

Apuntes para la asignatura

ESTRUCTURAS DE EDIFICACIÓN I

- Grado en Arquitectura -

Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Departamento de Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería del Terreno y Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras



Universidad de Valladolid

Valladolid, enero de 2013



Prólogo y Licencia

Estos “Apuntes para la asignatura Estructuras de Edificación I” han sido elaborados con la intención de que sirvan de guía al alumno en su primera asignatura relacionada con las estructuras en la titulación de Grado en Arquitectura, que ha comenzado a impartirse el curso 2010-11 en el ámbito del Espacio Europeo de Enseñanza Superior, en la Universidad de Valladolid.

Se abordan los aspectos más típicos que cabe esperar en un curso de introducción a las estructuras, partiendo de las nociones básicas del equilibrio estático, e incluyendo una breve presentación de las magnitudes que describen el comportamiento del sólido elástico resistente. Dentro de la necesaria concisión, se ha intentado que dicha presentación proporcione una base suficiente para abordar el estudio del problema resistente de los elementos estructurales. El grueso del curso se centra en el estudio del elemento resistente con forma de barra recta bajo hipótesis de comportamiento elástico, e incluye una breve introducción al análisis de estructuras formadas por este tipo de barras.

Debido a su carácter introductorio, los contenidos abordados en estos apuntes se pueden encontrar tratados con mayor profundidad en muchos otros textos, tales como los referenciados al final, en los que el nivel puede superar frecuentemente el establecido para el curso. Precisamente, la oportunidad de este documento radica en ofrecer al estudiante una referencia concisa y del nivel pretendido. Los ejercicios propuestos que se incluyen, si bien no presentan dificultades más allá de lo explicado, tampoco intentan ser especialmente sencillos, sino más bien corresponder a ese nivel pretendido para el curso.

Aproximadamente el 50% de los contenidos están basados en una obra previa de los mismos autores, titulada “Apuntes para una breve Introducción a la Resistencia de Materiales y temas relacionados”, publicada bajo la misma licencia que el presente trabajo y disponible en <http://www.eii.uva.es/reic/RMgrado>.

Este trabajo se publica bajo la licencia “Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported” de Creative Commons. Se trata de una licencia pensada para compartir, y no tanto para restringir las condiciones de utilización. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> o bien escriba una carta a Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.



En resumen, dicha licencia establece que Ud. es libre de:

- Compartir - copiar, distribuir y transmitir este trabajo.
- Reutilizar - adaptar el trabajo y hacer obras derivadas.

Bajo las siguientes condiciones:

- Atribución (“BY”)- Ud. debe atribuir este trabajo a sus autores en la manera especificada por ellos (pero no de una manera que sugiera que los autores le respaldan a Ud. o al uso que Ud. hace del trabajo de ellos). En este caso, debe atribuir la autoría al “Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de estructuras de la Universidad de Valladolid”, como forma genérica de reconocimiento a los profesores de dicho Área que han elaborado este trabajo.
- No comercial (“NC”)- Ud. no debe usar este trabajo para fines comerciales.
- Compartir de la misma manera (“SA”)- Si Ud. transforma, o hace una obra derivada de este trabajo, Ud. puede distribuir el resultado únicamente bajo una licencia como la presente.

Índice de contenido

1.- Introducción.....	1
La estructura y el sólido resistente.....	1
Formas estructurales básicas.....	4
Materiales.....	6
Acciones sobre la estructura.....	7
Objetivos y método en el análisis de la estructura.....	8
2.- Equilibrio y Tensión.....	10
Equilibrio estático.....	10
Concepto de Tensión.....	11
Esfuerzos en barras rectas.....	14
<i>Equilibrio interno en barras.....</i>	<i>19</i>
<i>Trazado de los diagramas de esfuerzos.....</i>	<i>20</i>
Tensor de Tensiones.....	28
<i>Simetría del tensor de tensiones.....</i>	<i>32</i>
<i>Direcciones y Tensiones Principales.....</i>	<i>35</i>
Representación de Mohr.....	39
<i>Otras aplicaciones de la representación de Mohr.....</i>	<i>42</i>
3.- El Sólido Deformable.....	45
Nociones sobre la deformación.....	45
Ensayo de tracción para un acero.....	50
Ley de comportamiento elástica lineal.....	55
Criterios de plastificación y agotamiento.....	56
<i>Criterio de Tresca.....</i>	<i>57</i>
<i>Criterio de Von Mises.....</i>	<i>60</i>
<i>Nociones sobre comportamiento y fallo en otros materiales.....</i>	<i>62</i>
La energía de deformación.....	64
<i>Densidad de Energía de Deformación.....</i>	<i>67</i>
<i>El Principio de los Trabajos Virtuales.....</i>	<i>68</i>
4.- Tracción–Flexión de Barras Rectas.....	71
Definición de los esfuerzos en función de las tensiones.....	71
Hipótesis adoptadas.....	74
Tensiones Normales en la Sección.....	77
<i>Núcleo Central.....</i>	<i>80</i>
<i>Aplicación a la comprobación de cimentaciones superficiales.....</i>	<i>84</i>
Relación entre Giros y Desplazamientos transversales.....	86
Trazado de Diagramas de Giros y Desplazamientos.....	87
5.- Tensiones Tangenciales en Flexión.....	94
Introducción.....	94
Planteamiento general del problema.....	94
Algunas variantes de aplicación.....	98
<i>Secciones macizas y de pared gruesa.....</i>	<i>98</i>
<i>Secciones de pared delgada.....</i>	<i>102</i>
<i>Tensiones rasantes.....</i>	<i>107</i>
Estimación de las tensiones tangenciales en casos usuales.....	108

Noción de alabeo de la sección.....	111
Noción de Centro de Esfuerzos Cortantes.....	112
6.- Métodos Complementarios de Cálculo.....	115
El Principio de las Fuerzas Virtuales.....	115
La viga conjugada.....	119
Los teoremas de Mohr.....	121
El teorema de Castigliano.....	122
7.- Estructuras de Barras.....	125
Concepto de Hiperestaticidad.....	125
<i>Características generales de las estructuras hiperestáticas.....</i>	<i>130</i>
El Método de Compatibilidad.....	131
<i>Uso del PFV en el método de compatibilidad.....</i>	<i>133</i>
Los Métodos de Equilibrio.....	136
<i>Procedimiento de equilibrio adaptado al cálculo manual.....</i>	<i>140</i>
8.- Nociones sobre la Torsión	147
Torsión uniforme y torsión no uniforme.....	147
Tensiones en la torsión uniforme.....	149
<i>Órdenes de magnitud en distintos perfiles.....</i>	<i>153</i>
<i>Influencia de la torsión no uniforme.....</i>	<i>156</i>
Resumen y conclusiones.....	158
Apéndice A.	
 Álgebra de Vectores Deslizantes.....	160
Generalidades.....	160
Operaciones básicas.....	161
<i>Adición (o suma) de vectores.....</i>	<i>161</i>
<i>Producto escalar de dos vectores.....</i>	<i>162</i>
<i>Producto vectorial de dos vectores.....</i>	<i>162</i>
<i>Momento de un vector deslizante respecto de un punto.....</i>	<i>163</i>
<i>Momento de un vector deslizante respecto de una recta.....</i>	<i>163</i>
Sistemas de vectores deslizantes.....	164
<i>Campo de momentos.....</i>	<i>165</i>
<i>Momento Mínimo y Eje Central.....</i>	<i>166</i>
<i>Equivalencia y Reducción de sistemas de vectores deslizantes.....</i>	<i>167</i>
Aplicación a la Estática.....	168
Apéndice B.	
 Geometría de masas.....	169
Centros de Gravedad.....	169
Centros de Área.....	170
Momentos de Inercia.....	171
Momentos Estáticos.....	173
Apéndice C.	
 Ayudas para el trazado preliminar.....	174
Bibliografía.....	177

1.- Introducción

La estructura y el sólido resistente

En un sentido amplio, una estructura puede entenderse como un dispositivo proyectado para soportar cargas. Esta definición engloba tanto a los elementos resistentes habituales en los proyectos de edificación y obra civil, como a los elementos de maquinaria, entre otros.

Las cargas son sistemas de fuerzas que habitualmente se ejercen como consecuencia de la función que desempeña la estructura, aunque pueden también ser debidas a acciones no directamente relacionadas con la finalidad principal para la que se proyectó. En estructuras de edificación, esa finalidad principal es soportar cargas gravitacionales, aunque existirán otras de origen ambiental, como el viento o las acciones térmicas por ejemplo. En elementos de maquinaria, la funcionalidad habitual es transmitir un movimiento a otro elemento que se resiste al mismo, siendo dicha resistencia una carga, aunque también deberá soportar otras, típicamente de origen dinámico. En obra civil, la función principal de un elemento puede ser servir de fundación para otros, pero puede estar sometido a la acción del mar (caso de obra marítima), lo que puede suponer exigencias mayores que las relacionadas con su finalidad original.

La estructura está formada por elementos sólidos. La acción de las cargas puede comprometer potencialmente la integridad de dichos elementos sólidos. Uno de los propósitos de esta asignatura es estudiar las condiciones que deben cumplirse para que los elementos de la estructura proyectada puedan soportar las cargas de forma segura.

Se trata por tanto de sólidos sobre los que actúan fuerzas. Ya conocemos algunos enfoques para analizar el comportamiento de cuerpos sólidos bajo la acción de fuerzas. Por ejemplo, si sólo estamos interesados en el estado de reposo o movimiento del sólido como un conjunto, y no en fenómenos internos que podrían ocurrir en el interior del mismo, como por ejemplo la deformación o la rotura, el modelo proporcionado por la Dinámica del Sólido Rígido será suficiente para su estudio. Este modelo es particularmente elegante, ya que se formula en base a un número de variables muy reducido, y a sólo dos ecuaciones vectoriales. Éstas son las conocidas:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \sum \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} \quad (1.1)$$

Que relacionan, respectivamente, la resultante de las fuerzas aplicadas y su momento resultante respecto de un punto con parámetros instantáneos de movimiento (la aceleración lineal y la aceleración angular, respectivamente), a través de las propiedades de inercia del sólido (masa y momentos de inercia). En el caso particular de que las aceleraciones sean

pequeñas, los términos de inercia serán de magnitud despreciable frente a las fuerzas y momentos que intervienen en el problema, y los miembros derechos de las ecuaciones anteriores se pueden suponer nulos:

$$\sum \vec{F}=0 \quad \sum \vec{M}=0 \quad (1.2)$$

Las anteriores son las ecuaciones de la Estática del Sólido Rígido, de común aplicación en el cálculo de reacciones y otras fuerzas, en problemas de mecánica de sólidos.

Si debido a la naturaleza de un problema dinámico, los movimientos de rotación pueden ignorarse, sólo la ecuación de fuerzas será relevante en (1.1), y el problema implica a efectos prácticos el estudio de un punto con masa: se trata de la Dinámica del Punto Material. Si además el término de inercia es despreciable, el modelo adquiere la forma más simple de Estática del Punto Material, en el que sólo hay que asegurar el equilibrio de fuerzas que pasan por el punto.

Todos los modelos citados anteriormente hacen uso de la herramienta matemática denominada Álgebra de Vectores Deslizantes, que es especialmente adecuada para este tipo de problemas ya que como es sabido:

“El estado de movimiento o reposo de un cuerpo rígido no cambia si una fuerza actuante es aplicada en otro punto de su recta de acción”.

En este curso estamos interesados en los fenómenos de deformación, daño, y posible rotura, que pueden ocurrir en las estructuras reales. Centraremos el estudio en las condiciones estáticas (aceleraciones despreciables) que son frecuentes en los problemas de estructuras convencionales.

Aunque el estudio de los fenómenos asociados a la deformación requiere modelos matemáticos diferentes que la Estática del Sólido Rígido, ésta será aún de utilidad, ya que la imposición de las condiciones de equilibrio se realiza mediante las mismas ecuaciones (1.2) de “suma de fuerzas igual a cero, y suma de momentos igual a cero”.

El estudio del sólido real (deformable) se divide tradicionalmente en varias disciplinas, que están fuertemente interconectadas entre sí, pero que al mismo tiempo tienen sus particularidades en cuanto al ámbito de aplicación, objeto de estudio, y modelos matemáticos o aproximaciones que utilizan. A continuación se enumeran estas disciplinas:

Teoría de la Elasticidad.- No presupone ninguna particularidad en la geometría del sólido que pudiera conducir a aproximaciones simplificadoras del modelo. Sus resultados son por tanto de aplicación a sólidos de cualquier geometría. Habitualmente, en especial al abordar un primer estudio, suelen asumirse un conjunto de hipótesis que por una parte simplifican el modelo, y por otra parte se adaptan bien al comportamiento del acero y de otras aleaciones metálicas. En concreto supondremos material homogéneo (las propiedades son iguales en distintos puntos) e isótropo (en cualquier punto dado las propiedades no dependen de la dirección de observación), comportamiento elástico (el sólido recupera su forma inicial tras la descarga) y lineal

(existe proporcionalidad entre cargas y desplazamientos), pequeños desplazamientos y cambios de forma (lo bastante para que sea buena aproximación plantear el equilibrio en la configuración indeformada), y ausencia de efectos dinámicos.

Resistencia de Materiales.- Estudia el sólido con forma de barra esbelta, generalmente recta. Se asumen el resto de hipótesis básicas usadas en la Teoría de la Elasticidad. La particularidad geométrica de que una dimensión sea mucho mayor que las otras dos, permite realizar simplificaciones muy útiles en el modelo matemático. Esta tipología de barra es mayoritariamente utilizada tanto en Estructuras de Edificación como de ingeniería civil, y en algunos casos en máquinas y mecanismos, de ahí la importancia de su estudio particular.

Teoría de Estructuras.- Para enunciarlo brevemente, podemos decir que estudia el comportamiento de los sistemas de barras conectadas entre sí, bajo las mismas hipótesis que la Resistencia de Materiales. En realidad la línea divisoria entre ambas disciplinas es confusa, siendo habitual incluir estudios de sistemas de barras sencillos en el ámbito de la Resistencia de Materiales. Por otra parte, muchos textos sobre Teoría de Estructuras abordan el estudio de fenómenos (como pueden ser la plasticidad o los grandes desplazamientos) que se salen de las hipótesis más usuales del primer estudio de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales.

Aunque la clasificación anterior debiera ser suficiente para que el recién llegado se forme una idea rápida del contenido de esas disciplinas, debe tenerse noticia de que hay varios aspectos que no se han mencionado, fundamentalmente porque no serán objeto de estudio en este curso. Tales son los estudios de placas y láminas (formas estructurales que mencionaremos seguidamente), que suelen realizarse en el ámbito de la Resistencia de Materiales, o ciertos estudios de sólidos que no admiten simplificaciones geométricas claras y que suelen estudiarse como parte de la Teoría de Estructuras, como pueden ser los detalles de las uniones en estructuras y en su cimentación, por ejemplo.

El estudio de las disciplinas básicas enumeradas permite abordar otras más especializadas. Entre ellas, como continuación y aplicación de sus conocimientos, podemos citar las Estructuras Metálicas, Estructuras de Hormigón, Estructuras de Madera, etc. El diseño de los elementos de Máquinas y Mecanismos en su aspecto resistente también necesita de esos conocimientos básicos. Como materias adyacentes, cuyo estudio cobra sentido tras adquirir los conocimientos citados, están las materias relacionadas con Proyectos de Estructuras, Construcciones Industriales, Puesta en Obra, etc. Como profundización en el estudio del comportamiento del sólido resistente, existen diversas disciplinas, generalmente derivadas de relajar alguna de las hipótesis básicas que se realizaron en el primer estudio, o de incluir nuevos fenómenos. Podemos citar la Plasticidad, la Viscoelasticidad, la Termoelasticidad, los modelos de Grandes Deformaciones, la Mecánica de la Fractura, el estudio del Material Ortótropo y de los Apilados de Láminas, entre otros muchos.

Formas estructurales básicas

En cuanto a su geometría, podemos clasificar las formas estructurales de acuerdo con el siguiente esquema:

Con una dimensión mucho mayor que las otras dos:

Barras rectas

Vigas, Pilares, Ejes, y Barras de Armaduras

Vigas curvas, Vigas de sección variable

Arcos

Cables

Con una dimensión mucho menor que las otras dos:

Membranas, Placas, y Láminas

Forma general

Frecuente en nudos y uniones entre los elementos anteriores, y en muchos elementos de máquinas (bielas, cigüeñales...)

Como se ha apuntado, la forma de barra recta es la más ampliamente utilizada en las estructuras de todo tipo, y será a la que prestemos especial atención en este curso. Su geometría es la engendrada por una superficie plana que llamaremos "sección" o "perfil" de la barra, al desplazarse a lo largo de un segmento de recta perpendicular a ella, que llamamos "directriz" de la barra. Entendemos por viga (fig 1.1a) aquella barra que está sujeta en algunos (pocos) puntos, y que soporta cargas transversales a ella, situadas en otros puntos. Por pilar (fig 1.1b) entendemos aquella barra que soporta fundamentalmente cargas de compresión longitudinales con su eje. Se reserva el calificativo de pilar para las barras verticales de las construcciones de edificación, que suelen trabajar de la manera indicada, en concreto a compresión (no a tracción). Las "armaduras" o "celosías" (fig 1.1e) son estructuras metálicas de barras muy ligeras y esbeltas, como las que suelen formar el cuerpo de las grandes grúas (para obra civil o urbana, portuarias, etc), y los esqueletos resistentes de las cubiertas de muchas naves industriales, polideportivos, etc. Las barras de las armaduras, por cómo están diseñadas y montadas, en general sólo generan cargas longitudinales con la propia barra, siendo en ese sentido parecidas a los pilares. Pero por una parte, estas barras para armaduras suelen ser mucho más esbeltas, y por otra parte pueden trabajar a tracción o a compresión. Su gran esbeltez las hace especialmente propensas a sufrir fenómenos de inestabilidad, y su montaje y puesta en servicio difiere mucho del de los pilares.

Las vigas curvas se utilizan generalmente debido a exigencias de la funcionalidad que debe prestar el elemento resistente, aunque en ocasiones obedecen a criterios estéticos. Algunos semáforos de tráfico, cuyo soporte tiene directriz curva, constituyen un ejemplo sencillo de viga curva. La exigencia de funcionalidad es, en este caso que las luces del semáforo cuelguen del centro de la carretera sin que el soporte obstaculice el tráfico.

Una viga de sección variable se proyecta generalmente con la intención de aprovechar mejor el material. La idea básica es poner sección más gruesa donde la sollicitación va a ser mayor. La ejecución de una viga de sección variable es más complicada -y por lo tanto

cara-, que una de sección constante. Este es un factor que puede contrarrestar fácilmente el ahorro de material, y que debe ser sopesado al considerar elementos de este tipo.

Un arco tiene una geometría similar a la de una viga curva, por lo que conviene enfatizar la diferencia entre ambos: el arco tiene su curvatura y sus apoyos diseñados de modo que, para el estado de carga previsto, trabaje a compresión en todos sus puntos. Esto permite realizar arcos en materiales que no resisten tracción, como pueden ser la piedra o el hormigón, e incluso formar el arco con piezas que no presenten cohesión entre sí (sillería). Por el contrario, en una viga curva se cuenta con que habrá tracción en muchos de sus puntos. Es evidente que el diseño geométrico de un arco debe ser especialmente cuidadoso, ya que la aparición indeseada de tracciones puede arruinar fácilmente el arco. Muchas catedrales góticas y románicas tienen magníficos ejemplos de arcos realizados en piedra.

Los cables (fig 1.1d), al contrario que los arcos, no pueden soportar otra cosa que no sea tracción. Su geometría se adapta de forma natural a las cargas para que ello resulte así. En estructuras convencionales, el cable suele usarse en forma de tirante, es decir para intentar mantener la distancia entre dos puntos de la estructura que de otro modo tenderían a separarse entre sí. En esos casos el cable recibe las acciones en sus extremos, y adopta una geometría recta.

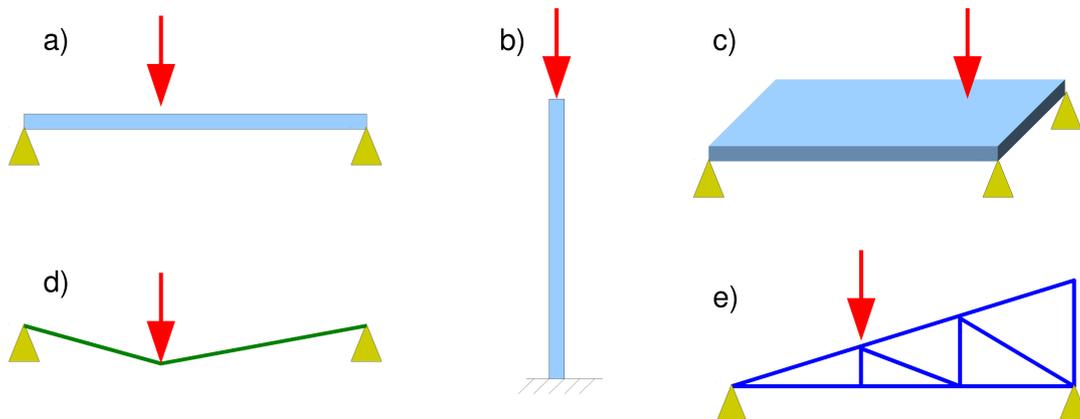


Figura 1.1: Algunos ejemplos de formas estructurales a) viga b) pilar c) placa d) cable e) armadura de barras

Una membrana puede entenderse como “un cable con una dimensión más”: no presenta resistencia a ser doblada y no puede soportar compresiones (al igual que el cable). Un ejemplo familiar de membrana es la tela que forma un globo aerostático. En estructuras habituales, las membranas son escasamente usadas como elemento resistente.

Una placa (fig 1.1c) puede entenderse “como una viga recta con una dimensión más”. Al igual que las vigas, presenta resistencia a ser curvada, y típicamente está sustentada en algunos puntos mientras soporta acciones transversales a la placa en otros puntos. Un ejemplo familiar de placa es el tablero de una mesa, o también la plancha de acero que se suele poner en las calles sobre una zanja (realizada normalmente para operaciones de mantenimiento), para que puedan continuar pasando vehículos por encima. El suelo (“forjado”) entre plantas de un edificio no es un buen ejemplo de placa, debido a su construcción con

vigas y direcciones preferentes (“forjado unidireccional”). Un suelo construido a base de un emparrillado de vigas (“forjado bidireccional”) podría asimilarse más a una placa.

Una lámina puede entenderse “como una viga curva con una dimensión más”. Tiene en común con las placas todas sus características, salvo que su geometría no es plana sino alabeada. El típico ejemplo de lámina lo constituye la chapa de la carrocería de un automóvil bajo la carga aerodinámica, o bajo la acción accidental de un peso (una persona apoyada o sentada sobre la chapa, etc).

Se han desarrollado modelos matemáticos específicos para el estudio de cada una de las tipologías resistentes anteriores. Estos modelos, más o menos complejos, resultan en todo caso de aplicar simplificaciones razonables al modelo elástico general. Los sólidos resistentes de geometría general, es decir aquellos cuya forma y condiciones de trabajo no permiten aplicar razonablemente aproximaciones simplificadoras, deben ser analizados mediante técnicas basadas directamente en la Teoría de la Elasticidad. Aparte de los órganos de máquinas, existen un gran número de detalles constructivos (en los nudos o uniones de las estructuras por ejemplo) que caen en esta categoría. No obstante, la existencia de normativa al respecto, sustentada por una amplia experiencia, facilita al proyectista en análisis de estos detalles constructivos en la mayoría de los casos comunes.

Materiales

Los materiales utilizados para construir estructuras son muy diversos. Se emplean desde materiales que se encuentran en la naturaleza como la madera o la piedra, hasta los más modernos elaborados por el hombre, como los materiales reforzados con fibras o el acero y aleaciones metálicas. En estructuras de edificación, los materiales más utilizados son el acero y el hormigón, aunque también otros que se apuntan seguidamente.

El acero es un producto industrial obtenido a partir de mineral de hierro, mediante sucesivos procesos de extracción y refinado (alto horno, convertidor... etc). El acero es básicamente hierro con una proporción de carbono menor que el 2% (el hierro con mayor proporción de carbono suele denominarse “fundición”, y presenta propiedades distintas). El acero para estructuras es “acero extradulce”, de bajo contenido en carbono (del orden del 0.2%).



La norma vigente en España, llamada “Código Técnico de la Edificación” (CTE)^[6], en su apartado 4.2, contempla cuatro tipos de aceros para estructuras. Se denominan:

S235

S275

S355

S450

El número que acompaña a la denominación es el valor del “Límite Elástico”, característica particular de la que hablaremos más tarde. La “S” es la inicial de “steel”, acero en inglés.

El hormigón consiste en una mezcla de cemento con áridos (arena, grava...), y agua, y eventualmente otros aditivos adicionales. Tras un cierto tiempo de fraguado y endurecimiento, típicamente de 28 días, adquiere sus propiedades nominales de resistencia. Las vigas y pilares de hormigón para estructuras suelen ejecutarse con barras de acero convenientemente embebidas en el interior, a modo de armado, debido a que el hormigón por sí mismo no tiene apenas capacidad de resistir tracciones. Por tanto, en condiciones normales de servicio, el hormigón y sus armaduras de acero constituyen un material fuertemente no homogéneo, circunstancia que aconseja abordar su estudio tras haber comprendido el comportamiento de un material homogéneo.

La normativa vigente relativa al hormigón está recogida en la instrucción EHE [7], que es una norma diferente del CTE [6], y que no está incluida en éste. La mayoría de las estructuras de otros materiales (acero, madera, fábrica de ladrillo, etc), así como otros aspectos del servicio de la estructura (cargas, cimentación, salubridad, etc), sí están recogidos y reglamentados en el CTE.

La madera es un material estructural interesante en muchas aplicaciones, a pesar de lo que la amplia aplicación de otros materiales pueda hacer suponer. Su moderna ejecución en forma de apilados de tablas (no en bruto, sino en forma de laminados), le confiere características muy deseables en cuanto a resistencia, homogeneidad del producto y predecibilidad de comportamiento frente a acciones como el fuego, o las propias cargas de uso de la estructura.

El terreno. Aunque puede sorprender su inclusión aquí, lo cierto es que el terreno es un eslabón fundamental en la cadena resistente de las estructuras de edificación, industriales, y de obra civil. Es al terreno al que finalmente se transmiten las cargas de ese tipo de estructuras, y su resistencia es tan preocupante como la de los elementos con forma de barra que forman la parte visible de la estructura. Existen modelos para predecir el comportamiento y eventual “rotura” del terreno, y el proyecto de la estructura debe incluir las comprobaciones oportunas respecto del comportamiento y la resistencia del mismo, aunque ello sólo será objeto de alguna mención marginal en este curso.

Acciones sobre la estructura

Como se ha indicado, aparte de las cargas derivadas directamente de la función prevista de la estructura, hay que prever eventuales acciones climáticas y térmicas (de origen climático o no), y acciones producidas por eventos poco probables pero que de ocurrir pueden suponer daños graves, como sismos o impactos, entre otras acciones accidentales posibles.

En los casos de Estructuras de Edificación, las acciones que deben considerarse están reguladas por la normativa, en función del uso previsto de la estructura, su ubicación geográfica, etc. La normativa vigente en el territorio español está recogida en el CTE [6], Documento Básico de Seguridad Estructural, punto 4 (“Método de Coeficientes Parciales”), y

Documento Básico de Seguridad Estructural – Acciones en la Edificación (que detalla los valores concretos de las acciones a considerar en la aplicación del citado Método de los Coeficientes Parciales). La norma divide las acciones en tres categorías:

Acciones Permanentes: Actuarán en todo instante, en la misma posición. Como el peso propio, peso de elementos fijos, empujes del terreno, etc.

Acciones Variables: Las que en un instante dado pueden actuar, o no, y cambiar de posición u orientación. Las acciones debidas al uso, y las acciones climáticas, por ejemplo.

Acciones Accidentales: Aquellas cuya probabilidad de ocurrir no es grande, pero que podrían suponer daños importantes a la estructura. Como terremotos, fuego, impactos y explosiones.

El Método de Coeficientes Parciales para las acciones que propone la norma consiste en aplicar combinaciones de acciones ponderadas por coeficientes. Los coeficientes de ponderación son de dos tipos: coeficientes de simultaneidad (que tienen en cuenta la muy escasa probabilidad de que todas las acciones variables independientes ocurran con su valor máximo en el mismo instante) y coeficientes de seguridad (que tienen en cuenta la incertidumbre existente en relación con el máximo valor al que pudiera llegar una acción variable). Su valor aplicable en cada caso está basado en técnicas probabilísticas.

Básicamente, se trata de generar un caso de carga por cada acción variable. De cada uno de ellos derivan otros, considerando cada acción accidental. Además hay casos de carga adicionales según el tipo de fallo considerado (límites de resistencia o de desplazamientos). Todo ello suele implicar un gran número de combinaciones de carga, incluso para estructuras relativamente sencillas. En este curso no entraremos en las complicaciones asociadas a lo anterior, y analizaremos casos de carga individuales.

Objetivos y método en el análisis de la estructura

Desde el punto de vista del análisis, estaremos interesados en aquellas variables que afecten al correcto comportamiento de la estructura en condiciones de servicio. Esto conlleva la necesidad de realizar comprobaciones relativas a la resistencia de la misma, a su estabilidad, y a la magnitud de sus desplazamientos. Aparte de posibles pruebas experimentales, generalmente muy costosas, las comprobaciones se realizan sobre modelos matemáticos que proporcionan la información necesaria acerca de dichos aspectos del comportamiento.

Para el caso del tipo de estructuras contempladas en el CTE, que fundamentalmente son todas aquellas cuyo uso previsto involucre la seguridad o la comodidad de personas, la norma introduce el concepto de Estados Límite, dividiendo éstos en dos categorías:

Estados límite últimos: Son los estados de la estructura que, de ser superados, implican un riesgo para las personas, generalmente por un colapso total o parcial de la estructura.

Estados límite de servicio: Son aquellos estados de la estructura que, de ser superados, afectan negativamente al bienestar de las personas, o a la apariencia de la construcción.



Típicamente los análisis relativos a estados límite últimos requieren comprobaciones acerca de la resistencia y la estabilidad, mientras que los análisis relativos a estados límite de servicio requieren comprobaciones sobre los desplazamientos.

En resumen, los mencionados modelos matemáticos que se usen en el análisis de la estructura y los elementos que la componen, deben proporcionar predicciones acerca de:

El comportamiento esperado del material bajo las acciones previstas. Interesa en particular saber si el mismo se romperá o sufrirá algún tipo de alteración indeseable.

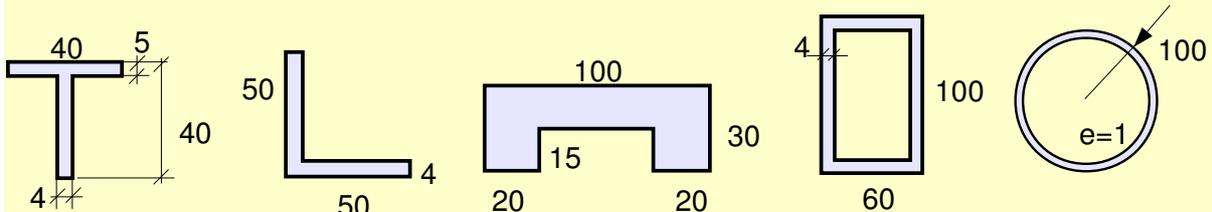
La magnitud de los desplazamientos de la estructura bajo las acciones previstas, para poder juzgar si los mismos serán aceptables o no en condiciones de servicio.

Las comprobaciones anteriores, basadas en las predicciones ofrecidas por los modelos matemáticos, se utilizan para validar un determinado diseño estructural, o apreciar la necesidad de su modificación, siempre antes de ser construido físicamente.

Por supuesto existen otros criterios aparte de los puramente funcionales y de resistencia. Típicamente, los condicionantes económicos y estéticos pueden ser determinantes para validar o no un diseño de cara a su ejecución real. Dichos aspectos caen fuera del ámbito de esta asignatura.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Aunque no hay ejercicios previstos para el tema de introducción como tal, es buen momento para repasar conocimientos previos que necesitaremos en la asignatura. Tras leer el Apéndice B, puede calcular los centros de áreas y los momentos de inercia principales centrales de las figuras planas siguientes.



2.- Equilibrio y Tensión

Equilibrio estático

Consideremos como objeto de análisis un sólido cualquiera, que en principio podemos suponer rígido, o bien considerar que es deformable y que se encuentra en su estado deformado tras la aplicación de unas cargas.



Hemos adoptado como hipótesis básica el que los desplazamientos y los cambios de forma del sólido son pequeños. Ello permite plantear el equilibrio en la configuración indeformada con excelente aproximación.

Las mencionadas cargas serán un conjunto de fuerzas concentradas (cargas puntuales) o distribuidas (como la acción de la gravedad), y en todo caso se representan matemáticamente mediante un sistema de vectores deslizantes. Como se indicó en el tema anterior, en ausencia de efectos dinámicos dicho sistema de vectores debe cumplir las ecuaciones (1.2):

$$\sum \vec{F}=0 \quad \sum \vec{M}=0 \quad (1.2 \text{ bis})$$

Que expresan que la resultante de las fuerzas debe ser nula, y que su momento resultante respecto de un punto (cualquiera) del espacio debe ser también nulo. Conviene enfatizar que el equilibrio de un sólido, y por tanto las ecuaciones anteriores, no son algo opcional que un sólido en reposo podría cumplir o no:

En la naturaleza, y en ausencia de efectos dinámicos, un sólido, o cualquier porción de un sólido, siempre estará en equilibrio. Por tanto, el sistema de fuerzas que actúa sobre él siempre cumplirá las ecuaciones (1.2) de equilibrio.

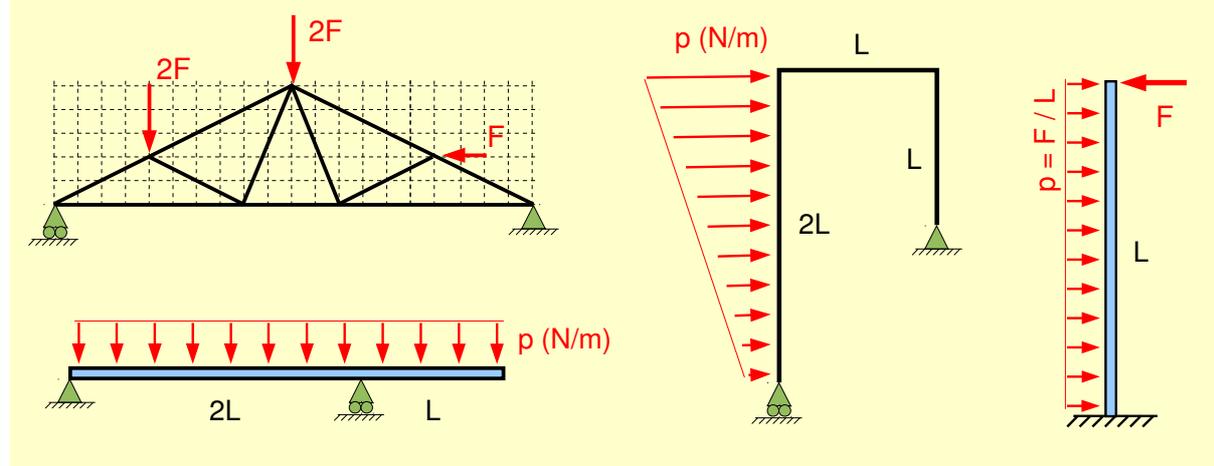
Ocasionalmente utilizamos expresiones como “el sólido no estaría en equilibrio”, que parecen sugerir que tal estado de no equilibrio fuese posible, cuando en la realidad física, de una u otra forma, el sólido siempre estará en equilibrio. Lo que en realidad queremos decir con expresiones como esa es que, en nuestro análisis, “estamos aplicando mal, o de forma incompleta, las ecuaciones de equilibrio”. De hecho, incluso en presencia de efectos dinámicos pueden definirse unas “fuerzas de inercia”, que permiten aplicar formalmente las ecuaciones de equilibrio estático (1.2), aunque ello no sea de nuestro interés en este curso.

Como se ha mencionado anteriormente, el “Álgebra de Vectores Deslizantes” es la herramienta matemática oportuna para analizar las condiciones de equilibrio de un sólido, debido a que el estado de equilibrio no se ve afectado por la posición de las fuerzas dentro de su recta de acción. A modo de resumen, en el Apéndice A se incluye una breve descripción de

los aspectos de mayor interés del Álgebra de Vectores deslizantes, y su aplicación al equilibrio estático. Se recomienda la lectura de dicho apéndice antes de avanzar en el estudio de los epígrafes siguientes.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcular las reacciones en las estructuras siguientes, aplicando las condiciones de equilibrio. Se recomienda emplear tanto razonamientos analíticos como gráficos, en los casos en que resulte apropiado.



Concepto de Tensión

La tensión es reconocida como el concepto físico más importante de toda la mecánica de medios continuos en general, y de la mecánica de sólidos en particular.

Consideremos un sólido en equilibrio estático bajo a la acción de un determinado sistema de fuerzas. Frecuentemente dichas fuerzas estarán producidas por el contacto con otros sólidos, y por tanto actuarán en la superficie del sólido. Pueden ser fuerzas concentradas (que actúan en un punto y tienen unidades de fuerza), o distribuciones de fuerzas (que actúan sobre cierto área del contorno del sólido, y tienen unidades de fuerza dividida por superficie). Además de las fuerzas en el contorno anteriores, pueden existir fuerzas en el dominio, (que actúan en el interior del sólido y tienen dimensiones de fuerza dividida por volumen), como por ejemplo la acción de la gravedad. Frecuentemente nos referiremos a todas estas acciones como “cargas aplicadas” o “acciones exteriores” en el sólido.



Las acciones aplicadas sobre el sólido son esas fuerzas concentradas o distribuidas en el contorno, y las posibles fuerzas en el dominio. Usualmente son datos, y no se deben confundir con las tensiones internas en el sólido, concepto diferente que definiremos a continuación, y que raramente es dato en un problema resistente.

Imaginemos nuestro sólido dividido en dos partes por una cierta superficie S como indica la figura 2.1a. Consideremos una de las partes del sólido para nuestro análisis (la izquierda en

la figura). Definimos un vector \mathbf{n} adimensional, de módulo unidad, dirección perpendicular a la superficie S en cada uno de sus puntos, y sentido saliente de la parte del sólido considerada. Asumimos que S es tal que la evolución de \mathbf{n} es continua (S no tiene “esquinas”).

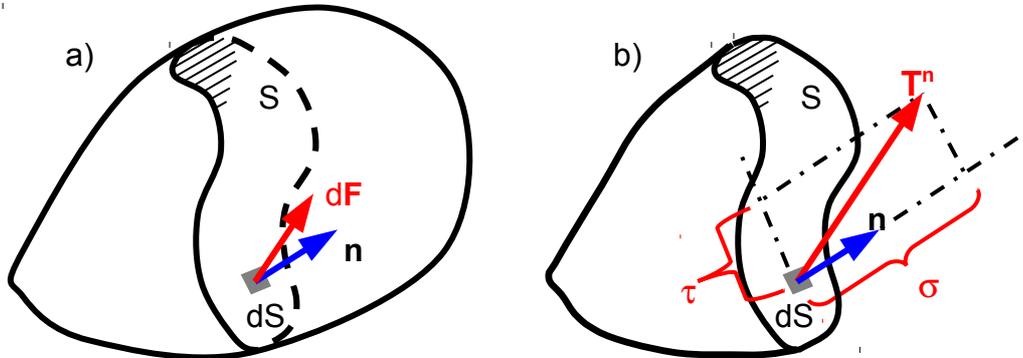


Figura 2.1: Porción de un sólido en equilibrio y concepto de tensión.

La porción del sólido que hemos aislado debe estar, cómo no, en equilibrio. Las acciones que actúan sobre ella, y bajo las que debe estar en equilibrio, serán las que ya actuaban en esa porción en el sólido original, más las acciones que la porción eliminada del sólido ejerce sobre la porción considerada, a través de la superficie S .

La hipótesis fundamental de la Mecánica de los Medios Continuos establece que dicha interacción entre ambas porciones del sólido, es una distribución continua de fuerzas por unidad de superficie.

El valor vectorial de dicha distribución de fuerzas en cada punto de S , es lo que conocemos como “vector tensión” (o simplemente “tensión”, cuando el contexto no da lugar a ambigüedades). Toda la mecánica de los medios continuos se apoya en este concepto.

La distribución de fuerzas transmitida a través de la superficie S es, por tanto, de características similares a lo que habíamos definido como la “distribución de fuerzas” que podía actuar como carga aplicada en una zona de la superficie real del sólido. De hecho, ambas tienen las mismas dimensiones (fuerza dividido por superficie), y en realidad tienen idéntico significado físico una vez que hemos asumido que nuestro sólido de estudio es la porción considerada del sólido original.

De esta manera (ver nuevamente fig. 2.1a), en un elemento de área dS , de normal \mathbf{n} , perteneciente a la superficie S , actuará una fuerza elemental $d\mathbf{F}$, que será la resultante de la distribución de tensión que actúa en ese pequeño área. El vector tensión \mathbf{T}^n se define como el límite del cociente entre la fuerza $d\mathbf{F}$ y la superficie dS sobre la que actúa, cuando ésta tiende a cero. Puede demostrarse que el momento resultante que pudiéramos considerar tiende a cero al tomar un dS arbitrariamente pequeño.

La figura 2.1b muestra el vector tensión \mathbf{T}^n en el punto considerado de la superficie S . La notación que empleamos incluye el superíndice \mathbf{n} para denotar que el vector tensión en ese mismo punto, pero según otra superficie de corte cuya normal no fuese \mathbf{n} , sería distinto.

Debe entenderse por tanto que el vector tensión varía con el punto considerado del sólido, pero también con la orientación de la superficie ideal de corte en ese punto.



En rigor no hacía falta toda la superficie S para ilustrar el concepto de vector tensión en un punto: con la superficie elemental dS habría bastado. El vector tensión en ese punto no depende de la forma u orientación que tenga S en los demás puntos. Se ha incluido un corte completo S porque una explicación basada en equilibrio de una porción del sólido resulta más clara.

Otra particularidad que se ilustra en la figura 2.1b es que, aunque tiene dimensiones de presión (fuerza partido por superficie), el vector tensión \mathbf{T}^n no tiene porqué ser perpendicular a la superficie S . Por ello \mathbf{T}^n no tiene la dirección de \mathbf{n} en la figura. De hecho, en la misma figura se representan las componentes del vector tensión en la dirección de \mathbf{n} (componente σ , llamada tensión normal), y en el plano perpendicular a \mathbf{n} , que coincide con el plano tangente a S en el punto (componente τ , llamada tensión tangencial). Se conoce al conjunto de ambas, σ , τ , como componentes intrínsecas del vector tensión. Vienen dadas por las expresiones:

$$\sigma = \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{n} \qquad \tau^2 = |\mathbf{T}^n|^2 - \sigma^2 \qquad (2.1)$$

Siendo el resultado de un producto escalar, la tensión normal σ puede tener signo positivo o negativo. Si \mathbf{T}^n “apunta hacia el sólido” el elemento de superficie dS está siendo comprimido hacia adentro del sólido, mientras que si \mathbf{T}^n “apunta hacia afuera del sólido” estamos tirando del elemento de superficie hacia el exterior del sólido. Por tanto se observa que esta componente σ es de tracción cuando el producto escalar es positivo, y que es de compresión cuando es negativo. Por su parte, la tensión tangencial τ aparece en la fórmula elevada al cuadrado (ello es resultado de haber sido calculada como un cateto de un triángulo rectángulo usando el teorema de Pitágoras). Por tanto el signo de τ es irrelevante. Diremos que la tensión tangencial τ es un escalar sin signo. Lo anterior refleja el hecho físico de que la tensión tangencial puede tener cualquiera de las infinitas direcciones dentro del plano tangente a S , y un simple cambio de signo no puede servir para discriminar entre infinitas posibilidades. Sin embargo, para la tensión normal sólo hay dos posibilidades (“hacia adentro” o “hacia afuera”), que sí pueden asociarse a un cambio de signo.

Finalmente, consideremos por un momento la porción del sólido que fue descartada del análisis en la figura 2.1 (porción derecha). La misma está limitada por la misma superficie S , pero en este caso la normal exterior en un punto sería directamente opuesta a la normal \mathbf{n} que obteníamos al aislar la porción izquierda. Por tanto, la normal exterior en el punto al aislar la porción derecha, será $-\mathbf{n}$ (ver figura 2.2).

Por otra parte, el principio de acción y reacción de Newton indica que la fuerza $d\mathbf{F}$ que la porción derecha ejerce sobre la izquierda a través del dS , debe ser igual y contraria a la que la porción izquierda ejerce sobre la derecha. Esta reciprocidad es inmediatamente trasladable a los vectores tensión, ya que sólo hay que dividir la fuerza elemental por el escalar dS . Por lo tanto, tal como se muestra en la figura 2.2:

$$\mathbf{T}^n = -\mathbf{T}^{-n} \quad (2.2)$$

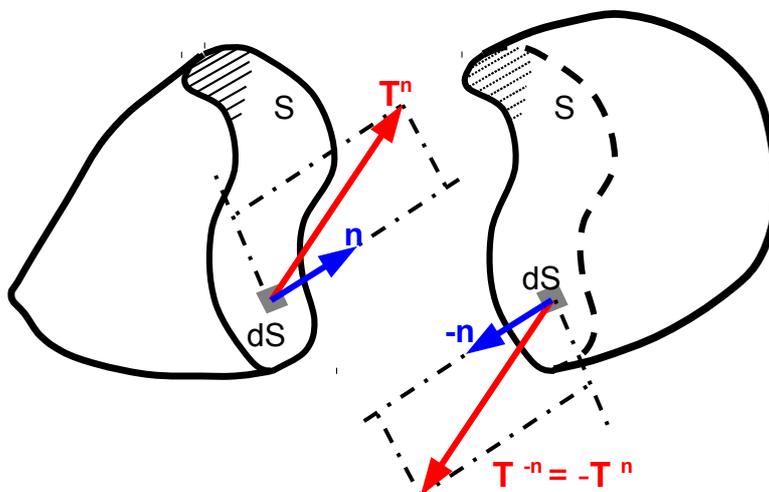


Figura 2.2: Vector tensión al considerar la otra porción del sólido

Esfuerzos en barras rectas

La geometría de barra recta es, con mucho, la más utilizada como elemento resistente. Comparativamente, combina una relativa sencillez de transporte o construcción *in situ*, con la posibilidad de conseguir las características requeridas de rigidez y funcionalidad en un gran número de situaciones. Podríamos decir que cuando se necesita un dispositivo resistente, lo primero en lo que habitualmente se piensa es en materializarlo a base de barras rectas.

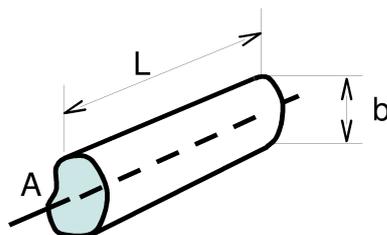


Figura 2.3: Barra recta de sección A y longitud L

Definimos la geometría de barra recta como el cuerpo obtenido al desarrollar una superficie plana a lo largo de un segmento de recta perpendicular a ella, que llamamos directriz. La superficie plana recibe el nombre de sección de la barra, y suele ser constante, aunque también pueden ejecutarse barras de sección variable. Es también frecuente denominar "perfil" a la forma de la sección de la barra, hablándose por ejemplo de una barra de perfil circular, o de perfil rectangular hueco, etc. Esto evita la ambigüedad de la palabra "sección", que puede emplearse indistintamente para indicar un corte ideal realizado a la barra perpendicularmente a su directriz, o bien para indicar la forma de la barra obtenida en dicho corte (el "perfil").

En base a las particularidades de esta geometría, se realizarán más adelante un conjunto de simplificaciones. Para que las mismas no introduzcan errores excesivos, es necesario que la barra sea esbelta. Es decir, que L sea grande en relación a la mayor dimensión de la sección, que hemos llamado b en la figura 2.3. Para para que podamos considerar una barra como esbelta debe cumplir, orientativamente, $L / b > 10$, aunque se obtienen resultados más acordes a la realidad cuanto mayor sea esa relación.



Las barras excesivamente esbeltas son en general demasiado flexibles y propensas a sufrir fenómenos de inestabilidad. Por ello es infrecuente la ejecución de barras con función resistente de esbeltez mayor que 50, orientativamente.

Consideraremos que los tipos de cargas que pueden actuar sobre la barra serán concentradas (actúan en un punto, y tienen unidades de fuerza) o distribuidas (actúan en una porción de la longitud de la barra, y tienen unidades de fuerza dividida por longitud). Su orientación puede ser cualquiera, longitudinal, transversal o inclinada respecto de la directriz de la barra. La figura 2.4 muestra un ejemplo de barra con los tipos de carga indicados. Pueden también existir momentos concentrados (e incluso distribuidos), aunque no se han incluido en la figura.

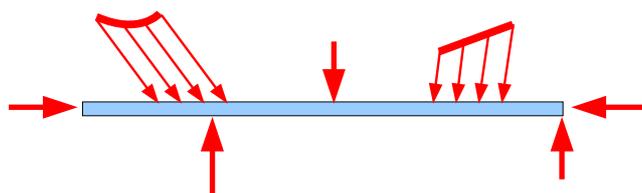


Figura 2.4: Ejemplo de cargas concentradas y distribuidas en una barra

Considérese una porción de la barra, obtenida mediante un corte ideal transversal a la misma, a una distancia x del extremo izquierdo. Tal como hemos planteado para el sólido de geometría general, la porción de barra estará en equilibrio bajo las acciones exteriores que ya actuaban en esa porción, y las acciones que la porción descartada de la barra ejerce sobre la porción bajo estudio. Como sabemos, éstas acciones consisten en una cierta distribución de tensiones en la sección.

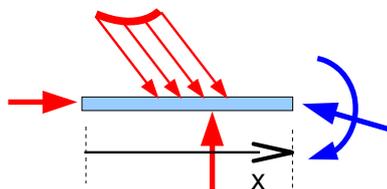


Figura 2.5: Porción de la viga anterior, con la resultante de las tensiones en la sección.

Al igual que cualquier sistema de vectores, la distribución de tensiones en la sección siempre admitirá reducción respecto de un punto. Esta reducción constará en el caso general de la resultante colocada en el punto, y el momento respecto de ese punto. La figura 2.5 muestra una porción de barra como la indicada, incluyendo una reducción de las tensiones en la sección respecto de un punto de la misma. Por conveniencia posterior, el punto de reducción que elegiremos será el centro de áreas de la sección.

La figura 2.6a ilustra a modo de ejemplo una distribución de tensiones en la sección, e indica el punto en el que realizaremos la reducción (centro de áreas).

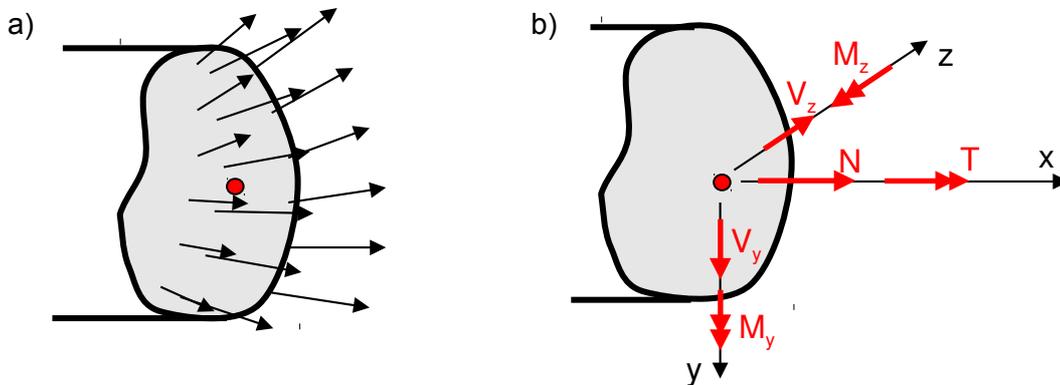


Figura 2.6: a) Tensiones en una sección. b) Reducción de las fuerzas al centro de áreas

La figura 2.6b indica las componentes de la resultante y del momento resultante de la reducción. Las componentes de esta reducción pueden calcularse tanto imponiendo el equilibrio de la porción de barra mostrada en la figura 2.5, como efectuando la reducción de las tensiones en la sección mostradas en la figura 2.6a, si se conocen. Por supuesto, ambos resultados deben coincidir.

Definimos los esfuerzos como cada una de las tres componentes de la resultante y de las tres del momento resultante de la reducción de las fuerzas que actúan en la sección. Existen denominaciones de uso común para cada componente, según se indica:

- A la componente longitudinal de la resultante, N , se le llama esfuerzo axial. Decimos que una barra trabaja a tracción o compresión cuando sólo tiene este esfuerzo, lo que es frecuente en las estructuras de tipo celosía, y en los pilares.
- A las componentes de la resultante contenidas en el plano de la sección, V_y y V_z , se les denomina esfuerzos cortantes. En la práctica no se dan casos de sólo esfuerzo cortante en barras completas.
- A las componentes del momento en el plano de la sección, M_y y M_z , se les llama momentos flectores. Si una barra presenta sólo esfuerzos de este tipo, decimos que trabaja a flexión pura. Este caso se presenta raramente en la práctica, ya que los momentos flectores suelen ir acompañados de esfuerzos cortantes.
- A la componente T del momento según el eje de la barra, se le denomina momento torsor. Decimos que una barra trabaja a torsión si sólo presenta este esfuerzo. En estructuras de edificación, la torsión suele ser una sollicitación indeseable que trata de evitarse desde la propia concepción y diseño de la estructura.

Adicionalmente, existen unas pocas denominaciones especiales para el modo de trabajo de una barra, en función la combinación de esfuerzos que soporta, o las deformaciones que adquiere. Algunas de ellas se comentan a continuación.

La flexión simple, es el modo de trabajo, muy frecuente, en el que hay momento flector y esfuerzo cortante.

La flexión compuesta es el modo de trabajo de la barra en el que la compresión es importante, existiendo un cierto momento flector, y quizá esfuerzo cortante. Suele aplicarse esta denominación principalmente al caso de pilares, en los que la compresión es dominante. El momento flector en estos casos se considera algo a reducir todo lo posible, ya que suele ser fruto de inexactitudes (o imperativos) del montaje, como por ejemplo cierta excentricidad en la aplicación de la fuerza de compresión.

Se dice que un problema es de flexión plana (o flexión recta), cuando las cargas están contenidas en un plano y los desplazamientos de la línea de centros de áreas de la barra son paralelos a ese plano. Es el caso frecuente de problemas en que el plano de las cargas contiene a uno de los momentos principales de inercia de la sección. En oposición, se dice que el problema es de flexión esviada cuando la barra “se sale” del plano de las cargas al deformarse, si tal plano es único. Esto ocurrirá por ejemplo si el plano de las cargas no es paralelo a un eje principal de inercia de la sección.

Finalmente, la denominación de problema de tracción-flexión se utiliza frecuentemente para describir de manera genérica el modo de trabajo de la barra en el que pueden concurrir todos los esfuerzos, excepto el de torsión. La denominación es particularmente utilizada en el desarrollo de un modelo matemático general para el comportamiento de la barra, sin presuponer la preponderancia o anulación de ninguno de los esfuerzos citados.

La figura 2.6b mostraba algunas notaciones y convenciones que se mantendrán a lo largo del curso. En particular, se toman unos ejes coordenados de forma que “x” es colineal con la directriz de la barra, “y” apunta hacia abajo, y “z” forma un triedro directo con los anteriores.

En cuanto a los convenios de signos, diremos que los esfuerzos representados en esa figura 2.6b serán positivos. Pero existe el problema de que en la otra porción del sólido (correspondiente a la misma sección de corte), y debido al principio de acción y reacción, las componentes de la reducción tendrán sentidos opuestos. Desearíamos que nuestro convenio de signos adjudicase el mismo signo a los esfuerzos en ambas caras del corte, para que los esfuerzos fuesen una función solamente de x (evitando la dependencia adicional de si consideramos la porción de sólido a la derecha o a la izquierda del corte). Por ello, decidimos adjudicar también signo positivo a los esfuerzos representados en la figura 2.7a, que corresponden a la misma sección de corte que la figura 2.6b, pero considerando la porción derecha del sólido. Apréciese que, en efecto, los sentidos de las fuerzas (y momentos) son contrarios en ambas figuras, aunque ambas representan esfuerzos positivos.

Lo anterior hace que los esfuerzos sean magnitudes diferentes a las demás que estamos acostumbrados a manejar. A saber: escalares y vectores. No son vectores, puesto que no siguen el convenio de signos de los vectores (por ejemplo V_y puede ser positivo tanto si tiene el sentido del eje y como el contrario). Ello no obsta para que, conocido el esfuerzo en una sección y decidido qué parte de la barra queremos equilibrar, conozcamos de forma automática la resultante, o el momento resultante, de las tensiones que actúan en la superfi-

cie de corte, y podamos utilizar esa información para plantear el equilibrio de la porción de la barra considerada. Debe por tanto pensarse en los esfuerzos como magnitudes de un tipo nuevo y diferente, cuyo convenio de signos no sigue las pautas de otras magnitudes a las que estamos habituados.

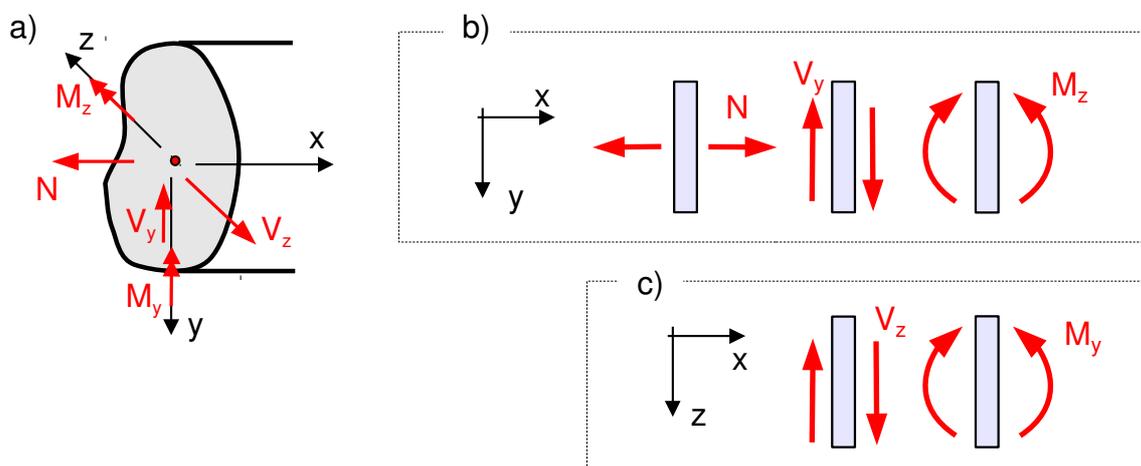
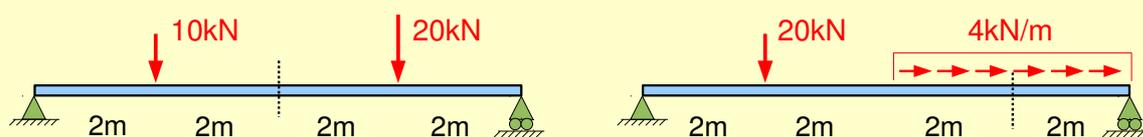


Figura 2.7: a) Esfuerzos positivos en una sección con sólido a la derecha b) Componentes más usuales de esfuerzo, dibujados positivos en una rebanada diferencial de barra c) Componentes menos usuales de esfuerzo, positivas según se dibujan.

La manera habitual de especificar el sentido de un esfuerzo (del que se deduce también su signo según cualquier convenio dado), es el indicado en la figura 2.7b: representamos una rebanada de la barra de anchura diferencial en la dirección x , dibujando en ambas caras el sentido de las fuerzas (o momentos) resultantes.

El equilibrio de la rebanada requerirá en general que en ambas caras las fuerzas -o momentos- resultantes sean opuestas y de igual valor (salvo un diferencial). Ello implica que los valores de una componente de esfuerzo serán, en general, de igual signo y valor, salvo un diferencial, a ambos lados de la rebanada. La única excepción a lo anterior sucede cuando las funciones de carga tienen una singularidad en la rebanada diferencial analizada (una fuerza puntual o un momento puntual).

EJERCICIOS PROPUESTOS



Calcular los valores de los esfuerzos N , V_y , M_z , en la sección punteada.

Equilibrio interno en barras

Tomemos un diferencial de barra (“rebanada”) de longitud dx , en el cual no actúen cargas exteriores concentradas. Puede existir carga distribuida en la barra, de componentes $p_x(x)$, $p_y(x)$, $p_z(x)$, que tome un valor distinto de cero en la posición x donde se encuentra nuestro diferencial.

Puede existir también una distribución de momentos por unidad de longitud. Ésta puede estar asociada a cargas oblicuas que no actúan exactamente en el eje de la barra, sino típicamente en la parte superior de las secciones. Estos momentos suelen ser pequeños o inexistentes, y no complicaremos esta breve exposición considerándolos.

La figura 2.8 muestra un diferencial de barra visto en el plano xy , junto con las acciones que actúan sobre él, dibujadas todas ellas como positivas. Procede hacer una aclaración respecto de un pequeño abuso de notación (por otra parte habitual) que contiene esta figura: se utiliza el símbolo de una componente de esfuerzo para representar su valor particular en la sección izquierda. Por ejemplo, donde pone M_z podemos pensar que pusiese algo como 27 kN·m, si ése fuese el valor en la sección izquierda. El valor en la sección derecha no será 27, porque no es la misma sección. Pero será un valor muy cercano, porque las secciones están muy próximas. En las condiciones de evolución continua de las funciones que (por ahora) presuponemos, el incremento será un diferencial de momento de primer orden, que denotamos como dM_z . De esta manera, el momento en la sección derecha será el valor concreto que tuviese en la sección izquierda (los 27 kN·m, que denotamos de forma genérica como M_z) más el incremento (dM_z). En total, el momento en la sección derecha es M_z+dM_z (que interpretaríamos como “27 más un diferencial”), como muestra la figura. Consideraciones análogas se aplican a las demás componentes de esfuerzo (N , M_y , V_y , V_z).

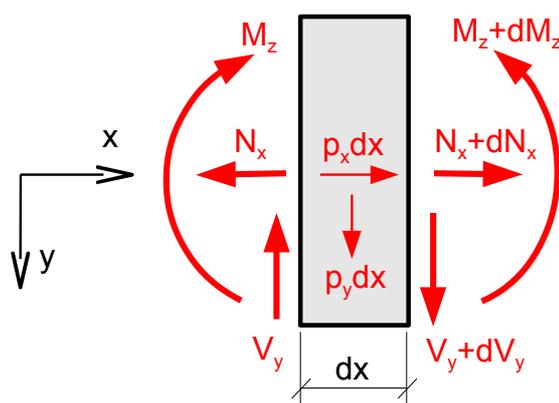


Figura 2.8: Diferencial de barra visto en el plano xy , con sus acciones

Las cargas p_x , p_y , p_z , pueden suponerse constantes en el pequeño dx , y pueden reducirse a sus resultantes $p_x dx$, $p_y dx$, $p_z dx$, aplicadas en centro de áreas de la sección central del diferencial. Vamos a plantear el equilibrio del diferencial de barra anterior. El equilibrio de fuerzas horizontales requiere:

$$N_x = (N_x + dN_x) + p_x dx \Rightarrow 0 = dN_x + p_x dx \Rightarrow \frac{dN_x}{dx} = -p_x(x) \quad (2.3)$$

El de fuerzas verticales requiere:

$$V_y = (V_y + dV_y) + p_y dx \Rightarrow 0 = dV_y + p_y dx \Rightarrow \frac{dV_y}{dx} = -p_y(x) \quad (2.4)$$

Y el equilibrio de momentos en dirección z (tomamos momentos respecto del centro de áreas de la sección central del diferencial, por ejemplo), requiere

$$M_z + V_y \frac{dx}{2} + (V_y + dV_y) \frac{dx}{2} = (M_z + dM_z) \Rightarrow V_y dx + dV_y \frac{dx}{2} = dM_z$$

Despreciando el diferencial segundo frente a los diferenciales primeros existentes en la ecuación, se tiene:

$$\frac{dM_z}{dx} = V_y \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (4.3), (4.4), y (4.5), son las ecuaciones de equilibrio que afectan a los esfuerzos presentes en los problemas más usuales. Adicionalmente, si se observa el problema en el plano x-z, se obtienen otras dos ecuaciones de equilibrio similares (correspondientes a fuerzas de dirección "z", y a momentos de dirección "y"). Estas ecuaciones son:

$$\frac{dV_z}{dx} = -p_z \quad \frac{dM_y}{dx} = V_z \quad (2.6)$$

Las ecuaciones (2.3) a (2.6) anteriores son las ecuaciones de equilibrio que deben satisfacer las componentes de los esfuerzos. Las tres primeras son las que afectan a las componentes presentes en los problemas más típicos que analizaremos con preferencia en este curso.

Trazado de los diagramas de esfuerzos

Es habitual dibujar las funciones que describen los esfuerzos en función de x, como un conjunto de diagramas sucesivos. Los diagramas del esfuerzo cortante V_y y del momento flector M_z se trazan secuencialmente en ese orden, ya que constituyen dos integraciones sucesivas de la función de carga $p_y(x)$, como muestran las ecuaciones:

- La derivada del cortante $V_y(x)$ es $-p_y(x)$ (de ec. 2.4)
- La derivada del flector $M_z(x)$ es $V_y(x)$ (de ec. 2.5)

Cabe indicar un procedimiento análogo para los diagramas del esfuerzo cortante V_z y del momento flector M_y respecto de la componente de la función de carga $p_z(x)$, cuando los mismo no sean nulos.

El esfuerzo axial no participa de la secuencia anterior, y suele dibujarse en primer lugar cuando no es nulo.

Pese a ser una tarea muy típica y frecuente en el análisis de estructuras, no existe un acuerdo general, o un uso común, acerca de muchos detalles del trazado de los diagramas. De entre las muchas elecciones a realizar en el modelo matemático, cada profesional o cada autor pueden haber adoptado unas elecciones diferentes. Entre estas elecciones destacan:

- El sentido elegido de los ejes coordenados xyz
- El convenio de signos elegido para los esfuerzos

Adicionalmente, en el trazado de los diagramas propiamente dicho, existen varios aspectos susceptibles de ser elegidos a conveniencia. En particular, es posible:

- Representar las $V_y(x)$, $M_z(x)$, que resulten positivas (según los convenios elegidos) en el sentido del eje "y", o en el opuesto.

Al respecto de esto último conviene recordar que en los diagramas estamos representando algunas magnitudes que son vectores y otras que no lo son. Por ejemplo, en lo que respecta a las componentes más típicas:

- 1) $p_x(x)$, $p_y(x)$, son componentes de un vector. Tienen por su propia naturaleza un sentido en cada punto x , el cual es visible en la proyección x-y que estamos manejando. No hay alternativa razonable acerca de cómo representar estas magnitudes: si son positivas tienen el sentido del eje correspondiente, como cualquier vector, y así deben representarse. Sería absurdo dibujarlas en sentido contrario.
- 2) Los esfuerzos V_y , M_z no son vectores. Tal como se apuntó anteriormente su convenio de signos difiere substancialmente del convenio de signos de un vector. Por ejemplo, V_y puede ser positivo tanto si tiene el sentido del eje y como si tiene el opuesto, dependiendo de la normal exterior en la sección. No hay una razón por la que deba representarse su valor positivo en una dirección determinada del eje y. Igualmente ocurre con M_z , con la circunstancia adicional de ser, en todo caso, un momento de dirección z (siendo nuestra representación usual en el plano x-y). Por tanto, no hay una razón clara para representar los valores positivos de V_y , M_z , en el sentido de "y", ni en el contrario.

Ante tal número de opciones a elegir, todas las cuales conviven en la literatura, la exposición que sigue intenta sobre todo transmitir un conjunto de "buenas prácticas" en relación con la elaboración de los diagramas, de manera que los mismos sean inmediatamente interpretables por cualquier profesional, sin necesidad de saber qué opciones hemos elegido en el proceso de su trazado. Tales prácticas pueden resumirse en:

- Indicar cómo son físicamente las magnitudes en cada zona de un diagrama, mediante símbolos universalmente reconocibles, como los de la figura 2.7. No poner signos, u otras marcas que necesiten interpretación, o puedan entrar en conflicto con las elecciones habituales de un posible destinatario.
- Indicar las cotas de los diagramas en valor absoluto, sin signos.

Lo anterior no obsta para que a la hora de trazar los diagramas, inevitablemente hayamos de optar por un conjunto de elecciones concretas. Como se ha dicho, no hay un motivo definitivo para decantarse por unas u otras. En lo que sigue, se respetarán los convenios de ejes y signos presentados hasta el momento, los cuales se resumieron en la figura 2.7. Adicionalmente, y aunque bien podrían hacerse elecciones individualizadas al respecto, se representará hacia abajo (sentido del eje y) cualquier magnitud que sea positiva. Y se representará hacia arriba (sentido contrario al eje y) cualquier magnitud que sea negativa. Dado que hay que proceder obligatoriamente así para las magnitudes que son vectores en x - y , el adoptar la misma decisión también para los que no lo son, puede resultar más “natural” en algún sentido para el recién llegado. La figura 2.9 muestra a modo de ejemplo un trazado de diagramas de esfuerzos que sigue las pautas y convenios indicados.

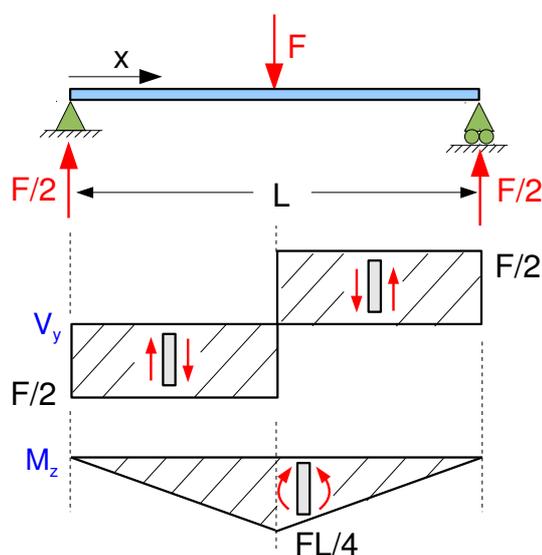


Figura 2.9: Ejemplo sencillo de trazado de diagramas de esfuerzos.

Las magnitudes que solemos considerar menos comunes, p_z , V_z , M_y , pueden no ser nulas en un problema dado. Y por supuesto, puede seguirse un procedimiento análogo para obtener los diagramas correspondientes a estas magnitudes. Para ello representaremos el problema en el plano x - z . Baste decir que se obtendrá una completa analogía entre las magnitudes correspondientes (p_y con p_z , V_y con V_z , etc) si la vista del problema en el plano x - z se contempla desde un punto positivo del eje y (“desde abajo”).

Trazado a mano alzada

El realizar la integración explícita del conjunto de ecuaciones en derivadas (2.3), (2.4), y (2.5) aplicando las condiciones de contorno de nuestro problema particular, es desde luego posible, y es la manera más correcta de proceder en lo que a exactitud se refiere. Pero el proceso tiende a ser tedioso incluso en casos relativamente simples, y el elevado número de operaciones necesario lo hace propenso a errores cuando se opera a mano. Existe la posibilidad de resolver “siempre” los problemas mediante ordenador, usando un programa informático, pero es muy dudoso que, incluso supuesta su disponibilidad permanente, la depen-

dencia del ordenador hasta para los casos más simples sea compatible con una adecuada comprensión del funcionamiento de la barra como elemento resistente. El procedimiento de trazado a mano alzada que presentamos en esta sección tiene las siguientes características:

- Requiere muy pocas operaciones, y las mismas son muy sencillas de realizar. El esfuerzo requerido para este trazado es sólo una pequeña fracción del necesario para la integración explícita.
- En casos no muy complicados es habitual obtener el valor exacto de las cotas relevantes de los diagramas de V_y , M_z . En todo caso suelen obtenerse al menos dos cifras significativas para estas magnitudes.
- Veremos más adelante que el procedimiento es extensible al cálculo de los diagramas de giros y desplazamientos de la barra. Para estas magnitudes suele obtenerse al menos una cifra significativa (o más, según el cuidado puesto en las estimaciones).
- Sus resultados numéricos pueden ser útiles tanto para ser usados directamente en una fase de pre-diseño, como para detectar errores de operación en el posterior proceso de obtención explícita de las ecuaciones, si el mismo se realiza.
- El análisis de concavidad y convexidad de un polinomio (forma frecuente de las funciones a trazar, obtenibles mediante integración explícita), es complicado de realizar, y por tanto nuevamente propenso a errores. El trazado a mano alzada simplifica drásticamente este aspecto.

El trazado a mano alzada aprovecha la circunstancia de que, salvo una posible cuestión de signo, en cada punto del diagrama que estamos trazando, la pendiente ha de ser el valor de la función dibujada anteriormente (se presupone que el orden de los diagramas es el indicado en la figura 2.9).

A modo de ejemplo, supongamos que en cierto problema hemos trazado ya el diagrama de V_y , y que estamos trazando el de M_z , situación que muestra la figura 2.10. En el punto $x=x_0$ el valor de V_y es negativo, luego la pendiente de M_z en ese punto será negativa (según la ec. 2.5). Por tanto podemos dibujar un pequeño trazo de pendiente negativa en ese punto (nótese que una pendiente negativa es “hacia arriba” debido a que estamos representando los momentos positivos “hacia abajo”, coincidiendo con la orientación del eje y).

A partir de x_0 , V_y sigue siendo negativo, pero cada vez más pequeño en valor absoluto, hasta llegar a x_1 donde se anula. Luego hemos de seguir trazando la gráfica de M_z con pendiente cada vez más próxima a la horizontal, hasta que en x_1 es completamente horizontal.

A partir de x_1 , V_y es positivo, y va tomando valores mayores en puntos sucesivamente más alejados como x_2 , x_3 , etc. Por tanto, a partir de x_1 en que la pendiente es horizontal, debemos trazar M_z con pendientes positivas progresivamente mayores (cada vez más inclinadas “hacia abajo”), según avanzamos en x por los puntos x_2 , x_3 , etc. Este trazado ha puesto de manifiesto de manera natural que en $x = x_1$ existirá un extremo local del momento flector.

El proceso seguido puede entenderse como una forma de “integración analógica”, en el que faltaría por determinar una constante de integración. Dicho de otro modo, hemos obtenido la forma que tiene la gráfica, pero no dónde colocar la línea horizontal que corresponde a $M_z=0$, a partir de la cual mediríamos los valores de la función M_z representada. Es necesaria alguna condición de contorno para concretar dicha indeterminación. Un tipo de condición de contorno frecuente es que en al menos un extremo de la barra, el momento flector sea nulo, o de un valor conocido.

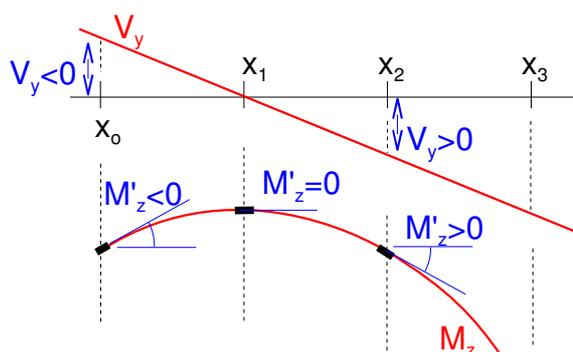


Figura 2.10: Ejemplo de trazado de un diagrama. Los valores del diagrama previo son las pendientes del actual.

Otra circunstancia que aprovecharemos en el trazado a mano alzada, es que, salvo una posible cuestión de signo, el incremento entre dos puntos de la función que estamos trazando, es igual al área del diagrama previo entre esos dos puntos. La demostración de lo anterior es inmediata sin más que plantear la integral entre dos puntos de cualquiera de la ecuación (2.4) o la (2.5). Por ejemplo para el momento flector:

$$\frac{dM_z}{dx} = V_y \Rightarrow \int_{M_z(a)}^{M_z(b)} dM_z = \int_{x=a}^{x=b} V_y(x) dx \Rightarrow M_z(b) = M_z(a) + \left(\begin{array}{l} \text{área de } V_y \\ \text{entre a y b} \end{array} \right)$$

Como ejemplo inmediato de aplicación podemos considerar nuevamente la figura 2.10. A la vista de la evolución lineal de V_y , y si las cotas x_0 , x_1 , x_2 , están espaciadas uniformemente, el área de dicha función entre x_0 y x_2 es nula. Por tanto el incremento de la función M_z entre esos dos puntos debe ser nulo. Es decir: $M_z(x_0) = M_z(x_2)$. A falta de condiciones de contorno, ignoramos cuál es el valor, pero sabemos que será el mismo en esos dos puntos. Puede asimismo apreciarse la coherencia entre los trazados de M_z y V_y en la figura 2.9.

En los casos en que las gráficas tengan evolución constante o lineal, el cálculo de áreas es trivial y exacto. Por ejemplo, en la figura 2.10 será $M_z(x_1) = M_z(x_0) - V_y(x_0) \cdot (x_1 - x_0) / 2$ (área de un triángulo). En otros casos, la estimación aproximada de los valores de las áreas permitirá obtener estimaciones numéricas de las cotas más significativas de los diagramas. Como se apreciará al resolver ejercicios, si se realiza la estimación con algún cuidado, los resultados suelen ser bastante precisos. El Apéndice C ofrece algunas sugerencias posibles acerca de cómo realizar estas estimaciones con alguna mayor garantía.

Es frecuente encontrar problemas en los que existen fuerzas concentradas, como es el caso de la figura 2.9. Matemáticamente cabe interpretar las mismas como puntos singulares de la función de carga p_y : en un entorno del punto tan pequeño como queramos, p_y se acerca a infinito tanto como sea preciso (y se anula fuera de ese entorno salvo que además haya cargas distribuidas), de forma que la resultante del pequeño pero intenso sistema de cargas tenga el valor finito de la fuerza concentrada. Pensando en términos de inclinación del diagrama de V_y , existirá un tramo de pendiente vertical (“infinita”).

Por tanto, la fuerza concentrada producirá una discontinuidad (“salto”) en el diagrama de esfuerzos cortantes. Para averiguar la magnitud de dicha discontinuidad, consideramos un caso en el que “todo es positivo”, como el de la figura 2.11a. La misma muestra sólo un diferencial de barra de anchura dx , que abarca justamente la pequeña zona de aplicación de la carga F . El esfuerzo cortante, dibujado positivo a ambos lados, experimentará un incremento ΔV_y que podemos calcular mediante el equilibrio del diferencial de barra (fuerzas “hacia arriba” igual a fuerzas “hacia abajo”): $V_y = F + (V_y + \Delta V_y) \Rightarrow$

$$\Delta V_y = -F \quad (2.7)$$

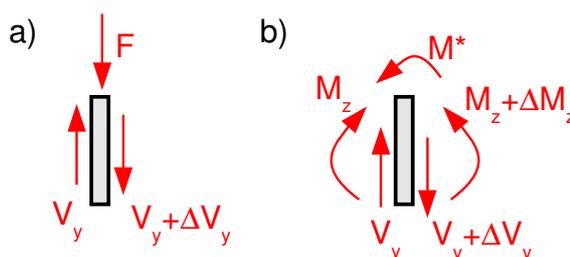


Figura 2.11: Acciones concentradas en un punto de la barra.

a) Fuerza F b) Momento M^*

Puede darse también la existencia de momentos concentrados en puntos de la barra, como el M^* representado en la figura 4.20b. En ese caso, habrá una discontinuidad en la gráfica de momentos. A falta de un convenio de signos para un momento aplicado exteriormente, se ha considerado uno de sentido saliente del dibujo. Las demás magnitudes se han dibujado positivas. Imponiendo el equilibrio de momentos por ejemplo respecto del punto medio de la rebanada:

$$M_z + V_y dx/2 + (V_y + \Delta V_y) dx/2 = M^* + (M_z + \Delta M_z)$$

Los valores M_z se cancelan, y los términos que contienen dx pueden despreciarse (por ser diferenciales de primer orden) frente a los términos finitos como M^* . Resulta:

$$\Delta M_z = -M^* \quad (2.8)$$



Quizá no merezca la pena intentar recordar (2.7) y (2.8): Puede obtenerse fácilmente el “salto” de un diagrama particular reproduciendo un razonamiento de equilibrio como los anteriores.

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Obtenga los diagramas de N , V_y , M_z , de las dos vigas de la página 18 primero, y de las dos vigas de la página 11 después (el procedimiento de trazado a mano alzada permitirá obtener cotas exactas para los diagramas).
- Obtenga los diagramas de N , V_y , M_z , para las vigas del pórtico asimétrico de la página 11 (el procedimiento de trazado a mano alzada permitirá acotar de forma exacta si se tienen en cuenta las sugerencias del Apéndice C. Será necesario equilibrar cada barra por separado tras haber equilibrado el pórtico en su conjunto).

Trazado mediante integración explícita de las ecuaciones

El procedimiento de trazado a mano alzada descrito en el apartado anterior implica de hecho la integración de las ecuaciones (2.4) y (2.5). Pero decimos que se trata de una integración “no explícita” en el sentido de que no obtenemos las ecuaciones analíticas de las funciones que representamos. Aunque en ciertos casos el conocer las ecuaciones analíticas exactas tiene un interés secundario, en otros casos no será así. Cuando necesitemos la expresión analítica exacta de las funciones, podemos proceder de dos formas:

- Aislar una porción de la viga hasta una cota x genérica, y equilibrarla para calcular los esfuerzos. Será preciso plantear el equilibrio de una porción diferente cuando sobrepasemos alguna singularidad (carga concentrada, apoyo, etc).
- Utilizar las ecuaciones (2.4) y (2.5) en forma integral, y proceder a la integración y aplicación de las condiciones de contorno oportunas. Estas ecuaciones son:

$$V_y(x) = V_y(x_0) - \int_{x_0}^x p_y(x) dx \quad M_z(x) = M_z(x_0) + \int_{x_0}^x V_y(x) dx \quad (2.9)$$

Cuando es necesaria la obtención analítica de las ecuaciones que describen los esfuerzos y desplazamientos, es recomendable ir incluyendo en el proceso tantas comprobaciones como sea posible, basándose en las técnicas para el trazado a mano alzada descritas en el apartado anterior. Esto es porque el proceso de integración explícita suele requerir un cuantioso número de operaciones, lo que aumenta la probabilidad de cometer algún error cuando se opera manualmente. Por ello, debe pensarse que un trazado basado solamente en ecuaciones es más bien desaconsejable, de no ser que sea realizado mediante ordenador.

Por lo demás, el proceso de integración en sí mismo, tiene pocas particularidades más allá de las manipulaciones matemáticas habituales de la integración: obtener funciones primitivas, y poner los límites de integración adecuados según las condiciones de contorno. En ocasiones, principalmente cuando hay discontinuidades, puede ser conveniente operar por tramos, definiendo una nuevo origen para la variable independiente. Esta particularidad está

presente por ejemplo en el ejemplo figura 2.9, que a continuación resolvemos mediante integración explícita para ilustrar el proceso.

Como existe una discontinuidad en el centro de la barra (fuerza concentrada), la expresión analítica de las funciones a representar será diferente a ambos lados de ese punto. Aunque es igualmente correcto operar únicamente con la coordenada x , resulta más cómodo definir una coordenada auxiliar x' , que usaremos para expresar las ecuaciones en la mitad derecha de la barra. También se ha dado nombre (A, B, C), a los puntos clave, al único efecto de poder nombrarlos de forma más concisa, como muestra la figura 2.12.

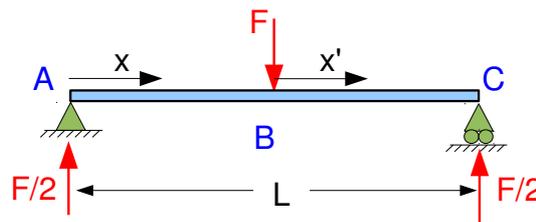


Figura 2.12: Coordenada auxiliar x' para la integración

Esfuerzo cortante: $V_y(A) = +F/2$

$$V_y(x) = V_y(A) - \int_0^x p_y(x) dx = (p_y = 0 \text{ en AB}) = F/2 \quad \text{en AB}$$

En el punto B existe discontinuidad. Si llamamos B^- y B^+ a dos puntos tan próximos como queramos a B, a su izquierda y a su derecha respectivamente, y empleamos el mismo razonamiento que para (2.7), tenemos que $V_y(B^+) = V_y(B^-) - F = F/2 - F = -F/2$, luego:

$$V_y(x') = V_y(B^+) - \int_0^{x'} p_y(x') dx' = (p_y = 0 \text{ en BC}) = -F/2 \quad \text{en BC}$$

Momento flector: $M_z(A) = 0$

$$M_z(x) = M_z(A) + \int_0^x V_y(x) dx = 0 + \int_0^x (F/2) dx = F \cdot x/2 \quad \text{en AB}$$

que en el punto B vale $M_z(x=L/2) = M_z(B) = FL/4$

En M_z no hay discontinuidad (sólo un momento concentrado puede producirla), pero sí cambio de expresión analítica:

$$M_z(x') = M_z(B) + \int_0^{x'} V_y(x') dx' = FL/4 + \int_0^{x'} (-F/2) dx' = FL/4 - Fx'/2$$

Por supuesto, la representación de las funciones obtenidas coincide con las que se mostraron en la figura 2.9.

Tensor de Tensiones

El vector tensión, \mathbf{T}^n , pese a su notable interés, no es una magnitud adecuada para ser usada directamente en la elaboración de un modelo matemático para el sólido deformable. La razón es que dicho vector tensión depende del plano de corte, para un mismo punto considerado. Es decir, el vector tensión no describe completamente cómo se transmiten las fuerzas en el entorno del punto, ya que no proporciona información acerca de los otros -infinitos- planos posibles que pasan por el punto del sólido. Para elaborar el modelo matemático nos gustaría disponer de una magnitud que tuviese un único valor para cada punto del sólido, y que describiese completamente cómo se produce la transmisión de fuerzas en el entorno de dicho punto (proporcionase información acerca de todos los planos).

Dicha magnitud existe, es del tipo denominado “tensor de orden dos”, y puede expresarse mediante 9 componentes reales. Aunque una presentación formal de los tensores cae fuera del ámbito de este curso, daremos al menos noticia de que los tensores pueden entenderse como una generalización de los conceptos de escalar y vector: Un escalar consta de una única componente, y sería un tensor de orden cero ($3^0=1$). Un vector en el espacio tridimensional puede expresarse mediante 3 componentes, y sería un tensor de orden uno ($3^1=3$). Un tensor de orden 2 puede expresarse mediante las $3^2=9$ componentes citadas, y en general un tensor de orden k tendría 3^k componentes en un espacio tridimensional. Cuando hacemos girar los ejes cartesianos coordenados, las componentes de los tensores cambian de acuerdo con unas ciertas “ecuaciones de cambio de base”, de las que las conocidas ecuaciones de cambio de base para los vectores son un caso particular. El lector interesado puede consultar bibliografía más específica ^[9,10,11,12] al respecto de éste y otros muchos detalles que aquí se omitirán.



Para hacernos más familiar esta nueva magnitud, pensemos por ejemplo en el campo de velocidades del sólido rígido. A cada punto del sólido corresponde un vector velocidad, y para especificarla no sería suficiente usar un escalar. Análogamente, hay problemas en que no es suficiente especificar un vector, y se necesita otro tipo de magnitud, que eventualmente llamamos “tensor”. Es nuestro caso.

Para introducir el tensor de tensiones, planteemos el problema de equilibrar un tetraedro diferencial aislado del seno de un sólido, como el de la figura 2.13a. El mismo tiene tres de sus aristas paralelas a los ejes coordenados x, y, z . Los vectores unitarios asociados a éste sistema de ejes son $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, como se indica. Las aristas del tetraedro miden dx, dy, dz , respectivamente. Tres de sus planos son por tanto paralelos a los planos coordenados, y el cuarto plano tiene una orientación arbitraria cuya normal exterior denotaremos genéricamente como un vector \mathbf{n} . Llamaremos dS a la superficie (diferencial) de éste plano inclinado.

En primer lugar, vamos a calcular la superficie que tienen las caras del tetraedro que son paralelas a los planos coordenados. Por ejemplo de la cara paralela al plano xy , a cuyo área llamaremos dS_{xy} . Si conociésemos el ángulo (digamos γ) que forma el plano inclinado con el xy , podríamos escribir evidentemente $dS_{xy} = dS \cos \gamma$. Sucede que el vector \mathbf{n} es perpendicu-

lar al plano inclinado, y el vector \mathbf{e}_z es perpendicular al plano xy , por lo que ambos vectores formarán entre sí el mismo ángulo γ que dichos planos, tal como indica la figura 2.13b. Y como \mathbf{e}_z tiene la dirección de z , el ángulo γ coincide con el que forma \mathbf{n} con z , por lo que $n_z = \cos \gamma$. En definitiva:

$$dS_{xy} = dS \cdot \cos \gamma = dS \cdot n_z$$

Y análogamente $dS_{xz} = dS \cdot n_y$; $dS_{yz} = dS \cdot n_x$ (2.10)

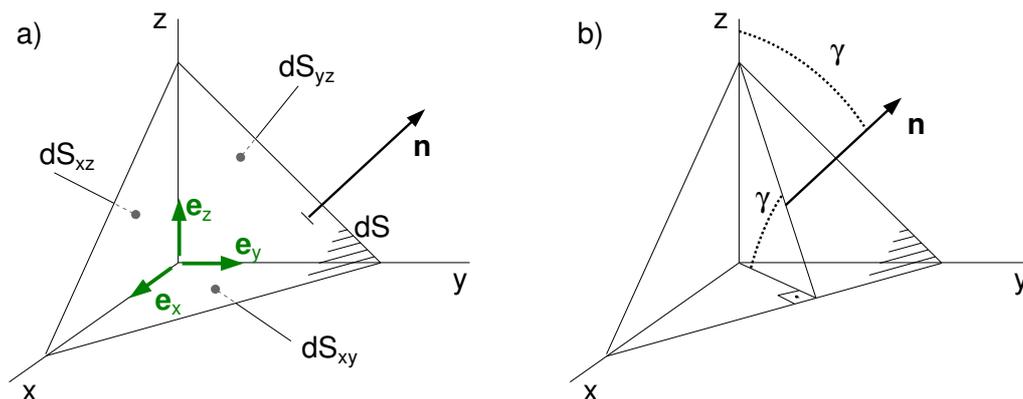


Figura 2.13: Tetraedro diferencial. a) Áreas de sus caras. b) Ángulo de la superficie inclinada con el plano xy .

Pasemos ya a equilibrar el tetraedro. Las tensión en su cara inclinada es \mathbf{T}^n , y las tensiones en sus otras superficies (cuyos vectores normales exteriores son $-\mathbf{e}_x$, $-\mathbf{e}_y$, $-\mathbf{e}_z$) serán \mathbf{T}^{-e_x} , \mathbf{T}^{-e_y} , \mathbf{T}^{-e_z} , como indica la figura 2.14.

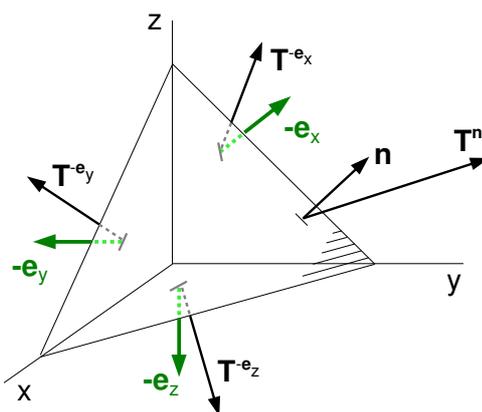


Figura 2.14: Tensiones en las caras del tetraedro.

Éstas tensiones multiplicadas por las áreas sobre las que actúan, nos dan las respectivas fuerzas, las cuales deben sumar cero:

$$\mathbf{T}^n dS + \mathbf{T}^{-e_x} dS_{yz} + \mathbf{T}^{-e_y} dS_{xz} + \mathbf{T}^{-e_z} dS_{xy} = 0$$

Sustituyendo los resultados (2.10) en esta expresión, simplificando dS , y teniendo en cuenta que $\mathbf{T}^{-e_x} = -\mathbf{T}^{e_x}$, etc (acción y reacción), se tiene:

$$\mathbf{T}^n = \mathbf{T}^{ex} n_x + \mathbf{T}^{ey} n_y + \mathbf{T}^{ez} n_z$$

Que podemos abreviar como $\mathbf{T}^n = \sum_j \mathbf{T}^{ej} n_j \quad (j=x, y, z)$

La anterior es una igualdad vectorial, y debe por tanto satisfacerse para cada componente, x, y, ó z. Para una cualquiera de ellas, digamos “i”, tendremos

$$T_i^n = \sum_j T_i^{ej} n_j \quad (i, j=x, y, z) \quad (2.11)$$

Los 9 números reales T_j^{ei} son cada una de las tres componentes ($i=x,y,z$) de cada uno de los tres vectores tensión que actúan en cada uno de los tres planos coordenados ($j=x,y,z$). La ecuación (2.11) pone de manifiesto que conocido el valor de estos 9 números reales para un punto del sólido, se puede conocer el vector tensión en ese punto según cualquier plano que desee. Estos 9 números reales son las componentes del tensor de tensiones, que denotaremos como σ_{ji} , siendo

$$\sigma_{ji} = T_i^{ej} \quad (i, j=x, y, z) \quad (2.12)$$

Adoptaremos la expresión (2.12) anterior como la definición de las componentes del tensor de tensiones. Cabe destacar que las mismas están definidas como componentes de vectores tensión correspondientes a planos cuya normal exterior es del sentido de cada eje coordenado correspondiente. Lo anterior tiene implicaciones que no suelen resultar evidentes en una primera lectura. Los párrafos siguientes pueden resultar redundantes, pero se incluyen para facilitar la comprensión de la magnitud recién presentada.

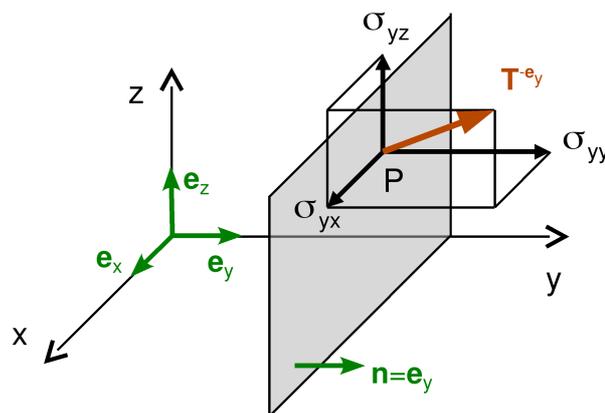


Figura 2.15: Tres de las componentes del tensor de tensiones.

Si en un punto P del sólido consideremos una superficie de corte cuya normal exterior es \mathbf{e}_y , y que por tanto es perpendicular al eje “y”, y tiene sólido a su izquierda, nuestra notación para el vector tensión en este plano es \mathbf{T}^{ey} . Este vector, como todo vector, puede expresarse mediante sus tres componentes cartesianas T_x^{ey} , T_y^{ey} , T_z^{ey} según los ejes x,y,z. Como indica la figura 2.15, y de acuerdo con (2.12), adoptamos para estas componentes la denominación alternativa σ_{yx} , σ_{yy} , σ_{yz} , respectivamente. Nótese cómo el primer subíndice indica el

plano de corte (más precisamente, el eje coordenado perpendicular al plano de corte, que es “y” en este caso), y el segundo subíndice indica la dirección de la componente de tensión.

En un plano de corte que pase por el mismo punto P, y cuya normal exterior coincidiese con \mathbf{e}_x , actuaría otro vector tensión (en general diferente), denotado como \mathbf{T}^{ex} , de componentes σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{xz} . Análogamente, si el plano de corte tuviese de normal exterior \mathbf{e}_z , habríamos obtenido otro nuevo vector tensión \mathbf{T}^{ez} , cuyas componentes llamaríamos σ_{zx} , σ_{zy} , σ_{zz} . Como se ha dicho, estas 9 componentes de los tres vectores tensión considerados son las nueve componentes del Tensor de Tensiones.

El convenio de signos para los términos del tensor de tensiones está implícito en la ecuación (2.12) anterior. Seguidamente se insiste en algunas implicaciones derivadas de la definición de dicho convenio de signos.

Por una parte, la ecuación (2.12) define cada término del tensor de tensiones como componente de un vector tensión. Según ella, hemos de observar un plano de corte cuya normal exterior sea $+\mathbf{e}_j$, es decir esté dirigida en el mismo sentido que uno de los ejes coordenados. En sentido estricto, es correcto decir que la ecuación (2.12) solamente define el signo de las componentes σ_{ji} cuando éstas actúan en un plano de normal exterior $+\mathbf{e}_j$.

Por otra parte, en un problema concreto, podemos conocer el vector tensión en un plano cuya normal exterior tiene el sentido opuesto a un eje ($-\mathbf{e}_j$), y nos gustaría inducir a partir de ese vector tensión los signos de las tres componentes correspondientes del tensor de tensiones. La ecuación (2.12) no es aplicable al caso, ya que en ella aparece $+\mathbf{e}_j$. Pero podemos usar (2.2), en la forma $T_i^{e_i} = -T_i^{-e_i}$, para hacer aparecer $-\mathbf{e}_j$ en la (2.12), con el resultado:

$$\sigma_{ji} = -T_i^{-e_i} \quad (i,j = x,y,z) \quad (2.13)$$

Que indica que en un plano de normal exterior contraria al sentido de un eje, una componente del tensor de tensiones es positiva contrariamente a como lo sería una componente de un vector.



Nota: la experiencia nos dice que el recién llegado tenderá a realizar cualquier razonamiento (incorrecto) que conduzca a que “algo es positivo si tiene el sentido del eje”. Aunque eso es cierto para las componentes de los vectores, se acaba de mostrar que no lo es para las de los tensores. Asíumase que se está tratando con una magnitud distinta, cuyo convenio de signos es necesariamente de un tipo distinto.

Recapitulando lo obtenido de la observación de (2.12) y (2.13), podemos concluir que una componente del tensor de tensiones es positiva en cualquiera de los dos casos siguientes:

- El plano tiene la normal exterior en el sentido de un eje, y la componente de tensión tiene también el sentido de un eje.

- El plano tiene la normal exterior contraria al sentido de un eje, y la componente de tensión es también contraria a un eje.

En los demás casos (“cruzados”), la componente del tensor será negativa. Éstos son los dos casos de normal según un eje y componente contraria a un eje, o bien de normal contraria a un eje y componente en el sentido de un eje.

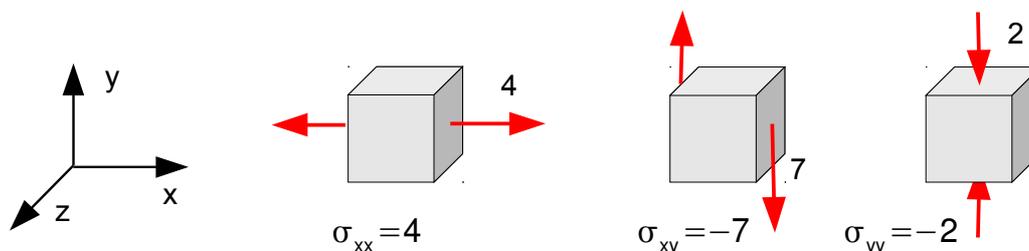


Figura 2.16: Ejemplos de valores de componentes de tensión

Como ejemplo, la figura 2.16 muestra algunos valores de tensión en planos paralelos a los coordenados que pasan por el punto considerado, junto con el signo de la componente del tensor de tensiones correspondiente. Es importante que se aprecie que el dibujar como dato una sola de las dos flechas en cada uno de los dibujos, permite dibujar la otra (aplicando el principio de acción y reacción, ya que son prácticamente el mismo plano de corte, con normal opuesta), así como conocer el signo de la componente del tensor correspondiente.



El convenio de signos para los términos del tensor de tensiones guarda similitudes evidentes con el adoptado para los esfuerzos en barras. Veremos más adelante que esto, lejos de ser casualidad, es consecuencia precisamente de que los esfuerzos heredan su convenio de signos del de tensor de tensiones.

Es posible escribir la ecuación (2.11) en forma de un producto de matrices más cómoda para el cálculo. Incorporando la definición (2.12), se expresa como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x^n \\ T_y^n \\ T_z^n \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Simetría del tensor de tensiones

Consideremos esta vez un elemento diferencial material, limitado por 6 planos de corte paralelos a los planos coordenados, como muestra la figura 2.17. Dicho elemento tendrá dimensiones dx , dy , dz , en las direcciones correspondientes. Tomaremos momentos respecto de una recta paralela al eje z , como por ejemplo la que pasa por el centro del cubo elemental. Las únicas fuerzas que dan momento respecto de esta recta son las que derivan de las tensiones σ_{xy} , y las σ_{yx} . Obsérvese cómo se han dibujado todas ellas positivas.

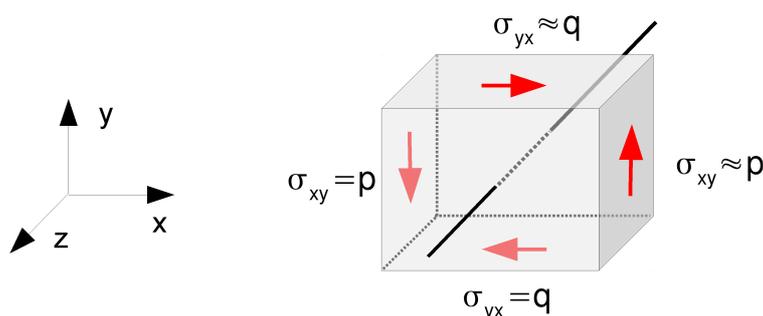


Figura 2.17: Momento de las fuerzas sobre un diferencial, respecto de una recta

El valor de las tensiones en dos caras paralelas no será exactamente el mismo, ya que son planos distintos, pero en las condiciones de continuidad que suponemos a la evolución de las tensiones en el sólido, sólo diferirán en un diferencial de tensión (nótese por ej.: si en la cara izda. el valor es p , en la derecha se ha denotado como aproximadamente p), el cual no afectará al equilibrio de momentos que vamos a plantear. Las tensiones normales, así como las fuerzas de volumen si existen, se pueden suponer constantes en el diferencial, y por tanto la recta de acción de su resultante cortaría a nuestra recta, por lo que su momento sería nulo respecto de ella. La ecuación de equilibrio de momentos, salvo diferenciales de orden superior a tres, conduce a:

$$p \cdot (dy dz) \frac{dx}{2} + p \cdot (dy dz) \frac{dx}{2} = q \cdot (dx dz) \frac{dy}{2} + q \cdot (dx dz) \frac{dy}{2} \Rightarrow p = q \Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Imponiendo el equilibrio de momentos respecto de rectas paralelas al eje x o al eje y , obtendríamos similarmente $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$. Es decir que cuando representamos los términos del tensor de tensiones en forma de matriz, resultará una matriz simétrica:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{se cumple } \sigma_{ij} = \sigma_{ji}) \quad (2.15)$$

Por lo tanto, las componentes del tensor de tensiones pueden expresarse mediante solamente 6 números reales (en lugar de los 9 planteados inicialmente).

Un corolario interesante de la simetría del tensor de tensiones es el llamado "Principio de Reciprocidad de las Tensiones Tangenciales". Su demostración se realiza considerando dos planos perpendiculares entre sí que pasan por el punto considerado, como los de la figura 2.18. El sentido de las normales exteriores adoptadas de indica en la primera figura.

Dado que no estamos obligados a adoptar unos ejes coordenados en particular, podemos imaginar circunstancialmente que tomamos unos ejes como muestra cualquiera de las otras dos figuras. Es decir, con un eje en la intersección de los dos planos, y los otros dos ejes contenidos en cada uno de los dos planos. Con los sentidos de los ejes mostrados en la figura 2.18, las componentes de tensión indicadas serían σ_{xz} y σ_{zx} . Deben ser iguales (incluido el signo), por lo que serán como muestra la segunda figura (ambas positivas), o

bien como muestra la tercera figura (ambas negativas). Obtenida la conclusión anterior, podemos enunciar la condición que cumplen esas componentes de tensión, prescindiendo de un sistema de ejes particular. Dicho enunciado es el Principio de Reciprocidad de las Tensiones Tangenciales:

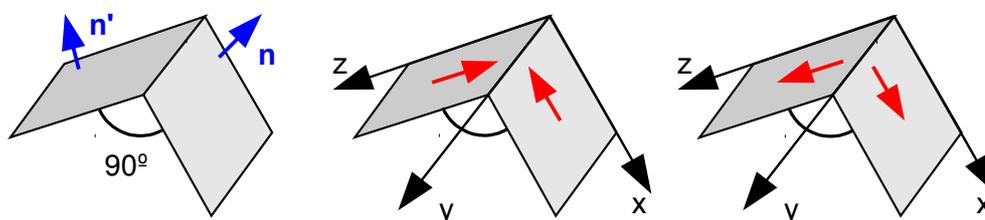


Figura 2.18: Principio de Reciprocidad de las Tensiones Tangenciales

En dos planos perpendiculares entre sí que pasan por un punto considerado, las componentes de tensión perpendiculares a la arista que forman, tendrán ambas el sentido de apuntar hacia la arista, o bien ambas el sentido de apuntar contrariamente a la arista.



Nótese que no es posible obtener ninguna conclusión acerca de las componentes de tensión paralelas a la arista en esos planos. Las mismas serían σ_{xy} y σ_{zy} , para las que no hemos obtenido ninguna relación particular.

Un ejemplo típico de aplicación de este principio es la imposición de las condiciones de contorno en tensiones en esquinas (reales) que forman ángulo recto. Si es conocido el valor de la tensión tangencial en uno de los planos en ese punto esquina, en el otro plano debe ser tal que se satisfaga el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales. En particular, si como supone la figura 2.19, la tensión es nula en un plano, debe serlo también en el perpendicular, en ese punto.



Figura 2.19: Hipótesis que violaría el principio de reciprocidad en las esquinas de una placa (a la izda.), e hipótesis aceptable (dcha.)

Finalmente, y a modo de resumen de resultados, destacaremos que la simetría del tensor de tensiones permite poner la expresión matricial (2.14) en la forma definitiva que eventualmente usaremos en el curso:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x^n \\ T_y^n \\ T_z^n \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

O abreviadamente: $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^n$ (2.16bis)

Teniendo en cuenta (2.16), el cálculo de la componente normal de tensión en un plano cualquiera, que hemos denotado como σ y que obedece a (2.1), puede ponerse de la forma:

$$\sigma = \underline{n}^T \cdot \underline{T}^n = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Direcciones y Tensiones Principales

Como sabemos, el vector tensión no tiene porqué ser perpendicular al plano sobre el que actúa. Por ello, en general, ambas componentes intrínsecas del vector tensión, σ , τ , serán distintas de cero. Sin embargo, nos preguntamos si en el punto considerado existirá algún plano en el que excepcionalmente la tensión sí que sea perpendicular al plano sobre el que actúa. O lo que es lo mismo, si existirá siempre algún plano tal que la componente intrínseca τ de su vector tensión sea nula. La figura 2.17 ilustra el tipo de situación por la que nos estamos preguntando.

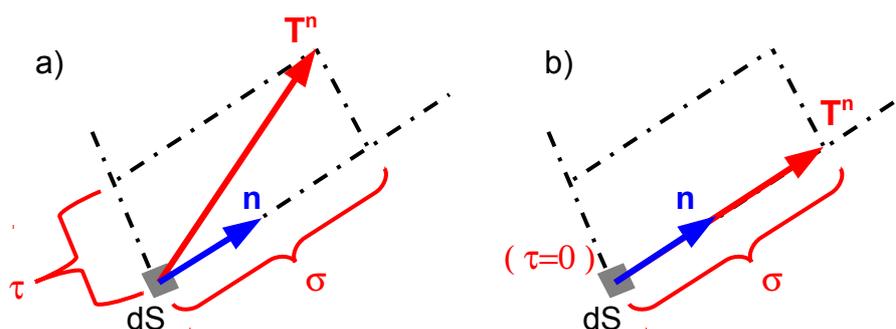


Figura 2.17: a) \underline{n} no es dirección principal b) \underline{n} es dirección principal

Como justificaremos a continuación, la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa. En un punto del sólido siempre existen ciertas direcciones \underline{n} para las que los planos correspondientes tienen sólo tensión normal. Se llaman Direcciones Principales. Los valores de la tensión σ en esos planos se llaman Tensiones Principales. Especificaremos cada dirección principal mediante un vector unitario adimensional, y cada valor de tensión principal como un escalar con signo.

El problema matemático de encontrar las tensiones y las direcciones principales de tensión es formalmente idéntico al problema de encontrar los valores propios y vectores propios de una matriz simétrica de números reales que se estudia en el Álgebra Matricial. En nuestro caso, conocido el tensor de tensiones $\underline{\sigma}$ en el punto considerado, si existe un plano de normal \underline{n} cuya tensión es sólo normal, de valor σ (escalar, no confundir con el tensor), el vector tensión será $\underline{T}^n = \sigma \cdot \underline{n}$, y por otra parte satisfará (2.16), luego

$$\underline{T}^n = \sigma \cdot \underline{n} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad (2.18)$$

Si llamamos \underline{I} a la matriz unidad (que tiene unos en la diagonal y ceros en las demás posiciones), la ecuación anterior puede escribirse como:

$$(\underline{\sigma} - \underline{I} \cdot \sigma) \cdot \underline{n} = 0 \quad (2.19)$$

Que podemos entender como un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas fuesen las tres componentes de \underline{n} . Escrito de forma explícita, este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma) & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & (\sigma_{yy} - \sigma) & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & (\sigma_{zz} - \sigma) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.19bis)$$

Siendo nulo el miembro derecho de la ecuación, una solución (trivial) es que \underline{n} sea un vector nulo: $\underline{n} = \underline{0}$. Estamos interesados en soluciones diferentes de la trivial, las cuales sólo pueden existir si el determinante de la matriz de coeficientes se anula.



Recordemos: si tenemos un sistema de ecuaciones del tipo $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$, las condiciones para que el mismo sea compatible (existan soluciones, al menos una), determinado (la solución sea única), indeterminado (existan varias, infinitas, soluciones) o incompatible (no existan soluciones), dependen del “rango” de la matriz de coeficientes (el “menor” no nulo de orden mayor que podamos formar en esa matriz), y del rango de la “matriz ampliada”, que es la matriz formada por \underline{A} con una columna adicional \underline{b} , y que se denota como $\underline{A}|\underline{b}$. Se llama “menor” al determinante que consta de algunos elementos de una matriz, tras quitar filas y/o columnas de ella a discreción (evidentemente la matriz que extraigamos con ese procedimiento debe ser cuadrada para poder hacer su determinante). Las condiciones referidas son:

Compatible:	$Rg(A) = Rg(A b)$
Determinado:	$Rg = N^\circ$ de incógnitas
Indeterminado	$Rg < N^\circ$ de incógnitas
Incompatible	$Rg(A) < Rg(A b)$

Si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo, su rango R será menor que 3, y el de la matriz ampliada no será mayor que R (la ampliación consiste en ceros). Estaremos por tanto en el caso de un sistema indeterminado, con infinitas soluciones para n_x, n_y, n_z . Imponemos pues que el determinante de la matriz de coeficientes $|\underline{\sigma} - \underline{I} \cdot \sigma|$ sea nulo:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma) & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & (\sigma_{yy} - \sigma) & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & (\sigma_{zz} - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

La ecuación anterior recibe el nombre de “Ecuación Característica”. Se trata del polinomio de tercer grado en σ que se obtiene desarrollando el determinante anterior. Se puede demostrar que sus tres raíces son reales, y las denotaremos como $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Son las Tensiones Principales. O lo que es lo mismo, físicamente son los valores σ de la tensión en tres planos

en los que sólo existe tensión normal. Para encontrar cuáles son esos planos, llevamos una de las raíces, por ejemplo σ_1 , a la ecuación (2.19):

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_1) & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & (\sigma_{yy} - \sigma_1) & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & (\sigma_{zz} - \sigma_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones anterior será evidentemente nulo. Si su rango es 2, nos falta solamente una ecuación para conseguir un sistema de tres ecuaciones independientes que determinen unívocamente una solución para \mathbf{n} . Esta ecuación es la que impone que el módulo del vector unitario \mathbf{n} sea efectivamente la unidad:

$$(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2 = 1 \quad (2.22)$$

Las dos ecuaciones linealmente independientes de (2.21), más la (2.22), permiten obtener una solución para \mathbf{n} , que está asociada a σ_1 , y que llamaremos \mathbf{n}^1 , de componentes n_x^1 , n_y^1 , n_z^1 . Obtendremos análogamente una solución \mathbf{n}^2 , sustituyendo σ_2 en (2.19), y finalmente una solución \mathbf{n}^3 usando σ_3 . Estos vectores \mathbf{n}^1 , \mathbf{n}^2 , y \mathbf{n}^3 , indican las Direcciones Principales que buscábamos.



El caso estudiado es el general. Pero si el rango de la matriz de coeficientes de (2.21) fuese 1, entonces sólo una de esas tres ecuaciones es independiente. Al añadir la (2.22) tendremos dos ecuaciones independientes, que no bastan para determinar un vector \mathbf{n} único. En este caso, que se corresponde con que σ_1 sea una raíz doble de (2.20), habrá infinitas direcciones principales.

Si el rango de la matriz de coeficientes de (2.21) es 0, entonces las tres ecuaciones son identidades; ninguna de ellas aporta información utilizable. Al añadir la (2.22) tendremos una sola ecuación, que no basta para determinar un vector \mathbf{n} único. En este caso, que se corresponde con que σ_1 sea una raíz triple de (2.20), habrá infinitas direcciones principales. En concreto cualquier dirección será principal. Estaríamos ante un típico caso de presión hidrostática.

Las direcciones principales tienen la característica importante de ser perpendiculares entre sí, lo que se justifica a continuación. Si consideramos dos direcciones principales \mathbf{n}^1 , \mathbf{n}^2 , éstas cumplirán (2.18), cada una con su respectiva tensión:

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}^1 = \sigma_1 \cdot \mathbf{n}^1 \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}^2 = \sigma_2 \cdot \mathbf{n}^2$$

Si premultiplicamos a la primera por $(\mathbf{n}^2)^T$, a la segunda por $(\mathbf{n}^1)^T$, y restamos:

$$(\mathbf{n}^2)^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}^1 - (\mathbf{n}^1)^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}^2 = \sigma_1 \cdot (\mathbf{n}^2)^T \cdot \mathbf{n}^1 - \sigma_2 \cdot (\mathbf{n}^1)^T \cdot \mathbf{n}^2$$

Como $\underline{\underline{\sigma}}$ es una matriz simétrica, $[(\mathbf{n}^2)^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}^1]^T = (\mathbf{n}^1)^T \cdot \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \mathbf{n}^2 = (\mathbf{n}^1)^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}^2$, por lo que el miembro izquierdo de la ecuación anterior se anula.

Los términos del miembro derecho contienen ambos el producto escalar $(\underline{n}^1)^T \cdot \underline{n}^2 = (\underline{n}^2)^T \cdot \underline{n}^1 = \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^2$. En definitiva:

$$0 = (\sigma_1 - \sigma_2) \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{n}^2 \quad (2.23)$$

Es decir, que salvo la eventualidad de que las tensiones principales tengan el mismo valor, ambas direcciones son perpendiculares entre sí, como queríamos demostrar. Resumimos a continuación los resultados más relevantes obtenidos, junto con alguna de sus implicaciones:

- En cada punto del sólido hay al menos tres direcciones principales ($\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3$).
- Si hay tres direcciones principales, serán perpendiculares entre sí.
- Cada una tendrá una tensión ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), en general distintas, aunque puede haber coincidencias.
- En el caso de coincidencia anterior, habrá infinitas direcciones principales.
- Aun en ese caso (en todos los casos) podremos tomar unos ejes coordenados que coincidan con direcciones principales en el punto considerado.

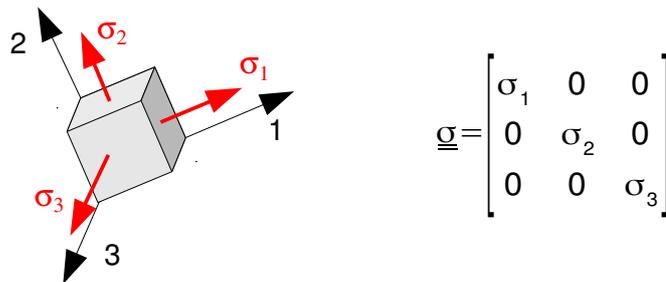


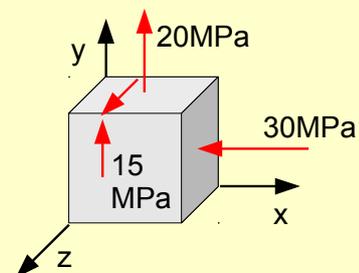
Figura 2.18: Tensor de tensiones cuando se adoptan ejes principales

Cuando se adoptan unos ejes coordenados que coinciden con las direcciones principales, se les llama ejes principales, siendo frecuente la notación 1, 2, 3, para referirse a ellos (en lugar de los habituales x, y, z). Una consecuencia inmediata de adoptar ejes principales en el punto considerado, es que el tensor de tensiones resultará diagonal en esos ejes, como se muestra en la figura 2.18.

EJERCICIOS PROPUESTOS

El elemento diferencial de la figura está sometido a las tensiones que se indican. Se pide que:

- Escriba la matriz $\underline{\underline{\sigma}}$ que representa al tensor de tensiones.
- Calcule y represente aproximadamente el vector tensión en un plano cuya normal tiene la orientación $(0,1,1)$.
- Calcule las componentes intrínsecas de ese vector tensión.
- Calcule las tensiones principales.
- Calcule y represente aproximadamente las direcciones principales de tensión.



Representación de Mohr

La representación de Mohr es una construcción gráfica que sirve para visualizar de una manera compacta las tensiones en los infinitos planos de corte que pueden considerarse en un punto del sólido. En cierto sentido, esta representación nos ayudará a compensar el hecho de que nuestros sentidos no están preparados naturalmente para apreciar un tensor (un vector en el espacio tridimensional es el máximo a ese respecto). También lo utilizaremos como herramienta de cálculo ventajosa en problemas bidimensionales. Aquí vamos a dar solamente noticia de los resultados de interés, omitiendo las justificaciones que los sustentan. En caso de interesar, éstas pueden consultarse en la bibliografía [9,10,11].

Considérese un punto de un sólido. En él, un plano de corte ideal, que tendrá su vector tensión, con sus componentes intrínsecas σ , τ . Representamos esa pareja de valores σ , τ , como coordenadas (abscisa y ordenada, respectivamente) en un espacio bidimensional. Obtenemos así un punto de ese espacio σ - τ . que representa al vector tensión en el plano considerado.

Imaginemos que realizamos esa misma operación para los infinitos planos posibles que pasan por el punto del sólido. Obtendremos una zona del espacio σ , τ , cuyos puntos representan al vector tensión en los distintos planos. Ocurre que esa zona -lugar geométrico- está acotada, y se reduce a la zona comprendida entre tres circunferencias que se muestra sombreada en la figura 2.19. Las tres circunferencias son tales que sus centros están sobre el eje σ , y sus diámetros abarcan el segmento entre dos tensiones principales.

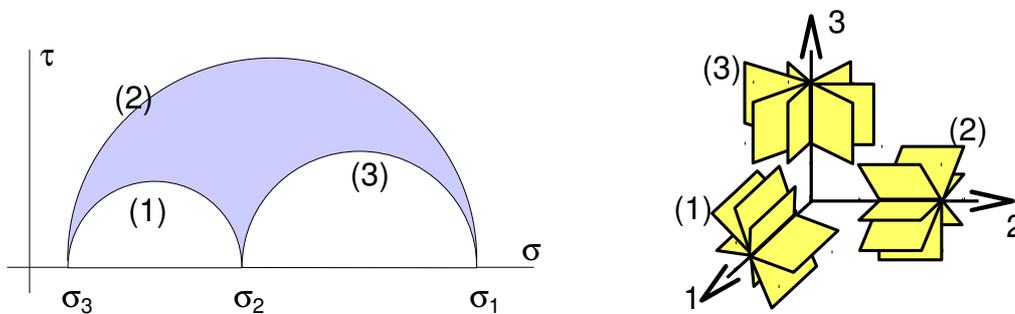


Figura 2.19: Diagrama de Mohr (izda.) y planos del espacio físico a los que corresponden las circunferencias (dcha)

Es habitual en la representación de Mohr considerar, sin pérdida de generalidad, las tensiones principales ordenadas de forma que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (por supuesto, los ejes principales 1,2,3, en el espacio físico se nombran de manera acorde). Llamaremos “circunferencia (1)” a la que tiene su diámetro entre σ_2 y σ_3 . Análogamente, llamaremos “circunferencia (2)” a aquella que tiene su diámetro entre σ_1 y σ_3 , y “circunferencia (3)” a la que lo tiene entre σ_1 y σ_2 . Resulta ser que los puntos de la circunferencia 1 representan tensiones en planos de corte que son paralelos al eje 1 principal (diremos que son planos pertenecientes a la radiación del eje 1). Análogamente, los puntos de la circunferencia 2 representan tensiones que ocurren en planos de la radiación del eje 2, y los puntos de la circunferencia 3 representan tensiones en planos de la radiación del eje principal 3. Los puntos interiores de la zona sombre-

ada representan las tensiones en planos que no son paralelos a ningún eje principal. Todo ello se ilustra en la figura 2.19. En ella, los planos de corte se representan desplazados para su mejor visualización, pero debe entenderse que todos ellos pasan por el punto del sólido bajo estudio (en el origen de los ejes).

El diagrama de Mohr proporciona de un modo inmediato buena parte de la información relevante en cuanto a cómo es la sollicitación en el punto considerado, con vistas a enjuiciar la resistencia del material. Por ejemplo, permite saber de un vistazo si existen o no planos que trabajan a tracción (algunos materiales, como el hormigón, apenas resisten tracciones), y el valor máximo de la tensión tangencial en los planos que pasan por el punto, que siempre será el radio de la circunferencia (2). Eventualmente, en la figura se ha representado un caso en el que no habría ningún plano trabajando a compresión, ya que todo el diagrama está en la zona de σ positiva.

Seguidamente presentaremos con algún detalle algunos resultados correspondientes al caso bidimensional del diagrama de Mohr. En primer lugar vamos a dar una definición provisional de “caso bidimensional” (debe entenderse aplicable sólo en este ámbito de estudio de la tensión en un punto). Diremos que se trata de un “caso bidimensional”, o “problema plano” cuando concurren estas circunstancias:

- Una dirección principal es conocida en el punto considerado.
- Sólo nos interesamos por planos de corte pertenecientes a la radiación de esa dirección principal.

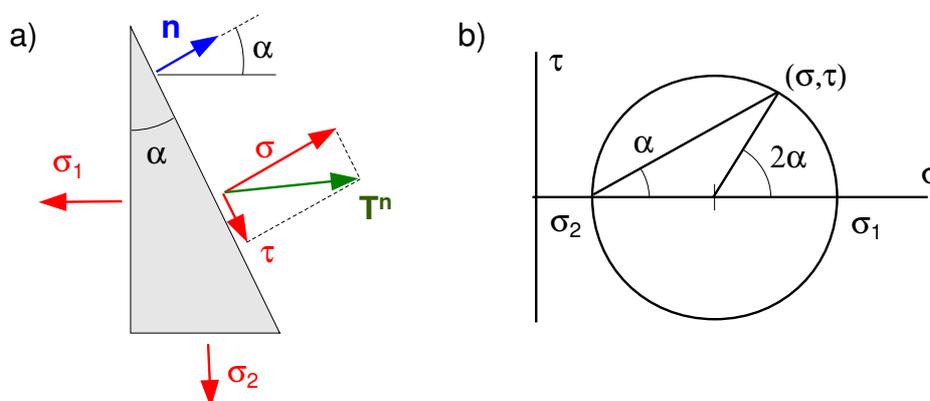


Figura 2.20: a) Elemento visto desde el eje 3. b) Diagrama de Mohr bidimensional

En estas circunstancias, podemos observar el problema desde un punto de la dirección principal conocida, y veremos los planos de corte como líneas rectas. Esta vista es la que usaremos para visualizar y analizar el problema, y es la representada en la figura 2.20a.



Todo el tratamiento del diagrama de Mohr bidimensional puede deducirse (también) del equilibrio de la figura 2.20a. Aunque no son complicados, omitimos los detalles por brevedad.

En los planos de corte, la tensión tangencial es perpendicular a la dirección principal conocida, y por tanto se verá en su magnitud real en nuestro dibujo. Lo mismo ocurre con la ten-

sión normal. Sabemos que esas componentes intrínsecas del vector tensión estarán representadas en algún punto de la circunferencia de Mohr correspondiente al eje principal conocido. En la figura 2.20a, éste es el 3, y por tanto la circunferencia pertinente es la (3), que tiene su diámetro entre las tensiones principales σ_1 y σ_2 .

Antes de seguir adelante, observemos que en un problema bidimensional, y para un plano dado, la tensión tangencial τ sólo tiene una dirección posible, con sus dos sentidos. Son, en total, dos posibilidades, en contraposición a las infinitas posibilidades que tenía en el problema tridimensional (ello motivó que definiéramos τ como un escalar sin signo). Las dos posibilidades pueden ahora discriminarse con un signo. Por ello vamos a definir un convenio de signos para τ en problemas bidimensionales: la tensión tangencial τ será positiva si “deja a la derecha el sólido”.

Lo anterior se interpreta como sigue: imaginamos que estamos de pie sobre el dibujo, caminando sobre la línea que representa el plano, en el mismo sentido que tenga τ . Si en esas condiciones tenemos el sólido a nuestra derecha, el escalar τ será positivo. Si el sólido queda a nuestra izquierda, τ será negativo.



Dibujamos la mitad inferior de los diagramas bidimensionales de Mohr, ya que τ tiene signo. En los tridimensionales, la mitad inferior no aporta información, y su trazado puede omitirse.

Finalmente indicaremos, nuevamente sin demostración, cuál es el punto del diagrama que representa la tensión en nuestro plano. En la figura 2.20b, se indica dónde encontrar el ángulo α en el diagrama. Éste es el mismo ángulo que forma nuestra normal \mathbf{n} con el eje principal 1. Con el convenio de signos adoptado para τ , el sentido de giro de \mathbf{n} a partir de la dirección 1 es el mismo sentido de giro que debe seguirse en el diagrama, desde la posición de σ_1 hasta encontrar el punto buscado. Éste punto tiene unas coordenadas (σ, τ) , que son las componentes intrínsecas de tensión en nuestro plano (el de la fig. 2.20a).

Debido a las propiedades geométricas de la circunferencia, el ángulo que forma el eje σ con el radio de la circunferencia correspondiente al punto buscado (σ, τ) , será 2α . Por ello, el ángulo también se puede medir desde el centro de la circunferencia, tomando un ángulo de valor doble a lo que corresponde en el espacio físico.

La realización de unos pocos ejercicios prácticos, como los que se prevé realizar en el curso, ayudará a asimilar los detalles involucrados. No obstante, se enumeran a continuación algunos de los aspectos del manejo del diagrama de Mohr bidimensional que pueden ser de especial utilidad:

- Una vez establecido el procedimiento para encontrar un ángulo en el diagrama a partir de la dirección 1, es inmediato apreciar la posibilidad de medir ángulos a partir de cualquier otra dirección (porque los ángulos entre tres direcciones en un plano son aditivos). Ello será útil cuando se conozca la tensión en un plano de orientación no principal.

- Es inmediato (nuevamente, sólo hay que sumar ángulos) que planos cuyas normales formen entre sí un ángulo θ en el espacio físico, formarán el mismo ángulo θ en la representación de Mohr. O bien 2θ si se miden ángulos desde el centro. En particular, si los planos forman 90° en el espacio físico, formarán un diámetro en el diagrama.
- Cuando se realiza un análisis bidimensional, es aconsejable pensar que se está mirando provisionalmente un problema tridimensional desde un eje principal conocido. No olvidar la tercera tensión principal es necesario para estimar correctamente la tensión tangencial máxima, y el plano en que ocurre.
- Si miramos el problema tridimensional desde su eje principal 2, observamos el problema plano descrito por la circunferencia (2) del diagrama. De él se obtiene inmediatamente el valor de la tensión tangencial máxima, y que la misma ocurrirá siempre en planos de la radiación del eje 2 a 45° entre los ejes principales 1 y 3.

Para futura ampliación y profundización acerca del concepto de tensión presentado en este tema, puede consultarse por ejemplo ^[11], o con una notación y enfoque similares, en ^[10]. La referencia ^[9] contempla el mismo enfoque aunque usa una notación diferente. Un enfoque y notación ligeramente diferentes pueden encontrarse en ^[12].

Otras aplicaciones de la representación de Mohr

La representación de Mohr no es algo exclusivo del ámbito de las tensiones. En realidad cualquier tensor cartesiano simétrico de orden dos admite una representación de este tipo. Existen un buen número de magnitudes en la física que tienen el carácter tensorial apuntado. Entre ellas están las propiedades de inercia, que vamos a ilustrar en este apartado por su especial interés en aplicaciones estructurales.

Si consideramos una figura plana cualquiera de área A , y unos ejes x,y , en el plano, podemos definir una “magnitud de inercia” J_{ij} asociada a nuestra figura, de la forma siguiente:

$$J_{xx} = \int_A x^2 dA \quad ; \quad J_{yy} = \int_A y^2 dA \quad ; \quad J_{xy} = J_{yx} = \int_A xy dA \quad (2.24)$$

Se puede demostrar que la magnitud así definida es un tensor del tipo aludido, en este espacio bidimensional. Podemos usar con él la representación de Mohr, y demás procedimientos posibles aplicables a estas magnitudes.



Nótese que la definición de J_{ij} difiere ligeramente de la de los momentos de inercia usuales (I_x, I_y, I_{xy}), aunque contiene igualmente toda la información de inercia. En concreto $I_x = J_{yy}$; $I_y = J_{xx}$; $I_{xy} = J_{xy}$.

Para mostrar cómo usar la representación de Mohr basándonos en la analogía con el tensor de tensiones (es decir, “sin pensar mucho”), vamos a calcular como ejemplo las direcciones principales de inercia y los momentos de inercia principales del área mostrada en la figura 2.21a. Pensaremos que se trata de la sección de una barra, por lo que adoptaremos unos ejes x,y , con origen en el centro de áreas (veremos que es lo usual). El cálculo de la posición del centro de áreas, y de las magnitudes de inercia $J_{xx} = I_y$, $J_{yy} = I_x$, $J_{xy} = I_{xy}$, debiera ser

sencillo para el lector en estos momentos, y su valor se indica en la propia figura 2.21a (todas las cotas se indican en mm).

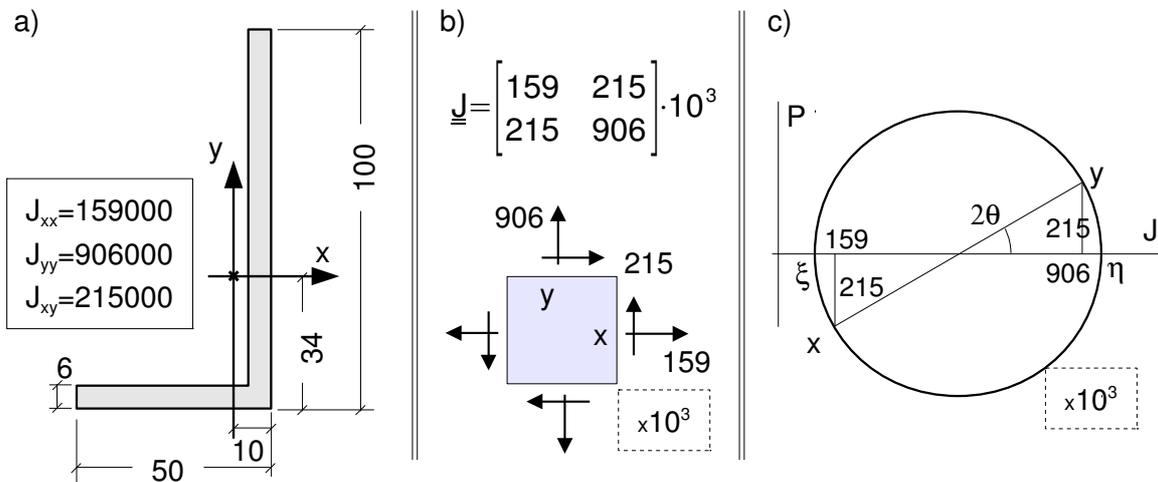


Figura 2.21. a) Área y magnitudes de inercia. b) Analogía con un elemento sometido a tensiones. c) Diagrama de Mohr.

Procedemos a escribir el tensor en forma de matriz, y a representarlo como si se tratase de un estado de tensiones sobre un elemento diferencial, como se indica en la figura 2.21b. Apréciase la coherencia: siendo J_{xy} positivo, se escribe como tal en \underline{J} , y se representa de forma acorde, como si se tratase de un σ_{xy} positivo.

El trazado del diagrama de Mohr se muestra en la figura 2.21c. Se representan unas ciertas magnitudes escalares que se han llamado “J” y “P”, que serían las componentes intrínsecas de un cierto “vector de inercia” definido de manera análoga a (2.16), y de cuyos detalles podemos prescindir en esta exposición. Evidentemente, el eje J representa momentos de inercia, y el eje P representa productos de inercia. Por lo demás, el trazado es formalmente análogo al de un diagrama de tensiones coherente con 2.21b. En particular, se aplican a P las mismas convenciones que al escalar τ en el ámbito de las tensiones.

Del diagrama obtenemos el ángulo $\theta \sim 15^\circ$ que forman los ejes principales ξ, η , con los x, y . La figura 2.22 muestra aproximadamente la orientación de dichos ejes.

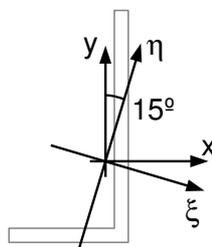


Figura 2.22. Direcciones principales de inercia.

Los valores principales se obtienen también del diagrama 2.21c por los procedimientos habituales, y son $\eta=963000\text{mm}^4$, y $\xi=101000\text{mm}^4$. Éstos son respectivamente (debido a cómo se definió \underline{J}):

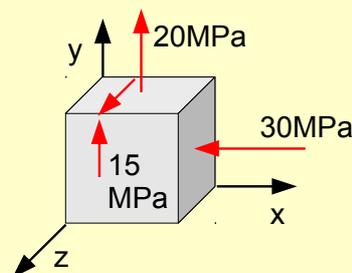
$$J_{\eta\eta} = \int_A \eta^2 dA = I_{\xi} = 96,3 \text{ cm}^4 ; \quad J_{\xi\xi} = \int_A \xi^2 dA = I_{\eta} = 10,1 \text{ cm}^4$$

Puede comprobarse que éstos resultados coinciden sustancialmente con los del perfil normalizado LD 100.50.6. Las pequeñas diferencias (del orden del 2%) son debidas a que la geometría considerada no es exactamente la de ese perfil, ya que no hemos tenido en cuenta los radios de acuerdo y redondeo de esquinas.

Finalmente, téngase noticia de que el cálculo analítico de valores principales, direcciones principales, etc, es igualmente posible para cualquier tensor simétrico de orden 2, y en particular para el de inercia. Para ello procede definir un vector asociado (análogo al vector tensión), cuyo significado físico puede no resultar evidente dependiendo del campo de aplicación. Por ello, y dado que no se trata aquí de profundizar en cada posible aplicación, se ha optado por una presentación equivalente basada en el diagrama de Mohr.

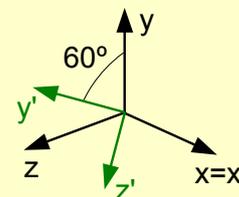
EJERCICIOS PROPUESTOS

- Repita todos los cálculos realizados en el ejercicio de la página 38 (se reproduce aquí por comodidad), pero esta vez use el diagrama de Mohr como herramienta de cálculo. Compruebe la coincidencia de resultados.

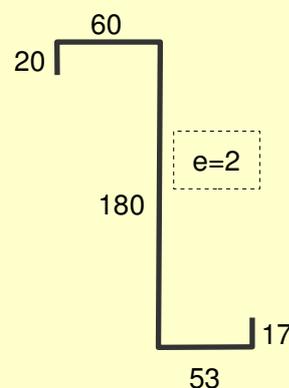


Adicionalmente, calcule el valor de la tensión tangencial máxima, y los planos donde ésta tiene lugar, también usando la representación de Mohr.

Adicionalmente, calcule las componentes del tensor de tensiones en los ejes x' , y' , z' . Realice el cálculo tanto analíticamente como empleando el diagrama de Mohr, y compruebe la coincidencia de los resultados.



- Para el perfil "en Z" de la figura, de espesor de pared 2mm, calcule el centro de áreas, y los momentos y producto de inercia respecto de los ejes vertical y horizontal que pasan por él. Seguidamente utilice el diagrama de Mohr para encontrar el valor de los momentos de inercia principales y la posición de los ejes principales de inercia. Represente aproximadamente éstos últimos. Las cotas se dan en mm.



Nota: la geometría es parecida a la del perfil conformado normalizado ZF 180.2.0. Puede contrastar el grado de coincidencia de sus resultados con los de las tablas.

3.- El Sólido Deformable

Nociones sobre la deformación

Como su nombre sugiere, la deformación hace referencia a los cambios de forma del sólido. Estos cambios de forma están asociados a los desplazamientos de sus distintos puntos materiales. Llamaremos $\mathbf{u}(x,y,z)$ al vector desplazamiento del punto material que ocupa la posición (x,y,z) antes de ocurrir la deformación, siendo los ejes coordenados un sistema considerado “fijo” de referencia. De esta forma, si un punto material está en la posición A antes de la deformación, y en la posición A' después de la deformación, diremos que su vector desplazamiento es $\mathbf{u}(A)=\mathbf{u}(x_A,y_A,z_A)=\mathbf{AA}'$, como muestra la figura 3.1.a.

Pero como sabemos, no cualquier campo de desplazamientos implica deformación en sentido estricto, ya que existe la posibilidad de que se trate de un movimiento como sólido rígido, que no producirá cambios de forma a pesar de que los puntos se muevan. Nos interesa por tanto extraer de alguna manera la información asociada a esa deformación que puede estar incluida en el campo de desplazamientos. Los siguientes párrafos se dedican a presentar la magnitud que describe dicha deformación a nivel local.



Figura 3.1. a) Vector desplazamiento u de un punto A . b) Deformación monodimensional.

Para mayor claridad, vamos a empezar considerando un problema monodimensional. El segmento AP de la figura 3.1b tiene dirección x , y se deforma de modo que sus puntos se mueven en la recta que le contiene. A efectos de esta exposición es equivalente asumir que el segmento se deforma de manera que se mantiene paralelo a si mismo, como se ha representado. AP es de longitud diferencial, y mide dx . Se han representado unos movimientos pequeños de los puntos, de acuerdo con las hipótesis adoptadas en el Tema 1. En concreto:

La hipótesis de desplazamientos y deformaciones pequeños implicará en el modelo matemático considerar las componentes del desplazamiento y sus derivadas primeras como diferenciales de primer orden.

Evidentemente, la deformación del segmento en este caso no depende de si los desplazamientos de A y P son grandes o no, sino de la diferencia entre ellos. Nos interesará el incremento de longitud relativo, dado por $\Delta L/L=(A'P'-AP)/AP$, y que puesto en función del campo de desplazamientos será $(u_x(P)-u_x(A))/AP$ (ver figura), donde AP mide dx. La continuidad material del sólido requiere que las funciones que describen los desplazamientos sean continuas y derivables. Esto es porque los desplazamientos de P y de A no pueden tener valores arbitrariamente distintos (salvo que existan ciertas discontinuidades cuyo estudio se sale del ámbito de este curso). Ello implica que a un incremento diferencial de una variable, ha de corresponder un incremento diferencial de la función. Este incremento puede aproximarse usando un desarrollo en serie de Taylor interrumpido en el primer término:

$$u_x(P)=u_x(A)+\left[\frac{du_x}{dx}\right]_A dx+\dots \quad (3.1)$$

Con esta aproximación, el incremento de longitud unitario buscado es $(u_x(P)-u_x(A))/dx = du_x/dx$ (se entiende que la derivada se evalúa en el punto A considerado como origen del desarrollo en serie, y omitiremos esta notación en lo sucesivo).

La aproximación anterior es igualmente válida aunque el segmento no se mantenga exactamente horizontal, sino que gire un pequeño ángulo $d\theta$. Para comprobarlo basta comparar las longitudes de dos segmentos como los db_0 , db_1 , mostrados en la figura 3.2a, donde db_1 hace las veces de nuestro segmento diferencial AP deformado y girado, y db_1 es su proyección horizontal. Será $db_0 = db_1 \cdot \cos d\theta$. Sustituyendo $\cos d\theta$ por su desarrollo en serie, $db_0=db_1 \cdot (1-(d\theta)^2/2+\dots)$. La diferencia entre ambos, db_1-db_0 , es del orden de un diferencial tercero (concretamente $db_1 \cdot (d\theta)^2/2$), que es el mismo orden de los términos que hemos despreciado en (3.1). Ello demuestra que podemos medir el incremento de longitud de AP como su proyección horizontal sin pérdida de precisión respecto de las aproximaciones ya realizadas. Simplemente debemos retocar el resultado du_x/dx obtenido antes, para denotar la derivada como derivada parcial, por estar involucrados otros movimientos de dirección distinta que x. Adicionalmente, daremos a este incremento unitario de longitud el nombre propio ϵ_{xx} :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=\epsilon_{xx} \quad (3.2)$$

El incremento de longitud unitario de un segmento diferencial paralelo al eje "y", y de uno paralelo al eje "z", se calculan y denotan similarmente:

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}=\epsilon_{yy} \quad ; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}=\epsilon_{zz} \quad (3.3)$$

Analicemos ahora la variación del ángulo entre dos segmentos diferenciales que inicialmente están orientados según los ejes x,y, como muestra la figura 3.2b. Uno de los segmentos es el horizontal AP antes considerado, cuya orientación final dependerá de los desplazamientos verticales, y el otro es el segmento vertical AQ, cuya orientación final dependerá de los desplazamientos horizontales. Nuevamente se han aproximado las componentes requeridas de los desplazamientos de P y de Q mediante desarrollos de Taylor de origen en A,

interrumpidos en el primer término. Podemos expresar los ángulos $d\theta_1$, $d\theta_2$, en función del campo de desplazamientos como:

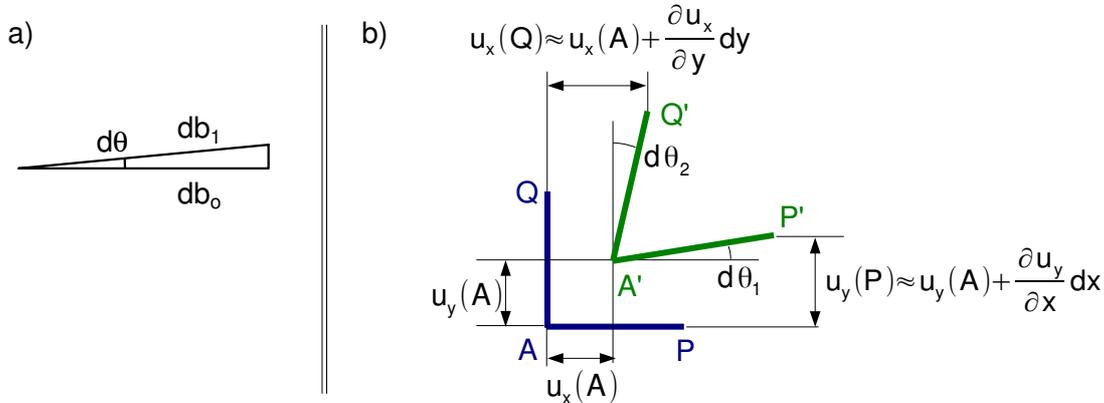


Figura 3.2. a) Proyección horizontal de un segmento casi horizontal. b) Variación del ángulo entre dos segmentos inicialmente paralelos a "x" e "y".

$$d\theta_1 = \arctg \frac{(\partial u_y / \partial x) \cdot dx}{dx + \dots} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x} ; \quad d\theta_2 = \arctg \frac{(\partial u_x / \partial y) \cdot dy}{dy + \dots} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

La suma de estos dos ángulos es lo que se cierra el ángulo, inicialmente recto, entre los dos segmentos inicialmente paralelos a los ejes x,y. Daremos a este cierre de ángulo el nombre propio γ_{xy} . Por razones históricas y de conveniencia, se denomina alternativamente también como $2 \cdot \varepsilon_{xy}$.

$$\gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (3.4)$$

Los decrementos del ángulo inicialmente recto formado por segmentos inicialmente paralelos a los ejes x,z, y a los ejes y,z, se calculan y denotan similarmente:

$$\gamma_{xz} = 2 \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} ; \quad \gamma_{yz} = 2 \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (3.5)$$

Resulta intuitivo que si conociésemos los incrementos de longitud de los infinitos segmentos de línea diferenciales que podamos considerar en el sólido, seríamos capaces de inducir el cambio de forma de todo el sólido macroscópico. Por ello, desearíamos conocer los incrementos de longitud de todos los posibles segmentos diferenciales de línea que pasan por el punto. Y como paso previo, desearíamos disponer de una magnitud cuyo valor describiese todos esos incrementos de longitud del entorno del punto.

Tal magnitud existe, y es un tensor de características similares al tensor de tensiones, o al de inercia. Se llama "Tensor de Pequeñas Deformaciones", o "Tensor de Cauchy". Sus componentes son las cantidades ε_{ij} ($i,j=x,y,x$) definidas anteriormente:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

La caracterización de la deformación como tensor cae fuera del ámbito de este curso, y la brevedad obliga, por lo que simplemente presentaremos sin mayor justificación el resultado que permite calcular el incremento de longitud de cualquier segmento diferencial que pase por el punto considerado. Llamando ε (sin subíndices) a este incremento de longitud, y \mathbf{n} al vector unitario dirigido en la dirección del segmento diferencial, resulta ser:

$$\varepsilon = \mathbf{n}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Nótese la similitud de la fórmula anterior con la (2.17) que permitía obtener la tensión normal σ . Dentro de la amplia analogía que puede establecerse entre los tensores de tensión y de deformación, la magnitud que se corresponde con la deformación ε es la tensión σ .

De sus respectivas definiciones, se observa que los términos diagonales, ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , son positivos cuando el segmento diferencial correspondiente experimenta un alargamiento, y negativos cuando es un acortamiento. Se llama "longitudinales" a estas componentes de deformación.

Análogamente, recordemos que un término no diagonal como el ε_{xy} , representa la mitad de lo que se cierra el ángulo inicialmente recto correspondiente. Si el ángulo se cierra, el término del tensor es positivo. Si el ángulo se abre, el término del tensor es negativo. Se llama "transversales" a estas componentes de deformación.

Nótese que los términos del tensor de deformaciones son adimensionales. Los términos diagonales representan un incremento de longitud dividido por una longitud inicial (resultado adimensional), y los no diagonales, un incremento de ángulo en radianes (nuevamente adimensional).

Debido a su carácter tensorial, la deformación obedece también al tipo de transformaciones que se realizan con el diagrama de Mohr. Al igual que hicimos para las magnitudes de inercia, vamos a plantear la aplicación del diagrama de Mohr en base a la analogía con el tensor de tensiones (nuevamente, se trata de hacerlo "sin pensar mucho"), centrándonos en el caso bidimensional. En este caso, representamos las componentes intrínsecas de un cierto vector deformación, definido de manera análoga a (2.16), de cuyos detalles no es imprescindible que nos ocupemos. Estas componentes intrínsecas serán el escalar ε anteriormente definido, que representaremos en abscisas, y un escalar que llamamos $\gamma/2$, que representamos en ordenadas, y que en el uso como problema plano está relacionado con la componente no diagonal del tensor (ε_{xy}) de manera análoga a como lo estaba el escalar τ con σ_{xy} . (es decir, son iguales salvo una cuestión de signo).

La figura 3.3 resume el empleo bidimensional del diagrama de Mohr para deformaciones. En este caso, y con el propósito de ilustrar una mayor variedad de posibilidades, nos planteamos calcular las componentes del tensor en unos ejes girados x',y' , conocidas sus componentes en unos ejes x,y .

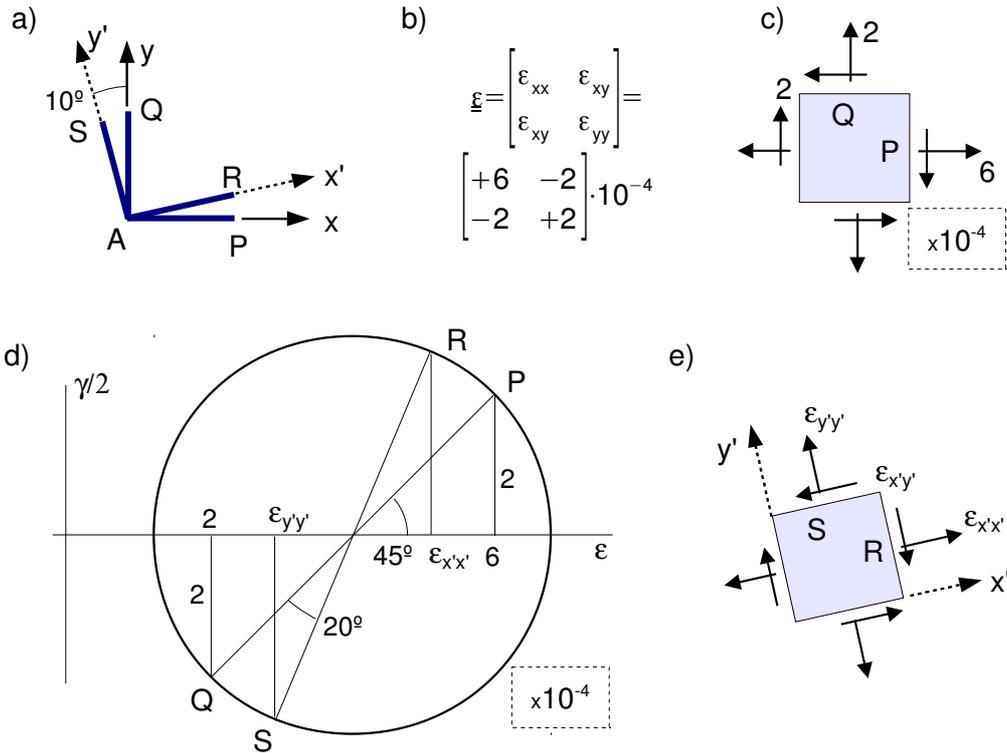


Figura 3.3. a) Ejes girados $x'y'$. b) Datos de deformación. c) Analogía con un estado de tensión. d) Diagrama de Mohr. e) Analogía con un estado de tensión en los ejes girados.

Los datos de partida son las componentes del tensor de deformaciones expresadas en la figura 3.3.b. Como sabemos, estos datos son los alargamientos unitarios de los segmentos diferenciales AP y AQ mostrados en la figura 3.3.a, y el cierre (en este caso apertura puesto que ε_{xy} es negativo) del ángulo entre ambos segmentos. La figura 3.3c muestra lo que sería un estado de tensión formalmente análogo al de deformación. Simplemente se representan las componentes del tensor sobre planos, como si de un problema de tensión se tratase.

El trazado del diagrama de Mohr comienza trazando los puntos P y Q. Nótese cómo se ha asignado un $\gamma/2$ positivo a P, ya que en el problema de tensión análogo τ sería positiva (deja el sólido a la derecha). P y Q formarán un diámetro de la circunferencia, con lo que el trazado de ésta es inmediato.

Para calcular las componentes de $\underline{\varepsilon}$ en los ejes girados, apreciamos que el giro desde el eje y hasta el eje y' (en ese orden) es de 10° en sentido antihorario. Por ello, en el diagrama de Mohr giramos partiendo de Q y en sentido antihorario un ángulo de 20° (doble). Obtenemos así el punto S que se corresponde con la orientación y' en el espacio físico. Análogamente, girando 20° en sentido antihorario desde P obtenemos el punto R, que se corresponde con la orientación x' . Todo ello se muestra en la figura 3.3d.

Seguidamente, y volviendo a hacer uso de la analogía con un caso de tensión, representamos en un elemento diferencial de lados paralelos a los ejes girados cómo serían las tensiones (ver figura 3.3.e). Nótese por ejemplo que en coherencia con lo obtenido en el diagrama, se ha representado lo que sería una τ positiva para R (dejando el sólido a la derecha).

Finalmente, de la representación basada en la analogía de la figura 3.3e, extraemos los términos del tensor de deformaciones. El signo de $\varepsilon_{x'y'}$ se extrae coherentemente del que tendría la $\sigma_{x'y'}$ análoga en esa figura (negativo en este caso). Los valores numéricos se calculan mediante los procedimientos habituales:

$$\text{Diagrama de Mohr: } \left\{ \begin{array}{l} \text{centro} = 4 \\ \text{radio} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \end{array} \right\} \times 10^{-4} \Rightarrow$$

$$\text{Deformaciones: } \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{x'x'} = \varepsilon(R) = 4 + 2\sqrt{2} \cos 65 = 5,195 \\ \varepsilon_{y'y'} = \varepsilon(S) = 4 - 2\sqrt{2} \cos 65 = 2,805 \\ |\varepsilon_{x'y'}| = \left| \frac{y_R}{2} \right| = \left| \frac{y_S}{2} \right| = 2\sqrt{2} \sin 65 = 2,563 \end{array} \right\} \times 10^{-4}$$

$$\text{Tensor: } \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \varepsilon_{x'y'} \\ \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{y'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5,195 & -2,563 \\ -2,563 & +2,805 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Que son las componentes del tensor de deformaciones en los ejes x',y' , que buscábamos.

Para concluir esta breve presentación acerca de la deformación, conviene dar noticia de qué límite puede imponer en la práctica el concepto de “pequeñas deformaciones” bajo el que se ha desarrollado toda la exposición. Evidentemente, la implicación es que los términos del tensor sean numéricamente pequeños, pero el decir que son “como diferenciales de orden uno” no nos da una idea del límite físicamente aceptable (aunque sea útil para formular ecuaciones). Desafortunadamente, no es posible establecer un límite de forma universal, porque depende del problema concreto y su geometría. A título orientativo, puede pensarse que para geometrías no significativamente esbeltas, deformaciones del orden de 10^{-3} o menores suelen hacer aceptable el planteamiento del equilibrio en la configuración indeformada, y demás hipótesis relacionadas, y pueden considerarse “pequeñas deformaciones”.

Ensayo de tracción para un acero

El ensayo de tracción consiste en estirar de forma controlada una pequeña probeta del material con forma de barra esbelta, generalmente hasta su rotura. Se trata de un ensayo muy común, probablemente el más común de los que cabe realizar a un material que se pretenda usar con fines resistentes. Por ello, este ensayo está contemplado y regulado en la normativa (norma UNE-EN ISO 6892-1:2010). El resultado del ensayo es una gráfica en la que se representa en abscisas el incremento de longitud de la probeta en cada instante, dividido entre su longitud inicial, y en ordenadas la fuerza aplicada en cada instante, dividida entre el área de la sección de la probeta.

Tanto las soluciones analíticas conocidas como una amplia evidencia experimental muestran que, salvo en una pequeña zona cercana a las mordazas u otros dispositivos que se empleen para sujetar la probeta por sus extremos y aplicar la fuerza, la distribución de tensiones y deformaciones es prácticamente uniforme en la probeta. Lo anterior es más cierto

cuanto más esbelta sea la probeta, pero en todo caso en la práctica del ensayo se opera de forma que la medición se vea afectada lo menos posible por los efectos de borde. En concreto, para una probeta como la esquematizada en la figura 3.4, es buena aproximación suponer que:

- Solamente existe componente de tensión σ_{xx} en la barra, la cual tiene un valor constante en todos los puntos. Un sencillo razonamiento de equilibrio conduce a que su valor debe ser $\sigma_{xx}=F/A$, que se representa en la gráfica del ensayo. El resto de componentes σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yy} , σ_{yz} , σ_{zz} , son nulas.
- Solamente existen las componentes normales de deformación ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , en la barra, teniendo cada una un valor constante en los puntos de la barra. Al ser constante, ϵ_{xx} debe coincidir con el incremento de longitud unitario de toda la barra, $\Delta L/L$, que se representa en la gráfica del ensayo. Las componentes transversales de deformación, ϵ_{xy} , ϵ_{xz} , ϵ_{yz} , son nulas (pero ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , no lo son, como se ha dicho).

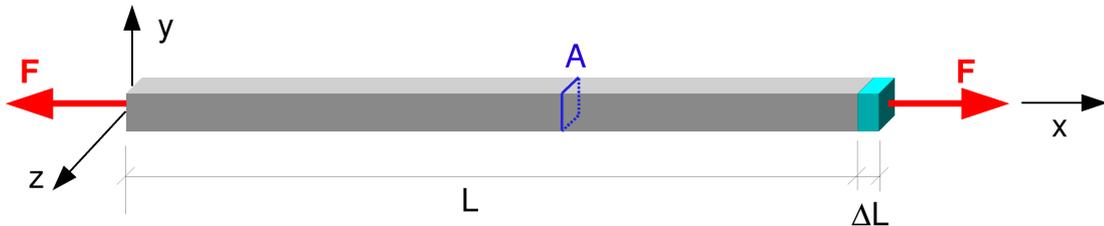


Figura 3.4: Magnitudes que intervienen en el trazado de la gráfica del ensayo de tracción

$$\text{En el ensayo de tracción: } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \approx F/A ; \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \\ \epsilon_{xx} \approx \Delta L/L ; \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz} \neq 0 ; \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.8) resumen lo indicado anteriormente. La figura 3.5 muestra esquemáticamente el resultado de un ensayo de tracción para un acero de bajo contenido en carbono, del tipo a los empleados en estructuras. El ensayo comienza en el origen de ejes (tensión nula, y deformación nula), y evoluciona en principio linealmente, hasta llegar a la tensión denominada “Límite Elástico”, denotado como σ_e . Ésta es la notación usual en la literatura, aunque las normas suelen llamarlo f_y . La pendiente de esta recta es una característica importante del material, que se denomina “Módulo de Elasticidad”, o “Módulo de Young”, y se denota como “E”, de forma que $E = \text{tg}\alpha$. Siendo el cociente de un incremento de tensión entre uno de deformación (que es adimensional), “E” tiene dimensiones de tensión.

Por, tanto, en esta zona lineal inicial (en la que estaremos interesados fundamentalmente el resto del curso), se satisface

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \quad (\text{en el ensayo}) \quad (3.9)$$

Al llegar a la tensión del límite elástico, ocurre un fenómeno particular llamado “fluencia” del material. Como se aprecia, se trata de un aumento de la deformación a un valor de la tensión sensiblemente constante, que es el propio valor σ_e . El ensayo se suele realizar de forma

que se impone a la probeta el incremento de longitud deseado en cada instante, gracias a lo cual es posible detener el ensayo en un punto como el B, si se desea. En ese caso, se desciende al nivel de tensión cero por una recta que es paralela a la de subida inicial, y la probeta descargada termina con la deformación correspondiente al punto B' indicado en la figura. Se llaman deformaciones plásticas a estas deformaciones que no se recuperan tras la descarga.

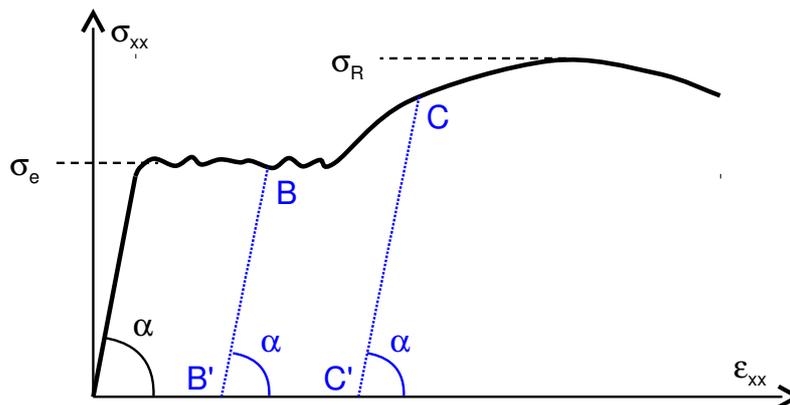


Figura 3.4: Resultado típico de un ensayo de tracción para un acero (Nota: no se traza a escala para mostrar los detalles)

Si en lugar de interrumpir el ensayo en B, continuamos, no tarda en llegar un valor de la deformación para el que vuelve a ser preciso aumentar la tensión para obtener más deformación. Se llama etapa de fortalecimiento a esta fase del comportamiento del material. El punto marcado "C" se encuentra en esta zona. Nuevamente, si decidimos interrumpir el ensayo en este punto, descendemos al nivel de tensión cero por una recta de la misma pendiente que la recta inicial, y la probeta descargada termina con la deformación plástica correspondiente al punto C'.

Finalmente, si no se interrumpe el ensayo, se llega a una tensión σ_R , que se denomina "tensión de rotura". La misma corresponde al máximo indicado de la gráfica del ensayo. En la zona final descendente de la gráfica ocurren fenómenos de gran estrechamiento local de la sección de la probeta, que hacen que el parámetro F/A que se representa (siendo A el área inicial de la probeta), no es ya, ni siquiera aproximadamente, el valor real de la tensión σ_{xx} en la zona del estrechamiento. En todo caso, en condiciones normales de trabajo, un material resistente soporta unas cargas dadas (no unos desplazamientos dados, como ocurre en el ensayo). En estas circunstancias, una zona descendente de la gráfica se recorre de manera incontrolada hasta la rotura efectiva de la probeta, por lo que el máximo antes citado es el que se toma como valor de la tensión de rotura.



Notas: El acero tiene un comportamiento muy similar a tracción y a compresión, como muestra esquemáticamente la figura 3.5a. Un ensayo de compresión tendría prácticamente la misma forma que uno de tracción, al menos hasta superar el escalón de fluencia.

Se han omitido algunos detalles considerados poco relevantes por brevedad. Entre ellos, la diferenciación entre una tensión de fluencia supe-

rrior y una inferior, y la diferenciación entre tensiones muy cercanas a σ_e , que delimitan ciertos fenómenos justo antes de la fluencia (un pequeño tramo no lineal pero elástico antes de σ_e , y otro pequeño tramo no elástico antes de llegar la fluencia). No es usual distinguir entre ellas en las aplicaciones de estructuras.

La figura 3.4 está distorsionada para poder apreciar algunos detalles. Dibujando el eje de abscisas a escala, el tramo recto inicial aparecería muy cercano al eje de ordenadas. Asimismo, el escalón de fluencia es mucho más corto de lo que se ha dibujado.

Por otra parte, las deformaciones en las direcciones y, z, pueden medirse con instrumentación adicional, observándose que $\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}$. De hecho, cualquier segmento orientado perpendicularmente al eje x experimenta la misma deformación unitaria. En la zona lineal, el valor de esta deformación es:

$$\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=-\nu\varepsilon_{xx} \quad (\text{en el ensayo}) \quad (3.10)$$

Donde ν es un parámetro característico del material, llamado Coefficiente de Poisson. El signo menos de la ecuación anterior indica que si en la dirección x existe alargamiento, en las perpendiculares existe un acortamiento (o viceversa). Este acortamiento unitario es una fracción ν del alargamiento unitario existente en la dirección x. Como veremos más adelante, la Ley de Comportamiento del acero en la zona elástica inicial puede expresarse en función de las dos constantes E, ν , del material. Es curioso que dichas constantes apenas dependen de la calidad del acero, o incluso de si el mismo está aleado o no. De hecho, la norma CTE indica que sus valores para todos los tipos de acero que contempla (que son aceros para construcción: de bajo contenido en carbono y sin aleantes), son los siguientes:

$$\text{Para el acero: } E=2.1 \times 10^5 \text{ MPa} \quad \nu=0.3 \quad (3.11)$$

Como se adelantó en el Tema 1, el CTE establece cuatro calidades de acero para estructuras. Su denominación consiste en una "S", seguido de una cifra que coincide con su límite elástico en MPa (es el límite elástico nominal para espesores menores de 16mm; para espesores mayores se especifican valores menores del límite elástico). Estos tipos son:

	S235	S275	S355	S450
$\sigma_e=f_y$ (MPa)	235	275	355	450
$\sigma_R=f_u$ (MPa)	360	410	470	550

La figura 3.5b muestra esquemáticamente las gráficas de los ensayos de tracción para tres aceros típicos, de muy diferente calidad: un acero para estructuras, un acero de baja aleación, y un acero para herramientas, o para tornillos de alta resistencia. Puede observarse una gran diferencia entre sus límites elásticos, así como entre sus tensiones de rotura. Nótese sin embargo como todos comparten la inclinación de la zona lineal inicial, ya que el valor de E es prácticamente el mismo para todos.

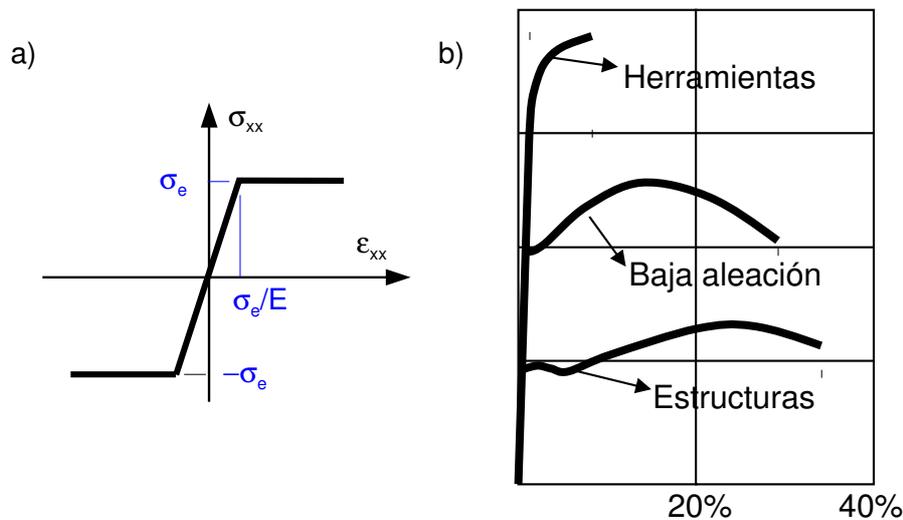


Figura 3.5: a) Comportamiento idealizado del acero a tracción y a compresión.
b) Comparación de tres aceros de muy distinta calidad y finalidad

En ciertas aplicaciones, la existencia del periodo de fluencia no es deseable. Por ejemplo, no deseamos que la cadena cinemática de una máquina de mecanizado sufriese deformaciones plásticas una vez puesta en servicio, estropeando sus delicados ajustes. En su lugar deseamos un límite elástico lo más alto posible. Como ejemplo, el acero para herramientas mostrado en la figura no presenta escalón de fluencia. Esto se consigue generalmente mediante tratamientos previos en frío, que llevan el material hasta la zona de fortalecimiento antes de su puesta en servicio.

Por el contrario, en las aplicaciones estructurales habituales, la fluencia es un fenómeno deseable, ya que los desplazamientos apreciables “avisan” de la presencia de tensiones altas, y por otra parte, en muchas circunstancias, dota a las estructuras de una reserva de resistencia importante más allá de la plastificación del primer punto del material. Esta reserva de resistencia es debida a que el aumento de deformación en una zona sin aumento de tensión, hace que otras zonas menos cargadas adquieran tensiones mayores.



No debe sorprender que los aceros para estructuras sean los de peor calidad. Ello es una consecuencia del necesario compromiso entre características del material y coste económico, en un campo de aplicación en que la cantidad de acero necesaria para un proyecto, incluso modesto, se mide por decenas de toneladas.

Finalmente, nótese que en la zona elástica lineal inicial, en la que habitualmente desearemos que el acero trabaje, las deformaciones serán pequeñas (grosso modo, menores que $300\text{MPa} / 2.1 \cdot 10^5\text{MPa} \sim 1,4 \cdot 10^{-3}$). Por ello es de esperar que los análisis que realicemos bajo las hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones estén poco afectados por la inexactitud procedente de considerar el equilibrio en la configuración indeformada, y demás aproximaciones asociadas a los “pequeños desplazamientos y deformaciones”.

Ley de comportamiento elástica lineal

Deseamos encontrar la relación existente a nivel local ente las componentes de deformación y las componentes de tensión. Nos referimos a las ecuaciones que expresan dichas relaciones como “Ley de Comportamiento” del material. Estamos interesados en el comportamiento lineal elástico que el acero y otros materiales presentan antes de plastificar o romper.

Consideremos un elemento diferencial del material con forma de cubo como el mostrado en la figura 3.6a. Pretendemos calcular las deformaciones que se producen en el elemento ante un estado general de tensión, que pueda contener todas las componentes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz} .

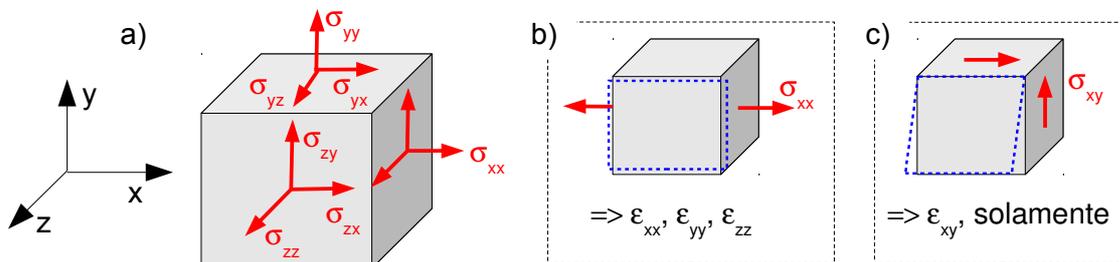


Figura 3.6: a) Elemento diferencial con un estado general de carga. b) Efecto de una tensión normal. c) Efecto de una tensión tangencial.

Empezaremos por calcular la componente de deformación ϵ_{xx} . Dada la linealidad del problema, procederemos aplicando el principio de superposición de efectos:

- Debido a σ_{xx} , la deformación es σ_{xx}/E (según el ensayo de tracción, ec. (3.9)).
- Debido a σ_{yy} , la deformación es $-\nu\sigma_{yy}/E$ (efecto de Poisson en un ensayo de tracción de dirección “y”).
- Debido a σ_{zz} , la deformación es $-\nu\sigma_{zz}/E$ (efecto de Poisson en un ensayo de tracción de dirección “z”).
- Se comprueba experimentalmente que para un material isótropo, cada componente de tensión cortante afecta sólo a su correspondiente componente de deformación (por ejemplo σ_{xy} afecta sólo a ϵ_{xy} , como indica la figura 3.6c). Por tanto, las tensiones cortantes no afectan a ϵ_{xx} .

La deformación ϵ_{xx} será la suma de las aportaciones de los distintos efectos, es decir:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \quad (3.12)$$

Y análogamente:

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \quad (3.13)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} \quad (3.14)$$

Por otra parte, como indica la figura 3.6c, cada componente de tensión cortante está relacionada únicamente con su correspondiente componente de deformación. Se aprecia que la relación entre, por ejemplo σ_{xy} y ϵ_{xy} tiene una evolución lineal hasta llegar la fluencia, de modo similar a lo que ocurre en tracción. Llamamos $2G$ a la constante de proporcionalidad que los relaciona en ese ámbito lineal, es decir:

$$\epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \quad (3.15)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} \quad (3.16)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} \quad (3.17)$$

La constante G recién presentada depende del material, y es otra constante elástica característica del mismo (como lo son E , ν , por ejemplo), llamada “módulo de cortadura”. Sin embargo, puede demostrarse que el comportamiento de un material isótropo queda descrito por dos constantes elásticas, por lo que G no es independiente de las otras dos. En particular, se puede demostrar que G está relacionada con E , ν , a través de

$$G = \frac{E}{2+2\nu} \quad (3.18)$$

El conjunto de ecuaciones (3.12) a (3.17), junto con la eventual consideración de (3.18), expresan la relación entre todas las componentes de tensión y todas las componentes de deformación, y constituyen la Ley de Comportamiento del material que pretendíamos obtener en este epígrafe.

Una consecuencia interesante que se puede obtener a partir de la ley de comportamiento anterior, y que no demostraremos, es que, bajo las hipótesis adoptadas, las direcciones principales de tensión y de deformación, coinciden. Téngase noticia de que esto no ocurrirá en general si el material es anisótropo.

Criterios de plastificación y agotamiento

Para un estado tridimensional de tensiones, en un acero se observa que llegado un cierto nivel de sollicitación se produce el mismo fenómeno que hemos llamado “fluencia”, consistente en un aumento de las deformaciones a tensión aproximadamente constante, y que supone el fin del comportamiento lineal elástico del material. Las condiciones que deben darse para que se alcance la fluencia en un estado tridimensional de tensiones, no son en absoluto evidentes, ni inmediatas de inducir a partir de lo observado en el ensayo de tracción. Llamamos “Criterio de Plastificación” a una expresión particular de esas condiciones que, de alcanzarse, implican la plastificación del material.

El concepto de plastificación es aplicable al acero dulce y otros materiales que denominamos dúctiles. En otros materiales no ocurren fenómenos externamente evidentes antes de la

ruina definitiva del material. Tal es el caso de los materiales frágiles, en los que cabe hablar directamente de condiciones de rotura. Ya ocurra de una u otra forma, estamos interesados en predecir cuándo se producen modificaciones de carácter permanente o catastrófico en el material.

Desafortunadamente, no se ha encontrado un conjunto de condiciones que permitan predecir lo anterior con total exactitud en todos los estados de tensión, y mucho menos para todos los materiales. En su lugar existen “criterios” (o “teorías”), que en base a las observaciones experimentales y a razonamientos más o menos plausibles elaborados a partir de ellas, consiguen predecir con suficiente aproximación a efectos prácticos la llegada de la plastificación o la rotura.

Criterio de Tresca

Para la mayoría de los aceros dulces y extradulces (de bajo contenido en carbono, entre los que se encuentran los aceros de construcción), al llegar la plastificación en el ensayo de tracción, aparecen en la superficie de la probeta unas líneas que forman aproximadamente 45° con el eje de la misma (fig. 3.7a), y que pueden ser visibles incluso a simple vista. Son las líneas Lüder, que se observaron ya en 1860. Se interpreta que preferentemente la plastificación se produce por deslizamiento entre planos del material, ya que los planos a 45° son los que soportan la mayor tensión tangencial (ver fig. 3.7b), que es la tensión responsable de dicho deslizamiento entre planos, ilustrado en la fig. 3.7c.

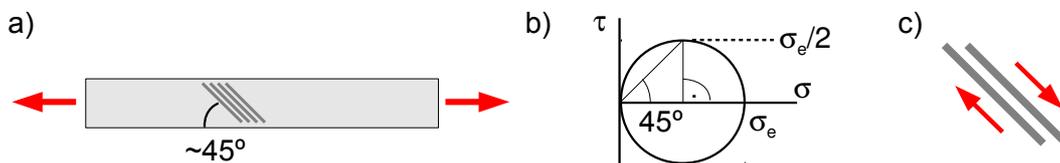


Figura 3.7: a) Líneas Lüder b) La τ^{\max} ocurre a 45° c) Deslizamiento en los planos de τ^{\max}

La idea anterior se conoce en la literatura como Criterio de Tresca, o criterio de la tensión tangencial máxima. Fue propuesto a mediados del siglo XIX por el ingeniero francés Henri E. Tresca, y conserva vigencia como uno de los criterios acertados para predecir la plastificación de materiales dúctiles. Su enunciado viene a incidir en lo anterior, proponiendo que un punto del material alcanza la plastificación cuando su tensión tangencial máxima llega a cierto valor crítico.

Para establecer ese valor, se razona que si el criterio fuese absolutamente cierto, sería indiferente el ensayo utilizado para encontrar dicho límite, para un material dado. Se usa el ensayo más sencillo disponible, que es el ensayo de tracción. Como muestra la figura 3.7b, al llegar la plastificación en este ensayo, la τ^{\max} vale $\sigma_e/2$, luego éste será el valor que según el Criterio de Tresca puede alcanzarse en cualquier estado de tensión antes de plastificar. Por tanto, el Criterio de Tresca se reduce a considerar que no habrá plastificación en el punto si:

$$\tau^{\max} \leq \sigma_e/2 \quad (3.19)$$

Si queremos expresar el criterio en función de las tensiones principales, sin presuponer que éstas estén ordenadas de ninguna forma particular, el criterio adopta la forma

$$\max \left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right) \leq \frac{\sigma_e}{2} \quad (3.20)$$

Para visualizar el criterio, pensemos en el caso límite en que el material estaría a punto de plastificar, lo que corresponde a la igualdad de los dos miembros de (3.20). La condición límite de plastificación estaría expresada por tres ecuaciones de igualdad, de las que quitando los valores absolutos resultan las 6 ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_e \\ \sigma_1 - \sigma_3 &= \pm \sigma_e \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \sigma_e \end{aligned} \quad (3.21)$$

Estas seis ecuaciones representan seis planos en un espacio tridimensional en que los ejes coordenados contengan los valores de las tres tensiones principales en el punto del sólido considerado. Llamamos “Espacio de Tensiones Principales” a este espacio. Cada punto del Espacio de Tensiones Principales representa, mediante su terna de tensiones principales, un posible estado de tensión en el punto material bajo estudio. Una línea en este espacio representa los sucesivos estados de tensión que el punto material bajo estudio va adquiriendo según evolucionan las cargas. Este espacio resulta especialmente conveniente para visualizar los criterios de plastificación. En particular, los seis planos de las ecuaciones (3.21) son paralelos a la trisectriz de los ejes (recta que pasa por el origen y forma ángulos iguales con los tres ejes), y entre los seis planos forman un prisma hexagonal regular como indica la figura 3.8a. La figura 3.8b muestra este prisma proyectado en un plano perpendicular a la trisectriz (lo que se conoce como “perspectiva isométrica”), lo que permite apreciar la sección del prisma sin la distorsión causada por la perspectiva.

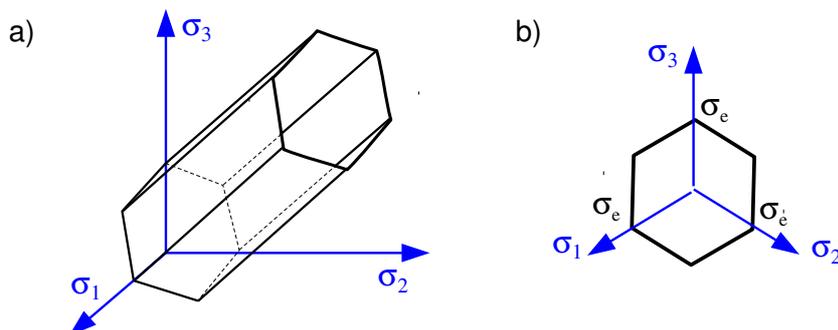


Figura 3.8: Criterio de Tresca en el espacio de tensiones principales.

Observado en el espacio de tensiones principales, el Criterio de Tresca implica que si las tensiones principales en el punto material del sólido son tales que su representación cae dentro del prisma hexagonal, entonces no habrá plastificación. Si su representación cae justamente en la superficie del prisma, entonces el punto está plastificando. Si su representación cae fuera del prisma, entonces se ha superado la etapa de plastificación (el punto del sólido se encontraría en el equivalente tridimensional a la “etapa de fortalecimiento”). En

general, llamamos Superficie de Plastificación al lugar geométrico de puntos de este espacio que representan estados de tensión para los que se justamente se produce plastificación. Según el Criterio de Tresca la superficie de plastificación es ese prisma hexagonal.

Establecido el criterio, nos preguntamos por su concordancia con los ensayos experimentales. Evidentemente, la concordancia con el ensayo de tracción es total, ya que hemos usado precisamente este ensayo para “calibrar” el criterio. Efectivamente, un punto de la probeta del ensayo de tracción estaría sometido a un estado de tensión que partiría de cero (el origen en el espacio de tensiones principales), y evolucionaría de forma que una de las tensiones principales creciese mientras las otras se mantienen nulas (se recorrería el sentido positivo de uno de los ejes en el e.t.p.). La plastificación llega cuando nos topemos con la superficie de plastificación, lo que ocurre exactamente a la tensión σ_e , ya que el prisma hexagonal corta a los ejes precisamente en σ_e , como muestra la figura 3.8b.

Para comprobar el grado de concordancia en otros casos, consideremos el estado llamado “de tensión tangencial pura”, que no es otro que el representado en la figura 3.9a. Ensayos de laboratorio en los que la otra tensión principal es nula, indican que en este caso la plastificación llega cuando $\tau^{\max}=0.56\sigma_e$. El diagrama de Mohr correspondiente se muestra en la misma figura. Como se aprecia, el mismo está centrado en los ejes, por lo que la tensión tangencial aplicada “t” es de igual valor absoluto que las tensiones principales.

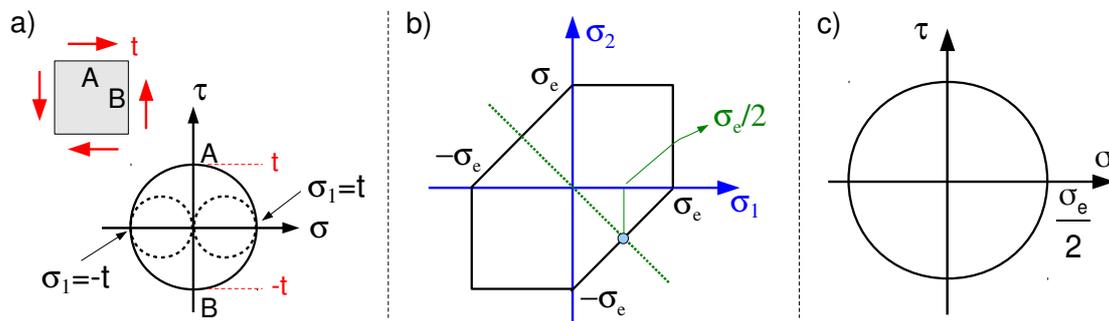


Figura 3.9: Aplicación del Criterio de Tresca a un estado de “tensión tangencial pura”

Como el ensayo transcurre con una de las tensiones principales nula, empezamos cortando la superficie de plastificación por el plano $\sigma_3=0$ (por ejemplo). Los seis planos (3.21) interseccionan con el $\sigma_3=0$ en las seis rectas que muestra la figura 3.9b, y que forman un hexágono distorsionado. Nuestro estado de tensión es tal que $\sigma_1=-\sigma_2$, así que evolucionará por los puntos de la recta de orientación -45° , representada también en la figura 3.9b. La plastificación llega, según el Criterio de Tresca, cuando nos topamos con “su” superficie de plastificación, lo que, como se muestra, ocurre cuando la tensión principal es $0.5\sigma_e$. Finalmente, la figura 3.9c muestra como en ese estado, al estar centrado el diagrama de Mohr, la tensión tangencial máxima tiene el mismo valor que la tensión principal, es decir $\tau^{\max}=0.5\sigma_e$.

La conclusión es que el Criterio de Tresca predice la plastificación en este estado particular de tensión cuando τ^{\max} llegue a $0.5\sigma_e$, pero en realidad ocurre a $0.56\sigma_e$. La discrepancia no es muy grande, pero es apreciable. Por otra parte, téngase noticia de que hay razones para esperar que éste sea el estado en que más error se obtenga. Como aspecto positivo, cabe

apuntar que la inexactitud del Criterio de Tresca nos dejará del lado de la seguridad cuando lo empleemos en el diseño de un elemento de una estructura.

Criterio de Von Mises

Como se mostró en la figura 3.9b, un “viaje” por el espacio de tensiones principales partiendo del origen y siguiendo la recta $\sigma_1 = -\sigma_2$, se topa con la superficie de plastificación de Tresca cuando $\sigma_1 = 0.5\sigma_e$, $\sigma_2 = -0.5\sigma_e$ (o viceversa), donde “damos por terminado el viaje”. Es decir, consideramos que el punto del sólido habría plastificado y no queremos ir más allá. Pero sabemos que este “fin de viaje” es algo prematuro, porque aún podríamos avanzar un poco más (hasta $\sigma_1 = 0.56\sigma_e$, $\sigma_2 = -0.56\sigma_e$ o viceversa) sin que ocurriese plastificación.

Si postulamos como superficie de plastificación el cilindro que circunscribe al prisma hexagonal de Tresca, como muestran las figuras 3.10a y b, la coherencia con las observaciones experimentales es mayor. En efecto, puede obtenerse sin dificultad que la ecuación de este cilindro es:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_e^2 \quad (3.22)$$

Y si particularizamos la ecuación anterior para el estado indicado en la figura 3.9, en el cual es $\sigma_1 = -\sigma_2$, $\sigma_3 = 0$, tendremos que $(2\sigma_1)^2 + (\sigma_1)^2 + (-\sigma_1)^2 = 2\sigma_e^2 \Rightarrow \sigma_1 = 0.577\sigma_e$ como indica la figura 3.10c. Este valor es mucho más próximo al observado experimentalmente, de $\sigma_1 = -\sigma_2 = 0.56\sigma_e$ (si bien nos deja ligeramente fuera del lado de la seguridad).

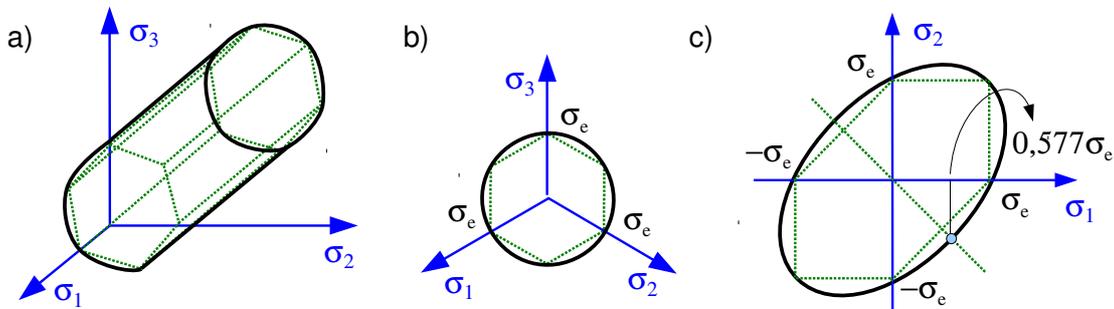


Figura 3.10: a), b), Criterio de Von Mises c) Predicción para tensión tangencial pura.

En realidad, el adoptar como superficie de plastificación el cilindro indicado, tiene justificaciones mejor fundamentadas que el mero argumento de conveniencia presentado aquí. En particular, este criterio equivale a postular que la plastificación del material en un punto llega cuando la “densidad de energía de distorsión”, concepto que no presentamos en este curso, alcanza cierto valor crítico.

Es muy usual aplicar el Criterio de Von Mises en una forma elaborada a partir de la ecuación (3.22). Se pretende hacerlo usando una magnitud que sea directamente comparable con el límite elástico, lo que desde el punto de vista mnemotécnico es preferible. Esto se realiza fácilmente sin más que escribir (3.22) en la forma

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} \leq \sigma_e \quad (3.23)$$

En la que se ha incluido la desigualdad que corresponde a la zona interior, de no plastificación, del cilindro. El miembro izquierdo es un escalar que obtenemos de la solución de tensiones en el punto del sólido, y se suele llamar abreviadamente “Tensión equivalente de Von Mises”. Es una cantidad a comparar directamente con el límite elástico, como se pretendía.



Aunque no es un concepto usual en la literatura, puede pensarse igualmente en una “Tensión equivalente de Tresca”. A la vista de (3.19), este escalar dependiente de la solución de tensiones en el punto, directamente comparable con σ_e , sería $2\tau^{\max}$.

Debido a su mayor precisión, la normativa viene presentando predilección por el criterio de von Mises, el cual recomienda para todas las comprobaciones de los cálculos que se realicen bajo hipótesis de régimen elástico lineal de material. No obstante, no debe sacarse la conclusión de que dicho criterio es en algún sentido “el exacto”, o que está mejor fundamentado por el hecho de obtenerse de consideraciones energéticas más elaboradas (las cuales hemos omitido aquí). Simplemente es un criterio con el que suele obtenerse mejor aproximación a los valores experimentales, no pareciendo de momento posible establecer tal cosa que pudiésemos llamar “el criterio exacto” para predecir la plastificación de un material.



Como curiosidad, considérese una “presión hidrostática”, en la que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, y por tanto se representará en la trisectriz en el espacio de tensiones principales. Apréciase que tal estado, o uno cercano, no plastificaría nunca por grande que fuesen las tensiones, según los criterios de Tresca o von Mises. Tal predicción es de hecho muy acertada para compresiones, aunque menos para tracciones.

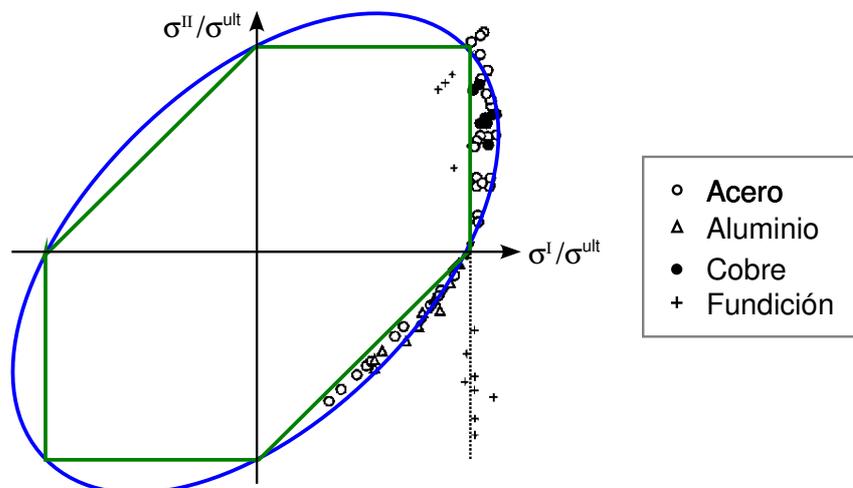


Figura 3.10: Plastificación, o rotura en su caso, de algunos materiales (resultados experimentales).

La figura 3.10 muestra finalmente a modo de ejemplo algunos resultados de ensayos realizados sobre distintos materiales. Se representan las tensiones normalizadas, dividiendo su valor real por el del límite elástico del material, o por la tensión de rotura a tracción en su caso (fundición). Como se aprecia, tanto el criterio de Tresca como el de Von Mises predicen muy aceptablemente la plastificación del acero y de los otros metales dúctiles, quedando la mayoría de las observaciones experimentales a medio camino entre las superficies de plastificación de ambos criterios.

No cabe decir lo mismo de la fundición, que como se aprecia se aparta mucho de estos criterios, especialmente en la zona de σ_2 negativa. Para predecir en agotamiento de materiales que no sean dúctiles se utilizan otros criterios, alguno de los cuales mencionamos a continuación.

Nociones sobre comportamiento y fallo en otros materiales

El estudio del comportamiento de los materiales es una rama de la ciencia complicada y con una amplísima casuística, de la que no es posible ofrecer un resumen en pocos párrafos. El objeto de los siguientes es simplemente dar noticia de dicha complicación, para no dejar en el lector la impresión de que “todo es elástico y lineal”, o que obedece exactamente a leyes que, en realidad, sólo son simplificaciones convenientes. Con este fin se presentan a nivel informativo algunas aproximaciones y modelos de uso común para los materiales más típicamente involucrados en estructuras de edificación.

En cuanto a su comportamiento en servicio, no todos los materiales presentan un rango inicial de comportamiento lineal. El acero y la fundición (hierro colado, con mayor contenido en carbono que el acero) lo presentan claramente, y las aleaciones de aluminio en general también. Otros metales dúctiles lo presentan más o menos aproximadamente. La madera, contrariamente al resto de materiales usados típicamente en edificación, y debido a la presencia de fibras orientadas en dirección longitudinal, es un material no isótropo. En aplicaciones de estructuras de barras, interesa habitualmente el comportamiento de la madera en dirección de las fibras, por lo que es posible operar usando sólo las constantes elásticas asociadas a esa dirección. Hechas las precisiones anteriores, las maderas suelen presentar un rango de comportamiento lineal, que es más claro en tracción que en compresión. El terreno, como elemento resistente, suele presentar también un rango inicial de respuesta lineal, que se caracteriza mediante un coeficiente de proporcionalidad llamado “módulo de balasto”. Para estructuras construidas con materiales que no presentan un comportamiento lineal inicial, entre ellos el hormigón, aún suelen usarse modelos de cálculo lineales como aproximación, tales como los que veremos en este curso, debido a su relativa simplicidad en comparación cualquier modelo no lineal. Para ello pueden introducirse aproximaciones, como el uso de un módulo de elasticidad tangente, o un módulo de elasticidad secante, u otras correcciones de distinta naturaleza. Finalmente, siempre que las solicitaciones sean lo bastante pequeñas, será aceptable aproximar el tramo inicial de la curva tensión-deformación de cualquier material por su tangente en el origen, con lo que el modelo revierte a un planteamiento lineal. El nivel de sollicitación “lo bastante pequeño” para que dicha aproximación pueda usarse razonablemente, dependerá de cada material.

En cuanto al fallo del material, también existe una muy amplia casuística. No obstante, contamos con unos pocos criterios de fallo que predicen aceptablemente la aparición de cambios permanentes, o la rotura, en muchos materiales isótropos. Como se ha indicado, para el acero y otros metales dúctiles, los criterios de Tresca o de von Mises son muy acertados y ampliamente utilizados en la predicción de cambios permanentes en el material (plastificación). No obstante, las aleaciones de aluminio no presentan habitualmente escalón de fluencia, por lo que el límite del comportamiento lineal elástico resulta más difuso, y por tanto más difícil de precisar. El fallo de los materiales que, como la fundición, los vidrios, etc, presentan rotura frágil (la que se produce sin previo aviso, generalmente sin haber abandonado el comportamiento lineal) suele predecirse adecuadamente mediante un sencillo criterio de deformación normal máxima, o de tensión normal máxima. Para materiales que se comportan de manera distinta a tracción que a compresión, entre ellos el hormigón, es usual la consideración del Criterio de rotura de Mohr. En síntesis, éste criterio postula la existencia de una curva envolvente en el espacio σ - τ de la representación de Mohr, dentro de la cual debe estar contenido el diagrama de Mohr de cualquier punto del material. Si el diagrama alcanza o sobrepasa la curva, se produciría la rotura. Esta curva envolvente se obtiene experimentalmente, o bien de modo aproximado a partir de las tensiones últimas, σ_{uc} y σ_{ut} , obtenidas en los ensayos uniaxiales de compresión y de tracción del material, de la manera que indica la figura 3.11a: la envolvente (desconocida) se aproxima por las tangentes a los diagramas de Mohr de esos ensayos de compresión y de tracción.

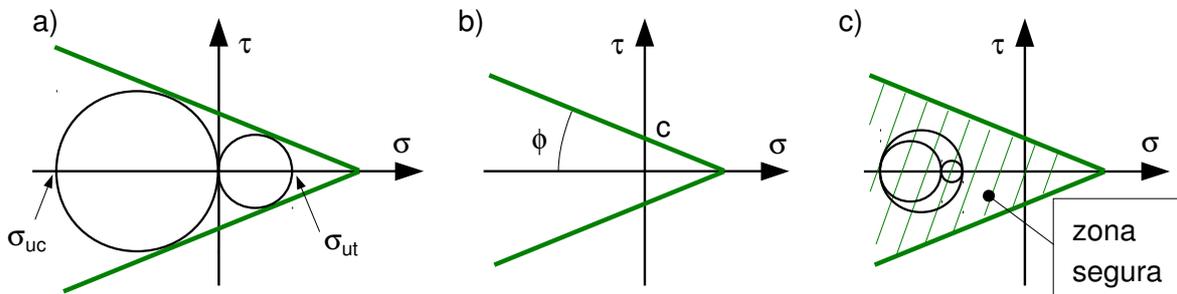


Figura 3.11: a) Círculos de Mohr límite en tracción y compresión. b) Criterio de Mohr-Coulomb. c) Zona segura

Para predecir la rotura del terreno es frecuente considerar un criterio de rotura que es similar al de Mohr, aunque se suele presentar de forma ligeramente diferente. En este caso se considera que la rotura se producirá por deslizamiento entre dos capas del terreno, y que la resistencia a dicho deslizamiento está principalmente aportada por la fricción (para la que se asume el modelo usual de Coulomb), pero que también existe una pequeña capacidad de resistencia al deslizamiento en ausencia de compresión, que caracteriza la “cohesión” del suelo “c”. Básicamente, siendo μ el coeficiente de rozamiento de Coulomb, la tensión tangencial alcanzable sería $\tau < \mu|\sigma|$, aunque la cohesión eleva este límite hasta $\tau < c + \mu|\sigma|$, o teniendo en cuenta que la tensión normal será de compresión (negativa), $\tau < c - \mu\sigma$. Es frecuente además caracterizar el rozamiento mediante un ángulo ϕ tal que $\text{tg } \phi = \mu$. Como se aprecia en la figura 3.11b, el resultado es análogo al del criterio de rotura de Mohr aproximado de la figura 3.11a. Se le suele denominar criterio de Mohr-Coulomb en la literatura. La

figura 3.11c muestra la zona “segura” que debe contener al diagrama de Mohr de un punto para que éste no rompa (el diagrama mostrado se incluye a modo de ejemplo).

Como se ha explicado, la madera es un material anisótropo. La presentación formal de criterios generales de fallo para materiales no isótropos requeriría un estudio de los mismos que se sale del ámbito de este curso. No obstante, téngase noticia de que la madera resiste mucho más (del orden del doble) a tracción que a compresión, que en tracción suele producirse rotura súbita mientras que en compresión puede existir algo parecido a un escalón de fluencia, y que la humedad perjudica sustancialmente tanto a la rigidez (al “módulo de Young aparente”), como la resistencia última de la madera. Todo ello refiriéndonos a la dirección de las fibras, como se apuntó anteriormente.

La energía de deformación

Vamos a comenzar por recordar el caso sencillo y familiar de un resorte lineal elástico como el de la figura 3.12a. El desplazamiento x crece proporcionalmente a la fuerza F aplicada, de forma que $F=k \cdot x$, por lo que cuando el desplazamiento aumenta un dx , el trabajo de la fuerza F (que consideramos aproximadamente constante en esa evolución diferencial) es $dT=F \cdot dx$, como indica la figura 3.12b. El trabajo total desde que “ x ” y “ F ” valen cero, hasta que alcanzan unos ciertos valores x_A , y F_A , será la integral de dT , que como se indica coincide con el área del triángulo bajo la recta de comportamiento. Por tanto este trabajo tiene un valor $T=F_A \cdot x_A/2$.

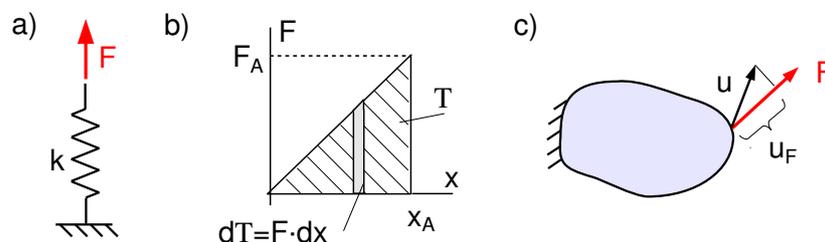


Figura 3.12: a) Resorte lineal. b) Trabajo realizado. c) Caso de un sólido.

El caso de un sólido con una fuerza aplicada no es muy distinto: si el sólido tiene comportamiento lineal, la carga y el desplazamiento crecerán también proporcionalmente. Hay que hacer aquí la salvedad de que el desplazamiento y la fuerza pueden tener direcciones diferentes, y como sabemos, solamente la componente de desplazamiento en la dirección de la fuerza (o viceversa) realiza trabajo. Por tanto el trabajo realizado por la fuerza cuando ésta ha crecido hasta un valor F , será $T = F \cdot u_F/2$, donde u_F es la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza según indica la figura 3.12c. Nótese que si el sólido es lineal, el que se mantenga la dirección de F en el proceso de carga, conllevará que se mantenga también la dirección de u .

En cuanto al signo del trabajo, adoptamos el que resulta de la definición habitual del trabajo de una fuerza, que es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento diferencial. Según esto, por ejemplo, el trabajo de la fuerza F en las figura 3.12a y 3.12c, sería positivo, ya que la fuerza y el desplazamiento son del mismo sentido. Mientras que el signo del tra-

bajo de una fuerza queda así aclarado, la cuestión acerca de “quién realiza el trabajo”, en el sentido coloquial de la expresión, necesita alguna mayor atención. Lo habitual es enunciar implícitamente que “yo hago el trabajo que hacen las fuerzas que yo aplico” (y que curiosamente no actúan sobre “yo”, sino sobre el otro sólido). Ese enunciado resulta claro en sí mismo, aunque cuando se consideran las fuerzas de acción y de reacción, y conceptos como la energía de deformación, el recién llegado tiende a sentirse confundido.

Para abundar en la cuestión, volvamos sobre el resorte de la figura 3.12a. La fuerza representada es la que “yo” hago sobre el resorte. El trabajo de esa fuerza es positivo (según el producto escalar) cuando estiro el resorte, y negativo cuando dejo que se retraiga. La manera habitual de pensar en el proceso anterior es que “yo” hago trabajo al estirar el resorte, y el resorte “me” lo devuelve cuando le dejo retraerse. Es igualmente frecuente pensar que el resorte deformado tiene una capacidad de “darme” trabajo, y llamar “energía potencial elástica” o “Energía de Deformación” a esa capacidad.

Tras las aclaraciones anteriores, consideremos un sólido sobre el que actúa un sistema de fuerzas $\mathbf{F}(P_k)$ aplicadas en respectivos puntos P_k del sólido ($k=1\dots n^\circ$ de fuerzas), cada uno de los cuales experimenta un desplazamiento $\mathbf{u}(P_k)$. Queremos calcular el trabajo que realizan estas fuerzas durante el proceso de deformación del sólido. Comenzaremos recordando que todo sistema, entendido en su sentido termodinámico, posee una variable llamada “Energía Interna”, que es función de estado (su valor no depende de la evolución anterior del sistema, sino solamente de su estado actual). El trabajo que “le damos” al sistema puede emplearse en vencer rozamientos, disipar calor, acelerar el sólido, ... o almacenarse como Energía Interna. Como suponemos que las transferencias de calor y el resto de efectos son despreciables, el trabajo que aportamos al sólido coincide con el incremento de Energía Interna. Y como la Energía Interna es una función de estado, el trabajo que queremos calcular dependerá solamente del estado actual del sólido, y no de la historia de carga.

Lo anterior implica que podemos suponer cualquier historia de carga que nos sea cómoda para los cálculos, con tal que deje al sistema con sus cargas actuales. Supondremos en concreto que todas las cargas crecen a la vez desde su valor inicial nulo hasta su valor final. La linealidad del sistema implica que en cualquier estado intermedio del proceso de carga, en el que se ha aplicado una fracción dada de todas las cargas, los desplazamientos son la misma fracción de su valor final. Por ello, la gráfica de cualquier fuerza $F(P_k)$ frente su desplazamiento relevante $u_F(P_k)$, tendría el mismo aspecto que el mostrado en la figura 3.12b. El trabajo de cada una de ellas es, en todo caso, la mitad del producto del valor final de la fuerza por el del desplazamiento. En definitiva el trabajo buscado es en total:

$$\sum_k \frac{1}{2} \mathbf{F}(P_k) \cdot \mathbf{u}(P_k) \quad (3.24)$$

Al igual que en el caso del resorte mencionado más arriba, podemos considerar el trabajo anterior como una “Energía de Deformación” acumulada en el sólido, que cabe interpretar como la potencialidad que tiene el sólido de “devolvernos” el trabajo que habíamos realizado.

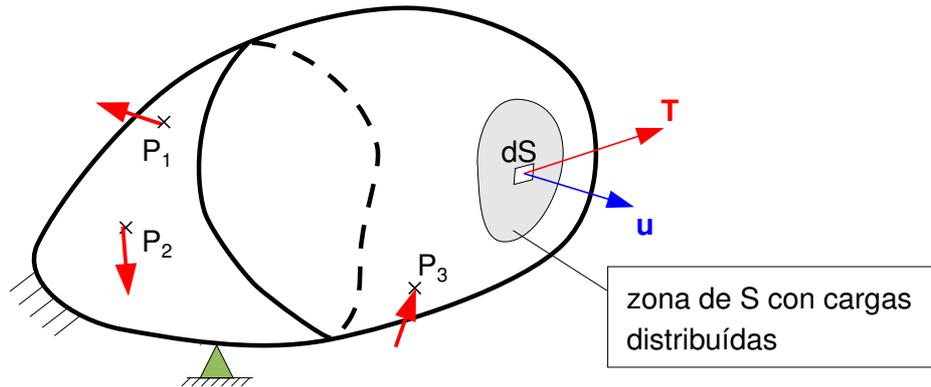


Figura 3.13: Cargas puntuales y distribuidas en el contorno.

La generalización a otros tipos de fuerzas es inmediata. Si por ejemplo tenemos aplicadas fuerzas distribuidas en el contorno como en la figura 3.13, siendo \mathbf{T} el vector tensión en el contorno (que dependerá de la posición), la fuerza diferencial que actúa sobre un elemento de superficie dS del contorno S del sólido, será $\mathbf{T} \cdot dS$. Si el desplazamiento de ese punto del contorno es \mathbf{u} , su aportación al trabajo total será $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \cdot dS / 2$, y la aportación de toda la carga distribuida será su integral extendida al contorno S del sólido. Teniendo en cuenta que pueda haber también fuerzas puntuales, el trabajo de todas las acciones aplicadas sobre el sólido será:

$$\sum_k \frac{1}{2} \mathbf{F}(P_k) \cdot \mathbf{u}(P_k) + \int_S \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \cdot dS \quad (3.24bis)$$

Si en el problema existen otro tipo de fuerzas aplicadas (por ejemplo de volumen, del tipo a las que produce la gravedad o la inercia dinámica), procedería agregar el o los sumandos correspondientes. Es probablemente más elegante pensar que la forma (3.24) es una manera conceptual de expresar el trabajo de todas las acciones, independientemente de cómo deban calcularse en la práctica (si son o no diferenciales o no, y de si se precisa o no una integral), y de si actúan en el contorno o en el dominio, etc. Nos referiremos a esa forma (3.24) en dicho sentido en lo que sigue.



Es notorio que el trabajo no depende linealmente de las demás magnitudes del modelo matemático. Como ejemplo sencillo, véase que en el resorte de la figura 3.12 es inmediato expresar el trabajo en función de x_A^2 , ó de F_A^2 . De hecho, la energía es la única magnitud no lineal del modelo: tensiones, deformaciones, desplazamientos, etc, están relacionados linealmente entre sí. Ello tiene algunas implicaciones evidentes, como por ejemplo que sería incorrecto calcular la energía de deformación de un sólido aplicando el principio de superposición de efectos. Es éste un error frecuente contra el que conviene estar advertido. Nótese que en la exposición no se ha hecho tal cosa.

Densidad de Energía de Deformación

Nos planteamos ahora calcular el trabajo que realizan las fuerzas asociadas a las tensiones en un sólido diferencial con forma de cubo, perteneciente a un sólido macroscópico. Según las consideraciones anteriores, aplicaremos la fórmula (3.24) a este caso, en el sentido conceptual que se apuntó allí, y pensando que todas las acciones y deformaciones han crecido proporcionalmente desde cero hasta su valor final.

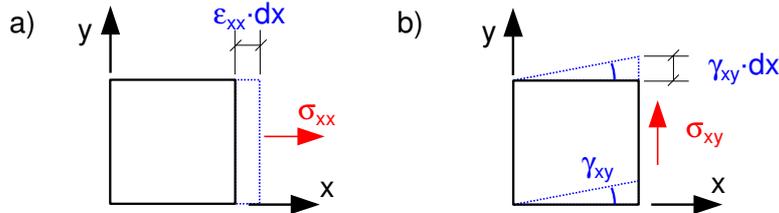


Figura 3.14: Aportaciones al trabajo total de dos componentes de tensión.

En la figura 3.14a se aprecia que la fuerza $\sigma_{xx} \cdot dy \cdot dz$ ha tenido un recorrido $\epsilon_{xx} \cdot dx$, por lo que su aportación al trabajo realizado será $\sigma_{xx} \cdot \epsilon_{xx} \cdot dx \cdot dy \cdot dz / 2$. Se ha supuesto sin pérdida de generalidad que la cara izquierda permanece en su plano. Análogamente, el trabajo asociado a σ_{yy} ó σ_{zz} , resulta ser $\sigma_{yy} \cdot \epsilon_{yy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz / 2$, $\sigma_{zz} \cdot \epsilon_{zz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz / 2$, respectivamente.

Del mismo modo, en la figura 3.14b apreciamos que la fuerza $\sigma_{xy} \cdot dy \cdot dz$ ha tenido un recorrido $\gamma_{xy} \cdot dx$, por lo que su trabajo realizado será $\sigma_{xy} \cdot \gamma_{xy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz / 2$. Adicionalmente, apréciase que las tensiones σ_{yx} (no mostradas) que actúan en las caras horizontales no trabajarían con la deformación γ_{yx} ($=\gamma_{xy}$), porque sus movimientos son sensiblemente perpendiculares a ellas, ni con sus recorridos asociados a ϵ_{xx} , etc. En caso de haber supuesto que no se mueve cualquier otra cara, se habrían obtenido resultados análogos.

El trabajo asociado a σ_{xz} ó a σ_{yz} se obtiene de forma análoga, y vale $\sigma_{xz} \cdot \gamma_{xz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz / 2$, $\sigma_{yz} \cdot \gamma_{yz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz / 2$, respectivamente. Según (3.24) el trabajo total en el diferencial de volumen será:

$$\frac{1}{2} (\sigma_{xx} \cdot \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \cdot \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \cdot \epsilon_{zz} + \sigma_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \cdot \gamma_{yz}) dV$$

donde se ha denotado como dV al diferencial de volumen ($dx \cdot dy \cdot dz$). A la cantidad que multiplica a dV se le denomina “Densidad de Energía de Deformación”, W , y tiene el significado físico de ser la energía almacenada en el sólido por unidad de volumen.

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \cdot \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \cdot \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \cdot \epsilon_{zz} + \sigma_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \cdot \gamma_{yz}) \quad (3.25)$$

Teniendo en cuenta que $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$ etc, podemos escribir la densidad de energía de deformación en la forma compacta:

$$W = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} ; \quad (i, j = x, y, z) \quad (3.25bis)$$

Nótese que los sumatorios anteriores hacen que por ejemplo el sumando $\sigma_{xy} \cdot \epsilon_{xy}$ aparezca dos veces, conformando el sumando original $\sigma_{xy} \cdot \gamma_{xy}$. La integral de esta magnitud W extendida al volumen V del sólido, tiene el significado físico de ser la Energía de Deformación.

total almacenada en el sólido. Éste era el mismo significado físico que tenía el trabajo de las fuerzas exteriores calculado en (3.24), por lo que ambos deben coincidir:

$$\int_V W \cdot dV = \sum_k \frac{1}{2} \mathbf{F}(P_k) \cdot \mathbf{u}(P_k) \quad (3.26)$$

En donde el miembro derecho se interpreta de la manera conceptual apuntada en los comentarios a (3.24), como el trabajo de todas las acciones exteriores, cualquiera que sea su naturaleza.



La ecuación (3.26) tiene la forma “trabajo interno igual a trabajo externo”, y la manera de obtenerla aquí ha usado básicamente de esa máxima. La explicación así realizada es intuitiva, pero no del todo rigurosa. Una demostración más correcta de que, bajo las condiciones supuestas, ambos miembros del (3.26) constituyen dos maneras estrictamente equivalentes de calcular el mismo trabajo, puede encontrarse en ^[11], y también en ^[10].

El Principio de los Trabajos Virtuales

El Principio de los Trabajos Virtuales (abreviadamente PTV) es un enunciado muy versátil de la Teoría de la Elasticidad que tiene interesantes posibilidades de aplicación práctica en el cálculo y análisis de estructuras, algunas de las cuales serán indicadas en el tema 6. Este principio será presentado aquí de una forma axiomática por brevedad. El lector interesado en sus implicaciones teóricas y en los detalles de su obtención, puede consultar alguna de las referencias ^[10] ^[11] o ^[14].

Premisas:

- Consideramos un sólido delimitado por una superficie S , la cual encierra al dominio V que ocupa el sólido.
- Consideramos en él un estado de tensiones cualquiera $\sigma_{ij}^{(1)}$ al que corresponde un vector tensión en el contorno $\mathbf{T}^{*(1)}$, y eventualmente unas fuerzas $\mathbf{F}^{(1)}(P_k)$ concentradas en unos puntos P_k . ($k=1 \dots n^\circ$ de puntos).
- Consideremos también en el sólido un campo cualquiera de deformaciones $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ al que corresponden unos desplazamientos en el contorno $\mathbf{u}^{*(2)}$, y eventualmente unos desplazamientos $\mathbf{u}^{(2)}(P_k)$ en los puntos P_k .

Enunciado:

Bajo las premisas anteriores, se satisface la siguiente ecuación:

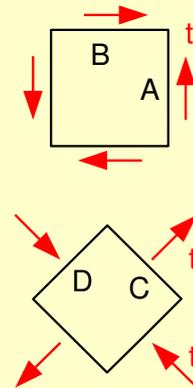
$$\sum_i \sum_j \int_V \sigma_{ij}^{(1)} \cdot \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \int_S \mathbf{T}^{*(1)} \cdot \mathbf{u}^{*(2)} dS + \sum_k \mathbf{F}^{(1)}(P_k) \cdot \mathbf{u}^{(2)}(P_k) \quad ; \quad (i, j = x, y, z) \quad (3.27)$$

Observaciones importantes:

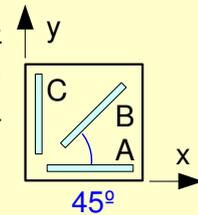
- El que el vector tensión en el contorno $\mathbf{T}^{*(1)}$ “corresponda” al tensor de tensiones en el dominio $\sigma_{ij}^{(1)}$ quiere decir que ambos deben satisfacer la ecuación de equilibrio (2.16). El que el campo de desplazamientos $\mathbf{u}^{(2)}$ cuyo valor en el contorno es $\mathbf{u}^{*(2)}$ “corresponda” al tensor de deformaciones $\varepsilon_{ij}^{(2)}$, quiere decir que ambos deben satisfacer las ecuaciones de compatibilidad (3.2), (3.3), (3.4), y (3.5).
- Se han utilizado superíndices (1) y (2) para sugerir que el sistema de cargas y tensiones pertenece a un estado “1” posible del sólido, y que el sistema de deformaciones y desplazamientos pertenece a un estado “2” posible del sólido, que no tienen porqué ser el mismo.
- Es habitual considerar que uno de los dos estados es “real” (el del problema que nos ocupe) y el otro “virtual” (propuesto a conveniencia por nosotros). Cuando el estado real es el “1”, estamos considerando las fuerzas y tensiones del estado real, y los desplazamientos y deformaciones del virtual. Decimos entonces que estamos aplicando el “Principio de los Desplazamientos Virtuales”, abreviadamente PDV. Cuando el estado real es el “2”, estamos considerando los desplazamientos y deformaciones del estado real, y las fuerzas y tensiones del virtual. Decimos entonces que estamos aplicando el “Principio de las Fuerzas Virtuales”, abreviadamente PFV.
- En cada caso, hay un conjunto de variables del problema “real” (las de tipo desplazamiento o bien las de tipo fuerza) que ni siquiera aparece en la ecuación. Cualquier cosa que queramos garantizar acerca de estas variables, tendremos que hacerlo separadamente. Esta ecuación mal podría garantizar nada acerca de variables que no intervienen en ella.
- Es posible plantear la ecuación para tantos estados virtuales distintos como se desee.
- El estado “real” y el “virtual” ni siquiera tienen que cumplir las mismas condiciones de contorno en desplazamientos. No obstante, es frecuente plantear el campo virtual de forma que satisfaga las mismas condiciones de contorno (nulas) en desplazamientos que el campo real. Se persigue con ello excluir de la evaluación del miembro derecho las zonas del contorno correspondientes a apoyos, en donde la tensión de contorno es desconocida a priori.
- No se ha usado ninguna ley de comportamiento en el enunciado del PTV. Es un principio válido para cualquiera de ellas, incluida la ley elástica lineal, leyes no lineales de cualquier tipo, o comportamiento plástico, entre otras.
- El enunciado habitual de estos principios integrales incluye fuerzas de volumen, que no se han considerado aquí por concisión.
- La ecuación tiene la forma “trabajo interno igual a trabajo externo”, pero en este caso los trabajos no son reales, ya que las fuerzas se multiplican por desplazamientos arbitrarios (“virtuales”), que no son los que ellas producirían en el sólido. Estos trabajos se llaman “virtuales”, y dan nombre al principio enunciado. Nótese por cierto la ausencia de factores $\frac{1}{2}$ en la ecuación.

EJERCICIOS PROPUESTOS

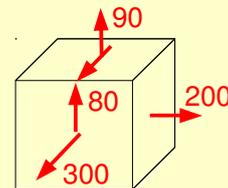
- Se pide demostrar la relación (3.18) como ejercicio. Para ello se sugiere que considere un elemento diferencial sometido a las tensiones indicadas en la primera figura, que es el mismo estado de tensión mostrado en la segunda figura pero representado en otros planos (compruébese), y que como sabemos se llama “estado de tensión tangencial pura” (recuerde la figura 3.9). Calculando el incremento de longitud unitario de un segmento de dirección “C”, en función de G en la primera figura y en función de E , ν , en la segunda, se obtendrá la relación buscada. Se aconseja usar los diagramas de Mohr (tanto de tensiones como de deformaciones) en los cálculos.



- Mediante un dispositivo llamado “galga extensométrica” se han medido las deformaciones unitarias en las direcciones A, B y C, en un punto de la superficie de un sólido, siendo $\epsilon(A)=10^{-4}$, $\epsilon(B)=2 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon(C)=0$. Se pide calcular las seis componentes del tensor de deformaciones en ese punto, en ejes x,y,z. Nota: la galga es una lámina de celulosa de aproximadamente 1 cm^2 , que porta unos filamentos resistentes, y que se pega a la superficie del sólido. Ello implica que el vector tensión será nulo en ese punto de la superficie ($\sigma_{zx}=\sigma_{zy}=\sigma_{zz}=0$)



- El elemento diferencial de la figura está sometido a las tensiones que se indican, dadas en MPa. Compruebe si un acero S235 podría soportar esas tensiones sin plastificar, según el criterio de Tresca, y según el criterio de Von Mises. Se sugiere utilizar el diagrama de Mohr en los cálculos.



- Un terreno arcilloso tiene cohesividad $c=10 \text{ kPa}$, y ángulo de rozamiento $\phi=20^\circ$. Se estima que un punto del mismo está sometido a compresiones de 40, 50 y 80 kPa según las direcciones principales de tensión. Se pide comprobar si ese punto del terreno es seguro según el criterio de Mohr-Coulomb. Se sugiere realizar una comprobación en forma gráfica aproximada, en el espacio $\sigma-\tau$.

- Para futura referencia y profundización en el estudio de la deformación, se recomienda ^[11], y para lo relativo a la ley de comportamiento y criterios de plastificación ^[9] y ^[11]. Aspectos avanzados del contenido de este tema 3 también se encuentran excelentemente tratados en ^[10] y en ^[12].

4.- Tracción–Flexión de Barras Rectas

Definición de los esfuerzos en función de las tensiones

En el Tema 2 se definieron los esfuerzos en barras como las componentes de la reducción (resultante y momento resultante) al centro de áreas del sistema de fuerzas asociadas a las tensiones que actúan en la sección. En las figuras 2.6 y 2.7 se indicaron con alguna justificación los convenios de signos adoptados, los cuales pueden haber resultado un poco extraños en la primera lectura. En estos momentos estamos en condiciones de presentar una definición más precisa de los esfuerzos en función de las componentes de tensión, lo que además pondrá de manifiesto el porqué de los convenios de signos adoptados allí.

Como primer paso, nos preguntamos qué componentes de tensión en la sección están relacionadas con qué componentes de esfuerzo. Tratándose de tensiones en el plano de la sección, el primer subíndice de las componentes del tensor de tensiones será “x”.

Es evidente, por ejemplo, que las tensiones σ_{xx} , perpendiculares a la sección, no aportarán nada a los esfuerzos V_y , V_z , que son las componentes de la resultante en el plano de la sección. Tampoco tienen aportación al momento torsor T (ver figura 2.6), ya que el mismo tiene la dirección “x”, y cualquier momento de una fuerza elemental asociada a σ_{xx} será perpendicular a “x”. Estas tensiones σ_{xx} sólo pueden producir resultante en dirección “x” (es decir N), y momentos perpendiculares a “x” (es decir M_y , M_z). La figura 4.1a ilustra las componentes de esfuerzo que estarían relacionadas con σ_{xx} en un ejemplo bidimensional sencillo.

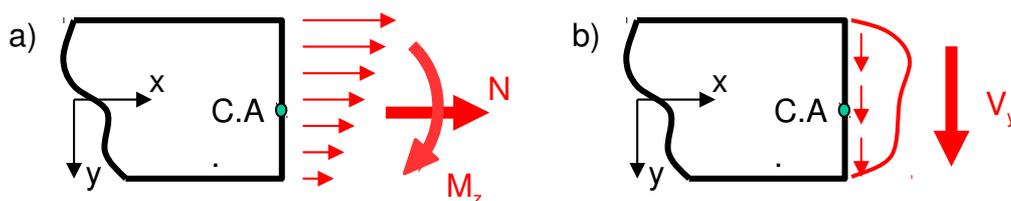


Figura 4.1: Componentes de esfuerzo relacionadas con cada componente de tensión (ejemplos bidimensionales)

De forma similar, razonamos que las tensiones tangenciales en el plano de la sección (σ_{xy} , σ_{xz}) no pueden producir resultante de dirección “x” (es decir, N), y que tampoco tienen aportación a los momentos flectores, M_y , M_z , ya que el momento respecto del Centro de Áreas de cualquier fuerza elemental asociada a una tensión tangencial, siempre tendrá la dirección de “x” (por lo que se trataría en todo caso de una aportación al momento torsor T). Por tanto, σ_{xy} , σ_{xz} , sólo pueden producir resultante en el plano de la sección (cuyas componentes serán V_y , V_z), y eventualmente momento de dirección “x” (torsor T). Ello se ilustra en la figura 4.5b, nuevamente mediante un ejemplo bidimensional sencillo.

Vamos a definir formalmente las componentes de esfuerzo a partir de las componentes del tensor de tensiones que actúan sobre la sección teniendo en cuenta las observaciones anteriores. Las ecuaciones siguientes contienen esta definición.

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_{xx} dA & V_z &= \int_A \sigma_{xz} dA \\ V_y &= \int_A \sigma_{xy} dA & M_y &= \int_A \sigma_{xx} \cdot z \cdot dA \\ M_z &= \int_A \sigma_{xx} \cdot y \cdot dA \end{aligned} \quad (4.1)$$

Donde A es el área de la sección. La definición formal (4.1) de los esfuerzos, lleva también implícito el convenio de signos para los esfuerzos, que se hereda del de las tensiones a través de las ecuaciones correspondientes. Por ejemplo si σ_{xx} , es predominantemente de tracción (por tanto positivo) en la sección, N será positivo. En ese caso, y si la normal exterior al plano de la sección es contraria a "x", N tendrá sentido opuesto a "x". Aun así será positivo, hecho que no debiera extrañar a la vista de la primera ecuación (4.1).



Como se apuntó en el Tema 2, los esfuerzos son unas magnitudes muy particulares. Insistimos de nuevo en que no son vectores estrictamente hablando, ya que no respetan su convenio de signos: pueden ser positivos tanto si tienen el sentido de un eje como el contrario, dependiendo del sentido de la normal en el plano de corte observado. Sin embargo, una vez aislada una porción de barra, y supuesto (o conocido) un sentido para los esfuerzos en la sección, es perfectamente posible hacerlos intervenir como vectores en las ecuaciones de equilibrio de la porción de barra. Dicha posibilidad es la que se ilustró en la figura 2.5.

Vamos a corroborar que los sentidos positivos para las componentes de esfuerzo que se desprenden de las definiciones (4.1) concuerdan con los que se adoptaron en las figuras 2.6 y 2.7. Supondremos sin pérdida de generalidad que la normal exterior tiene el sentido del eje x como en la figura 4.2. Seguiremos la metodología de observar en cada una de las ecuaciones (4.1) una aportación diferencial en la que "todo sea positivo", y el sentido que resulte de esa aportación será el sentido positivo del esfuerzo correspondiente (si hubiese algún signo menos en las ecuaciones, sería positivo el sentido contrario)



La metodología indicada es aplicable a cualquier fórmula científica en la que sólo una magnitud (que probablemente estamos definiendo) carece aún de convenio de signos: Se ha de observar un caso en el que las magnitudes que aparecen en la fórmula sean positivas, y el sentido que resulta para la magnitud que faltaba, será el positivo (ajustado con eventuales signos menos, si los hay).

La figura 4.2a muestra un elemento diferencial de área en la sección, con "y", "z", positivos (ya que estas variables aparecen en las fórmulas 4.1), y una tensión σ_{xx} también positiva. Los momentos respecto de los ejes "y", "z", que produce la fuerza diferencial debida a σ_{xx} sobre el diferencial de área, son aportaciones a las integrales correspondientes, y tienen los

sentidos indicados: dM_z en sentido contrario al eje z , y dM_y en el sentido del eje y . La aportación dN al esfuerzo axial tiene el sentido del eje x , como también se indica. Por tanto, éstos momentos flectores y esfuerzo axial son positivos según su definición (4.1).

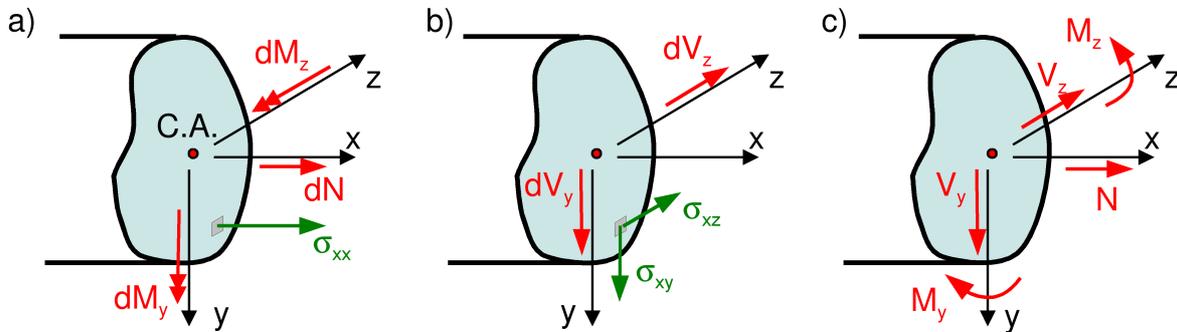


Figura 4.2: a) b) Aportaciones positivas de fuerzas diferenciales. c) Sentidos positivos que resultan para los esfuerzos

En la figura 4.6b se consideran las tensiones tangenciales σ_{xy} , σ_{xz} , en el diferencial de área. Sus aportaciones al esfuerzo cortante tienen los sentidos que se muestran: dV_y en el sentido del eje y , dV_z en el sentido del eje z . Nuevamente, éstos esfuerzos cortantes serán positivos según su definición (4.1). Nótese la coincidencia de todo ello con lo adoptado en la figura 2.6.

Por tanto, los sentidos indicados anteriormente, serán los sentidos positivos de los momentos flectores, el esfuerzo axial, y los esfuerzos cortantes, en una sección con sólido a la izquierda como la considerada. La figura 4.2c muestra, a modo de resumen, los sentidos positivos obtenidos. Esta vez, a diferencia de la fig. 2.6b, se han representado los momentos mediante flechas de giro sin un motivo particular, salvo ilustrar esta posibilidad, menos clara en representaciones tridimensionales pero frecuente en la literatura, y poner de manifiesto su equivalencia.

Es preciso enfatizar que para una sección de normal exterior opuesta al eje "x", es decir una sección con sólido a la derecha, sería necesario repetir los razonamientos anteriores para encontrar los sentidos positivos de los esfuerzos en tal sección. Pero en lugar de ello, podemos apreciar que en la nueva sección todas las componentes de tensión son positivas en sentidos contrarios a como lo eran en el caso anterior. Además, éste será el único cambio, ya que la normal \mathbf{n} , o su única componente n_x , no aparecen en las fórmulas (4.1) que hemos usado para definir los esfuerzos. La implicación inmediata, es que en tal sección, los esfuerzos serán positivos en sentidos contrarios a como lo eran en el caso anterior. Se remite al lector a la figura 2.7a como representación de las componentes de esfuerzo positivas en una sección con sólido a la derecha. Asimismo, se remite a la figura 2.7b en cuanto a la forma habitual de representar el sentido de los esfuerzos en ambas caras de un diferencial de barra, en vistas bidimensionales del problema.

Para finalizar, debiera quedar claro que los convenios de signos de los esfuerzos no son una complicación introducida por el modelo matemático, sino algo útil y pretendido, que por ejemplo hace que exista un sólo valor de un esfuerzo para cada valor de x .

Hipótesis adoptadas

En el estudio de la barra a tracción-flexión se parte de las premisas básicas asumidas en el estudio inicial de la Teoría de la Elasticidad, las cuales se expusieron en el tema 1. Se reproducen a continuación como recordatorio:

- Material homogéneo e isótropo
- Pequeños desplazamientos y cambios de forma
- Ausencia de efectos dinámicos
- Comportamiento lineal y elástico

Adicionalmente, las particularidades de la tipología del problema permiten realizar un conjunto de aproximaciones razonables que simplifican su estudio. Esta tipología típicamente consta de una barra recta esbelta, sustentada en unos pocos puntos, y sometida a cargas fundamentalmente transversales a la barra. Las aproximaciones enumeradas a continuación están respaldadas tanto por una amplia evidencia experimental como por soluciones “exactas” (analíticas) obtenidas de la Teoría de la Elasticidad. Existe asimismo una amplia evidencia de que estas aproximaciones serán tanto más acordes con el comportamiento real cuanto más esbelta sea la barra. Por ello se indicó al introducir la barra recta en el tema 2 que consideraríamos barras cuya relación de longitud partido por una dimensión tipo de la sección fuese al menos de 10:1. Las aproximaciones a las que nos estamos refiriendo, y que aquí presentaremos de una forma axiomática por brevedad, son las siguientes:

- Las componentes de tensión σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{yz} , son muy pequeñas en la barra. Es decir, despreciaremos estas componentes que no tienen subíndice x .
- La componente de tensión σ_{xx} , tiene valores máximos mucho mayores que cualquier otra componente de tensión, y tiene un efecto ampliamente dominante sobre la deformación de la barra.
- Las componentes de tensión σ_{xy} , σ_{xz} , aun teniendo valores máximos pequeños en comparación con σ_{xx} , pueden tener algún efecto en la aplicación de un criterio de plastificación, y en caso de duda deben ser consideradas a tales efectos. No obstante, se puede despreciar el efecto que estas componentes tangenciales de tensión en la sección tienen sobre la deformación de la barra.
- Las secciones inicialmente planas de la barra, permanecen planas tras la deformación.

Adicionalmente cabe recordar que estamos suponiendo nulo el momento torsor como hipótesis de trabajo en el estudio de la flexión.

El que las secciones permanezcan planas nos permite pensar en el movimiento de una sección como unos ciertos movimientos de los puntos en el plano de la sección, más un movimiento de sólido rígido de la misma. La figura 4.3 muestra solamente éste movimiento de sólido rígido, descompuesto en la suma de una traslación (4.3b) que lleva el centro de áreas

a su posición final, más una rotación Φ (figura 4.3c) alrededor de una cierta recta que pasa por el centro de áreas.

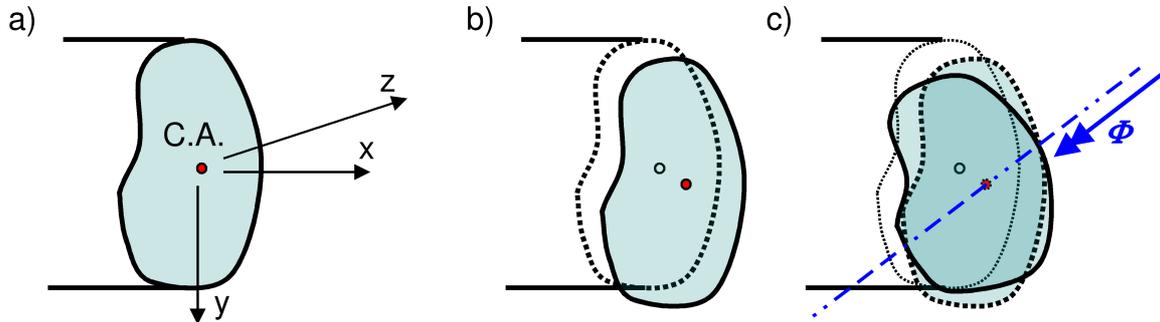


Figura 4.3: a) Posición inicial de la sección b) Traslación c) Rotación

A su vez, es posible descomponer la rotación Φ en suma de una rotación Φ_y alrededor del eje y, más una rotación Φ_z alrededor del eje z, como indica la figura 4.4.

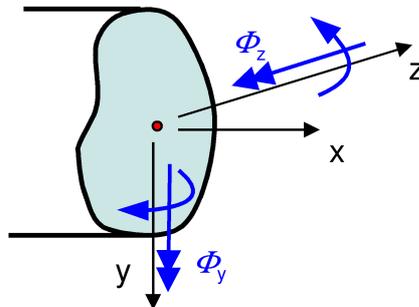


Figura 4.4: Descomposición del giro de la sección en dos componentes (se dibujan positivas)

En la teoría de pequeñas deformaciones que asumimos, el que las secciones permanezcan planas no está influido por las componentes u_y , u_z , del desplazamiento de los puntos, ya que estas componentes mantienen al punto en el plano de la sección. Es la componente u_x la que saca al punto del plano de la sección, y por tanto la responsable de que la misma siga siendo plana o no. Por tanto esta componente u_x debe ajustarse a los movimientos horizontales implicados en el movimiento de sólido rígido descrito anteriormente. Para ello, la componente de desplazamiento u_x debe describir la ecuación de un plano en variables "y", "z", es decir, tendrá la forma:

$$u_x(x, y, z) = u_{ox}(x) + \Phi_z(x) \cdot y + \Phi_y(x) \cdot z \quad (4.2)$$

en donde u_{ox} es el movimiento horizontal del centro de áreas de la sección, que es único para la sección de coordenada x, y por tanto depende sólo de esta coordenada. Este sumando corresponde a la traslación que lleva el centro de áreas a su posición final. Los giros Φ_y , Φ_z , de la sección respecto de los ejes y, z respectivamente, son una característica de la sección, y por idéntico motivo dependen solamente de x. El término " $\Phi_z(x) \cdot y$ " representa los desplazamientos horizontales de los puntos debidos al giro Φ_z de la sección. Análogamente, el término " $\Phi_y(x) \cdot z$ " representa los desplazamientos horizontales de los puntos debidos al giro Φ_y .



Recuerde que descomponer un giro en suma ordinaria de otros, como hemos hecho, sólo ofrece buena aproximación cuando los giros son pequeños. Los giros finitos aplicados a un sólido no son conmutativos.

Nos preguntamos ahora por el convenio de de signos aplicable a los giros de la sección. Nuevamente estamos ante la situación de haber escrito ya una ecuación, la (4.2), y los convenios de signos deben ser coherentes con ella. Por tanto consideremos (por ejemplo contemplando la figura 4.4) un punto de y, z , positivos en la sección, y pensemos que experimenta un u_x positivo. Aislaremos un sólo término del miembro derecho de (4.2), digamos " $\Phi_z(x) \cdot y$ " asumiendo circunstancialmente que la sección sólo puede girar respecto de z . El sentido de giro en z implicado por el movimiento u_x positivo será el sentido positivo de Φ_z , ya que el término aparece con signo positivo en (4.2). Puede apreciarse fácilmente que dicho sentido es precisamente el dibujado en la figura 4.4, y que por tanto Φ_z es positivo cuando tiene sentido opuesto al eje z . Análogamente, pensando que sólo existiese giro en y , el sentido del mismo implicado por un u_x positivo en un punto de y, z , positivos, nos da el sentido positivo de Φ_y . En este caso, se trata del sentido del eje y , que nuevamente es el dibujado en la figura 4.4. En resumen, dicha figura muestra los sentidos positivos de los giros de la sección.



Nótese que el desplazamiento \mathbf{u} de los puntos del sólido es un campo vectorial. El valor en un punto es un vector, sin más dependencias de planos de corte, etc. Ello hace por ejemplo innecesarias otras consideraciones acerca de la sección con sólido a la derecha, etc, que en este caso conducirían a idénticos resultados.

Para finalizar, realizaremos una breve reflexión acerca de la hipótesis relativa a despreciar el efecto sobre la deformación de la barra de las componentes tangenciales de tensión, y que se conoce como hipótesis de Navier-Bernoulli.

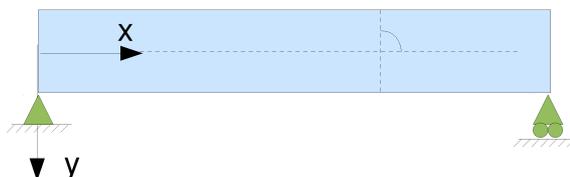


Figura 4.5: Ángulo que permanecerá sensiblemente recto tras la deformación

Como sabemos, la única componente de deformación asociada a σ_{xy} es ϵ_{xy} , que a su vez representa (la mitad de) el decremento del ángulo inicialmente recto que formaban dos segmentos diferenciales que pasan por el punto, y que eran paralelos a x, y , antes de la deformación. Por tanto, la hipótesis de Navier-Bernoulli equivale a asumir que cualquier ángulo recto de lados inicialmente paralelos a x, y , seguirá siendo recto tras la deformación. En particular, la línea de centros de área de las secciones (directriz de la barra) permanecerá perpendicular a las secciones tras la deformación (ver figura 4.5), característica de la que nos serviremos más adelante en el cálculo de desplazamientos.

Tensiones Normales en la Sección

Los esfuerzos, tal como los hemos definido, presentan la ventaja de ser magnitudes de variación monodimensional, ya que dependen de una única coordenada (x). Esto hace que sean cómodas de manejar en un modelo matemático. Sin embargo, sabemos que la plastificación o no del material es una cuestión de punto. La descripción basada en las resultantes de las tensiones en la sección que nos ofrecen los esfuerzos, es demasiado grosera para determinar la posible plastificación o no de cada uno de los infinitos puntos de la sección. La plastificación ocurrirá (o no) en cada punto de manera individualizada, según el nivel de tensiones particular que experimente ese punto.

Por tanto, hemos de volver sobre el concepto original de tensión para predecir si un punto concreto plastificará o no. Desde este punto de vista, podemos pensar en los esfuerzos como magnitudes intermedias, que son relativamente fáciles de manejar y calcular, y que nos sirven de ayuda en el proceso del cálculo de tensiones. En este epígrafe se obtendrá la distribución de tensiones σ_{xx} en la sección (usualmente las más relevantes), que se corresponden con unos esfuerzos dados.



El proceso de cálculo en un caso práctico habitual será encontrar primero los esfuerzos mediante razonamientos de equilibrio (como hicimos en el tema 2), y después calcular las tensiones en la sección asociadas a esos esfuerzos.

Sabemos por la ecuación (3.2) que:

$$\varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x$$

Por otra parte, (4.2) indica que:

$$u_x(x, y, z) = u_{ox}(x) + \Phi_z(x) \cdot y + \Phi_y(x) \cdot z$$

Por lo tanto, debe ser:

$$\Rightarrow \varepsilon_{xx} = u_{x,x} = u'_{ox}(x) + \phi'_z(x) \cdot y + \phi'_y(x) \cdot z$$

Donde se ha denotado con prima (') la derivada respecto de x cuando la magnitud sólo depende de x .

Por otra parte, la ley de comportamiento ofrece $\varepsilon_{xx} = (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) / E$, que siendo σ_{zz} , σ_{yy} , despreciables se reduce a $\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} / E$. Por tanto:

$$\sigma_{xx} \approx E \cdot \varepsilon_{xx} = E \left[u'_{ox}(x) + \phi'_z(x) \cdot y + \phi'_y(x) \cdot z \right] \quad (4.3)$$

Nos gustaría disponer de la ecuación anterior en función de los esfuerzos. Para ello llevamos esta expresión de σ_{xx} a las definiciones (4.1) de los esfuerzos, con lo que resulta:

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA = E u'_{ox} \int_A dA + E \phi'_z \int_A y dA + E \phi'_y \int_A z dA$$

$$M_z = \int_A \sigma_{xx} y dA = E u'_{ox} \int_A y dA + E \phi'_z \int_A y^2 dA + E \phi'_y \int_A yz dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dA = E u'_{ox} \int_A z dA + E \phi'_z \int_A yz dA + E \phi'_y \int_A z^2 dA$$

En donde se han sacado fuera de las integrales (que afectan a las variables y, z , que describen el plano de la sección) las magnitudes que sólo dependen de x . En las ecuaciones anteriores, las integrales de " $y \cdot dA$ ", y de " $z \cdot dA$ " extendidas a área A de la sección, se anulan por virtud de haber tomado el origen de ejes en el centro de áreas de la sección (nótese que esas integrales serían las coordenadas y, z , respectivamente, del centro de áreas, multiplicadas por A).

Por otra parte, la integral de $y^2 \cdot dA$ es el momento de inercia de la sección respecto del eje " z ", que denotamos por I_z . Análogamente, la integral de $z^2 \cdot dA$ es I_y , y la integral de $yz \cdot dA$ es el producto de inercia I_{yz} . Por tanto las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$N = EA u'_{ox} \quad (4.4a)$$

$$M_z = E [\phi'_z I_z + \phi'_y I_{yz}] \quad (4.4b)$$

$$M_y = E [\phi'_z I_{yz} + \phi'_y I_y] \quad (4.4c)$$

Perseguiamos obtener u'_{ox} , ϕ'_z , ϕ'_y , en función de los esfuerzos, para sustituirlas en (4.3). Con u'_{ox} el trabajo está hecho. Pero las derivadas de los giros deben ser aún despejadas de las ecuaciones (4.4b) y (4.4c) anteriores. Realizamos lo anterior considerando estas dos ecuaciones como un sistema en el que las incógnitas sean esas derivadas de los giros:

$$\begin{bmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \phi'_z \\ E \phi'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_z \\ M_y \end{bmatrix} \quad \text{de donde:}$$

$$E \phi'_z = \frac{\begin{vmatrix} M_z & I_{yz} \\ M_y & I_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{vmatrix}} = \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} ; \quad E \phi'_y = \frac{\begin{vmatrix} I_z & M_z \\ I_{yz} & M_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{vmatrix}} = \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \quad (4.5)$$

Llevando la primera de (4.4), y las (4.5) anteriores a (4.3), tenemos finalmente:

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M_z(x) \cdot I_y - M_y(x) \cdot I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y(x) \cdot I_z - M_z(x) \cdot I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \cdot z \quad (4.6)$$

Que es la expresión buscada de las tensiones normales axiales en función de los esfuerzos. Es del mayor interés apreciar que para una sección particular, $x = \text{cte}$, la evolución de las tensiones σ_{xx} es la ecuación de un plano en variables $y-z$. Repasando el desarrollo, apreciamos que el hecho de asumir que la sección permanece plana, ecuación (4.2), está en el origen de este hecho, ya que la ecuación (4.3) hereda de (4.2) la forma de plano debido a que básicamente es ésta derivada respecto de x , lo que afecta a los coeficientes de la ecuación del plano, pero no a los términos en " y ", " z ", que le dan el carácter de plano.

El hecho de que, para cualquier forma de la sección, las tensiones σ_{xx} describan la ecuación de un plano es un resultado muy interesante. Para visualizar este plano, podemos imaginar representada σ_{xx} en la tercera dimensión (dirección de x).

Llamamos "Línea Neutra" al lugar geométrico de puntos en los que la expresión (4.6) de las tensiones σ_{xx} se anula. Está claro que se tratará de una recta en el plano y-z de la sección, ya que es el corte de dos planos (el de la evolución de σ_{xx} con el propio plano de la sección). Su ecuación se puede obtener sin más que igualar a cero (4.6). La línea neutra permite por ejemplo dar una respuesta intuitiva a la importante pregunta de qué punto tendrá el mayor valor de σ_{xx} en la sección. La respuesta es, evidentemente "aquel punto que esté más alejado de la línea neutra". La figura 4.6 muestra un ejemplo de ello.

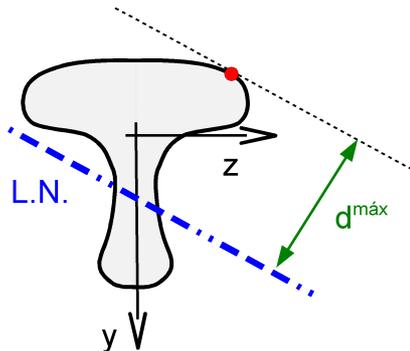


Figura 4.6: Línea neutra y punto de mayor tensión σ_{xx}

De hecho, la línea neutra indicada como ejemplo en la figura 4.6 divide a la sección en una zona de compresiones y otra de tracciones, habiéndose indicado el punto que tendrá mayor valor absoluto de tensión. En ocasiones interesa el punto de mayor tensión en cada zona, el cual se obtiene mediante un razonamiento análogo. También puede ocurrir que la línea neutra no pase por la sección, en cuyo caso toda ella estará sometida a compresiones, o bien a tracciones. Esta situación se da en casos en que el esfuerzo axial N es dominante, estando acompañado de momentos flectores pequeños. Como caso opuesto, si el esfuerzo axial es nulo, la línea neutra pasará siempre por el centro de áreas, y por tanto habrá con seguridad una zona de compresiones y otra de tracciones.

Existen algunos casos particulares que se dan frecuentemente en la práctica, y que se detallan a continuación.

Es por ejemplo frecuente que los ejes y,z, sean ejes principales de inercia de la sección. Esto ocurre típicamente si alguno de los ejes "y", o "z", es un eje de simetría. La misma figura 4.6 caería por cierto en esta categoría. Esto implica que el producto de inercia será nulo. Con esto, las ecuaciones (4.4) se simplifican a:

$$N = EA u'_{0x} \quad (4.7a)$$

$$M_z = EI_z \phi'_z \quad (4.7b)$$

$$M_y = EI_y \phi'_y \quad (4.7c)$$

Y la (4.6) queda:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (4.8)$$

Es asimismo frecuente en los casos prácticos más comunes que la componente de momento flector M_y sea nula. Adicionalmente, si la barra sólo tiene cargas transversales a su directriz, el esfuerzo axial N será nulo. Para este caso tenemos:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad (4.9)$$

Considerando el caso más simple de la ecuación (4.9), las tensiones normales están descritas por una simple proporcionalidad con la coordenada “y”, como representa la figura 4.7. Por supuesto, esta proporcionalidad con “y” es aún la ecuación de un plano.

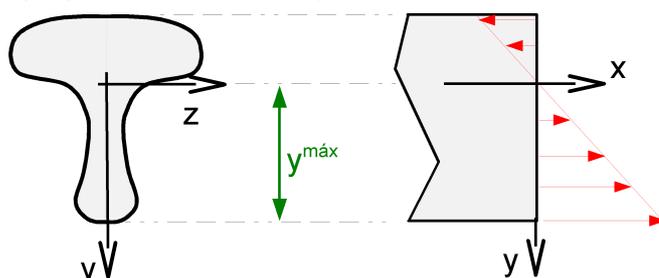


Figura 4.7: Tensiones normales en la sección cuando sólo hay M_z .

En este caso particular, la línea neutra coincide con el eje “z”, y el punto de mayor tensión será el superior o el inferior de la sección. En el caso ilustrado en la figura, sería el inferior, y el valor de esa tensión máxima se obtendría sustituyendo y^{\max} en (4.9). Esto es:

$$\sigma_{xx}^{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y^{\max} = \frac{M_z}{I_z/y^{\max}} = \frac{M_z}{W_z} \quad \text{siendo: } W_z = \frac{I_z}{y^{\max}} \quad (4.10)$$

La magnitud recién definida, W_z , recibe el nombre de Módulo Resistente. Tiene dimensiones de longitud al cubo, y su valor puede encontrarse en tablas para los distintos perfiles comerciales. Básicamente, nos ofrece poder calcular con una sola operación el valor de la tensión normal máxima, siempre que el problema se ajuste a la tipología, por otra parte común, considerada en la ecuación (4.9).



En este caso simple se aprecia que tensiones pequeñas (deseable) se corresponden con grandes momentos de inercia, y con valores pequeños de y^{\max} . Ambos efectos son contrapuestos, ya que la propia “y” figura en el integrando de I_z . Razonamos que será dominante el efecto de I_z , ya que contiene “y” al cuadrado. En definitiva, nos interesan momentos de inercia grandes.

Núcleo Central

Como apuntamos en el tema 2, por “flexión compuesta” solemos entender el modo de trabajo de la barra en el que existe principalmente compresión, acompañada de un momento flector que suele ser indeseado pero que no se ha podido evitar en el diseño. La denominación se aplica fundamentalmente al caso de pilares. Es frecuente que los pilares y otros ele-

mentos asociados al soporte de las estructuras estén realizados en materiales de muy baja resistencia a tracción, como el hormigón o la fábrica de ladrillo, o que no la resisten en absoluto, como la sillería, o el contacto de los elementos de cimentación que apoyan en el terreno. En estos casos es importante asegurar que no se producirán tracciones en nuestro diseño (o en todo caso conocer su presencia para obrar en consecuencia).

El problema más típico de flexión compuesta suele plantearse como una carga que actúa axialmente con una cierta excentricidad “e” respecto del centro de áreas de la sección del pilar, de la manera indicada en la figura 4.8a. De manera equivalente puede pensarse que la carga actúa centrada, y que se aplica también el momento correspondiente (figura 4.8b). Los cálculos que vamos a realizar suponen que el desplazamiento de la cabeza del pilar es pequeño en comparación con “e”, lo que típicamente requiere que la barra sea poco esbelta, aunque ello entre en conflicto con la exactitud que quepa esperar para el modelo de flexión.



Si la barra es esbelta, el momento flector debido a la excentricidad produce una deformación en la barra que a su vez tiene (*grosso modo*) el efecto de una excentricidad adicional. Este acoplamiento de efectos puede dar lugar a comportamientos inestables o en todo caso no lineales, cuyo estudio no es objeto de este curso.

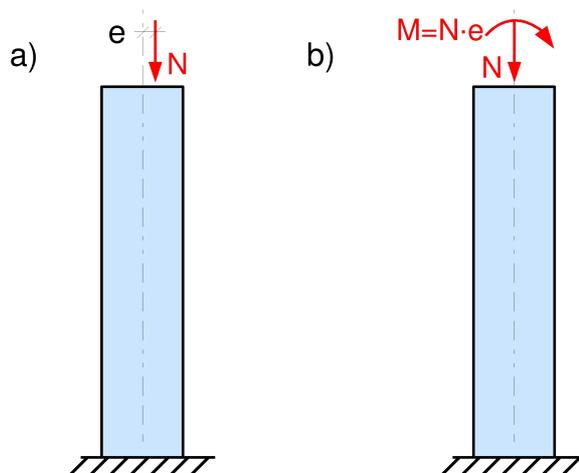


Figura 4.8: Problema más típico de la flexión compuesta.

Si la excentricidad es nula, la barra trabajará uniformemente a compresión, y podemos pensar que la línea neutra estuviera en el infinito. Si la excentricidad es pequeña, la línea neutra estará alejada de la sección. Existirá un valor (mayor que el anterior) de la excentricidad para el que la línea neutra toque a la sección, lo que constituye la situación límite que consideramos aceptable, ya que si la línea neutra cortase a la sección, aparecerían tracciones en una parte de la misma.

Teniendo en cuenta lo anterior, resulta intuitivo que existirá una zona de la sección en torno al centro de áreas en la que poder aplicar la fuerza sin que se produzcan tracciones. Esta zona recibe el nombre de núcleo central, concepto que estudiamos a continuación. Empezaremos obteniendo algunas propiedades útiles de la línea neutra.

Supongamos una sección de forma arbitraria de una barra poco esbelta sometida a una fuerza de compresión no centrada de valor N . Si los ejes “ y ”, “ z ”, son principales de inercia, obtenemos la ecuación de la línea neutra igualando (4.8) a cero:

$$\frac{-N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z = 0 \quad (4.11)$$

Donde en este caso los momentos flectores están producidos por la excentricidad de N . Consideremos que en la sección de la figura 4.9, la carga N estuviese aplicada en el punto P . Tendríamos $M_z = -N \cdot y_P$, $M_y = 0$. Sustituyendo estos valores en (4.11), simplificando N , y llamando $i_z^2 = I_z/A$ (es el cuadrado del “radio de giro” de la sección respecto a “ z ”), obtenemos que $y_P \cdot y = -i_z^2$, que es la ecuación de la línea neutra para este caso. Se trata de una línea paralela al eje “ z ”, que corta al eje “ y ” en el punto P' de coordenada $y_{P'} = -i_z^2/y_P$, y es la línea indicada como $LN(P)$ en la figura 4.9.

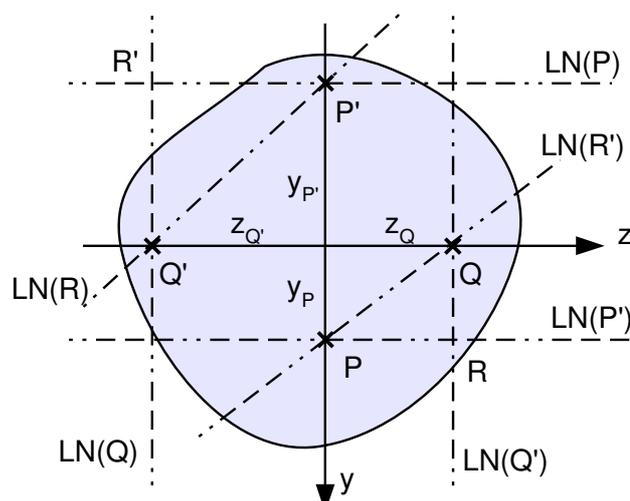


Figura 4.9: Algunas propiedades de reciprocidad de la línea neutra.

Los puntos P y P' cumplen por tanto la relación

$$y_P \cdot y_{P'} = -i_z^2 \quad (4.12)$$

lo que hace evidente una propiedad de reciprocidad de la línea neutra: si la fuerza N estuviera aplicada en P' , la línea neutra pasaría por P . Sería por tanto la línea indicada como $LN(P')$ en la figura.



Esta propiedad será útil para delimitar hasta dónde llega el núcleo central en la dirección “ y ”: si situamos P' en el borde de la sección, el punto P nos marcará ese límite.

Análogamente, si aplicamos la fuerza N en el punto Q , la línea neutra será paralela al eje “ y ”, y pasará por el punto Q' de modo que se satisfaga $z_Q \cdot z_{Q'} = -i_y^2$. Adicionalmente, y aunque posiblemente vaya a ser menos útil en la práctica, si consideramos la fuerza N aplicada en el punto R de coordenadas y_P , z_Q , la línea neutra sería $-(y_P y / i_z^2) - (z_Q z / i_y^2) = 1$. Esta

línea pasa por los puntos P' y Q' , y es la indicada como $LN(R)$ en la figura 4.9. Análogamente, si la carga estuviese aplicada en el punto R' de coordenadas $y_{P'}$, $z_{Q'}$, la línea neutra pasaría por los puntos P y Q , y sería la indicada como $LN(R')$ en la figura.

Vamos a obtener otra propiedad útil de la línea neutra en estos casos de flexión compuesta. Consideremos ahora que la carga N está aplicada en un punto como el A , que está en la línea que une los puntos P y Q anteriores (de la figura 4.9). Se representa separadamente en la figura 4.10 por claridad de los dibujos. Razonamos del siguiente modo:

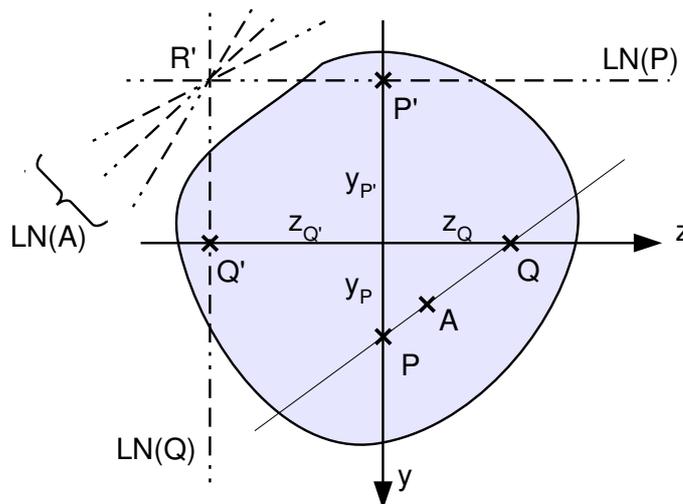


Figura 4.10: Línea neutra para carga en A , entre P y Q .

Sustituimos la carga en A por un sistema estáticamente equivalente de dos fuerzas paralelas que actúen en P y Q (lo que siempre será posible). Pensamos en la superposición de dos casos de carga: uno será la fuerza en P , y el otro la fuerza en Q . Es claro que el punto R' debe tener tensión nula, porque pertenece a la línea neutra de ambos casos de carga, y al superponerlos se sumarían dos valores nulos. Por tanto, el punto R' siempre pertenecerá a la línea neutra. Según el punto A de aplicación de la carga se moviese desde P hasta Q , la línea neutra cambiaría paulatinamente de ser $LN(P)$ a ser $LN(Q)$, siempre pasando por R' .



Esta propiedad será útil cuando la sección tenga una esquina a 90° en un punto como R' : habiendo calculado los puntos P y Q , sabremos que la recta que los une delimita el núcleo central en esa zona.

Como nota final, cabe apuntar que existe la posibilidad de que además de axil y flector, haya una fuerza horizontal (esfuerzo cortante) en la cabeza del pilar.

La diferencia fundamental entre esta situación y la estudiada arriba es que, en el caso de sólo axil y flector todas las secciones de la barra trabajan de igual manera, mientras que en presencia de cortantes, no es así. En este último caso el momento flector variará a lo largo del pilar, y la sección más propensa a sufrir tracciones será la que mayor momento flector tenga. En ausencia de cargas intermedias en el pilar, esta sección siempre será la superior o la inferior. Es por tanto en esta sección de mayor momento flector donde debemos comprobar la posible presencia de tracciones. Si deseamos utilizar el concepto de núcleo cen-

tral, podemos reducir el momento flector y el esfuerzo axial de la sección en cuestión a una sola fuerza (el axial con la excentricidad que corresponda), y comprobar si la resultante cae dentro del núcleo central, etc.

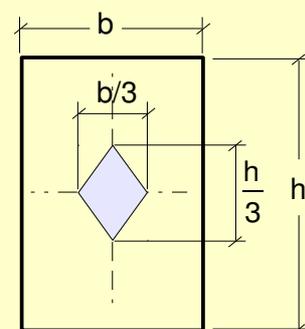
Las tensiones cortantes que existan en esa sección evidentemente no influirán sobre la tensión normal en el plano de la sección. Es también improbable que las mismas influyan significativamente en que aparezcan tracciones en los puntos de la sección según otros planos. No obstante, pudiera ocurrir que algún punto que no llegue a tener tracción en el plano de la sección (pero casi), la tenga en otro plano, ya que en general el plano de la sección no será principal de tensión en ese punto (puesto que tendrá tensión tangencial). Se trata no obstante más de una posibilidad teórica que de un efecto preocupante en la práctica.

EJERCICIOS PROPUESTOS _____

- Calcule el mayor momento flector que puede resistir una sección de una barra cuyo perfil es IPN 220, de acero S275, sin que plastifique ninguno de sus puntos. Realice el cálculo para momentos según cada eje principal de inercia.

- Compruebe que el núcleo central de una sección rectangular maciza es el indicado (puede merecer la pena recordar el resultado, ya que es el caso de interés más común).

- Calcule el núcleo central de la sección HEB 300 (obtenga de las tablas los datos necesarios).



Aplicación a la comprobación de cimentaciones superficiales

Aunque el estudio de la cimentación como tal cae fuera del ámbito de este curso, téngase noticia de que el elemento típico de las cimentaciones superficiales se llama “zapata”. Consiste básicamente en un bloque de hormigón convenientemente armado, de una superficie en planta mucho mayor que la del pilar que soporta, con el fin de repartir la compresión del pilar en un área más grande del terreno. De esa forma la presión que recibe el terreno, que es el elemento más débil, se reduce a niveles aceptables para el mismo. Las dimensiones de las zapatas son variadas, dependiendo de las condiciones a satisfacer, pero por ofrecer una idea cualitativa, una zapata cuadrada posible podría tener en planta dimensiones de unos 2m de lado, y del orden de 65cm de profundidad. Las zapatas pueden no ser cuadradas, siendo frecuente la forma rectangular.

Existen algunas variantes en estas cimentaciones superficiales. Por ejemplo, una zapata puede recibir dos pilares, en cuyo caso se llama “zapata combinada”. Se suele aplicar también esa denominación cuando la zapata recibe tres (o incluso más) pilares, si no están alineados, aunque en ese caso puede llamarse también “losa de cimentación”. No obstante, la denominación de “losa” suele reservarse para amplios elementos de cimentación que reci-

ben muchos (o todos) los pilares de la edificación. Estos elementos pueden tener formas más variadas que una zapata aislada.

Es frecuente considerar como hipótesis que la presión entre un elemento de cimentación superficial lo bastante rígido y el terreno sigue una distribución lineal. Esto hace que podamos aplicar la ecuación (4.6), o bien la (4.8), haciendo uso de la analogía evidente entre la distribución lineal de tensiones bajo la zapata y la distribución lineal de tensiones en la sección de una barra a tracción-flexión (compresión-flexión en este caso).

A efectos de plantear la analogía, podemos pensar en el elemento de cimentación como un pilar extremadamente corto, que en su superficie superior recibe varias fuerzas y momentos concentrados (transmitidos por los pilares auténticos), y que en su superficie inferior tiene una distribución lineal de tensión, a determinar de modo que la zapata esté en equilibrio. Una configuración como la indicada se muestra en la figura 4.11 (que es deliberadamente atípica para ilustrar la generalidad del procedimiento).

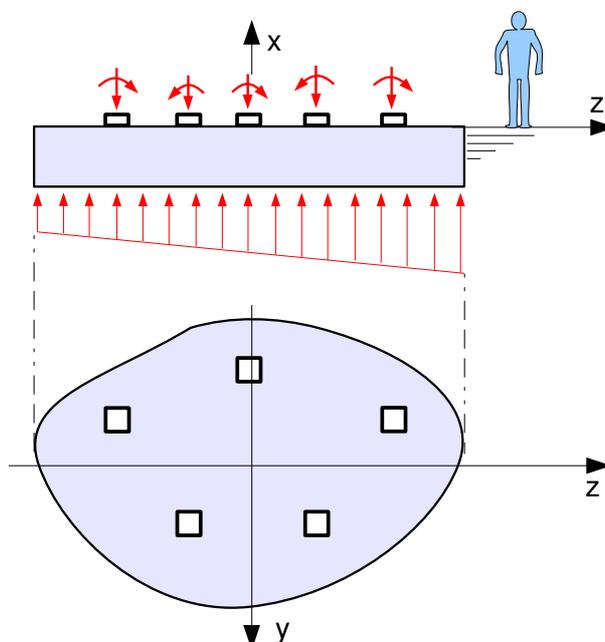


Figura 4.11: Distribución lineal de presión bajo una zapata combinada, o losa de cimentación.

Apreciamos que el trabajo de equilibrar la zapata con una distribución lineal de compresiones ya está hecho en las ecuaciones (4.6) o bien (4.8). Para usar alguna de estas fórmulas sólo tenemos que reducir al centro de áreas de la zapata el sistema de fuerzas y momentos que transmiten los pilares en la parte superior, junto con el peso propio de la zapata. Ésta reducción contendrá los valores de N , M_z , M_y , que debemos emplear en dichas fórmulas. Los momentos de inercia I_z , I_y , son los del área en planta de la zapata, como si ésta fuese la sección de una barra. Obtendremos la distribución de tensiones σ_{xx} bajo la zapata, de la que podremos calcular la línea neutra y demás conceptos asociados.

En cuanto al uso de los resultados, interesará comprobar que la línea neutra no corte a la sección, y que el valor máximo de la presión sea admisible para el terreno.



Nota: aunque no es lo usual, en ciertos casos un diseño puede considerarse admisible aunque la línea neutra anterior corte a la sección. En este caso, se deshecha el análisis realizado (porque no se transmiten tracciones a través del contacto con el terreno), y se sustituye por otro en el que la presión del suelo tiene forma triangular, y no abarca toda la zapata (parte de ella no comprime al terreno). También pueden aplicarse modelos incluso más simplificados.

Relación entre Giros y Desplazamientos transversales

En las condiciones usuales de trabajo, las componentes de desplazamiento de mayor valor absoluto son las transversales a la viga, u_y , u_z . Dado que la sección de la barra es de pequeñas dimensiones comparada con su longitud, el desplazamiento transversal de cualquier punto de la sección podría servir, a efectos prácticos, para caracterizar el desplazamiento transversal de toda la sección. Elegiremos el centro de áreas de la sección como punto representativo del desplazamiento transversal de la misma. Denotaremos como u_{oy} , u_{oz} , dichas componentes de desplazamiento.

Es frecuente en la literatura denominar a la línea que forman los centros de áreas de las secciones “línea media”. A la geometría que adopta esta línea tras la deformación se le suele identificar con “la deformada” de la barra, pequeño abuso de lenguaje que está justificado en cuanto que la deformación de esa línea representa suficientemente la deformación de toda la barra en el modelo matemático que estamos manejando.

Aceptando la hipótesis de Navier-Bernoulli, el ángulo formado por dos segmentos diferenciales, originalmente orientados según los ejes “x” e “y”, permanecerá recto tras la deformación. Como muestra la figura 4.12, el segmento que originalmente tenía la orientación del eje x, tiene la orientación de la tangente a la línea media tras la deformación. El segmento que originalmente tenía la orientación del eje y, se mueve junto con la sección a la que pertenecía. Por lo tanto, para que el ángulo se mantenga recto, la sección debe girar un ángulo igual a la pendiente de la línea media.

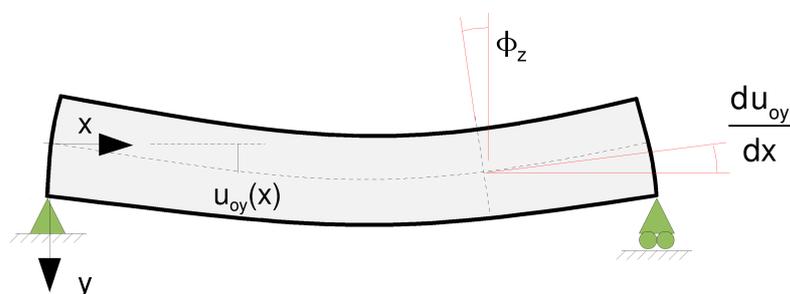


Figura 4.12: Giro de la sección y pendiente de la línea media. Según la hipótesis de Navier-Bernoulli serán de igual valor absoluto.

En la sección indicada en la figura 4.12, el giro ϕ_z de la misma es positivo, según su convenio de signos. La pendiente de la línea neutra está descrita matemáticamente por la derivada de la función $u_{oy}(x)$, siendo negativa en ese punto (recuérdese que pendiente negativa

es hacia arriba, porque u_{oy} es positiva en el sentido del eje y , es decir hacia abajo). Puede comprobarse en cualquier otro punto, o para cualquier otra deformada que el giro de la sección siempre será de signo contrario a la pendiente de la línea media. Por tanto:

$$u'_{oy} = -\phi_z \quad (4.13)$$

Análogamente, observando el problema en el plano xz se llega fácilmente a la conclusión de que las componentes de giro y desplazamiento apreciables en dicho plano (las que usaremos menos en este curso), cumplirán:

$$u'_{oz} = -\phi_y \quad (4.14)$$

Como se indicó, todas las normativas tanto vigentes como derogadas, así como el buen juicio, imponen límites admisibles para los desplazamientos. Los límites suelen expresarse como un valor límite admisible del desplazamiento transversal máximo en la barra dividido por la longitud de la misma. Orientativamente, pueden considerarse como adecuados los siguientes límites máximos:

- Elementos que no afecten a la comodidad de las personas, y para los que no haya requisitos que aconsejen un límite más exigente (soportes de anuncios publicitarios, semáforos, farolas, grúas y dispositivos similares): 1/200
- Elementos que afecten a la comodidad de las personas, pero que no soporten tabiques o pavimentos rígidos (pasarelas, escaleras, vigas de edificación que no hayan de soportar tabiques directamente sobre ellas, etc): 1/300
- Elementos que soportan tabiques, pavimentos rígidos, u otros elementos susceptibles de sufrir agrietamiento: 1/400, o incluso 1/500



En la terminología al uso es frecuente denominar “flecha” al desplazamiento transversal máximo, y “luz” a la distancia entre apoyos (puntos fijos) en la barra. El parámetro a limitar es, según esta terminología, la relación flecha / luz. Téngase noticia que la norma CTE usa una definición ligeramente diferente del parámetro flecha / luz. En concreto, la define como la diferencia de flecha entre dos puntos partido por el doble de la distancia entre ellos.

Trazado de Diagramas de Giros y Desplazamientos

En el Tema 2 (apartado “Esfuerzos en barras rectas”), aprendimos a trazar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores de la barra. Hemos obtenido que, para el caso de ejes principales de inercia, los giros de las secciones y los desplazamientos transversales están relacionados mediante ecuaciones similares a las de los esfuerzos. En concreto:

- La derivada de $EI_z \cdot \phi_z(x)$ es $M_z(x)$ (de la ec. (4.7b))
- La derivada de $EI_z \cdot u_y(x)$ es $-EI_z \cdot \phi_z(x)$ (de la ec. (4.13))

Lo anterior permite plantear el trazado secuencial de los diagramas p_y , V_y , M_z , $EI_z \cdot \phi_z$, $EI_z \cdot u_y$, en el cual cada nuevo trazado es la integral de la función trazada anteriormente, salvo una posible cuestión de signo. De esta forma, aplicaremos una metodología de trazado común a todas las gráficas, aprovechando así la experiencia ya adquirida en el trazado de los diagramas de esfuerzos. Es indispensable tener presente el conjunto de ecuaciones diferenciales que gobiernan el trazado, incluidos los eventuales signos negativos, así como el convenio de signos que hemos adoptado para cada magnitud. Todo ello se presenta a modo de resumen en las ecuaciones (4.15) y en la figura 4.13 siguientes.

$$\begin{aligned} V_y' &= -p_y \\ M_z' &= V_y \\ EI_z \phi_z' &= M_z \\ EI_z u_y' &= -EI_z \phi_z \end{aligned} \quad (4.15)$$

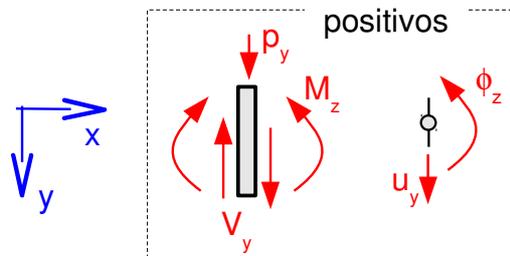


Figura 4.13: Resumen para el trazado de diagramas: Ejes adoptados y sentidos positivos de las magnitudes

Por lo demás, serán de aplicación al caso de los giros y desplazamientos todas las observaciones realizadas en el tema 2 acerca del trazado a mano alzada de los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores, así como las observaciones respecto de la acotación de los diagramas (mediante estimación exacta u aproximada de áreas).

Puede existir también esfuerzo axial. Su trazado obedece a la ecuación (2.3), es decir $N' = -p_x$, y está desacoplado de la secuencia de magnitudes p_y , V_y , M_z , ϕ_z , u_y , anterior. El desplazamiento u_{ox} en dirección x del centro de áreas de las secciones está asociado únicamente a este esfuerzo a través de (4.7a), es decir $N = EAu'_{ox}$, y por tanto está también desacoplado del resto de magnitudes. Cuando no es nulo, el diagrama de esfuerzo axial suele representarse en primer lugar (antes que el de cortantes). Los desplazamientos u_{ox} debidos al esfuerzo axial suelen ser muy pequeños comparados con los desplazamientos u_{oy} debidos al momento flector. No suele ser de interés dibujar el diagrama correspondiente a u_{ox} , e incluso es habitual despreciar este desplazamiento en muchas aplicaciones prácticas.

Trazado a mano alzada con estimaciones

Seguidamente ilustraremos el proceso de trazado de diagramas de giros y desplazamientos, continuando con el mismo ejemplo que se usó en la figura 2.9.



Se recomienda que, hasta que la suficiente práctica lo haga innecesario, se tenga a la vista una reproducción de las ecuaciones (4.15) y de la figura 4.18 al realizar los trazados de diagramas.

El trazado del diagrama de giros de las secciones aparece parcialmente en la figura 4.14, que es continuación de la figura 2.9. En este caso no conocemos el valor del giro en $x=0$, ni en ninguna otra sección (el problema es simétrico, lo que implica que la sección $x=L/2$ no girará, pero vamos a asumir que no lo hemos apreciado). A pesar de ello, podemos obtener la forma del diagrama, a falta de saber dónde colocar la línea horizontal de giro nulo. Empezamos trazando con pendiente horizontal, ya que en $x=0$ es $M_z=0$. La gráfica debe continuar con pendiente positiva y cada vez mayor, ya que así es la evolución de M_z . Por tanto trazamos con inclinación “hacia abajo”, y cada vez más “hacia abajo”, hasta llegar a $x=L/2$. Hemos obtenido la convexidad de la gráfica en esa zona muy fácilmente. A partir de $x=L/2$, la pendiente sigue siendo positiva, pero ahora cada vez menos, hasta que termina por ser cero en $x=L$ (nuevamente vemos esto en la gráfica previa de momentos). Por tanto seguimos trazando con pendiente “hacia abajo”, pero cada vez más próxima a la horizontal, hasta que acaba por ser horizontal en el extremo derecho.

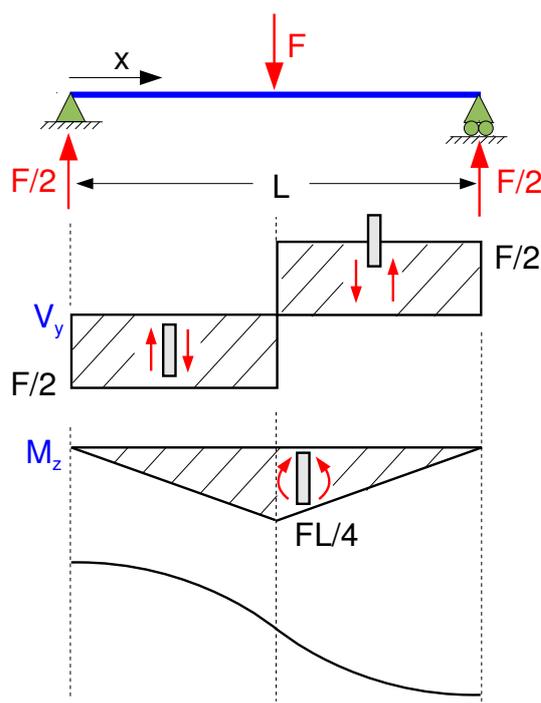


Figura 4.14: Diagrama de giros parcialmente dibujado.

Este problema tiene todas sus condiciones de contorno dadas en desplazamientos (ninguna en giros), por lo que debemos obtener de los desplazamientos la información necesaria para completar el diagrama de giros. Razonamos que la diferencia de desplazamiento u_y entre $x=0$ y $x=L$, que será nula puesto que en ambos puntos hay apoyos, será el área total bajo el diagrama de giros. Por tanto, en la figura 4.14 debemos situar la línea horizontal de origen de giros de tal manera que divida a la gráfica en áreas que se cancelen. En este caso, debido a la simetría del trazado, es evidente que esa línea debe pasar por el punto del dia-

grama que está en $x=L/2$. Una vez trazada (ver figura 4.14b), obtenemos una zona de giros negativos (representados “hacia arriba” de la línea), que ocupa hasta $L/2$, y otra de giros positivos en la mitad restante de la barra. Indicamos cómo es el giro en cada zona mediante un símbolo adecuado.

Para completar el diagrama de giros, podemos calcular el giro en $x=0$ como la diferencia de giros entre ese punto $x=0$, y el de $x=L/2$, que ha resultado tener giro nulo (como podíamos haber anticipado por simetría). Dicha diferencia de giros es igual al área de la gráfica de momentos entre esos puntos, que vale $\frac{1}{2} \cdot L/2 \cdot FL/4 = FL^2/16$. En el extremo derecho tendrá el mismo valor y sentido opuesto. Se indican también estas cotas en la figura 4.14b.



Se puede representar ϕ_z en lugar de $EI_z \phi_z$. Esto no afecta a la forma del diagrama (en barras de sección constante), pero sí a los valores numéricos de las cotas. Es buena práctica indicar junto a la “línea de cero” de la gráfica qué variable se está representando.

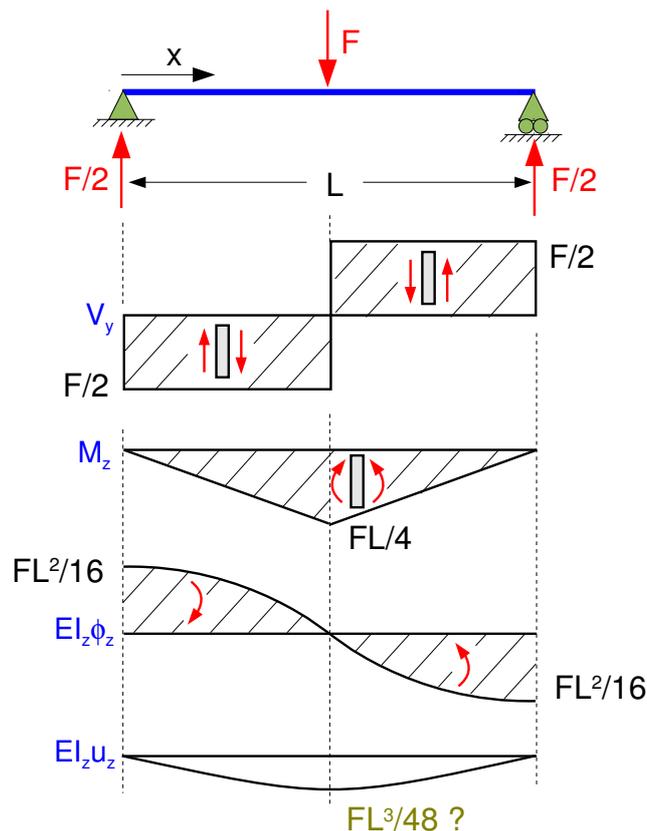


Figura 4.14b: Diagrama de giros completado, y diagrama de desplazamientos.

Por último, trazaremos el diagrama de desplazamientos u_y . Recordemos que en este caso, la ecuación diferencial, la 4ª de (4.15), tiene un signo menos. Podemos comenzar trazando la línea horizontal de referencia, ya que conocemos el desplazamiento (que es nulo) de los puntos en $x=0$ y $x=L$. En el punto en $x=0$, ϕ_z es negativo, luego la pendiente de u_y será positiva (debido al mencionado signo menos), es decir “hacia abajo”. La pendiente sigue siendo

positiva, aunque cada vez más pequeña, hasta el punto $x=L/2$ en donde se anula. A partir de este punto, la función ϕ_z cambia de signo, por lo que también lo hará la pendiente de u_y , que en consecuencia presentará un máximo en $x=L/2$. En el tramo $x>L/2$, mitad derecha de la barra, la pendiente es negativa (“hacia arriba”), y cada vez más pronunciada. El trazado de u_y debe terminar con valor nulo en $x=L$, ya que existe un apoyo en este punto.

El diagrama de desplazamientos tiene la forma de la barra tras la deformación. No está de más una comprobación visual de que el trazado obtenido es físicamente aceptable, y está en coherencia con los apoyos y cargas del problema. Por otra parte, no hemos acotado aún el diagrama de desplazamientos. Interesa el desplazamiento máximo, que se produce en $x=L/2$. Vamos a realizar una estimación razonable de su valor, basándonos en que el mismo coincidirá con el área de la función de giros entre $x=0$ y $x=L/2$. En la figura 4.14b se aprecia que este área es menor que lo que correspondería a un rectángulo de lados $FL^2/16$ por $L/2$, y también que es mayor que el área del triángulo rectángulo cuyos catetos tienen esas mismas medidas. Estas áreas son:

- Rectángulo: $(FL^2/16) \cdot (L/2) = FL^3/32$
- Triángulo: $(FL^2/16) \cdot (L/2) / 2 = FL^3/64$

El valor promedio de los denominadores es 48. Adoptamos ese denominador para nuestra estimación del desplazamiento máximo, que será $FL^3/48$. En el diagrama de la figura 4.14b se ha puesto esta cota con un signo de interrogación, para indicar que es fruto de una estimación, a diferencia del resto de cotas de los diagramas, que se han obtenido de forma exacta.



La integración explícita mostrará que el valor estimado anterior es, de hecho, exacto. La razón de ello puede apreciarse leyendo el Apéndice C, donde se ofrecen algunos resultados útiles para acotar diagramas trazados a mano alzada con algún mejor criterio.

Trazado mediante integración explícita de las ecuaciones

Continuaremos en este apartado con la obtención explícita de las ecuaciones de las gráficas, desde el punto al que llegamos en el Tema 2. Las ecuaciones integrales para giros y desplazamientos se obtienen de las dos últimas ecuaciones (4.15):

$$EI_z \phi_z(x) = EI_z \phi_z(x_0) + \int_{x_0}^x M_z(x) dx \quad ; \quad EI_z u_y(x) = EI_z u_y(x_0) - \int_{x_0}^x EI_z \phi(x) dx \quad (4.16)$$

Recordemos que habíamos tomado una coordenada auxiliar x' para facilitar el tratamiento de la discontinuidad en $x=L/2$, como indica la figura 4.15. Recordemos también que obtuvimos las funciones que describen el momento flector M_z , y que eran:

$$M_z(x) = F \cdot x/2 \quad \text{en AB} \quad ; \quad M_z(x') = FL/4 - Fx'/2 \quad \text{en BC}$$

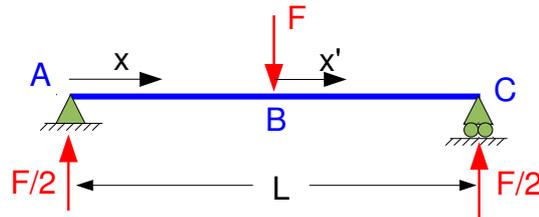


Figura 4.15: Coordenada auxiliar \$x'\$ para la integración

Procedemos llevando estas expresiones a la primera de (4.16), para continuar el proceso de integración.

Giros: $\phi_z(A)$ es desconocido. Por ahora queda como incógnita.

$$EI_z \phi_z(x) = EI_z \phi_z(A) + \int_0^x M_z(x) dx = EI_z \phi_z(A) + Fx^2/4 \quad \text{en AB}$$

$$\text{en } x=L/2: \quad EI_z \phi_z(B) = EI_z \phi_z(A) + FL^2/16$$

Para el tramo BC partimos de ese valor en B, que contiene la incógnita $\phi_z(A)$:

$$EI_z \phi_z(x') = EI_z \phi_z(B) + \int_0^{x'} M_z(x') dx' = EI_z \phi_z(A) + FL^2/16 + FLx'/4 - Fx'^2/4 \quad \text{en BC}$$

De momento, no podemos expresar los giros de forma más precisa.

Desplazamientos: $u_y(A)$ es nulo.

$$EI_z u_y(x) = EI_z u_y(A) - \int_0^x EI_z \phi_z(x) dx = -EI_z \phi_z(A) \cdot x - FX^3/12 \quad \text{en AB}$$

$$\text{en } x=L/2: \quad EI_z u_y(B) = -EI_z \phi_z(A) \cdot L/2 - FL^3/(12 \times 8)$$

$$EI_z u_y(x') = EI_z u_y(B) - \int_0^{x'} EI_z \phi_z(x') dx' = -EI_z \phi_z(A) \cdot L/2 - FL^3/(12 \times 8) - EI_z \phi_z(A) \cdot x' - FL^2 x'/16 - FLx'^2/8 + Fx'^3/12 \quad \text{en BC}$$

en \$x'=L/2\$, punto C, el desplazamiento es nulo, lo que permite calcular $\phi_z(A)$:

$$0 = -EI_z \phi_z(A) \cdot L/2 - FL^3/(12 \times 8) - EI_z \phi_z(A) \cdot L/2 - FL^3/32 - FL^3/32 + FL^3/(12 \times 8)$$

Simplificando:

$$0 = -EI_z \phi_z(A) \cdot L - FL^3/16 \Rightarrow EI_z \phi_z(A) = -FL^2/16$$

Calculado el valor de $\phi_z(A)$ quedan determinadas todas las ecuaciones de giros y desplazamientos calculadas anteriormente. En un problema más general, procederíamos sustituyendo este valor en la ecuación de giros en ambos tramos AB y BC, y buscaríamos la cota \$x\$ (o \$x'\$) de giro nulo, que se correspondería con un máximo del desplazamiento. Finalmente

sustituiríamos esta cota en la ecuación del desplazamiento (la del tramo AB o BC, según correspondiese), para encontrar el valor máximo del desplazamiento.

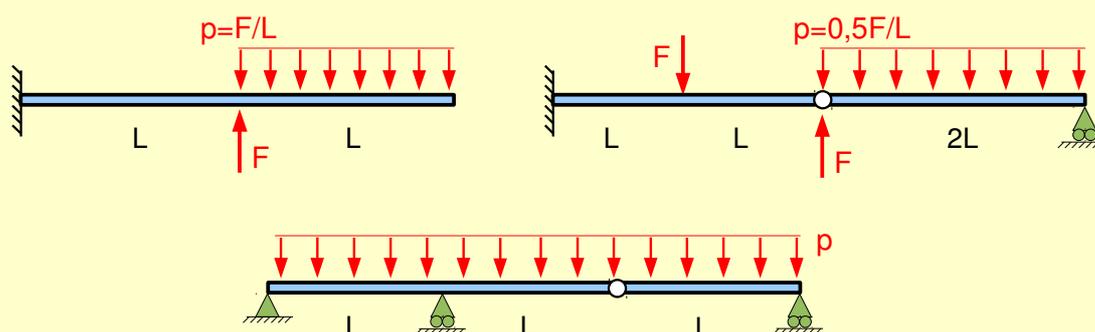
En nuestro caso, es evidente por simetría que el desplazamiento máximo ocurrirá en el centro de la barra. Por tanto podemos sustituir directamente $x=L/2$ en la ecuación de u_y en el tramo AB:

$$EI_z u_y(B) = (+FL^2/16) \cdot L/2 - FL^3/(12 \times 8) = +FL^3/48 \quad (u_y \text{ máximo})$$

El trabajo de representar (sin apoyo de los procedimientos de “mano alzada”) las funciones analíticas obtenidas, es tedioso. Ese trabajo no se realizará aquí, ni se aconseja especialmente que se realice. Más bien se aconseja realizar en primer lugar el trazado a mano alzada y complementarlo después con los cálculos analíticos que sean necesarios, en su caso. El trazado de las funciones ya fue obtenido en la figura 4.14b, y por supuesto se corresponde con las expresiones analíticas obtenidas.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Trace los diagramas de esfuerzos y desplazamientos de las vigas siguientes.



Notas: Trace tan aproximadamente como pueda sin usar integración analítica. Solamente el primero es fácil. Los otros dos requieren de unas estimaciones y un trazado más cuidadosos, debido a la presencia de una rótula. Se sugiere que finalmente contraste sus estimaciones, por ejemplo con los resultados de un programa de ordenador, o más tarde usando los procedimientos del tema 6.

- Para ampliación de lo expuesto sobre el modelo de tracción-flexión de barras, puede considerarse en primer lugar ^[13], y también ^[14]. En las referencias ^{[1][2]} y ^[3] también se explica dicho modelo con diferentes enfoques, y con numerosos problemas (aunque no todos ellos son aptos para ser resueltos en el curso, debido a que ocasionalmente pueden sobrepasar el nivel previsto para el mismo).

5.- Tensiones Tangenciales en Flexión

Introducción

Como sabemos, las tensiones tangenciales en la sección están directamente relacionadas con los esfuerzos cortantes (ecuaciones (4.1)). Empezaremos por destacar que estas tensiones tangenciales pocas veces tienen un papel relevante en los problemas comunes de barras sometidas a flexión. Por ejemplo, recuérdese que hemos presentado como razonable el despreciar la deformación asociada a ellas en el modelo de Navier-Bernoulli. En cuanto al valor propiamente dicho de estas tensiones, y su posible influencia en la aplicación de un criterio de plastificación, cabe decir que en la práctica suelen tener una influencia entre escasa y marginal. Adicionalmente, las fórmulas al respecto son algo más complicadas de obtener y laboriosas de aplicar que las correspondientes, por ejemplo, al cálculo de tensiones normales. Todo ello nos hace sopesar la inversión en tiempo del curso y esfuerzo del alumno (recursos ambos limitados) que el estudio de las tensiones tangenciales conlleva.

Por otra parte, es cierto que las tensiones tangenciales pueden tener influencia apreciable en algunos problemas concretos, y que además son necesarias para apoyar la explicación de algunos conceptos, como el de “centro de esfuerzos cortantes” y el de “alabeo de la sección”, de los que se desea al menos ofrecer noticia en el curso. Se ha optado por incluir un esquema de los conceptos que sustentan el cálculo de las tensiones tangenciales, y presentar finalmente unas pautas sencillas de estimación aproximada, que debieran ser suficientes para los problemas más comunes.

Las tensiones cortantes son además las que determinan el grado de inexactitud de la hipótesis de Navier-Bernoulli, la cual precisamente consiste en obviar la deformación debida a estas tensiones. El modelo usual de vigas que tiene en cuenta la deformación debida al cortante se llama “Modelo de Timoshenko”. El mismo es de aplicación aconsejable cuando las tensiones tangenciales tengan alguna mayor importancia, típicamente en vigas poco esbeltas. La presentación de dicho modelo cae fuera del ámbito de este curso. Simplemente, téngase noticia de la existencia del modelo de Timoshenko, y de que su efecto general es predecir un comportamiento algo más flexible para la viga (mayores desplazamientos) que el modelo de Navier-Bernoulli.

Planteamiento general del problema

Para obtener el valor de las tensiones tangenciales en la sección, consideramos el equilibrio de una porción de una rebanada diferencial de la barra, obtenida mediante un corte por una superficie reglada cualquiera paralela al eje “x”, que consideraremos plana por simplicidad.

Como veremos seguidamente, el hecho básico al considerar dicho equilibrio es que es necesaria la presencia de unas tensiones tangenciales de dirección x en el plano de corte paralelo a x (como las denotadas τ^* en la figura 5.1), para que efectivamente la suma de fuerzas en "x" resulte cero. Pero la existencia de dicha tensión implica, debido al principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, la existencia de tensiones recíprocas en el plano $x=cte$. Éstas son las tensiones tangenciales en el plano de la sección, que finalmente buscamos.

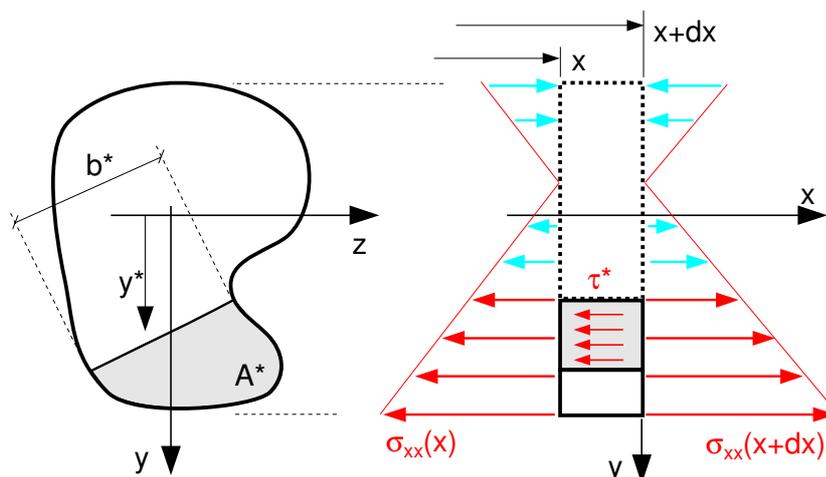


Figura 5.1: Porción de una rebanada diferencial.

Vamos a desarrollar el procedimiento resumido en el párrafo anterior. La figura 5.1 muestra una rebanada de espesor dx de la barra, y una porción obtenida de ella cortando por un plano cualquiera paralelo a x . Las tensiones σ_{xx} se dibujan a título orientativo (se corresponden con N y M_z , pero puede haber también M_y). Las superficies de corte se dibujan sombreadas. Las fuerzas de dirección x que intervienen en el equilibrio son:

- La resultante de las tensiones σ_{xx} que actúan en las superficies A^* .
- La resultante de las tensiones τ^* que actúan en el corte paralelo a "x".
- Una parte de la fuerza exterior $p_x \cdot dx$ que actúa sobre la rebanada completa.

Respecto de esta última, razonamos como sigue: hemos asumido que si p_x actúa aisladamente, hay una compresión (o tracción) constante en cada sección, y por tanto la resultante de las compresiones que actúan sobre el área A^* será una fracción proporcional, A^*/A , de la resultante sobre la sección entera. Es por ello razonable asumir que también la carga exterior que actúa sobre nuestro sólido es una fracción A^*/A de la que actúa en la rebanada entera. Ello equivale a asumir que p_x actuase como una fuerza de volumen (tipo gravedad), de dirección x . En definitiva, si la fuerza exterior sobre la rebanada completa es $p_x(x)dx$, la parte de esa fuerza que consideramos que actúa sobre nuestro sólido será $p_x(x)dx \cdot A^*/A$.



La idea anterior es intuitiva, pero no del todo rigurosa. Como se apuntó en el tema 2 (pág.19), no se ha querido complicar la exposición con detalles de cómo actuarían realmente las fuerzas que hemos caracterizado como $p_x(x)$, lo que hubiese sido necesario para una mejor explicación de este detalle. Un tratamiento más correcto de la cuestión, que

justifica que la influencia de las cargas axiales será pequeña, puede encontrarse en [13]. Muchos otros textos obvian la cuestión (que realmente no es de importancia capital), simplemente suponiendo desde el comienzo que sólo hay flector y cortante, sin cargas axiales.

Con estas consideraciones, la ecuación de equilibrio se escribirá como:

$$\int_{A^*} [\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)] dA^* + p_x(x) dx \frac{A^*}{A} = \tau^* \cdot b^* \cdot dx \quad (5.1)$$

Hemos denotado como $\sigma_{xx}(x)$ la función que describe las tensiones σ_{xx} en la sección a cota x , y que por supuesto depende también de y, z . El valor τ^* representa un promedio de la tensión tangencial en el corte paralelo a x . Debemos conformarnos con este valor promedio, ya que el presente enfoque no va a ofrecernos una descripción más precisa. Comenzaremos por calcular la primera integral, que es la resultante de las tensiones σ_{xx} que actúan en las superficies A^* de la figura 5.1. La distribución de σ_{xx} en la sección vendrá dada por (4.6) o bien por (4.8). En cualquier caso se tratará de una distribución lineal que para una sección ($x=cte$) podemos escribir de forma genérica como

$$\sigma_{xx} = C_0(x) + C_1(x) \cdot y + C_2(x) \cdot z \quad (5.2)$$

Con ello tendremos:

$$\int_{A^*} [\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)] dA^* = \int_{A^*} [C_0(x+dx) - C_0(x)] dA^* + \int_{A^*} [C_1(x+dx) - C_1(x)] \cdot y dA^* + \int_{A^*} [C_2(x+dx) - C_2(x)] \cdot z dA^*$$

Por una parte, las expresiones que solo dependen de "x" pueden salir de las integrales, ya que éstas afectan únicamente a las variables "y", "z". Por otra parte, la diferencia entre los valores de una función para dos puntos distantes un dx , puede escribirse como la derivada por el diferencial. por ejemplo, $C_0(x+dx) - C_0(x) = C'_0(x) \cdot dx$. Por tanto nuestra integral es:

$$C'_0(x) \cdot dx \cdot A^* + C'_1(x) \cdot dx \int_{A^*} y \cdot dA^* + C'_2(x) \cdot dx \int_{A^*} z \cdot dA^* \quad (5.3)$$

Las integrales que aparecen en la ecuación anterior se denominan "momentos estáticos" del área A^* respecto del eje z , o respecto del eje y , respectivamente. Los denotaremos por:

$$q_z^* = \int_{A^*} y \cdot dA^* \quad ; \quad q_y^* = \int_{A^*} z \cdot dA^* \quad (5.4)$$

Algunas propiedades de interés de estos momentos estáticos pueden encontrarse resumidas en el Apéndice B.

Por otra parte, tanto si la forma genérica (5.2) representa a (4.6) como si representa a (4.8), es $C_0(x) = N(x)/A$, por lo que $C'_0(x) = N'(x)/A$, y teniendo en cuenta (2.3) se tiene $C'_0(x) = -p_x(x)/A$. Con todo ello la primera integral de (5.1) que estamos calculando nos queda:

$$-p_x(x) \cdot dx \frac{A^*}{A} + C'_1(x) \cdot dx \cdot q_z^* + C'_2(x) \cdot dx \cdot q_y^* \quad (5.5)$$

Y la propia ecuación de equilibrio (5.1) será (nótese que los términos que contienen a p_x se cancelan, y que dx se simplifica por aparecer en todos los términos):

$$C'_1(x) \cdot q_z^* + C'_2(x) \cdot q_y^* = \tau^* \cdot b^* \quad (5.6)$$

Para aplicar la ecuación (5.6) a un problema, debemos sustituir los coeficientes dependientes de "x" por sus valores. Si estamos operando en ejes de inercia no principales, tendremos que identificar términos entre (5.2) y (4.6), resultando que

$$\begin{aligned} C'_1(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{M_z(x) \cdot I_y - M_y(x) \cdot I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \right) = \frac{V_y(x) \cdot I_y - V_z(x) \cdot I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \\ C'_2(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{M_y(x) \cdot I_z - M_z(x) \cdot I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \right) = \frac{V_z(x) \cdot I_z - V_y(x) \cdot I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \end{aligned} \quad (5.7)$$

En donde hemos usado las ecuaciones (2.5) y (2.6) para sustituir las derivadas de los momentos por los esfuerzos cortantes oportunos. Si estamos operando en ejes de inercia principales, tendremos que identificar términos entre (5.2) y (4.8). De manera análoga obtenemos los coeficientes para este caso:

$$\begin{aligned} C'_1(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{M_z(x)}{I_z} \right) = \frac{V_y(x)}{I_z} \\ C'_2(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{M_y(x)}{I_y} \right) = \frac{V_z(x)}{I_y} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aplicando la ecuación (5.6) en una sección en la que conozcamos los esfuerzos cortantes (que determinarán los coeficientes C'_1 , C'_2 , a través de (5.7) o (5.8)), y elegida una porción suya de área A^* cuyos momentos estáticos deberemos obtener, calcularemos la tensión tangencial promedio τ^* en el corte de anchura b^* . En el plano de la sección deberá existir una tensión tangencial promedio recíproca, como indica la figura 5.2, que es la buscada.

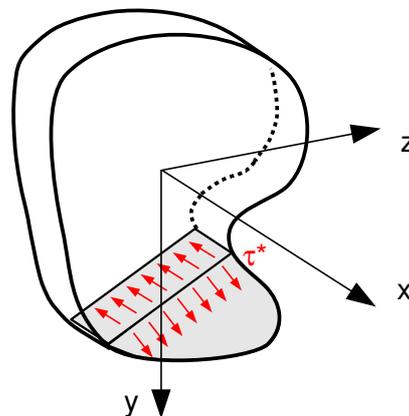


Figura 5.2: Tensiones tangenciales en la sección, según el principio de reciprocidad.

El área A^* también podría estar delimitada por varios cortes. En ese caso, obtendremos una relación entre las tensiones promedio en ellos, pero no su valor individual.

Algunas variantes de aplicación

A continuación expondremos las formas más usuales de aplicación de la ecuación (5.6) con vistas a obtener la distribución de tensiones tangenciales en la sección, hasta el grado de aproximación que el procedimiento ofrece. Como excepción, muchos de los ejercicios propuestos en este epígrafe están más bien pensados para dar a conocer la solución de algunos casos típicos y extraer de ellos orientaciones de índole práctica, y no tanto para la resolución exhaustiva por parte del alumno. Por ello, se adjunta la solución de muchos de los ejercicios, se incluyen comentarios sobre esa solución, y sus enunciados se presentan en la forma “compruebe que la solución es la indicada”. No obstante, se espera que el alumno trabaje al menos alguno de los ejercicios propuestos en cada categoría.

Secciones macizas y de pared gruesa

Llamaremos “macizas” a las secciones que tienen su masa sensiblemente agrupada, como pueden ser el círculo, el cuadrado, el rectángulo, o formas irregulares del tipo a la de la figura 5.1. Excluimos explícitamente de esta categoría las secciones con agujeros interiores, partes esbeltas, o cualquier particularidad geométrica similar.

Diremos que una sección es de “pared gruesa” cuando su geometría esté formada por la unión de elementos de superficie moderadamente esbeltos. Podemos pensar que dichos elementos tienen la forma de rectángulos, rectos o curvados, quizá de anchura ligeramente variable, y de una relación de esbeltez superior a 2:1, orientativamente. Elementos menos esbeltos serían considerados como sección maciza.

La distinción entre ambos tipos de sección (maciza y pared gruesa), no afecta a los procedimientos de cálculo, que son los mismos, sino más bien a nuestra manera de pensar en las tensiones, y a las aproximaciones que solemos hacer sobre ellas (relacionadas con conceptos como “ala”, “alma”, o “tensión rasante”, por ejemplo).

Cálculo de tensiones σ_{xy} .

En la mayoría de los casos prácticos estaremos interesados en la distribución de las tensiones σ_{xy} en la sección. Obtendremos las mismas aplicando (5.6) con un corte realizado a una cota $y=y^*=cte$, que a continuación consideraremos genérica para obtener la variación de σ^*_{xy} en la altura del perfil. La figura 5.3 ilustra lo anterior. En ella se ha dibujado positiva toda variable que interviene (al igual que en la figura 5.1; también τ^* se dibujó en el sentido que eventualmente coincide con el de σ^*_{yx} positivo), de modo que al plantear el equilibrio sobre ella, se obtiene una fórmula de aplicabilidad general.

Si “y”, “z”, son ejes principales de inercia, debemos usar los coeficientes dependientes de “x” dados por (5.8) en la ecuación (5.6). , resultando:

$$\frac{V_y(x)}{I_z} \cdot q^*_z + \frac{V_z(x)}{I_y} \cdot q^*_y = \sigma^*_{yx}(y^*) \cdot b(y^*) \quad (5.9)$$

En el caso en que los ejes “y”, “z”, no sean principales de inercia de la sección, procede utilizar en la ecuación (5.6) los coeficientes dependientes de “x” dados por (5.7). Con ello:

$$\frac{V_y(x) \cdot I_y - V_z(x) \cdot I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \cdot q_z^* + \frac{V_z(x) \cdot I_z - V_y(x) \cdot I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \cdot q_y^* = \sigma_{yx}^*(y^*) \cdot b(y^*) \quad (5.10)$$

En donde en todo caso σ_{yx}^* es el promedio de σ_{yx} en el corte horizontal. En la aplicación práctica de (5.9) o (5.10), expresaremos los momentos estáticos en función de la coordenada y^* , como $q_z(y^*)$, $q_y(y^*)$, para obtener la variación de la tensión en la altura del perfil.

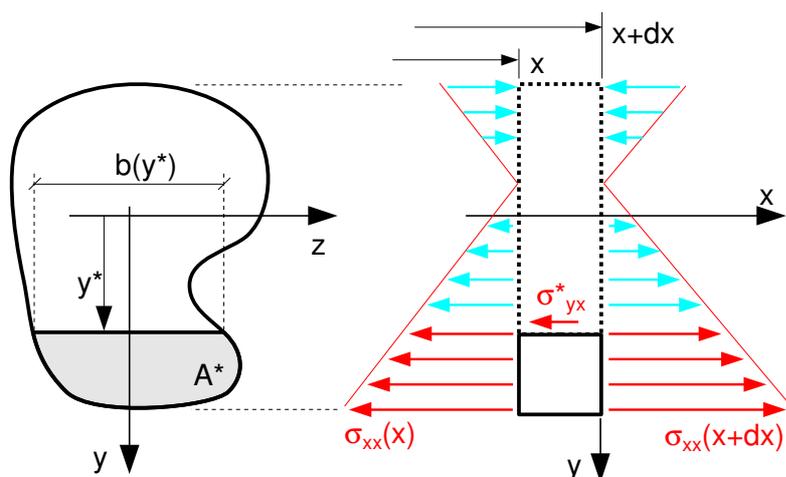


Figura 5.3: Porción de la rebanada obtenida por un corte $y^*=cte$.

Notas sobre los sentidos o signos:

Tenemos una “molesta variedad” de posibilidades para denominar las tensiones en el plano de corte paralelo a x. Hemos usado en la figura 5.1 la forma poco comprometida τ^* , que no tiene convenio de signos asociado, y será “positiva” en el sentido que la queramos dibujar. En la figura 5.3 hemos usado la forma σ_{yx}^* de componente del tensor de tensiones, que tiene su convenio de signos, lo que nos puede inducir a error por ejemplo si aplicamos (5.9) o (5.10) aislando el sólido correspondiente al área de la sección complementaria a A^* . Aún usaremos en el apartado siguiente otra forma en función de ejes locales, con sus propias peculiaridades. Para aportar un poco de claridad a esta situación, téngase en cuenta lo siguiente:

El miembro izquierdo de (5.6), o equivalentemente el de (5.9) o (5.10), representa la resultante en sentido “+x” de todas las fuerzas que actúan sobre nuestro sólido, salvo la que pretendemos calcular. Si el miembro es positivo la resultante tiene el sentido x, y si es negativo, el contrario. Ello es así tanto si consideramos el sólido de área A^* , como el sólido correspondiente al área complementaria de la sección (la que tendría superficie A-A*).

De lo anterior podemos obtener una pauta sencilla: el miembro derecho de la ecuación (5.6), o de cualquiera de sus secuelas (incluidas las que obtengamos después para pared delgada), debe entenderse como una fuerza de sentido “-x”, que equilibra la resultante de las demás fuerzas, que calculamos en el miembro izquierdo, y que tiene sentido “+x”. Ajustaremos en base a este hecho físicos eventuales signos de la magnitud, o la representación, que hayamos usado para describir la tensión en el plano de corte paralelo a x. Se considera preferible usar esta pauta sencilla y fácil de recordar que entrar en una categorización más compleja de convenios de signos, en especial cuando en el curso se contempla presentar el cálculo de tensiones tangenciales de manera más bien concisa.

Cálculo de tensiones σ_{xz}

Podemos igualmente estar interesados en la distribución de las tensiones σ_{xz} . En ese caso deberemos considerar un corte vertical en la rebanada diferencial, a cota $z=z^*=cte$, como el mostrado en la figura 5.4. Nótese que si la sección tiene “entrantes” (zonas cóncavas), como es el caso, no estamos obligados a extender nuestro corte a todas las zonas convexas con las que el plano de corte fuese a intersectar. El sólido que deseamos equilibrar es decisión nuestra, y bien puede ser el correspondiente al área A^* de la figura 5.4.

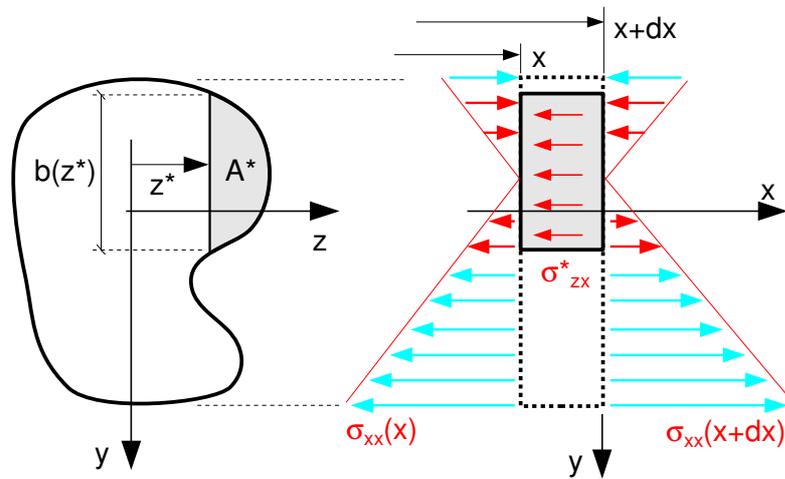


Figura 5.4: Porción de la rebanada obtenida por un corte $z^*=cte$.

Si “y”, “z”, son ejes principales de inercia, la ecuación (5.6) para este caso será:

$$\frac{V_y(x)}{I_z} \cdot q^*_z + \frac{V_z(x)}{I_y} \cdot q^*_y = \sigma^*_{zx}(z^*) \cdot b(z^*) \tag{5.11}$$

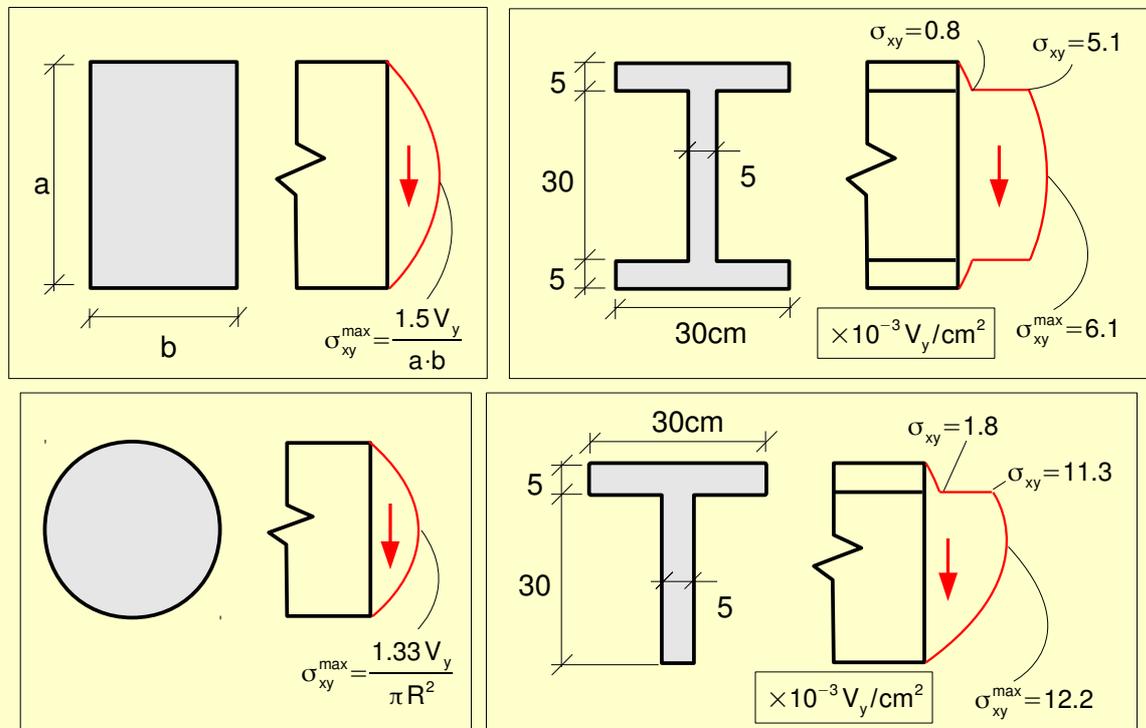
Y si “y”, “z”, no son ejes principales de inercia, tendremos análogamente:

$$\frac{V_y(x) \cdot I_y - V_z(x) \cdot I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \cdot q^*_z + \frac{V_z(x) \cdot I_z - V_y(x) \cdot I_{yz}}{I_z I_y - I_{yz}^2} \cdot q^*_y = \sigma^*_{zx}(z^*) \cdot b(z^*) \tag{5.12}$$

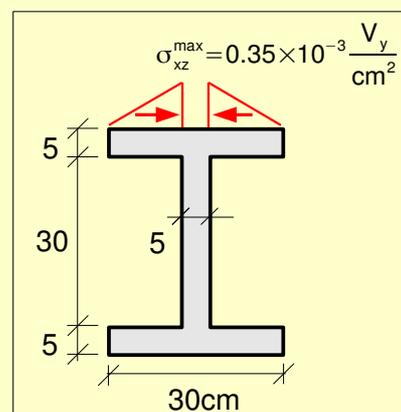
Donde expresaremos q^*_z , q^*_y , en función de z^* , ($q_z(z^*)$, $q_y(z^*)$), en la aplicación práctica.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Compruebe que, para un cortante V_y dado en la sección, la distribución de tensiones promediadas σ_{xy}^* es la indicada en cada caso:



Compruebe que, para un cortante V_y en la sección, la distribución de σ_{xz}^* en las alas, es la indicada:



Observaciones a los ejercicios anteriores:

- Nótese como en todos los perfiles se satisface el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales en los límites superior e inferior ($y=y^{\max}$). Se trata de una superficie real de la viga, en la que no se está aplicando la componente de tensión σ_{yx} , por lo que también debe ser nula la componente recíproca σ_{xy} , que actúa en el plano de la sección, como de hecho se obtiene en esos extremos superior e inferior.
- Abundando en lo anterior, y pensando en el caso usual de flexión según el eje z , nótese que en esos puntos donde $\sigma_{xy}=0$ las tensiones σ_{xx} son máximas. Alternativa-

mente, en el centro de áreas donde σ_{xy} es máximo, σ_{xx} es nulo. Siendo las tensiones σ_{xx} las dominantes en los problemas de flexión, lo anterior hace muy improbable que las tensiones tangenciales influyan de forma determinante en la plastificación o no del punto más solicitado de la sección, en este tipo de perfiles macizos o gruesos.

– En la misma situación anterior, se aprecia que cuando existe un rectángulo algo esbelto en la dirección de las cargas (lo que llamamos “alma” de la viga), las mayores tensiones tangenciales σ_{xy} se concentran en él. Es habitual despreciar las pequeñas tensiones σ_{xy} que se desarrollan en las alas.

– En el perfil rectangular, la tensión σ_{xy} será constante en el espesor (en “z”), por lo que coincidirá con su promedio, que calculamos como σ^*_{xy} . Por ello cabe esperar que la solución para este caso sea la más acorde a la realidad.

Secciones de pared delgada

Como su nombre hace esperar, las secciones de pared delgada son topológicamente similares a las de pared gruesa, pero las figuras geométricas que lo forman (similares a rectángulos rectos o curvados), son mucho más esbeltas. Orientativamente, contamos con que la relación de longitud a espesor de estas figuras supere la proporción 10:1. En estructura metálica es frecuente el uso de secciones que pueden considerarse de pared delgada. Entre ellos muchos de los perfiles metálicos comerciales, y la práctica totalidad de las “secciones armadas” (las que construimos *ad hoc*, generalmente de grandes proporciones).

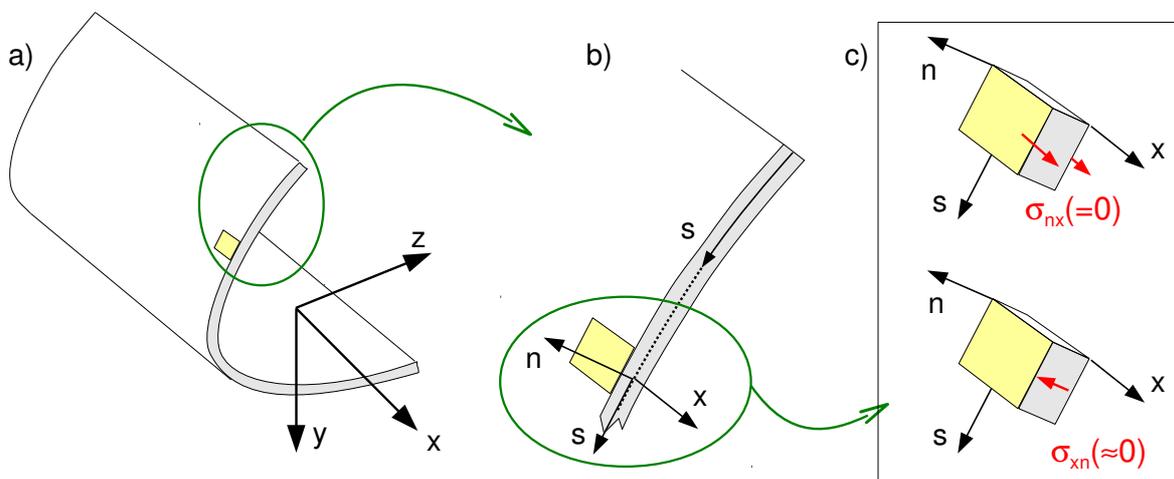


Figura 5.5: a) Sección de pared delgada. b) Coordenada curvilínea "s", y ejes locales "x, n, s". c) Justificación de que $\sigma_{xn} \sim 0$

La figura 5.5a muestra como ejemplo el trozo entre dos secciones $x=\text{cte}$ de una viga de sección de pared delgada. Comenzaremos por justificar la particularidad más destacada de este tipo de secciones, cual es que la tensión tangencial tendrá sensiblemente la dirección de la línea media del perfil, es decir la dirección tangente a la coordenada curvilínea “s” de la figura 5.5b en cada punto. En ella se muestran además unos ejes locales “x,n,s”, donde el eje “s” es tangente a la línea media del perfil. Adoptando un abuso de notación habitual en la literatura, se nombra al eje con la misma letra “s” que a la coordenada curvilínea.

La primera de las figuras 5.5c muestra que la componente σ_{nx} es exactamente nula en las superficies interior y exterior del perfil, perpendiculares a n . Evidentemente, aseguramos lo anterior porque no estamos aplicando ninguna acción en esa superficie libre. Por tanto, la componente recíproca σ_{xn} será también exactamente nula en esos puntos de la superficie interior y exterior. Finalmente, se considera que la componente σ_{xn} no tiene espacio para crecer hasta valores importantes en la pequeña longitud del espesor de la pared (se apela aquí a la evolución continua esperada para las variables del problema, en particular para σ_{xn}). En consecuencia, despreciaremos esta componente de tensión en todo el espesor, tal como indica la segunda figura 5.5c. Aceptado lo anterior, de las dos posibles componentes de tensión tangencial en la sección (σ_{xn} y σ_{xs}), la σ_{xn} es nula, y por tanto la tensión tangencial sólo tendrá la componente σ_{xs} , que tiene la dirección de “s”, como queríamos justificar. Evidentemente, la aproximación anterior es tanto más razonable cuanto más delgado sea el espesor del perfil.

Los razonamientos básicos expuestos en relación con la figura 5.1 para el cálculo de tensiones tangenciales, siguen siendo de aplicación en secciones de pared delgada. Pero como a efectos prácticos sólo consideraremos la componente de tensión σ_{xs} , sólo estaremos interesados en realizar cortes de la rebanada diferencial que sean perpendiculares a “s”. Seguidamente realizaremos algunos cortes de ese tipo a secciones de pared delgada en algunas situaciones de interés.

En primer lugar, consideramos un corte que aísla una porción del perfil que incluye un extremo del mismo, tal como el mostrado en la figura 5.6a.

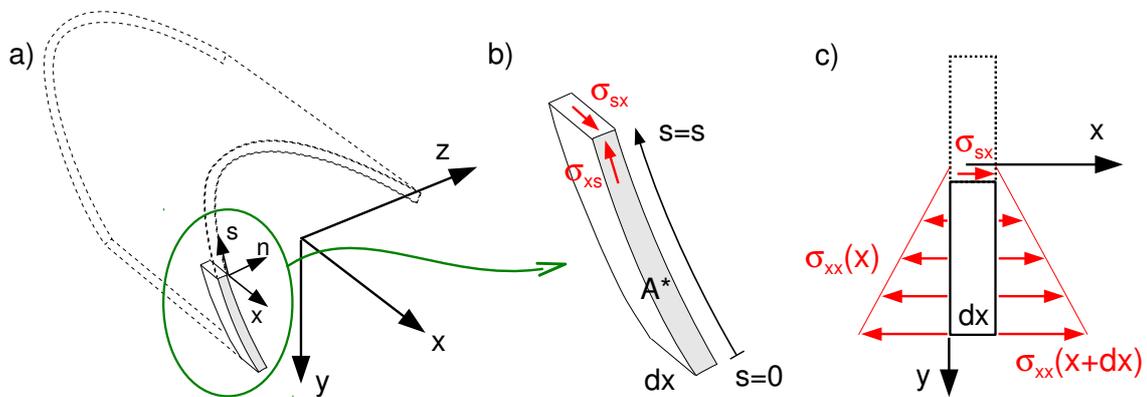


Figura 5.6: a), b) Porción de una rebanada de la barra. c) Equilibrio de la porción.

Como hemos caracterizado la tensión en el corte $s=cte$ mediante σ_{sx} , y hemos querido dibujar la misma como positiva según su convenio de signos, y de ello que ha resultado que su fuerza asociada tiene el sentido “+x” en la figura 6.5c, la ecuación de equilibrio (5.6) debe escribirse teniendo en cuenta lo indicado en la página 93. Por tanto, si los ejes “y”, “z”, son principales de inercia, podemos escribir:

$$\frac{V_y(x)}{I_z} \cdot q_z^* + \frac{V_z(x)}{I_y} \cdot q_y^* = -\sigma_{sx}(s) \cdot e(s) \tag{5.13}$$

Donde $e(s)$ es el espesor de la pared, que puede variar con s . En cada problema particular expresaremos los momentos estáticos en función del parámetro “ s ”, como $q^*_z(s)$, $q^*_y(s)$.

Consideremos ahora un trozo de la rebanada diferencial entre dos cortes $s=cte$, como el mostrado en la figura 5.7.

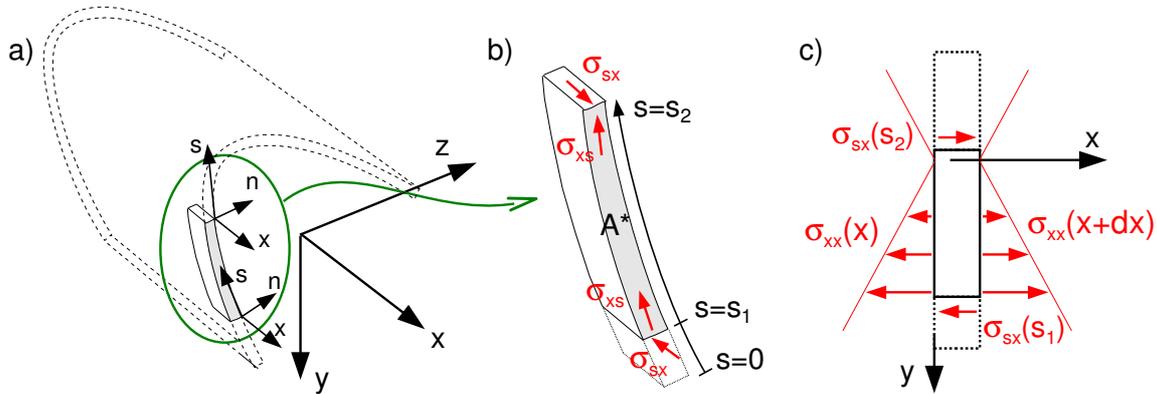


Figura 5.7: a), b) porción de la rebanada entre dos cortes $s=cte$. c) Tensiones que actúan.

En este caso, podremos escribir por ejemplo:

$$\frac{V_y(x)}{I_z} \cdot q^*_z + \frac{V_z(x)}{I_y} \cdot q^*_y = \sigma_{sx}(s_1) \cdot e(s_1) - \sigma_{sx}(s_2) \cdot e(s_2) \tag{5.14}$$

En secciones de pared delgada es frecuente denominar “flujo de tensiones” al producto $\sigma_{xs}(s) \cdot e(s)$. La ecuación (5.14) nos permitirá conocer el flujo de tensiones en un punto s_2 si conocemos su valor en otro punto s_1 .

Una propiedad interesante de este flujo de tensiones se obtiene considerando que s_1 y s_2 estuviesen muy próximos, digamos que a distancia ds , en la figura 5.7. En este caso el área A^* será diferencial, y sus momentos estáticos también. Por tanto, salvo un diferencial, podemos escribir (5.14) para este caso como:

$$\sigma_{xs}(s+ds) \cdot e(s+ds) = \sigma_{xs}(s) \cdot e(s) \tag{5.15}$$

Que podemos verbalizar como que “el flujo de tensiones debe ser continuo en el perfil”.



El nombre de “flujo” puede inducir a pensar en analogías erróneas, del tipo fluidos circulando por tuberías. No se trata de eso. En particular, que el “flujo de tensiones” deba tener continuidad, no quiere decir que sea constante (mientras que un flujo de agua en tuberías sí lo sería).

En último término, la continuidad del flujo es consecuencia del equilibrio de fuerzas en dirección “ x ” de un sólido, que en este caso es un trozo diferencial de una rebanada (a su vez diferencial) de la barra. Este equilibrio debe satisfacerse aunque la forma del sólido que aislemos sea más compleja, e incluya por ejemplo un cambio brusco del espesor $e(s)$ de la pared, un cambio brusco de orientación de la línea media “ s ”, o una bifurcación del perfil (típicamente en el encuentro entre las alas y el alma). La figura 5.8 muestra un ejemplo

“extremo” en que se dan todas las situaciones anteriores combinadas. Se trata del encuentro entre las alas de un perfil (ambas de espesores distintos), y el alma (de otro espesor diferente). El sólido que hemos aislado está formado por porciones diferenciales de las alas y del alma, pertenecientes a una rebanada diferencial de la barra. El razonamiento que sirvió para obtener (5.15) a partir de (5.14) es de aplicación aquí, y su simple adaptación a este caso justifica que “el flujo que entra tiene que ser igual al flujo que sale” en una bifurcación del perfil (mirando la vista en el plano de la sección, $x=cte$).

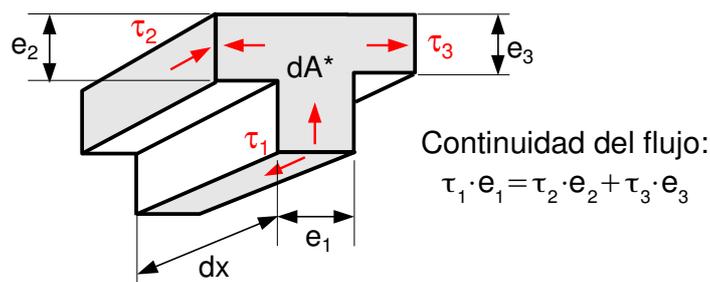


Figura 5.8: Continuidad del flujo en el encuentro entre las alas y el alma en un perfil con espesores distintos.

Aunque es redundante, podemos reconsiderar para mayor claridad los razonamientos básicos que hemos aplicado en el estudio de las tensiones tangenciales de flexión (aledaños a la ecuación (5.6) inicial). El equilibrio de fuerzas en dirección “x” para el sólido de la figura 5.8 se expresaría como

$$[\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)] \cdot dA^* - \tau_1 e_1 dx + \tau_2 e_2 dx + \tau_3 e_3 dx = 0$$

Siendo A^* el área en el plano $x=cte$ de nuestro sólido de estudio, como es habitual. En la ecuación anterior, el primer término (que no necesita ser una integral puesto que afecta a un diferencial de A^*), será un diferencial de tercer orden, ya que es un diferencial de primer orden (el incremento de una función entre dos puntos distantes un dx), multiplicado por un diferencial de orden dos (dA^*). Los demás términos, aún admitiendo considerar (en el modelo matemático) los espesores “pequeños” como diferenciales de primer orden, serán diferenciales de orden dos. Por tanto podemos despreciar el primer término, y los restantes conforman la ecuación que expresa la continuidad del flujo, que es la mostrada junto a la figura 5.8.

Otra particularidad interesante del flujo de tensiones afecta a los planos de simetría, si existen: Bajo determinadas condiciones, el flujo debe ser nulo en los puntos del perfil que estén sobre sus planos de simetría.

Lo anterior deriva directamente del hecho de que en cualquier problema elástico, si la geometría y la sollicitación son simétricas respecto de un plano, la solución (tensiones, desplazamientos, etc) también debe serlo. Y en concreto, una tensión tangencial perpendicular al plano de simetría actuando sobre un punto del mismo, sería incompatible con la simetría de la solución. Esas “determinadas condiciones” mencionadas en el párrafo anterior, se reducen por tanto a que las cargas también sean simétricas, y a que el flujo en el plano de simetría tuviese que ser perpendicular al plano de simetría en los puntos del mismo. Aunque es

difícil ofrecer una explicación precisa del fenómeno sin haber explicado antes las condiciones generales de simetría del problema elástico (debido a limitaciones temporales), la figura 5.9 muestra dos casos que debieran servir para clarificar cuándo es posible aplicar esta propiedad, y cuándo no. La figura 5.9a muestra un perfil rectangular hueco de pared delgada. Si las cargas de la barra son simétricas respecto del plano vertical de simetría geométrica del perfil, el problema cumple las condiciones para asegurar que el flujo de tensiones debe ser nulo en los puntos A y B. Esto nos será de utilidad para aplicar la ecuación (5.14) a perfiles cerrados como el considerado, ya que nos ofrece un punto de partida (por ejemplo B) en el que el flujo es conocido (nulo).

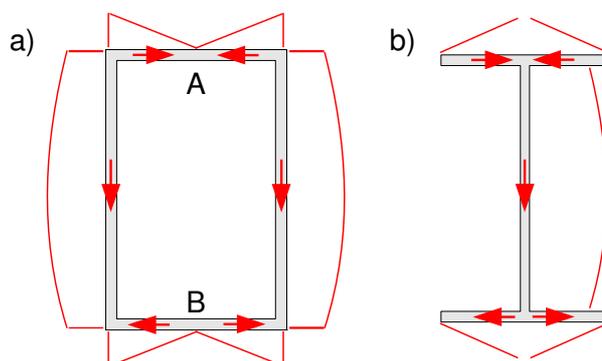


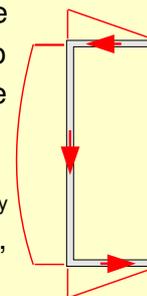
Figura 5.9: Tensiones tangenciales asociadas a un esfuerzo cortante vertical V_y .
a) Sección simétrica en cajón. b) Sección simétrica en "doble T".

No ocurre lo mismo con el perfil en "doble T" mostrado en la figura 5.9b. Aunque sea simétrico respecto del plano vertical, y que eventualmente las cargas sean simétricas respecto de éste plano, no podemos decir con propiedad que el flujo tuviese que ser perpendicular al plano en ninguno de sus puntos: las tensiones tangenciales en el alma son paralelas al plano de simetría, por lo que su existencia no viola las condiciones de simetría. En las alas, las tensiones son perpendiculares al plano de simetría, pero en realidad las alas no llegan hasta dicho plano. En el encuentro entre las alas y el alma existirá un estado complejo de tensiones, con reorientación progresiva de la tensión tangencial, que no obedece a las simplificaciones que estamos manejando, y que puede satisfacer las condiciones de simetría del problema sin ser nulo. En la figura 5.9 se incluye la forma aproximada de la evolución de las tensiones tangenciales en ambos perfiles.

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Compruebe que la evolución de las tensiones tangenciales para un cortante V_y es como la mostrada en la figura 5.9, para un perfil rectangular hueco 200.80.5, y para un perfil en "doble T" HEA280 (desprecie los radios de acuerdo, etc). Obtenga las cotas relevantes en función de V_y .

- Compruebe que la evolución de tensiones tangenciales para un cortante V_y en el perfil en "C" de la figura, es como la mostrada (dimensiones 75x200mm, $e=9\text{mm}$). Obtenga las cotas relevantes en función de V_y .



El cálculo de tensiones tangenciales en perfiles cerrados que correspondan a problemas sin simetría, y en perfiles cerrados multicelulares, no será abordado en este curso. El lector interesado puede consultar por ejemplo la referencia ^[13] al respecto.

Tensiones rasantes

Llamamos “tensiones rasantes” o “tensiones de atado” de una viga a las tensiones tangenciales que se transmiten en planos paralelos a “x”. Típicamente se trata de la tensión σ_{yx} transmitida entre el alma y las alas de una viga, o en cualquier plano perpendicular a “y” en una sección maciza, cuando actúa un esfuerzo cortante V_y . Hacemos referencia especial a ellas porque, si bien son típicamente de pequeño valor (del mismo que σ_{xy}) comparadas con σ_{xx} , tienen un papel fundamental en la resistencia de la viga. Para comprenderlo, consideremos la viga biapoyada de la figura 5.10a, que tiene algunas cargas verticales hacia abajo, y de la que se representa en línea continua la mitad izquierda. El momento flector en la sección central será tal que produce tracciones en la parte inferior, como se indica.

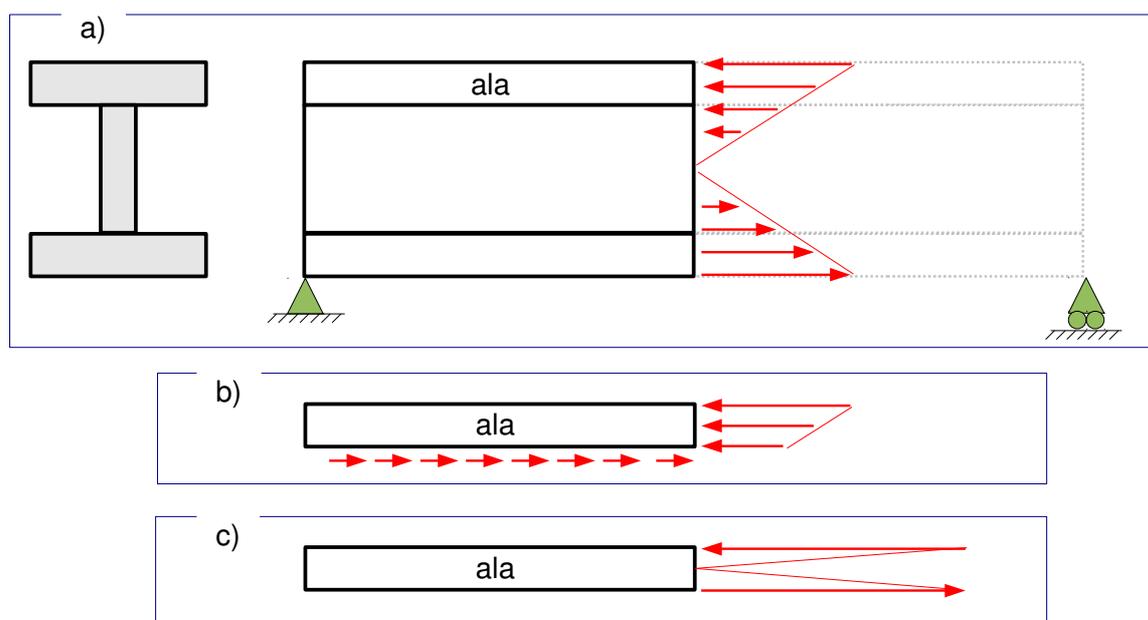
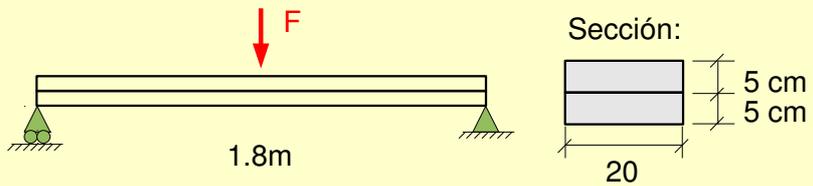


Figura 5.10: a) Mitad de una viga biapoyada. b) Equilibrio de medio ala, en condiciones normales. c) Equilibrio de medio ala cuando ha fallado la unión ala-alma.

Si consideramos el equilibrio de fuerzas horizontales del sólido formado por la mitad de la longitud del ala superior, vemos que las tensiones σ_{xx} se equilibrarán con las tensiones rasantes, como indica la figura 5.10b (nótese que aunque su valor sea pequeño actúan en un área grande comparada con la sección, ya que una de sus dimensiones es del orden de la longitud de la viga). Pero si la unión entre el ala y el alma hubiese fallado, la distribución de tensiones σ_{xx} mostrada en la figura 5.10b no sería posible, porque el ala no estaría en equilibrio. Sería preciso que el ala desarrollase tensiones como las mostradas en la figura 5.10c, que corresponden al modo de trabajo del ala como una viga independiente. Las tensiones serán mucho mayores que en el caso anterior, porque la “nueva viga” tiene poco canto. Cabría razonar análogamente con la otra porción desunida (inferior) de la viga.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Se pide calcular la tensión σ_{xx} máxima y el desplazamiento máximo en la viga de la figura, cuando los dos tablones que forman la sección están unidos entre sí, y cuando solamente están superpuestos.



Estimación de las tensiones tangenciales en casos usuales

En muchos casos, la complicación de obtener las tensiones tangenciales usando los métodos indicados anteriormente, no se ve compensada por la influencia, generalmente pequeña, de dichas tensiones en el problema. Es frecuente, especialmente en fases de pre-diseño, que deseemos obtener una orientación rápida de la magnitud de estas tensiones. El conjunto de pautas contenidas en este apartado debiera bastar para obtener una estimación razonable del valor de las tensiones tangenciales en los casos más comunes.

Vamos a considerar tres tipos de sección de barra a los efectos que nos ocupan:

- Secciones macizas. Secciones con su masa sensiblemente agrupada, como se indicó en el apartado anterior.
- Secciones con alma. Secciones de pared gruesa, con la dimensión mayor de uno o más de los rectángulos que la componen orientada paralelamente a las cargas.
- Secciones de pared delgada. Descritas en la sección anterior.

Secciones Macizas

Podemos empezar considerando una sección rectangular. La figura 5.11a muestra que consideramos demasiado grosero asumir una distribución constante de tensiones, ya que se violaría el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales.

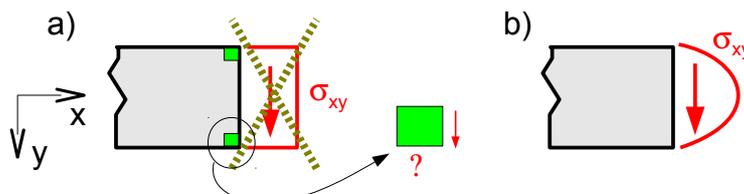
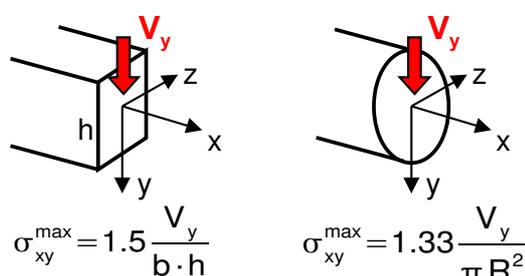


Figura 5.11: a) Imposibilidad de la hipótesis de reparto uniforme. b) Distribución aceptable

Como sabemos, la tensión σ_{xy} debe anularse en el punto superior e inferior de la sección. La evolución de tensiones más sencilla compatible con lo anterior es una de tipo parabólico

como la indicada en la figura 5.11b. Como hemos obtenido anteriormente, la distribución tiene efectivamente esta forma.

Esa forma general de la distribución de tensiones es cualitativamente similar en otros tipos de secciones macizas. La ecuación analítica de dicha distribución puede ser parabólica (caso de sección rectangular o circular), cúbica (caso de una sección triangular), o de otro tipo. La figura 5.12 muestra el valor del máximo para una sección rectangular, y para una sección circular, que conocemos. Como conclusión puede recordarse que en este tipo de secciones macizas, el orden de magnitud de la tensión tangencial mayor en la sección será de unas 1.5 veces lo que correspondería a un reparto uniforme del cortante, y que este máximo ocurre a la altura del centro de áreas de la sección.



$$\sigma_{xy}^{\max} = 1.5 \frac{V_y}{b \cdot h}$$

$$\sigma_{xy}^{\max} = 1.33 \frac{V_y}{\pi R^2}$$

Figura 5.12: Valor de la máxima tensión tangencial en dos casos típicos

Recuérdese que la tensión tangencial debida al cortante se anula justamente donde la tensión normal debida a flexión es máxima: en los puntos superior e inferior de la sección. En la comprobación a plastificación de estos puntos no interviene por tanto la tensión cortante.

Secciones con Alma

En las secciones que sin ser de pared delgada poseen un “alma”, es decir, un rectángulo material más bien esbelto con su dimensión mayor orientada en la dirección de las cargas, puede suponerse que las tensiones asociadas al esfuerzo cortante existen solamente en el alma (o las almas, si hay varias).

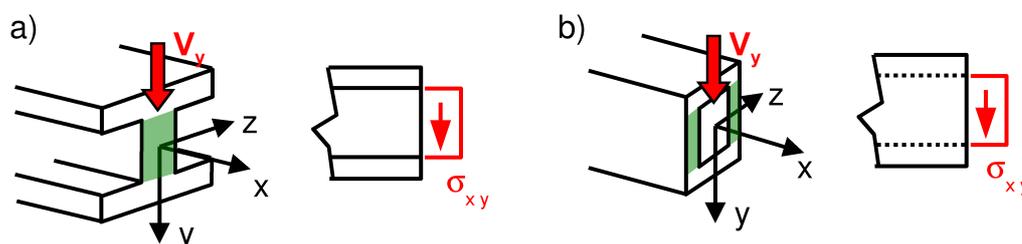


Figura 5.13: Tensiones tangenciales en secciones con material más allá del alma.

Hay que distinguir dos casos. El primer caso es aquel en el que la sección no termina en el alma, sino que existe material tanto antes como después, en la dirección de las cargas. Tal es el caso de la sección en “doble T” de la figura 5.13a (con un solo alma), o el de la figura 5.13b (con dos almas). En estos casos, el suponer reparto uniforme del todo el cortante en el alma es buena aproximación, y no viola el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, ya que entre el alma y el ala se transmiten las tensiones rasantes.

El segundo caso es aquel en que la sección no tiene más material en uno o ambos extremos de un alma (nuevamente en la dirección de las cargas). En este caso, la hipótesis de reparto uniforme sí que violaría evidentemente el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales. La figura 5.14a muestra una “doble T” soportando cargas en la dirección en que presenta su momento de inercia más débil. Lo que normalmente haría la función de alas, hace en este caso la función de almas. Las mismas deben tener tensión tangencial nula en sus extremos. Es buena aproximación considerar el cortante repartido entre ambas almas, con una distribución parabólica similar a la que se propuso para las secciones macizas, como se indica.

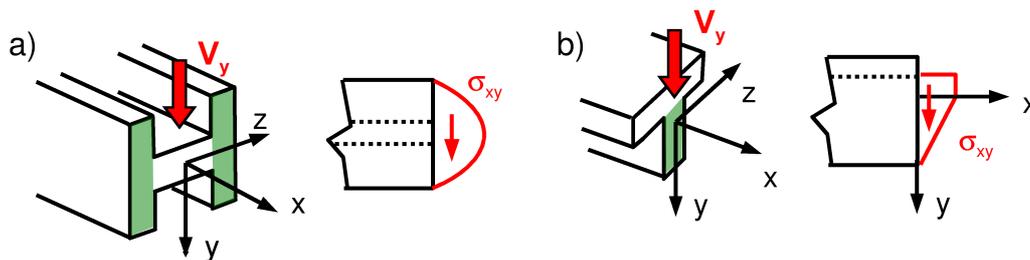


Figura 5.14: Tensiones tangenciales en secciones sin material más allá del alma.

La figura 5.14b muestra una sección “en T”, que en la parte inferior no tiene material más allá del alma. La distribución de tensiones tangenciales en este caso debe ser nula en ese extremo inferior del alma, aunque no tiene porqué serlo en el superior. Nuevamente es buena aproximación suponer el reparto de todo el cortante en el alma, si bien la forma de la distribución de dichas tensiones debe ser un poco más complicada. Inspirándonos en la solución obtenida para un ejercicio propuesto en el epígrafe anterior, podemos tomar como buena aproximación una evolución lineal de la tensión cortante desde el extremo libre del alma hasta el centro de áreas de la sección, y constante desde el centro de áreas hasta el encuentro del alma con el ala. Por supuesto, el valor de la tensión tangencial máxima (que corresponde a la zona constante, y que es el único parámetro a determinar) se calcula imponiendo que la distribución de tensiones σ_{xy} tenga como resultante el cortante V_y en la sección.

Como nota final a este tipo de secciones, nótese que la distribución de tensiones tangenciales en la transición entre el alma y el ala, y en el ala mismo, será complicada. Pero lo que más puede importarnos es cómo afectan esas tensiones a un punto de “y” máxima (de mayor σ_{xx}). La respuesta es que prácticamente nada, por lo que asumimos como buena aproximación el suponer que las alas no desarrollan ninguna tensión cortante.

Secciones de Pared Delgada

Las aproximaciones consistentes en repartir el cortante solamente en el alma que hemos sugerido para perfiles de pared gruesa, son igualmente aproximadas en perfiles de pared delgada. A efectos prácticos, y al nivel de aproximación que pretendemos en este apartado, la mayor diferencia entre un perfil grueso y uno delgado es que en este último habrá tensiones tangenciales en las alas que posiblemente no queramos despreciar, y que son conse-

cuencia de lo explicado acerca de la continuidad del flujo de tensiones para perfiles de pared delgada. En resumen, las distribuciones de tensión mostradas en la figura 5.9 podrían aproximarse por las de la figura 5.15, en las que se asume el reparto uniforme del cortante en el alma, y en todo caso se impondrá la continuidad del flujo en las esquinas y encuentros.

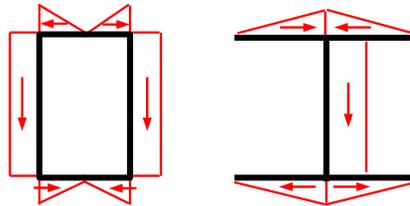


Figura 5.15 : Flujo de tensiones tangenciales en dos secciones de pared delgada

Noción de alabeo de la sección

Hemos asumido que la sección de permanece plana tras la deformación como una de las hipótesis centrales del modelo de barras. Sin embargo, como mostraremos a nivel informativo en este apartado, esa hipótesis es sólo aproximada, y es en rigor incompatible con la presencia de tensiones tangenciales.

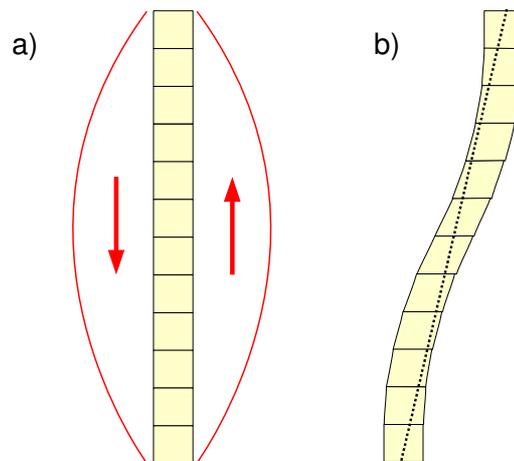


Figura 5.16: a) Rebanada diferencial, dividida en porciones. b) Deformación orientativa de la rebanada.

La figura 5.16a muestra una rebanada de la barra con una distribución de tensiones σ_{xy} típica. La rebanada se ha dividido en unas pocas porciones, que en el límite (si dividiésemos en infinitas porciones) serían elementos diferenciales en el plano x-y. La figura 5.16b se ha obtenido deformando individualmente dichas porciones “a sentimiento” (teniendo en cuenta que la tensión tangencial es mayor en el centro de la sección), y ensamblando las porciones deformadas. El resultado representa lo que sería aproximadamente la geometría de la sección deformada. Como se aprecia, la sección no permanece plana. Se aprecia también que si trazamos una “línea recta promedio” de la sección deformada, la misma no formaría el mismo ángulo (90°) con la línea de centros de áreas de las secciones (“línea media”). Téngase noticia de que los modelos habituales que consideran la deformación por cortante

(modelo de Timoshenko), lo hacen aproximando la sección alabeada por una plana como la indicada en puntos en la figura, cuyo giro consta del giro de la línea media más un giro adicional debido a la presencia de tensiones cortantes.

Noción de Centro de Esfuerzos Cortantes

Vamos a presentar de una manera sencilla el concepto de “centro de esfuerzos cortantes”. Reconsideremos un problema del tipo al ejercicio propuesto de la página 100, consistente en la flexión de una barra con perfil en “C”, de pared delgada. La figura 5.17a representa un ejemplo en el que la barra está empotrada en un extremo, y libre en el otro. Vamos a considerar el equilibrio de la porción de barra entre una sección PQR arbitraria, y el extremo libre de la barra. Con el fin de representar las tensiones en una superficie a la vista, la figura 5.17b muestra la porción de barra como se observaría desde un punto de cota x negativa (“desde atrás”). Como es habitual, para plantear el equilibrio de la porción de barra, pondremos en la superficie de corte las acciones necesarias, las cuales le serán transmitidas desde la otra parte de la viga. En esta explicación resultará más claro razonar directamente sobre las tensiones tangenciales, en lugar de usar “intermediarios” (como sería una reducción, por ejemplo V_y) para representarlas.

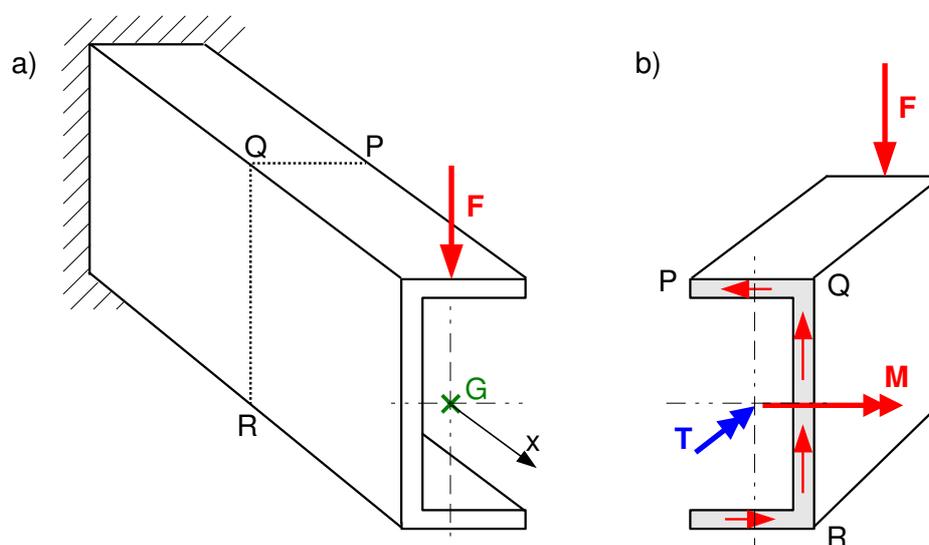


Figura 5.17: a) Un problema de flexión de una barra de perfil en "C". b) Necesidad de un momento torsor para el equilibrio.

Comenzamos por el equilibrio de fuerzas verticales. La fuerza aplicada F sólo puede ser equilibrada por las tensiones cortantes σ_{xs} del alma, que deberán tener resultante de valor F hacia arriba (será constante en la longitud de la viga).

El equilibrio de fuerzas horizontales se satisfará debido a que existen tensiones iguales y contrarias en las alas, como calculamos en el ejercicio aludido más arriba.

En este punto de la exposición empezamos a observar algunos detalles, seguramente inadvertidos hasta ahora: por una parte, las resultantes de las tensiones tangenciales en las alas forman un par de fuerzas, cuyo momento tiene sentido “-x”, y que será constante en la longitud de la viga. Por otra parte, la fuerza F y la resultante de las tensiones tangenciales en el alma forman un par, cuyo momento tiene componente fundamentalmente flectora, la cual crece con la longitud de la porción de viga analizada (esto no nos sorprende), aunque tiene también una componente de sentido “-x”. Nuevamente, esta componente es constante en la longitud de la viga. Por supuesto, todos estos momentos deben ser equilibrados de alguna manera.

El equilibrio de momentos de dirección z, se satisface de la forma habitual, mediante una distribución lineal de tensiones σ_{xx} , de la cual sólo se ha dibujado su momento resultante M en la figura 5.17 (su resultante es nula). El valor de M es el de F multiplicado por la longitud de viga considerada.

Nos quedan por equilibrar los momentos de dirección x, momentos torsores con los que no contábamos en un problema de flexión. Por ahora tenemos dos aportaciones, ambas de valor constante en la longitud de la viga, y ambas de sentido “-x”, por lo que no se cancelan sino que se suman. Por tanto, la sección deberá desarrollar unas tensiones adicionales equivalentes a un momento torsor de sentido “+x”, indicado como el momento “ T ” en la figura.

Como veremos en el tema de torsión, un perfil abierto de pared delgada como el considerado es precisamente lo peor en que podemos pensar para generar un sistema de tensiones (necesariamente tangenciales) equivalentes a un momento torsor. Básicamente ello es debido a que los momentos diferenciales deben generarse con un “brazo de palanca” del orden del espesor, que es muy pequeño, por lo que las tensiones deben ser muy grandes comparadas con las de otros perfiles trabajando en condiciones similares. La forma que tiene este sistema de tensiones no es objeto de este Tema, y no se muestra en las figuras.

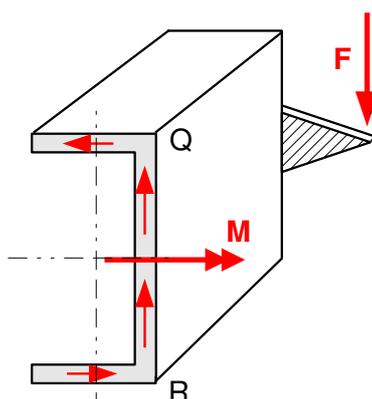


Figura 5.18: Aplicación de la carga de manera que no se generan tensiones de torsión: en el Centro de Esfuerzos Cortantes

Existe una manera de evitar que el perfil desarrolle tensiones equivalentes a un momento torsor. Se trata de aplicar la fuerza F de la manera mostrada en la figura 5.18 (a través de algún elemento auxiliar), de forma que el momento de F respecto del centro de áreas coincida justamente con el momento T aludido en la figura 5.17 (otra manera válida de pensar es

que el par formado por F y la tensión del alma tiene ahora sentido “+x”, y puede equilibrar al de sentido “-x” formado por las alas). De esta forma, la propia fuerza F proporciona el momento torsor que equilibra a los de las tensiones tangenciales debidas a flexión, y la sección no necesita generarlo con un sistema de tensiones tangenciales adicional. Se comprueba que la posición requerida para la carga equilibre los momentos torsores, no depende de la propia carga, sino que es característica de la sección. Esa posición se define como Centro de Esfuerzos Cortantes de la sección.

- Para ampliación de lo expuesto en este tema pueden consultarse las mismas referencias ^[13] ^[14] ^[1] ^[2] y ^[3] apuntadas en el tema anterior, ya que se trata básicamente de la misma materia (tracción-flexión de barras). Son de aplicación las mismas consideraciones apuntadas allí.

6.- Métodos Complementarios de Cálculo

En este tema presentaremos algunos procedimientos de cálculo, de aplicación principalmente a problemas de barras en tracción-flexión, que si bien no son estrictamente imprescindibles para el análisis y obtención de resultados, sí que los facilitan en gran medida. Por ejemplo, existen casos en los que solamente estamos interesados en los movimientos de alguna sección concreta. Este cálculo selectivo de giros y desplazamientos es parte de lo que algunos de los procedimientos expuestos a continuación pueden ofrecer.

El Principio de las Fuerzas Virtuales

El principio de las fuerzas virtuales (PFV) es un enunciado de gran importancia teórica en la mecánica de sólidos, aunque aquí vamos a centrarnos solamente en su aplicación práctica en el ámbito de las estructuras planas de barras. Su aplicación permitirá finalmente calcular de forma individual el giro o desplazamiento de la sección de la barra que se desee. El procedimiento resultante suele ser relativamente sencillo de aplicar, y es generalizable de forma prácticamente inmediata a sistemas de barras conectadas entre sí. Su aplicación requiere conocer previamente los esfuerzos en las barras.

De la manera que se presentó en el tema 3, el PFV puede entenderse como un caso particular del PTV (principio de los trabajos virtuales), en el que el campo “real” es el de desplazamientos y deformaciones de nuestro problema, y el campo “virtual” consta de unas tensiones cualesquiera (con sus acciones correspondientes), que en general no corresponden al problema “real”. El éxito y facilidad de aplicación del PFV a un caso concreto depende de que la elección de este campo virtual sea la adecuada para el propósito requerido.

La mencionada particularidad de que sea necesario “elegir” de forma juiciosa el campo virtual a utilizar, hace que este procedimiento sea poco apto para su implementación en ordenador. Ello sucede en general con cualquier método que implique procesos de decisión.

En este apartado no se pretende ilustrar toda la flexibilidad que la aplicación del PFV permite (y que se apreciará en el tema siguiente, y en los ejercicios), sino simplemente obtener una forma de (3.27) particularizada al caso que nos ocupa, es decir:

- que el “sólido” considerado sea un sistema de barras.
- que las barras trabajen a tracción-flexión en el plano.
- que el campo virtual sea el de desplazamientos.

Por claridad, distinguiremos las magnitudes virtuales con un superíndice “ ϕ ”, en lugar de denominarlo “estado (1)”, y no usaremos ninguna indicación especial para las magnitudes reales. En el modelo de barras, hemos despreciado las tensiones σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{yz} . Adicional-

mente hemos despreciado las deformaciones γ_{xy} , γ_{xz} , debidas a las tensiones cortantes en la sección, σ_{xy} , σ_{xz} , por lo que es coherente despreciar los términos de trabajo virtual que contengan estas deformaciones. Con estas consideraciones, el miembro izquierdo de (3.27) se reduce a:

$$\int_V \sigma_{xx}^{\varphi} \varepsilon_{xx} dV \quad (6.1)$$

En la geometría de la barra, es conveniente escribir el diferencial de volumen como un diferencial en el sentido longitudinal de la barra (dx) multiplicado por un diferencial de área de la sección ($dA=dy \cdot dz$). Por otra parte, en los problemas de estructuras planas que nos ocupan, el momento flector M_y será nulo, y los ejes “y”, “z”, serán principales de inercia de la sección, por lo que

$$\sigma_{xx}^{\varphi} = \frac{N^{\varphi}}{A} + \frac{M_z^{\varphi}}{I_z} y \quad ; \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{N}{EA} + \frac{M_z}{EI_z} y$$

Con estas consideraciones, (6.1) se expresa como:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{xx}^{\varphi} \varepsilon_{xx} dV &= \int_L \int_A \left(\frac{N^{\varphi}}{A} + \frac{M_z^{\varphi}}{I_z} y \right) \left(\frac{N}{EA} + \frac{M_z}{EI_z} y \right) \cdot dA \cdot dx = \\ &= \int_L \left[\int_A \frac{N^{\varphi} N}{EA^2} dA + \int_A \frac{N^{\varphi} M_z}{A EI_z} y dA + \int_A \frac{M_z^{\varphi} N}{I_z EA} y dA + \int_A \frac{M_z^{\varphi} M_z}{I_z EI_z} y^2 dA \right] dx = \\ &= \int_L \left[\frac{N^{\varphi} N}{EA^2} \int_A dA + \frac{N^{\varphi} M_z}{A EI_z} \int_A y dA + \frac{M_z^{\varphi} N}{I_z EA} \int_A y dA + \frac{M_z^{\varphi} M_z}{I_z EI_z} \int_A y^2 dA \right] dx = \\ &= \int_L \left[\frac{N^{\varphi} N}{EA} + \frac{M_z^{\varphi} M_z}{EI_z} \right] dx \end{aligned}$$

Donde L indica que la integración debe realizarse en la longitud de la barra o las barras. Se han eliminado los términos que se anulan por contener la coordenada “y” del centro de áreas (nula). Éste es el “trabajo virtual interno”, que consta de un sumando que afecta al esfuerzo axil, y otro debido al momento flector. El primer sumando suele ser despreciable frente al segundo cuando existe flexión en las barras, pero el es único sumando a considerar en problemas de cerchas y otras celosías, en que las barras sólo trabajan a tracción o compresión (el estudio de dichas estructuras no está programado para este curso).

Dicho trabajo virtual interno debe ser igual al “trabajo virtual externo”, es decir el que realizarían las acciones aplicadas virtualmente al desplazarse según los movimientos reales. Enunciamos con ello el PFV para su aplicación en barras como:

$$\int_L \left[\frac{N^{\varphi} N}{EA} + \frac{M_z^{\varphi} M_z}{EI_z} \right] dx = \left[\begin{array}{c} \text{trabajo} \\ \text{virtual externo} \end{array} \right] \quad (6.2)$$

Hemos optado por usar una denominación genérica para este trabajo virtual externo. A continuación comentamos la forma que adopta en algunos casos particulares.

Si nos proponemos aplicar (6.2) al cálculo del desplazamiento en un punto, lo oportuno será considerar un problema virtual cuyas cargas consistan en una fuerza de valor unidad aplicada en el punto de interés, y en la dirección en la que se pretende obtener la componente de desplazamiento.



Figura 6.1: Problema virtual para el cálculo del desplazamiento en A.

Si por ejemplo se quiere obtener el desplazamiento del extremo “A” de la viga en voladizo de la figura 6.1, el problema virtual deberá tener una carga vertical F^φ (de módulo unidad) en ese extremo, como se indica. Nótese que las tensiones en el empotramiento del problema virtual no realizarán trabajo, al no moverse los puntos de esa sección (por existir también un empotramiento en el problema real). El cálculo de las funciones de momentos flectores $M(x)$ y $M^\varphi(x)$ asociadas a ambos problemas se realizaría sin dificultad, y aplicando (6.2),

$$\int_{x=0}^L \frac{M_z^\varphi(x)M_z(x)}{EI_z} dx = 1 \cdot u_y(A)$$

Que ofrece el resultado buscado. Cuando nos proponemos aplicar (6.2) al cálculo del giro de una sección, procede plantear un problema virtual cuyas cargas consistan en un momento H^φ (de módulo unidad) aplicado en la cota x de esa sección. La figura 6.2 muestra el procedimiento para calcular el giro en A, en el mismo ejemplo anterior.



Figura 6.2: Problema virtual para el cálculo del giro en A.

$$\int_{x=0}^L \frac{M_z^\varphi(x)M_z(x)}{EI_z} dx = 1 \cdot \phi(A)$$

En este ejemplo, obtendremos que el miembro izquierdo es negativo. Ello quiere decir que el trabajo virtual, tanto interno como externo, es negativo. Es decir que el giro de A tiene sentido contrario al momento virtual planteado. En efecto, conocemos sobradamente que en este caso el giro en A será horario, mientras que hemos puesto el momento virtual en sentido antihorario.

Con el fin de ilustrar alguna de las posibilidades no tan evidentes de la aplicación del PFV, consideremos el pórtico de la figura 6.3. Se trata de un problema del tipo que llamaremos “hiperestático”, y que hasta el tema 7 siguiente no aprenderemos a resolver. Por cierto, según se verá, el propio PFV puede ayudar a resolver el problema hiperestático. Independientemente de lo anterior, asumamos aquí que de una u otra manera conocemos las funciones $M(x)$ de momentos flectores en cada barra. En este punto, queremos calcular el desplazamiento vertical del punto medio del dintel del pórtico.

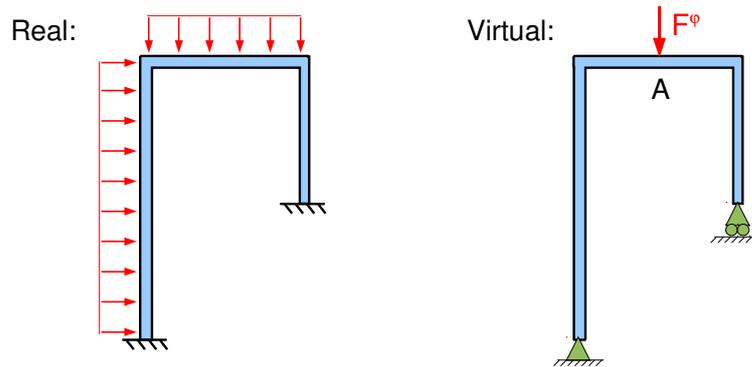


Figura 6.3: Problema virtual para el cálculo del desplazamiento vertical del punto medio A del dintel.

Para ello, y sin pretender que sea la mejor opción, podríamos plantear el problema virtual mostrado también en la figura 6.3. Como se aprecia, dicho problema virtual tiene una sustentación diferente que el problema real. Se ha planteado así porque resulta más sencillo de resolver (cae dentro de la categoría de problemas que llamaremos “isostáticos”, cuyos esfuerzos pueden obtenerse a partir de razonamientos de equilibrio, y que sabríamos calcular en este momento del curso). Si despreciamos las deformaciones debidas al axil, y usamos una coordenada local “x” para cada barra, el desplazamiento buscado puede obtenerse de una expresión como

$$\int_{\text{barras}} \frac{M_z^{\phi}(x)M_z(x)}{EI_z} dx = 1 \cdot u_y(A)$$

Nótese que en efecto, no hay trabajo virtual asociado a las diferencias entre las condiciones de sustentación de los problemas real y virtual: las reacciones en los apoyos del problema virtual se multiplicarán por los desplazamientos en los empotramientos del problema real, los cuales son nulos.



En este punto, el lector puede estar pensando si no sería más fácil considerar el dintel aislado y, conocido su diagrama de momentos, trazar los de giros y desplazamientos, pudiendo además encontrar así el punto de desplazamiento máximo. Y algo similar respecto a los ejemplos de las figuras 6.1 y 6.2. No falta razón en esos pensamientos. De hecho, es recomendable sopesar en cada caso la conveniencia o no de utilizar alguno de los “métodos complementarios de cálculo” incluidos en este tema, en favor del procedimiento general de integración presentado en el tema 4. No obstante, la experiencia mostrará que, preferencias personales aparte, en unas situaciones es mucho más cómodo aplicar un procedimiento como el basado en el PFV, y en otras ocasiones lo es plantear el esquema estándar de integración, ya sea explícita o no. Finalmente apuntar que el PFV ofrece probablemente la mayor versatilidad y funcionalidad dentro de estos “métodos complementarios de cálculo”.

La viga conjugada

El artificio de cálculo llamado “método de la viga conjugada”, se basa en el hecho conocido de que en la secuencia de magnitudes $p_y(x)$, $V_y(x)$, $M_z(x)$, $EI_z \cdot \phi_z(x)$, $EI_z \cdot u_y(x)$, salvo una posible cuestión de signo, la derivada de cada magnitud es el valor de la función anterior en cada punto. Esto permite plantear una analogía formal entre la terna de magnitudes p_y , V_y , M_z , y la terna de magnitudes M_z , $EI_z \cdot \phi_z$, $EI_z \cdot u_y$. Al “problema análogo” que resulta de la analogía anterior se le llama “viga conjugada”, y básicamente es una viga cuyas “cargas” \bar{p}_y estuviesen descritas por la función $M_z(x)$ de la viga original. El siguiente esquema resume la analogía entre magnitudes. Las de la viga conjugada se denotan con un subrayado.

Viga original	Viga conjugada
p_y	
V_y	
M_z	\bar{p}_y
$EI_z \cdot \phi_z$	$-\bar{V}_y$
$EI_z \cdot u_y$	\bar{M}_z

El planteamiento de la viga conjugada requiere adaptar sus condiciones de contorno, que en general no serán las mismas que las de la viga original. Por ejemplo, si la viga original tiene desplazamiento nulo en sus extremos, la viga conjugada debe tener momento flector \bar{M}_z nulo en dichos extremos. Esas condiciones son compatibles con apoyos en los extremos, tanto en la viga original como en la conjugada (como excepción en este caso las condiciones de contorno de ambas son las mismas), y constituyen el caso más típico de aplicación de la viga conjugada.

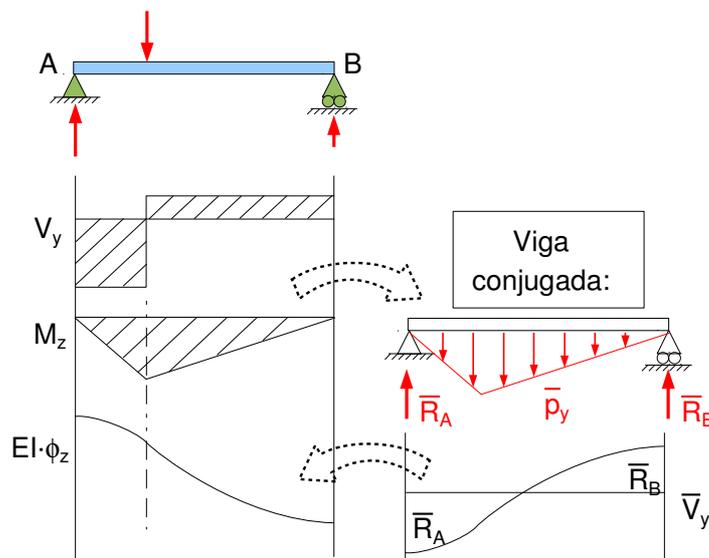


Figura 6.4: Uso de la viga conjugada para el cálculo de giros.

Como ejemplo de lo anterior, consideremos el trazado de los diagramas de la viga de la figura 6.4, siguiendo el proceso de integración sucesiva habitual. Llegados al diagrama de giros (etapa representada en la figura), podemos saber su forma pero no los valores absolu-

tos de los giros. Si estamos realizando una integración explícita deberemos plantear el giro en $x=0$ como incógnita, a determinar más tarde con las condiciones en desplazamientos. Si estamos realizando una integración “a mano alzada”, deberemos estimar la posición de la recta horizontal que divida a la gráfica de giros en dos áreas iguales.

Podemos obviar las complicaciones anteriores planteando la viga conjugada, la cual tendrá en este caso las mismas condiciones de apoyo que la original. Las reacciones de la viga conjugada serán los valores de su cortante \bar{V}_y en los extremos, que a su vez son los valores de $EI_z \cdot \phi_z$ de la viga real (en este caso con signo negativo). Sabidos los valores de los giros, podemos continuar con el trazado de desplazamientos usando integración, ya sea explícita o no. Equivalentemente, también podemos continuar obteniendo \bar{M}_z en la viga conjugada.

Una aplicación similar puede plantearse por ejemplo en vigas continuas. Considérese que queremos calcular los desplazamientos en el tramo derecho de la viga continua de la figura 6.5. Asíumase que se conocen los momentos flectores, que son los representados.

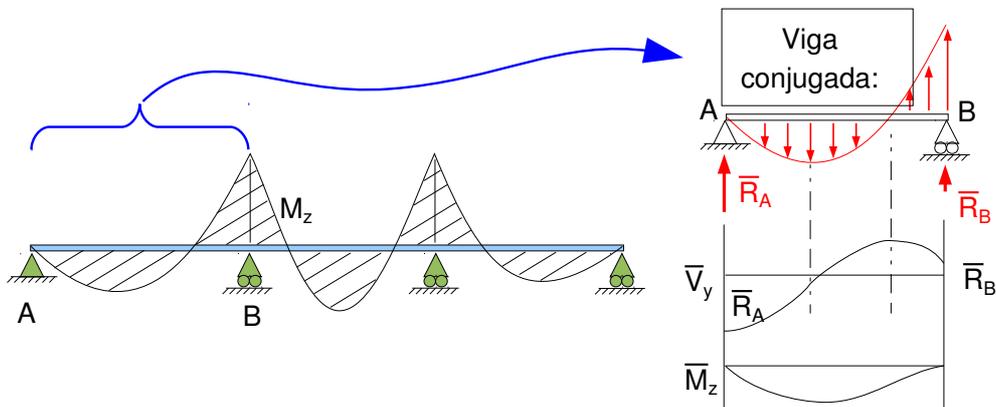


Figura 6.5: Viga conjugada para un tramo de viga continua.

Como en el caso anterior, la viga conjugada debe tener $\bar{M}_z=0$ en los extremos, puesto que en el problema original es $u_y=0$ en esos puntos. Por tanto, podemos calcular $EI_z \cdot u_y(x)$ como $\bar{M}_z(x)$ en la viga conjugada, tal como se indica en la figura.



Es posible plantear la analogía de la viga conjugada para otras condiciones de apoyo. Por ejemplo, es fácil razonar que si la viga original es empotrada-libre, la viga conjugada debe ser libre-empotrada. No se entrará en más casuística aquí. Más bien se anima al lector a que llegado un caso particular piense en la función $M_z(x)$ del problema original en términos abstractos como: “una función que debo integrar dos veces de forma que el resultado sea nulo al comienzo y al final del intervalo”. O como: “la integral primera de la función debe anularse al comienzo del intervalo, y la integral segunda también” (ésto se correspondería con un empotramiento). Y seguidamente razonar si el problema es formalmente análogo al de un cálculo de reacciones, cortantes, y flectores conjugados, en el que la carga fuese la función de momentos flectores original.

Los teoremas de Mohr

Los Teoremas de Mohr inciden nuevamente en facilitar relaciones que permitan el cálculo de giros y desplazamientos cuando se conoce la evolución de los momentos flectores.

El primer Teorema de Mohr ya ha venido siendo utilizado en el curso, aunque sin referirlo con un nombre particular. Se trata en realidad de la aplicación directa de la primera de las ecuaciones (4.16) que se reproduce en una forma análoga por comodidad:

$$EI_z \phi_z(B) = EI_z \phi_z(A) + \int_A^B M_z(x) dx \quad (6.3)$$

El primer Teorema de Mohr se enuncia pues como sigue:

El giro de una sección en un punto $x=B$ de la viga, es igual al giro en otro punto $x=A$, más el área de la gráfica de momentos flectores entre ambos puntos, dividida por EI_z .

El segundo Teorema de Mohr nos ofrece una relación que involucra al desplazamiento de un punto. Se obtiene considerando la distancia en dirección "y" de un punto B de la deformada de la viga hasta la tangente a otro punto A.

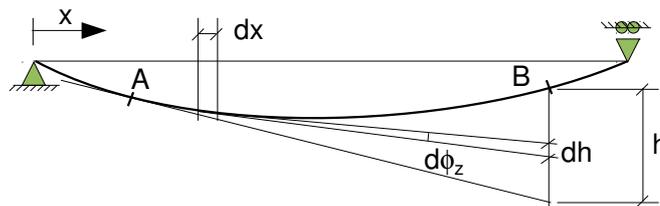


Figura 6.6: Distancia h de un punto B hasta la tangente a otro punto A..

La figura 6.6 muestra como realizar el cálculo de esa distancia, asumiendo la aproximación de que el diferencial de la distancia "h" que queremos obtener se puede medir como $dh = (x_B - x) \cdot d\phi_z$, lo que será razonable si la curvatura de la viga es pequeña. Usando (4.7b), o el primer teorema de Mohr aplicado a un diferencial, tenemos $EI_z \cdot d\phi_z = M_z \cdot dx$. Llevando el $d\phi_z$ de esta expresión a la del dh e integrando, tenemos:

$$h = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_z}{EI_z} (x_B - x) \cdot dx \quad (6.6)$$

Apreciamos que el integrando contiene el momento estático del área $M_z(x)dx$ respecto del punto B (ya que está multiplicado por su distancia $x_B - x$ al punto B). El segundo Teorema de Mohr se enuncia pues:

La distancia de un punto B de la deformada de la viga hasta la tangente en otro punto A, es igual al momento estático del área de momentos flectores respecto de B, dividida por EI_z .

Este enunciado ofrece directamente resultados de interés cuando existe un empotramiento en A, entre otros casos.

El teorema de Castigliano

El Teorema de Castigliano nos permitirá calcular de manera sencilla el desplazamiento de un punto que tenga aplicada una fuerza en él. Más concretamente, la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza. Se trata de un enunciado no tan versátil en su aplicación como pueda serlo el PFV, aunque en ocasiones ofrece una manera más directa de obtener un resultado de interés. Se presenta aquí fundamentalmente por ser una referencia muy frecuente en la literatura.

Consideramos un sistema de fuerzas $\mathbf{F}(P_k)$ actuando en los puntos P_k ($k=1\dots n$) del "sólido". No requeriremos que el sólido tenga una forma particular, pero sí que solamente sean las fuerzas consideradas las que provocan su energía de deformación. En concreto, no habrá trabajo asociado a los apoyos (impondrán desplazamiento nulo), y no habrá otras acciones, por ejemplo térmicas, que intervengan en el trabajo de deformación.

Bajo esas condiciones, el trabajo de deformación será función solamente de estas fuerzas:

$$T = f (\mathbf{F}(P_1), \mathbf{F}(P_2), \dots, \mathbf{F}(P_n))$$

Pensemos que tras aplicar las fuerzas incrementamos diferencialmente una de esas fuerzas, en $d\mathbf{F}(P_k)$. El trabajo de deformación será (salvo diferenciales de orden superior):

$$T + \frac{\partial T}{\partial F(P_k)} dF(P_k) \quad (6.7)$$

En donde la derivada se realiza respecto del módulo de la fuerza $\mathbf{F}(P_k)$, y el diferencial se toma asimismo respecto del módulo de la fuerza. Como el orden en que se aplican las fuerzas no afecta al valor final del trabajo de deformación, podemos suponer que primero se aplica $d\mathbf{F}(P_k)$, y después el resto de las fuerzas. En esta historia de carga distinguimos tres partes del trabajo:

- El realizado en primer lugar al aplicar $d\mathbf{F}(P_k)$. Será diferencial de 2º orden, puesto que tanto la fuerza como el desplazamiento serán diferenciales. Es por tanto despreciable en el orden de exactitud considerado en (6.7).
- El realizado en segundo lugar por las fuerzas \mathbf{F} al aplicar las mismas. Éste trabajo no se ve afectado por la presencia previa adicional de la fuerza diferencial $d\mathbf{F}(P_k)$. Por lo tanto vale T .
- El realizado por la fuerza diferencial $d\mathbf{F}(P_k)$ cuando el punto P_k experimenta el desplazamiento debido al resto de fuerzas. Éste desplazamiento es el que el punto tiene en el estado de carga originalmente considerado, y que denotamos como $\mathbf{u}(P_k)$. Como la fuerza diferencial permanece constante en ese recorrido, el trabajo será $\mathbf{u}(P_k) \cdot d\mathbf{F}(P_k)$. Por conveniencia, llamemos \mathbf{e}_k al vector unitario (adimensional) en la dirección de $\mathbf{F}(P_k)$, con lo que este trabajo puede escribirse como $\mathbf{u}(P_k) \cdot \mathbf{e}_k \cdot dF(P_k)$.

Igualando el trabajo según ambas historias de carga, tenemos:

$$T + \frac{\partial T}{\partial F(P_k)} dF(P_k) = T + \mathbf{u}(P_k) \cdot \mathbf{e}_k \cdot dF(P_k)$$

Es decir:

$$\frac{\partial T}{\partial F(P_k)} = \mathbf{u}(P_k) \cdot \mathbf{e}_k \quad (6.8)$$

El Teorema de Castigliano se enuncia por tanto como sigue:

La componente de desplazamiento en la dirección de la fuerza de un punto que tiene aplicada una fuerza, es igual a la derivada de la energía de deformación respecto del módulo de dicha fuerza.

En el enunciado anterior se ha sustituido el término “trabajo de deformación” (asociado a fuerzas aplicadas) por “energía de deformación” (asociado a variables internas), pensando en usar una forma de la energía del tipo al miembro izquierdo de (6.2). En concreto, si aplicamos a la energía de deformación (3.25) las mismas manipulaciones que se han aplicado a (6.1) para obtener (6.2), es inmediato obtener dicha energía de deformación en la forma

$$T = \int_L \frac{1}{2} \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right] dx \quad (6.9)$$

En donde la integral se extiende a todas las barras. En su aplicación práctica, no se calcula la expresión (6.9) anterior para después hacer su derivada en (6.8), sino que es preferible derivar antes (6.9). Si se trata de un problema de barras a flexión, la deformación debida al axil suele ser despreciable o nula, por lo que sólo se considera el segundo sumando.

$$\frac{\partial T}{\partial F(P_k)} = \int_L \frac{M_z}{EI_z} \frac{\partial M_z}{\partial F(P_k)} dx \quad (6.10)$$

Que es la expresión que podemos usar en (6.8) para este tipo de problemas. La derivada parcial de M_z respecto a $F(P_k)$ puede entenderse como el incremento de M_z por unidad de $F(P_k)$, y en las condiciones de proporcionalidad que manejamos (implícitas en el uso de una expresión como (6.9)), puede calcularse como la distribución $M_z(x)$ para $F(P_k)=1$. Notar también que, aunque no se ha indicado explícitamente en (6.8), en este tipo de estructuras la acción podría ser igualmente un momento $M(P_k)$, en cuyo caso el miembro derecho de (6.8) nos daría el giro en el punto P_k .

Si se trata de un problema de barras a tracción-compresión (sin flexión), sólo el primer sumando de (6.9) es aplicable. En este caso tendremos:

$$\frac{\partial T}{\partial F(P_k)} = \int_L \frac{N}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial F(P_k)} dx \quad (6.11)$$

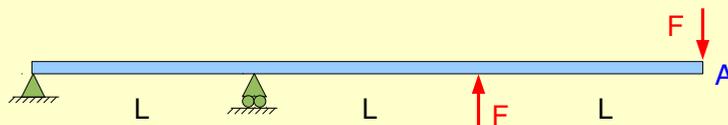
En donde nuevamente la derivada del axil respecto de la fuerza $F(P_k)$ puede entenderse como el incremento de N por unidad de $F(P_k)$, y puede calcularse como la distribución $N(x)$ que resulta para $F(P_k)=1$. Adicionalmente, es frecuente que este tipo de estructuras sean cerchas, vigas en celosía, u otras armaduras similares, en las que el axil es constante en

cada barra. En ese caso el cálculo de la integral sobre cada barra es trivial, y resulta fácil expresar la integral de (6.11) mediante un sumatorio extendido al número de barras.

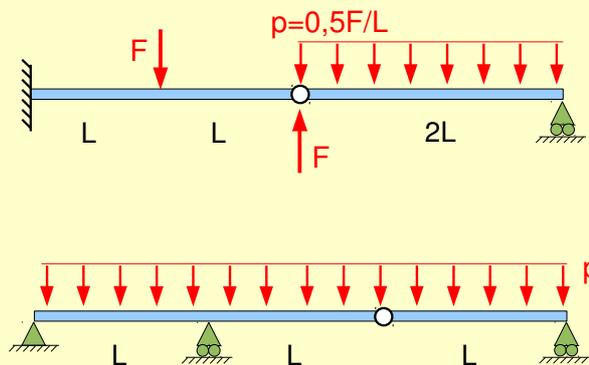
EJERCICIOS PROPUESTOS

El mayor provecho de los métodos de cálculo presentados se obtendrá en su aplicación al tipo de problemas tratados en el tema siguiente. No obstante, será provechoso trabajar los ejercicios sugeridos a continuación.

- Trace los diagramas V_y - M_z - ϕ_z - u_y de la viga siguiente usando estimaciones, y seguidamente compare sus estimaciones del giro y desplazamiento en A con sus valores exactos, los cuales obtendrá mediante aplicación del PFV.



- Calcule el desplazamiento de la rótula y el giro a ambos lados de la misma en los dos últimos problemas propuestos en la página 93 (se reproducen seguidamente por comodidad). Se sugiere usar el PFV. Eventualmente, puede comparar el resultado con la solución que obtuvo allí usando estimaciones.



- Para ampliación de lo expuesto en este tema pueden consultarse las mismas referencias ^[13] ^[14] ^[1] ^[2] y ^[3] apuntadas en los dos temas anteriores, ya que se trata básicamente de la misma materia (tracción-flexión de barras). Son de aplicación las mismas consideraciones apuntadas allí.

7.- Estructuras de Barras

Concepto de Hiperestaticidad

Comenzaremos definiendo el número de grados de libertad (abreviadamente gdl) de un sistema mecánico de elementos indeformables, como el número de parámetros necesarios para especificar su posición en el espacio.

Por ejemplo, si consideremos el problema de un sólido indeformable en el plano, sin apoyos, como el de la figura 7.1a, su posición queda especificada mediante las dos coordenadas (x,y), de un punto P, y el ángulo que forme una recta trazada en el sólido con el eje x, entre otras posibilidades. En total son tres parámetros, luego el sistema tiene tres grados de libertad. Si disponemos un apoyo fijo en el punto P, como en la figura 7.1b, sólo necesitaremos un ángulo para especificar la posición del sistema, luego éste tiene ahora un gdl. Decimos que el apoyo fijo ha restringido $3-1=2$ grados de libertad. Si el apoyo es móvil como en la figura 7.1c (en lugar de fijo), necesitamos posicionar la coordenada x del apoyo y el ángulo, con lo que el sistema tiene 2gdl. Decimos que el apoyo móvil restringe $3-2=1$ gdl.

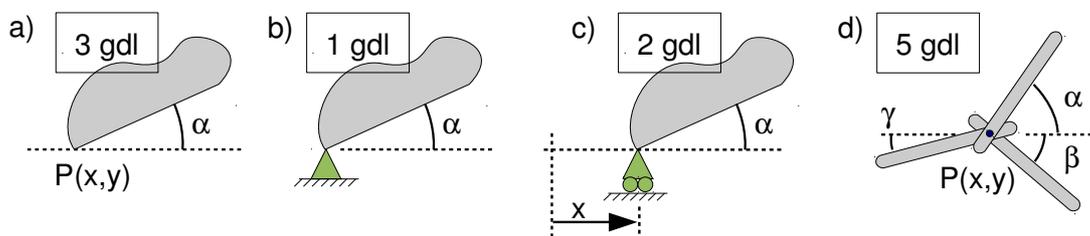


Figura 7.1: Número de grados de libertad de algunos sistemas mecánicos sencillos

Otro ejemplo más se muestra en la figura 7.1d. Consta de tres barras en el plano unidas mediante una articulación por uno de sus extremos. Necesitamos dos coordenadas (x,y) para especificar la posición del punto P de la articulación, y un ángulo para posicionar cada barra conectada al apoyo. En total el sistema tiene 5gdl. Antes de ejecutarse la articulación, las tres barras libres en el plano tenían $3 \times 3=9$ gdl. Por tanto decimos que la articulación ha restringido $9-5=4$ gdl.

Los ejemplos anteriores muestran cómo los apoyos exteriores por una parte, y las conexiones entre elementos del sistema por otra, restringen algunos de los grados de libertad de los sólidos implicados. Si el sistema tiene exactamente cero grados de libertad, se dice que es isostático.

Si el sistema tiene un número negativo de grados de libertad, se dice que es hiperestático. Se llama grado de hiperestaticidad al número de grados de libertad cambiado de signo.

La figura 7.2 muestra algunos ejemplos de sistemas isostáticos e hiperestáticos.

Los sistemas reales que tienen un número positivo de grados de libertad se corresponden con mecanismos de distintos tipos. Por supuesto, deseamos que nuestras estructuras de barras no tengan grados de libertad en el sentido considerado aquí, ya que precisamente tratamos de construir un sistema que oponga su rigidez frente a la aplicación de cargas. Por tanto hablamos solamente de estructuras isostáticas, o bien hiperestáticas.

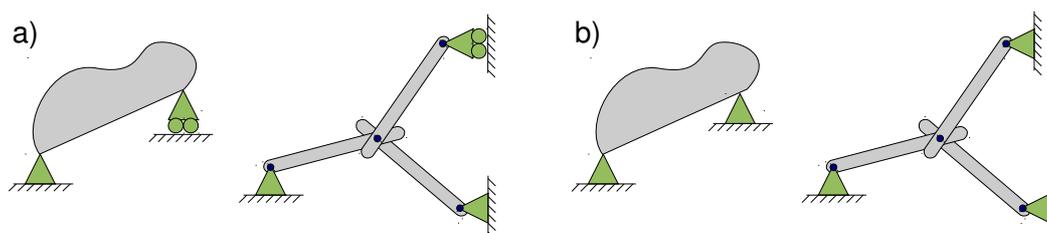


Figura 7.2: a) Sistemas isostáticos. b) Sistemas hiperestáticos (de grado 1)

Vamos a obtener una fórmula general que permita calcular el número de grados de libertad de una estructura de barras en el plano (será un número negativo, que indicará el grado de hiperestaticidad). Razonamos del siguiente modo:

- Antes de ensamblar las barras de la estructura, o poner apoyos, tenemos las “b” barras como sólidos independientes en el plano, cada una con 3 gdl. Por tanto, antes de ensamblar la estructura tenemos $3b$ grados de libertad.
- Si tomamos b_i barras y ejecutamos entre ellas un nudo articulado (el nudo “i”, en el que confluyen esas b_i barras), podemos posicionar la primera barra libremente (no pierde gdl), pero la segunda queda con un solo gdl, luego pierde dos (ya habíamos conectado un sólido a una articulación fija en la figura 7.1b). La tercera barra queda igualmente con un grado de libertad, luego pierde dos, y así sucesivamente. La ejecución del nudo articulado restringe dos gdl por cada barra que confluya en el nudo, a partir de la primera. Luego se restringen $2(b_i-1)$ grados de libertad. Puede compararse este resultado con la figura 7.1d.
- Un nudo rígido es aquel en el que todos los extremos de barra que confluyen comparten el desplazamiento y el giro. Si tomamos b_i barras y ejecutamos entre ellas un nudo rígido (el nudo “i”, en el que confluyen las b_i barras), como antes podemos posicionar la primera barra libremente (no pierde gdl), pero la segunda queda sin libertad de movimiento una vez conectada, luego ha perdido sus 3 gdl. La tercera que conectemos también perderá sus 3 gdl, y así sucesivamente. La ejecución del nudo rígido restringe tres gdl por cada barra que confluya en el nudo, a partir de la primera. Luego se restringen $3(b_i-1)$ grados de libertad. La figura 7.3 ilustra un caso de ejecución de nudo rígido con cuatro barras (inicialmente teníamos $4 \times 3 = 12$ gdl, tras ensamblar resulta un conjunto rígido, por tanto con 3 gdl, luego se han restringido $12 - 3 = 9$ gdl).
- Finalmente, un apoyo móvil, fijo, o un empotramiento, restringen 1, 2, o 3 gdl, respectivamente.

Por tanto el número de grados de libertad de la estructura será finalmente:

$$3 \cdot b - \sum_{\text{articulados}} 2(b_i - 1) - \sum_{\text{rígidos}} 3(b_i - 1) - 3e - 2f - 1m \quad (7.1)$$

Siendo “b” el número total de barras, b_i el número de barras que confluyen en el nudo “i” (que puede ser articulado o rígido), “e” el número de empotramientos, “f” el número de apoyos fijos, y “m” el número de apoyos móviles.

Como se ha dicho, el grado de hiperestaticidad es el número de gdl cambiado de signo. El resultado dado por (7.1) es el número de gdl, y será negativo ó nulo si se trata de una estructura. El grado de hiperestaticidad es ese número cambiado de signo.

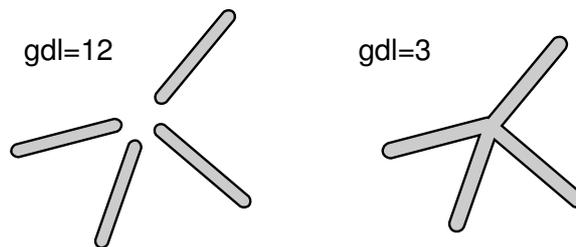


Figura 7.3: Nudo rígido. Antes de ensamblar, las barras tienen 12 gdl. Después de ensamblar forman un conjunto rígido, con 3gdl.



El mayor interés de calcular el grado de hiperestaticidad reside en que en una estructura isostática bien concebida es posible calcular las reacciones en los apoyos y los esfuerzos en las barras sin utilizar más ecuaciones que las del equilibrio estático, independientemente de que los miembros se consideren rígidos o no. El análisis de una estructura hiperestática requiere obligatoriamente considerar la deformación de sus miembros.

Para facilitar el cálculo mental (sin usar (7.1)) del grado de hiperestaticidad, podemos distinguir entre hiperestaticidad interior y exterior de las estructuras. Centrándonos en el caso de estructuras planas de barras, pueden aplicarse las siguientes definiciones:

- Hiperestaticidad exterior es el número de grados de libertad que restringen los apoyos, menos 3.
- Hiperestaticidad interior es el grado de hiperestaticidad que tendría la estructura si prescindimos de sus apoyos, más 3.

El grado de hiperestaticidad exterior se identifica fácilmente, ya que coincide con los gdl restringidos por la sustentación, a partir del tercero. La hiperestaticidad interior suele ser fácilmente apreciable si consideramos la estructura sin apoyos y realizamos mentalmente alguna operación que libere grados de libertad, como quitar (o “romper”) una barra o introducir una articulación. Si es posible hacerlo y que la estructura continúe siendo un conjunto rígido, es que es internamente hiperestática. El número de gdl que podamos liberar antes de que la estructura deje de ser un conjunto rígido, coincide con el grado de hiperestaticidad

interna. El grado de hiperestaticidad (total) de una estructura siempre puede obtenerse sumando sus grados de hiperestaticidad interior y exterior.

Anteriormente hemos hecho referencia a que en una estructura isostática “bien concebida”, será posible calcular los esfuerzos usando sólo las ecuaciones de la estática. El apelativo de “bien concebida” refiere a que pueda resistir las cargas sin experimentar movimientos relativos de tipo mecanismo entre sus partes. Generalmente, los casos de estructuras isostáticas externa e internamente (figura 7.4a, b), y algunas estructuras isostáticas que son externamente hiperestáticas, pero que internamente son “mecanismos” (figura 7.4c, d, e), cumplen con esa condición. En todos los casos isostáticos de la figura 7.4 es posible el cálculo de reacciones y esfuerzos usando las ecuaciones de la estática, para unas cargas dadas.

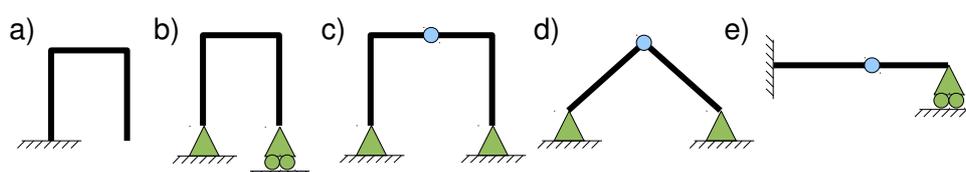


Figura 7.4: Ejemplos de estructuras isostáticas (“bien concebidas”).

Sin embargo, es difícil dar un criterio universal acerca de cuando una estructura está “bien concebida”, basándonos solamente en el grado de hiperestaticidad global interno y externo. La casuística de estructuras extrañas que pueden tener uniones “sobrantes” en unas zonas y tener posibilidades de movimiento relativo en otras, es demasiado compleja. Ni siquiera el que el grado de hiperestaticidad sea mayor que cero garantiza que la estructura esté “bien concebida” en el sentido de ser un conjunto rígido capaz de soportar cargas. Por ejemplo, la figura 7.5a muestra un ejemplo hiperestático de grado 2, que está “mal concebido” como estructura. La figura 7.5b muestra una configuración isostática, también absurda si se trata de emplear como estructura (en ambos casos el grado de hiperestaticidad está calculado según (7.1)).

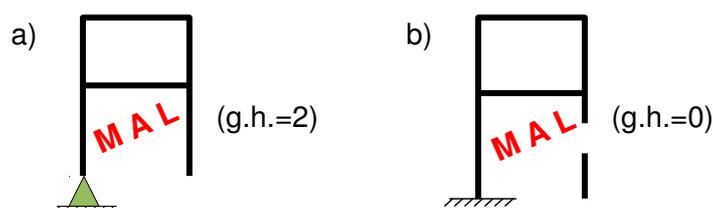


Figura 7.5: Dos ejemplos (hiperestático e isostático) de configuración “mal concebida”.

Hay que admitir por tanto que finalmente puede ser necesario un análisis individualizado de una configuración particular en casos complicados. Las pautas presentadas, basadas en el grado de hiperestaticidad, deben considerarse como un buen punto de partida, suficiente en los casos más típicos, tanto para identificar que una estructura puede trabajar como tal (el g.h. debe ser mayor o igual que cero), como para saber de antemano si podremos calcular las reacciones y esfuerzos sin más ecuaciones que las de equilibrio estático (debe ser isostático, g.h.=0). Se aconseja ejercitar la capacidad de cálculo mental del grado de hiperestaticidad a partir de alguna configuración “parecida” que ya sea familiar. Ello aumenta las posibilidades de detección de una eventual mala concepción de la estructura.

Las estructuras planas formadas por una retícula rectangular de barras con nudos rígidos son extensamente utilizadas en estructuras de edificación, por lo que hacemos seguidamente mención explícita al cálculo de su grado de hiperestaticidad. Considérese por ejemplo la estructura de la figura 7.6a. Pensemos en primer lugar en la hiperestaticidad interior. Resulta claro que si “rompemos” la continuidad de las barras indicadas en la figura 7.6b, el sistema de barras seguiría siendo topológicamente un conjunto rígido, ya que el camino de barras ABCD proporciona un marco continuo al que se conectan, también de forma rígida, las otras “ramas” de forma arborescente, a su vez topológicamente rígidas. Nótese que la figura 7.6b se ha dibujado sin apoyos, ya que ha de servir para calcular el g.h. interior.

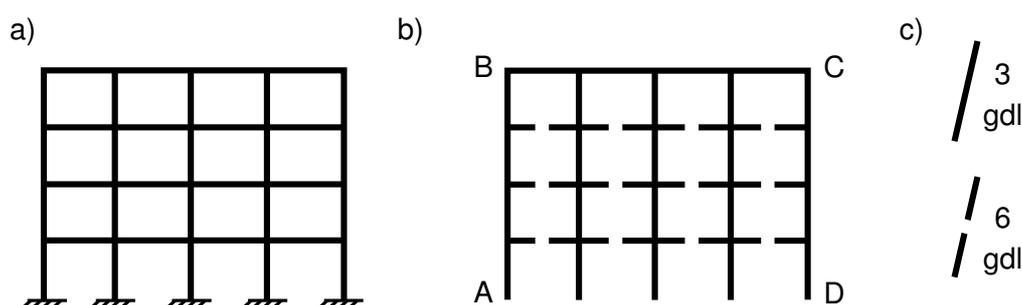


Figura 7.6: a) Estructura original. b) Liberación de gdl hasta isostaticidad interna. c) La discontinuidad de una barra añade 3gdl.

Es también claro que la configuración de la figura 7.6b no admite liberar más enlaces internos sin dejar de ser un conjunto rígido. Piénsese por ejemplo en la introducción de una rótula en una barra (operación que libera 1 gdl, lo menos posible). En cualquier barra que se colocase, implicaría la posibilidad de movimiento de una parte del sistema de barras respecto de la otra. Por tanto, en el cálculo de la hiperestaticidad interna podemos llegar hasta lo indicado en la figura 7.6b. Haciendo un recuento en ella, hemos interrumpido la continuidad de 12 barras. Cada una de estas operaciones libera 3gdl (lo que puede razonarse de forma independiente de la estructura como muestra la figura 7.6c: la barra tiene 3gdl en el plano, al “romperla” quedan dos barras, con sus 6 gdl, luego se han liberado $6-3=3\text{gdl}$). Por tanto en la figura 7.6b hemos liberado $12 \times 3 = 36\text{gdl}$, lo que quiere decir que el grado de hiperestaticidad interna de la estructura original es 36.

Queda por considerar la hiperestaticidad externa (la asociada a la sustentación). Habiendo 5 empotramientos, cada uno de los cuales restringe 3gdl, el grado de hiperestaticidad externa será $5 \times 3 = 12$. La hiperestaticidad total se calcula sumando la interna y la externa, y en este caso vale $36 + 12 = 48$. La estructura de la figura 7.6a es, por tanto, hiperestática de grado 48.



El procedimiento anterior hace patente que cada bucle cerrado añade 3 g.h. internos. En estructuras de este tipo, pero complicadas con articulaciones adicionales (u otras libertades de movimiento), puede resultar cómodo calcular la hiperestaticidad interior como $3C-L$, donde “C” es el nº de bucles cerrados, y “L” el de libertades. Esto es equivalente a considerar la hiperestaticidad interna si no existiesen esas libertades, y restarle los gdl correspondientes a ellas.

Características generales de las estructuras hiperestáticas

En los apartados siguientes presentaremos algunos enfoques para la resolución de estructuras hiperestáticas. Comenzaremos por hacer una distinción entre estructuras que no obedece en realidad a su grado de hiperestaticidad: se trata de la clasificación en estructuras como “de nudos articulados”, y “de nudos rígidos”.

Las estructuras de nudos articulados se diseñan casi siempre para que sus barras desarrollen únicamente esfuerzo axial, no cortante ni flector. Por ello las barras de estas estructuras pueden ser notablemente esbeltas (el material de la barra trabaja uniformemente, por lo que todo él puede aportar toda su resistencia). Las estructuras de las torres de tendido eléctrico, las de las grúas, los arriostramientos habituales de las estructuras de todo tipo, y las cerchas que soportan muchas cubiertas, son ejemplos de ello. No es raro que este tipo de estructuras sean isostáticas, aunque pueden ser también hiperestáticas. Las estructuras de nudos articulados no serán objeto de estudio de este curso.

En las estructuras de nudos rígidos, se cuenta desde la etapa de diseño con los momentos flectores que desarrollarán las barras y que se transmitirán a través de los nudos. Como sabemos, en la flexión el estado de tensión es desigual en el material, por lo que parte de él no aporta toda su capacidad resistente. Por ello las barras de estas estructuras han de ser más robustas que las de nudos articulados. Aunque existen algunas disposiciones prácticas de nudos rígidos que son isostáticas, es frecuente que este tipo de estructuras (pórticos y estructuras similares) sean hiperestáticas. Se considera que la estructura cae en la categoría “de nudos rígidos” aunque tenga algunas articulaciones, siendo la presencia de momentos flectores el aspecto relevante. Es a este tipo de estructuras al que nos referiremos principalmente en lo sucesivo.

Algunas características que diferencian típicamente a una estructura isostática “de nudos rígidos” de una estructura hiperestática que tenga una apariencia similar, son:

- La estructura hiperestática desarrollará menores momentos flectores máximos.
- La estructura hiperestática será más rígida frente a las acciones.
- La estructura hiperestática tendrá una mayor reserva de resistencia desde que ocurra la plastificación del primer punto.
- La estructura hiperestática desarrollará tensiones con las variaciones de temperatura (esto es indeseado), mientras que la isostática no.
- La hiperestaticidad exterior conllevará cimentaciones más robustas.

Las estructuras isostáticas son relativamente sencillas de analizar, y no incidiremos más sobre el particular. Para su análisis contamos con el planteamiento del equilibrio de sus partes y del conjunto, con el modelo de flexión, y con las herramientas auxiliares presentadas en los temas anteriores.

Como hemos dicho, en las estructuras hiperestáticas, no es posible calcular los esfuerzos y reacciones usando solamente las ecuaciones del equilibrio estático. Se requiere de ecuaciones adicionales, ecuaciones que se obtienen de las deformaciones de los sólidos. Este es el

detalle que añade complejidad al cálculo, ya que dichas ecuaciones deben obtenerse involucrando al modelo de comportamiento del sólido, que en nuestro caso será fundamentalmente el modelo de tracción-flexión de barras rectas. Se presentan a continuación, de forma más bien sucinta, algunos métodos para el análisis de estructuras hiperestáticas.

El Método de Compatibilidad

El llamado “Método de Compatibilidad” es apropiado principalmente para la resolución manual de estructuras hiperestáticas. Se basa en liberar en la estructura tantos grados de libertad como sea necesario (es decir, tantos como el g.h.) para conseguir un sistema isostático. Ello se consigue quitando apoyos, o bien introduciendo rótulas u otras discontinuidades en algunas barras. Estos apoyos y (o) uniones entre las barras, se sustituyen por el efecto -desconocido a priori- que los mismos tenían sobre la estructura. Por ejemplo, si se ha suprimido un apoyo, éste se sustituye por la fuerza desconocida (“reacción”) que el apoyo realizaba sobre la estructura. O si se ha introducido una rótula en una barra, lo que anula el momento flector en ese punto, se introducen momentos iguales y contrarios de valor desconocido a ambos lados de la rótula. Estas fuerzas, o momentos, serán las “incógnitas hiperestáticas” del problema. Evidentemente, habrá tantas como g.h. tenga el problema.

Al proceso de liberar grados de libertad, poniendo las acciones (fuerzas o momentos) desconocidas correspondientes, se le conoce como “elección de incógnitas hiperestáticas”. Este proceso debe perseguir lo que en el ámbito del cálculo del grado de hiperestaticidad llamábamos “estructura isostática bien concebida”. Es decir, al liberar grados de libertad (en número igual al grado de hiperestaticidad) debemos obtener una estructura isostática que pueda funcionar como tal, sin que sean posibles movimientos de sólido rígido de la misma, o entre sus partes. Sin que sea imprescindible, el elegir tantas incógnitas de apoyos como el g.h. exterior, y tantas incógnitas de uniones de barras como el g.h. interior, puede ser buena práctica para evitar errores en este sentido.

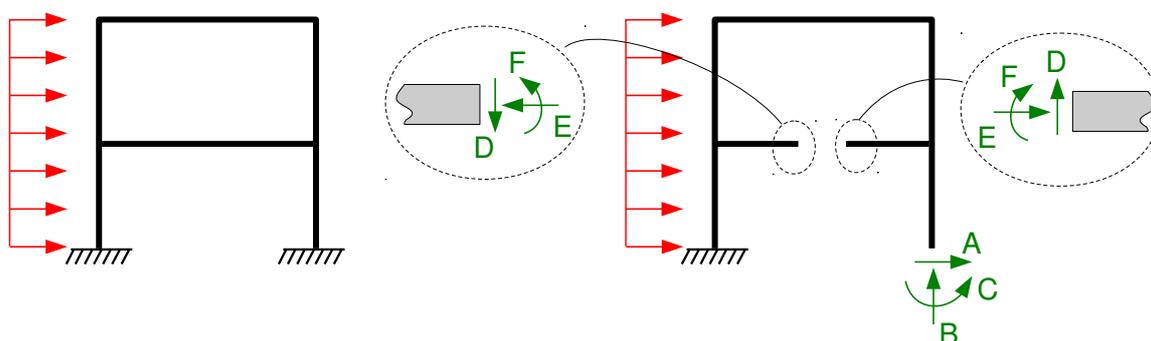


Figura 7.7: Posible elección de incógnitas hiperestáticas en un ejemplo.

La estructura hiperestática de grado 6 de la figura 7.7 ilustra lo anterior a modo de ejemplo. Se trata de un pórtico biempotrado de dos alturas. La carga horizontal que se indica, o cualquier otra, no influye en la correcta elección de incógnitas hiperestáticas, que es una cuestión topológica en la que no intervienen las cargas.

La elección de incógnitas hiperestáticas requiere en primer lugar que liberemos 6 grados de libertad para conseguir una estructura isostática “bien concebida”. Elegimos liberar los tres gdl del apoyo derecho, y “cortar” una de las barras horizontales, con lo que se permite el giro, desplazamiento horizontal, y desplazamiento vertical relativos entre las secciones a ambos lados del corte. En la figura se ha exagerado el corte por claridad, suprimiendo un trozo apreciable de barra, pero debe interpretarse que hemos suprimido únicamente un diferencial de barra, de manera que fuese posible restablecer su continuidad sin introducir esfuerzos adicionales por ello.

El empotramiento que hemos suprimido podía realizar fuerza horizontal “A”, fuerza vertical “B”, y momento “C” sobre la barra. Ponemos esas acciones en sustitución del empotramiento como se indica. Por otro lado, en la barra que hemos “cortado”, la parte izquierda de la sección podía ejercer sobre la parte derecha una fuerza horizontal “D”, una vertical “E”, y un momento “F”. Nuevamente ponemos estas acciones desconocidas en sustitución de la continuidad de la barra que hemos interrumpido. En la parte izquierda del corte, actúan acciones iguales y contrarias a las anteriores como se indica.



El hecho de que sea necesario elegir las incógnitas hiperestáticas, y que esta elección haya de ser juiciosa, hace que el método de compatibilidad sea poco apropiado para su implementación en ordenador.

En este momento tenemos una estructura isostática, que en principio sabríamos resolver. Dicha resolución quedaría en función de las fuerzas y momentos desconocidos A, B, C, D, E, F, así como de las cargas conocidas. Como parte de la resolución, obtendríamos los giros y desplazamientos en toda la estructura, en particular en la sección donde actúan A, B, y C, y en las dos secciones de la barra donde actúan D, E, y F.

El último paso de la aplicación del método consiste en restituir las condiciones que se daban en la estructura original. Se habla de restablecer la compatibilidad con las condiciones de contorno originales. El método toma su nombre (de “compatibilidad”) de esta última operación. En este caso plantearíamos las siguientes ecuaciones escalares:

- Movimiento horizontal del empotramiento original =0.
- Movimiento vertical del empotramiento original =0.
- Giro del empotramiento original =0.
- Movimiento horizontal del mismo valor para ambas secciones de la barra.
- Movimiento vertical del mismo valor para ambas secciones de la barra.
- Giro del mismo valor para ambas secciones de la barra.

Son en total 6 ecuaciones, justamente las necesarias para calcular las 6 incógnitas A, B, C, D, E, F. Calculadas éstas, sustituiríamos su valor en la solución de la estructura isostática que habíamos resuelto previamente, obteniendo así la solución de la estructura hiperestática original.

Uso del PFV en el método de compatibilidad

Se ilustrará seguidamente cómo usar el PFV en el ámbito del método de compatibilidad. Consideraremos para ello la misma estructura de la figura 7.7, con aquella misma elección de incógnitas hiperestáticas. No debe preocupar el que este ejemplo conlleve un volumen de cálculo que estaría en el límite -o probablemente más allá-, de lo que es razonable abordar operando manualmente, puesto que no pretendemos resolverlo en detalle. El hecho relevante es que este ejemplo contiene muchos de los elementos que eventualmente podemos encontrar en una aplicación práctica típica, y que son los que se pretende ilustrar.

Se comienza como se ha indicado, por la elección de incógnitas hiperestáticas. Los enlaces que se liberan para ello deben conducir a una estructura isostática “bien concebida”, que pueda ser equivalente a la original, y que llamaremos “estructura isostática base”. En nuestro caso la estructura isostática base es la mostrada en la segunda de las figuras 7.7. Ésta será la estructura sobre la que realizaremos el análisis.

Debemos encontrar el giro y los desplazamientos del empotramiento liberado, y el giro incremental y los desplazamientos incrementales entre las dos secciones del corte en la barra horizontal (para imponer finalmente que todos ellos sean cero). Vamos a proceder aplicando el principio de superposición de efectos, calculando el valor de cada desplazamiento (o giro) requerido cuando actúa una sola acción individualmente, y sumando después los valores correspondientes a todas las acciones.

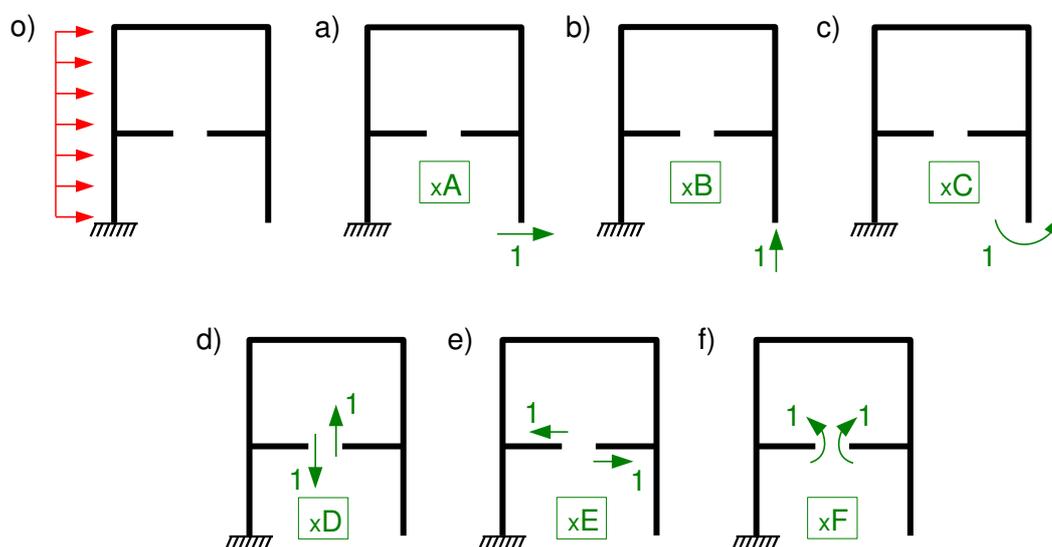


Figura 7.8: Diversos problemas (virtuales y reales) necesarios para el análisis de la estructura isostática base.

Para ello vamos a disponer un esquema de resolución basado en el PFV, utilizando los problemas simples mostrados en la figura 7.8. Todos ellos tienen la geometría y apoyos de la estructura isostática base, pero cada uno tiene una sola carga. En concreto, en el primero (o) actúan las cargas conocidas, fuesen éstas las que fueren, y cada uno de los problemas siguientes (a, b,... f) tiene aplicada una de las incógnitas hiperestáticas, aunque con valor unidad de la incógnita. Utilizaremos cada uno de estos casos de carga, por ejemplo el “a”,

de dos maneras distintas: por una parte será uno de los problemas a superponer finalmente (en este uso, con carga = "A"), y por otra parte será el problema virtual para el cálculo del movimiento horizontal del empotramiento liberado en todos los casos (o,a,...f), aplicando el PFV (en este uso, consideraremos el problema "a" con carga =1). Por supuesto, sólo calcularemos el diagrama de momentos para carga unidad, ya que para valor "A" de la misma, el diagrama de momentos simplemente se multiplica por ese valor "A".

Demos por calculados los diagramas de momentos del problema "o" con sus cargas, y de los problemas "a" ... "f" con cargas unidad. Su obtención es tediosa, pero no difícil, ya que se trata de problemas isostáticos. De la superposición de todos los problemas de la figura 7.8, sólo nos interesa por ahora el valor de los desplazamientos y giros que hemos de restituir a sus valores originales. Cada uno de ellos se obtendrá para cada problema (o,a...f) por separado aplicando el PFV. Si despreciamos la deformación por cortante y axil:

$$\int_{\text{barras}} \frac{M_z^v M_z}{EI_z} dx = \left[\begin{array}{l} \text{trabajo} \\ \text{virtual externo} \end{array} \right] \quad (7.2)$$

Llamaremos en lo sucesivo "a", ... "f", a los respectivos problemas cuando consideremos carga unidad, y "a·A", ... "f·F", a los mismos problemas anteriores multiplicados por el valor de su respectiva incógnita hiperestática asociada, A, ... F. Son éstos últimos los problemas que finalmente debemos superponer. Por ejemplo, el desplazamiento horizontal del empotramiento liberado, se obtendrá en cada problema "o", "a·A", ... "f·F", aplicando (7.2) con su respectivo diagrama de momentos como "real", y el de "a" como virtual. Si, con un abuso de notación, denotamos el producto de diagramas de momentos mediante el "producto de problemas", el desplazamiento horizontal en cada caso se obtiene aplicando (7.2) a los siguientes productos de diagramas: a·o, a·(a·A), a·(b·B), a·(c·C), a·(d·D), a·(e·E), a·(f·F). Aplicando superposición, la suma de estos desplazamientos debe ser cero para restituir las condiciones originales, es decir:

$$\int \frac{a \cdot o}{EI_z} dx + A \int \frac{a \cdot a}{EI_z} dx + B \int \frac{a \cdot b}{EI_z} dx + C \int \frac{a \cdot c}{EI_z} dx + D \int \frac{a \cdot d}{EI_z} dx + E \int \frac{a \cdot e}{EI_z} dx + F \int \frac{a \cdot f}{EI_z} dx = 0$$

En donde las integrales se extienden a las barras de la estructura, y las constantes desconocidas A,...F, han salido de las integrales. Ahora impondríamos que el movimiento vertical del empotramiento liberado sea también cero. Para calcular ese movimiento en cada caso, utilizaremos "b" como estado virtual. La superposición de efectos resultará:

$$\int \frac{b \cdot o}{EI_z} dx + A \int \frac{b \cdot a}{EI_z} dx + B \int \frac{b \cdot b}{EI_z} dx + C \int \frac{b \cdot c}{EI_z} dx + D \int \frac{b \cdot d}{EI_z} dx + E \int \frac{b \cdot e}{EI_z} dx + F \int \frac{b \cdot f}{EI_z} dx = 0$$

Similarmente, para imponer que el giro del empotramiento liberado es nulo, calculamos los giros en los problemas individuales y los superponemos. Estos giros se calculan usando nuevamente el PFV, esta vez con estado virtual "c":

$$\int \frac{c \cdot o}{EI_z} dx + A \int \frac{c \cdot a}{EI_z} dx + B \int \frac{c \cdot b}{EI_z} dx + C \int \frac{c \cdot c}{EI_z} dx + D \int \frac{c \cdot d}{EI_z} dx + E \int \frac{c \cdot e}{EI_z} dx + F \int \frac{c \cdot f}{EI_z} dx = 0$$



En ocasiones, por ejemplo si hay asientos en los apoyos, el desplazamiento prescrito no es nulo. En ese caso, las ecuaciones anteriores no deben igualarse a cero, sino al valor del asiento.

Ahora nos ocupamos de los desplazamientos incrementales en el corte de la barra horizontal. El PFV usando “d” como estado virtual permite calcular el desplazamiento vertical incremental en cada caso. Deben sumar cero:

$$\int \frac{d \cdot o}{EI_z} dx + A \int \frac{d \cdot a}{EI_z} dx + B \int \frac{d \cdot b}{EI_z} dx + C \int \frac{d \cdot c}{EI_z} dx + D \int \frac{d \cdot d}{EI_z} dx + E \int \frac{d \cdot e}{EI_z} dx + F \int \frac{d \cdot f}{EI_z} dx = 0$$

El desplazamiento incremental horizontal se calcula con el estado virtual “e”, y debe sumar también cero:

$$\int \frac{e \cdot o}{EI_z} dx + A \int \frac{e \cdot a}{EI_z} dx + B \int \frac{e \cdot b}{EI_z} dx + C \int \frac{e \cdot c}{EI_z} dx + D \int \frac{e \cdot d}{EI_z} dx + E \int \frac{e \cdot e}{EI_z} dx + F \int \frac{e \cdot f}{EI_z} dx = 0$$

Finalmente, la diferencia de giros entre ambas secciones en cada caso, se calcula con el estado virtual “f”, y nuevamente debe sumar cero para restablecer la continuidad:

$$\int \frac{f \cdot o}{EI_z} dx + A \int \frac{f \cdot a}{EI_z} dx + B \int \frac{f \cdot b}{EI_z} dx + C \int \frac{f \cdot c}{EI_z} dx + D \int \frac{f \cdot d}{EI_z} dx + E \int \frac{f \cdot e}{EI_z} dx + F \int \frac{f \cdot f}{EI_z} dx = 0$$

Tenemos así un sistema de seis ecuaciones, en las que las incógnitas son A, B, C, D, E, F (también seis). Nótese que no se trata de un sistema homogéneo, ya que las integrales que afectan al estado “o” no tienen incógnita. Los 36 elementos de la matriz de coeficientes del sistema, son integrales de productos de dos diagramas de momentos, correspondientes a dos problemas de la figura 7.8. Afortunadamente, apreciamos que la matriz de coeficientes resulta ser simétrica (por ejemplo un determinado coeficiente contiene la integral de “a·f”, y otro es la de “f·a”, que serán iguales). Esto reduce a 21 el número de coeficientes a calcular de la matriz de coeficientes. Hay que calcular también los seis términos independientes.

En resumen, el plan de trabajo consistiría en:

- Calcular los diagramas de momentos de los 7 casos de la figura 7.8.
- Multiplicarlos por parejas. Consideraremos carga unidad, salvo para “o”.
- Hacer las 21+6=27 integrales de los productos anteriores.
- Resolver el sistema de 6 ecuaciones

Los diagramas, productos, e integrales, se extienden a todas las barras de la estructura, salvo donde alguno de los factores sea cero. Evidentemente, el plan anterior implica un volumen de cálculo muy grande para ser realizado de forma manual. Se recuerda que el ejemplo tiene fines ilustrativos y no pretende servir como ejercicio propuesto.

Finalmente apuntar que, calculadas las incógnitas hiperestáticas A...F, suele ser más cómodo calcular directamente aquello que sea necesario volviendo a la figura 7.7 (diagramas de momentos, etc), que realizando la superposición de los (siete) estados individuales.

Los Métodos de Equilibrio

El llamado “método de equilibrio” abarca en realidad una familia de métodos, o de metodologías operativas de resolución, todas ellas basadas en el estudio del comportamiento de la barra aislada, y posterior planteamiento del equilibrio de los nudos (de esta etapa final de “equilibrio” es de donde el método toma su nombre). Los programas comerciales para análisis de estructuras por ordenador se basan usualmente en uno de estos métodos, en particular en el conocido como “Método Directo de Rigidez”. Presentaremos seguidamente los fundamentos conceptuales de los “métodos de equilibrio”, con la intención principal de aportar una visión básica del proceso que siguen la mayoría de los programas de ordenador.

Comencemos considerando una barra cualquiera de una estructura de nudos rígidos, como la barra “e”, que conecta los nudos “i”, “j”, mostrada en la figura 7.9a. Se dibujan solamente las cargas existentes sobre la barra, aunque podría haber otras cargas actuando en otras barras o nudos. Vamos a considerar la barra aislada del resto de la estructura mediante dos cortes ideales en sus extremos. En dichos cortes actuaría la fuerza y el momento que la otra parte de la estructura ejercía sobre la barra. Asimismo, la barra aislada tiene el mismo desplazamiento y giro que tenía en cada sección extrema.

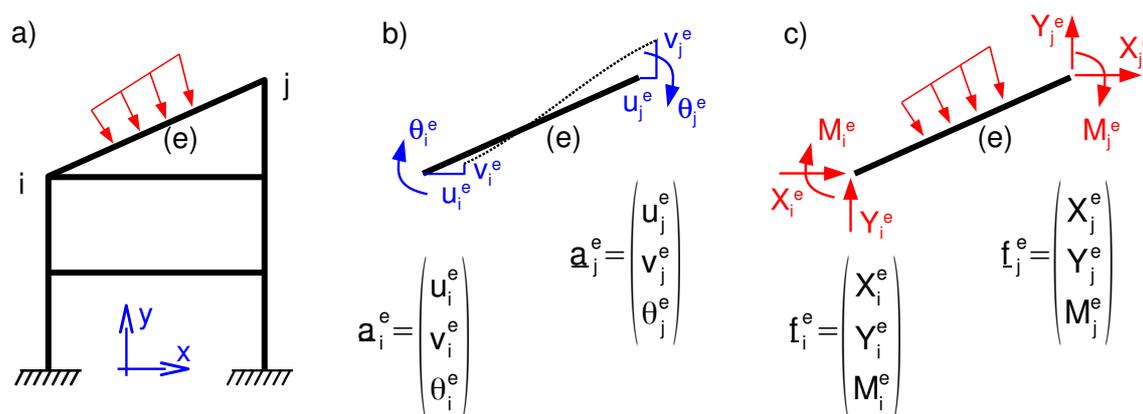


Figura 7.9: a) Barra de una estructura. b) Movimientos generalizados de los extremos de la barra, y notación. c) Acciones sobre la barra (estarán en equilibrio), y notación de las fuerzas generalizadas en los extremos de la misma.

Para el extremo adyacente al nudo “i” de la barra “e”, arreglaremos en una matriz columna los tres escalares que expresan el desplazamiento horizontal u_i^e , el desplazamiento vertical v_i^e , y el giro θ_i^e de esa sección extrema de la barra. Llamamos \mathbf{a}_i^e a dicha matriz columna, que generalmente se llama de “desplazamientos generalizados” (la matriz \mathbf{a}_j^e para el extremo de “e” adyacente al nudo j, se define análogamente).

Sobre el extremo “i” de la barra “e” actúan la fuerza horizontal X_i^e , la fuerza vertical Y_i^e , y el momento M_i^e , que la estructura ejercía sobre la barra en esa sección. Arreglamos estos tres escalares en una matriz columna de fuerzas generalizadas \mathbf{f}_i^e . Similarmente se define \mathbf{f}_j^e para el extremo de la barra adyacente al nudo j.

Vamos a expresar las fuerzas generalizadas en los extremos de la barra, $\mathbf{f}_i^e, \mathbf{f}_j^e$, como superposición de dos efectos:

- 1- El efecto de que hay movimientos (generalizados) en las secciones extremas de la barra. Se asume aquí que no hay cargas sobre la longitud de la barra.
- 2- El efecto de que hay cargas sobre la longitud de la barra. Se asume aquí que no hay movimientos de los extremos de la barra.

La figura 7.10 ilustra la superposición de efectos anterior.

Llamamos $\mathbf{g}_i^e, \mathbf{g}_j^e$, a las fuerzas que resultan del primer efecto. Hay que notar que en general la variación de una sola componente de movimiento (generalizado) en un extremo de la barra, puede producir varias componentes de fuerza (generalizada) en ambos extremos de la barra.

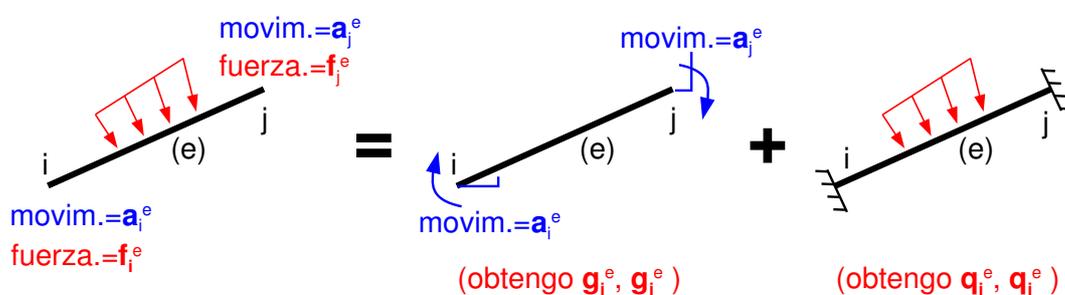


Figura 7.10: Superposición de efectos para una barra genérica

La relación lineal más general posible siempre podrá expresarse mediante una matriz 6x6 de coeficientes que relaciona las seis componentes de fuerza generalizada con las seis componentes de movimiento generalizado en ambos extremos de la barra. Organizamos tal relación usando submatrices en la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_i^e \\ \mathbf{g}_j^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii}^e & \underline{\underline{K}}_{ij}^e \\ \underline{\underline{K}}_{ji}^e & \underline{\underline{K}}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i^e \\ \mathbf{a}_j^e \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Llamamos $\mathbf{q}_i^e, \mathbf{q}_j^e$, a las fuerzas que resultan del segundo efecto. Procede incluir en este término cualquier efecto que genere fuerzas generalizadas en los extremos de la barra sin que éstos se muevan, como los de las cargas existentes a lo largo de la barra, y los de las variaciones térmicas de la barra, entre otros. Arreglamos estas fuerzas generalizadas en forma de matriz de la manera ya habitual:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_i^e \\ \mathbf{q}_j^e \end{pmatrix} \quad (7.4)$$



La obtención de los coeficientes de la matriz 6x6 que aparece en (7.3), y de las fuerzas generalizadas “q” para los casos de carga a usar (correspondientes a (7.4)), se realiza resolviendo unas pocas configuraciones hiperestáticas de la barra genérica. Esta resolución sólo hay

que realizarla “una vez en la vida”, pero debe basarse en otro método ya disponible, como por ejemplo el método de compatibilidad que hemos mostrado anteriormente.

Tal como habíamos planteado, obtenemos la fuerza generalizada en los extremos de la barra aplicando el principio de superposición, sumando (7.3) y (7.4):

$$\begin{pmatrix} \underline{f}_i^e \\ \underline{f}_j^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{g}_i^e \\ \underline{g}_j^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{q}_i^e \\ \underline{q}_j^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ii}^e & \underline{K}_{ij}^e \\ \underline{K}_{ji}^e & \underline{K}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a}_i^e \\ \underline{a}_j^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{q}_i^e \\ \underline{q}_j^e \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

La ecuación (7.5) describe el comportamiento de la barra aislada. La misma estará conectada en sus extremos a los nudos i,j, los cuales a su vez tendrán conectados los extremos de otras barras. La fuerza (generalizada) que la barra “e” ejerce sobre el nudo “i”, será igual y contraria a la que el nudo ejerce sobre la barra, siendo ésta última la que hemos denominado \underline{f}_i^e .

Podemos plantear una ecuación como (7.5) para cada barra particular de nuestra estructura. Vamos a considerar el equilibrio de un nudo, digamos el “i”, el cual conecta un cierto número de barras. Como se ha dicho, sobre el nudo actúan fuerzas de valor $-\underline{f}_i^e$, provenientes de cada barra “e” que esté conectada al nudo, y además pueden actuar una fuerza y un momento aplicados directamente sobre el propio nudo. Llamaremos X_i^* , Y_i^* , a las componentes de la posible fuerza concentrada, y M_i^* al posible momento concentrado en el nudo “i”. Arreglaremos estas componentes en una matriz columna \underline{F}_i^* de “fuerza generalizada” similarmente a como hicimos para las acciones en un extremo de barra. La figura 7.11 ilustra las notaciones indicadas, y muestra el ejemplo de un nudo “i” que conecta tres barras, “r”, “s”, y “t”, cuyos otros extremos conectan en los nudos “j”, “k”, y “l” respectivamente.

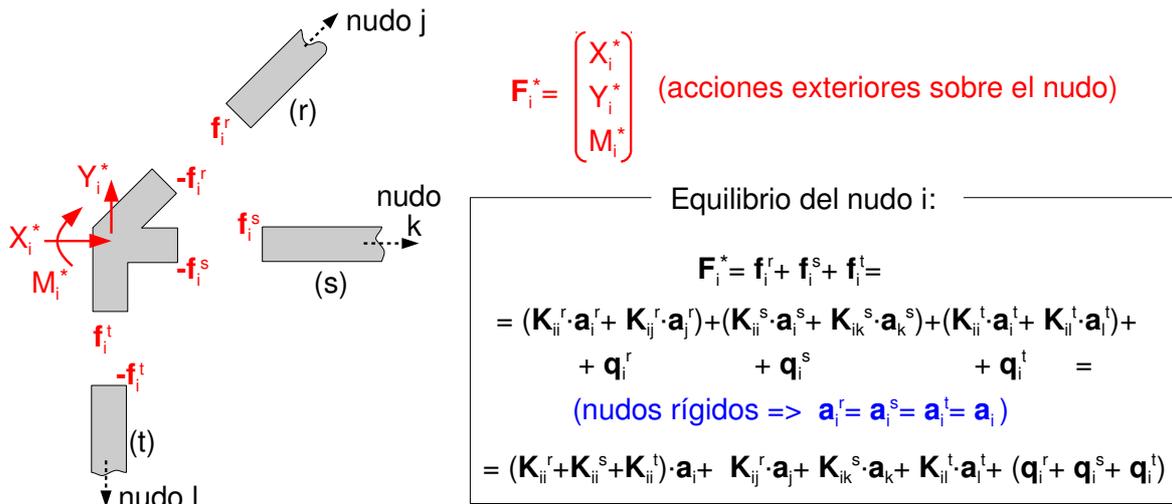


Figura 7.11: Ejemplo de equilibrio de un nudo (i) que conecta 3 barras (se suponen nudos rígidos).

Como se indica en la figura 7.11, si los nudos son rígidos, el giro y los desplazamientos de un nudo serán los mismos que los de todos los extremos de barra que estén conectados al nudo. Por ello escribiremos en adelante \underline{a}_i (como una propiedad del nudo) en lugar de \underline{a}_i^e .

De forma general, el equilibrio del nudo “i” quedará expresado anulando la suma de fuerzas generalizadas que actúan sobre el nudo (lo que incluye al momento):

$$\mathbf{F}_i^* - \sum_e \mathbf{f}_i^e = 0 \quad (7.6)$$

El sumatorio anterior abarca en principio todos los elementos de la estructura, pero debe entenderse que la fuerza generalizada de la barra “e” sobre el nudo “i” será nula en el caso en que el elemento no esté conectado al nudo (alternativamente puede pensarse que el sumatorio se extiende explícitamente a las barras que conecta en nudo “i”).

Podemos escribir una ecuación de equilibrio como la (7.6) para cada nudo “i” de la estructura. Siendo “n” el número de nudos, tendremos en total 3n ecuaciones escalares. En ellas aparecen los movimientos generalizados de los nudos, \mathbf{a}_i , que tienen tres parámetros cada uno. En la figura 7.11 se muestra un ejemplo de cómo aparecen estos parámetros en la ecuación de equilibrio. Tendremos en total 3n parámetros escalares de movimientos de nudos. Casi todos ellos serán incógnitas, aunque los correspondientes a condiciones de apoyo serán conocidos. En este caso, se desconocerá la componente correspondiente de fuerza generalizada, por lo que el número de incógnitas del sistema de ecuaciones será en todo caso 3n. Por ejemplo, en un empotramiento los tres parámetros de movimiento generalizado, u , v , θ , son conocidos (nulos), pero a cambio son desconocidos los tres de fuerza generalizada (“las reacciones”), X , Y , M .

La conclusión es que (7.6) planteada para cada uno de los “n” nudos de la estructura, produce un sistema de 3n ecuaciones con 3n incógnitas, en el que las incógnitas son los desplazamientos nodales (generalizados) desconocidos, y las reacciones en los apoyos de la estructura. El sistema de ecuaciones será resoluble para problemas bien planteados, y permite obtener los valores de las citadas incógnitas.

Una vez conocidos los mismos, la ecuación (7.5) planteada para cada elemento permite calcular las fuerzas generalizadas en cada extremo de barra, lo que a su vez permite (mediante una sencilla transformación de coordenadas) conocer los esfuerzos (axil, cortante, y momento flector) en los extremos de las barras. Sabidos éstos, es sencillo realizar cualquier cálculo que eventualmente se requiera en el interior de la barra, como trazar el diagrama de momentos flectores o el de desplazamientos. En definitiva, conocidas las incógnitas del sistema de ecuaciones obtenido a partir del equilibrio de los nudos, es sencillo realizar cualquier cálculo adicional que se desee. Todo este proceso de resolución es básicamente el implementado en los programas comerciales de análisis de estructuras por ordenador.

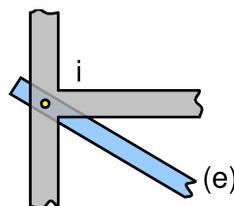


Figura 7.12: Ejemplo de nudo en el que no todas las barras comparten el giro.

Finalmente, daremos noticia de porqué hemos mantenido hasta cierto punto del desarrollo la notación \mathbf{a}_i° para el movimiento (generalizado) de los extremos de barra. Puede pensarse que ello ha sido inútil, ya que finalmente la consideración de nudos rígidos hace que dichos movimientos sean iguales para todas las barras que confluyen en un nudo.

Sin embargo, en ocasiones un nudo está ejecutado de tal forma que varias barras comparten el giro del nudo, pero algunas otras no. La figura 7.12 muestra un ejemplo de un nudo en el que tal cosa ocurriría. En estos casos es necesario mantener las incógnitas originales de movimientos de extremos de barra. Esta es la razón de haber mantenido como incógnitas \mathbf{a}_i° hasta incorporar la condición de que los nudos son rígidos.

Centrándonos en el ejemplo de la figura 7.12, respecto de la situación de nudo rígido tendríamos una incógnita adicional (el giro θ_i° del extremo de la barra), y también el dato adicional consistente en que el momento en el extremo de esa barra, M_i° , es nulo (usaríamos este dato incorporándolo a la ecuación (7.5) de comportamiento del elemento). Por tanto sigue siendo igualmente posible plantear un conjunto de ecuaciones resoluble para estos casos.

Procedimiento de equilibrio adaptado al cálculo manual

Plantearémos un procedimiento simplificado de aplicación del método de equilibrio, que será más indicado para operar manualmente que el procedimiento general que suele implementarse en ordenador. En la literatura está frecuentemente referido como método de “slope-deflection”, que puede traducirse como “pendiente-desplazamiento”. El método es aplicable a estructuras planas en las que la deformación se deba fundamentalmente al momento flector (es decir, puedan despreciarse las deformaciones debidas al axil y al cortante), y es especialmente adecuado para estructuras aporticadas y vigas continuas.

Como es propio de los métodos de equilibrio, se comienza considerando una barra genérica (e), de extremos i,j, aislada del resto de la estructura. La figura 7.13a muestra un ejemplo de cómo podría estar conectada esta barra en una estructura. Vamos a reproducir el estado final de la barra mediante la superposición de cuatro efectos. A saber:

- El efecto de que el extremo “i” gira un ángulo θ_i .
- El efecto de que el extremo “j” gira un ángulo θ_j .
- El efecto de que el extremo “j” se mueve Δ respecto del extremo “i”, en dirección perpendicular a la barra.
- El efecto de las cargas que actúan en la longitud de la barra.

Para aplicar correctamente el principio de superposición, cada efecto debe aplicarse aisladamente, es decir con valor nulo de los demás efectos. Por ejemplo, al considerar el efecto de θ_i , el extremo “j” no debe girar, ni desplazarse respecto de “i”, ni debe haber cargas en la viga. Alternativamente, y como ejemplo adicional, al considerar el efecto de las cargas aplicadas en la longitud de la viga, los extremos i,j, no deben girar ni experimentar desplazamiento relativo. Mediante la superposición de estos cuatro efectos, obtendremos las fuerzas

y momentos que actúan en los extremos de las barras. Debe entenderse que θ_i , θ_j , Δ , se plantean como valores reales finales (si bien son desconocidos inicialmente).

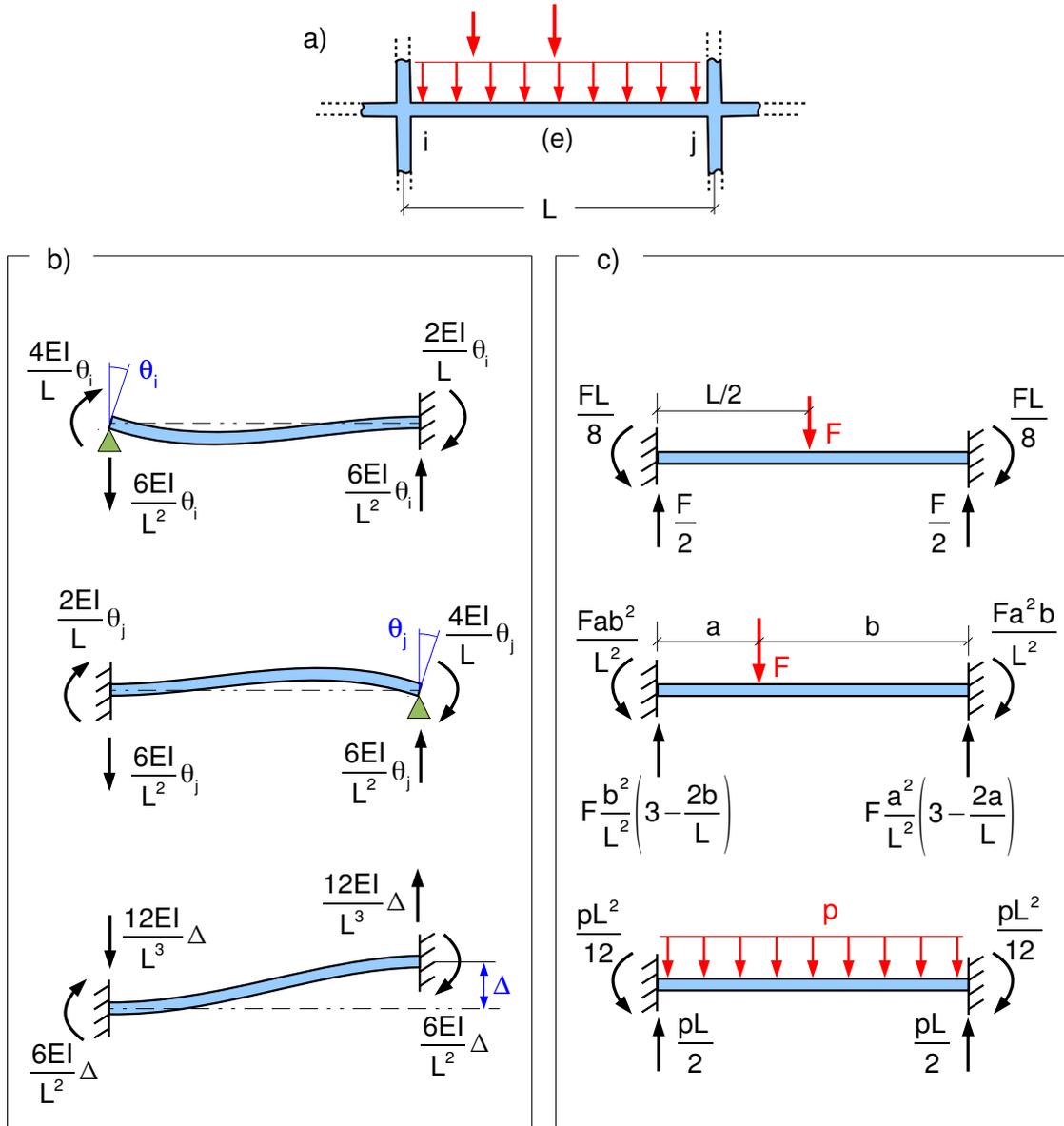


Figura 7.13: a) Barra genérica conectada a una estructura. b) Acciones en los extremos de barra para los tres primeros efectos a superponer. c) Acciones en los extremos de barra para algunos casos típicos del cuarto efecto a superponer.

Implícitamente, la elección de efectos a superponer anterior refleja nuestra suposición de que todos los fenómenos de interés asociados a la barra quedan recogidos en esos cuatro efectos. En particular, el no considerar un estado en que hubiese un movimiento relativo de los extremos en dirección longitudinal, implica que estamos despreciando los alargamientos de las barras. La inclusión de dicho estado en el planteamiento puede hacerse sin dificultad (más tarde se indica cómo), lo que aporta mayor generalidad al procedimiento, aunque su aplicación práctica se complica por haber más incógnitas.

Las figuras 7.13b resumen los resultados de interés en relación con los tres primeros estados a superponer. En ellas se muestran las fuerzas y momentos que aparecen en cada caso al imponer el giro (o desplazamiento) correspondiente. Nótese como en cada caso se aplican unas condiciones de contorno que anulen los tres efectos de superposición que no estamos considerando. Estos resultados se han obtenido aplicando el método de compatibilidad, lo que sólo es necesario hacer “una vez en la vida” para que queden disponibles. Las figuras 7.13c muestran alguna información que típicamente puede ayudar a plantear el cuarto estado a superponer. Como el mismo es función de las cargas aplicadas en la longitud de la viga, la casuística es tan variada como pueda pensarse. En el caso de no estar disponible la solución de la barra biempotrada con las cargas del problema, la misma debería encontrarse, nuevamente “una vez en la vida”, aplicando el método de compatibilidad. No obstante: por una parte en las estructuras de edificación no es frecuente considerar evoluciones de las cargas más complicadas que las ofrecidas en la figura 7.13c, y por otra parte existen muchos “prontuarios de vigas”, que pueden encontrarse fácilmente en la web, y que incluyen toda la casuística imaginable al respecto.

Como es habitual en los métodos de equilibrio, el procedimiento se completa equilibrando los nudos. Los mismos reciben acciones iguales y contrarias a las existentes en los extremos de las barras, acciones que habremos expresado en función de los movimientos. También puede haber acciones aplicadas en el propio nudo (fuerza o momento concentrado, del tipo a los que englobamos en \mathbf{F}^* ; en la descripción general del método de equilibrio), que por supuesto hay que incluir en la ecuación de equilibrio del nudo. Hay que hacer la salvedad de que en el caso particular del método de “slope-deflection”, suele ser conveniente considerar el equilibrio de fuerzas horizontales en los dinteles. Esto es típico en la aplicación a los denominados “pórticos traslacionales”, muy frecuentes en estructuras de edificación. Por cada posible giro en el problema tendremos una ecuación de equilibrio de momentos, y por cada posibilidad de desplazamiento, tendremos una ecuación de equilibrio de fuerzas (generalmente de fuerzas horizontales sobre un dintel). Finalmente, resolveremos el sistema de ecuaciones así obtenido, que tendrá tantas incógnitas como posibilidades distintas de movimiento tengan los extremos de las barras (incógnitas del tipo θ_i, Δ_i). La resolución personal de algunos ejercicios es el mejor medio para comprender las particularidades anteriores. Seguidamente se muestra un ejemplo.

Un ejemplo

El pórtico plano biempotrado de la figura 7.14a tiene todas sus barras de igual longitud “L”, e igual sección, siendo “I” su momento de inercia respecto del eje perpendicular al plano del dibujo. El módulo de Young del material es “E”. Aunque no es imprescindible en este caso, se han numerado todos los nudos y todas las barras como buena práctica, con vistas a la aplicación en el futuro de otros métodos “de rigidez”. Las cargas consisten en un momento concentrado de valor “Z” aplicado en el nudo 2, una fuerza horizontal de valor “H”, aplicada en el nudo 3, y una carga distribuida de valor “p” sobre la barra (2). No existiendo simetría en el problema, ni tampoco apoyos laterales, es de esperar que el dintel se desplace, por lo que se trata de un “pórtico traslacional”. En la figura 7.14b se han indicado las posibilidades

de movimiento de los extremos de las barras, que en este caso quedan recogidas en las posibilidades de movimiento de los nudos 2 y 3. Los sentidos de estos movimientos generalizados, θ_2 , θ_3 , Δ , se dibujan "a sentimiento". Las ecuaciones posteriores se plantearán de acuerdo a éstos sentidos dibujados, no siendo preocupante si éstos no resultan ser correctos. En ese caso, simplemente se obtendrá de la resolución un resultado negativo para aquellos movimientos cuyo sentido no coincida con el supuesto.

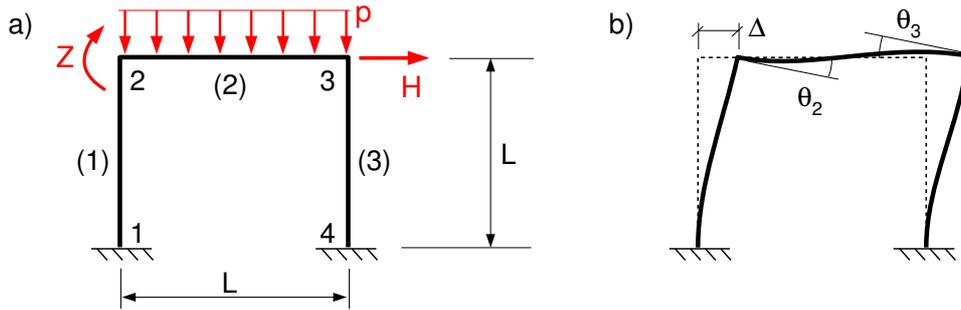


Figura 7.14: a) Pórtico a analizar. b) Movimientos (generalizados) a considerar

Comenzamos por plantear la superposición de efectos para la barra (1). La misma se ve afectada por el giro θ_2 , y por Δ . La figura 7.15 muestra los dos estados de superposición correspondientes. Similarmente, debemos considerar dos estados de superposición para la barra (3), afectados del giro θ_3 , y de Δ , como se muestra.

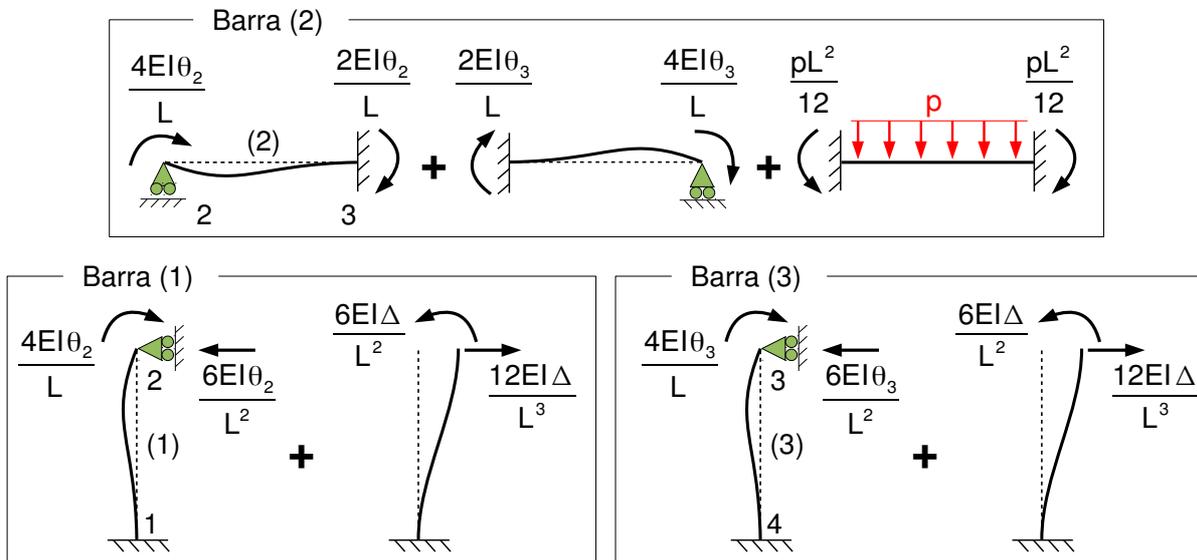


Figura 7.15: Estados a superponer para cada barra de la estructura.

Para la barra (2), el dintel del pórtico, las posibilidades de movimiento de los extremos son los giros θ_2 y θ_3 , por lo que plantearemos un estado de superposición para cada uno de esos efectos. Además, en este caso existen cargas en la longitud de la barra, por lo que planteamos otro efecto a superponer correspondiente a ellas. Todos éstos efectos se muestran en la figura 7.15.

A continuación procedemos a plantear las ecuaciones de equilibrio necesarias. En la figura 7.16 puede verse el nudo 2 aislado, con los momentos que le comunican las barras, y con la acción del momento Z que actúa sobre el propio nudo. También se muestra aislado el nudo 3, bajo la acción de los momentos que le transmiten las barras.

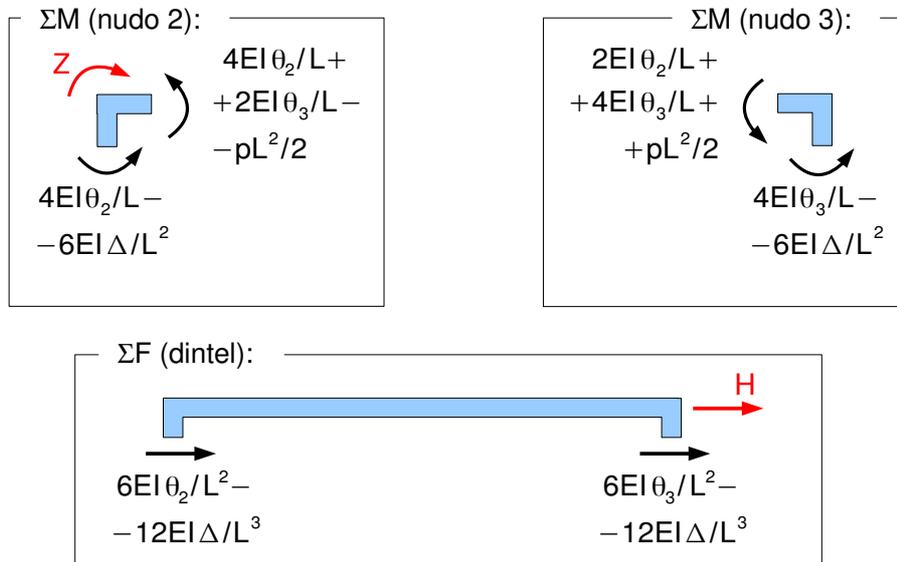


Figura 7.16: Momentos sobre los nudos 2 y 3, y fuerzas horizontales sobre el dintel.

Nótese que en los diagramas de sólido libre de los nudos, hemos prescindido de dibujar la fuerza H que actúa sobre el nudo 3, así como las fuerzas que les transmiten los pilares. Esto se hace así porque, de cada nudo como tal, sólo va a ser necesario plantear la ecuación de equilibrio de momentos. Lo anterior será la norma general cuando se aplica el método de slope-deflection.

La figura 7.16 muestra también el dintel aislado del resto de la estructura. Plantearemos el equilibrio de fuerzas horizontales del dintel, en lugar de plantear equilibrio de fuerzas de los nudos por separado (lo que se sería preciso en la aplicación de una versión más general del método de equilibrio, como podría ser el método directo de rigidez). En este equilibrio interviene finalmente la fuerza H . Con ello tendremos tres ecuaciones, que usaremos para calcular las tres incógnitas θ_2 , θ_3 , Δ . A la vista de la figura 7.16, estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\sum M_2 &= 8EI\theta_2/L + 2EI\theta_3/L - 6EI\Delta/L^2 - pL^2/12 - Z = 0 \\ \sum M_3 &= 2EI\theta_2/L + 8EI\theta_3/L - 6EI\Delta/L^2 + pL^2/12 = 0 \\ \sum F_x^{(2)} &= 6EI\theta_2/L^2 + 6EI\theta_3/L^2 - 24EI\Delta/L^3 + H = 0\end{aligned}$$

El sistema de tres ecuaciones anterior se resolvería para los valores dados de Z , H , p , obteniéndose los valores de θ_2 , θ_3 , Δ . Seguidamente acudiríamos de nuevo a la figura 7.15 para obtener los valores de los momentos y las fuerzas en los extremos de las barras. Con ello, cada barra constituye ahora un problema isostático que ya sabemos tratar. Por ejemplo seremos capaces de trazar sus diagramas V_y - M_z - ϕ_z - u_y , con lo que tendremos información completa acerca de todas las magnitudes de interés en toda la barra.



Nota: Como cabe suponer, la resolución del sistema de ecuaciones se hace típicamente en forma numérica, y con ayuda informática. Cuando sólo existe un parámetro de carga, digamos H en nuestro ejemplo, es sencillo plantear una resolución numérica de la que obtener la solución en forma simbólica (con E , I , L , H , no sustituidos por números). Para ello consideraríamos como incógnitas las agrupaciones $(EI \cdot \theta_2/L)$, $(EI \cdot \theta_3/L)$, $(EI \cdot \Delta/L^2)$, y resolveríamos para $H \cdot L=1$ (que aparecería en la 3ª ecuación). Con ello el sistema es puramente numérico, si bien la solución obtenida debe después multiplicarse por $H \cdot L$. Si en nuestro problema de tres parámetros de carga (Z , H , p), se desea obtener una solución simbólica, habrá que resolver el sistema de ecuaciones para tres casos de carga por separado. Afortunadamente, desde el punto de vista numérico, lo anterior es menos costoso que resolver tres sistemas. Las incógnitas serían las apuntadas anteriormente, y la resolución se realizaría para un caso de carga con $HL=1$, otro con $pL^2=1$, y otro con $Z=1$. Finalmente habría que multiplicar cada solución por HL , pL^2 , Z , respectivamente, y superponerlas.

Posibles extensiones del método

Como se ha comentado, es sencillo considerar un estado de la barra en que sus extremos tengan un desplazamiento incremental en la dirección de la propia barra, como efecto adicional a superponer. Deberíamos añadir tal estado, mostrado en la figura 7.17a, a la lista de la figura 7.13b. Con ello tomaríamos en consideración la deformación axial de las barras. Esto es necesario, por ejemplo, si se desean incluir efectos de dilatación térmica, lo cual requiere a su vez considerar la temperatura de la barra como una posibilidad más de carga en ella. Esto último se realiza como para cualquier otro caso de carga de la barra (recordar la figura 7.13c), introduciendo los esfuerzos correspondientes para la barra biempotrada. La figura 7.17b muestra el caso de carga de la barra correspondiente a un incremento de temperatura constante en toda la barra. En esta última, " α " es el coeficiente de dilatación térmica del material, que si se trata de acero u hormigón vale $1.2 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

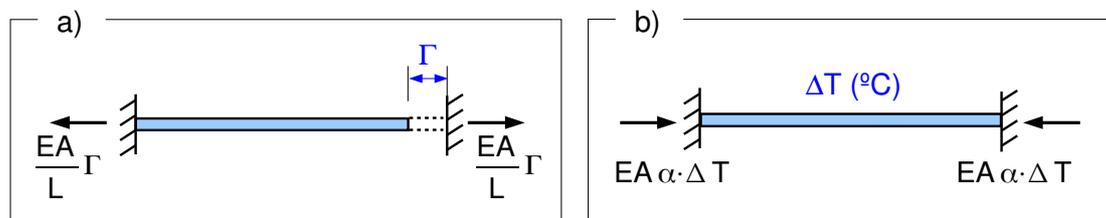


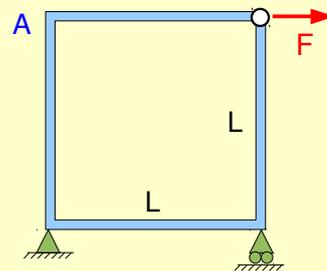
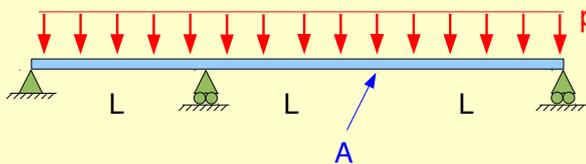
Figura 7.17: a) Estado para la superposición del efecto de un incremento de longitud de la barra. b) Caso de carga de la barra correspondiente a un incremento de temperatura.

Por supuesto, no es necesario que existan efectos térmicos para que podamos incluir el efecto de las deformaciones axiales de las barras. Simplemente podemos querer incluirlo para realizar un análisis más exacto que tenga en cuenta las deformaciones axiales. O por

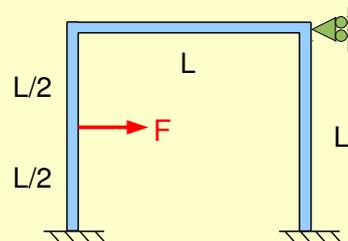
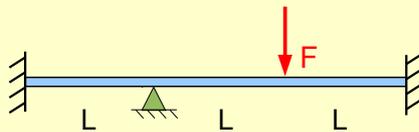
ejemplo, en problemas con pilares inclinados, puede considerarse preferible añadir una incógnita en lugar de plantear las relaciones geométricas derivadas de que las barras mantengan su longitud. En cualquier caso, la utilización o no del efecto de superposición de la figura 7.17a no está supeditada a la existencia de efectos térmicos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcule los diagramas de momentos flectores de las estructuras siguientes. Calcule también el desplazamiento del punto "A" en cada caso. Todas las barras son de la misma sección.



Calcule los diagramas de momentos flectores de las estructuras siguientes. Calcule también las reacciones en los apoyos. Todas las barras son de la misma sección.



Puede despreciar las deformaciones debidas al axil en todos estos ejercicios.

- El "método de compatibilidad" y el "método de equilibrio" se encuentran ambos ampliamente documentados en la literatura. Una descripción más detallada que la presentada aquí puede encontrarse por ejemplo en ^[13], y también con diferentes enfoques en cualquiera de las referencias ^{[1][2][3][4][5][14][15][16][17]}, si bien no se plantea en este curso mayor profundización que la presentada aquí.

8.- Nociones sobre la Torsión

Se presentarán seguidamente algunas nociones generales acerca de la torsión, a un nivel que puede considerarse de “cultura general” sobre el tema. Las necesarias limitaciones en la extensión de los contenidos de la asignatura, junto con el relativo interés que este tipo de sollicitación tiene en la práctica en las estructuras de edificación, hacen aconsejable no ir mucho más allá en el estudio de la torsión en este momento.

Torsión uniforme y torsión no uniforme

Consideremos una barra sin ninguna limitación al movimiento de sus puntos, como la de la figura 8.1, que está sometida a momentos torsores en sus extremos, no existiendo ninguna otra sollicitación. En estas condiciones, las secciones de la barra experimentan un giro relativo de dirección “x”, que será constante por unidad de longitud de la barra. Denotaremos como Θ a este ángulo por unidad de longitud.

Salvo en el caso especial en que la barra sea de sección circular -hueca o maciza-, ocurrirá que las secciones ($x=\text{cte}$) inicialmente planas de la barra, dejarán de ser planas. Se denomina a este fenómeno “alabeo de las secciones”. En las condiciones que hemos considerado, todas las secciones de la barra tendrán el mismo alabeo, es decir, cualquier sección adoptará una forma idéntica tras la deformación, salvo un movimiento de sólido rígido (que consistirá precisamente en el giro entre secciones).

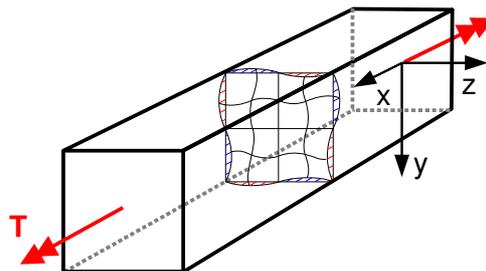


Figura 8.1: Barra cuadrada sometida a torsión uniforme. Se muestra orientativamente el alabeo de una sección cualquiera (no se muestra el giro de las secciones).

En cuanto a las tensiones, el momento torsor generará en las secciones un cierto sistema de tensiones tangenciales estáticamente equivalente a él, no existiendo tensiones normales. El modo de trabajo de la barra descrito hasta aquí se conoce como “torsión pura”, “torsión de Saint Venant”, o “torsión uniforme”. En general se identifica como torsión uniforme aquella sollicitación de torsión que no produce tensiones normales en las secciones de la barra.

Supongamos ahora que la barra de la figura 8.1 tuviese impedidos los desplazamientos de alabeo (los de dirección x, que se muestran orientativamente) en uno de sus extremos, típi-

camente por efecto de un empotramiento o alguna restricción similar en dicho extremo. Razonando a partir de la configuración de la figura 8.1, el empotramiento deberá ejercer unas tensiones σ_{xx} en esa sección de forma que los puntos de la misma sean restituidos a un plano. Es evidente que estas tensiones σ_{xx} serán autoequilibradas (de resultante y momento nulos) en la sección del empotramiento, ya que no hay otras fuerzas de dirección x (o momentos flectores) en el problema con las que puedan equilibrarse. Es también evidente, por condición de contorno del problema, que en todos los puntos de la sección opuesta al empotramiento sería $\sigma_{xx}=0$. Por tanto, en cualquier línea paralela al eje de la barra, la tensión σ_{xx} variará desde un valor posiblemente distinto de cero en el empotramiento, hasta un valor nulo en el extremo opuesto. Se conoce como “torsión no uniforme” el modo de trabajo de la barra en el que la aplicación de un momento torsor provoca tensiones normales en la sección (además de tensiones tangenciales).

El que la tensión σ_{xx} varíe a lo largo de “x”, requiere que existan tensiones tangenciales en la sección del mismo tipo a las que aparecen en flexión simple (serán del tipo “flujo de tensiones” si la sección es de pared delgada) para que un trozo de rebanada diferencial esté en equilibrio (el razonamiento es similar al que se usó para encontrar las tensiones tangenciales en la flexión simple). Una parte del momento torsor aplicado es equilibrado por estas tensiones tangenciales, y el resto del momento torsor aplicado es equilibrado con tensiones tangenciales que siguen el patrón de la torsión uniforme, del cual daremos noticia más tarde. Téngase noticia de la existencia de una magnitud propia de la torsión no uniforme llamada “bimomento”, cuya derivada es el valor de esa parte del momento torsor total que es equilibrado por las tensiones tangenciales debidas a la torsión no uniforme.

Conviene destacar que en el ejemplo anterior el impedimento al alabeo de una sección ha sido el factor decisivo que ha hecho aparecer el fenómeno de torsión no uniforme. Aunque la anterior es la más frecuente, hay otras circunstancias que pueden provocar torsión no uniforme, como por ejemplo que la barra tenga aplicado un momento torsor variable en x. En este caso, distintas porciones de la barra tenderían a tener alabeos distintos, cuya armonización hará aparecer las tensiones normales propias de la torsión no uniforme. En todo caso, la causa última de la aparición de estas tensiones es siempre algún impedimento a la tendencia al libre alabeo de la sección.

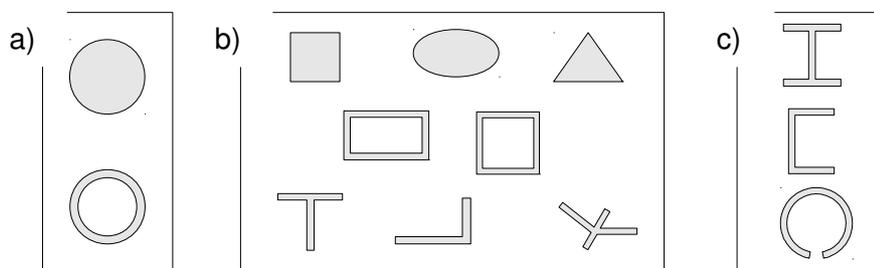


Figura 8.2: a) Secciones sin tendencia al alabeo por torsión. b) Secciones con tendencia al alabeo despreciable. c) Secciones con fuerte tendencia al alabeo.

Una consecuencia de lo anterior es que las secciones que no tienen tendencia al alabeo sólo desarrollarán torsión uniforme. Las únicas secciones que en rigor disfrutan de esta

característica son las circulares, tanto huecas como macizas (figura 8.2a). No obstante hay otros tipos de sección cuya tendencia al alabeo es pequeña, y generalmente pueden analizarse con suficiente aproximación bajo la hipótesis de torsión uniforme aunque tengan los desplazamientos normales impedidos en alguna sección. Tal es el caso de las secciones como las mostradas en la figura 8.2b, que incluyen secciones macizas (rectangulares, cuadradas, etc), las secciones cerradas de pared delgada (secciones en cajón y similares), y las secciones formadas por rectángulos de pequeño espesor que se cortan en un punto (secciones en “L”, en “T”, etc, de pared delgada). Finalmente, las secciones abiertas de pared delgada en general (salvo las del tipo anterior), tienen una fuerte tendencia al alabeo, y el efecto de torsión no uniforme debe ser tenido en cuenta en ellas. La figura 8.2c muestra algunas de estas secciones. Nótese en particular que, a estos efectos, existe una drástica diferencia entre un perfil circular de pared delgada cerrado y uno abierto.

Un campo de aplicación propenso a la aparición de fenómenos de torsión no uniforme es el de estructuras espaciales de nudos rígidos con barras que trabajan a flexión. En este tipo de estructuras, se da fácilmente la situación de que un nudo necesita equilibrar el momento que es flector para una barra (de dirección perpendicular a la misma) con un momento que es torsor para otra barra (de dirección colineal con esa barra). Las propias conexiones de unas barras con otras en los nudos restringen, al menos parcialmente, el libre alabeo de las secciones, provocando que esa torsión sea no uniforme. El efecto es más acusado en estructura metálica, cuando se usan perfiles abiertos. Por ello es recomendable usar perfiles cerrados en este tipo de aplicaciones, siendo los perfiles tubulares una opción óptima en este sentido.

Tensiones en la torsión uniforme

Vamos a presentar a continuación, a un nivel informativo, cómo son típicamente las distribuciones de tensión tangencial en la sección cuando la barra está sometida a torsión uniforme, dependiendo de la forma de la sección.

Comenzaremos por el caso más sencillo de un perfil tubular de pared delgada como el mostrado en la figura 8.3a. Definimos unos ejes que varíen de orientación con el punto de la barra considerado, de forma que x sea paralelo al eje de la misma, r tenga la dirección radial, y θ tenga la dirección circunferencial. La simetría axial del problema permite asegurar que σ_{xx} será constante, y el hecho de que su resultante deba ser nula, indica que debe ser $\sigma_{xx}=0$ en todos los puntos. Un razonamiento basado en esa simetría axial combinado con un concepto llamado “antisimetría” (que no es objeto de estudio en este curso), permite asegurar que la componente σ_{xr} será también exactamente nula en todos los puntos.



El razonamiento anterior es exacto para cualquier sección circular, de pared delgada o no, sometida a torsión. Pero en todo caso, podemos aplicar a la tensión tangencial de cualquier perfil de pared delgada el mismo razonamiento aproximado expuesto en el tema 5, figura 5.5.

Por tanto, las tensiones en la sección tendrán como única componente $\sigma_{x\theta}$ en nuestro problema. Asumiremos la aproximación, por otra parte habitual en pared delgada, de que dichas tensiones son constantes en el espesor por ser éste pequeño, como indica la figura 8.3b. Y por supuesto serán constantes en la dirección circunferencial debido a la simetría axial del problema.

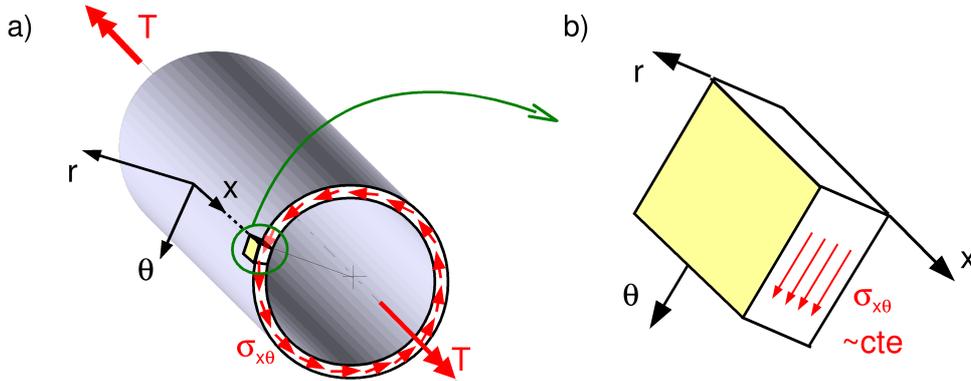


Figura 8.3: a) Barra tubular de pared delgada sometida a torsión. b) Detalle de la tensión tangencial.

Cuando se trata de un perfil circular hueco de pared gruesa como el de la figura 8.4a, la variación de $\sigma_{x\theta}$ en la dirección radial no puede despreciarse. Este problema puede analizarse descomponiéndolo en capas circulares de pared delgada similares a la anterior (en este caso de espesor diferencial), que no se transmiten tensiones entre sí. Para asegurar que el enfoque anterior es correcto sólo hay que garantizar que las tensiones σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, y σ_{rx} (las que tienen primer subíndice “r”) son nulas en el problema, lo que puede comprobarse usando varios razonamientos basados en simetrías y antisimetrías que no detallamos aquí.

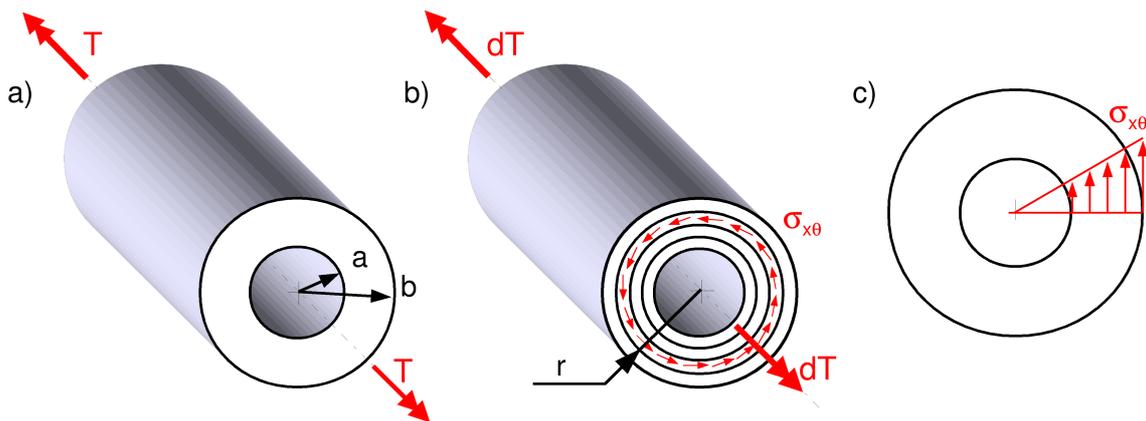


Figura 8.4: a) Perfil circular de pared gruesa sometido a torsión. b) Descomposición del problema en capas. c) Distribución de tensión que resulta.

La descomposición indicada se ilustra en la figura 8.4b, en donde se muestra que una capa diferencial aportará un diferencial de momento torsor. El cálculo se completa asegurando que todas las capas tienen el mismo giro Θ por unidad de longitud, con el fin de que se respete la continuidad material entre capas existente en el problema original. De ello resulta que la tensión $\sigma_{x\theta}$ es proporcional al radio “r” de la capa, como indica la figura 8.4c.

La distribución de tensión cuando la sección es circular maciza, como la de la figura 8.5a, se puede obtener sin más que tomar como radio interior $a=0$ en el caso anterior. Como se muestra, la tensión es nula en el centro, y crece linealmente con el radio. Ello indica que el material que se encuentra cercano al centro está realmente muy desaprovechado, siendo el material de la periferia del perfil quien fundamentalmente desarrolla las tensiones equivalentes al momento torsor. Esto nos da una idea de que un perfil cerrado (hueco) será más eficiente para resistir torsión que un perfil macizo.



Sin embargo, en ciertos casos, por ejemplo si el vaciado de material debe hacerse mediante mecanizado, resulta más costo ejecutar la sección hueca que la maciza, y adicionalmente el ahorro de material no es tal (lo extraemos como desecho del mecanizado). En estos casos la única ventaja del perfil hueco es el menor peso. En otros casos, típicamente si el perfil hueco es de pared delgada, el hueco no se materializa mecanizando, y su uso en cuanto a resistir torsión sólo presenta ventajas.

Tomando como base el resultado para la sección circular maciza, es fácil intuir cualitativamente la forma que tendrá la distribución de tensiones para otras secciones macizas no circulares. Las tensiones deben ser tangentes al contorno en los puntos del mismo (motivo: si llamamos "n" la normal al contorno de la barra, σ_{nx} es nula por condición de contorno, luego σ_{xn} debe serlo también). Esto configura la forma general que tendrán las líneas de campo de la tensión también en el interior de la sección. Las figuras 8.5b y 8.5c muestran orientativamente como cabe intuir que sería la distribución de tensiones en una sección elíptica, y en una sección maciza de forma más general.

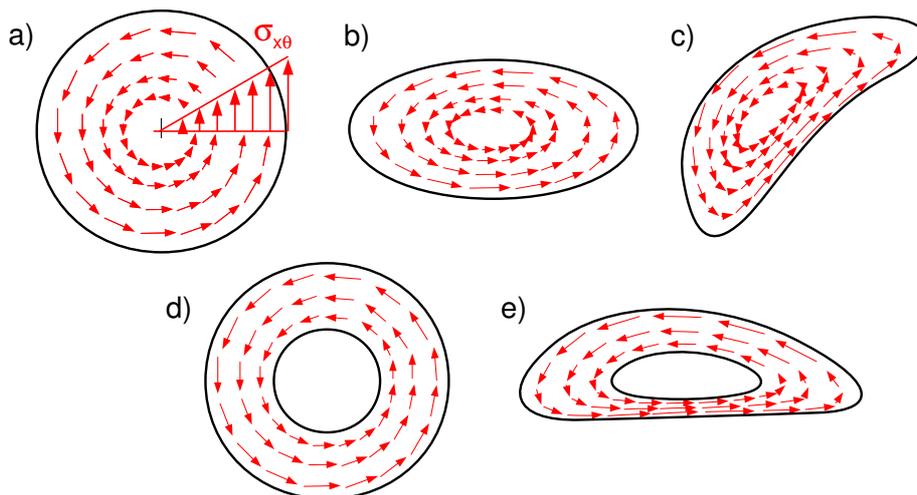


Figura 8.5: a) Tensiones tangenciales de torsión en sección circular maciza. b) Ídem. en una sección elíptica. c) Ídem. en una sección maciza más general. d) e) Ídem. en secciones huecas de pared gruesa.

Lo mismo podemos decir de las secciones huecas de pared gruesa. La figura 8.5e muestra cómo cabe intuir que vaya a ser la distribución de tensiones en una sección hueca cualquiera, basándonos en la distribución del perfil circular hueco de la figura 8.5d.

Nos interesa ahora saber cómo debe ser la distribución de las tensiones tangenciales debidas a torsión en perfiles de pared delgada. Al nivel orientativo que estamos realizando esta exposición, podemos pensar, por ejemplo, en cómo evolucionarían las tensiones en la sección elíptica de la figura 8.5b cuando la elipse se alarga más y más. La figura 8.6a muestra lo que podría ser un estado intermedio en este razonamiento de extrapolación, el cual conduce inevitablemente a la conclusión de que la distribución en un perfil muy alargado (con forma de rectángulo estrecho o similar), debe ser parecido al de la figura 8.6b.

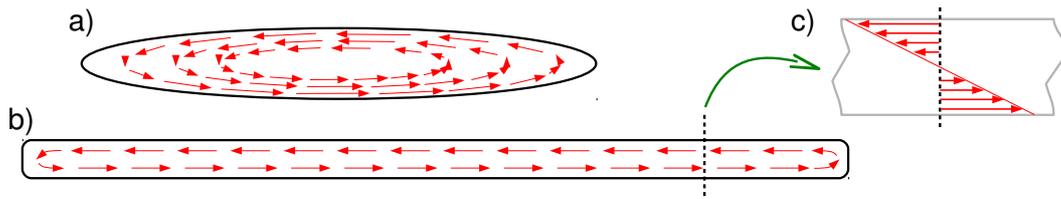


Figura 8.6: a) Sección elíptica alargada. b) Sección de pared delgada, prácticamente rectangular. c) Posible evolución de la tensión en el espesor.

El razonamiento anterior ha conducido a que la tensión debe cambiar se sentido en el ancho del del espesor. La evolución continua más sencilla compatible con lo anterior sería una evolución lineal como la mostrada en la figura 8.6c. Téngase noticia de que, al igual que en muchas otras situaciones en la ciencia, la solución más sencilla resulta ser la acertada, y en este caso la distribución lineal intuida es la que muy aproximadamente ocurre en realidad en un rectángulo estrecho como el representado (más aproximadamente cuanto más estrecho sea el rectángulo), salvo evidentemente en las zonas de los extremos del rectángulo, en los que la tensión debe reorientarse.

Si realizamos un razonamiento similar sobre un perfil hueco para obtener un perfil cerrado de pared delgada, resulta evidente a primera vista que los resultados no tendrán el mismo aspecto anterior. En efecto, bien razonemos a partir de la figura 8.3a, o bien razonemos a partir de un perfil grueso como los de las figuras 8.5d y 8.5e, apreciamos que las tensiones tangenciales no cambiarán de sentido con la dirección del espesor de la pared, y que de hecho será buena aproximación considerarlas constantes en esta dirección (esperamos que esto sea tanto más aproximado cuanto más delgada sea la pared).

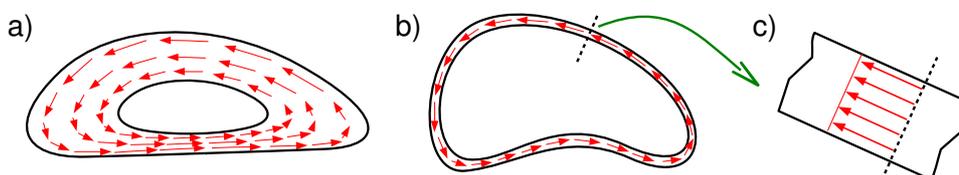


Figura 8.7: a), b) Evolución de un perfil cerrado grueso a uno de pared delgada. c) Tensiones aproximadamente constantes en el espesor.

La figura 8.7b muestra cómo cabe esperar que evolucione la tensión tangencial en un perfil cerrado de pared delgada, razonando a partir de un perfil grueso similar como el de la figura 8.7a. La distribución es del tipo “flujo de tensiones” mostrada en la figura 8.7c, similar a la de las tensiones tangenciales de flexión (y a las de torsión no uniforme, según se ha comentado), pero muy diferente a la de un perfil delgado abierto como pueda ser la del rectángulo

estrecho de la figura 8.6c. Indagando un poco más en estas tensiones en perfiles cerrados de pared delgada, podemos considerar un trozo de una rebanada de la viga, de forma similar a como hicimos en el ámbito de la flexión en la figura 5.7. En este caso, la rebanada no necesita ser diferencial en la dirección “x”, ya que las tensiones no varían con “x”. La figura 8.8a muestra un perfil arbitrario cerrado de pared delgada junto con la nomenclatura de los ejes adoptados, coordenadas, etc, y la figura 8.8b plantea el equilibrio de fuerzas de dirección “x” para este trozo de rebanada.

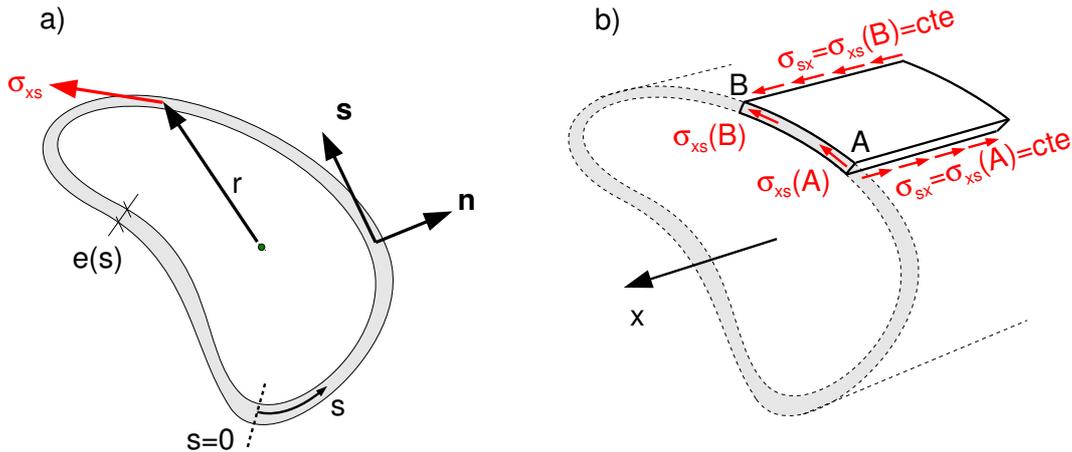


Figura 8.8: a) Nomenclatura de ejes en un perfil cerrado de pared delgada. b) Fuerzas sobre un trozo de rebanada.

Dicho equilibrio se expresa fácilmente como $\sigma_{xs}(A) \cdot e(A) \cdot L = \sigma_{xs}(B) \cdot e(B) \cdot L$, siendo “L” la longitud de la rebanada considerada, que como se aprecia no afecta al cálculo. Por tanto:

$$\sigma_{xs}(A) \cdot e(A) = \sigma_{xs}(B) \cdot e(B)$$

Es decir, que el flujo de tensiones permanece constante (no solamente continuo) a lo largo de la coordenada “s” que recorre la línea media del perfil: allí donde el espesor sea mayor, habrá menos tensión. Se indicó que en el ámbito de la flexión no era recomendable pensar en una analogía del flujo de tensiones con un problema de “agua circulando por tuberías”, pero en el caso de la torsión vemos que puede ser más acertado.

Órdenes de magnitud en distintos perfiles

Aunque nos hemos propuesto mantener esta exposición dentro de un nivel informativo con la intención de que resulte ligera y agradable (lo cual suele estar reñido con el uso de fórmulas), vamos a permitirnos hacer unos cálculos groseros acerca del orden de magnitud que pueden tener las tensiones tangenciales de la torsión uniforme, en los diversos tipos de secciones.

Comenzaremos por una sección circular maciza, como la de la figura 8.5a. No sería difícil obtener la solución exacta, cosa que probablemente el lector haya hecho durante sus estudios de enseñanza secundaria, pero no pretendemos esto aquí. Más bien interesa ahora explorar las posibilidades de razonamientos de tipo aproximado como el siguiente: Conside-

remos que el momento torsor exterior está equilibrado (o “es equivalente a”, según se quiera plantear) por pares de fuerzas diferenciales en la sección como los mostrados en la figura 8.9 a título de ejemplo. Esta figura simplemente representa algunas de las fuerzas elementales del tipo $\sigma_{x\theta} \cdot dA$ correspondientes a las tensiones de la figura 8.5a. Pensemos en un “par promedio” (en algún sentido) de los anteriores, que tenga un brazo de par “promedio” y una tensión tangencial también “promedio”. Este “par elemental promedio”, multiplicado por un área que sea del orden de magnitud del área que corresponde a los diferenciales dA , daría como resultado una cantidad del orden de magnitud del momento torsor aplicado T .

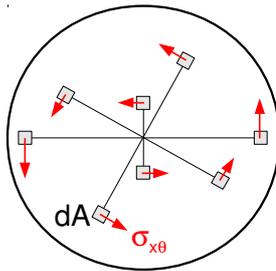


Figura 8.9: Algunos pares de fuerzas elementales que equilibran el momento torsor exterior.

El “brazo de par promedio” será del orden de magnitud del radio de la circunferencia (R). El área a considerar será del orden de magnitud del área de la sección (πR^2 , del orden de R^2). Si llamamos $\bar{\tau}_M$ a la “tensión promedio” (el subíndice “M” indica macizo), tendremos:

$$O[T] \sim O[R^3 \cdot \bar{\tau}_M] \quad (8.1)$$

Hagamos un cálculo grosero similar para una sección de pared delgada abierta. Servirá como ejemplo la sección con forma de rectángulo estrecho de la figura 8.6b, con las dimensiones indicadas en la figura 8.10. En este caso, la “tensión promedio” $\bar{\tau}_{DA}$ (con “D” de delgado, “A” de abierto) produce dos tipos de pares: uno que tiene el brazo del orden del espesor “e”, y que se da en la mayor parte del área, y otro correspondiente a las tensiones en los extremos del perfil, que si bien corresponden a un área pequeña, tienen un brazo de par grande, del orden de la longitud “b” del rectángulo.

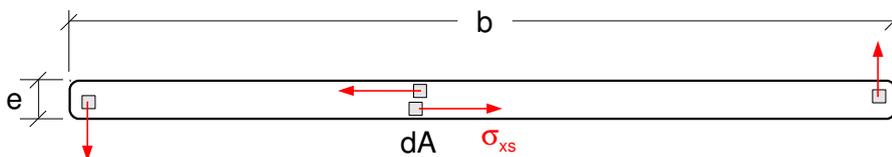


Figura 8.10: Algunos pares de fuerzas elementales en la sección del tipo “rectángulo estrecho”.

El momento torsor aportado por los pares del primer tipo, será del orden de la tensión promedio $\bar{\tau}_{DA}$ multiplicada por un brazo de par del orden del espesor “e”, y por un área del orden de la sección, “e·b”, ya que este tipo de par se da en casi toda ella. El momento torsor aportado por los pares del segundo tipo, será del orden de la tensión promedio $\bar{\tau}_{DA}$ multiplicada por un brazo de par del orden de la longitud “b” del rectángulo, y por un área correspondiente a zonas en los extremos de la sección, del orden de $e \cdot e = e^2$. Ambas aportaciones son del mismo orden ($O[b \cdot e^2 \cdot \bar{\tau}_{DA}]$), por tanto:

$$O[T] \sim O[b \cdot e^2 \cdot \bar{\tau}_{DA}] \quad (8.2)$$

Nos gustaría ahora comparar el comportamiento de los dos perfiles considerados, uno macizo y uno abierto de pared delgada. Para ello planteamos la cuestión en los términos siguientes: usaré una cantidad dada de material para soportar un momento torsor T dado, y puedo disponer el material en la geometría que desee. ¿Qué geometría produce tensiones menores?

Así planteado, el momento torsor T de (8.1) y de (8.2) será el mismo, y la igualdad de área de las secciones se expresa como $b \cdot e = \pi R^2$, con lo que $O[R^3] \sim O[(b \cdot e)^{3/2}]$, luego:

$$O[T] \sim O[R^3 \cdot \bar{\tau}_M] \sim O[(b \cdot e)^{3/2} \cdot \bar{\tau}_M] \sim O[b \cdot e^2 \cdot \bar{\tau}_{DA}]$$

De la última similaridad resulta:

$$O\left[\frac{\bar{\tau}_M}{\bar{\tau}_{DA}}\right] \sim O\left[\sqrt{\frac{e}{b}}\right] \ll 1 \quad (8.3)$$

Como el espesor “ e ” de la pared delgada será mucho menor que su longitud “ b ”, la relación anterior será mucho menor que la unidad. La conclusión es que el perfil macizo desarrolla tensiones menores para soportar el mismo momento torsor usando la misma cantidad de material, y por tanto es más ventajoso que el perfil delgado abierto.

Adicionalmente, lo anterior nos indica la tendencia de que en el proceso de ir “alargando” el perfil desde la sección circular, pasando por secciones elípticas cada vez más excéntricas, hasta llegar a la sección de pared delgada, íbamos empeorando paso a paso el comportamiento del perfil, que iba desarrollando tensiones mayores en cada nueva configuración más alargada (estamos evitando usar la palabra “esbelta” en este contexto, por lo habitual de su asociación con la geometría de la barra completa). De hecho, téngase noticia de que entre las secciones macizas, la circular es la óptima en el sentido que tratamos aquí.

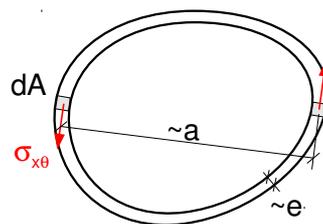


Figura 8.11: Par diferencial elemental y parámetros de la sección cerrada de pared delgada.

Nos gustaría ahora hacer una comparación similar con una sección cerrada de pared delgada. Para ello podemos considerar la sección tubular de la figura 8.3a, o una del tipo a la mostrada en la figura 8.8. Digamos la de la figura 8.11. En todo caso, llamaremos “ a ” a una longitud representativa de las dimensiones de la sección (que podría ser el diámetro si la sección es circular), y “ e ” a una longitud representativa del espesor de la pared (misma notación que en el rectángulo estrecho). La “tensión promedio” se denotará en este caso por $\bar{\tau}_{DC}$ (subíndices “DC”: delgada, cerrada) El “par elemental promedio” tendrá un brazo del orden de “ a ”, y actuará sobre una superficie $\pi a \cdot e$, es decir, del orden de $a \cdot e$. Por tanto:

$$O[T] \sim O[a^2 e \bar{\tau}_{DC}] \quad (8.4)$$

La comparación con una sección maciza que tuviese la misma cantidad de material, se hará nuevamente en base al resultado (8.1) correspondiente a sección circular maciza, la cual tiene un área de πR^2 . El área material de la sección de pared delgada (si tomamos como referencia el caso circular), será del orden de $2\pi a e$, es decir del orden de $a \cdot e$. Igualando las áreas, R^3 será del orden de $(a e)^{3/2}$. Igualando también el momento torsor:

$$O[T] \sim O[R^3 \bar{\tau}_M] \sim O[(a \cdot e)^{3/2} \bar{\tau}_M] \sim O[a^2 e \bar{\tau}_{DC}]$$

Operando:

$$O\left[\frac{\bar{\tau}_M}{\bar{\tau}_{DC}}\right] \sim O\left[\sqrt{\frac{a}{e}}\right] \gg 1 \quad (8.5)$$

Como el espesor “e” de la pared delgada será mucho menor que la dimensión característica “a” de la sección, la relación anterior será mucho mayor que la unidad. Por tanto el perfil cerrado de pared delgada desarrolla tensiones menores para soportar el mismo momento torsor usando la misma cantidad de material, y es más ventajoso que el perfil macizo.

Cabe hacer la reflexión adicional de que, pensando en perfiles circulares como ejemplo, una tubería de pared delgada deberá tener un diámetro exterior mucho mayor que una barra maciza que tenga la misma cantidad de material. Esto constituye a la vez un posible inconveniente (dimensiones exteriores mayores), y una explicación intuitiva de porqué el perfil delgado desarrolla menores tensiones (porque el brazo del “par elemental promedio” es mayor).



A título meramente informativo: la tensión tangencial $\sigma_{x\theta}$ en secciones circulares, ya sean macizas, huecas, o huecas de pared delgada, es $\sigma_{x\theta} = T \cdot r / J$, donde J es el momento polar de inercia (el cual es del orden de R^4 , siendo R el radio exterior). Lo anterior concuerda con (8.1) y con (8.4). En un perfil cerrado de pared delgada es $T = 2\Omega e \sigma_{xs}$, siendo Ω el área encerrada por el perfil (aproximadamente “el área del hueco”). Nuevamente lo anterior concuerda con (8.4). En un perfil abierto de pared delgada formado por rectángulos (del tipo “doble T”, “C”, etc), la máxima tensión σ_{xs} en el rectángulo “i” satisface $I_T \cdot \sigma_{xs} = T \cdot e_i$, siendo $I_T = \sum a_k \cdot e_k^3 / 3$, donde “ a_k ” y “ e_k ” son respectivamente la longitud y el espesor del rectángulo estrecho “k”. Puede apreciarse la concordancia del orden de magnitud de T con el indicado en (8.2).

Influencia de la torsión no uniforme

Como se ha indicado, el efecto de la torsión no uniforme es nulo en secciones circulares, y generalmente puede despreciarse en secciones macizas, en secciones cerradas (de pared delgada o no), y en secciones formadas por rectángulos estrechos que confluyen en un

punto. Lo anterior cubre en realidad todos los casos comentados hasta ahora. Se han evitado intencionadamente los casos en que el efecto de torsión no uniforme es importante, para no desvirtuar las explicaciones relativas a las distribuciones de tensión debidas a torsión uniforme. Las explicaciones al respecto se han reservado para presentarse agrupadas en este momento.

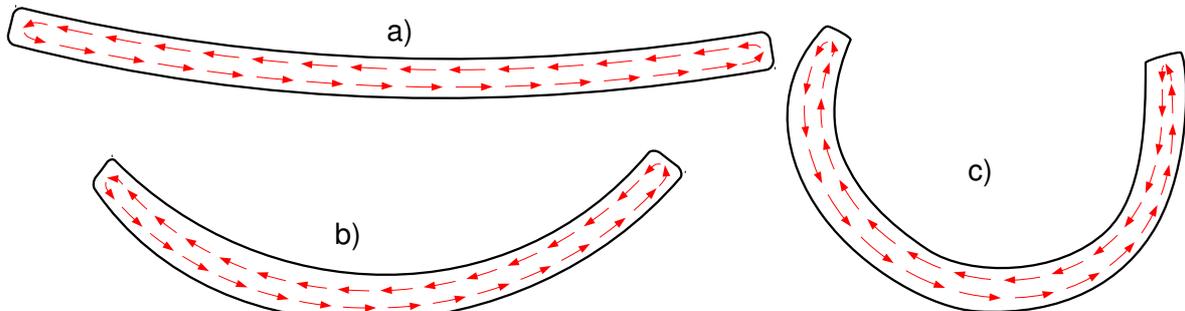


Figura 8.12: Tres perfiles similares a un rectángulo estrecho, sucesivamente más curvados.

Comenzaremos por reconsiderar el caso del rectángulo estrecho de la figura 8.6b. Siguiendo con los razonamientos de tipo cualitativo que hacíamos en aquel contexto, podemos imaginar que el rectángulo estuviese algo curvado. Intuimos que la distribución de tensiones no cambiaría substancialmente su forma. Tampoco si estuviese un poco más curvado... hasta prácticamente cerrarse sobre sí mismo. El proceso se ilustra en las figuras 8.12a, b, c. La distribución de tensiones mostrada en la figura 8.12c es de hecho acertada (al nivel orientativo que estamos tratando la cuestión), si el problema se mantiene en el ámbito de la torsión uniforme.

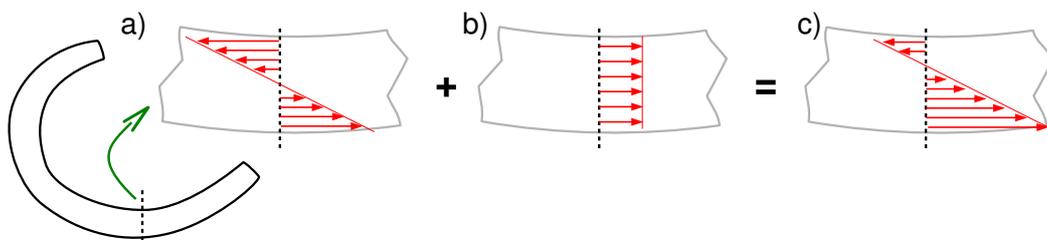


Figura 8.13: a) Tensiones de torsión uniforme. b) Ídem. no uniforme. c) Distribución final.

Pero esta sección de la figura 8.12c tiene una tendencia al alabeo muy importante (que el rectángulo recto estrecho no tenía), y si existe restricción al alabeo de la sección, aparecerán los efectos de la torsión no uniforme. Éstos serán por una parte la aparición de tensiones σ_{xx} en la barra, y por otra parte una distribución de tensiones tangenciales “de tipo flujo” en la sección, que variará a lo largo de la línea media del perfil, y que aportará una parte del momento torsor total. La superposición de estas aportaciones de tensión tangencial debidas a los efectos de torsión uniforme y no uniforme, producirá que la variación de tensión en la dirección del espesor de la pared sea lineal (como corresponde a sumar un término lineal y otro constante), pero no de la forma indicada en la figura 8.7c, sino en alguna otra forma como por ejemplo la mostrada en la figura 8.13.

Lo indicado para la sección anterior es cualitativamente aplicable a las otras secciones abiertas de pared delgada, como las de forma de “doble T”, de “C”, etc. Todas ellas desarrollan grandes tensiones de torsión uniforme frente a un par torsor aplicado, y en general (salvo las formadas por rectángulos estrechos que confluyen en un punto, como la “T”) son susceptibles de desarrollar efectos de torsión no uniforme.

Finalmente, apuntaremos que el efecto de la torsión no uniforme suele variar a su vez globalmente a lo largo de la longitud de la barra. Si por ejemplo la barra tiene el alabeo restringido sólo en un extremo, en las cercanías de ese extremo la torsión será fundamentalmente no uniforme, mientras que en las proximidades del extremo opuesto la torsión tendrá fundamentalmente componente uniforme.

Resumen y conclusiones

Si solamente una idea fuese a recordarse acerca de la torsión, ésta debiera ser que los perfiles abiertos de pared delgada son muy poco aptos para resistirla.

Como hemos visto, estos perfiles generan siempre grandes tensiones de torsión uniforme frente a un momento torsor. Adicionalmente, muchos de ellos (excepto los formados por rectángulos estrechos que confluyen en un punto), tienen fuerte tendencia al alabeo, por lo que generarán tensiones de torsión no uniforme si hay restricciones al alabeo.

En estructuras convencionales de edificación e industriales, lo más adecuado suele ser evitar desde la fase de diseño la necesidad de que las barras desarrollen las tensiones típicas de la torsión. Ello implica, entre otras cosas más evidentes, tener en cuenta las observaciones acerca del centro de esfuerzos cortantes presentadas en el tema 5.

Si no se puede evitar la presencia de torsión en alguna barra, al menos debiera procurarse que ésta fuese un efecto sobrevenido en la misma, no un modo de trabajo que sea fundamental para la estabilidad del sistema resistente. En esos casos puede ser aceptable garantizar la necesaria flexibilidad a torsión de la barra, y despreciar el momento torsor como tal.

El tipo de perfil más adecuado para resistir torsión es el perfil cerrado de pared delgada, o moderadamente delgada, siendo el perfil tubular una opción a considerar, aunque es igualmente aceptable el uso de perfiles en cajón. Todos estos perfiles pertenecen típicamente al ámbito de las estructuras metálicas.

En el ámbito de las estructuras de hormigón, las secciones de las barras suelen ser rectangulares. Este tipo de secciones macizas son las siguientes en el orden de idoneidad para soportar momento torsor, que prácticamente siempre estará acompañada de flector, cortante y/o axil. El punto de mayor tensión cortante debida a la torsión (uniforme, ya que la no uniforme es despreciable) se encuentra a mitad del lado mayor en una sección rectangular, siendo éste un punto de comprobación de referencia. La barra suele necesitar de armados

de acero específicos para resistir la torsión cuando ésta está presente. Éste y los demás aspectos del diseño de elementos de hormigón armado caen fuera del ámbito de este curso, y desde luego fuera de la intención de esta breve presentación informativa acerca de la torsión.

- Aunque se espera que hayan sido útiles y clarificadores a nivel informativo, los contenidos acerca de la torsión presentados en este tema son ciertamente superficiales. Es probable que una mayoría de los alumnos no llegue a necesitar mucho más en su vida profesional, pero lo cierto es que de lo expuesto sólo se podrán atisbar qué criterios de diseño podrán resultar juiciosos, y quizá qué orden de magnitud tendrán las tensiones tangenciales debidas a torsión en un problema dado, lo cual puede ser de utilidad solamente en un pre-diseño. Para un estudio más apropiado de la torsión y para futura ampliación, pueden consultarse cualquiera de las referencias ^{[5][9][13][14][15][16]}, así como las normas ^[6] y ^[8].

Apéndice A.

Álgebra de Vectores Deslizantes

Este apéndice describe de manera breve, a modo de repaso, algunos resultados del álgebra vectorial. Aunque no pretende ser completo o exhaustivo, su contenido debiera ser suficiente para plantear el equilibrio de los sólidos en el ámbito de este curso. Muchas de las fórmulas y figuras siguientes refieren a casos bidimensionales a título de ejemplo, aunque son directamente extrapolables a tres dimensiones, salvo indicación en contrario.

Generalidades

Distinguimos tres tipos de vectores. Su definición obedece principalmente a nuestra necesidad de representar matemáticamente magnitudes vectoriales de distinta naturaleza física. El objetivo es que la representación que elijamos sea útil para elaborar el modelo matemático que necesitemos.

- Llamamos Vector Deslizante al vector cuya posición nos es indiferente a efectos de cálculo, siempre que se mantenga en su recta de acción original.
- Llamamos Vector Ligado al vector cuya posición nos interesa considerar (a efectos de cálculo) asociada un punto concreto, llamado punto de aplicación.
- Llamamos Vector Libre al vector cuya posición en el espacio nos es indiferente a efectos de cálculo. Sólo interesa su módulo y dirección, no su posición. Se define el vector libre asociado a un vector deslizante (o ligado) como el vector libre que tiene el mismo módulo y dirección que el original. Decimos que dos vectores son equipolentes si tienen el mismo vector libre asociado.

Cuando se estudia el equilibrio de un sólido indeformable independientemente de su resistencia, la representación de las fuerzas mediante vectores deslizantes es ventajosa. Por el contrario, si se está estudiando la resistencia del sólido, tiene poco sentido considerar las acciones como vectores deslizantes, siendo más apropiado considerarlas como vectores ligados al punto de aplicación en el que actúan (por ejemplo, a efectos de resistencia de un cuerpo humano, es relevante si una fuerza se aplica comprimiendo la planta de los pies o tirando del cabello). Finalmente, suele ser conveniente considerar que las operaciones entre vectores (como la suma, o el producto vectorial, etc) están definidas entre vectores libres, aunque en condiciones especiales es posible definir las entre vectores deslizantes o ligados, según se indica más adelante.

Denotaremos los vectores con una flecha superior, como en \vec{F} , \vec{v} , o bien usando letra negrita, como por ejemplo \mathbf{F} , \mathbf{v} . Ambas notaciones servirán indistintamente para representar a cualquier vector, sea libre deslizante o ligado.

Los puntos del espacio se denotarán mediante letras mayúsculas como M, N, etc. Entre otras muchas magnitudes físicas, un vector puede usarse para representar el segmento de recta orientado que delimitan dos puntos del espacio. Si dichos puntos son M y N, denotaremos como \mathbf{MN} al vector que tiene origen en M y extremo en N.

Operaciones básicas

Adición (o suma) de vectores

La suma (o adición) de dos vectores libres \mathbf{a} , \mathbf{b} , es otro vector libre \mathbf{s} , que puede obtenerse gráficamente como diagonal de un paralelepípedo tal que dos de sus lados son los vectores dados, colocados en un origen común (fig A1 a). Equivalentemente, \mathbf{s} puede obtenerse como el vector que une el principio y el final de un polígono trazado colocando los sucesivos vectores a sumar uno tras otro (fig A1 b).

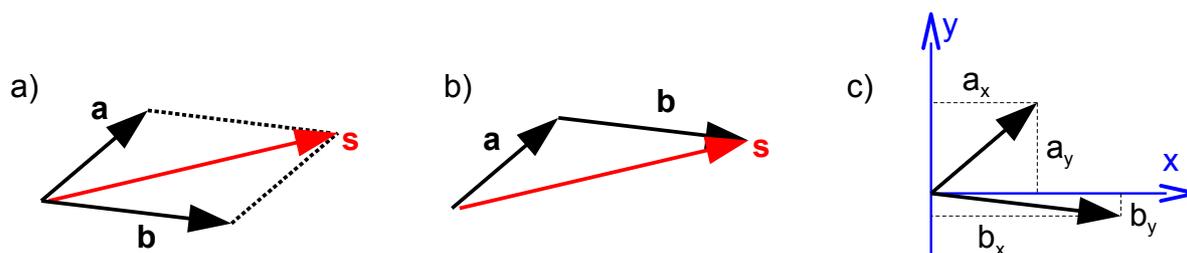


Figura A1: Adición de dos vectores

Proyectando sobre cada uno de los ejes cartesianos x,y, es inmediato demostrar que las componentes de \mathbf{s} en esos ejes pueden obtenerse de manera analítica mediante adición de las correspondientes componentes de los vectores a sumar (ver fig. A1 c):

$$s_x = a_x + b_x ; \quad s_y = a_y + b_y \quad (\text{A.1})$$

La adición de más de dos vectores libres puede realizarse gráficamente por adición sucesiva de la suma de dos de ellos con un tercero, o dibujando el polígono que forman todos ellos en la manera mostrada en la figura A1 b. Analíticamente, pueden sumarse las componentes correspondientes de todos los vectores para obtener las componentes cartesianas del vector suma, mediante generalización inmediata de la ec. (A.1) anterior.

En rigor, la suma de dos vectores deslizantes sólo está definida si las rectas de acción de ambos se cortan en un punto (lo que puede no ocurrir en un problema tridimensional). En caso de estar definida, la suma será otro vector deslizante, cuya recta de acción pasará por el punto de corte de los anteriores. El que eventualmente la suma de dos vectores deslizantes no sea posible como tal, no obsta para que podamos sumar los vectores libres asociados (que siempre estará definida), a los efectos que pueda resultar conveniente.

Producto escalar de dos vectores

Es el escalar que se obtiene de multiplicar el módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre la dirección del primero. Si esa proyección tiene el mismo sentido que el primer vector, el producto escalar es positivo, y negativo en otro caso. La figura A2 muestra que este producto puede calcularse como $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta$, siendo θ el ángulo que forman los vectores.

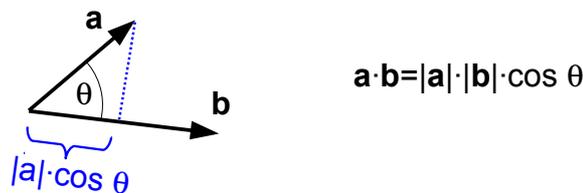


Figura A2: Producto escalar de dos vectores

Es posible también obtener el producto escalar a partir de las componentes cartesianas de los vectores, mediante:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores (libres) \mathbf{a} y \mathbf{b} , es un vector libre \mathbf{p} cuyo módulo viene dado por el producto de los módulos multiplicado por el seno del ángulo que forman los vectores originales, cuya dirección es perpendicular a ambos vectores, y cuyo sentido está dado por la “regla del tornillo” cuando se hace girar el primer vector del producto hacia el segundo, por el camino angular más corto (fig A3a).

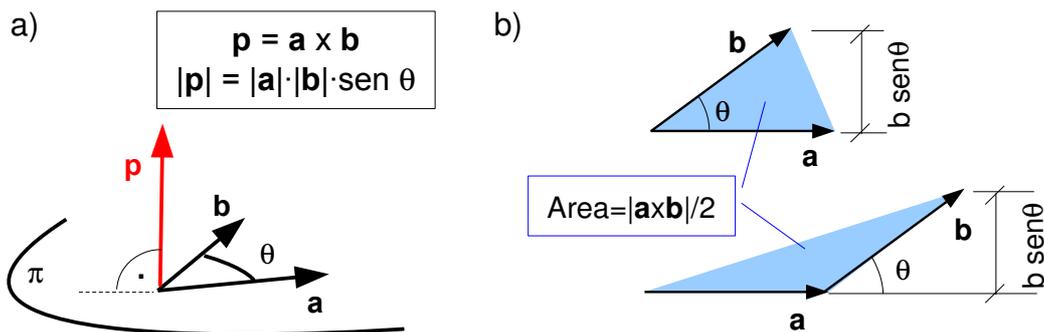


Figura A3: a) Producto vectorial de dos vectores (se representa el plano p que los contiene). b) Área del triángulo que definen los dos vectores.

Es inmediato comprobar que el módulo del producto vectorial coincide con el doble del área del triángulo que definen los vectores. La figura A3b muestra que, efectivamente, el módulo de uno de ellos por el seno del ángulo que forman, siempre será la altura de dicho triángulo, haciendo el otro vector las veces de base del triángulo, y que ello ocurrirá independientemente de cómo se dispongan los vectores. El producto vectorial siempre resulta ser de módulo “base por altura”, es decir el doble del área del triángulo.

Las componentes cartesianas del producto vectorial pueden obtenerse analíticamente, desarrollando el determinante de la ecuación (A.2), donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, son vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados x, y, z .

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Momento de un vector deslizante respecto de un punto

Sea \mathbf{v} un vector deslizante, A un punto de su recta de acción, y O otro punto cualquiera del espacio (ver figura A4). Se define el momento de \mathbf{v} respecto de O como el vector que resulta de realizar el producto vectorial del vector \mathbf{OA} por el vector \mathbf{v} . Es inmediato demostrar que el momento así definido no depende de si eligiésemos otro punto B de la recta de acción, en lugar de A:

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{v} = (\vec{OB} + \vec{BA}) \times \vec{v} = \vec{OB} \times \vec{v} + \vec{BA} \times \vec{v} = \vec{OB} \times \vec{v} \quad (\text{A.3})$$

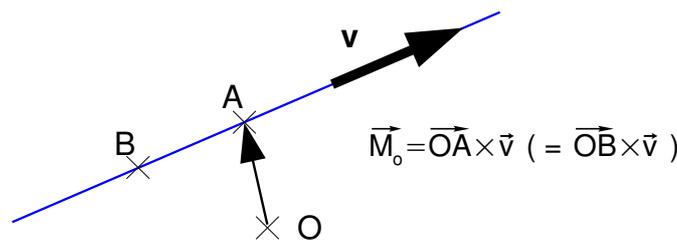


Figura A4: Independencia del momento respecto del punto de la recta de acción

Momento de un vector deslizante respecto de una recta

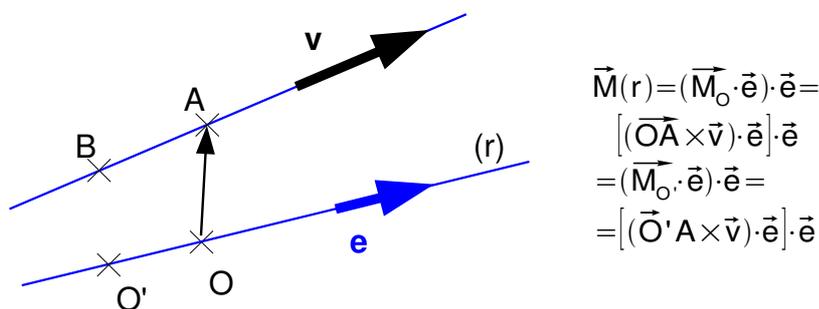


Figura A5: Momento de un vector respecto de una recta

Es un vector deslizante $\mathbf{M}(r)$ sobre la recta (r) . Se obtiene proyectando sobre ella el momento del vector \mathbf{v} respecto de uno de sus puntos O, siendo indiferente el punto de la recta elegido. Si definimos un vector unitario \mathbf{e} colineal con la recta (r) , dicha proyección puede expresarse como $(\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}$ como indica la figura A5. Nótese que en la figura A5 la

recta (r) y el vector \mathbf{v} han de estar en planos distintos para que el momento respecto de la recta sea distinto de cero (hay que entender por tanto que la figura es tridimensional; no se dibuja $\mathbf{M}(r)$ para no inducir a error, ya que la perspectiva no permite saber el sentido que tendría el momento).



Una regla mnemotécnica para apreciar el sentido del momento respecto de una recta sin realizar operaciones mentalmente, es imaginar un sólido que puede girar en torno a la recta (r). Puede imaginar que se trata de una puerta que tiene sus bisagras sobre la recta, por ejemplo. Imagínese que el vector \mathbf{v} es una fuerza aplicada al sólido, que le hará girar en torno a la recta. El sentido de ese giro según la “regla del tornillo” será el sentido del momento $M(r)$.

Una propiedad inmediata es que si consideramos como rectas respecto de las que tomar momento a los tres ejes coordenados x , y , z , los momentos respecto a esas rectas coinciden con las componentes del vector momento de \mathbf{v} respecto del origen de coordenadas (a estos efectos hay que considerar componente positiva al momento que tenga el sentido de un eje, y componente negativa en caso contrario). Esta propiedad puede hacer más cómodo el cálculo del momento respecto de un punto en algunas circunstancias.

Acerca de la representación de un momento, su carácter vectorial hace que no sea necesaria otra representación diferente que la usual para un vector (es decir “una flecha”). La figura A6a muestra la representación del momento del vector “ \mathbf{v} ” respecto del punto “ O ” mediante esta figuración habitualmente empleada para un vector.

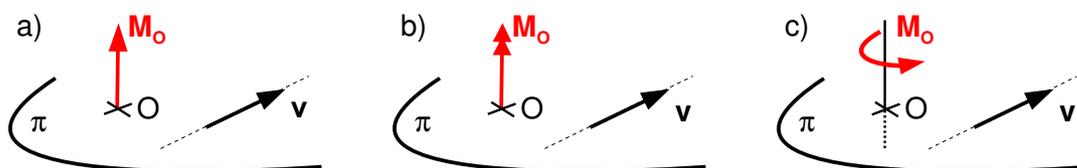


Figura A6: Distintas representaciones usuales de un vector momento.

No obstante, es frecuente en la literatura el empleo de alguna otra simbología para enfatizar que se trata de un vector momento (la misma simbología también se usa habitualmente para vectores giro). Es por ejemplo habitual representar el momento mediante una flecha de doble punta como muestra la figura A6b, o también mediante una “flecha de giro” como indica la figura A6c, siendo ésta última muy empleada en representaciones bidimensionales. En el curso emplearemos indistintamente todas ellas, con preferencia de la flecha de doble punta cuando se trate de representaciones tridimensionales.

Sistemas de vectores deslizantes

Un sistema de vectores deslizantes es cualquier conjunto de vectores deslizantes, que llamaremos \mathbf{v}_i , con $i=1\dots n$, actuando en sus respectivas rectas de acción. Llamaremos A_i a un punto de la recta de acción del vector \mathbf{v}_i .

La resultante de un sistema de vectores deslizantes es el vector libre que se obtiene sumando los vectores libres asociados a los vectores del sistema:

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \sum_i \vec{v}_i$$

El momento del sistema de vectores deslizantes respecto de un punto O, es la suma de los momentos de todos los vectores del sistema respecto de ese punto. Es un vector libre, pero puede considerarse ligado al punto O si ello conviene para un propósito particular.

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{OA}_i \times \vec{v}_i$$

Campo de momentos

Un sistema de vectores deslizantes produce un momento distinto en cada punto del espacio, por lo que se engendra un campo de vectores momento. Conocido el momento respecto de un punto O, es inmediato calcular el momento respecto de otro punto O', ya que:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum \vec{O'A}_i \times \vec{v}_i = \sum (\vec{O'O} + \vec{OA}_i) \times \vec{v}_i = \vec{O'O} \times \sum \vec{v}_i + \sum \vec{OA}_i \times \vec{v}_i \Rightarrow \\ \vec{M}_{O'} &= \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R} \end{aligned} \quad (A.4)$$

La ecuación anterior es la expresión del campo de momentos. Para calcular dicho campo no es preciso conocer todos los vectores del sistema, sólo hace falta saber el momento en un punto O y la resultante del sistema.

El campo de momentos presenta algunas propiedades interesantes que enumeramos a continuación. Su demostración es prácticamente inmediata, y puede realizarse como ejercicio.

- El momento en dos puntos O y O' es el mismo si ambos están en una recta paralela a **R**
- La proyección del momento en dos puntos O y O' sobre la recta que une dichos puntos, es la misma (esto da sentido al concepto de momento del sistema respecto a una recta).
- Un sistema de resultante nula, genera un campo uniforme de momentos
- El producto escalar de la resultante por el momento en un punto, es independiente del punto elegido:

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} \quad (A.5)$$

Otra manera de enunciar esta última propiedad es que “la proyección del momento sobre la resultante es constante para cualquier punto”. La figura A7a muestra los vectores momento respecto de algunos puntos O1, O2, O3, dibujados en esos puntos, y la figura A7b dibujados como vectores libres con un origen común. En esta última representación se aprecia claramente cómo la proyección del momento sobre la resultante es constante.

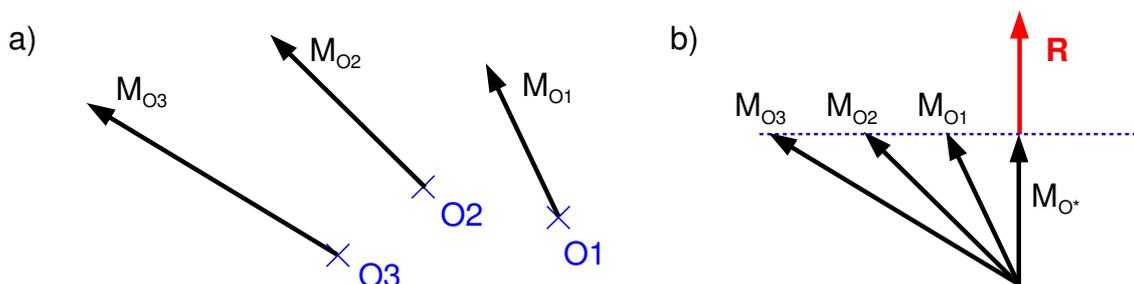


Figura A7: a) Vectores momento respecto de algunos puntos del espacio.
 b) La proyección sobre la resultante es constante.

Momento Mínimo y Eje Central

Llamamos “Momento Mínimo” al vector momento de menor módulo, de entre todos los posibles vectores momento respecto de los puntos del espacio. Si el momento mínimo no es nulo, la figura A7b permite apreciar que será paralelo a la resultante. Es decir, existirá un punto O^* cuyo momento $\mathbf{M}_{O^*} = \mathbf{M}_{\min}$ es paralelo a la resultante. Éste es el momento mínimo, que tendrá la expresión

$$\vec{M}_{\min} = (\vec{M}_O \cdot \vec{R}) \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^2} \tag{A.6}$$

Siendo O cualquier punto del espacio. Para determinar un punto O^* de momento mínimo en el espacio, podemos por ejemplo usar la ecuación del campo de momentos, e imponer que el momento sea paralelo a \mathbf{R} , igualando (A.4) a $\lambda \mathbf{R}$, siendo λ un escalar. El sistema de ecuaciones obtenido no tendrá solución única porque como veremos a continuación hay muchos puntos de momento nulo, lo que no obsta para que podamos elegir uno de los (infinitos) puntos. Por ejemplo si es $R_z \neq 0$, puede buscarse el punto de momento mínimo que tenga $z=0$.

El “Eje Central” es el lugar geométrico de puntos de momento mínimo. Una vez encontrado un punto de momento mínimo, aplicando la primera de las propiedades enumeradas más arriba (el momento en dos puntos O y O' es el mismo si ambos están en una recta paralela a \mathbf{R}), habremos encontrado en realidad toda una recta de puntos de momento mínimo. Por lo tanto el eje central es una recta paralela a la resultante.



Concurre el hecho, también cierto (ver (A.6)) pero no directamente relacionado con lo anterior, de que el momento en esos puntos del eje central es paralelo a \mathbf{R} , y por tanto al propio eje central. Así que la resultante, el momento mínimo y el eje central, son paralelos.

Si el momento mínimo es nulo, caso particular que hasta ahora no hemos mencionado, se mantiene el hecho de que el eje central es paralelo a la resultante (el razonamiento que condujo a esa conclusión no se ve afectado). La particularidad de estos sistemas es que su momento respecto de cualquier punto siempre es perpendicular a la resultante. Hay dos

casos destacados, que son del mayor interés en este curso, en los que se puede garantizar que el momento mínimo es nulo. Son los siguientes:

- Sistemas de vectores paralelos. Llamando \mathbf{n} a un vector unitario en la dirección de los vectores, el momento de cada vector respecto de un punto será perpendicular a \mathbf{n} , y por lo tanto a la resultante (que evidentemente tendrá la dirección \mathbf{n}). El momento \mathbf{M} del sistema es la suma de los momentos de cada vector, que seguirá siendo perpendicular a \mathbf{n} (y por tanto a \mathbf{R}). Por tanto $\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}$ será nulo, luego el momento mínimo es nulo.
- Sistemas de vectores coplanarios. Llamemos ahora \mathbf{n} a un vector perpendicular al plano de los vectores, y sea O un punto de ese plano. El momento de cada vector respecto de O será perpendicular al plano, luego tendrá la dirección de \mathbf{n} . El momento \mathbf{M}_O del sistema, que es la suma de ellos, también tendrá la dirección \mathbf{n} . La resultante \mathbf{R} estará evidentemente contenida en el plano, luego será perpendicular a \mathbf{n} . Por tanto $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}$ será nulo, luego el momento mínimo es nulo.

Equivalencia y Reducción de sistemas de vectores deslizantes

Decimos que dos sistemas de vectores deslizantes son iguales si contienen los mismos vectores deslizantes. Esta definición no va a ser de mucha utilidad práctica.

Decimos que dos sistemas de vectores deslizantes son equivalentes si generan el mismo campo de momentos. Llamamos reducción de un sistema de vectores deslizantes, a otro sistema de vectores que sea equivalente, y nos resulte más sencillo de manejar para un propósito determinado. A la vista de la ecuación del campo de momentos, la condición (necesaria y suficiente) para que dos sistemas sean equivalentes es que tengan la misma resultante, y el mismo momento respecto de un punto. La clasificación siguiente identifica las reducciones más habituales en cada situación:

$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ (resultante no nula)

$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq 0$ (momento mínimo no nulo)

Sistema más general. La reducción más sencilla es la resultante \mathbf{R} aplicada en un punto O (del eje central o no), y un par de momento \mathbf{M}_O (el par puede estar situado en cualquier lugar, pero debe producir el momento \mathbf{M}_O).

$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0$ (momento mínimo nulo)

La reducción más sencilla es la resultante \mathbf{R} aplicada en un punto del eje central.

$\mathbf{R} = \mathbf{0}$ (resultante nula) El campo de momentos será uniforme.

$\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ (momento mínimo no nulo)

La reducción más sencilla es un par cualquiera que proporcione un momento de valor \mathbf{M} .

$\mathbf{M} = \mathbf{0}$ (momento mínimo nulo)

Se llama sistema nulo de vectores, por tener resultante y momento nulos.

Nota.- Con cierto abuso de lenguaje, es frecuente referirse a un par, o a cualquier subsistema de vectores que tenga resultante nula y momento no nulo, como “un momento”. Y para abreviar, en ocasiones damos directamente el vector momento sin especificar qué vectores lo producen. Entendiendo el momento en este sentido, como un subsistema de vectores de resultante nula, éste genera un campo uniforme de momentos (con el valor del propio momento), y por tanto es indiferente el punto del espacio donde lo posicionemos. Por tanto, si estamos interesados solamente en el campo de momentos, como puede ser el caso en problemas de equilibrio de sólidos, es conveniente considerar al vector momento como un vector libre.

Aplicación a la Estática

El hecho básico que hace interesante la aplicación del Álgebra de Vectores Deslizantes a los problemas de estática mecánica, es que un cuerpo indeformable no altera su estado de movimiento o reposo si las fuerzas aplicadas sobre él se mueven dentro de sus rectas de acción. Esta observación física fue precisamente la que promovió el establecimiento de un álgebra de vectores que se ajustase a este tipo de problemas.

Por otra parte, las ecuaciones de la estática (1.2) equivalen a decir que un sólido indeformable estará en equilibrio estático si las fuerzas que actúan sobre él forman un sistema nulo de vectores, ya que así hemos definido al sistema que tiene resultante nula y momento nulo.

Una consecuencia inmediata es que si un sólido está en equilibrio bajo un sistema de fuerzas, también lo estará también bajo uno equivalente. Ya que ambos serían sistemas nulos de vectores fuerza.

En la práctica frecuentemente nos interesa pensar que el sistema de fuerzas que actúan está formado por sistemas parciales, o subsistemas, de vectores. Es inmediato demostrar que si un sólido está en equilibrio bajo varios subsistemas de fuerzas que actúan simultáneamente (y que en conjunto formarán un sistema nulo), el sustituir un subsistema de fuerzas por otro equivalente no altera el estado de equilibrio del sólido.

Como caso particular frecuente de lo anterior, puede interesar considerar las reacciones desconocidas (o cada una de ellas por separado) como un subsistema, y las fuerzas conocidas como otro subsistema, al cual podremos por ejemplo aplicar una reducción.

Este pequeño conjunto de ideas acerca del equilibrio estático es en realidad muy versátil, y resume lo necesario para plantear los casos de equilibrio que se presentan en la asignatura.

Apéndice B.

Geometría de masas

Centros de Gravedad

El peso de un cuerpo es el resultado de una distribución de fuerzas diferenciales paralelas provocadas por la gravedad. Sobre cada diferencial de volumen del sólido, dV actúa una fuerza diferencial de módulo γdV , donde γ es el peso específico en unidades de fuerza dividida por volumen (por ejemplo N/m^3). Si llamamos \mathbf{h} al vector unitario en la dirección de la gravedad, la fuerza diferencial será $\mathbf{h}\gamma dV$, como muestra la figura B1.

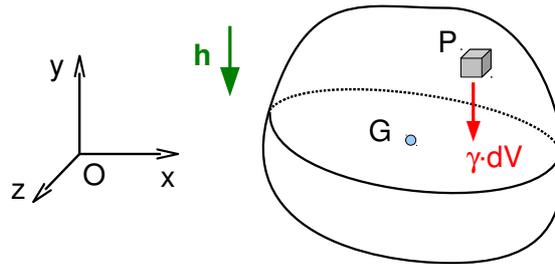


Figura B1: Fuerza diferencial debida a la gravedad sobre un elemento de volumen del sólido.

Al tratarse de un sistema de vectores paralelos, el momento mínimo es nulo, y el sistema admitirá reducción a su resultante aplicada en el eje central. Si G es un punto del eje central, y P el punto genérico donde se encuentra el diferencial de volumen, debe cumplirse la condición de que el momento respecto de G sea nulo:

$$\int_V \vec{GP} \times \vec{h} \gamma dV = 0 \Rightarrow \left(\int_V \vec{GP} \gamma dV \right) \times \vec{h} = 0 \quad (\text{B.1})$$

En donde \mathbf{h} ha salido de la integral por ser un vector constante. Podríamos usar la ecuación anterior para encontrar un punto G del eje central, pero queremos plantear algo un poco más exigente: nos preguntamos si habrá un punto G tal que el eje central del sistema de fuerzas pase por él para cualquier dirección \mathbf{h} de la gravedad. Si la ecuación anterior ha de satisfacerse para cualquier \mathbf{h} , la integral entre paréntesis debe anularse (la otra opción sería que ese vector entre paréntesis fuese paralelo a cualquier dirección \mathbf{h} arbitraria, lo que no es posible garantizar):

$$\begin{aligned} \int_V \vec{GP} \gamma dV = 0 &\Rightarrow \int_V (\vec{GO} + \vec{OP}) \gamma dV = 0 \Rightarrow \vec{OG} \int_V \gamma dV = \int_V \vec{OP} \gamma dV \Rightarrow \\ &(\text{peso}) \cdot \vec{OG} = \int_V \vec{OP} \gamma dV \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Siendo “peso” el escalar que mide el peso total del sólido, en unidades de fuerza. La ecuación (B.2) nos permite calcular explícitamente la posición del centro de gravedad G. Es un punto por el que siempre pasará el eje central de las fuerzas de gravedad, independientemente de la orientación de la gravedad respecto del sólido. Por tanto siempre es posible realizar una reducción de las fuerzas de gravedad que consista en el peso total (la resultante) pasando por el centro de gravedad. Si el sólido tiene un elemento de simetría (lo que debe incluir tanto a la geometría como al peso específico del material), ya sea un punto, una recta, o un plano, el centro de gravedad se encontrará sobre él.

Centros de Área

El “Centro de Área” de una figura plana se define como el punto que coincidiría con su centro de gravedad si el peso específico fuese constante. Su posición por tanto puede determinarse mediante la particularización de (B.2) al caso de problema bidimensional y peso específico constante, es decir:

$$A \cdot \vec{OG} = \int_A \vec{OP} \cdot dA \tag{B.3}$$

Siendo “A” el área total de la figura en cuestión. La figura B.2 muestra las notaciones adoptadas.

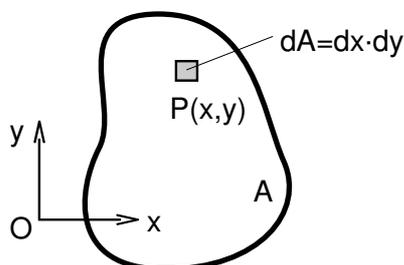


Figura B.2: Figura geométrica plana y diferencial de área en un punto P de la misma.

Conviene recordar que los centros de áreas están siempre sobre los elementos de simetría, si existen, ya sean puntos o rectas. También será útil recordar que el centro de áreas de un triángulo está a 1/3 de cada una de sus alturas, como indica la figura B.3a.

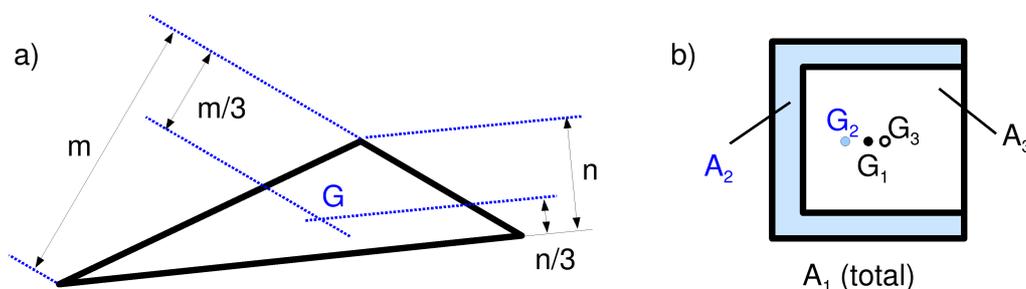


Figura B.3: a) Centro de áreas del triángulo. b) Centro de áreas de una figura compuesta.

Es también útil en ocasiones considerar un área descompuesta en suma de varias. Por ejemplo, la figura B.3b muestra un cuadrado de área A_1 , cuyo área es la de otro cuadrado más pequeño de área A_3 , más un área en forma de “C” (área A_2). Siendo P un punto gené-

rico donde se encuentra el diferencial de área, y G_1, G_2, G_3 , los centros de áreas de las respectivas figuras, podemos plantear:

$$A_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} = \int_{A_1} \overrightarrow{OP} \cdot dA = \int_{A_2} \overrightarrow{OP} \cdot dA + \int_{A_3} \overrightarrow{OP} \cdot dA = A_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} + A_3 \cdot \overrightarrow{OG_3}$$

Lo que permite calcular el centro de áreas de una de las figuras si se conoce el de las otras dos. En este caso probablemente estaríamos interesados en G_2 (del perfil en "C"), que podríamos obtener de:

$$A_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} = A_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} - A_3 \cdot \overrightarrow{OG_3}$$

Momentos de Inercia

En el estudio de la flexión de barras rectas aparecen las magnitudes de inercia (momentos y productos de inercia) del área de la sección de la barra respecto de los ejes coordenados. La definición de los momentos y del producto de inercia es la siguiente:

$$I_x = \int_A y^2 dA ; \quad I_y = \int_A x^2 dA ; \quad I_{xy} = \int_A xy dA \quad (B.4)$$

En general, se define el momento de inercia respecto de una recta cualquiera como la integral del diferencial de área multiplicado por el cuadrado de la distancia de éste a la recta.

Algunas de las características más importantes de estas magnitudes de inercia son:

- Los momentos de inercia I_x, I_y , son siempre positivos.
- El producto de inercia I_{xy} puede ser positivo, negativo, o nulo.
- Si el origen de ejes x, y , coincide con el centro de áreas, se llama "centrales" a los momentos de inercia.
- En la resistencia de materiales, casi siempre se usan momentos centrales.
- Existe una orientación de los ejes para la cual el producto de inercia I_{xy} es nulo: son los ejes principales de inercia.
- De todos los momentos de inercia respecto las infinitas rectas que pasan por un punto, los principales son el menor y el mayor.

Ocasionalmente necesitaremos calcular el momento de inercia respecto de una recta, siendo conocido el momento de inercia respecto de otra recta paralela a la anterior que pasa por el centro de áreas. En la figura B.4, se ha tomado un eje x , que es perpendicular a las rectas, para que tanto la distancia x desde la recta m que pasa por G hasta el diferencial de área, como la distancia b entre las rectas, tengan un signo. El momento de inercia respecto de la recta m' puede escribirse como:

$$I_{m'} = \int_A (x-b)^2 dA = \int_A (x^2 + b^2 - 2xb) dA = \int_A x^2 dA + A \cdot b^2 - 2b \int_A x dA$$

La última integral es nula debido a que la distancia "x" se mide desde la recta "m" que pasa por el centro de gravedad (esa integral, dividida por el área, daría la cota "x" del centro de

áreas, que es nula por propia construcción de la figura). Por otra parte, identificamos en la primera integral del último término el momento de inercia respecto a la recta “m”. Por tanto:

$$I_{m'} = I_m + A \cdot b^2 \tag{B.5}$$

Ecuación que relaciona los momentos de inercia respecto de ambas rectas, como queríamos. Este resultado es conocido como Teorema de Steiner en la literatura. Como regla mnemotécnica, puede recordarse que el momento de inercia respecto del eje central (el que pasa por el centro de áreas), siempre es menor. El momento de inercia respecto de otra recta paralela siempre será el anterior “más algo”.

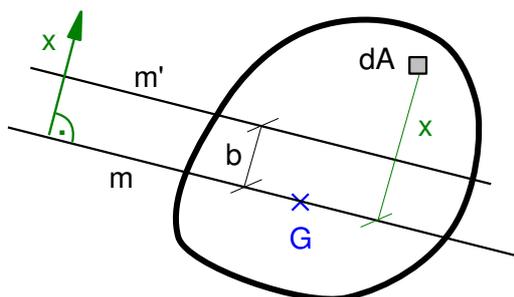


Figura B4: Coordenada “x” para medir distancias con signo.

Finalmente, si queremos calcular el momento de inercia respecto de una recta de orientación cualquiera que pasa por el origen de coordenadas, y son conocidos los momentos de inercia I_x, I_y , respecto de los ejes coordenados, podemos proceder tomando un vector unitario \mathbf{e} perpendicular a la recta, como indica la figura B.5. Éste vector tendrá de componentes $(-\text{sen}\theta, \text{cos}\theta)$. La distancia δ del punto $P(x,y)$ donde se encuentra el diferencial de área puede obtenerse mediante el producto escalar de \mathbf{OP} por \mathbf{e} :

$$\delta = \mathbf{OP} \cdot \mathbf{e} = -x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \text{cos}\theta$$

Por tanto el momento de inercia será

$$I_m = \int_A \delta^2 dA = \int_A (x^2 \text{sen}^2\theta + y^2 \text{cos}^2\theta - 2xy \text{sen}\theta \text{cos}\theta) dA \Rightarrow$$

$$I_m = I_y \text{sen}^2\theta + I_x \text{cos}^2\theta - 2I_{xy} \text{sen}\theta \text{cos}\theta \tag{B.6}$$

Que nos proporciona la relación buscada.

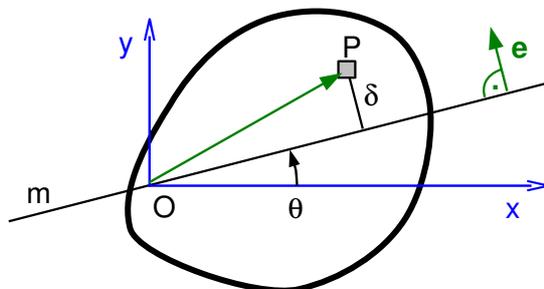


Figura B.5: Vector unitario “e” perpendicular a la recta inclinada “m”.

El cálculo de momentos y productos de inercia respecto de ejes girados puede realizarse de modo más conveniente haciendo uso de que las magnitudes de inercia (momentos y pro-

ductos de inercia), son las componentes de un “tensor” cartesiano. El como sacar provecho de dicha característica para el cálculo será expuesto durante el curso, y no es objeto de este apéndice cuya sola pretensión es servir de recordatorio de conocimientos previos.

Momentos Estáticos

Se define el momento estático de un área plana “A” respecto de una recta “m” contenida en el plano como:

$$q_m^A = \int_A \delta \cdot dA \tag{B.7}$$

donde “δ” es la distancia del elemento de área “dA” a la recta “m”. La distancia “δ” es un escalar con signo, el cual puede obtenerse definiendo un vector unitario **e** perpendicular a la recta “m” como el mostrado en la figura B6.a, y obteniendo “δ” como el producto escalar de **OP**·**e**, donde O es cualquier punto de la recta.

Se puede apreciar una gran similitud entre la definición anterior y el miembro derecho de (B.3). En efecto, si pensamos en un eje “y” que parta de O (o de cualquier otro punto de la recta), y esté dirigido en el sentido de **e**, la expresión (B7) nos daría la posición y_G del centro de áreas de nuestra figura, multiplicada por el propio área A.

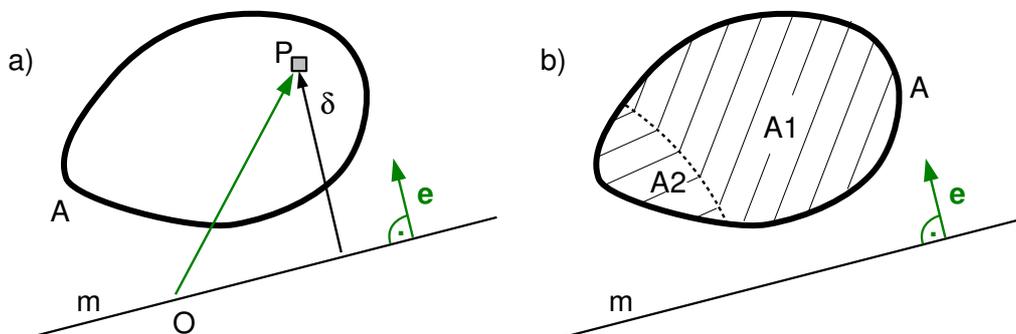


Figura B6: a) Definición de la coordenada δ. b) El área como suma de partes.

Una propiedad inmediata es que si descomponemos A en dos partes, A1, A2, como indica la figura B6.2, el momento estático de A puede calcularse como suma de los momentos estáticos de A1 más el de A2. Esta propiedad se cumple por el simple hecho de que el momento estático está definido como una integral. Como hemos visto, la propiedad es aplicable también a los centros de gravedad y momentos de inercia por el mismo motivo. Por tanto:

$$q_m^A = q_m^{A1} + q_m^{A2}$$

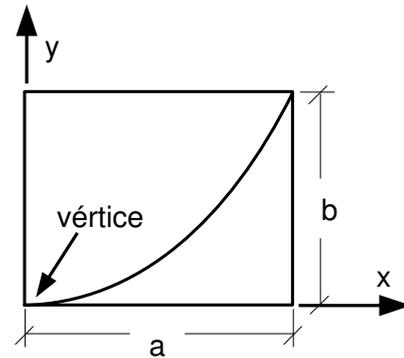
Si la línea “m” pasa por el centro de áreas “G” de la sección (caso no mostrado en la figura), la integral de (B.7) se anula, ya que, como se ha apuntado más arriba, representaría la cota y_G del centro de áreas en un eje “y” cuyo vector asociado fuese **e**, cota que es nula por hipótesis en este caso. Por tanto, volviendo a considerar las áreas A1 y A2, será $q_m^{A1} = -q_m^{A2}$.

Apéndice C.

Ayudas para el trazado preliminar.

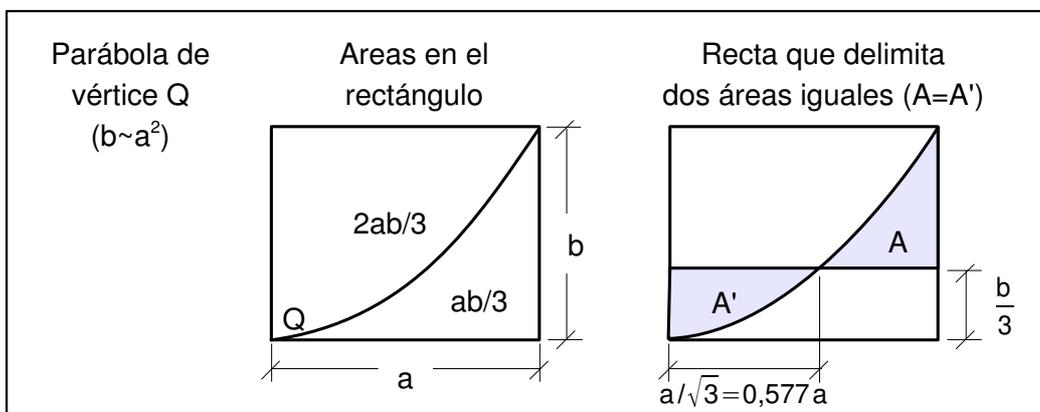
En el trazado a mano alzada de diagramas de esfuerzos y desplazamientos de las barras, frecuentemente se precisa estimar el área de una función entre dos puntos, o bien estimar la posición de una recta horizontal “de origen” que delimite áreas iguales en una función (habitualmente en la función de giros).

Es frecuente además que las funciones involucradas sean polinomios de bajo orden, y que un vértice de la parábola, o de la cúbica, etc, (entendido como punto de derivada primera nula) se encuentre en un extremo del tramo en que se ha de realizar la estimación. Tal es el caso mostrado en la figura, al cual hacen referencia todos los resultados que se mencionan en este apartado. Dado el rectángulo (a,b) que contiene a la función en la zona de interés, las tres condiciones $y(0)=0$; $y'(0)=0$; $y(a)=b$, caracterizan la tipología considerada.



Parábola.-

Una parábola tiene en un caso general la expresión $y=C_0+C_1x+C_2x^2$. Las tres condiciones consideradas permitirán determinar las tres constantes C_0 , C_1 , C_2 . Esto quiere decir que la parábola es única, lo que son buenas noticias en el sentido de que siempre que encontremos una parábola en esas condiciones podremos aplicar los mismos resultados.



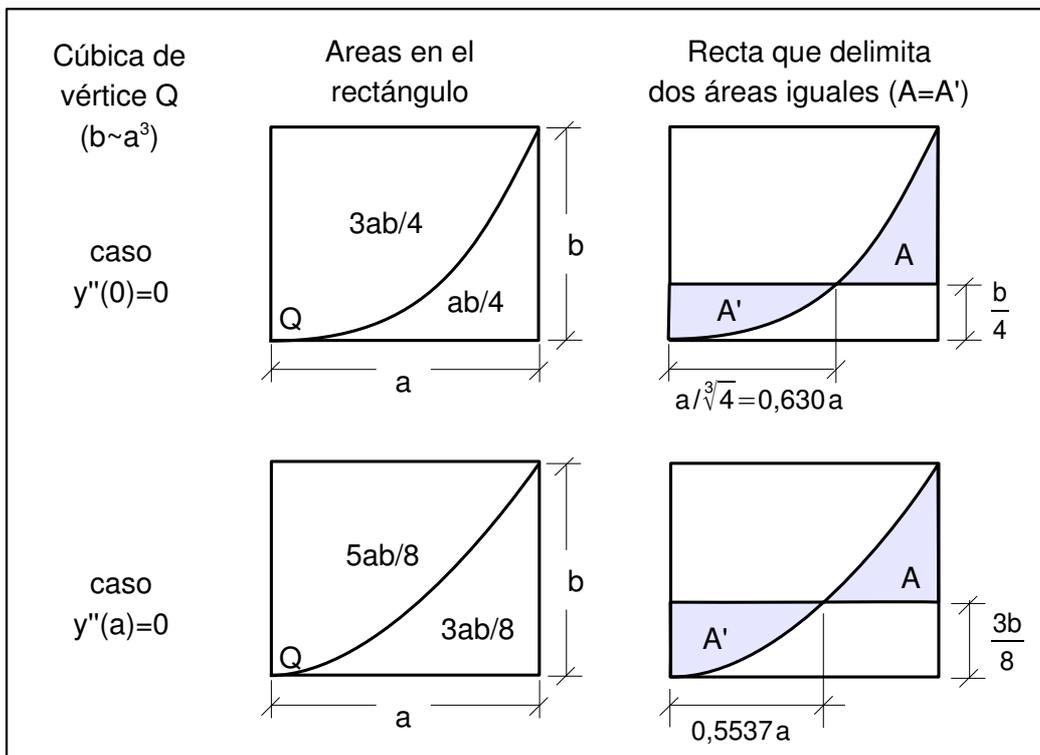
Es trivial comprobar que dicha parábola divide en áreas de $1/3$ y $2/3$ al del rectángulo que la contiene, y que la recta que delimita áreas iguales se encuentra a $1/3$ de la altura del rectángulo, medido desde el vértice de la parábola, como indica la figura anterior.

Cúbica.-

Un polinomio cúbico tiene en un caso general la expresión $y=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3$. Las tres condiciones a imponer no serán suficientes para determinar las cuatro constantes C_0, C_1, C_2, C_3 . Cuando encontremos una cúbica en nuestros trazados, aunque tenga el aspecto considerado, puede corresponder a distintas ecuaciones, no siendo posible ofrecer por tanto una “receta” única. Afortunadamente existen dos casos que se dan frecuentemente:

- que la derivada segunda sea nula en el vértice (caso que ocurre por ejemplo en los giros de la viga empotrada con carga constante)
- que la derivada segunda sea nula en el extremo opuesto al vértice (caso que ocurre por ejemplo en la viga biapoyada con carga constante).

Como tendremos trazadas las derivadas de la función en cuestión (son “las gráficas ya trazadas”), es fácil identificar si alguna de las dos condiciones es aplicable a nuestro caso. La figura siguiente resume los resultados para ambas situaciones



La aplicación práctica prevista para todos estos resultados es “estimar razonablemente” los valores cuando se realiza el trazado aproximado (a mano alzada) de los diagramas de vigas. A estos efectos, puede resultar más atractivo realizar las estimaciones sin depender de la consulta de tablas etc, que buscar una exactitud afinada. Si es el caso, se sugiere por ejemplo la posibilidad de recordar al menos los resultados de la parábola, y aplicarlos indiscriminadamente a cúbicas (siempre de la tipología considerada). Así, sólo habrá que recordar la cantidad 1/3, que aparece insistentemente en los resultados de la parábola. Adicionalmente puede tenerse en cuenta que, respecto de la parábola, una cúbica tiene “un poco menos de área” (~25%) si su derivada segunda se anula en el vértice, y “un poco más de área” (~13%) si se anula en el otro extremo.

No tendría especial utilidad especificar aquí resultados para polinomios de orden más elevado, dada la amplia casuística posible y que el objetivo es simplificar los trazados aproximados, y no obtener gran exactitud (...al precio de complicar el procedimiento; para exactitud tenemos la integración analítica). Para realizar estimaciones sobre polinomios de orden elevado, y de la tipología considerada, pueden tenerse en cuenta las tendencias observadas para las cúbicas cuando las derivadas sucesivas se anulen en alguno de los extremos del intervalo, si ello sucede.

Recuérdese que las indicaciones presentadas se aplican específicamente al caso en que la derivada primera sea nula en un extremo del intervalo. Se ha tratado esta configuración por ser especialmente difícil de estimar a primera vista. En los demás casos será necesario usar algún procedimiento "natural" de estimación. Por ejemplo, dibujar sobre papel cuadriculado y contar cuadrados es una manera de estimar áreas que no requiere recordar nada. Otra forma es comparar "a sentimiento" el área a estimar con la del rectángulo o el triángulo que la contiene. Cualquier procedimiento razonable de estimación ofrecerá resultados razonables, al nivel del trazado preliminar de diagramas al que nos estamos refiriendo.

Bibliografía

Consulta y Ampliación

- [1] *“Timoshenko Resistencia de Materiales”*. J.M. Gere. / Edit. Thomson
- [2] *“Mecánica de Materiales”*. F.P. Beer, E.R. Johnston, J.T. DeWolf, D.F. Mazurek. / Edit. Mcgraw Hill
- [3] *“Mecánica de Sólidos”*. E.P. Popov. / Edit. Pearson Educación
- [4] *“Teoría de las Estructuras”*. S.P. Timoshenko, D.H. Young. / Edit. Urmo
- [5] *“Cálculo de Estructuras”*. R. Argüelles. / Edit. ETS Ingenieros de Montes - Madrid

Ampliación

- [6] *“Código Técnico de la Edificación (CTE)”*. Ministerio de la Vivienda. Disponible en <http://www.codigotecnico.org>
- [7] *“Instrucción de Hormigón Estructural (EHE)”*. Ministerio de Fomento. Disponible en http://www.fomento.gob.es/MFOM/LANG_CASTELLANO/ORGANOS_COLEGIADOS/CPH/instrucciones/ o en http://www.fomento.gob.es/MFOM/LANG_CASTELLANO/ORGANOS_COLEGIADOS/CPA/INSTRUCCIONES/
- [8] *“Instrucción del Acero Estructural (EAE)”*. Ministerio de Fomento. Disponible en http://www.fomento.gob.es/NR/rdonlyres/D088E134-9324-4DDD-A131-B8AB1B3B109C/73091/Articulado_EAE.pdf
- [9] *“Elasticidad”*. Luis Ortiz Berrocal. / Edit. McGraw Hill.
- [10] *“Teoría de la Elasticidad”*. Federico París. / ETSII – Sevilla (edita: Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales; imprime: SAND)
- [11] *“Elasticidad”* Juan C. del Caño. Disponible en http://www.eis.uva.es/reic/Elas_Web
- [12] *“Elasticity, Theory and Applications”*. H. Reismann, P.S. Pawlik. / Edit. Wiley Interscience.
- [13] *“Resistencia de Materiales”*. J.A. Garrido, A. Foces. / Edit. Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Valladolid
- [14] *“Resistencia de Materiales”*. L. Ortiz Berrocal. / Edit. McGraw Hill
- [15] *“Análisis de Estructuras”*. J.C. McCormac. Edit. Marcombo.

- [16] *“Structures, Theory and Analysis”*. M.S. Williams, J.D. Todd. / Edita M.S. Williams (anteriormente publicado por Macmillan Press Ltd.).