

- Puig Adam, P. (1981). *Curso de geometría métrica*. Tomo II. Madrid: Gómez Puig Ediciones.

- Río Sánchez, J. del (1996). *Lugares geométricos. Cónicas.* Madrid: Síntesis.

- Rodríguez de Abajo, F. J. y Álvarez Bengoa, V. (1995). *Dibujo Técnico. 2º Bachillerato*. San Sebastián: Donostiarra.

- Vizmanos, J.R. y Anzola, M. (1997). *Matemáticas 2. Bachillerato*. Pinto (Madrid): SM.

Revistas

- Real Pérez, M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *Revista SUMA*, nº 46. pp. 71-77.

- González Urbaneja, P.M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la Geometría Analítica. *SIGMA, Revista de Matemáticas, Matematika Aldizcaria,* nº 30. pp. 205-236.

Apuntes

- Apuntes de la asignatura "Ideas y conceptos matemáticos a través de la historia" del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Especialidad de matemáticas).

- Apuntes de la asignatura "Fundamentos matemáticos para la arquitectura". Grado en Fundamentos de la Arquitectura de la Universidad de Valladolid.

Páginas web

(Consultadas junio 2015)

- http://www.divulgamat.net/ (Portal de divulgación de la Real Sociedad Matemática Española). Historia de las cónicas.

- http://mathworld.wolfram.com/ (Weisstein, E.W., página de la compañía Wolfram Research). Conic sections.

- http://www.mathcurve.com. Cónicas en general.

- González Urbaneja, P. M. Orígenes y evolución histórica de la Geometría Analítica. Disponible en: http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf

- Pérez Sanz, A. Curvas con historia. Disponible en: http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/curvashistoria.pdf

- www.geogebra.org. (Página web del programa Geogebra).

Todo el material gráfico a excepción de algunas fotografías ha sido realizado por el autor del trabajo, Alberto Muñoz González, utilizando los programas Geogebra y AutoCad