



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

Física estadística y modelos estelares

Autor: Paloma López Reyes

Tutor/es: Abel Calle Montes y José Carlos Cobos Hernández

*A mis dos tutores, especialmente a Abel,
por su ayuda, disponibilidad, y buenas palabras.
A mi familia y amigos, quienes me han mostrado apoyo en todo momento,
me han ayudado incondicionalmente, y me han animado a seguir adelante.
A mis profesores y compañeros del Grado,
de quienes siempre he podido aprender algo nuevo.*

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado pretende realizar un estudio sobre los modelos estelares basándose en la física estadística. Por ese motivo, el trabajo se centra en el estudio de las estrellas enanas blancas, estrellas cuyas propiedades pueden ser estudiadas casi completamente bajo el uso de la mecánica estadística cuántica. Con intención de situar este tipo de estrellas en un contexto más amplio, precederá a su estudio un análisis de las estrellas pertenecientes a la Secuencia Principal: estrellas de tipo “normal”, como el Sol, que terminan sus días como estrellas enanas blancas. En ese estudio se pretende poner en manifiesto su comportamiento básico. Continuando con el proceso de contextualización dentro de la evolución estelar, se estudiarán de manera somera, las estrellas de neutrones como otro cuerpo residual equivalente en la muerte de estrellas de la Secuencia Principal más masivas. Resulta interesante, tratar la relación de este tipo de estrellas con el proceso de detección de ondas gravitacionales, a la luz de las recientes detecciones de las mismas. Por ello, se mencionarán ciertos aspectos clave sobre dos misiones punteras en este ámbito.

Abstract

This paper is based in the study on stellar models using statistical physics. For that reason, the work focuses on the study of white dwarf stars, stars whose properties can be studied almost entirely with the use of quantum statistical mechanics.

Intending to place this type of stars in a wider context, its study will be preceded by an analysis of the stars belonging to the Main Sequence: “regular”-type stars, like the Sun, ending his days as a white dwarf stars. This study aims to put the basic behavior of these stars in manifest. Continuing with the process of contextualization in stellar evolution, it will be studied, in a relatively simple way, the neutron star as equivalent residual body in the death of more massive, Main Sequence stars. It is interesting to treat the relationship of this type of star with gravitational wave detection process, in view of the recent detections of the same waves. Therefore, certain key aspects of two leading missions in this area, will be mentioned in the paper.

Índice general

Introducción	4
1. Mecánica Estadística Cuántica: relativista y no relativista	7
1.1. Introducción	7
1.2. Indistinguibilidad de las partículas	7
1.2.1. Bosones y Fermiones	8
1.3. Colectividad Microcanónica	9
1.4. Colectividad Canónica	9
1.5. Gas cuántico ideal: función de partición	11
1.6. Ecuaciones de estado	12
1.6.1. Ecuación de estado no relativista	12
1.6.2. Ecuación de estado relativista	13
1.7. Estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein	13
1.7.1. Estadística de Fermi-Dirac	13
1.7.2. Estadística de Bose-Einstein	14
1.7.3. Validez de la aproximación clásica	15
1.8. Densidad de estados energéticos y del momento	16
1.8.1. Densidad de Estados Energéticos y del Momento no relativistas	16
1.8.2. Densidad de Estados Energéticos y del Momento relativistas	17
1.9. Gas de Fermi degenerado. El gas de electrones	18
1.9.1. Cálculo de la energía de Fermi	19
1.9.2. Cálculo del momento de Fermi	19
1.10. Gas de Bose	19
2. Equilibrio hidrostático estelar	21
2.1. Introducción	21
2.2. Diagrama de Hertzsprung-Russell	21
2.3. Un modelo simple para las estrellas de la Secuencia Principal	23
2.4. Estrellas politrópicas	25
2.4.1. Un modelo del interior estelar	26
2.4.2. La ecuación de Lane-Emden	27
2.4.3. Soluciones analíticas	28
2.4.4. La aproximación de Eddington	28
2.4.5. Resultados con Mathematica	29
2.4.6. Determinación de las propiedades de la estrella politrópica	30
2.4.7. Resultados con el método de integración numérica de Runge-Kutta	32
2.5. Fuera de la Secuencia Principal: introducción	34
2.5.1. Evolución estelar y modelos en función de la masa	34
3. Enanas blancas	41
3.1. Introducción	41
3.2. Contexto histórico: de Eddington a Chandrasekhar	42
3.3. Cálculo relativista	43
3.4. Configuración de equilibrio	45
3.5. El límite de Chandrasekhar.	46
3.6. Ecuaciones de estado	47
3.7. El posible destino del Sol	48
3.8. Más ejemplos de enanas blancas	50
3.9. Estrellas con masa superior al límite de Chandrasekhar	51

4. Más allá de las enanas blancas	52
4.1. Introducción	52
4.2. Estrellas de neutrones	52
4.3. Primeras observaciones	53
4.4. Una dinamo estelar	54
4.5. El radio de una estrella de neutrones	54
4.6. Estabilidad de las estrellas de neutrones	55
4.6.1. Decaimiento beta	55
4.7. Estrellas de neutrones y ondas gravitacionales	56
4.7.1. Misión LISA	57
4.7.2. Proyecto LIGO	58
Conclusiones	59
Bibliografía	60
Webgrafía	61
Apéndices	61
A. Datos Solares NASA	62
B. Programa Mathematica	64
B.1. Soluciones analíticas	65
B.2. Obtención de diversas magnitudes solares	67
C. Modelo Estándar Solar	70
C.1. Datos del Modelo Estándar Solar	70
D. Resolución numérica con el método de Runge-Kutta 4	72
E. Correcciones al libro “Astrophysics through computation”	79

Introducción

El presente Trabajo de Fin de Grado se desarrolla a través de los contenidos de varias asignaturas del Grado en Física, dado que su temática es muy transversal. Por otra parte, se profundiza en una materia muy poco desarrollada en la Sección de Física de la Universidad de Valladolid, donde la astrofísica no es una de las líneas punteras de investigación; aquí es donde reside el carácter más novedoso del trabajo.

El inicio del Trabajo de Fin de Grado y el objetivo marcado era el estudio de un tipo particular de estrellas evolucionadas: las enanas blancas, cuyo modelo físico puede representarse a través de un gas cuántico de Fermi; por esa razón, la asignatura básica del Grado en Física, que se ha tratado y profundizado, está mencionada en el propio título del trabajo, la Física Estadística. No obstante y a medida que hemos desarrollado el trabajo se ha hecho necesario tratar con los modelos estelares de estrellas más jóvenes y precursoras de las enanas blancas, razón por la que la Termodinámica se encuentra muy presente así como la Mecánica que afecta al equilibrio hidrostático. Finalmente, hemos querido incluir algunos cálculos de simulación computacional que aportan el trabajo más práctico sobre la base teórica de los modelos.

Igualmente, hemos querido tratar, aunque de forma somera, el escenario más allá de estas estrellas, con algunas nociones de estrellas de neutrones y su mención como origen de las ondas gravitacionales. No hemos querido, ya que no era el objetivo inicial, profundizar en los procesos de nucleosíntesis estelar, sino que hemos pretendido presentar y trabajar con el modelo estadístico, principalmente. Es imposible, no obstante, pasar sin mencionar los desarrollos de Eddington como precursor más importante de la astrofísica, como luego se comprobará.

En el primer capítulo hemos querido hacer una recopilación de los contenidos más básicos de la Física estadística cuántica, donde se encuentran descritos los gases de Fermi y Bose degenerados, siendo aquél más tratado que éste, por fundamentar la física de capítulos posteriores. A pesar de que el capítulo principal, las enanas blancas, concierne a la estadística de Fermi, hemos querido formalizar un capítulo que englobe ambas estadísticas, intentando que cumpla con los requisitos de un capítulo de consulta de conceptos básicos en posteriores capítulos de la memoria. Por esa razón, el lector que se encuentre familiarizado con la estadística cuántica, puede saltarse este capítulo y/o recurrir a él a modo de manual cuando necesite refrescar algún concepto básico. Por lo tanto, puede considerarse este capítulo como el repaso general de la física estadística cuántica al nivel de lo impartido en el Grado en Física.

En el segundo capítulo, se trata el estudio de estrellas de tipo “normal”, como nuestro Sol, o astros algo más masivos, que durante miles de años ocupan la llamada Secuencia Principal y son precursoras del modelo estelar en el que se centra el trabajo, las enanas blancas (y estrellas de neutrones).

Por tanto, en aras de entender las enanas blancas en un contexto de evolución estelar, se estudiará, en principio, las estrellas de la Secuencia Principal como cuerpos celestes en equilibrio: un equilibrio hidrostático entre la presión gravitatoria que intenta colapsar la estrella (debida a su propio peso) y la presión ejercida por las reacciones nucleares, en sentido contrario.

Este equilibrio hidrostático, junto con una serie de aproximaciones aceptadas, llevará a obtener, con ayuda de cálculo computacional, ciertos parámetros básicos en una estrella de la Secuencia Principal: densidad, presión, temperatura y masa.

Además, en el final del propio capítulo 2 se explicarán, de una manera relativamente simplificada, los procesos de evolución estelar, concretamente cuál es el papel de las enanas blancas y de las estrellas de neutrones en esta evolución estelar.

Una vez comprendido el factor determinante que lleva a una estrella a terminar su vida como enana blanca, estrella de neutrones, o incluso agujero negro, se estará en contexto para estudiar las enanas blancas como cuerpo celeste que puede ser descrito como un gas de Fermi degenerado relativista, que, sorprendentemente, se puede estudiar como un gas a $T = 0\text{K}$. Algo que se explica con detalle en la memoria a lo largo del capítulo

tercero.

En este capítulo, que se centra exclusivamente al estudio de las enanas blancas, se obtendrán las ecuaciones de estado que las describen, la relación masa-radio para estas estrellas y se obtendrá el llamado *límite de Chandrasekhar*, que es un límite de masa que determina si una estrella acabará sus días como enana blanca o como otro cuerpo celeste.

El cuarto capítulo aborda el estudio de las estrellas de neutrones de una manera más cualitativa, aunque se encuentran para ellas las ecuaciones de estado, y la relación masa-radio. Además, a la luz de los recientes avances en la obtención y medición de ondas gravitacionales, se pretende hacer entender al lector la importancia que tienen las estrellas de neutrones en este campo. En base a eso, se mencionarán la misión LISA, a través de una comunicación personal con su director de proyecto, César García Marirrodriga, y el proyecto LIGO, que ha detectado ondas gravitacionales hasta en dos ocasiones, siendo la última detección mostrada al público el 15 de junio de este mismo año.

Capítulo 1

Mecánica Estadística Cuántica: relativista y no relativista

1.1. Introducción

Para el estudio de modelos estelares que se va a llevar a cabo es necesario el uso de la mecánica estadística cuántica, en concreto la Estadística de Fermi-Dirac, relativista y no relativista. El primer caso tendrá aplicación en una parte del estudio de las enanas blancas, y el segundo caso nos servirá para acercarnos a entender el comportamiento de las estrellas de neutrones.

Por ese motivo resulta necesario conocer con antelación el formalismo estadístico cuántico que se va a utilizar en los dos casos, así como las ecuaciones de estado que derivan de éste, las cuales definirán el comportamiento de la estrella.

Por tanto, se centrará el estudio en la estadística de Fermi-Dirac (aunque también se estudiará la estadística de Bose-Einstein), realizándose paralelamente para energías no relativistas y relativistas.

El estudio de la estadística de Bose-Einstein durante este capítulo se pone de manifiesto para entender globalmente la mecánica estadística cuántica y especialmente, el diferente comportamiento entre fermiones y bosones.

1.2. Indistinguibilidad de las partículas

Es necesario ahora hacer una clasificación de las partículas, puesto que el tipo de partícula definirá el uso de una estadística u otra. En principio estamos tratando un sistema de N partículas indistinguibles, aspecto que resulta esencial en la definición de las dos estadísticas que se utilizarán: Estadística de Fermi-Dirac y Estadística de Bose-Einstein.

Sin embargo, antes de presentar ambas estadísticas, se resume con brevedad su origen, a partir de la aplicación de la mecánica cuántica a sistemas de partículas indistinguibles.

En mecánica cuántica, cuando dos partículas tienen las mismas propiedades intrínsecas, (a saber, masa, carga, espín...), no es posible diferenciarlas experimentalmente. Es decir, si en un sistema físico existen dos partículas idénticas, las propiedades físicas de éste permanecen invariantes aunque se aplique un intercambio entre los papeles de las partículas. Esto no ocurre en mecánica clásica, puesto que es posible etiquetar cada partícula y observar su trayectoria, que está bien definida.

El problema surge en la descripción matemática de un sistema de dos o más partículas. En un sencillo ejemplo de choque entre dos partículas idénticas se puede anticipar el problema asociado a esta indistinguibilidad:

Supongamos, como se ha comentado, una colisión entre dos partículas idénticas en el sistema de referencia de su centro de masas. Antes del choque denotamos con (1) a la partícula de la izquierda y con (2) a la de la derecha. Durante la colisión sus funciones de onda solapan. Suponemos a continuación la existencia de un detector D que forma un ángulo ϑ con la velocidad inicial del paquete de ondas (1). D detecta una partícula, y ya que el momento se conserva en la colisión, sabemos que la otra partícula se mueve en la dirección contraria. Sin embargo, es imposible saber si la partícula detectada en D es la inicialmente llamada (1) o la que se denominó (2).

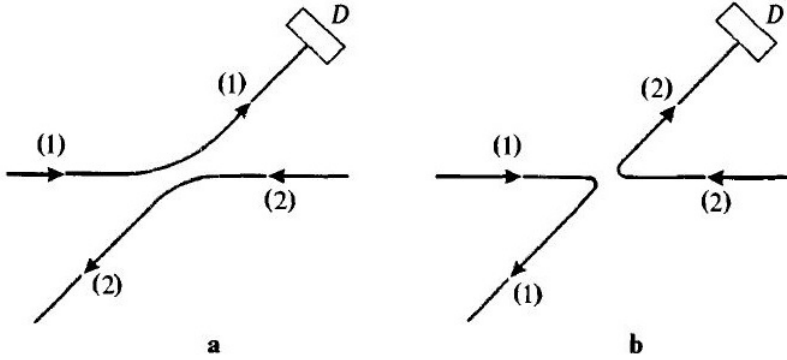


FIGURE 3

Schematic representation of two types of “paths” which the system could have followed in going from the initial state to the state found in the measurement. Because the two particles are identical, we cannot determine the path that was actually followed.

Figura 1.1: Imagen adaptada del libro “Quantum mechanics, vol. 2 - C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F” para representar las dos posibles configuraciones de salida en el experimento explicado

Es decir, aparece una ambigüedad a la hora de definir el estado matemático asociado a la medida de la posición.

Profundizándose en esto:

Supongamos un sistema de dos partículas de espín $1/2$: A_1 y A_2 . Asumiremos que la componente a lo largo del eje Oz de una de ellas es $\hbar/2$ y la componente de la otra partícula es $-\hbar/2$

Para una cómoda resolución del problema se considera la base de estados propios de la componente z del espín de ambas partículas, S_{1z} y S_{2z} : $\{|\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle\}$, donde ε_1 y ε_2 pueden ser igualmente $+$ (que implica que la componente z del espín es $\hbar/2$) o $-$ (que implica que la componente z del espín es $-\hbar/2$).

Es posible que dos “Estados matemáticos” diferentes puedan estar asociados al mismo estado físico.

En este caso, cualquiera de los siguientes *kets* ortogonales puede representar el estado físico del sistema descrito:

$$|\varepsilon_1 = +, \varepsilon_2 = - \rangle \quad (1.1)$$

$$|\varepsilon_1 = -, \varepsilon_2 = + \rangle \quad (1.2)$$

Estos *kets* pertenecen a un subespacio bidimensional cuyos vectores normalizados son de la forma:

$$\alpha|+, - \rangle + \beta|-, + \rangle \quad (1.3)$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Conocido esto, buscamos ahora, por ejemplo, la probabilidad de obtener las componentes de los dos espines a lo largo del eje Ox iguales a $+\hbar/2$. Las cuentas son simples, el resultado de esta probabilidad es:

$$\left| \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right|^2 \quad (1.4)$$

El resultado depende de los coeficientes α y β , por lo que los *kets* considerados no representan unívocamente el estado físico. Esto se denomina “Degeneración de intercambio” y debe ser eliminada, puesto que no es físicamente aceptable que una probabilidad dependa del estado inicial escogido. Debemos conocer explícitamente cual de los *kets* debe utilizarse para la descripción. Por esta razón, se introducen dos tipos de *ket*, los *kets* completamente simétricos y los *kets* completamente antisimétricos con respecto al intercambio de partículas, y con esto se elimina la degeneración de intercambio.

1.2.1. Bosones y Fermiones

Como se acaba de ver, los *kets* representativos de un sistema de partículas idénticas se dividen en *kets* completamente simétricos y *kets* completamente antisimétricos. Las partículas asociadas a estos *kets* son las llamadas “Bosones” y “Fermiones”, respectivamente.

Además, se ha observado experimentalmente que las partículas que se comportan como Bosones poseen un espín entero, mientras que las que lo hacen como Fermiones presentan un espín semi-entero.

Debido a la diferencia entre estas dos partículas, se debe estudiar cada una con un tipo de estadística diferente. Para el estudio que nos atañe resulta muy interesante el estudio de los Fermiones, es decir, la estadística de

Fermi-Dirac, puesto que los constituyentes principales tanto de las enanas blancas como de las estrellas de neutrones son partículas de espín $1/2$, es decir fermiones. También resulta interesante, sin embargo, el estudio de la estadística de Bose-Einstein, por ejemplo en el estudio del comportamiento de los fotones en la estrella, los cuales poseen espín 1.

1.3. Colectividad Microcanónica

En este apartado y en el siguiente se abordará el estudio de los fundamentos de la formulación de la estadística cuántica, desde las descripciones microscópica y macroscópica.

Se comenzará el estudio con la descripción microscópica, aunque se profundizará más en la macroscópica, puesto que ésta es la realmente útil en el estudio de los modelos estelares.

Se sabe que en mecánica cuántica el estado de un sistema se especifica mediante una función de onda Ψ que es solución a la Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (paralelamente al hecho de que en mecánica clásica el estado de un sistema se define como un punto en el espacio de las fases). Conocer Ψ en un instante cualquiera permite determinar tanto las propiedades del sistema como su estado cuántico en instantes posteriores.

El problema inicial radica en discernir en un sistema, a partir de un estado macroscópico con energía comprendida entre E y $E + dE$, cuál es la función de onda asociada a este sistema. Se considera entonces una colectividad de estados cuánticos compatibles con el estado macroscópico que se posea. Sin embargo, basta con acudir a los postulados de la mecánica cuántica, para poder enunciar el *principio de igualdad de probabilidades a priori* en mecánica cuántica. Es decir, un sistema aislado en equilibrio puede estar, con la misma probabilidad, en cualquiera de los estados estacionarios independientes que le son accesibles.

Es decir, los posibles estados estacionarios del sistema son soluciones de esta ecuación, pero esto no implica que todos los autovalores de la energía tengan la misma probabilidad. Es más, es posible que para un mismo valor de la energía puedan corresponder varios estados propios independientes, y se dice entonces que existe degeneración.

Entonces, podemos decir que el espectro de energías en un sistema cuántico es discreto, así como la distribución de probabilidades. En el caso clásico no ocurre esto, sino que se encuentra una densidad de probabilidad.

Podemos formalizar este concepto de la siguiente manera: Si $\Omega(E)$ es el número de estados estacionarios, independientes del sistema, en un determinado intervalo de energías E y $E + dE$, y E_R es la energía correspondiente al estado cuántico estacionario R , entonces la probabilidad de que el sistema se encuentre en este estado estacionario R viene dada por:

$$P(R) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E)} & \text{si } E < E_R < E + dE \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.5)$$

Ésta es la base de la descripción microcanónica. Realmente no es necesario profundizar mucho más en la Colectividad Microcanónica puesto que es la Colectividad Canónica Generalizada con la que finalmente describiremos los modelos estelares.

1.4. Colectividad Canónica

En el estudio estelar, es más útil el uso de la Colectividad Canónica Generalizada, ya que facilita la medida y el estudio de un determinado sistema bajo observación; elimina la exigencia de la Colectividad Microcanónica de fijar la energía. En este caso el macroestado se define dependiente de (N, V, T) .

Con el objetivo de hallar tanto la función de partición (que será muy útil posteriormente), como la probabilidad de encontrar el sistema total en un cierto estado, se parte de la siguiente situación teórica:

Consideramos un sistema aislado A en equilibrio, con energía comprendida entre E y $E + dE$ y formado por dos subsistemas en contacto térmico, A_1 y A_2 , cada uno de los cuales se encuentra en un estado estacionario. La energía de interacción entre ellos se considera despreciable.

A continuación suponemos que el sistema total, A , también se encuentra en un estado estacionario, φ , por lo que el hamiltoniano total es la suma de los operadores correspondientes a cada uno de los subsistemas, H_1 y H_2 . Veámoslo:

$$H = H_1 + H_2 + H_{12} \simeq H_1 + H_2 \quad (1.6)$$

Donde se ha despreciado el operador correspondiente a la interacción, que se considera suficientemente pequeña. Los estados estacionarios del sistema total serán soluciones de la Ecuación de Schrödinger:

$$H\varphi = E\varphi \Rightarrow (H_1 + H_2)\varphi = E\varphi \quad (1.7)$$

Por otro lado, los sistemas A_1 y A_2 cumplen por separado:

$$\begin{cases} H_1\varphi_1 = E_1\varphi_1 \\ H_2\varphi_2 = E_2\varphi_2 \end{cases} \quad (1.8)$$

A partir de esto es fácil comprobar que se cumple (1.7) cuando los estados propios del sistema total son:

$$\varphi = \varphi_1\varphi_2 \quad (1.9)$$

y la energía es:

$$E = E_1 + E_2 \quad (1.10)$$

La interpretación es sencilla: si el sistema total se encuentra en un estado estacionario, (puesto que la energía de interacción entre A_1 y A_2 es despreciable), la energía del sistema total será la suma de las energías de los subsistemas.

La probabilidad de encontrar el sistema total en cierto estado vendrá dada por la probabilidad microcanónica: (1.5). A partir de ella se puede calcular además la probabilidad de que el sistema A_1 se encuentre en un microestado particular R de energía $E_{1,R}$. Ésta vendrá dada a partir del número de estados accesibles al sistema A restringidos a que A_1 se encuentre en el estado R . Equivalentemente el número de estados accesibles al sistema A_2 con energía comprendida en el intervalo δE alrededor del valor $E - E_{1,R}$, esto es: $\Omega_2(E - E_{1,R})$, lo cual equivale a una delta de Dirac $\delta(E - E_{1,R})$. Y, recordemos, $\Omega(E)$ es el número de microestados del sistema total. Entonces se tiene:

$$P_1(R) = \frac{1}{\Omega(E)} \Omega_2(E - E_{1,R}) \quad (1.11)$$

El sistema A_2 se comporta como un foco térmico y de partículas del sistema A_1 . Ambos están a una temperatura de equilibrio T , entonces la probabilidad se puede escribir, basándose en la distribución canónica, como:

$$P(R) = \frac{e^{-\beta E_R}}{\sum_R e^{-\beta E_R}} \quad (1.12)$$

Donde $\beta = \frac{1}{kT}$, siendo k la constante de Boltzmann.

Esto sugiere introducir la Función de Partición Cuántica Z , como:

$$Z = \sum_R e^{-\beta E_R} \quad (1.13)$$

donde el sumatorio se extiende a todos los estados cuánticos, no sobre los niveles energéticos, puesto que puede existir degeneración, (estas sumas no coinciden en general). Equivalentemente se puede escribir Z como:

$$Z = \sum_{E_R} g(E_R) e^{-\beta E_R} \quad (1.14)$$

donde, $g(E_R)$ es el factor de degeneración del nivel E_R .

Si además de tener un sistema en contacto con un foco térmico, también está en contacto con un foco de partículas tendremos el sistema Canónico Generalizado. La probabilidad de que el sistema A_1 se encuentre en el estado R que contiene N_R partículas viene entonces dada por:

$$P(R) = \frac{1}{Q} e^{-\alpha N_R - \beta E_R} \quad (1.15)$$

Donde $\alpha = -\beta\mu$, siendo μ el potencial químico del sistema y Q es la Gran Función de Partición:

$$Q = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\alpha N} \sum_R e^{-\beta E_R} \quad (1.16)$$

Como se ha comentado previamente, la Gran Función de Partición (o más bien su logaritmo neperiano) es muy útil para la obtención de distintas propiedades termodinámicas.

$$\bar{E} = - \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} \right)_{\alpha, X} \quad (1.17)$$

$$\bar{N} = - \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \alpha} \right)_{\beta, X} \quad (1.18)$$

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial X_k} \right)_{\alpha, \beta, X_{1 \neq k}} \quad (1.19)$$

donde \bar{E} es el valor medio de la Energía del sistema, \bar{N} el número medio de partículas del sistema y \bar{Y}_k el valor medio de las fuerzas generalizadas, con sus respectivos desplazamientos generalizados.

1.5. Gas cuántico ideal: función de partición

El estudio del Gas cuántico ideal es de enorme interés en los modelos estelares, puesto que es un modelo que se puede aplicar en las estrellas. Se definen los números de ocupación y la función de partición en el gas ideal, que son claves en la obtención de las buscadas ecuaciones de estado.

Se considera pues un sistema de N partículas idénticas con fuerzas de interacción despreciables.

Un estado R puede determinarse mediante un conjunto de números denominados *números de ocupación*, $\{n_{r,R}\}$, tales que:

$$\begin{cases} E_R = \sum_r n_{r,R} \varepsilon_r \\ N_R = \sum_r n_{r,R} \end{cases} \quad (1.20)$$

Recordamos ahora la Gran Función de Partición Q :

$$Q = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\alpha N} \sum_R^{(N)} e^{-\beta E_R} \quad (1.21)$$

equivalentemente,

$$Q = \sum_R e^{-\alpha N_R - \beta E_R} \quad (1.22)$$

el sumatorio ahora se extiende a todos los estados posibles con cualquier número de partículas. Utilizando ahora (1.20) se puede escribir:

$$Q = \sum_R \exp \left(-\beta \sum_r n_{r,R} \varepsilon_r - \alpha \sum_r n_{r,R} \right) \quad (1.23)$$

Se reescribe, teniendo en cuenta las propiedades de las exponenciales, como:

$$Q = \sum_R \prod_r e^{-(\beta \varepsilon_r + \alpha) n_{r,R}} \Rightarrow \prod_r \sum_{n=0}^{n=n_{\text{máx}}} e^{-(\beta \varepsilon_r + \alpha) n} \quad (1.24)$$

Este último paso es posible ya que sumar en todos los estados R equivale a sumar para todos los valores posibles del conjunto de números $\{n_{r,R}\}$ sin restricción en la suma. Es decir, cada n_r toma valores en (1.24) con independencia de cuáles sean los restantes números de ocupación.

Ésta es la forma general de la función de partición. Más adelante se particularizará para los fermiones y para los bosones.

A partir de esta función se pueden obtener las Ecuaciones de Estado. También resulta intuitivo reescribir la probabilidad vista en (1.15) en términos de Q :

$$P(R) = \frac{1}{Q} e^{-\beta E_R - \alpha N_R} \quad (1.25)$$

Calculamos ahora el número medio de partículas en un estado de partícula r , se define como:

$$\bar{n}_r = \frac{1}{Q} \sum_R n_{r,R} e^{-\beta E_R - \alpha N_R} = \frac{1}{Q} \sum_R n_{r,R} e^{-\beta \sum_r n_{r,R} \varepsilon_r - \alpha \sum_r n_{r,R}} = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon_r} \quad (1.26)$$

Es decir:

$$\bar{n}_r = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Q}{\partial \varepsilon_r} \quad (1.27)$$

El cálculo de la presión se puede realizar a partir de (1.19), siendo V (volumen) su correspondiente desplazamiento generalizado. Entonces se tiene:

$$\bar{p} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial V} \right)_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\beta Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial V} \right)_{\alpha, \beta} \quad (1.28)$$

sustituyendo ahora la expresión calculada para Q se obtiene:

$$\bar{p} = -\frac{1}{Q} \sum_r \left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial V} \right) \sum_R n_{r,R} \exp \left(-\beta \sum_r n_{r,R} \varepsilon_r - \alpha \sum_r n_{r,R} \right) \quad (1.29)$$

Utilizando ahora la definición de \bar{n}_r tenemos:

$$\bar{p} = \sum_r \left(-\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial V} \right) \bar{n}_r \quad (1.30)$$

Las definiciones de la Gran Función de Partición, Q , y la del número medio de partículas, \bar{n}_r , serán útiles en la obtención de las ecuaciones de estado de un gas ideal cuántico, tanto relativistas como no relativistas, como se verá en el siguiente apartado.

Además, en un sistema de gas ideal, es decir, no interaccionante, las energías son aditivas. Esto se traduce en la función de partición (que es suma de exponenciales de la energía) en un producto de funciones de partición individuales. Veamos:

$$Q = \sum_R e^{-\alpha N_R - \beta E_R} = \sum_R e^{-\alpha N_R} \sum_R e^{-\beta E_R} = \sum_R e^{-\alpha N_R} \left(\frac{\xi}{N!} \right)^{N_R} \quad (1.31)$$

donde ξ es la función de partición individual, y la función de partición Z total, $\sum_R e^{-\beta E_R}$, es el producto de las funciones de partición individuales, por ser la energía aditiva. Esto último es el desarrollo de la exponencial. Por tanto, se tiene:

$$Q = \exp(e^{-\alpha} \xi) \quad (1.32)$$

Así que:

$$\ln Q = e^{-\alpha} \xi \quad (1.33)$$

Este resultado es interesante en cuanto a la ecuación (1.18):

$$\bar{N} = - \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \alpha} \right)_{\beta, v} = e^{-\alpha} \xi = \ln Q \quad (1.34)$$

Por tanto la ecuación de estado en gases ideales será:

$$\bar{p}V = kT \ln Q \Rightarrow \bar{p}V = \bar{N}kT \quad (1.35)$$

y generalmente:

$$\bar{p}V = kT \ln Q \quad (1.36)$$

1.6. Ecuaciones de estado

Se denomina ecuación de estado a la expresión que relaciona las magnitudes P, V, U (presión, volumen, energía interna).

A partir de la Función de Partición se pueden obtener los valores medios de energía interna y de partículas como se ha visto en (1.17) y (1.18) así como la presión, según se acaba de calcular en (1.30).

Estas expresiones se particularizarán a los casos relativista y no relativista, puesto que ambos casos aparecerán en los modelos estelares que se estudiarán.

1.6.1. Ecuación de estado no relativista

Se supone un sistema de partículas ideales que solo tienen energía de traslación, encerradas en un volumen $V = L_x L_y L_z$. Entonces los niveles energéticos vendrán dados por:

$$\varepsilon_r \equiv \varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \frac{h^2 \pi^2}{2m} \left[\left(\frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z} \right)^2 \right] \quad (1.37)$$

donde n_x, n_y, n_z son números cuánticos que toman valores enteros positivos.

Si se realiza la suposición de que el recinto es cúbico, $L_x = L_y = L_z$, entonces los niveles energéticos son:

$$\varepsilon_r = \frac{h^2}{8mV^{2/3}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (1.38)$$

Derivando ahora respecto al volumen, para poder sustituir en la ecuación (1.30), se tiene:

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial V} = -\frac{2}{3V} \varepsilon_r \quad (1.39)$$

Por lo que la ecuación de estado en el caso no relativista es:

$$P = \frac{2U}{3V} \Rightarrow PV = \frac{2}{3}U \quad (1.40)$$

1.6.2. Ecuación de estado relativista

Por otro lado, si se considera el caso ultrarrelativista, $\varepsilon \simeq pc$, teniendo en cuenta la condición de onda estacionara para la determinación de la energía a partir del momento, la ecuación de estado será:

$$\varepsilon \simeq pc; \quad p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}; \quad \varepsilon_r = \frac{hc}{2V^{1/3}} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial V} = -\frac{1}{3} \frac{\varepsilon_r}{V} \quad (1.42)$$

Es decir, la ecuación de estado para un gas relativista es:

$$PV = \frac{1}{3}U \quad (1.43)$$

Estas ecuaciones son independientes de si las partículas son fermiónicas o bosónicas, puesto que solo dependen de la energía del sistema.

1.7. Estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein

Las expresiones vistas para el gas ideal cuántico resultaron independientes al tipo de partícula que lo conformaba. En esta sección se individualizará a fermiones y bosones, utilizando la condición para los números de ocupación en ambos caso y así obteniéndose, respectivamente, las estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein.

1.7.1. Estadística de Fermi-Dirac

En este apartado se particularizarán los resultados obtenidos para el caso en el que las partículas que conforman el sistema sean fermiones.

En el caso de los fermiones, los números de ocupación $\{n_{r,R}\}$, solo pueden tomar los valores 0 o 1. Siendo $n_{\text{máx}} = 1$, la función de partición obtenida en (1.24) solo tendrá dos sumandos:

$$Q_{FD} = \prod_r \sum_{n=0}^{n=1} e^{-(\beta\varepsilon_r + \alpha)n} = \prod_r [1 + e^{-(\beta\varepsilon_r + \alpha)}] \quad (1.44)$$

Con esto podemos calcular el número medio de partículas en el sistema, \bar{N} , en el sistema a partir de (1.18), para ello hace falta calcular $\ln Q_{FD}$:

$$\ln Q_{FD} = \sum_r \ln [1 + e^{-(\beta\varepsilon_r + \alpha)}] \quad (1.45)$$

Entonces, \bar{N} queda:

$$\bar{N} = -\frac{\partial \ln Q_{FD}}{\partial \alpha} = -\sum_r \frac{-e^{-\beta\varepsilon_r - \alpha}}{1 + e^{-\beta\varepsilon_r - \alpha}} = \sum_r \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_r + \alpha} + 1} \quad (1.46)$$

Por otro lado, el número medio de partículas en un estado r , vendrá dado por:

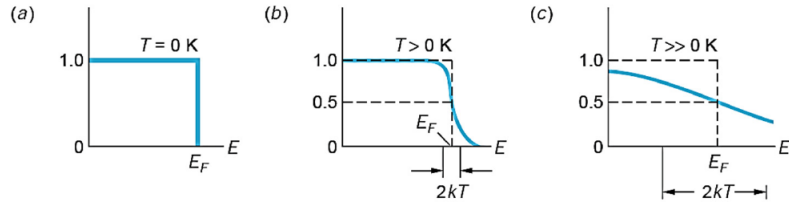
$$\bar{n}_r = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_r + \alpha} + 1} \quad (1.47)$$

donde se cumple, lógicamente $\bar{N} = \sum_r \bar{n}_r$. Además, como $0 \leq e^{\beta\varepsilon_r + \alpha} \leq \infty \Rightarrow 0 \leq \bar{n}_r \leq 1$, lo cual resulta físicamente equivalente al Principio de Exclusión de Pauli.

Si se escribe esta ecuación en términos del potencial químico $\mu(T)$, relacionado con α por $\alpha = -\beta\mu$, tenemos:

$$\bar{n}_r = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} + 1} \quad (1.48)$$

Donde $\mu(T)$ es el *nivel de Fermi* y su valor para $T = 0K$ es la *energía de Fermi*: $\mu_0 \equiv \mu(T = 0)$. (El potencial químico tiene dimensiones de energía).



Fermi-Dirac distribution function $\bar{n}(E)$ for three different temperatures. (a) At $T = 0$ K, all levels above E_F are unoccupied. (b) For $T > 0$ K with $kT < E_F$ some particles near the Fermi energy can move to levels within about kT above E_F . (c) For high temperatures where $kT > E_F$ even particles in the lower energy states may move to higher levels so that $\bar{n}(0) < 1$.

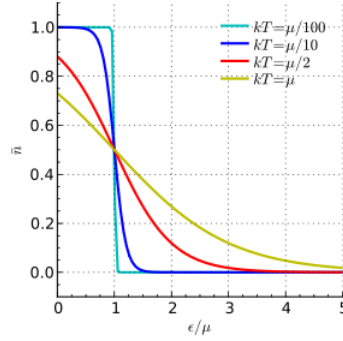


Figura 1.2: Distribución de Fermi para distintos valores de la temperatura. Créditos: (1^a) Modern Physics, Paul A. Tipler, Ralph A. Lewellyn. (2^a) https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c9/FD_e.mu.svg/301px-FD_e.mu.svg.png

Para $T = 0$ K, \bar{n}_r es una función escalón, que vale 1 para $\varepsilon_r \leq \mu_0$ y 0 para $\varepsilon_r > \mu_0$. Es decir, todos los estados con energía menor o igual a la energía de Fermi están ocupados, mientras que los de energía superior están vacíos. A medida que aumenta la temperatura, los niveles con energía inferior a μ , pero próximos, comienzan a desdoblarse en beneficio de los que tienen energía superior. Además, para cualquier temperatura $T > 0$ K se cumple:

$$\bar{n}_r(\varepsilon = \mu) = \frac{1}{2} \quad (1.49)$$

es decir, los estados con energía menor que la del nivel de Fermi, siempre poseen $\bar{n}_r > 1/2$, y los que poseen una energía superior, $\bar{n}_r < 1/2$.

1.7.2. Estadística de Bose-Einstein

En el caso de que el sistema esté formado por bosones, no existe límite en el número de ocupación, infinitas partículas idénticas pueden encontrarse en un mismo estado, es decir $n_{\max} = \infty$. Entonces, la función de partición en Bose-Einstein es:

$$Q_{BE} = \prod_r \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\beta\varepsilon_r + \alpha)n} \quad (1.50)$$

Se trata de una progresión geométrica indefinida de razón $e^{-(\beta\varepsilon_r + \alpha)} = e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)}$. La suma convergerá siempre que la razón sea menor que la unidad:

$$e^{-\beta(\varepsilon_r - \mu)} < 1 \Rightarrow \varepsilon_r - \mu > 0 \quad (1.51)$$

Ésta es una condición que se cumple siempre en las aplicaciones prácticas, puesto que sino el número de bosones no estaría acotado.

Entonces, podemos sumar la serie, ya que hemos visto que es una progresión geométrica de razón < 1 :

$$Q_{BE} = \prod_r \frac{1}{1 - e^{-(\beta\varepsilon_r + \alpha)}} \quad (1.52)$$

$$\ln Q_{BE} = - \sum_r \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_r - \alpha}) \quad (1.53)$$

A partir de lo cual podemos encontrar el valor medio de partículas del sistema \bar{N} y el valor medio de partículas en un estado r :

$$\bar{N} = -\frac{\partial \ln Q_{BE}}{\partial \alpha} = \sum_r \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_r + \alpha} - 1} \quad (1.54)$$

$$\bar{n}_r = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_r + \alpha} - 1} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_r - \mu)/kT} - 1} \quad (1.55)$$

Ahora, lógicamente, \bar{n}_r puede ser mayor que 1 y de hecho tiende a infinito cuando $\varepsilon_r \rightarrow \mu$.

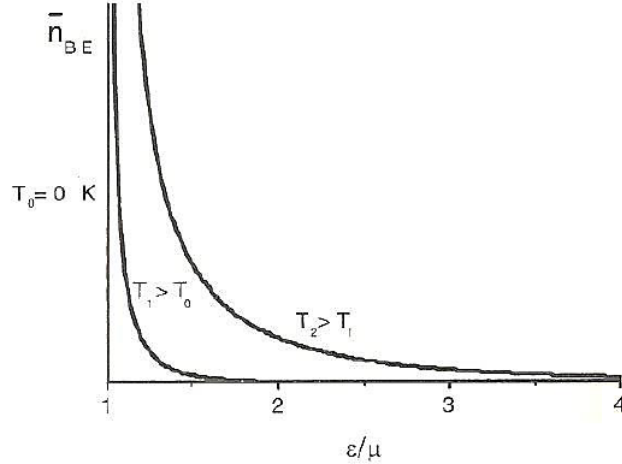


Figura 1.3: Distribución de Bose. En el cero absoluto todos los bosones tienden a agruparse en el estado de energía más baja. Crédito: Mecánica estadística. J. Brey, J. de la Rubia Pacheco, J. de la Rubia Sánchez

En el cero absoluto todos los bosones se agrupan en el estado de mínima energía, y cuando se aumenta la energía éstos pasan a ocupar estados de mayor energía. En este caso $n_{max} = \infty$, es decir, no hay límite para el número de partículas que pueden encontrarse en el mismo estado.

1.7.3. Validez de la aproximación clásica

Este apartado pretende justificar el uso de la mecánica estadística cuántica, en lugar de utilizar una aproximación clásica, en el estudio de los modelos estelares. Para ello se analizará el comportamiento de las funciones de distribución en dos casos límite.

a) Límite de bajas densidades

Suponemos que a temperatura constante se hace suficientemente pequeño el número de partículas por unidad de volumen (\bar{N}/V en un sistema abierto y N/V en uno cerrado) para que el número de estados de partícula por unidad de volumen sea mucho mayor que él. Entonces:

$$\sum_r \bar{n}_r = \sum_r \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_r + \alpha} \pm 1} = \bar{N} \quad (1.56)$$

Para que el número de sumandos del sumatorio sea mucho menor que \bar{N} tenemos que:

$$\bar{n}_r = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_r + \alpha} \pm 1} \ll 1 \Rightarrow e^{\beta \varepsilon_r + \alpha} \gg 1 \quad (1.57)$$

para todos los estados de partícula r .

b) Límite de altas temperaturas

Manteniendo ahora fija la densidad del gas y aumentando la temperatura (disminuyendo β , por lo que el número de sumandos que constituyen (1.56) aumenta), también debe cumplirse $e^{\beta \varepsilon_r + \alpha} \gg 1$.

Es decir, en los límites de densidades bajas o temperaturas altas, se puede realizar una aproximación: despreciar la unidad frente a $e^{\beta \varepsilon_r + \alpha}$, independientemente de si se trata de la estadística de Fermi-Dirac o de Bose-Einstein. Ésta es la aproximación clásica:

$$\bar{n}_r = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_r + \alpha}} \quad (1.58)$$

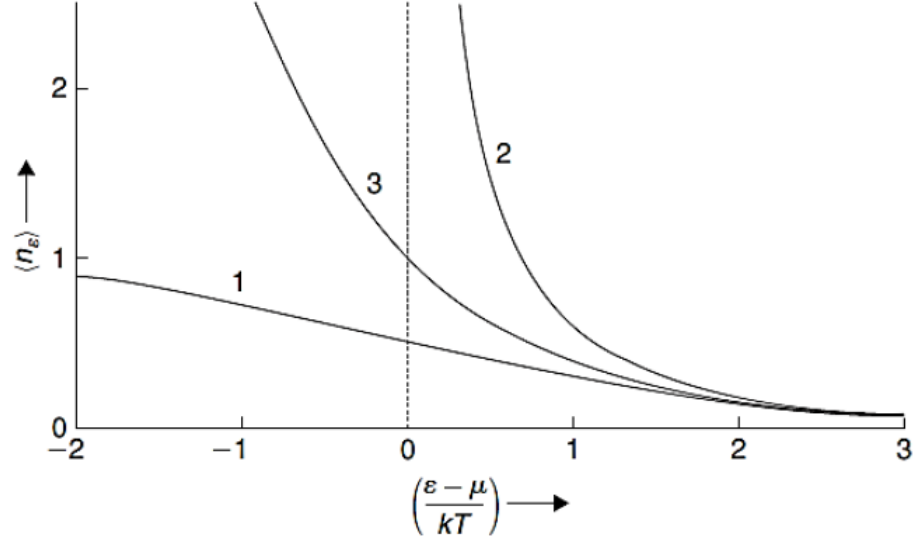


FIGURE The mean occupation number $\langle n_\varepsilon \rangle$ of a single-particle energy state ε in a system of noninteracting particles: curve 1 is for fermions, curve 2 for bosons, and curve 3 for the Maxwell-Boltzmann particles.

Figura 1.4: Comparación del número de ocupación para las tres estadísticas vistas. 1 es para fermiones, 2 para bosones y 3 es la curva para las partículas de Maxwell-Boltzmann. Crédito: Statistical Mechanics. Pathria, Beale

Cuando un gas ideal se encuentra en condiciones tales que puede utilizarse la aproximación clásica se dice que está *no degenerado* mientras que cuando es preciso utilizar las estadísticas de Fermi-Dirac o Bose-Einstein se denomina *degenerado*.

Para discernir si la aproximación clásica es adecuada se considera una condición:

$$\frac{V(mkT)^{3/2}}{h^3} = \frac{V}{2\pi\lambda^3} \gg \bar{N} \quad (1.59)$$

donde λ es la *longitud de onda térmica* de De Broglie. La deducción es la siguiente: Se considera el teorema de equipartición de la energía (la energía cinética se reparte por igual entre todos los grados de libertad), estimamos que la mayoría de los átomos tienen una energía del orden de kT por grado de libertad. Como en un gas ideal solo existe energía cinética, cada átomo tendrá un ímpetu del orden de $(mkT)^{1/2}$ por grado de libertad.

Entonces el volumen del espacio correspondiente a cada partícula será $p^3V = V(mkT)^{3/2}$ (volumen correspondiente al espacio de momentos por volumen correspondiente al espacio de configuración).

Aportando ahora el razonamiento semiclásico de que a cada estado de partícula le corresponde un volumen en el espacio clásico de h^3 (derivado del principio de incertidumbre) tenemos un número de estados de partícula igual a:

$$\frac{V(mkT)^{3/2}}{h^3} \quad (1.60)$$

La aproximación será válida cuando este número de estados disponibles sea mucho mayor que el número de partículas que componen el sistema (es decir, que sea altamente improbable que dos partículas se encuentren en el mismo estado, $\bar{n}_r \ll 1$) con lo cual se deriva la condición establecida en (1.59).

1.8. Densidad de estados energéticos y del momento

Resulta de interés conocer el número de estados estacionarios que se encuentran con una energía comprendida entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$, o bien, el número de estados con una cantidad de movimiento \mathbf{p} cuyo módulo esté comprendido entre p y $p + dp$. Ambas magnitudes se buscarán para el caso de un Gas Ideal relativista y no relativista.

1.8.1. Densidad de Estados Energéticos y del Momento no relativistas

Para el cálculo del número de estados en un nivel energético comprendido entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$ se considera una partícula encerrada en una caja de potencial cúbica, de arista L y volumen $V = L^3$. Se ha visto ya que su

energía entonces vendrá dada por:

$$\varepsilon = \frac{h^2}{8mV^{2/3}}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (1.61)$$

cuantizada por los tres números cuánticos n_x , n_y y n_z , que solo pueden tomar valores enteros positivos. Esta expresión corresponde a una esfera en un sistema de coordenadas definido por los números cuánticos n_x , n_y y n_z , de la forma:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{8mV^{2/3}}{h^2}\varepsilon \quad (1.62)$$

Podemos calcular el número de microestados como el volumen de la corteza esférica delimitada por los radios de $8mV^{2/3}\varepsilon/h^2$ correspondiente a valores del macroestado del sistema en el intervalo $(\varepsilon - d\varepsilon/2, \varepsilon + d\varepsilon/2)$. Teniendo en cuenta que el número de microestados crece muy rápidamente con la energía, resulta irrelevante hacer el cálculo de la densidad de estados integrando en un volumen entre 0 y ε , puesto que será solamente el entorno de ε (sus vecinos próximos), los que contribuirán a este valor, lo que correspondería al cálculo del volumen del octante n-dimensional. Con esto obtenemos el número de estados totales con energías comprendidas entre 0 y ε :

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{8mV^{2/3}}{h^2} \varepsilon \right)^{3/2} \quad (1.63)$$

Finalmente, la expresión que buscamos, es decir, el número de estados entre dos niveles de energía comprendidos entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$, $dN(\varepsilon) = D(\varepsilon)d\varepsilon$, se obtiene diferenciando la expresión anterior y multiplicando por la degeneración que otorgan los dos posibles valores de espín en cada estado energético ($g_s = 2$ en el caso de electrones):

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = 2 \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad (1.64)$$

Además, nos será útil conocer también la densidad de estados del momento:

$$D(p)dp = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp \quad (1.65)$$

Esta densidad de estados se puede obtener a partir de la densidad de estados energéticos, teniendo en cuenta que:

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = D(p)dp \quad (1.66)$$

Como estamos en el caso no relativista, la relación entre energía y momento resulta:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = (2m\varepsilon)^{1/2} \Rightarrow \frac{dp}{d\varepsilon} = 2m(2m\varepsilon)^{-1/2} d\varepsilon \quad (1.67)$$

obteniéndose el valor dado para $D(p)$

1.8.2. Densidad de Estados Energéticos y del Momento relativistas

Ahora vamos a tratar el caso relativista, que nos será útil en el estudio de las enanas blancas.

Energía relativista

La energía total relativista será la suma de su energía cinética, ε , más su energía en reposo:

$$E = \varepsilon + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1.68)$$

Siendo u la velocidad de la partícula relativista. Como conveniencia escribimos la energía en términos del momento lineal, obteniéndose:

$$E^2 = (m_0c^2)^2 + (cp)^2 \quad (1.69)$$

Energía ultrarrelativista

Si la energía de la partícula es mucho mayor que su energía en reposo m_0c^2 , puede despreciarse el primer sumando, por lo que:

$$E \gg m_0c^2 \Rightarrow \varepsilon \simeq pc \quad (1.70)$$

La densidad de estados energéticos para el caso ultrarrelativista ($\varepsilon \simeq pc$), que es el de mayor interés en las enanas blancas será, teniendo en cuenta que: $\frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{1}{c}$

$$D(\varepsilon) = D(p) \frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{4\pi V \varepsilon^2}{h^3} \frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{4\pi V}{c^3 h^3} \varepsilon^2 d\varepsilon \quad (1.71)$$

que tendría que multiplicarse por el factor de degeneración energética correspondiente en cada caso, asociado al espín.

1.9. Gas de Fermi degenerado. El gas de electrones

Como se ha visto, a temperaturas suficientemente bajas, o a altas densidades, deja de ser válida la aproximación clásica para el estudio de las propiedades termodinámicas de los gases. Se estudiarán *gases ideales fuertemente degenerados*, tanto de fermiones como de bosones, puesto que las propiedades varían mucho de un caso a otro.

En los sistemas de fermiones destaca el *gas de electrones*, en los cuales la degeneración es fuerte incluso a temperaturas ordinarias.

Se recuerda que el número de fermiones en un estado de partícula r es, según (1.47):

$$\bar{n}_r = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_r + \alpha} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} + 1} \quad (1.72)$$

Por otro lado, el número de estados electrónicos con energía comprendida entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$, según se ha visto en (1.64) es:

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = 2 \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad (1.73)$$

Se conoce, por tanto, el número de estados y el número medio de electrones en cada estado, por lo que se puede definir la siguiente función: $f(\varepsilon)d\varepsilon \equiv$ número medio de electrones que en el sistema de volumen V tiene una energía comprendida entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$.

$$f(\varepsilon)d\varepsilon = \bar{n}_r \cdot D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{8\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} + 1} d\varepsilon \quad (1.74)$$

En esta expresión ε_r se ha tratado como un parámetro continuo, debido a la proximidad de los niveles energéticos, del mismo modo en el que se utilizó para definir la densidad de estados de energía.

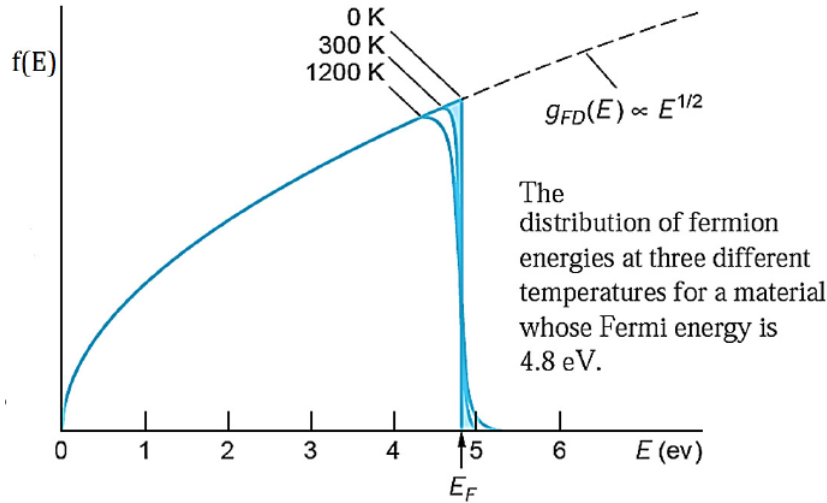


Figura 1.5: Comportamiento de los electrones en función de la energía para $T = 0\text{K}$ y para $T > 0\text{K}$. Crédito: Modern Physics, Paul A. Tipler, Ralph A. Lewellyn

A partir de la ecuación (1.74) se puede escribir:

$$N = \int_0^\infty f(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} + 1} d\varepsilon \quad (1.75)$$

$$\bar{E} = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} + 1} d\varepsilon \quad (1.76)$$

que representan el número de electrones que constituyen el sistema y la energía media del gas, respectivamente. Al considerar un sistema cerrado, podremos obtener a partir de N el valor del nivel de Fermi μ_o .

1.9.1. Cálculo de la energía de Fermi

Para obtener μ_o basta con particularizar las expresiones para N y \bar{E} cuando $T = 0K$ (se aproxima la exponencial del denominador a cero cuando $\beta \rightarrow \infty$):

$$N = \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \int_0^{\mu_o} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{16\pi V}{3h^3} (2m^3)^{1/2} \mu_o^{3/2} \quad (1.77)$$

$$\bar{E} = \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \int_0^{\mu_o} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon = \frac{16\pi V}{5h^3} (2m^3)^{1/2} \mu_o^{5/2} \quad (1.78)$$

A partir de la primera se puede obtener la energía de Fermi:

$$\mu_o = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} \quad (1.79)$$

Hay que tener en cuenta que la degeneración energética en este caso es 2, que es la correspondiente a los electrones, en cualquier otro caso habría que tomar un factor g , no necesariamente $g = 2$, en la densidad de estados, y consecuentemente la energía de Fermi dependería de este valor.

De ambas ecuaciones se obtiene:

$$\bar{E} = \frac{3}{5} N \mu_o \quad (1.80)$$

Si se utilizan ahora las ecuaciones de estado obtenidas en (1.40) y (1.43), tenemos que la ecuación de estado no relativista para fermiones es:

$$\bar{p}V = \frac{2}{3} \bar{E} = \frac{2}{5} N \mu_o \Rightarrow \bar{p} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \propto \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \quad (1.81)$$

En el cero absoluto, la presión de un gas de Fermi no relativista es proporcional a la potencia 5/3 de la densidad. Se realiza el mismo proceso para un gas relativista de fermiones:

$$\bar{p}V = \frac{1}{3} \bar{E} = \frac{1}{5} N \mu_o \Rightarrow \bar{p} = \frac{1}{40} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \propto \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \quad (1.82)$$

En ambos casos, la presión del gas de Fermi es proporcional a la potencia 5/3 de la densidad. Sin embargo en el caso relativista, ésta es un factor 1/2 menor que la presión del caso no relativista.

1.9.2. Cálculo del momento de Fermi

También será de utilidad conocer el momento del gas para $T = 0K$, el momento de Fermi (p_F). Esto será útil a la hora de discernir si ha de considerarse relativista o no relativista. Para obtener este parámetro se actúa igual que con la energía de Fermi, pero tomando la densidad de momentos vista en (1.65), calculándolo para $T = 0K$:

$$N = \int_0^{p_F} f(p) dp = \int_0^{p_F} \bar{n}_r(T = 0K) D(p) dp = \int_0^{p_F} g \frac{4\pi V p^2}{h^3} dp = g \frac{4\pi V}{3h^3} p_F^3 \quad (1.83)$$

Por tanto, el momento de Fermi es:

$$p_F = \left(\frac{3N}{g4\pi V} \right)^{1/3} h \quad (1.84)$$

recordando que g es la degeneración energética.

1.10. Gas de Bose

Esta parte, resulta muy interesante para entender el comportamiento de los fermiones en términos de la física estadística. Además es aplicable en estudios de radiación, ya que los fotones son bosones. El comportamiento de un gas de Bose es muy diferente al de un gas de Fermi.

Como se vio en la estadística de Bose, no existe límite de partículas que pueden existir en un estado energético, por eso, cuando $T \rightarrow 0K$, la mayoría de los bosones teóricamente se agrupan en los estados de energía más baja, mientras que los fermiones, aunque las temperaturas sean cercanas al cero absoluto, pueden existir en niveles

relativamente altos de energía debido al principio de exclusión de Pauli. Recordemos el número medio de partículas bosónicas en un estado cuántico r :

$$\bar{n}_r = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} - 1} \quad (1.85)$$

tal que, si el sistema tiene N partículas:

$$N = \sum_r \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} - 1} \quad (1.86)$$

Al suponer que el nivel más bajo de energía es $\varepsilon_r = 0$ se puede obtener a partir de (1.85) que

$$\mu(T) \leq 0 \quad (1.87)$$

porque en otro caso, se obtendría $\bar{n}_r < 0$, lo cual no tiene sentido.

Siguiendo un procedimiento análogo al que se siguió con la estadística de Fermi, se define $f(\varepsilon)$ (número medio de bosones que en el sistema de volumen V tienen una energía comprendida entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$) como:

$$f(\varepsilon) = D(\varepsilon)\bar{n}(\varepsilon) = g_s \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

donde, de nuevo, se ha utilizado la densidad de estados energéticos vista en (1.64). La clave en la comprensión del gase de Bose-Einstein resulta al entender que no se puede utilizar la densidad de estados vista en (1.64) para el cálculo del número de partículas. Ya que para el cálculo de esta densidad de estados se aproximó la integral en volumen de la esfera entre 0 y ε . Para los fermiones o bosones a altas temperaturas esto no influye puesto que en cada estado puede haber máximo una partícula, pero para un gas de Bose a temperaturas suficientemente bajas es necesario que exista un estado de traslación correspondiente a $\varepsilon = 0$, y esta densidad de estados tal como se definió en (1.64), no lo cumple:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_s \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \varepsilon^{1/2} = 0 \quad (1.88)$$

Por lo que es necesario redefinir el número de partículas del sistema cerrado añadiendo el término correspondiente a las partículas en el nivel $\varepsilon_r = 0$:

$$N = g_s \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} + \sum_{r(\varepsilon_r \neq 0)} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r - \mu)} - 1} \quad (1.89)$$

donde solo el segundo sumando es el que puede aproximarse por una integral. Entonces, el resultado finalmente correcto es:

$$N = N_o + N' \quad (1.90)$$

siendo N_o el número de partículas en el nivel fundamental ($\varepsilon_r = 0$) y N' el número de partículas en estados excitados ($\varepsilon_r > 0$):

$$N_o = g_s \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad (1.91)$$

$$N' = g_s \frac{4\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \quad (1.92)$$

Capítulo 2

Equilibrio hidrostático estelar

2.1. Introducción

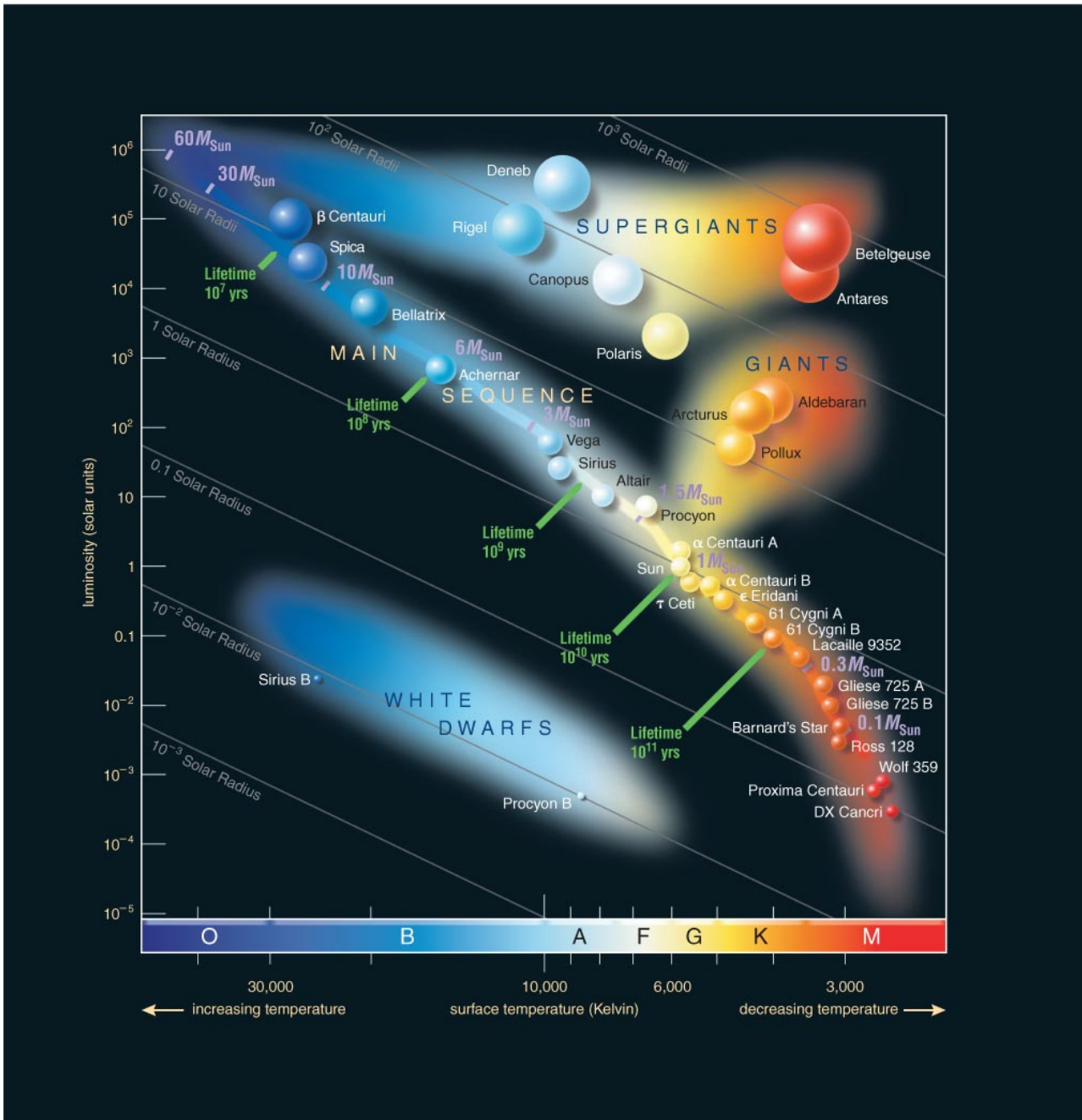
En este capítulo se buscará encontrar las propiedades más básicas (densidad, presión, temperatura, radio) de las estrellas pertenecientes a la llamada Secuencia Principal, como es el Sol.

Para ello se seguirán dos caminos, el primero de ellos se trata de una resolución de un sistema conformado por distintas ecuaciones encontradas al realizar una serie de aproximaciones. Se trata de un proceso muy simplificado, pero que resulta útil para poner en juego el comportamiento básico de una estrella perteneciente a la Secuencia Principal, entendiendo ciertas propiedades básicas que se cumplen con generalidad en todas las estrellas pertenecientes a esta secuencia, consecuentemente en el Sol.

El otro camino parte de una condición de equilibrio hidrostático y de la relación politrópica entre la presión y densidad, proveniente de considerar un interior localmente adiabático, encontrándose una ecuación diferencial de segundo orden denominada “Ecuación de Lane-Emden”, para las estrellas denominadas “politrópicas”. El resultado de esta ecuación (que se obtendrá analíticamente para algunos casos y numéricamente para otros), permite obtener algunas propiedades estelares esenciales, como la densidad, presión y temperatura, en función del radio de la estrella. Además, se centrará el cálculo en las estrellas con un índice politrópico 3, que es el correspondiente a la estrella de referencia, el Sol. Este cálculo se realizará con apoyo computacional.

2.2. Diagrama de Hertzsprung-Russell

Para situar el estudio conviene conocer el denominado Diagrama de Hertzsprung-Russell, o simplemente Diagrama HR. Se trata de un gráfico de dispersión de estrellas que indica la relación entre las magnitudes absolutas (M), o luminosidades de las estrellas, en comparación con sus clasificaciones espectrales (S), o temperaturas efectivas. De una manera más simplificada se puede entender como un diagrama en el que se presentan las estrellas en función de su brillo y su temperatura. En el eje vertical, las estrellas más brillantes aparecen cerca del borde superior y las más débiles cerca del inferior. La temperatura estelar decrece de izquierda a derecha.



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

Figura 2.1: Diagrama de Hertzsprung-Russell

Como se observa en la imagen, aparece una zona continua, claramente diferenciada, conocida como la Secuencia Principal. La clasificación de las estrellas de esta secuencia las divide en los tipos O, B, A, F, G, K y M.

Como se ha adelantado, los parámetros físicos que rigen la ordenación de estas estrellas son la magnitud absoluta (M) y las clasificaciones espectrales (S).

La magnitud absoluta “M”, es la magnitud aparente “m” (indica la medida del brillo de un objeto estelar, tal como es visto como un observador desde la Tierra) que tendría un objeto si estuviera a una distancia de 10 parsecs (un parsec es una medida de longitud que equivale a $3,2616$ años luz = $3,0857 \times 10^{16}$ m) en un espacio completamente vacío sin absorción interestelar.

Se utiliza la magnitud absoluta, que posee una relación directa con las luminosidades de los astros, ya que así se pierde la dependencia con la distancia, pudiéndose así comparar directamente las luminosidades de diferentes estrellas sin la influencia de a qué distancia se encuentren.

Por otro lado, el parámetro S tiene que ver con la temperatura de la atmósfera estelar, es decir, la de la capa externa que es accesible a la observación. Teniéndose que la atmósfera de las estrellas O está a 50000 K, la de B a 25000K, la de A a 15000K, la de F a 7600K, la de G a 6000K, la de K a 5100 K, la de M a 3600 K.

Se puede afinar más aún colocando tras la letra un número del 0 al 9, teniéndose entonces 10 subgrupos. El Sol es una estrella de tipo G2.

Más del 90% de las estrellas caen en la amplia banda diagonal conocida como Secuencia Principal que asocia baja temperatura superficial con baja luminosidad. Sin embargo, existen estrellas restantes distribuidas por los otros cuadrantes; en el extremo superior derecho las brillantes aunque frías estrellas gigantes y supergigantes y en el extremo inferior izquierdo las estrellas calientes pero tenues, estrellas enanas. En capítulos posteriores se ahondará sobre este tema.

La clasificación estelar se debe principalmente al director de un Observatorio del Harvard College, Edward Pickering, a finales del siglo XIX, gracias en parte también a los esfuerzos de una plantilla de mujeres que recibían un escaso sueldo por su trabajo. Destacan, entre ellas, las colaboradoras Antonia Maury, quien no se limitó a la clasificación estelar por sus espectros, sino que desarrolló un esquema que se utilizaría posteriormente para identificar las estrellas supergigantes y en rápida rotación por sus espectros, y Annie Jump Cannon, que clasificó más de un cuarto de millón de estrellas según el sistema espectroscópico que había refinado.

2.3. Un modelo simple para las estrellas de la Secuencia Principal

Este apartado, como bien indica el título, consistirá en dar una explicación muy simplificada y global del comportamiento de las estrellas de la Secuencia Principal, de un modo casi cualitativo, para introducir al lector en los aspectos básicos que rigen en estas estrellas. Aunque los resultados no serán exactos, son válidos para explicar algunos conceptos.

Se buscarán, en principio, las relaciones entre la masa, el radio y la luminosidad de estas estrellas “normales y estables”, como el Sol, partiendo de su observación. De ésta se deduce que estas estrellas son esféricamente simétricas e irrotacionales, es decir, sus propiedades dependen solo del radio r de la estrella, en base a esto se desarrollarán las ecuaciones.

Ecuación del equilibrio hidrostático

De la observación estelar también se puede deducir que las magnitudes como el tamaño y temperatura de las estrellas se mantienen constantes durante largos periodos de tiempo. Por este motivo, se busca una ecuación que equilibre todas las fuerzas en la estrella, la ecuación de equilibrio hidrostático:

Consideramos una esfera de radio r situada en el interior de una estrella. Si tomamos un punto arbitrario en ella, por unidad de volumen, se ejercen dos fuerzas que deben equilibrarse mutuamente: la gravedad y la “fuerza gradiente” o de presión. En cualquier fluido está presente esta segunda, este fluido se mueve con el negativo del gradiente de presión. Como estamos suponiendo que la estrella tiene simetría esférica, podemos escribir la componente radial de la fuerza de presión como: $-\frac{dP}{dr}$, fuerza que va desde el interior de la estrella hacia fuera, la cual se equilibrará con la fuerza de la gravedad.

En una situación con simetría esférica como la que estamos considerando, la fuerza ejercida por la gravedad calculada en un punto de la superficie de la esfera del interior de la estrella, se debe a una esfera situada bajo ese punto, y será, por unidad de volumen: $GM\rho/r^2$, donde ρ es la densidad de la estrella y M una variable radial que cumple $M(R) = \mathcal{M}$ siendo esta última la masa de la estrella y R su radio.

Por tanto, la Ecuación de Equilibrio hidrostático es:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \quad (2.1)$$

La variable $M(r)$ se puede relacionar con las otras variables utilizadas, si tomamos una corteza esférica de radio r y espesor dr , tenemos:

$$dM = \rho 4\pi r^2 dr \quad (2.2)$$

Esta ecuación es conocida como la Ecuación de Continuidad.

Ecuación del balance energético

Si de nuevo se considera una corteza esférica en el interior de la estrella, tenemos que $l(r)$, es la energía por segundo que atraviesa una esfera de radio r , con $l(R) = L$, tal que $l = 4\pi r^2 q$, siendo q el flujo radiativo.

Esta energía liberada se debe a las reacciones nucleares en el interior de la corteza. Si ϵ es la energía nuclear liberada por unidad de masa y tiempo, la energía liberada en la capa dl será:

$$dl = 4\pi\rho\epsilon r^2 dr \quad (2.3)$$

Ecuación del transporte radiativo

Se puede suponer que la estrella presenta un comportamiento no muy alejado del de cuerpo negro, por la interacción tan frecuente entre los fotones de la estrella y sus átomos. Por ello supondremos que el flujo de energía que atraviesa la corteza es de la forma σT^4 , sin embargo la temperatura en la superficie interna de la corteza será diferente (mayor) que la temperatura en la superficie externa, por lo que podemos decir que existe una variación de flujo diferencial:

$$dq = d(\sigma T^4) \quad (2.4)$$

La diferencia de flujo está asociada a la extinción en la corteza considerada. Ésta viene dada por:

$$dq = -\kappa \rho q dr \quad (2.5)$$

El significado de esta ecuación es el siguiente: si suponemos que el flujo al atravesar una superficie no transparente de grosor dr pasa de ser f a $f - df$, df será el flujo perdido por absorción en este medio. Este flujo perdido será mayor cuanto mayor sea la densidad de partículas absorbentes, ρ , y cuanto mayor sea el flujo incidente, f . Suponemos por tanto que existe una proporcionalidad entre df , f , ρ y dr . Volviendo a la ecuación de transporte radiativo, si igualamos las diferencias de flujo obtenidas tendremos que:

$$q = -\frac{4\sigma}{\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (2.6)$$

En términos de la variable l , (energía por segundo que atraviesa la corteza), tendremos:

$$l = -\frac{16\pi\sigma}{\kappa\rho} r^2 T^3 \frac{dT}{dr} \quad (2.7)$$

Como $dT/dr < 0$, entonces $l > 0$, como se esperaba.

Ecuación de estado

En esta parte del planteamiento podemos suponer que el gas de las estrellas de la Secuencia Principal es perfecto, ya que suponemos que no hay interacción Culombiana por ser la estrella globalmente neutra, y cumple:

$$P = nkT \quad (2.8)$$

A continuación se comprobará que esta suposición lleva a resultados aproximados respecto a las propiedades de la estrellas.

Resolución del sistema de manera simplificada

Lo que se ha obtenido hasta ahora es un sistema de ecuaciones, que se resolverá de manera muy simplificada, pero que es suficiente para hacer algunas interpretaciones físicas sobre las estrellas de la Secuencia Principal. El sistema de ecuaciones vendrá dado por: (2.1), (2.2), (2.3), (2.7), más una ecuación de estado propia de los gases de las estrellas de la Secuencia Principal. La resolución, se insiste en que es muy simplificada, se puede hacer por un método de integración numérica simplificado a un paso, tomando los valores de las magnitudes incógnita en el centro y en la superficie:

$$M(r=0) = 0 ; M(r=R) = \mathcal{M} \quad (2.9)$$

$$l(r=0) = 0 ; l(r=R) = \mathcal{L} \quad (2.10)$$

$$P(r=0) = P_o ; P(r=R) = 0 \quad (2.11)$$

$$T(r=0) = T_o ; T(r=R) = 0 \quad (2.12)$$

$$\rho(r=0) = \rho_o ; \rho(r=R) = 0 \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

Las suposiciones realizadas parecen sorprendentes. Hay que tener en cuenta los datos en superficie en comparación con los datos del interior, por ejemplo $T = 5000K$ en la superficie se puede tomar como 0 ya que las temperaturas en el interior son mucho mayores.

Con la hipótesis propuesta, y tomando como valor de una magnitud en puntos interiores como la semisuma de sus valores en el centro y extremo, y los diferenciales como una resta entre el valor de la magnitud en la superficie y el valor en el centro, podemos obtener:

$$\mathcal{M} = \frac{\pi}{2}\rho_o R^3 \quad (2.15)$$

$$P_o = \frac{\rho_o G \mathcal{M}}{R} \quad (2.16)$$

$$L = \frac{\pi}{4}\rho_o \epsilon_o R^3 \quad (2.17)$$

$$L = \frac{2\pi\sigma}{\kappa\rho} R T_o^4 \quad (2.18)$$

$$P_o = \frac{\rho_o}{m} k T_o \quad (2.19)$$

$$(2.20)$$

Si se combinan las ecuaciones (2.15) y (2.16), se obtiene:

$$P_o = \frac{2}{\pi} \frac{G \mathcal{M}^2}{R^4} \quad (2.21)$$

Utilizando esta última y (2.19), tenemos:

$$T_o = \frac{G m \mathcal{M}}{R k} \quad (2.22)$$

Se puede comprobar la validez de estas ecuaciones calculando ciertas magnitudes para el Sol, siendo conocidos los valores \mathcal{M}_\odot y R_\odot . (Consultar Apéndice A).

Se obtienen de esta manera valores para el Sol de $P_o \approx 8 \times 10^{14} \text{ N/m}^2$, $\rho_o = 4000 \text{ kg/m}^3$, este último dista bastante del obtenido con modelos más precisos ($\sim 160\,000 \text{ kg/m}^3$).

Sin embargo la ecuación (2.22), con los datos del Sol, da un valor de $T_o \approx 2 \times 10^7 \text{ K}$, siendo el valor real $\sim 1,5 \times 10^7 \text{ K}$.

Esto último es un resultado interesante, puesto que el orden de magnitud, 10^7 K , es muy importante. Éste es el valor indicativo para que puedan tener lugar las reacciones nucleares de fusión del hidrógeno. La explicación de esta coincidencia se realiza a partir del colapso gravitatorio que sufre una nebulosa protoestelar. Esta nebulosa al colapsar se calentará por el mecanismo de Kelvin, que implica que la energía potencial de la nube gaseosa se transforma en energía térmica. Cuando la estrella alcanza los 10^7 K comienzan las reacciones de fusión del hidrógeno, las cuales provocan una expansión por calentamiento. Sin embargo, esta expansión hará que la estrella se enfríe, reduciendo la fusión del hidrógeno y haciendo que la estrella se contraiga de nuevo. En este punto, por el mecanismo de Kelvin, de nuevo se recalentará reavivando la fusión. Por este motivo, al llegar a $\approx 10^7 \text{ K}$ la temperatura en la estrella se estabiliza.

Tras esta explicación se podría entender que las estrellas de la Secuencia Principal del tamaño solar tienen una temperatura de este orden, y esto es efectivamente lo que ocurre.

Teniendo en cuenta este hecho, ($T_o \approx \text{cte}$), vemos en (2.22) que las estrellas de la Secuencia Principal cumplen una proporcionalidad directa (de constante kT_o/Gm) entre su masa y su radio: a mayor masa, mayor tamaño. Estos son los dos resultados más importantes que podemos deducir, con este desarrollo tan simplificado, pero que, sin embargo, son claves en el comportamiento de las estrellas de la Secuencia Principal, que es para las que se ha hecho el estudio. En capítulos posteriores se estudiarán las enanas blancas y estrellas de neutrones (y las gigantes rojas), que no pertenecen a ésta. En concreto, como contraposición a lo visto, se verá que en las enanas blancas y en las estrellas de neutrones, la relación entre masa y radio es inversa.

2.4. Estrellas politrópicas

En esta sección se estudiará otro modelo hidrostático, más complejo y preciso, aunque aún dentro de cierta sencillez, que junto con un modelo localmente adiabático del interior estelar define un tipo de estrellas llamadas politrópicas. Se encontrará una ecuación diferencial que cumplen este tipo de estrellas (ecuación de Lane-Emden) y cuya resolución permitirá determinar distintas magnitudes estelares como la masa, la densidad, la presión o la temperatura (radiales). Como la resolución analítica solo puede ser aproximada, se buscarán resultados exactos para índices politrópicos concretos, como el que define la aproximación de Eddington.

2.4.1. Un modelo del interior estelar

Como debe ser en una ecuación de equilibrio hidrostático, se considerará, de nuevo, que la variación en la presión de la estrella está en equilibrio con el propio peso de la estrella:

$$dP(r) = -g(r)dm \Rightarrow -\rho(r)g(r)dr \quad (2.23)$$

Donde $\rho(r)$ es la densidad local en función del radio, y $g(r)$ el valor local del campo gravitatorio en función del radio. El signo negativo se debe a que r indica la distancia desde el centro de la estrella y no desde su superficie. Esta ecuación se puede escribir en términos del potencial gravitatorio teniendo en cuenta que:

$$g(r) = \frac{d\phi(r)}{dr}$$

Entonces (2.23) queda como:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d\phi(r)}{dr}\rho \quad (2.24)$$

El potencial es solución a la ecuación de Poisson, que con simetría esférica es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = 4\pi G\rho \quad (2.25)$$

Por otro lado, se considera que la presión total es una suma de la presión debida a la masa y de la presión debida a la radiación:

$$P(r) = p_m(r) + p_r(r) \quad (2.26)$$

Esta ecuación puede complicarse mucho, sin embargo, si se excluyen las estrellas muy calientes, la presión de la radiación es mucho menor que la presión debida a la masa y puede ser ignorada. Es más, ya que lo que ocurre en el interior es que la pérdida de energía por radiación es sustituida por la energía generada en el núcleo debida a los procesos de fusión, se puede ignorar de momento este proceso dinámico y considerar que el interior estelar es hidrostático con una mínima pérdida de energía. Por tanto, incluso sin ser una suposición totalmente realista, se supone que el interior es localmente adiabático, puesto que bajo esta suposición se encontrarán unos resultados básicos que resultan interesantes.

Si el interior de la estrella consiste en un gas ideal uniforme, entonces:

$$P(r) = \frac{k}{\mu}\rho(r)T(r) \quad (2.27)$$

donde k es la constante de Boltzmann y μ , no debe confundirse con el potencial químico visto anteriormente, en este caso es el peso molecular medio, que se asume constante. A partir de aquí se puede definir el volumen molar como:

$$V(r) = \frac{\mu}{\rho(r)} \quad (2.28)$$

y en esta ecuación μ presenta el peso *molar* medio (constante).

Como se ha supuesto un interior localmente adiabático se tiene que:

$$P(r)v^\gamma = \text{cte} \quad (2.29)$$

donde

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Siendo C_p y C_v los calores específicos a presión y volumen constantes, respectivamente.

Sustituyendo (2.28) en (2.29) se tiene:

$$P = c\rho^\gamma \quad (2.30)$$

siendo c una constante. Esta relación es la relación *politrópica*. Las estrellas que obedecen esta relación se denominan estrellas politrópicas de índice n , con:

$$n = \frac{1}{\gamma - 1} \quad (2.31)$$

2.4.2. La ecuación de Lane-Emden

En este apartado se pretende deducir la ecuación de Lane-Emden, que es una versión adimensional de la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio de un fluido Newtoniano politrópico, esféricamente simétrico y autogravitatorio.

A partir de la ecuación del equilibrio hidrostático:

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$

sustituyendo aquí la relación politrópica, (2.30), se tiene:

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dr}(c\rho^\gamma) = -c\gamma\rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr}$$

escribiendo en términos del índice n e integrando:

$$\int d\phi = -c(n+1) \frac{1}{n} \int \rho^{(\frac{1}{n}-1)} d\rho$$

si se toma $\phi = 0$ en la superficie de la estrella, entonces:

$$\rho = \left(\frac{-\phi}{c(n+1)} \right)^n$$

Que es la densidad en términos del potencial gravitatorio. Sustituyendo esto en la ecuación de Poisson, (2.25), se tiene:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = 4\pi G \left(\frac{-\phi}{c(n+1)} \right)^n \quad (2.32)$$

Para simplificarla se convierte la ecuación en una ecuación libre de parámetros: Si $\phi = \phi_c$ y $\rho = \rho_c$ son los valores del potencial y la densidad en el centro de la estrella, entonces se puede sustituir:

$$A^2 = \frac{4\pi G}{c(n+1)} \rho_c^{\frac{(n-1)}{n}} \quad (2.33)$$

$$z = Ar \quad (2.34)$$

$$\omega = \frac{\phi}{\phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n} \quad (2.35)$$

y la ecuación queda:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\omega}{dz} + \omega^n = 0 \quad (2.36)$$

Ésta es la *ecuación de Lane-Emden para estrellas politrópicas*.

Al resolverla, podrán calcularse las funciones para la densidad, presión y temperatura a partir de (2.35):

$$\rho(r) = \rho_c \omega(r)^n \quad (2.37)$$

$$P(r) = c\rho(r)^{\frac{n+1}{n}} = c\rho_c^{\frac{n+1}{n}} \omega(r)^{n+1} = P_c \omega(r)^{n+1} \quad (2.38)$$

$$T(r) = P(r) \frac{\mu}{k\rho(r)} = P_c \omega(r)^{n+1} \frac{\mu}{k\rho_c \omega(r)^n} = T_c \omega(r) \quad (2.39)$$

Por otro lado la masa de la estrella será:

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr \quad (2.40)$$

Por tanto, con este simple modelo se puede calcular todo excepto la luminosidad, la cual es técnicamente cero en este modelo para el cual se ha asumido comportamiento adiabático.

La resolución analítica no existe para todos los valores de n y para ciertos valores de n debe resolverse numéricamente. Para $n = 0, 1, 5$ existen soluciones exactas. Para $n \in (0, 5)$ las soluciones son continuas y finitas. Con el programa *Mathematica* se desarrollarán los resultados para $n = 3$ y se desarrolla un programa en C, con el método de integración numérica de Runge-Kutta, para posibles resoluciones numéricas.

2.4.3. Soluciones analíticas

En este apartado se resolverá la ecuación de *Lane-Emden* para $n = 0$ y 1 con el programa *Mathematica*, para estos valores la ecuación tiene soluciones analíticas. Consultar Apéndice B.1. Las condiciones de contorno requerirán que la solución sea finita y no discontinua en el origen, por tanto:

$$\omega(0) = 1; \quad \frac{d\omega(0)}{dz} = 0 \quad (2.41)$$

n=0

La ecuación de *Lane-Emden* para $n = 0$ tiene solución analítica.

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\omega}{dz} + 1 = 0$$

Resolviéndola con el programa *Mathematica*, encontramos:

$$\omega_0(z) = 1 - \frac{z^2}{6} \quad (2.42)$$

Por tanto, el valor de la densidad, presión y temperatura en términos de ω vendrán dados por (2.37), (2.38), (2.39)

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_c \\ P(r) &= P_c \left(1 - \frac{z^2}{6}\right) \\ T(r) &= T_c \left(1 - \frac{z^2}{6}\right) \end{aligned}$$

n=1

La ecuación de *Lane-Emden* para $n = 1$, queda:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\omega}{dz} + \omega = 0$$

una ecuación esférica de Bessel. Cuyo resultado, aplicando las condiciones de contorno es:

$$\omega(z) = \frac{\sin(z)}{z} \quad (2.43)$$

Los valores para la densidad, presión y temperatura, son, por tanto, siguiendo (2.37), (2.38), (2.39):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_c \frac{\sin(z)}{z} \\ P &= P_c \frac{\sin^2(z)}{z^2} \\ T &= T_c \frac{\sin(z)}{z} \end{aligned}$$

2.4.4. La aproximación de Eddington

Como se ha visto la gran utilidad de la ecuación de Lane-Emden, se busca que la parte radiativa preserve la naturaleza politrópica del modelo estelar. En este aspecto juega un papel la aproximación de Eddington. Eddington elimina la aproximación de ignorar la presión de radiación. En este modelo la presión de la estrella consiste en presión debida a la masa y a la radiación. Además, añade la condición de que la presión de radiación es proporcional a la presión total de la estrella, así se tiene

$$P = p_m + p_r \Rightarrow \frac{p_r}{P} = 1 - b \quad (2.44)$$

donde b es una constante menor que 1.

Esta ligadura permite a la estrella permanecer politrópica, ya que

$$P = \frac{p_m}{b} = \frac{kT}{\mu b} \rho \quad (2.45)$$

y por tanto:

$$p_r = \frac{p_m}{b} - p_m = p_m \frac{(1-b)}{b} \quad (2.46)$$

ahora basta con calcular la presión de radiación (la presión debida a la masa viene dada por (2.45)). Para la presión de radiación suponemos que la estrella se comporta como un cuerpo negro, se define como:

$$p_r = \frac{2}{c} \int I_v \cos^2 \theta d\Omega = \frac{u}{3} = \frac{\sigma T^4}{3} \quad (2.47)$$

donde I_v es la intensidad específica (energía/superficie), (el coseno aparece al integrar el flujo neto de energía que atraviesa una superficie en la dirección normal a ésta y el segundo para hallar el momento del flujo) y u es la densidad total de energía de radiación, que vale, según la Ley de Stefan-Boltzmann: σT^4 . Por tanto, sustituyendo los valores de p_m , (2.45), y p_r , (2.47), en (2.46), se tiene:

$$\frac{1}{3}\sigma T^4 = (1-b)\frac{k}{\mu b}\rho T$$

resolviendo esta ecuación para T :

$$T = \left[\frac{3k(1-b)}{\sigma\mu b} \right]^{1/3} \rho^{1/3}$$

Sustituyendo esto en la ecuación para la presión total vista en (2.45) se tiene:

$$P = \frac{kT}{\mu b} \rho = \frac{k}{\mu b} \left[\frac{3k(1-b)}{\sigma\mu b} \right]^{1/3} \rho^{4/3}$$

pero el factor que precede $\rho^{4/3}$ es una constante, por tanto:

$$P = c\rho^{4/3} \quad (2.48)$$

con lo que se deduce que la aproximación de Eddington lleva a un modelo politrópico con $\gamma = 4/3$ y $n = 3$.

2.4.5. Resultados con Mathematica

Utilizando ahora el programa *Mathematica* y la función `NDsolve` (resolución numérica) se puede resolver la ecuación de *Lane-Emden* para la aproximación de Eddington.

En $z = 0$ hay una singularidad, con lo que se debe establecer el inicio de la solución en un pequeño punto $\epsilon > 0$, se tomará $\epsilon = 10^{-44}$. Para, además, añadir un comportamiento adecuado a la solución cerca del origen se impone la condición de que para z pequeños se cumpla la solución de $n = 0$.

Al resolver la ecuación diferencial de Lane-Emden para $n = 3$, el programa *Mathematica* nos devuelve como resultado una Función de Interpolación, la cual se puede tratar como una función analítica. Para encontrar la raíz se ha representado la solución de Lane-Emden con el mismo programa, obteniéndose:

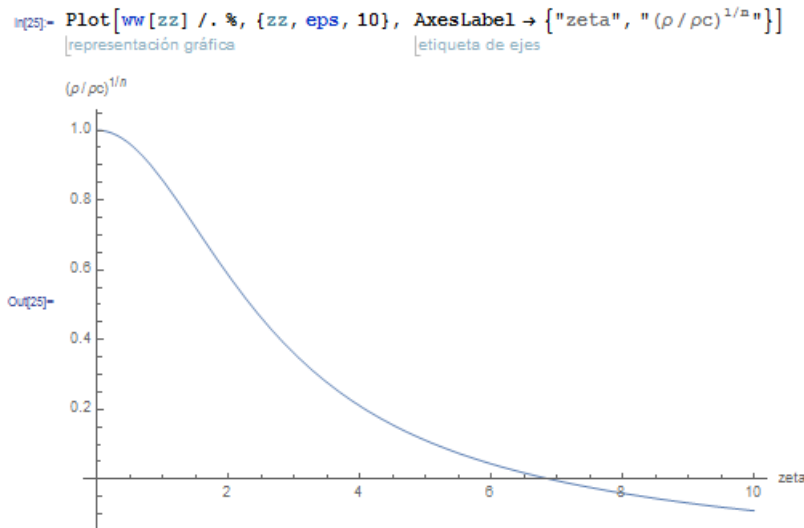


Figura 2.2: Solución de la ecuación de *Lane-Emden* para distintos valores de z . Realizado con el programa *Mathematica*

Con esta representación se puede anticipar que la raíz se encontrará entorno al 6. Utilizando la función `Findroot`, el Mathematica encuentra una raíz en $z_0 = 6,89685$. Ahora, teniendo en cuenta que la masa venía dada por (2.40):

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr$$

se puede poner esto en términos de ω teniendo en cuenta que $\rho = \rho_c \omega^n$ y $A = z/r$.

$$M = 4\pi A^{-3} \rho_c \int_0^{z_0} z^2 \omega^n dz \quad (2.49)$$

entonces, se define m_0 tal que:

$$m_0 = \int_0^{z_0} z^2 \omega^n dz \quad (2.50)$$

y utilizando $z_0 = 6,89685$ se obtiene un valor para m_0 . A partir de esto se podrá obtener la densidad, presión y temperatura.

2.4.6. Determinación de las propiedades de la estrella politrópica

En este apartado finalmente se ve la utilidad de resolver la ecuación de Lane-Emden y se denota el procedimiento estándar que se debe seguir para obtener las propiedades buscadas.

- Para medir las propiedades de una estrella politrópica se deben medir el radio (R) y la masa (M) de la estrella bajo estudio.
- A continuación se presupone un posible valor de n .
- Para ese valor de n se evalúa la ecuación de Lane-Emden para determinar la primera raíz z_0 .
- Se calcula el parámetro A de la ecuación (2.34)
- Se calcula la integral:

$$m_0 = \int_0^{z_0} \omega^n(z) z^2 dz$$

- Se tiene entonces, a partir de (2.49) y (2.50):

$$M = \frac{4\pi \rho_c}{A^3} m_0$$

y a partir de esta masa se obtiene:

$$\rho_c = \frac{MA^3}{4\pi m_0}$$

- Se calcula la constante libre c a partir de la ecuación (2.33):

$$c = \frac{4\pi G}{A^2(n+1)} \rho_c^{(n-1)/n}$$

- Ahora se puede obtener la presión central a partir de la relación politrópica:

$$P_c = c\rho_c^\gamma = c\rho_c^{(n+1)/n}$$

- La temperatura central, a partir de la ecuación (2.27).
- Se obtienen, por tanto, las distribuciones:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_c \omega(r)^n \\ P(r) &= P_c \omega(r)^{n+1} \\ T(r) &= T_c \omega(r) \end{aligned}$$

con

$$\rho_c = \frac{MA^3}{4\pi m_0} \quad (2.51)$$

$$P_c = c\rho_c^{(n+1)/n} \quad (2.52)$$

$$T_c = \frac{c\mu}{K} \rho_c^{1/n} \quad (2.53)$$

Cálculos para el Sol

Es interesante estudiar ahora como ejemplo nuestra estrella, puesto que conocemos perfectamente los valores de M_{\odot} y R_{\odot} . Consultar Apéndice A. Para los cálculos con *Mathematica*, consultar Apéndice B. Utilizaremos en su estudio, el modelo politrópico de Eddington ($n = 3$).

Entonces, se utilizará el programa *Mathematica* para seguir los cálculos previos, siendo conocido $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30}$ kg y $R_{\odot} = 6,96 \times 10^8$ m y utilizando los valores de z_0 y m_0 obtenidos. (Se considera para el cálculo de μ la composición del Sol).

Con estos valores se puede ahora obtener las curvas representativas de la presión, la densidad y la temperatura en función del radio, de nuevo utilizando el programa *Mathematica*:

Densidad:

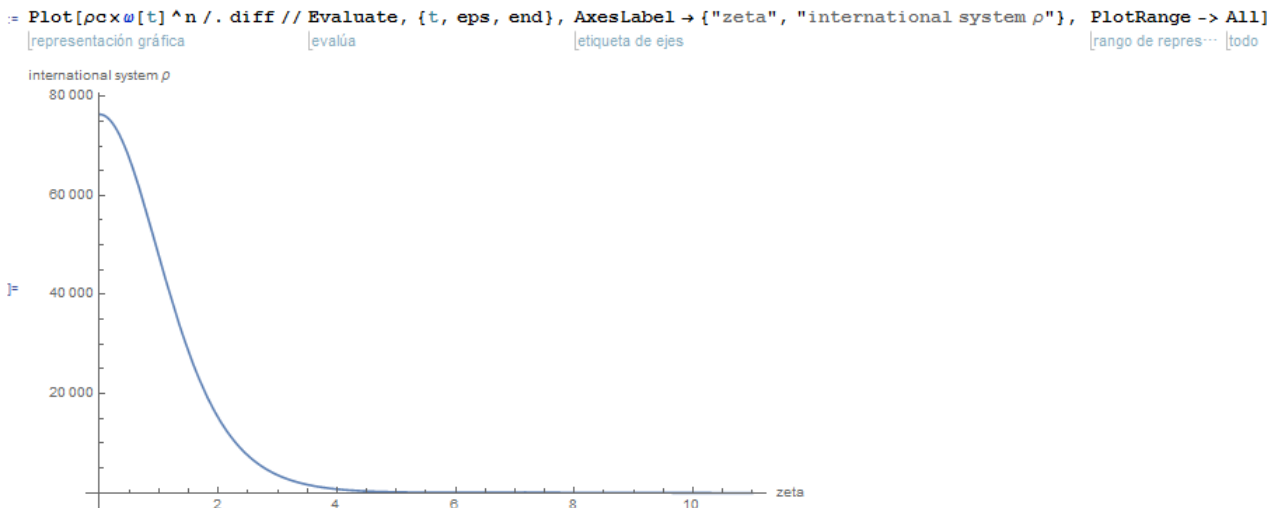


Figura 2.3: Representación de la densidad radial para el Sol supuesto como una estrella de índice politrópico $n = 3$. Obtenida por nosotros

Presión:

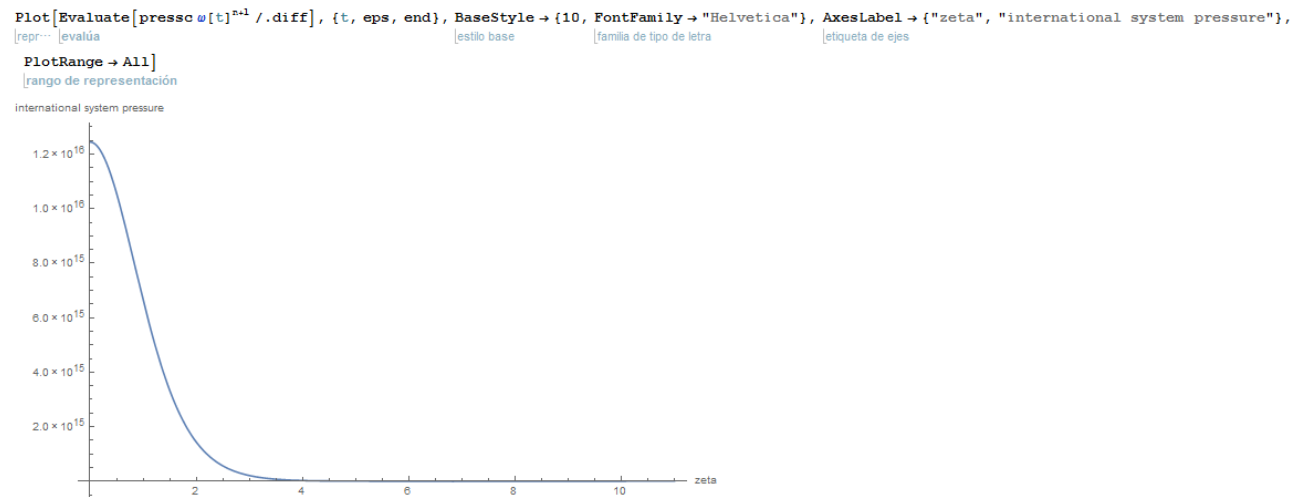


Figura 2.4: Representación de la presión radial el Sol supuesto como una estrella de índice politrópico $n = 3$. Obtenida por nosotros

Temperatura:

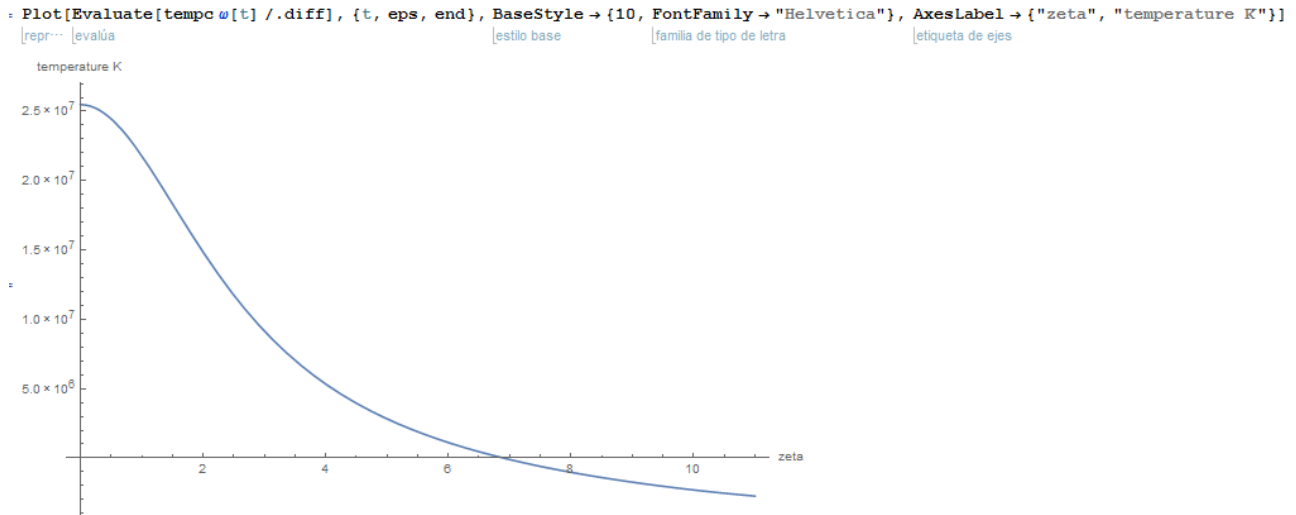


Figura 2.5: Representación de la temperatura radial para el Sol supuesto como una estrella de índice politrópico $n = 3$. Obtenida por nosotros

Nótese que los valores centrales tienen sentido en estrellas de la Secuencia Principal. En el siguiente apartado se intentará demostrar la validez de la aproximación adiabática, comparando nuestros resultados con los resultados obtenidos por un modelo más complejo, encontrado en la bibliografía.

2.4.7. Resultados con el método de integración numérica de Runge-Kutta

Como bien indica el título de la sección, se pretende realizar el mismo proceso con un método de integración numérica (método de Runge-Kutta 4) para resolver la ecuación de *Lane-Emden*, mediante un programa en C (en el Apéndice D se encuentra el programa). En primer lugar resulta interesante observar las soluciones de esta ecuación para los distintos índices n :

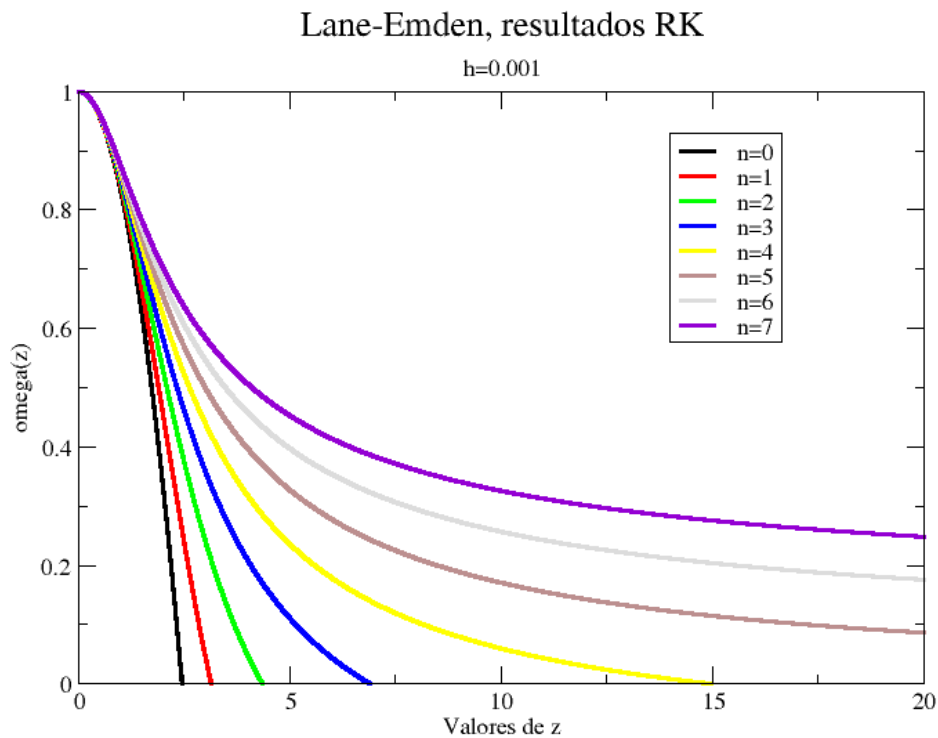


Figura 2.6: Resultados de la ecuación de *Lane-Emden* para distintos valores de n . h es el paso de integración. Obtenida por nosotros

Se puede observar que entre 1 y 5 hay soluciones finitas, y que para $n = 3$, la raíz coincide con la obtenida en la sección anterior.

En esta parte del estudio resulta interesante comparar los datos obtenidos para el Sol con esta suposición adiabática con los resultados obtenidos con el *Modelo Solar Estándar*.

El *Modelo Solar Estándar* es un modelo más complejo y preciso que el estudiado aquí. Está descrito por cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden que tienen en cuenta las variaciones de masa, presión, temperatura y luminosidad. Los resultados de aplicar el *Modelo Solar Estándar* se han encontrado en la bibliografía (consultar Apéndice C.1.) y representado a continuación junto con los valores obtenidos en este trabajo. Los resultados son los siguientes:

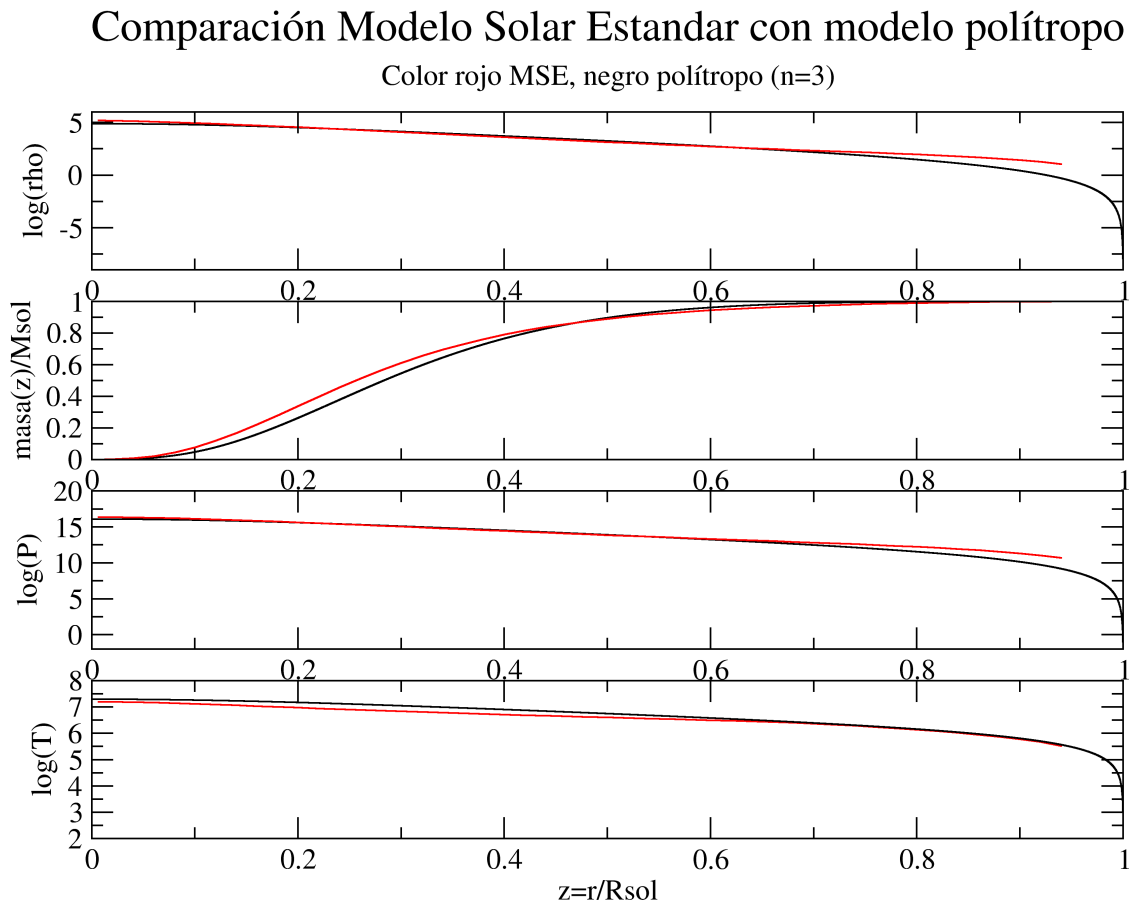


Figura 2.7: Comparación del MSE con el modelo politrópico en escala logarítmica. Obtenida por nosotros

Nótese la escala logarítmica, en cualquier caso los resultados obtenidos no distan mucho de estos resultados más precisos.

Acerca de unos errores confirmados por el propio autor, encontrados en el libro seguido para este capítulo “Astrophysics through computation”: consultar Apéndice E.

2.5. Fuera de la Secuencia Principal: introducción

Hasta ahora se ha hablado de las estrellas pertenecientes a la Secuencia Principal, como es el Sol. Sin embargo, fuera de ésta se encuentran tanto las gigantes rojas, como las enanas blancas, como bien se puede observar en la imagen, que recordamos:

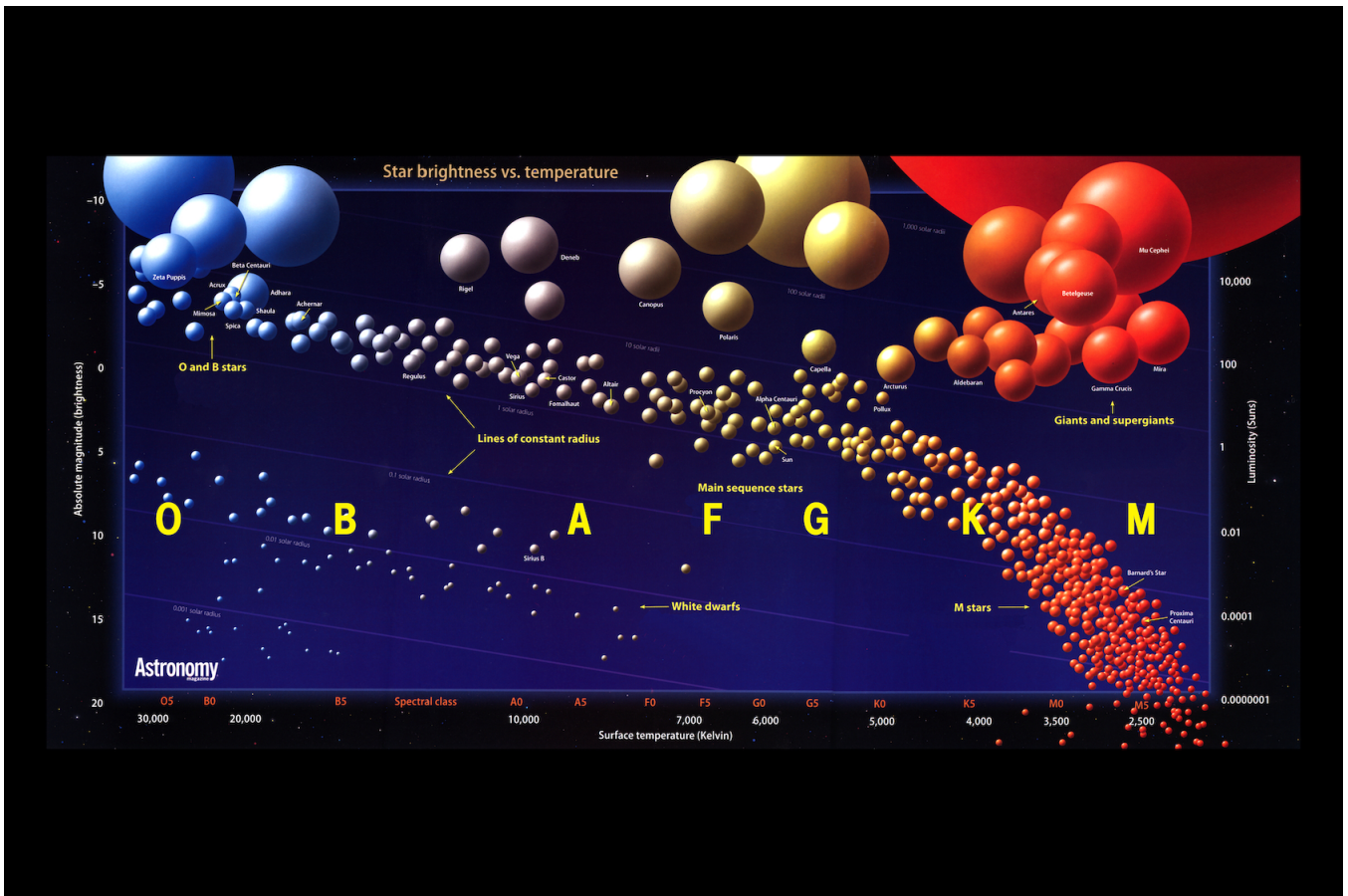


Figura 2.8: Diagrama de Hertzsprung-Russell. http://cococubed.asu.edu/imageshr_diagrams/HR_Diagram1.jpg

En las estrellas de la Secuencia Principal, el tamaño está asociado con la temperatura y la luminosidad. Las estrellas azules calientes y brillantes del extremo superior izquierdo también son las mayores de la secuencia, las amarillas de tamaño medio como el Sol, son estrellas de magnitudes “moderadas”, y las estrellas rojas y frías, son las menores de la Secuencia Principal.

Sin embargo existen excepciones fuera de la Secuencia, en las que la luminosidad está más influida por el tamaño que por la temperatura, esas son las “gigantes rojas” y “enanas blancas”.

Las gigantes rojas, deben ser precisamente gigantes, puesto que si su temperatura es normal, el flujo de energía será normal ($q \sim \sigma T^4$), por tanto, la energía por unidad de superficie es normal. Sin embargo, su luminosidad es excepcionalmente grande, así que su superficie debe de ser excepcionalmente grande.

En contraposición, las enanas blancas, son realmente pequeñas, puesto que su temperatura es normal, así como su emisión por unidad de superficie, pero su luminosidad es especialmente baja, por lo que deben de ser estrellas de muy poca superficie, muy pequeñas.

Pero, ¿qué lleva a una estrella a ser una gigante roja o una enana blanca? a continuación se verá cuál es el factor determinante para la evolución de las estrellas.

2.5.1. Evolución estelar y modelos en función de la masa

Los astrónomos modernos, tras décadas de observación ayudada por los descubrimientos recientes de la teoría nuclear han permitido establecer un ciclo estándar de vida que engloba a todas las estrellas conocidas. Todas las estrellas comienzan como protoestrellas, concentraciones de gas luminoso localizado entre grandes y difusas nubes de polvo y gas. Bajo el peso de su propia gravedad colapsan hacia dentro, provocando el calentamiento de la protoestrella, que se comprimirá hasta que comiencen las reacciones de fusión del hidrógeno en su núcleo. Entonces las estrellas pasan a pertenecer a la Secuencia Principal.

Se puede dar el caso en el que la protoestrella no sea suficientemente masiva como para comprimirse hasta

el punto de activar las reacciones de fusión, es decir, existe una masa límite por debajo de la cual la presión de degeneración electrónica compensaría el colapso gravitacional para mantener el equilibrio hidrostático. Se genera entonces lo que es conocido como una estrella degenerada, objeto subestelar o enana marrón, bautizadas por Tarter (1976).

El límite superior de masa de estas enanas marrones está claramente definido por la frontera con las estrellas y para metalicidades (abundancia relativa de elementos más pesados que el helio en una estrella) como la solar este límite se establece en $\sim 72 M_{\text{Júpiter}}$. El límite inferior de masa que determina una enana marrón no está tan bien definido y está sujeto a discusión, algunos autores abogan por encontrar la diferencia entre enanas marrones y exoplanetas gigantes atendiendo a mecanismos de formación diferenciados. Otros en función de su ubicación (orbitando alrededor de estrellas o flotando libremente en el espacio interestelar).

Esta es la primera fase del proceso evolutivo, como se puede observar en la siguiente imagen:

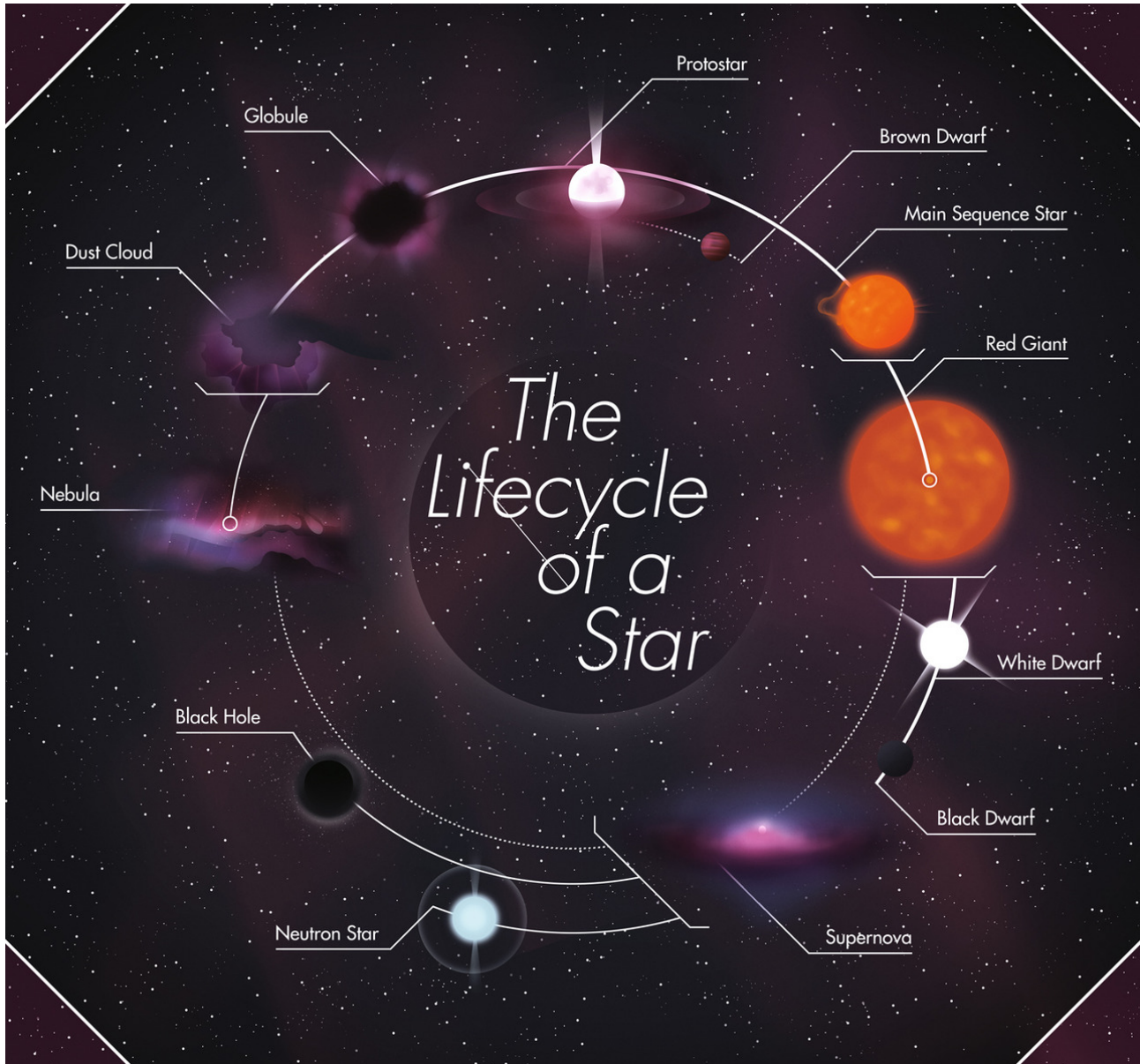


Figura 2.9: Evolución estelar. <http://sciteachers.tumblr.com/post/116323828940/jackmrhughes-the-lifecycle-of-a-star-jiggling>

Muchas estrellas permanecen en la Secuencia Principal durante miles de millones de años. Pero, en un instante determinado, cada una de ellas alcanza el agotamiento de su combustible, causando el paso de la estrella a otra fase evolutiva. En este punto juega un papel clave la masa de la estrella.

- Las estrellas de masas inferiores al Sol ($\sim (1/3)M_{\odot}$) son por ejemplo, las enanas marrones, de las que ya se ha hablado, y más abundantemente, las enanas rojas, que convierten hidrógeno en helio, pero al ser

estrellas tan poco masivas, este proceso es muy lento, por lo que permanecen en la Secuencia Principal un tiempo mucho mayor que cualquier otra (una estrella con la mitad de la masa del Sol, podría sobrevivir alrededor de quince veces la edad actual del universo). Una vez que estas estrellas hubieran consumido todo el hidrógeno, la fusión teóricamente pararía, y la estrella seguiría contrayéndose hasta que sólo hubiera repulsión electrónica. El calor de la estrella entonces se disipará, dejando una esfera de gas comprimido, frío y oscuro, unos objetos que aun no se han observado, las enanas negras.

- Las estrellas de masa intermedia, como el Sol, no desaparecen tras fusionar todo el hidrógeno, sino que una vez que éste acaba sufre una serie de transformaciones, que no permiten describirlas como al resto de las estrellas de la Secuencia Principal. Cuando la mayor parte del núcleo de la estrella se ha fusionado en helio inerte, comienza a quemar hidrógeno en una cáscara que rodea el helio. En este proceso la estrella se expande, y su superficie se enfría, por lo que su color se torna rojizo (fase de gigante roja). Su núcleo continúa calentándose hasta producirse la fusión del helio en carbono, el cual ya no se puede fusionar puesto que no hay suficiente gravedad, y la estrella muere, su cubierta se deforma, dando paso a una nebulosa, y su núcleo se convierte en una caliente y fuertemente comprimida enana blanca, que es el cuerpo estelar que se tratará en el capítulo posterior, por lo que de momento no se ahondará en ellas.
- Las estrellas muy masivas, mínimo $3M_{\odot}$, son estrellas calientes, brillantes y azules, cuya vida es corta pero muy vistosa. Son estrellas de gran extrañeza, por la corta extensión de sus vidas. La primera fase evolutiva prácticamente coincide con la de una estrella intermedia, pero las estrellas masivas tienen núcleos muy calientes, y pueden combinar el hidrógeno en helio a través de carbono, nitrógeno y oxígeno. Una vez que sus núcleos son convertidos a helio, debido a la enorme gravedad de las estrellas, puede continuar el proceso de fusión, convirtiendo helio en carbono, carbono en neón, neón en oxígeno, oxígeno en silicio, y por último, silicio en hierro. En este punto las reacciones de fusión paran, debido a que el hierro no se fusiona.

Recordemos brevemente la energía de enlace por nucleón en función del número másico

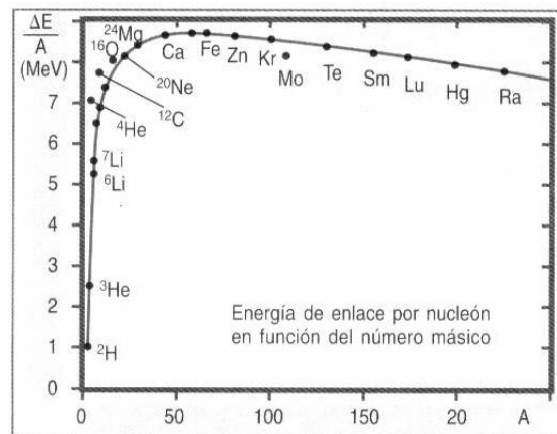


Figura 2.10: Energía de enlace por nucleón en función del número másico. Al llegar al hierro, las reacciones de fusión paran. <http://www.escrioscientificos.es/trab1a20/carpetas/nuclear/nu02.htm>

Cuando esto ocurre, como ya no se puede obtener más energía de la fusión de elementos más pesados que el hierro, paran las reacciones de fusión y el núcleo de una estrella masiva se colapsa rápidamente por acción de la gravedad.

Esto provoca una explosión de Supernova, una explosión de gran magnitud de los elementos que conformaban la estrella, (es una bella imagen pensar, que los elementos en nuestro planeta o que conforman, incluso, a nosotros mismos, fueron generados en una estrella). A su vez, en la propia Supernova, se pueden generar elementos más pesados que el hierro (como oro y plutonio), en un proceso llamado proceso-r, que ocurre en unos pocos segundos en la explosión de Supernova, debido a la gran cantidad de energía que se pone en juego. Este tipo de elementos tan pesados solo pueden forjarse en la muerte de una estrella muy masiva, en una Supernova.

El residuo de la Supernova, dependiendo de cuán masiva fuera la estrella, puede ser una estrella de neutrones (objetos que pueden tener una masa mayor que nuestro Sol, pero tener un radio menor de 20 km.) y, para estrellas muy masivas, el cuerpo residual puede ser un agujero negro, cuerpos tan densos y con gravedad tan fuerte, que ni siquiera la luz puede escapar de ellos. La estrella de neutrones será estudiada en capítulos posteriores.

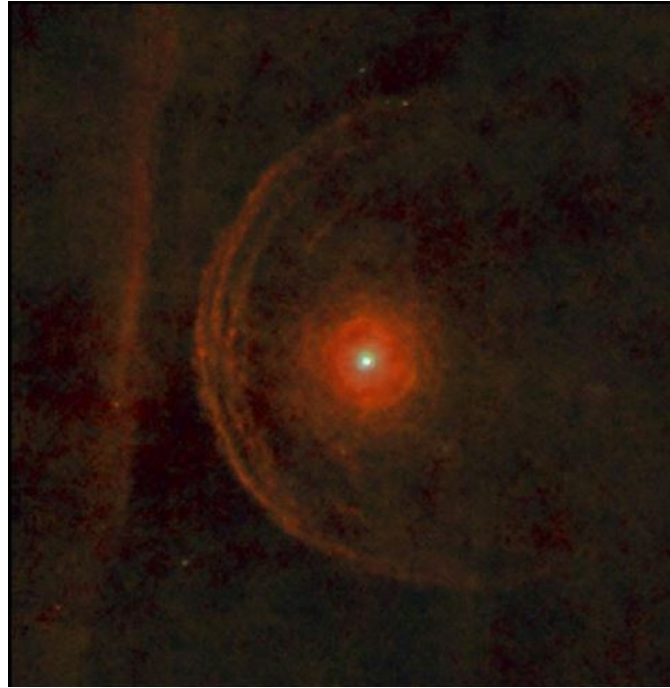


Figura 2.11: Imagen de Betelgeuse, también llamada α Orionis o HIP 27989, es una estrella supergigante roja, situada en la constelación de Orión. Se prevee que el final de su vida sea como Supernova de tipo II, se cree que durante los próximos miles de años. Fue vista por el observatorio espacial Herschel, una misión de una agencia Espacial Europea con importante participación de la NASA. Crédito de la imagen: ESA/Herschel/PACS/L. Decin et al



Figura 2.12: Remanente de Supernova conocido como “E0102”, en la galaxia llamada “Pequeña nube de Magallanes” a unos 210 000 años luz de distancia. E0102 es relativamente joven en escalas astronómicas, ya que se ha determinado ser de 2000 años de antigüedad, este tipo de objetos estelares jóvenes permiten a los astrónomos observar el material del núcleo directamente. Crédito de la imagen: NASA, ESA, el Hubble Heritage Team (STScI/AURA) y J. Green (University of Colorado, Boulder)

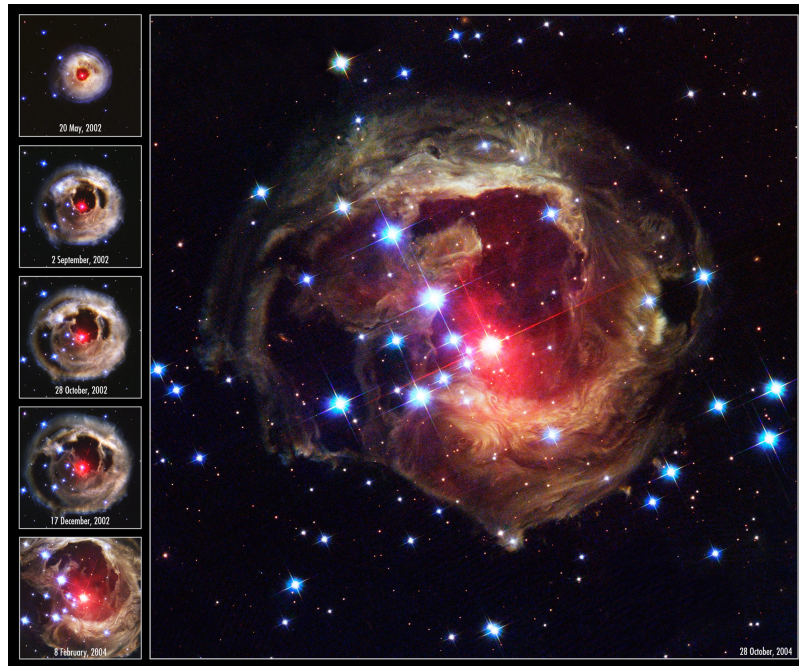


Figura 2.13: V838 Monocerotis, es una estrella variable situada en la constelación de Monoceros, aproximadamente a 20.000 años luz del Sol. La estrella exhibió una explosión muy importante en el año 2002 y se creyó inicialmente que era la típica creación de una nova (que es una explosión termonuclear causada por la acumulación de hidrógeno en la superficie de una enana blanca), sin embargo, luego se supo que se trataba de algo completamente distinto. Hoy se cree que la explosión está relacionada con los procesos de muerte estelar y la fusión de una estrella binaria o planetas. Crédito de la imagen: Telescopio espacial Hubble el 17 de diciembre de 2002. NASA/ESA

La pregunta ahora es, ¿qué tipo de estadística se puede utilizar para describir las estrellas que se van a estudiar? Para responderla, hay que tener en cuenta los elementos que las componen y la temperatura que poseen. Dentro de las estrellas de la Secuencia Principal, se pone como ejemplo básico el Sol, que está constituido por hidrógeno, con una energía de enlace de 13,6 eV, mientras que la energía de enlace del hidrógeno molecular, H_2 , es 4,5 eV. Como 1 eV corresponde a 11600 K, la temperatura superficial de ~ 6000 K no es suficiente para disociar las moléculas de H_2 . Sin embargo, la temperatura del interior del Sol es mucho mayor $\sim 10^6$ K, o 200 eV. Por tanto, el interior consiste en un plasma de hidrógeno completamente ionizado. Como el Sol es globalmente neutro se pueden desprestigiar las interacciones de Coulomb, y tratar el Sol como dos gases perfectos de protones y electrones con densidades locales iguales. Este es el modelo que se puede aplicar para todas las estrellas de la Secuencia Principal.

Para las estrellas de masa entre $0,1 - 0,5M_{\odot}$, la fusión del hidrógeno resulta en un plasma de núcleos de He y electrones. Mientras el gas se comporta clásicamente, el gas se contrae rápidamente, pero este proceso cambia cuando los electrones pasan a ser un gas de Fermi. Entonces el objeto pasa a ser una enana blanca, el objeto inerte estelar que brilla mientras se enfría lentamente. Su materia se puede representar por un modelo localmente neutro de una mezcla de dos gases independientes, el de núcleos de Helio y el de electrones. Donde el gas de electrones se puede tratar cuánticamente y el de núcleos de Helio, clásicamente. Este hecho se justificará *a posteriori*.

Entre $0,5 - 10M_{\odot}$, dependiendo de la masa de la estrella, serán posibles las reacciones que produzcan elementos más pesados que el 4He , como ^{12}C , ^{16}O , ^{20}Ne , y ^{24}Mg . Por tanto, las enanas blancas resultantes poseerán estos núcleos a mayores de los de helio. Por ejemplo el Sol, pasará a ser una enana blanca de carbono y oxígeno.

Por último, para masas estelares entre $10 - 100M_{\odot}$, como ya se ha adelantado, la fusión llevará al núcleo más estable ^{56}Fe , pero la temperatura crece tanto que la estrella explota en una supernova, mientras su núcleo implosiona resultando en una estrella de neutrones (o agujero negro). Los constituyentes de la estrella de neutrones se pueden describir como un gas cuántico de neutrones con una densidad comparable a la de la materia nuclear.

Las enanas blancas y estrellas de neutrones en el contexto de la evolución estelar

Para introducir al lector en el conocimiento de las estrellas enanas blancas y estrellas de neutrones, que son los dos cuerpos celestes en los que se centrarán los capítulos posteriores, se realiza en esta sección un resumen cualitativo de estas estrellas en el contexto de la evolución estelar, sintetizado a partir de "Lipunov, V. M. (2002). Estrellas de neutrones. Ed. URSS, 2002, ISBN: 5-8360-0472-2".

El modelo más simplificado que existe para explicar el sistema físico de una estrella es un cuerpo formado por plasma y que se encuentra en equilibrio entre la fuerza de presión del plasma incandescente que se opone a la fuerza de la gravedad que tiende a colapsar la estrella. Este equilibrio es transitorio dado que se necesita la producción constante de energía para generar el flujo de radiación hacia el exterior. Además, el equilibrio mantiene la estrella en densidades del orden de 1 g/cm^3 .

El proceso de producción de energía es de naturaleza termonuclear y está limitado a las reservas de combustible que posee la estrella; este mecanismo fue descubierto y estudiado a principios del siglo XX por Arthur Eddington. Así, una disminución de la generación de energía lleva consigo el progresivo aumento de densidad como consecuencia del dominio gravitatorio. Este es el esquema dominante en las estrellas de la Secuencia Principal. A medida que el combustible nuclear se agota, y dependiendo de la masa de la estrella, el colapso gravitatorio genera estrellas en cuyo interior no se desprende energía: éstas son enanas blancas, con una alta temperatura superficial y baja luminosidad. El mecanismo físico que explica esta nueva situación de equilibrio transcende a la teoría clásica de los gases y sólo puede explicarse mediante la mecánica cuántica, tal y como propuso R. H. Fowler en 1926; y el equilibrio no es transitorio dado que el colapso gravitatorio está compensado por la presión del gas de electrones degenerado.

En palabras de Lipunov (2002) son estrellas eternas, una bella denominación y físicamente aceptable. Así, este tipo de estrellas que no necesitan una fuente de energía pueden estar frías, dado que la presión del gas de electrones no depende de su temperatura. De hecho, y aunque parezca extraño, son estudiadas como un gas de Fermi degenerado a temperatura 0K. Esta situación representa un plasma colapsado como un estado de compresión en que todos los átomos conforman un sistema de átomo único rodeado por un gas electrónico degenerado; y el colapso final no se produce debido a que el gas electrónico se resiste a la contracción ya que debe cumplir con el principio de exclusión de Pauli.

Una enana blanca de una masa comparable al Sol ocupa un tamaño comparable a la Tierra. Ese proceso evolutivo, sin embargo, no está garantizado para cualquier estrella sino que depende de la masa de ésta. Ello es debido a que la fuerza ejercida por la presión de la gravedad crece con M^2 mientras que la fuerza debida a la presión del gas degenerado crece con $M^{5/3}$ tal y como expuso en su teoría S. Chandrasekhar en 1931. Así, para valores elevados de la masa de la estrella, el colapso gravitatorio contribuye a que los electrones, que ya han ocupado los niveles energéticos más bajos, vayan, ahora, ocupando niveles más altos y se conviertan en electrones relativistas; así el límite de masa para una estrella enana blanca es del orden de $1,44 M_{\odot}$, umbral conocido como límite de Chandrasekhar.

El estudio de estrellas de grandes masas (superior al límite de Chandrasekhar) se inició antes de que en 1932 Chadwick descubriera el neutrón, y se propusieron modelos en que el colapso continuaría hasta que los núcleos de los átomos entraran en contacto, de forma que se produciría un núcleo unificado de masa: el de la estrella, tal y como propuso Landau en 1932.

El descubrimiento del neutrón consiguió explicar de forma precisa el proceso de colapso estelar para grandes masas. Así, el neutrón jugó un papel esencial en la comprensión de la evolución estelar de estrellas masivas ya que permitió explicar lo que ocurriría cuando el colapso gravitatorio contribuye de forma más intensa de lo que puede soportar el gas cuántico degenerado de electrones. Así, los electrones de la nube electrónica se juntan con los protones en la reacción que conduce a la formación de un neutrón desprendiendo un neutrino:



Este es un proceso conocido como neutronización de la materia. Y el trabajo necesario para que la reacción anterior tenga lugar, lo aporta la fuerza gravitatoria; precisamente por esa razón el proceso de neutronización ocurre en estrellas masivas. Este proceso, también está relacionado con lo que ocurre cuando una estrella colapsa a estrella de neutrones súper densa a través de una explosión de supernova. En todo caso, debe tenerse en cuenta que si la masa de una estrella es inferior al límite de Chandrasekhar, la situación de enana blanca resulta energéticamente más ventajoso que la de neutronización de la materia.

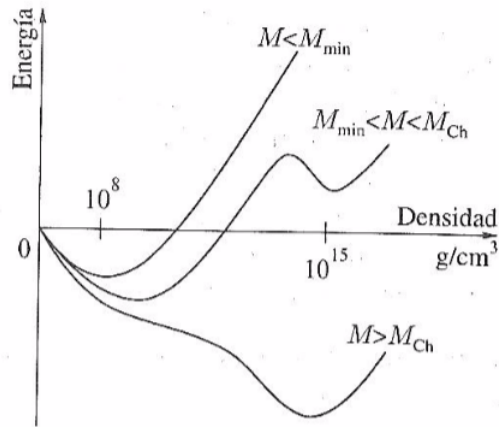


Figura 2.14: Representación de la energía de las estrellas en función de su masa. Para valores de masa inferiores a M_{\min} (0.03 masas solares) existe un solo mínimo que corresponde a la situación de enana blanca. Para masas comprendidas entre M_{\min} y el límite de Chandrasekhar existen dos mínimos: el de enana blanca y estrella de neutrones, siendo aquél más estable; finalmente para valores superiores al límite de Chandrasekhar, la situación estable es la de estrella de neutrones. Crédito de la imagen: Lipunov, 2002

En el centro de una estrella de neutrones la densidad es incluso mayor que la densidad nuclear (del orden de 10^{13} g/cm³); sin embargo también existe un límite de masa para la formación de una estrella de neutrones conocido como límite de Oppenheimer-Volkov que equivale a entre 2 y 3 masas solares. Por encima de este umbral la gravedad es tan intensa que el colapso es irreversible y da lugar a los conocidos como agujeros negros. Como conclusión, y de forma muy esquemática y en aras de exponer una introducción cualitativa, podríamos decir que todas las estrellas, después de agotar sus fuentes nucleares de energía pueden continuar su existencia en forma de enanas blancas, estrellas de neutrones o agujeros negros.

Capítulo 3

Enanas blancas

3.1. Introducción

El estudio de las enanas blancas es muy interesante para aplicar la estadística de Fermi. Continuando con el proceso de evolución estelar, se tiene que, una estrella de tamaño medio como el Sol, tras la fase de gigante roja, continua con el colapso gravitatorio una vez agotado el combustible que frenaba este colapso. La estrella entonces se contrae hasta que aparece una nueva presión, que no se debe a las reacciones nucleares, si no que opera a densidades mucho más altas, deteniendo el proceso. Así comienza la fase de enana blanca.

Esta presión se denomina presión de Fermi de los electrones. Es una consecuencia directa del Principio de Exclusión de Pauli. Cuando la densidad aumenta tanto que los electrones comienzan a estar muy juntos, este principio comienza a causar efecto. Como los electrones no pueden ocupar los mismos niveles energéticos, aparece una repulsión entre electrones, que puede evitar el colapso, y de hecho lo hace. Cuando esto ocurre, comienza la fase de enana blanca: conformada por un sistema de tipo “átomo único”.

Se dice entonces que el sistema de electrones está degenerado, es decir, la enana blanca es una estrella degenerada de electrones.

Resulta curioso estar tratando solo los electrones y olvidar los núcleos, ya que en una enana blanca, además, suele haber núcleos más pesados que el hidrógeno, generados en la fusión, (helio, oxígeno, carbono). Hay que tener en cuenta, que estos átomos estarán completamente ionizados, y que por cada núcleo de, por ejemplo, oxígeno, habrá 16 electrones libres, por lo que éstos son los que realmente producen la presión de Fermi. (Estadísticamente es más probable que sientan la repulsión de Fermi “antes” los electrones, que los núcleos).

¿Cuál es la condición para que un sistema de electrones esté degenerado?

Teniendo en cuenta que una partícula en un fluido con temperatura T , tiene un momento del orden de $\sqrt{3m_e kT}$ (teniendo en cuenta el principio de equipartición de la energía), según el Principio de Incertidumbre, le corresponde una longitud de onda:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3m_e kT}} = \lambda_{\text{DeBroglie}} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \quad (3.1)$$

Donde la longitud de onda de De Broglie, se define como la distancia de separación entre dos partículas a partir de la cual se manifiestan los efectos cuánticos.

La distancia entre electrones, será $n_e^{-1/3}$ (es decir, el inverso de la raíz cúbica de la densidad electrónica, ya que n_e^{-1} sería el volumen ocupado por una partícula, y su raíz cúbica, la distancia). Por tanto, si:

$$n_e^{-1/3} \ll \frac{h}{\sqrt{3m_e kT}} \quad (3.2)$$

la degeneración será completa y la presión estará gobernada por los efectos cuánticos. Cuando no se cumple la desigualdad sino que ambos miembros son del mismo orden se habla de degeneración parcial.

Un sistema totalmente degenerado consiste una idealización que simplifica el sistema bajo estudio.

Un sistema con temperatura 0 estará siempre degenerado. Una enana blanca, incluso en un estado en el cero absoluto, poseería energía puesto que no todos los electrones podrían ocupar el estado fundamental, debido al Principio de Exclusión.

Obviamente, las ecuaciones de estado vistas para las estrellas politrópicas ya no valen. La ecuación de balance energético, por ejemplo, despreciaba la conducción de calor como transporte energético, pero en este caso los electrones se pueden desplazar como si de un conductor se tratase (de hecho, a velocidades relativistas). La conducción térmica es muy eficiente y se alcanza rápidamente el equilibrio, siendo la temperatura homogénea en el interior de la estrella.

Tampoco se puede aplicar la ecuación de estado de un gas perfecto, hay que buscar una ecuación de estado apropiada para este caso.

3.2. Contexto histórico: de Eddington a Chandrasekhar

En las décadas de 1920 y 1930 Sir Arthur Stanley Eddington era la máxima autoridad astrofísica del mundo. Eddington, apasionado por la teoría de la gravedad de Einstein, dedicó parte de su carrera a la búsqueda de una teoría que compatibilizara la relatividad, la gravitación y la mecánica cuántica. En 1926 publicó la primera obra completa, exhaustiva y rigurosa sobre la estructura interna de las estrellas: *The Internal constitution of Stars*, que pasó a ser la base del futuro de la astrofísica estelar.

Recordemos que la primera mitad del siglo XX destacó por los grandes avances científicos que se realizaron. De hecho tres de las teorías más revolucionarias de la física del siglo pasado, a saber, la mecánica cuántica, la relatividad y la gravitación, surgieron y se gestaron entre 1900 y 1930.

En concreto, en 1926 el científico Sir Ralph Howard Fowler, basándose en los trabajos de Fermi, Pauli y Stoner, propuso una explicación a la existencia de materia bajo las condiciones impuestas por estas teorías: y así encontró una nueva “mecánica estadística”, refiriéndose a la estadística de Fermi-Dirac para los fermiones.

Estas leyes para las partículas fueron apadrinadas por la comunidad astronómica, que se puso a predecir los modelos nuevos de estructura interna a partir de esta idea. Las primeras aportaciones fueron dadas por Milne y Stoner, sin embargo, en 1930 apareció en la India, un joven físico que vino a estudiar a Cambridge bajo recomendación de Fowler.

Éste era Subrahmanyan Chandrasekhar quien estrechó lazos con el propio Eddington.

Las investigaciones de Chandrasekhar se concentraron en torno a la exploración de resultados cuando se añadía a las leyes estadísticas, las de la relatividad especial, llegando hasta un modelo de la estadística de Fermi-Dirac en condiciones relativistas.

En 1935, tras cinco años de trabajo, llegó a la masa límite para que una estrella pudiese terminar como enana blanca: 1,44 masas solares, el límite de Chandrasekhar.

No obstante este avance se fundamentaba en unos principios físicos que no agradaba a Eddington, quién defendía que la estadística de Fermi-Dirac no se podía compatibilizar con la relatividad de la manera en la que Chandrasekhar lo había hecho.

El 11 de enero de 1935, de hecho, una semana después de la publicación del artículo más importante de todo el trabajo de Chandrasekhar, se celebraba una reunión de la Royal Astronomical Society con los astrónomos y astrofísicos más importantes de la Sociedad, para exponer sus avances y resultados.

En esa misma reunión, Eddington tenía un espacio reservado para una intervención titulada *Degeneración relativista*. De esta intervención no había avisado a Chandrasekhar, que era su amigo, y esto molestó al propio Chandrasekhar.

El acta de la reunión recoge el sorprendente comentario de Eddington a la aportación de Chandrasekhar: *No se si podré escapar de esta reunión vivo, pero el fundamento de mi trabajo es que no existe tal “degeneración relativista”*.

De esta manera, Chandrasekhar se sintió humillado por Eddington ante los astrónomos de mayor prestigio del momento. Y como Eddington tenía una influencia casi dogmática en la mayor parte de la comunidad astronómica, y Chandrasekhar no encontró manera de defenderse de aquel comentario sorpresa de su amigo, Chandrasekhar no obtuvo el respaldo que esperaba con su descubrimiento.

Chandrasekhar se puso a preparar su defensa, buscando apoyo en científicos más teóricos del radio de influencia de Eddington. No todos se acabaron de posicionar, pero Rosenfeld se mostró atento con Chandrasekhar. Finalmente, junto a Möller, publicaron un artículo exponiendo las primeras ideas sobre los puntos flojos en la argumentación de Eddington, quién replicó manteniendo la discusión.

El tiempo, los avances teóricos y observacionales y un desarrollo argumental que involucró a distintos científicos, acabaron dando la razón a Chandrasekhar, quien acabó obteniendo, junto a William Fowler, el premio Nobel de 1983, por “sus contribuciones a la teoría de la estructura y evolución estelar”. Y es que Chandrasekhar, aunque después de la disputa no volvió a tocar el tema de las enanas blancas, hizo importantes contribuciones en la física de los agujeros negros y de estrellas en rotación.

Chandrasekhar manifestó en diversas ocasiones que la relación que mantuvo con Eddington no se vio profundamente alterada por estos acontecimientos.

Lo que resulta claro es que ambos científicos realizaron aportaciones extraordinarias e impecables al mundo de la astrofísica, y, aunque el comportamiento de Eddington en principio resulte algo censurable, se debe tener en cuenta que la ciencia se nutre de las mentes críticas y las dudas. La base del conocimiento científico está en la duda y en no tomar por ciertos unos hechos o bases sin refutar alternativas, y estar abierto a corregirse ante la equivocación. La ciencia necesita de quien resuelva pero también de quien cuestione.

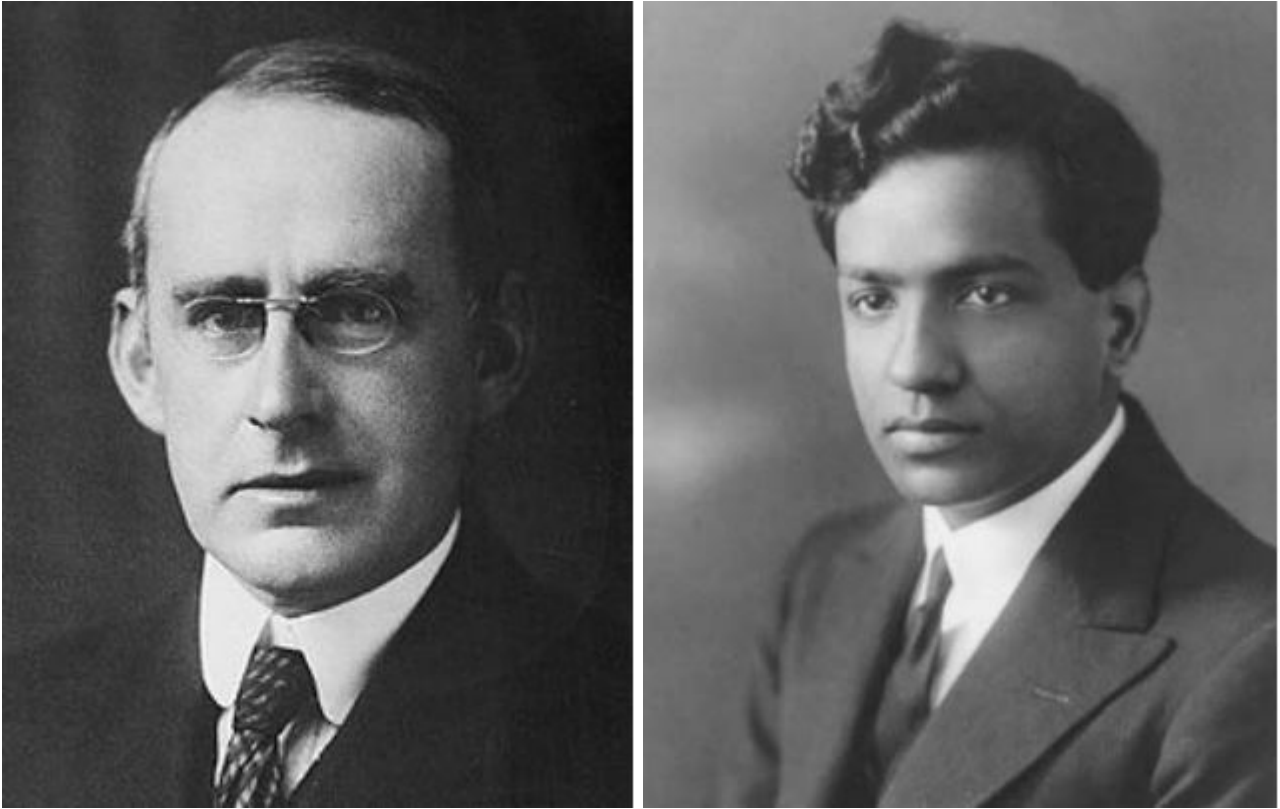


Figura 3.1: Imágenes del astrofísico inglés Eddington (1882-1944)-Library of Congress- (izquierda) y astrofísico indio Chandrasekhar (1910-1995) a principios de los años 30 -American Institute of Physics (derecha)

3.3. Cálculo relativista

En este apartado se seguirá un cálculo relativista para el estudio de las enanas blancas, y así poder llegar al límite de Chandrasekhar.

En estos cuerpos celestes las reacciones termonucleares ocurren muy lentamente, por ello son mucho menos calientes de lo que uno esperaría por su color blanco. Como se ha adelantado, el componente principal de las enanas blancas es el helio, carbono y oxígeno. Una típica enana blanca de la masa del Sol, tendría un tamaño aproximadamente igual al de la Tierra. Son objetos muy densos.

Como se expone en la sección previa, el problema de las enanas blancas fue tratado casi en completa generalidad por Chandrasekhar entre 1931-1935.

Un modelo simple e idealizado de las enanas blancas consiste en una masa $M \sim 10^{33}$ g de helio, en una esfera de densidad $\rho \sim 10^7$ g cm⁻³, a una temperatura central $T \sim 10^7$ K. Esta temperatura corresponde una energía térmica promedio por partícula de 10^3 eV, la cual es mucho mayor que la energía de ionización de los átomos presentes, por tanto, igual que ocurría con las estrellas de la Secuencia Principal, podemos tratar con átomos completamente ionizados.

Se supondrá que los constituyentes microscópicos de la enana blanca, son, por tanto: N electrones, cada uno de masa m , y, teniendo en cuenta que los isótopos más estables de helio, carbono y oxígeno, tienen el mismo número de protones que de neutrones, aproximadamente el ratio entre electrones y nucleones será 2. Por tanto, la masa de una estrella con N electrones vendrá dada por:

$$M \simeq N(m + 2m_p) \simeq 2Nm_p \quad (3.3)$$

Y la densidad de electrones:

$$n = \frac{N}{V} \simeq \frac{M/2m_p}{M/\rho} = \frac{\rho}{2m_p} \quad (3.4)$$

Un valor típico para la densidad de electrones es: $\sim 10^{30}$ electrones por cm³. Se puede obtener entonces, el valor del momento de Fermi ecuación (1.84), el cuál nos permitirá determinar si el gas se debe tratar relativistamente o no, este momento para una degeneración $g = 2$, es:

$$p_F = \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} h = 10^{-17} \text{g cm s}^{-1} \quad (3.5)$$

este valor es comparable con el momento característico del electrón. Esto significa que la energía de Fermi μ_o (10^6 eV) (1.79, para la densidad vista), será comparable con la energía en reposo del electrón mc^2 . Y además, el gas de electrones estará casi en completa degeneración, ya que, $T_F = \mu_o/k = 10^{10}$ K es mucho mayor que la temperatura del gas ($T/T_F = 10^{-3}$). Se puede concluir, por tanto, que:

- La dinámica de los electrones en este problema es relativista.
- El gas de electrones está en (casi) completa degeneración.

Hay que tener en cuenta que los núcleos no contribuyen significativamente a la dinámica del problema como los electrones; en primera aproximación, por tanto, se puede ignorar su presencia en el sistema (recordemos que se está viendo un modelo relativamente simple). En cualquier caso el número de electrones será mucho mayor que el de núcleos.

Por ese mismo motivo se puede despreciar también la interacción con la radiación, por tanto estaremos considerando exclusivamente un gas de electrones.

Además, supondremos que este gas de electrones está uniformemente repartido por el cuerpo de la estrella, esperando que a pesar de despreciar la variación espacial se obtenga un resultado correcto, al menos cualitativamente, lo cual ocurrirá.

Por tanto, se estudiarán las propiedades del *estado fundamental* de un gas de Fermi *degenerado* compuesto por N electrones *relativistas* ($g=2$).

Recordando la ecuación (1.83):

$$N = \int_0^{p_F} \frac{8\pi V p^2}{h^3} dp = \frac{8\pi V}{3h^3} p_F^3 \quad (3.6)$$

obteniéndose entonces un momento de Fermi, que ya se obtuvo en (1.84):

$$p_F = \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3} h \quad (3.7)$$

En el caso relativista, la relación energía momento es:

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - mc^2 \quad (3.8)$$

Y la velocidad de la partícula, teniendo en cuenta el teorema de las fuerzas vivas:

$$u \equiv \frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{p/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} \quad (3.9)$$

Es necesario recordar ahora la ecuación (1.36), para la estadística de Fermi-Dirac:

$$\bar{p}V = kT \ln Q_{FD} = kT \sum_r \ln \left[1 + e^{-(\beta\varepsilon_r + \alpha)} \right] \quad (3.10)$$

En un volumen V grande, los niveles de energía estarán tan próximos que el sumatorio se debe reemplazar por una integral, en el espacio de momentos:¹

$$\bar{p}V = kT \int_0^\infty \ln \left[1 + e^{-(\beta\varepsilon_r + \alpha)} \right] \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp \quad (3.11)$$

Esta integral se puede resolver por partes, el resultado es:

$$\bar{p} = \frac{4\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{p \frac{d\varepsilon}{dp}}{1 + e^{-(\beta\varepsilon_r + \alpha)}} p^2 dp \quad (3.12)$$

Por otro lado, el número N de electrones que constituyen el sistema, será: (ver (1.75))

$$N = \int_0^\infty f(p) dp = \int_0^\infty nD(p) dp = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2}{1 + e^{-(\beta\varepsilon_r + \alpha)}} dp \quad (3.13)$$

de la comparación de estas dos ecuaciones se tiene que la presión del gas, que se llamará P_0 es:

$$P_0 = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \left\langle p \frac{d\varepsilon}{dp} \right\rangle = \frac{1}{3} n \langle pu \rangle_0 \quad (3.14)$$

¹No confundir el momento lineal, p , con la presión \bar{p}

siendo n la densidad de partículas, y u la velocidad de una sola partícula. Aplicando esta ecuación al caso relativista que se está tratando, se tiene:

$$P_0 = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{(p^2/m)}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} p^2 dp \quad (3.15)$$

Se introduce ahora una variable adimensional θ , tal que:

$$p = mc \sinh\theta \quad (3.16)$$

Por tanto, las ecuaciones (3.6) y (3.14), quedan:

$$N = \frac{8\pi V m^3 c^3}{3h^3} \sinh^3\theta \quad (3.17)$$

y

$$P_0 = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} \int_0^{\theta_F} \sinh^4\theta d\theta = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} A(x) \quad (3.18)$$

con

$$A(x) = x(x^2 + 1)^{1/2}(2x^2 - 3) + 3\sinh^{-1}x \quad (3.19)$$

siendo

$$x = \sinh\theta_F = \frac{p_F}{mc} = \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{h}{mc}\right) \quad (3.20)$$

donde se ha utilizado el valor del momento de Fermi visto en (1.84)

Se ha representado la función $A(x)$ en el programa Mathematica, entre los valores $x = 0$ y $x = 3$:

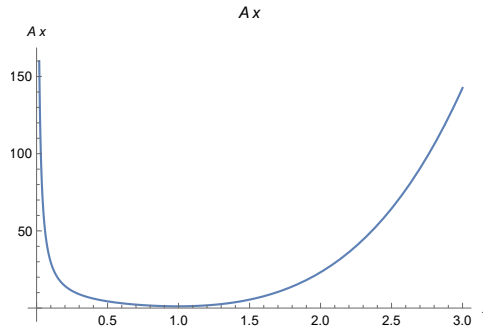


Figura 3.2: Representación de la función $A(x)$ entre 0 y 3 realizada por nosotros con el programa Mathematica

como se aprecia, las zonas $x < 1$ y $x > 1$ presentan un comportamiento muy diferenciado, los resultados asintóticos para $x \ll 1$ y para $x \gg 1$ serán útiles, y son: (ver Kothari y Singh, 1942)

$$\text{Con } x \ll 1 \Rightarrow A(x) = \frac{8}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^9 + \frac{1}{3}x^9 - \frac{5}{22} + \dots \quad (3.21)$$

$$\text{Con } x \gg 1 \Rightarrow A(x) = 2x^4 - 2x^2 + 3(\ln 2x - \frac{7}{12}) + \frac{5}{4}x^{-2} + \dots \quad (3.22)$$

3.4. Configuración de equilibrio

Como bien indica el título de la sección, se estudiará la configuración de equilibrio en este modelo.

En ausencia de gravedad, sería necesaria la presencia de “paredes externas” para contener el gas de electrones a la densidad dada, n . El gas ejercería una presión $P_0(n)$ sobre las paredes, dependiente de la densidad, y cualquier expansión o compresión del gas requiere la aplicación de un trabajo.

Asumiendo una disposición esférica, un cambio adiabático en el volumen V causará un cambio en la energía del gas:

$$dE_0 = -P_0(n)dV = -P_0(R)4\pi R^2 dR \quad (3.23)$$

En presencia de gravedad, no son necesarias las paredes externas, puesto que la propia gravedad contiene el gas. Sin embargo, el cambio en energía cinética del gas, como resultado en un cambio en el tamaño de la esfera, sigue siendo el que describe la fórmula (3.23).

En este modelo simple no se está teniendo en cuenta la no uniformidad del sistema, aun así, la ecuación (3.23)

sigue sin dar el cambio neto en la energía del sistema (si ese fuera el caso, el sistema se expandiría indefinidamente hasta que $n \rightarrow 0$ y $P_0(n) \rightarrow 0$). Realmente también hay un cambio en la energía potencial del sistema:

$$dE_g = \left(\frac{dE_g}{dR} \right) dR = \alpha \frac{GM^2}{R^2} dR \quad (3.24)$$

donde M es la masa total del gas, G es la constante de gravitación universal, α es un número (del orden de la unidad) que está relacionado con la variación espacial de n dentro de la esfera. (Por ejemplo, en un sistema con una sola partícula de masa m , sería $\alpha = m/M$).

Como se está estudiando el sistema en equilibrio, el cambio neto en la energía total para un cambio de tamaño infinitesimal, debe ser cero:

$$d(E_0 + E_g) = 0 \Rightarrow \left(-P_0(R)4\pi R^2 + \alpha \frac{GM^2}{R^2} \right) dR = 0 \quad (3.25)$$

Es decir, se tiene un valor de la presión:

$$P_0(R) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4} \quad (3.26)$$

Por otro lado, se había encontrado un valor para P_0 en (3.18), donde el parámetro x viene dado por:

$$x = \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{h}{mc} \right) = \left(\frac{9N}{32\pi^2} \right)^{1/3} \frac{h}{mcR} \quad (3.27)$$

aquí se ha tenido en cuenta que $n = N/V$, para un volumen esférico.

Recordando ahora una de las hipótesis iniciales, en concreto (3.3), se tiene:

$$x = \left(\frac{9M}{64m_p\pi^2} \right)^{1/3} \frac{h}{mcR} = \left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{mcR} \quad (3.28)$$

Por tanto, igualando las ecuaciones (3.18) y (3.26) para $A(x)$ siendo x el valor en (3.28), el resultado es:

$$A \left(\left(\frac{9\pi M}{8m_p} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{mcR} \right) = \frac{3\alpha h^3}{4\pi^2 m^4 c^5} \frac{GM^2}{R^4} \quad (3.29)$$

$$= 6\pi\alpha \left(\frac{\hbar}{mcR} \right)^3 \frac{GM^2}{Rmc^2} \quad (3.30)$$

donde $A(x)$ está dado en (3.21) y (3.22).

En la ecuación (3.30) aparece una correspondencia uno a uno entre las masas M y los radios R de las enanas blancas. Se conoce por tanto, como *la relación masa-radio* para estas estrellas.

En la relación aparecen diversos parámetros, como la masa de la estrella en términos de la masa del protón, la longitud de onda de Compton (h/mc), o la masa en reposo del electrón, que son interesantes en el sentido en que relacionan diversas ramas de la física como la mecánica cuántica, la relatividad especial y la gravitación.

3.5. El límite de Chandrasekhar.

El título de la sección ya adelanta el resultado que se va a obtener. A partir de la ecuación (3.30), no se puede expresar el radio de la estrella como una función explícita de la masa, excepto en dos casos extremos (valores asintóticos de $A(x)$).

Como $M \sim 10^{33}\text{g}$, $m_p \sim 10^{-24}\text{g}$ y $\hbar/mc \sim 10^{-11}\text{cm}$, x será del orden de la unidad cuando $R \sim 10^8\text{cm}$. Por tanto, los dos casos extremos se pueden escribir como:

- $R \gg 10^8\text{cm}$, implica $x \ll 1$ y por tanto, $A(x) \simeq \frac{8}{5}x^5$, con el resultado:

$$R \simeq \frac{3(9\pi)^{2/3} \hbar^2 M^{-1/3}}{40\alpha Gmm_p^{5/3}} \propto M^{-1/3} \quad (3.31)$$

- $R \ll 10^8\text{cm}$, implica $x \gg 1$ y por tanto, $A(x) \simeq 2x^4 - 2x^2$, con el resultado:

$$R \simeq \frac{(9\pi)^{1/3} \hbar}{2 mc} \left(\frac{M}{m_p} \right)^{1/3} \left\{ 1 - \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2/3} \right\}^{1/2} \quad (3.32)$$

donde:

$$M_0 = \frac{9}{64} \left(\frac{3\pi}{\alpha^3} \right)^{1/3} \frac{(\hbar c/G)^{3/2}}{m_p^2} \quad (3.33)$$

Estos resultados son claves para entender el fundamento de las enanas blancas. Se encuentra que cuanto mayor es la masa de la estrella menor es su tamaño (al contrario que en las estrellas de la Secuencia Principal).

Además, existe una masa M_0 límite, que corresponde a la desaparición de la estrella. Para $M > M_0$ la *relación masa-radio* no presenta ninguna solución real. Por tanto, se concluye, que las enanas blancas, en el equilibrio, deben tener una masa menor que M_0 . Esto es un resultado fuertemente respaldado por la observación, el límite correcto se conoce como *el límite de Chandrasekhar*.

La interpretación física para la existencia de este límite es que para una masa que lo exceda, la presión del gas de electrones en el estado fundamental, o presión de degeneración, (debida al Principio de Exclusión de Pauli), no sería suficiente como para contener la contracción de la estrella debida al colapso gravitatorio.

Investigaciones más detalladas de Chandrasekhar le llevaron a encontrar:

$$M_0 = \frac{5,75}{\mu_e^2} M_\odot \quad (3.34)$$

siendo M_\odot , la masa del sol ($\sim 2 \times 10^{33}$ g), y μ_e un número que representa el grado de ionización de los átomos en el gas. Por definición $\mu_e = M/Nm_H$, en la mayoría de casos $\mu_e \simeq 2$, y por tanto: $M_0 \simeq 1,44M_\odot$.

Este es el resultado de representar la relación teórica entre las masas y el radio de las enanas blancas.

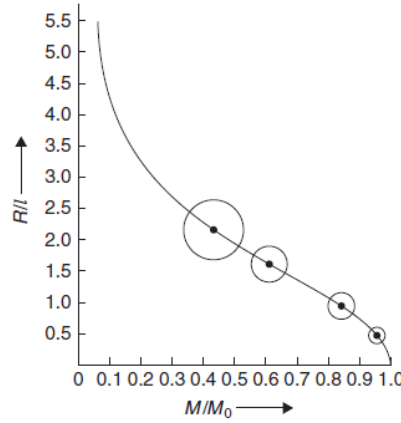


Figura 3.3: Relación masa radio para enanas blancas, después de Chandrasekhar (1939). Las masas están expresadas en términos de la masa límite M_0 y los radios en términos de una longitud característica l , dada por $7,71\mu_e^{-1} \times 10^8 \text{ cm} \simeq 3,86 \times 10^8 \text{ cm}$. Crédito de imagen: Statistical Mechanics, Pathria. Beale

3.6. Ecuaciones de estado

Resulta interesante encontrar las ecuaciones de estado para la enana blanca, teniendo en cuenta que se trata de un gas degenerado de electrones relativistas.

La energía interna U , vendrá dada por:

$$U = \int_0^{\mu_0} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.35)$$

donde $f(\varepsilon)$ se definió en (1.74), y se interpretaba como número medio de electrones que en el sistema de volumen V tiene una energía comprendida entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$, y μ_0 es la energía de Fermi. Para un sistema degenerado, gas de Fermi ($T = 0K$).

$$U = \int_0^{\mu_0} \frac{8\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon \Rightarrow U = \frac{8\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3} \frac{\varepsilon^{5/2}}{5/2} \quad (3.36)$$

Por otro lado, el número de ocupación viene dado por:

$$N = \int_0^{\mu_0} f(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\mu_0} \frac{8\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \Rightarrow N = \frac{8\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3} \frac{\varepsilon^{3/2}}{3/2} \quad (3.37)$$

de la comparación de ambas se obtiene el valor de la energía interna:

$$U = \frac{3}{5} N \mu_0 \quad (3.38)$$

Además, recordemos la función de estado vista para un gas relativista. Se encontró en (1.43)

$$P = \frac{1}{3} \frac{U}{V} \quad (3.39)$$

Una formulación más detallada de la composición de la estrella (átomos de H o moléculas de H_2) vendrá dada a partir del equilibrio de ionización asociado con la reacción $p + e \rightleftharpoons H$. En el equilibrio se cumplirá:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H, \quad N_p = N_e \quad (3.40)$$

donde $\mu_{p,e}$ son los valores del potencial químico para protones y electrones (que en un sistema termodinámico es el cambio de energía que experimentaría el sistema si fuese introducida en éste una partícula adicional). Estos potenciales químicos vienen dados por la ecuación de Saha o Saha–Langmuir, que no se demostrará:

$$\frac{\mu}{kT} = \ln \frac{N}{V} - \frac{3}{2} \ln \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} - \ln \xi(T) \quad (3.41)$$

donde, para gases ideales $\xi(T)$ es la función de partición interna que está multiplicada por el correspondiente factor de degeneración de espín $g_p = g_e = 2$ y $kT \ln \xi_H \sim |\varepsilon_0|$, donde $\varepsilon_0 = -13,6\text{eV}$, es la energía de ionización del átomo de hidrógeno.

Las ecuaciones (3.40) y (3.41) constituyen la fórmula de Saha para el ratio de ionización del gas de Hidrógeno. Este ratio crece con la temperatura, decrece con la densidad e iguala 1/2 para:

$$\log \frac{n}{T^{3/2}} = 22 - \frac{6,9 \times 10^4}{T} \quad (3.42)$$

en unidades del SI.

La reacción $2H \rightleftharpoons H_2$, se trata de la misma forma, teniendo en cuenta que H_2 aparece solo en los conjuntos más fríos y menos densos, en los primeros estadios de la formación de la estrella.

Para los fotones en la estrella, que son bosones, y por tanto tendrán otro número de ocupación, la ecuación (3.39) sigue siendo válida (se realizó para velocidades ultra relativistas) y la densidad de energía será:

$$u_\gamma = \frac{U_\gamma}{V} = \frac{4}{c} \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2} \quad (3.43)$$

normalmente es despreciable en comparación con la de la materia, dada por (3.38) para $kT \ll \mu_0$. Sin embargo, a temperaturas muy altas en estrellas muy masivas y supernovas, la presión de radiación es esencial por su crecimiento con T^4 .

3.7. El posible destino del Sol

Una foto obtenida recientemente por la NASA, ESA y el equipo Hubble Heritage muestra un estrella moribunda a 4.600 años luz de la Tierra, en la dirección de la constelación de Cygnus.

En la foto se puede observar la nebulosa Kohoutek 4-55 cuyo nombre es en honor al astrónomo checo que la descubrió.

El ejemplo es muy interesante, puesto que en el centro de esta nebulosa que desprende la estrella en sus últimos años de vida, está una estrella de tamaño similar a nuestro Sol. Esta imagen, permite, por tanto, anticipar el destino de la estrella de nuestro sistema solar.

Cuando las reacciones nucleares cesan, al final de la vida de gigante roja, la estrella comienza a expulsar de forma irregular sus capas externas al espacio, conservando finalmente el núcleo, muy caliente en principio y emitiendo enormes cantidades de luz ultravioleta.

Este es el comportamiento que se espera que siga el Sol dentro de 5000 millones de años, quien primero se desprenderá de sus capas externas, dejando detrás al descubierto su núcleo, muy caliente. Tras esto, este núcleo se enfriará poco a poco hasta convertirse en enana blanca.



Figura 3.4: Foto tomada por la NASA, ESA y el equipo Hubble Heritage (STScI/AURA). Reconocimientos: R. Sahai and J. Trauger (Jet Propulsion Laboratory)

Esta imagen fue tomada en el 4 de Mayo de 2009 por el Telescopio Espacial Hubble con la Cámara Planetaria y de Gran Angular 2 (WFPC2). Consiste en una composición de tres observaciones con diferentes longitudes de onda preparadas para observar las emisiones de distintos tipos de átomos.

El rojo se corresponde con las emisiones del nitrógeno, el verde con las del hidrógeno y el azul con las del oxígeno.

3.8. Más ejemplos de enanas blancas



Figura 3.5: La Nebulosa del Ojo de Gato (NGC 6543) se observa en esta vista detalla obtenida por el Telescopio Espacial Hubble de la NASA. La imagen de la Cámara Avanzada del Hubble (ACS) muestra un patrón de ojo con once o más anillos concéntricos, o cáscaras alrededor del “Ojo de Gato”. Las observaciones sugieren que la estrella eyectó su masa en series de pulsos en intervalos de 1500 años. En el centro permanece el núcleo desnudo de la estrella inicial: una enana blanca. Crédito: NASA, ESA, HEIC, y The Hubble Heritage Team (STScI/AURA)

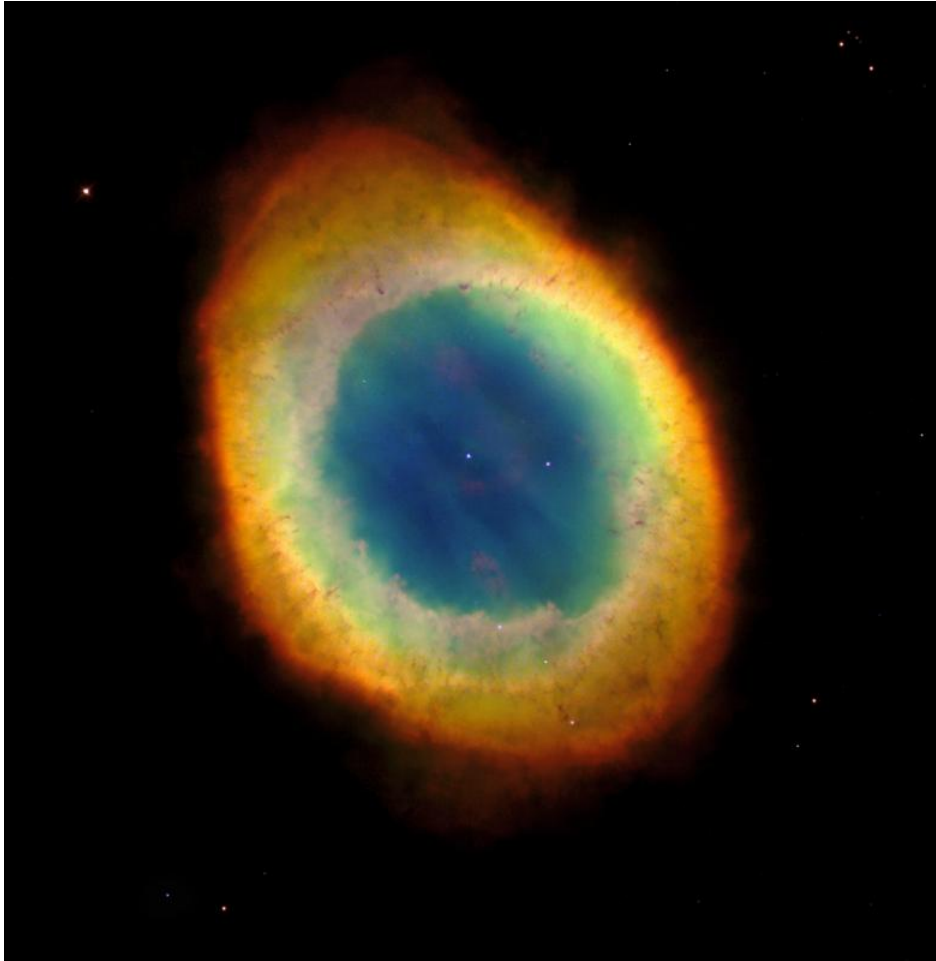


Figura 3.6: El Telescopio Espacial Hubble ha capturado esta imagen de una de las más famosas nebulosas planetarias: La Nebulosa del Anillo (M57). Es una imagen de Octubre, 1998, en la que se ve una estrella que murió hace miles y miles de años. En la imagen se observan alargadas nubes oscuras de material incluidas en el borde de la nebulosa, y la estrella central moribunda (una enana blanca) flotando en un halo azul de gas caliente. La nebulosa tiene un diámetro de alrededor de 1 año luz y está localizada a 2000 años luz de la Tierra en dirección de la constelación Lyra. Los colores son aproximadamente ciertos. Crédito: NASA, ESA, HEIC, y The Hubble Heritage Team (STScI/AURA)

3.9. Estrellas con masa superior al límite de Chandrasekhar

Hemos encontrado que la estrella enana blanca no puede tener una masa superior a la masa límite de Chandrasekhar, pero ¿cómo es posible que la enana blanca no pueda tener más masa?. Las enanas blancas y las gigantes rojas muchas veces se encuentran por pares, entonces ¿qué impide que el material que eyecta una gigante roja compañera caiga indefinidamente sobre la enana blanca y acrecente su masa?

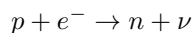
Como la masa de una estrella de electrones degenerados tiene un límite, si este límite es superado por la estrella, o bien la estrella eyecta al vacío la masa sobrante, formando una nebulosa planetaria o, bien, cambia de naturaleza: sus electrones se unen a los protones para formar neutrones y la estrella pasa a ser una estrella de neutrones, como bien se indicó en el capítulo anterior.

Capítulo 4

Más allá de las enanas blancas

4.1. Introducción

Como se ha estudiado a lo largo del capítulo anterior, las estrellas con masa superior al límite de Chandrasekhar no terminan su vida como enanas blancas. Esto es porque tienen suficiente masa como para vencer la presión de degeneración, el colapso gravitatorio llevaría a la neutronización de la estrella, es decir, las partículas elementales en la estrella se combinarían de la siguiente manera:



formando neutrones y desprendiendo un neutrino. Se pasaría entonces a tener una estrella de neutrones. Si la estrella tiene más masa que el límite de Oppenheimer-Volkov (como se explica en la sección 2.5.1), alrededor de $2\text{-}3 M_{\odot}$, entonces su vida no terminaría como estrella de neutrones, si no que el colapso gravitatorio es irreversible y la estrella termina su vida como agujero negro.

El estudio de los agujeros negros se sale del nivel de este trabajo, sin embargo, en este capítulo se pretende introducir, de una manera relativamente sencilla, el estudio de las estrellas de neutrones. En este capítulo, además, se hablará de las ondas gravitacionales brevemente, y, a la luz de los recientes descubrimientos de este año sobre ondas gravitacionales, nos parece muy interesante hablar sobre dos misiones fundamentales en estas detecciones. Además, el estudio de las ondas gravitacionales está directamente relacionado con cuerpos muy masivos como las estrellas de neutrones y los agujeros negros, englobando así, los dos objetos celestes aquí introducidos.

4.2. Estrellas de neutrones

Sobre un acercamiento formal a las estrellas de neutrones, se debe tener en cuenta que los neutrones son también fermiones y también se cumple para ellos el Principio de Exclusión de Pauli. Resulta interesante, en esta introducción, realizar una serie de grandes simplificaciones para dar algunos datos curiosos sobre estas estrellas.

Ingenuamente, entonces, al tener que los neutrones son fermiones, podríamos aplicar las ecuaciones vistas para las enanas blancas, y supondríamos que la masa límite (que solo dependía de constantes universales), sería la misma. Sin embargo, estas suposiciones no son adecuadas, puesto que se han de tener en cuenta los efectos de curvatura espacial y las interacciones fuertes entre neutrones, que no serán despreciables. No es, pues, un trabajo fácil.

Existe, efectivamente, un límite de masa para las estrellas de neutrones, denominado límite de Oppenheimer-Volkov, que es del orden de $2M_{\odot}$. La densidad en las estrellas de neutrones es del orden de $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ y el radio de unos 10 km. La velocidad de escape es de alrededor de $2,8 \times 10^{10} \text{ cm/s}$, un valor ligeramente inferior a la velocidad de la luz.

Desde el punto de vista observacional, las estrellas de neutrones se identifican con los púlsares. El más notable es el del Cangrejo, situado en el lugar en el que astrónomos chinos descubrieron en 1054 una supernova (para agrado de los científicos, encajando con la teoría del final de vida de una estrella más masiva que el Sol). Este púlsar posee una emisión de radio muy periódica, con un pulso cada 0.033 segundos.

Esta emisión de luz está asociada al hecho de que el campo magnético no es paralelo al eje de rotación de la estrella.

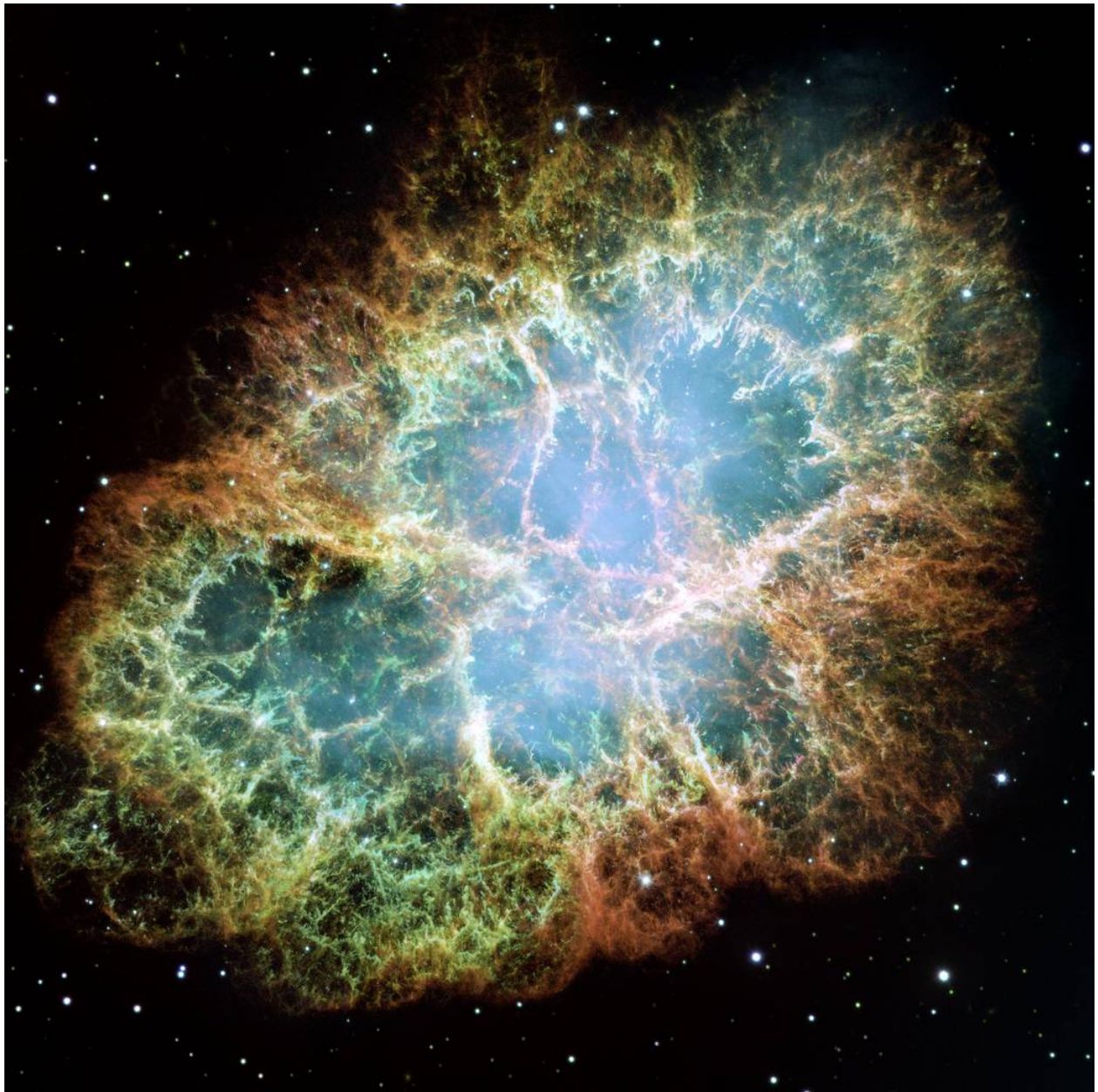


Figura 4.1: La nebulosa del Cangrejo. Es el resultado de una Supernova que tuvo lugar en 1054 y se observó desde la Tierra. En el centro de la nebulosa se encuentra un púlsar: una estrella de neutrones tan masiva como el Sol, pero del tamaño de una ciudad pequeña. Este púlsar del Cangrejo rota 30 veces por segundo. Crédito: NASA, ESA, J. Hester, A. Loll (ASU)

4.3. Primeras observaciones

Durante años, la existencia de las estrellas de neutrones fue declarada una cuestión abierta, ya que incluso el propio concepto del neutrón era prácticamente nuevo, puesto que esta partícula fundamental había sido descubierta apenas años antes que un artículo publicado en 1934 acerca de las supernovas, donde se teorizaba acerca de estas estrellas como “estrellas muy densas y de radio muy pequeño”.

En consecuencia, la idea de su existencia fue tomada en consideración solo por unos pocos astrónomos y físicos. El principal problema era de orden práctico: era difícil probar la existencia de las estrellas de neutrones, quienes debían emitir una cierta cantidad de luz desde su superficie, pero dado su insignificante tamaño, no la suficiente como para hacer posible la observación a distancias astronómicas.

No sería hasta los años sesenta cuando la observación de ciertas señales que se salían de lo común, fue posible gracias a radiotelescopios y telescopios de rayos X.

Un grupo de investigadores en Cambridge, bajo la dirección del astrónomo Antony Hewish, construyeron un radiotelescopio, que, bajo el uso de Jocelyn Bell, en la observación de estrellas más allá del Sistema Solar, encontró una serie de pulsos, igualmente espaciados entre sí, y con una separación de 1,3373011 segundos, un

aspecto que no parecía tener que ver con interferencias humanas. En principio supusieron que podía deberse a estrellas vibrantes, pero esta señal era extraña tanto por su precisión exacta en la separación entre los pulsos, como por la alta frecuencia con la que se emitían. El periodo de la más rápida de las estrellas variables conocidas era miles de veces mayor que el mostrado en sus registros.

Esto les llevó incluso a especular que podían ser fruto de una inteligencia extraterrestre, y en un primer momento, Hewish y Bell, se referían a estas señales como “LGMs” (Little Green Men). Hasta que una segunda observación, en la constelación de Casiopea, de una señal similar, les hizo refutar tal especulación. Se consideran los primeros registros de estrellas de neutrones.

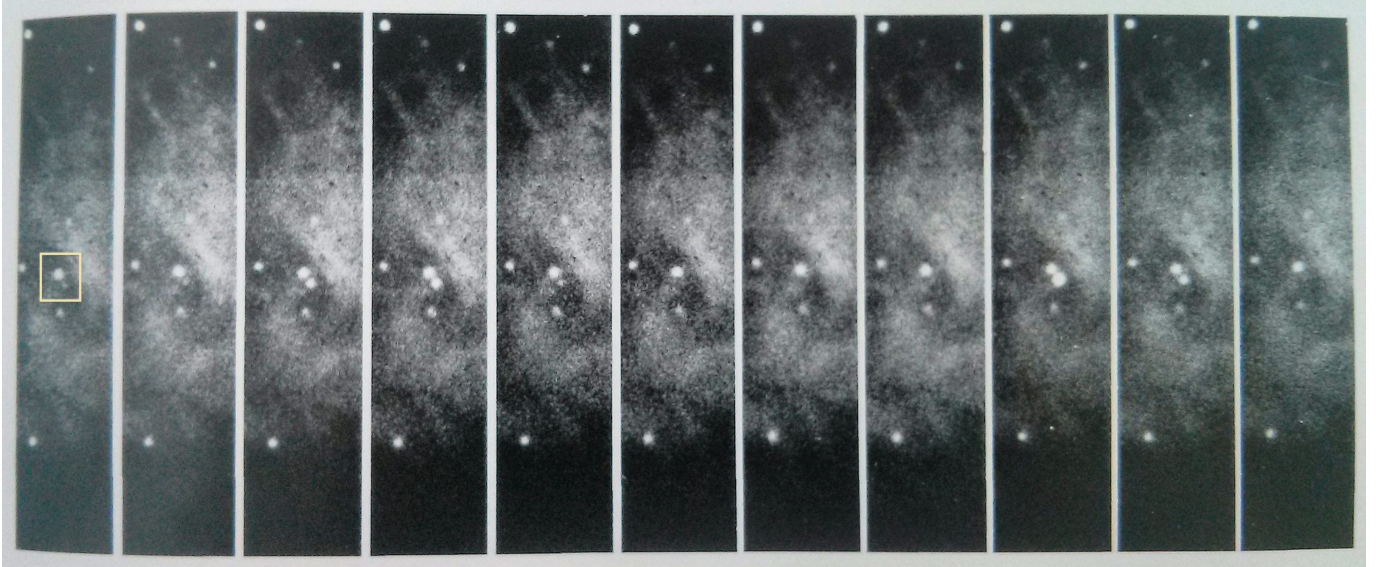


Figura 4.2: Secuencia de imágenes ópticas en las que los restos estelares en el corazón de la nebulosa del Cangrejo aparecen y desaparecen a razón de treinta veces por segundo (estrella inferior derecha dentro del recuadro). La emisión del púlsar incluye las longitudes de onda de radio y del visible. Crédito: “Viaje a través del Universo”. Estrellas II. Time Life

4.4. Una dinamo estelar

La explicación de esta emisión de los pulsos la dio Thomas Gold, de la Universidad de Cornell. Propuso que un púlsar consistiría en una estrella de neutrones que emitiría un estrecho haz de energía en forma de ondas de radio como consecuencia de su rápido movimiento de rotación.

La vertiginosa rotación de estas estrellas está sujeta a la ley de conservación del momento angular; la estrella en el colapso desde la fase de gigante roja a estrella de neutrones, también aumenta su velocidad de rotación al reducir drásticamente su tamaño.

El mecanismo por el cual se genera la emisión púlsar es más difícil de explicar, y hoy en día todavía no está del todo establecido. La idea de Gold, es que la rápida rotación del púlsar actuaría como una gigantesca dinamo, acelerando las partículas cargadas en su superficie hasta casi la velocidad de la luz, y enfocándolas en estrechos rayos a lo largo de sus polos magnéticos. A medida que estas partículas describen espirales en el seno de estos haces, su energía se convertiría en diferentes formas de radiación electromagnética. Si los polos magnéticos de la estrella no coincidieran con el eje de rotación, los rayos barrerían el espacio en círculos y por eso se observarían pulsos en la Tierra, ya que sólo se detectarían las emisiones cuando el eje de los conos de radiación apuntase a ésta.

4.5. El radio de una estrella de neutrones

Podemos tratar en esta sección las propiedades básicas de la estrella de neutrones, dentro del nivel requerido. Con la suposición de que la masa será solo ligeramente superior a M_{\odot} , y su radio alrededor de 10 km. Podemos estimar a partir de (1.79) un valor para μ_0 (energía de Fermi) de ~ 100 MeV. Y aunque la temperatura interna sea aproximadamente $\sim 10^8$ eV, kT/μ_0 será del orden de 10^{-4} ; y por tanto, podemos decir de nuevo, como en las estrellas enanas blancas, que la densidad de neutrones es tan alta, que su temperatura se debe tratar como si fuese cero.

En este caso el gas es no relativista, puesto que $m_n c^2 \simeq 900$ MeV $\gg \mu_0$.

La energía interna, vendrá dada por una ecuación que fue encontrada para las enanas blancas pero que es válida en este caso, y para todas las partículas fermionicas. (3.38).

La ecuación de estado que da la presión en términos de la energía interna, sin embargo, es diferente que para la enana blanca, en este caso, es no relativista, y fue encontrada en el primer capítulo, ecuación (1.40):

$$P = \frac{2}{3} \frac{U}{V} \quad (4.1)$$

Para determinar el radio de la estrella de neutrones a partir de su masa, debemos tener en cuenta que está en *equilibrio gravitatorio*, condición que se ha ido aplicando a lo largo de todo el trabajo. Como la temperatura es despreciable, esta condición requiere que la energía total $E = U + E_G$, la suma de la energía interna y la energía autogravitatoria, sea un mínimo en función de la densidad de partículas $n(r)$ en cada punto, bajo la ligadura de que la masa total de la estrella sea $M = \int 4\pi r^2 m_n n(r) dr$.

A partir de (3.38), siendo conocido el valor de μ_0 (1.79), se tiene:

$$U = \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10m_n} \int 4\pi r^2 dr (n(r))^{5/3}$$

por otro lado, la energía gravitatoria vendrá dada por:

$$E_G = -\frac{G}{2} \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \frac{\rho(r)\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

en este modelo, tomaremos el valor de la densidad en la estrella n , como constante, para una esfera homogénea, entonces, las ecuaciones previas quedan:

$$U = \frac{3^{7/3} \pi^{2/3} \hbar^2 M^{5/3}}{2^{7/3} 5 m_n^{8/3}} \frac{1}{R^2} \quad (4.2)$$

$$E_G = -\int \frac{1}{3} G (4\pi \rho)^2 r^4 dr = -\frac{3GM^2}{5R} \quad (4.3)$$

esto último es la autoenergía gravitatoria, consultar *Lecciones de física. Mecánica 3* de M.R. Ortega. Pág. 799. El mínimo de $E = U + E_G$ se encuentra para:

$$E_G = -2U; \quad E = -U \quad (4.4)$$

A partir de este resultado se puede obtener un radio para este modelo en *equilibrio gravitatorio*

$$R = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{G m_n^{8/3} M^{1/3}} \quad (4.5)$$

lo cual es un resultado interesante: cuanto más masiva es la estrella de neutrones, menor es su radio. Una estimación numérica para $M = M_\odot$ provee un valor para el radio de $R = 12$ km, $n = 0,15 \text{ fm}^{-3}$, $\mu_0 = 60$ MeV, que son valores que confirman la hipótesis en la que se basa este modelo.

4.6. Estabilidad de las estrellas de neutrones

De una manera simplificada se puede estudiar la velocidad de escape de una estrella de neutrones de masa M :

$$\left(\frac{2GM}{R} \right)^{1/2} \simeq 1,5 \times 10^8 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{2/3} \text{ m/s} \quad (4.6)$$

que es mayor que la velocidad de Fermi (asociada al momento de Fermi (1.84)).

Esta velocidad alcanza el valor de la velocidad de la luz, c , para $M = 3M_\odot$, por tanto, ni los propios fotones podrían escapar para $M > 3M_\odot$. Se dice entonces, que existe una masa máxima para las estrellas de neutrones, por encima de la cual tales objetos pasan a ser agujeros negros, donde la luz es atrapada por la gravedad.

4.6.1. Decaimiento beta

Se sabe que un neutrón decae como:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (4.7)$$

tras un tiempo de vida medio de ~ 15 min. Entonces, ¿cómo puede ser la estrella de neutrones estable ante ese decaimiento beta?.

Realmente los protones y neutrones generados en la reacción (4.7), pueden reaccionar a través de:

$$p + e^- \rightarrow n + \nu \quad (4.8)$$

por tanto se alcanza un régimen estacionario cuando hay N_n neutrones y un número $N_e = N_p$ de protones y electrones. Por otro lado los neutrinos se considera que no reaccionan prácticamente con la materia y son radiados llevando una muy pequeña cantidad de energía. Por tanto, podemos obviarlos y determinar N_e a partir de la ecuación de equilibrio:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e \quad (4.9)$$

Esta igualdad (suponiendo un gas de Fermi degenerado, ultrarrelativista) implica $N_p = N_e$, y $p_F^p = p_F^e$, los momentos de Fermi son iguales. Por tanto, $\mu_0^p \ll \mu_0^e$, las energías de Fermi, son diferentes. Entonces, siendo μ_0^p despreciable, el valor de N_e en esta situación de equilibrio resulta de igualar las energías de Fermi $\mu_0^n = \mu_0^e$, lo cual, en vista de la definición de la energía de Fermi (1.79) y a partir del número de ocupación para un gas de Fermi relativista (a partir de la densidad de estados obtenida en (1.71)). Es decir, utilizando las ecuaciones:

$$\mu_0 = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} \quad (4.10)$$

y

$$N(\varepsilon) = \frac{8\pi V}{3h^3 c^3} \mu_0^3 \quad (4.11)$$

se tiene, a partir de la igualación de las energías de Fermi, $N_e = \left(\frac{m}{m_n} \right)^{3/2} N_n$, y finalmente, teniendo en cuenta (4.11):

$$\frac{N_e}{N_n} = \frac{3\pi^2}{8} \left(\frac{\hbar}{m_n c} \right)^3 \frac{N_n}{V} \quad (4.12)$$

que para una masa $M = M_\odot$ es igual a 2×10^{-3} . Por tanto, un número tan pequeño de electrones y protones es suficiente para prevenir el decaimiento beta de los neutrones.

4.7. Estrellas de neutrones y ondas gravitacionales

Las estrellas de neutrones presentan un gran interés en la obtención de las ondas gravitacionales, que son de gran importancia, ya que añaden la posibilidad de conocer el universo a través de otras vías, no consideradas hasta ahora. Hasta hace unos meses, el conocimiento del espacio exterior procedía de las observaciones de diferentes bandas del espectro electromagnético (ultravioleta (UV), infrarrojo, (IR), rayos X y rayos gamma, ondas de radio o microondas), a partir de ahora se cuenta también con un nuevo espectro, las ondas gravitacionales, que dará acceso a fenómenos y objetos astrofísicos que eran invisibles.

Como se ha mencionado en alguna ocasión, antes se tenían “los ojos” del Universo, y ahora se tienen también “los oídos”.

Las ondas gravitacionales son ondas que viajan a la velocidad de la luz, con energía liberada por fluctuaciones en el espacio-tiempo, según la Teoría de la Relatividad General. Estas ondas gravitacionales, distorsionan la región del Universo que atraviesan a su paso y traen consigo algunos tipos de información que la radiación electromagnética no puede transmitir.

Las estrellas de neutrones, o agujeros negros, al ser cuerpos muy masivos resultan claves para la observación de efectos de la Teoría General de la Relatividad. Esto es porque las ondas gravitatorias predichas tienen una amplitud y unos efectos observables muy débiles. Por eso, se espera encontrar ondas gravitatorias en fenómenos cataclísmicos como la explosión de una supernova, la formación de un agujero negro, el choque de cuerpos masivos como estrellas de neutrones o la coalescencia de agujeros negros, la rotación de una estrella de neutrones inhomogénea, etc.

En esta búsqueda han sido claves varias misiones o proyectos, de las que se destacarán:

4.7.1. Misión LISA

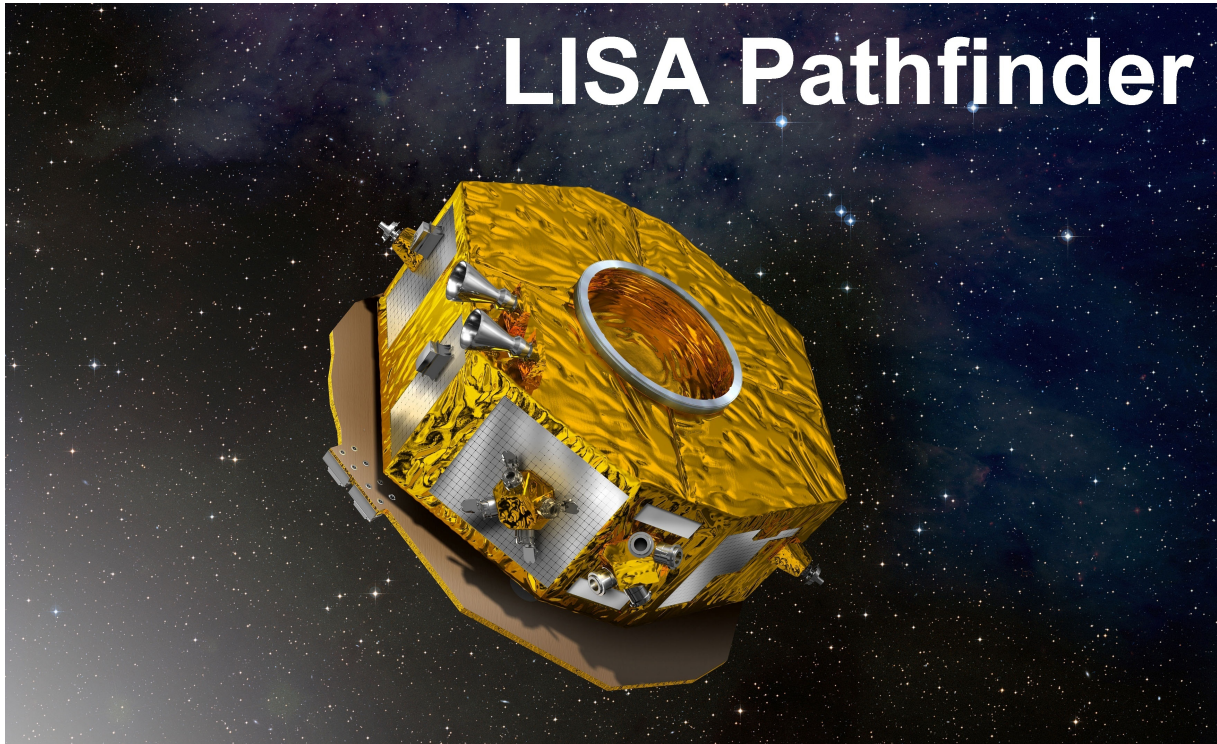


Figura 4.3: LISA pathfinder. Cortesía de César García Marirrodiga, Project Manager de la misión LISA pathfinder

El LISA Pathfinder o SMART-2 (Small Missions for Advanced Research in Technology) es un satélite de la Agencia Espacial Europea destinado a validar las tecnologías que se utilizarán en la futura misión LISA (Laser Interferometer Space Antenna). El objetivo de esta misión LISA es detectar ondas gravitacionales mediante un grupo de 3 satélites aplicando técnicas de interferometría láser que requieren mediciones de alta precisión.

En su interior incluye dos cubos de una aleación de oro y platino, suspendidos en contenedores de vacío y separados por 38 cm. Entre ellos se encuentra un interferómetro en un banco óptico de 20×20 cm.

Está formado por 22 espejos y difractores de rayos que dirigen dos rayos láser a través del banco. Uno de esos rayos se refleja en dos masas en caída libre, mientras el otro sólo se desplaza por el banco óptico. Comparando la distancia de los distintos recorridos de ambos haces se pueden monitorizar con precisión los cambios en la orientación y la separación entre las dos masas de prueba, por acción de las ondas gravitatorias.

A continuación se dispone un texto enviado por César García Marirrodiga, Project Manager de la misión LISA pathfinder, informando personalmente a mi tutor sobre la misión LISA, con un texto obtenido de un artículo de la Physical Review Letters, escrito por él mismo y otros autores:

IMPACT OF THE LISA PATHFINDER RESULT

LISA Pathfinder has demonstrated in its first 55 days of science operations the functionality of a system quite similar to that needed aboard each satellite of a space-based GW (Gravitational Waves) observatory: 15 degree-of-freedom control including two free-falling test masses, a drag-free satellite with cold gas thrusters, electrostatic force actuation, contactless test-mass charge control, and short arm interferometric local displacement and attitude readout, the first of its kind in orbit. All of these subsystems have performed as expected and could be used for LISA. The system has proven to be extremely stable, reliable, and robust, never falling out of the science measurement mode and with continuous, 100 % duty cycle data stretches limited to two weeks only due to maneuvers needed to maintain the L1 orbit.

The performance obtained and the corresponding physical model for the LPF differential acceleration measurement between free-falling test masses, are already at a level that allows implementation of a successful GW observatory in space; both have far-reaching consequences for gravitational experimentation in general. The current LPF noise floor in the mHz band is 4-5 orders of magnitude below the best levels achieved to date by the GOCE geodesy mission [23]. The results from LPF show that sub-femto-g differential accelerometry is possible

far away from the low earth-orbit gravity gradient. The corresponding required reduction of acceleration noise arising from spurious forces is achieved by design, the main features of which are kilogram sized TMs, millimeter gaps, the absence of applied de voltages and discharge wires, and the measurement of relative motion with a high precision interferometer.

The consequences are even more striking for the observation of GWs from space. If transferred to the LISA observatory configuration, the acceleration noise performance already achieved on LISA Pathfinder would allow for an observatory performance very near the original LISA mission goals [2]. Heavier black hole mergers dominated by low-frequency emission, such as $10^7 M_{\odot}$ total mass at redshift $z = 3$, will be visible with a signal-to-noise ratio (SNR) of 1400, compared with 2000 for the LISA reference performance; lighter systems ($10^6 M_{\odot}$) at the same distance will give an SNR of 5000, which is within several percent of the LISA performance. Science from extreme mass-ratio inspirals (binary neutron stars) and coalescing compact binaries in our galaxy will give essentially the same SNR as in LISA. The LISA Pathfinder performance is therefore fully in line with the mission concept put forward in “The Gravitational Universe” [24], which was selected by ESA for the third large mission (L3) of the Cosmic Vision programme. LISA Pathfinder represents a major step forward in demonstrating the proposed measurement concept.

4.7.2. Proyecto LIGO

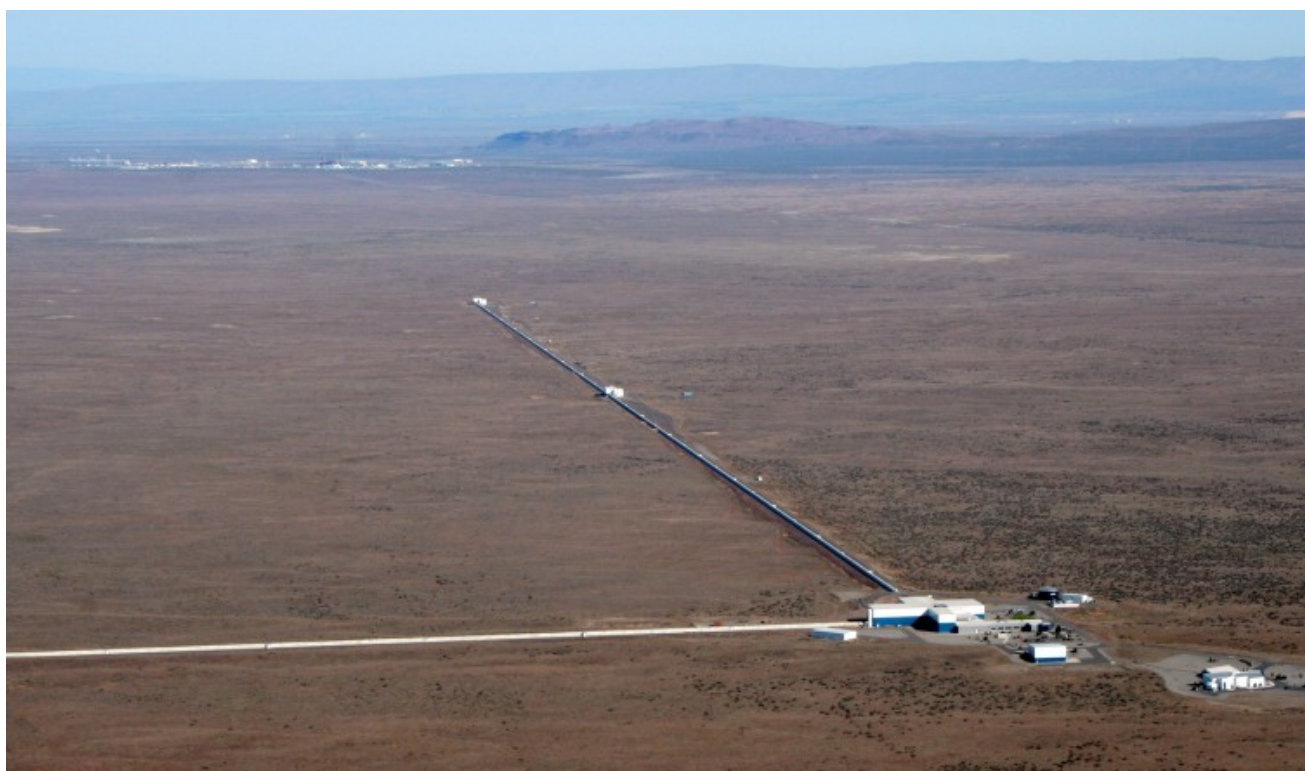


Figura 4.4: Observatorio LIGO Hanford . Crédito: Caltech/MIT/LIGO Laboratory

LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) es un Observatorio de detección de ondas gravitacionales situado en tierra. Este observatorio detectó la primera onda gravitatoria directa el 14 de septiembre de 2015 que se presentó al público el 11 de febrero de 2016.

LIGO pretende detectar directamente las ondas gravitacionales predichas por la Teoría General de la Relatividad de Einstein. Consiste en un detector que usa interferometría láser de varios kilómetros de escala, que medirá las pequeñas variaciones en el espacio tiempo causadas por la incidencia de las ondas gravitacionales causadas en cataclismos cósmicos tales como la colisión de pares de estrellas de neutrones o agujeros negros, o por supernovas.

LIGO consiste en dos interferómetros ampliamente separados, en Estados Unidos. Uno está situado en Hanford, Washington, y el otro en Livingston, Louisiana.

Una explicación simple de esta detección resultaría al considerar que el paso de una onda gravitatoria apreciable deforma el espacio tiempo, es decir, un brazo (de 4 km cada uno) se hará más largo y otro se hará más corto, una variación extremadamente pequeña, pero medible con interferometría láser.

Detecciones en LIGO

La primera detección se realizó, como bien se ha dicho, en el 14 de septiembre de 2015 que se presentó al público el 11 de febrero de 2016. Se detectó una onda gravitacional, se cree proveniente de la última fracción de segundo de la fusión de dos agujeros negros para producir un único agujero negro más masivo. Esta colisión de dos agujeros negros se había predicho pero nunca se había observado experimentalmente.

La segunda detección el 26 de diciembre de 2015, cuando ambos detectores, situados a más de 3.000 kilómetros, recogieron una señal muy débil sobre el ruido de fondo, correspondiente a la colisión de dos agujeros negros de ~ 14 y ~ 8 veces la masa del Sol, situados a una distancia de 1,4 mil millones de años luz. Esta señal fue anunciada el 15 de junio del año 2016, muy recientemente.



Figura 4.5: La ilustración de este artista muestra el choque de un sistema binario de agujeros negros para GW150914 (parte izquierda) y GW151226 (parte derecha). Los pares de agujeros negros se muestran juntos en esta ilustración, pero fueron realmente detectados en tiempos diferentes y en diferentes partes del cielo. La imagen ha sido escalada para mostrar la diferencia de masa de los agujeros negros. En el evento GW150914, los agujeros negros eran 29 y 36 veces la masa de nuestro Sol, mientras que en GW151226, los dos agujeros negros pesaban 14 y 8 masas solares. Crédito: LIGO/A. Simonnet

Conclusiones

La realización de este trabajo me ha llevado a la comprensión y conocimiento de muchos aspectos que no se estudian en el Grado y que no conocía más allá de un estudio personal.

El tema me ha resultado tremendamente interesante, especialmente los aspectos sobre evolución estelar, enanas blancas y estrellas de neutrones, así como la relación de las últimas con las ondas gravitacionales.

El estudio de estrellas de la Secuencia Principal, siendo éstas más “cercanas” al conocimiento estelar que tenía antes de empezar el trabajo, no me ha resultado tan sorprendente. Aunque, sin lugar a dudas, su estudio ha sido tremendamente enriquecedor e interesante y me ha servido para afianzar conocimientos ya adquiridos en materias como Termodinámica, y Mecánica. También han sido especialmente gratificantes los momentos en los que el aprendizaje adquirido durante estos años me ha ayudado a innovar y obtener resultados que no se encontraban en la bibliografía.

En esta misma parte del trabajo, me gustaría destacar un momento de dificultad, al encontrarme en las páginas de un libro titulado “Astrophysics through computation”, algo que yo consideraba un error de contenido. Encontré muy inverosímil que un error, a mi parecer, grave, apareciera a lo largo de todo un capítulo y en una serie relativamente larga de resultados; y mi equivocación fue un aspecto que estuve considerando durante meses. En este punto me gustaría agradecer al tutor Abel Calle, por confiar en mi criterio y ayudarme a ponerme en contacto con los autores, quienes final y amablemente, me dieron la razón. Para más información sobre esto, consultar Apéndice E.

En el capítulo posterior, sin tantas dificultades en el camino, aunque con esfuerzo por entender ciertos conceptos que involucraban la mecánica estadística cuántica, se estudian las estrellas enanas blancas, un tema que me ha resultado muy enriquecedor, pero especialmente interesante, sobre todo, al estudiar ejemplos reales de las teorizaciones aquí realizadas, un aspecto que considero muy importante.

Por último, en el tema de estrellas de neutrones, un tema realmente amplio e interesante, en el que no se ha querido ahondar en exceso, quiero destacar el aprendizaje sobre las misiones LISA y LIGO, donde, de nuevo, agradezco a mi tutor Abel por facilitar el contacto con una persona con importancia vital en el primero de los proyectos. Ha sido así, la primera vez he tenido una comunicación personal con un personaje de tanta importancia científica.

Globalmente, quiero destacar que el aprendizaje que he adquirido respecto a este tema ha sido enorme, y el interés por seguir aprendiendo sobre él, aunque siempre me interesó, es todavía mayor.

Bibliografía

- Balian, R. y Blaizot, J-P. “Stars and statistical physics: A teaching experience”. Citation: American Journal of Physics 67, 1189 (1999); doi: 10.1119/1.19105
- Battaner, E. “Introducción a la astrofísica”. , Alianza Editorial, 2006
- Brey Abalo, J.J., De la Rubia Pacheco, J. y De la Rubia Sánchez. “Mecánica Estadística”. J.Cuadernos UNED, 2001
- Caballero Hernández, J.A. “Enanas marrones y exoplanetas gigantes”. Real Sociedad Española de Física. 2004.
- Koberlein, B. y Meisel, D. “Astrophysics through Computation with Mathematica® Support”. Cambridge University Press. August 2013
- Lipunov, V. M. “Estrellas de neutrones”. Moscú : URSS, 2003
- Pathria, R.K. and Beale, Paul D. “Statistical Mechanics”. 3rd edition. Elsevier Ltd.
- Vilella, G. y Durán, V. “De Eddington a Chandrasekhar”. Universitat de Barcelona
- “Viaje a través del Universo”. Estrellas I, II. TIME LIFE. Ediciones folio. 1992.

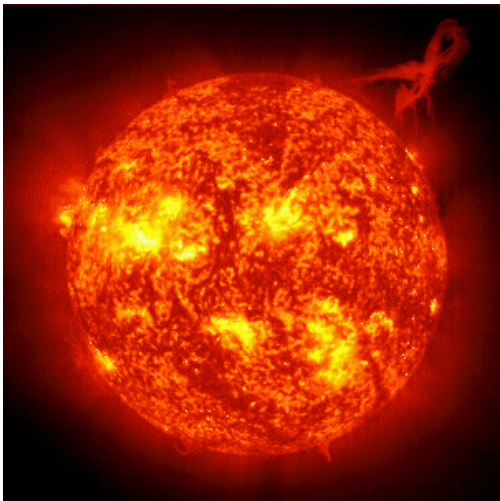
Webgrafía

- <http://www.esa.int/ESA>
- <https://www.nasa.gov/>

Apéndice A

Datos Solares NASA

Sun Fact Sheet



Sun/Earth Comparison

Bulk parameters

	Sun	Earth	Ratio (Sun/Earth)
Mass (10^{24} kg)	1,988,500.	5.9724	333,000.
GM ($\times 10^6$ km ³ /s ²)	132,712.	0.39860	333,000.
Volume (10^{12} km ³)	1,412,000.	1.083	1,304,000.
Volumetric mean radius (km)	695,700.	6371.	109.2
Mean density (kg/m ³)	1408.	5514.	0.255
Surface gravity (eq.) (m/s ²)	274.0	9.78	28.0
Escape velocity (km/s)	617.6	11.19	55.2
Ellipticity	0.00005	0.0034	0.015
Moment of inertia (I/MR ²)	0.059	0.3308	0.178
Visual magnitude V(1,0)	-26.74	-3.86	-
Absolute magnitude	+4.83		
Luminosity (10^{24} J/s)	382.8		
Mass conversion rate (10^6 kg/s)	4260.		
Mean energy production (10^{-3} J/kg)	0.1925		
Surface emission (10^6 J/m ² s)	62.94		
Spectral type	G2 V		

Model values at center of Sun:

Central pressure: 2.477×10^{11} bar

Central temperature: 1.571×10^7 K
Central density: 1.622×10^5 kg/m³

Rotational and Orbital parameters

	Sun	Earth	Ratio (Sun/Earth)
Sidereal rotation period (hrs)*	609.12	23.9345	25.449
Obliquity to ecliptic (deg.)	7.25	23.45	0.309
Speed relative to nearby stars (km/s)	19.4		

*This is the adopted period at 16 deg. latitude - the actual rotation rate varies with latitude L as:
($14.37 - 2.33 \sin^2 L - 1.56 \sin^4 L$) deg/day

North Pole of Rotation

Right Ascension: 286.13
Declination : 63.87
Reference Date : 1.5 Jan 2000 (JD 2451545.0)

Sun Observational Parameters

Apparent diameter from Earth	
At 1 A.U.(seconds of arc)	1919.
Maximum (seconds of arc)	1952.
Minimum (seconds of arc)	1887.
Distance from Earth	
Mean (10^6 km)	149.6
Minimum (10^6 km)	147.1
Maximum (10^6 km)	152.1

Solar Magnetic Field

Typical magnetic field strengths for various parts of the Sun

Polar Field: 1 - 2 Gauss
Sunspots: 3000 Gauss
Prominences: 10 - 100 Gauss
Chromospheric plages: 200 Gauss
Bright chromospheric network: 25 Gauss
Ephemeral (unipolar) active regions: 20 Gauss

Solar Atmosphere

Surface Gas Pressure (top of photosphere): 0.868 mb
Pressure at bottom of photosphere (optical depth = 1): 125 mb
Effective temperature: 5772 K
Temperature at top of photosphere: 4400 K

Temperature at bottom of photosphere: 6600 K
Temperature at top of chromosphere: ~30,000 K
Photosphere thickness: ~500 km
Chromosphere thickness: ~2500 km
Sun Spot Cycle: 11.4 yr.

Photosphere Composition:
Major elements: H - 90.965%, He - 8.889%
Minor elements (ppm): O - 774, C - 330, Ne - 112, N - 102
Fe - 43, Mg - 35, Si - 32, S - 15

[Notes on the factsheets](#) - definitions of parameters, units, notes on sub- and superscripts, etc.

[Directory to other Planetary Fact Sheets](#)



Author/Curator:
Dr. David R. Williams, dave.williams@nasa.gov
NSSDCA, Mail Code 690.1
NASA Goddard Space Flight Center
Greenbelt, MD 20771

+1-301-286-1258

Apéndice B

Programa Mathematica

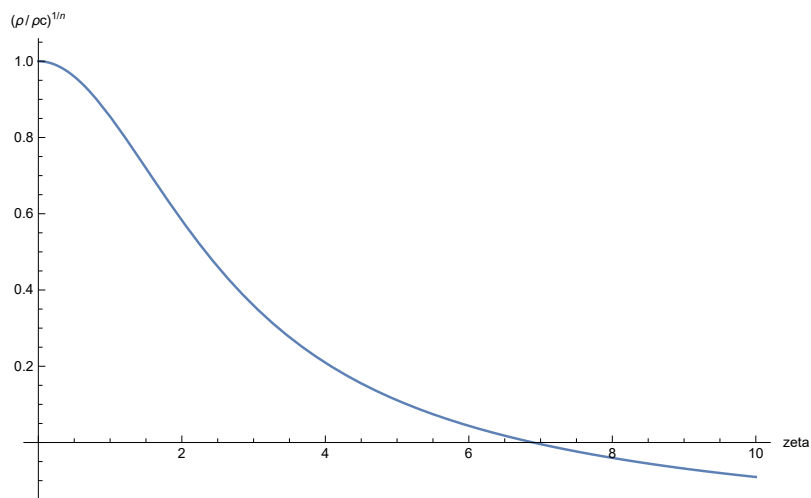
B.1. Soluciones analíticas

```
nn = 3; eps = 10^(-44);  
diff = NDSolve[{ww'[zz] + (2/zz) ww'[zz] + ww[zz]^nn == 0,  
|resolvidor diferencial numérico  
ww[eps] == 1. - eps^2/6, ww'[eps] == -eps/3}, ww, {zz, eps, 10}]
```

```
{ {ww → InterpolatingFunction[  
+  Domain: {{1. × 10-44, 10.}}  
Output: scalar  
] } }
```

```
{ {ww → InterpolatingFunction[  
+  Domain: {{1. × 10-44, 10.}}  
Output: scalar  
] } }.  
|función interpolante
```

```
Plot[ww[zz] /. %, {zz, eps, 10}, AxesLabel → {"zeta", "(ρ/ρc)1/n"},  
|representación gráfica |etiqueta de ejes
```



```
trial = 6;  
z0 = Findroot[ww[z1] /. diff[[1]], {z1, trial}]
```

```
Findroot[InterpolatingFunction[  
+  Domain: {{1. × 10-44, 10.}}  
Output: scalar  
] [z1], {z1, 6}]
```

```
{z1 → 6.8968493910045785`}  
{z1 → 6.89685}
```

(*Solucion para n=0*)

```
DSolve[{y'[x] + (2/x) y'[x] + 1 == 6; y[0] == 1, y'[0] == 0}, y[x], x]  
|resolvidor diferencial
```

```
{ {y[x] →  $\frac{1}{6} (6 - x^2)$  } }
```

```
DSolve[{y''[x] + (2/x) y'[x] + y[x] == 0, y[0] == 1, y'[0] == 0}, y[x], x]
|_resolvidor diferencial
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -\frac{i e^{-i x} (-1 + e^{2 i x})}{2 x} \right\} \right\}$$

```
FullSimplify[%]
```

```
|_simplifica completamente
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{\text{Sin}[x]}{x} \right\} \right\}$$

```
Clear
```

```
|_borra
```

```
Clear
```

```
ClearAll["Global`*"]
```

```
|_borra todo
```

```
DSolve[{y''[x] + (2/x) y'[x] + (y[x])^5 == 0, y[0] == 1, y'[0] == 0}, y[x], x]
```

```
|_resolvidor diferencial
```

```
DSolve::bvimp: General solution contains implicit solutions. In the boundary
```

```
value problem, these solutions will be ignored, so some of the solutions will be lost. >>
```

```
{}
```

```
{}
```

```
{}
```

```
DSolve[{y''[x] + (2/x) y'[x] + (y[x])^2 == 0, y[0] == 1, y'[0] == 0}, y[x], x]
```

```
|_resolvidor diferencial
```

$$\text{DSolve}\left[\left\{y[x]^2 + \frac{2 y'[x]}{x} + y''[x] == 0, y[0] == 1, y'[0] == 0\right\}, y[x], x\right]$$

```
DSolve[{y''[x] + (2/x) y'[x] + (y[x])^1 == 0, y[0] == 1, y'[0] == 0}, y[x], x]
```

```
|_resolvidor diferencial
```

```
Solve::incnst: Inconsistent or redundant transcendental equation. After reduction, the bad equation is i(2 i C[1] + C[2]) == 0. >>
```

```
Solve::incnst: Inconsistent or redundant transcendental equation. After reduction, the bad equation is 2 i C[1] + C[2] == 0. >>
```

```
Solve::ifun: Inverse functions are being used by Solve, so
```

```
some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>
```

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -\frac{i e^{-i x} (-1 + e^{2 i x})}{2 x} \right\} \right\}$$

B.2. Obtención de diversas magnitudes solares

Esta parte ha sido adaptada y modificada de un archivo creado por Dr. David D. Meisel como complemento al libro “Astrophysics through computation”, que ha sido seguido durante el desarrollo del trabajo.

SI.nb | 3

Mathematica, there are special constructions that follow in order to use the interpolating polynomial in other ways, including graphing, root finding, etc.

```
n = 3;  $\gamma = \frac{1}{n} + 1$ ; eps =  $10^{-44}$ ; end =  $5 \times n - 4$ ;
```

```
diff = NDSolve[ $\{\omega''[z] + \frac{2}{z} \times \omega'[z] + \omega[z]^n == 0, \omega[eps] == 1. - eps^2 / 6,$   

[resolvidor diferencial numérico]
```

```
 $\omega'[eps] == -eps / 3\}$ ,  $\omega$ , {z, eps, end}, MaxSteps  $\rightarrow$  60 000  

[máximo de pasos]
```

```
{ $\{\omega \rightarrow$  InterpolatingFunction[  

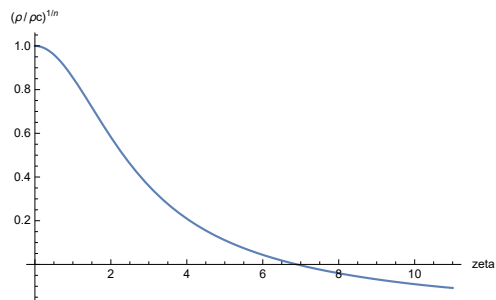
[+]  Domain:  $\{\{1. \times 10^{-44}, 11\}\}$   

  Output: scalar  

 $\}$  ] } }
```

```
Plot[ $\omega[t] /. diff // Evaluate$ , {t, eps, end}, AxesLabel  $\rightarrow$  {"zeta", " $(\rho / \rho_c)^{1/n}$ "}  

[representación gráfica] [evalúa] [etiqueta de ejes]
```



```
trial = end;
```

```
z0 = FindRoot[ $\omega[z1] /. diff[[1]]$ , {z1, trial}  

[encuentra raíz]
```

```
{z1  $\rightarrow$  6.89685}
```

```
z3 = z1 /. z0[[1]];
```

```
m0 = Integrate[ $(\omega[z2]^n /. diff[[1]]) \times z2^2$ , {z2, 0, z3}  

[integra]
```

```
 $\int_0^{6.89685} z2^2$  InterpolatingFunction[  

[+]  Domain:  $\{\{1. \times 10^{-44}, 11\}\}$   

  Output: scalar  

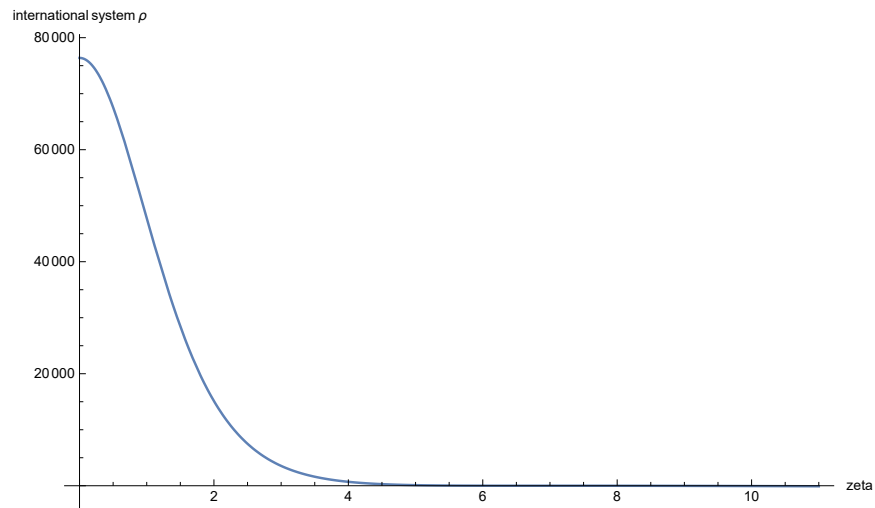
 $\]$  [z2]3 dz2
```

```
aconstant =  $\frac{z3}{radstar \times radsun}$ 
```

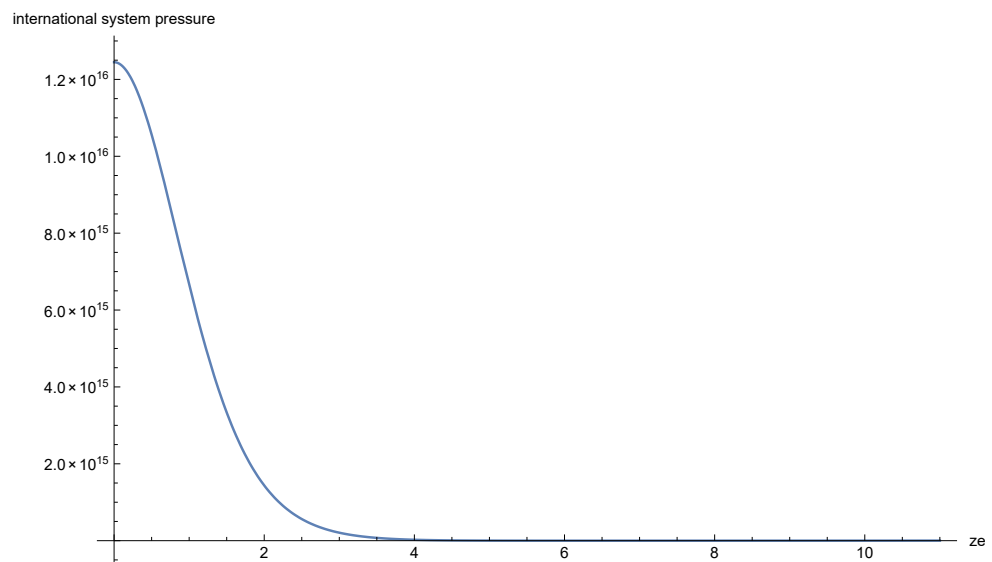
```
9.90927  $\times 10^{-9}$ 
```

Printed by Wolfram Mathematica Student Edition

```
Plot[ $\rho \times \omega[t]^n /. \text{diff} // \text{Evaluate}$ , {t, eps, end},
  representación gráfica evalúa
  AxesLabel -> {"zeta", "international system  $\rho$ "}, PlotRange -> All]
  etiqueta de ejes rango de repre... todo
```

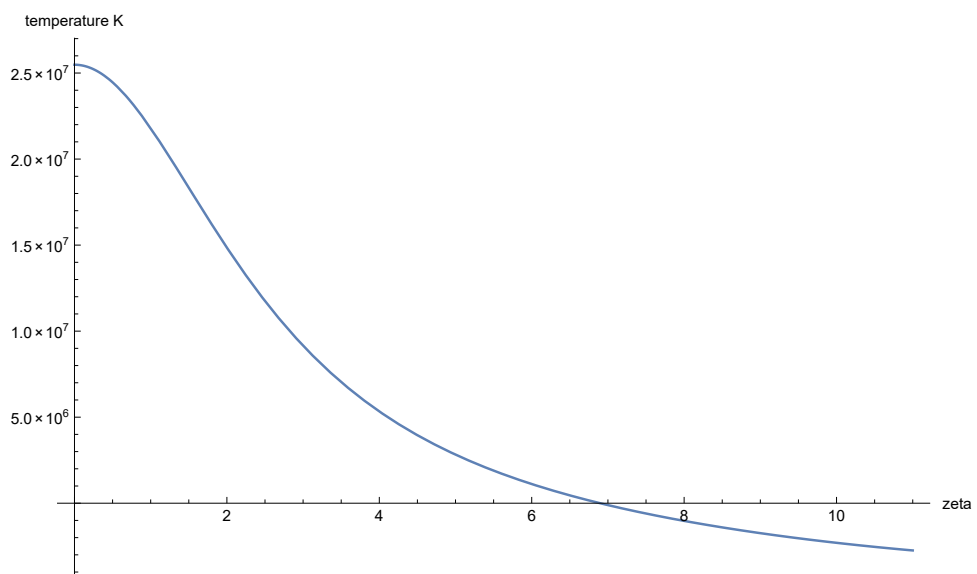


```
Plot[Evaluate[ $\text{pressc } \omega[t]^{n+1} /. \text{diff}$ ],
  repr... evalúa
  {t, eps, end}, BaseStyle -> {10, FontFamily -> "Helvetica"},
  estilo base familia de tipo de letra
  AxesLabel -> {"zeta", "international system pressure"}, PlotRange -> All]
  etiqueta de ejes rango de repre... todo
```



```
Show[%24, ImageSize → Large]
[muestra [tamaño de im... grande
Show::gtype: Real is not a type of graphics. >>
Show[388.8703920, ImageSize → Large]
```

```
Plot[Evaluate[tempc ω[t] /.diff], {t, eps, end},
[repr... evalúa
BaseStyle → {10, FontFamily → "Helvetica"},
[estilo base [familia de tipo de letra
AxesLabel → {"zeta", "temperature K"}]
[etiqueta de ejes
```



```
tB = SessionTime[];
[tiempo de sesión
(tB - tA) / 60
6.61868283
```

Apéndice C

Modelo Estándar Solar

C.1. Datos del Modelo Estándar Solar

Obtenidos en: <http://eagle.phys.utk.edu/guidry/astroResources/standardSolar.pdf>

Table 8.1: Standard Solar Model

M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	$T(K)$	ρ (g cm ⁻³)	P (dyn cm ⁻²)	L/L_{\odot}
0.0000298	0.00650	1.568E+07	1.524E+02	2.336E+17	0.00027
0.0008590	0.02005	1.556E+07	1.483E+02	2.280E+17	0.00753
0.0065163	0.04010	1.516E+07	1.359E+02	2.111E+17	0.05389
0.0207399	0.06061	1.456E+07	1.193E+02	1.868E+17	0.15638
0.0439908	0.08041	1.386E+07	1.027E+02	1.606E+17	0.29634
0.0762478	0.10006	1.310E+07	8.729E+01	1.349E+17	0.45135
0.1173929	0.12000	1.231E+07	7.350E+01	1.108E+17	0.60142
0.1672004	0.14056	1.150E+07	6.123E+01	8.892E+16	0.73152
0.2203236	0.16027	1.076E+07	5.114E+01	7.094E+16	0.82657
0.2800107	0.18104	1.002E+07	4.205E+01	5.517E+16	0.89658
0.3393826	0.20107	9.353E+06	3.459E+01	4.279E+16	0.94011
0.3966733	0.22038	8.762E+06	2.847E+01	3.319E+16	0.96616
0.4559683	0.24084	8.188E+06	2.301E+01	2.516E+16	0.98259
0.5114049	0.26085	7.676E+06	1.857E+01	1.907E+16	0.99183
0.5627338	0.28058	7.214E+06	1.496E+01	1.446E+16	0.99669
0.6099028	0.30016	6.794E+06	1.203E+01	1.096E+16	0.99860
0.6564038	0.32132	6.379E+06	9.484E+00	8.119E+15	0.99941
0.6952616	0.34091	6.028E+06	7.605E+00	6.156E+15	0.99976
0.7304369	0.36063	5.703E+06	6.092E+00	4.667E+15	0.99993
0.7621708	0.38053	5.400E+06	4.876E+00	3.539E+15	1.00002
0.7907148	0.40067	5.117E+06	3.900E+00	2.683E+15	1.00005
0.8163208	0.42109	4.851E+06	3.118E+00	2.034E+15	1.00007
0.8374222	0.44008	4.621E+06	2.539E+00	1.578E+15	1.00007
0.8580756	0.46112	4.383E+06	2.029E+00	1.197E+15	1.00006
0.8750244	0.48072	4.176E+06	1.651E+00	9.287E+14	1.00006
0.8902432	0.50063	3.978E+06	1.345E+00	7.206E+14	1.00005
0.9038831	0.52086	3.789E+06	1.095E+00	5.591E+14	1.00004
0.9160850	0.54139	3.606E+06	8.924E-01	4.339E+14	1.00004
0.9260393	0.56033	3.445E+06	7.413E-01	3.445E+14	1.00003
0.9358483	0.58142	3.273E+06	6.052E-01	2.673E+14	1.00003

Table 8.1: (Continued) Standard Solar Model

M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	$T(K)$	ρ ($g\ cm^{-3}$)	P ($dyn\ cm^{-2}$)	L/L_{\odot}
0.9438189	0.60081	3.120E+06	5.040E-01	2.123E+14	1.00002
0.9509668	0.62036	2.969E+06	4.205E-01	1.686E+14	1.00002
0.9573622	0.64001	2.818E+06	3.517E-01	1.339E+14	1.00002
0.9636045	0.66168	2.648E+06	2.900E-01	1.039E+14	1.00001
0.9686223	0.68129	2.485E+06	2.445E-01	8.249E+13	1.00001
0.9730081	0.70042	2.315E+06	2.081E-01	6.572E+13	1.00001
0.9771199	0.72033	2.115E+06	1.780E-01	5.161E+13	1.00001
0.9811002	0.74162	1.899E+06	1.513E-01	3.936E+13	1.00000
0.9842836	0.76050	1.718E+06	1.299E-01	3.055E+13	1.00000
0.9874435	0.78148	1.526E+06	1.085E-01	2.264E+13	1.00000
0.9900343	0.80103	1.355E+06	9.066E-02	1.678E+13	1.00000
0.9922832	0.82051	1.193E+06	7.470E-02	1.215E+13	1.00000
0.9942853	0.84082	1.031E+06	5.987E-02	8.406E+12	1.00000
0.9958822	0.86022	8.826E+05	4.733E-02	5.682E+12	1.00000
0.9972278	0.88035	7.356E+05	3.590E-02	3.585E+12	1.00000
0.9982619	0.90020	5.966E+05	2.613E-02	2.110E+12	1.00000
0.9990296	0.92017	4.627E+05	1.775E-02	1.107E+12	1.00000
0.9995498	0.94015	3.343E+05	1.080E-02	4.833E+11	1.00000

$$M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}\ g \quad R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10}\ cm \quad L_{\odot} = 3.827 \times 10^{33}\ erg\ s^{-1}$$

Apéndice D

Resolución numérica con el método de Runge-Kutta 4

Se incluye el programa realizado en C con la resolución numérica de la ecuación de Lane-Emden mediante el método de Runge-Kutta 4 y la obtención de distintas magnitudes estelares.

```
////////////////////////////////////
//Ecuacion de Lane-Emden
////////////////////////////////////
// d^2omega/dz^2+ (2/z) (domega/dz) + omega^n=0
// Condiciones de contorno
// omega(z=0)= 1, omega'(z=0)=0.0. En z=0 la ecuación
// tiene una singularidad, es conveniente empezar a integrar en
// un punto cercano a z=0.0, por ejemplo,
// z=epsilon=0.0000001, en ese caso el valor de
// omega(z=epsilon)= 1.0-epsilon*epsilon/6.0 y
// omega'(z=epsilon)=- (z/3.0)
////////////////////////////////////

////////////////////////////////////
// funciones f y g auxiliares necesarias para el
// método de Runge-Kutta
//
// Significado de las variables utilizadas en
// el programa
// x corresponde a z
// y corresponde a omega
// z corresponde a omega'(z)= domega/dz
////////////////////////////////////

////////////////////////////////////
// Constantes y fórmulas utilizadas para el
// caso particular del Sol
//
// R=A*z
// A= [(n+1)*K/(4*pi*G*rhocSol^((n-1)/n))]^(1/2)
// con n=3
// Conocido el radio del Sol (el valor zo para
// omega(z0)=0) se puede determinar A
// directamente como
// A= rSol/z0, a partir de este valor.
// A partir del valor de rhocSol
// (valor de la densidad en
// el centro del Sol) y la fórmula de A se puede
// determinar el valor de K:
// K=A*A*pi*G*pow(rhocSol,2.0/3.0)
// El valor de rhocSol se puede determinar a partir de
// rhocSol=-mSol*zestrella/(4.0*pi*rSol*rSol*omegapfinal)
//
// El valor de la densidad, rho, como función de z
// se puede determinar a partir de:
// rho=rhocSol*pow(yf,n=3)
//
// El valor de la masa como función de z se puede
// determinar a partir de:
// masaz= -4.0*pi*A*A*rhocSol*xf*xf*zf/mSol
//
// El valor de la presión como función de z
// presion= K*pow(rhocSol,4.0/3.0)*pow(yf,4.0)
//
// El valor de la temperatura como función de z
// temperatura=mH*K*pow(rhocSol,1.0/3.0)*yf/kB
// donde mH es la masa atómica del hidrógeno
// y kB la constante de Boltzmann (suponiendo
// que el gas del Sol es hidrógeno)
//
////////////////////////////////////
```



```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

double f(double x1, double y1, double z1) {
double f1;
f1 = z1;
return f1;
}

double g(double x2, double y2, double z2, double ene) {
double g1;
g1 = -pow(y2, ene)-2.0*z2/x2;
return g1;
}

////////////////////////////////////
// Programa principal
////////////////////////////////////

int main() {

int N, i;
double h, x0, y0, z0, xmax;
double xf, yf, zf;
double k1, k2, k3, k4;
double l1, l2, l3, l4;
double ene;
double rho;
double presion;
double temperatura;
double zestrella;
double yteorico;
double mSol;
double rSol;
double rhocSol;
double A;
double pi;
double omegap;
double omegapfinal;
double masaz;
double K;
double mH;
double G;
double kB;
pi = acos(-1.0);
mSol = 1.9885e30;
rSol = 695700000.0;
G = 6.67408e-11;
mH = 1.67e-27;
kB = 1.38064e-23;

////////////////////////////////////
// Ficheros para almacenar algunos datos
////////////////////////////////////

FILE *datos;
datos = fopen("omega.dat", "w");
FILE *datos1;
datos1 = fopen("rhoPT.dat", "w");
FILE *datos2;
datos2 = fopen("analiticos.dat", "w");

```

```

printf("Introduzca el valor del paso de integración h:\n");
scanf("%lf",&h);
printf("\n");

////////////////////////////////////
// valor inicial de z
////////////////////////////////////

x0=0.00000001;

////////////////////////////////////
// Valor inicial de omega
////////////////////////////////////

y0=1.0-x0*x0/6.0;

////////////////////////////////////
// valor inicial de omega'
////////////////////////////////////

z0=-x0/3.0;

printf("Introduzca el valor máximo de z: \n");
scanf("%lf",&xmax);
printf("\n");

////////////////////////////////////
// ene corresponde al valor
// de n en la ecuación de
// Lane-Emden
////////////////////////////////////

printf("Introduzca el valor ene: \n");
scanf("%lf",&ene);
printf("\n");

////////////////////////////////////
// Esta parte es para identificar en la cabecera
// de los ficheros el tipo de datos que
// se guardan en cada fichero.
////////////////////////////////////

fprintf(datos,"# Comentarios \n");
fprintf(datos,"# Los datos de la primera columna son los valores de z
\n");
fprintf(datos,"# Los datos de la segunda columna son los valores de
omega(z) por RK \n");
fprintf(datos,"# Los datos de la tercera columna son los valores de
omega'(z) \n");
fprintf(datos,"# Los datos se han obtenido para: h= %0.5lf y n=%lf \n",
h, ene);

fprintf(datos1,"# Comentarios \n");
fprintf(datos1,"# Los datos de la primera columna son los valores de
z/zestrella \n");
fprintf(datos1,"# Los datos de la segunda columna son los valores de

```

```

////////////////////////////////////
//Ecuacion de Lane-Emden
////////////////////////////////////
// d^2omega/dz^2+ (2/z) (domega/dz) + omega^n=0
// Condiciones de contorno
// omega(z=0)= 1, omega'(z=0)=0.0. En z=0 la ecuación
// tiene una singularidad, es conveniente empezar a integrar en
// un punto cercano a z=0.0, por ejemplo,
// z=epsilon=0.0000001, en ese caso el valor de
// omega(z=epsilon)= 1.0-epsilon*epsilon/6.0 y
// omega'(z=epsilon)=-(z/3.0)
////////////////////////////////////

////////////////////////////////////
// funciones f y g auxiliares necesarias para el
// método de Runge-Kutta
//
// Significado de las variables utilizadas en
// el programa
// x corresponde a z
// y corresponde a omega
// z corresponde a omega'(z)= domega/dz
////////////////////////////////////

////////////////////////////////////
// Constantes y fórmulas utilizadas para el
// caso particular del Sol
//
// R=A*z
// A= [(n+1)*K/(4*pi*G*rhocSol^((n-1)/n))]^(1/2)
// con n=3
// Conocido el radio del Sol (el valor z0 para
// omega(z0)=0) se puede determinar A
// directamente como
// A= rSol/z0, a partir de este valor.
// A partir del valor de rhocSol
// (valor de la densidad en
// el centro del Sol) y la fórmula de A se puede
// determinar el valor de K:
// K=A*A*pi*G*pow(rhocSol,2.0/3.0)
// El valor de rhocSol se puede determinar a partir de
// rhocSol=-mSol*zestrella/(4.0*pi*rSol*rSol*rSol*omegapfinal)
//
// El valor de la densidad, rho, como función de z
// se puede determinar a partir de:
// rho=rhocSol*pow(yf,n=3)
//
// El valor de la masa como función de z se puede
// determinar a partir de:
// masaz= -4.0*pi*A*A*rhocSol*xf*xf*zf/mSol
//
// El valor de la presión como función de z
// presion= K*pow(rhocSol,4.0/3.0)*pow(yf,4.0)
//
// El valor de la temperatura como función de z
// temperatura=mH*K*pow(rhocSol,1.0/3.0)*yf/kB
// donde mH es la masa atómica del hidrógeno
// y kB la constante de Boltzmann (suponiendo
// que el gas del Sol es hidrógeno)
//
////////////////////////////////////

```

```

zestrella=x0;
omegap=z0;
printf(" El valor del radio de la estrella es: %lf \n",zestrella);
printf(" omegap %lf \n",omegap);
break;
    }

////////////////////////////////////
// Guardamos en los ficheros los
// valores de
// z, omega, omega', densidad, presion y temperatura
////////////////////////////////////

////////////////////////////////////
// Para los valores de n=0, n=1 y n=5
// calculamos los valores analíticos
// para comparar con los valores numéricos
// y verificar la exactitud del cálculo
// numérico
////////////////////////////////////

if(ene==0.0){
yteorico= 1.0 -xf*xf/6.0;
fprintf(datos2, "%lf %e \n", xf, yf- yteorico );
}

if(ene==1.0){
yteorico= sin(xf)/xf;
fprintf(datos2, "%lf %0.25lf \n", xf,yf - yteorico );
}

if(ene==5.0){
yteorico=1.0/pow(1+xf*xf/3.0,0.5);
fprintf(datos2, "%lf %0.25lf \n", xf,yf-yteorico );
}

fprintf(datos, "%lf %lf %lf \n", xf, yf, zf);
x0 = xf;
y0 = yf;
z0 = zf;
omegapfinal=zf;
}

////////////////////////////////////
// Fin del bucle
////////////////////////////////////

////////////////////////////////////
// Esta parte del solamente se ejecuta para el
// caso n=3 y con los datos correspondientes
// al Sol
////////////////////////////////////

////////////////////////////////////
// Para el caso del Sol (ene=3)
// Calculamos el valor de la densidad
// en el origen y los valores de
// rho(z), M(z), T(z) y P(z)
////////////////////////////////////

```

```

    if(ene==3.0){
    rhocSol=-mSol*zestrella/(4.0*pi*rSol*rSol*rSol*omegapfinal);
    printf(" rho0: %e \n",rhocSol);

    //////////////////////////////////////
    // Recuperamos las conciciones iniciales
    //////////////////////////////////////

    x0=0.00000001;
    y0=1.0-x0*x0/6.0;
    z0=-x0/3.0;

    for (i=1;i<N;i++) {

    xf = x0+h;
    k1 = f(x0,y0,z0);
    l1 = g(x0,y0,z0, ene);
    k2 = f(x0+(h/2.0),y0+(h*(k1/2.0)),z0+(h*(l1/2.0)));
    l2 = g(x0+(h/2.0),y0+(h*(k1/2.0)),z0+(h*(l1/2.0)),ene);
    k3 = f(x0+(h/2.0),y0+(h*(k2/2.0)),z0+(h*(l2/2.0)));
    l3 = g(x0+(h/2.0),y0+(h*(k2/2.0)),z0+(h*(l2/2.0)),ene);
    k4 = f(x0+h,y0+(h*k3),z0+(h*l3));
    l4 = g(x0+h,y0+(h*k3),z0+(h*l3),ene);
    yf = y0 + h*((k1+2.0*k2+2.0*k3+k4)/6.0);
    zf = z0 + h*((l1+2.0*l2+2.0*l3+l4)/6.0);

    if(xf>zestrella){
    break;
    }

    x0=xf;
    y0=yf;
    z0=zf;
    //////////////////////////////////////
    //// Cálculo del valor de la densidad a
    //// partir del valor de omega
    //////////////////////////////////////

    rho=rhocSol*pow(yf,ene);
    A=rSol/zestrella;
    K=A*A*pi*G*pow(rhocSol,2.0/3.0);
    masaz= -4.0*pi*A*A*rhocSol*xf*xf*zf/mSol;
    presion= K*pow(rhocSol,4.0/3.0)*pow(yf,4.0);
    temperatura=mH*K*pow(rhocSol,1.0/3.0)*yf/kB;

    //////////////////////////////////////
    // El el ficheros datos1 (rhoPT.dat)
    // se escribe el valor z/zestrella, log10(rho)
    // masaz, log10(presion) y log10(temperatura)
    //////////////////////////////////////

    fprintf(datos1, "%lf %e %e %e %e \n", xf/zestrella,
    log10(rho), masaz, log10(presion), log10(temperatura));

    }

    //////////////////////////////////////
    // fin del bucle for
    //////////////////////////////////////

    }

```

```
////////////////////////////////////  
// fin del if para los cálculos del Sol  
////////////////////////////////////  
  
////////////////////////////////////  
// Cerramos los ficheros de escritura  
////////////////////////////////////  
  
fclose(datos);  
fclose(datos1);  
fclose(datos2);  
  
return 0;  
}  
  
////////////////////////////////////  
// fin del programa  
////////////////////////////////////
```

Apéndice E

Correcciones al libro “Astrophysics through computation”

Durante la realización del trabajo se ha seguido en parte un libro titulado “Astrophysics through computation” de los autores Brian Koberlein, Rochester Institute of Technology, New York y David Meisel, State University of New York, Geneseo. Siguiendo sus páginas encontré una errata que se prolongaba a lo largo de un capítulo y mi tutor me ayudó a mantener una comunicación con los autores en la que exponía los motivos por los que creía que el libro estaba mal, comparando los datos obtenidos en mi cálculo, con los cálculos del libro, y con un modelo más complejo y preciso como es el Modelo Estándar Solar. A continuación expongo la respuesta personal del autor acompañada del archivo que se les fue enviado.

Sorry it's taken so long to get back to you. Going back through my notes it's clear that your equations for density, pressure, and temperature are correct, and the ones in the book (eqs 3.24, 3.25 and 3.26) are incorrect. The $n=0$ and $n=1$ solutions use the correct terms, hence their correct solutions. The pressure and temperature plots in the book appear to use the wrong equations (as listed in the book), but are based on the correct numerical solution for Lane-Emden equation.

Thanks for catching this. I'll add it to the list of errata.

Best Regards,

Brian

Figura E.1: Conversación personal mantenida con uno de los autores de “Astrophysics through computation”

Notes about “Astrophysics through computation”

Author: Paloma López Reyes

1. Introduction

In this section we use the result of the Lane-Emden equation in order to obtain the values of the density, pressure and temperature as a function of the star radius. We find different results for the density, pressure and temperature equations, so the plotting of this graphics is different from the one in the book. In the final part we tried to confirm our results for the particular case of the Sun by comparing them with the Standard Solar Model, which is a much more complicated and precise resolution of this values, whose results were found in the bibliography.

2. Lane-Emden equation

In order to obtain the Lane-Emden equation, you can start with hydrostatic equilibrium equation:

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \quad (1)$$

Using the polytropic relation, we have:

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dr}(c\rho^\gamma) = -c\gamma\rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \quad (2)$$

in terms of the index n and integrating:

$$\int d\phi = -c(n+1) \frac{1}{n} \int \rho^{(\frac{1}{n}-1)} d\rho \quad (3)$$

with $\phi = 0$ in the star's surface, finally:

$$\rho = \left(\frac{-\phi}{c(n+1)} \right)^n \quad (4)$$

This is the density in terms of gravitational potential, this, substituted in the differential equation gives:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = 4\pi G \left(\frac{-\phi}{c(n+1)} \right)^n \quad (5)$$

In order to simplify the equation, you can transform it into a parameter free equation by taking $\phi = \phi_c$ and $\rho = \rho_c$, the values of potential and density at the center of the star, then substituting:

$$A^2 = \frac{4\pi G}{c(n+1)} \rho_c^{\frac{(n-1)}{n}} \quad (6)$$

$$z = Ar \quad (7)$$

$$\omega = \frac{\phi}{\phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n} \quad (8)$$

the equation becomes:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\omega}{dz} + \omega^n = 0 \quad (9)$$

This is *Lane-Emden equation for polytropic stars*.

If you can solve it you could calculate the functions for density, pressure and temperature as a function of ω :

Our results:

$$\rho(r) = \rho_c \omega(r)^n \quad (10)$$

$$P(r) = c\rho(r)^{\frac{n+1}{n}} = c\rho_c^{\frac{n+1}{n}} \omega(r)^{n+1} = P_c \omega(r)^{n+1} \quad (11)$$

$$T(r) = P(r) \frac{\mu}{k\rho(r)} = P_c \omega(r)^{n+1} \frac{\mu}{k\rho_c \omega(r)^n} = T_c \omega(r) \quad (12)$$

This is the result we think it's actually right, in the book this results are different:

Book's results:

$$\rho(r) = \rho_c \omega(r) \quad (13)$$

$$P(r) = P_c \omega(r)^{\frac{n+1}{n}} \quad (14)$$

$$T(r) = T_c \omega(r)^{1/n} \quad (15)$$

3. Analytical solutions

Here we find inconsistencies between the book's equations (3.24), (3.25) and (3.26) and the book's equations (3.38) (3.39), because for $\mathbf{n=0}$ the result of *Lane-Emden equation* is:

$$\omega_0(z) = 1 - \frac{z^2}{6} \quad (16)$$

then, according to the book's results (equations (3.24), (3.25) and (3.26) in the book), the pressure would be ($P = P_c \omega^{(0+1)/0} = P_c (1 - \frac{z^2}{6})^{(0+1)/0}$). But, the result in the book is:

$$P = P_c \omega^{(0+1)} = P_c (1 - \frac{z^2}{6}) \quad (17)$$

which coincides with our results for the pressure (equation 11 in this file).

The same happens for the temperature, according to the book that would be $T = T_c \omega^{1/0} = T_c (1 - \frac{z^2}{6})^{1/0}$ but the result in the book actually fits our relation for the temperature (equation 12 in this file):

$$T = T_c \omega = T_c (1 - \frac{z^2}{6}) \quad (18)$$

This are the results in the book, they follow the laws written above in this file, but they aren't consistent with the density, pressure and temperature equations written in the book. But we think this results are correct

For $\mathbf{n=1}$ there are no differences between our results or the book's results, so we think it's right.

4. Plots

In this section we plotted the functions of density, pressure and temperature for $n = 3$ using the Mathematica program and a C program which solves numerically the equation. First we had to recalculate the constants: ρ_c , P_c and T_c :

Our results:

The mass of the star is

$$M = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi A^{-3} \rho_c \int_0^{z_0} z^2 w^n dz \quad (19)$$

where we used $\rho = \rho_c \omega^n$, then, we define:

$$m_0 = \int_0^{z_0} z^2 \omega^n dz \quad (20)$$

This result is different from the one in the book, because we used our relationship for the density (equation 10 in this file).

The result for the book is:

$m_0 = \int_0^{z_0} z^2 \omega dz$, it is different because the book's definition for ρ is different, (equation (3.24) in the book).

Following with our results, we obtain the values for the constants in the International System:

$$\rho_c = \frac{MA^3}{4\pi m_0} \quad (21)$$

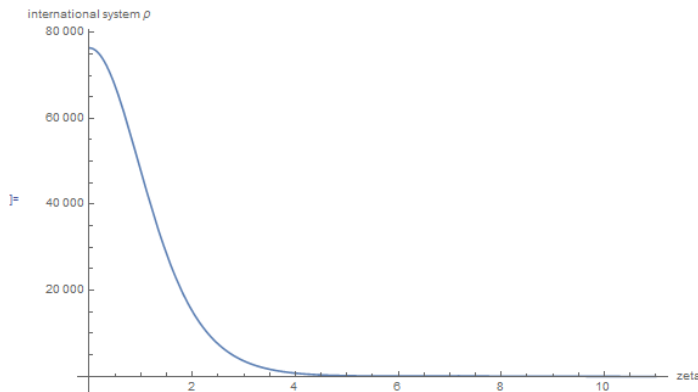
$$P_c = c \rho_c^{(n+1)/n} \quad (22)$$

$$T_c = \frac{c\mu}{K} \rho_c^{1/n} \quad (23)$$

The results of the plotting, using the equations for density, pressure and temperature written in this file, and the constants, are (in the International System):

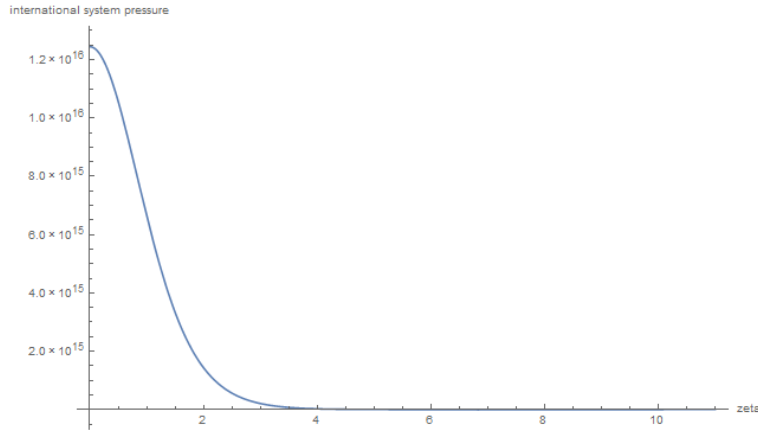
Density:

```
:= Plot[ $\rho_c \times \omega[t]^n /. diff // Evaluate, \{t, eps, end\}, AxesLabel -> \{"zeta", "international system \rho"\}, PlotRange -> All]$ 
```



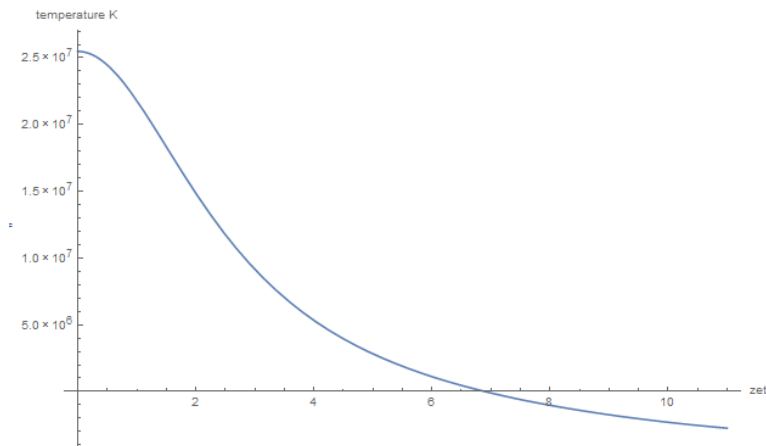
Pressure:

```
Plot[Evaluate[press  $\omega[t]^{n+1} /. diff$ ], {t, eps, end}, BaseStyle -> {10, FontFamily -> "Helvetica"}, AxesLabel -> {"zeta", "internatio  
[repr... [evalúa] [estilo base] [familia de tipo de letra] [etiqueta de ejes]  
PlotRange -> All]  
[rango de representación]
```



Temperature:

```
Plot[Evaluate[tempc  $\omega[t] /. diff$ ], {t, eps, end}, BaseStyle -> {10, FontFamily -> "Helvetica"}, AxesLabel -> {"zeta", "temperatu  
[repr... [evalúa] [estilo base] [familia de tipo de letra] [etiqueta de ejes]
```

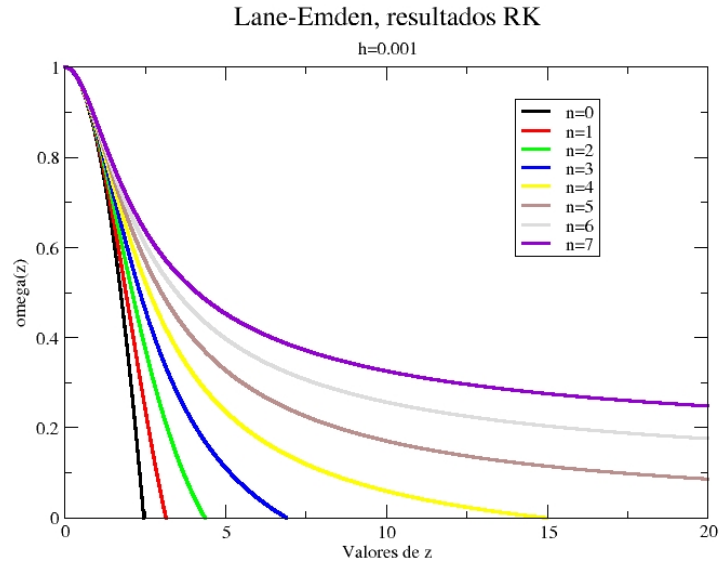


This plots, made with the density, pressure and temperature equations written above in this file do not coincide with the ones in the book

4.1. C Program

For securing our results, we made a C program in order to compare the book results (for the Sun), our results (for the Sun) and the results of the Standard Solar Model. For that, we first calculated the results of Lane-Emden equation with Runge-Kutta method, for $n = 3$.

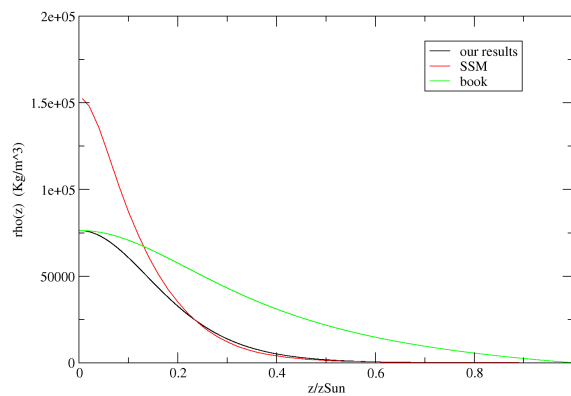
First it's interesting to see the plots of the solution of the Lane-Emden equation for different values of n :



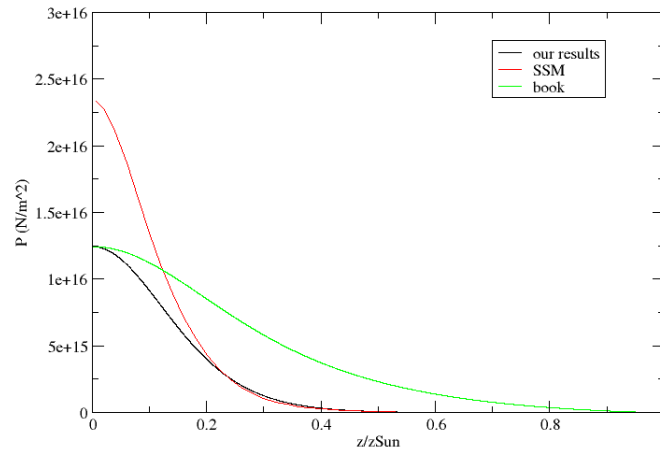
This plot for $n = 3$ actually is the same that the book obtains, with a root in 6.89685.

The results of the pressure, density and temperature obtained in this file are plotted with the values obtained with the result in the book and also with the result given by the data obtained from the Standard Solar Model, which were found in the bibliography. The Standard Solar Model gives a much better result from much more complex hypothesis and equations. This are the results:

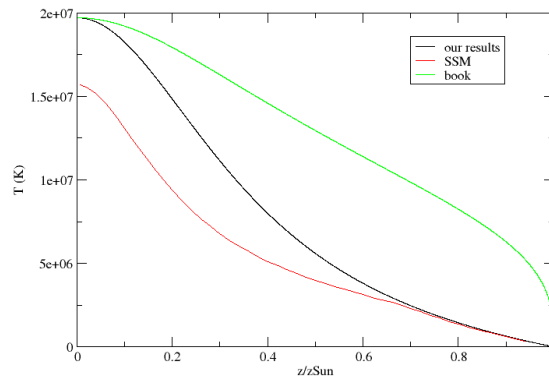
Density



Pressure



Temperature



Actually none of the results gives the exact behaviour of the SSM, but our results fit better for long values of the radius of the star. That could mean we made a correct calculation.