Índice general

Capítulo 1

Introducción

En esta memoria tratamos el problema $3p+1$ que consiste en lo siguiente dado un número natural p, se considera el número $3p+1$ si p es impar o bien $p/2$ si p es par y a éste número obtenido se le repite el procedimiento. La conjetura de Collatz asegura que de esta manera terminamos llegando siempre al número 1.

Durante mucho tiempo el problema $3p+1$ circuló de palabra. Como consecuencia de esto es también conocido en ciertos ambientes bajo los siguientes nombres: el problema de Syracuse, el algoritmo de Hasse, el problema de Kakutani, problema de Ulam. No obstante, usualmente su origen es atribuido a Lothar Collatz en torno a los años 30 y se cree que el mismo Collatz lo difundió oralmente en el Congreso Internacional de Matemáticos de Cambridge en el 1952.

Hasta 1970 no hay literatura publicada. Esto ha podido ser en parte porque durante los años 60 las Matemáticas estuvieron dominadas por el estilo bourbakista con el cual este problema tan aislado no encaja en absoluto, parece que hasta en ciertos círculos estaba mal visto el mero hecho de interesarse por dicho problema. Otra causa ha podido ser que los resultados que se obtenían eran de una apariencia tan irrelevante y débil que ni llegaban a ser publicados por miedo a dañar la propia reputación. El problema aparece por primera vez en 1971 cuando una lección de H.S.M. Coxeter es llevada a la imprenta, en ella se discute el problema sin dar ningún intento de solución. Esto vuelve a llamar la atención de la comunidad matemática sobre el tema. Más tarde, en su publicación titulada "Cyclic Sequences and Frieze Patterns", Coxeter se refiere al problema como "more recent piece of mathematical gossip" (El cotilleo matemático más reciente).

Computacionalmente la conjetura ha sido comprobada hasta el número $57646 \cdot 10^{18}$ (Lagarias 2010). Es también destacable que ha sido verificado que si existiera otro ciclo diferente del trivial, éste tendria que ser como mínimo de orden 17.087.915 (Chamberland 1996).

Como curiosidad el excéntrico matemático húngaro Paul Erdös sentenció que "Mathematics is not yet ready for such problems", y se refirió a la conjetura como "Hopeless. Absolutely hopeless".

Hemos presentado en la memoria algunos de los resultados que aparecen en dos artículos recientes dedicados a este problema, que son de índole muy distinta. Uno de ellos es sobre teoría de números y el otro es sobre un tema a priori bastante alejado del contexto en el que se establece el problema: los sistemas dinámicos reales. Esto hace que este trabajo sea multidisciplinar, además de permitir constatar la necesidad de abordar problemas de matemáticas usando todas las técnicas posibles. Por un lado en un preprint, aún no publicado de Motta, [2] , y, por otro lado, en el artículo de Chamberland [3]. Estos trabajos tratan la conjetura de Collatz desde dos puntos de vista bastante diferentes. En el primero [2], se trata el problema desde la óptica en la que el propio problema se enuncia, es decir desde la teoría de números elemental. Nos ha parecido interesante, no usa ninguna teoría matemática avanzada y apunta algunas propiedades interesantes nuevas para el tratamiento del problema, manteniéndose siempre en argumentos elementales; si bien algunas son sólo de tipo heurístico, que apoyan la veracidad de la Conjetura de Collatz y que pueden ser atractivas e interesantes para quien pretenda estudiar el problema. Hemos recogido aquello que más nos ha gustado en el capítulo 1 de la memoria. En la primera sección se introduce la notación que vamos a utilizar a lo largo de todo el capítulo y se comentan algunas reformulaciones del problema y aspectos inmediatos. En la siguiente sección se estudia el crecimiento de los iterados, dando una cota para el iterado n - ésimo y como resultado destacable llegamos a probar que no existe ninguna órbita monótona divergente. En la tercera sección se establecen ciertos patrones que aparecen al dar valores a las funciones ψ y ϕ cuya definición está recogida en la memoria. En la última sección primero se estudia heurísticamente el crecimiento que podemos esperar para los iterados (este apartado es especialmente llamativo y curioso, al menos en nuestra opinión) en el segundo apartado se intenta indagar heurísticamente sobre el significado de una de las reformulaciones que dimos en la primera sección.

Uno de los temas señalados en el artículo [2] para acercarse al problema es el de los Sistemas Dinámicos, sobre todo complejos, y todo el estudio de fractales y de conjuntos de Julia. Sin embargo, las relaciones fuertes que puede haber entre el problema original y la dinámica compleja están solamente bosquejadas en el citado trabajo, sin apenas demostraciones ni detalles, y no hemos podido sacar suficiente información como para hacerlas visibles en esta memoria. Por el contrario, nos hemos fijado en el artículo [3], también citado en [2], en el que se propone una extensión del procedimiento usado para la conjetura a toda la recta real. Es decir, una extensión de la aplicación $C:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ definida por:

$$C(p)=\left\{\begin{array}{lll} p/2 & si & p \text{ es par} \\ & & \\ 3p+1 & si & p \text{ es impar}\end{array}\right\}$$

a una función f definida en toda la recta real. Acto seguido se estudian la propiedades dinámicas de la función f (estudio de órbitas, órbitas periódicas, conjuntos omega-límite, etc) intentando obtener consecuencias sobre el problema $3p+1$, que puede enunciarse como propiedades dinámicas de f restringida al conjunto de los naturales. Hemos recogido buena parte de los resultados de Chamberland [3] en el capítulo 2, en el que previamente hemos puesto una sección con todas las definiciones básicas de sistemas dinámicos (sobre todo basándonos en el fantástico libro introductorio a esta teoría de Devaney [1]). Una pieza clave en el artículo de Chamberland que ha permitido describir bastantes propiedades dinámicas de la función f se basa en el hecho de que esta función tiene derivada Schwarziana negativa. A esto dedicamos una sección entera. Salvando los conceptos básicos de sistemas dinámicos y algún resultado importante de Singer,Blokh - Lyubich (que hemos presentado en la memoria sin demostración) sobre el comportamiento de órbitas de una función real con derivada Schwarziana negativa, los enunciados y argumentos tienen un carácter bastante elemental (no requieren mucho más que un curso avanzado de cálculo infinitesimal). No obstante, en el artículo se echan en falta algunos de los detalles técnicos últimos para probar las afirmaciones que se establecen. Nuestro trabajo ha consistido en intentar completar estos detalles, lo que hemos conseguido razonablemente pero no en todos los casos. Sospechamos, aunque no se hace explícito en [Chamberland], que en algunos casos se requieren técnicas numéricas para las demostraciones de algunas acotaciones, propiedades etc., las cuales escapan de los objetivos de esta memoria. Señalamos convenientemente en la memoria cuándo nos parece que se han usado este tipo de argumentos para las demostraciones.

Capítulo 1

El problema 3p+1

En este capítulo vamos a tratar el artículo "An analysis of the Collatz Conjeture" escrito por Motta, Roscoe, Aparecido. Nosotros lo que vamos a hacer es a establecer los resultados que se proponen, dando las pruebas nosotros mismos y dando un enfoque distinto en algunas partes.

1.1. Conjetura de Collatz

Consideremos la aplicación $C : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por:

$$C(p) = \left\{ \begin{array}{lll} p/2 & si & p \text{ es par} \\ & & \\ 3p+1 & si & p \text{ es impar} \end{array} \right\}.$$

La **conjetura de Collatz** afirma que para todo $p \in \mathbb{N}$ existe un índice n tal que $C^n(p) = 1$. En otras palabras, que para todo $p \in \mathbb{N}$ el 1 pertenece a la sucesión de iterados de p, definida como

$$I(p) = \big(p, C(p), C^2(p), \dots, C^n(p), \dots\big),$$

Ejemplo 1.1.

$$I(1) = (1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots).$$

$$I(5) = (5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots).$$

$$I(7) = (7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \dots).$$

Usando la terminología de sistemas dinámicos, como vamos a hacer en el segundo capítulo de esta memoria, si denotamos por

$$O(p) = \{C^n(p) : n \geq 0\},$$

a la órbita de p, la conjetura de Collatz puede enunciarse como que para todo $p \in \mathbb{N}$ se cumple que $1 \in O(p)$ o, en otras palabras, a la vista de la sucesión de iterados $I(1)$ del ejemplo, toda órbita es *preperiódica*, es decir, acaba siendo periódica, con periodo $(1, 4, 2)$. En particular, si la conjetura fuera cierta, toda órbita sería finita y $O(1) = \{1, 2, 4\}$ sería la única órbita periódica.

1.1.1. Reformulaciones de la conjetura. La aplicación T

A la hora de estudiar el problema $3p + 1$ es de utilidad modificar la defínción original de la aplicación por otras más cómodas.

En la literatura es habitual considerar lo que se conoce como la aplicación de Collatz modificada, definida como sigue:

$$\widetilde{C}(p) = \begin{cases} p/2 & si \quad p \text{ es par} \\ \\ (3p+1)/2 & si \quad p \text{ es impar} \end{cases}$$

Con esta nueva aplicación, la reformulación de la conjetura es exactamente la misma: para todo $p \in \mathbb{N}$ existe un n tal que $\widetilde{C}^n(p) = 1$. Esto se debe a que la única diferencia entre las aplicaciones C y $\widetilde{C}$ es que en la segunda, en las iteraciones en las que el número de partida p es impar, se adelanta una iteración teniendo en cuenta que 3p+1 es par.

En términos de sistemas dinámicos, las órbitas dadas por la aplicación de Collatz modificada están estrictamente contenidas en las órbitas de la aplicación C. La conjetura quedaría enunciada como que toda órbita es preperiódica con periodo $(1, 2)$, que es precisamente la órbita del 1, $O(1) = (1, 2)$.

En general el motivo por el cual se prefiere en la literatura el uso de la aplicación de Collatz modificada es estético, los resultados a los que se llegan son en cierto modo más elegantes.

En esta memoria se va a utilizar otra modificación diferente de la aplicación C. Para ello primero definimos la siguiente aplicación auxiliar

Definición 1.2. Sea $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por la propiedad siguiente: dado $p \in \mathbb{N}$ no nulo, $2^{\psi(p)}$ es la máxima potencia de 2 que divide a p, es decir, podemos escribir $p = 2^{\psi(p)} p_1$, siendo p_1 un número impar.

Sea $I \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los números impares, a continuación definimos la aplicación $T : I \to I$, que es la modificación que vamos a usar a lo largo de esta memoria:

Definición 1.3. Se define la aplicación $T : I \to I$ como:

$$T(p) = \frac{(3p+1)}{2^{\psi(3p+1)}}.$$

Observamos que los elementos de la sucesión de iterados por la aplicación T de un número impar p,

$$(p, T(p), T^2(p), \dots)$$

son precisamente los términos impares en la sucesión de iterados de la aplicación $\widetilde{C}$. Dichos términos tienen un aspecto similar al siguiente, por ejemplo el caso del iterado $T^3(p)$,:

$$T^3(p) = \frac{3\,\dfrac{3\,\dfrac{3p+1}{2^{k_1}}+1}{2^{k_2}}+1}{2^{k_3}}.$$

Donde, para $i \geq 1$, cada número k_i es el exponente correspondiente a iteración i - ésima, es decir,

$$k_i = \psi(3T^{i-1}(p)+1).$$

Por su propia definición, cada uno de los exponentes k_i es un número natural, no nulo puesto que $3T^{i-1}(p)+1$ es par para todo $i \geq 1$. En general el iterado n - ésimo es de la forma

$$T^n(p) = \frac{3\dfrac{\dfrac{3\dfrac{3p+1}{2^{k_1}}+1}{\vdots}}{2^{k_{n-1}}}+1}{2^{k_n}}. \tag{1.1}$$

Como vemos, de nuevo la aplicación es equivalente, lo único que estamos haciendo es condensar la sucesión de iterados, en este caso al máximo. En consecuencia la conjetura vuelve a ser la misma:

Conjetura de Collatz para la aplicación T: para todo $p \in \mathbb{N}$ existe un índice n para el cual se cumple que $T^n(p) = 1$.

En términos de sistemas dinámicos hemos reducido las órbitas hasta quedarnos sólamente con los números impares, en particular, el ciclo $(1, 4, 2)$ queda condensado al (1), que se convierte en un punto fijo. La conjetura de Collatz para la aplicación T se enuncia diciendo que 1 es el único punto fijo de T y que además es un atractor global, es decir, que toda órbita termina "cayendo" en el 1.

Otra reformulación de la conjetura de Collatz

En este apartado vamos a presentar una nueva reformulación de la conjetura, esta parte no está basada en la bibliografía y es una pequeña aportación nuestra. El enfoque va ser conseguir expresar los números naturales de una forma muy concreta y conveniente para tratar el problema $3p + 1$.

Primero, por comodidad vamos a extender la aplicación T a los números pares: en un abuso del lenguaje consideramos la aplicación T como $T : \mathbb{N} \to I$, definiéndola cuando p es par como

$$T(p) = \frac{p}{2^{\psi(p)}}.$$

Por convenio, de aquí en adelante, nos referiremos a esta primera iteración como la iteración 0 - ésima y siguiendo la tendencia marcada en la expresión 1.1, denotaremos a este primer exponente como k_0. De este modo si el número p es impar, simplemente consideraremos que $k_0 = 0$.

Necesitaremos ahora unas definiciones que además nos serán de utilidad para las secciones posteriores.

Definición 1.4. Dado $p \in \mathbb{N}$, llamaremos $\mathbf{k}(p)$ a la sucesión $\{k_i\}_{i=0}^{\infty}$, donde los k_i son los exponentes asociados a cada iterado por la aplicación T, es decir,

$$k_i = \psi(3T^{i-1}(p) + 1) \text{ para cada } i \geq 1 \text{ y } k_0 = \psi(p).$$

Denotaremos también como $\mathbf{k}_n(p)$ al truncamiento de los n primeros términos, es decir,

$$\mathbf{k}_n(p) = \{k_i\}_{i=0}^{n}.$$

Nos referiremos a ellas como la *sucesión de exponentes* de p y la *truncación n - ésima* de la sucesión de exponentes de p, respectivamente.

Definición 1.5. Dado $p \in \mathbb{N}$, un índice n y una sucesión $\mathbf{k} = \{k_i\}_{i=0}^{\infty}$ de números naturales no nulos, llamaremos $H_n(\mathbf{k}, p)$ al resultado de sustituir p en 1.1 como si fuera el valor inicial y los n primeros números de la sucesión $\mathbf{k}$ como si fueran los exponentes, si por comodidad escribimos $p_0 = p/2^{k_0}$, esto es

$$H_n(\mathbf{k}, p) = \cfrac{3\,\cfrac{\cfrac{3\,\cfrac{3p_0 + 1}{2^{k_1}} + 1}{\vdots}}{2^{k_{n-1}}} + 1}{2^{k_n}}.$$

Observemos que en general $H_n(\mathbf{k}, p) \neq T^n(p)$, de hecho como consecuencia directa de las definiciones se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.6. Dado $p \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$H_n(\mathbf{k}, p) = T^n(p) \text{ para todo } n \text{ si, y sólo si, } \mathbf{k} = \mathbf{k}(p).$$

Una vez dadas estas definiciones fijémonos en la siguiente consideración: dado un número p impar, si existe un índice n tal que $T^n(p) = 1$, entonces podemos despejar p usando la fórmula 1.1 para obtener la siguiente expresión de p

$$p = \frac{2^{k_n+\cdots+k_1} - 2^{k_{n-1}+\cdots+k_1} - 3 \cdot 2^{k_{n-2}+\cdots+k_1} - \ldots - 3^{n-2}2^{k_1} - 3^{n-1}}{3^n}.$$

Observamos que si el número p fuera par, en la iteración 0 - ésima nos queda algo de la forma $p/2^{k_0}$, donde $k_0 = \psi(p)$, igualado a la expresión anterior, es decir, basta multiplicar toda la expresión anterior por 2^{k_0} para asi despejar p.

En la siguiente proposición veremos que el recíproco a la consideración anterior también es cierto

Proposición 1.7. Sea $\mathbf{k} = \{k_i\}_{i=0}^n$ una sucesión de números naturales tales que $k_i \geq 1$ para todo $i \geq 1$ y sea

$$p = \frac{2^{k_n+\cdots+k_0} - 2^{k_{n-1}+\cdots+k_0} - 3 \cdot 2^{k_{n-2}+\cdots+k_0} - \ldots - 3^{n-2}2^{k_1+k_0} - 3^{n-1}2^{k_0}}{3^n}. \tag{1.2}$$

Entonces $k_0 = \psi(p)$ y $\mathbf{k}(p) = (k_1, \ldots, k_n, 2, 2, \ldots)$

Demostración. La demostración se realiza recursivamente con n. Primero sacamos factor común 2^{k_0}

$$p = \frac{2^{k_0}\left(2^{k_n+\cdots+k_1} - 2^{k_{n-1}+\cdots+k_1} - \ldots - 3^{n-1}\right)}{3^n}.$$

Como vemos, 2^{k_0} es la máxima potencia de 2 que podemos sacar factor común en la expresión anterior, es decir, $\psi(p) = 2^{k_0}$ (recordemos de nuevo que los k_i son naturales no nulos). En consecuencia la iteración 0 - ésima, a la que denotaremos por comodidad como p_0, es igual a

$$p_0 = \frac{p}{2^{k_0}}.$$

Seguimos ahora con la siguiente iteración, $T(p_0)$. Para ello vamos a calcular $3p_1 + 1$ y manipularemos sacando factor común 2^{k_1} en la expresión obtenida:

$$3 \cdot T_0(p) + 1 = \frac{2^{k_1}\left(2^{k_n+\cdots+k_2} - 2^{k_{n-1}+\cdots+k_2} - \ldots - 3^{n-2}\right)}{3^{n-1}}.$$

Nuevamente, 2^{k_1} es la máxima potencia de 2 que podemos sacar como factor común por lo que $\psi(3p_0 + 1) = 2^{k_1}$ y en consecuencia

$$T(p) = (3 \cdot p_0 + 1)/2^{k_1}.$$

Recursivamente vemos que podemos seguir, obteniendo que

$$\mathbf{k}_n(p) = \{k_0, \dots, k_n\}$$

y llegando a la igualdad $T^n(p) = 1$. Al ser 1 un punto fijo para la aplicación T, desde el índice n en adelante los exponentes asociados son constante igual a 2 . ★

Veamos lo que significa la proposición anterior. Dada una sucesión $\mathbf{k}$ como la del enunciado, si denotamos por $I_0(\mathbf{k})$ al número p dado por la fórmula 1.2 del enunciado entonces, $I_0(\mathbf{k})$ satisface la conjetura de Collatz. Esto se debe a que si denotamos por n a la longitud de $\mathbf{k}$ entonces

$$T^n(I(\mathbf{k})) = 1,$$

es decir, $I_0(\mathbf{k})$ alcanza el punto fijo tras a lo sumo n iteraciones de T. Resumiendo, lo que hemos probado es la siguiente reformulación de la Conjetura de Collatz:

Teorema 1.8. *Sea $I_0 : k \mapsto I_0(k)$ la aplicación que envía cada sucesión finita* $\mathbf{k}$ *como en el enunciado de la proposición anterior en el número natural dado por la fórmula 1.2. La Conjetura de Collatz es equivalente a que I_0 es una aplicación cuya imagen contiene a los naturales.*

Ventajas de la aplicación T

En el siguiente apartado se justifica la preferencia por la aplicación T. El problema de la conjetura de Collatz es el mismo utilizando una aplicación u otra y, como es lógico, no hay ningún argumento más allá de la heurística o de la preferencia personal para escoger una u otra.

El primer criterio que apoya la elección de la aplicación T a la hora de tratar este problema es que, dado $p \in \mathbb{N}$, el número de iteraciones que tarda el número p en alcanzar el 1 tiene que ser de alguna manera representativo. Por ejemplo resulta engañoso que el número 2048 requiera de 11 iteraciones cuando, al tratarse de una potencia de 2 es trivial ver que verifica la conjetura de Collatz. Si nos centramos en el enfoque dado por la reformulación 1.8 anterior, vemos que la conjetura puede ser entendida como conseguir expresar los números naturales como sumas de potencias entrelazadas como en 1.2. A priori parece mucho más orientativo que el número de iteraciones requerido por un número para llegar al 1 nos indique el número de sumandos que son necesarios para dar una expresión de p como en 1.2.

La preferencia por la aplicación T está muy ligada a preferir enfocar la conjetura en los términos de la reformulación del teorema 1.8 anterior, la propia expresión 1.2 surge usando la aplicación T. De hecho, nuestro siguiente argumento lo que hace es apoyar heurísticamente el enfoque del problema según dicha reformulación. Lo que vamos a hacer es cambiar el problema de la conjetura de Collatz por otro similar y más secillo, en un intento de entenderlo mejor.

Vamos a considerar el problema del $p-1$. Esto es, sea I el conjunto de los números impares, dado $p \in I \setminus \{1\}$ el problema del $p-1$ es aquel cuyos iterados vienen dados por la aplicación $S : I \setminus \{1\} \to I$ definida por

$$S(p) = \frac{p-1}{\psi(p-1)}.$$

Igualmente podemos extender la aplicación S a los números pares considerando una primera iteración 0 - ésima en la que dividimos por $\psi(p)$. Hemos apartado el número 1 de la definición porque $\psi(0)$ no esta bien definido. Podemos considerar que $S(1) = 1$ para que sea un punto fijo o simplemente podemos parar de iterar cuando llegamos al 1, no es relevante.

Para la aplicación S el problema es totalmente inmediato, dado p existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^n(p) = 1$ porque en cada iteración estamos obteniendo un número impar estrictamente menor que el anterior, es evidente que todas las sucesiones de iterados acabarán llegando al 1. Sin embrgo este argumento no parece fácil de trasladar al problema de la conjetura de Collatz.

Veamos ahora el otro punto de vista. Usaremos un ejemplo simplemente para darnos cuenta de lo que sucede. Consideremos $p = 39$,

$$\frac{\frac{\frac{39}{2}-1}{2}-1}{8} = 1, \text{ con } I(39) = (39, 19, 9, 1).$$

Despejamos ahora $p = 39$ para ver que, al iterar la aplicación S anterior, hemos obtenido de manera un poco peculiar la expresión en base 2 del número p:

$$p = 2 \cdot [1 + 2 \cdot (8 + 1)] + 1 = 32 + 4 + 2 + 1.$$

El problema bajo este punto de vista también es inmediato: todos los números admiten una expresión binaria. No obstante (en mi opinión), intentando trasladar las justificaciones que se puede de ésto último a la conjetura de Collatz, parecen surgir más preguntas.

¿Podemos conseguir una especie de algoritmo de división que nos ayude de alguna manera?

¿Podemos intuir un patrón sobre cómo se van cubriendo todos los números a medida que permitimos expresiones más largas?

¿Podemos de alguna manera razonar recursivamente que se van cubriendo todos los números?

Por lo menos intuitivamente parece interesante enfocar el problema del $3p+1$ como una generalización de la expresión de los números en una base de potencias a dar expresiones en las que las potencias están entrelazadas como en 1.2 y en las que no todos los sumandos tienen por qué ser positivos.

Como nota el hecho de que en el problema $3p+1$ se sume 1 es totalmente crucial: si consideramos el problema del $3p-1$ el comportamiento es totalmente diferente, aunque el 1 sigue siendo un punto fijo, al menos la sucesión de iterados $(5,7)$ forma otro ciclo distinto.

1.2. Crecimiento de la sucesión de iterados

Para poder probar la conjetura de Collatz (en la versión de la aplicación T descrita más arriba) necesitamos probar que, por un lado, no existe ningún número p cuya sucesión de iterados sea divergente y que, por el otro, no existe ningún otro ciclo diferente del punto fijo (1). En realidad sólo debemos preocuparnos por ciclos de orden mayor o igual que dos, como indica la siguiente proposición.

Proposición 1.9. La aplicación T sólo posee al número 1 como punto fijo.

Demostración. Supongamos, con algo más de generalidad, que existen números $k, p \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{3p+1}{2^k} = p, \text{ es decir, despejando } 1 = p(2^k - 3).$$

Como buscamos una solución entera positiva, ambos factores tienen que ser unidades. Consecuentemente tiene que ser por un lado $p = 1$ y por el otro $k = 2$. Por lo tanto el único punto fijo posible es el 1. ★

En este apartado vamos a centrarnos en el estudio del crecimiento de la sucesión de iterados por la aplicación T, para un $p \in \mathbb{N}$ inicial dado, con el ánimo de conocer la posibilidad de existencia de sucesiones divergentes.

1.2.1. Algunas acotaciones.

Por comodidad, vamos a denotar por $\mathbf{e}$ a la sucesión infinita

$$\mathbf{e} = (0, 1, 1 \ldots, 1, \ldots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Denotaremos también por $\mathbf{e}_n$ a su truncamiento n - ésimo

$$\mathbf{e}_n = (0, 1, 1 \ldots, 1,) \in \mathbb{N}^n.$$

De la expresión 1.1 y del hecho de que la sucesión de exponentes $\{k_i)\}_{i=0}^{\infty}$ asociados a un número p dado son siempre mayores o iguales a 1 se deduce que

$$T^n(p) \leq H_n(e, p) \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Manipulemos la expresión de $H_n(\mathbf{e}, p)$ para obtener una cota explícita:

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{e}, p) &= \left(\frac{3}{2}\right)^n p + \frac{3^{n-1}}{2^n} + \cdots + \frac{3^0}{2} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n p + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i = \left(\frac{3}{2}\right)^n p + \frac{1}{2}\frac{(3/2)^n - 1}{3/2 - 1} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n (p+1) - 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Donde no hemos usado más que la fórmula de la serie geométrica y simplificado fracciones de forma usual.

Resumiendo hemos obtenido la siguiente cota para los iterados:

$$T^n(p) \leq H_n(\mathbf{e}, p) = \left(\frac{3}{2}\right)^n (p+1) - 1. \tag{1.4}$$

1.2.2. Órbitas monótonas divergentes

Para dar sentido a la validez de la cota 1.4 que hemos obtenido en el apartado anterior, a continuación estudiaremos si la cota es alcanzada por algún número p, pues recordemos que dado $p \in \mathbb{N}$ la sucesión $\mathbf{k}(p)$ queda totalmente determinada, de hecho, se tiene que

$$T^n(p) = H_n(\mathbf{e}, p) \text{ si, y sólo si, } \mathbf{k}_n(p) = \mathbf{e}_n.$$

Lo que haremos será estudiar si la propiedad $\mathbf{k}_n(p) = \mathbf{e}_n$ impone restricciones al número natural p.

Teorema 1.10. *Sea $p \in \mathbb{N}$ y supongamos que para algún natural $n \geq 1$ se cumple que $\mathbf{k}_{n-1}(p) = \mathbf{e}_{n-1}$, entonces*

$$p \equiv -1 \mod 2^n.$$

Demostración. Razonaremos por inducción sobre n. Si $\mathbf{k}_0(p) = \mathbf{e}_0$ entonces p es impar y trivialmente

$$p \equiv -1 \mod 2.$$

Ahora si $\mathbf{k}_1(p) = \mathbf{e}_1$, primero p es impar y, segundo, se cumple que

$$T(p) = \frac{3p+1}{2} \equiv 1 \mod 2.$$

Despejando p esto significa que

$$p \equiv 3 \equiv -1 \mod 4.$$

Observemos que se tiene la siguiente propiedad, obtenida directamente de las definiciones

$$\text{Si } \mathbf{k}_n(p) = \mathbf{e}_n \text{ entonces } \mathbf{k}_{n-1}(T(p)) = \mathbf{e}_{n-1}.$$

Tomamos como hipótesis de inducción que el teorema es cierto para la iteración $(n-1)$ - ésima. Si suponemos que $\mathbf{k}_n(p) = \mathbf{e}_n$ entonces, por lo que hemos dicho, tenemos que $\mathbf{k}_{n-1}(T(p)) = \mathbf{e}_{n-1}$. Aplicamos la hipótesis de inducción a $T(p)$ para obtener que

$$T(p) = \frac{3p+1}{2} \equiv -1 \mod 2^{n-1}.$$

Despejando $3p$ en la congruencia anterior esto significa que

$$3p \equiv -3 \mod 2^n.$$

Simplificamos el factor 3 a ambos lados (podemos hacerlo puesto que 3 tiene inverso módulo 2^n) y finalmente obtenemos lo que buscábamos:

$$p \equiv -1 \mod 2^n.$$

★

Observación 1.11. Como vemos, del teorema anterior se deduce que, el hecho de ir buscando un número inicial p tal que $\mathbf{k}_n(p) = \mathbf{e}_n$ le impone al número p crecer exponencialmente con n. En consecuencia no existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{k}(p) = \mathbf{e}$. En otras palabras la cota que obtuvimos en 1.4 no se alcanza, de hecho dedicaremos un apartado entero en ver cómo podemos mejorar dicha cota.

Teorema 1.12. *No existe $p \in \mathbb{N}$ tal que su sucesión de iterados para la aplicación T sea monótona estrictamente creciente*

Demostración. Procederemos probando que si $\mathbf{k}(p) \neq \mathbf{e}$ entonces p no tiene sucesión de iterados monótona estrictamente creciente. Primero si $\mathbf{k}_0(p) \neq \mathbf{e}_0$ entonces p es par y

$$T(p) = \frac{p}{\psi(p)} < p.$$

Segundo sea p impar y supongamos que $\mathbf{k}_1(p) \neq \mathbf{e}_1$, es decir $\psi(3p+1) \geq 2$. Entonces

$$T(p) \leq \frac{3p+1}{4} \leq p,$$

puesto que manipulando equivalentemente vemos que ningún $p \in \mathbb{N}$ puede cumplir que

$$3p + 1 > 4p.$$

Si $\mathbf{k}_i(p) \neq \mathbf{e}_i$ (siendo i el menor índice para el que esto se verifica) podemos repetir el razonamiento anterior cambiando p por $T^{i-1}(p)$.

En conclusión, como hemos visto en la observación siguiente al teorema 1.10 que no existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{k}(p) = \mathbf{e}$, queda probado el teorema. ★

A continuación vamos a ver que el recíproco al teorema 1.10 anterior es también cierto. Para ello introduciremos la definición de una nueva aplicación $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ muy útil para tratar la conjetura de Collatz.

Definición 1.13. Sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donde dado $p \in \mathbb{N}$, $\phi(p)$ es el índice correspondiente a la primera iteración en la que el exponente asociado a dicha iteración es mayor o igual que 2. En otras palabras $\phi(p)$ es el menor de los índices $i \in \mathbb{N}$ para los cuales se cumple que

$$\psi(3T^{i-1}(p) + 1) \geq 2.$$

Observación 1.14. Para aclarar ideas, si $\mathbf{k}(p) = \{k_i\}_{i=0}^{\infty}$, entonces $\phi(p)$ puede ser la iteración 0 - ésima si p es par, o la n - ésima en la situación en la que $k_1 = \cdots = k_{n-1} = 1$ y $k_n \neq 1$.

Gracias al teorema 1.10 anterior hemos visto que para cualquier $p \in \mathbb{N}$ dicha iteración existe, en consecuencia $\phi(p)$ está bien definido, es finito.

Observamos que cuando $\phi(p) \geq 1$ y p es impar se cumple que

$$T^{\phi(p)-1}(p) = H_{\phi(p)-1}(\mathbf{e}, p).$$

En el caso en el que p es par y $\phi(p) \geq 1$ podemos fácilmente adaptar la igualdad anterior de la siguiente forma:

$$T^{\phi(p)-1}(p) = H_{\phi(p)-1}(\mathbf{e}, p/2^{k_0}).$$

Teorema 1.15. *Sea $p \in \mathbb{N}$ y sea $n = \psi(p+1)$, es decir, n es el mayor número natural para el que se verifica $p \equiv -1 \mod 2^n$. Entonces se cumple que*

$$\mathbf{k}_{n-1}(p) = \mathbf{e}_{n-1}.$$

Además $\mathbf{k}_n(p) \neq \mathbf{e}_n$, es decir, $\phi(p) = n$.

Demostración. Para la demostración de este teorema utilizaremos continuamente la siguiente fórmula, válida para $1 \leq i \leq \phi(p)$,

$$T^i(p) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^i (p+1) - 1}{2^{\psi\left[\left(\frac{3}{2}\right)^i (p+1)-1\right]-1}}. \tag{1.5}$$

La fórmula es consecuencia de las definiciones y de la igualdad que obtuvimos en los cálculos hechos en 1.3

$$H_k(\mathbf{e}, p) = \left(\frac{3}{2}\right)^k (p+1) - 1.$$

En general, para $1 \leq i \leq \phi(p)$, en el numerador se cumple que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^i (p+1) - 1 = \frac{3T^{i-1}(p) + 1}{2},$$

y en el denominador estamos dividiendo por 2 las veces que faltan, por definición de ψ.

Ahora bien, lo que vamos a hacer será proceder recurrentemente comprobando que, para $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$, se cumple que $\psi\left[\left(\frac{3}{2}\right)^i (p+1) - 1\right] = 1$. Veamos esto detalladamente y paso a paso: primero como por hipótesis p es impar, ya sabemos que $\mathbf{k}_0(p) = \mathbf{e}_0$ y por lo tanto $\phi(p) > 0$.

Segundo, para la primera iteración al ser $\phi(p) > 0$, la fórmula 1.5 del principio es válida para $i = 1$ y podemos razonar de la siguiente manera: puesto que $p \equiv -1 \mod 2^n$, es inmediato que

$$\psi\left[\left(\frac{3}{2}\right)(p+1) - 1\right] = 1.$$

Sustituímos este dato en la fórmula 1.5 para obtener que

$$T(p) = \left(\frac{3}{2}\right)(p+1) - 1.$$

En consecuencia $\mathbf{k}_1(p) = \mathbf{e}_1$ y por lo tanto $\phi(p) > 1$

Recurrentemente vemos que el razonamiento anterior es válido hasta la iteración $n-1$ - ésima, de donde conluímos que $\mathbf{k}_{n-1}(p) = \mathbf{e}_{n-1}$ y $\phi(p) > (n-1)$. Sin embargo, en la iteración n - ésima sucede que al ser $\psi(p+1) = n$, el número $\left(\frac{3}{2}\right)^n (p+1)$ es impar y por lo tanto

$$\psi\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n (p+1) - 1\right] \geq 2.$$

y en consecuencia $\phi(p) = n$ y, efectivamente, $\mathbf{k}_n \neq \mathbf{e}_n$. ★

Corolario 1.16. *Es suficiente demostrar la conjetura de Collatz para el subconjunto de los números $p \in \mathbb{N}$ tales que $p \equiv 2 \mod 6$.*

Demostración. Dado $p \in \mathbb{N}$, vamos a considerar el número

$$\bar{p} = \frac{3T^{\phi(p)-1}(p) + 1}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\phi(p)-1} (p+1) - 1.$$

Vemos que si $\bar{p}$ verifica la conjetura de Collatz entonces p también la verificará puesto que sus sucesiones de iterados se comportan igual en el infinito. Más explícitamente se cumple que $T(\bar{p}) = T^{\phi(p)+1}(p)$ y en consecuencia, sus sucesiones de iterados coinciden de ahí en adelante (aunque los índices estén desfasados), de hecho también $T^{\phi(p)}(p)$ coincide con la iteración 0 - ésima de $\bar{p}$.

Finalmente comprobamos que $\bar{p} \equiv 2 \mod 6$. Por un lado,

$$\bar{p} = \frac{3T^{\phi(p)-1}(p) + 1}{2}$$

y por definición de $\phi(p)$ el número $\bar{p}$ tendrá que ser impar. Por el otro lado,

$$\bar{p} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\phi(p)-1} (p+1) - 1 \in \mathbb{N}$$

y, en consecuencia $\bar{p} \equiv -1 \mod 3$. Juntando las dos condiciones, efectivamente vemos que $\bar{p} \equiv 2 \mod 6$ y queda demostrado que es suficiente probar la conjetura sólo para este conjunto de números. ★

1.2.3. Acotación de los iterados refinada

Como se indicó en la observación subsiguiente al teorema 1.10 vamos a dedicar este apartado a mejorar la cota 1.4 que obtuvimos en el primer apartado de esta sección. No obstante, esta vez no vamos a conseguir una expresión cerrada como en 1.4, la acotación que demos para los iterados estará definida recurrentemente y será válida sólamente para cierta subsucesión de iterados de p. En la referencia en la que nos hemos basado, el artículo de Motta, hay un pequeño error en esta parte. Si bien dicho error influye en la expresión de la cota, la pauta de razonamiento es prácticamente igual.

Lema 1.17. Dado $p \in \mathbb{N}$ sea $n_p = \lfloor \log_2(p+1) \rfloor + 1$, es decir, n_p es el menor $n \in \mathbb{N}$ para el cual se cumple que $p \leq 2^n - 1$. Entonces $\phi(p) \leq n_p$.

Demostración. Hacemos la demostración por reducción al absurdo. Si se cumple que $\phi(p) > n_p$ entonces es inmediato que $\mathbf{k}_{n_p}(p) = \mathbf{e}_n$ y por el teorema 1.10 se sigue que $p \equiv -1 \mod 2^{n_p+1}$, contradicción con el hecho de que $p \leq 2^n - 1$. ★

Como consecuencia del lema anterior vemos que, dado $p \in \mathbb{N}$, en sus n_p primeras iteraciones habrá, al menos, un exponente asociado mayor que uno. A continuación, dado $p \in \mathbb{N}$, nuestro objetivo será obtener una cota superior para el iterado n_p - ésimo de p.

Proposición 1.18. Sea $p \in \mathbb{N}$ y consideremos $\bar{\mathbf{e}} = (2, 1, \dots, 1, \dots)$. Entonces se cumple que

$$T^{n_p}(p) \leq H_{n_p}(\bar{\mathbf{e}}, p).$$

Demostración. Gracias al lema anterior sabemos que en las primeras n_p iteraciones de p hay, por lo menos, un exponente asociado mayor que uno. Como queremos ponernos en la situación en la que el crecimiento de los iterados es lo más grande posible, supondremos que dicho exponente es igual a 2 y que sucede en la primera iteración. Más detalladamente, sea $\mathbf{k}(p) = \{k_i\}_{i=0}^{\infty}$, vemos que tomando $k_1 = 2$ es de la manera en la que dividimos por 4 al menor número de unos posible. Por verlo en un ejemplo

$$\frac{3\dfrac{3\dfrac{3p+1}{4}+1}{2}+1}{2} > \frac{3\dfrac{3\dfrac{3p+1}{2}+1}{2}+1}{4}.$$

En consecuencia, usando por definición de H se cumple la desigualdad de la proposición. ★

Observación 1.19. El error en la referencia en la que nos hemos basado reside justo ahí, en el artículo de Motta se supone que $k_1 = 1$ y que $k_{\phi(p)} = 2$. Como ya dijimos, aunque el resultado que obtengamos sea algo diferente el procedimiento usado será el mismo.

A continuación haremos con $\bar{\mathbf{e}}$ lo mismo que hicimos en 1.3 para $\mathbf{e}$, daremos una expresión cerrada para la expresión $H_n(\bar{\mathbf{e}}, p)$ siguiendo el mismo procedimiento que seguimos para $H_n(\mathbf{e}, p)$.

Lema 1.20. Dados p y n naturales se verifica que

$$H_n(\bar{\mathbf{e}}, p) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(p + \frac{5}{6}\right) - 1.$$

Demostración. Igual que la otra vez usamos la fórmula de la serie geométrica y simplificamos fracciones de forma usual.

$$\begin{aligned} H_n(\bar{\mathbf{e}}, p) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n p + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^0 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n p - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(3/2)^n - 1}{3/2 - 1} \qquad (1.6) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(p + 1 - \frac{1}{6}\right) - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(p + \frac{5}{6}\right) - 1. \end{aligned}$$

★

Recapitulando hemos llegado a que

$$T^{n_p}(p) \le \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(p + \frac{5}{6}\right) - 1.$$

Lo que hacemos ahora es repetir para $T^{n_p}(p)$, todo el razonamiento que acabamos de hacer para p: si llamamos $p_1 = T^{n_p}(p)$ podremos acotar $T^{n_{p_1}}(p)$ y asi recursivamente. En definitiva hemos llegado al siguiente resultado

Teorema 1.21. Dado $p \in \mathbb{N}$, consideremos la subsucesión de iterados siguiente, definida recurrentemente

$$v \qquad \begin{aligned} p_0 &= p \\ p_1 &= T^{n_{p_0}}(p_0) \\ &\cdots \\ p_k &= T^{n_{p_{k-1}}}(p_{k-1}). \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Entonces se verifica la siguiente acotación

$$\begin{aligned} p_0 &= p \\ p_1 &\le \left(\frac{3}{2}\right)^{n_{p_0}} \left(p_0 + \frac{5}{6}\right) - 1 \\ &\cdots \\ p_k &\le \left(\frac{3}{2}\right)^{n_{p_{k-1}}} \left(p_{k-1} + \frac{5}{6}\right) - 1. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

1.3. Relaciones entre las funciones ϕ y ψ.

En el artículo de Motta dedica una sección titulada “Further Investigations” a indagar sobre los patrones y relaciones que aparecen al estudiar el comportamiento de las funciones ψ y ϕ definidas anteriormente. Nosotros dedicamos este apartado a recopilar y demostrar las conclusiones que obtiene.

Para fijar ideas a lo largo de toda esta sección, dado $p \in \mathbb{N}$, vamos a denotar por k_i al exponente asociado a la iteración i - ésima. Por otro lado, como recordatorio, $\psi(p)$ era la mayor potencia de 2 que divide a p, es decir, el exponente tal que $p = 2^{\psi(p)}k$, siendo k un número impar y $\phi(p)$ era el índice de la primera iteración en la que el exponente asociado es mayor o igual que 2, es decir con la notación que hemos estado usando, $\phi(p) = n$ en la situación $k_1 = \cdots = k_{n-1} = 1$ y $k_n \neq 1$.

Proposición 1.22. Dado $p \in \mathbb{N}$ un número impar, se cumple que

$$\phi(p) = \psi(p+1).$$

La proposición anterior es en realidad el teorema 1.15, pero lo volvemos a enunciar sólamente en términos de ϕ y ψ por comodidad.

Teorema 1.23. *Dado $p \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\phi(2p-1) = \psi(5^p - 1) - 1.$$

Demostración. Usemos la proposición anterior para calcular $\phi(2p-1)$: sea $p = 2^k p_1$, siendo p_1 impar, entonces

$$\phi(2p-1) = \psi(2p) = \psi(2 \cdot 2^k p_1) = k + 1.$$

Por otro lado calculemos $\psi(5^p - 1)$ teniendo en cuenta que, por el binomio de Newton,

$$(4+1)^{2^k p_1} = 1 + \binom{2^k p_1}{1} 4 + \binom{2^k p_1}{2} 4^2 + \cdots \equiv 1 \mod 2^{k+2}.$$

En consecuencia tenemos que

$$\psi(5^p - 1) = \psi\left((4+1)^{2^k p_1} - 1\right) = \psi\left(\binom{2^k p_1}{1} 4 + 1 - 1\right) = k + 2.$$

Puesto que los sumandos del binomio $\binom{2^k p_1}{2} 4^2$, $\binom{2^k p_1}{3} 4^3$, etc que no aparecen son divisibles por potencias de 2 mayores o iguales que2^{kp_1+2}. ★

Corolario 1.24. Dado $p \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\phi(2p-1) = \psi((2^n + 1)^p - 1) - n + 1.$$

Demostración. Igual que en el teorema anterior se procede usando el binomio de Newton. ★

1.4. Consideraciones heurísticas

1.4.1. Crecimiento esperado

En este apartado vamos a indagar heurísticamente sobre el crecimiento geométrico asintótico que podemos esperar al iterar la aplicación T sobre un número p cualquiera. Para ello, en la expresión

$$\frac{3\dfrac{3\dfrac{3p+1}{2^{k_1}}+1}{\vdots \over 2^{k_{n-1}}}+1}{2^{k_n}},$$

vamos a ignorar los sumandos que aparecen y vamos a suponer que, si tomamos un número impar p cualquiera, el valor $3p+1$ puede ser cualquier número par equiprobablemente.

Es elemental darse cuenta de que, de entre todos los números pares, la mitad de ellos son múltiplos de 4 y la otra mitad son sólo múltiplos de 2. A su vez, de entre todos los múltiplos de 4 la mitad serán múltiplos de 8 y la otra mitad serán sólamente múltiplos de 4 y así sucesivamente. En otras palabras, dado un número impar p, estamos suponiendo que el exponente asociado a la primera iteración es: 1 con probabilidad $1/2$, 2 con probabilidad $1/4$ y, en general, n con probabilidad $1/2^n$.

Siguiendo con lo anterior, mantenemos la suposición de equiprobabilidad también para los sucesivos iterados de p, es decir, supondremos que $3T(p)+1, 3T^2(p)+1, \ldots$ pueden ser también cualquier número par equiprobablemente. Entonces vemos que a la larga habremos dividido por 2 en la mitad de las iteraciones, por 4 en un cuarto de las veces, por 2^n con probabilidad $1/2^n$ y así sucesivamente. Para hacernos una idea de el crecimiento que podemos esperar en cada iteración hallamos la media geométrica ponderada de todos los denominadores posibles, dada por el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \cdots \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Para calcularlo tomamos logaritmos y manipulamos

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}1-\frac{1}{4}2-\frac{1}{8}3-\cdots-\frac{1}{2^n}n+\cdots= \\
&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}-\cdots-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}-\cdots= \\
&=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2^n}-\cdots=-2
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Es decir el exponente esperado por el que dividimos es dos y en consecuencia el crecimiento esperado por cada iteración, despreciando los unos, es

$$\frac{3}{4}\cdot p.$$

Obviamente esto apoya la conjetura, dado un número impar p esperamos que su sucesión de iterados acabe decreciendo. No obstante cabe destacar que este argumento está basado en la suposición de que, dado p impar, el valor $3p+1$ puede ser cualquier número par aleatoriamente. A continuación damos un teorema que muestra que dicha suposición no está en absoluto desencaminada.

Teorema 1.25. *Sea k natural, dado cualquier conjunto de 2^k números impares consecutivos, hallamos el primer exponente asociado de cada uno de ellos. Si consideramos el conjunto de estos 2^k exponentes se cumple eque la mitad de ellos son iguales a 1, un cuarto de los exponentes son iguales a 2 y así sucesivamente hasta haber un exponente igual a k y otro mayor o igual que $k+1$.*

Demostración. Toda la demostración va a estar basada en el siguiente razonamiento, sea p impar y consideremos $p+2^n$ para n natural, nos preguntamos ahora la relación que hay entre el primer exponente asociado a p y el asociado a $p+2^n$. Para ello, sea $1\leq i\leq n+1$, discutiremos si es par el número

$$\frac{3(p+2^n)+1}{2^i}=\frac{3p+1}{2^i}+\frac{3\cdot 2^n}{2^i}$$

Vemos que cuando $i\leq n$, si podemos dividir $3p+1$ por 2 también podremos hacerlo para $3p+1+3\cdot 2^n$ y que además, si ambos son divisibles por 2^n, para $i=n+1$ en alguno de los dos voy a poder dividir por 2 al menos una vez más y en el otro no (porque 3 es impar).

Teniendo en cuenta lo anterior demostremos el teorema por inducción en k. Imaginemos que tenemos 2 naturales p_1 y p_2 consecutivos, es decir tales que $p_2=p_1+2$. Siguiendo el razonamiento anterior para n=1, uno de los dos tendrá como exponente asociado un 1 y el otro tendrá exponente asociado mayor o igual que 2.

Hagamos el paso $k = 2$ para aclarar ideas. Tenemos 2^2 impares consecutivos, es decir tales que $p_3 = p_1 + 2^2$ y $p_4 = p_2 + 2^2$. Por lo que hemos demostrado para $k = 1$ tenemos dos opciones para el primer exponente de p_1:

- Si p_1 tiene primer exponente 1 en el paso anterior, p_3 también lo tendrá. Por otro lado entonces p_2 tiene exponente mayor o igual que 2 en el paso anterior y, de entre p_2 y p_4, alguno tiene exponente mayor o igual que 3 y el otro tiene exponente 2. (Cumpliéndose la proporción que dice el teorema).

- Si, al contrario, p_1 fuera el que tiene exponente al menos 2 en el paso anterior, vemos que la situación es la misma intercambiando los papeles de p_1 y p_2 y los de p_3 y p_4.

En resumidas cuentas si el teorema es cierto para 2^{k-1} números impares consecutivos, cuando tenemos 2^k, por la hipótesis de inducción podemos suponer que para los 2^{k-1} primeros se cumple dicha proporción y pensamos en los 2^{k-1} siguientes expresados como

$$\begin{aligned} p_{2^{k-1}+1} &= p_1 + 2^{k-1} \\ p_{2^{k-1}+2} &= p_2 + 2^{k-1} \\ \dots \\ p_{2^k} &= p_{2^{k-1}} + 2^{k-1} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Por comodidad en la redacción, dado p_i, al $p_i + 2^{k-1}$ lo llamamos su duplicado. Por la hipótesis de inducción en los 2^{k-1} primeros números, todos menos uno tienen exponente asociado menor que k y todos sus duplicados van a tener el mismo exponente, (manteniéndose la proporción para los exponentes menores que k). Por otro lado de los 2^{k-1} primeros hay uno que tiene exponente mayor o igual que k, si lo consideramos junto a su duplicado alguno de los dos tendrá exponente k y el otro tendrá exponente mayor o igual que $k + 1$, manteniéndose la proporción exactamente como queríamos. ★

1.4.2. Iteraciones con exponente asociado 2

Recordemos el punto de vista que nos daba la reformulación 1.8 sobre la conjetura: dado $p \in \mathbb{N}$ (impar por comodidad), conociendo los n primeros exponentes $k_1, \dots, k_n$ asociados a p, podemos obtener la siguiente sucesión de expresiones

$$p_n = \frac{2^{k_n+\cdots+k_1} - 2^{k_{n-1}+\cdots+k_1} - \cdots - 3^{n-1}2^{k_1} - 3^n}{3^{n+1}}.$$

Lo que nos dice la conjetura es que existe n tal que $p_n = p$, podemos dar una expresión finita del estilo 1.2 cuyo valor sea p.

Vemos que cada p_n tiene un valor numérico $p_n \in \mathbb{Q}$ que podemos calcular o dejar como expresión indicada. Heurísticamente parece razonable que los valores p_n sean, de algún modo que querríamos entender, cada vez más "próximos" a p. Sobre esto es sobre lo que se intenta arrojar luz en este apartado.

Fijémonos en el siguiente hecho: sean n y p (p impar), pongámonos en la situación de que se cumple que $T^n(p) = 1$, si despejamos p en la expresión $T^{n+1}(p) = 1$ obtenemos una expresión del estilo 1.2, p_n, cuyo valor es p. Lógicamente también $T^{n+1}(p) = 1$ e igualmente podemos obtener una expresión p_{n+1} cuyo valor es p. Veamos cómo en la expresión $pn + 1$ se puede simplificar la parte correspondiente a la iteración $(n+1)$ - ésima para obtener precisamente la expresión p_n

$$\begin{aligned} p &= \frac{\left(2^{2+k_n+\cdots+k_1} - 2^{k_n+\cdots+k_1}\right) - 3 \cdot 2^{k_{n-1}+\cdots+k_1} - \cdots - 3^n 2^{k_1} - 3^{n+1}}{3^{n+2}} \\ &= \frac{\left(4 \cdot 2^{k_n+\cdots+k_1} - 1 \cdot 2^{k_n+\cdots+k_1}\right) - 3 \cdot 2^{k_{n-1}+\cdots+k_1} - \cdots - 3^n 2^{k_1} - 3^{n+1}}{3^{n+2}} \\ &= \frac{\left(3 \cdot 2^{k_n+\cdots+k_1}\right) - 3 \cdot 2^{k_{n-1}+\cdots+k_1} - \cdots - 3^n 2^{k_1} - 3^{n+1}}{3^{n+2}} \\ &= \frac{2^{k_n+\cdots+k_1} - 2^{k_{n-1}+\cdots+k_1} - \cdots - 3^{n-1} 2^{k_1} - 3^n}{3^{n+1}} \end{aligned} \tag{1.11}$$

La consecuencia más remarcable es ver que la simplificación anterior no depende en absoluto de la suposición de que $T^n(p) = 1$, es consecuencia sólamente de que el exponente asociado a la iteración n - ésima valga 2. Es decir, si en una iteración el exponente asociado es $k_n = 2$ se cumple que $p_{n-1} = p_n$ y, bajo este enfoque, en la iteración n - ésima es como si no hubiéramos hecho nada en estos términos, aparentemente no nos hemos aproximado nada en dicha iteración. Además esto es posible, por ejemplo el número 9 su primer exponente es 2 y hasta su sexto iterado son todos diferentes de 1.

Una segunda consecuencia es que el conjunto de valores que podemos obtener con expresiones del tipo 1.2, para un número n fijo de entradas $k_1, \ldots, k_n$, estan estrictamente contenidos en los que podemos obtener para $n+1$ entradas $k_1, \ldots, k_{n+1}$. Esto se debe a que dada una expresión p_n del tipo 1.2 con n entradas $k_1, \ldots, k_n$, basta tomar $k_1, \ldots, k_n, 2$ y obtendremos una expresión que toma el mismo valor que p_n pero con $(n+1)$ entradas.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos y conjetura de Collatz.

En este capítulo nos dedicaremos a intentar abordar el artículo "A continuous extension of the 3x+1 problem to the real line", escrito por Marc Chamberland. Para ello introduciremos las definiciones y resultados básicos de teoría de sistemas dinámicos reales así como conceptos y teoremas más avanzados que posteriormente se utilizarán con el objetivo de intentar aplicarlos al problema del $3p+1$. El artículo de Chamberland no aclara en demasiado detalle muchas de las demostraciones de los resultados a los que llega, muchas veces conseguiremos proporcionar nosotros esos detalles, pero habrá otras en las que no. En algunos casos, para poder llegar a aclarar algunos de los detalles pensamos que se requiera de métodos numéricos y programación que escapan a los objetivos de esta memoria. No obstante en el citado artículo no se hace una mención explícita a la necesidad de usar unos u otros métodos, seguramente porque el autor considera implícitamente un tipo de lector acostumbrado a trabajar con demostraciones o resultados numéricos con funciones reales.

A lo largo de este capítulo, vamos a utilizar la aplicación de Collatz modificada $\widetilde{C}$, recordemos, estaba definida como sigue

$$\widetilde{C}(p) = \left\{ \begin{array}{lll} p/2 & si & p \text{ es par} \\ & & \\ (3p+1)/2 & si & p \text{ es impar} \end{array} \right\}.$$

Lo que haremos será extender dicha aplicación a la recta real para estudiar el sistema dinámico real resultante. De este modo, restringiéndonos a los números naturales podremos obtener información sobre la conjetura. Usamos la aplicación de Collatz modificada y no la aplicación T debido a que es la empleada en el artículo de Chamberland. Aunque no parece haber una forma clara de realizar un estudio similar para la aplicación T, podría ser interesante en un futuro intentar generalizar algunos de los resultados aquí presentados a una extensión de la aplicación T a la recta real.

2.1. Nociones básicas de sistemas dinámicos.

Un sistema dinámico (discreto) es la modelización de un fenómeno cuyo estado evolciona a lo largo del tiempo, pero a intervalos de tiempo discretos. Matemáticamente esto se representa como una aplicación f de un espacio en sí mismo, de manera que, para cada x perteneciente al dominio, nos interesamos por la sucesión de iterados $(f(x), f^2(x), f^3(x), \dots)$, es decir, estudiamos el comportamiento de $f^n(x)$ a medida que $n \in \mathbb{N}$ crece. Dado que el sistema dinámico que nos interesa para la conjetura tiene por dominio un intervalo de la recta real, a lo largo toda este apartado introductorio daremos las definiciones para funciones cuyo dominio es un intervalo, generalmente denotado como J (no necesariamente abierto o cerrado). No obstante, buena parte de la teoría es válida para una aplicación continua de un espacio métrico en sí mismo. A veces se necesitan, para algunas definiciones, condiciones más restrictivas como la diferenciabilidad. Nos hemos guiado del libro [Devaney] que es una referencia frecuente (y muy recomendable) para introducirse en la teoría de sistemas dinámicos discretos.

Definición 2.1. Dada una aplicación $f : J \to J$, decimos que $p \in J$ es un *punto fijo* para f si verifica que $f(p) = p$. Decimos que p es un *punto periódico* para f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(p) = p$. Al menor entero no negativo n para el cual esto pasa se le llama el *periodo de p*. Así por ejemplo un punto fijo es un punto periódico de periodo 1.

Definición 2.2. Dada una aplicación $f : J \to J$ y un punto $p \in J$ llamamos *órbita de p* al conjunto

$$O(p) = \{f^n(p), n \in \mathbb{N}\}.$$

Diremos también que se trata de una *órbita periódica* cuando el punto p sea periódico.

Es inmediato de las definiciones que la órbita de cualquier punto perteneciente a una órbita periódica, es periódica.

Ejemplo 2.3. En términos de órbitas el que p sea un punto fijo significa que $O(p) = \{p\}$. Por ejemplo, como se comprueba fácilmente, la aplicación $f(x) = x^3$ tiene como puntos fijos al $0, 1$ y -1.

Dado un punto periódico de periodo n lo que sucederá con su órbita es que tendrá exactamente n elementos. Por ejemplo el 0 y el -1 son puntos periódicos para la aplicación $f(x) = x^2 - 1$, es decir,

$$O(0) = O(-1) = \{0, -1\}.$$

Las funciones afines sobre intervalos de la recta real no presentan ningún tipo de complicación desde el punto de vista dinámico (presenta a lo sumo un punto fijo, si no es la identidad, y no tiene puntos periódicos de periodo mayor que uno).

Hemos querido resaltar el siguiente ejemplo que, si bien no se trata de un sistema dinámicos en intervalos de la recta real, se expresa no obstante como una aplicación lineal en una çoordenadaçaracterística del espacio. El comportamiento es bastante complejo y se aleja bastante del comportamiento lineal.

Ejemplo 2.4. Denotemos por $\mathbb{S}_1$ a la circunferencia unidad en el plano $\mathbb{R}^2$. Representaremos cada punto por su ángulo θ con el eje de abscisas, medido en radianes de la manera habitual, en la que un punto queda determniado por cualquier ángulo de la forma $\theta + 2k\pi$ para k entero. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ consideramos la aplicación traslación de λ vueltas

$$T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda.$$

La aplicación T_λ está bien definida puesto que $T_\lambda(\theta + 2k\pi) = T_\lambda(\theta)$. El comportamiento de la aplicación T_λ vista como sistema dinámico va a depender fuertemente de si λ es racional o no:

1 - Cuando $\lambda \in \mathbb{N}$ estamos dando un número entero de vueltas, volviendo siempre al punto inicial,

$$T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda = \theta.$$

En consecuencia todos los puntos son fijos.

2 - En el caso en que $\lambda \in \mathbb{Q}$, es decir, $\lambda = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$ volvemos al punto inicial tras iterar q veces

$$T_\lambda^q(\theta) = \theta + 2\pi p = \theta.$$

Por lo que todos los puntos son periódicos de periodo q.

3 - Cuando λ es irracional ningún punto es periódico ni fijo y, de hecho, dado $\theta \in \mathbb{S}_1$ su órbita $O(\theta)$ es un denso en $\mathbb{S}_1$. A este resultado se lo conoce como el teorema de Jacobi. Para demostrarlo, dado $\theta \in \mathbb{S}_1$, vamos a particionar $\mathbb{S}_1$ con puntos de $O(\theta)$ en arcos de longitud menor o igual que un

$\varepsilon > 0$ arbitratio. Primero, vemos que todos los puntos pertenecientes a $O(\theta)$ tienen que ser distintos puesto que en caso contrario tendriamos que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$T_\lambda^n(\theta) = T_\lambda^m(\theta) \Rightarrow \theta + 2n\pi\lambda = \theta + 2m\pi\lambda \Rightarrow (n-m)\lambda \in \mathbb{N},$$

contradicción puesto que de esto se deduce que $n = m$. Ahora bien, todo conjunto infinito en $\mathbb{S}_1$ tiene que tener un punto de acumulación y en consecuencia existen n, m naturales tales que

$$|T_\lambda^n(\theta) - T_\lambda^m(\theta)| < \varepsilon.$$

Esto significa que, tomando $k = n - m$ se cumple que

$$\left|T_\lambda^k(\theta) - \theta\right| < \varepsilon.$$

Lo realmente importante es que, dado $\varepsilon > 0$, el número k no depende del θ elegido puesto que T_λ preserva longitudes en $\mathbb{S}_1$. En particular es válido para el punto $T_\lambda^k(\theta)$ implicando que

$$\left|T_\lambda^{2k}(\theta) - T_\lambda^k(\theta)\right| < \varepsilon.$$

En conclusión, iterando el proceso, podemos obtener una partición de la circunferencia formada por puntos de la órbita de θ tan fina como queramos.

Definición 2.5. Dada una aplicación $f : J \to J$ decimos que $A \subset J$ es un *conjunto atractor respecto de* f cuando existe un entorno suyo U tal que la imagen de su adherencia está contenida en A, $f(\bar{A}) \subset A$ y que además cumple que

$$A = \bigcap_{n \geq 0}^{\infty} f^n(U).$$

Definición 2.6. Dada una aplicación $f : J \to J$ y un punto $p \in J$ fijo llamamos *cuenca de atracción* de p respecto a f al conjunto

$$\Omega_f(p) = \left\{ x \in J : f^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \right\}.$$

En el caso de que el punto sea periódico de periodo k la cuenca de atracción se define como sigue

$$\Omega_f(p) = \left\{ x \in J : f^{kn}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \right\}.$$

En ambos casos llamamos *cuenca de atracción inmediata* $\Omega_f^0(p)$ a la unión de las componentes conexas de $\Omega_f(p)$ tales que contienen la órbita $O(p)$.

Definición 2.7. Dada una aplicación $f : J \to J$ llamamos *ω límite de x asociado a f* al conjunto

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n \geq 0} O(f^{(n)}(x)).$$

Claramente el conjunto $\omega_f(x)$ es un cerrado y esta formado por los puntos de acumulación de la órbita $O(x)$, vista como sucesión de iterados.

2.1.1. Puntos hiperbólicos

El comportamiento de las órbitas a largo plazo y desde el punto de vista global puede ser tremendamente complicado incluso para funciones reales sencillas (salvo para las funciones lineales). Un ejemplo de esto puede encontrarse con la familia cuadrática, estudiada en el Devaney, que es el conjunto de las funciones $Q_c(x) = x^2 + c$, siendo c un parámetro. De hecho este libro dedica un capítulo entero a estudiar propiedades caóticas sobre la dinámica de estas funciones en función de los valores del parámetro.

Si nos centramos en el comportamiento local de las órbitas cerca de un punto fijo o de un punto periódico, existe un tipo especial de puntos fijos o periódicos, llamados hiperbólicos, para los cuales puede entenderse la dinámica local razonablemente: se comportan como una función lineal. Vamos a repasar brevemente las definiciones (que requieren diferenciablidad de la función y no sólo continuidad) y propiedades básicas en este apartado".

Definición 2.8. Dada una aplicación $f : J \to J$ y un punto p fijo respecto a f en el que f es derivable decimos que p es un *punto hiperbólico* cuando $|f'(p)| \neq 1$. Además distinguiremos cuando $|f'(p)| < 1$ diciendo que es un *punto hiperbólico atractor* del caso en que $|f'(p)| > 1$ en el que diremos que el punto es *repulsor.*

Proposición 2.9. *Sea $f : J \to J$ y un punto p fijo hiperbólico atractor, entonces existe un entorno U de p tal que para todo x perteneciente a U se cumple que*

$$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = p.$$

En el caso de que p es repulsor existe un entorno U de p tal que para todo $x \in U$ existe una iteración k en la que $f^k(x) \notin U$.

Demostración. Probaremos solamente el caso de punto hiperbólico atractor puesto que la demostración del caso repulsor es similar. Consideramos el desarrollo de Taylor de f en el punto p

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + R(x), \text{ con } \lim_{x \to p} \frac{R(x)}{x - p} = 0.$$

Para $x \neq 0$ podemos reagrupar de la siguiente manera

$$f(x) - f(p) = \left(f'(p) + \frac{R(x)}{x-p}\right)(x-p).$$

Dado que existe un entorno U de p tal que para todo $x \in U$ se tiene que

$$\left|\frac{R(x)}{x-p}\right| < \varepsilon < 1 - |f'(x)|.$$

Tomando valores absolutos esto significa que

$$|f(x) - f(p)| \leq (|f'(p)| + \varepsilon)|x-p|.$$

Al tratarse de p un punto fijo, si por comodidad denotamos $\lambda = |f'(p)| + \varepsilon$, esto significa que

$$|f(x) - p| \leq \lambda |x-p|.$$

Ahora bien, como hemos escogido ε de forma que $\lambda < 1$ vemos que $|f(x) - p| < |x-p|$ por lo que $f(x)$ esta en el entorno U, de hecho estará más próximo a p de lo que lo estaba x, y podemos iterar el razonamiento anterior para obtener que

$$|f^n(x) - p| \leq \lambda^n |x-p| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

★

Vemos que en términos de las definiciones introducidas en esta sección este resultado nos dice que todo punto hiperbólico atractor admite un entorno contenido en su cuenca de atracción.

Corolario 2.10. *Sea $f : J \to J$ continua y $x \in J$ un punto hiperbólico atractor. Entonces se cumple que la cuenca de atracción de x, $\Omega_f(x)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Veamos que $\Omega_f(x)$ es entorno de todos sus puntos. El teorema anterior nos dice que existe U_x un entorno de x contenido en la cuenca de atracción $U_x \subset \Omega_f(x)$. En consecuencia, dado un punto $z \in \Omega_f(x)$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(z) \in U_x$. Consideremos ahora el conjunto contraimagen

$$E = (f^m)^{-1}(U_x).$$

Está claro que E es un entorno de z puesto que f es continua. Además $E \subset \Omega_f(x)$ porque $f(E) \subset U_x$ por lo que, efectivamente $\Omega_f(x)$ es un conjunto abierto. ★

A continuación querremos generalizar los conceptos anteriores en el caso en el que el punto p es periódico de periodo n. Observemos primero que la derivada de la composición de f^n es constante en cada uno de los puntos de la órbita $O(p)$. Esto se comprueba inmeditamente calculando su valor mediante la regla de la cadena: dado $p \in O$

$$(f^n)'(p) = f'\left(f^{n-1}(p)\right) \cdot f'\left(f^{n-2}(p)\right) \cdot \dots \cdot f'(p) = \prod_{q \in O} f'(q).$$

Vemos que el cálculo anterior es válido para cualquier punto p perteneciente a la órbita puesto que, salvo por el orden, los n factores van a ser los mismos independientemente del punto en el que empecemos.

Esto nos va a permitir dar la siguiente definición

Definición 2.11. Sea una aplicación $f : J \to J$ derivable en los puntos de una órbita periódica O de periodo n. Decimos que es una *órbita hiperbólica* cuando para cualquier $p \in O$ se cumple que

$$|(f^n)'(p)| \neq 1.$$

Además distinguiremos cuando $|(f^n)'(p)| < 1$ diciendo que es una *órbita hiperbólica atractora* del caso en que $|(f^n)'(p)| > 1$ en el que diremos que es *repulsora*.

Definición 2.12. Dada una aplicación $f : J \to J$ y una órbita O periódica atractora de periodo n llamamos cuenca de atracción de O respecto a f al conjunto

$$\Omega_f(O) = \bigcup_{p \in O} \Omega_{f^n}(p).$$

Nuevamente llamamos cuenca de atracción inmediata $\Omega_f^0(O)$ a la unión de las componentes conexas de la cuenca de atracción tales que contienen al conjunto O.

Proposición 2.13. Sea O una órbita periódica atractora de periodo n asociada a una función f, entonces existe un entorno U suyo contenido en la cuenca de atracción $\Omega_f(O)$. Además nuevamente $\Omega_f(O)$ es un conjunto abierto.

Demostración. La demostración se basa en el hecho de que los puntos de la órbita serán puntos fijos para la aplicación f^n, lo que nos permite usar la proposición 2.9 y el corolario 2.10 para puntos fijos. Para todo $x \in O$, gracias al teorema 2.9 sabemos que existe un entorno suyo U_x contenido en $\Omega_{f^n}(x)$. Por la definición anterior vemos que

$$U_x \subset \Omega_{f^n}(x) \subset \Omega_f(O),$$

es decir, nos basta tomar el conjunto U como sigue

$$O \subset \bigcup_{x \in O} U_x \subset \Omega_f(O).$$

Para la segunda parte nuevamente vemos que $\Omega_f(O)$ es entorno de todos sus puntos. Si tenemos que

$$z \in \Omega_f(O) = \bigcup_{x \in O} \Omega_{f^n}(x),$$

entonces existe x tal que $z \in \Omega_{f^n}(x)$. Al ser x punto fijo de f^n, por el corolario 2.10 existe un entorno E de z contenido en $\Omega_{f^n}(x)$ pero, una vez más,

$$E \subset \Omega_{f^n}(x) \subset \Omega_f(O).$$

★

2.1.2. Derivada swarziana y dinámica real.

Para terminar con la parte de requisitos teóricos de Sistemas Dinámicos intruducimos el concepto de derivada swarziana en la siguiente definición. También veremos en los dos teoremas subsiguientes las fuertes consecuencias desde el punto de vista dinámico que tiene el hecho de que una función tenga derivada swarziana negativa.

Definición 2.14. Dada una función f de clase C^3 se define su *derivada swarziana* $Sf(x)$ como la función dada por la expresión

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

El siguiente teorema es debido a Singer y se enuncia sin demostración puesto que ésta escapa de los contenidos que hemos querido incluir en esta memoria. Este resultado viene en la referencia [16] del artículo de Chamberland: D. Singer. Stable orbits and bifurcations of maps of the interval. SIAM J. Applied Math., 35:260-267, 1978.

Teorema 2.15 (*Singer*)**.** Sea una aplicación $f : J \to J$ de clase C^3 con $Sf(x) < 0$ para todo $x \in J$. Entonces se cumplen:

1 - Dada cualquier órbita periódica O de f se tiene que $\Omega_f^0(O)$ contiene o bien un punto crítico de f, o bien un punto frontera del intervalo J.

2 - Todo punto periódico no hiperbólico es atractor.

3 - No hay ningún intervalo de puntos periódicos.

Se presenta a continuación una mejora del resultado anterior, debida a Blokh y Lyubich, también sin demostración. Este resultado viene en la referencia [3] del artículo de Chamberland: A.M. Blokh and M.Yu. Lyubich. Ergodic properties of transformations of the interval. Functional Analysis and its Applications, 23:48-49, 1989.

Teorema 2.16 (*Blokh - Lyubich)*. Sea una aplicación $f : J \to J$ monótona a trozos siendo, en cada trozo, de clase C^3 con derivada Swarziana negativa y sin puntos críticos. También suponemos que f es de clase C^1 en un entorno de cada uno de los extremos de cada trozo. Entonces se cumple que para casi todo $x \in J$ el ω - límite de x es un cerrado invariante propio atractor de una de las siguientes maneras

1 - $\omega(x)$ es una órbita periódica en cuyo caso el conjunto $\Omega_f^0(\omega(x))$ contiene un punto crítico de f.

2 - $\omega(x)$ es un intervalo periódico, de igual manera al menos un subintervalo suyo contendrá a un punto crítico de f.

3 - Se cumple que $\omega(x) = \omega(c)$, siendo c un punto crítico.

Observación 2.17. Por propio entendemos que $\omega_f(x)$ no se puede descomponer en dos cerrados invariantes más pequeños. En ambos teoremas lo que va a resultar de utilidad para nosotros es siempre el apartado 1. Especialmente el segundo teorema es un resultado muy fuerte puesto que, cuando tenemos una función f con derivada swarziana negativa, podemos determinar el comportamiento de casi todos los puntos $x \in J$ simplemente mediante el estudio de los ω - límites de los puntos críticos de f en J.

2.2. Aplicación de Collatz extendida a $\mathbb{R}$

En esta sección extenderemos la aplicación $\widetilde{C}$ a la recta real dando una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que restringida a $\mathbb{N}$ interpole a $\widetilde{C}$. Como ya se comentó en la introducción a este capítulo l objetivo será posteriormente usar resultados de sistemas dinámicos continuos (reales) aplicados a la función f para obtener información sobre la conjetura de Collatz. Es razonable usar esta técnica puesto que la teoria de sistemas dinámicos discretos es mucho menos potente que la de sistemas dinámicos reales. A lo largo de la historia dicha técnica ha dado buenos resultados con otras cuestiones, especialmente con el uso de sistemas dinámicos complejos. No obstante dado que la conjetura de Collatz sigue abierta, lo único que vamos a poder esperar conseguir es aproximarnos un poco.

2.2.1. Extensión a $\mathbb{R}$ de la aplicación $\widetilde{C}$.

Volvemos a recordar que la aplicación modificada de Collatz viene dada por la siguiente expresión

$$\widetilde{C}(p) = \begin{cases} p/2 & si \quad p \text{ es par} \\ \\ (3p+1)/2 & si \quad p \text{ es impar} \end{cases}$$

Nos apoyaremos en las funciones seno y coseno para conseguir simultanear los dos casos con una única expresión, como se explica en la observación posterior a la definición de f.

Definición 2.18. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la expresión

$$f(x) = \frac{x}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{3x+1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Observación 2.19. Nos fijamos en que, cuando tomamos $x \in \mathbb{N}$, por un lado si x es par

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1 \text{ y } \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0,$$

y por el otro lado, si x es impar

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \text{ y } \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1.$$

El hecho de elevar al cuadrado nos evita tener que distinguir cuando las funciones trigonométricas valen 1 o -1. En conclusión la función f anterior restringida a los naturales interpola a $\widetilde{C}$.

En general a lo largo de toda esta sección nos vamos a centrar en el eje real no negativo como dominio, puesto que vemos que es un conjunto invariante por la aplicación c, es decir,

$$f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+.$$

A continuación, en la siguiente proposición damos una expresión de f algo más manejable.

Proposición 2.20. Dado $x \in \mathbb{R}$ la función f anterior verifica que

$$f(x) = x + \frac{1}{4} - \frac{2x+1}{4}\cos(\pi x).$$

Demostración. La demostración se trata en realidad de una mera manipulación de la expresión utilizando las fórmulas del ángulo mitad en la forma

$$\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1+\cos(t)}{2} \text{ y } \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos(t)}{2}.$$

Como vemos aplicado a la definición de f esto significa que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{3x+1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ &= \frac{x}{2}\cdot\frac{1+\cos(\pi x)}{2} + \frac{3x+1}{2}\cdot\frac{1-\cos(\pi x)}{2} \\ &= x + \frac{1}{4} - \frac{2x+1}{4}\cos(\pi x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Exactamente como queríamos. ★

2.2.2. Puntos fijos y puntos críticos de f.

Nos preocupamos ahora por estimar los puntos fijos de la función f. Éstos nos ayudarán a dividir los reales positivos en tres subintervalos, dos de ellos invariantes, de forma que podamos estudiar la conjetura de manera más simple. Posteriormente estimamos donde tiene puntos críticos la función f para utilizar los teoremas 2.15 (*Singer*) y especialmente 2.16 (*Blokh - Lyybich*) puesto que, como explica la observación subsiguiente a dichos teoremas, con el estudio de sus ω - límites conoceremos el comportamiento dinámico de f en casi todo punto de J,

Proposición 2.21. Dado n natural la función f tiene un punto fijo en cada intervalo $[n-1, n]$. Además, si denotamos a cada uno de estos puntos fijos como μ_n, en el límite cuando $n \to \infty$ se verifica que

$$\mu_n = n - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

El 0 es también un punto fijo, al que denotamos por μ_0.

Demostración. Por definición los puntos fijos tendrán que satisfacer $f(x) = x$, es decir,

$$\cos(\pi x) = \frac{1}{2x+1}.$$

Como vemos la función de la derecha toma el valor 1 para $x = 0$ y decrece monótonamente y de manera continua tendiendo hacia 0 en el infinito. Por el teorema de Bolzano, dado que la funión $\cos(\pi x)$ oscila con semiperiodo 1, efectivamente vemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, ambas funciones se van a cortar en un valor $\mu_n \in [n-1, n]$.

Puesto que el corte de la función $cos(\pi x)$ con el eje $x = 0$ son los puntos $n - 1/2$, para $n \in N$, vemos que asintóticamente los cortes μ_n serán cada vez más próximos a $n - 1/2$. Usemos desarrollos de Taylor de orden uno para precisar dicha convergencia. Para los n pares se cumple que

$$\cos\left(\pi\left(x + n - \frac{1}{2}\right)\right) = \sin(\pi(x+n)) = \pi x + n - \frac{1}{2} + O(x^3).$$

Para los impares dicho desarrollo cambia simplemente el signo de la pendiente, $-\pi x + n - 1/2 + O(x^3)$, pero este signo no influye asintóticamente, no va a alterar los sumando que tienen relevancia cuando $n \to \infty$. Sustituyendo dicho desarrollo en la ecuación del principio y manipulando nos queda una ecuación de segundo grado, que resolvemos.

$$\begin{aligned} &\pi x + n - \frac{1}{2} + O(x^3) = \frac{1}{2x+1} \\ &0 = 2\pi x^2 + (2n - 1 + \pi)x + n - \frac{3}{2} = 0 \\ &x = \frac{-(2n-1+\pi) + \sqrt{(2n-1+\pi)^2 - 8\left(n - \frac{3}{2}\right)}}{4} \\ &x = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Puesto que el sumando de dentro de la raíz, $8n$, en el límite es dominado por el término en n^2. ★

Para terminar damos una proposición en la que se estiman los puntos críticos de la función f, la demostración es similar pero más engorrosa en los detalles y la omitimos. Recordamos que un punto critico de una función es un punto en el que la función es derivable y la derivada es cero.

Proposición 2.22. Dado n natural la función c tiene un punto crítico en cada intervalo $[\mu_n, \mu_{n+1}]$. Además, si denotamos a cada uno de estos puntos fijos como μ_n, en el límite cuando $n \to \infty$ se verifica que

$$\mu_n = n - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2.2.3. Derivada swarziana de la función f.

Finalmente demostramos que la función f tiene derivada swarziana negativa. Si bien la demostración es bastante elemental, hacemos poco más que el estudio de funciones reales, no nos llevará poco esfuerzo. Daremos primero un lema para hacerla menos tediosa.

Lema 2.23. Dado $x \in \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = 0$ entonces se cumple que $f'(x) \neq 0$.

Demostración. A lo largo de los dos resultados que ocupan este apartado vamos a necesitar constantemente las expresiones de las tres primeras derivadas de f, calculadas a continuación.

$$f(x) = x + \frac{1}{4} - \frac{2x+1}{4}\cos(\pi x).$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos(\pi x) + \frac{\pi(2x+1)}{4}\operatorname{sen}(\pi x).$$

$$f''(x) = \pi \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{\pi^2(2x+1)}{4}\cos(\pi x).$$

$$f'''(x) = \frac{3\pi^2}{2}\cos(\pi x) - \frac{\pi^3(2x+1)}{4}\operatorname{sen}(\pi x).$$

Para demostrar el lema, equivalentemente veremos que no existe ningún $x > 0$ para el cual sean nulos simultáneamente $f'(x)$ y $f''(x)$. Vemos que para que $f''(x) = 0$ es necesario que el seno y el coseno tengan signo distinto. No obstante vemos que, por la naturaleza de la expresión de f', sólo el caso $\cos(\pi x) > 0$ y $\operatorname{sen}(\pi x) < 0$ es compatible con que $f'(x) = 0$. En consecuencia, de haber algún x para el cual se anulen las dos derivadas, éste tendrá que cumplir

$$x \in \left[\frac{3}{2} + 2k, 2 + 2k\right], \text{ para } k = 0, 1, \ldots.$$

A continuación obtenemos condiciones equivalentes en las que aparezcan el coseno y el seno aislados. Si despejamos el seno de la condición $f''(x) = 0$ nos queda

$$\operatorname{sen}(\pi x) = -\frac{\pi(2x+1)}{4}\cos(\pi x).$$

en la expresión de f' esto significa que

$$f'(x) = 1 - \cos(\pi x)\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2(2x+1)^2}{16}\right).$$

Si imponemos ahora la condición $f'(x) = 0$, despejando, obtenemos que

$$\cos(\pi x) = \frac{16}{8 + \pi^2(2x+1)^2}.$$

Finalmente esto nos permite aislar el seno en la condición $f''(x) = 0$

$$\operatorname{sen}(\pi x) = \frac{-4\pi(2x+1)}{8 + \pi^2(2x+1)^2}.$$

Tendremos que estimar ahora si es posible que algún x verifique las dos ecuaciones anteriores. Por lo visto al principio dicho x tendrá que estar en los intervalos $[3/2 + 2k, 2 + 2k]$, con $k = 0, 1, \ldots$.

Fijémonos en la primera, sabemos que el $\cos(\pi x)$ pasa de valer 0 a valer 1 de forma continua en cada uno de estos intervalos. Analizando la otra función

$$\beta(x) = \frac{16}{8 + \pi^2(2x+1)^2},$$

vemos en el intervalo $[3/2, \infty]$ decrece desde un valor positivo (pequeño) hacia cero de manera continua. Por el Teorema de Bolzano vemos que ambas funciones van a tener un corte en cada uno de los intervalos $[3/2+2k, 2+2k]$. Además dicho corte va a ser cada vez más cercano al extremo izquierdo, $3/2 + 2k$.

Para la segunda vemos que la función $\operatorname{sen}(\pi x)$ pasa de valer -1 a valer 0 de forma continua en cada uno de estos intervalos. Analizando la otra función

$$\alpha(x) = \frac{-4\pi(2x+1)}{8 + \pi^2(2x+1)^2},$$

de forma similar a la anterior vemos en $[3/2, \infty]$ crece desde un valor negativo (pequeño en valor absoluto) hacia cero de manera continua. Otra vez vemos que ambas funciones van a tener un corte en cada uno de los intervalos $[3/2 + 2k, 2 + 2k]$ y que además dicho corte va a ser cada vez más cercano al extremo derecho, $2 + 2k$.

En consecuencia los cortes se van alejando a medida que k crece y nos es suficiente con comprobar manualmente lo que sucede en el primero de los intervalos, $[3/2, 2]$. Sustituyendo la primera ecuación en el punto medio de dicho intervalo,7/4, nos queda

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0{,}707 > 0{,}0769 = \beta\left(\frac{7}{4}\right).$$

Como vemos el punto que verifica la primera ecuación queda (bastante) a la izquierda de 7/4. Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -0{,}707 < -0{,}272 = \alpha\left(\frac{7}{4}\right).$$

Por lo tanto, el corte de las dos funciones de la segunda ecuación queda a la derecha de $7/4$ y, como queríamos no existe ningún x para el cual se anulen las dos derivadas de f.

★

Teorema 2.24. La función f tiene derivada swarziana negativa Sf en $\mathbb{R}^+$.

Demostración. Recordemos que

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

Por el lema anterior vemos que cuando $f'(x) = 0$, al ser $f''(x) \neq 0$, la derivada swarziana tiende a $-\infty$ en x. Si probamos que $Sf \neq 0$ para todos los demás puntos de $\mathbb{R}^+$ habremos terminado. Para simplificar denominadores equivalentemente probaremos que para todo x tal que $f'(x) \neq 0$ se cumple que

$$g(x) = \frac{2}{\pi^2} f'(x)^2 Sf(x) = \frac{1}{\pi^2}\left(2f'(x)f'''(x) - 3f''(x)^2\right) \neq 0.$$

Usando las expresiones de las derivadas calculadas anteriormente en el lema y mediante manipulaciones elementales llegamos a que

$$g(x) = A\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2 + B\left(\frac{2x+1}{4}\right) + C,$$

siendo

$$\begin{aligned} A &= -\pi^2(2 + \cos^2(\pi x)), \\ B &= -2\pi \operatorname{sen}(\pi x)\left[1 + \cos(\pi x)\right], \\ C &= \frac{3}{2}\cos^2(\pi x) + 3\cos(\pi x) - 3. \end{aligned}$$

Para que sucediera que $g(x) = 0$, resolviendo vemos que tendría que suceder que

$$\frac{2x+1}{4} = h(x) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Por la naturaleza del problema que estamos tratando nos interesan sólo soluciones reales y, en consecuencia, podemos suponer que $B^2 - 4AC \geq 0$. Utilicemos ésto para obtener información sobre cómo puede ser x: sustituyendo las expresiones de A, B y C y manipulando con la relación $\cos(x)^2 + \operatorname{sen}(x)^2 = 1$ llegamos a que

$$B^2 - 4AC = 4\pi^2\left(\frac{1}{2}\cos^4(\pi x) + \cos^3(\pi x) + 8\cos(\pi x) - 5\right).$$

Por comodidad, en la expresión anterior hacemos el cambio de variable $z = \cos(\pi x)$, es decir, $z \in [-1, 1]$

$$k(z) = B^2 - 4AC = 4\pi^2 \left(\frac{1}{2}z^4 + z^3 + 8z - 5\right).$$

Vemos que la función $k(z)$ es creciente puesto que su derivada es positiva para $z \in [-1, 1]$

$$k'(z) = 4\pi^2 \left(2z^3 + 3z^2 + 8\right) \geq 9.$$

En consecuencia como por ejemplo $k(0{,}55) < 0$, al ser la función k creciente, esto significa que $\cos(\pi x) > 0{,}55$. Despejando x esto implica que para que $g(x) = 0$ necesariamente

$$x \in (2n - 0{,}31, 2n + 0{,}31).$$

Ahora usaremos la expresión de $h(x)$ para acotar su valor y ver que, de hecho, si x es tal que $g(x) = 0$ entonces sólo puede pertenecer al primero de éstos intervalos, $x < 0{,}31$.

$$|2A| \geq 2\pi^2.$$

$$|B| \leq 2\pi \sin(0{,}31\pi)\left[1 + \cos(0{,}31\pi)\right].$$

$$|\sqrt{B^2 - 4AC}| \leq |\sqrt{k(z)}| \leq 2\pi\sqrt{9/2}.$$

Donde hemos hecho las acotaciones anteriores usando propiedades elementales de las funciones trigonométricas, el cálculo que teníamos hecho de la función $k'(x)$ y notando que $|B|$ crece hasta alcanzar su máximo para $x = 1/3$. Si $k(x)$ es creciente en $[-1, 1]$, alcanzará un máximo relativo para $x = 1$ y como además $k(1) > k(0)$ podremos acotar por éste valor. En consecuencia se tiene que

$$|h(x)| = \frac{2x + 1}{4} \leq 1{,}08.$$

Lo cual significa que $x < 1{,}66 < 2 - 0{,}31$ por lo que, por lo anterior, efectivamente sólo es válido el primero de los intervalos y $x < 0{,}31$. Utilicemos esto para mejorar la cota que obtuvimos de $h(x)$. Si $x < 0{,}31$ entonces $-B > 0$ y por lo tanto dado que el denominador $2A$ es negativo tenemos que

$$|h(x)| = \left|\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right| \leq \frac{-\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \leq \frac{2\pi\sqrt{9/2}}{2\pi^2(2 + \cos^2(0{,}31\pi))} = 0{,}27.$$

Puesto que, para $x < 0{,}31$ la función $\cos(\pi x)$ alcanza su mínimo en ese punto. Una vez más, despejando, la acotación anterior significa que $x < 0{,}087$. Si repetimos el proceso anterior con esta nueva información obtendremos que

$h(x) < 0{,}25$ con lo que al despejar x en la anterior desigualdad obtendremos que $x < 0$, contradicción. Recapitulando la derivada swarziana no se anula y cuando presenta singularidades tiende siempre hacia $-\infty$, en consecuencia podemos conluir que $Sf(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ★

2.2.4. Estudio dinámico de la función f.

Haremos el estudio dividiendo la recta real positiva en tres intervalos, dos de ellos que van a ser invariantes $I_1 = [0, \mu_1]$ y $I_2 = [\mu_1, \mu_3]$, y por último el intervalo $I_3 = [\mu_3, \infty]$. En el artículo de Chamberland vienen tabuladas estimaciones de los primeros puntos fijos y críticos de f, siendo μ_3 claramente mayor que 2. Como consecuencia de esto último sabemos que I_3 no es invariantes puesto que, si nos restringimos a números enteros, la conjetura está de hecho comprobada al menos hasta el número $57646 \cdot 10^{18}$. El estudio de los dos primeros intervalos será relativamente simple haciendo uso de los teoremas 2.15 y 2.16. El comportamiento dinámico del tercer intervalo llevara implícita la conjetura, hasta el punto de que no seremos capaces más que de reformularla en términos de esta teoría.

Teorema 2.25. El intervalo $I_1 = [0, \mu_1]$ es invariante respecto de f siendo μ_1 un punto fijo repulsor y 0 un punto fijo atractor con $\Omega_f(0) = [0, \mu_1)$.

Demostración. El comportamiento de la función f es muy simple en este intervalo: es una función continua y que cumple que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0{,}5$. También sabemos que no tiene ningún punto fijo en $(0, \mu_1)$ y en consecuencia vemos que para todo $x \in (0, \mu_1)$ se cumple que $f(x) < x$, la gráfica de f queda por debajo de la recta de pendiente 1. Por lo tanto es claro que el punto 0 atrae todo el intervalo $(0, \mu_1)$ y que μ_1 es repulsor en dicho intervalo. ★

Teorema 2.26. El intervalo $I_1 = [\mu_1, \mu_3]$ es invariante respecto de f y contiene exactamente dos órbitas periódicas atractoras:

$$A_1 = \{1, 2\},$$

$$A_2 = \{1{,}1925, 2{,}1386\}.$$

Además existe un subconjunto $\Gamma \subset I_2$ de medida nula tal que

$$I_2 = \Omega_f(A_1) \cup \Omega_f(A_2) \cup \Gamma.$$

Demostración. Como sabemos, la función f tiene exactamente dos puntos críticos en este intervalo, c_1 y c_2 por lo que en virtud del teorema 2.15 hay a lo sumo dos órbitas periódicas atractoras. Con un simple cálculo verificamos que A_1 y A_2 son efectivamente atractoras y, finalmente, con el teorema 2.16 concluímos que A_1 y A_2 cubren todo I_2 salvo un conjunto de medida nula.

$$\left|\left(f^2\right)'(1)\right| = \left|\left(f^2\right)'(2)\right| = f'(1)f'(2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} < 1.$$

$$\left|\left(f^2\right)'(1{,}1925)\right| = \left(f^2\right)'(2) = |f'(1)|f'(2) = 0{,}165 \cdot 2{,}31 < 1.$$

Para ver que el intervalo es invariante podemos verificar numéricamente mediante estimaciones que $f(c_1)$ y $f(c_2)$ pertenecen al intervalo (μ_1, μ_3). Numéricamente también se comprueba que, de hecho, $\omega(c_1) = A_2$ y que $\omega(c_2) = A_1$. ★

Estudio de intervalo $I_3 = [\mu_3, \infty)$.

Ya sabemos que el intervalo I_3 no es invariante puesto que todos los números naturales que verifican la conjetura de Collatz escapan al intervalo $[\mu_2, \mu_3)$. Particionaremos ahora el intervalo I_3 en el conjunto de los puntos que escapan de I_3 y el residuo de los qu ese quedan, definidos a continuación.

Definición 2.27. Se define el conjunto de escape asociado a f como

$$E_f = \{x \in I_3 : \sup \omega(x) < \mu_3\}.$$

Definición 2.28. Se define el conjunto residual asociado a f como

$$R_f = \{x \in I_3 : \operatorname{ínf} \omega(x) \geq \mu_3\}.$$

Proposición 2.29. *E_f es el conjunto abierto de los puntos de I_3 que acaban escapándose de I_3 y el conjunto cerrado R_f es su complementario.*

Demostración. Es fácil ver que R_f es complementario de E_f, por definición tenemos que

$$E_f^C = \{x \in I_3 : \sup \omega(x) \geq \mu_3\}.$$

Rápidamente vemos que $R_f \subset E_f^C$ es trivial. Por otro lado no puede suceder que exista un $x \in I_3$ tal que $\sup \omega(x) \geq \mu$ y $\operatorname{ínf} \omega(x) < \mu$ porque si se cumple que $\operatorname{ínf} \omega(x) < \mu$ entonces existe un n_0 tal que $f^{n_0}(x)$ no está en I_3, es decir, $f^{n_0}(x)$ pertenece a I_1 o a I_2. No obstante como ambos son invariantes, las siguientes iteraciones no van a salir de ahí, haciendo imposible que el límite superior sea mayor o igual que μ, quedando demostrada la segunda contención.

Veamos ahora que E_f es abierto; aquí hay un matiz que no está claro y que probablemente este apoyado en el siguiente hecho: el intervalo $[\mu_1, c_1] \subset$

I_3 es también invariante, puesto que parece fácil comprobar con métodos numéricos que, para todo $x \in [c_1, \mu_3]$, se cumple que $f'(x) > 1$. Esto implica que cuando un iterado es menor que μ_3 todos los iterados sucesivos también lo serán. Con esto somos capaces de ver que E_f es entorno de todos sus puntos: dado $x_0 \in E_f$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) < \mu_3$ y, puesto que f^n es continua, existe un entorno U de $f^n(x_0)$ tal que para todo $x \in U$ se sigue que $(f^n)^{-1}(x) < \mu_3$. Esto significa que la contraimagen de U es un entorno de x_0 de puntos de E_f. ★

Observación 2.30. Gracias a lo anterior vemos que trivialmente podemos reformular la conjetura como que se cumple que

$$\mathbb{Z} \cap R_f = \emptyset.$$

A continuación nos dedicamos a estudiar en mayor profundidad el conjunto residual R_f. Lo dividiremos en lo que llamamos el conjunto estable S_f y su complementario, el conjunto inestable U_f.

Definición 2.31. Llamamos *conjunto estable asociado a* f al conjunto abierto formado por la unión de las cuencas de atracción de todas las órbitas periódicas de f que son atractoras en I_3.

Lógicamente el conjunto estable es abierto puesto que es unión de conjuntos abiertos, como vimos en la proposición 2.13. El objetivo del siguiente resultado será mostrar que cualquier ciclo del problema $3p+1$ (contenido en $\mathbb{Z}^+$) diferente del trivial estará contenido en S_f.

Teorema 2.32. Cualquier ciclo del problema del $3p+1$ contenido en $\mathbb{Z}^+$ es una órbita periódica atractora de f.

Demostración. En el artículo de Chamberland se hace un razonamiento previo en el que usa una fórmula cuya demostración deja referenciada a un artículo de Eliahou. No obstante dicha fórmula resulta obvia para órbitas periódicas: sea Ω una órbita periódica de periodo n asociada a una función g, entonces vemos que, siempre que el siguiente producto esté bien definido, se cumple que

$$\prod_{x\in\Omega} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{x}\frac{f^2(x)}{f(x)}\cdots\frac{f^n(x)}{f^{n-1}(x)} = \frac{f(x)}{x}\frac{f^2(x)}{f(x)}\cdots\frac{x}{f^{n-1}(x)} = 1.$$

Sustituyendo por nuestra expresión de f tenemos que

$$1 = \prod_{x\in\Omega}\left[1 - \frac{1}{2}\cos(\pi x) + \frac{1}{4x}(1-\cos(\pi x))\right] > \prod_{x\in\Omega}\left[1 - \frac{1}{2}\cos(\pi x)\right].$$

La desigualdad anterior es estricta puesto que para que todos los sumandos que hemos quitado en cada uno de los factores sean no nulos todos los puntos de la órbita periódica tienen que ser enteros impares, algo imposible. Notamos primero que cuando $\Omega \subset \mathbb{Z}^+$ se sigue que

$$\prod_{x\in\Omega} f'(x) = \prod_{x\in\Omega}\left[1-\frac{1}{2}\cos(\pi x)+\pi\frac{2x+1}{4}\operatorname{sen}(\pi x)\right] = \prod_{x\in\Omega}\left[1-\frac{1}{2}\cos(\pi x)\right].$$

Si usamos el razonamiento incial junto con esto último finalmente podemos concluir lo que necesitamos: si $\Omega \subset \mathbb{Z}^+$ entonces

$$0 < \left|\prod_{x\in\Omega} f'(x)\right| = \prod_{x\in\Omega}\left[1-\frac{1}{2}\cos(\pi x)\right] < 1.$$

★

2.2.5. Conjetura del conjunto estable.

El teorema 2.2.4 nos dice que toda órbita periódica de la restricción de f a los naturales (en $[mu3, \infty)$) es una órbita periódica hiperbólica atractora. Si tal órbita existiera, tendría una cuenca de atracción (necesariamente abierta no vacía por la proposición 2.13) contenida en el conjunto estable S_f. Por ello podemos concluir lo siguiente:

Teorema 2.33. Si $S_f = \emptyset$, entonces la aplicación de Collatz (modificada) $\widetilde{C}$ no tiene ciclos no triviales (diferentes del ciclo 1,2).

Este resultado hace que sea interesante plantearse la

Conjetura del conjunto estable.- $S_f = \emptyset$.

En efecto, si la conjetura del conjunto estable es cierta entonces, la conjetura de Collatz quedaría reducida a probar que no existen órbitas divergentes en los números naturales.

Vamos, por último, a considerar algunos argumentos, tal y como aparecen en el artículo de Chamberland que hacen pensar que la conjetura del conjunto estable es equivalente a la de no existencia de órbitas periódicas no triviales en los enteros. Para ello, propone realizar un estudio más fino de la primera igualdad de la ecuación 2.2.4 para intentar deducir que si existe alguna órbita periódica hiperbólica atractora O, entonces alguno de los elementos de O se acerca "suficientemente.ª un número entero m como para que m esté en la cuenca de atracción de O y que produzca, por tanto, una órbita periódica contenida en los naturales.

Dicho artículo no aclara mucho más sobre esta propiedad de que "se acerca suficientemente". Si bien no hemos completado los detalles aquí, pensamos que puede darse un enunciado más preciso considerando los siguientes argumentos:

1) Por un lado, afinando la demostración de 2.13, puede estimarse cuantitativamente el tamaño de la cuenca de atracción de una órbita periódica hiperbólica atractora O en términos de la diferencia $\delta = 1 - \prod_{x \in O} |f'(x)|$.

2) El valor de $|\operatorname{sen}(\pi x)|$ se hace mínimo para x entero, allí donde $|\cos(\pi x)|$ a la vez que el coeficiente de $\operatorname{sen}(\pi x)$ en la ecuación 2.2.4 es bastante mayor en valor absoluto que el de $\cos(\pi x)$.

Con esto, se trata de probar que si todos los valores $x \in O$ distan más que lo especificado por δ de un número entero, el producto en la ecuación 2.2.4 no podría ser de módulo menor que 1.

Bibliografía

[1] Robert L. Devaney, An introduction to Chaotic Dynamical Systems, (2003).

[2] F. C. Motta, H. Roscoe, T.Aparecido, An Analysis of the Collatz Conjecture

[3] M. Chamberland, A continuous extension of the 3x+1 problem to the real line, (1996 Functions of one complex variable I. Graduate Texts in Mathematics 11. Springer-Verlag, New York, 1973.