



Universidad de Valladolid

Instituto de Investigación en Matemáticas

&

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología
(Facultad de Ciencias)

&

Laboratorio de Procesado de Imagen
(Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación)

TESIS DOCTORAL:

**“Fórmulas y algoritmos espectrales para
wavelets ortonormales y frames ajustados.
Aplicaciones en el procesamiento digital de
imagen médica.”**

Doctorado en Matemáticas

Presentada por Sergio Villullas Merino para optar al grado de Doctor por la
Universidad de Valladolid

Dirigida por:

Dr. Fernando María Gómez Cubillo
Dr. Marcos Antonio Martín Fernández

Agradecimientos

En primer lugar quiero mostrar mi más sincero agradecimiento al Dr. Fernando María Gómez Cubillo, quien me ha dado la oportunidad de aprender de él tanto dentro como fuera del mundo de las matemáticas. Gracias a él he podido aprender cómo es la vida del investigador, al tiempo que se producían conversaciones distendidas con las que desconectar de vez en cuando.

Igualmente, quiero agradecer al Dr. Marcos Antonio Martín Fernández por todos estos años de aprendizaje. Gracias a él he adquirido un enfoque diferente y una forma “más real” de afrontar los problemas, tratando de llevar al mundo real el enfoque matemático teórico que a veces no se corresponde con lo que somos capaces de hacer en la práctica.

Agradecer al Departamento de Análisis Matemático el haberme aceptado entre sus filas y haberme dado la oportunidad de disfrutar de la docencia y comprobar cómo es el mundo desde el otro lado. Dar las gracias a todos los profesores que me han ayudado y apoyado en todo momento, siempre dispuestos a tenderme una mano.

También quiero agradecer al Dr. Hans Knutsson el haberme aceptado durante mi periodo en Linköping, y a Susana Merino por toda su ayuda con temas de programación, sin ella este trabajo no habría sido posible. Además, agradezco a José Sierra y al equipo de Q-Diagnóstica el proporcionarnos los datos necesarios para las aplicaciones prácticas, esenciales en el desarrollo.

Por último quiero agradecer el estar ahí a todos mis amigos y especialmente a los ninjas del Dojo Universitario. Durante todos estos años han sido un apoyo anti estrés y gracias a ellos, las fechas más difíciles se llevan mucho mejor. Mención especial para mis Senseis, Nacho y Yiyo, y mis Kohais, pues al fin y al cabo en ellos se ve la representación final de mis (pocas) enseñanzas.

*Para el padre que siempre ha estado,
para la madre que no pudo estar
y para toda mi "familia",
espero haber conseguido que os sintáis orgullosos de mi.*

S.S.D.D.

Índice general

Introducción	15
I Modelos espectrales y aplicaciones a wavelets multirresolución y frames	31
1. Teoría clásica de wavelets	33
1.1. El camino de frecuencias a escalas	33
1.2. La transformada wavelet discreta y multirresolución	37
1.2.1. Análisis multirresolución (MRA)	39
2. Teoría espectral de los operadores de traslación y dilatación	55
2.1. Modelos espectrales y “shift” de los operadores de traslación y dilatación	56
2.2. Subespacios ambulantes e invariantes. Funciones rígidas y de rango . . .	61
3. Aplicación de los modelos espectrales a wavelets ortonormales y análisis multirresolución	65
3.1. Técnicas espectrales en wavelets ortonormales	66
3.2. Técnicas espectrales en multirresolución	68
3.2.1. Aplicación a las relaciones de doble escala	71
3.3. Algoritmos multirresolución	74
3.3.1. Algoritmo de Haar	75
3.3.2. Algoritmo de Walsh-Paley	78
3.3.3. Algoritmo trigonométrico	89
4. Wavelet Frames	101
4.1. Técnicas espectrales en wavelet frames	103
4.1.1. Técnicas espectrales frente a fiberización para wavelet frames . . .	104
4.1.2. Wavelet frames ajustados de soporte mínimo	113
4.2. Condiciones de Lawton generalizadas para framelets ajustados	144

4.2.1.	La transformada de Fourier periodizada y los subespacios invariantes por traslaciones	144
4.2.2.	Framelets ajustados y principios de extensión	150
4.2.3.	Principios de extensión y modelos espectrales	154
4.2.4.	Fórmulas espectrales para framelets ajustados	170

II Aplicaciones a imagen médica 177

5.	Eliminación de ruido en imágenes de resonancia magnética	179
5.1.	Estado del arte	182
5.1.1.	Filtros NLM y de Awate-Whitaker	182
5.1.2.	Filtros wavelet	183
5.1.3.	Estimación de σ_{Ruido}^2	186
5.2.	Filtro propuesto	187
5.2.1.	Distribución de coeficientes de detalle y ruido	187
5.2.2.	Wavelet frames ajustados óptimos	189
5.2.3.	Estimación de los parámetros	192
5.3.	Experimentos	195
5.3.1.	Algoritmos	195
5.3.2.	Señales MRI	197
5.3.3.	Medidas de similitud	198
5.3.4.	Experimentos numéricos	200
6.	Análisis de señales de resonancia magnética funcional	207
6.1.	Estado del arte	210
6.1.1.	Métodos clásicos	210
6.1.2.	Métodos wavelet	213
6.1.3.	Corrección de Bonferroni	215
6.2.	Método propuesto	215
6.2.1.	Preliminares	215
6.2.2.	Pre-procesado temporal	218
6.2.3.	Procesado espacial	219
6.2.4.	Procesado temporal	219
6.2.5.	Mapa de activación	221
6.3.	Experimentos	223
6.3.1.	Algoritmos	223
6.3.2.	Señales fMRI	225
6.3.3.	Medidas de control	229
6.3.4.	Experimentos numéricos	231

III	Conclusiones y líneas futuras de investigación	239
7.	Conclusiones	241
8.	Líneas futuras de investigación	249
IV	Apéndices	253
A.	Bases ortonormales y coeficientes $\alpha_{i,n}^{l,j,m}$ y $\beta_{i,j,l}^{k,n,m}$	255
A.1.	La base de Haar	255
A.2.	La base de Walsh-Paley	258
A.3.	La base Trigonométrica	261
B.	Coeficientes dilatados, trasladados 1/2 y conjugados	263
B.1.	La base de Haar	263
B.2.	La base Trigonométrica	264
C.	Funciones auxiliares	265

Resumen

La teoría de wavelets ortonormales y su generalización a wavelet frames han demostrado ser herramientas útiles y potentes tanto en el ámbito teórico como en las aplicaciones. Este trabajo presenta algunas aportaciones a dicha teoría y su aplicación al procesamiento digital de imagen médica.

El Capítulo 1 incluye una selección de los conceptos más importantes de la teoría clásica de wavelets ortonormales, poniendo énfasis en la idea de análisis multirresolución (MRA) (Sección 1.2.1). Se definen los conceptos de función de escala, filtro asociado y wavelet multirresolución, y se describe el algoritmo de transformada rápida (en cascada), pieza clave en las aplicaciones. Además, se muestran ejemplos de diversas wavelets ortonormales que verifican propiedades de interés, como soporte compacto, momentos nulos, etc.

Dos operaciones son relevantes en la teoría de wavelets, las traslaciones y las dilataciones. Las fórmulas y algoritmos que se obtienen en este trabajo provienen del “análisis espectral” de estas operaciones. En el Capítulo 2 se construyen modelos espectrales y de tipo “shift” de los operadores de dilatación y traslación en espacios de Hilbert funcionales. Estos modelos dependen de bases ortonormales prefijadas de estructura adecuada (Sección 2.1). Además, en estos modelos es posible obtener una descripción de subespacios ambivalentes e invariantes en términos de funciones operador-valuadas rígidas y de rango (Sección 2.2), necesaria para los desarrollos posteriores.

En el Capítulo 3 se detalla la aplicación de los conceptos introducidos en el Capítulo 2 a la teoría de wavelets ortonormales (Sección 3.1) y análisis multirresolución (Sección 3.2). Se muestra, en particular, que es posible describir una wavelet ortonormal mediante una terna de funciones rígidas (Teorema 29), mientras que un análisis multirresolución queda completamente determinado por un par de estas funciones (Teorema 33). Más aún, un par doble de funciones rígidas determina una MRA-wavelet junto con la función de escala (Teorema 35). Fijadas las bases en los modelos espectrales del Capítulo 2, estos resultados dan lugar a condiciones que permiten “calcular” wavelets ortonormales (Teorema 30) y MRA-wavelets y funciones de escala (Teorema 38). En la Sección 3.3 se describen los algoritmos computacionales para obtener MRA-wavelets y funciones de escala de soporte compacto que se derivan del Teorema 38 y la elección de tres bases concretas: la base de Haar (Corolario 42), la base de Walsh-Paley (Corolario 48) y la base trigonométrica (Corolario 57). Cabe destacar que los algoritmos obtenidos permiten calcular los coeficientes de las MRA-wavelets y funciones de escala en las correspondientes bases y no tan sólo una aproximación numérica de sus valores puntuales, como hacen los algoritmos hasta este momento conocidos (cascada, Daubechies-Lagarias, etc). De esta manera, las relaciones de recurrencia en dichos algoritmos determinan expresiones analíticas de estas funciones.

En el Capítulo 4 se presenta el estudio de wavelet-frames mediante técnicas espec-

trales. El resultado central es la “descomponibilidad” del operador frame en el modelo espectral asociado a las dilataciones (Teorema 61). Además, la estructura del modelo permite obtener expresiones concretas para las componentes y fibras del operador frame en él (Teorema 64). De estos resultados se deriva una descripción manejable de los wavelet-frames ajustados (Corolario 65). En la Sección 4.1.2, la elección de la base de Haar en los modelos espectrales y el Corolario 65 permiten determinar los wavelet-frames ajustados asociados a familias generadoras finitas de soporte minimal. La idea de interés que subyace en esta parte del trabajo es que cada familia generadora de este tipo está asociada a una función operador-valuada interna en el espacio de Hardy de dimensión el cardinal del sistema. Los casos de cardinal 1 y 2 se resuelven completamente. Cabe destacar que (en el caso de cardinal 1) la única función generadora de un wavelet-frame ajustado de soporte minimal es la wavelet de Haar (Corolario 70). En el caso de cardinal 2 se encuentran cinco familias diferenciadas de pares de funciones generadoras (Corolario 77). La Sección 4.2 estudia wavelet-frames asociados a funciones refinables y los Principios de Extensión Unitario y Oblicuo inherentes a ellos (Sección 4.2.2). La aplicación de las técnicas espectrales en este contexto muestra, entre otras cosas, que estos Principios son “condiciones de Lawton generalizadas” (Teoremas 100 y 121). Estos resultados permiten el análisis desde una nueva perspectiva de la teoría clásica de MRA-wavelets ortonormales (Corolario 106, Teorema 108 y observaciones adyacentes) y de la relación entre ambos Principios (Sección **Relaciones entre OEP y UEP**).

El Capítulo 5 muestra la aplicación de los wavelet frames ajustados de soporte mínimo al ámbito de la eliminación de ruido en imágenes de resonancia magnética. Para ello se define un filtro por contracción probabilística (basado en probabilidades condicionadas) (Sección 5.2). La optimización de dicho filtro se realiza mediante el uso de wavelet frames ajustados (Sección 5.2.2) que optimicen la diferenciación de las distribuciones de ruido y detalle (Sección 5.2.1). Estas distribuciones se modelan mediante Gaussianas Generalizadas, para las cuales el parámetro β se prefija (Sección 5.2.1). Además, la estimación de los parámetros involucrados se realiza mediante el método de Expectación Maximización (Sección 5.2.3), lo cual elimina la necesidad de estimadores externos. La eficiencia del filtro propuesto se comprueba mediante comparación con otros filtros (Sección 5.1) de eficiencia demostrada en señales simuladas y reales (Sección 5.3).

Finalmente, el Capítulo 6 utiliza el algoritmo de Haar para wavelets ortonormales, mostrado en la Sección 3.3, a la hora de proponer un método de análisis de imágenes de resonancia magnética funcional. Este algoritmo se utiliza para calcular la función de escala que minimice la diferencia entre la dilatada de la función modelo de respuesta hemodinámica y una combinación lineal de dicha función de escala y su trasladada una unidad (Sección 6.2.1). Con esto, se define el método de análisis de señales de resonancia magnética funcional (Sección 6.2) basado en la descomposición wavelet temporal de la señal en cada punto (Sección 6.2.4) a escala dos, desechando los coeficientes de detalle (ruido de alta frecuencia) y filtrando los coeficientes de escala (para eliminar ruido de

baja frecuencia) para su posterior reconstrucción. Además, se utilizan filtros espaciales direccionados que permiten aprovechar la estructura morfológica de las regiones de activación (Sección 6.2.3), y a partir de los cuales se generan filtros espaciales adaptados. Finalmente, un post-procesado mediante umbralizado fuerte y comparación de correlación permite eliminar actividad residual y aislada, de forma previa a la creación del correspondiente mapa de activación (Sección 6.2.5). Como opción final, se propone la regularización de las regiones de activación y sus respectivas señales temporales. La potencia del método propuesto se comprueba a través de la comparación con métodos clásicos de análisis (Sección 6.1) en señales de activación simulada y reales (Sección 6.3).

El Capítulo 7 contienen las conclusiones obtenidas en la elaboración de este trabajo, mientras que el Capítulo 8 presenta las futuras líneas de investigación a seguir en trabajos posteriores.

La presente tesis ha sido financiada por una ayuda de formación de personal investigador (FPI) de la Universidad de Valladolid (en el marco RD 63/2006), resolución rectoral 16 de julio de 2010.

Introducción

Una gran parte de las técnicas de análisis se basa en el tratamiento de fenómenos complejos mediante representaciones en términos de fenómenos elementales bien conocidos. Un ejemplo de ello es la teoría de Fourier, la cual permite el estudio de ciertas funciones en base a su descomposición en frecuencias simples. A pesar de las ventajas de esta descomposición, el análisis de Fourier no se adapta al estudio local de una función. Más aún, el Principio de Incertidumbre de Heisenberg impone una limitación en la localización simultánea en los dominios temporal/espacial y frecuencial. Sin embargo, el análisis local es necesario en diversas situaciones, como el estudio de singularidades, compresión de imágenes y voz, reconocimiento de patrones, etc. Un modo de tratar este problema es utilizar funciones del espacio de Schwarz, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ya que dichas funciones tienen propiedades de localización simultánea en ambos dominios.¹ En esta dirección, merece atención la fórmula de Calderón [23], la cual ha sido refinada por varios autores [24, 25, 26, 148]. Dicha fórmula establece que, dada una función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la cual verifique $\varphi(x) = 0$ para $|x| > 1$, sea real, par y satisfaga que $\int_0^\infty (\hat{\varphi}(s))^2 \frac{ds}{s} = 1$, se tiene que, para cada función “general” f ,

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi_s(x-y) \varphi_s * f(y) dy \frac{ds}{s}, \quad (1)$$

donde $\varphi_s(x) = \frac{1}{s} \varphi(\frac{x}{s})$ es la dilatación de φ por s .²

Por otro lado, en diferentes procesos, especialmente en computación, es preferible tener una expresión discreta similar a la fórmula de Calderón. Descomponiendo de forma adecuada dicha fórmula se puede obtener una descomposición discreta, “atómica” y regular de la función f de la forma

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} b_{m,n}(f) a_{m,n}, \quad (2)$$

donde $b_{m,n}(f)$ es un escalar, $a_{m,n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $a_{m,n}(x) = 0$ si x no pertenece al triple del intervalo diádico $I_{m,n} := [2^{-m}n, 2^{-m}(n+1)] \subset \mathbb{R}$ (véase [59]). Las funciones $a_{m,n}$ se

¹El espacio de Schwarz, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y con decaimiento de dicha función y todas sus derivadas mayor que la inversa de cualquier polinomio en $\pm\infty$. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donde $\hat{\varphi}$ es la transformada de Fourier de φ .

²Compárese (1) con la transformada wavelet continua dada en (1.3).

denominan *átomos regulares*). Una de las ventajas de esta descomposición y similares (como será la descomposición mediante wavelets discretas. Véase la Sección 1.2) es la conservación de las características espaciales de la función f , las cuales quedan reflejadas en la dimensión de los coeficientes $b_{m,n}(f)$, consecuencia del desarrollo matemático conocido como “Teoría de Littlewood-Paley-Stein” [144].

En la descomposición (2), la familia $\{a_{m,n}\}$ no es fija y varía en cada punto en que se representa a la función f . La identidad φ -transformada anula este problema al mismo tiempo que conserva la propiedad de buena localización en tiempo/espacio-frecuencia [56, 57, 58]. En este caso, mediante el uso de una versión discreta de la fórmula de Calderón y el Teorema Clásico de Muestreo, se obtiene una identidad de la forma

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}$$

para ciertas funciones $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donde $\varphi_{m,n} := 2^{\frac{m}{2}} \varphi(2^m \cdot -n)$ y $\psi_{m,n} := 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m \cdot -n)$. Por tanto, las familias $\{\varphi_{m,n}\}$ y $\{\psi_{m,n}\}$ son fijas y se obtienen mediante dilatación y traslación de un par de funciones $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, lo que conlleva localización en tiempo/espacio y frecuencia de forma simultánea. En general, la familia de funciones $\{\psi_{m,n}\}$ no es ortonormal. Fue Meyer [111] el primero en construir una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ de la forma $\{\psi_{m,n}\}$, donde $\psi_{m,n} = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m \cdot -n)$ para cierta $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (las funciones $\{\psi_{m,n}\}$ son conocidas como *wavelets de Littlewood-Paley*). Como consecuencia, la correspondiente identidad

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}$$

posee la propiedad de buena localización tiempo/espacio-frecuencia sin redundancia. Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que la familia $\{\psi_{m,n} := 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m \cdot -n)\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ se denomina *wavelet (discreta) ortonormal*.

La construcción de las primeras wavelets ortonormales regulares por parte de Meyer [111] en \mathbb{R} y por parte de Lemarié y Meyer [96] en \mathbb{R}^n a mediados de los años 80 supone el origen de la teoría de wavelets tal y como se conoce hoy en día. Posteriormente, Mallat [102] y Meyer [112] presentan el marco del análisis multirresolución (MRA) para el cálculo general de dichas wavelets y Daubechies [40] utiliza dicho análisis para construir familias de wavelets de soporte compacto con cierto grado de regularidad. Este último trabajo clarifica la relación existente entre wavelets continuas (\mathbb{R}) y wavelets discretas (\mathbb{Z} ó $\mathbb{N} \cup \{0\}$), necesaria a la hora de abordar el problema el tratamiento de señales digitales.

Anterior a la llegada de la teoría de wavelets, existe una larga trayectoria en el desarrollo de métodos de análisis de señales con simultaneidad en tiempo/espacio-frecuencia. Entre ellos cabe destacar los trabajos basados en las funciones de Walsh-Paley, la descomposición en átomos de Gabor (transformada de Fourier en ventanas) y los filtros espejo-conjugados. En 1922, Rademacher [123] definió una sucesión ortonormal $\{r_m : m = 0, 1, 2, \dots\}$ de funciones en $[0, 1)$ de la forma siguiente:

Sea r_0 la función de Haar,

$$r_0 := h(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & , \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} ,$$

y para $m > 0$, sea

$$r_m(x) := h(2^m x), \text{ para } x \in [0, 2^{-m}).$$

Extiéndase r_m periódicamente, con periodo 2^{-m} , a $[0, 1)$. El sistema de Walsh-Paley $\{w_m : m = 0, 1, 2, \dots\}$ en $[0, 1)$ se define por

$$w_0 := 1$$

y, para $m \geq 1$,

$$w_m := r_{m_1} r_{m_2} \cdots r_{m_k},$$

donde $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_k$ y $m = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_k}$. En 1923, Walsh [154] prueba que $\{w_m\}$ es una base ortonormal de $L^2([0, 1))$. Con anterioridad, algunos ingenieros diseñan esquemas de transposición de líneas de redes abiertas basados en el sistema de Walsh-Paley, los cuales se utilizan para minimizar el cruce de señales entre canales (diafonía). De hecho, el sistema de Walsh-Paley continúa siendo una herramienta importante en la teoría de la comunicación. Para la teoría de wavelets, el sistema de Walsh-Paley es un prototipo de paquete wavelet [32, 33], del mismo modo que la función de Haar es un prototipo de wavelet ortonormal. Ya en los años 40, Gabor [64] trata de representar señales como una descomposición discreta (similar a la derivada de la fórmula de Calderón) mediante traslaciones y modulaciones de una Gaussiana, motivado por el papel de la función Gaussiana en el minimizado del producto de varianzas en la desigualdad del Principio de Incertidumbre Clásico.³ Por otra parte, los filtros espejo-conjugados se introducen en los años 70 para tratar problemas de codificación de voz [37, 36, 52, 140]. Dichos filtros están asociados a esquemas de codificación subbanda que proporcionan una reconstrucción perfecta de la señal transmitida (sin aliasing) [17, Definition 78 - Theorem 83] [140, 124, 149, 150]. Una técnica de compresión de imágenes similar a estos filtros es la denominada pirámide de Laplace, introducida por Burt y Adelson [22] en 1983 para eliminar la correlación redundante entre pixels vecinos. Existe una clara relación entre estas ideas en procesamiento de imagen [106] y el análisis multirresolución y las wavelets ortonormales. Un ejemplo de ello es que todo análisis multirresolución define un filtro espejo-conjugado, aunque la noción de filtro espejo-conjugado es más general que la de análisis multirresolución. De hecho, existen condiciones necesarias y suficientes, dadas por Lawton [94] y Cohen [30], para asegurar que un filtro espejo-conjugado está asociado a un análisis multirresolución.

³En la transformada de Fourier en ventanas, la función Gaussiana puede ser reemplazada por otra función armónica más apropiada para proporcionar una compresión mayor de una señal en términos de su descomposición de Gabor.

Los detalles de esta teoría se encuentran en el Capítulo 1. En dicho capítulo se muestra el paso desde el estudio local mediante frecuencias, utilizando la transformada de Fourier en ventanas (Sección 1.1), hasta el estudio mediante detalles y escalas, como es el obtenido utilizando la transformada wavelet discreta (Sección 1.2) en el caso particular de las wavelets multirresolución (Sección 1.2.1). En dicha sección se describen los conceptos básicos relacionados con los análisis multirresolución, como son la función de escala, el filtro espejo-conjugado y la wavelet asociados al mismo, todos ellos acompañados de los correspondientes ejemplos utilizando las wavelets de Haar, Shannon, etc. Una vez introducidos todos estos conceptos, se incluye un apartado donde se muestra el cálculo de diversas wavelets en base a ciertas propiedades deseadas en dicha función. En este caso, los ejemplos que acompañan al desarrollo son las wavelets de Shannon, Meyer y Daubechies. Por último, al final de esta sección se describe el algoritmo en cascada esencial para el cálculo óptimo de la transformada wavelet discreta ortogonal en el caso de wavelets multirresolución.

Es evidente la importancia de dos operadores (unitarios) en $L^2(\mathbb{R})$ en la teoría de wavelets: el operador de *dilatación* por $s > 0$, D_s , y el operador de *traslación* por u , T_u , definidos, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$, por

$$[D_s f](x) := s^{\frac{1}{2}} f(sx), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$[T_u f](x) := f(x - u), \quad x \in \mathbb{R}.$$

En concreto, los operadores $T := T_1$ y $D := D_2$ son los utilizados en la teoría discreta de wavelets. Los espectros de estos operadores coinciden con la circunferencia unidad, $\partial\mathbb{D}$, del plano complejo \mathbb{C} y tienen multiplicidad numerable constante. Es de sobra conocido que la transformación de Fourier diagonaliza el grupo de traslaciones y convierte operadores de convolución en operadores de multiplicación en $L^2(\mathbb{R})$. Es por este motivo que la mayor parte de la teoría wavelet se ha realizado en base a técnicas de Fourier.

En el Capítulo 2 se construyen modelos espectrales tanto del operador de traslación como del operador de dilatación. La Sección 2.1 presenta técnicas que permiten obtener representaciones espectrales (y de tipo "shift") explícitas del operador de traslación T en términos de una base ortonormal $\{L_i^{(0)}\}_{i \in \mathbb{I}}$ arbitraria de $L^2([0, 1])$ y, del mismo modo, del operador de dilatación D en términos de una base ortonormal $\{K_{l,j}^{(0)}\}_{l=\pm, j \in \mathbb{J}}$ arbitraria de $L^2([-2, -1]) \cup L^2([1, 2])$. Las bases $\{L_i^{(0)}\}_{i \in \mathbb{I}}$ y $\{K_{l,j}^{(0)}\}_{l=\pm, j \in \mathbb{J}}$ se extienden a bases de $L^2(\mathbb{R})$ mediante traslaciones y dilataciones, respectivamente:

$$\{L_i^{(n)} := T^n L_i^{(0)}\}_{i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}}, \quad \{K_{l,j}^{(m)} := D^m K_{l,j}^{(0)}\}_{l=\pm, j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}}.$$

Dichas técnicas están estrechamente relacionadas con la teoría de subespacios ambulantes e invariantes y su caracterización en modelos funcionales en términos de funciones

operador-valuadas rígidas y de rango, desarrollada entre otros por Halmos [77], Helson [80], Lax [95] y Srinivasan [141]. Los conceptos y resultados fundamentales de esta teoría se incluyen en la Sección 2.2.

La aplicación de estas técnicas y conceptos a la teoría de wavelets ortonormales se presenta en el Capítulo 3. En dicho capítulo, haciendo uso de los modelos espectrales, junto con los conceptos presentados en el capítulo anterior, se caracterizan las wavelets ortonormales en función de una terna de funciones rígidas, tal y como muestra la Sección 3.1. De esta forma, las wavelets ortonormales quedan caracterizadas como soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en su representación de dilatación, así como mediante el rango de una matriz definida en función de esos mismos coeficientes. Asimismo, particularizando al caso de análisis multirresolución (Sección 3.2), las funciones de escala y wavelets ortonormales asociadas quedan caracterizadas en función de un par y una tetraupla de funciones rígidas, respectivamente. De la combinación de los modelos espectrales junto con las relaciones de doble escala (de refinamiento y wavelet) se deriva la obtención de propiedades que deben cumplir los filtros espejo-conjugados (dados en términos de las funciones de transferencia o símbolos de los filtros) asociados al análisis multirresolución, así como la caracterización en el Teorema 38 de las funciones de escala y wavelets mediante sistemas de ecuaciones lineales en función de sus respectivas representaciones en el modelo espectral del operador de traslación.

Este último teorema pone al alcance nuevos métodos para la obtención y estudio de wavelets ortonormales asociadas a análisis multirresolución. Prefijadas las bases ortonormales $\{L_i^{(0)}\}_{i \in \mathbb{I}}$ de $L^2([0, 1))$ y $\{K_{l,j}^{(0)}\}_{l=\pm, j \in \mathbb{J}}$ de $L^2([-2, -1)) \cup L^2([1, 2))$, se obtienen algoritmos para el cálculo de las wavelet multirresolución (concretamente para el cálculo de las funciones de escala asociadas). Dichos algoritmos, dependientes de las bases ortonormales, heredan de éstas sus propiedades, por lo que el uso de diferentes tipos de bases da lugar al control de diferentes tipos de propiedades, y , por tanto, se pueden obtener algoritmos adecuados a las aplicaciones en cuestión. En concreto, centrándose en el caso particular de funciones de soporte compacto, los algoritmos basados en la selección de las bases ortonormales de Haar y de Walsh-Paley dan lugar a las recurrencias de cálculo descritas en los Corolarios 40 y 43, respectivamente. Dichas recurrencias involucran a las matrices H_0 y H_1 , descritas en función del filtro $\{h[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ asociado al análisis multirresolución, las cuales ya aparecían en publicaciones anteriores de Daubechies y Lagarias [44] y Protasov [122]. Estos resultados permiten estudiar propiedades de regularidad de las wavelets multirresolución, de forma similar a los estudios llevados a cabo por Daubechies y Lagarias [44], Villemoes [151] y Protasov [122]. En particular, para estas dos elecciones, los algoritmos obtenidos en este caso son variantes de los procesos deducidos por Micchelli y Prautzsch [113] y Daubechies y Lagarias [44] mediante técnicas de punto fijo. A diferencia de esos casos, las técnicas espectrales utilizadas reducen el número de dimensiones que requiere el proceso, determinan las condiciones iniciales necesarias para

el cálculo de la recurrencia y añaden condiciones periféricas que facilitan los cálculos. En el caso del algoritmo derivado a partir de la selección de la base trigonométrica, la recurrencia obtenida en el Corolario 52, junto con las condiciones iniciales proporcionadas en la Proposición 54, permiten obtener la representación de las diferentes funciones de escala y wavelets multirresolución en dicha base. En este caso, la descomposición se asocia con el estudio de propiedades frecuenciales discretas de dichas funciones, estudio inaccesible para las técnicas empleadas hasta el momento. Hay que destacar que las representaciones calculadas mediante estos algoritmos permiten la obtención de expresiones analíticas para las funciones de escala y wavelet multirresolución, algo muy poco habitual y que va más allá de la conocida fórmula de la transformada de Fourier que involucra al producto infinito

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{2^{1/2}} \hat{\varphi}(0).$$

y de los algoritmos usuales para obtener aproximaciones numéricas.

Trabajos anteriores han estudiado la relación entre el análisis wavelet, subespacios ambulantes e invariantes y técnicas de operadores. Por ejemplo, Goodman, Lee y Tang [72] investigan la conexión entre los análisis multirresolución y los subespacios ambulantes. Dai y Larson [39] relacionan las áreas de teoría de operadores y wavelets ortonormales, considerando vectores ambulantes y conmutadores locales. Ron y Shen [125, 127, 126] desarrollan técnicas de fibrado para sistemas afines. Stöckler [145, 146] propone una técnica mediante operadores de Laurent para frames. Podemos encontrar una relación entre estos trabajos y el trabajo aquí desarrollado en [68]. Además, otras aplicaciones a la teoría de wavelets de las técnicas espectrales que aquí se presentan se describen en [67].

A pesar de la fortaleza y utilidad de las wavelets (discretas) ortonormales en el ámbito de las aplicaciones, se trata de funciones con un gran número de restricciones y, debido a ello, algunas propiedades interesantes en las aplicaciones, como la combinación de simetría y soporte compacto, no pueden verificarse en las familias de wavelets ortonormales (excepto para la wavelet de Haar [40]). Por ello, se recurre a generalizaciones del concepto de wavelet ortonormal. Entre ellas, las wavelets *biortonormales* son algunas de las más habituales y utilizadas [103]. En este trabajo se estudian las familias de frames. Los frames generalizan la noción de bases de Riesz (imágenes de bases ortonormales por operadores invertibles y acotados), así como la noción de bases ortonormales, permitiendo redundancia en el propio frame pero manteniendo la computabilidad y continua dependencia en f de los coeficientes $c_i(f)$ en una expansión frame de una señal f . Ron y Shen [125, 127, 126, 128, 129] realizan un estudio de dichas familias de funciones mediante técnicas de fiberización basadas en el uso de la transformada de Fourier (concretamente, mediante el uso de la representación espectral del operador \mathcal{F}_* dada en

la Proposición 19), centrándose principalmente en el caso de los wavelet frames afines y con vistas hacia la caracterización de los frames ajustados multirresolución. Este estudio se realiza mediante el análisis de la Grammiana dual, utilizando el operador frame para caracterizar los sistemas wavelet (diádicos) que son *sistemas de Bessel, frames o frames ajustados*.

El Capítulo 4 se divide en dos partes. La primera parte se presenta en la Sección 4.1 e incluye un estudio de wavelet frames generales. La segunda parte, en la Sección 4.2, aborda el caso especial de wavelet frames asociados a multirresoluciones generalizadas o funciones refinables. El estudio restringe la atención al caso unidimensional. La primera parte, que se presenta en la Sección 4.1, incluye un estudio de wavelet frames generales. Siguiendo la línea marcada por estos trabajos a través de las técnicas de fiberización que involucran al operador frame $S = T_X T_X^*$, el Teorema 61 en la Sección 4.1.1 caracteriza los sistemas wavelet X , de la forma (4.6), que son sistemas de Bessel, frames o frames ajustados de $L^2(\mathbb{R})$. Una de las ventajas de las técnicas espectrales frente a las técnicas de fiberización es que los sistemas wavelet de la forma (4.6) son invariantes por dilataciones pero no por traslaciones. Las técnicas de fiberización trabajan en el dominio de Fourier, es decir, en la representación espectral del operador de traslación T dada en la Proposición 19. Para una expresión descomponible del operador frame, necesitan extender el sistema wavelet a un sistema equivalente invariante por traslaciones, denominado *sistema quasi-afín* (véase la Observación 62 para más detalles). Los elementos de la matriz y las fibras del operador descomponible $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}$ están dados en el Teorema 64. Este resultado, junto con el Teorema 61, lleva a una descripción de los wavelet frames ajustados en el Corolario 65 como solución de un sistema de ecuaciones lineales. Finalmente, la Sección 4.1.2 muestra cómo determinar los wavelet frames ajustados de soporte mínimo mediante el uso del Corolario 65. Como en [67], las clases de Hardy [131, 132, 77] juegan un papel central en dicho desarrollo. En particular, las funciones operador-valuadas denominadas *funciones operador rígidas de Taylor* por Halmos [77] y *funciones M^+ -internas* por Rosenblum y Rovnyak [131] (véase la Sección **Funciones de Hardy** para más detalles). En términos generales, el Lema 22 (de Halmos), el Lema 68 (de Rovnyak) y la Proposición 69 llevan a obtener la caracterización de los sistemas wavelet frame ajustados de la forma (4.6), con Ψ de cardinal finito y tales que $\psi \in \Psi$, mediante matrices M^+ -internas, de dimensión el cardinal de Ψ , y satisfaciendo ciertas propiedades. Por último, se discuten los casos de Cardinal de $\Psi \in \{1, 2\}$ en las Secciones 4.1.2 y 4.1.7. Se prueba que el único wavelet frame ajustado con soporte de longitud uno y una sola función generadora es la wavelet ortonormal de Haar (Corolario 70). Por otro lado, se resuelve el caso de dos funciones generadoras en el que la caracterización por funciones de Hardy de los wavelet frames ajustados puede reducirse a la caracterización de una (2×2) -matriz funcional M^+ -interna (más exactamente, mediante sus funciones columna), tal y como muestra la Proposición 74. Finalmente, las Proposiciones 75 y 76 y el Corolario 77 muestran todas las familias posibles (Proposición 78) de wavelet frames ajustados de soporte mínimo para dicho caso. La segunda parte del capítulo, en

la Sección 4.2, aborda el caso especial de wavelet frames asociados a multirresoluciones generalizadas o funciones refinables. En ella se incluye un estudio de los Principios de Extensión obtenidos inicialmente por Ron y Shen [127, 126] en el análisis de wavelet frames asociados a funciones refinables y como las técnicas espectrales reformulan estos principios en términos de matrices de “tipo Lawton”. La Sección 4.2.1 reescribe resultados fundamentales asociados a subespacios invariantes por traslaciones en términos de la transformación de Fourier periodizada, modelo espectral para el operador de traslación T introducido en la Sección 2.1. La Sección 4.2.2 contiene una introducción a los Principios de Extensión y una revisión de parte de la literatura asociada. En relación con el Principio de Extensión Unitaria (UEP), destacan los trabajos de Ron y Shen [127, 126] que le dieron origen y el refinamiento llevado a cabo en los trabajos posteriores de Benedetto y Treiber [18] y Chui y He [29]. El Principio de Extensión Unitaria fue generalizado por Daubechies, Han, Ron y Shen [42] y Chui, He y Stöckler [28] en la forma del Principio de Extensión Oblicua (OEP). Para más detalles, véase este trabajo, y también los trabajos de Atreas, Melas y Stavropoulos [8] y Han [78], y las referencias en ellos citados. En vista de que ambos principios se enuncian mediante expresiones funcionales, el uso de los mismos a la hora de realizar los cálculos de los wavelet frames ajustados multirresolución es poco eficaz y complejo. Con el fin de subsanar este hecho, la Sección 4.2.3 contiene la aplicación de la representación espectral \mathcal{F} en la base trigonométrica al Principio de Extensión Oblicua (y, por consiguiente, al Principio de Extensión Unitaria como caso particular), la cual permite reformular su condición principal mediante sistemas de ecuaciones lineales que involucran los coeficientes de las máscaras y matrices “tipo Lawton” (Proposición 99). Esta caracterización muestra que dicha matriz no aparece de forma espontánea en la propiedad de ortonormalidad, sino que es intrínseca a la propiedad de frame ajustado, propiedad que verifican los wavelets multirresolución de soporte compacto. Los resultados que lo acompañan estudian propiedades de los frames ajustados. En concreto, el Teorema de caracterización de MRA-wavelets ortonormales (Teorema 108) se reformula en base a la caracterización de frames ajustados. Además, el posterior estudio de la relación entre OEP y UEP en su formulación matricial deriva en la Observación 118 acerca de la imposibilidad del paso de uno a otro en el caso finito. Por último, en esta sección se muestran dos ejemplos del cálculo de framelets ajustados para dos funciones de refinamiento distintas (una ortonormal y la otra no). Finalmente, en la Sección 4.2.4 se deducen relaciones de “tipo Lawton” similares a partir de las técnicas espectrales desarrolladas en la Sección 4.1 y las relaciones de doble escala presentes en el ámbito de la multirresolución (Teorema 121 y fórmula 4.127).

Desde un enfoque más práctico, la teoría matemática de la aproximación propone la búsqueda de una base con la que se puedan construir aproximaciones precisas de una señal a partir de una combinación lineal de un conjunto de vectores seleccionados dentro de la propia base. La compresión de código y la estimación de señales con ruido

son algunas de las aplicaciones donde este criterio es una buena medida de la eficiencia de una base. Un caso particular de elección de dicha bases son las wavelets ortonormales. De igual forma, se estudian y comparan procedimientos de análisis lineales y no lineales para los cuales se debe tratar el problema de elección de base, mostrando que no siempre un procedimiento no lineal tiene que ser complicado. Estas aplicaciones son utilizadas en diversos tipos de imágenes, entre ellas las imágenes de carácter médico.

Es un hecho que la introducción de técnicas avanzadas de tratamiento de imagen es uno de los factores que ha contribuido de forma más significativa a la mejora de la atención médica que se da a los pacientes [138]. A día de hoy, las técnicas de imagen médica son aplicadas en multitud de disciplinas clínicas, tales como medicina de laboratorio, intervenciones quirúrgicas, radioterapia, medicina nuclear y radiología de diagnóstico. En particular, a lo largo de las dos últimas décadas, se han producido enormes avances en técnicas diagnósticas y terapéuticas basadas en imágenes médicas. Dichos avances no hubieran tenido lugar sin el desarrollo tecnológico acontecido a lo largo de este tiempo, desarrollo que ha actuado además de catalizador en el proceso.

En general, la imagen en medicina se basa en el aprovechamiento de ciertos principios físicos ampliamente conocidos para obtener imágenes in-vivo, tanto de la anatomía, como de la actividad funcional y metabólica de los elementos orgánicos inspeccionados. El cómo aprovechar los principios físicos conocidos con anterioridad para conseguir este objetivo constituye una labor enormemente creativa y multidisciplinar, pues no cabe duda que en el desarrollo de estos sistemas tienen un papel importante tanto ingenieros, como físicos y matemáticos y, por supuesto, los facultativos destinatarios de estas modalidades y agentes activos en su consecución y análisis. Gracias precisamente a la presencia de equipos multidisciplinarios en los entornos asistenciales, los sistemas de adquisición, procesado y visualización de imágenes médicas se han convertido en parte esencial del trabajo clínico rutinario.

Entre las técnicas más conocidas se puede citar, en primer lugar, la tomografía axial computerizada de rayos X, o CT. Este método, muy utilizado en la práctica clínica, da lugar a un conjunto de imágenes que representan la anatomía del paciente. Los escáneres CT proporcionan un conjunto de secciones axiales bidimensionales a partir de los cuales se reconstruye la imagen tridimensional. El principio físico de partida está en las diferentes atenuaciones a las que dan lugar los distintos tejidos sometidos a la radiación. La base matemática de la reconstrucción de la imagen CT a partir de las proyecciones de los rayos X fue propuesta por Radon en 1917 [14] y se utiliza también en otras muchas modalidades de imagen médica.

Otro procedimiento es el de la imagen por resonancia magnética o MRI, que se obtiene mediante la utilización de campos magnéticos y señales de radiofrecuencia. Este procedimiento se basa en el principio de la resonancia magnética nuclear (NMR) [97], descubierto en 1946 en el campo de la química física por Bloch y Purcell que recibieron el Nobel en 1952 por esta aportación. Los escáneres de MRI utilizan haces no ionizantes que producen contraste en tejidos blandos de forma no invasiva. Esta modalidad

permite obtener planos de corte desde cualquier posición angular, a diferencia de otras modalidades, que sólo permiten obtener cortes axiales.

Las dos modalidades anteriores, junto a otras como la tomografía computerizada por emisión de positrones (PET), constituyen a día de hoy importantes campos abiertos de investigación. Esto se debe al intento de desarrollar nuevas técnicas, dentro de los principios generales de resonancia o tomografía computerizada, que permitan acceder a funcionalidades y estructuras hasta ahora imposibles de visualizar con calidad. Sin embargo, el empleo de estos procedimientos avanzados está limitado por el elevado coste de los sistemas de adquisición y, en ocasiones, por su gran tamaño. Esto, unido a una serie de situaciones clínicas en las que resulta imposible obtener imágenes por estos procedimientos, permite comprender por qué en un gran número de casos es necesario utilizar otra modalidad de imagen, los ultrasonidos. Ciertamente, las imágenes obtenidas con esta técnica son de peor calidad, pero las razones citadas justifican plenamente su empleo. Las imágenes por ultrasonidos se basan en un conjunto de metodologías capaces de adquirir información cualitativa y cuantitativa válida para el diagnóstico. El principio físico subyacente es la emisión de pulsos de ultrasonido, de tipo elástico, y en la posterior recepción de sus ecos procedentes de las estructuras internas. Estas técnicas son muy atractivas porque permiten obtener secuencias de imágenes en tiempo real, empleando un equipo móvil compacto y a un precio significativamente menor. La naturaleza del tiempo real de los ultrasonidos hace posible que el médico pueda observar el movimiento de estructuras internas en el paciente. Esto ha dado lugar a la gran utilización de ultrasonidos en los campos de ginecología, pediatría y cardiología, entre otros. Los equipos que utilizan técnicas Doppler pueden extraer también información cuantitativa relativa a velocidades, como por ejemplo la del flujo sanguíneo en un vaso de interés. Además, la introducción en el paciente de señales de ultrasonidos, con las potencias empleadas en la actualidad, se puede considerar totalmente inocua. En resumen, la ausencia de efectos secundarios debidos a la exposición, la obtención de imágenes en tiempo real, los modos de adquisición cuantitativos, la portabilidad del equipo, así como el coste relativamente bajo hacen que la técnica de los ultrasonidos sea de gran utilización en la actualidad, si bien a nivel clínico en numerosas aplicaciones el patrón oro sigue considerándose el obtenido a partir de resonancia magnética.

Como consecuencia de los avances en técnicas de adquisición y procesado de imágenes médicas, durante los últimos años se ha desarrollado una importante actividad en lo que se ha dado en llamar "Medicina Guiada por Imágenes", un campo altamente multidisciplinar en el que, mediante avanzados métodos computacionales, se intenta aprovechar el máximo las distintas modalidades de imágenes, tanto para la ayuda al diagnóstico como a la intervención quirúrgica.

La imagen de Resonancia Magnética (MRI) permite una gran versatilidad a la hora de capturar distintas características anatómicas y funcionales. A pesar de que la resonancia magnética implica la utilización de campos magnéticos y señales de radiofrecuencia, se suele considerar una técnica no invasiva cuando se la compara con otras técnicas como

la tomografía, en la que el paciente se ve sometido a una dosis de rayos X que puede dar lugar a complicaciones. Igualmente, técnicas como la PET son posibles gracias a la inyección en el paciente de ciertos radioisótopos. Es por ello que la resonancia magnética y la ecografía son las dos técnicas por excelencia no invasivas. La resonancia magnética tiene mucha mayor calidad que los ultrasonidos, si bien tienen como principal inconveniente que el escáner de resonancia es mucho más costoso y voluminoso. Sin embargo, debido a que la señal de ultrasonido no se transmite por medios óseos, es necesario recurrir a resonancia magnética en casos como, por ejemplo, el cerebro, en el que dicho órgano está protegido por el cráneo haciendo que la técnica de ultrasonidos sea inviable. Se pueden considerar por tanto técnicas complementarias.

El aprovechamiento de todas las ventajas de la resonancia magnética requiere de la adopción de determinados compromisos en la selección de los parámetros físicos (resolución (R), campo de visión (FOV), número de repeticiones (Nex), tiempo de eco (TE), tiempo de repetición (TR), ancho de banda (BW), etc.) y de las secuencias empleadas (spin-echo, inversion-recovery, gradient-echo, etc.) que determinan la formación de las imágenes [97]. Por ello resulta de interés el análisis, modelado y optimización de procedimientos de adquisición de imágenes en función de las necesidades computacionales de una determinada aplicación.

Para un determinado tiempo de adquisición en MRI, existe un compromiso fundamental entre resolución y relación señal a ruido (SNR) [63]. En primera instancia, este compromiso es irrevocable; es decir, si se selecciona una determinada configuración de tales factores no se puede recuperar toda la información presente en otra de las configuraciones. La elección de una configuración óptima en función del resto de parámetros de adquisición es un problema estudiado previamente. Los criterios para establecer dicho óptimo pueden descomponerse entre aquéllos genéricos en donde una medida de calidad general (error cuadrático medio (MSE) [86], contenido de información [63], similaridad estructural (SSIM) [89], índice de calidad basado en la varianza local (QILV) [3], valoración del especialista, etc.) permite comparar las configuraciones y aquéllos específicos en donde la adquisición se optimiza teniendo en cuenta una medida de calidad de los resultados de una determinada aplicación (filtrado, segmentación, registrado, etc. [90]). No obstante, las complejas interrelaciones entre parámetros y la diversidad de aplicaciones requieren un estudio más profundo de este problema. Además de este compromiso, existen otros factores limitantes en la calidad de las adquisiciones de MRI que han de ser tenidos en cuenta. Entre los más importantes se encuentran la posible aparición de artefactos de imagen [142] y la inhomogeneidad de intensidad [153], especialmente significativos para el análisis cuantitativo de imagen. Por último, el modelado físico de la adquisición de MRI permite combinar distintas adquisiciones para el procesado posterior a partir de un enfoque multiespectral [54].

La forma de aumentar la SNR en una MRI suele ser mediante el aumento del parámetro Nex (número de experimentos). Fijando un valor para Nex mayor que uno el equipo toma tantas medidas como indica dicho parámetro, promediando el resultado, lo que

teóricamente disminuye la varianza de ruido en un factor $1/Nex$, o lo que es lo mismo, aumenta la SNR en un factor Nex . El problema es entonces que el tiempo de adquisición aumenta por ese mismo factor. La técnica MRI se caracteriza por un tiempo de adquisición considerable comparándola con otras técnicas por lo que en muchos casos no es posible aumentar Nex . Por ejemplo, si una adquisición de toda la cabeza son 5 minutos y se desea $Nex=8$, eso significaría tener al paciente 40 minutos, siendo este tiempo completamente inviable desde el punto de vista del paciente y del servicio de resonancia (aumentaría indefinidamente las listas de espera). La alternativa es mantener el Nex y aplicar un filtro que sea capaz de eliminar el ruido manteniendo las características de la imagen, lo que daría lugar a aumentar el valor SNR.

Uno de los principales problemas a la hora de eliminar el ruido o suavizar una imagen es la consiguiente pérdida de información sobre los bordes y contornos (el desenfoque de la imagen). Éste es el caso típico de la convolución con un filtro Gaussiano: a pesar de que la imagen se vuelve más homogénea, los bordes también se difuminan o “desenfocan”. Perona y Malik [120] proponen un nuevo tipo de filtrado, basado en ecuaciones en derivadas parciales y la ecuación de difusión del calor, el cual es el origen de toda una familia de filtros que permiten homogeneizar regiones a la vez que mantienen o realzan las fronteras entre ellas. La idea de su nuevo paradigma es la generación de imágenes multiescala, cuyas descripciones tienen que cumplir los requisitos de causalidad (no deben aparecer detalles espúreos), localización inmediata (a cada resolución, los bordes deben estar bien definidos) y suavizado basado en elementos (se da preferencia al suavizado intrarregión frente a interregión). Estas restricciones les llevan a plantear un modelo, de nuevo evolutivo, que parte de la imagen observada y progresa hacia la imagen filtrada. El coeficiente de difusión se define como una función espacial y temporal, inversamente proporcional al gradiente de la intensidad de la imagen, de modo que el proceso de difusión va a ser diferente en cada punto y en cada instante de tiempo, lo que se conoce como difusión anisótropa. Algunos autores posteriores [135] discrepan acertadamente en el uso de este término, considerando que este modelo de difusión en realidad no es anisótropo, sino más bien no-lineal inhomogéneo, o adaptativo.

Gerig y otros [65] proponen el empleo del llamado filtro anisótropo no lineal, que da muy buenos resultados en el contexto de imágenes MRI, y que supone la primera aplicación práctica de las ideas propuestas por Perona y Malik. Partiendo de la misma ecuación de difusión, plantean una discretización alternativa, de formulación más sencilla, cuya estabilidad está supeditada a ciertas restricciones en los parámetros.

Otros métodos existentes de filtrado de MRI en la actualidad se basan en la suposición de que el modelo probabilístico subyacente es Rice [137], métodos linealmente óptimos en el sentido de mínimo error cuadrático medio (filtro de Wiener) han sido igualmente adaptados al caso de MRI [107, 2]. De hecho se ha propuesto un método de difusión tipo Perona y Malik, pero adaptado para el caso Rice [15]. Otra técnica con buenos resultados en filtrado de MRI es el denominado filtro NLM (Non-Local Means o Medias No Locales) [35, 105]. Además, los principios de los métodos estadísticos no

paramétricos también son la base de la reducción iterada de entropía condicional (ICER) propuesta por Awate y Whitaker [11]. Este filtro incorpora el modelo de ruido Rician, a diferencia del método NLM, que es más general

Dada la propiedad de la localidad de la transformada wavelet (frame), la alternativa a proponer es llevar a cabo el filtrado en el dominio de los coeficientes de dicha transformada. En el caso multirresolución, Donoho y Johnstone [51], prueban que un sencillo algoritmo por umbralización en la base adecuada puede ser un filtro (no lineal) casi óptimo. Este argumento lleva a plantearse el hecho de la necesidad de seleccionar la base de wavelet (frames) adecuada en base a la aplicación que se desea llevar a cabo. Por ello, una vez fijadas las bases del método a proponer para la eliminación de ruido en el Capítulo 5, la Sección 5.2.2 trata de encontrar los *wavelet frames ajustados de soporte mínimo* que optimicen dicho filtro. El motivo de uso de estas familias de funciones es la mayor libertad de elección que proporcionan frente a las clásicas wavelets ortonormales, centrándose en el caso de soporte de longitud uno ya que se desea un comportamiento completamente local el cual no se vea afectado por regiones excesivamente lejanas del punto a tratar.

En la literatura, ya otros autores han llevado a cabo filtrado de MRI mediante técnicas wavelet. Nowak [115] y Pizurica [121] proponen llevar a cabo el filtrado mediante transformada wavelet multirresolución. Es interesante el trabajo de Nowak puesto que utiliza el modelo Rice, que es la distribución del módulo de la anti-transformada de los datos MRI adquiridos, esto es, la forma habitual de presentación de esta modalidad. Lo interesante de la transformada wavelet es su capacidad para preservar los detalles a diferentes escalas dada su capacidad de modelar localmente la información presente en la imagen. En el modelo Rice el ruido que se introduce es dependiente de la señal y además para baja relación señal a ruido se introduce un sesgo (bias) que también es dependiente de la señal. Otro trabajo interesante puede ser el de Anand y Sahambi [6]. En este caso se trabaja también con el cuadrado de la imagen, se corrige el sesgo en los coeficientes y se lleva a cabo un filtro bilateral: filtrado Gaussiano en los dominios espacial y de amplitudes. También se basa en el modelo Rice. Se puede mencionar también el método de Wirestam [156], en el que se propone una técnica de “shrinkage” de los coeficientes basada en un filtro tipo Wiener. La novedad de este método es que filtra la imagen compleja antes de determinar el módulo de la anti-transformada, por lo que los datos son Gaussianos. El problema aquí es que los datos complejos no siempre están disponibles en los sistemas de adquisición de MRI.

El Capítulo 5 muestra el método de filtrado de MRI propuesto, basado en el modelo descrito por Gorgel, Sertbas y Ucan [73] para el análisis de mamografías, y utilizado ya previamente por Martin-Fernandez y Villullas [109] para el filtrado de ruido en MRI como una primera aproximación al resultado final obtenido en el capítulo. Debido al diseño del filtro, basado en contracciones de los coeficientes wavelet (frame), y cuyas contracciones vienen dadas por la probabilidad de dichos coeficientes de pertenecer a la componente de detalle condicionada por la probabilidad de pertenecer a la componente

de ruido (Sección 5.2), se estudian, en la Sección 5.2.1, las diferentes distribuciones de los coeficientes wavelet para imágenes MRI libres de ruido e imágenes formadas únicamente por ruido (Rice aproximado por Gaussiano o Rayleigh en función de la región de la imagen en que se encuentre). Se observa que dichas distribuciones siguen una distribución Gaussiana Generalizada, para la cual es posible prefijar los valores del parámetro de forma β en función de la escala de descomposición, tanto para el caso general como para el caso multirresolución. Asimismo, puesto que se considera la distribución conjunta de coeficientes de descomposición de señal libre de ruido y señal formada únicamente por ruido, los parámetros involucrados en el filtro se estiman de manera conjunta mediante el método de Expectación Maximización (E.M.) (Sección 5.2.3), a diferencia de Gorgel, Sertbas y Ucan, quienes realizan el cálculo de dichos valores de manera independiente del resto de distribuciones. Los resultados obtenidos, y mostrados en la Sección 5.3.4, en comparación con métodos de la literatura, como son los filtros NLM [35, 105] y de Awate y Whitaker [9, 10] como filtros generales (Sección 5.1.1), y los métodos de Donoho y Johnstone [51] y Nowak [115] como métodos basados en wavelets multirresolución (Sección 5.1.2), son de calidad, demostrando que los diferentes criterios utilizados para la búsqueda de los wavelet frames ajustados óptimos cumplen con la eficiencia en los diferentes casos de ruido suave, medio y alto.

Por otro lado, la adquisición secuencial en tiempo de imágenes de resonancia magnética permite capturar variaciones en la intensidad de señal de las diferentes regiones cerebrales a partir de las cuales extraer información de actividad cerebral. Esta técnica, conocida como resonancia magnética función (fMRI), es una técnica reciente y no invasiva que permite hallar y medir diversas funciones del cerebro humano sin utilizar radiación [13, 91]. Dichas funciones son detectadas en base a pequeños cambios en el flujo sanguíneo cerebral de las llamadas “áreas funcionales” [110]. A estos cambios en el flujo se les conoce como *efecto BOLD* (*Blood Oxygen Level Dependent*) [116, 118, 117] y su forma y modelo son ampliamente estudiados en la literatura [12]. Una de las características más importantes del efecto BOLD es que la variación de intensidad producida en las fMRI adquiridas es muy pequeña, no mayor al 5 % de la señal base en dicho punto, y que el ruido presente en dichas señales tiene magnitud similar a la señal de activación, por lo cual es complicado identificar la existencia o ausencia de dicha señal dentro de los datos adquiridos con el escáner. Para tratar de solucionar este problema, los métodos de análisis clásicos hacen uso de paradigmas de activación prefijados [82, 62], los cuales tratan de ser identificados dentro de la señal, para posteriormente comprobar, mediante un test estadístico, la eficiencia de dicha identificación. El uso de estos paradigmas ayuda a diferenciar la señal deseada de los diferentes tipos de ruido subyacentes en la fMRI (por emisión de calor del cuerpo humano, movimientos involuntarios, ruidos de baja frecuencia o *drift* dependientes del tiempo de adquisición, etc.).

Uno de los primeros métodos de análisis de fMRI propuestos para la búsqueda de

señal de activación subyacente es el propuesto por Henriksen *et al.* [82], en la cual se trata de identificar dicha activación utilizando la diferencia entre momentos de posible activación y reposo. Otra de las propuestas clásicas a la hora de analizar la señal medida es el análisis de correlación [12]. En este caso, dado un paradigma de activación y una función modelo de la respuesta hemodinámica, se genera una señal de activación de control con la cual comparar la señal medida mediante su correlación y así obtener un mapa de similitud con dicha función de control. Este método es generalizado por el método de análisis de correlación canónica [61, 60], el cual opera sobre variables multidimensionales, esto es, varios tipos de funciones de control. En este mismo enfoque se encuentra el modelo general lineal (GLM) [62]. Modelada la señal medida a partir de una matriz (la cual contiene la base de funciones que “componen” la señal medida), se calcula la aproximación a la señal medida en la base de la matriz en mínimos cuadrados, y mediante un test estadístico se comprueba cómo de eficiente es dicha aproximación mediante el estudio de la correspondiente señal residual. Un enfoque diferente a los anteriores es el propuesto por Frank, Buxton y Wong [55], los cuales basan su estrategia únicamente en el estudio probabilístico de la señal. Bajo el mismo modelo para la señal funcional, Ardekani *et al.* [7] proponen un método de análisis basado en una estrategia de máxima verosimilitud. Por otra parte, también existen métodos de análisis basados en componentes principales [16, 147].

Al igual que en el caso de filtrado de ruido en MRI, en el ámbito de las señales de fMRI, varios autores han utilizado la descomposición wavelet multirresolución, principalmente en la componente espacial, con el fin de aprovechar algunas de sus características, como son la decorrelación de los datos y su dispersión, y la reducción de ruido. Algunos autores como Ruttimann *et al.* [134] proponen utilizar el enfoque de la sustracción directa utilizada en los métodos clásicos junto con la descomposición wavelet espacial y transformar el análisis T-estadístico posterior en dos análisis estadísticos consecutivos que aprovechen las características probabilísticas de los coeficientes de detalle, con el fin de obtener el correspondiente mapa de activación. Dinov *et al.* [50] utilizan la descomposición wavelet espacial como base para una posterior contracción, adaptativa en frecuencias, de los coeficientes de detalle. el método propuesto por Hilton *et al.* [85] elimina, de forma recursiva y para cada nivel, los mayores coeficientes de detalle hasta que los restantes coeficientes sigan una distribución de ruido blanco de acuerdo con ciertos criterios, y con los coeficientes extraídos forma el resultante mapa de activación. Finalmente, Van de Ville *et al.* [46] proponen trasladar el modelo general lineal al caso wavelet. Concretamente, tras obtener la correspondiente descomposición wavelet espacial, los coeficientes se modelan según el modelo general lineal y se analizan. Con los mapas (auxiliares) obtenidos, mediante la transformada wavelet inversa se obtiene el mapa de activación final correspondiente.

A diferencia de estos autores, el método propuesto para el análisis de señales de fMRI (Sección 6.2) se basa, para cada posición espacial, en la descomposición MRA-wavelet temporal de la señal medida. En base al modelo de respuesta hemodinámica

(FRH) prefijado y descrito en (6.10), se halla la función de escala ortonormal que mejor aproxime en norma en $L^2(\mathbb{R})$ a la función dilatada $FRH(4\cdot)$ como combinación lineal de dicha función y su trasladada una unidad, la cual corresponde al filtro descrito en (6.11). La descomposición temporal de la señal adquirida mediante dicho filtro hasta escala 2, permite diferenciar la señal de activación (junto con el ruido de baja frecuencia que posteriormente es eliminado) del ruido de alta frecuencia que queda contenido en los coeficientes de detalle (Sección 6.2.4). Además, este hecho se acrecenta con el uso de filtros espaciales direccionados, propuestos por Friman *et al.* [60], que permiten aprovechar la estructura morfológica de las diferentes regiones de activación. Finalmente, la señal obtenida sufre un post-procesado que elimina señales residuales de ruido (umbralizado por intensidad) y puntos aislados de activación (comparación por correlación en vecindario). Los resultados obtenidos gracias a este método son comparados con los métodos clásicos descritos en la Sección 6.1 y los métodos que involucran el uso espacial de wavelets ortonormales de la Sección 6.1.2. En dichas comparaciones (Sección 6.3.4) se puede observar que el método propuesto es competitivo en los casos de paradigma prefijado. Por otra parte, este método no necesita de dicho paradigma para realizar la identificación de la actividad dentro de la señal adquirida, lo cual permite la eficiente búsqueda de actividad espontánea durante el experimento, así como centrarse en la actividad relacionada con un paradigma concreto en caso de ser necesario.

Los contenidos de este trabajo han sido o están siendo incluidos en diversos artículos para su publicación. Parte de los contenidos del Capítulo 3, centrados en el algoritmo de Haar (Sección 3.3.1), han sido publicados en el artículo de Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [71]. Los contenidos de la Sección 4.1 se incluyen en el artículo de Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [70], actualmente en revisión, y el material de la Sección 4.2 se recoge en el artículo de Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [69], en preparación. En el ámbito de las aplicaciones, una versión previa de los contenidos del Capítulo 5 se ha publicado en el artículo de Martin-Fernandez y Villullas [109], mientras que el desarrollo posterior se va a incluir en el artículo de Gómez-Cubillo, Martin-Fernandez y Villullas [66], actualmente en preparación. Por último, los resultados del Capítulo 6 dará lugar al artículo de Martin-Fernandez y Villullas [108].

Parte I

Modelos espectrales y aplicaciones a wavelets multirresolución y frames

Capítulo 1

Teoría clásica de wavelets

Este primer capítulo incluye una breve introducción a la teoría clásica de wavelets desarrollada principalmente por Mallat [102], Meyer [112] y Daubechies [40]. En la Sección 1.1 se describe la transformada de Fourier en ventanas y la transformada wavelet continua, mientras que en la Sección 1.2 se introduce el análisis wavelet discreto, la noción de análisis multirresolución (Sección 1.2.1) y los conceptos de función de escala, filtro (espejo-conjugado) y wavelet (ortonormal) asociados a éste. Además, se incluyen algunos ejemplos ilustrativos como la wavelet de Haar, Shannon, Meyer, Daubechies, etc. Finalmente, se añaden un par de subsecciones que muestran el cálculo de wavelets en función de un conjunto de propiedades deseadas, como pueden ser la regularidad, el tamaño del soporte de la wavelet ψ , etc., y el desarrollo del algoritmo en cascada, descrito por Mallat [100, 101], en el cálculo de la transformada wavelet multirresolución mediante el uso de los filtros asociados.

El desarrollo mostrado a continuación está extraído principalmente de [103], donde pueden encontrarse las demostraciones de los resultados..

1.1. El camino de frecuencias a escalas

Durante años, las técnicas basadas en la teoría de Fourier han liderado el análisis de señales. Debido al estudio y diseño de operadores invariantes en el tiempo/espacio utilizados en el procesado clásico de señales para modificar propiedades de señales estacionarias, la transformada de Fourier ha adquirido una importancia capital. Pero la utilización de dichas técnicas deja al margen ciertas propiedades interesantes para su estudio y que el análisis de Fourier no es capaz de tratar. Una de las más importantes, y la cual motiva el desarrollo de la teoría de wavelets mostrada más adelante, es la localización en tiempo/espacio-frecuencia dentro de una señal dada. Para atajar este problema, y motivado por la mecánica cuántica, el físico Gabor [64], en 1946, definió un átomo elemental en tiempo-frecuencia que permitía detectar las frecuencias implicadas en cada

intervalo temporal, con la salvedad de que, según el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, el área del rectángulo en el espacio tiempo-frecuencia (denominado "rectángulo de Heisenberg") debe ser mayor o igual que $\frac{1}{2}$, dándose la igualdad en el caso de que la función considerada siga una distribución Gaussiana (este principio indica que es imposible localizar exactamente una frecuencia concreta en el tiempo, ya que a medida que reducimos el rango de variación de las frecuencias a localizar, el intervalo temporal tiende a crecer, y viceversa). Para analizar la información en tiempo-frecuencia de una señal dada, Gabor propuso descomponer la señal mediante dichas funciones atómicas elementales. Para acometer este paso se tienen principalmente dos clases de átomos en tiempo-frecuencia:

- **Transformada de Fourier en ventanas (WFT):** Los átomos de Gabor se construyen mediante traslación en tiempo y en frecuencia de una función g , real y par, denominada *ventana*, es decir,

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u)e^{i\xi t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u, \xi \in \mathbb{R}.$$

La función $g(t)$ se caracteriza por concentrar su energía en un entorno de 0 de longitud $\sigma_t = \sqrt{Var(g)}$. Su transformada de Fourier es

$$\hat{g}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

La energía de $\hat{g}(\omega)$ está localizada en un entorno de 0 de longitud $\sigma_\omega = \sqrt{Var(\hat{g})}$.

Las versiones moduladas y trasladadas de g , $g_{u,\xi}$, se caracterizan por concentrar su energía en un entorno del punto u de longitud σ_t . Su transformada de Fourier es la traslación por ξ de la transformada de Fourier de g

$$\hat{g}_{u,\xi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \xi)e^{-iu(\omega - \xi)}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad u, \xi \in \mathbb{R}.$$

La energía de $\hat{g}_{u,\xi}(\omega)$ está localizada en un entorno de ξ de longitud σ_ω . Se pueden interpretar estos datos en el plano tiempo-frecuencia mediante los llamados rectángulos de Heisenberg, recordando siempre que su área debe ser superior a $\frac{1}{2}$, tal y como indica el Principio de Incertidumbre. Si se da la igualdad (es decir, g es una Gaussiana), los átomos $g_{u,\xi}$ se denominan *funciones de Gabor*. La transformada de Fourier en ventanas definida por Gabor descompone una señal f mediante cada uno de estos átomos

$$Sf(u, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g_{u,\xi}(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t - u)e^{-i\xi t} dt, \quad u, \xi \in \mathbb{R}.$$

La expresión anterior no es más que una integral de Fourier localizada en un entorno del punto u gracias a la función $g(\cdot - u)$. La localización en frecuencia

en un entorno del punto ξ puede observarse escribiendo la expresión anterior en frecuencias, sin más que hacer uso de la *fórmula de Parseval* [103, fórmula (2.25)]:

$$Sf(u, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}_{u,\xi}(\omega)} d\omega, \quad u, \xi \in \mathbb{R}.$$

El valor de $Sf(u, \xi)$ fue interpretado por Gabor como una "porción de información" situada sobre su correspondiente rectángulo de Heisenberg (Figura 1.1).

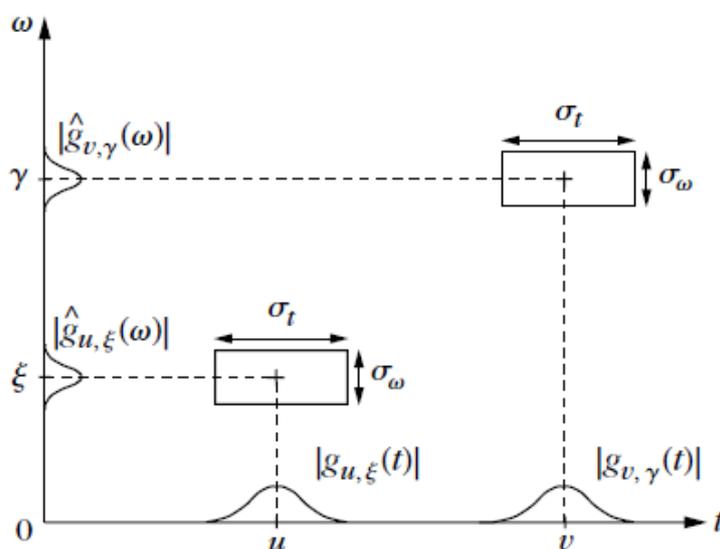


Figura 1.1: Rectángulos de Heisenberg (tiempo-frecuencia) que representan la zona de dispersión de dos átomos de Gabor.

- Transformada wavelet continua (CWT):** Trabajando en reflexión sismológica, Morlet observaba que los pulsos modulados enviados al subsuelo tienen una duración demasiado alta a altas frecuencias, lo cual dificulta separar los ecos en capas poco espaciadas. Para solventar ese problema, Morlet pensó en enviar ondas más cortas en altas frecuencias en lugar de emitir pulsos de igual duración. Dichas ondas se obtienen mediante escalado de una sola función denominada *wavelet*. Por otra parte, Grossmann, el cual estaba trabajando en física teórica, reconoció en el enfoque de Morlet algunas ideas que estaban cerca de su propio trabajo sobre los estados cuánticos coherentes. Así pues, casi cuarenta años después de Gabor, Morlet y Grossmann reiniciaron una colaboración entre la física teórica y el procesamiento de señales, lo que llevó a la formalización de la transformada wavelet

continua [74]. A pesar de todo, estas ideas no eran totalmente nuevas para los matemáticos que trabajaban en el análisis armónico, o para los investigadores del estudio de la visión por ordenador que estudiaban el procesamiento multiescala de imágenes.

Definición 1 Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ se dice que es una wavelet si verifica que:

- ψ tiene media 0, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0;$$

- ψ tiene norma 1, es decir, $\|\psi\|_{L^2} = 1$.

Se define el *átomo wavelet* como la función dilatada por un parámetro s y trasladada por un parámetro u ,

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}^*. \quad (1.1)$$

$\psi_{u,s}$ está centrada en el punto u con una dispersión proporcional al parámetro s ($\sigma_t = s\sigma(\psi)$). Su transformada de Fourier viene dada por

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = e^{-iu\omega} \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}^*,$$

por lo que se puede observar que no es más que una traslación de la función $\hat{\psi}$ con media $\frac{\mu(\hat{\psi})}{s}$ y dispersión $\frac{\sigma(\hat{\psi})}{s}$. La transformada wavelet continua de una señal f a escala s en la posición u se calcula realizando el producto interior de dicha función f junto con el átomo wavelet definido anteriormente,

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{\psi}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt, \quad u \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}^*. \quad (1.2)$$

La reconstrucción de la función f a partir de la función Wf viene dada por la expresión

$$f(t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

expresiones similares a las utilizadas en la transformada y anti-transformada de Fourier, de sobra conocidas.

Al igual que en el caso de la transformada de Fourier en ventanas, la transformada wavelet continua puede medir la variación en tiempo-frecuencia de las diferentes componentes espectrales de la señal (en la Figura 1.2 se pueden ver varios ejemplos de la localización en tiempo y frecuencia de la transformada wavelet continua frente

a la transformada de Fourier). Haciendo uso de la fórmula de Parseval [103, fórmula (2.25)], la transformada wavelet continua se puede escribir como

$$Wf(u, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}_{u,s}(\omega)} d\omega, \quad u \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}^*.$$

Una wavelet compleja permite separar las componentes de escala y fase para medir la evolución temporal de las diferentes frecuencias mientras que una wavelet real da la posibilidad de detectar y caracterizar singularidades a través de escalas, siguiendo los máximos locales de la transformada wavelet.

1.2. La transformada wavelet discreta y multirresolución

Como se ve en la definición 1, una wavelet es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ de media 0 y norma 1. Una familia de átomos en tiempo-frecuencia se puede obtener mediante traslaciones y dilataciones de ψ , en función de los parámetros u y s , a través de la expresión (1.1). Dichos átomos verifican que $\|\psi_{u,\xi}\|_{L^2} = 1$. Dada esta familia, se define la transformada wavelet de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ a tiempo u y escala s mediante la expresión (1.2).

En general, el número de átomos es del orden de \mathbb{R}^2 . En la práctica, dicha cantidad es impracticable e interesa reducirla con el fin de facilitar el trabajo computacional. Una opción consiste en discretizar el conjunto de átomos, limitando el parámetro de traslación a valores en \mathbb{Z} y limitando el factor de dilatación s a los valores 2^j , $j \in \mathbb{Z}$, de tal forma que la familia $\{\psi_{j,k} := 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot -k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ sea una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. En este caso, la descomposición y reconstrucción de la señal viene dada por la expresión de la misma en la base wavelet ortonormal (sistema ortonormal de un espacio Hilbert). A una wavelet que verifique estas propiedades se le denomina *wavelet ortonormal*.

Existen diferentes bases ortonormales basadas en wavelets. En 1910, Haar [76] observó que el conjunto de traslaciones enteras y contracciones/dilataciones de base 2 de la *función de Haar*

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & , \text{ si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

genera una base ortonormal del espacio $L^2(\mathbb{R})$, es decir, que toda señal de energía finita, f , puede descomponer $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (1.4)$$

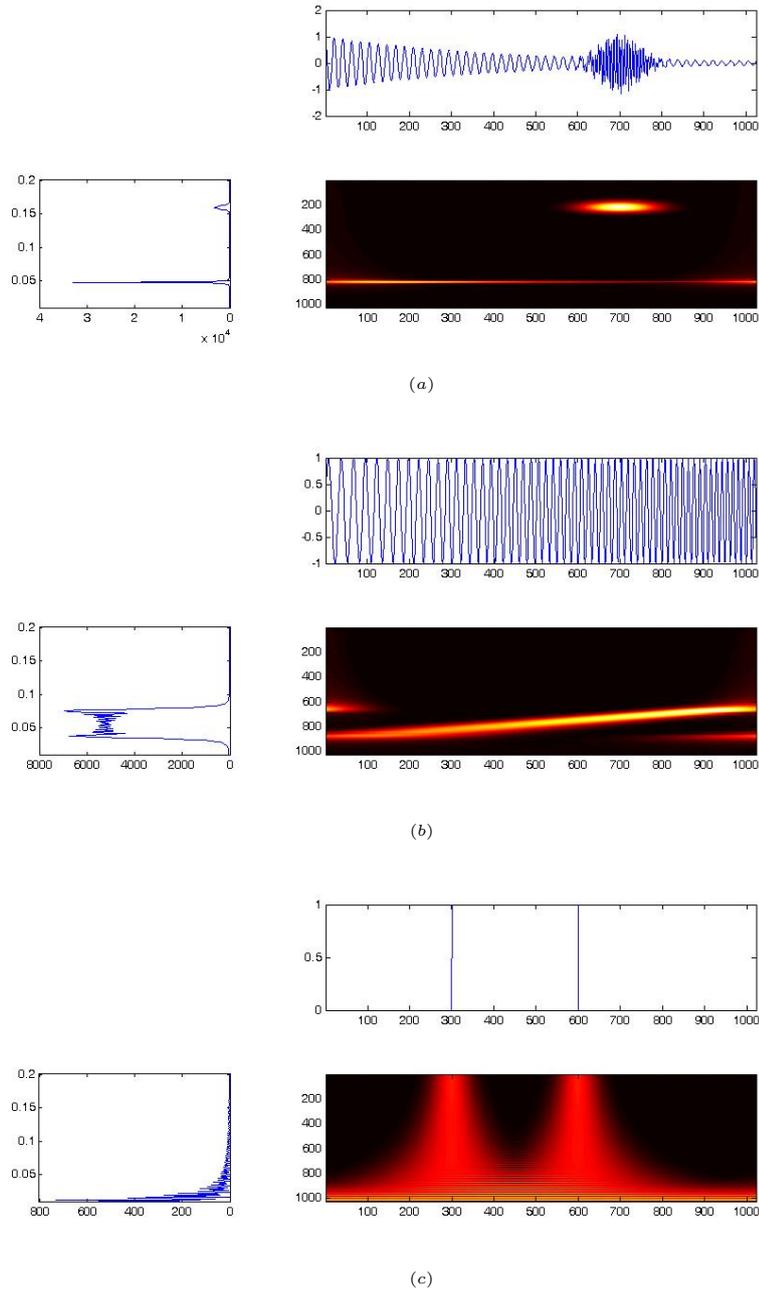


Figura 1.2: Comparativa de la localización en tiempo y frecuencia de la transformada wavelet continua (inferior derecha) frente a la transformada de Fourier (inferior izquierda) para las funciones (superior): (a) onda localmente perturbada; (b) función con aumento frecuencial (cnt.); (c) 2 impulsos [deltas de Dirac].

Como ψ tiene media 0, cada suma parcial

$$d_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

puede ser interpretada como los detalles de la función f en la escala j (es decir, resolución 2^j). De acuerdo con la ecuación (1.4), añadiendo todas estas capas de detalles en las diferentes escalas a la aproximación de f en la escala menor, obtenemos la propia función f . Esta idea da lugar a la aparición del concepto de análisis multirresolución, que se describe a continuación, y en el cual se centra parte del estudio posterior.

1.2.1. Análisis multirresolución (MRA)

Bajo la premisa de que la suma parcial d_j definida en (1.5) es la diferencia entre las dos aproximaciones de f a escalas $j + 1$ y j , esto es, los detalles de la función f a escala j , se puede asociar a la wavelet ψ un análisis multirresolución, el cual considera la aproximación de la señal a varias escalas mediante proyecciones ortogonales sobre diferentes subespacios $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$.

La definición propuesta por Mallat [102] y Meyer [112] para describir los subespacios multirresolución es la siguiente:

Definición 2 Una sucesión $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ se denomina un análisis multirresolución (MRA) si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\forall j, k \in \mathbb{Z}, f \in \mathcal{V}_j$ si, y sólo si, $f(\cdot - 2^{-j}k) \in \mathcal{V}_j$
2. $\forall j \in \mathbb{Z}, \mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1}$
3. $\forall j \in \mathbb{Z}, f \in \mathcal{V}_j$ si, y sólo si, $f(2 \cdot) \in \mathcal{V}_{j+1}$
4. $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_j = \{0\}$
5. $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_j} = L^2(\mathbb{R})$
6. $\exists \theta \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{\theta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de \mathcal{V}_0 , es decir,
 $\exists A, B > 0$ tales que $\forall f \in \mathcal{V}_0$, f puede descomponerse de manera única como

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a[k] \theta(t - k), \quad t \in \mathbb{R},$$

con

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a[k]|^2 \leq B\|f\|^2.$$

La Propiedad 1 indica que los subespacios \mathcal{V}_j son invariantes por traslaciones proporcionales a 2^j . La Propiedad 2 muestra que, conocida la aproximación a f a una escala j , se tiene toda la información necesaria para calcular la aproximación de f a escala $j + 1$, mientras que la Propiedad 3 muestra la relación entre los subespacios multirresolución más allá de la simple contención. En las Propiedades 4 y 5 se puede ver el comportamiento de las aproximaciones a diferentes escalas a medida que avanza o disminuye el subíndice j .

El concepto de análisis multirresolución aparece ya implícitamente en el trabajo de Burt y Adelson [22] en tratamiento de imágenes al introducir una pirámide de Laplace que permite procesar una imagen a baja resolución para luego ir aumentando dicha resolución a medida que sea necesario. La aproximación a resolución 2^j de una función f se expresa como una red discreta de valores que proporcionan el valor medio de f en un entorno de tamaño proporcional a 2^j , por lo que una aproximación multirresolución consiste en un conjunto de redes discretas con dichos valores para los diferentes $j \in \mathbb{Z}$. De un modo más formal, dichas aproximaciones vienen dadas como las proyecciones ortogonales a una sucesión creciente de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$, es decir, del mismo modo que en un análisis multirresolución.

Con anterioridad, y motivados por la compresión de audio, Croisier, Esteban y Garland [37] introdujeron un filtro invertible que descomponía una señal discreta $(f[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ en dos señales de longitud mitad a partir de las cuales podía recomponerse la señal original (son los filtros espejo-conjugados que se definirán más adelante en esta sección). Se puede ver que todo análisis multirresolución tiene asociado un filtro de este tipo y dos funciones, la denominada *función de escala*, φ , asociada al análisis multirresolución (del mismo modo que el conjunto $\{\psi_{j,k} := 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base del espacio de detalles a escala j , el conjunto $\{\varphi_{j,k} := 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base del espacio de aproximación a escala j) y una wavelet (puesto que dicha wavelet proviene de un análisis multirresolución, se la denomina *MRA-wavelet*). Más aún, el algoritmo en cascada descrito por Mallat [Teorema 13] para el cálculo de la transformada wavelet multirresolución hace uso de dichos filtros en sustitución de las propias función de escala y MRA-wavelet.

La función de escala

La Propiedad 6 de la Definición 2 implica la existencia de una función de escala asociada al análisis multirresolución. Dicha función se define como:

Definición 3 *Dado un análisis multirresolución $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, una función φ se denomina una función de escala asociada al análisis multirresolución $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ si la familia $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de \mathcal{V}_0 .*

Una consecuencia inmediata de esta definición es que, por la Propiedad 3 de la Definición 2, la familia $\{\varphi_{j,k} := 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de

$\mathcal{V}_j, \forall j \in \mathbb{Z}$.

El siguiente resultado [103, Theorem 7.1] permite calcular φ (más concretamente su transformada de Fourier) a partir de la función θ presente en la Propiedad 6 de la Definición 2 de análisis multirresolución.

Teorema 4 *Sea $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ un análisis multirresolución. La función φ cuya transformada de Fourier es*

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2}}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

es una función de escala asociada a $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. En particular, si $\{\theta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal, se verifica que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$ y, por tanto, $\varphi \equiv \theta$.

Gracias a φ se puede calcular la aproximación de f a escala j , ya que ésta coincide con la proyección ortogonal de f sobre \mathcal{V}_j , $P_{\mathcal{V}_j}f$. Puesto que $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de \mathcal{V}_j ,

$$P_{\mathcal{V}_j}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, los productos internos

$$s_j[k] = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

proporcionan una aproximación a la función f a escala j . Estos coeficientes se pueden reescribir como una convolución:

$$s_j[k] = \int_{\mathbb{R}} f(t) 2^{\frac{j}{2}} \bar{\varphi}(2^j t - k) dt = (f * \varphi_j^*)[2^{-j}k], \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

con $\varphi_j^* = 2^{\frac{j}{2}} \bar{\varphi}(2^j \cdot)$. La energía de la transformada de Fourier de la función φ está típicamente concentrada en el intervalo $[-\pi, \pi]$, por lo que la energía de la función φ_j^* está principalmente concentrada en el intervalo $[-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi]$, esto es, los coeficientes $(s_j[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ son un filtro paso-bajo de la función f muestreada a intervalos de longitud 2^j .

Ejemplos:

(a) Aproximación constante a trozos.

El ejemplo más sencillo de análisis multirresolución viene dado por los subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ definidos por

$$\mathcal{V}_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ es constante en el intervalo } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)), \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

La aproximación a $f \in L^2(\mathbb{R})$ es la función constante a trozos que en cada intervalo $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ tiene el valor medio de f en dicho intervalo. Esta familia de

subespacios verifica todas las propiedades de la Definición 2, siendo $\theta \equiv \chi_{[0,1]}$ la función característica del intervalo $[0, 1)$. Como la base $\{\chi_{[k,k+1)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal, se verifica que $\varphi \equiv \theta \equiv \chi_{[0,1)}$, la cual es más conocida como la función de escala de Haar.

(b) **Aproximación lineal a trozos.**

Continuando el camino marcado en el ejemplo anterior, se puede dar un nuevo análisis multirresolución definiendo

$$\mathcal{V}_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ es lineal en el intervalo } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)), \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

En este caso, la base de Riesz vendrá dada por la función

$$\theta(t) = \begin{cases} t+1 & , \text{ si } -1 \leq t < 0 \\ 1-t & , \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}.$$

La familia $\{\theta(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ no es ortonormal. De acuerdo con el Teorema 4, la función de escala (su transformada de Fourier) es de la forma

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2}} = \frac{4\sqrt{3} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2 \sqrt{1 + 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(c) **Aproximación de Shannon.**

Shannon propuso un análisis multirresolución basado en funciones limitadas en frecuencias, definiendo

$$\mathcal{V}_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{sup}(\hat{f}) \subset [-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi]\}.$$

Una base de Riesz ortonormal para \mathcal{V}_0 es $\{\text{sinc}(\cdot - k) = \frac{\sin(\pi(\cdot - k))}{\pi(\cdot - k)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, por lo que $\varphi \equiv \theta \equiv \text{sinc}$.

El filtro espejo-conjugado

Un análisis multirresolución está totalmente caracterizado por su correspondiente función de escala φ , ya que a partir de ella se pueden generar los subespacios \mathcal{V}_j (gracias a las Propiedades 3 y 6 de la Definición 2). A su vez, dicha función de escala tiene asociado un único filtro discreto.

Según la Propiedad 2 de la Definición 2, $\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$. Particularizando en el caso de $j=-1$, $\mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_0$. Se tiene que $\varphi \in \mathcal{V}_0$, y por la Propiedad 3 de la Definición

2, $\varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right) \in \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_0$. Puesto que $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de \mathcal{V}_0 , ha de verificarse la llamada *ecuación de escala*:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \varphi(t - k), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

donde

$$h[k] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right), \varphi(\cdot - k) \right\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Equivalentemente, su correspondiente ecuación en frecuencias es

$$\hat{\varphi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \hat{\varphi}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

con $\hat{h}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{-ik\omega}$ denominada *función de transferencia*.

Definición 5 Dada una función de escala, φ , asociada a un análisis multirresolución, $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, se define el filtro espejo-conjugado asociado a φ como la sucesión de números complejos $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ que verifica (1.6).

Mallat y Meyer [102, 112] mostraron la relación que existe entre las funciones de escala y los filtros espejo-conjugados, la cual se recoge en el siguiente resultado [103, Theorem 7.2].

Teorema 6 Sea φ una función de escala integrable. La serie de Fourier de $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, $\hat{h}(\omega)$, satisface:

1. $|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2, \quad \omega \in \mathbb{R};$
2. $\hat{h}(0) = \sqrt{2}.$

Recíprocamente, si $\hat{h}(\omega)$ es 2π -periódica y continuamente diferenciable en un entorno de $\omega = 0$, satisface 1, 2 y, además,

$$\inf_{\omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |\hat{h}(\omega)| > 0,$$

entonces

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \hat{\varphi}(0), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

es la transformada de Fourier de una función de escala $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$.

Recordemos que un filtro discreto, $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, se denomina *espejo-conjugado* si su función de transferencia, $\hat{h}(\omega)$, verifica la propiedad 1 del teorema anterior.

Ejemplos:

(a) **Aproximación constante a trozos.**

Se parte de $\varphi \equiv \chi_{[0,1]}$. Como $h[k] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right), \varphi(\cdot - k) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{[0,2)}, \chi_{[k,k+1)} \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, se concluye que

$$h[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & , \text{ si } k \in \{0, 1\} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} .$$

(b) **Aproximación lineal a trozos.**

En este caso no se conoce una expresión analítica para la función de escala φ , sólo se conoce su transformada de Fourier, $\hat{\varphi}$, por lo que se puede calcular la función de transferencia, $\hat{h}(\omega)$, en vez del filtro discreto $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$:

Se sabe que $\hat{\varphi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \hat{\varphi}(\omega)$. Despejando $\hat{h}(\omega)$ y conocida

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{4\sqrt{3} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2 \sqrt{1 + 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}} ,$$

se tiene que

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1 + 2 \cos^2(\omega)}} \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \omega \in \mathbb{R} .$$

(c) **Aproximación de Shannon.**

Para este análisis multirresolución se tiene que $\varphi \equiv \text{sinc}$, es decir, $\hat{\varphi} \equiv \chi_{[-\pi, \pi]}$, lo que implica $\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \chi_{[-2\pi, 2\pi]}$. Como $\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$:

- Si $\omega \in [-\pi, \pi]$, es decir, $\frac{\omega}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se tiene que $1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Por tanto, $\hat{h}(\omega) = \sqrt{2}$, para $\omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Si $\omega \in [-2\pi, 2\pi] \setminus [-\pi, \pi]$, $0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Por tanto, $\hat{h}(\omega) = 0$, para $\omega \in [-\pi, \pi] \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Con todo esto, se concluye (nótese que $\hat{h}(\omega)$ es una función 2π -periódica) que

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi] .$$

Además, se sabe que

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(\omega) e^{ik\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} e^{ik\omega} d\omega, \quad k \in \mathbb{Z},$$

por lo que finalmente se obtiene

$$h[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & , \text{ si } k = 0 \\ 0 & , \text{ si } k \text{ par, } k \neq 0 \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{k\pi} & , \text{ si } k \text{ impar} \end{cases} .$$

La wavelet

Como se mencionó anteriormente, los j -ésimos coeficientes wavelet de una función f se pueden interpretar como los detalles de dicha función a escala j , o equivalentemente, como los detalles que permiten el paso entre las aproximaciones de f a escalas j y $j + 1$, las cuales no son más que las proyecciones ortogonales de la función f sobre los subespacios \mathcal{V}_j y \mathcal{V}_{j+1} . Se sabe que $\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1}$ (Propiedad 2 de la Definición 2). Se denota por \mathcal{W}_j al complemento ortogonal de \mathcal{V}_j en \mathcal{V}_{j+1} , esto es,

$$\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j = \bigoplus_{k=-\infty}^j \mathcal{W}_k, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

En particular,

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{W}_j.$$

En consecuencia, la proyección ortogonal de f sobre \mathcal{V}_{j+1} puede descomponerse en la suma de las proyecciones de f sobre \mathcal{V}_j y \mathcal{W}_j , es decir,

$$P_{\mathcal{V}_{j+1}} f = P_{\mathcal{V}_j} f + P_{\mathcal{W}_j} f, \quad j \in \mathbb{Z},$$

por lo que $P_{\mathcal{W}_j} f$ son los detalles que se añaden o eliminan en el paso entre las escalas j y $j + 1$. El siguiente teorema [103, Theorem 7.3] [102, 112] prueba que puede construirse una base ortonormal de \mathcal{W}_j mediante traslaciones y dilataciones de una wavelet ψ a definir.

Teorema 7 *Sea ϕ una función de escala y $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ su correspondiente filtro espejo-conjugado. Sea ψ la función cuya transformada de Fourier es*

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

con $\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}(\omega + \pi)$. Entonces, la familia $\{\psi_{j,k} := 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de \mathcal{W}_j , $\forall j \in \mathbb{Z}$, y, en consecuencia, $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

En la demostración del teorema se muestra que $\hat{g}(\omega)$ es la serie de Fourier del filtro discreto definido por $g[k] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{\cdot}{2}\right), \varphi(\cdot - k) \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, cuyas componentes son los coeficientes de la descomposición en serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g[k] \varphi(t - k), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Dicha expresión es conocida como la *ecuación wavelet*, y su correspondiente expresión en frecuencias viene dada en (1.9). Además, sin más que calcular los coeficientes de Fourier de $\hat{g}(\omega)$, se observa que

$$g[k] = (-1)^{k-1} h[1 - k], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.11)$$

Este filtro discreto, junto al filtro espejo-conjugado $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ (realmente se conoce como filtro espejo-conjugado al par de filtros $((h[k])_{k \in \mathbb{Z}}, (g[k])_{k \in \mathbb{Z}})$, pero debido a la definición de $(g[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ puede omitirse el segundo filtro), es básico a la hora de realizar un cálculo de la transformada wavelet multirresolución de una función f de modo rápido y efectivo.

La proyección ortogonal de una función f sobre el espacio \mathcal{W}_j viene dada por la expresión en la base wavelet

$$P_{\mathcal{W}_j} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

por lo que la expresión de f en la base de "detalles multirresolución", $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$, viene dada por la agrupación de todos los detalles a diferentes escalas,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_{\mathcal{W}_j} f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Ejemplos:

(a) Aproximación constante a trozos.

Se calcula la wavelet de Haar mediante la ecuación wavelet (1.10). Se sabe que $\varphi \equiv \chi_{[0,1]}$ y $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}} \equiv (\dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}_{[k=0]}, \frac{1}{\sqrt{2}}_{[k=1]}, 0, \dots)$, por lo que se tiene que

$$g[k] = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & , \text{ si } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & , \text{ si } k = 1 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(t-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{[0,1)}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{[-1,0)}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & , \text{ si } t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} .$$

(b) **Aproximación lineal a trozos.**

En este caso se puede calcular la transformada de Fourier de la wavelet ψ . Se sabe

que $\hat{\varphi}(\omega) = \frac{4\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2\sqrt{1+2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}$ y $\hat{h}(\omega) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1+2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1+2\cos^2(\omega)}}\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Todo esto, junto

con la ecuación wavelet en frecuencias (1.9), permite concluir

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{16\sqrt{3}e^{-i\frac{\omega}{2}}}{\omega^2} \sin^4\left(\frac{\omega}{4}\right) \sqrt{\frac{1+2\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{[1+2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)][1+2\cos^2\left(\frac{\omega}{4}\right)]}}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(c) **Aproximación de Shannon.**

Para el cálculo de la wavelet de Shannon se parte de $\hat{\varphi} \equiv \chi_{[-\pi,\pi]}$ y $\hat{h}(\omega) = \sqrt{2}\chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\omega)$. Sabiendo que $\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\hat{h}(\omega+\pi) = \sqrt{2}e^{-i\omega}\chi_{[-\pi,-\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{\pi}{2},\pi]}(\omega)$ (2π -periódica) y $\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{-i\frac{\omega}{2}}\chi_{[-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi]}(\omega)$ se tiene que

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{\psi}(\omega) d\omega = \begin{cases} 1 & , \text{ si } t = \frac{1}{2} \\ \frac{\sin(2\pi(t-\frac{1}{2}))}{\pi(t-\frac{1}{2})} - \frac{\sin(\pi(t-\frac{1}{2}))}{\pi(t-\frac{1}{2})} & , \text{ resto} \end{cases} .$$

Diseño de wavelets

La wavelet de Haar es el ejemplo más simple de wavelet multirresolución, las aproximaciones que genera su correspondiente función de escala son funciones constantes a trozos. Si la función $f \in L^2(\mathbb{R})$ que se desea aproximar posee cierto grado de regularidad, dichas aproximaciones distan mucho de ser óptimas, lo cual lleva a plantearse el uso de bases de funciones con cierta regularidad u otro tipo de propiedades (por ejemplo, Daubechies- p [40], wavelet discreta con p momentos nulos y soporte mínimo [concretamente, de longitud $2p-1$]). De hecho, la selección de la wavelet adecuada debe tener en cuenta tanto el tipo de señal como las propiedades que el análisis desee resaltar.

Una cuestión básica a la hora de seleccionar una wavelet apropiada para el análisis es, dada una señal f , conseguir que la mayor parte de los coeficientes wavelet, $(d_j[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, $j \in \mathbb{Z}$, sean muy pequeños o nulos con el fin de simplificar/acelerar dicho análisis. Para conseguir esto entran en juego varios factores a tener en cuenta, como pueden ser la regularidad de la señal f , el número de momentos nulos de ψ o el tamaño del soporte de ψ .

Observación 8 *Se dice que una función ψ tiene p momentos nulos si*

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0, \quad 0 \leq k < p,$$

esto es, la función ψ es ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual que $p-1$.

Para una función $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, su polinomio de Taylor de grado k es una buena aproximación local. Si $k < p$, una wavelet con p momentos nulos será ortogonal a dicho polinomio de Taylor y, por tanto, dará unos coeficientes wavelet de f con módulo pequeño. A continuación se da un teorema [103, Theorem 7.4] que muestra la relación existente entre el número de momentos nulos de una wavelet ψ con el número de derivadas de $\hat{\psi}(\omega)$ que se anulan en $\omega = 0$ y el número de derivadas de $\hat{h}(\omega)$ que se anulan en $\omega = \pi$.

Teorema 9 *Sea ψ una MRA-wavelet y sea φ su correspondiente función de escala tales que $|\psi|$ y $|\varphi|$ son $O(|1+t^2|^{-\frac{p}{2}-1})$ (esto es, de orden $|1+t^2|^{-\frac{p}{2}-1}$ cuando $|t| \rightarrow \infty$). Son equivalentes:*

- ψ tiene p momentos nulos
- $\hat{\psi}^{(j)}(0) = 0, \quad 0 \leq j < p$
- $\hat{h}^{(j)}(\pi) = 0, \quad 0 \leq j < p$

Otra característica a la hora de seleccionar una wavelet es controlar el tamaño de su soporte, especialmente cuando la regularidad de la señal f no es muy elevada. Si una señal f tiene una singularidad aislada t_0 y ésta está dentro del soporte de $\psi_{j,k}$ puede darse el caso de que $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ tome valores grandes en módulo. Si ψ tiene soporte compacto de tamaño K , a escala j habrá K átomos wavelet $\psi_{j,k}$ que contendrán a t_0 en su soporte (cuyo tamaño es $K2^j$). Puesto que estos coeficientes no podrán anularse por regularidad, se trata de reducir el número de coeficientes de módulo grande mediante la reducción del soporte de ψ . La proposición siguiente [103, Proposition 7.2] relaciona el soporte de φ con los soportes de $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ y ψ .

Proposición 10 *Dada una función de escala, φ , y su correspondiente filtro espejo-conjugado, $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, son equivalentes:*

- φ tiene soporte compacto
- $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ tiene soporte compacto

En este caso, ambos soportes son iguales (si $h[k] \neq 0$, $N_1 \leq k \leq N_2$, entonces $\text{sup}(\varphi) = [N_1, N_2]$). Además, si $\text{sup}(\varphi) = [N_1, N_2]$, entonces $\text{sup}(\psi) = \left[\frac{N_1 - N_2 + 1}{2}, \frac{N_2 - N_1 + 1}{2} \right]$

En un principio, el tamaño del soporte de ψ y el número de momentos nulos que ésta tenga son dos propiedades independientes. Sin embargo, cuando ψ es una wavelet ortonormal, si tiene p momentos nulos, entonces $\text{sup}(\psi)$ tiene tamaño al menos $2p - 1$ (en este caso, las wavelet de Daubechies [40] minimizan el tamaño del soporte frente a un número fijo de momentos nulos). Éste es el contenido del siguiente resultado [103, Theorem 7.5].

Teorema 11 *Un filtro espejo-conjugado real, $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, tal que su correspondiente función de transferencia, $\hat{h}(\omega)$, tenga p ceros en $\omega = \pi$ tiene, al menos, $2p$ componentes no nulas. Los filtros espejo-conjugados de Daubechies tienen exactamente $2p$ componentes no nulas.*

Se debe tratar con este hecho a la hora de seleccionar la wavelet más adecuada. Por ejemplo, si f es una señal con pocas singularidades y muy regular entre ellas, será mejor seleccionar una wavelet que tenga muchos momentos nulos, a pesar de que su soporte aumente. Si, por el contrario, el número de singularidades de f es muy grande, la elección óptima se inclinará más hacia la propiedad de un soporte menor.

La regularidad de la wavelet ψ tiene principalmente un efecto estético en el error introducido en la eliminación de ruido y la cuantificación de los coeficientes wavelet. Al reconstruir una señal dada,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

un error ϵ cometido en $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ introducirá una componente $\epsilon \psi_{j,k}$ en la señal reconstruida. Si ψ es una función regular, $\epsilon \psi_{j,k}$ será un error regular, lo que hará que, dada una señal f regular, el error cometido en la reconstrucción sea menos visible que si se tratase de un error irregular. Un ejemplo de este hecho es la wavelet de Haar, la cual puede llegar a producir reconstrucciones excesivamente “artificiales”.

Ejemplos:

(c) Wavelet de Shannon.

Se sabe que esta wavelet es una función de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Además, $\hat{\psi}(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}} \chi_{[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]}(\omega)$. Puesto que $\hat{\psi}(\omega)$ se anula en un entorno de $\omega = 0$, se tiene que $\hat{\psi}^{(j)}(0) = 0$, $j \geq 0$, por lo que, por el Teorema 9, ψ tiene infinitos momentos

nulos. Más aún, como $\hat{\psi}(\omega)$ es de soporte compacto, se sabe que $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, aunque tiene un decaimiento asintótico lento ($|\psi|$ es $O(|t|^{-1})$, es decir, de orden $|t|^{-1}$ cuando $|t| \rightarrow \infty$).

(d) **Wavelet de Meyer.**

La wavelet de Meyer es una función suave de banda limitada en frecuencias, lo cual da un rápido decaimiento asintótico. Esta wavelet se construye a partir del filtro espejo-conjugado cuya función de transferencia viene dada por

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2} & , \text{ si } \omega \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \\ 0 & , \text{ si } \omega \in [-\pi, -\frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi] \end{cases} .$$

Además, se tiene que imponer que

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2, \quad \omega \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right],$$

y para que \hat{h} sea de clase \mathcal{C}^n en los puntos $\omega = \frac{\pi}{3}$ y $\omega = \frac{2\pi}{3}$, las n primeras derivadas de $\hat{h}(\omega)$ deben anularse en dichos puntos (se pueden construir funciones que sean de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$). La correspondiente función de escala verifica

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) & , \text{ si } |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0 & , \text{ si } \omega > \frac{4\pi}{3} \end{cases} ,$$

es decir, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ puesto que su transformada de Fourier tiene soporte compacto. Más aún, la correspondiente wavelet (de Meyer) satisface

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } |\omega| \leq \frac{2\pi}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) & , \text{ si } \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\omega}{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) & , \text{ si } \frac{4\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & , \text{ si } \omega > \frac{8\pi}{3} \end{cases} ,$$

y, por tanto, también es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, por ser de banda-limitada en frecuencias. Puesto que $\hat{\psi}(\omega)$ se anula en un entorno de $\omega = 0$, la wavelet de Meyer tiene infinitos momentos nulos, pero, a diferencia de la wavelet de Shannon, el decaimiento puede no ser tan lento ($|\psi|$ es $O(1 + |t|)^{-n-1}$).

(e) **Wavelets de Daubechies.**

Las wavelets de Daubechies (algunos ejemplos en la Figura 1.3) se caracterizan por

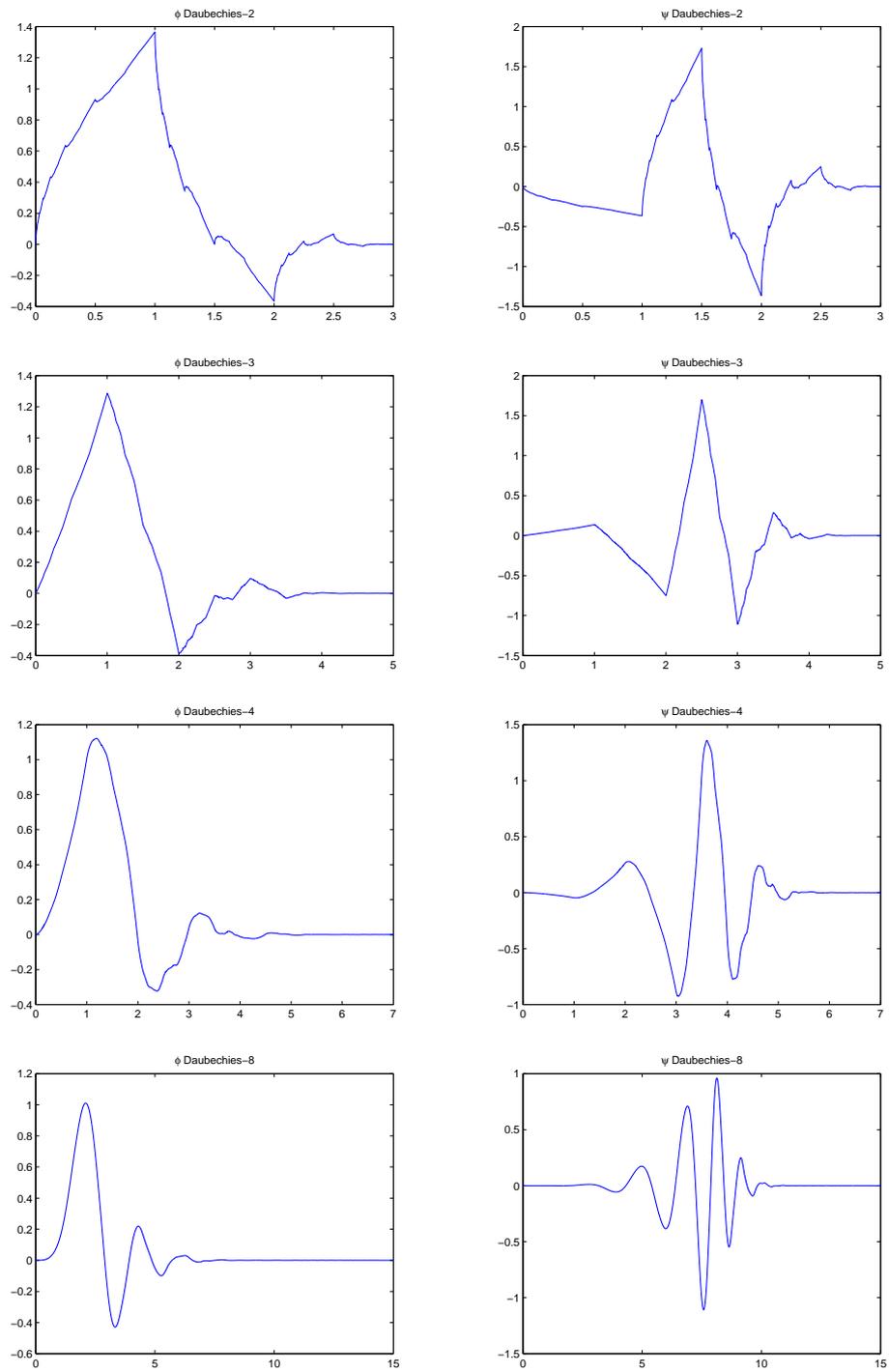


Figura 1.3: Funciones de escala y wavelets de Daubechies- p para $p = 2, 3, 4$ y 8

ser óptimas en el sentido de minimizar el tamaño del soporte de la wavelet frente a un número fijo de momentos nulos. La Proposición 10 muestra que wavelets de soporte compacto están relacionadas con filtros espejo-conjugados de soporte compacto.

Observación 12 *Sea L un operador dado por*

$$Lf[k] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} f[p] h[k-p] = (f * h)[k], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se dice que L es un operador causal si, $\forall f$, $Lf[k]$ depende sólo de $f[p]$ para $p \leq k$, esto es, $h[k] = 0$ si $k < 0$.

Se considera un filtro espejo-conjugado de soporte compacto, real y causal, por lo que

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] e^{-ik\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Según el Teorema 9, para que ψ tenga p momentos nulos, $\hat{h}(\omega)$ debe tener un cero de orden p en $\omega = \pi$, es decir,

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{2} \right)^p R(e^{-i\omega}), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

con $R(z)$ un polinomio de grado m , el cual se busca con m mínimo y verificando

- $|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2, \quad \omega \in \mathbb{R};$
- $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$ (si, y sólo si, $R(1) = 1$).

Como resultado, $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ tiene $m + p + 1$ componentes no nulas. El Teorema 11 indica que $m \geq p - 1$. En el caso de las wavelets de Daubechies puede darse $m = p - 1$ eligiendo correctamente el polinomio $R(z)$. En tal caso, $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ tiene $2p$ componentes no nulas, y si $h[k] \neq 0, 0 \leq k \leq 2p-1$, esto es, $\text{sup}(\varphi) = [0, 2p-1]$, entonces $\text{sup}(\psi) = \left[\frac{-2p+1+1}{2}, \frac{2p-1+1}{2} \right] = [1-p, p]$.

La transformada wavelet multirresolución rápida

Los coeficientes wavelet multirresolución de una señal dada se pueden calcular mediante un algoritmo en forma de pirámide que involucra los filtros $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ y $(g[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ junto a los coeficientes de detalles y escala correspondientes en cada caso.

Se sabe que $\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j$, por lo que, dada una señal f ,

$$P_{\mathcal{V}_{j+1}} f = P_{\mathcal{V}_j} f + P_{\mathcal{W}_j} f.$$

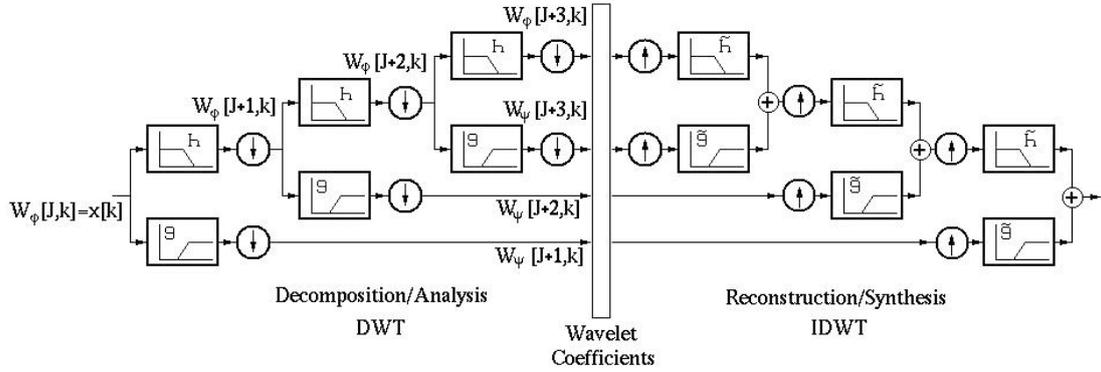


Figura 1.4: Esquema de descomposición y síntesis de la transformada wavelet multiresolución, siendo h y g los filtros de descomposición y \tilde{h} y \tilde{g} los filtros de síntesis.

Como $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son bases ortonormales de los subespacios \mathcal{V}_j y \mathcal{W}_j , respectivamente, las proyecciones ortogonales de f sobre dichos subespacios, para $j \in \mathbb{Z}$, vienen determinadas por los coeficientes

$$s_j[k] = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle, \quad d_j[k] = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notación:

- $\check{x}[k] = x[-k], \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\tilde{x}[k] = \begin{cases} x[p] & , \text{ si } k = 2p \\ 0 & , \text{ si } k = 2p + 1 \end{cases}$

El siguiente teorema [100, 101] muestra el algoritmo rápido, descrito por Mallat, de descomposición y síntesis de coeficientes de escala y detalle en función de la escala anterior o posterior, según corresponda, mediante convolución.

Teorema 13 *Para calcular los coeficientes de escala y detalle a escala j en función de los correspondientes coeficientes de escala a escala $j + 1$ se tiene*

$$s_j[k] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} h[p - 2k] s_{j+1}[p] = (s_{j+1} * \check{h})[2k], \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

$$d_j[k] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} g[p - 2k] s_{j+1}[p] = (s_{j+1} * \check{g})[2k], \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Para calcular los coeficientes de escala a escala $j + 1$ en función de los correspondientes coeficientes de escala y detalle a escala j se tiene

$$s_{j+1}[k] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} h[k - 2p] s_j[p] + \sum_{p \in \mathbb{Z}} g[k - 2p] d_j[p] = (\tilde{s}_j * h)[k] + (\tilde{d}_j * g)[k], \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Capítulo 2

Teoría espectral de los operadores de traslación y dilatación

Como se ha visto en el Capítulo 1, existen dos operadores unitarios de $L^2(\mathbb{R})$ que juegan un papel fundamental en la teoría de wavelets: el operador de *dilatación* por $s > 0$, D_s , y el operador de *traslación* por $u \in \mathbb{R}$, T_u , definidos por:

$$\begin{aligned} [D_s f] &:= s^{\frac{1}{2}} f(s \cdot) \\ [T_u f] &:= f(\cdot - u) \end{aligned}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.1)$$

Más concretamente, las bases wavelet se construyen mediante la aplicación de dilataciones y traslaciones sobre una función (padre) apropiada. Ya que la corriente principal del desarrollo que lleva a las wavelet proviene del análisis de Fourier, las transformada y serie de Fourier están involucradas en la mayoría de las técnicas utilizadas en su estudio. Una razón clara que motiva este hecho es que las funciones exponenciales complejas son autofunciones del operador de derivación y, por tanto, la transformación de Fourier da lugar a una representación espectral del grupo de traslaciones $\{T_u : u \in \mathbb{R}\}$ en $L^2(\mathbb{R})$.

En la teoría de wavelets discretas, a la hora de construir una base ortonormal $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ a partir de una wavelet ψ , los parámetros s y u toman los valores fijos $s = 2$ y $u = 1$, y se consideran únicamente potencias enteras de los operadores $D := D_2$ y $T := T_1$, ya que $\psi_{j,k} := D^j T^k \psi$, $j, k \in \mathbb{Z}$. El espectro de los operadores D y T coincide con la circunferencia unidad, $\partial\mathbb{D}$, del plano complejo \mathbb{C} , y tiene multiplicidad uniforme numerable. Por tanto, la representación espectral funcional de ambos operadores se define en términos de integrales directas de la forma $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$, cuyos elementos son funciones \mathcal{H} -valuadas sobre $\partial\mathbb{D}$, siendo \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable auxiliar [20, 84, 152]. Las integrales directas ya han sido consideradas en la teoría de wavelets (ver [119] y las referencias allí citadas).

En este Capítulo, concretamente en la Sección 2.1, se desarrollan técnicas que permiten la obtención de modelos espectrales (Proposiciones 14 y 16) y de tipo “shift”

(Proposiciones 15 y 17) para los dos operadores D y T en función de dos conjuntos de bases arbitrarias de $L^2([0, 1])$ y $L^2([-2, -1]) \cup L^2([1, 2])$, las cuales se extienden a $L^2(\mathbb{R})$ mediante traslaciones y dilataciones, respectivamente. Además, en la Proposición 19 se define un modelo espectral adicional para el operador T basado en la transformada de Fourier habitual. La relación de estas representaciones espectrales con la teoría de wavelets ortonormales y multirresolución se establece mediante la conexión existente entre subespacios ambulantes e invariantes y funciones operador-valuadas de rango y rígidas [77, 80, 95, 141]. Dichos conceptos, y la relación entre ellos (Lemas 22, 25 y 27), se recopilan en la Sección 2.2.

Las demostraciones de los resultados de este capítulo pueden encontrarse en los trabajos de Gómez-Cubillo y Suchanecki [68] y Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [71].

2.1. Modelos espectrales y “shift” de los operadores de traslación y dilatación

Sea \mathbb{D} el disco unidad sobre el plano complejo \mathbb{C} y sea $\partial\mathbb{D}$ su frontera:

$$\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \quad \partial\mathbb{D} := \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\}.$$

En $\partial\mathbb{D}$ se interpreta la medibilidad en el sentido de Borel y se considera la medida de Lebesgue normalizada $\frac{d\omega}{2\pi}$. Dado \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable, sea $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ el conjunto de todas las funciones medibles $\mathbf{v} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \|\mathbf{v}(\omega)\|_{\mathcal{H}}^2 \frac{d\omega}{2\pi} < \infty \quad (\text{módulo conjuntos de medida nula}).$$

Las funciones de $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ forman un espacio de Hilbert con la definición punto a punto de las operaciones lineales y el producto interno dado por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\partial\mathbb{D}} \left(\mathbf{u}(\omega), \mathbf{v}(\omega) \right)_{\mathcal{H}} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H}).$$

El espacio $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ es un caso particular de integral directa de espacios de Hilbert (para un campo constante de espacios de Hilbert $\{\mathcal{H}_\omega\}$ con $\mathcal{H}_\omega = \mathcal{H}$, $\forall\omega$). La teoría de integrales directas es debida originalmente a Von Neumann [152] y es la base de los modelos espectrales para operadores [20, Chapter 7].

Dado $s > 0$ se define el operador de dilatación $D_s : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ como

$$[D_s f](x) := s^{\frac{1}{2}} f(sx), \quad x \in \mathbb{R}, f \in L^2(\mathbb{R}).$$

D_s es unitario en $L^2(\mathbb{R})$ y, por tanto, su espectro está incluido en $\partial\mathbb{D}$. Para poder dar una representación espectral del operador D_s se debe encontrar una integral directa

de espacios de Hilbert, $\int_{\partial\mathbb{D}}^{\oplus} \mathcal{H}_\omega d\mu(\omega)$, y una transformación unitaria, \mathcal{G} , de $L^2(\mathbb{R})$ en $\int_{\partial\mathbb{D}}^{\oplus} \mathcal{H}_\omega d\mu(\omega)$ tal que

$$[\mathcal{G}D_s f](\omega) = \omega \cdot [\mathcal{G}f](\omega), \quad \text{para casi todo } \omega \in \partial\mathbb{D}, f \in L^2(\mathbb{R}),$$

esto es, el operador $\mathcal{G}D_s\mathcal{G}$ es el operador “producto por ω ” en la integral directa:

$$[\mathcal{G}D_s\mathcal{G}^{-1}\mathbf{f}](\omega) = \omega \cdot \mathbf{f}(\omega), \quad \text{para casi todo } \omega \in \partial\mathbb{D}, \mathbf{f} \in \int_{\partial\mathbb{D}}^{\oplus} \mathcal{H}_\omega \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Para ello, sea $\{K_{\pm,j}^{(0)}(x)\}_{j \in \mathbb{J}}$ una base ortonormal de $L^2([1, r]) \cup L^2([-r, -1])$, donde \mathbb{J} es un conjunto numerable de índices (habitualmente $\mathbb{J} = \mathbb{N}$ o $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$). Es evidente, para cada $m \in \mathbb{Z}$, que la familia dilatada

$$\{K_{\pm,j}^{(m)}(x) := D_s^m K_{\pm,j}^{(0)}(x) = s^{\frac{m}{2}} K_{\pm,j}^{(0)}(s^m x)\}_{j \in \mathbb{J}} \quad (2.2)$$

es una base ortonormal de $L^2([r^{-m}, r^{-m+1}]) \cup L^2([-r^{-m+1}, -r^{-m}])$. Por tanto, $\{K_{\pm,j}^{(m)}(x)\}_{j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, sea

$$\tilde{f}_{\pm,j}^{(m)} := \langle f, K_{\pm,j}^{(m)} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\pm r^{-m}}^{\pm r^{-m+1}} f(x) \overline{K_{\pm,j}^{(m)}(x)} dx, \quad (j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}). \quad (2.3)$$

El siguiente resultado describe un modelo espectral funcional para el operador de dilatación D_s , siendo $l^2(\mathbb{J})$ el espacio Hilbert de sucesiones de números complejos, $(c_j)_{j \in \mathbb{J}}$, que verifican $\|(c_j)_{j \in \mathbb{J}}\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{J}} |c_j|^2 < \infty$, y siendo $\{u_{l,j}\}_{j \in \mathbb{J}}$ una base ortonormal de $l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})$, donde \oplus denota la suma ortogonal.

Proposición 14 *El operador \mathcal{G} definido por*

$$\mathcal{G} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \int_{\partial\mathbb{D}}^{\oplus} [l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})] \frac{d\omega}{2\pi} = L^2(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J}))$$

$$f \quad \mapsto \quad \tilde{\mathbf{f}} := \bigoplus_{l=\pm} \bigoplus_{j \in \mathbb{J}} \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} \omega^m \tilde{f}_{l,j}^{(m)} \right] u_{l,j}$$

determina un modelo espectral funcional para el operador de dilatación D_s , es decir, \mathcal{G} es unitario y satisface

$$[\mathcal{G}D_s f](\omega) = \omega \cdot [\mathcal{G}f](\omega), \quad \text{para c.t. } \omega \in \partial\mathbb{D} \text{ y } f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.4)$$

Demostración: \mathcal{G} es unitario ya que $\{K_{l,j}^{(m)}(x)\}_{l=\pm, j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y $\|f\|^2 = \|\tilde{\mathbf{f}}\|^2 = \sum_{l,j,m} |\tilde{f}_{l,j}^{(m)}|^2$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$. Más aún, \mathcal{G} satisface (2.4) porque $[\widetilde{D_s f}]_{l,j}^{(m)} = \tilde{f}_{l,j}^{(m-1)}$, $\forall l = \pm, j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}$. \square

La siguiente representación de traslación bilateral de D_s es una consecuencia directa de la Proposición 14. En este caso, $l^2(\mathbb{Z}, l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J}))$ denota el espacio Hilbert de sucesiones bilaterales $(\mathbf{f}^{(m)})_{m \in \mathbb{Z}}$ tales que $\mathbf{f}^{(m)} \in l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})$, $m \in \mathbb{Z}$, y $\sum_m \|\mathbf{f}^{(m)}\|^2 < \infty$.

Corolario 15 *El operador $\mathcal{G}_{s'}$ definido por*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{s'} : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}; l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})) \\ f &\mapsto \left(\bigoplus_{l=\pm} \bigoplus_{j \in \mathbb{J}} \tilde{f}_{l,j}^{(m)} u_{l,j} \right)_{m \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

determina un modelo "shift" del operador de dilatación D_s , esto es, $\mathcal{G}_{s'}$ es unitario y satisface

$$[\mathcal{G}_{s'} D_s \mathcal{G}_{s'}^{-1}](\mathbf{f}^{(m)})_{m \in \mathbb{Z}} = (\mathbf{f}^{(m-1)})_{m \in \mathbb{Z}}, \quad (\mathbf{f}^{(m)})_{m \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}, l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})). \quad (2.5)$$

De un modo similar, para $u \in \mathbb{R}$ y el operador de traslación, T_u , definido por

$$[T_u f](x) := f(x - u), \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

dada una base ortonormal $\{L_i^{(0)}(x)\}_{i \in \mathbb{I}}$ de $L^2([0, 1))$, con \mathbb{I} un conjunto numerable de índices, el conjunto

$$\{L_i^{(n)}(x) := L_i^{(0)}(x - un)\}_{i \in \mathbb{I}} \quad (2.6)$$

es una base ortonormal de $L^2[tn, t(n+1))$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, sea

$$\hat{f}_i^{(n)} := \langle f, L_i^{(n)} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{un}^{u(n+1)} f(x) \overline{L_i^{(n)}(x)} dx, \quad i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.7)$$

y sea $\{u_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ una base ortonormal de $l^2(\mathbb{I})$.

Proposición 16 *El operador \mathcal{F} definido por*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \int_{\partial \mathbb{D}}^{\oplus} l^2(\mathbb{I}) \frac{d\omega}{2\pi} = L^2(\partial \mathbb{D}, l^2(\mathbb{I}))$$

$$f \mapsto \hat{\mathbf{f}} := \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega^n \hat{f}_i^{(n)} \right] u_i$$

determina un modelo espectral funcional para el operador de traslación T_u , esto es, \mathcal{F} es unitario y satisface

$$[\mathcal{F} T_u f](\omega) = \omega \cdot [\mathcal{F} f](\omega), \quad \text{para c.t. } \omega \in \partial \mathbb{D} \text{ y } f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.8)$$

Demostración: El operador \mathcal{F} es unitario ya que $\{L_i^{(n)}(x)\}_{i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y $\|f\|^2 = \|\hat{\mathbf{f}}\|^2 = \sum_{i,n} |\hat{f}_i^{(n)}|^2$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$. Más aún, \mathcal{F} satisface (2.8) puesto que $\widehat{[T_u f]}_i^{(n)} = \hat{f}_i^{(n-1)}$, $\forall i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}$. \square

El siguiente resultado no es más que la consecuencia directa de la proposición anterior, el cual da un modelo "shift" para el operador de traslación T_u , de modo similar al caso ya visto con el operador de dilatación.

Corolario 17 *El operador $\mathcal{F}_{s'}$ definido por*

$$\mathcal{F}_{s'} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}; l^2(\mathbb{J}))$$

$$f \longmapsto \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{I}} \hat{f}_i^{(n)} u_i \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

determina un modelo “shift” del operador de traslación T_u , esto es, $\mathcal{F}_{s'}$ es unitario y satisface

$$[\mathcal{F}_{s'} T_u \mathcal{F}_{s'}^{-1}](\mathbf{f}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}} = (\mathbf{f}^{(n-1)})_{n \in \mathbb{Z}}, \quad (\mathbf{f}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}, l^2(\mathbb{I})). \quad (2.9)$$

Como $\{K_{l,j}^{(m)}(x)\}_{l=\pm, j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}}$ y $\{L_i^{(n)}(x)\}_{i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}}$ son bases ortonormales de $L^2(\mathbb{R})$, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene, en el sentido de L^2 ,

$$f = \sum_{l,j,m} \tilde{f}_{l,j}^{(m)} K_{l,j}^{(m)} \quad y \quad f = \sum_{i,n} \hat{f}_i^{(n)} L_i^{(n)}. \quad (2.10)$$

El cambio entre ambas expresiones, en las correspondientes bases ortonormales, viene dado por la matriz $(\alpha_{i,n}^{l,j,m})$, definida por

$$\alpha_{i,n}^{l,j,m} := \langle L_i^{(n)}, K_{l,j}^{(m)} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} L_i^{(n)}(x) \overline{K_{l,j}^{(m)}(x)} dx, \quad (2.11)$$

por lo que

$$K_{l,j}^{(m)} = \sum_{i,n} \overline{\alpha_{i,n}^{l,j,m}} L_i^{(n)}, \quad L_i^{(n)} = \sum_{l,j,m} \alpha_{i,n}^{l,j,m} K_{l,j}^{(m)}$$

y

$$\tilde{f}_{l,j}^{(m)} = \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{l,j,m} \hat{f}_i^{(n)}, \quad \hat{f}_i^{(n)} = \sum_{l,j,m} \overline{\alpha_{i,n}^{l,j,m}} \tilde{f}_{l,j}^{(m)}. \quad (2.12)$$

A partir de este punto el desarrollo se centra en los casos $s = 2$ y $u = 1$, esto es, en los operadores

$$D := D_2 \quad y \quad T := T_1.$$

Fijadas las bases $\{K_{l,j}^{(m)}(x)\}_{l=\pm, j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}}$ y $\{L_i^{(n)}(x)\}_{i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, junto a sus respectivos modelos espectrales definidos en las Proposiciones 14 y 16, para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, se denota

$$\mathcal{F}f = \hat{\mathbf{f}} = \{\hat{f}_i^{(n)}\}, \quad \mathcal{G}f = \tilde{\mathbf{f}} = \{\tilde{f}_{l,j}^{(m)}\}.$$

Lema 18 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y sean, dados $p, q \in \mathbb{Z}$,*

$$g := D^p T^q f, \quad h := T^q D^p f.$$

Si $\mathcal{F}f = \{\hat{f}_i^{(n)}\}$, $\mathcal{F}g = \{\hat{g}_i^{(n)}\}$, $\mathcal{F}h = \{\hat{h}_i^{(n)}\}$, $\mathcal{G}f = \{\tilde{f}_{l,j}^{(m)}\}$, $\mathcal{G}g = \{\tilde{g}_{l,j}^{(m)}\}$ y $\mathcal{G}h = \{\tilde{h}_{l,j}^{(m)}\}$, entonces

$$\hat{g}_l^{(k)} = \sum_{s,j,m} \overline{\alpha_{l,k}^{s,j,m}} \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{s,j,m-p} \hat{f}_i^{(n)}, \quad l \in \mathbb{I}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned}\hat{h}_l^{(k)} &= \sum_{s,j,m} \overline{\alpha_{l,k-q}^{s,j,m}} \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{s,j,m-p} \hat{f}_i^{(n)}, \quad l \in \mathbb{I}, k \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{g}_{r,l}^{(k)} &= \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{r,l,k-p} \sum_{s,j,m} \overline{\alpha_{i,n-q}^{s,j,m}} \tilde{f}_{s,j}^{(m)}, \quad r = \pm, l \in \mathbb{J}, k \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{h}_{r,l}^{(k)} &= \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{r,l,k} \sum_{s,j,m} \overline{\alpha_{i,n-q}^{s,j,m+p}} \tilde{f}_{s,j}^{(m)}, \quad r = \pm, l \in \mathbb{J}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Demostración: La demostración de este resultado no es más que la consecuencia directa de realizar los cambios de expresión correspondientes en las expresiones (2.12), teniendo en cuenta las propiedades $[\widehat{D_s f}]_{l,j}^{(m)} = \hat{f}_{l,j}^{(m-1)}$ y $[\widehat{T_u f}]_i^{(n)} = \hat{f}_i^{(n-1)}$ de las Proposiciones 14 y 16. \square

Por último, se da otro modelo espectral funcional para el caso particular del operador $T = T_1$ en términos de la transformada de Fourier definida en $L^2(\mathbb{R})$ para una función f por

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Proposición 19 *Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ una base ortonormal de $l^2(\mathbb{Z})$. El operador \mathcal{F}_* definido por*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_* : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{Z})) \\ f &\longmapsto \hat{\mathbf{f}}_* := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k(\omega) u_k,\end{aligned} \quad (2.14)$$

donde, si $\omega = e^{2\pi i \theta}$,

$$\hat{f}_k(\omega) = \hat{f}_k(e^{2\pi i \theta}) := \overline{\hat{f}(\theta + k)}, \quad \text{para casi todo } \theta \in [0, 1) \text{ y } k \in \mathbb{Z}, \quad (2.15)$$

determina un modelo espectral funcional para el operador de traslación T .

Demostración: El operador \mathcal{F}_* es unitario ya que, para $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\hat{f}(\theta + k)|^2 d\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\partial\mathbb{D}} |\hat{f}_k(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \|\hat{\mathbf{f}}_*\|^2.$$

Más aún, si $\omega = e^{2\pi i \theta}$, entonces

$$[\widehat{Tf}]_k(\omega) = \overline{[\widehat{Tf}](\theta + k)} = \overline{e^{-2\pi i(\theta+k)} \hat{f}(\theta + k)} = \omega \cdot \hat{f}_k(\omega),$$

por tanto

$$[\mathcal{F}_* T f](\omega) = \omega \cdot [\mathcal{F}_* f](\omega), \quad \text{para casi todo } \omega \in \partial\mathbb{D} \text{ y } f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.16)$$

\square

2.2. Subespacios ambulantes e invariantes. Funciones rígidas y de rango

Sean \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable y $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ el espacio de operadores lineales acotados en \mathcal{H} . Se considera el espacio funcional $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ definido en la sección anterior y su subespacio $\mathfrak{C} \subset L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ formado por todas las funciones constantes, es decir, $\mathfrak{C} := \{\mathbf{v} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathcal{H} : \exists v \in \mathcal{H} \text{ verificando } \mathbf{v}(\omega) = v, \text{ para c.t. } \omega \in \partial\mathbb{D}\}$. Se denota por M el operador “multiplicación por ω ” en $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$, es decir,

$$[M\mathbf{v}](\omega) := \omega \cdot \mathbf{v}(\omega), \quad \mathbf{v} \in L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H}), \omega \in \partial\mathbb{D}. \quad (2.17)$$

El operador M es unitario y verifica $M^{-1} = M^*$, esto es, $[M^{-1}\mathbf{v}](\omega) = \omega^* \cdot \mathbf{v}(\omega)$ (siendo ω^* el conjugado de ω). El operador M de $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ es el modelo funcional de la representación de traslación bilateral en $l^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ dada por (ver [77] para más detalles)

$$l^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}) : (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (v_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

En primer lugar se dan las definiciones de subespacio ambulante y función rígida.

Definición 20 *Un subespacio de un espacio de Hilbert se denomina subespacio ambulante para un operador U si es ortogonal a todas sus imágenes por potencias (positivas) de U .*

Si U es una isometría y \mathfrak{M} es un subespacio ambulante, se verifica que $U^m\mathfrak{M} \perp U^n\mathfrak{M}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Si U es unitario, $U^m\mathfrak{M} \perp U^n\mathfrak{M}$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$.

Definición 21 *Una función operador-valuada, $A : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) / \omega \mapsto A(\omega)$, débilmente medible¹ se denomina una función rígida si $A(\omega)$ es una isometría parcial² en \mathcal{H} con el mismo espacio inicial para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$.*

Ambos conceptos, subespacio ambulante y función rígida, están relacionados, tal y como muestra el lema siguiente [77, Lemma 5].

Lema 22 (Halmos) *Un subespacio \mathfrak{M} de $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ es un subespacio ambulante del operador M si, y sólo si, existe una función rígida A tal que $\mathfrak{M} = A\mathfrak{C}$. El subespacio \mathfrak{M} determina de forma única la función A , salvo factores por la derecha constantes e iguales a una isometría parcial.*

Por otro lado, a continuación se dan las definiciones de subespacio invariante y función de rango.

¹Se dice que una función $A : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es débilmente medible si el producto escalar $\langle A(\omega)h, g \rangle$ es una función medible Borel de $\partial\mathbb{D}$ en \mathbb{C} , $\forall h, g \in \mathcal{H}$.

²Se dice que una función $A : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es una isometría parcial si $\exists \mathfrak{M}$ (espacio inicial de $A(\omega)$) subespacio (cerrado) de \mathcal{H} tal que $\|A(\omega)u\| = \|u\|$ para $u \in \mathfrak{M}$ y $A(\omega)v = 0$ para $v \in \mathfrak{M}^\perp$.

Definición 23 Un subespacio cerrado $\mathfrak{M} \subset L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ se denomina invariante (por el operador M) si $Mv \in \mathfrak{M}, \forall v \in \mathfrak{M}$. \mathfrak{M} se denomina doblemente invariante si $Mv, M^{-1}v \in \mathfrak{M}, \forall v \in \mathfrak{M}$. \mathfrak{M} se denomina simplemente invariante si es invariante pero no doblemente invariante.

Definición 24 Se denomina función de rango a una función $J = J(\omega)$ en $\partial\mathbb{D}$ que toma valores en la familia de subespacios cerrados de \mathcal{H} . Se dice que J es medible si la proyección ortogonal $P(\omega)$ en $J(\omega)$ es débilmente medible.

Las funciones de rango que coinciden casi siempre en $\partial\mathbb{D}$ se identifican entre sí. Para cada función de rango medible, J , \mathfrak{M}_J denota el conjunto de funciones $v \in L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ tal que $v(\omega) \in J(\omega)$ casi siempre. La correspondencia entre J y \mathfrak{M}_J es biunívoca, si identificamos entre sí las funciones de rango iguales entre si casi siempre.

El siguiente resultado, que relaciona subespacios invariantes y funciones de rango, se encuentra de forma implícita en el trabajo de Lax [95], pero fue demostrado por Srinivasan [141].

Lema 25 (Lax-Srinivasan) Los subespacios doblemente invariantes de $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ son los subespacios \mathfrak{M}_J , donde J es una función de rango medible.

A consecuencia de este resultado se da una nueva definición.

Definición 26 Se denomina rango del subespacio doblemente invariante \mathfrak{M}_J a la función de rango J asociada. Más aún, se puede extender esta definición a un conjunto arbitrario de funciones: se denomina rango de un conjunto de funciones \mathcal{H} -valuadas al menor subespacio doblemente invariante que contiene a todas ellas.

Para determinar los subespacios simplemente invariantes de $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ se necesita introducir las *clases de Hardy*. Se denota por $H^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ la clase de Hardy de funciones

$$\tilde{\mathbf{u}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k a_k, \quad \lambda \in \mathbb{D}, a_k \in \mathcal{H},$$

con valores en \mathcal{H} , holomorfas en \mathbb{D} y tal que $\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \|\tilde{\mathbf{u}}(r\omega)\|_{\mathcal{H}}^2 d\omega$ ($0 \leq r < 1$) tiene una cota independiente de r o, equivalentemente, tal que $\sum \|a_k\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$. Para cada función $\tilde{\mathbf{u}} \in H^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$, el límite no tangencial, en el sentido fuerte,

$$\text{s-lim}_{\lambda \rightarrow \omega} \tilde{\mathbf{u}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k =: \mathbf{u}(\omega)$$

existe para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Las funciones $\tilde{\mathbf{u}}(\lambda)$ y $\mathbf{u}(\omega)$ determinan la una a la otra (están relacionadas por la fórmula de Poisson), por lo que se puede identificar $H^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ con un subespacio de $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ al que denominaremos $H^+(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$, proporcionando a

$H^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ la estructura de espacio Hilbert de $H^+(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ y sumergiéndolo en $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ como subespacio. El espacio complementario $H^-(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H}) := L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H}) \setminus H^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ está asociado, del mismo modo, a la clase de Hardy conjugada de $H^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$.

Finalmente, la forma general de los subespacios simplemente invariantes de $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ fue dada por Helson [80, Theorem 9] en base al trabajo de Halmos [77, Theorems 3 y 4]:

Lema 27 (Halmos-Helson) *Todo subespacio simplemente invariante, \mathfrak{M} , de $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H})$ es de la forma*

$$\mathfrak{M} = AH^+(\partial\mathbb{D}, \mathcal{H}) \oplus \mathfrak{M}_K,$$

donde K es una función de rango medible y A es una función rígida con rango J ortogonal a K casi siempre. La parte doblemente invariante, \mathfrak{M}_K , de \mathfrak{M} es justamente $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} M^n \mathfrak{M}$. El subespacio \mathfrak{M} determina de forma única la función rígida A , salvo factores por la derecha constantes e iguales a una isometría parcial.

Capítulo 3

Aplicación de los modelos espectrales a wavelets ortonormales y análisis multirresolución

Una vez establecida la base teórica, la aplicación de los resultados mostrados en el Capítulo 2 a la teoría de wavelets ortonormales y a los análisis multirresolución se desarrolla en las Secciones 3.1 y 3.2, respectivamente, y cuyas demostraciones pueden encontrarse en el trabajo de Gómez-Cubillo y Suchanecki [68] y Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [71]. Toda wavelet ortonormal tiene asociado un par de funciones rígidas (Teorema 29), así como todo análisis multirresolución tiene asociado otro par de funciones rígidas (Teorema 35). Más aún, en la Sección 3.2.1 se ve que las relaciones de doble escala, (1.6) y (1.10), se describen en los modelos espectrales en términos de la función de transferencia del filtro $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ asociado al análisis multirresolución, involucrando a su vez a los elementos $\alpha_{i,n}^{l,j,m}$ de la matriz de cambio de base (Teorema 38), definidos en (2.11), que relaciona el par de bases arbitrarias. Además, dicha función de transferencia, o equivalentemente, el filtro espejo-conjugado asociado al análisis multirresolución, puede obtenerse, en este contexto, a partir de las relaciones de doble escala ya mencionadas (Proposición 36).

La ecuación de escala en el dominio de Fourier (1.8) se puede reescribir como

$$\hat{\varphi}(\omega) = 2^{-1/2} \hat{h}(2^{-1}\omega) \hat{\varphi}(2^{-1}\omega),$$

y bajo las condiciones adecuadas, la iteración de dicha expresión lleva a

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{2^{1/2}} \hat{\varphi}(0).$$

La mayoría de los métodos de construcción de MRA-wavelets tratan con el problema de encontrar dichas condiciones que aseguren la convergencia del producto infinito a la

transformada de Fourier de una función de escala conveniente [41, 83, 103]. Más aún, en base a la relación anterior, las expresiones obtenidas mediante la relación anterior para MRA-wavelets son estrictamente numéricas. El Teorema 38 muestra un modo de obtener una expresión analítica para dichas MRA-wavelets, mientras que el Corolario 39 aglutina la información de éste teorema junto con las condiciones necesarias para la existencia de dichas función de escala y MRA-wavelet. Finalmente, del Corolario 39 se derivan algoritmos para el cálculo de las funciones de escala y las MRA-wavelets en función de las bases arbitrarias $\{L_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}}$ y $\{K_{\pm, j}^{(m)}\}_{j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}}$ prefijadas. Estos algoritmos permiten el cálculo de dichas funciones basándose en las propiedades deseadas, asociadas a la elección de las bases. Los algoritmos para los sistemas de Haar, Walsh-Paley y trigonométrico se describen en la Sección 3.3, junto con las condiciones sobre el filtro espejo-conjugado asociado que aseguren que la serie

$$\sum_{i, n} \hat{\varphi}_i^{(n)} L_i^{(n)}$$

converja (hacia la correspondiente función de escala). Los contenidos correspondientes al algoritmo desarrollado a partir de la base ortonormal de Haar se encuentran publicados en el artículo de y Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [71].

3.1. Técnicas espectrales en wavelets ortonormales

Es bien sabido (ver [98, Lemma 2.2.4]) que, dada $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal si, y sólo si, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\theta + k)|^2 = 1$ para casi todo $\theta \in \mathbb{R}$, donde $\hat{\psi}$ es la transformada de Fourier de ψ definida en (2.13). Este resultado cuadra con el concepto de función rígida con espacio inicial unidimensional en el modelo espectral de T dado en la Proposición 19. De hecho, $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ si, y sólo si, el subespacio cerrado generado por $\hat{\psi} := \mathcal{F}\psi$ es un subespacio ambulante para el operador $M = \mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ definido en (2.17). Por el Lema 22, esto es equivalente a la existencia de una función rígida \hat{A} en $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$ con subespacio inicial unidimensional y tal que $\hat{\psi}(\omega) = \hat{A}(\omega)u$, con u vector normalizado perteneciente al subespacio inicial de $\hat{A}(\omega)$, el mismo subespacio unidimensional de $l^2(\mathbb{Z})$ para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Ya que \hat{A} es una isometría parcial para casi todo $\omega = e^{2\pi i\theta} \in \partial\mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} 1 &= \|u\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \|\hat{A}(\omega)u\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \|\hat{\psi}(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}_k(e^{2\pi i\theta})|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\theta + k)|^2, \text{ para casi todo } \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se denota por $\tilde{\mathcal{C}}$ al subespacio de $\mathcal{G}L^2(\mathbb{R}) = L^2(\partial\mathbb{D}; l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J}))$ de todas las funciones constantes y por $\hat{\mathcal{C}}$ al subespacio de funciones constantes de $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R}) = L^2(\partial\mathbb{D}; l^2(\mathbb{I}))$, es decir,

$$\tilde{\mathcal{C}} := \mathcal{G}(L^2(-2, -1] \oplus L^2[1, 2)), \quad \hat{\mathcal{C}} := \mathcal{F}(L^2[0, 1)).$$

La demostración del siguiente resultado es directa. Nótese que la expresión $\langle \cdot \rangle$ denota el subespacio cerrado generado por “ \cdot ”.

Lema 28 *Sea ψ una wavelet ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces:*

- (a) $\langle \psi \rangle$ es un subespacio ambulante para D y T en $L^2(\mathbb{R})$. Equivalentemente, $\mathcal{G}\langle \psi \rangle$ es un subespacio ambulante para $\mathcal{G}D\mathcal{G}^{-1}$ en $\mathcal{G}L^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F}\langle \psi \rangle$ es un subespacio ambulante para $\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ en $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$.
- (b) $\langle T^k\psi : k \in \mathbb{Z} \rangle$ es un subespacio ambulante para D en $L^2(\mathbb{R})$. Equivalentemente, $\mathcal{G}\langle T^k\psi : k \in \mathbb{Z} \rangle$ es un subespacio ambulante para $\mathcal{G}D\mathcal{G}^{-1}$ en $\mathcal{G}L^2(\mathbb{R})$.
- (c) $\mathcal{F}\langle T^k\psi : k \in \mathbb{Z} \rangle$ es un subespacio doblemente ambulante en $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$.

Ahora, los resultados de la Sección 2.2 permiten caracterizar cualquier wavelet ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ en términos de funciones rígidas en $\mathcal{G}L^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 29 *Si ψ es una wavelet ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, entonces existen funciones rígidas \hat{A} en $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$ y \tilde{B}, \tilde{C} en $\mathcal{G}L^2(\mathbb{R})$ tales que:*

- (i) los subespacios iniciales de \hat{A} y \tilde{B} son unidimensionales y $\tilde{C}(\omega)$ es unitario para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$.
- (ii) $\mathcal{F}^{-1}\langle \omega^k \hat{A} \hat{\mathcal{C}} : k \in \mathbb{Z} \rangle = \mathcal{G}^{-1}\langle \tilde{C} \tilde{\mathcal{C}} \rangle$
- (iii) $\langle \psi \rangle = \mathcal{F}^{-1}\langle \hat{A} \hat{\mathcal{C}} \rangle = \mathcal{G}^{-1}\langle \tilde{B} \tilde{\mathcal{C}} \rangle$

La wavelet determina de forma única las funciones \hat{A}, \tilde{B} y \tilde{C} salvo factores por la derecha constantes e iguales a isometrías parciales.

Recíprocamente, supuesto que existen funciones rígidas \hat{A} en $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$ y \tilde{B} y \tilde{C} en $\mathcal{G}L^2(\mathbb{R})$ satisfaciendo (i), (ii) y

$$(iii') \quad \mathcal{F}^{-1}\langle \hat{A} \hat{\mathcal{C}} \rangle = \mathcal{G}^{-1}\langle \tilde{B} \tilde{\mathcal{C}} \rangle,$$

la tripleta $(\hat{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ tiene asociada una única wavelet ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, dada por

$$\psi := \mathcal{F}^{-1}[\hat{A}\hat{\mathbf{u}}] = \mathcal{G}^{-1}[\tilde{B}\tilde{\mathbf{v}}], \quad (3.1)$$

done $\hat{\mathbf{u}}(\omega) = u$ y $\tilde{\mathbf{v}}(\omega) = v$ para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$, siendo u y v vectores normalizados en el subespacio inicial de $\hat{A}(\omega)$ y $\tilde{B}(\omega)$, respectivamente.

Más aún, existe una función de rango medible $\hat{J} = \hat{J}(\omega)$ en $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{J}(\omega)$ es unidimensional para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$ y

$$\mathcal{F}^{-1}\mathfrak{M}_j = \mathcal{F}^{-1}\langle \omega^k \hat{A} \hat{\mathcal{C}} : k \in \mathbb{Z} \rangle = \mathcal{G}^{-1}\langle \tilde{C} \tilde{\mathcal{C}} \rangle. \quad (3.2)$$

A efectos prácticos es conveniente tratar con los coeficientes en las bases prefijadas.

Teorema 30 Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ con $\mathcal{G}\psi = \tilde{\psi} = \{\tilde{\psi}_{s,j}^{(m)}\}$ es una wavelet ortonormal si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Ortonormalidad: para todo $p, q \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{s,j,m} \tilde{\psi}_{s,j}^{(m)} \sum_{i,n} \overline{\alpha_{i,n}^{s,j,m-p}} \sum_{r,k,l} \alpha_{i,n-q}^{r,k,l} \overline{\tilde{\psi}_{r,k}^{(l)}} = \delta_p \delta_q. \quad (3.3)$$

(ii) Completitud: para todo conjunto finito \mathbb{F} de índices (s, j) , con $s = \pm$ y $j \in \mathbb{J}$, la matriz¹

$$\left(\sum_{i,n} \overline{\alpha_{i,n}^{s,j,m}} \sum_{r,k,l} \alpha_{i,n-q}^{r,k,l} \overline{\tilde{\psi}_{r,k}^{(l)}} \right)_{\substack{(m,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (s,j) \in \mathbb{F}}} \quad (3.4)$$

tiene rango maximal, es decir, el cardinal de \mathbb{F} .

3.2. Técnicas espectrales en multirresolución

En la Definición 2 de la Sección 1.2.1 se muestra cómo se formaliza un análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$. Si se añade la hipótesis $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ y se considera el modelo espectral \mathcal{F}_* dado en (19), se pueden construir análisis multirresolución tal y como indica el siguiente resultado.

Proposición 31 Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ tal que:

(i) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}_k(\omega)|^2 = 1$ para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$

(ii) $\hat{\varphi}_k(0) = \delta_k$,

con δ_k delta de Dirac discreta. Entonces φ es la función de escala correspondiente a un análisis multirresolución, $\{\mathcal{V}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, de $L^2(\mathbb{R})$.

Las funciones de escala y los análisis multirresolución en $L^2(\mathbb{R})$ pueden caracterizarse, en términos de funciones rígidas, en los modelos espectrales $\mathcal{GL}^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{FL}^2(\mathbb{R})$. Éste es el contenido del Teorema 33, cuya prueba se basa en las propiedades ambulantes y de invarianza, dadas en el lema siguiente, de ciertos subespacios asociados a la función de escala en dichos modelos espectrales.

Lema 32 Sea φ la función de escala correspondiente a un análisis multirresolución $\{\mathcal{V}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces:

¹Cada fila de la matriz se corresponde con los valores fijos del par de índices $(m, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, mientras que cada columna se corresponde con los valores fijos del par de índices $(s, j) \in \mathbb{F}$, por lo que la matriz tiene un número infinito de filas y su número de columnas es el cardinal de \mathbb{F} .

- (a) $\langle \varphi \rangle$ es un subespacio ambulante de T en $L^2(\mathbb{R})$. Equivalentemente, $\mathcal{F}\langle \varphi \rangle$ es un subespacio ambulante de $\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ en $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$
- (b) el complemento ortogonal de $\mathcal{G}\mathcal{V}_0 = \mathcal{G}\langle T^k\varphi : k \in \mathbb{Z} \rangle$ es un subespacio (simplemente) invariante en $\mathcal{G}L^2(\mathbb{R})$ sin parte doblemente invariante
- (c) $\mathcal{F}\mathcal{V}_0 = \mathcal{F}\langle T^k\varphi : k \in \mathbb{Z} \rangle$ es un subespacio doblemente invariante de $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$

Teorema 33 Sea φ la función de escala correspondiente a un análisis multirresolución $\{\mathcal{V}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces existen funciones rígidas \hat{R} en $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$ y \tilde{S} en $\mathcal{G}L^2(\mathbb{R})$ tales que:

- (i) el espacio inicial de \hat{R} es unidimensional y $\tilde{S}(\omega)$ es unitario para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$;
- (ii) $\mathcal{V}_0 = \mathcal{F}^{-1}\langle \omega^k \hat{R}\hat{\mathcal{C}} : k \in \mathbb{Z} \rangle = \mathcal{G}^{-1}\langle \tilde{S}H^-(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})) \rangle$;
- (iii) $\langle \varphi \rangle = \mathcal{F}^{-1}\langle \hat{R}\hat{\mathcal{C}} \rangle$.

La función de escala φ determina de forma única a \hat{R} y \tilde{S} , salvo factores por la derecha constantes e iguales a una isometría parcial.

Recíprocamente, supuesto que existen funciones rígidas \hat{R} en $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$ y \tilde{S} en $\mathcal{G}L^2(\mathbb{R})$ satisfaciendo (i) y

$$(ii') \mathcal{F}^{-1}\langle \omega^k \hat{R}\hat{\mathcal{C}} : k \in \mathbb{Z} \rangle = \mathcal{G}^{-1}\langle \tilde{S}H^-(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})) \rangle,$$

el par (\hat{R}, \tilde{S}) tiene asociada una única función de escala φ , correspondiente a un análisis multirresolución $\{\mathcal{V}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, dada por

$$\varphi := \mathcal{F}^{-1}[\hat{R}\hat{\mathbf{w}}],$$

donde $\hat{\mathbf{w}}$ es un vector (constante) normalizado en el espacio inicial de \hat{R} . En ese caso, se satisfacen (ii) y (iii).

Más aún, existe una función de rango medible $\hat{K} = \hat{K}(\omega)$ en $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{K}(\omega)$ es unidimensional para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$ y

$$\mathcal{F}^{-1}\mathfrak{M}_{\hat{K}} = \mathcal{F}^{-1}\langle \omega^k \hat{R}\hat{\mathcal{C}} : k \in \mathbb{Z} \rangle = \mathcal{V}_0. \quad (3.5)$$

Las siguientes relaciones de ortogonalidad se deducen de forma inmediata del resultado que se acaba de demostrar.

Corolario 34 Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ una función de escala y $\mathcal{F}\varphi = \hat{\varphi} = \{\hat{\varphi}_i^{(n)}\}$. Entonces

$$\sum_{i,n} \hat{\varphi}_i^{(n)} \overline{\hat{\varphi}_i^{(n-k)}} = \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

De forma análoga al Teorema 7, dada una wavelet ortonormal ψ , se define \mathcal{W}_j como la clausura en $L^2(\mathbb{R})$ del subespacio generado por la familia $\{\psi_{j,k} = D^j T^k \psi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. Como ψ es una wavelet ortonormal, se verifica $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{W}_j$ y definiendo $\mathcal{V}_j = \bigoplus_{k=-\infty}^j \mathcal{W}_k$, $\forall j \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\{\mathcal{V}_j : j \in \mathbb{Z}\}$ verifica las condiciones 1, 2, 3 y 4 de la Definición 2. Por tanto, $\{\mathcal{V}_j : j \in \mathbb{Z}\}$ es un análisis multirresolución si existe $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{T^k \varphi : k \in \mathbb{Z}\}$ sea una base ortonormal de \mathcal{V}_0 . En tal caso ψ es una MRA-wavelet.

Dada una MRA-wavelet ψ de $L^2(\mathbb{R})$ con función de escala φ , las funciones rígidas \tilde{C} de [68, Theorem 12] y \tilde{S} del Teorema 33 coinciden. La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en [68].

Teorema 35 *Sea ψ una MRA-wavelet de $L^2(\mathbb{R})$ con función de escala φ . Entonces existen funciones rígidas \hat{A}, \hat{R} en $\mathcal{FL}^2(\mathbb{R})$ y \tilde{B}, \tilde{S} en $\mathcal{GL}^2(\mathbb{R})$ tales que:*

(i) *los subespacios iniciales de \hat{A}, \tilde{B} y \hat{R} son unidimensionales y $\tilde{S}(\omega)$ es unitario para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$*

(ii) *Se tiene que*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 &= \mathcal{F}^{-1} \left\langle \omega^k \hat{A} \hat{\mathbf{c}} : k \in \mathbb{Z} \right\rangle = \mathcal{G}^{-1} \left\langle \tilde{S} \tilde{\mathbf{c}} \right\rangle \\ \mathcal{V}_0 &= \mathcal{F}^{-1} \left\langle \omega^k \hat{R} \hat{\mathbf{c}} : k \in \mathbb{Z} \right\rangle = \mathcal{G}^{-1} \left\langle \tilde{S} H^{-}(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})) \right\rangle \end{aligned}$$

(iii) $\langle \psi \rangle = \mathcal{F}^{-1} \left\langle \hat{A} \hat{\mathbf{c}} \right\rangle = \mathcal{G}^{-1} \left\langle \tilde{B} \tilde{\mathbf{c}} \right\rangle$ y $\langle \varphi \rangle = \mathcal{F}^{-1} \left\langle \hat{R} \hat{\mathbf{c}} \right\rangle$

La MRA-wavelet ψ y la función de escala φ determinan de forma única la tetrupla $(\hat{A}, \tilde{B}, \hat{R}, \tilde{S})$, salvo factores por la derecha constantes e iguales a isometrías parciales.

Recíprocamente, supuesto que existen funciones rígidas \hat{A} y \hat{R} en $\mathcal{FL}^2(\mathbb{R})$ y \tilde{B} y \tilde{S} en $\mathcal{GL}^2(\mathbb{R})$ satisfaciendo (i) y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\langle \omega^k \hat{A} \hat{\mathbf{c}} : k \in \mathbb{Z} \right\rangle &= \mathcal{G}^{-1} \left\langle \tilde{S} \tilde{\mathbf{c}} \right\rangle, \\ \mathcal{F}^{-1} \left\langle \omega^k \hat{R} \hat{\mathbf{c}} : k \in \mathbb{Z} \right\rangle &= \mathcal{G}^{-1} \left\langle \tilde{S} H^{-}(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})) \right\rangle, \\ \mathcal{F}^{-1} \left\langle \hat{A} \hat{\mathbf{c}} \right\rangle &= \mathcal{G}^{-1} \left\langle \tilde{B} \tilde{\mathbf{c}} \right\rangle, \end{aligned}$$

la tetrupla $(\hat{A}, \tilde{B}, \hat{R}, \tilde{S})$ tiene asociado una única MRA-wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ con función de escala φ dadas por

$$\psi := \mathcal{F}^{-1}[\hat{A} \hat{\mathbf{u}}] = \mathcal{G}^{-1}[\tilde{B} \tilde{\mathbf{v}}], \quad \varphi := \mathcal{F}^{-1}[\hat{R} \hat{\mathbf{w}}],$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$ son vectores (constantes) normalizados en los subespacios iniciales \hat{A} , \tilde{B} y \hat{R} , respectivamente. En este caso, se satisfacen (ii) y (iii).

Además, existen funciones de rango medibles \hat{J} y \hat{K} en $\mathcal{FL}^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{J}(\omega)$ y $\hat{K}(\omega)$ son unidimensionales para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$ y

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{F}^{-1}\mathfrak{M}_j, \quad \mathcal{V}_0 = \mathcal{F}^{-1}\mathfrak{M}_{\hat{K}}.$$

3.2.1. Aplicación a las relaciones de doble escala

Como se ve en la Sección 1.2.1, existen dos relaciones (relaciones de doble escala), (1.6) y (1.10), que muestran la expresión de la función de escala y la wavelet en función de la base ortonormal $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{V}_0 . Ambas expresiones pueden generalizarse, gracias a la Propiedad 3 de la Definición 2, para cualquier $j \in \mathbb{Z}$, por lo que

$$\varphi_{j,0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \varphi_{j+1,k}, \quad (3.7)$$

$$\psi_{j,0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g[k] \varphi_{j+1,k}. \quad (3.8)$$

En términos de los operadores de dilatación y traslación, se pueden reescribir las ecuaciones (3.7) y (3.8) como

$$D^j \varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] D^{j+1} T^k \varphi, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$D^j \psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g[k] D^{j+1} T^k \varphi, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Tomando $j = -1$, y en función del modelo espectral dado en la Proposición 16, por (2.8) se tiene que

$$[\mathcal{F}D^{-1}\varphi](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \omega^k [\mathcal{F}\varphi](\omega) = h(\omega) [\mathcal{F}\varphi](\omega), \quad (3.9)$$

$$[\mathcal{F}D^{-1}\psi](\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g[k] \omega^k [\mathcal{F}\varphi](\omega) = g(\omega) [\mathcal{F}\varphi](\omega), \quad (3.10)$$

donde h y g son los *símbolos de doble escala* para φ y ψ , respectivamente, definidos por

$$h(\omega) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \omega^k \in L^2(\partial\mathbb{D}),$$

$$g(\omega) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g[k] \omega^k \in L^2(\partial\mathbb{D}).$$

Las relaciones de doble escala determinan algunas propiedades de los filtros y sus símbolos de doble escala.

Proposición 36 Sea $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ un análisis multirresolución en $L^2(\mathbb{R})$ con función de escala φ y wavelet ψ . Sean h y g los dos símbolos de doble escala para φ y ψ , respectivamente. Entonces $h, g \in L^2(\partial\mathbb{D})$ satisfacen:

- (a) $\omega^{2n}h(\omega) \perp h(\omega), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- (b) $\omega^{2m}g(\omega) \perp g(\omega), \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- (c) $\omega^{2n}h(\omega) \perp \omega^{2m}g(\omega), \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$
- (d) $\overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \langle \omega^{2n}h(\omega) \rangle} \oplus \overline{\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \langle \omega^{2m}g(\omega) \rangle} = L^2(\partial\mathbb{D})$

Demostración: Dado el operador unitario D y la relación $T^k D = D T^{2k}, \forall k \in \mathbb{Z}$ se observa

$$\mathcal{V}_{-1} = D^{-1}\mathcal{V}_0 = D^{-1} \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \langle T^k \varphi \rangle} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \langle D^{-1} T^k D D^{-1} \varphi \rangle} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \langle T^{2k} D^{-1} \varphi \rangle}.$$

Esta relación, junto con (3.9) y (2.8) lleva a

$$\mathcal{F}\mathcal{V}_{-1} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \langle \omega^{2k} h(\omega) [\mathcal{F}\varphi](\omega) \rangle}.$$

Por tanto, (el símbolo \ominus significa “complemento ortogonal”)

$$\mathcal{F}\mathcal{W}_{-1} = \mathcal{F}\mathcal{V}_0 = \ominus \mathcal{F}\mathcal{V}_{-1} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \langle \omega^k [\mathcal{F}\varphi](\omega) \rangle} \ominus \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \langle \omega^{2k} h(\omega) [\mathcal{F}\varphi](\omega) \rangle}. \quad (3.11)$$

Ahora, por 1.10, se tiene que

$$\mathcal{W}_{-1} = D^{-1}\mathcal{W}_0 = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \langle D^{-1} T^k D D^{-1} \psi \rangle} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \langle T^{2k} D^{-1} \psi \rangle} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle T^{2k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g[m] T^m \varphi \right\rangle}$$

y

$$\mathcal{F}\mathcal{W}_{-1} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \langle \omega^{2k} g(\omega) [\mathcal{F}\varphi](\omega) \rangle}. \quad (3.12)$$

Como \hat{B} es una función rígida y v es un vector normalizado del subespacio inicial de \hat{B} , $\|[\mathcal{F}\varphi(\omega)]\|_{l^2(\mathbb{Z})} = 1$ para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$ y, por tanto, igualando el lado derecho de las expresiones (3.11) y (3.12), se obtiene el resultado. \square

Una consecuencia inmediata de la Proposición 36 es que h y g forman un par de filtros espejo-conjugados.

Corolario 37 El símbolo de doble escala $h(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \omega^k$ satisface las dos condiciones equivalentes siguientes:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h[k]} h[k + 2n] = \delta_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$|h(\omega)|^2 + |h(-\omega)|^2 = 2, \quad \text{para casi todo } \omega \in \partial\mathbb{D}.$$

Demostración: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| = 1$ es una consecuencia directa de 1.6) y la normalización de $\psi_{j,k}$. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h[k]} h[k+2n] = 0$ para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ es consecuencia directa de la Proposición 36.(a). La equivalencia entre ambas expresiones se obtiene de escribir, de forma explícita, la serie de Fourier de $|h(\omega)|^2 + |h(-\omega)|^2$ (ver [41, page 137] para más detalles). \square

Por último, se da el resultado que expresa las relaciones, derivadas de las relaciones de doble escala, entre los coeficientes $\{\hat{\varphi}_p^{(q)}, \hat{\psi}_p^{(q)}\}_{p \in \mathbb{I}, q \in \mathbb{Z}}$, los filtros espejo-conjugados asociados al análisis multirresolución y los elementos de la matriz $(\alpha_{i,n}^{l,j,m})$:

Teorema 38 *Sea $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ un análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$ con función de escala φ y $\mathcal{F}\varphi = \hat{\varphi} = \{\hat{\varphi}_i^{(n)}\}$. Si $h(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k]\omega^k$ es el símbolo de doble escala para φ , entonces, para $p \in \mathbb{I}, q \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_p^{(q)} &= \sum_{l,j,m} \overline{\alpha_{p,q}^{l,j,m}} \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{l,j,m-1} \sum_k h[k] \hat{\varphi}_i^{(n-k)} \\ &= \sum_k \sum_{l,j,m} \overline{\alpha_{p,q-k}^{l,j,m}} \sum_{i,n} \left(h[2k] \alpha_{i,n}^{l,j,m-1} + h[2k+1] \alpha_{i,n+1}^{l,j,m-1} \right) \hat{\varphi}_i^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Más aún, la función ψ definida a través de sus coeficientes $\mathcal{F}\psi = \{\hat{\psi}_i^{(n)}\}$, para $p \in \mathbb{I}, q \in \mathbb{Z}$, por

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_p^{(q)} &= \sum_{l,j,m} \overline{\alpha_{p,q}^{l,j,m}} \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{l,j,m-1} \sum_k (-1)^{1-k} h[1-k] \hat{\varphi}_i^{(n-k)} \\ &= \sum_k \sum_{l,j,m} \overline{\alpha_{p,q-k}^{l,j,m}} \sum_{i,n} \left(h[1-2k] \alpha_{i,n}^{l,j,m-1} + h[-2k] \alpha_{i,n+1}^{l,j,m-1} \right) \hat{\varphi}_i^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

es una MRA-wavelet ortonormal asociada al análisis multirresolución $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

Demostración: La ecuación de escala (1.6) en $\mathcal{FL}^2(\mathbb{R})$ se puede expresar como

$$\hat{\varphi} = \hat{D}(h \cdot \hat{\varphi}) = \hat{D}\left(\sum_k h[k] \hat{T}^k \hat{\varphi}\right) = \sum_k h[k] \hat{D} \hat{T}^k \hat{\varphi}, \quad (3.15)$$

donde $\hat{D} := \mathcal{F}D\mathcal{F}^{-1}$ y $\hat{T} := \mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$. Por la primera expresión del Lema 18, la primera línea en (3.13) se obtiene de sustituir (3.15) en el último término, expresada en las coordenadas $\{\hat{\varphi}_i^{(n)}\}$. Más aún, como $\hat{D} \hat{T}^{2k} = \hat{T}^k \hat{D}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \sum_k h[k] \hat{D} \hat{T}^k \hat{\varphi} = \sum_k \left[h[2k] \hat{D} \hat{T}^{2k} + h[2k+1] \hat{D} \hat{T}^{2k+1} \right] \hat{\varphi} \\ &= \sum_k \hat{T}^k \hat{D} \left[h[2k] + h[2k+1] \hat{T} \right] \hat{\varphi} \end{aligned}$$

La segunda línea en (3.13) se obtiene de sustituir la expresión anterior en las dos primeras expresiones del Lema 18. Finalmente, el hecho de que la función ψ dada en (3.14) sea una MRA-wavelet ortonormal asociada al análisis multirresolución $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es una consecuencia directa de aplicar este mismo razonamiento, sustituyendo la ecuación de escala por la ecuación wavelet (1.10). \square

3.3. Algoritmos multirresolución

En esta sección se aplica la teoría desarrollada en la sección anterior (concretamente el Teorema 38) a la elección de tres bases ortonormales diferentes: los sistemas de Haar (Sección 3.3.1), Walsh-Paley (Sección 3.3.2) y trigonométrico (Sección 3.3.3). La obtención de algoritmos en estas bases permite calcular wavelets adecuadas para el análisis correspondiente, basándose en las propiedades deseadas para dichas wavelets, cuyo estudio depende de la elección de las bases arbitrarias. En este caso, las bases de Haar y Walsh-Paley permiten estudiar la regularidad de las wavelets mientras que la base trigonométrica permite realizar un análisis frecuencial discreto de dichas wavelets.

El Teorema 38 describe las relaciones que verifican los coeficientes $\{\hat{\varphi}_p^{(q)}, \hat{\psi}_p^{(q)}\}_{p \in \mathbb{I}, q \in \mathbb{Z}}$, de una MRA-wavelet ortonormal ψ y su correspondiente función de escala φ , en términos del filtro $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ asociado al análisis multirresolución y los elementos de la matriz de cambio de base $(\alpha_{i,n}^{l,j,m})$. Se sabe que no todo filtro espejo-conjugado $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, es decir, verificando las propiedades del Corolario 37, está asociado a un análisis multirresolución. Condiciones necesarias y suficientes para que un filtro $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, con un número finito de componentes no nulas, esté asociado a un análisis multirresolución pueden encontrarse en [94, 30] (ver [41, Chapter 6] para más detalles). El siguiente teorema reúne en los puntos (a)-(c) dichas condiciones, junto con las relaciones espectrales del Teorema 38 que caracterizan la función de escala y la wavelet asociadas al análisis multirresolución.

Al igual que en el Capítulo 2, se parte de dos bases ortonormales $\{L_i^{(0)}\}_{i \in \mathbb{I}}$ de $L^2([0, 1])$ y $\{K_{\pm,j}^{(0)}\}_{j \in \mathbb{J}}$ de $L^2([-2, -1]) \cup L^2([1, 2])$. Se construyen, a partir de ellas, las bases, de $L^2(\mathbb{R})$,

$$\{L_i^{(n)} = L_i^{(0)}(\cdot - n)\}_{i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}}, \quad \{K_{\pm,j}^{(m)} = 2^{\frac{m}{2}} K_{\pm,j}^{(0)}(2^m \cdot)\}_{j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}},$$

y, para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, se escribe

$$f = \{\hat{f}\}, \quad f = \{\tilde{f}\},$$

donde

$$f = \sum_{i,n} \hat{f} L_i^{(n)}, \quad f = \sum_{j,m} \tilde{f} K_{\pm,j}^{(m)}.$$

Corolario 39 Sea $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ una sucesión de números complejos con un número finito de componentes no nulas y tal que

- (a) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h[k]} h[k + 2n] = \delta_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z};$
- (b) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] = \sqrt{2};$
- (c) el autovalor 1 de la matriz de Lawton $[2(k_2 - k_1) + 1] \times [2(k_2 - k_1) + 1]$ -dimensional, L , definida por

$$L_{lj} = \sum_{k=k_1}^{k_2} h[k] \overline{h[j - 2l + k]}, \quad -(k_2 - k_1) + 1 \leq j, l \leq (k_2 - k_1) - 1$$

(donde se supone que $h[k] = 0$ para $k < k_1$ y $k > k_2$) es no degenerado.

Entonces, fijadas las bases ortonormales $\{L_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}}$ y $\{K_{\pm, j}^{(m)}\}_{j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, la función $\varphi = \{\hat{\varphi}_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}}$, solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\hat{\varphi}_p^{(q)} = \sum_{l, j, m} \overline{\alpha_{p, q}^{l, j, m}} \sum_{i, n} \alpha_{i, n}^{l, j, m-1} \sum_k h[k] \hat{\varphi}_i^{(n-k)}, \quad p \in \mathbb{I}, q \in \mathbb{Z}, \quad (3.16)$$

es una función de escala de soporte compacto asociada a un análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$. Más aún, toda función de escala de soporte compacto φ se obtiene de este modo y la función $\psi = \{\hat{\psi}_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{R})$ dada por la ecuación wavelet (1.10), o

$$\hat{\psi}_p^{(q)} = \sum_{l, j, m} \overline{\alpha_{p, q}^{l, j, m}} \sum_{i, n} \alpha_{i, n}^{l, j, m-1} \sum_k (-1)^{1-k} h[1-k] \hat{\varphi}_i^{(n-k)}, \quad p \in \mathbb{I}, q \in \mathbb{Z}, \quad (3.17)$$

es una wavelet ortonormal (de soporte compacto) asociada al análisis multirresolución generado por φ .

Este resultado es la base para la obtención de algoritmos partiendo de diferentes sistemas ortonormales para construir las bases ortonormales $\{L_i^{(0)}\}_{i \in \mathbb{I}}$ de $L^2([0, 1])$ y $\{K_{\pm, j}^{(0)}\}_{j \in \mathbb{J}}$ de $L^2([-2, -1]) \cup L^2([1, 2])$.

En adelante, se denota por $\mathcal{F}f = \hat{\mathbf{f}} = \{(\hat{f}^{\mathbf{b}})_i^{(n)}\}$ a los coeficientes de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ en la base \mathbf{b} .

3.3.1. Algoritmo de Haar

En primer lugar, se definen las bases $\{L_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{I}}$ y $\{K_{\pm, j}^{(m)}\}_{j \in \mathbb{J}}$ mediante el sistema de Haar $\mathbf{h} = \{h_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tal y como muestra el Apéndice A.1, y se consideran los correspondientes coeficientes $\alpha_{i, n}^{s, j, m}$ dados en el mismo apéndice.

Con esta elección, el Corolario 39 da lugar al siguiente resultado:

Corolario 40 Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ una función de escala de soporte compacto y sea $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ su correspondiente filtro espejo-conjugado, verificando las hipótesis del Corolario 39. Ahora:

- Se considera la expansión $\varphi = \{(\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_i^{(n)}\}$ en la base $\{L_i^{(n)}(x)\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$,

$$\varphi = \sum_{i \geq 0, n \in \mathbb{Z}} (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_i^{(n)} L_i^{(n)} \quad (\text{en el sentido de } L^2).$$

- Sean $n_1 < n_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $\text{sup}(\varphi) \subset [n_1, n_2]$, por lo que $(\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_i^{(n)} \neq 0$ sólo si $n = n_1, n_1+1, \dots, n_2-1$. Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se considera el vector $\hat{\varphi}_i^{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}^{n_2-n_1}$ dado por

$$\hat{\varphi}_i^{\mathbf{h}} := ((\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_i^{(n_1)}, (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_i^{(n_1+1)}, \dots, (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_i^{(n_2-1)})^T. \quad (3.18)$$

- Sean H_0 y H_1 las matrices $[n_2 - n_1] \times [n_2 - n_1]$ -dimensionales definidas por

$$[H_0]_{lk} = h[2l - k], \quad [H_1]_{lk} = h[2l - k + 1], \quad n_1 \leq l, k < n_2. \quad (3.19)$$

y sean \tilde{H}_0 y \tilde{H}_1 las matrices $[n_2 - n_1] \times [n_2 - n_1]$ -dimensionales definidas por

$$\tilde{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [H_0 + H_1], \quad \tilde{H}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [H_0 - H_1]. \quad (3.20)$$

Entonces, se satisfacen las relaciones siguientes:

$$\hat{\varphi}_0^{\mathbf{h}} = \tilde{H}_0 \hat{\varphi}_0^{\mathbf{h}}, \quad (3.21)$$

$$\hat{\varphi}_1^{\mathbf{h}} = \tilde{H}_1 \hat{\varphi}_0^{\mathbf{h}}, \quad (3.22)$$

y, para $i > 1$ con $i = \sum_{\gamma=0}^r i_\gamma 2^\gamma$ ($i_\gamma \in \{0, 1\}$), siendo $i_r = 1$,

$$\hat{\varphi}_i^{\mathbf{h}} = H_{i_r} \cdots H_{i_3} H_{i_2} H_{i_0} \hat{\varphi}_1^{\mathbf{h}}. \quad (3.23)$$

Demostración: El resultado no es más que una consecuencia directa de trabajar sobre las relaciones (3.16) tras la elección de las bases $\{L_i^{(0)}\}_{i \in \mathbb{I}}$ y $\{K_{\pm, j}^{(0)}\}_{j \in \mathbb{J}}$ como \mathbf{h} . \square

La igualdad funcional descrita en el primer punto del corolario se satisface en el sentido de L^2 . Debido a la dispersión de los soportes de las funciones que conforman la base de Haar, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_0^{(n(x))} L_0^{(n(x))}(x) + \sum_{p=0}^{\infty} (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_{2^p+q(p,x)}^{(n(x))} L_{2^p+q(p,x)}^{(n(x))}(x) = \\ &= (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_0^{(n(x))} h_0(x - n(x)) + \sum_{p=0}^{\infty} (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_{2^p+q(p,x)}^{(n(x))} h_{2^p+q(p,x)}(x - n(x)) = \\ &= (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_0^{(n(x))} + \sum_{p=0}^{\infty} (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_{2^p+q(p,x)}^{(n(x))} (-1)^{\beta(p,x)} 2^{\frac{p}{2}}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $n(x) = \lfloor x \rfloor := \min\{n \in \mathbb{Z} : x \in [n, n + 1)\}$, para cada $p \geq 0$, $q(p, x)$ es el único $q \geq 0$ tal que $0 \leq q < 2^p$ y $x \in \text{sup}(L_{2^p+q(p,x)}^{(n(x))})$, y $\beta(p, x) \in \{0, 1\}$, dependiendo de si x pertenece a la mitad derecha o izquierda de $\text{sup}(L_{2^p+q(p,x)}^{(n(x))})$.

A continuación se dan condiciones suficientes para la convergencia uniforme en \mathbb{R} de la serie (3.24).

Proposición 41 *Bajo las condiciones del Corolario 40, se supone que una de las dos condiciones siguientes se satisface:*

(i) Las matrices H_0 y H_1 son diagonalizables y

$$\rho := \max \{ |\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } H_0 \text{ o } H_1 \} < 1.$$

(ii) Se tiene que

$$\rho := \max \left\{ \sum_{k=m_1}^{m_2-1} |h[2l-k]|, \sum_{k=m_1}^{m_2-1} |h[2l-k+1]| : m_1 \leq l < m_2 \right\} < 1.$$

Entonces (3.24) converge uniformemente en \mathbb{R} . De hecho, para $s \geq 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|\varphi(x) - (\hat{\varphi}^h)_0^{(n(x))} - \sum_{p=0}^s (\hat{\varphi}^h)_{2^p+q(p,x)}^{(n(x))} (-1)^{\beta(p,x)} 2^{\frac{p}{2}}| \leq \|\hat{\varphi}_1^h\|_\infty \sum_{p=s+1}^{\infty} 2^{\frac{p}{2} + [2^p-1] \log_2(\rho)}.$$

Demostración: Ambas condiciones implican que $\|H_0\|_\infty \leq \rho$ y $\|H_1\|_\infty \leq \rho$. Incluyendo la expresión (3.23) en las igualdades (3.24),

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - (\hat{\varphi}^h)_0^{(n(x))} - \sum_{p=0}^s (\hat{\varphi}^h)_{2^p+q(p,x)}^{(n(x))} (-1)^{\beta(p,x)} 2^{\frac{p}{2}}| &\leq \sum_{p=s+1}^{\infty} |(\hat{\varphi}^h)_{2^p+q(p,x)}^{(n(x))} 2^{\frac{p}{2}}| \\ &\leq \|\hat{\varphi}_1^h\|_\infty \sum_{p=s+1}^{\infty} \rho^{2^p-1} 2^{\frac{p}{2}} = \|\hat{\varphi}_1^h\|_\infty \sum_{p=s+1}^{\infty} 2^{\frac{p}{2} + [2^p-1] \log_2(\rho)}, \end{aligned}$$

para $s \geq 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}$, siendo $\log_2(\rho) < 0$. □

Finalmente, el siguiente resultado describe como construir funciones de escala de soporte compacto, y sus correspondientes MRA-wavelets, a partir de los resultados anteriores.

Corolario 42 (El algoritmo) De acuerdo con el Corolario 39, para calcular una función de escala, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, de soporte compacto, y su correspondiente MRA-wavelet, ψ , se pueden considerar los siguientes pasos:

■ Sean

$$\begin{aligned} n_1 &:= \sup \{ n \in \mathbb{Z} : \text{sup}(\varphi) \subset [n, m] \}, \\ n_2 &:= \inf \{ m \in \mathbb{Z} : \text{sup}(\varphi) \subset [n, m] \}. \end{aligned}$$

Entonces, la dimensión del sistema es $n_2 - n_1$, ya que $(\hat{\varphi}^h)_i^{(n)} \neq 0$ sólo si $n = n_1, n_1 + 1, \dots, n_2 - 1$. Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se considera el vector $\hat{\varphi}_i^h \in \mathbb{C}^{n_2-n_1}$ dado por (3.18).

■ Como $\text{sup}(\varphi) \subseteq [n_1, n_2]$ se tiene, por la Proposición 10, que $h[k] \neq 0$ sólo si $2n_1 \leq k \leq n_2$. Las condiciones (a)-(c) del Corolario 39 son condiciones necesarias y suficientes para que la sucesión de números complejos $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, con sólo un número finito de componentes no nulas, sea un filtro espejo-conjugado asociado a una análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$ con wavelet y función de escala ortogonales y de soporte compacto.

- Se consideran las matrices $[n_2 - n_1] \times [n_2 - n_1]$ -dimensionales H_0, H_1, \tilde{H}_0 y \tilde{H}_1 definidas en (3.19) y (3.20). La condición (3.21) implica que 1 es un autovalor no degenerado de la matriz \tilde{H}_0 y $\hat{\varphi}_0^h$ es su correspondiente autovector.
- La condición de normalización de la función de escala, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$, es equivalente a

$$\sum_{n=n_1}^{n_2-1} (\hat{\varphi}^h)_0^{(n)} = 1.$$

Esto se debe a que, para la base de Haar, $\int_{\mathbb{R}} h_0(x) dx = 1$ y $\int_{\mathbb{R}} h_i(x) dx = 0, \forall i \in \mathbb{N}$.

- Una vez que $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\hat{\varphi}_0^h$ han sido determinados, $\hat{\varphi}_1^h$ se obtiene mediante (3.22) y el resto de $\hat{\varphi}_i^h, i > 1$, se obtienen mediante la recurrencia (3.23). Entonces, $\varphi(x)$ puede ser calculada con precisión tan alta como se quiera para cualquier $x \in \mathbb{R}$ mediante la serie $\sum_{i=0}^{\infty} (\hat{\varphi}^h)_i^{(n(x))} h_i(x - n(x))$ si, por ejemplo, alguna de las dos condiciones en la Proposición 41 se satisface. Finalmente, la wavelet ψ puede calcularse mediante la ecuación wavelet (1.10) o mediante el sistema (3.17).

3.3.2. Algoritmo de Walsh-Paley

En este caso, se toman ambas bases ortonormales definidas por la base de Walsh-Paley $\omega = \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, la cual se define en el Apéndice A.2.

Esta elección, y los correspondientes coeficientes $\alpha_{i,n}^{l,j,m}$, junto con el Corolario 39, proporciona el siguiente resultado:

Corolario 43 Sean $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ la función de escala de soporte compacto y $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ el filtro espejo-conjugado definidos en el Corolario 39. Sea $L = \text{long}(\text{sup}(\varphi))$ y se supone que $\text{sup}(\varphi) \subset [2^N, 2^{N+1}]$, con $N = \lceil \log_2(L) \rceil$ (donde $\lceil \cdot \rceil$ denota “el menor entero mayor que...”).² Se tiene que los coeficientes $\{(\hat{\varphi}^\omega)_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{Z}}$ (denominados coeficientes de Walsh-Fourier) verifican $(\hat{\varphi}^\omega)_i^{(n)} \neq 0$ sólo si $n = 2^N, 2^N + 1, \dots, 2^N + L - 1$. Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se considera el vector $\hat{\varphi}_i^\omega \in \mathbb{C}^{2^N}$ dado en (3.18).

Sean H_0, H_1, \tilde{H}_0 y \tilde{H}_1 las matrices $[L-1] \times [L-1]$ -dimensionales definidas en (3.19) y (3.20). Entonces, se satisfacen las relaciones siguientes:

$$\hat{\varphi}_0^\omega = \tilde{H}_0 \hat{\varphi}_0^\omega, \quad (3.25)$$

y, para $i > 0$ con $i = \sum_{\gamma=0}^r i_\gamma 2^\gamma$ ($i_\gamma \in \{0, 1\}$), siendo $i_r = 1$,

$$\hat{\varphi}_i^\omega = \tilde{H}_{i_r} \cdots \tilde{H}_{i_2} \tilde{H}_{i_1} \tilde{H}_{i_0} \hat{\varphi}_0^\omega. \quad (3.26)$$

²La trasladada entera de una función de escala sigue siendo una función de escala para el mismo análisis multirresolución.

Demostración: El resultado no es más que una consecuencia directa de trabajar sobre las relaciones (3.16) tras la elección de las bases $\{L_i^{(0)}\}_{i \in \mathbb{I}}$ y $\{K_{\pm,j}^{(0)}\}_{j \in \mathbb{J}}$ como $\boldsymbol{\omega}$. \square

Otra forma de calcular los coeficientes de Walsh-Fourier es a partir de la relación existente entre las bases de Haar y Walsh-Paley:

Definición 44 Se define la Transformada de Hadamard, \perp , de una sucesión de números reales $\mathbf{b} = (b_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}) \in \ell^0$ como $\mathbf{b}^\perp = (b_n^\perp \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}) \in \ell^0$, donde

- $b_0^\perp := b_0$
- $b_{2^n+k}^\perp := \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj}^{(n)} b_{2^n+j}$, $0 \leq k < 2^n$, $n \in \mathbb{N}$

siendo

$$a_{kj}^{(n)} := 2^{-\frac{n}{2}} \omega_k \left(\frac{j}{2^n} \right), \quad 0 \leq j, k \leq 2^n, j, k \in \mathbb{N}$$

y $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ la base de Walsh-Paley definida en (A.2). En términos de la matriz de Hadamard-Paley $A^{(n)} := \left(a_{kj}^{(n)} \right)_{j,k=0}^{2^n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, la relación anterior se escribe como

$$\vec{b}_{[n]}^\perp = A^{(n)} \vec{b}_{[n]}$$

donde $\vec{b}_{[n]} := (v_{2^n}, v_{2^n+1}, \dots, v_{2^{n+1}-1})^T$, $n \in \mathbb{N}$

Como las matrices de Hadamard-Paley son simétricas y ortogonales [136, página 21], es claro que \perp lleva ℓ^0 en ℓ^0 y satisface $(\mathbf{b}^\perp)^\perp = \mathbf{b}$, esto es, si $\tilde{\mathbf{b}}$ es la transformada de Hadamard de \mathbf{b} , entonces \mathbf{b} es la transformada de Hadamard de $\tilde{\mathbf{b}}$.

La base de Walsh-Paley es la transformada de Hadamard de la base de Haar [136, página 22]. De hecho, fijados $0 \leq k < 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$h_{2^n+k} = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj}^{(n)} \omega_{2^n+j},$$

por lo que $\mathbf{h} = \boldsymbol{\omega}^\perp$ y, por tanto, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{h}^\perp$, es decir,

$$\omega_{2^n+k} = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj}^{(n)} h_{2^n+j}.$$

Expresándolo matricialmente, se tiene que

$$\vec{\omega}_{[n]} = A^{(n)} \vec{h}_{[n]}, \quad \vec{h}_{[n]} = A^{(n)} \vec{\omega}_{[n]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Gracias a este hecho, se tiene la siguiente relación entre los coeficientes de Walsh-Fourier de una función de escala φ y sus coeficientes en la base de Haar.

Lema 45 Sean ω y h las bases de Walsh-Paley y Haar de $L^2([0, 1])$, respectivamente, y sean

$$(\hat{\varphi}^h)_{2^n+k}^{(m)} = \int_m^{m+1} \varphi(x) h_{2^n+k}(x-m) dx$$

y

$$(\hat{\varphi}^\omega)_{2^n+k}^{(m)} = \int_m^{m+1} \varphi(x) \omega_{2^n+k}(x-m) dx$$

los correspondientes coeficientes en dichas bases. Entonces, $\{(\hat{\varphi}^h)_{2^n+k}^{(m)} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n\}$ y $\{(\hat{\varphi}^\omega)_{2^n+k}^{(m)} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n\}$ son transformadas de Hadamard el uno del otro, esto es, $\{(\hat{\varphi}^h)_{2^n+k}^{(m)}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n} = \{(\hat{\varphi}^\omega)_{2^n+k}^{(m)}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n}^\perp$, es decir,

$$(\hat{\varphi}^h)_{2^n+k}^{(m)} = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj}^{(n)} (\hat{\varphi}^\omega)_{2^n+j}^{(m)}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n$$

Demostración: Para $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n$,

$$\begin{aligned} (\hat{\varphi}^h)_{2^n+k}^{(m)} &= \int_m^{m+1} \varphi(x) h_{2^n+k}(x-m) dx = \int_m^{m+1} \varphi(x) \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj}^{(n)} \omega_{2^n+j}(x-m) \right) dx \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj}^{(n)} \left(\int_m^{m+1} \varphi(x) \omega_{2^n+j}(x-m) dx \right) = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{kj}^{(n)} (\hat{\varphi}^\omega)_{2^n+j}^{(m)} \end{aligned}$$

esto es, expresado matricialmente, $(\hat{\varphi}^h)_{[n]}^{(m)} = A^{(n)} (\hat{\varphi}^\omega)_{[n]}^{(m)}$ (y del mismo modo $(\hat{\varphi}^\omega)_{[n]}^{(m)} = A^{(n)} (\hat{\varphi}^h)_{[n]}^{(m)}$). \square

Este resultado, junto al algoritmo basado en la utilización de la base de Haar dado en el Corolario 42, permite realizar el cálculo de los coeficientes de Walsh-Fourier por bloques.

Proposición 46 Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ una función de escala de soporte compacto tal que $\text{sup}(\varphi) \subset [m_1, m_2]$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ y sea $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ el filtro espejo-conjugado asociado a φ en el Corolario 39. Sea $\{L_i^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}, i \geq 0} = \omega$ la base de Walsh-Paley de $L^2(\mathbb{R})$ (definida en (A.2)) y sea $\{(\hat{\varphi}^\omega)_i^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}, i \geq 0}$ la correspondiente expansión de φ , esto es,

$$\varphi = \sum_{i \geq 0, n \in \mathbb{Z}} (\hat{\varphi}^\omega)_i^{(n)} L_i^{(n)} \quad (\text{en el sentido de } L^2).$$

Se consideran las matrices $[m_2 - m_1 - 1] \times [m_2 - m_1 - 1]$ -dimensionales H_0, H_1, \tilde{H}_0 y \tilde{H}_1 definidas en (3.19) y (3.20). Entonces, se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\hat{\varphi}_0^\omega = \tilde{H}_0 \hat{\varphi}_0^\omega, \quad \hat{\varphi}_1^\omega = \tilde{H}_1 \hat{\varphi}_0^\omega$$

y para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{2^n}^\omega \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{2^{n+1}-1}^\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{\varphi}_{2^n}^\omega)^{(m_1)} \\ \vdots \\ (\hat{\varphi}_{2^n}^\omega)^{(m_2-1)} \\ (\hat{\varphi}_{2^{n+1}}^\omega)^{(m_1)} \\ \vdots \\ (\hat{\varphi}_{2^{n+1}}^\omega)^{(m_2-1)} \\ \vdots \\ (\hat{\varphi}_{2^{n+1}-1}^\omega)^{(m_1)} \\ \vdots \\ (\hat{\varphi}_{2^{n+1}-1}^\omega)^{(m_2-1)} \end{pmatrix} = \left(A^{(n)} \otimes I_{m_2-m_1-1} \right) \mathcal{H} \vec{\hat{\varphi}}_1$$

con

$$\left(A^{(n)} \otimes I_{m_2-m_1-1} \right) = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & a_{1,2}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & \cdots & a_{1,2^n}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} \\ a_{2,1}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & a_{2,2}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & \cdots & a_{2,2^n}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2^n,1}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & a_{2^n,2}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & \cdots & a_{2^n,2^n}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_1 H_0 \cdots H_0 H_0 \\ H_1 H_0 \cdots H_0 H_1 \\ H_1 H_0 \cdots H_1 H_0 \\ H_1 H_0 \cdots H_1 H_1 \\ \vdots \\ H_1 H_1 \cdots H_1 H_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2^n(m_2-m_1-1)) \times (m_2-m_1-1)}$$

es decir, \mathcal{H} es un vector columna por bloques tal que $\mathcal{H}_i = H_{z_n^{(i)}} \cdots H_{z_1^{(i)}} H_{z_0^{(i)}}$, $0 \leq i < 2^n$, $2^n + i = z^{(i)} = \sum_{\gamma=0}^n z_\gamma^{(i)} 2^\gamma$.

Demostración: Por (3.21), (3.22) y (3.23) se sabe que

$$\hat{\varphi}_0^h = \tilde{H}_0 \hat{\varphi}_0^h, \quad \hat{\varphi}_1^h = \tilde{H}_1 \hat{\varphi}_0^h,$$

y, para $i > 1$ con $i = \sum_{k=0}^r i_k 2^k$, $i_k \in \{0, 1\}$, y $i_r = 1$,

$$\hat{\varphi}_i^h = H_{i_r} \cdots H_{i_2} H_{i_1} H_{i_0} \hat{\varphi}_1^h$$

con $\mathbf{h} = \{\mathbf{h}_i\}_{i \geq 0}$ base de Haar y

$$(\hat{\varphi}^h)_i^{(n)} = \int_n^{n+1} \varphi(x) \mathbf{h}_i(x-n) dx, \quad n \in \mathbb{Z}, i \geq 0$$

Entonces, para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{2^n}^h \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{2^{n+1}-1}^h \end{pmatrix} = \mathcal{H} \hat{\varphi}_1^h \quad (3.27)$$

Se sabe, por el Lema 45, que $\{(\hat{\varphi}^h)_{2^n+k}^{(m)}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n}$ y $\{(\hat{\varphi}^\omega)_{2^n+k}^{(m)}\}_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n}$ son transformadas de Hadamard el uno del otro. Entonces

$$\begin{pmatrix} (\hat{\varphi}^\omega)_{[n]}^{(m_1)} \\ \vdots \\ (\hat{\varphi}^\omega)_{[n]}^{(m_2-1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{\varphi}^\omega)_{2^n}^{(m_1)} \\ \vdots \\ (\hat{\varphi}^\omega)_{2^{n+1}-1}^{(m_1)} \\ \vdots \\ (\hat{\varphi}^\omega)_{2^n}^{(m_2-1)} \\ \vdots \\ (\hat{\varphi}^\omega)_{2^{n+1}-1}^{(m_2-1)} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(n)} & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & A^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{\varphi}^h)_{[n]}^{(m_1)} \\ \vdots \\ (\hat{\varphi}^h)_{[n]}^{(m_2-1)} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

con $A^{(n)}$ matriz de Hadamard-Paley para $n \in \mathbb{N}$. Para concatenar (3.27) y (3.28), se tiene que reordenar la expresión (3.28) obteniendo

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{2^n}^\omega \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{2^{n+1}-1}^\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & a_{1,2}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & \cdots & a_{1,2^n}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} \\ a_{2,1}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & a_{2,2}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & \cdots & a_{2,2^n}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2^n,1}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & a_{2^n,2}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} & \cdots & a_{2^n,2^n}^{(n)} I_{m_2-m_1-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{2^n}^h \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{2^{n+1}-1}^h \end{pmatrix}$$

Puesto que $\hat{\varphi}_1^h = \hat{\varphi}_1^\omega$ (debido a que $\mathfrak{h}_1 = \omega_1$),

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{2^n}^\omega \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{2^{n+1}-1}^\omega \end{pmatrix} = \left(A^{(n)} \otimes I_{m_2-m_1-1} \right) \mathcal{H} \hat{\varphi}_1^\omega$$

□

Gracias a este método se pueden deducir condiciones de convergencia de los coeficientes de Walsh-Fourier en función de los coeficientes para la base de Haar. Considerando ambas bases, se puede expresar, en el sentido de L^2 ,

$$\varphi = \sum_{i,n} (\hat{\varphi}^\omega)_i^{(n)} L_i^{(n)} = \sum_{i,n} (\hat{\varphi}^h)_i^{(n)} L_i^{\text{Haar}^{(n)}} =$$

con

$$\{L_i^{(n)}\}_{i \geq 0, n \in \mathbb{N}} = \omega \text{ base de Walsh-Paley y } \{L_i^{\text{Haar}^{(n)}}\}_{i \geq 0, n \in \mathbb{N}} = \mathfrak{h} \text{ base de Haar.}$$

Sea $\tilde{n} \in \mathbb{Z}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ $\left((A^{(n)})^T = A^{(n)} \right)$

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k < 2^n} (\hat{\varphi}^\omega)_{2^{n+k}}^{(\tilde{n})} \omega_{2^{n+k}} &= ((\hat{\varphi}^\omega)_{[n]}^{(\tilde{n})})^T \boldsymbol{\omega}_{[n]} = ((\hat{\varphi}^\omega)_{[n]}^{(\tilde{n})})^T A^{(n)} \mathbf{h}_{[n]} \\ &= (A^{(n)} (\hat{\varphi}^\omega)_{[n]}^{(\tilde{n})})^T \mathbf{h}_{[n]} = ((\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_{[n]}^{(\tilde{n})})^T \mathbf{h}_{[n]} = \sum_{0 \leq k < 2^n} (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_{2^{n+k}}^{(\tilde{n})} h_{2^{n+k}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

entonces $((\hat{\varphi}^\omega)_i^{(\tilde{n})}) = ((\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_i^{(\tilde{n})})$ porque $\mathfrak{h}_i = \omega_i$, $i \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} (\hat{\varphi}^\omega)_i^{(\tilde{n})} \omega_i &= (\hat{\varphi}^\omega)_0^{(\tilde{n})} \omega_0 + (\hat{\varphi}^\omega)_1^{(\tilde{n})} \omega_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0 \leq k < 2^n} (\hat{\varphi}^\omega)_{2^{n+k}}^{(\tilde{n})} \omega_{2^{n+k}} = \\ &(\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_0^{(\tilde{n})} h_0 + (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_1^{(\tilde{n})} h_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0 \leq k < 2^n} (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_{2^{n+k}}^{(\tilde{n})} h_{2^{n+k}} = \sum_{i \geq 0} (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_i^{(\tilde{n})} h_i \end{aligned}$$

y, por tanto, para $x \in \mathbb{R}$ y $n(x) = \lfloor x \rfloor$,

$$\varphi(x) \sim \sum_{i \geq 0} (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_i^{(n(x))} h_i(x) = \sum_{i \geq 0} (\hat{\varphi}^\omega)_i^{(n(x))} \omega_i(x) \quad (3.30)$$

La relación (3.30) implica que las condiciones de convergencia de la Proposición 41 para el sistema de Haar también son válidas para el sistema de Walsh-Paley.

Proposición 47 *Bajo las mismas condiciones dadas en la Proposición 41 para la convergencia uniforme de (3.24), las series en (3.30) convergen uniformemente en \mathbb{R} . De hecho, para $s \geq 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$\left| \varphi(x) - \sum_{i=0}^{2^s-1} (\hat{\varphi}^\omega)_i^{(n(x))} \omega_i(x) \right| \leq \|\hat{\varphi}_1^\omega\|_\infty \sum_{i=2^s}^{\infty} 2^{\frac{i}{2} + [2^i-1] \log_2(\rho)}.$$

Demostración: Ambas condiciones implican que $\|H_0\|_\infty \leq \rho$ y $\|H_1\|_\infty \leq \rho$. Entonces, para (3.23), (3.29) y (3.30),

$$\begin{aligned} \left| \varphi(x) - \sum_{i=0}^{2^s-1} (\hat{\varphi}^\omega)_i^{(n(x))} \omega_i(x) \right| &= \left| \varphi(x) - \sum_{i=0}^{2^s-1} (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_i^{(n(x))} h_i(x) \right| = \\ &= \left| \varphi(x) - (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_0^{(n(x))} - \sum_{p=0}^{2^s-1} (\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_{2^i+q(i,x)}^{(n(x))} (-1)^{\beta(i,x)} 2^{\frac{i}{2}} \right| \leq \sum_{i=2^s}^{\infty} |(\hat{\varphi}^{\mathbf{h}})_{2^i+q(i,x)}^{(n(x))} 2^{\frac{i}{2}}| = \\ &\leq \|\hat{\varphi}_1^{\mathbf{h}}\|_\infty \sum_{i=2^s}^{\infty} \rho^{2^i-1} 2^{\frac{i}{2}} = \|\hat{\varphi}_1^\omega\|_\infty \sum_{i=2^s}^{\infty} 2^{\frac{i}{2} + [2^i-1] \log_2(\rho)}, \end{aligned}$$

donde $q(i, x)$ es el único $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $0 \leq q < 2^i$ y $x \in \text{sup}(L_{2^i+q}^{\text{Haar}(n(x))})$, y $\beta(i, x) \in \{0, 1\}$, dependiendo de si x pertenece a la mitad izquierda o derecha de $\text{sup}(L_{2^i+q}^{\text{Haar}(n(x))})$, para $s \geq 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}$, siendo $\log_2(\rho) < 0$. \square

El algoritmo que se deriva del Corolario 43 para la construcción de funciones de escala de soporte compacto y sus correspondientes MRA-wavelets, en términos de sus coeficientes de Walsh-Fourier, se describe en el siguiente resultado.

Corolario 48 (El algoritmo) De acuerdo con el desarrollo anterior, para calcular una función de escala, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, de soporte compacto y su correspondiente MRA-wavelet, ψ , se pueden considerar los siguientes pasos:

- Sea $L = \text{long}(\text{sup}(\varphi))$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{sup}(\varphi) \subseteq [2^N, 2^{N+1}]$. Entonces, la dimensión del sistema es $L-1$, porque $(\hat{\varphi}^\omega)_i^{(n)} \neq 0$ sólo si $n = 2^N, 2^N+1, \dots, 2^N+L-1$. Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se considera el vector $\hat{\varphi}_i^\omega \in \mathbb{C}^N$ dado por (3.18).
- Como $\text{sup}(\varphi_{-1,0}) \subseteq [\cdot 2^N, \cdot(2^N+L)]$ se tiene que $h[k] \neq 0$ sólo si $2^N \leq k \leq 2^N+L$. Las condiciones (a)-(c) del Corolario 39 son condiciones necesarias y suficientes para que la sucesión de números complejos $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, con sólo un número finito de componentes no nulas, sea un filtro espejo-conjugado asociado a una análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$ con wavelet y función de escala ortogonales y de soporte compacto.
- Se consideran las matrices $[L-1] \times [L-1]$ -dimensionales \tilde{H}_0, \tilde{H}_1 definidas en (3.20). La condición (3.25) implica que 1 es un autovalor de la matriz \tilde{H}_0 y $\hat{\varphi}_0^\omega$ es su correspondiente autovector.
- La condición de normalización de la función de escala, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$, es equivalente a

$$\sum_{n=2^N}^{2^N+L-1} (\hat{\varphi}^\omega)_0^{(n)} = 1.$$

Esto se debe a que, para la base de Walsh-Paley, $\int_{\mathbb{R}} \omega_0(x) dx = 1$ y $\int_{\mathbb{R}} \omega_i(x) dx = 0, \forall i \in \mathbb{N}$.

- Una vez que $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\hat{\varphi}_0^\omega$ han sido determinados, el resto de $\hat{\varphi}_i^\omega, i > 0$, se obtienen mediante la recurrencia (3.26). Entonces, $\varphi(x)$ puede ser calculada con precisión tan alta como se quiera para cualquier $x \in \mathbb{R}$ mediante (3.30) si, por ejemplo, alguna de las dos condiciones en la Proposición 41 (véase la Proposición 47) se satisface. Finalmente, la wavelet ψ puede calcularse mediante la ecuación wavelet o mediante el sistema (3.17).

Ejemplo 49 Supóngase que $\text{long}(\text{sup}(\varphi)) \leq 4$ y $\text{sup}(\varphi) \subseteq [4, 8]$, por lo que $N = 2$, $(\hat{\varphi}^\omega)_i^{(n)} \neq 0$ sólo si $n = 4, \dots, 7$, y $h[k] \neq 0$ sólo si $k = 4, \dots, 8$. Para cada $i \geq 0$, sea

$$\hat{\varphi}_i^\omega := ((\hat{\varphi}^\omega)_i^{(4)}, (\hat{\varphi}^\omega)_i^{(5)}, (\hat{\varphi}^\omega)_i^{(6)}, (\hat{\varphi}^\omega)_i^{(7)})^T,$$

y supóngase que $h[k] \forall k$ y $\hat{\varphi}_0^\omega$ real (y, por tanto, $\hat{\varphi}_i^\omega$ real $\forall i \geq 1$). Puesto que las funciones que componen la base de Walsh-Paley son reales, la función de escala, φ , y su correspondiente MRA-wavelet, ψ , son reales.

Las condiciones (a) y (b) del Corolario 39 se escriben como

$$\begin{cases} h[4]^2 + h[5]^2 + h[6]^2 + h[7]^2 + h[8]^2 = 1, \\ h[4]h[6] + h[5]h[7] + h[6]h[8] = 0, \\ h[4]h[8] = 0, \\ h[4] + h[5] + h[6] + h[7] + h[8] = \sqrt{2}, \end{cases}$$

y, por tanto, se obtiene la familia de filtros espejo-conjugados $\{h[k] : k = 4, 5, 6, 7, 8\}$ ($h[7]$ parámetro) dada por:

$$\begin{cases} h[4] = \frac{\sqrt{2}}{2} - h[6], & h[5] = \frac{\sqrt{2}}{2} - h[7], \\ h[6]^\pm = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{P(h[7])}}{4}, & h[8] = 0, \end{cases}$$

donde

$$P(h) := 2 + 8\sqrt{2}h - 16h^2.$$

Para que $h[6]$ sea real, se debe imponer $P(h[7]) \geq 0$, por lo que

$$h[7] \in \left[\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \right].$$

En este caso, la matriz de Lawton, L , es una matriz (5×5) -dimensional y la condición (c) del Corolario 39 no impone ninguna restricción adicional sobre el parámetro $h[7]$. Las matrices H_0 y H_1 son de la forma

$$H_0 := \begin{pmatrix} h[4] & h[3] & h[2] & h[1] \\ h[6]^+ & h[5] & h[4] & h[3] \\ h[8] & h[7] & h[6]^+ & h[5] \\ h[10] & h[9] & h[8] & h[7] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{P(h[7])}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2} + \sqrt{P(h[7])}}{4} & \frac{\sqrt{2} - 2h[7]}{2} & \frac{\sqrt{2} - \sqrt{P(h[7])}}{4} & 0 \\ 0 & h[7] & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{P(h[7])}}{4} & \frac{\sqrt{2} - 2h[7]}{2} \\ 0 & 0 & 0 & h[7] \end{pmatrix}$$

$$H_1 := \begin{pmatrix} h[5] & h[4] & h[3] & h[2] \\ h[7] & h[6]^+ & h[5] & h[4] \\ h[9] & h[8] & h[7] & h[6]^+ \\ h[11] & h[10] & h[9] & h[8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2} - 2h[7]}{2} & \frac{\sqrt{2} - \sqrt{P(h[7])}}{4} & 0 & 0 \\ h[7] & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{P(h[7])}}{4} & \frac{\sqrt{2} - 2h[7]}{2} & \frac{\sqrt{2} - \sqrt{P(h[7])}}{4} \\ 0 & 0 & h[7] & \frac{\sqrt{2} + \sqrt{P(h[7])}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y las matrices \tilde{H}_0 y \tilde{H}_1 son de la forma

$$\tilde{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [H_0 + H_1] := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h[4] + h[5] & h[3] + h[4] & h[2] + h[3] & h[1] + h[2] \\ h[6]^+ + h[7] & h[5] + h[6]^+ & h[4] + h[5] & h[3] + h[4] \\ h[8] + h[9] & h[7] + h[8] & h[6]^+ + h[7] & h[5] + h[6]^+ \\ h[10] + h[11] & h[9] + h[10] & h[8] + h[9] & h[7] + h[8] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{P(h[7])}-4h[7]}{4} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{P(h[7])}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{P(h[7])}+4h[7]}{4} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{P(h[7])}-4h[7]}{4} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{P(h[7])}-4h[7]}{4} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{P(h[7])}}{4} \\ 0 & h[7] & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{P(h[7])}+4h[7]}{4} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{P(h[7])}-4h[7]}{4} \\ 0 & 0 & 0 & h[7] \end{pmatrix} \\
\tilde{H}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [H_0 - H_1] := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h[4] - h[5] & h[3] - h[4] & h[2] - h[3] & h[1] - h[2] \\ h[6]^+ - h[7] & h[5] - h[6]^+ & h[4] - h[5] & h[3] - h[4] \\ h[8] - h[9] & h[7] - h[8] & h[6]^+ - h[7] & h[5] - h[6]^+ \\ h[10] - h[11] & h[9] - h[10] & h[8] - h[9] & h[7] - h[8] \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{P(h[7])}+4h[7]}{4} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{P(h[7])}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{P(h[7])}-4h[7]}{4} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{P(h[7])}-4h[7]}{4} & \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{P(h[7])}+4h[7]}{4} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{P(h[7])}}{4} \\ 0 & h[7] & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{P(h[7])}-4h[7]}{4} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{P(h[7])}-4h[7]}{4} \\ 0 & 0 & 0 & h[7] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matriz \tilde{H}_0 tiene el autovalor 1 y los autovalores de H_0 y H_1 tienen módulo menor que 1, para cada valor admisible de $h[7]$. Por tanto, por la Proposición 47, la serie (3.30) converge uniformemente a $\varphi(x)$ en \mathbb{R} .

En las Figuras 3.1 y 3.2 se pueden ver las representaciones gráficas de las correspondientes funciones de escala y MRA-wavelets, respectivamente, para los diferentes valores del parámetro $h[7]$.

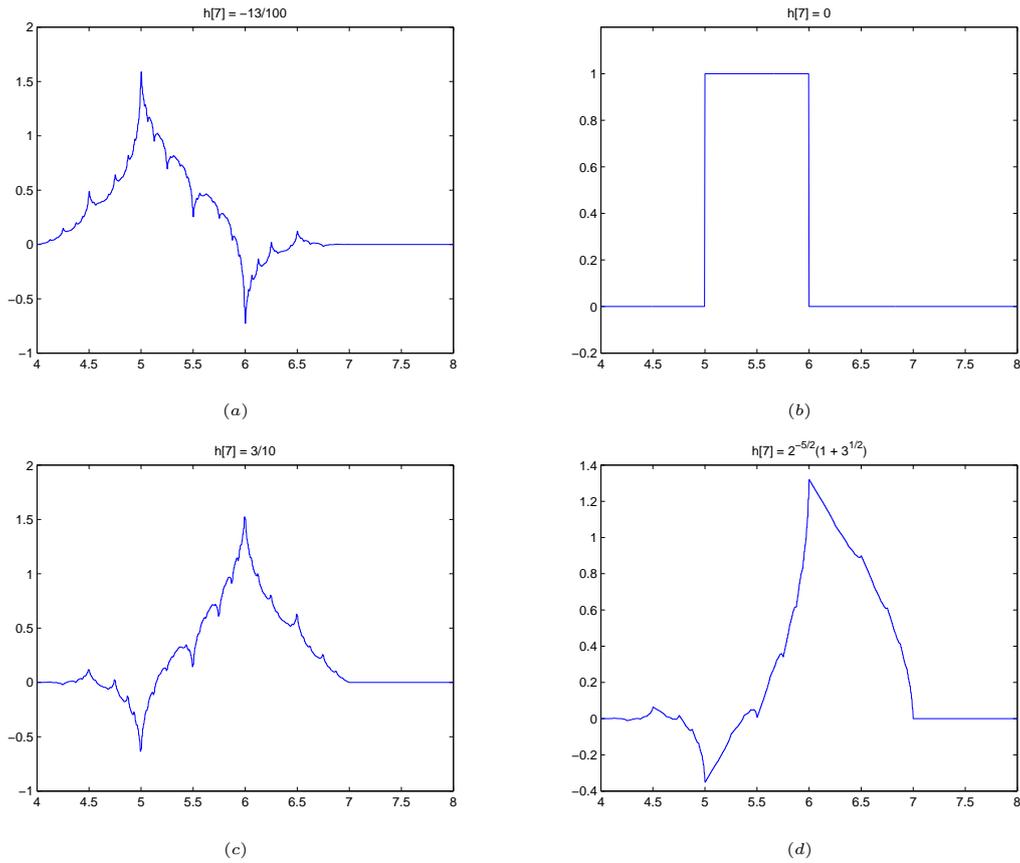


Figura 3.1: Gráficas de las funciones de escala correspondientes a los valores del parámetro $h[7]$ siguientes: (a) $h[7] = -\frac{13}{100}$; (b) $h[7] = 0$; (c) $h[7] = \frac{3}{10}$; (d) $h[7] = 2^{-\frac{5}{2}}(1 + \sqrt{3})$. Para los valores $h[7] = 0$ y $h[7] = 2^{-\frac{1}{2}}$ se obtiene la función de escala de Haar y para el valor $h[7] = 2^{-\frac{5}{2}}(1 + \sqrt{3})$ se obtiene la función de escala de Daubechies para 2 momentos nulos.

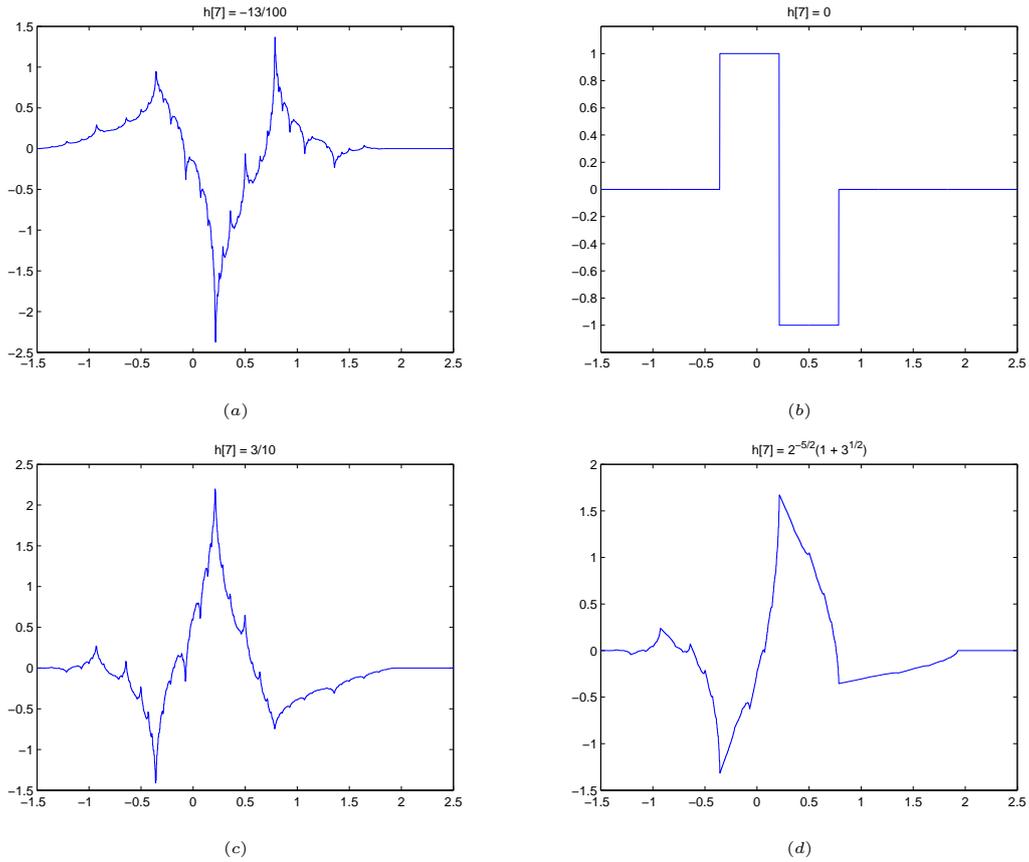


Figura 3.2: Gráficas de las MRA-wavelets correspondientes a los valores del parámetro $h[7]$ siguientes: (a) $h[7] = -\frac{13}{100}$; (b) $h[7] = 0$; (c) $h[7] = \frac{3}{10}$; (d) $h[7] = 2^{-\frac{5}{2}}(1 + \sqrt{3})$. Para los valores $h[7] = 0$ y $h[7] = 2^{-\frac{1}{2}}$ se obtiene la MRA-wavelet de Haar y para el valor $h[7] = 2^{-\frac{5}{2}}(1 + \sqrt{3})$ se obtiene la MRA-wavelet de Daubechies para 2 momentos nulos.

3.3.3. Algoritmo trigonométrico

Por último, se toma el caso en que ambas bases coinciden con la base trigonométrica $e = \{e_k(x) := e^{2\pi i k x} : x \in \mathbb{R}\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Teorema 50 Con la elección anterior para las bases $\{L_k^{(0)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{K_{\pm, j}^{(0)}\}_{j \in \mathbb{Z}}$, se tiene que, para $p \in \mathbb{Z}$, $u \geq 0$ y $0 \leq v < 2^u$,

- si p par,

$$(\hat{\varphi}^e)_p^{(2^u+v)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{r = 2v + n + 1 \\ n \in \{-1, 0\}}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_{\frac{p}{2}}^{(2^{u+1}+r-k)};$$

- si p impar,

$$(\hat{\varphi}^e)_p^{(2^u+v)} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{r \equiv 2v + n \pmod{2^{u+1}} \\ n \in \{-1, 0, 1, 2\}}} \left((-1)^n 3^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \pmod{2}} - (-1)^{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1)} \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_{\frac{p}{2}}^{(2^{u+1}+r-k)}.$$

siendo φ y $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ la función de escala y el filtro espejo-conjugado del Corolario 39

Demostración: Sustituyendo los valores $\alpha_{i,n}^{l,j,m}$, calculados en el Apéndice A.3, en las ecuaciones (3.16), para $p \in \mathbb{Z}$, $q > 1$, se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned} (\hat{\varphi}^e)_p^{(q)} &= \sum_{j \notin 2^u \mathbb{Z}} \overline{-\frac{i 2^{\frac{u}{2}} e^{-2\pi i j 2^{-u} v}}{2\pi(p2^u - j)} (e^{-2\pi i j 2^{-u}} - 1)} \times \\ &\times \sum_{0 \leq r < 2^{u+1}} \sum_{I \in \mathbb{Z}} -\frac{i 2^{\frac{u+1}{2}} e^{-2\pi i j 2^{-u-1} r}}{2\pi(I2^{u+1} - j)} (e^{-2\pi i j 2^{-u-1}} - 1) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_I^{(2^{u+1}+r-k)} + 2^{\frac{-u}{2}} \times \\ &\times \sum_{0 \leq r < 2^{u+1}} \left(\sum_{\substack{I \in \mathbb{Z} \\ I2 \neq p}} -\frac{i 2^{\frac{u+1}{2}} e^{-\pi i p r}}{2\pi(I2^{u+1} - p2^u)} (e^{-\pi i p} - 1) + 2^{\frac{-u+1}{2}} \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_I^{(2^{u+1}+r-k)} \end{aligned}$$

si $q = 2^u + v$, con $u > 0$, $0 \leq v < 2^u$.

En primer lugar se trabaja sobre el primer sumando: por el cambio de variable $j = a2^{u+1} + b/a \in \mathbb{Z}, 0 < b < 2^{u+1}, b \neq 2^u$, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \notin 2^u \mathbb{Z}} \overline{\frac{i2^{\frac{u}{2}} e^{-2\pi i j 2^{-u} v}}{2\pi(p2^u - j)} (e^{-2\pi i j 2^{-u}} - 1)} \times \\
& \times \sum_{0 \leq r < 2^{u+1}} \sum_{I \in \mathbb{Z}} -\frac{i2^{\frac{u+1}{2}} e^{-2\pi i j 2^{-u-1} r}}{2\pi(I2^{u+1} - j)} (e^{-2\pi i j 2^{-u-1}} - 1) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_I^{(2^{u+1}+r-k)} = \\
& = \frac{2^{u+\frac{1}{2}}}{4\pi^2} \sum_{0 \leq r < 2^{u+1}} \sum_{\substack{0 < b < 2^{u+1} \\ b \neq 2^u}} e^{-\frac{\pi i b}{2^u}(r-2v)} (e^{\frac{\pi i b}{2^{u-1}}} - 1) (e^{-\frac{\pi i b}{2^u}} - 1) \times \\
& \times \sum_{I \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{a \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((2a-p)2^u + b)((a-I)2^{u+1} + b)} \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_I^{(2^{u+1}+r-k)} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Para poder calcular el sumatorio en a de (3.31) se aplican técnicas de variable compleja. En particular, se aplica el corolario del Teorema de los Residuos que se enuncia a continuación [81, Theorem 4.9a]:

Lema 51 *Sea r una función racional con un cero de orden ≥ 2 en el infinito y sin polos en $k \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} r(k) = - \sum_{\text{polos de } r} \text{res} \left\{ r(z) i\pi \frac{1 + e^{-2\pi iz}}{1 - e^{-2\pi iz}} \right\}.$$

Se tiene que

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}} r(a) = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((2a-p)2^u + b)((a-I)2^{u+1} + b)} = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4^{u+1} (a - (\frac{p}{2} - \frac{b}{2^{u+1}})) (a - (I - \frac{b}{2^{u+1}}))},$$

$$\text{con } r(z) = \frac{1}{4^{u+1} (z - (\frac{p}{2} - \frac{b}{2^{u+1}})) (z - (I - \frac{b}{2^{u+1}}))}.$$

Como $0 < b < 2^{u+1}, b \neq 2^u$, entonces $\frac{b}{2^{u+1}} \notin \mathbb{Z}$ y $\frac{b}{2^{u+1}} \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, por lo que r no tiene polos en $a \in \mathbb{Z}$.

$f(\infty) = 0$ de orden 2 si, y sólo si, $f = \frac{p}{q} / \deg(q) \geq \deg(p) + 2$, lo cual r verifica. Por tanto,

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}} r(a) = - \sum_{\text{polos de } r} \text{res} \left\{ r(z) i\pi \frac{1 + e^{-2\pi iz}}{1 - e^{-2\pi iz}} \right\}.$$

Los polos de r son $z_1 = \frac{p}{2} - \frac{b}{2^{u+1}}$ y $z_2 = I - \frac{b}{2^{u+1}}$, y los residuos correspondientes son:

$$\blacksquare \text{ Si } \frac{p}{2} \neq I, \quad \begin{cases} \text{res} \left\{ r(z) i\pi \frac{1+e^{-2\pi iz}}{1-e^{-2\pi iz}}, z_1 \right\} = \frac{i\pi}{4^{u+1}(\frac{p}{2}-I)} \frac{1+(-1)^p e^{\frac{\pi i b}{2^u}}}{1-(-1)^p e^{\frac{\pi i b}{2^u}}} \\ \text{res} \left\{ r(z) i\pi \frac{1+e^{-2\pi iz}}{1-e^{-2\pi iz}}, z_2 \right\} = \frac{i\pi}{4^{u+1}(I-\frac{p}{2})} \frac{1+e^{\frac{\pi i b}{2^u}}}{1-e^{\frac{\pi i b}{2^u}}} \end{cases}$$

- Si $\frac{p}{2} = I$, $\text{res}\left\{r(z)i\pi\frac{1+e^{-2\pi iz}}{1-e^{-2\pi iz}}, z_1 = z_2\right\} = \frac{\pi^2}{4^u} \frac{e^{\frac{\pi ib}{2^u}}}{(1-e^{\frac{\pi ib}{2^u}})^2}$,

y, por tanto,

- si p impar ó $\frac{p}{2} \neq I$, $\sum_{a \in \mathbb{Z}} r(a) = \frac{i\pi}{4^{u+1}(I-\frac{p}{2})} \left(\frac{1-e^{\frac{\pi ib}{2^u}}}{1+e^{\frac{\pi ib}{2^u}}} - \frac{1+e^{\frac{\pi ib}{2^u}}}{1-e^{\frac{\pi ib}{2^u}}} \right)$;

- si $\frac{p}{2} = I$, $\sum_{a \in \mathbb{Z}} r(a) = -\frac{\pi^2}{4^u} \frac{e^{\frac{\pi ib}{2^u}}}{(1-e^{\frac{\pi ib}{2^u}})^2}$,

por lo que el sumando inicial queda de la forma siguiente:

- Si p par,

$$-\frac{1}{2^{u+\frac{1}{2}}} \sum_{0 \leq r < 2^{u+1}} \sum_{0 < b < 2^u} \mathcal{R}\left(e^{\frac{-\pi ib}{2^u}(r-2v-1)}(e^{\frac{\pi ib}{2^{u-1}}} - 1)(e^{\frac{-\pi ib}{2^u}} - 1) \frac{e^{\frac{\pi ib}{2^u}}}{(1-e^{\frac{\pi ib}{2^u}})^2}\right) \times$$

$$\times \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_{\frac{p}{2}}^{(2^{u+1}+r-k)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{r = 2v + n + 1 \\ n \in \{-1, 0\}}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_{\frac{p}{2}}^{(2^{u+1}+r-k)}$$

$$-\frac{1}{2^u \sqrt{2}} \sum_{0 \leq r < 2^{u+1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_{\frac{p}{2}}^{(2^{u+1}+r-k)};$$

- Si p impar,

$$\frac{i}{2^{u+\frac{5}{2}}\pi} \sum_{0 \leq r < 2^{u+1}} \sum_{0 < b < 2^u} \mathcal{R}\left(e^{\frac{-\pi ib}{2^u}(r-2v)}(e^{\frac{\pi ib}{2^{u-1}}} - 1)(e^{\frac{-\pi ib}{2^u}} - 1)\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1-e^{\frac{\pi ib}{2^u}}}{1+e^{\frac{\pi ib}{2^u}}} - \frac{1+e^{\frac{\pi ib}{2^u}}}{1-e^{\frac{\pi ib}{2^u}}} \right) \sum_{I \in \mathbb{Z}} \frac{1}{I-\frac{p}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_I^{(2^{u+1}+r-k)} =$$

$$= \frac{i}{4\sqrt{2}\pi} \sum_{\substack{r \equiv 2v + n \pmod{2^{u+1}} \\ n \in \{-1, 0, 1, 2\}}} \left((-1)^n 3^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \pmod{2}} - (-1)^{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1)} \right) \times$$

$$\times \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \sum_{I \in \mathbb{Z}} \frac{(\hat{\varphi}^e)_I^{(2^{u+1}+r-k)}}{I-\frac{p}{2}} + \frac{i}{2^u \sqrt{2}\pi} \sum_{0 \leq r < 2^{u+1}} (-1)^{r-2v+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \sum_{I \in \mathbb{Z}} \frac{(\hat{\varphi}^e)_I^{(2^{u+1}+r-k)}}{I-\frac{p}{2}} =$$

$$=^* \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{r \equiv 2v + n \pmod{2^{u+1}} \\ n \in \{-1, 0, 1, 2\}}} \left((-1)^n 3^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \pmod{2}} - (-1)^{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1)} \right) \times$$

$$\times \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (-1)^{r-k+1} (\hat{\varphi}^e)_{\frac{p}{2}}^{(2^{u+1}+r-k)} + \frac{i}{2^u \sqrt{2}} \sum_{0 \leq r < 2^{u+1}} (-1)^{r-2v+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \sum_{I \in \mathbb{Z}} \frac{(\hat{\varphi}^e)_I^{(2^{u+1}+r-k)}}{I - \frac{p}{2}}.$$

*: Sea p impar.

$$\sum_{I \in \mathbb{Z}} \frac{(\hat{\varphi}^e)_I^{(2^u+v)}}{I - \frac{p}{2}} = \sum_{I \in \mathbb{Z}} (\hat{\varphi}^e)_I^{(2^u+v)} \widehat{f}_I = \langle \varphi_{[2^u+v, 2^u+v+1)}(t), f(t) \rangle_{L^2([2^u+v, 2^u+v+1))}$$

Se busca $f(t)$ con $t \in [2^u + v, 2^u + v + 1) / \widehat{f}(n) = \frac{1}{n - \frac{p}{2}}, n \in \mathbb{Z}$.

Si $f(t) = i\pi e^{\pi i p(t - (2^u+v))}$, entonces $\widehat{f}(n) = \hat{f}(n) = \frac{1}{n - \frac{p}{2}}$. Por tanto,

$$\sum_{I \in \mathbb{Z}} \frac{(\hat{\varphi}^e)_I^{(2^u+v)}}{I - \frac{p}{2}} = \langle \varphi_{[2^u+v, 2^u+v+1)}(t), i\pi e^{\pi i p(t - (2^u+v))} \rangle_{L^2([2^u+v, 2^u+v+1))} = -i\pi (\hat{\varphi}^e)_{\frac{p}{2}}^{(2^u+v)}$$

Sustituyendo en la relación inicial se tiene que

- Si p par,

$$(\hat{\varphi}^e)_p^{(2^u+v)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{r = 2v + n + 1 \\ n \in \{-1, 0\}}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_{\frac{p}{2}}^{(2^{u+1}+r-k)};$$

- Si p impar,

$$(\hat{\varphi}^e)_p^{(2^u+v)} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{r \equiv 2v + n \pmod{2^{u+1}} \\ n \in \{-1, 0, 1, 2\}}} \left((-1)^n 3^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \pmod{2}} - (-1)^{(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1)} \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] (\hat{\varphi}^e)_{\frac{p}{2}}^{(2^{u+1}+r-k)}.$$

□

El corolario siguiente es la consecuencia directa de aplicar el teorema anterior al caso de wavelets de soporte compacto:

Corolario 52 *Bajo las condiciones del teorema anterior, supóngase que $\text{sup}(\varphi) \subseteq [2^u, 2^{u+1}]$. Entonces, se verifican las relaciones siguientes:*

- Si $p \in \mathbb{Z}$ es impar,

$$\hat{\varphi}_p^e = \tilde{H}_1 \hat{\varphi}_{\frac{p}{2}}^e; \quad (3.32)$$

- Si $p \in \mathbb{Z}$ es par,

$$\hat{\varphi}_p^e = \tilde{H}_0 \hat{\varphi}_{\frac{p}{2}}^e, \quad (3.33)$$

con $\hat{\varphi}_p^e$ dado en (3.18), siendo las matrices \tilde{H}_0 y \tilde{H}_1 las definidas en (3.20) y sabiendo que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h[k] = 0$ [41, page 174].

A diferencia de los casos de Haar y Walsh-Paley, en el caso de la base trigonométrica no se obtiene una recurrencia completa que permita calcular todos los coeficientes de la función de escala a partir del coeficiente de índice 0. Sin embargo, se obtiene una recurrencia para los coeficientes del índice $2^n a$, $n > 0$, a impar. Por ello, utilizando la relación entre la base de Haar y la base trigonométrica, se puede obtener una expresión para los coeficientes de índice impar en función del coeficiente de índice 0.

El siguiente lema marca la línea para obtener la relación entre los coeficientes de índice impar y el coeficiente de índice 0.

Lema 53 *Sea $p \in \mathbb{Z}$ y sea φ la función de escala del corolario anterior. Si p es impar y $a \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\frac{p}{2^a}}^e = & \frac{1}{2\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)^i} \left[\left(1 - e^{-2\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)^i}\right) \hat{\varphi}_0^h + \left(1 - e^{-\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)^i}\right)^2 \hat{\varphi}_1^h + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{u=1}^{\infty} 2^{\frac{u}{2}} \left(1 - e^{-\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)^i}\right)^2 \left(\prod_{v=0}^{u-1} \left(H_0 + e^{-\frac{\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)^i}} H_1\right) \right) \right) \hat{\varphi}_1^h \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Demostración: Sea $\mathbf{h} = \{\mathbf{h}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ la base de Haar y sea $e_{\frac{p}{2^a}}(x) = e^{2\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)^i (x-n)}$, $x \in [n, n+1)$, con $n, p \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathbb{N}$. Entonces

$$e_{\frac{p}{2^a}} = \sum_{j \geq 0} a_{\frac{p}{2^a}, j} \mathbf{h}_j, \quad \text{donde } a_{\frac{p}{2^a}, j} = \left\langle e_{\frac{p}{2^a}}, \mathbf{h}_j \right\rangle.$$

Sea

$$\hat{\varphi}_{\frac{p}{2^a}}^e = \left(\left\langle \varphi, e_{\frac{p}{2^a}} \right\rangle_{[2^u, 2^{u+1})}, \left\langle \varphi, e_{\frac{p}{2^a}} \right\rangle_{[2^{u+1}, 2^{u+2})}, \dots, \left\langle \varphi, e_{\frac{p}{2^a}} \right\rangle_{[2^{u+1-2}, 2^{u+1-1})} \right)^T$$

y

$$\hat{\varphi}_{\frac{p}{2^a}}^h = \left(\langle \varphi, \mathbf{h}_j \rangle_{[2^u, 2^{u+1})}, \langle \varphi, \mathbf{h}_j \rangle_{[2^{u+1}, 2^{u+2})}, \dots, \langle \varphi, \mathbf{h}_j \rangle_{[2^{u+1-2}, 2^{u+1-1})} \right)^T.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\frac{p}{2^a}}^e &= \left(\left\langle \varphi, e_{\frac{p}{2^a}} \right\rangle_{[2^u, 2^{u+1})}, \left\langle \varphi, e_{\frac{p}{2^a}} \right\rangle_{[2^{u+1}, 2^{u+2})}, \dots, \left\langle \varphi, e_{\frac{p}{2^a}} \right\rangle_{[2^{u+1-2}, 2^{u+1-1})} \right)^T = \\ &= \sum_{j \geq 0} \overline{a_{\frac{p}{2^a}, j}} \left(\langle \varphi, \mathbf{h}_j \rangle_{[2^u, 2^{u+1})}, \langle \varphi, \mathbf{h}_j \rangle_{[2^{u+1}, 2^{u+2})}, \dots, \langle \varphi, \mathbf{h}_j \rangle_{[2^{u+1-2}, 2^{u+1-1})} \right)^T = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j \geq 0} \overline{a_{\frac{p}{2^a}, j}} \hat{\varphi}_j^h.$$

Se calcula $a_{\frac{p}{2^a}, j}$,

$$a_{\frac{p}{2^a}, j} = \left\langle e_{\frac{p}{2^a}}, \mathfrak{h}_j \right\rangle = \int_0^1 e^{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)ix} \overline{\mathfrak{h}_j(x)} dx.$$

- Si $j = 0 \Rightarrow a_{\frac{p}{2^a}, 0} = \int_0^1 e^{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)ix} dx = \frac{e^{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)ix} \Big|_0^1}{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} = \frac{e^{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} - 1}{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i}$.
- Si $j = 2^u + v$, tal que $u \geq 0$, $0 \leq v < 2^u$:

$$\begin{aligned} a_{\frac{p}{2^a}, j} &= \int_{\frac{v}{2^u}}^{\frac{v+1}{2^u}} e^{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)ix} 2^{\frac{u}{2}} \mathfrak{h}_j(2^u x - v) dx = 2^{\frac{u}{2}} \int_{\frac{v}{2^u}}^{\frac{v+1}{2^u}} e^{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)ix} dx - 2^{\frac{u}{2}} \int_{\frac{v+1}{2^u}}^{\frac{v}{2^u}} e^{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)ix} dx \\ &= \frac{2^{\frac{u}{2}}}{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} \left(e^{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)ix} \Big|_{\frac{v}{2^u}}^{\frac{v+1}{2^u}} - e^{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)ix} \Big|_{\frac{v}{2^u}}^{\frac{v+1}{2^u}} \right) = \\ &= \frac{2^{\frac{u}{2}}}{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} \left(e^{\frac{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i(v+1)}{2^u}} - e^{\frac{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)iv}{2^u}} - e^{\frac{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i(v+1)}{2^u}} + e^{\frac{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i(v+1)}{2^u}} \right) \\ &= \frac{2^{\frac{u}{2}}}{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} e^{\frac{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)iv}{2^u}} \left(-1 + 2e^{\frac{\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i}{2^{u-1}}} - e^{\frac{\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i}{2^{u-1}}} \right) = \frac{2^{\frac{u}{2}} i}{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)} e^{\frac{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)iv}{2^u}} \left(1 - e^{\frac{\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i}{2^u}} \right)^2. \end{aligned}$$

Puesto que

$$\hat{\varphi}_1^h = \tilde{H}_1 \hat{\varphi}_0^h,$$

$$\hat{\varphi}_{2^u+v}^h = H_{v_{u-1}} \cdot \dots \cdot H_{v_1} \cdot H_{v_0} \cdot \hat{\varphi}_1^h, \text{ tal que } u > 0, v = \sum_{r=0}^{u-1} v_r 2^r, v_r \in \{0, 1\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\frac{p}{2^a}}^e &= \sum_{j \geq 0} \overline{a_{\frac{p}{2^a}, j}} \hat{\varphi}_j^h \\ &= \frac{e^{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} - 1}{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} \hat{\varphi}_0^h + \frac{(e^{\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} - 1)^2 i}{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)} \hat{\varphi}_1^h + \\ &+ \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{0 \leq v < 2^u} \frac{2^{\frac{u}{2}} i}{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)} \left(1 - e^{\frac{\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i}{2^u}} \right)^2 e^{\frac{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)iv}{2^u}} H_{v_{u-1}} \cdot \dots \cdot H_{v_1} \cdot H_{v_0} \cdot \hat{\varphi}_1^h \\ &= \frac{1}{2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} \left[\left(1 - e^{-2\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} \right) \hat{\varphi}_0^h + \left(1 - e^{-\pi\left(\frac{p}{2^a}\right)i} \right)^2 \hat{\varphi}_1^h + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{u=1}^{\infty} 2^{\frac{u}{2}} \left(1 - e^{-\pi \left(\frac{p}{2^u}\right)i}\right)^2 \left(H_0 + e^{-2\pi \left(\frac{p}{2^u}\right)i} H_1\right) \dots \left(H_0 + e^{-\frac{2\pi \left(\frac{p}{2^u}\right)i}{2^{u-1}}} H_1\right) \hat{\varphi}_1^h \Big]. \\
& = \frac{1}{2\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)i} \left[\left(1 - e^{-2\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)i}\right) \hat{\varphi}_0^h + \left(1 - e^{-\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)i}\right)^2 \hat{\varphi}_1^h + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{u=1}^{\infty} 2^{\frac{u}{2}} \left(1 - e^{-\frac{\pi p i}{2^u}}\right)^2 \prod_{v=0}^{u-1} \left(H_0 + e^{-\frac{2\pi \left(\frac{p}{2^v}\right)i}{2^v}} H_1\right) \hat{\varphi}_1^h \right]
\end{aligned}$$

Por tanto, si p es impar y $a \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{\frac{p}{2^a}}^e & = \frac{1}{2\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)i} \left[\left(1 - e^{-2\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)i}\right) \hat{\varphi}_0^h + \left(1 - e^{-\pi \left(\frac{p}{2^a}\right)i}\right)^2 \hat{\varphi}_1^h + \right. \\
& \quad \left. + \left(\sum_{u=1}^{\infty} 2^{\frac{u}{2}} \left(1 - e^{-\frac{\pi \left(\frac{p}{2^u}\right)i}}\right)^2 \left(\prod_{v=0}^{u-1} \left(H_0 + e^{-\frac{\pi \left(\frac{p}{2^v}\right)i}{2^v}} H_1\right) \right) \right) \hat{\varphi}_1^h \right].
\end{aligned}$$

□

A partir de la expresión obtenida en el lema anterior para cada p impar y $a > 0$, se obtiene la expresión final recogida en la proposición siguiente.

Proposición 54 Sean $p \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$ y sea φ la función de escala del Corolario 52. Entonces

$$\hat{\varphi}_{\frac{p}{2^a}}^e = \tilde{H}_{p,a} \hat{\varphi}_{\frac{p}{2^{a+1}}}^e \quad (3.35)$$

donde

$$\tilde{H}_{p,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(H_0 + e^{-\frac{\pi p i}{2^a}} H_1 \right).$$

Por tanto,

$$\hat{\varphi}_p^e = \left(\prod_{a=0}^b \tilde{H}_{p,a} \right) \hat{\varphi}_{\frac{p}{2^b}}^e$$

y

$$\hat{\varphi}_p^e = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\prod_{a=0}^{b-1} \tilde{H}_{p,a} \right) \hat{\varphi}_{\frac{p}{2^b}}^e = \left(\prod_{a=0}^{\infty} \tilde{H}_{p,a} \right) \hat{\varphi}_0^e. \quad (3.36)$$

Demostración: Este resultado es la consecuencia de aplicar el Lema 53 de forma recurrente con $a \rightarrow \infty$. □

El resultado anterior se basa en la existencia de un producto infinito de matrices. La siguiente proposición trata el tema de la convergencia de dicho producto infinito partiendo de las condiciones dadas en Daubechies-Lagarias [44, ecuación 2.11] para la existencia de soluciones en la ecuación de doble escala.

Proposición 55 Sea $\{h[n]\}_{N_1 \leq n \leq N_2}$ el filtro espejo-conjugado asociado a un análisis multirresolución, y sea E_1 el subespacio ortogonal al vector $(1, 1, \dots, 1)$ (autovector por la izquierda común de las matrices H_0 y H_1). Se supone que $\sum_n h[2n] = \sum_n h[2n+1] = 1/\sqrt{2}$. Si existen $\lambda < 1$ y $c > 0$ tales que, para todo $m \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\max_{\substack{d_j \in \{0,1\} \\ j=1,2,\dots,m}} \|H_{d_1} H_{d_2} \cdots H_{d_m}|_{E_1}\| \leq C\lambda^m,$$

entonces el producto infinito de matrices $\prod_{a=0}^{\infty} \tilde{H}_{p,a}$ converge y

$$\left(\prod_{a=0}^{\infty} \tilde{H}_{p,a}\right)_{l,j} = \int_{2^{u+l-1}}^{2^{u+l}} e^{-2\pi i x} \varphi(x) dx = (\hat{\varphi}^e)_p^{(2^u+l-1)} \quad (3.37)$$

con φ función de escala, $1 \leq l, j < 2^u$ y $p \in \mathbb{Z}$ impar.

Demostración: Por [44, Remark (2), page 1040], se sabe que

$$\prod_{a=0}^{\infty} (\sqrt{2} \cdot H_{r_a}) = \begin{pmatrix} \varphi(x) & \varphi(x) & \dots & \varphi(x) \\ \varphi(x+1) & \varphi(x+1) & \dots & \varphi(x+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x+N-1) & \varphi(x+N-1) & \dots & \varphi(x+N-1) \end{pmatrix}$$

donde $x = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{r_a}{2^{a+1}}$ y $r_a \in \{0, 1\}$, esto es, dado $\epsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} & \left| \left(\prod_{a=0}^n (\sqrt{2} \cdot H_{r_a}) \right)_{l,j} - \varphi(x+l-1) \right| < \\ & < \left\| \prod_{a=0}^n (\sqrt{2} \cdot H_{r_a}) - \begin{pmatrix} \varphi(x) & \varphi(x) & \dots & \varphi(x) \\ \varphi(x+1) & \varphi(x+1) & \dots & \varphi(x+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x+N-1) & \varphi(x+N-1) & \dots & \varphi(x+N-1) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

para $1 \leq l, j < 2^u$.

Por otra parte, como $\varphi \in L(\mathbb{R})$,

$$\sum_{m=0}^{2^n-1} e^{-2\pi i \frac{m}{2^n}} \varphi\left(\frac{m}{2^n} + l\right) \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{2^{u+l}}^{2^{u+l+1}} e^{-2\pi i x} \varphi(x) dx,$$

es decir, dado $\epsilon > 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_2$,

$$\left| \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{-2\pi i \frac{m}{2^n}} \varphi\left(\frac{v}{2^n} + l\right) \frac{1}{2^n} - \int_{2^{u+l}}^{2^{u+l+1}} e^{-2\pi i x} \varphi(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.38)$$

Además, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \prod_{a=0}^{n-1} \tilde{H}_{p,a} &= \prod_{a=0}^{n-1} \left(\frac{H_0 + e^{-\frac{\pi pi}{2^a}} H_1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{-\frac{\pi piv}{2^{n-1}}} \prod_{a=0}^{n-1} H_{m_a} = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{-\frac{\pi pim}{2^{n-1}}} \prod_{a=0}^{n-1} (\sqrt{2} \cdot H_{r_a}) = \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{-\frac{\pi pim}{2^{n-1}}} H_m^{n-1} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

donde $H_m^n := \prod_{a=0}^n (\sqrt{2} \cdot H_{m_a})$. Por tanto, dado $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \max\{n_1, n_2\}$,

$$\begin{aligned} &\left| \left(\prod_{a=0}^{n-1} \tilde{H}_{p,a} \right)_{l,j} - \int_{2^{u+l-1}}^{2^{u+l}} e^{-2\pi pix} \varphi(x) dx \right| = \\ &= \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{-\frac{\pi pim}{2^{n-1}}} (H_m^{n-1})_{l,j} \frac{1}{2^n} - \int_{2^{u+l-1}}^{2^{u+l}} e^{-2\pi pix} \varphi(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{-\frac{\pi pim}{2^{n-1}}} (H_m^{n-1})_{l,j} \frac{1}{2^n} - \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{-\frac{\pi pim}{2^{n-1}}} \varphi\left(\frac{m}{2^n} + l - 1\right) \frac{1}{2^n} \right| + \\ &+ \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{-\frac{\pi pim}{2^{n-1}}} \varphi\left(\frac{m}{2^n} + l - 1\right) \frac{1}{2^n} - \int_{2^{u+l-1}}^{2^{u+l}} e^{-2\pi pix} \varphi(x) dx \right| < \\ &< \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{-\frac{\pi pim}{2^{n-1}}} \left((H_m^{n-1})_{l,j} - \varphi\left(\frac{m}{2^n} + l - 1\right) \right) \frac{1}{2^n} \right| + \frac{\epsilon}{2} \leq \\ &\leq \left| (H_m^{n-1})_{l,j} - \varphi\left(\frac{m}{2^n} + l - 1\right) \right| + \frac{\epsilon}{2} < \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Proposición 56 *Bajo las mismas condiciones que la Proposición 40 para la convergencia uniforme de (3.24), la serie*

$$\varphi(x) \sim \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\hat{\varphi}^e)_p^{(n(x))} e_p(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.39)$$

converge uniformemente.

Demostración: Sean $\rho \leq 1$ y $n \in \mathbb{Z}$. La serie $\sum_{p \in \mathbb{Z}} (\hat{\varphi}^e)_p^{(n)} e_k$ es la serie de Fourier de la función restringida al intervalo $[n, n+1)$,

$$\varphi_{[n, n+1)} := \begin{cases} \varphi & , \text{ en } [n, n+1) \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} .$$

Por tanto,

$$\varphi(x) = \varphi_{[n, n+1)}(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\hat{\varphi}^e)_p^{(n)} e_p(x), \quad x \in [n, n+1), \quad (3.40)$$

donde

Puesto que $\rho < 1$, la función de escala de soporte compacto, solución de la ecuación de doble escala (1.6) es única [43, Theorem 3.1] y continua [44, Theorem 2.6]. Entonces, la serie de Fourier (3.40) es uniformemente convergente [45, Section 3.7, Theorem 13] y, por tanto, la serie (3.39) es uniformemente convergente en \mathbb{R} . □

Todo esto, junto con diversas propiedades y relaciones complementarias, permite calcular MRA-wavelets complejas en función de su expresión en las bases trigonométricas:

Corolario 57 (El algoritmo) *De acuerdo con el desarrollo anterior, para calcular una función de escala, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, de soporte compacto y su correspondiente MRA-wavelet, ψ , se pueden considerar los siguientes pasos:*

- *Supongamos que $\text{sup}(\varphi) \subseteq [2^u, 2^{u+1}]$. Entonces, la dimensión del sistema es 2^u , porque $(\hat{\varphi}^e)_i^{(n)} \neq 0$ sólo si $n = 2^u, 2^u + 1, \dots, 2^{u+1} - 1$ (pudiendo ser $(\hat{\varphi}^e)_i^{(n)} = 0$ para algún $n = 2^u, 2^u + 1, \dots, 2^{u+1} - 1$). Para cada $p \in \mathbb{Z}$, se considera el vector $\hat{\varphi}_p^e \in \mathbb{C}^{2^u}$ dado por (3.18).*
- *Como $\text{sup}(\varphi) \subseteq [2^u, 2^{u+1}]$ se tiene que $h[k] \neq 0$ sólo si $2^u \leq k \leq 2^{u+1}$. Las condiciones (a)-(c) del Corolario 39 son condiciones necesarias y suficientes para que la sucesión de números complejos $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$, con sólo un número finito de componentes no nulas, sea un filtro espejo-conjugado asociado a una análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$ con wavelet y función de escala ortogonales y de soporte compacto.*
- *Se consideran las matrices $2^u \times 2^u$ -dimensionales \tilde{H}_0, \tilde{H}_1 dadas en (3.20). La condición (3.33) para el caso $p = 0$ implica que 1 es un autovalor de la matriz \tilde{H}_0 y $\hat{\varphi}_0^e$ es su correspondiente autovector.*
- *Se considera la expresión (3.36) a partir de la cual se generan los coeficientes de índice impar (la convergencia del producto infinito que genera estos coeficientes viene dada por las condiciones de la Proposición 55) y la condición (3.33) proporciona de recurrencia que permite calcular el resto de coeficientes.*

- La condición de normalización de la función de escala, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$, es equivalente a

$$\sum_{n=2^u}^{2^{u+1}-1} (\hat{\varphi}^e)_0^{(n)} = 1.$$

Esto se debe a que, para la base trigonométrica \mathbf{e} , $\int_n^{n+1} e^{2\pi i k x} dx = \begin{cases} 1 & , \text{ si } k = 0 \\ 0 & , \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$.

- Una vez que $(h[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\hat{\varphi}_0^e$ han sido determinados, el resto de $\hat{\varphi}_p^e$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se obtienen mediante la recurrencia (3.33) y las condiciones iniciales (3.36). Entonces, $\varphi(x)$ puede ser calculada con precisión tan alta como se quiera para cualquier $x \in \mathbb{R}$ mediante

$$\varphi(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\hat{\varphi}^e)_p^{(n(x))} e_p(x)$$

con $n(x) = \lfloor x \rfloor$, para p suficientemente grande. Finalmente, la wavelet ψ puede calcularse mediante la ecuación wavelet o mediante el sistema (3.17).

Capítulo 4

Wavelet Frames

Las condiciones para que una función ψ sea una wavelet ortonormal pueden llegar a ser muy restrictivas y parece conveniente tratar de utilizar familias de funciones más generales que compartan una filosofía similar. El concepto de frame [27] generaliza la noción de base de Riesz (imagen de una base ortonormal por un operador invertible y acotado), y en particular la noción de base ortonormal, permitiendo redundancia en el propio frame¹, pero manteniendo la computabilidad y dependencia continua en f de los coeficientes $c_i(f)$ en la expansión frame de una señal f . Este capítulo se dedica a la aplicación de técnicas espectrales en la teoría de frames y, en particular, frames de tipo wavelet.

El capítulo se divide en dos partes principales. La primera parte se presenta en la Sección 4.1 e incluye un estudio de wavelet frames generales. La segunda parte, en la Sección 4.2, aborda el caso especial de wavelet frames asociados a multirresoluciones generalizadas o funciones refinables. El estudio restringe la atención al caso unidimensional.

En la primera parte, siguiendo el espíritu de las técnicas de fiberización de Ron y Shen utilizando el operador frame $S = T_X T_X^*$, el Teorema 61 en la Sección 4.1.1 caracteriza los sistemas wavelet X , de la forma (4.6), que son sistemas de Bessel, frames o frames ajustados de $L^2(\mathbb{R})$. Una de las ventajas de las técnicas espectrales frente a las técnicas de fiberización se debe al hecho de que los sistemas wavelet de la forma (4.6) son invariantes por dilataciones pero no por traslaciones. Las técnicas de fiberización trabajan en el dominio de Fourier, esto es, en la representación espectral del operador de traslación T dada en la Proposición 19. Con el fin de obtener una expresión descomponible del operador frame, necesitan extender el sistema wavelet a un sistema equivalente invariante por traslaciones, denominado *sistema quasi-afín* (véase la Observación 62 para más detalles). Los elementos de la matriz y las fibras del operador descomponible $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}$ están dados en el Teorema 64. Los Teoremas 61 y 64 llevan a una descripción

¹En realidad, las bases de Riesz son frames no redundantes (exactas), y las cotas de las bases de Riesz coinciden con las cotas frame (véase, por ejemplo, los Teoremas 5.4.1 y 6.1.1 en [27]).

asequible de los wavelet frames ajustados en el Corolario 65. Finalmente, la Sección 4.1.2 muestra como se puede utilizar el Corolario 65 para determinar los wavelet frames ajustados de soporte mínimo. Como en [67], en dicho desarrollo, las clases de Hardy [131, 132, 77] juegan un papel central. En particular, las funciones operador-valuadas denominadas *funciones operador rígidas de Taylor* por Halmos [77] y *funciones M^+ -internas* por Rosenblum y Rovnyak [131] (véase la Sección **Funciones de Hardy** para más detalles). En términos generales, el Lema 22 (de Halmos), el Lema 68 (de Rovnyak) y la Proposición 69 llevan a obtener la caracterización de los sistemas wavelet frame ajustados de la forma (4.6), con Ψ de cardinal finito y tales que $\psi \in \Psi$, mediante matrices M^+ -internas, de dimensión el cardinal de Ψ , y satisfaciendo ciertas propiedades. Por último, se discuten los casos de Cardinal de $\Psi \in \{1, 2\}$ en las Secciones 4.1.2 y 4.1.2.

La segunda parte del capítulo (Sección 4.2), incluye un estudio de los Principios de Extensión obtenidos inicialmente por Ron y Shen [127, 126] en el análisis de wavelet frames asociados a funciones refinables y como las técnicas espectrales permiten reformular estos principios en términos de matrices de “tipo Lawton”. Los subespacios invariantes por traslaciones son pieza clave en esta teoría. La Sección 4.2.1 reescribe resultados fundamentales asociados a este tipo de subespacios en términos de la transformación de Fourier periodizada, uno de los modelos espectrales para el operador de traslación introducidos en este trabajo. La Sección 4.2.2 contiene una introducción a los Principios de Extensión y una revisión de parte de la literatura asociada. En relación con el Principio de Extensión Unitaria, cabe destacar los trabajos fundacionales de Ron y Shen [127, 126] y trabajos posteriores de Benedetto y Treiber [18] y Chui y He [29]. El Principio de Extensión Unitaria fue generalizado por Daubechies, Han, Ron y Shen [42] y Chui, He y Stöckler [28] en la forma del Principio de Extensión Oblicua. Para más detalles, véase este trabajo, y también los trabajos de Atreas, Melas y Stavropoulos [8] y Han [78], y las referencias en ellos citados. La Sección 4.2.3 contiene la aplicación de la representación espectral \mathcal{F} al Principio de Extensión Oblicua (y, por consiguiente, al Principio de Extensión Unitaria como caso particular) dando lugar a la reformulación de su condición principal mediante los sistemas de ecuaciones lineales que involucran los coeficientes de las máscaras y matrices “tipo Lawton” (Proposición 99). Los resultados siguientes estudian diversas propiedades de los frames ajustados. En particular, se reformula el Teorema de caracterización de MRA-wavelets ortonormales (Teorema 108). Además, el posterior estudio de la relación entre OEP y UEP en su formulación matricial deriva en la Observación 118 acerca de la imposibilidad del paso de uno a otro en el caso finito. Por último, en esta sección se muestran dos ejemplos del cálculo de framelets ajustados para dos funciones de refinamiento distintas (una ortonormal y la otra no). Finalmente, en la Sección 4.2.4 se deducen relaciones de “tipo Lawton” similares a partir de las técnicas espectrales desarrolladas en la Sección 4.1 y las relaciones de doble escala presentes en el ámbito de la multirresolución (Teorema 121 y fórmula 4.127).

Los contenidos de la Sección 4.1 se recogen en la publicación de Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [70], pendiente de revisión, mientras que los contenidos de la

Sección 4.2 se recogen en la publicación de Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [69], en preparación.

4.1. Técnicas espectrales en wavelet frames

Se comienza con una introducción de los conceptos básicos en la teoría de frames.

Sea \mathcal{H} un espacio Hilbert separable con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ y producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ (lineal en la primera componente y conjugado-lineal en la segunda). Un subconjunto numerable X de \mathcal{H} se denomina *frame de \mathcal{H}* si existen constantes $A, B > 0$ tales que se verifican las siguientes desigualdades:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{x \in X} |\langle f, x \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq B \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}. \quad (4.1)$$

X es un frame de \mathcal{H} si, y sólo si, el operador

$$T_X : l^2(X) \rightarrow \mathcal{H}, \quad T_X \{c_x\}_{x \in X} := \sum_{x \in X} c_x x \quad (4.2)$$

está bien definido y acotado de $l^2(X)$ en \mathcal{H} . En ese caso, T_X se denomina *operador pre-frame* u *operador de síntesis*, el operador adjunto, dado por

$$T_X^* : \mathcal{H} \rightarrow l^2(X), \quad T_X^* f = \{\langle f, x \rangle_{\mathcal{H}}\}_{x \in X} \quad (4.3)$$

se denomina *operador de análisis*, y el operador $S = T_X T_X^*$,

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad S f = T_X T_X^* f = \sum_{x \in X} \langle f, x \rangle_{\mathcal{H}} x \quad (4.4)$$

se conoce como *operador frame* (la serie que define S converge incondicionalmente para todo $f \in \mathcal{H}$, esto es, para toda permutación de los sumandos, la serie resultante es convergente). Si el operador frame S es acotado, positivo e invertible, $S^{-1}X = \{S^{-1}x : x \in X\}$ es un frame denominado *frame dual canónico* de X , y se satisface la “fórmula de reconstrucción perfecta”

$$f = \sum_{x \in X} \langle f, S^{-1}x \rangle_{\mathcal{H}} x, \quad (f \in \mathcal{H}), \quad (4.5)$$

donde, nuevamente, la serie converge incondicionalmente para todo $f \in \mathcal{H}$. Para más detalles, véanse, por ejemplo, el Lema 5.1.5 y los Teoremas 5.1.6 y 5.5.1 en el libro de Christensen [27].

Para un frame X , las constantes A, B más ajustadas posibles en (4.1) son $A = \|S^{-1}\|^{-1}$ y $B = \|S\| = \|T_X\|^2 = \|T_X^*\|^2$ (ver [27, Proposition 5.4.4]) y son denominadas

cotas frame. Un frame se denomina *ajustado (tight)* si sus cotas frame coinciden entre si.

En la serie de artículos [125, 127, 126, 128, 129], Ron y Shen estudian un caso particular de frames, los llamados *frames afines* en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Dicho estudio se realiza vía *técnicas de fiberización* para sistemas invariantes por traslaciones X , es decir, representaciones integrales, en el dominio de Fourier, de los operadores $S^* = T_X^* T_X$ (análisis de la Grammiana) y $S = T_X T_X^*$ (análisis de la Grammiana dual) (véase también [42, 130]).

En este trabajo se focaliza la atención en un caso especial de sistemas afines, los *sistemas wavelet (diádicos)* de $L^2(\mathbb{R})$, esto es, sistemas de la forma

$$X = \{\psi_{k,j} := D^k T^j \psi : \psi \in \Psi, k, j \in \mathbb{Z}\}, \quad (4.6)$$

donde Ψ es un subconjunto numerable finito de $L^2(\mathbb{R})$, y T y D son los operadores de traslación y dilatación (diádica) en $L^2(\mathbb{R})$ definidos en (2.1) para los valores prefijados $u = 1$ y $s = 2$. En este caso, se dice que X es el *sistema wavelet generado por Ψ* .

4.1.1. Técnicas espectrales frente a fiberización para wavelet frames

Aunque los resultados teóricos principales de esta sección pueden darse en el contexto más general considerado por Ron y Shen [125, 127, 126, 128, 129] en el estudio de sistemas afines en $L^2(\mathbb{R}^d)$ vía técnicas de fiberización, se restringe la atención al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ y los sistemas wavelet X de la forma (4.6).

En primer lugar, se definen los conceptos de operador descomponible y diagonalizable para operadores acotados y se muestra un resultado conocido sobre los mismos.

Definición 58 *Se dice que un operador acotado $S : L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ es descomponible cuando hay una función $\omega \mapsto S(\omega)$ en $\partial\mathbb{D}$ tal que $S(\omega) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador acotado y para cada $\mathbf{u} \in L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$, $S(\omega)\mathbf{u}(\omega) = [S\mathbf{u}](\omega)$ para casi todos $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Para un operador descomponible S se puede escribir*

$$S = S(\omega).$$

Si, además, $S(\omega) = s(\omega)I_{\mathcal{H}}$, donde $I_{\mathcal{H}}$ es el operador identidad en \mathcal{H} y $s : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible, se dice que S es diagonalizable y se escribe $S = s(\omega)I_{\mathcal{H}}$.

Por completitud, el resultado siguiente incluye dos resultados bien conocidos en teoría de operadores. Las definiciones y terminología pueden ser encontrados en las referencias citadas en la demostración.

Proposición 59 *Sea $S : L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ un operador acotado.*

- (i) Un operador acotado $S : L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H}) \rightarrow L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ conmuta con todos los operadores diagonalizables si, y sólo si, S conmuta con el operador diagonalizable $\omega I_{\mathcal{H}}$.
- (ii) El conjunto de operadores descomponibles en $L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ es un álgebra de von Neumann con conmutador abeliano coincidiendo con la familia de operadores diagonalizables.

Demostración: (i) es consecuencia de la teoría espectral de operadores unitarios (de multiplicidad constante). Véase, por ejemplo, los Teoremas 5.4.8, 6.2.4 y 7.2.1 en [20]. (ii) es un caso particular de [88, theorem 14.1.10]. \square

El Teorema 61 es una variante del resultado probado por Ron y Shen [125, theorem 3.3.5] (ver también [127, theorem 3.1]). En este caso se trabaja sobre la representación de dilatación de la Proposición 14 y no sobre el dominio de Fourier. Se han incluido algunos comentarios comparando técnicas espectrales y de fiberización en la Observación 62. Previamente, se incluye un resultado técnico necesario para probar dicho Teorema 61:

Lema 60 Sea X un sistema wavelet en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma (4.6) y tal que

$$\sup_{\psi \in \Psi} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = M < \infty. \quad (4.7)$$

Entonces, el correspondiente operador T_X , dado por (4.2), es un operador acotado bien definido de $l^2(X)$ en $L^2(\mathbb{R})$ si, y sólo si, el correspondiente operador S , dado por (4.4), es un operador acotado bien definido en $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración: Si T_X es un operador acotado bien definido de $l^2(X)$ en $L^2(\mathbb{R})$, entonces su adjunto T_X^* y $S = T_X T_X^*$ son también operadores acotados bien definidos. Para la implicación contraria, es obvio que el operador de síntesis T_X , dado por (4.2), está bien definido al menos en el subespacio denso $l^{00}(X)$ de $l^2(X)$ formado por las sucesiones $\{c_x\} \in l^2(X)$ con un número finito de componentes no nulas. En principio, se considera T_X definido en $l^{00}(X)$. Cada operador T_X es *pre-cerrado* si, y sólo si, se satisface (4.7). Para ver esto, recuérdese que T_X es pre-cerrado si, y sólo si, para toda sucesión $\{c_n\} \subset l^{00}(X)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_X c_n = 0$ (ver, por ejemplo, [87, page 155]). Si se satisface (4.7) y $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_X c_n\|_{L^2(X)} \leq M \lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n\|_{l^2(X)} = 0$. En sentido contrario, si no se satisface (4.7), se considera una sucesión $\{\psi_n\} \subset \Psi$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \infty$ y una sucesión $\{c_n\} \subset l^{00}(X)$ cuyo único elemento no nulo es la componente n -ésima con módulo igual a $\|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^{-1}$ para $n \geq n_0$. Más aún, si T_X es pre-cerrado con clausura $\overline{T_X}$, el adjunto T_X^* está definido en un dominio denso $\mathcal{D}(T_X^*)$ de $L^2(\mathbb{R})$ y T_X^* es un operador cerrado, $T_X^* = [\overline{T_X}]^*$, $T_X^{**} = \overline{T_X}$

y el dominio de $\overline{T_X T_X^*}$, $\mathcal{D}(\overline{T_X T_X^*})$, es un *core*² de T_X^* (ver Observaciones 2.7.7 y 2.7.8 en [87]). Se asume que $\overline{T_X T_X^*}$ es acotado en $\mathcal{D}(\overline{T_X T_X^*})$ y, entonces, $\overline{T_X T_X^*}$ admite una extensión acotada y bien definida S en $L^2(\mathbb{R})$. Puesto que, para $h \in \mathcal{D}(\overline{T_X T_X^*})$,

$$|\langle Sh, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})}| = |\langle \overline{T_X T_X^*} h, h \rangle_{L^2(\mathbb{R})}| = \langle T_X^* h, T_X^* h \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \|T_X^* h\|_{l^2(X)}^2 \leq \|S\| \|h\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

T_X^* está también acotado en $\mathcal{D}(\overline{T_X T_X^*})$, T_X^* admite una extensión acotada y bien definida en $L^2(\mathbb{R})$ cuyo adjunto (acotado y bien definido) extiende T_X y $\overline{T_X}$. En consecuencia, T_X , definido en principio en $l^{00}(X)$, admite una extensión acotada y bien definida en $l^2(X)$. \square

Recuérdese que un subconjunto numerable X de un espacio Hilbert \mathcal{H} se dice que es un *sistema de Bessel* si la segunda desigualdad en (4.1) se satisface para una constante $B > 0$. En cada caso, todo valor B satisfaciendo (4.1) se denomina *cota de Bessel* para X .

Teorema 61 *Sea X un sistema wavelet en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma (4.6) y tal que se satisface (4.7). Entonces:*

1. *X es un sistema de Bessel si, y sólo si, el correspondiente operador S , dado por (4.4), es un operador acotado y bien definido en $L^2(\mathbb{R})$. En cada caso, S conmuta con D y, entonces, yendo a la representación en dilataciones dada en la Proposición 14, $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}$ es un operador descomponible en $L^2(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J}))$:*

$$\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1} = S(\omega).$$

Más aún, S es positivo, $S(\omega)$ es positivo para casi todos $\omega \in \partial\mathbb{D}$ y

$$\|S\| = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \|S(\omega)\| = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \sup_{\|u\|_{l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})} = 1} \|S(\omega)u\|_{l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})} < \infty.$$

2. *X es un frame para $L^2(\mathbb{R})$ si, y sólo si, S es un operador acotado y bien definido en $L^2(\mathbb{R})$ con inversa acotada en ambos extremos S^{-1} . En cada caso, S^{-1} también conmuta con D y*

$$\mathcal{G}S^{-1}\mathcal{G}^{-1} = S(\omega)^{-1}.$$

Equivalentemente, X es un frame para $L^2(\mathbb{R})$ si, y sólo si,

$$\alpha := \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \sup_{\|u\|_{l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})} = 1} \|S(\omega)u\|_{l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})} < \infty$$

²Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Dado un operador $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ no acotado y cerrado, un subespacio \mathcal{D}_0 denso en el dominio de T se dice que es un *core* para T si

$$\overline{G(T)|_{\mathcal{D}_0}} = G(T),$$

donde $G(T) = \{(h, Th) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : h \in \operatorname{Dominio}(T)\}$ denota al grafo de T .

y

$$\beta := \operatorname{ess\,inf}_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \inf_{\|u\|_{l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})} = 1} \|S(\omega)u\|_{l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})} > 0;$$

en cada caso, $\|S\| = \alpha$ y $\|S^{-1}\| = \beta^{-1}$.

3. X es un frame ajustado para $L^2(\mathbb{R})$, con cota frame B , si, y sólo si, $S = B I_{L^2(\mathbb{R})}$ o, equivalentemente,

$$\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1} = B I_{l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})}.$$

Demostración:

1. Es bien sabido [27, Theorem 3.2.3] que un subconjunto numerable X de un espacio Hilbert \mathcal{H} es un sistema de Bessel con cota de Bessel B si, y sólo si, el correspondiente operador de síntesis T_X , dado por (4.2), es un operador acotado y bien definido y $\|T_X\| \leq B^{1/2}$. Por el Lema 60, T_X es un operador acotado y bien definido si, y sólo si, el correspondiente operador S , dado por (4.4), es un operador acotado y bien definido en $L^2(\mathbb{R})$. En cada caso, $\|T_X^*\| = \|T_X\|$, y S es positivo, ya que $\langle Sf, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle T_X^* f, T_X^* f \rangle_{l^2(X)} \geq 0$. Más aún, S conmuta con el operador de dilatación D :

$$SDf = \sum_{\substack{k, j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle Df, D^k T^j \psi \rangle D^k T^j \psi = \sum_{\substack{k, j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, D^{k-1} T^j \psi \rangle D^k T^j \psi = DSf, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

(Se utiliza que D es unitario, $D^* = D^{-1}$, y que la serie que define S converge incondicionalmente para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Véase [27, Corollary 3.2.5] y el Lema 63.) La Proposición 59 implica que $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}$ es un operador descomponible en $L^2(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J}))$. Ya que S es positivo, $S(\omega)$ es positivo casi siempre (ver [88, Proposition 14.1.8-9]). Siendo \mathcal{G} unitario, $\|S\| = \|\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}\|$ y, por [88, Proposition 14.1.9],

$$\|S\| = \|\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}\| = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \|S(\omega)\|.$$

2. En términos de S , las desigualdades en (4.1) se ven como

$$A \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \langle Sf, f \rangle \leq B \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

es decir, $AI_{L^2(\mathbb{R})} \leq S \leq BI_{L^2(\mathbb{R})}$. En particular, la primera desigualdad implica que $A \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|Sf\|_{L^2(\mathbb{R})}$, para todas $f \in L^2(\mathbb{R})$. Ya que S es positivo, esto es equivalente a la existencia de una inversa acotada en ambos extremos S^{-1} de S (ver [133, Theorem 12.12.c]). Que S^{-1} exista implica que $\operatorname{Rango}(S) = \operatorname{Rango}(T_X) = L^2(\mathbb{R})$, y un sistema de Bessel X es un frame si, y sólo si, esta última condición

se satisface (ver [27, Theorem 5.5.1]). Además, $AI_{L^2(\mathbb{R})} \leq S \leq BI_{L^2(\mathbb{R})}$ implica que $0 \leq I_{L^2(\mathbb{R})} - B^{-1}S \leq \frac{B-A}{B}I_{L^2(\mathbb{R})}$ y, en consecuencia,

$$\|I_{L^2(\mathbb{R})} - B^{-1}S\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle (I_{L^2(\mathbb{R})} - B^{-1}S)f, f \rangle| \leq \frac{B-A}{B} < 1,$$

por lo que

$$S^{-1} = B^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (I_{L^2(\mathbb{R})} - B^{-1}S)^k,$$

donde la última serie converge en norma (uniformemente). Puesto que el conjunto de operadores descomponibles es una C^* -álgebra (más aún, un álgebra de von Neumann, ver Proposición 59), S^{-1} es también un operador descomponible en la representación de dilatación dada en la Proposición 14 y (ver [88, Proposition 14.1.8])

$$\mathcal{G}S^{-1}\mathcal{G}^{-1} = S(\omega)^{-1}.$$

(Nótese que $S(\omega)$ y $S(\omega)^{-1}$ están definidos para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$.) Recuérdesse que para un operador acotado normal S en un espacio Hilbert \mathcal{H} , S tiene un inverso acotado en ambos extremos si, y sólo si, $0 < \beta := \inf\{\|Sx\|_{\mathcal{H}} : x \in \mathcal{H}, \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\}$ y, entonces, $\|S^{-1}\| = \beta^{-1}$ (ver [87, Lemma 2.4.8] y [133, Theorem 12.12.c]). Por tanto, siendo S , $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}$ y $S(\omega)$ positivos, el inverso acotado en ambos extremos S^{-1} existe si, y sólo si,

$$\begin{aligned} \infty &> \frac{1}{\operatorname{ess\,inf}_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \inf_{\|u\|_{L^2(\mathbb{J}) \oplus L^2(\mathbb{J})} = 1} \|S(\omega)u\|_{L^2(\mathbb{J}) \oplus L^2(\mathbb{J})}} = \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \frac{1}{\inf_{\|u\|_{L^2(\mathbb{J}) \oplus L^2(\mathbb{J})} = 1} \|S(\omega)u\|_{L^2(\mathbb{J}) \oplus L^2(\mathbb{J})}} = \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \|S(\omega)^{-1}\| = \|(\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1})^{-1}\| = \\ &= \frac{1}{\inf_{\|\mathbf{u}\|_{L^2(\partial\mathbb{D}, L^2(\mathbb{J}) \oplus L^2(\mathbb{J}))} = 1} \|(\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1})\mathbf{u}\|_{L^2(\partial\mathbb{D}, L^2(\mathbb{J}) \oplus L^2(\mathbb{J}))}} \end{aligned}$$

(véase [88, Propositions 14.1.8–9] para más detalles).

3. Si X es un frame, en términos de *pseudo-inversos*³,

$$S^{-1} = T_X^*|^{-1}T_X|^{-1} = (T_X|^{-1})^*T_X|^{-1},$$

$\|T_X^*|^{-1}\| = \|T_X|^{-1}\|$ y las cotas frame son $B = \|T_X\|^2 = \|T_X^*\|^2$ y $A = 1/\|T_X|^{-1}\|^2 = 1/\|T_X^*|^{-1}\|^2$ (ver [27, Lemmas 5.5.4–A.7.2] para más detalles). Por tanto, X es un frame ajustado si, y sólo si, X es un frame y $\|T_X\| \cdot \|T_X|^{-1}\| = 1$. En cada caso, para $f \in \mathfrak{N}_{T_X}^\perp$, $\|f\| = \|T_X|^{-1}T_X f\| \leq \|T_X|^{-1}\| \|T_X f\|$, por lo que

$$\|T_X\| \|f\| = \frac{1}{\|T_X|^{-1}\|} \|f\| \leq \|T_X f\| \leq \|T_X\| \|f\|$$

y, entonces, $\|T_X\| \|f\| = \|T_X f\|$. Es decir, $T_X/\|T_X\|$ es una isometría parcial con espacio inicial $\mathfrak{N}_{T_X}^\perp$ y espacio final $L^2(\mathbb{R})$. La proyección ortogonal sobre el espacio final es

$$I_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{T_X T_X^*}{\|T_X\|^2} = \frac{S}{\|S\|} = B^{-1}S.$$

La convergencia es consecuencia del hecho de que (4.1) es equivalente a $AI \leq S \leq BI$. Por último, que $\mathcal{G}U\mathcal{G}^{-1}$ sea un operador diagonalizable constante $I_{l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})}$ si, y sólo si, $U = I_{L^2(\mathbb{R})}$ es justamente [88, Proposition 14.1.8.iv].

□

Observación 62 En el Teorema 61, el operador frame $S = T_X T_X^*$ tiene una imagen descomponible $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}$ en la representación de dilatación dada en la Proposición 14 gracias al hecho de que S y D conmutan (ver Proposición 59). ¿Qué pasa con las relaciones entre S y el operador de traslación T para que S tenga imágenes descomponibles $\mathcal{F}S\mathcal{F}^{-1}$ y $\mathcal{F}_*S\mathcal{F}_*^{-1}$ en las representaciones de traslación dadas en las Proposiciones 16 y 19? Esta cuestión es la piedra angular para el desarrollo de las *técnicas de fiberización* para sistemas wavelet de $L^2(\mathbb{R})$ de la forma (4.6) en el dominio de Fourier, esto es, en la representación de traslación dada en la Proposición 19.

Para los operadores de traslación y dilatación, T y D , definidos en $L^2(\mathbb{R})$ por (2.1), y para el caso particular de $u = 1$ y $s = 2$, se tiene $TD = DT^2$. Tomando adjuntos, $D^{-1}T^{-1} = T^{-2}D^{-1}$. También, $D = T^{-1}DT^2$ o $DT^{-2} = T^{-1}D$, y $D^{-1} = T^{-2}D^{-1}T$ o $T^2D^{-1} = D^{-1}T$. Por tanto, en general,

$$\begin{aligned} T^j D^k &= D^k T^{j2^k}, & \text{si } k > 0 \text{ y } j \in \mathbb{Z}, \\ T^{j2^{|k|}} D^k &= D^k T^j, & \text{si } k < 0 \text{ y } j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

³Sea $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ espacios de Hilbert y se supone que $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ es un operador acotado con rango cerrado \mathcal{R}_U y núcleo \mathfrak{N}_U . El *pseudo-inverso* de U es el único operador $U|^{-1} : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ que satisface $\mathfrak{N}_{U|^{-1}} = \mathcal{R}_U^\perp$, $\mathcal{R}_{U|^{-1}} = \mathfrak{N}_U^\perp$ y $UU|^{-1}f = f$ para $f \in \mathcal{R}_U$ y $U|^{-1}Uf = f$ para $f \in \mathfrak{N}_U^\perp$, donde \perp denota el complemento ortogonal.

Dado un sistema wavelet de Bessel X en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma (4.6) y su correspondiente operador $S = T_X T_X^*$, para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
STf &= \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, T^{-1} D^k T^j \psi \rangle D^k T^j \psi = \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, T^{-1} D^k T^j \psi \rangle D^k T^j \psi + \sum_{k < 0} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, T^{-1} D^k T^j \psi \rangle D^k T^j \psi = \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, D^k T^{j-2^k} \psi \rangle D^k T^j \psi + \sum_{k < 0} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, T^{j2^{|k|}-1} D^k \psi \rangle T^{j2^{|k|}} D^k \psi
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
TSf &= \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, D^k T^j \psi \rangle T D^k T^j \psi = \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, D^k T^j \psi \rangle T D^k T^j \psi + \sum_{k < 0} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, D^k T^j \psi \rangle T D^k T^j \psi = \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, D^k T^j \psi \rangle D^k T^{j+2^k} \psi + \sum_{k < 0} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \langle f, T^{j2^{|k|}} D^k \psi \rangle T^{1+j2^{|k|}} D^k \psi.
\end{aligned}$$

Las sumas para $k \geq 0$ coinciden, no así las sumas para $k < 0$. Si para cada $k < 0$ se añaden al sistema afín X las funciones

$$\psi_{k,j}^l = T^{2^{|k|j+l}} D^k \psi = T^l D^k T^j \psi = 2^{k/2} \psi(2^k(\cdot - l) - j), \quad l = 1, 2, \dots, 2^{-k} - 1,$$

se obtiene un sistema \tilde{X}^q asociado con X tal que el correspondiente operador frame $S = T_{\tilde{X}^q} T_{\tilde{X}^q}^*$ conmuta con el operador de traslación T . Por tanto, cada S es un operador descomponible es cualquier representación espectral de T . Más aún, se tiene que $\tilde{X}^q = \tilde{X}_+^q \cup \tilde{X}_-^q$, donde

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_+^q &= \{\psi_{k,j} := D^k T^j \psi : \psi \in \Psi, k \geq 0, j \in \mathbb{Z}\} = \\
&= \{T^a D^k T^b \psi : \psi \in \Psi, k \geq 0, a \in \mathbb{Z}, 0 \leq b < 2^k\}, \\
\tilde{X}_-^q &= \{\psi_{k,j}^l := T^l D^k T^j \psi : \psi \in \Psi, k < 0, j \in \mathbb{Z}, 0 \leq l < 2^{-k}\} = \\
&= \{T^a D^k \psi : \psi \in \Psi, k < 0, a \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Una variante de \tilde{X}^q es la que Ron y Shen [127, Section 5] denominan *sistema quasi-afín* X^q asociado a X . En este caso, $X^q = X_+^q \cup X_-^q$, donde $X_+^q = \tilde{X}_+^q$, el sistema afín truncado X_0 de acuerdo a Ron y Shen [127, Section 4], y

$$\begin{aligned}
X_-^q &= \{2^{k/2} \psi_{k,j}^l := 2^{k/2} T^l D^k T^j \psi : \psi \in \Psi, k < 0, j \in \mathbb{Z}, 0 \leq l < 2^{-k}\} = \\
&= \{2^{k/2} T^a D^k \psi : \psi \in \Psi, k < 0, a \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Trabajando en el dominio de Fourier, Ron y Shen están forzados a considerar el sistema invariante por traslaciones \tilde{X}^q y probar una variante del siguiente resultado [127, Theorem 5.5]: el sistema wavelet X es un frame si, y sólo si, su homólogo quasi-afín X^q o \tilde{X}^q es un frame. En particular, el frame X es ajustado si, y sólo si, el sistema quasi-afín X^q o \tilde{X}^q es ajustado. Además, ambos sistemas X y X^q tienen cotas frame idénticas. La elección de la representación de dilatación de la Proposición 14 (o cualquier otra representación espectral para D) evita este inconveniente, ya que un sistema wavelet (en general, cualquier sistema afín) es invariante por dilataciones.

Para un sistema wavelet de Bessel X en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma (4.6), el operador $S = T_X T_X^*$ en la representación de dilatación de la Proposición 14, $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}$, está dado por

$$L^2(\partial\mathbb{D}; l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})) \xrightarrow{\mathcal{G}^{-1}} L^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{S} L^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathcal{G}} L^2(\partial\mathbb{D}; l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J}))$$

$$\mathcal{G}f = \tilde{\mathbf{f}} = \{f_{s,j}^{(m)}\} \mapsto f \mapsto Sf = \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}}^u \langle f, \psi_{k,j} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \psi_{k,j} \mapsto \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}}^u \langle f, \psi_{k,j} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathcal{G}\psi_{k,j}.$$

El superíndice 'u' añadido al símbolo de sumatorio \sum en la última expresión refleja que la serie que define S converge incondicionalmente para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$ (véase [27, Corollary 3.2.5]).

Lema 63 [27, Lemma 2.1.1] *Sea $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión en un espacio de Banach Y , y sea $y \in Y$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) $\sum_{k=1}^\infty y_k$ converge incondicionalmente a y en Y .
- (ii) Para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito F tal que $\|y - \sum_{k \in I} y_k\| \leq \epsilon$ para todos los conjuntos finitos $I \subset \mathbb{N}$ que contengan a F .

De acuerdo con el Lema 63, $\left[\sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \right]^u$ significa que, para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, se debe tomar el límite de las sumas sobre conjuntos finitos de tripletas adecuadas $(k, j, \psi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \Psi$. Éste es el modo correcto de interpretar las sumas y evitar cualquier posible "infinito" en cálculos parciales en relación a las expresiones que pueden aparecer más adelante.

Para aprovechar la representación de dilatación de la Proposición 14, se debe hacer uso de la matriz $(\alpha_{i,n}^{s,j,m})$, definida por (2.11). El siguiente resultado da una expresión para los coeficientes de la matriz y las fibras del operador descomponible $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}$ asociado con el sistema wavelet de Bessel X . Están escritas en términos de $\alpha_{i,n}^{s,j,m}$ y de las componentes $\{\hat{\psi}_i^{(n)}\}$ de cada $\psi \in \Psi$ (¡y no en términos de las componentes $\{\tilde{\psi}_{s,j}^{(m)}\}$!). El resultado está dado para la base ortonormal $\{u_{s,l}\}_{l \in \mathbb{J}, s = \pm}$ de $l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})$ fijada en la Proposición 14.

Teorema 64 *Para un sistema wavelet de Bessel X en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma (4.6), el operador $S = T_X T_X^*$ en la representación de dilatación de la Proposición 14, $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}$,*

tiene una matriz $[\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}]_{s,l}^{s',l'}$ cuyos elementos vienen dados por

$$[\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}]_{s,l}^{s',l'} : L^2(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$$

$$h(\omega) \mapsto h(\omega) \sum_{\sigma} \omega^{\sigma} \sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left(\sum_{k,j \in \mathbb{Z}}^u \overline{\alpha_{i,n+j}^{s,l,k}} \alpha_{i',n'+j}^{s',l',k+\sigma} \right) \left(\sum_{\psi \in \Psi}^u \overline{\hat{\psi}_i^{(n)}} \hat{\psi}_{i'}^{(n')} \right),$$

donde $l, l' \in \mathbb{J}$, $s, s' = \pm$. Por tanto, las fibras de $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1} = S(\omega)$ son

$$S(\omega) : l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J}) \longrightarrow l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})$$

$$u_{s,l} \mapsto \bigoplus_{s',l'} u_{s',l'} \sum_{\sigma} \omega^{\sigma} \sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left(\sum_{k,j \in \mathbb{Z}}^u \overline{\alpha_{i,n+j}^{s,l,k}} \alpha_{i',n'+j}^{s',l',k+\sigma} \right) \left(\sum_{\psi \in \Psi}^u \overline{\hat{\psi}_i^{(n)}} \hat{\psi}_{i'}^{(n')} \right),$$

para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$.

Demostración: Las identidades siguientes son consecuencia directa de (2.3), (2.7), (2.10) y (2.11):

$$\begin{aligned} \sum_{r,p,q} \overline{\tilde{\psi}_{r,p}^{(q)}} \alpha_{i,n-j}^{r,p,q} &= \sum_{r,p,q} \overline{\tilde{\psi}_{r,p}^{(q)}} \langle L_i^{(n-j)}, K_{r,p}^{(q)} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \\ &= \langle L_i^{(n-j)}, \sum_{r,p,q} \tilde{\psi}_{r,p}^{(q)} K_{r,p}^{(q)} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle L_i^{(n-j)}, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \overline{\hat{\psi}_i^{(n-j)}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para $f = K_{s,l}^{(m)}$ se tiene

$$\omega^m u_{s,l} \xrightarrow{\mathcal{G}^{-1}} K_{s,l}^{(m)} \xrightarrow{S} SK_{s,l}^{(m)} = \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}}^u \langle K_{s,l}^{(m)}, \psi_{k,j} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \psi_{k,j} \xrightarrow{\mathcal{G}} \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}}^u \langle K_{s,l}^{(m)}, \psi_{k,j} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \mathcal{G}\psi_{k,j}.$$

Utilizando (2.10) y la definición de \mathcal{G} en la Proposición 14,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}}^u \langle K_{s,l}^{(m)}, \psi_{k,j} \rangle \mathcal{G}\psi_{k,j} &= \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}}^u \overline{[D^k T^j \psi]_{s,l}^{(m)}} \left(\sum_{m',s',l'} \omega^{m'} \overline{[D^k T^j \psi]_{s',l'}^{(m')}} u_{s',l'} \right) = \\ &= \sum_{s',l'} \left(\omega^m \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}}^u \sum_{m'} \omega^{m'-m} \overline{[T^j \psi]_{s,l}^{(m-k)}} [T^j \psi]_{s',l'}^{(m-k)} \right) u_{s',l'} = \\ &= \sum_{s',l'} \left(\omega^m \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}}^u \sum_{\sigma} \omega^{\sigma} \overline{[T^j \psi]_{s,l}^{(m-k)}} [T^j \psi]_{s',l'}^{(m-k+\sigma)} \right) u_{s',l'}. \end{aligned}$$

Por el Lema 18, la última expresión coincide con

$$\sum_{s',l'} \left(\omega^m \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}}^u \sum_{\sigma} \omega^{\sigma} \left(\sum_{i,n} \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m-k}} \sum_{r,p,q} \alpha_{i,n-j}^{r,p,q} \overline{\tilde{\psi}_{r,p}^{(q)}} \right) \left(\sum_{i',n'} \alpha_{i',n'}^{s',l',m-k+\sigma} \sum_{r',p',q'} \overline{\alpha_{i',n'-j}^{r',p',q'} \tilde{\psi}_{r',p'}^{(q')}} \right) \right) u_{s',l'}$$

y, por (4.8), esto es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{s',l'} \left(\omega^m \sum_{\substack{k,j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}}^u \sum_{\sigma} \omega^{\sigma} \left(\sum_{i,n} \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m-k}} \widehat{\psi}_i^{(n-j)} \right) \left(\sum_{i',n'} \alpha_{i',n'}^{s',l',m-k+\sigma} \widehat{\psi}_{i'}^{(n'-j)} \right) \right) u_{s',l'} = \\ & = \sum_{s',l'} \left(\omega^m \sum_{\sigma} \omega^{\sigma} \sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left(\sum_{k,j \in \mathbb{Z}}^u \overline{\alpha_{i,n+j}^{s,l,k}} \alpha_{i',n'+j}^{s',l',k+\sigma} \right) \left(\sum_{\psi \in \Psi}^u \widehat{\psi}_i^{(n)} \widehat{\psi}_{i'}^{(n')} \right) \right) u_{s',l'}. \end{aligned}$$

Por tanto, los elementos de la matriz $[\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}]_{s,l}^{s',l'}$ satisfacen

$$[\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}]_{s,l}^{s',l'}(\omega^m) = \omega^m \sum_{\sigma} \omega^{\sigma} \sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left(\sum_{k,j \in \mathbb{Z}}^u \overline{\alpha_{i,n+j}^{s,l,k}} \alpha_{i',n'+j}^{s',l',k+\sigma} \right) \left(\sum_{\psi \in \Psi}^u \widehat{\psi}_i^{(n)} \widehat{\psi}_{i'}^{(n')} \right), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Puesto que $\{\omega^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$, obtenemos el resultado. \square

En particular, para wavelet frames ajustados, se deduce el siguiente corolario.

Corolario 65 *Sea X un sistema wavelet en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma (4.6) y tal que se satisfice (4.7). Entonces, X es un frame ajustado para $L^2(\mathbb{R})$, con cota frame B , si, y sólo si,*

$$\sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left(\sum_{k,j \in \mathbb{Z}}^u \overline{\alpha_{i,n+j}^{s,l,k}} \alpha_{i',n'+j}^{s',l',k+\sigma} \right) \left(\sum_{\psi \in \Psi}^u \widehat{\psi}_i^{(n)} \widehat{\psi}_{i'}^{(n')} \right) = B \delta_{s,s'} \delta_{l,l'} \delta_{\sigma}, \quad (4.9)$$

donde $s, s' = \pm$, $l, l' \in \mathbb{J}$, $\sigma \in \mathbb{Z}$ y δ denota la función delta de Dirac.

Demostración: Por el Teorema 61, X es un frame ajustado con cota frame B si, y sólo si, $S = B I_{L^2(\mathbb{R})}$ o, equivalentemente, $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1} = B I_{l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})}$, esto es, $S(\omega) = B I_{l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})}$, para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Considerando la expresión de las fibras $S(\omega)$ dadas en el Teorema 64, se obtiene el resultado. \square

4.1.2. Wavelet frames ajustados de soporte mínimo

En esta sección, el Corolario 65 es utilizado para determinar todos los wavelet frames ajustados para $L^2(\mathbb{R})$ de la forma (4.6), con cardinal de Ψ finito y tal que el soporte de cada $\psi \in \Psi$, $\text{sup}(\psi)$, está contenido en el intervalo $[0, 1]$. Nótese que, puesto que el cardinal de Ψ es finito, la condición (4.7) se satisfice de forma trivial.

Debido a la estructura de la base ortonormal $\{L_i^{(j)}\}$, definida por (2.6), el hecho de que $\text{sup}(\psi) \subseteq [0, 1]$, $\psi \in \Psi$, implica que sus expansiones (2.10) se ven como

$$\psi = \sum_{i \in \mathbb{I}} \widehat{\psi}_i^{(0)} L_i^{(0)}, \quad \psi \in \Psi,$$

ya que $\hat{\psi}_i^{(n)} = 0$ para $n \neq 0$. Por tanto, los sumandos no nulos en el lado izquierdo de (4.9) corresponden a $n = n' = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left(\sum_{k,j \in \mathbb{Z}}^u \overline{\alpha_{i,n+j}^{s,l,k}} \alpha_{i',n'+j}^{s',l',k+\sigma} \right) \left(\sum_{\psi \in \Psi}^u \overline{\hat{\psi}_i^{(n)}} \hat{\psi}_{i'}^{(n')} \right) = \\ & = \sum_{i,i'} \left(\sum_{k,j \in \mathbb{Z}}^u \overline{\alpha_{i,j}^{s,l,k}} \alpha_{i',j}^{s',l',k+\sigma} \right) \left(\sum_{\psi \in \Psi}^u \overline{\hat{\psi}_i^{(0)}} \hat{\psi}_{i'}^{(0)} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Siendo el cardinal de Ψ finito, de acuerdo con el Lema 63 y los comentarios que lo suceden, las sumas incondicionales en (4.10) pueden ser calculadas, por ejemplo, en el sentido siguiente:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,i'} \left(\sum_{k,j \in \mathbb{Z}}^u \overline{\alpha_{i,j}^{s,l,k}} \alpha_{i',j}^{s',l',k+\sigma} \right) \left(\sum_{\psi \in \Psi}^u \overline{\hat{\psi}_i^{(0)}} \hat{\psi}_{i'}^{(0)} \right) = \\ & = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{i,i'} \left[\sum_{k=-a}^a \sum_{j=-2^a}^{2^a} \overline{\alpha_{i,j}^{s,l,k}} \alpha_{i',j}^{s',l',k+\sigma} \right] \left[\sum_{\psi \in \Psi} \overline{\hat{\psi}_i^{(0)}} \hat{\psi}_{i'}^{(0)} \right]. \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso particular, el Corolario 65 puede ser reescrito como sigue:

Proposición 66 *Sea X un sistema wavelet en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma (4.6), donde Ψ tiene cardinal finito y $\text{sup}(\psi) \subseteq [0, 1]$ para todo $\psi \in \Psi$. Entonces, X es un frame ajustado para $L^2(\mathbb{R})$, con cota frame B , si, y sólo si,*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{i,i' \in \mathbb{I}} \left[\sum_{k=-a}^a \sum_{j=-2^a}^{2^a} \overline{\alpha_{i,j}^{s,l,k}} \alpha_{i',j}^{s',l',k+\sigma} \right] \left[\sum_{\psi \in \Psi} \overline{\hat{\psi}_i^{(0)}} \hat{\psi}_{i'}^{(0)} \right] = B \delta_{s,s'} \delta_{l-l'} \delta_{\sigma}, \quad (4.11)$$

con $s, s' = \pm$, $l, l' \in \mathbb{J}$, $\sigma \in \mathbb{Z}$.

A partir de este punto, se consideran las bases ortonormales de Haar $\{L_i^{(j)}\}$ y $\{K_{s,l}^{(k)}\}$ y la correspondiente matriz $(\alpha_{i,j}^{s,l,k})$ dadas en el Apéndice A.1. Esta elección lleva al siguiente resultado, escrito en forma vectorial.

Proposición 67 *Sea $\{L_i^{(0)}\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ la base ortonormal de Haar de $L^2([0, 1])$ dada en el Apéndice A.1. Sea $r \in \mathbb{N}$ y*

$$\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r\} \subset L^2[0, 1],$$

donde $\psi_j = \sum_i [\hat{\psi}_j]_i^{(0)} L_i^{(0)}$, $j = 1, \dots, r$. Sea

$$\Psi_i := \begin{pmatrix} [\hat{\psi}_1]_i^{(0)} \\ [\hat{\psi}_2]_i^{(0)} \\ \vdots \\ [\hat{\psi}_r]_i^{(0)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^r, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Entonces, el sistema wavelet X de la forma (4.6) generado por Ψ es un frame ajustado para $L^2(\mathbb{R})$, con cota frame B , si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\Psi_0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^r$.

2.

$$\sum_{k=\sup\{1, 1-\sigma\}}^{\infty} \langle \Psi_{2^{k-1}+\sigma}, \Psi_{2^{k-1}} \rangle_{\mathbb{C}^r} = B \delta_{\sigma}, \quad \sigma \in \mathbb{Z}. \quad (4.12)$$

3. Para $l \geq 1$, $l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t$, $p \geq 0$,

$$\sum_{k=-p}^0 \|\Psi_{2^{p+k} + \sum_{t=0}^{p+k-1} l_t 2^t}\|_{\mathbb{C}^r}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \|\Psi_{2^{p+k+l}}\|_{\mathbb{C}^r}^2 = B, \quad (4.13)$$

$$\sum_{k=\sup\{1, 1-\sigma\}}^{\infty} \langle \Psi_{2^{p+k+\sigma+l}}, \Psi_{2^{p+k+l}} \rangle_{\mathbb{C}^r} = 0, \quad \sigma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (4.14)$$

$$\sum_{k=\sup\{1, 1-\sigma\}}^{\infty} \langle \Psi_{2^{p+k+\sigma+l}}, \Psi_{2^{k-1}} \rangle_{\mathbb{C}^r} = 0, \quad \sigma \in \mathbb{Z}. \quad (4.15)$$

4. Para $l, l' \geq 1$, $l \neq l'$, $l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t$, $l' = 2^{p'} + \sum_{t=0}^{p'-1} l'_t 2^t$, $p, p' \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=\sup\{-p, -p'\}}^0 \delta_{(\sum_{t=0}^{-k} l_{p+k+t} 2^t) - (\sum_{t=0}^{-k} l'_{p'+k+t} 2^t)} \langle \Psi_{2^{p'+k} + \sum_{t=0}^{p'+k-1} l'_t 2^t}, \Psi_{2^{p+k} + \sum_{t=0}^{p+k-1} l_t 2^t} \rangle_{\mathbb{C}^r} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \Psi_{2^{p'+k+l'}}, \Psi_{2^{p+k+l}} \rangle_{\mathbb{C}^r} = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\sum_{k=\sup\{1, 1-\sigma\}}^{\infty} \langle \Psi_{2^{p'+k+\sigma+l'}}, \Psi_{2^{p+k+l}} \rangle_{\mathbb{C}^r} = 0, \quad \sigma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (4.17)$$

Demostración: Con el fin de evitar índices adicionales a lo largo de la demostración, se trabaja con $\psi \in \Psi$ genéricos y no con ψ_1, \dots, ψ_r . Se consideran las bases ortonormales de Haar $\{L_i^{(j)}\}$ y $\{K_{s,l}^{(k)}\}$ y la correspondiente matriz $(\alpha_{i,j}^{s,l,k})$ dadas en el Apéndice A.1. Para $s = s' = +$, $l = l' = 0$ y $\sigma = 0$ en (4.11) se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{i,i'} \left[\sum_{k=-a}^a \sum_{j=-2^a}^{2^a} \overline{\alpha_{i,j}^{s,l,k}} \alpha_{i',j}^{s',l',k+\sigma} \right] \left[\sum_{\psi} \overline{\hat{\psi}_i^{(0)}} \hat{\psi}_{i'}^{(0)} \right] = \\ = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(a + 1 + \sum_{k=1}^a 2^{-k} \right) \left[\sum_{\psi} |\hat{\psi}_0^{(0)}|^2 \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \left[\sum_{\psi} |\hat{\psi}_{2^r}^{(0)}|^2 \right]. \end{aligned}$$

La última expresión puede ser igual a B si, y sólo si, $\hat{\psi}_0^{(0)} = \int \psi = 0$ para todo $\psi \in \Psi$, que es la condición 1 de la proposición, y $\sum_{r=0}^{\infty} [\sum_{\psi} |\hat{\psi}_{2^r}^{(0)}|^2] = B$ es la condición (4.12) en la proposición para $\sigma = 0$. Asumiendo que $\hat{\psi}_0^{(0)} = 0$ para todo $\psi \in \Psi$, los cálculos directos con los coeficientes $\alpha_{i,j}^{s,l,k}$ conducen al hecho de que las condiciones en (4.11), para $s = s' = +$, están relacionadas con la Tabla 4.1.

Para obtener las condiciones en (4.11), para $s = s' = +$, la Tabla 4.1 es utilizada de la siguiente forma: se escogen los valores de l y l' , y se consideran las correspondientes filas en la tabla. Se escoge el valor de σ . En cada entrada de la tabla, los índices k e i están asociados con l , y los índices $k + \sigma$ e i' están asociados con l' . Se emparejan las columnas con el mismo k y j en ambas filas, se multiplica $\overline{\hat{\psi}_i^{(0)}}$ por $\hat{\psi}_{i'}^{(0)}$ para los índices i, i' seleccionados en el par de columnas, se suma en $\psi \in \Psi$ y, por último, se suma en todas las columnas emparejadas. Por ejemplo, para $l = l' = 0$ y $\sigma = 0$ se llega a la ecuación ya conocida

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{\psi} |\hat{\psi}_{2^{k-1}}^{(0)}|^2] = B,$$

la condición (4.12) para $\sigma = 0$ en la proposición. Para $l = l' = 0$ y $\sigma > 0$ se consigue (nótese que en este caso $j = 0$ en todas las columnas)

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{\psi} \overline{\hat{\psi}_{2^{k-1}}^{(0)}} \hat{\psi}_{2^{k-1+\sigma}}^{(0)}] = 0. \quad (4.18)$$

Para $l = l' = 0$ y $\sigma < 0$, la condición resultante $\sum_{k=1-\sigma}^{\infty} [\sum_{\psi} \overline{\hat{\psi}_{2^{k-1}}^{(0)}} \hat{\psi}_{2^{k-1+\sigma}}^{(0)}] = 0$ coincide con (4.18) para $-\sigma$. Ambas corresponden a la condición (4.12) para $\sigma \neq 0$ en la proposición. Para $l = l' = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t$, $p \geq 0$, y $\sigma = 0$,

$$\sum_{k=-p}^{-1} [\sum_{\psi} |\hat{\psi}_{2^{p+k} + \sum_{t=0}^{p+k-1} l_t 2^t}^{(0)}|^2] + [\sum_{\psi} |\hat{\psi}_l^{(0)}|^2] + \sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{\psi} |\hat{\psi}_{2^{p+k+l}}^{(0)}|^2] = B,$$

que es la condición (4.13) en la proposición. Para $l = l' = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t$, $p \geq 0$, y $\sigma > 0$ (nótese que en este caso hay diferentes j en la primera columna de la tabla 4.1),

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{\psi} \overline{\hat{\psi}_{2^{p+k+l}}^{(0)}} \hat{\psi}_{2^{p+k+\sigma+l}}^{(0)}] = 0. \quad (4.19)$$

Para $l = l' = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t$, $p \geq 0$, y $\sigma < 0$, la condición $\sum_{k=1-\sigma}^{\infty} [\sum_{\psi} \overline{\hat{\psi}_{2^{p+k+l}}^{(0)}} \hat{\psi}_{2^{p+k+\sigma+l}}^{(0)}] = 0$ coincide con (4.19). Ambas corresponden a la condición (4.14) en la proposición. Para $l = 0$, $l' = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l'_t 2^t$, $p \geq 0$, y $\sigma \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=\sup\{1, 1-\sigma\}}^{\infty} [\sum_{\psi} \overline{\hat{\psi}_{2^{k-1}}^{(0)}} \hat{\psi}_{2^{p+k+\sigma+l'}}^{(0)}] = 0,$$

$s = s' = +$	2^0	2^1	2^2	2^3	\dots
$\mathbf{1}, \mathbf{l}' = \mathbf{0}$ (0)	$k, k + \sigma = 1$ $j = 0$ $i, i' = 2^0$	$k, k + \sigma = 2$ $j = 0$ $i, i' = 2^1$	$k, k + \sigma = 3$ $j = 0$ $i, i' = 2^2$	$k, k + \sigma = 4$ $j = 0$ $i, i' = 2^3$	\dots
$\mathbf{1}, \mathbf{l}' = \mathbf{1}$ (1)	$\mathbf{k}, \mathbf{k} + \sigma = \mathbf{0}$ $\mathbf{j} = \mathbf{1}$ $\mathbf{i}, \mathbf{i}' = \mathbf{2}^0$	$k, k + \sigma = 1$ $j = 0$ $i, i' = 2^1 + 1$	$k, k + \sigma = 2$ $j = 0$ $i, i' = 2^2 + 1$	$k, k + \sigma = 3$ $j = 0$ $i, i' = 2^3 + 1$	\dots
$\mathbf{1}, \mathbf{l}' = \mathbf{2}$ (10)	$k, k + \sigma = -1$ $j = 2$ $i, i' = 2^0$	$\mathbf{k}, \mathbf{k} + \sigma = \mathbf{0}$ $\mathbf{j} = \mathbf{1}$ $\mathbf{i}, \mathbf{i}' = \mathbf{2}^1$	$k, k + \sigma = 1$ $j = 0$ $i, i' = 2^2 + 2$	$k, k + \sigma = 2$ $j = 0$ $i, i' = 2^3 + 2$	\dots
$\mathbf{1}, \mathbf{l}' = \mathbf{3}$ (11)	$k, k + \sigma = -1$ $j = 3$ $i, i' = 2^0$	$\mathbf{k}, \mathbf{k} + \sigma = \mathbf{0}$ $\mathbf{j} = \mathbf{1}$ $\mathbf{i}, \mathbf{i}' = \mathbf{2}^1 + \mathbf{1}$	$k, k + \sigma = 1$ $j = 0$ $i, i' = 2^2 + 3$	$k, k + \sigma = 2$ $j = 0$ $i, i' = 2^3 + 3$	\dots
$\mathbf{1}, \mathbf{l}' = \mathbf{4}$ (100)	$k, k + \sigma = -2$ $j = 4$ $i, i' = 2^0$	$k, k + \sigma = -1$ $j = 2$ $i, i' = 2^1$	$\mathbf{k}, \mathbf{k} + \sigma = \mathbf{0}$ $\mathbf{j} = \mathbf{1}$ $\mathbf{i}, \mathbf{i}' = \mathbf{2}^2$	$k, k + \sigma = 1$ $j = 0$ $i, i' = 2^3 + 4$	\dots
$\mathbf{1}, \mathbf{l}' = \mathbf{5}$ (101)	$k, k + \sigma = -2$ $j = 5$ $i, i' = 2^0$	$k, k + \sigma = -1$ $j = 2$ $i, i' = 2^1 + 1$	$\mathbf{k}, \mathbf{k} + \sigma = \mathbf{0}$ $\mathbf{j} = \mathbf{1}$ $\mathbf{i}, \mathbf{i}' = \mathbf{2}^2 + \mathbf{1}$	$k, k + \sigma = 1$ $j = 0$ $i, i' = 2^3 + 5$	\dots
$\mathbf{1}, \mathbf{l}' = \mathbf{6}$ (110)	$k, k + \sigma = -2$ $j = 6$ $i, i' = 2^0$	$k, k + \sigma = -1$ $j = 3$ $i, i' = 2^1$	$\mathbf{k}, \mathbf{k} + \sigma = \mathbf{0}$ $\mathbf{j} = \mathbf{1}$ $\mathbf{i}, \mathbf{i}' = \mathbf{2}^2 + \mathbf{2}$	$k, k + \sigma = 1$ $j = 0$ $i, i' = 2^3 + 6$	\dots
$\mathbf{1}, \mathbf{l}' = \mathbf{7}$ (111)	$k, k + \sigma = -2$ $j = 7$ $i, i' = 2^0$	$k, k + \sigma = -1$ $j = 3$ $i, i' = 2^1 + 1$	$\mathbf{k}, \mathbf{k} + \sigma = \mathbf{0}$ $\mathbf{j} = \mathbf{1}$ $\mathbf{i}, \mathbf{i}' = \mathbf{2}^2 + \mathbf{3}$	$k, k + \sigma = 1$ $j = 0$ $i, i' = 2^3 + 7$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

$s = s' = +$	$2^r, 0 \leq r < p$	2^p	$2^r, r > p$
$\mathbf{1}, \mathbf{l}' > \mathbf{0}$ $(l, l' = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t)$	$k, k + \sigma = r - p$ $j = \sum_{t=0}^{p-r} l_{r+t} 2^t$ $i, i' = 2^r + \sum_{t=0}^{r-1} l_t 2^t$	$\mathbf{k}, \mathbf{k} + \sigma = \mathbf{0}$ $\mathbf{j} = \mathbf{1}$ $\mathbf{i}, \mathbf{i}' = \mathbf{1}, \mathbf{l}'$	$k, k + \sigma = r - p$ $j = 0$ $i, i' = 2^r + l$

Tabla 4.1: Distribución de los índices para $s = s' = +$ en el conjunto de ecuaciones (4.11) utilizando las bases ortonormal de Haar $\{L_i^{(j)}\}$ y $\{K_{s,l}^{(k)}\}$ y la correspondiente matriz $(\alpha_{i,j}^{s,l,k})$ dadas en el Apéndice A.1. Ver la demostración de la Proposición 67 para más detalles.

que es la condición (4.15) en la proposición. Para $l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t$, $l' = 2^{p'} + \sum_{t=0}^{p'-1} l'_t 2^t$, $p, p' \geq 0$, y $\sigma = 0$,

$$\sum_{k=\sup\{-p, -p'\}}^{-1} \delta_{(\sum_{t=0}^{-k} l_{p+k+t} 2^t) - (\sum_{t=0}^{-k} l'_{p'+k+t} 2^t)} \left[\sum_{\psi} \overline{\hat{\psi}_{2^{p+k} + \sum_{t=0}^{p+k-1} l_t 2^t}^{(0)}} \hat{\psi}_{2^{p'+k} + \sum_{t=0}^{p'+k-1} l'_t 2^t}^{(0)} \right] +$$

$$+ \left[\sum_{\psi} \overline{\hat{\psi}_l^{(0)}} \hat{\psi}_{l'}^{(0)} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{\psi} \overline{\hat{\psi}_{2^{p+k+l}}^{(0)}} \hat{\psi}_{2^{p'+k+l}}^{(0)} \right] = 0,$$

que es la condición (4.16) en la proposición. Para $l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t$, $l' = 2^{p'} + \sum_{t=0}^{p'-1} l'_t 2^t$, $p, p' \geq 0$, y $\sigma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\sum_{k=\sup\{1, 1-\sigma\}}^{\infty} \left[\sum_{\psi} \overline{\hat{\psi}_{2^{p+k+l}}^{(0)}} \hat{\psi}_{2^{p'+k+\sigma+l}}^{(0)} \right] = 0,$$

que es la condición (4.17) en la proposición. Para $s = s' = -$, las condiciones derivadas del conjunto de ecuaciones (4.11) son equivalentes a las correspondientes a los parámetros $s = s' = +$. Para $s = +$ y $s' = -$, o $s = -$ y $s' = +$, el conjunto de ecuaciones (4.11) lleva a condiciones triviales. \square

Funciones de Hardy

No es sencillo manejar el conjunto de condiciones obtenidas para los vectores $\Psi_i \in \mathbb{C}^r$ en la Proposición 67. Una manera mejor de hacer frente a dicho conjunto de condiciones consiste en escribirlas en términos de funciones de Hardy en el espacio $H^+(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)$ definido en la Sección 2.2. En cada enfoque, las funciones matriciales internas y los resultados de Halmos (Lema 22) y Rovnyak (Lema 68) juegan un papel central.

Antes de continuar, se hace un pequeño recordatorio de la estructura y notaciones a utilizar durante el desarrollo siguiente. Los siguientes conceptos ya fueron presentados en el Capítulo 2.

Recordar que \mathbb{D} denota el disco abierto unidad en el plano complejo \mathbb{C} y $\partial\mathbb{D}$ su frontera, el círculo unidad. Así mismo, \mathcal{H} es un espacio Hilbert separable y $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es el espacio de operadores acotados en \mathcal{H} (en lo que sigue, se considerarán espacios de Hilbert de dimensión finita, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^r$, para que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ pueda identificarse con el espacio complejo de $(r \times r)$ -matrices). $H^2(\mathbb{D}; \mathcal{H})$ es la *clase de Hardy* de las funciones

$$\tilde{\mathfrak{h}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k h_k, \quad \lambda \in \mathbb{D}, h_k \in \mathcal{H},$$

con valores en \mathcal{H} , tales que $\sum \|h_k\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$. Para cada función $\tilde{\mathfrak{h}} \in H^2(\mathbb{D}; \mathcal{H})$ el límite no tangencial en el sentido fuerte

$$\text{s-lim}_{\lambda \rightarrow \omega} \tilde{\mathfrak{h}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k h_k =: \mathfrak{h}(\omega)$$

existe para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Las funciones $\tilde{\mathfrak{h}}(\lambda)$ y $\mathfrak{h}(\omega)$ se determinan la una a la otra (están conectadas por la fórmula de Poisson), por lo que se puede identificar $H^2(\mathbb{D}; \mathcal{H})$ con un subespacio de $L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$, llamado $H^+(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$, proporcionándole así a $H^2(\mathbb{D}; \mathcal{H})$ la estructura de espacio de Hilbert de $H^+(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ y encajándolo en $L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ como un subespacio (el espacio $L^2(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ ha sido definido en la Sección 2.1). El operador “multiplicación por ω ” en $H^+(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ se denota por M^+ , es decir,

$$[M^+\mathfrak{h}](\omega) := \omega \cdot \mathfrak{h}(\omega), \quad \mathfrak{h} \in H^+(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H}), \quad \omega \in \partial\mathbb{D}. \quad (4.20)$$

El operador M^+ es una isometría de $H^+(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ en $H^+(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$. Un subespacio $\mathfrak{M} \subseteq H^+(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ es denominado *subespacio ambulante para M^+* si $[M^+]^m \mathfrak{M} \perp [M^+]^n \mathfrak{M}$ para todo m y n enteros distintos y no negativos. El subespacio \mathfrak{C} de $H^+(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ es el formado por las funciones constantes, esto es, las funciones $\mathfrak{h} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que existe un vector $h \in \mathcal{H}$ con $\mathfrak{h}(\omega) = h$ para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Una función operador-valuada débilmente medible

$$A^+ : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \omega \mapsto A(\omega)$$

se llama⁴ *función M^+ -interna* o *función operador-valuada rígida de Taylor* si A^+ lleva \mathfrak{C} en $H^+(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ y $A^+(\omega)$ es, para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$, una isometría parcial en \mathcal{H} con el mismo espacio inicial.

De acuerdo con Halmos [77, Lemma 5], los subespacios ambulantes para M^+ y las funciones M^+ -internas (o funciones operador-valuadas rígidas de Taylor) están relacionados, como indica el Lema 22.

Otro resultado fundamental en lo sucesivo se debe a Rovnyak [132, Lemma 5].

Lema 68 (Rovnyak) *Si \mathcal{H} tiene dimensión finita r , no existe un conjunto ortonormal $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_{r+1}$ en $H^+(\partial\mathbb{D}; \mathcal{H})$ conteniendo $r + 1$ elementos y tal que $\omega^m \mathfrak{h}_i(\omega)$ es ortogonal a $\omega^n \mathfrak{h}_j(\omega)$ cualquiera que sea $m \neq n$.*

En términos de funciones de Hardy, la Proposición 67 se ve de la siguiente forma.

Proposición 69 *Bajo las condiciones de la Proposición 67, para $l \geq 0$ se considera la función de Hardy $\mathfrak{h}_l \in H^+(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C}^r)$ definida por*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0(\omega) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^k}, \\ \mathfrak{h}_l(\omega) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^{p+k+1}+l}, \quad l \geq 1, \quad l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t. \end{aligned}$$

⁴El nombre *función operador-valuada rígida de Taylor* es introducido por Halmos [77]. El nombre *función M^+ -interna* es utilizado por Rosenblum y Rovnyak [131] y sus colaboradores.

Entonces, el sistema wavelet X de la forma (4.6) generado por Ψ es un frame ajustado, con cota frame B , si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\Psi_0 = 0 \in \mathbb{C}^r, \quad (4.21)$$

$$\langle \omega^m \mathfrak{h}_{l'}(\omega), \omega^n \mathfrak{h}_l(\omega) \rangle_{H^+(\partial \mathbb{D}, \mathbb{C}^r)} = \delta_{m-n} \beta_{l,l'}, \quad l, l', m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (4.22)$$

donde

$$\beta_{l,l'} := \begin{cases} B & , \text{ si } l, l' = 0, \\ 0 & , \text{ si } l = 0, l' \geq 1, \\ B - \sum_{k=-p}^0 \|\Psi_{2^{p+k} + \sum_{t=0}^{p+k-1} l_t 2^t}\|_{\mathbb{C}^r}^2 & , \text{ si } \begin{cases} l = l' \geq 1, \\ l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t. \end{cases} \\ - \sum_{k=\sup\{-p, -p'\}}^0 \delta_{(\sum_{t=0}^{-k} l_{p+k+t} 2^t) - (\sum_{t=0}^{-k} l'_{p'+k+t} 2^t)} \times \\ \quad \times \langle \Psi_{2^{p'+k} + \sum_{t=0}^{p'+k-1} l'_t 2^t}, \Psi_{2^{p+k} + \sum_{t=0}^{p+k-1} l_t 2^t} \rangle_{\mathbb{C}^r} & , \text{ si } \begin{cases} l, l' \geq 1, l \neq l', \\ l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t, \\ l' = 2^{p'} + \sum_{t=0}^{p'-1} l'_t 2^t. \end{cases} \end{cases}$$

Demostración: La condición 1 de la Proposición 67 coincide con (4.21), y las condiciones 2–4 en la Proposición 67, es decir, las ecuaciones (4.12)–(4.17), son equivalentes a la condición (4.22) propuesta. Más detalladamente, las condiciones (4.12), (4.14), (4.15) y (4.17), todas ellas para $\sigma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se corresponden con la condición (4.22) para $m \neq n$. La condición (4.12) para $\sigma = 0$ corresponde a la primera línea de la definición de $\beta_{l,l'}$ en la condición (4.22), la condición (4.15) para $\sigma = 0$ corresponde a la segunda línea en la definición de $\beta_{l,l'}$ en la condición (4.22) y la condición (4.13) corresponde a la tercera línea en la definición de $\beta_{l,l'}$ en la condición (4.22). Por último, la condición (4.16) corresponde a la cuarta línea en la definición de $\beta_{l,l'}$ en la condición (4.22). \square

Una vez definidas unas condiciones más manejables para la caracterización de un wavelet frame ajustado en la proposición anterior, se pasa a estudiar los diferentes casos particulares en función del cardinal de Ψ , $r = |\Psi|$. En particular, se estudian los casos para $r = 1, 2$.

Caso $r = 1$: $\Psi = \{\psi\} \subset L^2(\mathbb{R})$

Para $r = 1$, la Proposición 69 permite obtener el siguiente corolario.

Corolario 70 *La única función $\psi \in L^2[0, 1]$ tal que el sistema wavelet X de la forma (4.6) generado por $\Psi = \{\psi\}$ es un frame ajustado para $L^2(\mathbb{R})$, con cota frame B , es proporcional a la wavelet de Haar,*

$$\psi = \beta [\chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}],$$

donde $\beta \in \mathbb{C}$ y $|\beta|^2 = B$.

Demostración: La condición (4.22) en la Proposición 69, con $l = l' \geq 0$ y $m \neq n$, implica que cada \mathfrak{h}_l es una función (M^+ -)interna escalar en $H^+(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$, salvo $\beta(l, l) = 0$. Ya que $\beta(0, 0) = B > 0$, \mathfrak{h}_0 es una función interna escalar en $H^+(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$. Nuevamente, la condición (4.22), ahora con $m = n = 0$, $l = 0$ y $l' \geq 1$, asegura que \mathfrak{h}_0 es ortogonal a toda $\mathfrak{h}_{l'}$, $l' \geq 1$. Entonces, según el Lema 68 (de Rovniak), se tiene $\mathfrak{h}_{l'} = 0$ para todo $l' \geq 1$. Por la condición (4.22) una vez más, con $m = n = 0$ y $l = l' = 1$, se tiene $\|\Psi_1\|^2 = |\hat{\psi}_1^{(0)}|^2 = B$, por lo que $\|\Psi_l\|^2 = |\hat{\psi}_l^{(0)}|^2 = 0$ para $l \neq 1$. \square

Observación 71 El Corolario 70 implica, en particular, que la única wavelet ortonormal $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ con $\text{sup}(\psi) \subseteq [0, 1]$ es la wavelet de Haar. Este hecho contradice el Teorema 5 en [67]. El principal problema en [67] es comprobar la condición (ii) de completitud del Corolario 3 (Teorema 30 en este trabajo) y la condición de suficiencia dada en el punto (2) de la Proposición 4, $\tilde{\psi}_{+,1}^{(0)} \neq 0$, deja de verificarse. De acuerdo con el Corolario 70 del presente trabajo, la condición de completitud se satisface si, y sólo si, $\tilde{\psi}_{+,1}^{(0)} = 1$. Por tanto, para las funciones ψ dadas en el Teorema 5 de [67], excepto la wavelet de Haar, la familia $\{\psi_{m,n} := D^m T^n \psi : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, pero no es completa.

Caso $r = 2$: $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\} \subset L^2[0, 1]$

Para $r = 2$, la condición (4.22) en la Proposición 69 implica, entre otras cosas, que el subespacio cerrado generado por cualquier subfamilia del conjunto $\{\mathfrak{h}_l\}_{l \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es un subespacio ambulante para M^+ en $H_{\mathbb{C}^2}^+ = H^+(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$. De acuerdo con el Lema 22 (de Halmos), dicho subespacio ambulante tiene, como mucho, dimensión 2 y es de la forma $A^+ \mathfrak{C}$, para alguna función operador valuada (M^+ -interna) rígida de Taylor A^+ , donde \mathfrak{C} denota el subespacio de funciones constantes. Por tanto, $A^+(\omega) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es, para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$, una isometría parcial con el mismo subespacio inicial. Para A^+ no nula, dicho subespacio inicial, llamado $C \subset \mathbb{C}^2$, puede tener dimensión 1 ó 2.

Se considera, en particular, el subespacio cerrado ambulante para M^+ generado por $\{\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1\}$ en $H_{\mathbb{C}^2}^+$ y la correspondiente función operador-valuada (M^+ -interna) rígida de Taylor A^+ con subespacio inicial $C \subset \mathbb{C}^2$. La condición (4.22) implica, en particular, que

$$\|\mathfrak{h}_0\|_{H_{\mathbb{C}^2}^+}^2 = B \neq 0; \quad \mathfrak{h}_0 \perp \mathfrak{h}_l, \quad l \geq 1, \quad (4.23)$$

$$\|\mathfrak{h}_1\|_{H_{\mathbb{C}^2}^+}^2 = B - \|\Psi_1\|_{\mathbb{C}^2}^2; \quad \langle \mathfrak{h}_l, \mathfrak{h}_1 \rangle_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = -\langle \Psi_l, \Psi_1 \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad l \geq 2. \quad (4.24)$$

Entonces, si $\dim(C) = 1$, la única opción es que $\mathfrak{h}_0 \neq 0$ y $\mathfrak{h}_1 = 0$, por lo que $B = \|\Psi_1\|_{\mathbb{C}^2}^2$; en dicho caso, las condiciones (4.21) y (4.22) se satisfacen si, y sólo si, $\Psi_1 \neq 0$ y $\Psi_l = 0$ para todo $l \neq 1$ en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto es, si $\dim(C) = 1$, en $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\}$ ambas funciones ψ_1 y ψ_2 son proporcionales a la wavelet de Haar. En consecuencia, la única situación no trivial posible requiere que $\dim(C) = 2$. Para $\dim(C) = 2$, la función operador-valorada (M^+ -interna) rígida de Taylor A^+ puede ser escrita como una función interna (2×2)-matricial

$$A^+(\omega) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1^{(0)}(\omega) & \mathfrak{a}_1^{(1)}(\omega) \\ \mathfrak{a}_2^{(0)}(\omega) & \mathfrak{a}_2^{(1)}(\omega) \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

cuyas entradas son funciones pertenecientes al espacio de Hardy escalar $H_{\mathbb{C}}^+ = H^+(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$ y tal que $A^+(\omega)$ es unitario para todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$. En otras palabras, las columnas de A^+ ,

$$\mathfrak{a}^{(0)}(\omega) := \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1^{(0)}(\omega) \\ \mathfrak{a}_2^{(0)}(\omega) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}^{(1)}(\omega) := \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1^{(1)}(\omega) \\ \mathfrak{a}_2^{(1)}(\omega) \end{pmatrix},$$

son elementos de $H_{\mathbb{C}^2}^+ = H^+(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$ satisfaciendo

$$\langle \mathfrak{a}^{(i)}, \omega^m \mathfrak{a}^{(j)} \rangle_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = \delta_m \delta_{i-j}, \quad m \in \mathbb{Z}, i, j = 0, 1. \quad (4.26)$$

Ya que el subespacio cerrado generado por $\{\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1\}$ coincide con $A^+\mathfrak{C}$, las funciones \mathfrak{h}_0 y \mathfrak{h}_1 pueden tomarse proporcionales a esos vectores: $\mathfrak{h}_0 = B_0 \mathfrak{a}^{(0)}$ y $\mathfrak{h}_1 = C_1 \mathfrak{a}^{(1)}$ para ciertas constantes no nulas $B_0, C_1 \in \mathbb{C}$. Más aún, de acuerdo con (4.23), (4.24) y el Lema 68 (de Rovniak),

$$\mathfrak{h}_0(\omega) = B_0 \mathfrak{a}^{(0)}(\omega); \quad \mathfrak{h}_l(\omega) = C_l \mathfrak{a}^{(1)}(\omega), \quad l \geq 1,$$

donde las constantes $B_0, C_l \in \mathbb{C}$ deben satisfacer

$$|B_0|^2 = B \neq 0, \quad |C_1|^2 = B - \|\Psi_1\|_{\mathbb{C}^2}^2 \neq 0, \\ C_l \overline{C_1} = \langle \mathfrak{h}_l, \mathfrak{h}_1 \rangle_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = -\langle \Psi_l, \Psi_1 \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad l \geq 2.$$

Se consideran las series de Taylor-Fourier

$$\mathfrak{a}^{(0)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(0)}, \quad \mathfrak{a}^{(1)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(1)},$$

donde $a_k^{(0)}, a_k^{(1)} \in \mathbb{C}^2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y

$$\mathfrak{h}_0(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \begin{pmatrix} [\hat{\psi}_1]_{2^k}^{(0)} \\ [\hat{\psi}_2]_{2^k}^{(0)} \end{pmatrix} = B_0 \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(0)},$$

$$\mathfrak{h}_1(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^{k+1}+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \begin{pmatrix} [\hat{\psi}_1]_{2^{k+1}+1}^{(0)} \\ [\hat{\psi}_2]_{2^{k+1}+1}^{(0)} \end{pmatrix} = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(1)}.$$

En estos términos,

$$|C_1|^2 = B - \|\Psi_1\|_{\mathbb{C}^2}^2 = B(1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2) \neq 0, \quad (4.27)$$

$$C_{2^k} = -\frac{1}{C_1} \langle \Psi_{2^k}, \Psi_1 \rangle_{\mathbb{C}^2} = -\frac{B}{C_1} \langle a_k^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.28)$$

$$C_{2^{k+1}} = -\frac{1}{C_1} \langle \Psi_{2^{k+1}}, \Psi_1 \rangle_{\mathbb{C}^2} = -\frac{C_1 \overline{B_0}}{C_1} \langle a_{k-1}^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.29)$$

Cualquier otro C_l , $l \geq 2$, puede ser expresado en términos de los C_{2^k} y $C_{2^{k+1}}$.

Lema 72 Para $l \geq 2$, $l \neq 2^k$, $2^k + 1$, con $l = 2^p + 2^{p_1} + 2^{p_2} + \dots + 2^{p_s}$, donde $p > p_1 > p_2 > \dots > p_s \geq 0$, se tiene

$$C_l = \begin{cases} C_1^{-(s-1)} C_{2^{p-p_1}+1} C_{2^{p_1-p_2}+1} \cdots C_{2^{p_{s-2}-p_{s-1}+1}} C_{2^{p_{s-1}+1}} & , \text{ si } p_s = 0, \\ C_1^{-s} C_{2^{p-p_1}+1} C_{2^{p_1-p_2}+1} \cdots C_{2^{p_{s-1}-p_s+1}} C_{2^{p_s}} & , \text{ si } p_s > 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

Demostración: Para $l \geq 2$, $l \neq 2^k$, $2^k + 1$, es decir, $l = 2^p + l_1$ con $l_1 \neq 0, 1$, y $l_1 = 2^{p_1} + l_2$, ya que $\mathfrak{h}_{l_1}(\omega) := \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^{p_1+k+1}+l_1}$, el vector $\Psi_{l_1} = \Psi_{2^{p_1}+l_1}$ es el k -ésimo coeficiente en la serie de Taylor de \mathfrak{h}_{l_1} , donde $k = p - p_1 - 1$. Por tanto, siendo $\mathfrak{h}_{l_1} = C_{l_1} \mathbf{a}^{(1)}$,

$$C_l = -\frac{1}{C_1} \langle \Psi_l, \Psi_1 \rangle_{\mathbb{C}^2} = -\frac{1}{C_1} \langle C_{l_1} a_{p-p_1-1}^{(1)}, B_0 a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} = \frac{C_{2^{p-p_1}+1}}{C_1} C_{l_1}. \quad (4.31)$$

El mismo argumento para $l_1, l_2, \dots, l_{p_{s-2}}$ lleva a

$$C_l = \frac{C_{2^{p-p_1}+1} C_{2^{p_1-p_2}+1} \cdots C_{2^{p_{s-2}-p_{s-1}+1}}}{C_1^{s-1}} C_{2^{p_{s-1}+2p_s}}.$$

En el último paso, si $p_s = 0$, entonces $C_{2^{p_{s-1}+2p_s}} = C_{2^{p_{s-1}+1}}$; por otra parte, si $p_s > 0$, como antes,

$$C_{2^{p_{s-1}+2p_s}} = \frac{C_{2^{p_{s-1}-p_s+1}}}{C_1} C_{2^{p_s}}.$$

□

En general, ya que $\mathfrak{h}_l = C_l \mathbf{a}^{(1)}$ para $l \geq 1$,

$$\|\mathfrak{h}_l\|_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = |C_l|^2 \|\mathbf{a}^{(1)}\|_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = |C_l|^2.$$

Por otra parte, la ecuación (4.22) con $m = n$ y $l = l' \geq 1$, $l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t$, implica

$$\|\mathfrak{h}_l\|_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = B - \sum_{k=-p}^0 \|\Psi_{2^{p+k} + \sum_{t=0}^{p+k-1} l_t 2^t}\|_{\mathbb{C}^2}^2.$$

En particular, para $l = 2^p$ con $p \geq 0$,

$$|C_{2^p}|^2 = \|\mathfrak{h}_{2^p}\|_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = B - \sum_{k=0}^p \|\Psi_{2^k}\|_{\mathbb{C}^2}^2 = B(1 - \sum_{k=0}^p \|a_k^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2), \quad p \geq 0. \quad (4.32)$$

Y, para $l = 2^p + 1$ con $p > 0$,

$$\begin{aligned} |C_{2^p+1}|^2 &= \|\mathfrak{h}_{2^p+1}\|_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = B - \|\Psi_1\|_{\mathbb{C}^2}^2 - \sum_{k=1}^p \|\Psi_{2^k+1}\|_{\mathbb{C}^2}^2 = \\ &= B(1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2)(1 - \sum_{k=0}^{p-1} \|a_k^{(1)}\|_{\mathbb{C}^2}^2), \quad p > 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

De manera similar, de la ecuación (4.22), ahora con $m = n$ y $l \neq l'$, $l = 2^p$ o $l = 2^p + 1$, $l' = 2^{p'}$ o $l' = 2^{p'} + 1$, se tiene, para $0 \leq p < p'$,

$$C_{2^{p'}} \overline{C_{2^p}} = \langle \mathfrak{h}_{2^{p'}}, \mathfrak{h}_{2^p} \rangle_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = - \sum_{r=0}^p \langle \Psi_{2^{p'-r}}, \Psi_{2^{p-r}} \rangle_{\mathbb{C}^2} = -B \sum_{r=0}^p \langle a_{p'-r}^{(0)}, a_{p-r}^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad (4.34)$$

para $0 < p < p'$,

$$\begin{aligned} C_{2^{p'+1}} \overline{C_{2^p+1}} &= \langle \mathfrak{h}_{2^{p'+1}}, \mathfrak{h}_{2^p+1} \rangle_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = - \sum_{r=0}^{p-1} \langle \Psi_{2^{p'-r+1}}, \Psi_{2^{p-r+1}} \rangle = \\ &= -B(1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2) \sum_{r=0}^{p-1} \langle a_{p'-r-1}^{(1)}, a_{p-r-1}^{(1)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

y para $p \geq 0$, $p > 0$

$$\begin{aligned} C_{2^{p'+1}} \overline{C_{2^p}} &= \langle \mathfrak{h}_{2^{p'+1}}, \mathfrak{h}_{2^p} \rangle_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = \\ &= \begin{cases} - \sum_{r=0}^p \langle \Psi_{2^{p'-r+1}}, \Psi_{2^{p-r}} \rangle_{\mathbb{C}^2} = -C_1 \overline{B_0} \sum_{r=0}^p \langle a_{p'-r-1}^{(1)}, a_{p-r}^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, & \text{si } p < p', \\ - \sum_{r=0}^{p'-1} \langle \Psi_{2^{p'-r+1}}, \Psi_{2^{p-r}} \rangle_{\mathbb{C}^2} = -C_1 \overline{B_0} \sum_{r=0}^{p'-1} \langle a_{p'-r-1}^{(1)}, a_{p-r}^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, & \text{si } p' \leq p, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Nótese que (4.27) coincide con (4.32) para $p' = 0$, (4.28) es (4.34) para $p = 0$ y $p' = k \in \mathbb{N}$, y (4.29) es (4.36) para $p = 0$ y $p' = k \in \mathbb{N}$.

Las condiciones (4.32)–(4.36) son parte de las condiciones (4.22) en la Proposición 69, pero son suficiente para asegurar que la familia de funciones de Hardy $\{\mathfrak{h}_l\}_{l \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset H_{\mathbb{C}^2}^+$ satisfacen el conjunto completo de condiciones (4.22).

Proposición 73 Sean

$$\mathbf{a}^{(0)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(0)}, \quad \mathbf{a}^{(1)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(1)}$$

un par de funciones en $H_{\mathbb{C}^2}^+ = H^+(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$ satisfaciendo (4.26) y $\|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2} < 1$. Sea $B_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$|B_0|^2 = B \tag{4.37}$$

y sea $\{C_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión verificando (4.32)–(4.36). Para $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se definen las funciones de Hardy $\mathfrak{h}_l \in H_{\mathbb{C}^2}^+$ dadas por

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0(\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^k} := B_0 \mathbf{a}^{(0)}(\omega) = B_0 \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(0)}, \\ \mathfrak{h}_l(\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^{p+k+1+l}} := C_l \mathbf{a}^{(1)}(\omega) = C_l \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(1)}, \quad l \geq 1, l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t. \end{aligned}$$

Entonces la familia $\{\mathfrak{h}_l\}_{l \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset H_{\mathbb{C}^2}^+$ satisface el conjunto completo de condiciones (4.22).

Demostración: (4.26) para $m \neq 0$ implica (4.22) para $m \neq n$. (4.26) para $m = 0$ y $i = j = 0$, junto con (4.37), coincide con (4.22) para $m = n$ y $l = l' = 0$. (4.26) para $m = 0$, $i = 0$ y $j = 1$ lleva a (4.22) para $m = n$, $l = 0$ y $l' \geq 1$. (4.32)–(4.36) son exactamente (4.22) para $m = n$ y $l, l' \geq 1$, $l = 2^p$ o $l = 2^p + 1$, $l' = 2^{p'}$ o $l' = 2^{p'} + 1$.

Para $m = n$ y $l = l' \geq 2$, $l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t$, $l \neq 2^k$, $2^k + 1$, por lo que $l = 2^p + l_1$ con $l_1 \neq 0, 1$, la condición (4.22) es

$$\begin{aligned} |C_l|^2 = \langle \mathfrak{h}_l, \mathfrak{h}_l \rangle_{H_{\mathbb{C}^2}^+} &= B - \sum_{k=-p}^0 \|\Psi_{2^{p+k} + \sum_{t=0}^{p+k-1} l_t 2^t}\|_{\mathbb{C}^r}^2 = \\ &= |C_{l_1}|^2 - \sum_{k=-(p-p_1-1)}^0 \|\Psi_{2^{p+k+l_1}}\|_{\mathbb{C}^r}^2 = \\ &= |C_{l_1}|^2 \left(1 - \sum_{r=0}^{p-p_1-1} \|a_r^{(1)}\|_{\mathbb{C}^r}^2\right) = |C_{l_1}|^2 \frac{|C_{2^{p-p_1+1}}|^2}{B(1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2)}, \end{aligned}$$

lo cual es cierto, debido a (4.31) junto con (4.32) para $p = 1$.

Para $m = n$ y $l, l' \geq 2$, $l \neq l'$, $l, l' \neq 2^k$, $2^k + 1$, por lo que $l = 2^p + l_1$, $l' = 2^{p'} + l'_1$

con $l_1, l'_1 \neq 0, 1$, y $l_1 = 2^{p_1} + l_2$, $l'_1 = 2^{p'_1} + l'_2$, la condición (4.22) lleva a

$$\begin{aligned} C_{l'} \overline{C_l} &= \langle \mathfrak{h}_{l'}, \mathfrak{h}_l \rangle_{H_{\mathbb{C}^2}^+} \\ &= \delta_{(p-p_1)-(p'-p'_1)} \langle \mathfrak{h}_{l'_1}, \mathfrak{h}_{l_1} \rangle_{H_{\mathbb{C}^2}^+} - \sum_{k=\sup\{p_1-p+1, p'_1-p'+1\}}^0 \langle \Psi_{2^{p'+k+l'_1}}, \Psi_{2^{p+k+l_1}} \rangle_{\mathbb{C}^2} = \\ &= C_{l'_1} \overline{C_{l_1}} (\delta_{(p-p_1)-(p'-p'_1)} - \sum_{r=0}^{\inf\{p-p_1-1, p'-p'_1-1\}} \langle a_{p'-r-p'_1-1}^{(1)}, a_{p-r-p_1-1}^{(1)} \rangle_{\mathbb{C}^2}), \end{aligned}$$

que, por (4.31), coincide con (4.33) cuando $p - p_1 = p' - p'_1$ y coincide con (4.35) cuando $p - p_1 \neq p' - p'_1$.

De manera similar para los dos casos restantes: para $m = n$, $l = 2^p$ o $l = 2^p + 1$, y $l' \neq 2^k, 2^k + 1$. \square

La Proposición 73 dice que todo puede ser escrito en término de la matriz M^+ -interna A^+ o, equivalentemente, en términos del par de funciones $\mathfrak{a}^{(0)}$ y $\mathfrak{a}^{(1)}$ de $H_{\mathbb{C}^2}^+ = H^+(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$.

Proposición 74 *Sean*

$$\mathfrak{a}^{(0)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(0)} \quad y \quad \mathfrak{a}^{(1)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(1)}$$

un par de funciones en $H_{\mathbb{C}^2}^+$ satisfaciendo (4.26), $\|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2} < 1$, y tal que

$$\frac{|\langle a_p^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}|^2}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = 1 - \sum_{k=0}^p \|a_k^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2, \quad p > 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{|\langle a_p^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}|^2}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = 1 - \sum_{k=0}^p \|a_k^{(1)}\|_{\mathbb{C}^2}^2, \quad p \geq 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{\langle a_{p'}^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} \langle a_0^{(0)}, a_p^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = - \sum_{r=0}^p \langle a_{p'-r}^{(0)}, a_{p-r}^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad 0 < p < p', \quad (4.40)$$

$$\frac{\langle a_{p'}^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} \langle a_0^{(0)}, a_p^{(1)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = - \sum_{r=0}^p \langle a_{p'-r}^{(1)}, a_{p-r}^{(1)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad 0 \leq p < p', \quad (4.41)$$

$$\frac{\langle a_{p'}^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} \langle a_0^{(0)}, a_p^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = \begin{cases} - \sum_{r=0}^p \langle a_{p'-r}^{(1)}, a_{p-r}^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, & \text{si } 0 < p \leq p', \\ - \sum_{r=0}^{p'} \langle a_{p'-r}^{(1)}, a_{p-r}^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, & \text{si } 0 \leq p' < p. \end{cases} \quad (4.42)$$

Sea $B_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$|B_0|^2 = B \quad (4.43)$$

y sea $\{C_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión de escalares, donde

$$|C_1|^2 = B(1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2) \neq 0, \quad (4.44)$$

$$C_{2^k} = -\frac{B}{C_1} \langle a_k^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.45)$$

$$C_{2^{k+1}} = -\frac{C_1 \overline{B_0}}{C_1} \langle a_{k-1}^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.46)$$

y el resto de C_l dados por (4.30). Para $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se definen las función de Hardy $\mathfrak{h}_l \in H_{\mathbb{C}^2}^+$ dadas por

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0(\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^k} := B_0 \mathbf{a}^{(0)}(\omega) = B_0 \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(0)}, \\ \mathfrak{h}_l(\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^{p+k+1+l}} := C_l \mathbf{a}^{(1)}(\omega) = C_l \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(1)}, \quad l \geq 1, l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t. \end{aligned}$$

Entonces, la familia $\{\mathfrak{h}_l\}_{l \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset H_{\mathbb{C}^2}^+$ satisface el conjunto completo de condiciones (4.22).

Demostración: Las condiciones (4.38)–(4.42) son exactamente las condiciones (4.32)–(4.36) donde los C s son eliminados utilizando (4.27)–(4.29), excepto la condición (4.32) para $p = 0$, la condición (4.34) para $p = 0$ y la condición (4.36) para $p = 0$. Estas tres condiciones, excluidas de la Proposición 73, son las relaciones añadidas (4.44)–(4.46) en la Proposición 74 para definir la sucesión $\{C_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ (que coincide con (4.27)–(4.29)). \square

Teniendo en cuenta que $1 = \|\mathbf{a}^{(j)}\|_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k^{(j)}\|_{\mathbb{C}^2}^2$, $j = 0, 1$, (ver (4.26)), de (4.32) y (4.33) se deduce que, dado $p \geq 1$,

$$C_{2^p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_{2^k} = 0 \text{ para todo } k \geq p \quad \Leftrightarrow \quad a_k^{(0)} = 0 \text{ para todo } k > p, \quad (4.47)$$

$$C_{2^{p+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_{2^{k+1}} = 0 \text{ para todo } k \geq p \quad \Leftrightarrow \quad a_k^{(1)} = 0 \text{ para todo } k \geq p. \quad (4.48)$$

Con todo esto se está en disposición de obtener todas las familias no triviales $\{\mathfrak{h}_l\}_{l \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset H_{\mathbb{C}^2}^+$ que satisfacen el conjunto completo de condiciones (4.22) o, equivalentemente, todas las funciones matriciales M^+ -internas (2×2) $A^+(\omega)$ verificando las condiciones (4.38)–(4.42).

Los resultados obtenidos a partir del desarrollo siguiente se reúnen en las Proposiciones 75 y 76 para mayor claridad.

Cuando $a_0^{(0)} = 0$, las relaciones (4.45) y (4.46) implican que $C_{2k} = C_{2k+1} = 0$ para todo $k \geq 1$, por lo que, por (4.47) y (4.48), $a_k^{(0)} = 0$ para todo $k > 1$, $a_k^{(1)} = 0$ para todo $k > 0$, y, por (4.30), $C_l = 0$ para todo $l \geq 2$. En este caso, $\{a_1^{(0)}, a_0^{(1)}\}$ es una base ortonormal de \mathbb{C}^2 (por (4.46) para $k = 1$, ya que $C_3 = 0$) y $|B_0|^2 = |C_1|^2 = B$. Esto lleva a las familias de *tipo 2* en las Proposiciones 75 y 76, donde $u_0 = a_1^{(0)}$ y $u_1 = a_0^{(1)}$. Es trivial el comprobar que este tipo de familias de Hardy satisfacen las condiciones (4.21) y (4.22) de la Proposición 69.

En lo sucesivo, se asume que $0 < \|a_0^{(0)}\| < 1$.

Si $C_2 = 0$,

$$\mathfrak{h}_0(\omega) = \Psi_1 + \omega \Psi_2 = B_0(a_0^{(0)} + \omega a_1^{(0)}), \quad \|a_1^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2 = 1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2, \quad [\text{por (4.32) con } p = 1]; \quad (4.49)$$

$$\langle a_1^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} = 0, \quad [\text{por (4.28) con } k = 1 \text{ ó (4.34) con } p = 0, p' = 1]; \quad (4.50)$$

$$\langle a_0^{(1)}, a_1^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} = 0, \quad [\text{por (4.36) con } 1 = p = p']; \quad (4.51)$$

$$\langle a_{p'}^{(1)}, a_1^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} = -\langle a_{p'-1}^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad p' > 0, \quad [\text{por (4.36) con } 1 = p < p']. \quad (4.52)$$

Si $C_3 = 0$,

$$\mathfrak{h}_1(\omega) = \Psi_3 = C_1 a_0^{(1)}, \quad \|a_0^{(1)}\|_{\mathbb{C}^2}^2 = 1, \quad [\text{por (4.33) con } p = 1]; \quad (4.53)$$

$$\langle a_0^{(1)}, a_p^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} = 0 \quad p \geq 0, \quad [\text{por (4.29) con } k = 1 \text{ y (4.36) con } 1 = p' \leq p]. \quad (4.54)$$

Por tanto, si $C_2 = C_3 = 0$, por (4.50) y (4.54), los tres vectores no nulos $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, a_0^{(1)}$ deben ser ortogonales entre si en \mathbb{C}^2 , lo cual no es posible.

Si $C_3 \neq 0$,

$$\langle a_0^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} \neq 0, \quad [\text{por (4.29) con } k = 1], \quad (4.55)$$

y equiparando las expresiones para $C_{2p'+1} \overline{C_3}$ obtenidas utilizando (4.29) y (4.35) con $1 = p < p'$, esto es, por (4.41) con $1 = p < p'$,

$$\frac{\langle a_{p'}^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} \langle a_0^{(0)}, a_0^{(1)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = -\langle a_{p'}^{(1)}, a_0^{(1)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad p' > 0. \quad (4.56)$$

Debido a (4.55), $\frac{\langle a_0^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} a_0^{(0)} + a_0^{(1)} \neq 0$, y (4.56) es equivalente a

$$a_p^{(1)} \perp \frac{\langle a_0^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} a_0^{(0)} + a_0^{(1)} \neq 0, \quad p > 0. \quad (4.57)$$

Ahora, si $C_2 = 0$ y $C_3 \neq 0$, por (4.50), (4.51) y (4.55),

$$a_0^{(1)} = \lambda_0 a_0^{(0)}, \quad 0 \neq \lambda_0 \in \mathbb{C}, \quad \frac{\langle a_0^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} a_0^{(0)} + a_0^{(1)} = \frac{\lambda_0}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} a_0^{(0)}; \quad (4.58)$$

por (4.50)–(4.52), (4.57) y (4.58),

$$a_1^{(1)} = \lambda_1 a_1^{(0)}, \quad 0 \neq \lambda_1 \in \mathbb{C}, \quad (4.59)$$

$$\langle a_1^{(1)}, a_1^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} = -\langle a_0^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad a_p^{(1)} = 0 \text{ para } p > 1;$$

$$\lambda_1 = -\frac{\|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} \lambda_0, \quad |\lambda_0|^2 = \frac{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2}{\|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2}, \quad [\text{por (4.32), (4.33), (4.58) y (4.59)}]; \quad (4.60)$$

Siendo $a_p^{(0)} = a_p^{(1)} = 0$ para $p > 1$, por (4.28) y (4.29), $C_{2^k} = 0$ para $k > 0$ y $C_{2^{k+1}} = 0$ para $k > 1$. Por tanto, por (4.30), $C_l \neq 0$ sólo si $l = 2^p - 1$, $p > 0$, y

$$C_{2^p-1} = \frac{C_3^{p-1}}{C_1^{p-2}} = \frac{1}{C_1^{p-2}} \left(-\frac{C_1 \overline{B_0}}{C_1} \langle a_0^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} \right)^{p-1} = C_1 \left(-\frac{\overline{B_0} \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2 \lambda_0}{C_1} \right)^{p-1}, \quad p > 1.$$

Este caso lleva a las familias de *tipo 3* en las Proposiciones 75 y 76, con $\rho = \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}$, $a_0^{(0)} = \rho u_0$, $a_1^{(0)} = (1 - \rho^2)^{1/2} u_1$ y $\theta = \arg(\lambda_0)$.

Si $C_2 \neq 0$,

$$\langle a_1^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} \neq 0, \quad [\text{por (4.28) con } k = 1], \quad (4.61)$$

y equiparando las expresiones de $C_{2^p} \overline{C_2}$ obtenidas utilizando (4.28) y (4.34) con $1 = p < p'$, es decir, por (4.40) con $1 = p < p'$,

$$\frac{\langle a_{p'}^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} \langle a_0^{(0)}, a_1^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = -\langle a_{p'}^{(0)}, a_1^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} - \langle a_{p'-1}^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad p' > 1. \quad (4.62)$$

Entonces, cuando $C_2 \neq 0$ y $C_3 = 0$,

$$a_p^{(0)} = \gamma_p a_0^{(0)}, \quad \text{donde } \gamma_p \in \mathbb{C}, \quad p > 0, \quad [\text{por (4.54)}]; \quad (4.63)$$

$$\gamma_1 \neq 0, \quad \gamma_p = \left(-\frac{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2}{\gamma_1} \right)^{p-1} \gamma_1, \quad p > 0, \quad [\text{por (4.61), (4.62) y (4.63)}]. \quad (4.64)$$

En este caso, las relaciones (4.26) para $i = j = 0$ y $m \in \mathbb{Z}$, junto con (4.64), llevan a $|\gamma_1| = \frac{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2}{\|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}}$. Si $\theta = \arg(\gamma_1)$,

$$\gamma_p = \left(-\|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2} e^{i\theta} \right)^{p-1} \frac{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2}{\|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}} e^{i\theta}, \quad p > 0. \quad (4.65)$$

Ya que $C_3 = 0$, por (4.33) y el Lema 72, $C_l \neq 0$ sólo si $l = 2^p$, $p \geq 0$. De (4.28) y (4.65),

$$C_{2^p} = -\frac{B}{C_1} \langle a_p^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} = \frac{B}{C_1} \left(-\|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2} e^{i\theta} \right)^p (1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Este caso se corresponde con las familias de *tipo 4* en las Proposiciones 75 y 76, donde $\rho = \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}$, $a_0^{(0)} = \rho u_0$, $a_0^{(1)} = u_1$ y $\theta = \arg(\gamma_1)$.

Finalmente, cuando $C_2 \neq 0$ y $C_3 \neq 0$, equiparando las expresiones de $C_3 \overline{C_{2p}}$ obtenidas utilizando (4.28), (4.29) y (4.36) con $1 = p' \leq p$, es decir, por (4.42) con $1 = p' \leq p$,

$$a_p^{(0)} \perp \frac{\langle a_0^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} a_0^{(0)} + a_0^{(1)} \neq 0, \quad p > 0, \quad (4.66)$$

y equiparando las expresiones de $C_{2p'+1} \overline{C_2}$ obtenidas utilizando (4.28), (4.29) y (4.36) con $1 = p \leq p'$, esto es, por (4.42) con $1 = p \leq p'$,

$$a_0^{(1)} \perp \frac{\langle a_1^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} \neq 0, \quad (4.67)$$

$$\frac{\langle a_{p'}^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} \langle a_0^{(0)}, a_1^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = -\langle a_{p'}^{(1)}, a_1^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2} - \langle a_{p'-1}^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad p' > 0. \quad (4.68)$$

Recuérdese que $\frac{\langle a_1^{(0)}, a_0^{(0)} \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} \neq 0$ debido a (4.61). Entonces, por (4.57) y (4.66), existen tres vectores unitarios $u_0, u_1, v \in \mathbb{C}^2$ y dos sucesiones $\{\rho_p\}_{p \geq 0}$ y $\{\tau_p\}_{p \geq 0}$ de números complejos tales que

$$a_0^{(0)} = \rho_0 u_0, \quad a_0^{(1)} = \tau_0 u_1, \quad a_p^{(0)} = \rho_p v, \quad a_p^{(1)} = \tau_p v, \quad p > 1. \quad (4.69)$$

Más aún, $0 < |\rho_0| = \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2} < 1$, $\rho_1 \neq 0$ (ya que $C_2 \neq 0$), $\tau_0 \neq 0$ (ya que $C_3 \neq 0$). También,

$$\langle v, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2} \neq 0, \quad [\text{por (4.61)}]; \quad \langle u_1, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2} \neq 0, \quad [\text{por (4.55)}]; \quad (4.70)$$

$$\frac{|\rho_0|^2}{1 - |\rho_0|^2} \langle u_0, u_1 \rangle_{\mathbb{C}^2} \langle v, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2} + \langle v, u_1 \rangle_{\mathbb{C}^2} = 0, \quad [\text{por (4.56) ó (4.67) ó (4.68)}]; \quad (4.71)$$

$$\frac{|\rho_0|^2}{1 - |\rho_0|^2} = -\frac{\langle v, u_1 \rangle_{\mathbb{C}^2}}{\langle u_0, u_1 \rangle_{\mathbb{C}^2} \langle v, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2}}, \quad [\text{por (4.70) y (4.71)}] \quad \Rightarrow \quad \langle v, u_1 \rangle_{\mathbb{C}^2} \neq 0. \quad (4.72)$$

Teniendo en cuenta que las sucesiones $\{\rho_p\}_{p \geq 1}$ y $\{\tau_p\}_{p \geq 0}$ satisfacen las respectivas relaciones de recurrencia (4.62) y (4.68), y que ambas relaciones coinciden,

$$\tau_1 = -\frac{\overline{\rho_0}}{\rho_1} \frac{\langle u_1, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 + \frac{|\rho_0|^2}{1 - |\rho_0|^2} |\langle v, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2}|^2} \tau_0, \quad (4.73)$$

$$\rho_p = r^{p-1} \rho_1, \quad \tau_p = r^{p-1} \tau_1, \quad p > 1; \quad r = -\frac{\overline{\rho_0}}{\rho_1} \frac{\langle v, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2}}{1 + \frac{|\rho_0|^2}{1 - |\rho_0|^2} |\langle v, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2}|^2}. \quad (4.74)$$

Las condiciones (4.26) llevan a

$$1 = |\rho_0|^2 + |\rho_1|^2 \frac{1}{1 - |r|^2}, \quad 1 = |\tau_0|^2 + |\tau_1|^2 \frac{1}{1 - |r|^2}, \quad (4.75)$$

$$0 = \rho_0 \langle u_0, v \rangle_{\mathbb{C}^2} + \rho_1 \frac{\bar{r}}{1 - |r|^2}, \quad 0 = \tau_0 \langle u_1, v \rangle_{\mathbb{C}^2} + \tau_1 \frac{\bar{r}}{1 - |r|^2}, \quad (4.76)$$

$$0 = \rho_0 \bar{\tau}_0 \langle u_0, u_1 \rangle_{\mathbb{C}^2} + \rho_1 \bar{\tau}_1 \frac{1}{1 - |r|^2}.$$

De (4.73)–(4.76),

$$|\rho_1|^2 = \frac{1 - |\rho_0|^2}{1 + \frac{|\rho_0|^2}{1 - |\rho_0|^2} |\langle v, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2}|^2}, \quad |\tau_0|^2 = \frac{1}{1 + \frac{|\rho_0|^2}{1 - |\rho_0|^2} |\langle u_1, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2}|^2}, \quad (4.77)$$

$$\tau_1 = \tau_0 \frac{\rho_1 \langle u_1, v \rangle_{\mathbb{C}^2}}{\rho_0 \langle u_0, v \rangle_{\mathbb{C}^2}},$$

y las relaciones adicionales

$$|r|^2 = \frac{\frac{|\rho_0|^2}{1 - |\rho_0|^2} |\langle v, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2}|^2}{1 + \frac{|\rho_0|^2}{1 - |\rho_0|^2} |\langle v, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2}|^2}, \quad \frac{|\rho_0|^2}{1 - |\rho_0|^2} |\langle v, u_0 \rangle_{\mathbb{C}^2}|^2 = \frac{|r|^2}{1 - |r|^2}, \quad \frac{|\tau_1|^2}{|\rho_1|^2} = \frac{1 - |\tau_0|^2}{1 - |\rho_0|^2}.$$

De (4.28), (4.29) y (4.73)–(4.76), para $p > 0$,

$$C_{2^p} = \frac{B}{C_1} (1 - |\rho_0|^2) r^p, \quad (4.78)$$

$$C_{2^{p+1}} = \frac{C_1 \bar{B}_0}{C_1} \frac{\tau_1}{\rho_1} (1 - |\rho_0|^2) r^{p-1} = \frac{C_1 \bar{B}_0}{C_1} \frac{\tau_0 \langle u_1, v \rangle_{\mathbb{C}^2}}{\rho_0 \langle u_0, v \rangle_{\mathbb{C}^2}} (1 - |\rho_0|^2) r^{p-1}.$$

En este caso, las familias de funciones (2×2) -matriciales M^+ -internas $A^+(\omega)$ y las funciones de Hardy $\{\mathfrak{h}_l\}_{l \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset H_{\mathbb{C}^2}^+$ se corresponden con las familias de *tipo 5* en las Proposiciones 75 y 76.

Recuérdese que la condición $\|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2} < 1$ en la Proposición 74 restringe la atención a matrices M^+ -internas A^+ con subespacio inicial C de dimensión 2, esto es, tal que $A^+(\omega)$ es unitario para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Por otro lado, como se vio al principio de esta sección, cuando la dimensión de C es 1, el único par factible $\{\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1\}$ que lleva a un wavelet frame ajustado, con cota frame B , debe satisfacer $\mathfrak{h}_0 = \Psi_1 = B a_0^{(0)}$ y $\mathfrak{h}_1 = 0$, con $\|\Psi_1\|_{\mathbb{C}^2} = B$ o $\|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2} = 1$, por lo que se tiene un wavelet frame (de Haar) trivial. La correspondiente matriz M^+ -interna A^+ es de la forma

$$A^+(\omega) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^{(0)}(\omega) & \mathfrak{a}^{(1)}(\omega) \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^{(0)} & 0 \\ & \end{pmatrix}.$$

Incluyendo este caso como “Tipo 1”, se ha probado el siguiente resultado.

Proposición 75 *Existen cinco tipos de familias de funciones (2×2) -matriciales M^+ -internas*

$$A^+(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(0)}(\omega) & \mathbf{a}^{(1)}(\omega) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \mathbf{a}^{(0)}, \mathbf{a}^{(1)} \in H_{\mathbb{C}^2}^+,$$

satisfaciendo las condiciones (4.38)–(4.42). Dichas matrices son de la siguiente forma:

Tipo 1. Dado $u_0 \in \mathbb{C}^2$, tal que $\|u_0\|_{\mathbb{C}^2} = 1$,

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{(0)}(\omega) = u_0, \\ \mathbf{a}^{(1)}(\omega) = 0. \end{cases}$$

Tipo 2. Dada una base ortonormal $\{u_0, u_1\}$ de \mathbb{C}^2 ,

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{(0)}(\omega) = \omega u_0, \\ \mathbf{a}^{(1)}(\omega) = u_1. \end{cases}$$

Tipo 3. Dada una base ortonormal $\{u_0, u_1\}$ de \mathbb{C}^2 , $0 < \rho < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{(0)}(\omega) = \rho u_0 + \omega(1 - \rho^2)^{1/2} u_1, \\ \mathbf{a}^{(1)}(\omega) = e^{i\theta} [(1 - \rho^2)^{1/2} u_0 - \omega \rho u_1]. \end{cases}$$

Tipo 4. Dada una base ortonormal $\{u_0, u_1\}$ de \mathbb{C}^2 , $0 < \rho < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{(0)}(\omega) = (\rho + (1 - \rho^2)e^{i\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k (-\rho e^{i\theta})^{k-1}) u_0, \\ \mathbf{a}^{(1)}(\omega) = u_1. \end{cases}$$

Tipo 5. Dado $0 < |\rho_0| < 1$, se escogen tres vectores unitarios u_0, u_1 y v en \mathbb{C}^2 tales que se satisface (4.71).⁵ Entonces, $|\rho_1|$ y $|\tau_0|$ están dados por (4.77). Una vez que los argumentos libres en ρ_0, ρ_1 y τ_0 son seleccionados, es decir, $\theta_{\rho_0}, \theta_{\rho_1}$ y θ_{τ_0} , el valor de r es determinado por (4.74) y el valor de τ_1 está dado por (4.77). Entonces,

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{(0)}(\omega) = \rho_0 u_0 + \rho_1 v \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k r^{k-1}, \\ \mathbf{a}^{(1)}(\omega) = \tau_0 u_1 + \tau_1 v \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k r^{k-1}. \end{cases}$$

⁵Cuando las coordenadas de u_0, u_1 y v son reales, (4.71) es equivalente a

$$\frac{1}{1 - |\rho_0|^2} = \tan(\widehat{vu_0}) \tan(\widehat{u_0 u_1}),$$

donde \widehat{ab} denota el ángulo de a a b como vectores en \mathbb{R}^2 .

En términos de las familias $\{\mathfrak{h}_l\}_{l \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset H_{\mathbb{C}^2}^+$ el resultado anterior se expresa del siguiente modo.

Proposición 76 *Existen cinco tipos de familias $\{\mathfrak{h}_l\}_{l \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset H_{\mathbb{C}^2}^+$ satisfaciendo el conjunto completo de condiciones (4.22). Dichas familias son de la siguiente forma:*

Tipo 1. Dado $u_0 \in \mathbb{C}^2$, tal que $\|u_0\|_{\mathbb{C}^2} = 1$, y $B_0 \in \mathbb{C}$, con $|B_0|^2 = B$,

$$\begin{cases} \mathfrak{h}_0(\omega) = \Psi_1 = B_0 u_0, \\ \mathfrak{h}_l(\omega) = 0, \text{ para } l \geq 1. \end{cases}$$

Tipo 2. Dada una base ortonormal $\{u_0, u_1\}$ de \mathbb{C}^2 y un par de constantes $B_0, C_1 \in \mathbb{C}$, con $|B_0|^2 = |C_1|^2 = B$,

$$\begin{cases} \mathfrak{h}_0(\omega) = \omega \Psi_2 = \omega B_0 u_0, \\ \mathfrak{h}_1(\omega) = \Psi_3 = C_1 u_1, \\ \mathfrak{h}_l(\omega) = 0, \text{ para } l \geq 2. \end{cases}$$

Tipo 3. Dada una base ortonormal $\{u_0, u_1\}$ de \mathbb{C}^2 , $0 < \rho < 1$, constantes $B_0, C_1 \in \mathbb{C}$ tales que $|B_0|^2 = B$, $|C_1|^2 = B(1 - \rho^2)$, y $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \mathfrak{h}_0(\omega) = \Psi_1 + \omega \Psi_2 = B_0(\rho u_0 + \omega(1 - \rho^2)^{1/2} u_1), \\ \mathfrak{h}_1(\omega) = \Psi_3 + \omega \Psi_5 = C_1 e^{i\theta} [(1 - \rho^2)^{1/2} u_0 - \omega \rho u_1], \\ \mathfrak{h}_{2^p-1}(\omega) = \Psi_{2^{2p+2^p-1}} + \omega \Psi_{2^{2p+1+2^p-1}} = \\ \quad = \left(-\frac{B_0 \rho (1 - \rho^2)^{1/2} e^{i\theta}}{C_1} \right)^{p-1} C_1 e^{i\theta} [(1 - \rho^2)^{1/2} u_0 - \omega \rho u_1], \quad p > 1, \\ \mathfrak{h}_l(\omega) = 0, \text{ resto.} \end{cases}$$

Tipo 4. Dada una base ortonormal $\{u_0, u_1\}$ de \mathbb{C}^2 , $0 < \rho < 1$, constantes $B_0, C_1 \in \mathbb{C}$ tales que $|B_0|^2 = B$, $|C_1|^2 = B(1 - \rho^2)$, y $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \mathfrak{h}_0(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^k} = B_0 \left(1 + \frac{1 - \rho^2}{\rho} e^{i\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k (-\rho e^{i\theta})^{k-1} \right) \rho u_0, \\ \mathfrak{h}_1(\omega) = \Psi_3 = C_1 u_1, \\ \mathfrak{h}_{2^p}(\omega) = \Psi_{2^{2p+1+2^p}} = \frac{B}{C_1} (-\rho e^{i\theta})^p (1 - \rho^2) u_1, \quad p > 0, \\ \mathfrak{h}_l(\omega) = 0, \text{ resto.} \end{cases}$$

Tipo 5. Dado $0 < |\rho_0| < 1$, se escogen tres vectores unitarios u_0, u_1 y v en \mathbb{C}^2 tales que se satisface (4.71). Entonces, $|\rho_1|$ y $|\tau_0|$ están dados por (4.77). Una vez que los argumentos libres en ρ_0, ρ_1 y τ_0 son seleccionados, es decir, $\theta_{\rho_0}, \theta_{\rho_1}$ y θ_{τ_0} , el valor de r es determinado por (4.74) y el valor de τ_1 está dado por (4.77). Se escogen

las constantes $B_0, C_1 \in \mathbb{C}$ tales que $|B_0|^2 = B$, $|C_1|^2 = B(1 - \rho_0^2)$, y se seleccionan sus argumentos libres θ_{B_0} y θ_{C_1} . Entonces,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{h}_0(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^k} = B_0(\rho_0 u_0 + \rho_1 v \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k r^{k-1}), \\ \mathfrak{h}_1(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^{k+1}+1} = C_1(\tau_0 u_1 + \tau_1 v \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k r^{k-1}), \\ \mathfrak{h}_l(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \Psi_{2^{p+k+1}+l} = \frac{C_l}{C_1} \mathfrak{h}_1(\omega), \quad (l \geq 1, l = 2^p + \sum_{t=0}^{p-1} l_t 2^t), \end{array} \right.$$

donde C_{2^p} y C_{2^p+1} , $p > 0$, están dados por (4.78), y el resto de C_l s se calculan utilizando (4.30).

Una vez conocidos los coeficientes en la base de Haar de las diferentes familias de wavelet frames ajustados, se puede obtener la expresión analíticas de los mismos.

Corolario 77 *Existen cinco tipos de familias de wavelet frames ajustados $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\}$ tales que $\text{sup}(\psi_i) \subset [0, 1)$. Dichas familias son de la siguiente forma:*

Tipo 1: Dado $u_0 \in \mathbb{C}^2$, tal que $\|u_0\|_{\mathbb{C}^2} = 1$, y $B_0 \in \mathbb{C}$, con $|B_0|^2 = B$,

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{cases} B_0 u_0 & , \text{ si } x \in [0, 1/2) \\ -B_0 u_0 & , \text{ si } x \in [1/2, 1) \end{cases}$$

Tipo 2: Dada una base ortonormal $\{u_0, u_1\}$ de \mathbb{C}^2 y un par de constantes $B_0, C_1 \in \mathbb{C}$, con $|B_0|^2 = |C_1|^2 = B$,

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \begin{cases} B_0 2^{1/2} u_0 & , \text{ si } x \in [0, 1/4) \\ -B_0 2^{1/2} u_0 & , \text{ si } x \in [1/4, 1/2) \\ C_1 2^{1/2} u_1 & , \text{ si } x \in [1/2, 3/4) \\ -C_1 2^{1/2} u_1 & , \text{ si } x \in [3/4, 1) \end{cases}$$

Tipo 3: Dada una base ortonormal $\{u_0, u_1\}$ de \mathbb{C}^2 , $0 < \rho < 1$, constantes $B_0, C_1 \in \mathbb{C}$ tales

que $|B_0|^2 = B$, $|C_1|^2 = B(1 - \rho^2)$, $y \theta \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} B_0 \left[\rho + 2^{1/2}(1 - \rho^2) \frac{e^{i\theta}}{1-K} \right] u_0 & , \text{ si } x = 0 \\ B_0 \left[\rho + (1 - \rho^2) e^{i\theta} 2^{1/2} \left(\frac{K^{k_1-2}-1}{K-1} - K^{k_1-2} \right) \right] u_0 & , \text{ si } x \in (0, 1/2) \\ -B_0 \rho u_0 + 2^{1/2} \left[C_1 + \frac{B}{C_1} (1 - \rho^2) \frac{K}{1-K} \right] u_1 & , \text{ si } x = 1/2 \\ -B_0 \rho u_0 + 2^{1/2} \left[C_1 + \frac{B}{C_1} (1 - \rho^2) \left(\frac{K^{k_2-2}-1}{K-1} - K^{k_2-2} \right) \right] u_1 & , \text{ si } x \in (1/2, 3/4) \\ -B_0 \rho u_0 - C_1 2^{1/2} u_1 & , \text{ si } x \in [3/4, 1) \end{cases} ,$$

si $|2^{1/2}\rho| < 1$, ó

$$\psi(x) = \begin{cases} B_0 \left[\rho + (1 - \rho^2) e^{i\theta} 2^{1/2} \left(\frac{K^{k_1-2}-1}{K-1} - K^{k_1-2} \right) \right] u_0 & , \text{ si } x \in (0, 1/2) \\ -B_0 \rho u_0 + 2^{1/2} \left[C_1 + \frac{B}{C_1} (1 - \rho^2) \left(\frac{K^{k_2-2}-1}{K-1} - K^{k_2-2} \right) \right] u_1 & , \text{ si } x \in (1/2, 3/4) \\ -B_0 \rho u_0 - C_1 2^{1/2} u_1 & , \text{ si } x \in [3/4, 1) \end{cases} ,$$

si $|2^{1/2}\rho| \geq 1$, donde $K = -2^{1/2}\rho e^{i\theta}$ $y x = 2^{-k_1} + \dots \neq 0$.

Tipo 4: Dada una base ortonormal $\{u_0, u_1\}$ de \mathbb{C}^2 , $0 < \rho < 1$, constantes $B_0, C_1 \in \mathbb{C}$ tales que $|B_0|^2 = B$, $|C_1|^2 = B(1 - \rho^2)$, $y \theta \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} B_0 \rho u_0 + B_0 (1 - \rho^2)^{1/2} 2^{1/2} u_1 & , \text{ si } x \in [0, 1/4) \\ B_0 \rho u_0 - \left[B_0 (1 - \rho^2)^{1/2} 2^{1/2} + C_1 \rho e^{i\theta} 2 \right] u_1 & , \text{ si } x \in [1/4, 3/8) \\ B_0 \rho u_0 - \left[B_0 (1 - \rho^2)^{1/2} 2^{1/2} - \right. \\ \left. - C_1 \rho 2 e^{i\theta} \left(1 - \left(K^{\kappa(x)-2} - K \frac{K^{\kappa(x)-3}-1}{K-1} \right) \right) \right] u_1 & , \text{ si } x \in [3/8, 1/2) \\ \left[-B_0 \rho + C_1 (1 - \rho^2)^{1/2} 2^{1/2} e^{i\theta} \right] u_0 & , \text{ si } x \in [1/2, 3/4) \\ \left[-B_0 \rho - C_1 (1 - \rho^2)^{1/2} 2^{1/2} e^{i\theta} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \left(K^{\kappa(x)-1} - K \frac{K^{\kappa(x)-2}-1}{K-1} \right) \right) \right] u_0 & , \text{ si } x \in [3/4, 1) \end{cases}$$

donde $K = -2^{1/2} \frac{\overline{B_0}}{C_1} \rho (1 - \rho^2)^{1/2} e^{i\theta}$, $\kappa(x) = \min\{k_m : k_{m+1} \neq k_m + 1, m = 1, \dots, n \text{ y } k_{n+1} = k_n + 2\}$ $y x = \sum_{i=1}^n 2^{-k_i} \neq 0$ con $k_i < k_{i+1}$.

Tipo 5: Dado $0 < |\rho_0| < 1$, se escogen tres vectores unitarios u_0, u_1 $y v$ en \mathbb{C}^2 tales que se satisface (4.71). Entonces, $|\rho_1|$ y $|\tau_0|$ están dados por (4.77). Una vez que los

argumentos libres en ρ_0, ρ_1 y τ_0 son seleccionados, esto es, $\theta_{\rho_0}, \theta_{\rho_1}$ y θ_{τ_0} , el valor de r es determinado por (4.74) y el valor de τ_1 está dado por (4.77). Se escogen las constantes $B_0, C_1 \in \mathbb{C}$ tales que $|B_0|^2 = B$, $|C_1|^2 = B(1 - \rho_0^2)$, y se seleccionan sus argumentos libres θ_{B_0} y θ_{C_1} . Entonces,

$$\psi(x) = \begin{cases} B_0\rho_0u_0 + 2^{1/2}B_0\frac{\rho_1}{1-2^{1/2}r}v & , \text{ si } x = 0 \\ \left[B_0\rho_0 + S_0 \right]u_0 + \tau_1r^{k_1-2} \left[\sum_{m=1}^{n-1} S_m + S_n \right]v & , \text{ si } x \in (0, 1/2) \\ -B_0\rho_0u_0 + \tau_0 \left[\sum_{m=1}^{n-1} S_m + S_n \right]u_1 & , \text{ si } x \in [1/2, 1) \end{cases}$$

donde $x = \sum_{i=1}^n 2^{-k_i} \neq 0$ con $k_i < k_{i+1}$,

$$S_0 = \begin{cases} -2^{(k_1-1)/2}B_0\rho_1r^{k_1-2} & , \text{ si } k_1 = 2 \\ B_0\rho_1 \left(2^{1/2}\frac{K^{k_1-2}-1}{K-1} - 2^{(k_1-1)/2}r^{k_1-2} \right) & , \text{ si } k_1 \geq 3 \end{cases}$$

para $m = 1, \dots, n-1$,

$$S_m = \begin{cases} -2^{(k_{m+1}-1)/2}C_{l_m} & , \text{ si } k_{m+1} = k_m + 1 \\ \frac{C_{l_m}B}{|C_1|^2}(1 - |\rho_0|^2)2^{k_m/2}\frac{K^{k_{m+1}-k_m-1}-1}{K-1} - 2^{(k_{m+1}-1)/2}C_{l_m} & , \text{ si } k_{m+1} \geq k_m + 1 \end{cases}$$

y

$$S_n = 2^{k_n/2}C_{l_n} + \frac{C_{l_n}B}{|C_1|^2}(1 - |\rho_0|^2)2^{k_n/2}\frac{K}{1-K},$$

con $K = 2^{1/2}r$ y $l_m = \sum_{i=1}^m 2^{k_n-k_i}$, $m = 1, \dots, n$.

En conclusión, se observa que para las funciones $A^+(\omega)$ del tipo 1, ambas funciones ψ_1 y ψ_2 son proporcionales a la wavelet de Haar y las funciones $A^+(\omega)$ del tipo 3 llevan a la versión reflejada de las funciones ψ_1 y ψ_2 obtenidas de las funciones $A^+(\omega)$ del tipo 4 con los mismos parámetros. Las Figuras 4.1–4.5 muestran algunos ejemplos de funciones reales ψ_1 y ψ_2 para las funciones $A^+(\omega)$ de los tipos 2–5.

Recuérdese que la función matricial M^+ -interna $A^+(\omega)$ y el subespacio M^+ -ambulante generado por $\{\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1\}$ en $H_{\mathbb{C}^2}^+$ están conectados por el Lema 22 (de Halmos). Así pues, el subespacio generado por $\{\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1\}$ determina de forma única $A^+(\omega)$ salvo un factor por la derecha constante e igual a una isometría parcial. En particular, en los tipos no triviales 2–5 de las Proposiciones 75 y 76, salvo un factor por la derecha constante y unitario.

Proposición 78 Sea $A^+(\omega) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^{(0)}(\omega) & \mathfrak{a}^{(1)}(\omega) \\ & \end{pmatrix}$ una función (2×2) -matricial M^+ -interna, unitaria para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$, con $\mathfrak{a}^{(0)}, \mathfrak{a}^{(1)} \in H_{\mathbb{C}^2}^+$ satisfaciendo las condiciones

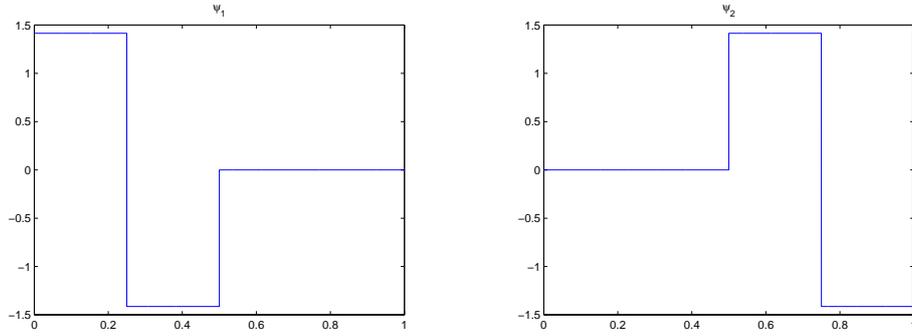
(4.38)–(4.42). Dada una (2×2) -matriz unitaria constante arbitraria U , se considera la función (2×2) -matricial $B^+(\omega)$ definida por

$$B^+(\omega) = \begin{pmatrix} \mathfrak{b}^{(0)}(\omega) & \mathfrak{b}^{(1)}(\omega) \end{pmatrix} := A^+(\omega) \cdot U.$$

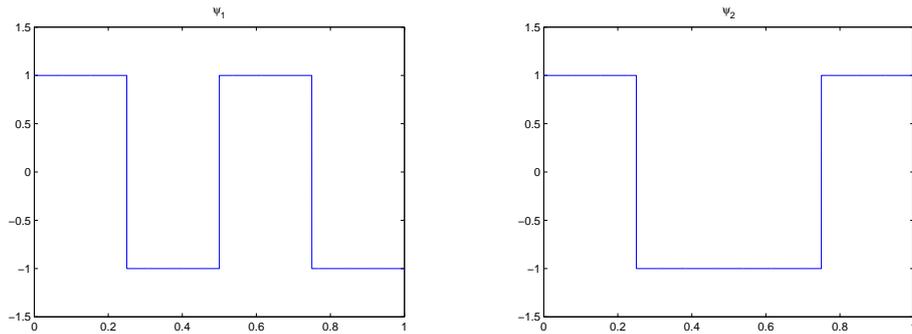
Entonces, $B^+(\omega)$ es también una función (2×2) -matricial M^+ -interna, unitaria para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$, y tal que $\mathfrak{b}^{(0)}(\omega)$, $\mathfrak{b}^{(1)}(\omega)$ verifica las condiciones (4.38)–(4.42).

Demostración: Las condiciones (4.38)–(4.42) para $\mathfrak{a}^{(0)}$, $\mathfrak{a}^{(1)}$ están dadas en términos de sus coeficientes de Fourier-Taylor,

$$\mathfrak{a}^{(0)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(0)}, \quad \mathfrak{a}^{(1)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k a_k^{(1)}.$$

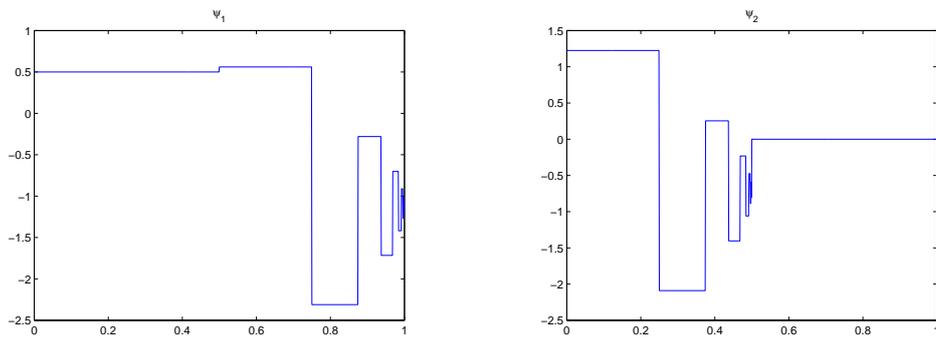


(a) Parámetros: $u_0 = (1, 0)$, $u_1 = (0, 1)$, $B_0 = 1$ y $\arg(C_1) = 0$.

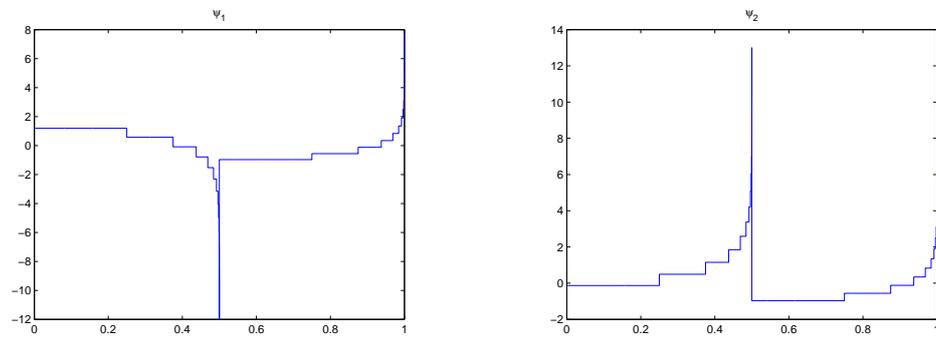


(b) Parámetros: $u_0 = (1, 1)/\sqrt{2}$, $u_1 = (1, -1)/\sqrt{2}$, $B_0 = 1$ y $\arg(C_1) = 0$.

Figura 4.1: Caso $r = 2$. Ejemplos de funciones reales ψ_1 y ψ_2 de tipo 2.

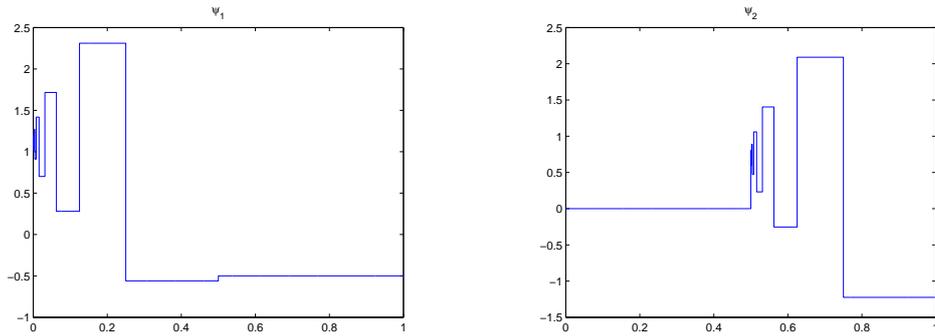


(a) Parámetros: $\mathbf{u}_0 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_1 = (0, 1)$, $\rho = 1/2$, $B_0 = 1$, $\arg(C_1) = 0$ y $\theta = 0$.

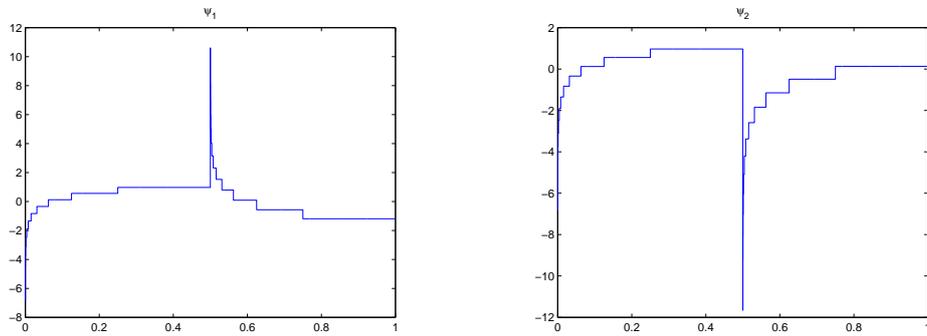


(b) Parámetros: $\mathbf{u}_0 = (1, 1)/\sqrt{2}$, $\mathbf{u}_1 = (1, -1)/\sqrt{2}$, $\rho = 3/4$, $B_0 = 1$, $\arg(C_1) = 0$ y $\theta = \pi$.

Figura 4.2: Caso $r = 2$. Ejemplos de funciones reales ψ_1 y ψ_2 de tipo 3.

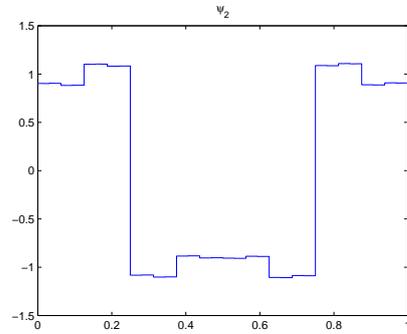
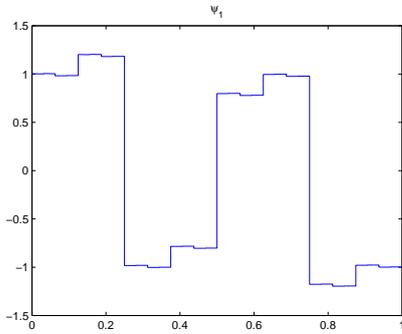


(a) Parámetros: $\mathbf{u}_0 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_1 = (0, 1)$, $\rho = 1/2$, $B_0 = 1$, $\arg(C_1) = 0$ y $\theta = 0$.

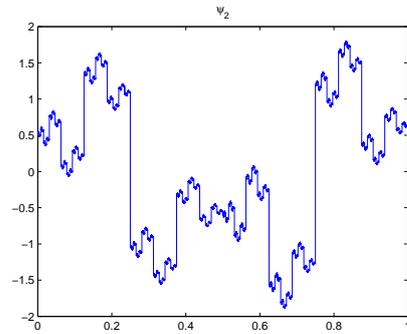
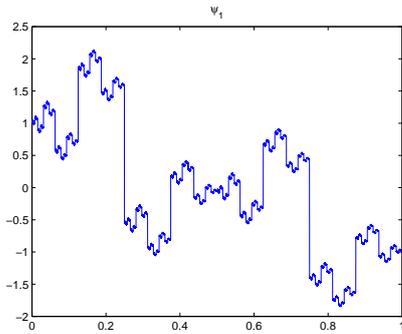


(b) Parámetros: $\mathbf{u}_0 = (1, 1)/\sqrt{2}$, $\mathbf{u}_1 = (1, -1)/\sqrt{2}$, $\rho = 3/4$, $B_0 = 1$, $\arg(C_1) = 0$ y $\theta = \pi$.

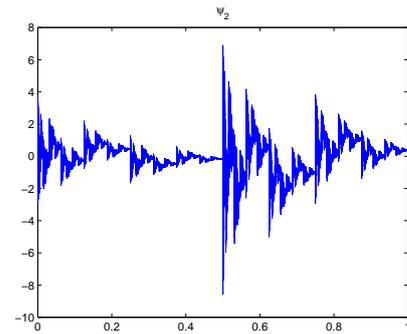
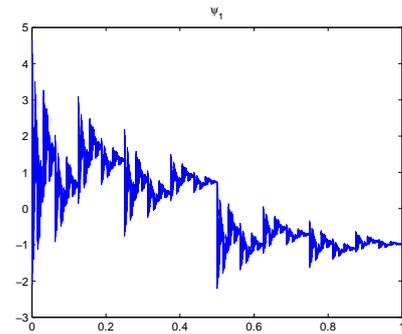
Figura 4.3: Caso $r = 2$. Ejemplos de funciones reales ψ_1 y ψ_2 de tipo 4.



(a) Parámetros: $\rho_0 = 0,1$, $u_0 = (1,0)$, $v = (1,1)/\sqrt{2}$, $\arg(\rho_1) = \arg(\tau_0) = 0$, $B_0 = 1$ y $\arg(C_1) = 0$.

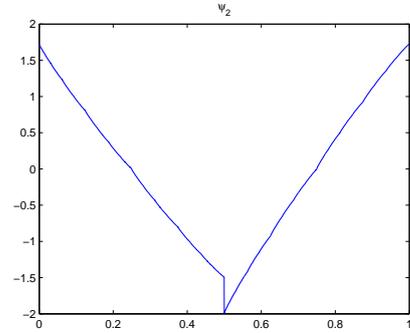
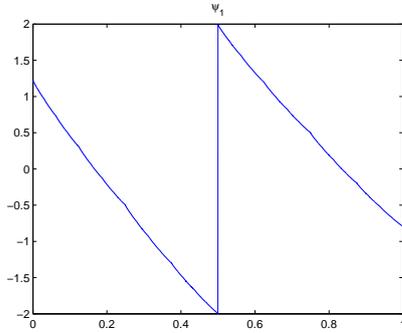


(b) Parámetros: $\rho_0 = 1/2$, $u_0 = (1,0)$, $v = (1,1)/\sqrt{2}$, $\arg(\rho_1) = \arg(\tau_0) = 0$, $B_0 = 1$ y $\arg(C_1) = 0$.

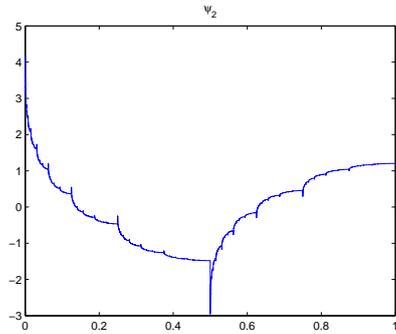
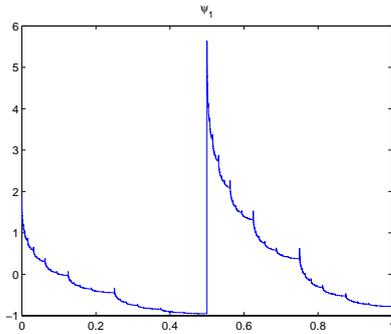


(c) Parámetros: $\rho_0 = 0,9$, $u_0 = (1,0)$, $v = (1,1)/\sqrt{2}$, $\arg(\rho_1) = \arg(\tau_0) = 0$, $B_0 = 1$ y $\arg(C_1) = 0$.

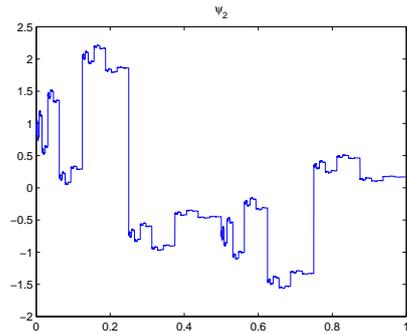
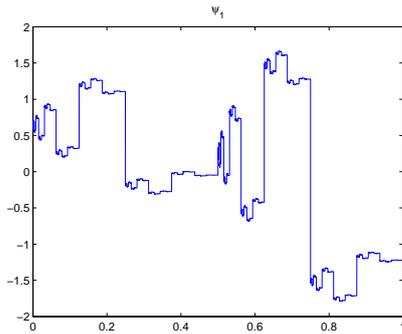
Figura 4.4: Caso $r = 2$. Ejemplos de funciones reales ψ_1 y ψ_2 de tipo 5.



(d) Parámetros: $\rho_0 = -1/2$, $u_0 = (1, 0)$, $v = (1, 1)/\sqrt{2}$, $\arg(\rho_1) = \arg(\tau_0) = 0$, $B_0 = 1$ y $\arg(C_1) = 0$.



(e) Parámetros: $\rho_0 = -0,6$, $u_0 = (1, 1)/\sqrt{2}$, $v = (1, 2)/\sqrt{5}$, $\arg(\rho_1) = \arg(\tau_0) = 0$, $B_0 = 1$ y $\arg(C_1) = 0$.



(f) Parámetros: $\rho_0 = 1/2$, $u_0 = (1, 1)/\sqrt{2}$, $v = (1, 2)/\sqrt{5}$, $\arg(\rho_1) = \arg(\tau_0) = 0$, $B_0 = 1$ y $\arg(C_1) = 0$.

Figura 4.5: Caso $r = 2$. Ejemplos de funciones reales ψ_1 y ψ_2 de tipo 5.

Por otro lado, la matriz constante $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ es unitaria si, y sólo si,

$$\begin{aligned} |u_{12}|^2 &= |u_{21}|^2 = 1 - |u_{11}|^2 = 1 - |u_{22}|^2 \\ \theta_{11} - \theta_{12} &= \theta_{21} - \theta_{22} + \pi \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad (4.79)$$

con $u_{jk} = |u_{jk}|e^{i\theta_{jk}}$, $j, k \in \{1, 2\}$. Utilizando (4.79), cálculos directos muestran que $\mathfrak{b}^{(0)}(\omega)$, $\mathfrak{b}^{(1)}(\omega)$ verifica las condiciones (4.38)–(4.42) si, y sólo si,

$$(1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2) \left| u_{11} - u_{21} \frac{\langle a_0^{(1)}, a_0^{(0)} \rangle}{1 - \|a_0^{(0)}\|_{\mathbb{C}^2}^2} \right|^2 = 1 - \|a_0^{(0)}u_{11} + a_0^{(1)}u_{21}\|_{\mathbb{C}^2}^2. \quad (4.80)$$

Finalmente, es sencillo ver que, dado $A^+(\omega) = (a^{(0)}(\omega) \ a^{(1)}(\omega))$ en cualquiera de los tipos 2–5 de la Proposición 75 y dada cualquier matriz unitaria constante U , la condición (4.80) se satisface siempre. \square

En otras palabras, la Proposición 78 asegura que, dada una función (2×2) -matricial M^+ -interna $A^+(\omega)$ en los tipos 2–5, no triviales, de la Proposición 75, $B^+(\omega) = A^+(\omega) \cdot U$ es también una función (2×2) -matricial M^+ -interna en los tipos 2–5, no triviales, de la Proposición 75, para toda (2×2) -matriz unitaria constante U . Estas transformaciones conectan, por un lado, las funciones matriciales M^+ -internas en los tipos 2 y 3 (aquellas que tienen un número finito de coeficientes de Fourier-Taylor no nulos) y, por otro lado, las funciones matriciales M^+ -internas en los tipos 4 y 5 (aquellas que tienen un número infinito de coeficientes de Fourier-Taylor no nulos). Más precisamente,

(i) Comenzando en una función matricial $A^+(\omega)$ del tipo 2, donde

$$\begin{cases} \mathfrak{a}^{(0)}(\omega) = \omega u_0, \\ \mathfrak{a}^{(1)}(\omega) = u_1, \end{cases}$$

por $B^+(\omega) = A^+(\omega) \cdot U$ se tiene:

1. Si U es una matriz unitaria diagonal, esto es, $u_{12} = u_{21} = 0$ y $|u_{11}| = |u_{22}| = 1$, entonces $B^+(\omega)$ es también una función matricial del tipo 2,

$$\begin{cases} \mathfrak{b}^{(0)}(\omega) = \omega u'_0, \\ \mathfrak{b}^{(1)}(\omega) = u'_1, \end{cases}$$

donde $u'_0 = e^{i\theta_{11}} u_0$, $u'_1 = e^{i\theta_{22}} u_1$.

2. Si U no es una matriz unitaria diagonal, es decir, $|u_{12}| = |u_{21}| > 0$, entonces $B^+(\omega)$ es una función matricial del tipo 3,

$$\begin{cases} \mathfrak{b}^{(0)}(\omega) = \rho u'_0 + \omega(1 - \rho^2)^{1/2} u'_1, \\ \mathfrak{b}^{(1)}(\omega) = e^{i\theta}(1 - \rho^2)^{1/2} u'_0 - \omega e^{i\theta} \rho u'_1, \end{cases}$$

donde $u'_0 = e^{i\theta_{21}} u_1$, $u'_1 = e^{i\theta_{11}} u_0$, $\rho = |u_{12}|$ y $\theta = \theta_{22} - \theta_{21} = \theta_{12} - \theta_{11} + \pi$.

(ii) Comenzando en una función matricial $A^+(\omega)$ del tipo 4, done

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{(0)}(\omega) = \rho u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k e^{i\theta} (1 - \rho^2)^{1/2} (-\rho e^{i\theta})^{k-1} u_0, \\ \mathbf{a}^{(1)}(\omega) = u_1, \end{cases}$$

por $B^+(\omega) = A^+(\omega) \cdot U$ se tiene:

1. Si U es una matriz unitaria diagonal, entonces $B^+(\omega)$ es también una función matricial del tipo 4,

$$\begin{cases} \mathbf{b}^{(0)}(\omega) = \rho u'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k e^{i\theta} (1 - \rho^2)^{1/2} (-\rho e^{i\theta})^{k-1} u'_0, \\ \mathbf{b}^{(1)}(\omega) = u'_1, \end{cases}$$

donde $u'_0 = e^{i\theta_{11}} u_0$, $u'_1 = e^{i\theta_{22}} u_1$.

2. Si U no es una matriz unitaria diagonal, entonces $B^+(\omega)$ es una función matricial del tipo 5,

$$\begin{cases} \mathbf{b}^{(0)}(\omega) = \rho_0 u'_0 + \rho_1 v' \sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} \omega^k, \\ \mathbf{b}^{(1)}(\omega) = \tau_0 u'_1 + \tau_1 v' \sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} \omega^k, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} u'_0 = \frac{e^{i\theta_{11}} |u_{11}| \rho}{\rho_0} u_0 + \frac{e^{i\theta_{21}} |u_{12}|}{\rho_0} u_1, \\ u'_1 = \frac{e^{i\theta_{12}} |u_{12}| \rho}{\tau_0} u_0 + \frac{e^{i\theta_{22}} |u_{11}|}{\tau_0} u_1, \\ v' = \frac{e^{i(\theta_{11}+\theta)} |u_{11}| (1 - \rho^2)}{\rho_1} u_0, \\ \rho_0 = (|u_{11}|^2 \rho^2 + |u_{12}|^2)^{1/2} e^{i\theta_{\rho_0}}, \\ \rho_1 = |u_{11}| (1 - \rho^2) e^{i\theta_{\rho_1}}, \\ \tau_0 = (|u_{12}|^2 \rho^2 + |u_{11}|^2)^{1/2} e^{i\theta_{\tau_0}}, \\ \tau_1 = |u_{12}| (1 - \rho^2) e^{i(\theta_{\rho_1} + \theta_{12} - \theta_{11})}, \\ r = -\rho e^{i\theta}, \\ \theta_{\rho_0}, \theta_{\rho_1}, \theta_{\tau_0} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas relaciones vinculan entre sí a las cuatro tipos de familias 2–5 de la Proposición 75.

4.2. Condiciones de Lawton generalizadas para framelets ajustados

Como se ha comentado en la introducción del capítulo, se centra ahora la atención en wavelet frames ajustados asociados a multirresoluciones generalizadas o funciones refinables, esto es, a familias Ψ de framelets ajustados. Para este tipo de wavelet frames, se estudian las conexiones entre los Principios de Extensión propuestos en la literatura y los modelos espectrales desarrollados en este trabajo.

Los Principios de Extensión fueron primeramente propuestos por Ron y Shen [127, 126] (véase también Benedetto y Trieber [18], y Chui y He [29]) y fueron extendidos por Daubechies et al. [42], y Chui, He y Stöckler [28], mediante el Principio de Extensión Oblicua. Los Principios de Extensión son importantes ya que pueden ser utilizados para construir wavelets a partir de funciones refinables que pueden no ser funciones de escala (en el sentido de que sus trasladadas enteras pueden no formar un frame, sólo un sistema de Bessel) con propiedades deseadas como simetría y antisimetría, regularidad o soporte compacto. Más detalles acerca de la importancia de los Principios de Extensión pueden encontrarse en [18, 27, 42, 127, 126].

4.2.1. La transformada de Fourier periodizada y los subespacios invariantes por traslaciones

Sea $L^2(\mathbb{R})$ el espacio de Hilbert usual de todas las funciones medibles con cuadrado integrable en \mathbb{R} con norma $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$ y producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ (lineal en la primera componente y conjugado-lineal en la segunda). Se consideran los operadores de traslación (unidad) y dilatación (diádica) en $L^2(\mathbb{R})$ definidos en (2.1).

Seguimos aquí utilizando la *transformada de Fourier* (continua) \hat{f} de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ dada por (ver definición(2.13))

$$\hat{f}(\theta) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \theta} dx, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (4.81)$$

Con este convenio, la transformada de Fourier es un operador unitario en $L^2(\mathbb{R})$, esto es, la fórmula de Parseval es

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}),$$

y, como es habitual, para $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $k \in \mathbb{Z}$,

$$[\widehat{T^k f}](\theta) = e^{-2\pi k \theta} \hat{f}(\theta), \quad [\widehat{D^k f}](\theta) = D^{-k} \hat{f}(\theta) = 2^{-k/2} \hat{f}(2^{-k} \theta). \quad (4.82)$$

La Proposición 19 (que trabaja sobre la denominada *transformada de Fourier periodizada*) da una representación espectral del operador de traslación T por medio de una

periodización de la transformada de Fourier (continua). Dicha transformada de Fourier periodizada está íntimamente relacionada con la noción de 1-periodización tal y como se utiliza en [48, 18]. En este caso, $l^2(\mathbb{Z})$ denota el espacio de Hilbert de sucesiones de números complejos $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ tales que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j|^2 < \infty$ y $L^2(\partial\mathbb{D}; l^2(\mathbb{Z}))$ denota el espacio de Hilbert de todas las funciones $\mathbf{v} : \partial\mathbb{D} \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ medibles⁶ tales que $\int_{\partial\mathbb{D}} \|\mathbf{v}(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 \frac{d\omega}{2\pi} < \infty$ (módulo conjuntos de medida nula) con la definición puntual de las operaciones lineales y el producto interno dado por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\partial\mathbb{D}; l^2(\mathbb{Z}))} := \int_{\partial\mathbb{D}} \langle \mathbf{u}(\omega), \mathbf{v}(\omega) \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\partial\mathbb{D}; l^2(\mathbb{Z})).$$

Para más detalles, véase [68, Section 2] y sus referencias.

Observación 79 Nótese que la transformada de Fourier periodizada de la Proposición 19 lleva a la siguiente notación: dada $f \in L^2(\mathbb{R})$,

\hat{f} denota la transformada de Fourier continua de f definida en (2.13),
 $\hat{f}_* = \mathcal{F}_* f$ denota la transformada de Fourier periodizada de f dada por (2.14),
 \hat{f}_k es la k -componente ($k \in \mathbb{Z}$) de la transformada de Fourier periodizada \hat{f}_* de f , ver (2.14) y (2.15).

Observación 80 El *producto bracket* definido por

$$[f, g](\theta) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\theta + k) \overline{g(\theta + k)}, \quad \text{para casi todo } \theta \in \mathbb{R} \text{ y } f, g \in L^2(\mathbb{R}), \quad (4.83)$$

juega un papel clave en la teoría de sistemas invariantes por traslaciones [47], principalmente utilizado en el dominio de Fourier. El producto bracket tiene un claro significado en el modelo espectral dado en la Proposición 19. De hecho, para $\theta \in \mathbb{R}$ y $\omega = e^{2\pi i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, se tiene

$$[\hat{f}, \hat{g}](\theta) = \langle \hat{f}_*(\omega), \hat{g}_*(\omega) \rangle_{l^2(\mathbb{Z})}, \quad \text{para casi todo } \theta \in \mathbb{R} \text{ y } f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

En particular,

$$[\hat{f}, \hat{f}](\theta) = \|\hat{f}_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2, \quad \text{para casi todo } \theta \in \mathbb{R} \text{ y } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

En adelante, dado $f \in L^2(\mathbb{R})$, se define

$$\sigma(f) := \sup[\hat{f}, \hat{f}] = \{\theta \in \mathbb{R} : [\hat{f}, \hat{f}](\theta) \neq 0\}$$

o

$$\sigma(f) := \sup \|\hat{f}_*\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \{\omega \in \partial\mathbb{D} : \|\hat{f}_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \neq 0\}$$

dependiendo del uso de \hat{f} o \hat{f}_* , respectivamente.

⁶La medibilidad puede ser interpretada en el sentido fuerte o débil, que representan lo mismo debido a la separabilidad de $l^2(\mathbb{Z})$.

Se considera el subespacio invariante por traslaciones principal generado por una función $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, es decir, la clausura en $L^2(\mathbb{R})$ del subespacio generado por las trasladadas enteras de ϕ :

$$V_0 := \overline{\text{span}}\{T^k \phi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Sea P_0 la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ en V_0 .

El siguiente resultado caracteriza el subespacio V_0 y da una expresión para P_0 en el modelo espectral de la Proposición 19.

Proposición 81 *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, se considera el subespacio $V_0 := \overline{\text{span}}\{T^k \phi : k \in \mathbb{Z}\}$ y sea P_0 la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ en V_0 . Entonces, $f \in L^2(\mathbb{R})$ pertenece a V_0 si, y sólo si, $\hat{f}_*(\omega)$ es colineal a $\hat{\phi}_*(\omega)$ para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Por tanto, para $f \in L^2(\mathbb{R})$,*

$$[\widehat{P_0 f}]_*(\omega) = \begin{cases} \frac{\langle \hat{f}_*(\omega), \hat{\phi}_*(\omega) \rangle_{l^2(\mathbb{Z})}}{\|\hat{\phi}_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2} \hat{\phi}_*(\omega) & , \text{ para casi todo } \omega \in \sigma(\phi), \\ 0 & , \text{ para casi todo } \omega \notin \sigma(\phi). \end{cases} \quad (4.84)$$

Demostración: Debido a (2.16),

$$\mathcal{F}_* V_0 := \overline{\text{span}}\{\omega^k \cdot \hat{\phi}_*(\omega) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ya que \mathcal{F}_* es unitario, $[\mathcal{F}_* V_0]^\perp = \mathcal{F}_*[V_0^\perp]$. Por tanto, $f \in V_0^\perp$ si, y sólo si,

$$\langle \hat{f}_*, \omega^k \hat{\phi}_* \rangle_{L^2(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{Z}))} = \int_{\partial\mathbb{D}} \omega^{-k} \langle f_*(\omega), \hat{\phi}_*(\omega) \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} \frac{d\omega}{2\pi} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La última condición es equivalente a

$$\langle f_*(\omega), \hat{\phi}_*(\omega) \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} = 0, \quad \text{para casi todo } \omega \in \partial\mathbb{D}.$$

En consecuencia, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \in V_0$ si, y sólo si, $\hat{f}_*(\omega)$ es colineal a $\hat{\phi}_*(\omega)$ para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Entonces, para cada $\omega \in \partial\mathbb{D}$ fijo, se tiene (4.84) para la proyección ortogonal de $l^2(\mathbb{Z})$ en el subespacio 1-dimensional generado por $\hat{\phi}_*(\omega)$. \square

Reescribiendo la Proposición 81 en términos de la transformada de Fourier usual definida en (2.13) y el producto bracket dado en la Observación 80, se obtiene los siguientes resultados clásicos en la teoría de subespacios invariantes por traslaciones (ver, por ejemplo, los Teoremas 2.9 y 2.14 en [48]).

Corolario 82 *Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{P_0 f} = H^f \hat{\phi}$, donde la función 1-periódica H^f está definida por*

$$H^f(\theta) = \begin{cases} \frac{[\hat{f}, \hat{\phi}](\theta)}{[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\theta)} & , \text{ para casi todo } \theta \in \sigma(\phi), \\ 0 & , \text{ para casi todo } \theta \notin \sigma(\phi). \end{cases} \quad (4.85)$$

Demostración: A partir de (2.14) y (2.15), y ya que $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $l^2(\mathbb{Z})$, para $\omega = e^{2\pi i \theta}$,

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}_*(\omega), \hat{\phi}_*(\omega) \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} \hat{\phi}_*(\omega) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}_j(\omega) \overline{\hat{\phi}_j(\omega)} \right] \hat{\phi}_k(\omega) u_k, \text{ para casi todo } \omega \in \partial \mathbb{D}, \\ &= \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\theta + j) \overline{\hat{\phi}(\theta + j)} \right] \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{\phi}(\theta + k)} u_k, \text{ para casi todo } \theta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\hat{\phi}_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}_j(\omega)|^2, \text{ para casi todo } \omega \in \partial \mathbb{D}, \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\theta + j)|^2, \text{ para casi todo } \theta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [\widehat{P_\phi f}]_*(\omega) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \overline{[\widehat{P_\phi f}]_k(\omega)} u_k, \text{ para casi todo } \omega \in \partial \mathbb{D}, \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \overline{[\widehat{P_\phi f}](\theta + k)} u_k, \text{ para casi todo } \theta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.84) y haciendo uso de (4.83), se obtiene el resultado deseado. \square

Corolario 83 Una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ está en V_0 si, y sólo si, $\hat{f} = H^f \hat{\phi}$ para alguna función 1-periódica medible H^f con $H^f \hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$. En particular, $H^f \hat{\phi} \in \widehat{V}_0$ para toda H acotada.

Demostración: El resultado es consecuencia del Corolario 82 y la identidad de Parseval. \square

Recuérdese que la familia $\{T^k \phi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una *base de Riesz* de V_0 cuando existen constantes $A, B > 0$ tales que para toda sucesión $c = \{c_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$ se tiene

$$A \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k T^k \phi \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq B \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2. \quad (4.86)$$

(véase [27, Theorem 3.6.6] para más detalles).⁷

El siguiente resultado ha sido probado por Hernández y Weiss [83, Lemma 2.1.8]:

Proposición 84 Dada $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, $\{T^k \phi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una *base de Riesz* de V_0 con constantes $A, B > 0$ si, y sólo si,

$$A \leq \|\hat{\phi}_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 \leq B, \quad \text{para casi todo } \omega \in \partial \mathbb{D}. \quad (4.87)$$

⁷Asimismo, la familia $\{T^k \phi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una *base de Riesz* de V_0 cuando es completa en V_0 y su matriz Grammiana $\{\langle f_k, f_j \rangle\}_{j,k=1}^\infty$ define un operador invertible y acotado en $l^2(\mathbb{Z})$.

Demostración: La condición (4.86) significa que, para toda $c = \{c_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$, la función $f_c := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k T^k \phi$ está en $L^2(\mathbb{R})$ y, entonces, $f_c \in V_0$. En particular, para una sucesión finita $c = \{c_k\}$,

$$[\widehat{f_c}]_*(\omega) = \sum_k c_k \omega^k \widehat{\phi}(\omega), \quad \text{para casi todo } \omega \in \partial\mathbb{D},$$

y, ya que \mathcal{F}_* es unitario,

$$\|f_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|[\widehat{f_c}]_*\|_{L^2(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{Z}))}^2 = \int_{\partial\mathbb{D}} \|[\widehat{f_c}]_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{\partial\mathbb{D}} \left| \sum_k c_k \omega^k \right|^2 \|\widehat{\phi}(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Entonces, por densidad, la condición de Riesz (4.86) es equivalente a

$$A \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 \leq \int_{\partial\mathbb{D}} \left| \sum_k c_k \omega^k \right|^2 \|\widehat{\phi}(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \frac{d\omega}{2\pi} \leq B \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2, \quad c = \{c_k\} \in l^2(\mathbb{Z}). \quad (4.88)$$

Es obvio que (4.87) implica (4.88). En el sentido opuesto, fijado $\eta \in \partial\mathbb{D}$ y, para cada $m \in \mathbb{N}$, se considera la sucesión $\{c_k\}$ con términos no nulos dados por

$$c_k = m^{-1/2} \eta^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Para esta sucesión, $|\sum_k c_k \omega^k|^2$ es el m -ésimo núcleo de Fejér y se puede aplicar el argumento utilizado en la prueba del Lema 2.1.8 en [83] para obtener el resultado. \square

En términos del producto bracket (véase la Observación 80), la Proposición 84 se lee como:

Corolario 85 *Dada $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, $\{T^k \phi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz de V_0 con constantes $A, B > 0$ si, y sólo si,*

$$A \leq [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\theta) \leq B, \quad \text{para casi todo } \theta \in \mathbb{R}. \quad (4.89)$$

A continuación se muestra una simple caracterización de la ortonormalidad de las trasladadas enteras de una función utilizando nuevamente la transformada de Fourier periodizada dada en la Proposición 19. Un razonamiento similar al utilizado en la demostración de la Proposición 84 lleva al resultado deseado, pero a continuación se prefiere ilustrar el uso de algunos temas relacionados con el operador $\mathcal{F}_* T \mathcal{F}_*^{-1} : \widehat{f}_*(\omega) \mapsto \omega \cdot \widehat{f}_*(\omega)$ definido en $\mathcal{F}_* L^2(\mathbb{R}) = L^2(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{Z}))$ por (2.16).

Proposición 86 *Dada $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, $\{T^k \phi : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal si, y sólo si,*

$$\|\widehat{\phi}_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})} = 1, \quad \text{para casi todo } \omega \in \partial\mathbb{D}.$$

Demostración: La familia $\{T^k\phi : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ si, y sólo si, el subespacio cerrado generado por $\hat{\phi}_* := \mathcal{F}_*\phi$ es un *subespacio ambulante* para el operador unitario $\mathcal{F}_*T\mathcal{F}_*^{-1} : \hat{f}_*(\omega) \mapsto \omega \cdot \hat{f}_*(\omega)$ definido en $\mathcal{F}_*L^2(\mathbb{R}) = L^2(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{Z}))$ por (2.16). Por [68, Lemma 7], esto es equivalente a la existencia de una *función rígida* \hat{A} en $L^2(\partial\mathbb{D}, l^2(\mathbb{Z}))$ con subespacio inicial unidimensional y tal que $\hat{\phi}_*(\omega) = \hat{A}(\omega)u$, con u un vector normalizado perteneciente al subespacio inicial de $\hat{A}(\omega)$, el mismo subespacio unidimensional de $l^2(\mathbb{Z})$ para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$. Ya que \hat{A} es una isometría parcial para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$,

$$1 = \|u\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \|\hat{A}(\omega)u\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \|\hat{\phi}_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2, \quad \text{para casi todo } \omega \in \partial\mathbb{D}.$$

□

Nuevamente, reescribiendo la Proposición 86 en términos del producto bracket (véase la Observación 80) o la transformada de Fourier usual, se tiene un resultado bien conocido (ver, por ejemplo, [83, Proposition 2.1.11]).

Corolario 87 *Dada $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, $\{T^k\phi : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal si, y sólo si*

$$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\theta + k)|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \theta \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Este resultado es consecuencia de la Proposición 86 y las igualdades, con $\omega = e^{2\pi i\theta}$,

$$1 = \|\hat{\phi}_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}_k(e^{2\pi i\theta})|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\theta + k)|^2 = [\hat{\phi}, \hat{\phi}](\theta), \quad \text{para casi todo } \theta \in \mathbb{R}.$$

□

Las Proposiciones 84 y 86 llevan al siguiente resultado.

Corolario 88 *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{T^k\phi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz de $V_0 := \overline{\text{span}}\{T^k\phi : k \in \mathbb{Z}\}$. Se considera la función φ definida por*

$$\hat{\varphi}_*(\omega) := \frac{\hat{\phi}_*(\omega)}{\|\hat{\phi}_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})}}, \quad \text{para casi todo } \omega \in \partial\mathbb{D}.$$

Entonces, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{T^k\varphi : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_0 .

Entonces (ver [6,7]), existen funciones 2π -periódicas medibles τ_i , $i = 1, \dots, r$ (referidas en adelante como **máscaras wavelet**), tales que, para todo i ,

$$\hat{\psi}_i(\cdot) = [\tau_i \hat{\phi}](\cdot/2).$$

Observación 89 En el marco de las *técnicas de fiberización* introducido por Ron y Shen [125, 127, 126], las *fibras Grammianas duales*

$$\tilde{G}_\theta(k, j) = \sum_{\psi \in \Psi} \hat{\psi}(\theta + k) \overline{\hat{\psi}(\theta + j)}, \quad \text{para casi todo } \theta \in [0, 1) \text{ y } (k, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

son particularmente útiles en el análisis del operador $T_X T_X^*$.

Observación 90 Ron y Shen [127, 126] utilizan de forma habitual el *producto afín*

$$\Psi[\theta, \theta'] := \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{k=\kappa(\theta-\theta')} \hat{\psi}(2^k \theta) \overline{\hat{\psi}(2^k \theta')}, \quad \theta, \theta' \in \mathbb{R},$$

donde κ es la valuación diádica

$$\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : \theta \mapsto \inf\{k \in \mathbb{Z} : 2^k \theta \in \mathbb{Z}\}.$$

En consecuencia, $\kappa(0) = -\infty$, y $\kappa(\theta) = \infty$ excepto para θ diádico. El convenio es que $\Psi[\theta, \theta']$, a no ser que se indique lo contrario, tiene convergencia absoluta en la correspondiente suma.

4.2.2. Framelets ajustados y principios de extensión

Aunque la teoría general se desarrolla en $L^2(\mathbb{R}^d)$ para matrices generales de dilatación entera, se sigue restringiendo la atención al caso unidimensional en $L^2(\mathbb{R})$ con traslaciones unidad y dilataciones diádicas.

Dado Ψ subconjunto finito o numerable de $L^2(\mathbb{R})$, se considera el *sistema wavelet (diádico)* $X(\Psi)$ generado Ψ de la forma (4.6). Recuérdese que el sistema $X(\Psi)$ es un *wavelet frame* si existen constantes $A, B > 0$ tales que se verifican las desigualdades (4.1),

$$A \|f\|^2 \leq \sum |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Las constantes A, B se denominan *cotas frame* y el wavelet frame se dice que es *ajustado* si se pueden escoger $A = B$ como cotas frame.

El interés se centra ahora en el estudio de los wavelet frames derivados de una *función refinable* $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Que ϕ sea refinable significa la existencia de una función 1-periódica medible H^ϕ en \mathbb{R} o una función medible H_*^ϕ en $\partial\mathbb{D}$ (con $H^\phi(\theta) = H_*^\psi(\omega)$, para $\omega = e^{2\pi i\theta}$), la *máscara de refinamiento*, tal que

$$\hat{\phi}(2\theta) = H^\phi(\theta) \hat{\phi}(\theta) \quad \text{o} \quad \hat{\phi}_*(\omega^2) = H_*^\phi(\omega) \hat{\phi}_*(\omega). \quad (4.90)$$

De acuerdo con (4.82) y el Corolario 83, la ecuación (4.90) es equivalente al hecho de que $D^{-1}\phi$ está en $V_0 := \overline{\text{span}}\{T^k \phi : k \in \mathbb{Z}\}$. Recuérdese (ver Observación 80) que

$$\begin{aligned} \sigma(\phi) &:= \sup[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = \{\theta \in \mathbb{R} : [\hat{f}, \hat{f}](\theta) \neq 0\} \\ &:= \sup \|\hat{\phi}_*\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \{\omega \in \partial\mathbb{D} : \|\hat{\phi}_*(\omega)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \neq 0\}, \end{aligned}$$

dependiendo del uso de $\hat{\phi}$ o $\hat{\phi}_*$, respectivamente.

Más aún, se asume que para cada $\psi \in \Psi$ existen funciones 1-periódicas medibles H^ψ en \mathbb{R} o funciones medibles H_*^ψ en $\partial\mathbb{D}$ (con $H^\psi(\theta) = H_*^\psi(\omega)$, para $\omega = e^{2\pi i\theta}$), las *máscaras wavelet*, tales que

$$\hat{\psi}(2\theta) = H^\psi(\theta)\hat{\psi}(\theta) \quad \text{o} \quad \hat{\psi}_*(\omega^2) = H_*^\psi(\omega)\hat{\psi}_*(\omega). \quad (4.91)$$

Si, además, el sistema $X(\Psi)$ es un frame, sus elementos se denominan *framelets*. La noción de *framelets ajustados*, etc., tienen el significado obvio.

El *Principio de Extensión Unitaria* de Ron y Shen [127, 126] da condiciones suficientes para que $X(\Psi)$, con $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_r\}$ subconjunto finito, sea un frame ajustado. Las condiciones están escritas en términos de la matriz funcional

$$H(\theta) = \begin{pmatrix} H^\phi(\theta) & H^\phi(\theta + 1/2) \\ H^{\psi_1}(\theta) & H^{\psi_1}(\theta + 1/2) \\ \vdots & \vdots \\ H^{\psi_r}(\theta) & H^{\psi_r}(\theta + 1/2) \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad H_*(\omega) = \begin{pmatrix} H_*^\phi(\omega) & H_*^\phi(-\omega) \\ H_*^{\psi_1}(\omega) & H_*^{\psi_1}(-\omega) \\ \vdots & \vdots \\ H_*^{\psi_r}(\omega) & H_*^{\psi_r}(-\omega) \end{pmatrix}.$$

El siguiente resultado es una versión refinada del Principio de Extensión Unitaria dada por Benedetto y Trieber [18, Theorem 1.7.1]:

Teorema 91 (Principio de Extensión Unitaria (UEP)) *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ una función refinable con máscara de refinamiento H^ϕ (o H_*^ϕ) y tal que*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \hat{\phi}(\theta) = 1. \quad (4.92)$$

Se supone que el conjunto finito de wavelets $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_r\} \subset L^2(\mathbb{R})$ tiene asociado máscaras wavelet H^{ψ_i} (o $H_^{\psi_i}$) con respecto de ϕ . Si $H^*H = Id$ (o $H_*^*H_* = Id$) casi siempre en $\sigma(\phi)$, entonces $X(\Psi)$ es un frame ajustado con cota frame 1 para $L^2(\mathbb{R})$.*

Observación 92 La condición (4.92) implica que $\lim_{\theta \rightarrow 0} H^\phi(\theta) = 1$, es decir, H^ϕ es un filtro paso bajo. Por otro lado, la condición $H^*H = Id$ casi siempre en $\sigma(\phi)$ claramente implica $|H^{\psi_i}| \leq 1$, $i = 1, \dots, r$, en $\sigma(\phi)$.

Observación 93 Sea $V_j = D^j V_0$, $j \in \mathbb{Z}$. La ecuación (4.90) es equivalente a $\phi \in V_1$ y, más aún, equivalente al hecho de que la sucesión $\{V_j\}_j$ está anidada, esto es,

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \quad (4.93)$$

Del mismo modo, la ecuación (4.91) es equivalente a $\Psi \subset V_1$. En este caso, no se requiere que ϕ sea un “buen” generador de V_0 en el sentido de que $\{T^k \phi : k \in \mathbb{Z}\}$ sea una base o un (pseudo-)frame para V_0 . Además, aunque $V_j \subset V_{j+1}$, no se impone que V_j y $\overline{\text{span}}\{D_j T^k \psi_i : k \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, r\}$ dividan V_{j+1} como una suma directa (o incluso ortogonal).

Cuando la sucesión anidada $\{V_j\}$ asociada a la función refinable $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ como en (4.93) aproxima $L^2(\mathbb{R})$ en el sentido de que

$$\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (4.94)$$

se dice que ϕ genera el análisis multirresolución (generalizado) (MRA) $\{V_j\}$ de $L^2(\mathbb{R})$. En este caso, un wavelet frame $X(\Psi)$, con $\Psi \subset V_1$, se denomina *MRA (wavelet-)frame*

Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, con $\hat{\phi} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\hat{\phi}$ continua en 0, y $\hat{\phi}(0) = 1$, una función refinable que genera el análisis multirresolución $\{V_j\}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces un frame $X(\Psi)$, con $\Psi \subset V_1$, se denomina un *(wavelet-) frame de energía mínima asociado a ϕ* , si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, DT^k \phi \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, T^k \psi_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, T^k \psi_i \rangle|^2 = \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (4.95)$$

Observación 94 Un frame de energía mínima es necesariamente un frame ajustado para $L^2(\mathbb{R})$, con cota frame igual a 1 (ver [29, Remark 1]). La noción de frame de energía mínima asociado a una función refinable ϕ es más restrictiva que la de MRA-frame ajustado, como puede verse en Ron y Shen [127, Sect.6].

Restringiendo la atención a funciones de soporte compacto que satisfacen ciertas condiciones adicionales, Chui y He [29] dan una completa caracterización de los frames de energía mínima asociados a una función refinable dada. La caracterización se escribe en términos de las máscaras de refinamiento y wavelets. En este caso particular, las máscaras se reducen a polinomios de Laurent, ya que las ecuaciones (4.90) y (4.91) con máscaras 1-periódicas

$$H^\phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k^\phi e^{2\pi i k \theta} \quad \text{y} \quad H^\psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k^\psi e^{2\pi i k \theta}, \quad \psi \in \Psi,$$

están en correspondencia con las relaciones de doble escala

$$\phi = \sum_k h_k^\phi DT^k \phi \quad \text{y} \quad \psi = \sum_k h_k^\psi DT^k \phi, \quad \psi \in \Psi.$$

El resultado de Chui y He [29, Lemma 1] está íntimamente relacionado al Principio de Extensión Unitaria.

Teorema 95 Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ una función refinable de soporte compacto que genera el análisis multirresolución $\{V_j\}$ de $L^2(\mathbb{R})$. Se supone que $\hat{\phi}(0) = 1$. Sean H_*^ϕ y $H_*^{\psi_i}$, $i = 1, \dots, r$, en (4.90) y (4.91), los polinomios de Laurent que gobiernan la función $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ y la familia de soporte compacto $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_r\} \subset V_1$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $X(\Psi)$ es un frame de energía mínima asociado a ϕ .

(ii)

$$H_*^*(\omega)H_*(\omega) = Id, \quad \omega \in \partial\mathbb{D}. \quad (4.96)$$

(iii)

$$\alpha_{m,l} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\overline{h_{m-2k}^\phi} h_{l-2k}^\phi + \sum_{i=1}^r \overline{h_{m-2k}^{\psi_i}} h_{l-2k}^{\psi_i} \right) - \delta_{m,l} \quad (4.97)$$

satisface

$$\alpha_{m,l} = 0, \quad l, m \in \mathbb{Z}, \quad (4.98)$$

donde $\delta_{m,l}$ es la función delta de Kronecker.

En este resultado, que (ii) implica (i) para el caso $N = 1$ fue probado primero por Lawton [93].

El Principio de Extensión Unitaria fue posteriormente extendido por Daubechies, Han, Ron y Shen [42], y Chui, He y Stöckler [28], en la forma del Principio de Extensión Oblicua. En este principio, el nuevo ingrediente es la denominada *función fundamental* Θ , definida en término de las máscaras por

$$\Theta(\theta) := \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{\psi \in \Psi} |H^\psi(2^j\theta)|^2 \right] \prod_{m=0}^{j-1} |H^\phi(2^m\theta)|^2, \quad \text{para casi todo } \theta \in \mathbb{R}. \quad (4.99)$$

(o Θ_* en $\partial\mathbb{D}$, donde $\Theta_*(\omega) = \Theta(\theta)$, para casi todo $\omega = e^{2\pi i\theta}$).

Se incluye, en el Teorema 96, una versión unidimensional del Principio de Extensión Oblicua para wavelet frames ajustados, con cota frame 1, debida a Atreas, Melas y Stavropoulos [8, Proposition 3.1]. En esta versión, la función refinable $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ debe satisfacer las siguientes propiedades:

(i) La transformada de Fourier usual $\hat{\phi}$ es continua en un entorno del origen y

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \hat{\phi}(\theta) = 1;$$

(ii) La transformada de Fourier periodizada $\hat{\phi}_*$ satisface que $\|\hat{\phi}_*\|$ pertenece a $L^\infty[0, 1)$, el espacio de todas las funciones medibles de $[0, 1)$ esencialmente acotadas.

Teorema 96 (Principio de Extensión Oblicua (OEP)) *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ una función refinable de soporte compacto satisfaciendo (i), (ii) y (4.90). Sea $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_r\} \subset V_1$ un conjunto finito de wavelets verificando (4.91). Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $X(\Psi)$ es un frame de Parseval para $L^2(\mathbb{R})$.

(2) Existe una función medible 1-periódica Θ en \mathbb{R} (o una función medible Θ_* en $\partial\mathbb{D}$, donde $\Theta_*(\omega) = \Theta(\theta)$, para $\omega = e^{2\pi i\theta}$) tal que

- (a) $\lim_{j \rightarrow -\infty} \Theta(2^j \theta) = 1$ para casi todo $\theta \in \mathbb{R}$,
(b) para casi todo $\theta \in \sigma(\phi)$, con $\theta + 1/2 \in \sigma(\phi)$,

$$\begin{aligned} \Theta(2\theta)H^\phi(\theta)\overline{H^\phi(\theta)} + \sum_{i=1}^r H^{\psi_i}(\theta)\overline{H^{\psi_i}(\theta)} &= \Theta(\theta) \\ \Theta(2\theta)H^\phi(\theta)\overline{H^\phi(\theta + 1/2)} + \sum_{i=1}^r H^{\psi_i}(\theta)\overline{H^{\psi_i}(\theta + 1/2)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.100)$$

- (c) $\Theta|\hat{\phi}|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ (o, equivalentemente, $\int_{\partial\mathbb{D}} \Theta_*(\omega) \|\phi_*\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} < \infty$)

Recuérdese que $X(\Psi)$ es un frame de Parseval para $L^2(\mathbb{R})$ si, y sólo si,

$$\sum_{j=\kappa(n)}^{\infty} \sum_{i=1}^m \hat{\psi}_i(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}_i(2^j(\xi + n))} = \delta_{0,n}, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R},$$

donde $\kappa(n) = \inf\{j \leq 0 : 2^j n \in \mathbb{Z}\}$ (véase [143, Proposition 2.2] o [127]).

El sistema wavelet (homogéneo) $X(\Psi)$ derivado de una función refinable ϕ puede estar derivado de otras funciones refinables (equivalentes), las cuales se corresponden con diferentes conjuntos de máscaras. Más precisamente, para una función medible 1-periódica κ tal que $\kappa(\theta) \neq 0$ para casi todo $\theta \in \mathbb{R}$, se define

$$\hat{\varphi}(\theta) := \kappa(\theta) \hat{\phi}(\theta).$$

Entonces es evidente que φ es también refinable y satisface, para $\psi \in \Psi$,

$$\hat{\varphi}(2\theta) = [\kappa(2\theta)H^\phi(\theta)/\kappa(\theta)]\hat{\varphi}(\theta) \quad \text{y} \quad \hat{\psi}(2\theta) = [H^\psi(\theta)/\kappa(\theta)]\hat{\varphi}(\theta), \quad \text{casi siempre } \theta \in \mathbb{R}.$$

El cambio de generadores de una función refinable ϕ a otra función refinable equivalente φ es de hecho la idea subyacente en el Principio de Extensión Oblicua.

Los sistemas wavelet no homogéneos han sido introducidos para analizar los efectos del cambio de generadores en la transformada wavelet rápida y varios aspectos de la teoría wavelet como los filtros wavelet introducidos por el OEP. En el espacio de distribuciones, esta noción también permite separar la propiedad de reconstrucción perfecta del sistema wavelet de su estabilidad en espacios de funciones (véase Han [78] y Atréas, Melas y Stavropoulos [8] y sus referencias).

4.2.3. Principios de extensión y modelos espectrales

Los resultados anteriores actúan sobre las máscaras con el fin de caracterizar los diferentes tipos de frames, lo cual puede resultar poco práctico a la hora de realizar

cálculos explícitos con ellas. Para evitar este problema, se utilizan los operadores \mathcal{G} y \mathcal{F} de los modelos espectrales descritos en la Sección 2.1 sobre las condiciones de caracterización con el fin de obtener condiciones equivalentes para los coeficientes en las bases $\{K_{s,j}^{(m)}\}_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ i \in \mathbb{I}}}$ y $\{L_i^{(n)}\}_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ i \in \mathbb{I}}}$, respectivamente. Debido a la propiedad de 1-periodicidad de las máscaras, y, por tanto, de la función Θ , se utiliza el operador \mathcal{F} , ya que si f es 1-periódica, entonces $\hat{f}_i^{(n)} = \hat{f}_i^{(m)}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Para poder obtener la expresión en dicho operador, al estar las condiciones a tratar dadas como productos de máscaras, es necesario definir unos nuevos coeficientes auxiliares de cambio de base:

Definición 97 Dada una base $\{L_i^{(n)}\}_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ i \in \mathbb{I}}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, se define, para $i, j, l \in \mathbb{I}$, $n, m, k \in \mathbb{Z}$,

$$\beta_{i,j,l}^{n,m,k} := \left\langle L_i^{(n)} \cdot L_j^{(m)}, L_l^{(k)} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} L_i^{(n)}(x) L_j^{(m)}(x) \overline{L_l^{(k)}(x)} dx. \quad (4.101)$$

Observación 98 Se verifican las siguientes relaciones:

- $\beta_{i,j,l}^{n,m,k} = \beta_{j,i,l}^{m,n,k}$
- $\left\langle L_i^{(n)} \cdot \overline{L_j^{(m)}}, L_l^{(k)} \right\rangle = \overline{\beta_{j,l,i}^{m,k,n}}$
- $\beta_{i,j,l}^{n,m,k} \neq 0 \Leftrightarrow n = m = k$
- $\beta_{i,j,l}^{n,n,n} = \beta_{i,j,l}^{0,0,0}$

Estos coeficientes permiten expresar los coeficientes del producto de funciones en función de los coeficientes de dichas funciones: sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ funciones 1-periódicas, $f = \sum_{i,n} \hat{f}_i L_i^{(n)}$, $g = \sum_{i,n} \hat{g}_i L_i^{(n)}$. Entonces

$$fg = \sum_{i,j,n,m} \hat{f}_i \hat{g}_j L_i^{(n)} L_j^{(m)} = \sum_{i,j,l,n,m,k} \hat{f}_i \hat{g}_j \overline{\beta_{i,j,l}^{n,m,k}} L_l^{(k)},$$

por lo que

$$\widehat{(fg)}_l^{(k)} = \sum_{i,j,n,m} \hat{f}_i \hat{g}_j \beta_{i,j,l}^{n,m,k} \quad (4.102)$$

En particular, si $L_i^{(n)} = e^{2\pi I i}$ con $I = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria, entonces

$$\widehat{(fg)}_l^{(n)} = \sum_{i,j} \hat{f}_i \hat{g}_j \beta_{i,j,l}^{0,0,0} = \sum_j \hat{f}_{l-j} \hat{g}_j \beta_{l-j,j,l}^{0,0,0} = \sum_j \hat{f}_{l-j} \hat{g}_j.$$

Por otra parte, es necesario expresar los coeficientes dilatados y trasladados $1/2$ de una función 1-periódica en función de la propia función base. En ambos casos se acude a los coeficientes $\alpha_{i,n}^{l,j,m}$. Dada una función $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\widehat{(f(2\cdot))}_i^{(n)} = \sum_{l,j,m} \alpha_{i,n}^{l,j,m} \sum_{p,q} \alpha_{p,q}^{l,j,m-1} \hat{f}_p^q \quad (4.103)$$

En el caso de la función trasladada $1/2$, se sabe que

$$f\left(\cdot + \frac{1}{2}\right) = (DT^{-1}D^{-1})f$$

por lo que

$$\left(\widehat{f\left(\cdot + \frac{1}{2}\right)}\right)_i^{(n)} = \sum_{a,b,c} \alpha_{i,n}^{a,b,c} \sum_{d,e} \alpha_{d,e}^{a,b,c-1} \sum_{l,j,m} \alpha_{d,e+1}^{l,j,m} \sum_{p,q} \alpha_{p,q}^{l,j,m+1} \hat{f}_p^q \quad (4.104)$$

Nuevamente, en el caso particular de la base trigonométrica, estos elementos permiten expresar las condiciones (4.100) del Principio de Extensión Oblicua como ecuaciones (lineales) sobre los filtros wavelet frame y de refinamiento. La expresión de estos coeficientes $\beta_{i,j,l}^{n,m,k}$ en las bases de Haar y trigonométrica se pueden encontrar en el Apéndice A, mientras que la expresión de los coeficientes dilatados, trasladados $1/2$ y de la función conjugada en dichas bases se incluye en el Apéndice B.

Para la obtención de dichos sistemas de ecuaciones es necesario definir previamente las siguientes matrices y vectores. En adelante, se identifica $\psi_0 = \phi$. Sean $\{h^{\psi_s}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $s = 0, \dots, r$ sucesiones en \mathbb{C} . Se definen

$$L^+ := (L^0)^+ - Id/2, \quad L^- := (L^0)^-$$

$$w^+ := \sum_{s=1}^r (w^s)^+, \quad w^- := \sum_{s=1}^r (w^s)^-$$

donde Id es la matriz identidad y, para $l, m \in \mathbb{Z}$, $s = 0, \dots, r$,

$$\begin{aligned} (L^s)_{l,m}^+ &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h^{\psi_s}[k]} h^{\psi_s}[k+l-2m], \\ (L^s)_{l,m}^- &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h^{\psi_s}[k]} h^{\psi_s}[k+l-2m], \\ (w^s)_l^+ &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h^{\psi_s}[k]} h^{\psi_s}[k+l], \\ (w^s)_j^- &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h^{\psi_s}[k]} h^{\psi_s}[k+l] \end{aligned} \quad (4.105)$$

Las matrices $(L^s)^+$, $s = 0, 1, \dots, r$ son matrices “tipo Lawton”, esto es, matrices (posiblemente infinitas) con la misma estructura que la matriz que Lawton utilizada

para caracterizar la propiedad de ortonormalidad en las wavelets multirresolución [93]. Este hecho muestra que dicho tipo de matrices no sólo proporciona información acerca de la ortogonalidad de la función de refinamiento, sino que son inherentes al concepto de wavelet frame ajustado, mucho más general.

Proposición 99 *La condición (4.100) es equivalente al par de sistemas de ecuaciones*

$$L^+ \cdot z = -w^+ \quad , \quad L^- \cdot z = -w^- ,$$

donde $z_m = \hat{\Theta}_m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Demostración: La demostración de este resultado se basa en aplicar el operador \mathcal{F} , para el caso particular de $\{L_i^{(n)}\}_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ i \in \mathbb{I}}} = \{e^{2\pi I i(\cdot - n)}\}_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ i \in \mathbb{Z}}}$, a la condición (4.100), haciendo uso de las expresiones anteriores para las funciones dilatadas y trasladadas. \square

Este resultado permite reescribir el Principio de Extensión Oblicua (Teorema 96) en función de los filtros asociados a las máscaras.

Teorema 100 *Sean $\{h^{\psi_s}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $s = 0, \dots, r$, sucesiones en \mathbb{C} de modo que sus series de Fourier $H^{\psi_s}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^{\psi_s}[n] e^{2\pi I n \theta}$, función de refinamiento ψ_0 y wavelets ψ_s , $s = 1, \dots, r$, verifican las condiciones del Teorema 96 (OEP). Se supone que los sistemas*

$$L^+ \cdot z = -w^+ \quad , \quad L^- \cdot z = -w^- \tag{4.106}$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} z_m = 1 \tag{4.107}$$

tienen solución (única) $\{z_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ tal que la función $Z(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z_m e^{2\pi I m \theta}$ es medible y continua en el origen y satisface $Z|\hat{\psi}_0|^2 \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces $X(\Psi)$ es un sistema wavelet frame ajustado con función fundamental $\Theta \equiv Z$.

Demostración: Se define la función $Z(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z_m e^{2\pi I m \theta}$ verificando las condiciones indicadas. Además, $Z(0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z_m = 1$ por (4.107). Por tanto, se verifican las condiciones del OEP para $\Theta \equiv Z$. \square

Observación 101 Nótese que $(w^s)^{+/-} = (L^s)^{+/-} \cdot \delta_m$, $s = 1, \dots, r$. Esto es, $(w^s)^{+/-}$ se puede describir también en términos de matrices "tipo Lawton", siendo δ_m la función delta de Kronecker.

Observación 102 En el caso particular del Principio de Extensión Unitaria ($\Theta \equiv 1$), las condiciones (4.106) del Teorema 100 son equivalentes a la condición (4.98) para $m \in \{0, 1\}$ del resultado de Chui y He (Teorema 95). Basta considerar la suma y la diferencia de los sistemas en (4.106) para separar índices pares e impares y eliminar el factor $(-1)^k$ de las expresiones de $(L^s)^-$ y $(w^s)^{+/-}$. De hecho, en la condición (4.98) basta considerar los casos $m \in \{0, 1\}$ al identificar filas pares e impares en la matriz de componentes $\alpha_{m,l}$, $l, m \in \mathbb{Z}$.

El Teorema 100 permite deducir varias propiedades sobre los filtros y la función fundamental.

En primer lugar, partiendo de funciones de refinamiento y wavelet frames ajustados de soporte finito, se puede concluir que, bajo ciertas condiciones (utilizadas por Daubechies y Lagarias para imponer regularidad sobre las soluciones de una ecuación de refinamiento), la función fundamental asociada es un polinomio trigonométrico. Para ello se hace uso de los bloques de la matriz, \mathcal{L}^- ,

$$\mathcal{L}_{l,m}^- = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h^{\psi_0}[k]} h^{\psi_0}[k+l-2m], \quad n_1 \leq l, m < n_2,$$

siendo $\{h^{\psi_0}[n]\}_{n_1 \leq n \leq n_2}$ el filtro asociado a la función de refinamiento, la cual es una versión de la matriz de Lawton en la que las sumas que las definen alternan su signo.

Corolario 103 Sean $\{h^{\psi_s}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $s = 0, 1, \dots, r$ sucesiones de números complejos verificando las condiciones que en el Teorema 100 y tales que $X(\Psi)$ es un sistema wavelet frame ajustado. Se supone que ψ_s , $s = 0, 1, \dots, r$ tienen soporte compacto (es decir, los vectores $\{h^{\psi_s}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $s = 0, 1, \dots, r$ son finitos), $\sum_n (-1)^n h^{\psi_0}[n] = 0$ y $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}^-)) = 1$, esto es, 0 es un autovalor simple de \mathcal{L}^- . Entonces, Θ es un polinomio trigonométrico.

Demostración: Sea $K > 0$ el primer natural tal que $w_k^- = 0$, $k \geq K$ y sea $N =$ número de elementos no nulos de $\{h^{\psi_0}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}} - 1$. Se considera el sub-sistema correspondiente a las variables Θ_k , $k \geq K$, cuya matriz puede interpretarse como “diagonal” por bloques de Lawton alternos, \mathcal{L}^- , con líneas adicionales intercaladas. De dicho sub-sistema se extraen los sistemas

$$\mathcal{L}^- \cdot \underline{\Theta}_k = \underline{0}, \quad k \geq 0$$

con $\underline{\Theta}_k = (\Theta_{K+k(N+1)}, \Theta_{K+k(N-1)}, \dots, \Theta_{K+k(N-1)-1})$.

Puesto que $\sum_n (-1)^n h^{\psi_0}[n] = 0$, el vector $\underline{1} = (1, 1, \dots, 1)$ pertenece al núcleo de la matriz \mathcal{L}^- . Ya que $\underline{\Theta}_k$ también pertenecen al núcleo de dicha matriz, si $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}^-)) = 1$, entonces existen constantes C_k tales que $\underline{\Theta}_k = C_k \cdot \underline{1}$, $k \geq 0$. Debido a la definición de los $\underline{\Theta}_k$, en los cuales las variables de la mitad final se repiten en la mitad inicial del siguiente vector, se verifica que $C_k = C_0$, $k \geq 0$. Por otro lado, puesto que Θ es integrable, $\Theta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, y por tanto $C_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0$, esto es, $\underline{\Theta}_k = \underline{0}$, $k \geq 0$. En conclusión, $\Theta_k = 0$, $|k| \geq K$. \square

Por otro lado, el Teorema 100 permite definir sistemas de ecuaciones para el cálculo de wavelet frames ajustados. Dichos sistemas pueden ser completados con condiciones adicionales a la hora de exigir propiedades específicas que deben satisfacer tanto los framelets como la función de refinamiento.

Proposición 104 Sean $\{h^{\psi_s}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $s = 0, 1, \dots, r$ sucesiones de números complejos verificando las condiciones del Teorema 100 y tales que $X(\Psi)$ es un sistema wavelet frame ajustado. Entonces:

1. $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal si, y sólo si,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h^{\psi_0}[k] = 1, \quad (4.108)$$

$$(\delta_m \cdot (L^0)^+)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h^{\psi_0}[k] \overline{h^{\psi_0}[k + 2n]} = \frac{\delta_n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.109)$$

y la matriz de Lawton \mathcal{L}^+ (la cual verifica $(\mathcal{L}^+)^* = L^+ + Id/2$ con las dimensiones adecuadas) tiene autovalor 1 no degenerado.

2. ψ es una MRA-wavelet ortonormal ($r=1$) si, y sólo si, $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal y se verifica (salvo traslación)

$$h^{\psi_1}[n] = (-1)^n h^{\psi_0}[1 - n], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.110)$$

3. X es ortonormal si, y sólo si, $\|\psi_s\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, $s = 1, \dots, r^8$. En el caso particular de que la familia de trasladadas $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sea ortonormal, se tiene que $X(\Psi)$ es ortonormal si, y sólo si,

$$(\delta_m \cdot (L^s)^+)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h^{\psi_s}[k] \overline{h^{\psi_s}[k + 2n]} = \frac{\delta_n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s = 1, \dots, r. \quad (4.111)$$

4. $X(\Psi)$ es ortogonal a $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ortonormal si, y sólo si,

$$h^{\psi_s}[n] = (-1)^{n+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k^r \overline{h^{\psi_0}[2k - n + 1]}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s = 1, \dots, r \quad (4.112)$$

con $\nu_s(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k^s e^{2\pi i k \theta}$ función 1-periódica, $s = 1, \dots, r$.

Demostración: La demostración de los cuatro puntos se puede encontrar en [41, Chapter 5]. \square

Observación 105 La condición de Lawton para la ortonormalidad "La matriz de Lawton, \mathcal{L}^+ , tiene a 1 como autovalor no degenerado" puede reformularse como "El núcleo de la matriz $L^+ - Id/2$ tiene dimensión 1", para el caso de dimensión finita.

La Proposición 104 permite deducir el siguiente resultado.

Corolario 106 Dado $X(\Psi)$ sistema wavelet frame ajustado, si $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal y la función fundamental Θ es un polinomio trigonométrico, $X(\Psi)$ es ortonormal si, y sólo si, $\Theta \equiv 1$ y $r = 1$.

⁸Véase [127, Corollary 5.8]

Demostración: $X(\Psi)$ sistema wavelet frame ajustado implica (4.106) y, por tanto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{-N} \\ \vdots \\ \Theta_{-1} \\ \Theta_0 \\ \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_N \end{pmatrix} = - \sum_{s=1}^r (w^s)^+$$

Si $X(\Psi)$ es ortogonal, $(w^s)_n^+ = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h^{\psi_s}[k]} h^{\psi_s}[k+n] = \frac{\delta_n}{2}$, $n = -2N, \dots, 2N$, $s = 1, \dots, r$.

$\frac{\Theta_{\pm N}}{2} = - \sum_{s=1}^r (w^s)_{\pm 2N}^+ = 0$, por lo que $\Theta_{\pm N} = 0$. Esto permite reducir la dimensión del sistema desde un sistema $((4N+1) \times (2N+1), (2N+1) \times 1, (4N+1) \times 1)$ a un sistema $((4(N-1)+1) \times (2(N-1)+1), (2(N-1)+1) \times 1, (4(N-1)+1) \times 1)$ y, recurrentemente, se concluye que $\Theta_{\pm n} = 0$, $\forall n \neq 0$, por lo que $\Theta_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Theta_k = 1$, es decir, $\Theta \equiv 1$. Por otra parte, $-\sum_{s=1}^r (w^s)_0^+ = -\frac{r}{2} = -\frac{1}{2}$. Por tanto, $r = 1$.

Para la implicación inversa, supuestos $\Theta \equiv 1$, es decir, $\Theta_n = \delta_n$, $n = -N, \dots, N$ y $r = 1$, entonces $-(w^1)_n^+ = -\frac{\delta_n}{2}$ y, por tanto, $X(\Psi)$ es ortogonal. \square

Por otra parte, en el caso particular del Principio de Extensión Unitaria, pueden verse equivalencias entre las condiciones de las propiedades.

Corolario 107 *Sea la sucesión $\{h^{\psi_0}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de números complejos y se define $\{h^{\psi_1}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ mediante la expresión (4.110). Se supone que sus series de Fourier $H^{\psi_s}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^{\psi_s}[n] e^{2\pi I n \theta}$, $s = 0, 1$, función de refinamiento ψ_0 y wavelet ψ_1 , verifican las condiciones del Teorema 96. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) *Se verifica (4.106) con z tal que $z_0 = \delta_m$, $m \in \mathbb{Z}$.*

(ii) *Se verifica (4.109).*

El Corolario 107 permite describir el resultado central de la teoría de wavelets multirresolución ortonormales (véase el Teorema 6.3.6 de [41]) como un caso particular de la caracterización de framelets ajustados dada en el Teorema 100.

Teorema 108 Sea $\{h^{\psi_0}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión de números complejos. Se define $\{h^{\psi_1}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ mediante la expresión (4.110) y se supone que:

1. sus series de Fourier $H^{\psi_s}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^{\psi_s}[n] e^{2\pi i n \theta}$, $s = 0, 1$, función de refinamiento ψ_0 y wavelet ψ_1 , verifican las condiciones del Teorema 96.
2. $X(\Psi)$ verifica (4.106) con z tal que $z_0 = 1$, $z_m = 0$, $\forall m \neq 0$.
3. el núcleo de la matriz $(L^0)^+ - Id$ (con las dimensiones adecuadas) tiene dimensión 1.

Entonces ψ_1 es una wavelet ortonormal (con función de escala asociada ψ_0).

Análogamente, bajo los mismos supuestos, si se verifican las condiciones (4.111) y (4.112), el filtro wavelet $\{h^{\psi_1}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ debe definirse por (4.110).

Observación 109 En el teorema anterior se puede sustituir la definición del filtro wavelet (4.110) por la condición (4.112) para $r = 1$ con $|\nu_1| = 1$ casi siempre.

Observación 110 Por último, se pueden deducir relaciones entre varias de las propiedades consideradas anteriormente cuando se centra la atención en el caso $r = 1$. Por ejemplo:

1. (4.110) \Rightarrow (4.112)
2. (4.111) + (4.112) \Rightarrow (4.110) (salvo traslaciones, ver el Corolario 109)
3. (4.109) + (4.110) \Rightarrow ((4.106) con $(z = \delta_m)$) y (4.111)
4. ((4.106) con $(z = \delta_m)$) + (4.110) \Rightarrow (4.109) (\Rightarrow (4.111))
5. ((4.106) con $(z = \delta_m)$) + (4.111) \Rightarrow (4.109)
6. ((4.106) con $(z = \delta_m)$) + (4.109) \Rightarrow (4.111)

Observación 111 Cuando las máscaras $\{H^{\psi_s}\}_{s=0,\dots,r}$ y la función fundamental Θ sean polinomios trigonométricos, la condición de continuidad en (i) para $\hat{\phi}$ y la condición y (c) del Teorema 96 son evidentes y la condición (a) del Teorema 96 se simplifica a $\Theta(0) = 1$. Si $\Theta_0 \geq 2 \sum_{k \geq 1} |\Theta_k|$, la función $\Theta \geq 0$. Por tanto, teniendo en cuenta la expresión de la Transformada Fractal Rápida [42, Section 4], desde el punto de vista práctico (es decir, máscaras y función fundamental polinomios trigonométricos), si $\Theta \geq 0$ (por ejemplo, si $\Theta_0 \geq 2 \sum_{k \geq 1} |\Theta_k|$), las condiciones del OEP se reducen básicamente a que el sistema (4.106) + (4.107) tenga solución Θ .

Por otra parte, el concepto de orden de aproximación (íntimamente relacionado con la noción de momentos nulos) es una propiedad interesante dentro de la teoría de subespacios invariantes por traslaciones.

Definición 112 Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ una función de refinamiento que genera un análisis multirresolución $\{V_j\}$ y sea Ψ un conjunto finito de wavelets que genera el sistema $X(\Psi)$. Se dice que:

- la función refinable ϕ (o, más exactamente, el MRA) proporciona aproximación de orden m si, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\min\{\|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} : g \in V_n\} = O(2^{-nm}).$$

- el sistema wavelet tiene momentos nulos de orden m_0 si, para cada wavelet $\psi \in \Psi$, la transformada de Fourier $\hat{\psi}$ de ψ tiene un cero de orden m_0 en el origen.
- $X(\Psi)$ sistema framelet ajustado proporciona una aproximación de orden m_1 si, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|f - Q_n f\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(2^{-nm_1})$$

donde Q_n define la representación truncada dada por

$$Q_n : f \mapsto \sum_{\substack{\psi \in \Psi \\ k \in \mathbb{Z}, j < n}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

Daubechies, Han, Ron y Shen [42, Theorem 2.11] demuestran que, si $X(\Psi)$ es un sistema framelet ajustado, su orden de aproximación queda determinado por su número de momentos nulos y el orden de aproximación proporcionado por el MRA.

Teorema 113 Sea $X(\Psi)$ un MRA-framelet ajustado. Se supone que el sistema tiene momentos nulos de orden m_0 y la función refinable asociada proporciona orden de aproximación m . Entonces el orden de aproximación del sistema frame ajustado es $\min\{m, 2m_0\}$.

A partir de este resultado, y mediante la representación matricial obtenida, se concluye el siguiente resultado.

Proposición 114 Sean $\{h^{\psi_s}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $s = 0, 1, \dots, r$ sucesiones de números complejos verificando las condiciones del Teorema 100 y tales que $X(\Psi)$ es un sistema wavelet frame ajustado. Entonces $X(\Psi)$ tiene orden de aproximación M si se verifica

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h^{\psi_s}[k] k^m = 0, \quad m = 0, \dots, M, \quad s = 1, \dots, r. \quad (4.113)$$

Demostración: Según el Teorema 113 [42, Theorem 2.11], para $X(\Psi)$ sistema wavelet frame ajustado cuya función de refinamiento tiene orden de aproximación $m < \infty$, el orden de aproximación del frame ajustado es $\min\{m, 2m_0\}$, con m_0 orden del momento de orden nulo de $\{\psi_s\}_{s=1,\dots,r}$ en el origen (o, equivalentemente, el orden del cero de $\{H^{\psi_s}\}_{s=1,\dots,r}$ en el origen. Véase el Teorema 9). Además, $m \geq m_0$, por lo que el orden de aproximación de $X(\Psi)$ es mayor o igual que $\min\{m_0, 2m_0\}$.

Por otra parte, las funciones que conforman la base trigonométrica son derivables. Puesto que el orden del cero en un punto coincide con el número de derivadas nulas en dicho punto, se verifica, dada una función $f \in L^2(\mathbb{R})$, que $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{2\pi I k \cdot}$ tiene un cero de orden M en el x_0 si, y sólo si, $f^{(m)}(x_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k (2\pi I k)^k e^{2\pi I k x_0} = 0$, $m = 0, \dots, M$.

Por tanto, $X(\Psi)$ wavelet frame ajustado tiene orden de aproximación M si se verifica $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h^{\psi_s}[k] k^m = 0$, $m = 0, \dots, M$, $s = 1, \dots, r$. \square

Relación entre OEP y UEP

Daubechies, Han, Ron y Shen observaron que ambos Principios de Extensión, el Unitario (UEP) y Oblicuo (OEP), son, en esencia, el mismo, y que puede pasarse de uno a otro mediante cierta transformación. A continuación, se analiza dicha transformación desde el punto de vista matricial, con el fin de seleccionar el principio más adecuado en función de la aplicación. El OEP, con filtros de menor tamaño, y, por tanto, computación menos costosa, para las aplicaciones que sólo necesiten analizar los coeficientes. El UEP, con filtros de mayor tamaño y computación más costosa, para las aplicaciones en las que se requiera reconstruir la señal. Dicho análisis se restringe posteriormente al caso de filtros y función fundamental finitos.

Como se ve en la demostración del Principio de Extensión Oblicua en [42, Proposition 1.11], dadas máscaras multirresolución $(H^{\psi_0}, \dots, H^{\psi_r})$ tales que $X(\Psi)$ es un frame ajustado con función fundamental Θ , sea $\vartheta \equiv \sqrt{\Theta}$. Se definen las máscaras $\tilde{H}^{\psi_0} = \frac{H^{\psi_0} \vartheta(2\cdot)}{\vartheta}$ y $\tilde{H}^{\psi_s} = \frac{H^{\psi_s}}{\vartheta}$, $s = 1, \dots, r$, cuyo sistema frame asociado coincide con $X(\Psi)$. Estas nuevas máscaras verifican

$$\sum_{s=0}^r \tilde{H}^{\psi_s} \overline{\tilde{H}^{\psi_s}(\cdot + 1/2)} = 0$$

$$\sum_{s=0}^r \tilde{H}^{\psi_s} \overline{\tilde{H}^{\psi_s}} = 1$$

por lo que cumplen las condiciones del Principio de Extensión Unitaria. Análogamente, dada una función Θ 1-periódica, no negativa, esencialmente acotada y continua en el origen, el paso de Principio de Extensión Unitaria a Principio de Extensión Oblicua se realiza mediante la transformación de las máscaras $H^{\psi_0} = \frac{\tilde{H}^{\psi_0} \vartheta}{\vartheta(2\cdot)}$ y $H^{\psi_s} = \vartheta \tilde{H}^{\psi_s}$, $s = 1, \dots, r$.

Para poder interpretar estas transformaciones en el ámbito matricial, es necesario conocer describir la transformación “producto por la función...” en la base ortonormal seleccionada (en este caso, la base trigonométrica): sean $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{2\pi I k \cdot}$, $g =$

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}_k e^{2\pi I k \cdot}$. Entonces, $f \cdot g = \sum_{n, k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \hat{g}_{k-n} e^{2\pi I k \cdot}$, lo cual, interpretado en términos de los coeficientes en la base ortonormal, se puede escribir como $G \cdot F$ con $F_n = \hat{f}_n$ y $G_{m,n} = \hat{g}_{n-m}$, es decir, el operador funcional “producto por la función g ” equivale al producto por la matriz de Toeplitz G con componentes $G_{m,n} = \hat{g}_{n-m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

En el caso de las transformaciones

$$\tilde{H}^{\psi_s} = \frac{H^{\psi_s}}{\vartheta} \Leftrightarrow H^{\psi_s} = \tilde{H}^{\psi_s} \vartheta, \quad s \geq 1,$$

su equivalente matricial es

$$(w^s)^{+/-} = P \cdot (\tilde{w}^s)^{+/-},$$

con

$$P_{k,n} = \hat{\Theta}_{n-k}, \quad n, k \in \mathbb{Z}, \quad s = 1, \dots, r, \quad (4.114)$$

mientras que en el caso de la transformación

$$\tilde{H}^{\psi_0} = \frac{H^{\psi_0} \vartheta(2 \cdot)}{\vartheta} \Leftrightarrow H^{\psi_0} \vartheta(2 \cdot) = \tilde{H}^{\psi_0} \vartheta,$$

su equivalente matricial es

$$P2 \cdot (w^0)^{+/-} = P \cdot (\tilde{w}^0)^{+/-},$$

donde

$$P2_{k,n} := \left(\widehat{\Theta(2 \cdot)} \right)_{n-k} = \begin{cases} \hat{\Theta}_{\frac{n-k}{2}} & , \text{ si } (n-k) \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & , \text{ si } (n-k) \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad (4.115)$$

Por tanto,

$$(w^0)^{+/-} = {}^{-1}P2 \cdot P \cdot (\tilde{w}^0)^{+/-},$$

siendo ${}^{-1}M$ la matriz inversa por la izquierda de M . Si $Z = (\hat{\Theta}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, puesto que se verifican las siguientes igualdades y relaciones,

$$\begin{aligned} (L^0)^+ \cdot Z &= P2 \cdot (w^0)^+, \\ L^+ \cdot Z &= ((L^0)^+ - I) \cdot Z = -w^+ \Leftrightarrow (L^0)^+ \cdot Z + w^+ = \Theta \\ Z &= P \cdot \delta_m, \end{aligned}$$

se deduce que

$$P2 \cdot {}^{-1}P2 \cdot P \cdot (\tilde{w}^0)^+ + P \cdot \tilde{w}^+ = P2 \cdot (w^0)^+ + w^+ = (L^0)^+ \cdot Z + w^+ = Z = P \cdot \delta_m.$$

Además, como ${}^{-1}P2 = P2^{-1}$ (son las representaciones matriciales de la transformación lineal “producto por $1/\Theta(2 \cdot)$ por la izquierda y derecha, respectivamente”, y $f \cdot 1/\Theta(2 \cdot) = 1/\Theta(2 \cdot) \cdot f$), se tiene que

$$P \cdot (\tilde{w}^0)^+ + P \cdot \tilde{w}^+ = P \cdot \delta_m,$$

$$(\tilde{w}^0)^+ + \tilde{w}^+ = {}^{-1} P \cdot P \cdot \delta_m = \delta_m.$$

Finalmente, al ser $(L^0)^+ \cdot \delta_m = (w^0)^+$,

$$(\tilde{L}^0)^+ \cdot \delta_m + \tilde{w}^+ = \delta_m,$$

es decir,

$$\tilde{L}^+ \cdot \delta_m = ((\tilde{L}^0)^+ - I) \cdot \delta_m = -\tilde{w}^+.$$

El razonamiento para $\tilde{L}^- \cdot \delta_m = -\tilde{w}^-$ es análogo.

En conclusión, las transformaciones determinadas por la matriz⁹ \sqrt{P} en los filtros wavelet frame y por las matrices \sqrt{P} y $\sqrt{P2}$ en los filtros de refinamiento dan como resultado la transformación del Principio de Extensión Oblicua en Principio de Extensión Unitaria y viceversa, esto es,

Proposición 115 Sean los vectores $h^{\psi_s} = \{h^{\psi_s}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\widehat{(H^{\psi_s})}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $s = 0, \dots, r$, asociados a las máscaras correspondientes al OEP y $\tilde{h}^{\psi_s} = \{\tilde{h}^{\psi_s}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\widehat{(\tilde{H}^{\psi_s})}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $s = 0, \dots, r$, asociados a las máscaras correspondientes al UEP, y sean las matrices $R = \sqrt{P}$, $R2 = \sqrt{P2}$, con P y $P2$ definidas en (4.114) y (4.115), respectivamente. Entonces, se verifica

$$h^{\psi_0} = R^{-1} \cdot R2 \cdot \tilde{h}^{\psi_0}, \quad h^{\psi_s} = R^{-1} \cdot \tilde{h}^{\psi_s}, \quad s = 1, \dots, r. \quad (4.116)$$

Caso finito Al centrarse en el caso finito (polinomios trigonométricos), la relación matricial descrita en la Proposición 115 permite estudiar condiciones sobre la función fundamental Θ (en concreto, su raíz cuadrada ϑ) que aseguren la conversión de filtros finitos en filtros finitos. Para ello, el estudio se centra en la relación entre las máscaras (4.116):

$$h^{\psi_0} = R_0^{-1} \cdot R2_0 \cdot \tilde{h}^{\psi_0} \iff R_0 \cdot h^{\psi_0} = R2_0 \cdot \tilde{h}^{\psi_0}, \quad (4.117)$$

$$h^{\psi_s} = R_s^{-1} \cdot \tilde{h}^{\psi_s} \iff R_s \cdot h^{\psi_s} = \tilde{h}^{\psi_s}, \quad s = 1, \dots, r, \quad (4.118)$$

donde el subíndice s en R_s y $R2_s$ indica que se considera únicamente el bloque matricial asociado a las componentes no nulas de los correspondientes vectores h^{ψ_s} y \tilde{h}^{ψ_s} , $s = 0, 1, \dots, r$.

⁹Dadas dos funciones reales $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{2\pi I k \cdot}$, $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}_k e^{2\pi I k \cdot}$ tales que $f = g^2$ ($\hat{f}_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}_k \hat{g}_{k-n}$), se definen las matrices F, G tales que $F_{n,m} = \hat{f}_{m-n}$, $G_{n,m} = \hat{g}_{m-n}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Entonces, para $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$F_{n,m} = \hat{f}_{m-n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}_k \hat{g}_{k-m+n} \stackrel{g \text{ real}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}_k \hat{g}_{m-k-n} \stackrel{\kappa=k+n}{=} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}} \hat{g}_{\kappa-n} \hat{g}_{m-\kappa} = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}} G_{n,\kappa} G_{\kappa,m} = (G^2)_{n,m}.$$

Por tanto, $F = G^2$, es decir, $G = \sqrt{F}$.

Se suponen $\vartheta, H^{\psi_s}, \tilde{H}^{\psi_s}, s = 0, \dots, r$ polinomios trigonométricos, es decir, $R, R2, h^{\psi_s}, \tilde{h}^{\psi_s}, s = 0, \dots, r$ finitos. Sean $N_s =$ longitud del vector $h^{\psi_s}, \tilde{N}_s =$ longitud del vector $\tilde{h}^{\psi_s}, s = 0, \dots, r$, y $\vartheta = \sum_{k=-L}^L \vartheta_k e^{2\pi I k \cdot}$ lo cual implica $\vartheta(2\cdot) = \sum_{k=-L}^L \vartheta_k e^{2\pi I k 2\cdot} = \sum_{k=-2L}^{2L} \vartheta'_k e^{2\pi I k \cdot}$ con

$$\vartheta'_n = \begin{cases} \vartheta_{n/2} & , \text{ si } n \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

El siguiente resultado caracteriza las transformaciones finitas

Proposición 116 Sean los vectores $h^{\psi_s} = \{h^{\psi_s}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}, s = 0, \dots, r$, asociados a las máscaras correspondientes al OEP y $\tilde{h}^{\psi_s} = \{\tilde{h}^{\psi_s}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}, s = 0, \dots, r$, asociados a las máscaras correspondientes al UEP, y sean las matrices $R = \sqrt{P}, R2 = \sqrt{P2}$, con P y $P2$ definidas en (4.114) y (4.115), respectivamente. Las matrices finitas asociadas $R_s, R2_s, s = 0, \dots, r$ transforman filtros finitos en filtros finitos si, y sólo si, el sistema

$$\begin{pmatrix} \vartheta_L & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \vartheta_L \\ * & \cdots & \vartheta_{L-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vartheta_{-L+1} & \cdots & * \\ \vartheta_{-L} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \vartheta_{-L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{\psi_0}[1] \\ \vdots \\ h^{\psi_0}[N_0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta'_{2L} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \vartheta'_{2L} \\ * & \cdots & \vartheta'_{2L-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vartheta'_{-2L+1} & \cdots & * \\ \vartheta'_{-2L} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \vartheta'_{-2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h}^{\psi_0}[1] \\ \vdots \\ \tilde{h}^{\psi_0}[\tilde{N}_0] \end{pmatrix} \quad (4.119)$$

tiene solución.

Demostración: La demostración del resultado se basa en la estructura en bandas (triangular superior desde arriba y triangular inferior desde abajo) de las matrices $R_s, R2_s, s = 0, \dots, r$ involucradas en la relación (4.117). \square

Observación 117 Las dimensiones de las matrices $R_s, R2_s$ (matrices Toeplitz en bandas, dimensión concentrada en los coeficientes no nulos por filas) son $(N_s + (2L + 1) - 1) \times N_s = (N_s + 2L) \times N_s$ y $(\tilde{N}_s + 4L) \times \tilde{N}_s, s = 0, \dots, r$, respectivamente. La estructura “doblemente triangular” de las matrices $R_s, R2_s$ permite calcular inmediatamente el vector \tilde{h}^{ψ_s} conocido el vector $h^{\psi_s}, s = 0, \dots, r$, y viceversa. Por tanto, de la igualdad en la ecuación (4.117) se deduce que $N_0 + 2L = \tilde{N}_0 + 4L$ (si alguna de las dimensiones es mayor que la otra, debido a la estructura de la matriz, los coeficientes a mayores se

anulan). Es decir, $N_0 = \tilde{N}_0 + 2L$ ($N_0 \geq \tilde{N}_0$). Por otro lado, $(N_s + 2L) = \tilde{N}_s$, $s = 1, \dots, r$ ($N_s \leq \tilde{N}_s$, $s = 1, \dots, r$).

En conclusión, la transformación de paso de OEP a UEP implica la siguientes relaciones entre los orden de los polinomios trigonométricos (de Laurent) H^{ψ_s} y \tilde{H}^{ψ_s} , $s = 0, \dots, r$:

$$\begin{aligned} \text{orden}(\tilde{H}^{\psi_0}) &= \text{orden}(H^{\psi_0}) + L \\ \text{orden}(\tilde{H}^{\psi_s}) &= \text{orden}(H^{\psi_s}) - L, \quad s = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Por tanto, la longitud del vector \tilde{h}^{ψ_0} aumenta en $2L$ y la longitud de los vectores \tilde{h}^{ψ_s} , $s = 1, \dots, r$ disminuyen en $2L$. Se deduce que trabajar con la expresión correspondiente al UEP es igual (una única función madre) o más eficiente (varias funciones madre) que trabajar con la expresión del OEP. Además, puesto que lo habitual es partir de una función de refinamiento y una función fundamental fijas para calcular los framelets ajustados asociados, lo más eficiente es escoger $\Theta \equiv 1$. Sin embargo, en el caso en que únicamente interese el estudio de los coeficientes de refinamiento y, por tanto, no sea necesario el cálculo de los coeficientes framelet, podría intentarse reducir la longitud del filtro de refinamiento mediante la búsqueda de una función fundamental ϑ adecuada que efectúe dicha reducción del orden en la transformación de UEP a OEP.

Observación 118 *Para calcular el polinomio trigonométrico ϑ , en primer lugar se calcula la expresión de las componentes del vector \tilde{h}^{ψ_0} en función de las componentes de h^{ψ_0} y ϑ . Para ello se puede utilizar la parte superior del sistema, con estructura triangular superior, lo que permite un cálculo de dichas componentes de forma rápida y sencilla de forma recurrente.*

$$\begin{pmatrix} \vartheta_L & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{\psi_0}[1] \\ \vdots \\ h^{\psi_0}[\tilde{N}_0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta'_{2L} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \vartheta'_{2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h}^{\psi_0}[1] \\ \vdots \\ \tilde{h}^{\psi_0}[\tilde{N}_0] \end{pmatrix}$$

Sustituyendo dichas expresiones en las $2L$ ecuaciones restantes, se obtiene un sistema de ecuaciones involucrando a h^{ψ_0} y ϑ , el cual puede expresarse como producto de una matriz \mathfrak{H}^0 y un vector v ,

$$\mathfrak{H}^0 \cdot v = 0.$$

Las componentes de esta matriz se expresan como combinación lineal de componentes del vector h^{ψ_0} , mientras que las componentes del vector v se expresan como productos de coeficientes frecuenciales del polinomio ϑ . Por tanto, si existe dicha función ϑ , el vector v pertenece al $\text{Ker}(\mathfrak{H}^0)$. Para simplificar los cálculos, se considera que el coeficiente distinto de 0 de mayor grado de la función ϑ sea 1 (se escala la función). Esto permite evitar cocientes al calcular el vector \tilde{h}^{ψ_0} y añade la condición $\vartheta_L = 1$ al calcular el vector del núcleo de \mathfrak{H}^0 . Para que dicha función ϑ pueda transformar un frame ajustado con

función fundamental $\Theta \equiv 1$ en un frame ajustado con función fundamental $\Theta \equiv \vartheta^2$, debe verificarse $\vartheta(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \vartheta_k = 1$, por lo que la función debe ser escalada.

En base a las observaciones numéricas realizadas, de existir dicha función ϑ solución del sistema planteado, se verifica $\vartheta \equiv \left(\frac{1-e^{-2\pi I}}{2}\right)^{2L}$, por lo que $\vartheta(0) = 0$ y, en conclusión, no existe polinomio trigonométrico ϑ no trivial que transforme un frame ajustado con máscaras finitas y función fundamental $\Theta \equiv 1$ en un frame ajustado con máscaras finitas y función fundamental $\Theta \equiv \vartheta^2$.

Ejemplos

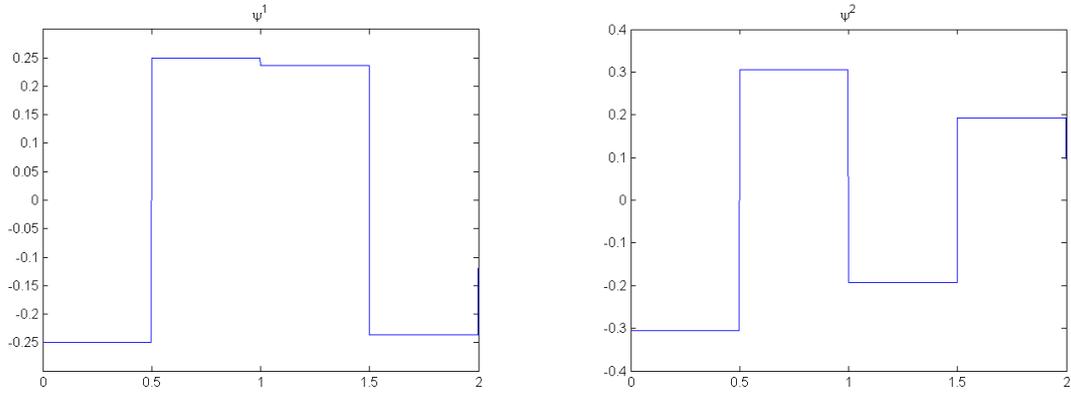


Figura 4.6: Wavelet frames ajustados multirresolución $\{\psi_1, \psi_2\}$ con función de refinamiento de Haar correspondiente a los valores $\alpha = \sqrt{1/16}$, $\beta = \sqrt{3/32}$ en el Ejemplo 119.

Ejemplo 119 Fijado el filtro multirresolución h^{ψ_0} tal que $h^{\psi_0}[0] = h^{\psi_0}[1] = 1/2$, $h^{\psi_0}[n] = 0$, $n \notin \{0, 1\}$, esto es, $H^{\psi_0} \equiv \frac{1+e^{2\pi I\theta}}{2}$, y la función fundamental $\Theta \equiv 1$, los filtros

$$h^{\psi_1}[n] = \begin{cases} -\alpha & , \text{ si } n = 0 \\ \alpha & , \text{ si } n = 1 \\ \sqrt{\frac{1/4 - (\alpha^2 + \beta^2)}{1 + \alpha^2/\beta^2}} & , \text{ si } n = 2 \\ -\sqrt{\frac{1/4 - (\alpha^2 + \beta^2)}{1 + \alpha^2/\beta^2}} & , \text{ si } n = 3 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} , \quad h^{\psi_2}[n] = \begin{cases} -\beta & , \text{ si } n = 0 \\ \beta & , \text{ si } n = 1 \\ -\frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{1/4 - (\alpha^2 + \beta^2)}{1 + \alpha^2/\beta^2}} & , \text{ si } n = 2 \\ \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{1/4 - (\alpha^2 + \beta^2)}{1 + \alpha^2/\beta^2}} & , \text{ si } n = 3 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} ,$$

con α, β verificando $\beta \neq 0, \alpha^2 + \beta^2 \leq 1/4$, generan un sistema wavelet frame ajustado. En concreto, si $\alpha = 0, \beta = 1/2$, los filtros resultantes corresponden a la wavelet ortonormal de Haar. La Figura 4.6 muestra el ejemplo correspondiente a los valores $\alpha = \sqrt{1/16}, \beta = \sqrt{3/32}$.

Ejemplo 120 Fijado el filtro multirresolución h^{ψ_0} tal que $h^{\psi_0}[0] = h^{\psi_0}[2] = 1/2, h^{\psi_0}[1] = 1/4, h^{\psi_0}[n] = 0, n \notin \{0, 1, 2\}$, esto es, $H^{\psi_0} \equiv \left(\frac{1+e^{2\pi i\theta}}{2}\right)^2$, y la función fundamental $\Theta \equiv 1$, los filtros

$$h^{\psi_1}[n] = \begin{cases} -(h^{\psi_1}[1] + h^{\psi_1}[2] + h^{\psi_1}[3] + h^{\psi_1}[4]) & , \text{ si } n = 0 \\ \alpha & , \text{ si } n = 1 \\ -\frac{\alpha/\beta}{8(1+\alpha^2/\beta^2)\beta} - (h^{\psi_1}[3]) - \left(\frac{\alpha/\beta(h^{\psi_1}[3])}{\beta} + 1\right)(h^{\psi_1}[4]) & , \text{ si } n = 2 \\ \sqrt{\frac{1/4 - (\alpha^2 + \beta^2)}{1 + \alpha^2/\beta^2}} & , \text{ si } n = 3 \\ \frac{-(2(A_1A_2 + C_1C_2) - B_2) + \sqrt{(2(A_1A_2 + C_1C_2) - B_2)^2 - 4(A_2^2 + C_2^2)(A_1^2 + C_1^2 - B_1)}}{2(A_2^2 + C_2^2)} & , \text{ si } n = 4 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

$$h^{\psi_2}[n] = \begin{cases} -(h^{\psi_2}[1] + h^{\psi_2}[2] + h^{\psi_2}[3] + h^{\psi_2}[4]) & , \text{ si } n = 0 \\ \beta & , \text{ si } n = 1 \\ -\frac{\alpha}{\beta}(h^{\psi_1}[2]) - \left(\frac{1}{8} + (1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2})(h^{\psi_1}[3])(h^{\psi_1}[4])\right)/\beta & , \text{ si } n = 2 \\ -\frac{\alpha}{\beta}(h^{\psi_1}[3]) & , \text{ si } n = 3 \\ -\frac{\alpha}{\beta}(h^{\psi_1}[4]) & , \text{ si } n = 4 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases},$$

donde

$$A_1 = \frac{\alpha/\beta}{8(1+\alpha^2/\beta^2)\beta} - (h^{\psi_1}[3]), \quad B_1 = \frac{7}{16} - (\alpha^2 + \beta^2), \quad C_1 = \frac{\alpha A_1}{\beta} - \frac{1}{8\beta}, \\ A_2 = \frac{\alpha(h^{\psi_1}[3])}{\beta^2} - 1, \quad B_2 = 2(1 + \alpha^2/\beta^2)(h^{\psi_1}[3]), \quad C_2 = \frac{\alpha A_2}{\beta} - (1 + \alpha^2/\beta^2)\frac{(h^{\psi_1}[3])}{\beta}$$

con α, β verificando $\beta \neq 0, \alpha^2 + \beta^2 \leq 1/4$, generan un sistema wavelet frame ajustado. En concreto, si $\alpha = 0, \beta = 1/2$, los filtros resultantes corresponden a los wavelet frames ajustados del ejemplo [42, Example 2.16]. La Figura 4.7 muestra el ejemplo correspondiente a los valores $\alpha = \beta = \sqrt{1/8}$.

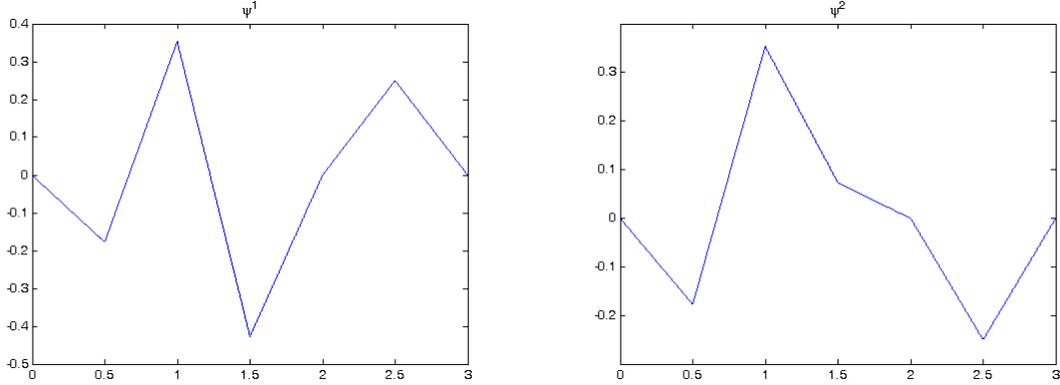


Figura 4.7: Wavelet frames ajustados multirresolución $\{\psi_1, \psi_2\}$ con función de refinamiento B-Spline de orden 2 correspondiente a los valores $\alpha = \beta = \sqrt{1/8}$ en el Ejemplo 120.

4.2.4. Fórmulas espectrales para framelets ajustados

En esta sección se siguen considerando sistemas wavelet (diádicos) en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma (4.6) con Ψ finito o numerable. Recuerdese que $X(\Psi)$ es un frame ajustado con cota frame 1 (frame de Parseval) para $L^2(\mathbb{R})$ si

$$\sum_{\psi_{k,j} \in X(\Psi)} |\langle f, \psi_{k,j} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (4.120)$$

En este caso, el operador frame

$$S : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : f \mapsto \sum_{\psi_{k,j} \in X(\Psi)} \langle f, \psi_{k,j} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \psi_{k,j} \quad (4.121)$$

es el operador identidad en $L^2(\mathbb{R})$, por lo que el proceso de análisis-síntesis asociado a $X(\Psi)$ conlleva una reconstrucción perfecta:

$$f = \sum_{\psi_{k,j} \in X(\Psi)} \langle f, \psi_{k,j} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \psi_{k,j}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

El operador identidad se corresponde con el operador diagonal identidad en cualquier representación espectral del operador de dilatación D o del operador de traslación T , o cualquier otro operador. Bajo la condición (4.7),

$$\sup_{\psi \in \Psi} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = M < \infty$$

los elementos de la matriz del operador descomponible $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}$ en la representación espectral de D dada en la Proposición 14 ha sido calculada en el Teorema 64: para $s, s' = \pm$ y $l, l' \in \mathbb{J}$ y para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}(\omega)_{s,l}^{s',l'} &= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \sum_{i,n} \overline{\hat{\psi}_i^{(n-j)}} \sum_m \overline{\omega^m} \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m}} \sum_{i',n'} \hat{\psi}_{i'}^{(n'-j)} \sum_{m'} \omega^{m'} \alpha_{i',n'}^{s',l',m'} = \\ &= \sum_{i,i',\nu} \left[\sum_{\substack{\psi \in \Psi \\ n \in \mathbb{Z}}} \overline{\hat{\psi}_i^{(n)}} \hat{\psi}_{i'}^{(n+\nu)} \right] \left[\sum_{\rho} \omega^{\rho} \sum_{\sigma,\mu} \overline{\alpha_{i,\mu}^{s,l,\sigma}} \alpha_{i',\mu+\nu}^{s',l',\sigma+\rho} \right]. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Aquí, las componentes $\{\hat{\psi}_i^{(n)}\}$ de cada $\psi \in \Psi$ y los $\alpha_{i,n}^{s,j,m}$ están relacionados con la representación espectral dada en la Sección 2.1.

Ahora, se considera una *función refinable* $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Como se ha visto, esto implica que existe una sucesión de números complejos $\{h^\phi[j]\}_{j \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$\phi = \sum_j h^\phi[j] DT^j \phi.$$

Además, se supone que los elementos de Ψ satisfacen relaciones similares,

$$\psi = \sum_j h^\psi[j] DT^j \phi, \quad \psi \in \Psi,$$

para sucesiones de números complejos adecuadas $\{h^\psi[j]\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

Reescribiendo estas relaciones de doble escala en términos de las componentes $\{\hat{\phi}_i^{(n)}\}$ de ϕ y $\{\hat{\psi}_i^{(n)}\}$ de $\psi \in \Psi$ en el modelo espectral de T dado en la Proposición 16, se tiene

$$\hat{\phi}_i^{(n)} = \sum_j h^\phi[j] [\widehat{DT^j \phi}]_i^{(n)}, \quad i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}, \quad (4.123)$$

Del mismo modo, cuando $D^{-1}\psi = \sum_j h^\psi[j] T^j \phi$, para todo $\psi \in \Psi$,

$$\hat{\psi}_i^{(n)} = \sum_j h^\psi[j] [\widehat{DT^j \phi}]_i^{(n)}, \quad i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}, \psi \in \Psi \quad (4.124)$$

Por otro lado,

$$D^{-1}T^k \phi = T^{2k} D^{-1} \phi = \sum_j h^\phi[j] T^{2k+j} \phi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.125)$$

Las ecuaciones (4.124), (4.123) y (4.125) llevan a las siguientes identidades

$$\sum_m \omega^m \sum_{i,n} \hat{\psi}_i^{(n-j)} \alpha_{i,n}^{s,l,m} = \sum_m \omega^m \sum_{\nu} h^\psi[\nu] \sum_{i,n} [\widehat{DT^\nu \phi}]_i^{(n-j)} \alpha_{i,n}^{s,l,m} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_m \omega^m \sum_\nu h^\psi[\nu] \sum_{i,n} [\widehat{T^j D T^\nu \phi}]_i^{(n)} \alpha_{i,n}^{s,l,m} = \sum_m \omega^m \sum_\nu h^\psi[\nu] [\widehat{D T^{\nu+2j} \phi}]_{s,l}^{(m)} = \\
&= \sum_m \omega^m \sum_\nu h^\psi[\nu] [\widehat{D^{-1} T^{\nu+2j} \phi}]_{s,l}^{(m-2)} = \sum_m \omega^m \sum_\nu h^\psi[\nu] \sum_\mu h^\phi[\mu] [\widehat{T^{\mu+2\nu+4j} \phi}]_{s,l}^{(m-2)} = \\
&= \sum_\nu h^\psi[\nu] \sum_\mu h^\phi[\mu - 2\nu - 4j] \sum_m \omega^m [\widehat{T^\mu \phi}]_{s,l}^{(m-2)}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.122),

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}(\omega)_{s,l}^{s',l'} &= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ \psi \in \Psi}} \sum_{i,n} \widehat{\psi}_i^{(n-j)} \sum_m \overline{\omega^m} \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m}} \sum_{i',n'} \widehat{\psi}_{i'}^{(n'-j)} \sum_{m'} \omega^{m'} \alpha_{i',n'}^{s',l',m'} = \\
&= \sum_{\nu,\nu'} [\sum_\psi \overline{h^\psi[\nu]} h^\psi[\nu']] \sum_{\mu,\mu'} [\sum_j \overline{h^\phi[\mu - 2\nu - 4j]} h^\phi[\mu' - 2\nu' - 4j]] \times \\
&\quad \times [\sum_{m,m'} \overline{\omega^{m'-m}} \overline{[\widehat{T^\mu \phi}]_{s,l}^{(m)}} [\widehat{T^{\mu'} \phi}]_{s',l'}^{(m')}] .
\end{aligned}$$

Ya que, por el Lema 18,

$$[\widehat{T^\mu \phi}]_{s,l}^{(m)} = \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{s,l,m} \sum_{r,p,q} \overline{\alpha_{i,n-\mu}^{r,p,q}} \widehat{\phi}_{r,p}^{(q)} = \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{s,l,m} \widehat{\phi}_i^{(n-\mu)} = \sum_{i,n} \alpha_{i,n+\mu}^{s,l,m} \widehat{\phi}_i^{(n)},$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}(\omega)_{s,l}^{s',l'} &= \\
&= \sum_{\nu,\nu'} [\sum_\psi \overline{h^\psi[\nu]} h^\psi[\nu']] \sum_{\mu,\mu'} [\sum_j \overline{h^\phi[\mu - 2\nu - 4j]} h^\phi[\mu' - 2\nu' - 4j]] \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \widehat{\phi}_i^{(n)} \widehat{\phi}_{i'}^{(n')} [\sum_{m,m'} \overline{\omega^{m'-m}} \overline{\alpha_{i,n+\mu}^{s,l,m}} \alpha_{i',n'+\mu'}^{s',l',m'}] = \\
&= \sum_{\nu,\nu'} [\sum_\psi \overline{h^\psi[\nu]} h^\psi[\nu']] \sum_{\mu,\mu'} \overline{h^\phi[\mu - 2\nu]} h^\phi[\mu' - 2\nu'] \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \widehat{\phi}_i^{(n-\mu)} \widehat{\phi}_{i'}^{(n'-\mu')} [\sum_k \omega^k \sum_{m,j} \overline{\alpha_{i,n+4j}^{s,l,m}} \alpha_{i',n'+4j}^{s',l',m+k}] = \\
&= \sum_j \sum_{\nu,k_\nu} [\sum_\psi \overline{h^\psi[\nu]} h^\psi[\nu + k_\nu]] \sum_{\mu,k_\mu} \overline{h^\phi[\mu - 2\nu - 4j]} h^\phi[\mu - 2\nu - 4j + k_\mu - 2k_\nu] \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \widehat{\phi}_i^{(n-\mu)} \widehat{\phi}_{i'}^{(n'-\mu-k_\mu)} [\sum_k \omega^k \sum_m \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m}} \alpha_{i',n'}^{s',l',m+k}].
\end{aligned}$$

Ahora, poniendo $v = \nu + 2j$ y dividiendo en v 's pares e impares ($v = 2w$ ó $v = 2w + 1$),

$$\begin{aligned}
& \sum_j \sum_{\nu, k_\nu} \left[\sum_\psi \overline{h^\psi[\nu]} h^\psi[\nu + k_\nu] \right] \sum_{\mu, k_\mu} \overline{h^\phi[\mu - 2\nu - 4j]} h^\phi[\mu - 2\nu - 4j + k_\mu - 2k_\nu] = \\
& = \sum_{v, k_\nu} \left[\sum_{\psi, j} \overline{h^\psi[v - 2j]} h^\psi[v - 2j + k_\nu] \right] \sum_{\mu, k_\mu} \overline{h^\phi[\mu - 2v]} h^\phi[\mu - 2v + k_\mu - 2k_\nu] = \\
& = \sum_{w, k_\nu} \left[\sum_{\psi, j} \overline{h^\psi[2w - 2j]} h^\psi[2w - 2j + k_\nu] \right] \sum_{\mu, k_\mu} \overline{h^\phi[\mu - 4w]} h^\phi[\mu - 4w + k_\mu - 2k_\nu] + \\
& \quad + \sum_{\psi, j} \overline{h^\psi[2w + 1 - 2j]} h^\psi[2w + 1 - 2j + k_\nu] \times \\
& \quad \quad \quad \times \sum_{\mu, k_\mu} \overline{h^\phi[\mu - 4w - 2]} h^\phi[\mu - 4w - 2 + k_\mu - 2k_\nu] = \\
& = \sum_{k_\nu} \left[\sum_{\psi, j} \overline{h^\psi[2j]} h^\psi[2j + k_\nu] \right] \sum_{w, \mu, k_\mu} \overline{h^\phi[\mu - 4w]} h^\phi[\mu - 4w + k_\mu - 2k_\nu] + \\
& \quad + \sum_{\psi, j} \overline{h^\psi[2j + 1]} h^\psi[2j + 1 + k_\nu] \sum_{w, \mu, k_\mu} \overline{h^\phi[\mu - 4w - 2]} h^\phi[\mu - 4w - 2 + k_\mu - 2k_\nu].
\end{aligned}$$

Entonces, una división módulo 4 de μ ($\mu = 4u + r$ con $r = 0, 1, 2, 3$) lleva a

$$\begin{aligned}
& \mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}(\omega)_{s,l}^{s',l'} = \\
& \sum_{r=0,1,2,3} \sum_{k_\mu} \left[\sum_{k_\nu} \left[\sum_{\psi, j} \overline{h^\psi[2j]} h^\psi[2j + k_\nu] \right] \sum_w \overline{h^\phi[4w + r]} h^\phi[4w + r + k_\mu - 2k_\nu] + \right. \\
& \quad \left. + \left[\sum_{\psi, j} \overline{h^\psi[2j + 1]} h^\psi[2j + 1 + k_\nu] \right] \sum_w \overline{h^\phi[4w + r - 2]} h^\phi[4w + r - 2 + k_\mu - 2k_\nu] \right] \times \\
& \quad \quad \quad \times \sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left[\sum_u \overline{\hat{\phi}_i^{(n-4u-r)}} \hat{\phi}_{i'}^{(n'-4u-r-k_\mu)} \right] \left[\sum_k \omega^k \sum_m \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m}} \alpha_{i',n'}^{s',l',m+k} \right].
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $X(\Psi)$ es un frame ajustado para $L^2(\mathbb{R})$ si, y sólo si, $\mathcal{G}S\mathcal{G}^{-1}(\omega)$ es el operador identidad en $l^2(\mathbb{J}) \oplus l^2(\mathbb{J})$ para casi todo $\omega \in \partial\mathbb{D}$, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 121 *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ una función refinable tal que*

$$\phi = \sum_j h^\phi[j] DT^j \phi.$$

Un subconjunto Ψ de $L^2(\mathbb{R})$, finito o numerable, satisfaciendo

$$\psi = \sum_j h^\psi[j] DT^j \phi, \quad \psi \in \Psi,$$

es un frame ajustado para $L^2(\mathbb{R})$ si, y sólo si,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0,1,2,3} \sum_{k_\mu} \left[\sum_{k_\nu} \left[\sum_{\psi,j} \left[\sum \overline{h^\psi[2j]} h^\psi[2j+k_\nu] \right] \sum_w \overline{h^\phi[4w+r]} h^\phi[4w+r+k_\mu-2k_\nu] \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\sum_{\psi,j} \overline{h^\psi[2j+1]} h^\psi[2j+1+k_\nu] \right] \sum_w \overline{h^\phi[4w+r-2]} h^\phi[4w+r-2+k_\mu-2k_\nu] \right] \times \\
& \quad \times \sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left[\sum_u \overline{\hat{\phi}_i^{(n-4u-r)}} \hat{\phi}_{i'}^{(n'-4u-r-k_\mu)} \right] \left[\sum_m \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m}} \alpha_{i',n'}^{s',l',m+k} \right] = \delta_{s,s'} \delta_{l,l'} \delta_{0,k},
\end{aligned} \tag{4.126}$$

donde $s, s' = \pm$, $l, l' \in \mathbb{J}$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Se definen los vectores¹⁰

$$\begin{aligned}
W^+ & := \left(\sum_{\psi,j} \overline{h^\psi[j]} h^\psi[j+k_\nu] \right)_{k_\nu \in \mathbb{Z}}, \quad W^- := \left(\sum_{\psi,j} (-1)^j \overline{h^\psi[j]} h^\psi[j+k_\nu] \right)_{k_\nu \in \mathbb{Z}}, \\
[k\Phi_{s,l}^{s',l'}]^{++} & := \left(\sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left[\sum_u \overline{\hat{\phi}_i^{(n-u)}} \hat{\phi}_{i'}^{(n'-u-k_\mu)} \right] \left[\sum_k \omega^k \sum_m \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m}} \alpha_{i',n'}^{s',l',m+k} \right] \right)_{k_\mu \in \mathbb{Z}}, \\
[k\Phi_{s,l}^{s',l'}]^{+-} & := \left(\sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left[\sum_u (-1)^u \overline{\hat{\phi}_i^{(n-u)}} \hat{\phi}_{i'}^{(n'-u-k_\mu)} \right] \left[\sum_k \omega^k \sum_m \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m}} \alpha_{i',n'}^{s',l',m+k} \right] \right)_{k_\mu \in \mathbb{Z}}, \\
[k\Phi_{s,l}^{s',l'}]^{-+} & := \left(\sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left[\sum_u (-1)^{\lfloor \frac{u}{2} \rfloor} \overline{\hat{\phi}_i^{(n-u)}} \hat{\phi}_{i'}^{(n'-u-k_\mu)} \right] \left[\sum_k \omega^k \sum_m \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m}} \alpha_{i',n'}^{s',l',m+k} \right] \right)_{k_\mu \in \mathbb{Z}}, \\
[k\Phi_{s,l}^{s',l'}]^{--} & := \left(\sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left[\sum_u (-1)^{\lfloor \frac{u}{2} \rfloor + u} \overline{\hat{\phi}_i^{(n-u)}} \hat{\phi}_{i'}^{(n'-u-k_\mu)} \right] \left[\sum_k \omega^k \sum_m \overline{\alpha_{i,n}^{s,l,m}} \alpha_{i',n'}^{s',l',m+k} \right] \right)_{k_\mu \in \mathbb{Z}},
\end{aligned}$$

y las matrices de tipo Lawton

$$\begin{aligned}
L^{++} & := \left(\sum_w \overline{h_w^\phi} h_{w+k_\mu-2k_\nu}^\phi \right)_{k_\nu, k_\mu}, \\
L^{+-} & := \left(\sum_w (-1)^w \overline{h_w^\phi} h_{w+k_\mu-2k_\nu}^\phi \right)_{k_\nu, k_\mu},
\end{aligned}$$

¹⁰De ese modo, por ejemplo,

$$\sum_{\psi,j} \overline{h^\psi[2j]} h^\psi[2j+k_\nu] = \frac{W_{k_\nu}^+ + W_{k_\nu}^-}{2}, \quad \sum_{\psi,j} \overline{h^\psi[2j+1]} h^\psi[2j+1+k_\nu] = \frac{W_{k_\nu}^+ - W_{k_\nu}^-}{2}.$$

$$L^{-+} := \left(\sum_w (-1)^{\lfloor \frac{w}{2} \rfloor} \overline{h^\phi[w]} h^\phi[w + k_\mu - 2k_\nu] \right)_{k_\nu, k_\mu},$$

$$L^{--} := \left(\sum_w (-1)^{\lfloor \frac{w}{2} \rfloor + w} \overline{h^\phi[w]} h^\phi[w + k_\mu - 2k_\nu] \right)_{k_\nu, k_\mu}.$$

Entonces, la familia de ecuaciones dada en (4.126) tienen la siguiente forma matricial:

$$W^+(L^{++}[{}_k\Phi_{s,l}^{s',l'}]^{++} + L^{+-}[{}_k\Phi_{s,l}^{s',l'}]^{+-}) + W^-(L^{-+}[{}_k\Phi_{s,l}^{s',l'}]^{-+} + L^{--}[{}_k\Phi_{s,l}^{s',l'}]^{--}) = 4\delta_{s,s'} \delta_{l,l'} \delta_{0,k}. \quad (4.127)$$

El análisis de estas ecuaciones para ciertas bases ortonormales $\{L_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}}$ y $\{K_{s,j}^{(m)}\}_{j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}, s = \pm}$ concretas merece un estudio posterior.

Parte II

Aplicaciones a imagen médica

Capítulo 5

Eliminación de ruido en imágenes de resonancia magnética

La adquisición de Imágenes de Resonancia Magnética (MRI) es una de las técnicas de adquisición de imágenes más importantes [157], la cual permite el estudio de características estructurales del interior del cuerpo humano de forma no invasiva. Este procedimiento está basado en el principio de Resonancia Magnética Nuclear (NMR) [97], y la ventaja de esta técnica frente a otras no invasivas, como pueden ser los ultrasonidos, es la alta calidad de sus imágenes, frente al inconveniente de necesitar un equipo caro y de gran tamaño. Sin embargo, puesto que la señal de ultrasonido no se transmite a través de los huesos, en el caso de imágenes del cerebro, el cual está rodeado por el cráneo, la técnica de ultrasonidos no es viable y es necesario recurrir a la resonancia magnética para poder obtener dichas imágenes.

Para un tiempo de adquisición dado, en imágenes de resonancia magnética existe un compromiso fundamental entre la resolución y la relación señal a ruido (SNR) [63]. Las imágenes de resonancia magnética se ven afectadas por ruido principalmente producido por interferencias debidas a la emisión de calor del cuerpo humano (Gaussiano en el espacio de frecuencias y Rician en la envolvente de su transformada de Fourier inversa [6]), el cual impide la correcta identificación de formas y detalles. Más aún, existe una relación entre el nivel de ruido y la resolución de las imágenes adquiridas por resonancia magnética, es decir, cuanto mayor es la resolución de la imagen adquirida, menor es la relación señal a ruido [99]. La forma más sencilla para reducir el nivel de ruido es incrementar el tiempo de adquisición (o equivalentemente, incrementar el número de imágenes promediadas, esto es, incrementar el número de experimentos (NEX)), lo cual puede causar un gran incremento en el gasto y largas listas de espera, además de largos tiempos de adquisición que llegan a ser problemáticos para los pacientes, los cuales pueden no ser capaces de permanecer en un estado de reposo (debido al estrés, dolores, claustrofobia, etc.). Para eliminar dichos problemas, se puede aplicar un filtrado que actúe sobre la imagen adquirida. Dicho filtrado debe eliminar el ruido tratando de pre-

servar los detalles. El problema principal al eliminar ruido mediante regularización de la imagen es la resultante pérdida de información en bordes y contornos (desenfocado), lo cual es habitual en filtros Gaussianos (convolución). Perona y Malik [120] propusieron un nuevo tipo de filtro, basado en ecuaciones en derivadas parciales y la ecuación de difusión del calor, el cual es el origen de una familia de filtros que permiten homogeneizar regiones mientras mantienen o intensifican los bordes entre las mismas. Gerig *et al.* [65] proponen el uso de los llamados filtros anisotrópicos no lineales, que dan muy buen resultado en el contexto de imágenes de resonancia magnética, y que son una importante aplicación práctica de las ideas propuestas por Perona y Malik. De la misma ecuación de difusión, [65] proponen una discretización alternativa con una formulación simple, cuya estabilidad está sujeta a ciertas restricciones en los parámetros. Métodos lineales optimales en el sentido del mínimo error cuadrático medio (filtro de Wiener) también han sido adaptados al caso de imágenes de resonancia magnética [2, 107]. Otro filtro con buenos resultados en eliminación de ruido de imágenes de resonancia magnética es el llamado filtro de Medias No Locales (NLM) [35, 105], que promedia pixels similares como una función de su distancia en intensidades (algunos filtros, como el filtro bilateral [6], están basados en la misma proposición, pero la ventaja del filtro NLM sobre otros métodos es que la medida de similitud utilizada es más robusta al ruido debida a la comparación de regiones en lugar de comparación de pixels). Los principios de los métodos estadísticos no paramétricos también son la base de la reducción iterada de entropía condicional (ICER) propuesta por Awate y Whitaker [11], un algoritmo de inferencia Bayesiana basada en campos aleatorios de Markov que estiman la estadística de la imagen limpia mediante optimización de una métrica de información teórica utilizando el algoritmo de expectación maximización. Este filtro incorpora el modelo de ruido Rician, a diferencia del método NLM, que es más general. He y Greenshields [79] diseñaron otro filtro que trata de mejorar al filtro NLM añadiendo la información de ruido Rician. Dabov *et al.* [38] también propusieron un filtro similar al NLM. Este método crea arrays tridimensionales formados apilando vecindarios bidimensionales similares. La importancia del agrupamiento es habilitar el uso de un filtrado de dimensión mayor en cada grupo, que explota la potencial similitud (correlación, afinidad, etc.) entre los fragmentos agrupados. Más generalmente, Sivaramakrishnan y Weissman [139] diseñaron un filtro universal que no necesita información del ruido *a priori* y el cual es asintóticamente óptimo. Además, Awate y Whitaker también proponen un método basado en parches [9, 10] que intenta optimizar la entropía de la imagen ruidosa con el fin de reducir el ruido.

Una característica muy interesante de la transformada wavelet (frame) es su capacidad para preservar detalles a diferentes escalas, debido a su habilidad de modelar la información de forma local en la imagen. En el caso multirresolución, [103], otros autores han diseñado filtros en imágenes de resonancia magnética utilizando técnicas wavelet. Donoho y Johnstone [51] probaron que un simple umbralizado en la base apropiada puede ser un filtro (no lineal) casi óptimo. Nowak [115] y Pizurica *et al.* [121] propusie-

ron mejorar el filtrado utilizando la transformada wavelet discreta multirresolución. En particular, la relevancia del trabajo de Nowak es que utiliza el hecho de que las imágenes, en magnitud, de resonancia magnética siguen una distribución Rician y su imagen cuadrática sigue una distribución Chi cuadrado. Otros investigadores, como Sijbers *et al.* [137], utilizan este hecho. Además, Nowak [115] realiza la transformada wavelet en la imagen cuadrática, donde el ruido y el sesgo, oculto en los coeficientes de aproximación, se reduce. Un método de difusión como el propuesto por Perona y Malik, pero adaptado al caso de distribución Rician, se ha propuesto por Basu, Fletcher y Whitaker [15]. Otro trabajo interesante es el realizado por Anand y Sahambi [6]. En este caso, también se utiliza la imagen cuadrática de la imagen amplitud, corrigiendo el sesgo y aplicando un filtro bilateral (filtro Gaussiano en los dominios espacial y de amplitud) sobre los coeficientes de aproximación (también está basado en la distribución Rician de la imagen). Por otro lado, Yang y Fei [158] combinan la transformada wavelet unidimensional con la transformada de Radon para eliminar el ruido Rician en imágenes de resonancia magnética. Por último, el método propuesto por Wirestam *et al.* [156] utiliza una técnica de contracción de los coeficientes del filtro basada en un filtro de Wiener. La novedad de este método es que el filtrado se realiza en el dominio complejo de Fourier, donde el ruido es complejo Gaussiano. Este método tiene el problema de que los datos complejos no están siempre disponibles en la adquisición de imágenes de resonancia magnética¹.

Basado en el estado del arte de los métodos wavelet y la propiedad de localidad de las transformadas wavelet multirresolución y wavelet frame, la alternativa que se propone en este capítulo (Sección 5.2) trata de eliminar el ruido de las imágenes de resonancia magnética en la envolvente de su dominio transformado, adaptando el método propuesto por Gorgel, Sertbas y Ucan [73], originalmente diseñado para imágenes de mamografía, y mejorando lo ya propuesto por Martin-Fernandez y Villullas [109]. Para ello, en la Sección 5.2.2 se propone utilizar diferentes wavelet frames ajustados (entre ellas las wavelet multirresolución), seleccionados en función de diferentes propiedades (propiedades que tratan de optimizar la eliminación de ruido frente a la conservación de detalle), así como estimar los parámetros involucrados en los modelos de ruido y detalle (los cuales se observa que siguen una distribución Gaussiana Generalizada para diferentes valores del parámetro β , como muestra la Sección 5.2.1), mediante el método de Expectación Maximización (EM), propuesto por Dempster *et al.* [49] y Moon [114] (Sección 5.2.3). Más aún, este hecho hace que el filtro sea independiente de los estimadores de la varianza del ruido, en contraste con otros filtros descritos anteriormente. La potencia de este método se comprueba en los experimentos de la Sección 5.3.4, comparándolo con los métodos generales descritos en la Sección 5.1.1 (NLM y Awate-Whitaker) y los métodos wavelet de la Sección 5.1.2 (Donoho-Johnstone y Nowak). Dichas comparaciones se basan en las

¹Habitualmente, los escáneres de resonancia magnética proporcionan solamente las imágenes envolventes en el dominio real en formato DICOM. Los datos en bruto complejos en el espacio de frecuencias se almacenan normalmente en un formato propietario que no está abierto y es completamente dependiente. Dichos datos no siempre son almacenados en el escáner a disposición del usuario.

imágenes de resonancia magnética, tanto sintéticas como reales, descritas en la Sección 5.3.2 y las medidas de similitud definidas en la Sección 5.3.3. Los contenidos de este capítulo están siendo recogidos en el futuro artículo de investigación de Gómez-Cubillo, Martín-Fernández y Villullas [66].

5.1. Estado del arte

Esta sección revisa algunos filtros utilizados en los experimentos numéricos de la Sección 5.3. El nuevo filtro propuesto en la Sección 5.2 es comparado con otros dos filtros basados en wavelets, el filtrado por umbralizado fuerte de Donoho-Johnstone [51] y el filtro de Nowak [115], y con los filtros de Awate-Whitaker (Guassiano y Rician) [9, 10] y el filtro de Medias No Locales [35, 105]. Además, los filtros basados en wavelets se ven afectados por las traslaciones, como muestra la Sección 5.1.2. En dicha subsección también presenta cómo eliminar este problema. Finalmente, en la Sección 5.1.3, se muestra un estimador de la varianza del ruido, necesario en ambos filtros basados en wavelets.

5.1.1. Filtros NLM y de Awate-Whitaker

Para una evaluación cuantitativa, los métodos basados en wavelets (Donoho-Johnstone, Nowak y el método propuesto) son comparados (en el caso 2-dimensional) con el filtro de medias no locales (NLM) [35, 105] y el método propuesto por Awate y Whitaker [9, 10]. Esta comparación es significativa ya que estos métodos han demostrado recientemente ser competitivos con respecto a los métodos basados en wavelets.

Filtro de Medias No Locales (NLM)

Para una imagen dada I , la imagen filtrada por el método NLM [35, 105] en el pixel de posición m (F_{NLM} es el operador de filtro NLM) está dada por el promedio pesado de todos los pixels en un área seleccionada Ω_m del pixel de posición m en la imagen I ,

$$F_{NLM}(I(m)) = \sum_{n \in \Omega_m} w(m, n) I(n),$$

donde $0 \leq w(m, n) \leq 1$, $\sum_{n \in \Omega} w(m, n) = 1$. Los pesos $w(m, n)$ están basados en las similitudes entre los vecindarios de los pixels $I(m)$ y $I(n)$ y están definidos como

$$w(m, n) = \frac{e^{-\frac{d(N_m, N_n)}{h^2}}}{\sum_{n \in I} e^{-\frac{d(N_m, N_n)}{h^2}}},$$

donde N_m y N_n son los vecindarios de los pixels de posiciones m y n , respectivamente, d es el cuadrado de una distancia Euclídea pesada por una Gaussiana y h es el parámetro

de control de suavizado de decaimiento exponencial. La región Ω_m puede ser la imagen completa pero, por razones computacionales, Ω_m utiliza una región menor en un vecindario local.

Filtro de Awate-Whitaker

En esta propuesta realizada por Awate y Whitaker [9, 10], dada una imagen I , es generado un vector aleatorio $Z(m) = [X(m), Y(m)]$, donde m representa la posición de pixel en la imagen I , y donde $X(m)$ es la intensidad de I en el pixel de posición m e $Y(m)$ es la intensidad de I en los pixels de un vecindario ($Y(m)$ es un vector) del pixel de posición m (se utiliza $\tilde{X}(m)$, $\tilde{Y}(m)$ y $\tilde{Z}(m)$ como variables aleatorias de la imagen degradada). El objetivo del método es minimizar la entropía de la función de densidad de probabilidad condicionada, $h(\tilde{X} | \tilde{Y})$, para lo cual es utilizado el método de gradiente descendiente dado por

$$\hat{x} = x - \delta \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.1)$$

donde δ es un parámetro. En este caso se utilizan dos versiones de este filtro, utilizando modelos Gaussiano y Rician para la función de densidad de probabilidad.

5.1.2. Filtros wavelet

Una imagen/volumen puede ser interpretada como una función 2-dimensional/3-dimensional de soporte compacto. Los valores de esta función, representados en una matriz 2D/3D I , son una buena aproximación a los coeficientes de la transformada wavelet o wavelet frame a escala 0 (en la Transformada Wavelet Discreta). En adelante se utiliza solamente el término wavelet frame, el cual incluye también al término wavelet habitual, y los coeficientes en dicha base wavelet frame se denominan coeficientes de detalle.

En el caso general unidimensional, un vector f puede interpretarse como una función constante a trozos de longitud 1 y, por tanto,

$$d_j^a[n] := \langle \psi_{j,n}^a, f \rangle, \quad j \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N}$$

con $d_j^a[n] = 0$ si $j \geq 0$. Dada la descomposición de los wavelet frames en la base ortonormal de Haar, $\{\widehat{\psi^a}_i\}_i$, $a \in \mathbb{N}$, se tiene que, para $j < 0$,

$$d_j^a[n] = 2^{j/2} \sum_{\substack{0 \leq u < -j \\ 0 \leq v < 2^u}} \overline{(\widehat{\psi^a})_{2^u+v}} \sum_{0 \leq k < 2^{-j-u}} (-1)^{\lfloor \frac{k}{2^{-j-u-1}} \rfloor} f(2^{-j}n + 2^{-j-u}v + k),$$

expresión que permite el cálculo exacto de los coeficientes de detalle hasta una escala concreta.

El caso multirresolución es más sencillo, pues hace uso de la relación existente entre los wavelet frames y los filtros involucrados en las ecuaciones de doble escala (1.6) y (1.10). Concretamente, dado un vector f , el cual se interpreta como los coeficientes de refinamiento a escala 0, $s_0 = f$, se tiene que los coeficientes a escala $j > 0$, s_j y d_j^a , pueden ser calculados en función de dichos filtros y los coeficientes de refinamiento a escala $j - 1$, s_{j-1} , mediante el algoritmo en cascada, dado en el Teorema 13 para el caso de wavelets multirresolución y en [42, Section 4] para el caso de wavelet frames ajustados multirresolución.

La generalización a los casos multidimensionales se realizan mediante el uso de bases separables, lo que corresponde a la aplicación de las diferentes descomposiciones unidimensionales (general o multirresolución) en cada una de las dimensiones.

Las interferencias provocadas por el ruido modifican los detalles de las imágenes/volumenes de resonancia magnética y, a medida que el ruido aumenta, más niveles de descomposición en wavelet frames se ven afectados. Los coeficientes en wavelet frames pueden ser filtrados para eliminar el ruido de la correspondiente imagen/volumen.

Los dos filtros siguientes, propuestos por Donoho y Johnstone [51] y Nowak [115] sobre una descomposición wavelet multirresolución, se utilizan para analizar la eficiencia del nuevo filtro presentado en la siguiente sección. En particular, dadas las sucesiones de coeficientes de detalles $d^\alpha = (d^\alpha[k])_{k=1}^{N^\alpha}$ y la sucesión de coeficientes de refinamiento $s^j = (s^j[k])_{k=1}^{N^j}$ de una imagen/volumen I (donde N^α representa el número de escalas y posiciones para cada α y N^j es el número de escalas y posiciones para cada j), los filtros se definen, en el dominio wavelet, de la forma siguiente:

Filtro de Donoho-Johnstone

El clásico filtro por umbralizado fuerte descrito por Donoho y Johnstone [51] está dado por

$$F_{DJ}(d^\alpha[k]) := \begin{cases} d^\alpha[k] & , \text{ si } |d^\alpha[k]| > T^\alpha \\ 0 & , \text{ si } |d^\alpha[k]| \leq T^\alpha \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $|\cdot|$ es el operador módulo y $T^\alpha := \sigma_{Ruido} \sqrt{2 \log_e(N^\alpha)}$ con σ_{Ruido} desviación estándar del ruido en la imagen/volumen I .

Filtro de Nowak

Otro filtro es el propuesto por Nowak [115] por

$$F_N(d^\alpha[k]) := C^\alpha[k] d^\alpha[k] \quad (5.3)$$

donde

$$C^\alpha[k] := \left(\frac{(d^\alpha[k])^2 - 3(\sigma^\alpha)^2[k]}{(d^\alpha[k])^2} \right)_+$$

$$(x)_+ := \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ si } x < 0 \end{cases} ,$$

y $(\sigma^2)^\alpha[k]$ es la varianza de los coeficientes de detalle $d^\alpha[k]$. Una estimación para este valor, $\widehat{(\sigma^\alpha)^2[k]}$, la cual es utilizada en los experimentos prácticos, es la propuesta por Nowak [115]

$$\widehat{(\sigma^\alpha)^2[k]} := 4\sigma_{Ruido}^4 \text{máx} \left\{ \frac{\sum_{m \in I} (\psi^\alpha)^2[k](m) I^2(m)}{\sigma_{Ruido}^2} - 1, 1 \right\}$$

donde σ_{Ruido} es la desviación estándar del ruido en la imagen/volumen I .

Filtrado invariante por traslaciones

Como muestra Nowak [115], el filtrado de coeficientes de detalle (basado en la transformada wavelet discreta) se ve afectado por las traslaciones de la imagen/volumen y puede producir la aparición de artefactos, ya que los valores de los coeficientes de detalle dependen del alineamiento entre los datos y las funciones de la base wavelet frame. Los métodos invariantes por traslaciones [31, 53, 92, 104, 115] pueden funcionar mejor, eliminando la aparición de artefactos (véase un ejemplo en la Figura 5.1). Las transformadas wavelet frame invariantes por traslaciones proporcionan un mayor grado de regularidad [19, 31, 115] que el enfoque del análisis wavelet frame estándar, por lo que los algoritmos basados en dicha transformada suelen mejorar los resultados obtenidos por los métodos estándar. Un filtrado invariante por traslaciones puede obtenerse aplicando el filtrado estándar en todas las traslaciones posibles de la imagen, invirtiendo la traslación previa y promediando los resultados obtenidos. Puesto que realizar todas las traslaciones de la imagen sería computacionalmente inviable, para reducir dicho coste se propone un esquema aproximadamente invariante por traslaciones, esto es, todas las traslaciones son sustituidas por un reducido rango de traslaciones. Concretamente, la imagen es trasladada en todas las dimensiones y sentidos (izquierda, derecha, arriba, abajo en 2 dimensiones; izquierda, derecha, arriba, abajo, delante, detrás en 3 dimensiones) en K pixels/voxels en cada sentido, en pasos de un pixel/voxel. Pese a que esto no garantiza la invarianza por traslaciones, si que reduce la dependencia del rendimiento del filtro del alineamiento entre los datos y las funciones de la base wavelet frame. En los experimentos de la Sección 5.3.4, se utiliza $K = 2$, es decir, movimientos de $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ en cada dirección dando un total de 25 traslaciones para imágenes 2-dimensionales (los valores $K > 2$ aumentan el tiempo computacional excesivamente con una reducida mejora) y $K = 1$, es decir, movimientos de $\{-1, 0, 1\}$ en cada dirección dando un total de 27 traslaciones para volúmenes tridimensionales (la misma observación hecha para el

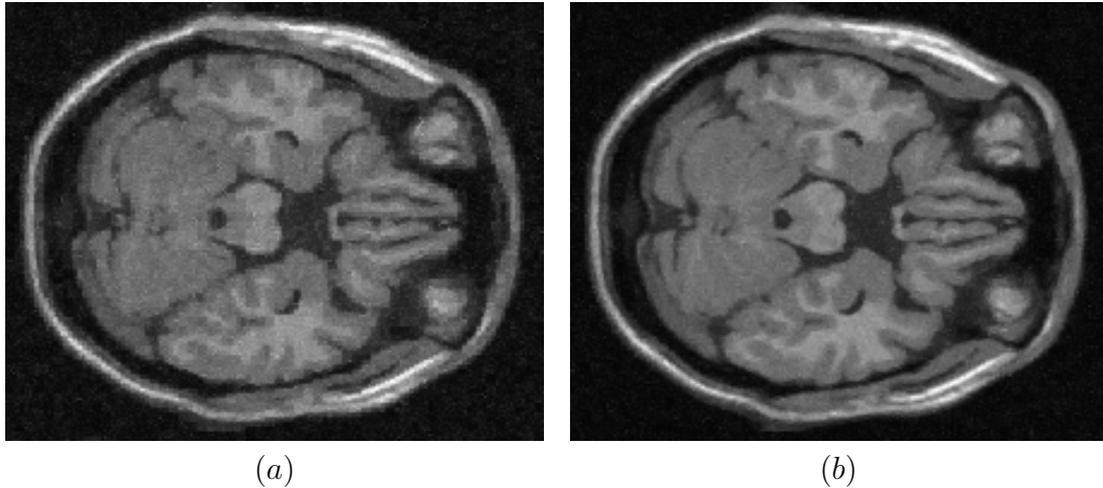


Figura 5.1: Comparativa de imágenes: (a) sin filtrado invariante por traslaciones; (b) con filtrado aproximadamente invariante por traslaciones ($K = 2$). En el caso (a) es fácilmente identificable la aparición de “dientes de sierra” (artefactos).

caso 2-dimensional para $K > 2$ se aplica en el caso 3-dimensional para $K > 1$). La imagen/volumen final es construida tras deshacer las traslaciones de cada imagen/volumen y promediando las 25/27 imágenes/volúmenes resultantes.

5.1.3. Estimación de σ_{Ruido}^2

Los métodos de Donoho-Johnstone [51] y Nowak [115] son muy dependientes de la estimación de ruido. Se asume que la distribución de ruido, en el dominio complejo, es Gaussiana de media cero, por lo que estimar el ruido es equivalente a estimar la varianza del ruido, σ_{Ruido}^2 . En imágenes de resonancia magnética, σ_{Ruido}^2 es desconocida *a priori* y debe ser estimada a partir de los datos. Un buen estimador de σ_{Ruido}^2 de una imagen I es presentado por Aja-Fernandez *et al.* [4, 5] dado por

$$\hat{\sigma}_{Ruido}^2 := \frac{2}{4 - \pi} \text{Moda}\{\sigma_{local}^2\}, \quad (5.4)$$

donde σ_{local}^2 es la varianza local de I , definida como

$$\sigma_{local}^2(m) := \text{LV}(I, m)$$

donde el operador LV está definido en el Apéndice C.

5.2. Filtro propuesto

El filtro wavelet frame propuesto en este apartado está definido por la contracción

$$F_V(d^\alpha[k]) := S_\lambda^\alpha[k] d^\alpha[k] \quad (5.5)$$

donde d^α son los coeficientes de detalle, con α escala/wavelet frames en el caso general y escala/orientación en el caso multirresolución, de la imagen/volumen I y

$$S_\lambda^\alpha[k] := \frac{(1 - \lambda)P(d^\alpha[k] | \text{Detalle})}{(1 - \lambda)P(d^\alpha[k] | \text{Detalle}) + \lambda P(d^\alpha[k] | \text{Ruido})}$$

con parámetro λ (el valor $S_\lambda^\alpha[k]$ representa la probabilidad del coeficiente, a posteriori, de representar detalle dado d^α con λ la probabilidad del coeficiente, a priori, de representar ruido). Este filtro está basado en el filtro propuesto por Gorgell *et al.* [73] para imágenes de mamografía y ya ha sido utilizado por Martín-Fernandez y Villullas [109] para imágenes de resonancia magnética. Las novedades de este filtro son los modelos de distribución propuestos para los coeficientes de detalle, en función de representar detalle o ruido, en el dominio wavelet frame de las imágenes de resonancia magnética (Gaussianos Generalizados frente a Laplaciano y Gaussiano) y la inclusión de las bases wavelet frame en posible sustitución de la wavelet de Haar, lo cual permite ampliar los grados de libertad y las posibilidades de adaptación al problema en contraposición con la posible limitación dada por dicha wavelet ortonormal. El uso del método de Expectación Maximización (EM) a la hora de estimar los parámetros involucrados ya fue introducido en [109]. Esto anula el problema de la posible existencia de parámetros libres, como puede ser la varianza del ruido, el cual suele ser problemático.

La definición del valor S_λ^α como una probabilidad condicionada permite modificar los coeficientes de detalle teniendo en cuenta la intensidad del ruido. Más aún, las modificaciones a tener en cuenta en la imagen/volumen producidas por la modificación de sus coeficientes de detalle se deben solamente a los coeficientes de detalle de modulo grande, esto es, la modificación de coeficientes de detalle de módulo pequeño no produce grandes cambios en la imagen/volumen (región regular). Por lo tanto, la importancia de S_λ^α se focaliza en las colas de las distribuciones de probabilidad de representar detalle o ruido.

5.2.1. Distribución de coeficientes de detalle y ruido

Las imágenes/volúmenes de resonancia magnética libres de ruido tienen una distribución, en el dominio de la transformada wavelet frame, con un máximo pronunciado en el origen (debido a las regiones regulares) y colas pesadas producidas por los bordes y diferentes estructuras contenidas en la imagen/volumen. Dicha distribución es semejante a una distribución Laplaciana (modelo propuesto en el caso de wavelets, para imágenes de mamografía, por Gorgell *et al.* [73]), pero no lo suficiente. Para conseguir mejorar la

aproximación a su distribución, se generaliza el modelo Laplaciano a un modelo Gaussiano Generalizado, cuya función de densidad es

$$f_{GG}(x; \mu, \alpha, \beta) := \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} e^{-\left(\frac{|x-\mu|}{\alpha}\right)^\beta}, \quad (5.6)$$

y su función de distribución es

$$F_{GG}(x; \mu, \alpha, \beta) := \frac{1}{2} + \text{signo}(x - \mu) \frac{\gamma\left(1/\beta, \left(\frac{|x-\mu|}{\alpha}\right)^\beta\right)}{2\Gamma(1/\beta)}, \quad (5.7)$$

con parámetros μ , α y β , siendo Γ y γ las funciones gamma y gamma incompleta, respectivamente.

Además, se observa que, en función del nivel de descomposición, se puede prefijar el parámetro β para las bases wavelet frame dadas en la Sección 4.1.2 y para todas las imágenes de resonancia magnética cerebral. Para comprobarlo, prefijado un conjunto de imágenes libres de ruido (equivalentemente, sus coeficientes de detalle d^α) y un conjunto aleatorio de wavelet frames representativas del conjunto total, para los valores $\beta \in \{0,1, 0,2, \dots, 2\}$, se estiman los correspondientes parámetros μ y α tales que $f(d^\alpha; \mu, \alpha, \beta)$ sea la distribución de los datos, y se calcula la norma infinito de la diferencia de la función de distribución de dicha distribución Gaussiana Generalizada estimada con la función de distribución empírica (minimización de la distancia de Kolmogórov, criterio basado en el test de Kolmogórov-Smirnov para semejanza de distribuciones). Con todo esto, se observa que, dada una imagen I y su descomposición en wavelet frames hasta escala $(5, 5)$, $\{d_{i,j}^{a,b}\}_{1 \leq i,j \leq 5}^{a,b \in \{1,2\}}$, el conjunto de datos $d_{i,j}^{a,b}$ sigue una distribución Gaussiana Generalizada de parámetro

$$\beta_{i,j} = \frac{i+j+3}{10}, \quad 1 \leq i, j \leq 5, i+j \leq 8. \quad (5.8)$$

Por tanto, para $a, b \in \{1, 2\}$,

$$P(d_{i,j}^{a,b} | \text{Detalle}) := \frac{\beta_{i,j}}{2\alpha\Gamma(1/\beta_{i,j})} e^{-\left(\frac{|x-\mu|}{\alpha}\right)^{\beta_{i,j}}}, \quad 1 \leq i, j \leq 5, i+j \leq 8. \quad (5.9)$$

En el caso multirresolución, para la wavelet de Haar, dada su descomposición en dicha wavelet hasta escala 3, $\{d_j^\alpha\}_{1 \leq j \leq 3}^{\alpha \in \{H,V,D\}}$, el conjunto de datos d_j^α sigue una distribución Gaussiana Generalizada de parámetro

$$\beta_j = \begin{cases} 0,4 & , \text{ si } j = 1 \\ 0,5 & , \text{ si } j = 2 \\ 0,9 & , \text{ si } j = 3 \end{cases} \quad (5.10)$$

Por tanto, para $\alpha \in \{H, V, D\}$,

$$P(d_j^\alpha | \text{Detalle}) := \frac{\beta_j}{2\alpha\Gamma(1/\beta_j)} e^{-\left(\frac{|x-\mu|}{\alpha}\right)^{\beta_j}}, \quad 1 \leq j \leq 3. \quad (5.11)$$

Por otro lado, la distribución de las imágenes/volúmenes reales de resonancia magnética es Rician [75, 99]. En las regiones con alta relación señal a ruido, la distribución Rician tiende a una distribución Gaussiana, mientras que en las regiones de baja relación señal a ruido, la distribución Rician tiende a una distribución Rayleigh [6], es decir, el ruido en resonancia magnética (libre de señal) puede ser modelado por una distribución Rayleigh. Del igual modo al caso anterior, los coeficientes en el dominio de la transformada wavelet frame tienen una distribución similar a la Gaussiana. Concretamente, se observa que los coeficientes de detalle de una imagen/volumen formada únicamente por ruido Gaussiano o Rayleigh, cuya descomposición en wavelet frames hasta escala (5, 5) es $\{d_{i,j}^{a,b}\}_{1 \leq i,j \leq 5}^{a,b \in \{1,2\}}$, tienen una distribución Gaussiana Generalizada de media 0 y parámetro $\beta = 2$ (*i.e.*, Gaussiana) o $\beta = 1,9$, respectivamente, para todas las escalas y pares de wavelet frames. Nuevamente, para el caso multirresolución de la wavelet de Haar, dada su descomposición en dicha wavelet hasta escala 3, $\{d_j^\alpha\}_{1 \leq j \leq 3}^{\alpha \in \{H,V,D\}}$, el conjunto de datos d_j^α sigue una distribución Gaussiana Generalizada de media 0 y parámetro $\beta = 2$ (*i.e.*, Gaussiana) ó $\beta = 1,9$ para los casos de ruido Gaussiano y Rayleigh, respectivamente, para todas las escalas y direcciones. Por tanto, para $d = d_{i,j}^{a,b}$, $a, b \in \{a, b\}$, $1 \leq i, j \leq 5$ ó $d = d_j^\alpha$, $\alpha \in \{H, V, D\}$, $1 \leq j \leq 3$,

$$P(d | \text{Ruido Gaussiano}) := \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^2}, \quad (5.12)$$

y

$$P(d | \text{Ruido Rayleigh}) := \frac{1,9}{2\alpha\Gamma(1/1,9)} e^{-\left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^{1,9}}. \quad (5.13)$$

5.2.2. Wavelet frames ajustados óptimos

Dada una matriz I , sea $\{d_{i,j}^{a,b}\}$ a su descomposición en wavelet frames tal que $d_{i,j}^{a,b}[n, m] = \langle I, (\psi_a)_{i,n}(\psi_b)_{j,m} \rangle$ con $(\psi_a)_{i,n} = D^i T^n \psi_a$, $i, j \in \mathbb{N}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \{1, 2\}$.

Con el fin de maximizar el efecto del filtro probabilístico propuesto, se seleccionan los wavelet frames ajustados adecuados a la hora de descomponer la señal. Dicha selección se puede basar en dos criterios:

1. Sea I imagen de resonancia magnética y sea I_R matriz de ruido Gaussiano (es decir, alto SNR², esto es, ruido del interior del cuerpo), y sean $\{d_{i,j}^{a,b}\}$ y $\{(d_R)_{i,j}^{a,b}\}$ sus correspondientes descomposiciones en wavelet frames ajustados hasta escala (5, 5).

²Si se desea centrar en zonas de bajo SNR, se sustituye el ruido Gaussiano por ruido Rayleigh.

Como indica la sección anterior, la distribución de los coeficientes de detalle de ambas descomposiciones siguen un modelo Gaussiano Generalizado con parámetro β prefijado para cada caso y cada escala. El filtro propuesto en (5.5) estima la cantidad de ruido y/o detalle correspondiente a cada coeficiente. Con el fin de conseguir conservar la mayor parte de detalle posible, para todo par de índices (a, b) con $a, b \in \{1, 2\}$ y escala (i, j) con $i, j \in \{1, \dots, 5\}$, $i + j \leq 8$, se identifican los wavelet frames ajustados que compacten la distribución de los coeficientes de detalle (si hay componente de detalle, la probabilidad de serlo será alta) al tiempo que dispersen la distribución de los coeficientes de ruido (la probabilidad de ser ruido es menor), es decir, los wavelet frames ajustados que hagan que, para cada escala, el parámetro $(\alpha_{Detalle})_{i,j}^{a,b}$ de los coeficientes de detalle sea mínimo y el parámetro $(\alpha_{Ruido})_{i,j}^{a,b}$ de los coeficientes de ruido sea máximo, esto es,

$$P_{i,j}^{a,b} = \frac{(\alpha_{Detalle})_{i,j}^{a,b}}{(\alpha_{Ruido})_{i,j}^{a,b}} \text{ sea mínimo.} \quad (5.14)$$

Para poder tratarlo como un problema de optimización unidimensional, se utiliza una función de importancia sobre las diferentes escalas, $\text{Imp}(\{P_{i,j}^{a,b}\})$, que de mayor valor a los valores $P_{i,j}^{a,b}$ cuanto menor sea la escala a la que corresponden, y se promedia entre las 4 permutaciones $a, b \in \{1, 2\}$ posibles.

Las wavelet frames estimadas son las óptimas bajo la característica de que, dado un ruido Gaussiano, su descomposición de detalles (la cual sigue distribución Gaussiana Generalizada con $\beta = 2$, es decir, Gaussiana) tiene un parámetro α mínimo en proporción al parámetro α de las imágenes libres de ruido.

2. En las mismas condiciones que en el caso anterior, con el fin de conseguir eliminar la mayor parte del ruido posible, para cada par de índices (a, b) con $a, b \in \{1, 2\}$ y escala (i, j) con $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ $i + j \leq 8$, se identifican los wavelet frames ajustados que dispersen la distribución de los coeficientes de detalle al tiempo que compacten la distribución de los coeficientes de ruido, es decir, los wavelet frames ajustados que hagan que, para cada escala, la proporción

$$P_{i,j}^{a,b} = \frac{(\alpha_{Detalle})_{i,j}^{a,b}}{(\alpha_{Ruido})_{i,j}^{a,b}} \text{ sea máxima.} \quad (5.15)$$

Nuevamente, para poder tratarlo como un problema de optimización unidimensional, se utiliza una función de importancia sobre las diferentes escalas, $\text{Imp}(\{P_{i,j}^{a,b}\})$, que de mayor valor a los valores $P_{i,j}^{a,b}$ cuanto menor sea la escala a la que corresponden, y se promedia entre las 4 permutaciones $a, b \in \{1, 2\}$ posibles.

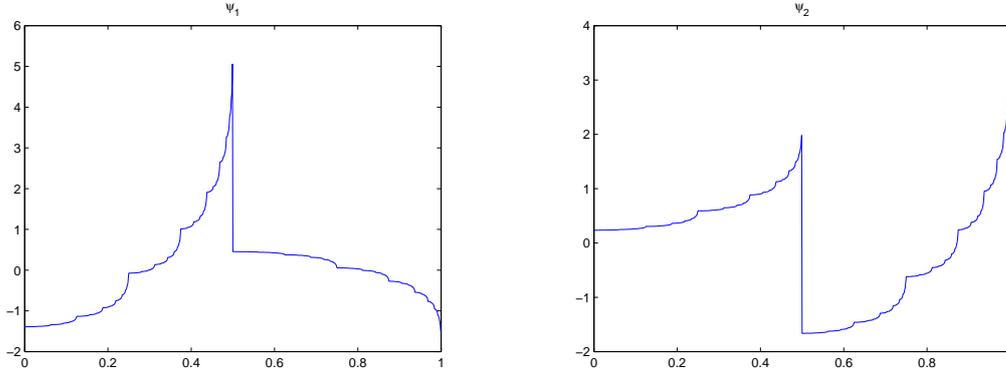


Figura 5.2: Wavelet frames ajustados óptimos para el criterio 1.

En todos los casos, se utiliza la función

$$\text{Imp}(\{P_{i,j}\}) = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq 5 \\ i+j \leq 8}} P_{i,j} \cdot \left(1 - 0,2 \frac{i+j-2}{1,5}\right)^3 \quad (5.16)$$

como función de importancia entre escalas.

La búsqueda de los wavelet frames ajustados óptimos se realiza mediante rejilla, imponiendo las condiciones $(\widehat{\psi_a})_1 \neq 0$ (en caso contrario, la descomposición de los wavelet frames ajustados en la base de Haar comienza a escala 2 en vez de escala 1, por lo que habría que renombrar a la hora de optimizar. Además, los cálculos muestran que los wavelet frames ajustados del caso 2, los cuales son los únicos que verifican la nulidad de dichos coeficientes, no son los óptimos en estos casos) o, equivalentemente, $(u_0)_i \neq 0$, $i = 1, 2$ y $\rho, |\rho_0| > 0$. Dicha condición se asegura imponiendo condiciones restrictivas sobre los parámetros de cálculo de los diferentes wavelet frames. Concretamente, se impone $|\rho(u_0)_i|, |\rho_0(u_0)_i| > U_{prod}$, $i = 1, 2$ y $\rho, |\rho_0| > U_\rho$ con $U_{prod}, U_\rho > 0$ (valores muy bajos, en la práctica, se consideran 0). En este caso, los umbrales impuestos son $U_{prod} = 0,01$ y $U_\rho = 0,1$ y el paso de la rejilla es 0,05 para los ángulos de los vectores y 0,025 para los parámetros $\rho, |\rho_0|$.

En consecuencia, los wavelet frames ajustados óptimos obtenidos son los siguientes:

Criterio 1: Wavelet frames ajustados del caso 5 en el Corolario 77 con parámetros $u_0 = (\cos(21\pi/40) \sin(21\pi/40))$, $v = (\cos(11\pi/10 - 0,05) \sin(11\pi/10 - 0,05))$, $\rho_0 = 0,6$, $\theta_{\tau_0} = 0$, $\theta_{\rho_1} = 0$, $B = 1$ y $\theta_{C_1} = 0$ (Figura 5.2)

Criterio 2: Wavelet frames ajustados del caso 1 en el Corolario 77, es decir, wavelet de Haar.

Puesto que en el criterio 2 se obtiene un wavelet frame ajustado (concretamente, una wavelet ortonormal) que también puede verse desde el punto de vista de la mul-

tirresolución, se realiza el filtrado en ambas formas, descomposición discreta general y multirresolución.

5.2.3. Estimación de los parámetros

En el artículo original de Gorgel *et al.* [73], la estimación de los parámetros involucrados se realiza considerando ambas distribuciones, detalles y ruido, de forma independiente, y seleccionando el parámetro λ en función de la relación entre detalle y ruido. Una de las novedades propuestas en [109], y que se conserva en este filtro, es el método de estimación de los parámetros que aparecen en la contracción. Para ello, se considera la distribución conjunta de ambas distribuciones, lo cual permite encontrar los parámetros que maximicen la similitud entre las distribuciones reales y teóricas (Gaussianas Generalizadas). Para este propósito, los parámetros λ , $\mu_{Detalle}$, $\alpha_{Detalle}$ y α_{Ruido} son estimados por el método de Estimación Maximización del modo siguiente:

Sea $\Theta = [\mu_{Detalle}, \alpha_{Detalle}, \alpha_{Ruido}, \lambda]$ el vector de parámetros desconocidos, $\mathbf{X} = \{X_i\}_{i=1}^N$ el conjunto de datos conocidos y $\mathbf{Z} = \{Z_i\}_{i=1}^N$ las variables auxiliares ocultas definidas por

$$Z_i := \begin{cases} 1 & , \text{ si } X_i \text{ es detalle} \\ 0 & , \text{ si } X_i \text{ es ruido} \end{cases} \quad , \quad i = 1, \dots, N.$$

Se asume que $\mathbf{X} = \{X_i\}_{i=1}^N$ son independientes. Por tanto,

$$P(X_i | \Theta) = \lambda P_{Ruido}(X_i | \alpha_{Ruido}) + (1 - \lambda) P_{Detalle}(X_i | \mu_{Detalle}, \alpha_{Detalle})$$

y

$$P(\mathbf{X} | \Theta) = \prod_{i=1}^N P(X_i | \Theta).$$

Incluyendo las variables ocultas,

$$P(\mathbf{X}, \mathbf{Z} | \Theta) = \prod_{i=1}^N P(X_i, Z_i | \Theta).$$

Más aún,

$$P(X_i, Z_i | \Theta) = P(X_i | Z_i, \Theta) P(Z_i | \Theta),$$

por lo que

$$\begin{aligned} P(X_i | \Theta) &= P(X_i | Z_i = 1, \Theta) P(Z_i = 1 | \Theta) + P(X_i | Z_i = 0, \Theta) P(Z_i = 0 | \Theta) = \\ &= P_{Detalle}(X_i | \mu_{Detalle}, \alpha_{Detalle}) (1 - \lambda) + P_{Ruido}(X_i | \alpha_{Ruido}) \lambda. \end{aligned}$$

Se define la función de verosimilitud, que se optimizará, por

$$\begin{aligned} L(\Theta | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) &:= \ln(P(\mathbf{X}, \mathbf{Z} | \Theta)) = \sum_{i=1}^N \ln(P(X_i, Z_i | \Theta)) = \\ &= \sum_{i=1}^N \ln(P(X_i | Z_i, \Theta)) + \sum_{i=1}^N \ln(P(Z_i | \Theta)). \end{aligned}$$

El valor esperado de esta función es

$$\begin{aligned} E(L(\Theta | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) |_{\Theta, \mathbf{x}}) &= E\left(\sum_{i=1}^N \ln(P(X_i | Z_i, \Theta)) + \sum_{i=1}^N \ln(P(Z_i | \Theta)) |_{\Theta, \mathbf{x}}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^N E(\ln(P(X_i | Z_i, \Theta)) |_{\Theta, \mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^N E(\ln(P(Z_i | \Theta)) |_{\Theta, \mathbf{x}}) = \\ &= \sum_{i=1}^N E(\ln(P(X_i | Z_i, \Theta)) |_{\Theta, X_i}) + \sum_{i=1}^N E(\ln(P(Z_i | \Theta)) |_{\Theta, X_i}) = \\ &= \sum_{i=1}^N [P(Z_i = 1 | \Theta, X_i) \ln(P(X_i | Z_i = 1, \Theta)) + P(Z_i = 0 | \Theta, X_i) \ln(P(X_i | Z_i = 0, \Theta)) + \\ &\quad + P(Z_i = 1 | \Theta, X_i) \ln(P(Z_i = 1 | \Theta)) + P(Z_i = 0 | \Theta, X_i) \ln(P(Z_i = 0 | \Theta))]. \end{aligned}$$

Sea $\gamma_i := P(Z_i = 1 | \Theta, X_i)$ (entonces $P(Z_i = 0 | \Theta, X_i) = 1 - \gamma_i$), por lo que

$$\begin{aligned} E(L(\Theta | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) |_{\Theta, \mathbf{x}}) &= \sum_{i=1}^N [\gamma_i \ln(P_{Detalle}(X_i | \mu_{Detalle}, \alpha_{Detalle})) + \\ &\quad + (1 - \gamma_i) \ln(P_{Ruido}(X_i | \alpha_{Ruido})) + \gamma_i \ln(1 - \lambda) + (1 - \gamma_i) \ln(\lambda)] = \\ &= \sum_{i=1}^N [\gamma_i (\ln(P_{Detalle}(X_i | \mu_{Detalle}, \alpha_{Detalle})) + \ln(1 - \lambda)) + \\ &\quad + (1 - \gamma_i) (\ln(P_{Ruido}(X_i | \alpha_{Ruido})) + \ln(\lambda))]. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \gamma_i &= P(Z_i = 1 | \Theta, X_i) = \frac{P(X_i | Z_i = 1, \Theta) P(Z_i = 1 | \Theta)}{P(X_i | \Theta)} = \\ &= \frac{P(X_i | Z_i = 1, \Theta) P(Z_i = 1 | \Theta)}{P(X_i | Z_i = 1, \Theta) P(Z_i = 1 | \Theta) + P(X_i | Z_i = 0, \Theta) P(Z_i = 0 | \Theta)}, \end{aligned}$$

entonces

$$\gamma_i = \frac{(1 - \lambda)P_{Detalle}(X_i | \mu_{Detalle}, \alpha_{Detalle})}{(1 - \lambda)P_{Detalle}(X_i | \mu_{Detalle}, \alpha_{Detalle}) + \lambda P_{Ruido}(X_i | \alpha_{Ruido})}.$$

Sustituyendo $P_{Detalle}$ y P_{Ruido} por su correspondiente expresión

$$\begin{aligned} E(L(\Theta | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) | \Theta, \mathbf{x}) &= \\ &= - \sum_{i=1}^N \left[\gamma_i \left(-\ln(\beta_{Detalle}) + \ln(2) + \ln(\alpha_{Detalle}) + \ln(\Gamma(1/\beta_{Detalle})) \right) + \right. \\ &+ \left(\frac{|X_i - \mu_{Detalle}|}{\alpha_{Detalle}} \right)^{\beta_{Detalle}} - \ln(1 - \lambda) \Big) + (1 - \gamma_i) \left(-\ln(\beta_{Ruido}) + \ln(2) + \right. \\ &+ \left. \ln(\alpha_{Ruido}) + \ln(\Gamma(1/\beta_{Ruido})) + \left(\frac{|X_i|}{\alpha_{Ruido}} \right)^{\beta_{Ruido}} - \ln(\lambda) \right) \Big]. \end{aligned}$$

Para maximizar esta función, se calcula el correspondiente gradiente y se iguala a 0 (nótese que los valores $\beta_{Detalle}$ y β_{Ruido} están prefijados):

$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} E(L(\Theta | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) | \Theta, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \left[\gamma_i \frac{-1}{1 - \lambda} + (1 - \gamma_i) \frac{1}{\lambda} \right] = \sum_{i=1}^N \frac{(1 - \lambda)(1 - \gamma_i) - \lambda \gamma_i}{(1 - \lambda)\lambda}.$$

Por tanto

$$\hat{\lambda} := 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_i. \quad (5.17)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \alpha_{Ruido}^{\beta_{Ruido}}} E(L(\Theta | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) | \Theta, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N (1 - \gamma_i) \left(\frac{1}{\beta_{Ruido} \alpha_{Ruido}^{\beta_{Ruido}}} - \frac{|X_i|^{\beta_{Ruido}}}{\alpha_{Ruido}^{2\beta_{Ruido}}} \right).$$

Por tanto

$$\widehat{\alpha_{Ruido}^{\beta_{Ruido}}} := \beta_{Ruido} \frac{\sum_{i=1}^N (1 - \gamma_i) |X_i|^{\beta_{Ruido}}}{\sum_{i=1}^N (1 - \gamma_i)}. \quad (5.18)$$

El estimador de $\mu_{Detalle}$, $\widehat{\mu_{Detalle}}$, no puede ser determinado utilizando estas técnicas, puesto que la expresión $\sum_{i=1}^N \gamma_i |X_i - \mu_{Detalle}|^{\beta_{Detalle}}$ es lineal a trozos y su mínimo es siempre un vértice. Por tanto, en este caso se propone un método directo

$$\widehat{\mu_{Detalle}} := \arg \min_{\mu_{Detalle} = X_m} \sum_{i=1}^N \gamma_i |\mu_{Detalle} - X_i|^{\beta_{Detalle}}. \quad (5.19)$$

Por último,

$$0 = \frac{\partial}{\partial \alpha_{Detalle}^{\beta_{Detalle}}} E(L(\Theta | \mathbf{X}, \mathbf{Z}) | \Theta, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \left(\frac{1}{\beta_{Detalle} \alpha_{Detalle}^{\beta_{Detalle}}} - \frac{|X_i - \mu_{Detalle}|^{\beta_{Detalle}}}{\alpha_{Detalle}^{2\beta_{Detalle}}} \right).$$

Por tanto

$$\widehat{\alpha_{Detalle}^{\beta_{Detalle}}} := \beta_{Detalle} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_i |X_i - \mu_{Detalle}|^{\beta_{Detalle}}}{\sum_{i=1}^N \gamma_i}. \quad (5.20)$$

5.3. Experimentos

5.3.1. Algoritmos

Con el fin de concretar los métodos utilizados en los experimentos numéricos de la Sección 5.3.4, a continuación se detallan los algoritmos de filtrado correspondientes a cada uno de los métodos ya presentados en las secciones anteriores.

Algoritmo NLM

- Dados los valores de los parámetros, se calcula la función de pesos w para cada pixel de la imagen I .
- Para cada pixel, se calcula la imagen filtrada por el filtro NLM con la función de pesos w .

Algoritmo de Awate-Whitaker

- Sea $I_0 = I$ la imagen ruidosa y sea $k > 0$.
- Para cada región $\hat{z}^k = [\hat{x}^k, \hat{y}^k]$ (esto es, para cada pixel m) de la imagen I_k , se calcula $\frac{\partial h(\hat{X} | \hat{Y} = \hat{y}^k)}{\partial \hat{x}^k}$.
- Se utiliza el algoritmo de gradiente descendiente para calcular \hat{x}^{k+1} mediante $\hat{x}^{k+1} = \hat{x}^k - \delta \frac{\partial h}{\partial \hat{x}^k}$.
- La imagen I_{k+1} está dada por la intensidad \hat{x}^{k+1} en el pixel t . Si $k + 1$ es menor que el número máximo de iteraciones, se vuelve al paso 2 con $k = k + 1$. Si no, la imagen filtrada por el filtro de Awate-Whitaker es I_{k+1} .

Algoritmo de Donoho-Johnstone

- Se estima la varianza del ruido, $\hat{\sigma}_{Ruido}^2$, como muestra la Sección 5.1.3.
- Se calcula la TWD multirresolución hasta escala ($J = 2$) de la imagen/volumen I .
- Se filtran los coeficientes wavelet d^α mediante el filtro de Donoho-Johnstone, F_{DJ} , definido en la Sección 5.1.2.
- Se calcula la TWD inversa utilizando los coeficientes wavelet filtrados, y conservando los coeficientes de refinamiento, para obtener una imagen/volumen estimada libre de ruido.

- Se repiten los pasos 2 a 4, con las imágenes/volúmenes trasladadas $\{-K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K\}$ pixels/voxels en cada dirección, como explica la subsección **Filtro invariante por traslaciones** de la Sección 5.1.2, y se promedian todas las imágenes/volúmenes libres de ruido resultantes (la imagen/volumen original corresponde a la traslación nula.)

Algoritmo de Nowak

- Se estima la varianza del ruido, $\hat{\sigma}_{Ruido}^2$, como muestra la Sección 5.1.3.
- Se calcula la TWD multirresolución hasta escala ($J = 2$) del cuadrado de la imagen/volumen, I^2 .
- Se suprime el sesgo de los coeficientes de refinamiento s^J restando $C = 2^{J+1}\sigma_{Ruido}$ de cada uno (ver [115]).
- Se filtran los coeficientes wavelet d^α mediante el filtro de Nowak, F_N , definido en la Sección 5.1.2.
- Se calcula la TWD inversa utilizando los coeficientes wavelet filtrados y los coeficientes de refinamiento sin sesgo para obtener una imagen/volumen estimada libre de ruido cuadrática.
- Se calcula, pixel a pixel/voxel a voxel la raíz cuadrada de la imagen/volumen calculada para obtener una estimación de la imagen/volumen insesgada.
- Se repiten los pasos 2 a 6, con las imágenes/volúmenes trasladadas $\{-K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K\}$ pixels/voxels en cada dirección, como explica la subsección **Filtro invariante por traslaciones** de la Sección 5.1.2, y se promedian todas las imágenes/volúmenes libres de ruido resultantes (la imagen/volumen original corresponde a la traslación nula.)

Algoritmos de Villullas

- Se calcula la TWD hasta escala ($J = 2$) de la imagen/volumen I . Dicha descomposición puede realizarse con cada una de las 3 opciones de wavelet frames propuestas como óptimas en la Sección 5.2.2.
- Se filtran los coeficientes wavelet d^α mediante el filtro de Villullas, F_V , definido en la Sección 5.2.
- Se calcula la TWD inversa utilizando los coeficientes wavelet filtrados, y conservando los coeficientes de refinamiento, para obtener una imagen/volumen estimada libre de ruido.

- Se repiten los pasos 1 a 3, con las imágenes/volúmenes trasladadas $\{-K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K\}$ pixels/voxels en cada dirección, como explica la subsección **Filtro invariante por traslaciones** de la Sección 5.1.2, y se promedian todas las imágenes/volúmenes libres de ruido resultantes (la imagen/volumen original corresponde a la traslación nula.)

5.3.2. Señales MRI

Los experimentos se llevan a cabo sobre cuatro conjuntos de datos MRI. Los dos primeros conjuntos de datos consisten en volúmenes e imágenes de resonancia magnética simulados obtenidos de la base de datos Brainweb [34]. El tercer y cuarto conjunto de datos han sido recolectados del Centro de Diagnóstico Valladolid (CDV) QDIAGNOSTICA en Valladolid (España). Los detalles sobre estos conjuntos de datos se describen a continuación.

MRI simuladas

Las imágenes/volúmenes de resonancia magnética son conjuntos de datos útiles ya que permiten realizar una primera evaluación de los diferentes métodos de análisis. En el caso tridimensional, el volumen de datos sin ruido consiste en un volumen tridimensional de resolución $180 \times 216 \times 4$ extraído de un volumen generado en la base de datos Brainweb database de resolución $181 \times 217 \times 181$, en secuencia T1, $1mm$ de paso de corte axial, 0% de ruido y RF = 0%. El valor de intensidad del volumen varía en $\{0, 1, \dots, 255\}$. En el caso bidimensional, la imagen libre de ruido consiste en una sección bidimensional axial del volumen tridimensional descrito anteriormente. El ruido Rician es generado por la expresión

$$\hat{I} := \sqrt{(I + N_1)^2 + N_2^2} \quad (5.21)$$

donde I es la imagen/volumen libre de ruido y N_k , $k \in \{1, 2\}$ son variables aleatorias Gaussianas, $N(0, \sigma^2)$, independientes e idénticamente distribuidas con $\sigma \in \{1, 2, \dots, 15\}$.

MRI reales

El conjunto de datos reales está dividido en dos subconjuntos. Las imágenes de datos reales consisten en secciones bidimensionales de corte axial de un cerebro adquirido utilizando un escáner General Electric Signa 1,5T, en secuencia T1 y resolución $0,9375 \times 0,9375mm^2$ para ambos subconjuntos de datos. El primer subconjunto de datos está compuesto por 4 imágenes de dimensión 256×256 , variando el número de repeticiones (NEX) en $\{4, 8, 16, 64\}$, TR = $6ms$, TE = $1,588ms$ y flip angle = 15° . El segundo subconjunto de datos consiste en 32 imágenes de dimensión 192×160 , NEX = 1, TR = $40ms$, TE = $9ms$ y flip angle = 90° . En este caso es imposible obtener una imagen libre

de ruido, por lo que dichas imágenes son aproximadas del siguiente modo: en el primer subconjunto de datos, la imagen libre de ruido aproximada corresponde a la imagen de NEX = 64; en el segundo subconjunto de datos, la imagen libre de ruido aproximada es el promedio, en el dominio complejo, de las 32 imágenes de las que consiste dicho subconjunto. Para poder hacer esto, se han obtenido los datos directamente en el dominio frecuencial, previos al cálculo de la envolvente.

5.3.3. Medidas de similitud

Una vez filtradas las imágenes/volúmenes, los resultados obtenidos son comparados utilizando las siguientes medidas de eficiencia (I es la imagen/volumen libre de ruido, I_N es la imagen/volumen ruidoso y I_F es la imagen/volumen ruidosa filtrada) (ver el Apéndice C para más detalles).

Error de Varianza Local Promedio (AELV)

AELV es una medida de calidad objetiva [86] que cuantifica la desviación de los valores estimados con respecto al valor real. Concretamente, el AELV de I_F con respecto a I es medido como

$$\text{AELV}(I_F, I) := \frac{1}{M} \sum_m \text{LV}(I - I_F, m), \quad (5.22)$$

donde M es el número total de pixels/voxel de I y el operador LV está definido en el Apéndice C.

Error de Varianza Local Promedio Normalizada (NAELV)

Variaciones en AELV pueden ser difíciles de comprender. Para comprobar la proporción en que los valores son reducidos tras el filtrado se utiliza la normalización del AELV, dada por

$$\text{NAELV}(I_F, I_N, I) := \frac{\text{AELV}(I_F, I)}{\text{AELV}(I_N, I)}. \quad (5.23)$$

Similitud Estructural (SSIM)

Aunque AELV es una medida de similitud útil, puede no ser adecuada a la hora de obtener una comparación similar la obtenida por el ojo humano [89, 155]. La alternativa más común es el SSIM, el cual es consistente con la percepción visual. El valor SSIM es calculado como

$$\text{SSIM}(I_F, I) := \frac{2\text{GM}(I)\text{GM}(I_F) + C_1}{\text{GM}^2(I) + \text{GM}^2(I_F) + C_1} \cdot \frac{2\text{GCV}(I, I_F) + C_2}{\text{GV}(I) + \text{GV}(I_F) + C_2}, \quad (5.24)$$

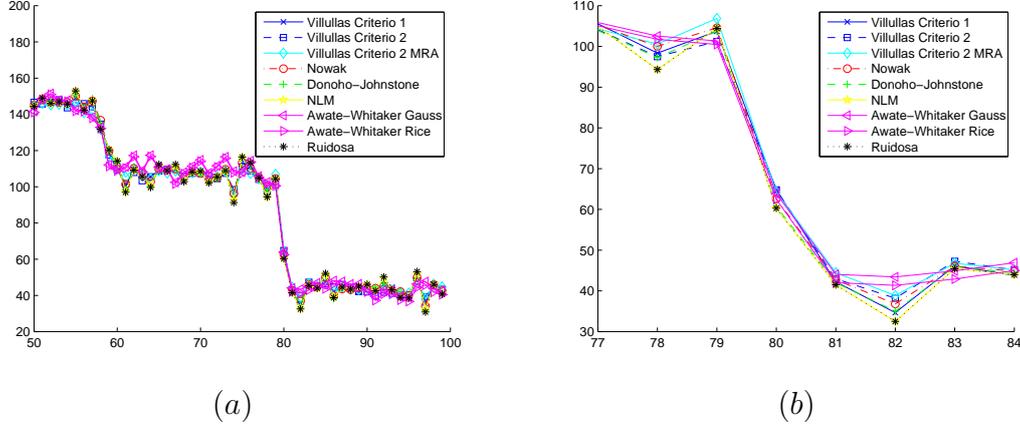


Figura 5.3: Comparativa de sección unidimensional de imagen libre de ruido, ruidosa y las diferentes imágenes obtenidas mediante los correspondientes filtros. (a) Sección unidimensional para la imagen bidimensional de parámetro $\sigma = 6$, correspondiente al conjunto de datos descrito en la Sección 5.3.2, desde el pixel (50, 126) hasta el pixel (99, 126); (b) Detalle de la sección mostrada en (a) para las coordenadas [77, 78, ..., 84]

donde los operadores $GM(I)$, $GV(I)$ y $GCV(I, I_F)$ están definidos en el Apéndice C, $C_1 := 6,5025$ y $C_2 := 58,5225$.

Relación Señal Ruido Local Promedio (ALSNR)

Otra forma sencilla de comprobar el nivel de ruido de una imagen/volumen es la relación señal a ruido local promediada, medida como

$$ALSNR(I_F, I) := \frac{1}{M} \sum_m \frac{LV(I, m)}{LV(I - I_F, m)}. \quad (5.25)$$

donde M es el número total de pixels/voxels de I y el operador LV está definido en el Apéndice C.

Contraste

La medida utilizada habitualmente para calcular el contraste de una imagen/volumen I viene dada por

$$Cont(I) := \frac{S_{max} - S_{min}}{S_{max} + S_{min}} \quad (5.26)$$

donde S_{max} y S_{min} son los valores máximo y mínimo en una región específica de dicha imagen/volumen. En ocasiones esta medida de similitud no es efectiva ya que algunos

filtros (como, por ejemplo, los filtros basados en descomposición wavelet frame) generan un sesgo que modifica los valores de esta medida de similitud pero no afecta realmente al contraste de la imagen/volumen. Además, existen varias herramientas, utilizadas habitualmente por radiólogos, que permiten modificar los valores de ventana (rango de valores de intensidad a mostrar) y nivel (centro de valores de intensidad a mostrar) de la imagen/volumen. Se puede observar la variación de contraste tomando una sección de las correspondientes imágenes/volúmenes para comparar los diferentes cambios de intensidad en función de los diferentes filtros aplicados. La Figura 5.3 muestra que los filtros basados en descomposición wavelet frame preservan los cambios de intensidad en los bordes de forma muy efectiva, debido a su propiedad de localidad.

5.3.4. Experimentos numéricos

Experimento 1: Filtrado de imágenes simuladas:

En el primer experimento, las 16 tipos de imágenes bidimensionales, descritos en la Sección 5.3.2, son filtrados. Los parámetros utilizados para la generación de ruido Rician, mediante la ecuación (5.21), son $\sigma \in \{1, 2, \dots, 15\}$. La Figura 5.4 muestra la comparación de las diferentes medidas de similitud promediadas como función del parámetro σ (cada valor del parámetro σ tiene asociadas 10 imágenes simuladas y el correspondiente valor de la medida de similitud es el promedio de los 10 valores de las medidas de similitud de cada una de las imágenes. Se utilizan estas 10 imágenes por cada valor de σ para reducir la variabilidad de los valores de las medidas de similitud en las imágenes simuladas). Para valores bajos del parámetro σ (imágenes casi sin ruido), el filtro de Nowak es superior al resto de filtros, prácticamente igual que el filtro de Villullas con los criterios 1 y 2, el filtro de Donoho-Johnstone y el filtro NLM en las medidas SSIM y ALSNR, siendo filtro de Villullas para el criterio 2 multirresolución el único que obtiene resultados destacablemente peores. Para la medida AELV, los filtros de Donoho-Johnstone y NLM tienen un resultado equilibrado, mientras que los filtros de Villullas comienzan con malos resultados, con una tendencia rápida a la mejora. En el caso de valores de σ medios, el filtro de Villullas para los criterios 2 se muestra superior a los demás en todos los casos. Los filtros de Villullas para el criterio 1 y de Nowak compiten en calidad, siendo el primero superior para las medidas AELV y ALSNR, pero viéndose ligeramente superado por el filtro de Nowak para la medida SSIM. El filtro de Villullas para el criterio 2 multirresolución continua con su mejora a medida que aumenta el ruido en la imagen mientras que los filtros de Donoho-Johnstone y NLM mantienen un nivel de filtrado inferior y estable. Por último, para valores del parámetro σ grandes (imágenes muy ruidosas), el filtro de Villullas para el criterio 2 aumenta su ventaja frente al resto, al tiempo que el filtro de Villullas para el criterio 2 multirresolución alcanza al filtro de Villullas para el criterio 1, llegando a superarlo en las medidas AELV y SSIM, pero no en ALSNR. El filtro de Nowak obtiene resultados cercanos a estos dos últimos, mientras

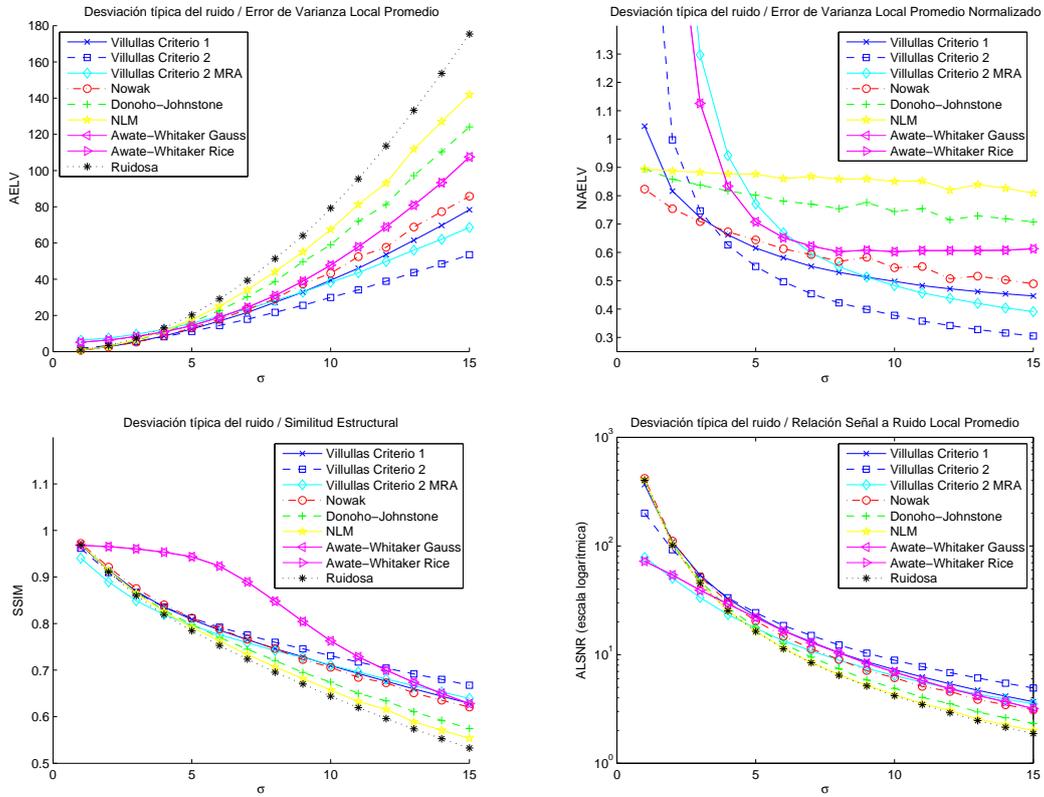


Figura 5.4: Comparativa de resultados para los diferentes filtrados en el Experimento 1 con parámetro $\sigma \in \{1, 2, \dots, 15\}$.

que los filtros de Donoho-Johnstone y NLM continúan con un filtrado inferior. Los filtros de Awate-Whitaker, tanto Gaussiano como Rician, tienen un comportamiento inferior a los filtros de Villullas y al filtro de Nowak, excepto para la medida SSIM, en la cual demuestran un buen comportamiento hasta valores altos del parámetro σ . La Figura 5.5 muestra un ejemplo ($\sigma = 6$) en el cual pueden observarse las diferencias visuales entre los métodos de filtrado utilizados. En este caso, el filtro de Villullas para el criterio 1 y el filtro de Nowak son similares, no eliminan en exceso las estructuras menos definidas pero conservan un ligero granulado en la imagen. El filtro de Villullas para el criterio 2 obtiene un mejor filtrado, conservando también de forma bastante eficiente las estructuras menos definidas, pero eliminando el granulado observado en las dos imágenes anteriores, mientras que el correspondiente filtro para el caso multirresolución filtra en exceso la imagen, eliminando en parte las estructuras a conservar. Finalmente, los filtros de Donoho-Johnstone, Medias No Locales y ambos filtros de Awate-Whitaker no consiguen filtrar lo suficiente la imagen, dando un resultado ruidoso.

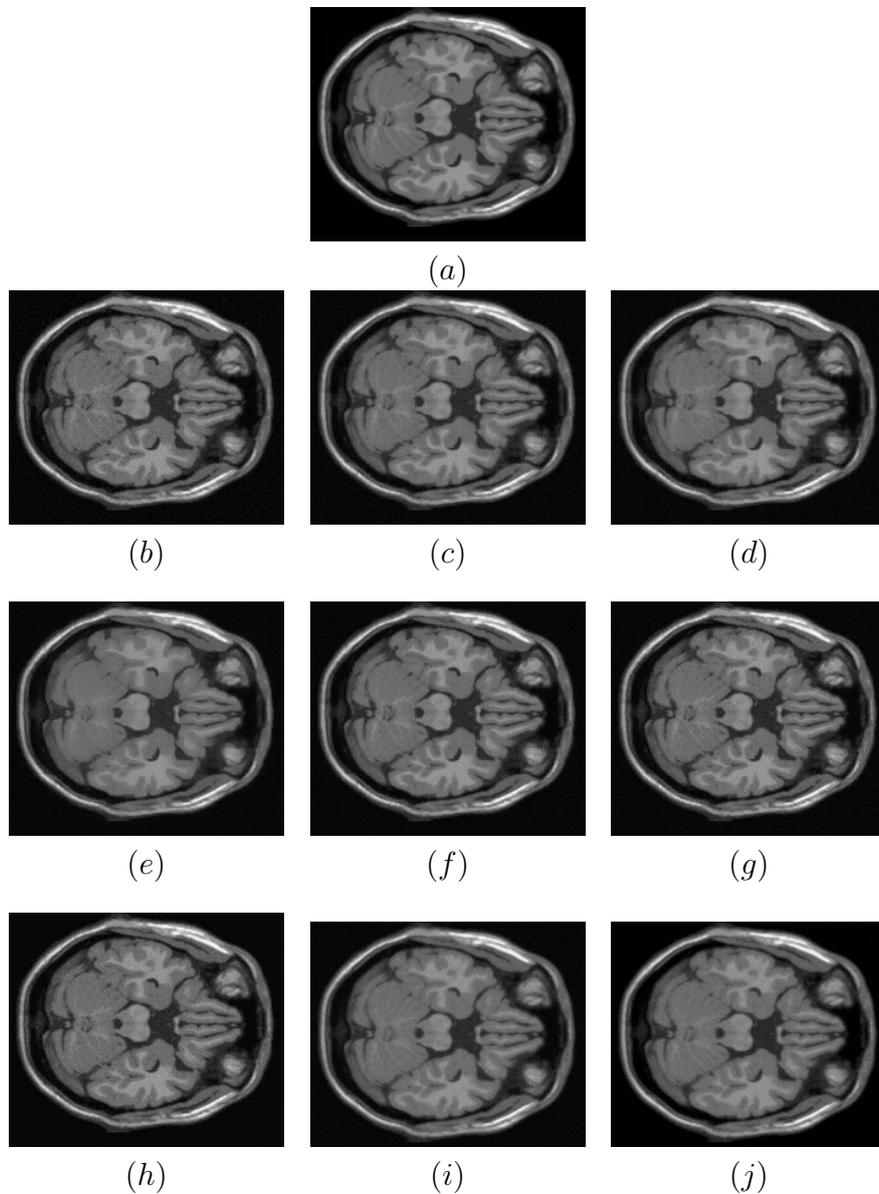


Figura 5.5: Ejemplos del Experimento 1 con parámetro $\sigma = 6$: (a) Imagen sin ruido; (b) Imagen ruidosa; (c) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Villullas para el criterio 1; (d) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Villullas para el criterio 2; (e) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Villullas para el criterio 2 y multirresolución; (f) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Nowak; (g) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Donoho y Johnstone; (h) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Medias No Locales; (i) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Awate y Whitaker para ruido Gaussiano; (j) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Awate y Whitaker para ruido Rice.

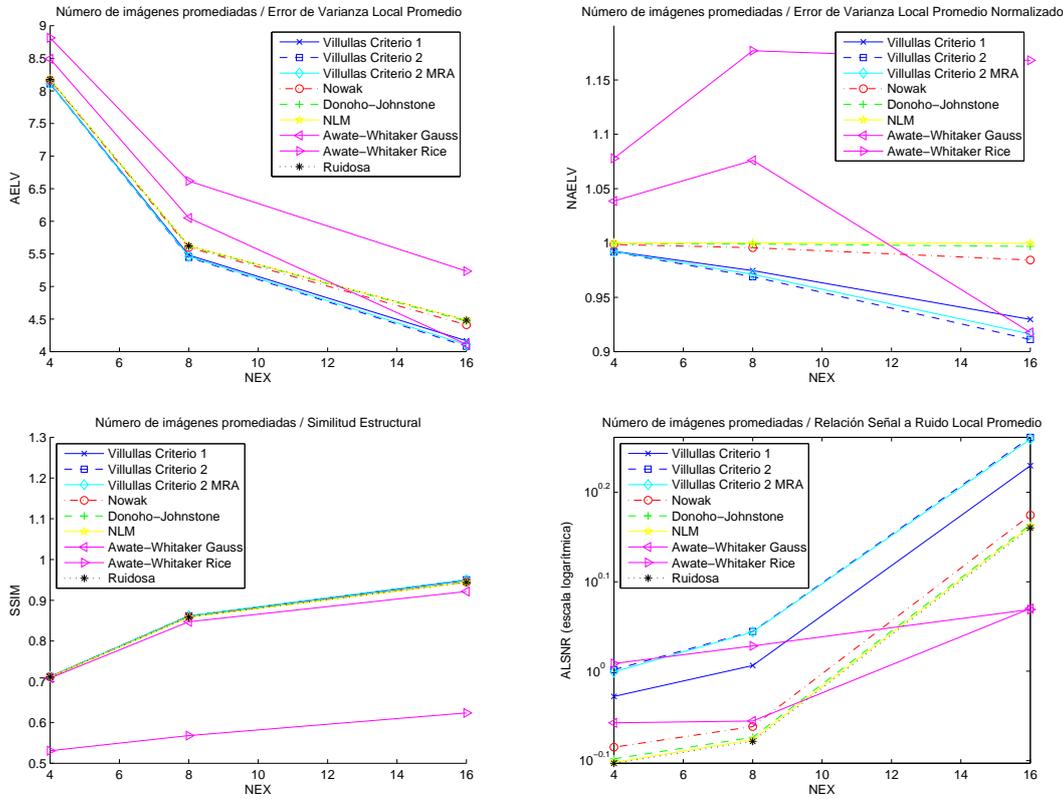


Figura 5.6: Comparativa de resultados para los diferentes filtrados en el Experimento 2 con número de imágenes promediadas $NEX \in \{4, 8, 16\}$.

Experimento 2: Filtrado de imágenes reales:

En el segundo experimento, se ha filtrado el primer conjunto de datos descrito en la Sección 5.3.2. El conjunto de imágenes ruidosas es el formado por las imágenes correspondientes a los valores $NEX \in \{4, 8, 16\}$ mientras que la imagen correspondiente a $NEX = 64$ se considera libre de ruido. La Figura 5.6 muestra la comparación de las diferentes medidas de similitud, para los diversos filtros, en función del valor NEX. En este experimento puede verse que los filtros de Villullas para el criterio 2, tanto general como multirresolución, son superiores al resto para todos los casos (excepto en ALSNR para el valor $NEX = 4$, donde el filtro de Awate-Whitaker para ruido Rice es ligeramente superior), siendo el primero ligeramente superior. El filtro de Villullas para el criterio 1 da resultados a una diferencia estable con los dos primeros, mientras que los filtros de Nowak, Donoho-Johnstone y NLM obtienen filtrados inferiores a los anteriores y similares entre si. Los filtros de Awate-Whitaker obtienen los peores resultados, salvo para las medidas AELV y $NEX = 16$ y ALSNR y $NEX = 4$, donde el filtro corres-

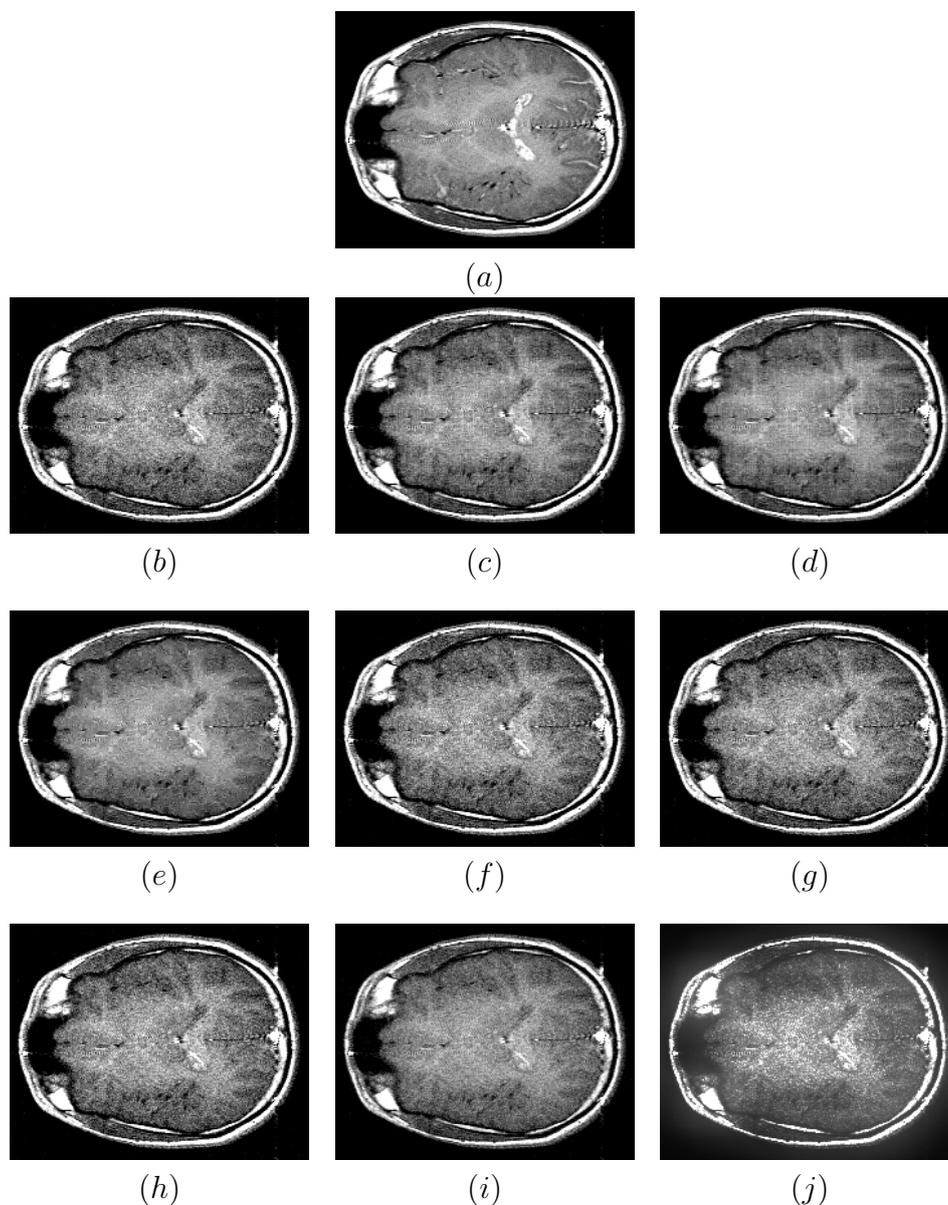


Figura 5.7: Ejemplos del Experimento 2 con número de imágenes promediadas $NEX = 8$: (a) Imagen sin ruido; (b) Imagen ruidosa; (c) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Villullas para el criterio 1; (d) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Villullas para el criterio 2; (e) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Villullas para el criterio 2 y multirresolución; (f) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Nowak; (g) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Donoho y Johnstone; (h) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Medias No Locales; (i) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Awate y Whitaker para ruido Gaussiano; (j) Imagen ruidosa filtrada por el filtro de Awate y Whitaker para ruido Rice.

pondiente a ruido Rice consigue igualar, e incluso superar, al resto. Cabe destacar la medida de similitud SSIM, para la cual todos los filtros obtienen valores muy similares entre si, excepto el filtro de Awate-Whitaker para ruido Rice. La Figura 5.7 muestra el ejemplo para $NEX = 8$. En este ejemplo, los filtros de Villullas para el criterio 2, tanto general como multirresolución, se muestran claramente superiores al resto, seguidos por el filtro de Villullas para el criterio 1. Los filtros de Nowak, Donoho-Johnstone, Medias No Locales y ambos filtros de Awate-Whitaker no consiguen eliminar el suficiente ruido, dando lugar a imágenes bastante sucias.

Experimento 3: Filtrado de imágenes reales frente a NEX superior:

El tercer experimento evalúa la potencia del filtrado de los filtros propuestos en la Sección 5.2. Estos filtros son comparados con el aumento del valor NEX. Para esta comparación se utiliza el segundo conjunto de datos reales descritos en la Sección 5.3.2. Las 32 imágenes obtenidas con $NEX = 1$ permiten controlar el nivel de ruido, el cual puede ser reducido promediando N de dichas imágenes en el dominio complejo (lo cual equivaldría a aumentar el valor NEX), donde mayores valores de N implican menores niveles de ruido. La imagen seleccionada para evaluar la potencia es la correspondiente a $N = 2$. La Tabla 5.1 muestra los diferentes valores de las correspondientes medidas de similitud (AELV, SSIM y ALSNR) para las imágenes de valores $N = 2, 3, 4, 5$ y las imágenes obtenidas al filtrar la correspondiente imagen para el valor $N = 2$ por los filtros propuestos. Se observa que todas las imágenes filtradas mejoran a la imagen obtenida para $N = 3$ y, además, las imágenes filtradas para el criterio 2 llegan a mejorar a la imagen obtenida para $N = 4$ para la medida AELV. Por lo que, utilizando estos filtros, se puede obtener una calidad similar a necesitar el doble de tiempo de adquisición, pudiendo llegar a mejorarlo. La Figura 5.8 muestra las imágenes involucradas en este experimento. Se observa que las imágenes filtradas reducen en gran medida el ruido de la imagen ruidosa para $N = 2$, mejorando, visualmente, incluso a la imagen ruidosa para $N = 4$.

Imagen \ Medida de Similitud	AELV	SSIM	ALSNR
N = 2	60.5153	0.6354	2.1123
N = 3	39.2913	0.7161	3.2624
N = 4	28.6279	0.7697	4.5435
N = 5	22.1790	0.8085	5.8094
N = 2 Filtrado Criterio 1	32.0402	0.7229	3.4914
N = 2 Filtrado Criterio 2	24.2294	0.7555	4.2708
N = 2 Filtrado Criterio 2 MRA	24.9101	0.7562	3.9624

Tabla 5.1: Medidas de similitud para los casos $N = 2, 3, 4$ y las imágenes obtenidas al filtrar la imagen para $N = 2$ con los tres filtros de Villullas en el Experimento 3.

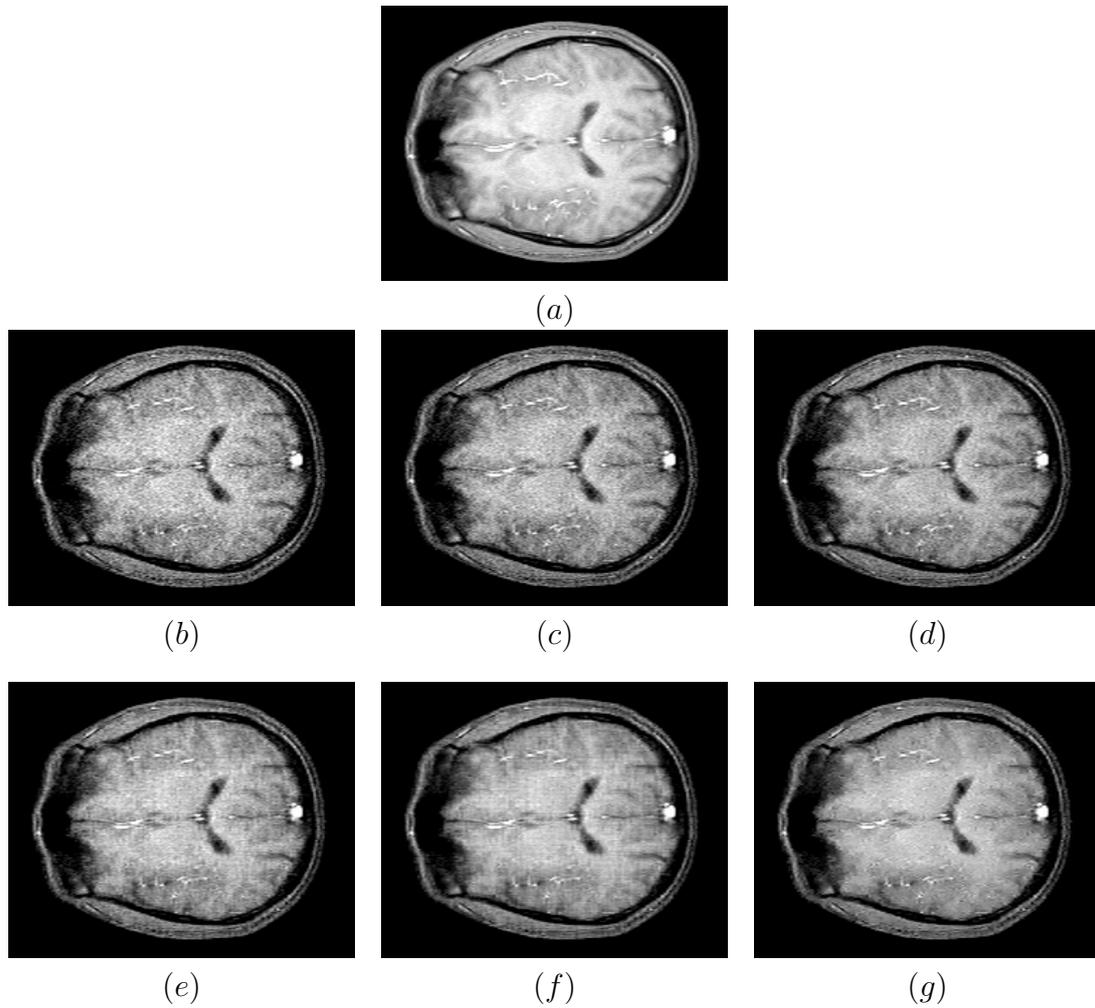


Figura 5.8: Experimento 3. (a) Imagen sin ruido; (b) Imagen ruidosa para $N = 2$; (c) Imagen ruidosa para $N = 3$; (d) Imagen ruidosa para $N = 4$; (e) Imagen ruidosa para $N = 2$ filtrada por el filtro de Villullas para el criterio 1; (f) Imagen ruidosa para $N = 2$ filtrada por el filtro de Villullas para el criterio 2; (g) Imagen ruidosa para $N = 2$ filtrada por el filtro de Villullas para el criterio 2 multirresolución.

Capítulo 6

Análisis de señales de resonancia magnética funcional

La obtención de imágenes de resonancia magnética funcional (fMRI) es una técnica reciente y no invasiva que permite hallar y medir diversas funciones del cerebro humano sin utilizar radiación [13, 91]. La función cerebral se detecta mediante pequeños cambios hemodinámicos en los capilares cerebrales [110] en las denominadas “áreas funcionales”. Dichas variaciones de flujo sanguíneo son conocidas como *efecto BOLD* (*Blood Oxygen Level Dependent*) [116, 118, 117]. Dicho efecto se describe de la siguiente forma [12, Section 2.2.3]: después de la aplicación de un estímulo puntual (unos 100 milisegundos), la señal de respuesta hemodinámica observada comienza a ascender después de 2-3 segundos, tras haber descendido ligeramente en un inicio (initial dip), y alcanza su nivel máximo después de 5-6 segundos (overshoot). Unos 10 segundos después, la señal recupera su nivel basal, tras haberse visto reducido en exceso (post-stimulus undershoot). Por tanto, la respuesta hemodinámica obtenida en un estímulo puntual tiene una longi-

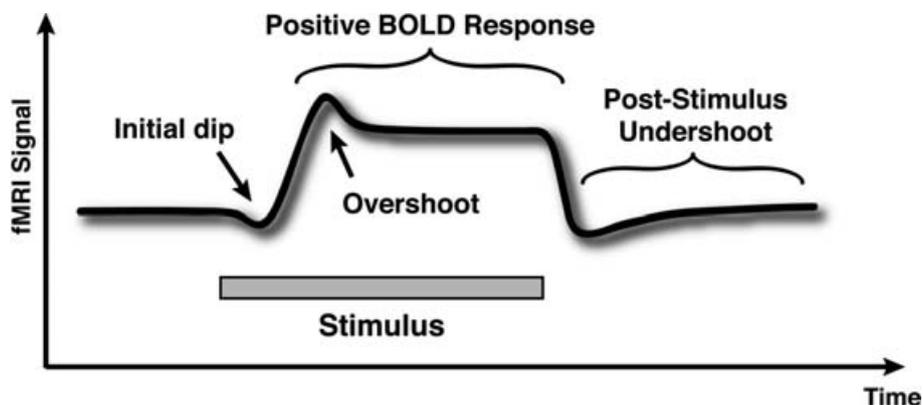


Figura 6.1: Efecto BOLD

tud temporal cercana a los 20 segundos. Para un estímulo prolongado en el tiempo, una vez alcanzado el máximo, el nivel de respuesta se reduce y estabiliza hasta el final del estímulo, momento en el cual se vuelve al nivel basal. La Figura 6.1 muestra un ejemplo de respuesta hemodinámica para un estímulo prolongado en el tiempo.

La variación de intensidad en la imagen de resonancia magnética (funcional) producida por la respuesta hemodinámica es muy pequeña, no mayor que el 5%. Así mismo, el ruido en dicha señal funcional tiene un tamaño de magnitud similar a la de la activación, por lo que localizar la actividad subyacente es un proceso complicado [12, Section 2.3]. Además, la experimentación ha demostrado que la respuesta hemodinámica es muy variable, entre personas, entre días e incluso entre diferentes regiones de un mismo cerebro [1], lo cual dificulta aún más su análisis. Por ello, los métodos clásicos hacen uso de paradigmas de activación prefijados para conocer, de antemano, en qué momento deben producirse, o no, la activación, y así poder localizar las regiones del cerebro donde se produce la misma. Dichos paradigmas son, básicamente, de dos tipos:

- Block Design: El tiempo de análisis viene dividido en bloques de activación y reposo de tamaño constante. Por ejemplo, un minuto de análisis se puede dividir en seis bloques de diez segundos en los cuales se alterna entre reposo y activación.
- Event Related: A diferencia del caso anterior, los bloques en los que se divide el tiempo de análisis no tienen por qué ser regulares. Por ejemplo, un minuto de análisis se puede dividir, alternando entre reposo (R) y activación (A), de la siguiente forma ($s \equiv$ segundos):

$$5sR | 10sA | 7sR | 16sA | 12sR | 10sA$$

Para poder identificar dicho efecto (BOLD), se hace uso de diferentes técnicas de análisis de señales funcionales. Dichos análisis extraen la señal de activación, diferenciándola de los diversos tipos de ruidos subyacentes en la señal adquirida, como pueden ser ruidos producidos por la emisión de calor del cuerpo humano (Rician), movimientos involuntarios, o ruidos de baja frecuencia en la componente temporal, denominados *drift*, los cuales dependen del tiempo de adquisición. Más aún, habitualmente se consideran análisis punto a punto, ignorando la dependencia espacial que existe en las imágenes de resonancia magnética. Esto dificulta la obtención de regiones de actividad homogéneas [159]. Gran parte de los métodos de análisis hacen uso de una componente estadística, generalmente un T-estadístico, para introducir información acerca de la intensidad del ruido de alta frecuencia y verificar cuan posible es el resultado obtenido (activación o no). Pese a que dicho ruido no sigue una distribución Gaussiana, este supuesto se acepta frecuentemente con el fin de simplificar el posterior análisis estadístico de los datos.

Una de las primeras formas utilizadas para la identificación de zonas de activación fue propuesta por Henriksen *et al.* [82], en la cual se trata de identificar dicha activación utilizando la diferencia entre momentos de posible activación y reposo. Otra de las

propuestas clásicas a la hora de analizar la señal medida es el análisis de correlación. En este caso, dado un paradigma de activación y una función modelo de la respuesta hemodinámica, se genera una señal de activación de control con la cual comparar la señal medida mediante su correlación y así obtener un mapa de similitud con dicha función de control. Como generalización de este método, apareció el método de análisis de correlación canónica [61, 60], el cual opera sobre variables multidimensionales, es decir, varios tipos de funciones de control. Siguiendo esta línea de enfoque se encuentra el modelo general lineal [62]. Modelada la señal medida a partir de una matriz (la cual contiene la base de funciones que “componen” la señal medida), se calcula la aproximación a la señal medida en la base de la matriz en mínimos cuadrados, y mediante un T-estadístico se comprueba cómo de eficiente es dicha aproximación mediante el estudio de la correspondiente señal residual. Un enfoque diferente a los anteriores es el propuesto por Frank, Buxton y Wong [55], los cuales basan su estrategia únicamente en el estudio probabilístico de la señal. Bajo el mismo modelo para la señal funcional, Ardekani *et al.* [7] proponen un método de análisis basado en una estrategia de máxima verosimilitud. Por otra parte, también existen métodos de análisis basados en componentes principales [16, 147].

Como ya se menciona en el capítulo anterior, la descomposición wavelet es una herramienta útil a la hora de las aplicaciones prácticas, en particular, en el caso de las imágenes de resonancia magnética. En el ámbito de las señales de resonancia magnética funcional, varios autores han utilizado dicha descomposición, principalmente en la componente espacial, con el fin de aprovechar algunas de sus características, como son la decorrelación de los datos y su dispersión, y la reducción de ruido. Autores como Ruttimann *et al.* [134] proponen utilizar el enfoque de la sustracción directa utilizada en los métodos clásicos junto con la descomposición wavelet espacial y transformar el análisis T-estadístico utilizado en dos análisis estadísticos consecutivos que aprovechen las características probabilísticas de los coeficientes de detalle, con el fin de obtener el correspondiente mapa de activación. Dinov *et al.* [50] utilizan la descomposición wavelet espacial como base para una posterior contracción, adaptativa en frecuencias, de los coeficientes de detalle. El método propuesto por Hilton *et al.* [85] elimina, de forma recursiva y para cada nivel, los mayores coeficientes de detalle hasta que los restantes coeficientes sigan una distribución de ruido blanco de acuerdo con ciertos criterios, y con los coeficientes extraídos forma el resultante mapa de activación. Finalmente, Van de Ville *et al.* [46] proponen trasladar el modelo general lineal al caso wavelet. Concretamente, tras obtener la correspondiente descomposición wavelet espacial, los coeficientes se modelan según el modelo general lineal y se analizan. Con los mapas (auxiliares) obtenidos, mediante la transformada wavelet inversa se obtiene el mapa de activación final correspondiente.

El método de análisis de señales de resonancia magnética funcional propuesto en este capítulo (Sección 6.2) se basa, para cada posición espacial, en la descomposición MRA-wavelet temporal de la señal medida. Dada la función modelo de respuesta hemo-

dinámica descrita en (6.10), y tras buscar la correspondiente función de escala que mejor se aproxime a dicha función modelo, la cual corresponde al filtro descrito en (6.11), la descomposición temporal de la señal funcional permite separar los coeficientes de refinamiento (los cuales corresponden a la señal de activación y ruido de baja frecuencia, que se elimina mediante umbralizado fuerte) de los coeficientes de detalle (que contienen sólo ruido), como muestra la Sección 6.2.4. Además, con el fin de aprovechar la estructura morfológica de las regiones de activación, al igual que Friman *et al.* [60], se hace uso de filtros espaciales direccionados (Sección 6.2.3). Finalmente, el correspondiente mapa de activación se crea mediante un umbralizado fuerte, así como mediante un filtrado por correlación en el vecindario (Sección 6.2.5). Este método es comparado en la sección 6.3 con los métodos clásicos descritos en la Sección 6.1 (Sustracción Directa, Análisis de correlación y Modelo General Lineal) y con los métodos basados en wavelets descritos en la Sección 6.1.2 (Sustracción Directa Wavelet y Modelo General Lineal Wavelet). Para dicha comparación se hace uso de señales de resonancia magnética funcional, tanto simuladas como reales, descritas en la Sección 6.3.2 y siguiendo los criterios descritos en la Sección 6.3.3. Este capítulo dará lugar al artículo de Martín-Fernández y Villullas [108] actualmente en preparación.

6.1. Estado del arte

En la presente sección se muestran varios ejemplos de métodos de análisis de señales de resonancia magnética funcional. Entre ellos, la Sección 6.1.1 muestra tres ejemplos clásicos de análisis históricamente eficientes: el método de sustracción directa, que propone la búsqueda de actividad por comparación entre zonas de activación y de reposo, el análisis de correlación, que como su propio nombre indica, identifica la actividad comparando con una señal de control mediante coeficientes de correlación, y el modelo general lineal, el cual busca la mejor aproximación, en mínimos cuadrados, prefijada una matriz de referencia. La Sección 6.1.2 muestra dos ejemplos, basados en los métodos clásicos, los cuales hacen uso de la descomposición wavelet ortonormal (espacial). Todos estos métodos necesitan una función de referencia/control (un paradigma de activación, block design o event related), la cual se intenta identificar dentro de la señal medida.

Finalmente, la Sección 6.1.3 muestra un método de selección del nivel de significación utilizado para un mayor control de la tasa de falsos positivos.

6.1.1. Métodos clásicos

Con el fin de comprobar la eficiencia del método propuesto, es necesario hacer uso de métodos que hayan demostrado su capacidad de análisis anteriormente. A continuación se exponen tres ejemplos típicos [12, Section 2.3.3].

Sustracción Directa

Este método [82] consiste en la comparación entre bloques de (posible) activación y bloques de reposo. Dadas dos señales, cada una perteneciente a uno de los bloques, s_1 activación y s_2 reposo, el enfoque consiste en extraer el valor medio de la condición de control (reposo), \bar{s}_2 , del valor medio de la condición a comprobar (activación), \bar{s}_1 , obteniendo $d := \bar{s}_1 - \bar{s}_2$. Estas medias pueden coincidir en diferentes casos para diferentes condiciones de actividad y ruido, esto es, pueden coincidir si hay mucho ruido sin actividad y poco ruido con actividad. Para tratar este hecho, se requiere un análisis estadístico que compruebe si dichos valores se deben a actividad real o solamente a fluctuaciones debidas al ruido. La hipótesis nula para dicho análisis es $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, esto es, no existe diferencia entre las condiciones, y por tanto, no hay activación. Incorporando información acerca de la variabilidad del ruido, se define el T-estadístico

$$T = \frac{\bar{s}_1 - \bar{s}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{s}_1 - \bar{s}_2}} \quad (6.1)$$

el cual permite medir la incertidumbre de la activación. El denominador de la expresión anterior contiene la variabilidad esperada en el valor del numerador, es decir, la desviación estándar de la diferencia de las medias. Esto es debido a la suposición de que

$$d(t) = f(t) + \epsilon(t),$$

donde f es la señal desconocida de activación que se busca recuperar y ϵ es el error descrito por un campo aleatorio homogéneo Gaussiano independiente e idénticamente distribuido, es decir, $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Por tanto, d sigue una distribución Gaussiana con $\mu_d = f$ y $\hat{\sigma}_d^2 = \sigma^2 \sim \chi^2$, esto es, $T \sim T$ -Student. En consecuencia, la hipótesis nula puede describirse como $H_0 : f(t) = 0$.

Fijado un nivel de significación, α , para el T-estadístico (habitualmente $\alpha = 0,05$ ó $0,01$), la hipótesis alternativa se acepta si el correspondiente p-valor, p , es menor que $1 - \alpha$, esto es, $p := P(\text{T-estadístico} \geq T) < 1 - \alpha$, y se genera el correspondiente mapa de activación.

Análisis de Correlación

Otro de los métodos propuestos para el análisis de señales de resonancia magnética funcional es el basado en correlaciones [61]. Dada una función modelo (habitualmente definida como la convolución de una función modelo de la función de respuesta hemodinámica con una función discreta que determina los momentos de activación e intensidad [ver la Sección 6.3.2 para más detalles]), m , se calcula, para cada posición espacial, su coeficiente de correlación con la señal medida, s , (el tiempo es discreto)

$$\rho = \text{corr}(m, s) = \frac{\sum_{t \text{ tiempo}} (m(t) - \bar{m})(s(t) - \bar{s})}{\sqrt{\sum_{t \text{ tiempo}} (m(t) - \bar{m})^2 \sum_{t \text{ tiempo}} (s(t) - \bar{s})^2}}, \quad (6.2)$$

el cual permite evaluar la similitud que hay entre dichas funciones. Utilizando los mismos principios estadísticos que en el caso de la sustracción directa, en este caso la hipótesis nula viene dada por $H_0 : \rho = 0$, es decir, no existe correlación entre la señal medida y el modelo de activación, por lo que dicha señal medida está formada solamente por ruido. Incluyendo la cantidad del muestreo temporal, N (t varía entre 1 y N), se puede obtener el T-estadístico

$$T = \frac{\rho\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}. \quad (6.3)$$

Nuevamente, fijado un umbral α , la hipótesis alternativa se acepta si el correspondiente p-valor es menor que α y se genera el correspondiente mapa de activación.

Modelo Lineal Generalizado (GLM)

Un método de análisis clásico, y que ha demostrado su efectividad a lo largo del tiempo, es el denominado modelo lineal generalizado [62]. Este método supone que la señal adquirida, para cada posición espacial, sigue el modelo lineal

$$s(t) = X(t)\beta + \epsilon(t),$$

donde s es la señal adquirida, X es la matriz del modelo lineal, la cual contiene la información de activación, β es el vector (de coeficientes) que indica cómo se distribuyen las componentes de X y ϵ es la componente residual (error).

Prefijada la matriz con la información de la actividad a encontrar en los datos adquiridos, la proyección de dichos datos al subespacio generado por la matriz del modelo es

$$\hat{s}(t) = X(t)\beta$$

y el error cometido viene dado por

$$\epsilon(t) = s(t) - \hat{s}(t) = s(t) - X(t)\beta.$$

Una idea intuitiva es encontrar los coeficientes β tales que minimicen la suma de los errores cuadráticos (escrito en terminología vectorial, se omite la componente temporal)

$$\epsilon'\epsilon = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n^2 = (s - X\beta)'(s - X\beta).$$

Los coeficientes β óptimos que minimizan este valor vienen dados por

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X's. \quad (6.4)$$

Una vez obtenidos estos valores, es necesario comprobar como de buena es la aproximación. Para ello, se define el T-estadístico

$$T = \sqrt{K} \frac{c'\beta}{\sqrt{\sigma_\epsilon^2 c'(X'X)^{-1}c}}, \quad (6.5)$$

con $K = N - \text{rango}(X)$ grados de libertad, y donde c es el vector de hipótesis de activación, habitualmente denominado *vector de contraste*, es decir, si la hipótesis H_0 es $H_0 : \beta_2 = 0$, entonces $c = (0, 1)$, y por tanto, la hipótesis nula puede escribirse como $c'\beta = 0$. El denominador de (6.5) contiene el error estándar de $c'\beta$, esto es, la variabilidad de la estimación debida a las fluctuaciones del ruido. Si el p-valor de dicho T-test es menor que el valor del umbral α , se acepta la hipótesis alternativa, y se genera el correspondiente mapa de activación.

6.1.2. Métodos wavelet

Algunos autores han tratado de incluir la descomposición wavelet en el análisis de resonancia magnética funcional. El uso que se suele hacer de las mismas es principalmente en el dominio espacial, aprovechando la propiedad de separabilidad de las wavelets ortonormales, y combinando la descomposición mediante dicha transformada con alguno de los métodos clásicos anteriormente propuestos. A continuación se muestran dos ejemplos de dichos métodos de análisis, los cuales involucran el uso de wavelets ortonormales.

Sustracción directa y Wavelets

El método propuesto por Ruttimann *et al.* [134] es una variación del método de sustracción directa descrito anteriormente. En él, dada una señal s , y prefijado un paradigma de activación con N bloques (N bloques de activación y N bloques de reposo), se crean N imágenes de diferencia entre reposo y activación, las cuales se modelan como $d_i = f(t) + \epsilon_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, y se promedian todas ellas, $d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i$. A continuación se realiza la transformada wavelet ortonormal de d , $\{a(n), w_j^m(n)\}_{j=1,2,\dots,J}^m$ todas las direcciones, y, bajo la misma hipótesis nula $H_0 : d_i = \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $w_j^m(n) \sim N(0, \sigma^2/N)$ independientes e idénticamente distribuidas (iid), por lo que

$$w_j^m(n)\sqrt{N}/\sigma \sim N(0, 1) \text{ iid} \quad (6.6)$$

$$N(w_j^m(n)/\sigma)^2 \sim \chi_1^2 \text{ iid} \quad (6.7)$$

Estas dos propiedades, junto con la ortogonalidad de la wavelet, permiten un enfoque en dos fases. En primer lugar, la propiedad (6.7) muestra que la suma de los coeficientes wavelet al cuadrado y estandarizados, para cada canal, sigue una distribución χ^2 con tantos grados de libertad como términos en la suma, por lo que la primera fase del enfoque se describe como

$$\hat{w}_j^m(n) = \begin{cases} w_j^m(n) & , \text{ si } j = j' \text{ y } m = m', \text{ si } \sum_n (w_j^m(n))^2 > \theta_j \\ 0 & , \text{ resto, } j = 1, \dots, J, m \text{ todas las direcciones} \end{cases} \quad (6.8)$$

con $\theta_j = \sigma^2/N\chi_{n_j^m; \alpha}^2$ el umbral a resolución j obtenido a partir de la $(1 - \alpha)$ probabilidad de una distribución $\chi_{n_j^m}^2$ con número de grados de libertad $n_j^m = \text{número de posiciones}$

intracraneales a resolución j y orientación m . El valor α se escoge según el ajuste de Bonferroni, es decir, $\alpha = p/(J \cdot \#\{\text{direcciones wavelet}\})$. La segunda fase se basa en la propiedad (6.6), con

$$\tilde{w}_j^m(n) = \begin{cases} \hat{w}_j^m(n) & , \text{ si } |\hat{w}_j^m(n)| > \tau \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}, \quad (j, m) \in \mathbf{T}_\alpha \quad (6.9)$$

donde $\tau = \alpha/\sqrt{N} \cdot z_{\alpha'}$ es el umbral para la variable normal estandarizada con nivel de significación α' ajustada al número de test realizados, esto es,

$$\alpha' = p / \sum_{(j,m) \in \mathbf{T}_\alpha} n_j^m.$$

con \mathbf{T}_α el conjunto de pares (j, m) tales que no han sido eliminados en la primera fase.

Por último, una vez realizadas ambas fases, se reconstruye la señal mediante la transformada wavelet inversa, dando lugar al mapa de activación final.

GLM y Wavelets

El método de análisis propuesto por Van de Ville, Blu y Unser [46] es la unión del modelo general lineal antes descrito con la transformada wavelet ortonormal espacial. Concretamente, dada una señal s , se obtiene su descomposición wavelet ortonormal, dada por $\{a(n), w_j^m(n)\}_{j=1,2,\dots,J}^m$ todas las direcciones, cuyos coeficientes wavelet se modelan, para cada posición espacial $n = 1, \dots, N$, por $(\Omega = (j, m))$

$$w^\Omega(n) = X\beta^\Omega(n) + \epsilon^\Omega(n)$$

donde $\epsilon^\Omega(n)$ sigue una distribución Gaussiana iid. Por tanto,

$$\hat{\beta}^\Omega(n) = (X'X)^{-1}X'w^\Omega(n),$$

y

$$\epsilon^\Omega(n) = w^\Omega(n) - X\hat{\beta}^\Omega(n)$$

permiten definir los T-test

$$T^\Omega(n) = \frac{c'\hat{\beta}^\Omega(n)}{\sqrt{(\epsilon^\Omega(n)'\epsilon^\Omega(n)c'(X'X)^{-1}c)/K}}$$

con $K = N - \text{rango}(X)$ y c vector de contraste. Aplicando el umbralizado para nivel de significación α se obtienen los mapas de activación de la descomposición, $u^\Omega(n)$, los cuales se utilizan para crear el mapa de activación final, $u(n)$, mediante la transformada wavelet inversa.

6.1.3. Corrección de Bonferroni

Los métodos previamente descritos hacen uso de test estadísticos a la hora de identificar la correcta búsqueda de actividad dentro de la señal medida. Uno de los problemas a la hora de identificar la posible actividad subyacente en una señal es la sobrestimación de la actividad, esto es, el considerar ciertas zonas de reposo como zonas de actividad. A esta sobrestimación se la conoce como *falsos positivos*, y puede ser controlada mediante la elección del nivel de significación de los test estadísticos. Para esto puede utilizarse la denominada corrección de Bonferroni [21], descrita a continuación.

Sean H_1, \dots, H_k una familia de hipótesis y sean p_1, \dots, p_k sus correspondientes p-valoros. Para asegurar un nivel de significación global α , debe imponerse un nivel de significación individual α/k .

6.2. Método propuesto

El método propuesto se basa en el hecho de que la familia de trasladadas de una función de escala y una MRA-wavelet forman una base del espacio $L^2(\mathbb{R})$ (más aún, si dicha base es ortogonal [MRA-wavelet ortonormal] no habrá información redundante). Gracias a los algoritmos espectrales mostrados en la Sección 3.3 (concretamente, a los algoritmos basados en las bases de Haar [Sección 3.3.1] y Walsh-Paley [Sección 3.3.2]), se puede diseñar una función de escala que se aproxime al máximo, en forma (para una distancia propuesta), a la dilatada del modelo de función de respuesta hemodinámica utilizado, definido en (6.10). Dado que dicha función modelo tiene soporte de longitud 28-30 (tomando muestreo cada segundo), se puede calcular la función de escala que mejor se aproxime a escala 2 (si la función de escala tiene soporte 7, a escala 2 equivaldrá a soporte de longitud $7 \cdot 2^2 = 28$). Además, puesto que la aproximación a la función modelo por una sola función de escala puede no ser lo suficientemente buena, se calcula la función de escala que verifique que una combinación lineal de sus trasladadas (por ejemplo, la propia función de escala, φ , y su trasladada k unidades, $\varphi(\cdot - k)$) obtenga una aproximación óptima en el sentido marcado por la distancia propuesta.

Este método se aplica sobre señales sin perturbaciones de baja frecuencia o drift, por lo que es necesario realizar dicho pre-procesado sobre las señales adquiridas. Además, en este método, a la hora de realizar el procesado temporal, no es necesario tener prefijado un paradigma de activación, a diferencia de los métodos basados en "block design" y "event related", lo cual permite estudiar la activación espontánea del cerebro.

6.2.1. Preliminares

Antes de pasar a describir el método, es necesario fijar dos funciones necesarias para el posterior análisis temporal. Por un lado, se describe el modelo de función de respuesta hemodinámica utilizado para simular la medición del efecto BOLD. Por otro lado, puesto

que el método propuesto se basa principalmente en la descomposición MRA-wavelet temporal de la señal de resonancia magnética funcional, es necesario prefijar la MRA-wavelet ortonormal que se utilizará en dicha descomposición, la cual será dependiente del modelo anteriormente citado.

Modelo Función de Respuesta Hemodinámica (FRH)

La función utilizada como modelo aproximado a la función de respuesta hemodinámica es la combinación lineal de dos distribuciones Gamma [12, Section 2.2.3] (ver la Figura 6.2),

$$\text{FRH}(t) = 6t^5 \frac{e^{-t}}{\Gamma(6)} - t^{15} \frac{e^{-t}}{\Gamma(16)}. \quad (6.10)$$

Wavelet Ortonormal Óptima

La idea principal del método es descomponer, mediante la transformada wavelet multirresolución, la señal temporal en cada posición espacial. La señal de activación queda contenida en los coeficientes de refinamiento (concretamente, en los coeficientes a escala 2), mientras que los coeficientes de detalle contienen únicamente ruido. Dicha descomposición se efectúa para un muestreo temporal de 1 segundo. Para optimizar la separación de la señal de activación del ruido, se busca una MRA-wavelet ortonormal óptima, es decir, la cual verifique una mayor similitud a la función modelo de respuesta hemodinámica del modo siguiente:

Partiendo de la función FRH definida en (6.10), se calcula la función de escala ortonormal, φ , cuya combinación lineal $C_{\varphi,0} \cdot \varphi + C_{\varphi,1} \cdot \varphi(\cdot - 1)$ mejor aproxime al modelo a nivel de escala 2 (o, equivalentemente, la combinación lineal que mejor aproxime a la función dilatada $\text{FRH}(4\cdot)$). Para ello, se utiliza la descomposición en traslación discreta en la base ortonormal de Haar descrita en la Sección 3.3.1.

Dado la función FRH, se calculan los coeficientes

$$(\widehat{\text{FRH}(4\cdot)})_i^{(n)} = \langle \text{FRH}, h_i(\cdot - n) \rangle = \int_n^{n+1} \text{FRH}(4t) \cdot \overline{h_i(t - n)} dt, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{Z},$$

donde $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es la base de Haar en el intervalo $[0, 1)$ descrita en el Apéndice A.1.

El objetivo es obtener los coeficientes $\{\hat{\varphi}_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{Z}}$ (equivalentemente, encontrar la función de escala φ) que verifiquen que

$$d(\{\hat{\varphi}_i^{(n)}\}, \{(\widehat{\text{FRH}(4\cdot)})_i^{(n)}\}) = \|\{\hat{\varphi}_i^{(n)}\} - \{(\widehat{\text{FRH}(4\cdot)})_i^{(n)}\}\|_{l^2((\mathbb{N} \cup \{0\}))}^2 = \sum_{i,n} (\hat{\varphi}_i^{(n)} - (\widehat{\text{FRH}(4\cdot)})_i^{(n)})^2$$

sea mínima, es decir, calcular

$$\{\hat{\varphi}_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{Z}} := \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{j,m} (\hat{\varphi}_j^{(m)} - (\widehat{\text{FRH}(4\cdot)})_j^{(m)})^2 : \{\hat{\varphi}_j^{(m)}\}_{j,m} \in l^2((\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \mathbb{Z}, \mathbb{R}) \right\}$$

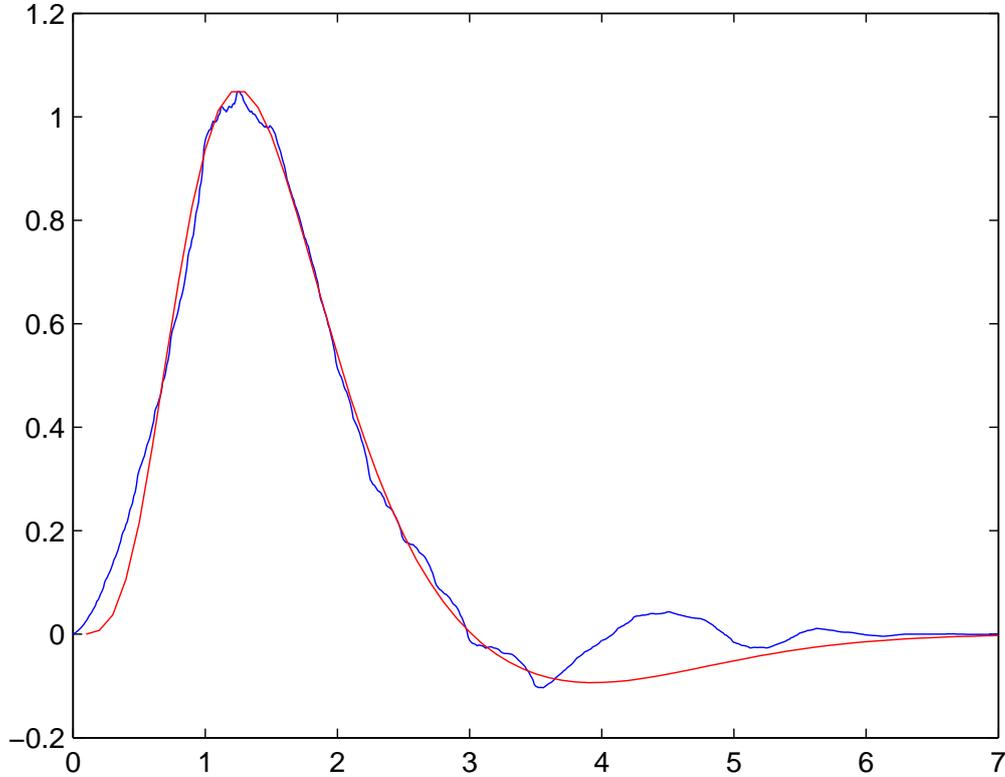


Figura 6.2: Modelo de Función de Respuesta Hemodinámica dilatada, $FRH(4\cdot)$ (rojo), y combinación lineal $C_{\varphi,0} \cdot \varphi + C_{\varphi,1} \cdot \varphi(\cdot - 1)$ de la función de escala óptima, φ , con las correspondientes constantes $C_{\varphi,0}$, $C_{\varphi,1}$ (azul).

bajo las restricciones sobre el filtro $\{h[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ correspondientes a función de escala/wavelet ortonormal, esto es, verificando

$$\sum_n h[n] = \sqrt{2}$$

$$\sum_n h[n] \overline{h[n + 2m]} = \delta[m], \quad m \in \mathbb{Z}$$

Debido a la forma de las funciones de escala (concentradas en los dos primeros tercios de su soporte, lo cual no permite aproximar bien, con sólo dos copias de dichas funciones de escala, el "undershoot" de la función FRH), se aproxima la función $FRH(4\cdot)$ por la combinación de funciones de escala en el soporte $[0, 4]$ (para dar mayor importancia en la aproximación a la zona positiva de la función modelo). Además, puesto que la

activación no tiene por qué producirse en el punto exacto de medición de la señal, se calcula la combinación lineal de funciones de escala que mejor aproxime a la función FRH(4·) trasladada entre las posiciones $[-1/2, 1/2]$ (se utiliza la distancia promedio entre posiciones de dicho intervalo).

Los cálculos de dicho óptimo se realizan mediante un optimizador global en Matlab. La función de escala óptima, φ^{Opt} , es la asociada con el filtro, $\{h^{Opt}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, dado por $h^{Opt}[n] = 0$, si $n < 0$ ó $n > 8$ y

$$\begin{aligned}
 h^{Opt}[1] &= -0,018384439004067, & h^{Opt}[2] &= 0,056667443434522, \\
 h^{Opt}[3] &= 0,017080251898425, & h^{Opt}[4] &= -0,205133732473127, \\
 h^{Opt}[5] &= -0,006730485316293, & h^{Opt}[6] &= 0,622710533362887, \\
 h^{Opt}[7] &= 0,715776967980001, & h^{Opt}[8] &= 0,232228022490747,
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

y las constantes $C_{\varphi^{Opt},0} = 0,894026943410651$ y $C_{\varphi^{Opt},1} = 0,527036477468521$. En la Figura 6.2 se muestra la función $C_{\varphi^{Opt},0} \cdot \varphi^{Opt} + C_{\varphi^{Opt},1} \cdot T\varphi^{Opt}$.

6.2.2. Pre-procesado temporal

Antes de comenzar el análisis de la señal adquirida, dicha señal debe ser pre-tratada para adecuar su periodo de muestreo, así como permitir establecer su señal base subyacente y nivel de ruido en cada posición espacial.

Cálculo de la Señal Base

El valor de la señal base puede ser estimado mediante el promediado de la señal medida en las correspondientes zonas de reposo (como, por ejemplo, los primeros valores temporales adquiridos).

Estimación del ruido

Para poder estimar la desviación típica del ruido, σ_{Ruido} , se utilizan las zonas de reposo predefinidas durante la adquisición (por ejemplo, las primeras muestras de la adquisición de un paradigma clásico block design), en las cuales se estima dicho valor de la forma habitual.

Periodo de muestreo

Las señales adquiridas suelen tener un periodo de muestreo temporal superior a 1 segundo, por lo que, antes de procesar dicha señal, se realiza un pre-procesado temporal cuya señal de salida tenga un periodo de muestreo de 1 segundo. Para ello, dada una

señal de periodo de muestreo $TR \in \mathbb{N}$ segundos, se realiza una interpolación de TR puntos para obtener un nuevo periodo $TR' = 1$ segundo.

6.2.3. Procesado espacial

Antes de realizar el procesado temporal, la señal dada, ya sea imagen (bidimensional) o volumen espacial (tridimensional), se trata espacialmente con el fin de aprovechar la estructura morfológica de las zonas de activación y reducir la intensidad de ruido. Para ello se aplica un filtrado paso bajo espacial direccionado que crea señales correspondientes a las diferentes direcciones espaciales (ver [60]). Debido al método de adquisición de las señales de resonancia magnética volumétrica (por cortes axiales, no todo el volumen de forma simultánea), el procesado espacial se realiza en cada corte axial como imagen bidimensional (las señales temporales en diferentes cortes axiales no coinciden, existe un desfase, y puede ser negativo en el promediado).

Dicho filtrado se realiza mediante los filtros siguientes (normalizados tales que $\int f = 1$):

$$f_{iso}(x, y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} \cdot \frac{2e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}}{\pi}, \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f_{dirK}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} \cdot \frac{4}{3} \left(1 - \frac{2e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}}{\pi}\right) \left(\left(\frac{\langle(x,y), Vd_K\rangle}{\|(x,y)\|}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) & , \text{ si } (x, y) \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) & , \text{ si } (x, y) = 0 \end{cases}$$

con $K \in \{1, 2, 3\}$ y $Vd_1 = (1, 0)$, $Vd_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ y $Vd_3 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$.

El filtro f_{iso} permite crear una imagen “central” de control, cuyo procesado temporal proporciona una función temporal de control que sirve como base a comparar, y los filtros f_{dirK} permiten crear imágenes direccionadas (cuyas funciones temporales serán comparadas con la de control con el fin de aprovechar la morfología de las regiones de activación mediante la combinación de estos filtros).

6.2.4. Procesado temporal

El análisis temporal propuesto se basa en la descomposición wavelet multirresolución a 2 niveles de escala de la señal dada en cada posición espacial.

En primer lugar, la base formada por las trasladadas de una función de escala a nivel 2 está formada por las dilatadas de la correspondiente función de escala trasladada cada 4 unidades. Esto puede producir variaciones en el resultado obtenido en función de la posición temporal de la activación (como muestra la Figura 6.3). Para evitar dicha variabilidad se realiza el procesado en las trasladadas equivalentes a las 4 posiciones diferentes ($\{-1, 0, 1, 2\}$) y se promedia el resultado.

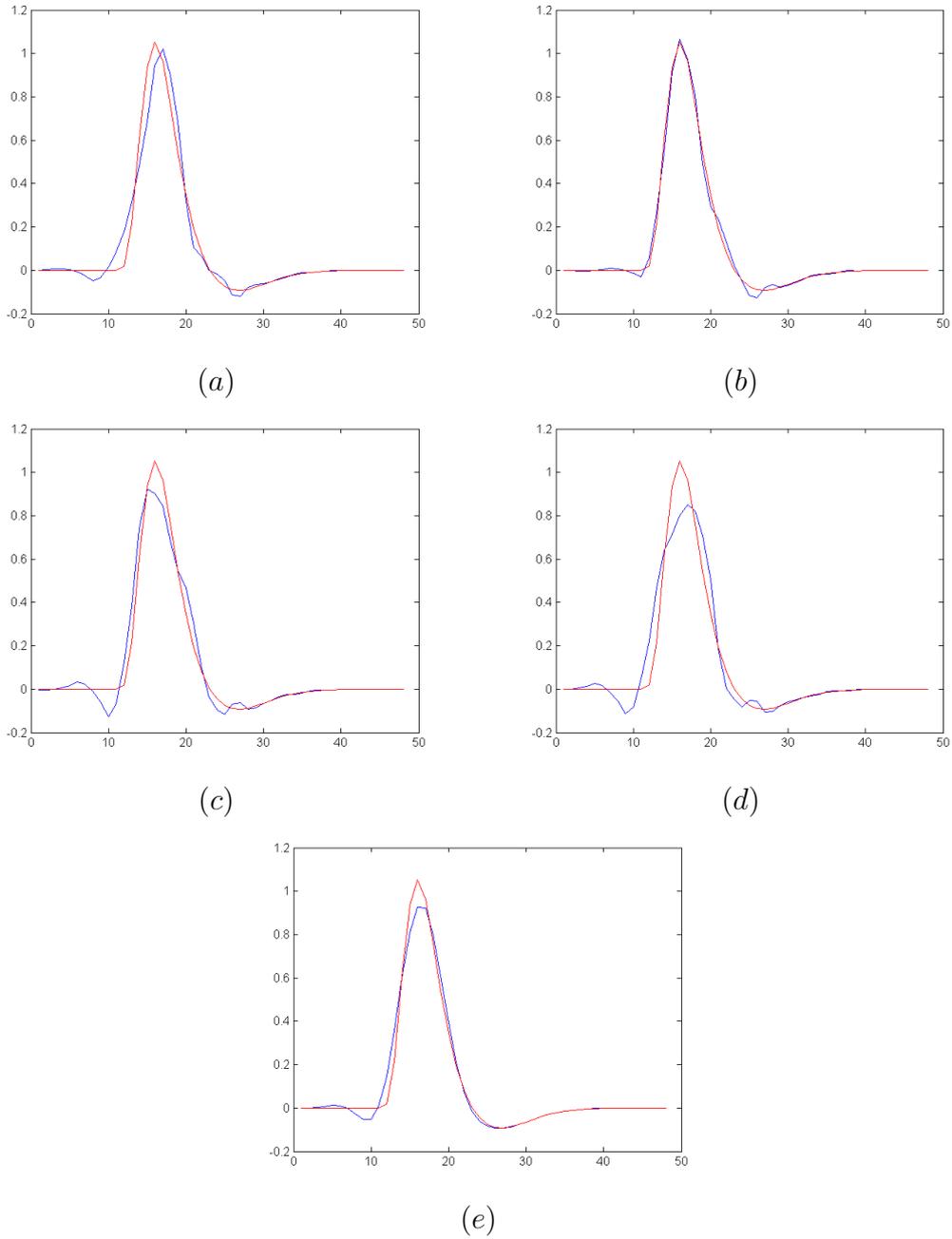


Figura 6.3: Función reconstruida (azul) tras eliminar los detalles wavelet hasta escala 2 de la función modelo FRH trasladada en las 4 posiciones diferentes $\{-1, 0, 1, 2\}$, (a)-(d), y promedio de las 4 anteriores (e), frente a la función modelo FRH original (rojo) con función de activación puntual (delta de Kronecker).

Fijada la posición espacial, para cada una de las señales trasladadas, s , se calcula su transformada wavelet multirresolución a nivel de escala 2 utilizando el filtro $\{h^{Opt}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definido en (6.11):

$$s \xrightarrow{TW} \{a, w_2, w_1\}.$$

Los niveles de detalle no aportan prácticamente nada a la señal limpia (ver la Figura 6.4), por lo que se descartan directamente. El nivel de aproximación es filtrado para eliminar, en la medida de lo posible, el ruido que pueda quedar en dicha resolución:

$$\begin{aligned} w_1 &\rightarrow 0 \\ w_2 &\rightarrow 0 \\ a &\rightarrow Filtro(a) \end{aligned} .$$

En este caso, dado el valor $Umbral = 2\sigma_{Ruido}$ (valor que define el intervalo de confianza del 95 % de los valores en una distribución Gaussiana. El valor σ_{Ruido} hace referencia al valor calculado en la Sección 6.2.2 en la posición espacial prefijada previamente), se define (umbralizado fuerte)

$$Filtro(f)(k) = \begin{cases} f(k) & , \text{ si } |f(k)| > 2 \cdot s_b + Umbral \\ 2 \cdot s_b & , \text{ si } |f(k)| \leq 2 \cdot s_b + Umbral \end{cases}$$

con s_b el valor de señal base calculado en la Sección 6.2.2 en la posición espacial prefijada previamente.

Finalmente, se reconstruye la señal procesada, \hat{s} , mediante la correspondiente transformada wavelet multirresolución inversa,

$$\{Filtro(a), \underline{0}, \underline{0}\} \xrightarrow{iTW} \hat{s}.$$

6.2.5. Mapa de activación

La creación del mapa de activación, correspondiente a una señal procesada dada, \hat{s} , se basa en los 3 pasos siguientes:

1. En primer lugar, dada \hat{s} , se resta la correspondiente señal base, s_b para obtener el mapa de activación, y se umbraliza, con umbral de tamaño $1/S$ de la amplitud máxima de la actividad neuronal, para eliminar pequeños residuos (S tendrá un valor de 3 ó 4). Además, se realiza un segundo umbralizado para eliminar toda señal cuya amplitud sea menor que el 1 % de s_b (la activación neuronal se estima que tiene un "tamaño" del 1 – 5 % de la señal base, aproximadamente), con el fin de eliminar actividad residual.
2. En segundo lugar, se realiza un filtrado, utilizando la correlación entre las posiciones de un vecindario, que permita eliminar posiciones aisladas de falsa activación.

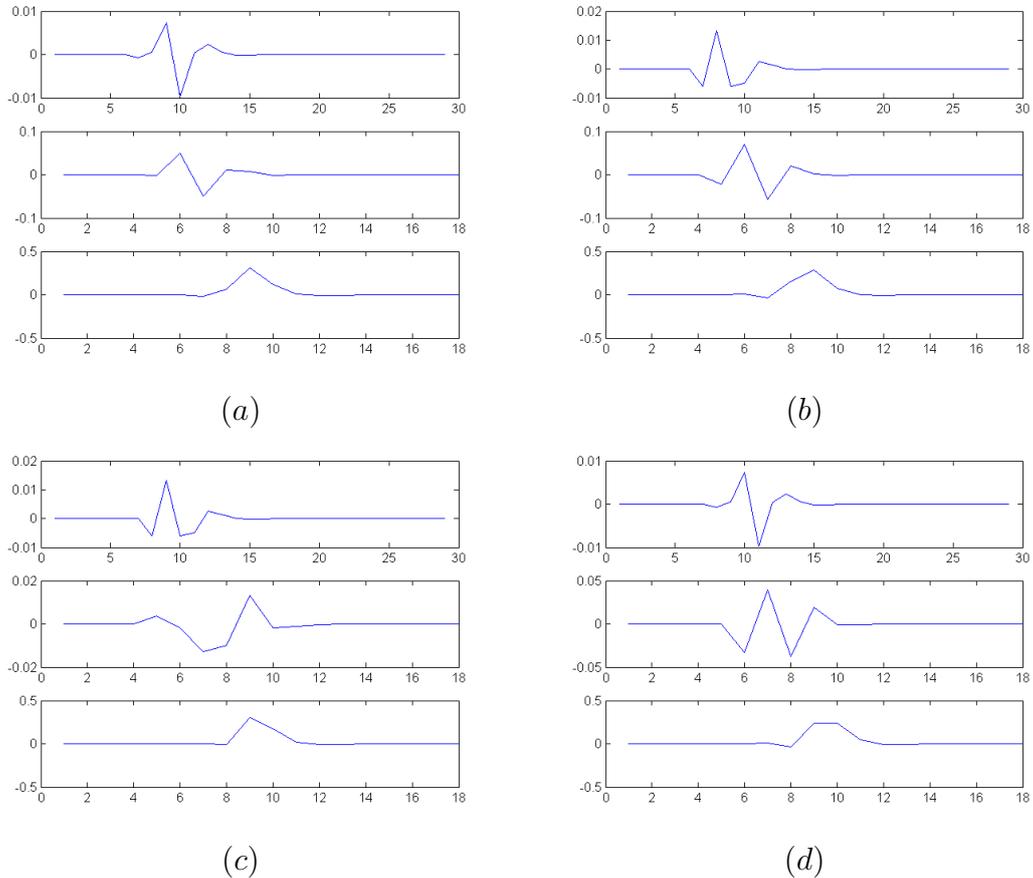


Figura 6.4: Coeficientes Wavelet a niveles 1 y 2 y coeficientes de escala a nivel 2 de la función modelo FRH trasladada en las 4 posiciones diferentes, $\{-1, 0, 1, 2\}$, (a)-(d), con función de activación puntual (delta de Kronecker).

Para dicho filtrado, dada la posición espacial a tratar, se calcula su correlación con las posiciones de su vecindario más próximo y dicha posición se considera sin actividad (o un falso positivo) si el número de vecinos cuya correlación supere o iguale el valor 0,75 es menor que 3 (para considerarlo una activación es necesario que tenga, al menos, 3 vecinos con actividad similar).

3. Por último, y de forma optativa, se iguala la señal temporal de las zonas de activación mediante un promediado de dicha señal temporal en cada zona. Estas zonas de activación se obtienen mediante segmentación, tras dilatar y contraer las zonas de activación previas (lo cual trata de anular los posibles agujeros en las diversas zonas).

6.3. Experimentos

6.3.1. Algoritmos

A continuación se describen los algoritmos correspondientes a los métodos de análisis descritos anteriormente. Ciertos procesados previos, como la posible eliminación del drift o la regularización previa mediante un filtro paso bajo, han sido omitidos por no ser parte estricta de los métodos.

Sustracción Directa:

- (i) Dada una señal s y el paradigma de activación prefijado A , para cada posición espacial, se crean dos vectores s_1 y s_2 tales que corresponden a la señal s en las posiciones de activación (valor 1 en A) y reposo (valor 0 en A), respectivamente.
- (ii) Se crea el vector de diferencia de medias $d := \bar{s}_1 - \bar{s}_2$, y se estima el valor $\hat{\sigma}_d$ mediante la expresión (5.4).
- (iii) Se calcula el valor $T = \frac{d}{\hat{\sigma}_d}$ y se umbraliza en función de su correspondiente p-valor, p , y el nivel de significación $\alpha = 0,05$, obteniendo el correspondiente mapa de activación.

Análisis de Correlación:

- (i) Dada una señal s y la función modelo de control *BOLD* (se denomina de este modo ya que representa a dicho efecto. Esta función depende directamente del paradigma de activación), para cada posición espacial, se calcula la correlación, ρ , entre s y *BOLD* mediante la expresión (6.2)
- (ii) Se calcula el valor $T = \rho \sqrt{\frac{N-2}{1-\rho^2}}$ (siendo N el número de muestras temporales) y se umbraliza en función de su correspondiente p-valor, p , y el nivel de significación $\alpha = 0,05$, obteniendo el correspondiente mapa de activación.

GLM:

- (i) Dada una señal s y la matriz del modelo lineal X , para cada posición espacial, se calcula el vector $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X's$ y la componente residual $\hat{\epsilon} = s - X\hat{\beta}$.
- (ii) Dado el vector de contraste, c , se calcula el valor $T = \sqrt{K} \frac{c'\hat{\beta}}{\sqrt{\sigma_{\hat{\epsilon}}^2 c'(X'X)^{-1}c}}$, con $K = N - \text{rango}(X)$ (número de grados de libertad) y N número de muestras temporales, y se umbraliza en función de su correspondiente p-valor, p , y el nivel de significación $\alpha = 0,05$, obteniendo el correspondiente mapa de activación.

Sustracción directa y Wavelets:

- (i) Dada una señal s y el paradigma de activación prefijado A con N bloques de activación y N de reposo, para cada posición espacial, se crean los vectores s_1^i y s_2^i , $i = 1, \dots, N$ tales que corresponden a la señal s en las posiciones de activación (valor 1 en A) y reposo (valor 0 en A), respectivamente, para cada bloque de los N fijados en el paradigma.
- (ii) Se crean los vectores de diferencia de medias $d_i := \overline{s_1^i} - \overline{s_2^i}$, $i = 1, \dots, N$, y se promedian, $d = \sum_{i=1}^N d_i / N$.
- (iii) Se estiman los valores $\hat{\sigma}_i$ como la desviación estándar de d_i , $i = 1, \dots, N$ mediante la expresión (5.4), y se promedian, $\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i / N$.
- (iv) Para cada corte axial bidimensional, se calcula la descomposición wavelet multi-resolución espacial hasta nivel 4, para la wavelet de Battle-Lemarié (spline ortogonal), $\{a, w_j^m\}_{j=1,2,\dots,4}^m$ todas las direcciones, y se filtran los coeficientes wavelet mediante la expresión (6.8).
- (v) Una vez realizada la primera fase, se filtran los coeficientes resultantes mediante la expresión (6.9) y se reconstruye la señal con dichos coeficientes, dando lugar al correspondiente mapa de activación.

GLM y Wavelets:

- (i) Dada una señal s , para cada corte axial bidimensional, se obtiene su descomposición wavelet multirresolución espacial hasta nivel 2, $\{a, w_j^m\}_{j=1,2}^m$ todas las direcciones, mediante la wavelet B-spline.
- (ii) Dada la matriz del modelo lineal X , para cada par (j, m) y cada posición espacial, se calculan el vector $\hat{\beta}^{(j,m)} = (X'X)^{-1}X'w_j^m$ y la componente residual $\hat{\epsilon}^{(j,m)} = w_j^m - X\hat{\beta}^{(j,m)}$.
- (iii) Dado el vector de contraste, c , se calculan los valores $T^{(j,m)} = \sqrt{K} \frac{c'\hat{\beta}^{(j,m)}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\epsilon}^{(j,m)}}^2 c'(X'X)^{-1}c}}$, con $K = N - \text{rango}(X)$ (número de grados de libertad) y N número de muestras temporales, y se umbralizan en función de sus correspondientes p-valores, p , y el nivel de significación $\alpha = 0,05$, obteniendo los correspondientes mapas de activación previos, $u^{(j,m)}$.
- (iv) Con los valores $u^{(j,m)}$ se reconstruye, mediante la transformada wavelet inversa, el mapa de activación final.

Algoritmo de Villullas:

- (i) Dada una señal s , se estiman la señal de resonancia magnética base s_b y la función de ruido, σ_{Ruido} , y se modifica el periodo de muestreo temporal a $TR = 1$ segundo, tal y como indica la Sección 6.2.2.
- (ii) Se filtra la señal dada mediante los filtros f_{iso} y f_{dirK} (definidos en la Sección 6.2.3) para obtener las señales de control y direccionales y, para cada posición espacial, se procesan las correspondientes señales temporales (como indica la Sección 6.2.4) para obtener sus señales temporales auxiliares.
- (iii) Las señales temporales auxiliares direccionales se comparan con la señal temporal auxiliar de control mediante coeficientes de correlación con el fin de aprovechar la información de activación o no activación en el entorno.
- (iv) Con la información proporcionada por los coeficientes de correlación, se crea un filtro local, f_{loc} , combinación lineal del filtro de control y los filtros direccionales, que permita maximizar la señal de activación y reducir el ruido (el filtro f_{iso} se aumenta en las direcciones en las cuales exista señal similar a la del punto a procesar, es decir, para valores de correlación superiores a un valor mínimo, se crean combinaciones lineales pesadas, y posteriormente escaladas a $\int f_{loc} = 1$, de los filtros de control y direccionales. Con este nuevo filtro se crea una señal definitiva, la cual, realizando el procesado temporal, permite obtener una mejor señal temporal definitiva.
- (v) Dada la señal procesada definitiva, se crea el correspondiente mapa de activación tal y como muestra la Sección 6.2.5 con $S = 4$. Se denomina “método + post-procesado” si se incluye el último paso (optativo) de dicha sección.

6.3.2. Señales fMRI

Los experimentos se llevan a cabo en tres conjuntos de datos de resonancia magnética funcional. Los dos primeros conjuntos contienen actividad simulada a partir de un volumen de datos obtenido de la base de datos Brainweb database [34]. El tercer conjunto de datos está formado por un volumen tetradimensional de resonancia magnética funcional adquiridos en un escáner Philips Achieva 3T perteneciente a la Universidad de Valladolid. A continuación se dan más detalles sobre ambos conjuntos de datos.

fMRI simulada

Con el fin de poder observar la capacidad de análisis del método propuesto, se generan datos de resonancia magnética funcional simulados para los cuales se conoce exactamente en qué zonas y en qué momentos se produce la activación. Dichos datos se generan a

partir de un volumen de datos libre de ruido, extraído de un volumen generado en la base de datos Brainweb database, de resolución $144 \times 112 \times 5$, en secuencia T1, 1 mm de paso de corte axial, 0 % de ruido y $RF = 0\%$. El primer conjunto de datos simulados se genera siguiendo un paradigma clásico por bloques (block design), alternando entre reposo y activación, con 6 bloques (3 de reposo y 3 de activación) de longitud 30 segundos y $TR = 3$ segundos, es decir, mediante el paradigma (R indica el número de muestras de reposo y A indica el número de muestras de activación)

$$10R | 10A | 10R | 10A | 10R | 10A$$

Dicha activación se presenta en 3 regiones diferentes (esfera, cubo y cruz), como muestra la Figura 6.5. El segundo conjunto de datos se genera siguiendo 3 paradigmas diferentes de activación, de longitud 180 segundos y $TR = 1$ segundo, dados por

$$\text{Paradigma 1} \leftrightarrow 30R | 1A | 30R | 20A | 30R | 10A | 24R | 5A | 30R$$

$$\text{Paradigma 2} \leftrightarrow 30R | 15A | 30R | 13A | 57R | 5A | 30R$$

$$\text{Paradigma 3} \leftrightarrow 30R | 30A | 30R | 30A | 30R | 30A$$

Cada uno de ellos utilizados para simular la activación cerebral en cada una de las 3 regiones antes indicadas (la señal temporal de activación, generada por convolución, se trunca en el segundo 200.)

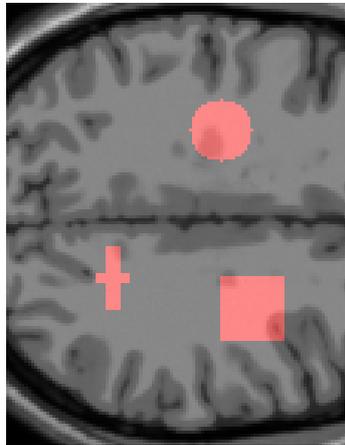


Figura 6.5: Regiones de activación simulada para la sección del corte axial de posición 3 del volumen de datos simulados.

A continuación se describe cómo se genera dicha señal simulada. Dada la función del modelo de respuesta hemodinámica, FRH, definida en (6.10), se genera la función de efecto BOLD mediante la convolución de dicha función modelo con una función de

actividad neuronal basada en una función de activación (paradigma), es decir, dada la función de activación A , que toma sólo los valores 0 y 1, se genera la función de actividad neuronal N tal que

$$N(k) = \begin{cases} K(L) & , \text{ si } A(k) = 1, A(k-1) = 0 \\ K(L) \cdot C_{N,1}(1 - e^{-(n+1)/C_{N,2}}) & , \text{ si } A(k) = 1, A(k-n) = 1, n = 1, \dots, L \\ 0 & , \text{ si } A(k) = 0 \end{cases}$$

con $C_{N,1} = 0,21$, $C_{N,2} = 2,8$ y $K(L) = \frac{MaxAct(0)}{MaxAct(L)}$ donde

$$MaxAct(L)^1 = \begin{cases} 1,0526 & , \text{ si } L = 0 \\ 1,1533 & , \text{ si } L = 1 \\ 1,237 & , \text{ si } L = 2 \\ 1,3015 & , \text{ si } L = 3 \\ 1,3396 & , \text{ si } L = 4 \\ 1,343 & , \text{ si } L > 4 \end{cases}$$

y se simula una función de efecto BOLD preliminar tal que $BOLDPre = N * FRH$ (ver la Figura 6.6). Utilizando esta función preliminar de actividad neuronal para generar la función de efecto BOLD se obtiene una señal instantánea de un tamaño aproximado de $3/4$ del nivel base de activación, un máximo de la señal a los 5-6 segundos de la activación, y volviendo a los 10 segundos al nivel base de activación.

Por otra parte, para generar el ruido Rice que afecte a las imágenes de resonancia magnética, se generan dos ruidos Gaussianos preliminares, RuidoPre1, RuidoPre2 $\sim N(0, 1)$, con el fin de generar el ruido Rice mediante la expresión (5.21).

Para un valor de señal base, s_b , la función de efecto BOLD y el ruido tienen un tamaño del $P\%$ respecto de dicha señal, con P entre 1 y 5. Dicho tamaño se mide de forma diferente para los casos de señal y ruido.

En el caso de ruido, dicho tamaño se mide mediante la potencia, esto es,

$$\frac{P}{100} = \frac{Potencia(RuidoK)}{Potencia(s_b)}, \quad K = 1, 2$$

¹La función $MaxAct(L)$ representa la amplitud máxima de la función de efecto BOLD con longitud de activación de $L + 1$ segundos, y se utiliza para normalizar dicha amplitud de forma independiente de la longitud de activación.

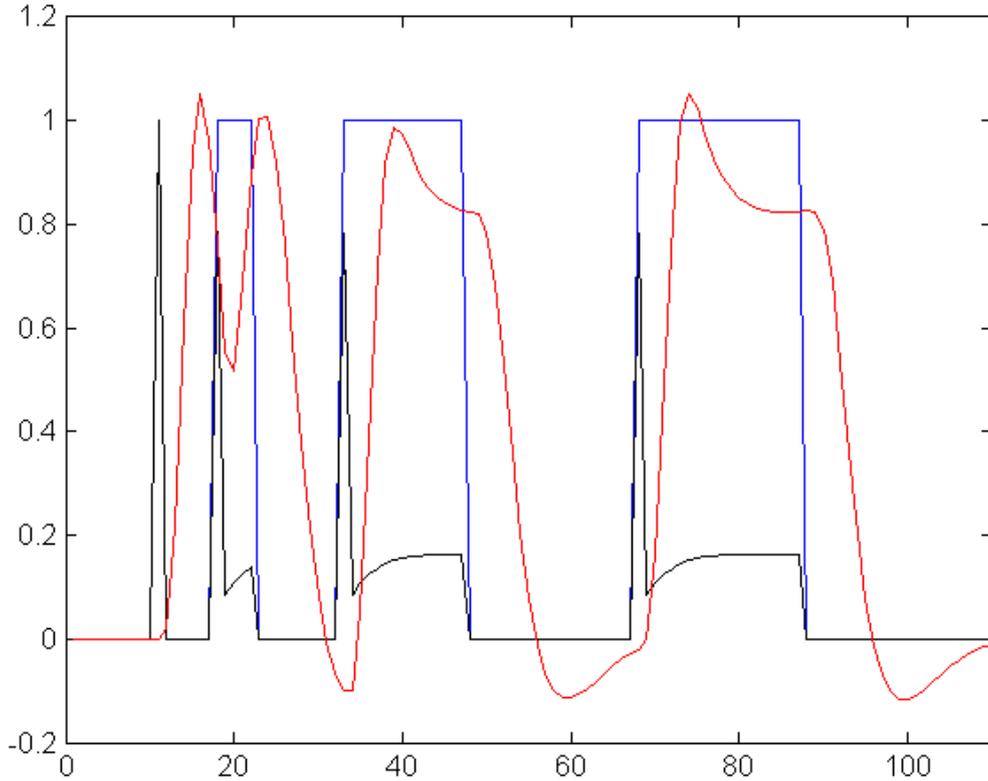


Figura 6.6: Función de activación (azul), función de actividad neuronal (negro) y función de efecto BOLD (rojo) sin escalar.

con $\text{Potencia}(f) := E(f^2) = \mu_f^2 + \text{Var}(f)$, el valor cuadrático medio. Para ajustar este dato, se define

$$\text{RuidoK} = \text{RuidoPreK} \cdot \sqrt{\frac{P \cdot \text{Potencia}(s_b)}{100 \cdot \text{Potencia}(\text{RuidoPreK})}}, \quad K = 1, 2. \quad (6.12)$$

En el caso de la función de efecto BOLD, el tamaño se mide en función de la amplitud máxima (a diferencia del caso del ruido, ya que en este caso, en función de que haya mayor o menor activación a lo largo del tiempo, la potencia de dicha señal puede variar, y esto haría que variase la amplitud final de la señal total, lo cual no tiene sentido [la amplitud de la señal en tiempo t_0 no puede depender de si hay activación a tiempo $t_0 + t$

con $t > 0$). Por tanto, se define

$$\text{BOLD} = \text{BOLDPre} \cdot \frac{P \cdot s_b}{100 \cdot \text{Amplitud}(\text{FRH})} \quad (6.13)$$

lo cual verifica $\text{Amplitud}(\text{BOLD}) = s_b * P/100$ (el tamaño de la función de efecto BOLD no depende de la cantidad de activación).

Por último, una vez definidos BOLD y Ruido K , $K = 1, 2$, se calcula, utilizando (5.21),

$$s = \sqrt{(s_b + \text{Máscara} \cdot \text{BOLD} + \text{Ruido1})^2 + \text{Ruido2}^2} \quad (6.14)$$

donde Máscara es una función espacial que indica las regiones de activación.

Para generar una amplitud de ruido con $P \in \{1, 2, \dots, 5\}$, se utiliza una una función aleatoria, Aleat, con valores entre 0 y 1, y se define $P = \lfloor \text{mod}(10 \cdot \text{Aleat}, 5) + 1 \rfloor$.

fMRI real

El volumen de datos reales utilizado en los experimentos está adquirido, mediante cortes axiales bidimensionales, en un escáner Philips Achieva 3T, en secuencia de FE EPI y resolución $128 \times 128 \times 43$, con contraste de adquisición $T2$, $TR = 3$ segundos, gradient echo train length = 53 y número de adquisiciones = 5. La actividad cerebral ha sido generada mediante “finger-tapping” (sucesivos golpes alternos de los dedos) en un paradigma clásico por bloques igual al descrito en la sección anterior para el primer conjunto de datos simulados, esto es, con un paradigma

$$10R | 10A | 10R | 10A | 10R | 10A$$

Estas señales pueden verse afectadas por una distorsión de baja frecuencia, denominada drift, que perturba y dificulta la identificación de actividad cerebral. Dicha distorsión es eliminada anulando los primeros coeficientes de su correspondiente transformada del coseno discreta (excepto el primero de ellos, el cual corresponde al nivel base de la señal).

6.3.3. Medidas de control

Una vez analizado un volumen de actividad funcional, se comprueba la eficiencia del método utilizado en función del tipo de señal analizada. Para señales simuladas, en las cuales se sabe exactamente qué zonas y en qué momentos se produce la activación, se utilizan los ratios de positivos y negativos reales, mientras que para el caso de señales reales, en las cuales, a priori, no se conocen exactamente las zonas y momentos de activación (se pueden tratar de controlar a la hora de generar dicha señal, pero es muy difícil concretar de forma muy específica), la comprobación se centra en el estudio de cierta región de interés en la que se controla, en cierta medida, la activación (mediante conocimiento previo del cerebro y su funcionamiento).

Ratio positivos/negativos reales (Sensibilidad/Especificidad)

Puesto que en el caso de volúmenes simulados existe un control total sobre las zonas y tiempos de activación, la forma más efectiva de comprobar la capacidad de análisis de los diferentes métodos es calcular los ratios de positivos reales (sensibilidad) y negativos reales (especificidad). Para ello, dados el volumen A a comparar y el volumen B de control, se definen

$$RTP(A, B) = \frac{TP(A, B)}{P(B)} \quad (6.15)$$

y

$$RTN(A, B) = \frac{TN(A, B)}{N(B)} \quad (6.16)$$

donde TP es el número de positivos reales, es decir, el número de posiciones activadas en A y en B , TN es el número de negativos reales, esto es, el número de posiciones no activadas en A ni en B , P es el número de posiciones activadas en B y N es el número de posiciones no activadas en B (nótese que $P(B) = TP(A, B) + FN(A, B)$, donde FN denota a los falsos negativos, es decir, el número de posiciones activadas en B pero no en A , y $N(B) = TN(A, B) + FP(A, B)$, donde FP denota a los falsos positivos, esto es, el número de posiciones activadas en A pero no en B).

En el caso de los métodos basados en un paradigma de activación prefijado, no hay problema en la componente temporal, ya que lo que esos métodos buscan son copias proporcionadas de dicho paradigma dentro de la señal medida, por lo que basta con realizar el conteo directo de las diferentes posiciones espaciales. Sin embargo, para los métodos no basados en un paradigma prefijado (como el método propuesto), antes de poder realizar el conteo es necesario identificar cuándo se considera una posición activada de forma correcta, comparando su función temporal con el paradigma utilizado para generar la señal de resonancia magnética funcional en esa posición. Para ello, dicha comparación se realiza, mediante coeficientes de correlación, utilizando la expresión (6.2). En este caso pueden darse tres opciones: si la posición es de activación y la comparación es positiva, se considera activación correcta; si la posición es de activación y la comparación es negativa, se considera activación errónea; si la posición es de no activación, se considera no activación. En esta situación, el ratio de positivos reales se mide en función de las zonas de activación correcta, mientras que las posiciones de activación errónea se consideran negativos para dicho paradigma de activación (serán positivos para su respectivo paradigma).

Región de interés

En el caso de volúmenes reales, el conocimiento acerca de las zonas y tiempos de activación no es exacto pero si aproximado. Por ello, se pueden generar experimentos que permitan estudiar la eficiencia de un método de análisis en datos reales. Dicho

estudio se hace, prefijada una región de interés, la cual se presupone se activa durante el experimento, observando la cantidad de posiciones espaciales activadas en ella. La observación se realiza de forma visual, puesto que se conoce de forma aproximada la zona de activación, pero no exactamente, lo cual impide realizar un cálculo numérico eficiente.

6.3.4. Experimentos numéricos

En las representaciones gráficas de las Figuras 6.7, 6.8 y 6.9, los diferentes colores a la hora de presentar las diversas regiones de activación se corresponden con las diferentes intensidades de la señal buscada escalada por el correspondiente p-valor del estadístico que define el mapa de activación, en los métodos GLM, GLM con wavelets y Sustracción Directa con wavelets. En los métodos clásicos de Sustracción Directa y Análisis de Correlación, el mapa de activación obtenido es una función binaria, por lo que se representa con un único color, mientras que en el método propuesto, el color identifica la intensidad de la señal reconstruida (siendo en el caso con post-procesado, tantos colores como regiones de activación).

Experimento 1: Análisis de actividad simulada

En el primer experimento se utiliza el primer conjunto de señales simuladas descritas en la Sección 6.3.2, con el fin de obtener un análisis cuantitativo controlado de la calidad de los métodos descritos en las Secciones 6.1.1, 6.1.2 y 6.2. Dicho análisis cuantitativo se realiza mediante los ratios de positivos/negativos reales descritos en la Sección 6.3.3. Con el fin de evitar una posible variabilidad de los resultados debida a la simulación de datos (ruido), se generan 5 volúmenes de actividad con diferentes ruidos, y los resultados obtenidos se promedian para obtener un resultado final libre de variabilidad. La Tabla 6.1 muestra los valores promediados obtenidos tras calcular ambos ratios para los resultantes mapas de activación obtenidos tras aplicar los diferentes métodos de análisis descritos en la Sección 6.3.1 (todos los métodos, excepto el propuesto, método de Villullas, reciben un pre-procesado en el cual la imagen es filtrada con un filtro paso bajo Gaussiano de soporte 3×3 , con el fin de reducir la cantidad de ruido). En ella puede observarse como todos los métodos, excepto el de sustracción directa, obtienen un buen resultado con respecto a la tasa de negativos (no producen muchos falsos positivos). Con respecto a la tasa de positivos, los resultados obtenidos son menos igualados. Mientras que los métodos de sustracción directa wavelet y GLM wavelet obtienen un bajo resultado (producen bastantes falsos negativos), los métodos GLM, de Villullas y de análisis de correlación obtienen resultados medios/altos y similares, siendo cada uno mejor que los anteriores. Finalmente, el método de Villullas con post-procesado obtiene una muy buena tasa de positivos, siendo el método de sustracción directa el mejor de todos en ese aspecto. La Figura 6.7 muestra una sección bidimensional de un ejemplo de los resultados obtenidos

Método de análisis \ Medida de control	RTP	RTN
Sustracción Directa	0.9992	0.5635
Análisis de Correlación	0.8071	1
GLM	0.7425	0.9997
Sustracción Directa Wavelet	0.2633	0.9887
GLM Wavelet	0.3265	0.9988
Villullas	0.7623	1
Vilullas + Post-procesado	0.9465	1

Tabla 6.1: Medidas de control (promedios) para los diferentes métodos de análisis sobre el primer conjunto de señales simuladas descritos en la Sección 6.3.2.

con diferentes métodos de análisis. Dichas imágenes deben compararse con la Figura 6.5 que contiene las regiones de activación simulada a identificar. Puede observarse como, en mayor o menor medida, todas ellas definen de forma más o menos eficiente la estructura de las diferentes regiones de activación, siendo los métodos de sustracción directa wavelet y GLM wavelet los peores en este caso (la región “cruz” es la más problemática). Los métodos GLM, tanto simple como wavelet, generan una pequeña cantidad de ruido, mientras que los métodos de sustracción directa, tanto simple como wavelet, generan ruidos excesivo y medio, respectivamente. El resto de métodos no producen una cantidad significativa de ruido, por lo que obtienen una diferenciación de zonas de activación más limpia.

Experimento 2: Análisis de actividad real

En el segundo experimento, el volumen de datos reales descrito en la Sección 6.3.2 se utiliza para comparar los diferentes métodos de análisis. En este caso, puesto que no se tiene un control total sobre las zonas y tiempos de activación, la comparación se realiza fijando la atención en la región motora de interés correspondiente a la acción de “finger-tapping”, como describe la Sección 6.3.3 (todos los métodos, excepto el propuesto, método de Villullas, reciben un pre-procesado en el cual la imagen es filtrada con un filtro paso bajo Gaussiano de soporte 3×3 , con el fin de reducir la cantidad de ruido). Como puede observarse en la Figura 6.8, la cual muestra la sección axial correspondiente al corte de posición 39 en la tercera dimensión, los métodos de análisis de correlación, GLM y Villullas identifican la actividad cerebral en la zona correspondiente. Dichos métodos poseen diferentes cantidades de ruido residual (dicha actividad es denominada ruido residual, pero también puede ser actividad ajena al experimento, es decir, fuera del control del experimento. Recuérdese que a la hora de obtener los datos reales, el paciente recibe las órdenes de cuándo debe efectuar la acción y cuándo detenerse, escucha ruidos, etc., sin olvidar la posible actividad de fondo del cerebro). Los

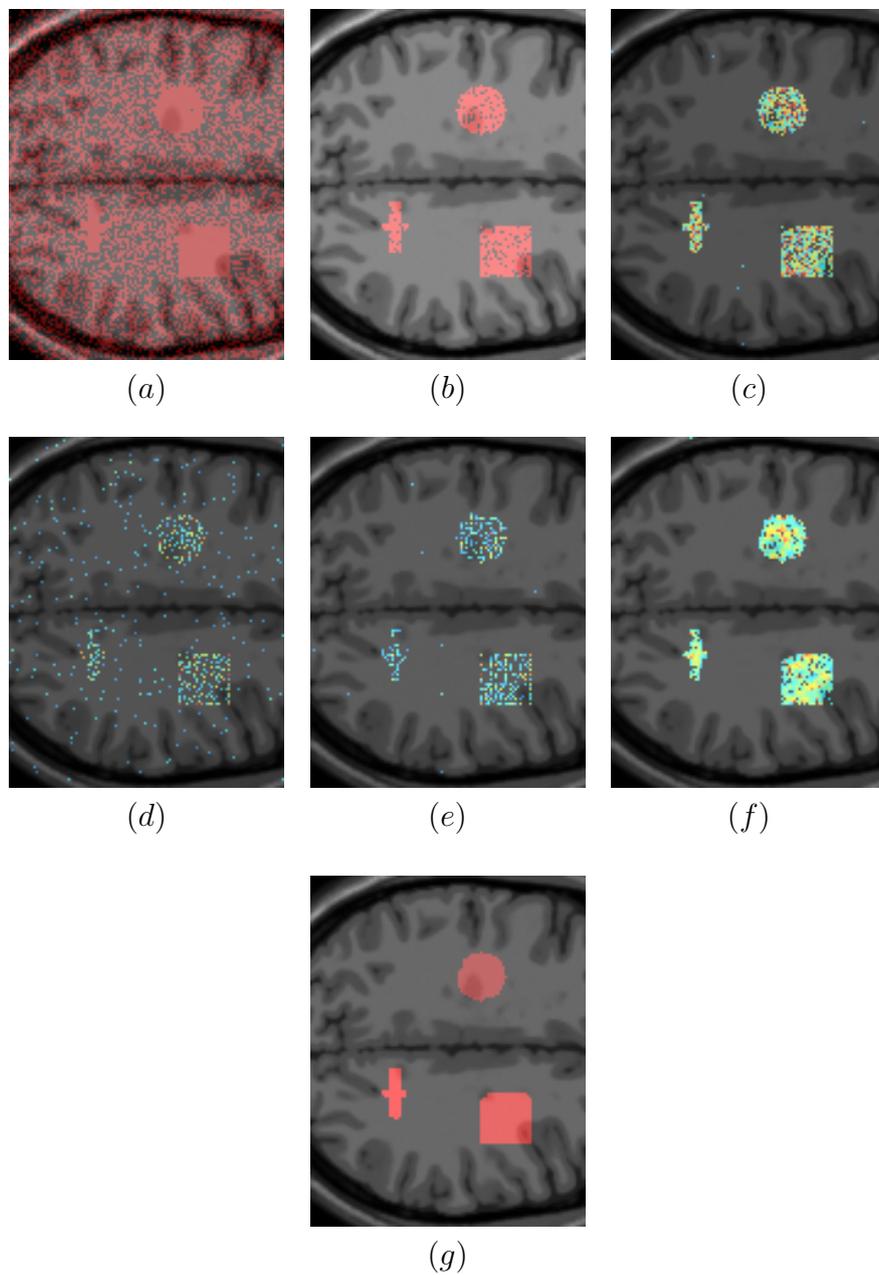


Figura 6.7: Ejemplos del Experimento 1 para la sección axial de posición 3 del volumen de datos simulados, en tiempo $t = 15$, analizado por los métodos: (a) Sustracción Directa; (b) Análisis de Correlación; (c) GLM; (d) Sustracción Directa Wavelet; (e) GLM Wavelet; (f) Villullas; (g) Villullas + post-procesado.

Método de análisis \ Medida de control para Paradigma 1	RTP	RTN
Villullas	0.8821	1
Villullas + Post-procesado	0.9814	1

Tabla 6.2: Medidas de control (promedios) para los métodos de análisis de Villullas (simple y con post-procesado) sobre el segundo conjunto de señales simuladas descritos en la Sección 6.3.2 en la región correspondiente al Paradigma 1.

métodos de análisis de correlación y GLM poseen un ruido residual disperso, mientras que el método de Villullas posee un ruido más compacto, el cual puede confundirse con la actividad a identificar (el método puede identificar otras actividad a mayores). Sin embargo, para conseguir centrarse en el tipo de actividad deseada, se puede efectuar un post-procesado de comparación con el paradigma, el cual consigue identificar la zona de actividad deseada sin ruido residual. Los métodos de sustracción directa, tanto simple como wavelet, y el método GLM wavelet no consiguen identificar la señal de activación subyacente. Ambos métodos wavelet sólo obtienen un aparente ruido disperso, mientras que el método de sustracción directa identifica una cantidad excesiva de ruido.

Experimento 3: Análisis de varios tipos de actividad simulada.

En el último experimento se comprueba la potencia y cualidades del método propuesto en la Sección 6.2. Para ello, se utiliza el segundo volumen de datos simulados generado en la Sección 6.3.2, el cual contiene diferentes tipos de paradigmas de activación en diferentes regiones. Las Tablas 6.2-6.4 muestran los valores de los ratios de positivos/negativos reales promedios para 5 volúmenes de actividad simulada. En ellas, se puede observar que los métodos de Villullas son muy eficientes con respecto a la tasa de negativos reales, no producen falsos positivos. La eficiencia con respecto al ratio de positivos reales también es buena, siendo superior en el método con post-procesado, el cual reduce el número de falsos negativos (“agujeros” en las zonas de activación). La Figura 6.9 muestra una sección bidimensional de un ejemplo de los resultados obtenidos con ambos métodos de análisis. Dichas imágenes deben compararse con la Figura 6.5 que contiene las regiones de activación simulada a identificar. Puede observarse como no existe presencia de ruido residual a la vez que se pueden identificar, de forma eficiente, las diferentes regiones de activación. A su vez, la Figura 6.10 muestra las señales temporales para varias posiciones y paradigmas de actividad. En ellas se observa que ambos métodos son capaces de recuperar, de la señal ruidosa, la señal generada por el paradigma correspondiente, obteniendo un resultado muy similar.

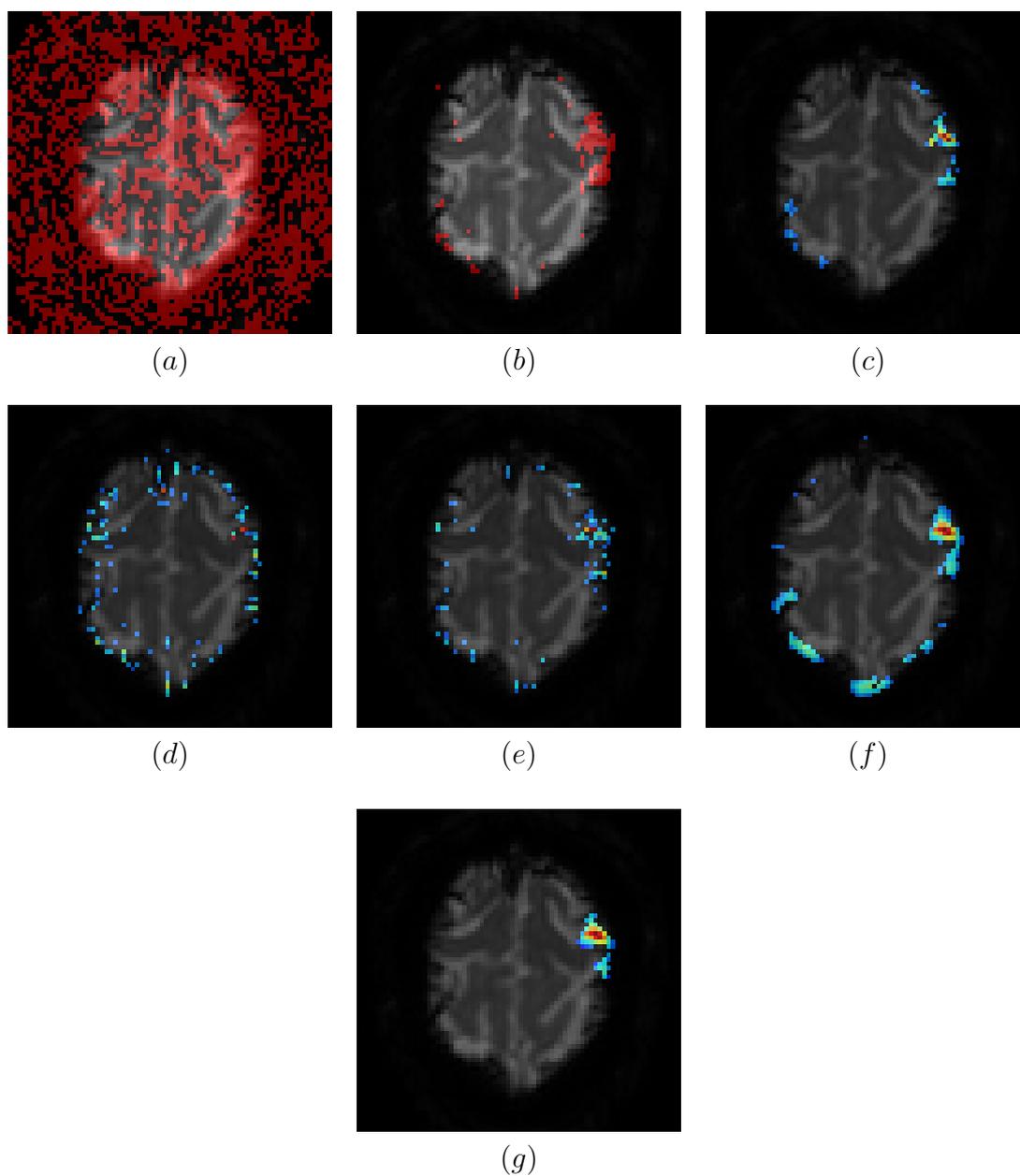


Figura 6.8: Ejemplos del Experimento 2 para la sección axial de posición 39 del volumen de datos reales, en tiempo $t = 15$, analizado por los métodos: (a) Sustracción Directa; (b) Análisis de Correlación; (c) GLM; (d) Sustracción Directa Wavelet; (e) GLM Wavelet; (f) Villullas; (g) Villullas + comparación con paradigma.

Método de análisis \ Medida de control para Paradigma 2	RTP	RTN
Villullas	0.7847	1
Villullas + Post-procesado	0.9541	1

Tabla 6.3: Medidas de control (promedios) para los métodos de análisis de Villullas (simple y con post-procesado) sobre el segundo conjunto de señales simuladas descritos en la Sección 6.3.2 en la región correspondiente al Paradigma 2.

Método de análisis \ Medida de control para Paradigma 3	RTP	RTN
Villullas	0.8375	1
Villullas + Post-procesado	0.9681	1

Tabla 6.4: Medidas de control (promedios) para los métodos de análisis de Villullas (simple y con post-procesado) sobre el segundo conjunto de señales simuladas descritos en la Sección 6.3.2 en la región correspondiente al Paradigma 3.

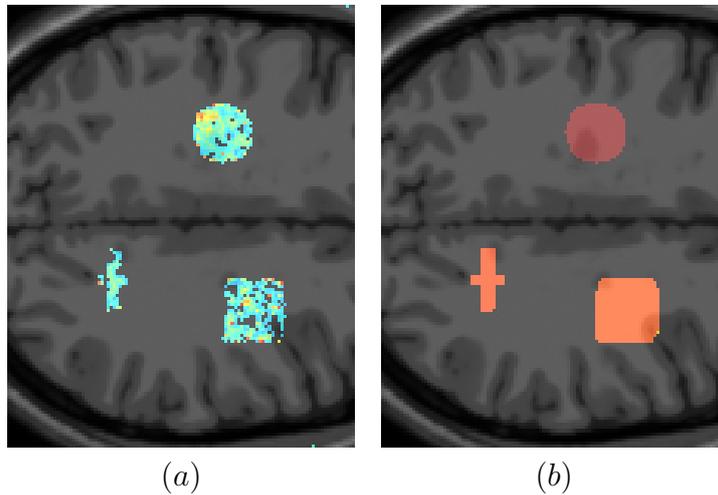


Figura 6.9: Ejemplos del Experimento 3 para la sección axial de posición 3 del volumen de datos simulados, en tiempo $t = 35$, analizado por los métodos: (a) Villullas; (b) Villullas + post-procesado.

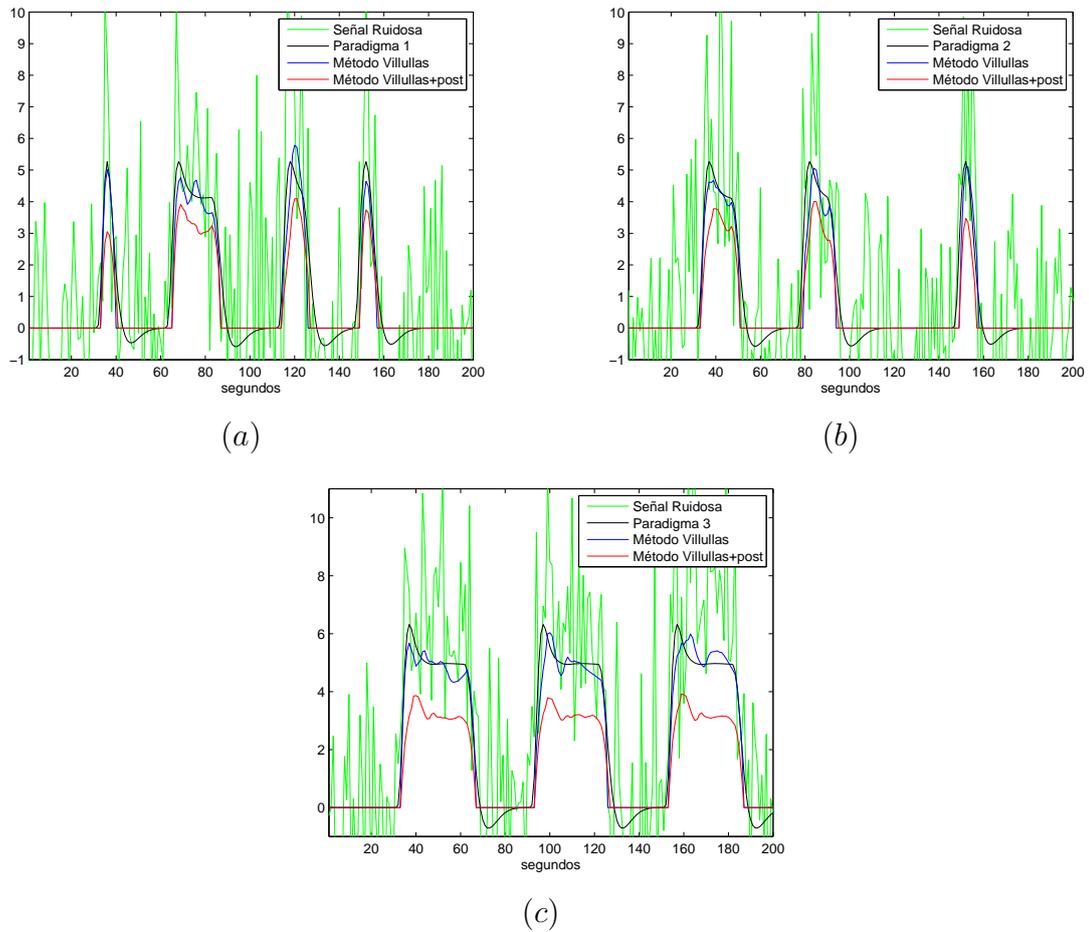


Figura 6.10: Ejemplos temporales del Experimento 3 para las posiciones (a) \rightarrow (37,67,3), (b) \rightarrow (92,35,3) y (c) \rightarrow (97,78,3) (cada una correspondiente a una de las 3 regiones diferentes de activación) del volumen de datos simulados analizado por los métodos de Villullas (simple (azul) y con post-procesado (rojo)) frente a la señal generada por su correspondiente paradigma de activación (negro) y la señal ruidosa analizada [restada la señal base] (verde).

Parte III

Conclusiones y líneas futuras de investigación

Capítulo 7

Conclusiones

El primer objetivo de este trabajo ha sido el estudio de las familias de wavelets ortonormales y wavelet frames ajustados. Ambos estudios han sido desarrollados en los contenidos de la Parte I.

En primer lugar, prefijadas las bases ortonormales $\{K_{\pm,j}^{(m)} : j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}\}$ y $\{L_i^{(n)} : i \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ construidas según (2.3) y (2.7), y a través de las representaciones espectrales de los operadores de dilatación y traslación, descritas en las Proposiciones 14 y 16, dados $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $p, q \in \mathbb{Z}$, se obtienen las relaciones

$$(\widehat{D^p T^q f})_l^{(k)} = \sum_{s,j,m} \overline{\alpha_{l,k}^{s,j,m}} \sum_{i,n} \alpha_{i,n+q}^{s,j,m-p} \hat{f}_i^{(n)}, \quad l \in \mathbb{I}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\widehat{T^q D^p f})_l^{(k)} = \sum_{s,j,m} \overline{\alpha_{l,k-q}^{s,j,m}} \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{s,j,m-p} \hat{f}_i^{(n)}, \quad l \in \mathbb{I}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\widetilde{D^p T^q f})_{r,l}^{(k)} = \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{r,l,k-p} \sum_{s,j,m} \overline{\alpha_{i,n-q}^{s,j,m}} \tilde{f}_{s,j}^{(m)}, \quad r = \pm, l \in \mathbb{J}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\widetilde{T^q D^p f})_{r,l}^{(k)} = \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{r,l,k} \sum_{s,j,m} \overline{\alpha_{i,n-q}^{s,j,m+p}} \tilde{f}_{s,j}^{(m)}, \quad r = \pm, l \in \mathbb{J}, k \in \mathbb{Z},$$

las cuales involucran a los coeficientes $\alpha_{i,n}^{l,j,m}$ de cambio entre las bases $\{L_i^{(n)}\}$ y $\{K_{\pm,j}^{(m)}\}$, definidos en (2.11). Mediante estas representaciones espectrales, y haciendo uso de las relaciones existentes entre la teoría de funciones rígidas y de rango y la teoría de subespacios ambulantes e invariantes (Sección 2.2), se caracteriza la familia de wavelets ortonormales en función de dos condiciones de ortonormalidad y completitud, tal y como muestra el Teorema 30. De igual forma, las familias de funciones de escala y wavelets multirresolución quedan caracterizadas por un par y tetraupla de funciones rígidas, respectivamente, verificando las condiciones mostradas en los Teoremas 33 y 35. Finalmente, combinando las relaciones antes descritas junto con las relaciones de escala y

wavelet, (1.6) y (1.10), se obtienen condiciones sobre los filtros, $\{h[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, asociados a las funciones de escala ortonormales correspondientes (Corolario 37) y las relaciones siguientes sobre los coeficientes de dichas funciones de escala y wavelet multirresolución en las bases ortonormales prefijadas (Teorema 38),

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_p^{(q)} &= \sum_{l,j,m} \overline{\alpha_{p,q}^{l,j,m}} \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{l,j,m-1} \sum_k h[k] \hat{\varphi}_i^{(n-k)} \\ &= \sum_k \sum_{l,j,m} \overline{\alpha_{p,q-k}^{l,j,m}} \sum_{i,n} \left(h[2k] \alpha_{i,n}^{l,j,m-1} + h[2k+1] \alpha_{i,n+1}^{l,j,m-1} \right) \hat{\varphi}_i^{(n)}; \\ \hat{\psi}_p^{(q)} &= \sum_{l,j,m} \overline{\alpha_{p,q}^{l,j,m}} \sum_{i,n} \alpha_{i,n}^{l,j,m-1} \sum_k (-1)^{1-k} h[1-k] \hat{\varphi}_i^{(n-k)} \\ &= \sum_k \sum_{l,j,m} \overline{\alpha_{p,q-k}^{l,j,m}} \sum_{i,n} \left(h[1-2k] \alpha_{i,n}^{l,j,m-1} + h[-2k] \alpha_{i,n+1}^{l,j,m-1} \right) \hat{\varphi}_i^{(n)},\end{aligned}$$

con $p \in \mathbb{I}$, $q \in \mathbb{Z}$.

A partir de este último teorema, y junto con las condiciones sobre los filtros espejo-conjugados asociados que implican que dicho filtro está asociado a una wavelet multirresolución ortonormal, se deduce el Corolario 39, el cual, fijadas las bases ortonormales iniciales, permite obtener algoritmos para el cálculo y análisis de wavelets multirresolución de soporte compacto. La Sección 3.3 contiene tres ejemplos de dichos algoritmos para el caso de funciones de escala y wavelets multirresolución. En el caso de las bases de Haar y Walsh-Paley (relacionadas entre sí, puesto que una de ellas es la transformada de Hadamard de la otra, y viceversa), se obtienen algoritmos matriciales recursivos (Corolario 40 para la base de Haar y Corolario 43 para la base de Walsh-Paley), junto con sus respectivas condiciones iniciales, para el cálculo de los coeficientes $\{\hat{\varphi}_i^{(n)}, \hat{\psi}_i^{(n)}\}$ mediante el uso de las matrices H_0 y H_1 , definidas, en función del filtro $\{h[n]\}_{N_1 \leq n \leq N_2}$ asociado, por

$$[H_0]_{lk} := h[2l - k], \quad [H_1]_{lk} := h[2l - k + 1], \quad N_1 \leq l, k \leq N_2.$$

Las condiciones para la convergencia de las respectivas series funcionales $\sum_{i,n} \hat{\varphi}_i^{(n)} L_i^{(n)}$ y $\sum_{i,n} \hat{\psi}_i^{(n)} L_i^{(n)}$ se dan en los siguientes términos (Proposiciones 41 y 47):

- Las matrices H_0 y H_1 son diagonalizables y

$$\rho := \max \{ |\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } H_0 \text{ ó } H_1 \} < 1$$

- Se tiene que

$$\rho := \max \left\{ \sum_{k=N_1}^{N_2-1} |h[2l - k]|, \sum_{k=N_1}^{N_2-1} |h[2l - k + 1]| : N_1 \leq l < N_2 \right\} < 1.$$

Estos algoritmos permiten un fácil cálculo de wavelets ortonormales, tal y como muestra el Ejemplo 49, donde se obtienen algunas wavelets ortonormales de soporte de longitud menor o igual a 4, y cuyas representaciones gráficas se realizan mediante el uso de la expresión analítica de las mismas. Asimismo, el algoritmo correspondiente a la base de Haar aquí hallado supone una mejora frente al equivalente algoritmo propuesto por Daubechies y Lagarias [44], los cuales llegan a un producto de las matrices H_0 y H_1 para el estudio de la regularidad local, puesto que las condiciones iniciales del mismo aparecen de forma natural, lo cual no ocurre en el caso del algoritmo proveniente de la iteración del punto fijo. En el caso de la base trigonométrica, se obtiene un algoritmo recursivo (Corolario 52), cuyas condiciones iniciales para cada índice impar p (Proposición 54) arrancan una cadena para el cálculo de los coeficientes con índice $2^a p$, $a \in \mathbb{N}$, involucrando las mismas matrices H_0 y H_1 antes descritas. La convergencia de las condiciones iniciales, calculadas como productos infinitos, viene dada en la Proposición 55, mientras que las condiciones para la convergencia uniforme de la serie funcional coinciden con las condiciones obtenidas para los dos algoritmos anteriores (Proposición 56). La elección de esta base conlleva la obtención de un algoritmo el cual permite realizar un estudio frecuencial discreto de las diferentes funciones de escala y wavelets multirresolución.

Por otra parte, centrando la atención en la descomposición correspondiente al modelo espectral del operador de dilatación, se realiza el estudio de la familia de wavelet frames ajustados de la forma (4.6),

$$X = \{\psi_{k,j} := D^k T^j \psi : \psi \in \Psi, k, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Previamente, el Lema 60 permite relacionar las propiedades de acotación y buena definición del operador de síntesis

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad Sf = T_X T_X^* f = \sum_{x \in X} \langle f, x \rangle_{\mathcal{H}} x$$

con las del operador frame, lo cual, junto a la Proposición 59 que relaciona dichas propiedades con la descomponibilidad de los operadores, llevan al Teorema 61 que caracteriza los sistemas de Bessel, frames y frames ajustados de un sistema wavelet de la forma (4.6). En consecuencia, se deduce (Corolario 65) que un sistema wavelet de dicha forma es un frame ajustado con cota frame B si, y sólo si,

$$\sum_{\substack{i,n \\ i',n'}} \left(\sum_{k,j \in \mathbb{Z}} \alpha_{i,n+j}^{s,l,k} \alpha_{i',n'+j}^{s',l',k+\sigma} \right) \left(\sum_{\psi \in \Psi} \overline{\hat{\psi}_i^{(n)}} \hat{\psi}_{i'}^{(n')} \right) = B \delta_{s,s'} \delta_{l,l'} \delta_{\sigma},$$

con $s, s' = \pm$, $l, l' \in \mathbb{J}$, $\sigma \in \mathbb{Z}$ y δ función delta de Dirac (el superíndice u indica convergencia incondicional de la serie). A diferencia de la caracterización propuesta por Ron y Shen [127], en este caso no es necesario acudir a un sistema auxiliar, el sistema quasi-afín asociado, para conseguir la caracterización. Debido al uso del operador

de dilatación en sustitución del operador de traslación, utilizado por Ron y Shen, se verifica directamente la condición de conmutatividad entre el operador de dilatación y el operador de síntesis, lo que evita la necesidad de realizar dicho paso intermedio. La caracterización de los sistemas wavelet frames ajustados mediante un sistema de ecuaciones lineales permite dar el paso hacia el estudio de los wavelet frames ajustados de soporte mínimo (Sección 4.1.2). Bajo el supuesto de $\text{sup}(\psi) \subset [0, 1)$, $\psi \in \Psi$, la Proposición 66 caracteriza este conjunto de funciones a través de sistemas de ecuaciones que involucran a los coeficientes de dichas funciones en la descomposición espectral del operador de traslación (a pesar de trabajar con el operador de dilatación, los sistemas de ecuaciones obtenidos involucran a los coeficientes en la representación de traslación). Puesto que dichas ecuaciones no son manejables, se relaciona esta última proposición con la teoría de funciones de Hardy, dando como resultado la caracterización obtenida en la Proposición 69, en base a una familia de funciones de Hardy $\{\mathfrak{h}_l(\omega)\}_{l \geq 0}$ definidas a través de los coeficientes de los wavelet frames ajustados en la representación de traslación. Este resultado es la base a partir de la cual realizar el cálculo de los diferentes sistemas wavelet frames ajustados en función del cardinal finito de Ψ . En el caso más simple, el Corolario 70 muestra que la única opción para un sistema wavelet frame ajustado con $|\Psi| = 1$ es la wavelet ortonormal de Haar (o un conjunto de copias escaladas de ella). Sin embargo, el caso $|\Psi| = 2$ permite obtener casos no triviales. Para el caso no trivial, a partir de cierta función operador-valuada (M^+ -interna) rígida de Taylor (2×2)-matricial, (4.25),

$$A^+(\omega) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1^{(0)}(\omega) & \mathfrak{a}_1^{(1)}(\omega) \\ \mathfrak{a}_2^{(0)}(\omega) & \mathfrak{a}_2^{(1)}(\omega) \end{pmatrix},$$

con

$$\mathfrak{a}^{(0)}(\omega) := \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1^{(0)}(\omega) \\ \mathfrak{a}_2^{(0)}(\omega) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}^{(1)}(\omega) := \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1^{(1)}(\omega) \\ \mathfrak{a}_2^{(1)}(\omega) \end{pmatrix},$$

se pueden definir las funciones de Hardy

$$\mathfrak{h}_0(\omega) = B_0 \mathfrak{a}^{(0)}(\omega); \quad \mathfrak{h}_l(\omega) = C_l \mathfrak{a}^{(1)}(\omega), \quad l \geq 1,$$

donde las constantes $B_0, C_l \in \mathbb{C}$ deben satisfacer

$$|B_0|^2 = B \neq 0, \quad |C_1|^2 = B - \|\Psi_1\|_{\mathbb{C}^2}^2 \neq 0,$$

$$C_l \overline{C_1} = \langle \mathfrak{h}_l, \mathfrak{h}_1 \rangle_{H_{\mathbb{C}^2}^+} = -\langle \Psi_l, \Psi_1 \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad l \geq 2.$$

El Lema 72 da relaciones esenciales entre las constantes C_l , mientras que la Proposición 73 combina el uso de estas funciones de Hardy con la Proposición 69 para obtener la caracterización de los wavelet frames ajustados de soporte mínimo. Gracias a este último resultado, y trabajando con las funciones $\mathfrak{a}^{(0)}(\omega)$ y $\mathfrak{a}^{(1)}(\omega)$, se obtiene la Proposición 74, que es la llave para el estudio final de los wavelet frames ajustados de soporte mínimo

con $|\Psi| = 2$. Finalmente, las Proposiciones 75 y 76 y el Corolario 77 muestran cuales son las familias de sistemas wavelet frames ajustados de soporte mínimo con $|\Psi| = 2$, siendo estas las únicas posibles (Proposición 78). Por último, se observan las relaciones existentes entre los diferentes tipos de wavelet frames ajustados de este último caso en función de su matriz interna $A^+(\omega)$.

Para el caso multirresolución, se centra la atención en los Principios de Extensión, Unitaria y Oblicua, propuestos por Ron y Shen [127, 126] en el primer caso y Daubechies, Han, Ron y Shen [42] y Chui, He y Stöckler [28] en el segundo (véase también los trabajos de Benedetto y Trieber [18] y Atreas, Melas y Stavropoulos [8], los cuales proponen versiones, refinadas en las condiciones, de los Principios de Extensión). Ya que dichos principios se enuncian como una relación funcional, lo cual no resulta de gran utilidad a la hora de realizar el cálculo específico de los diferentes wavelet frames ajustados, se utiliza la representación espectral del operador de traslación T para obtener dicha caracterización como sistemas de ecuaciones lineales (Proposición 99). Esta caracterización involucra matrices de “tipo Lawton”, es decir, matrices con la misma estructura de la matriz introducida por Lawton [94] para el estudio de la ortonormalidad en wavelets multirresolución, lo cual muestra que dicha matriz no aparece de forma espontánea en la propiedad de ortonormalidad, sino que es intrínseca a la propiedad de frame ajustado, propiedad que verifican las wavelets multirresolución de soporte compacto. Más aún, esta caracterización permite deducir diversas propiedades sobre las máscaras y sus funciones (de refinamiento o wavelets) asociadas. Por otra parte, el estudio del paso entre los Principios de Extensión Unitaria y Oblicua, centrado en el caso finito (todas las funciones involucradas son polinomios trigonométricos), da lugar a la Observación 118 que muestra la imposibilidad de realizar el paso de UEP a OEP conservando la propiedad de finito. Finalmente, la Sección 4.2.4 muestra que los desarrollos llevados a cabo en la Sección 4.1 (Teorema 64) para la caracterización de wavelet frames ajustados mediante el modelo espectral del operador de dilatación, unidos a las relaciones de doble escala presentes en el ámbito de la multirresolución, permiten de nuevo caracterizar los wavelet frames ajustados en términos de matrices “tipo Lawton” (Teorema 121).

De los desarrollos teóricos ya mostrados, derivan las aplicaciones contenidas en la Parte II. Las wavelets ortonormales han demostrado su potencial en las aplicaciones prácticas en multitud de ocasiones, por lo que los algoritmos obtenidos en la Sección 3.3 se presentan como una herramienta útil a la hora de aprovechar este tipo de funciones en las diferentes aplicaciones. Del mismo modo, los wavelet frames ajustados comparten ciertas propiedades con las wavelets ortonormales, como puede ser la propiedad de localidad espacio/tiempo-frecuencial. Por tanto, esto permite obtener una familia de funciones candidato mayor para la descomposición wavelet (frame) a costa de perder algunas propiedades, las cuales no sean necesarias y/o interesantes en el problema a tratar, como puede ser la misma ortogonalidad.

En primer lugar, con el fin de aprovechar la característica de soporte mínimo de los wavelet frame ajustados calculados en la Sección 4.1.2, se propone un método de filtra-

do para imágenes de resonancia magnética (Sección 5.2). Dicho método probabilístico contrae los coeficientes de detalle de la descomposición wavelet frame (general y multiresolución) en base a la probabilidad condicionada de que dichos coeficientes sean de detalle junto con la probabilidad de que el coeficiente pertenezca a la componente de ruido. Para aumentar la eficiencia de este método, se buscan los wavelet frames ajustados que hagan máxima la proporción entre las dispersiones de la distribución de probabilidad de los coeficientes de descomposición del ruido (Rician aproximado por Gaussiano o Rayleigh) y de la distribución de probabilidad de los coeficientes de descomposición de las imágenes libres de ruido ($\frac{\text{Dispersión}_{\text{Ruido}}}{\text{Dispersión}_{\text{Detalle}}}$ máxima en los wavelet frames del criterio 1 y $\frac{\text{Dispersión}_{\text{Detalle}}}{\text{Dispersión}_{\text{Ruido}}}$ máxima en los wavelet frames del criterio 2). Para ello, y supuesto que dichas distribuciones de probabilidad, ruido y detalle, se modelan mediante una distribución Gaussiana Generalizada, se estiman los valores β en función de los niveles de escala de descomposición que mejor modelen dichas distribuciones (Sección 5.2.1), y con ello se estiman los wavelet frames bajo los criterios expuestos (Sección 5.2.2). La eficiencia del método propuesto se compara con otros métodos de filtrado, tanto generales (Sección 5.1.1) como basados en wavelets multiresolución (Sección 5.1.2), en imágenes de resonancia magnética simuladas y reales (Sección 5.3.2). Para las medidas consideradas (Sección 5.3.3), los resultados obtenidos son muy buenos (Sección 5.3.4), siendo el mejor el método propuesto para alguno de los dos criterios considerados (criterio 1 para ruido bajo, criterio 2 para ruido medio y alto), como puede observarse en las Figuras 5.4 y 5.6. Además, como muestra la Tabla 5.1, el método propuesto es capaz de acortar de forma significativa el tiempo de adquisición de las imágenes de resonancia magnética, ya que consigue igualar, mediante filtrado, la calidad de imágenes obtenidas con el doble del tiempo de adquisición (ruido medio).

En segundo lugar, gracias al algoritmo de Haar descrito en la Sección 3.3.1, se puede utilizar la expresión (coeficientes) de las funciones de escala en dicha base para aproximarlas a una función determinada, en base a una distancia prefijada. Este hecho da lugar a la aplicación propuesta de las wavelets ortonormales al análisis de señales de resonancia magnética funcional. El método propuesto en la Sección 6.2 descompone, en cada posición espacial, la correspondiente señal temporal hasta nivel de escala 2, con el fin de que dicha descomposición extraiga la señal a identificar en los coeficientes de escala dejando solamente ruido en los coeficientes de detalle. Para maximizar dicha separación, se calcula la wavelet ortonormal óptima (6.11) que minimiza la distancia habitual en $L^2(\mathbb{R})$ entre la función modelo de respuesta hemodinámica (6.10) y una combinación lineal de la wavelet ortonormal a considerar. La eficiencia del método se compara con otros métodos clásicos (Sección 6.1.1) y algunos métodos que involucran el uso de wavelets (Sección 6.1.2) mediante señales simuladas y reales (Sección 6.3.2). Los resultados obtenidos (Tabla 6.1) muestran que, para señales con paradigma de activación prefijado (Figura 6.7), el método propuesto es ligeramente mejor que métodos muy utilizados como son el Modelo General Lineal (no se producen prácticamente falsos

positivos y el ratio de positivos reales es similar, pero superior). Del mismo modo, el experimento con señales reales (Figura 6.8) muestra una buena identificación de la actividad cerebral, siendo muy buena (evitando falsos positivos) utilizando la información del paradigma de activación (si no se utiliza dicha información aparece más activación, la cual no corresponde con la que se está buscando, pero que no tiene por qué ser un error, si no solamente actividad cerebral debida a visualización, oídos, etc.). Finalmente, para diversos paradigmas de activación en diferentes regiones, el método propuesto muestra que es capaz de identificarlas todas ellas de forma eficiente (Figuras 6.9 y 6.10). Por lo tanto, el método propuesto consigue ser tan eficaz como los métodos ya existentes en el caso de tratar de identificar actividad cerebral correspondiente a un paradigma prefijado, mientras que para el caso en que se desconocen los tiempos de activación, la eficiencia del método se mantiene. Este último hecho es interesante a la hora de diseñar experimentos, pues no limita a una búsqueda localizada en el tiempo, sino que permite realizar una búsqueda general en cualquier instante. Dicha ausencia de límites puede permitir al especialista clínico el diseño de experimentos más complejos y útiles en comparación con los basados en paradigmas prefijados.

Los contenidos de este trabajo han sido o están siendo incluidos en diversos artículos para su publicación. Parte de los contenidos del Capítulo 3, centrados en el algoritmo de Haar (Sección 3.3.1), han sido publicados en el artículo de Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [71]. Los contenidos de la Sección 4.1 se incluyen en el artículo de Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [70], actualmente en revisión, y el material de la Sección 4.2 se recoge en el artículo de Gómez-Cubillo, Suchanecki y Villullas [69], en preparación. En el ámbito de las aplicaciones, una versión previa de los contenidos del Capítulo 5 se ha publicado en el artículo de Martín-Fernández y Villullas [109], mientras que el desarrollo posterior se va a incluir en el artículo de Gómez-Cubillo, Martín-Fernández y Villullas [66], actualmente en preparación. Por último, los resultados del Capítulo 6 dará lugar al artículo de Martín-Fernández y Villullas [108].

Capítulo 8

Líneas futuras de investigación

A continuación se enumeran algunas de las posibles líneas a seguir en base a los resultados obtenidos.

- En primer lugar, los desarrollos llevados a cabo en la Sección 3.3 para las bases de Haar, Walsh-Paley y trigonométrica pueden tratar de realizarse para otras bases. Centrándose en algunas propiedades interesantes a considerar, puede ser conveniente encontrar nuevos algoritmos dirigidos al estudio de dichas propiedades, para lo cual deben considerarse bases ortonormales diferentes. Asimismo, también puede ser interesante buscar bases ortonormales para las cuales existan funciones de escala y/o wavelets multirresolución (diferentes a las de Haar) tales que se expresen como una combinación finita de elementos de dicha base ortonormal.
- La Proposición 69 caracteriza, en función del cardinal del conjunto Ψ , los sistemas wavelet frames ajustados. Esto permite, una vez fijado dicho cardinal, el estudio de las familias de wavelet frames ajustados, tal y como se ha realizado para los casos de cardinal 1 y 2. El paso siguiente es el estudio de familias para cardinales mayores y la búsqueda de un método general para la realización de dicho estudio.
- La caracterización de los wavelet frames ajustados mediante las ecuaciones (4.9) del Corolario 65 puede aplicarse a los frames multirresolución, tal y como muestra la Sección 4.2.4. Esta observación debe dar lugar a la caracterización obtenida en la Proposición 99 involucrando matrices de tipo Lawton, lo cual cerraría el desarrollo paralelo al trabajo realizado por Ron y Shen [125, 127, 126, 128, 129] y trabajos posteriores.
- Los desarrollos llevados a cabo en el ámbito teórico se han centrado en el caso unidimensional, lo cual, a la hora de obtener resultados prácticos en las aplicaciones, puede no ser suficiente. Una posible línea a seguir es la generalización de los resultados al caso multidimensional, dando lugar a la posterior aplicación de dichas funciones en el caso de filtrado (wavelet frames ajustados multidimensionales).

- Una de las líneas a seguir más evidentes es la conversión del método de filtrado propuesto en el Capítulo 5 al caso de imágenes tridimensionales. Para ello, debe realizarse un estudio de las distribuciones de ruido y detalles, estimando para ellas (Gaussianas Generalizadas) los correspondientes parámetros β en función de las escalas.
- Además, puede que existan criterios para el cálculo de los wavelet frames ajustados que permitan obtener mejores resultados en el posterior filtrado. De igual modo, las funciones de importancia entre escalas consideradas pueden no ser las más adecuadas. Una vez obtenidas las familias de wavelet frames ajustados para cardinal de Ψ mayor que dos, puede ampliarse la búsqueda de los wavelet frames óptimos.
- Otra línea evidente es la conversión del método de filtrado propuesto a diferentes tipos de imágenes, tanto médicas (ecografía, mamografía, etc.) como imágenes en general. Para ello debe realizarse un estudio previo de la distribución de los coeficientes de descomposición wavelet (frame) para los correspondientes ruidos y detalles de imágenes libres de ruido. Una vez realizado dicho estudio, la adaptación del método de filtrado es inmediata.
- De manera similar a los métodos de análisis de señales de resonancia magnética funcional que combinan el uso de la descomposición wavelet espacial con métodos clásicos, como son el GLM o la Sustracción Directa, cabe la posibilidad de aplicar este hecho al método propuesto, dando lugar a una descomposición espacio-temporal de la señal funcional con el fin de buscar coherencia espacial en el análisis y aprovechar la propiedad de localidad espacio-temporal.

Parte IV
Apéndices

Apéndice A

Bases ortonormales y coeficientes

$$\alpha_{i,n}^{l,j,m} \text{ y } \beta_{i,j,l}^{k,n,m}$$

Para poder trabajar con los diferentes modelos espectrales definidos en la Sección 2.1, se deben considerar las bases ortonormales de $L^2(\mathbb{R})$

$$\{L_i^{(n)} : i \in \mathbb{I}, m \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad \{K_{\pm,j}^{(m)} : j \in \mathbb{J}, m \in \mathbb{Z}\},$$

definidas en (2.2) y (2.6). Más aún, se consideran los diferentes coeficientes $\alpha_{i,n}^{l,j,m}$ y $\beta_{i,j,l}^{k,n,m}$, definidos en (2.11) y (4.101), respectivamente.

A.1. La base de Haar

Sea \mathfrak{h} la función de $[0, 1)$ definida por

$$\mathfrak{h}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & , \text{ si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

y extendida a \mathbb{R} por 0. El sistema (base) de Haar se define mediante traslaciones (disjuntas por conjuntos) y dilataciones de base 2 de la función \mathfrak{h} , esto es, $\mathbf{h} = \{\mathfrak{h}_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ tal que

$$\mathfrak{h}_0 := \chi_{[0,1)},$$

y, para $u \in \mathbb{N}$, $0 \leq v < 2^u$,

$$\mathfrak{h}_{2^u+v}(x) := 2^{\frac{u}{2}} \mathfrak{h}(2^u x - v), \quad x \in \left[\frac{v}{2^u}, \frac{1+v}{2^u} \right) \quad (0 \text{ en el resto}).$$

Fijadas

$$\begin{aligned} K_{+,j}^{(0)}(x) &:= \mathfrak{h}_j(x-1) & \text{y} & & L_i^{(0)}(x) &:= \mathfrak{h}_i(x) \\ K_{-,j}^{(0)}(x) &:= \mathfrak{h}_j(x+2) \end{aligned}$$

con $i, j \geq 0$, entonces $\mathbb{I} = \mathbb{J} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

La matriz de cambio de representación $(\alpha_{i,n}^{\pm,j,m})$ se describe por:

- Si $n = 0, i = 0$,

$$\alpha_{0,0}^{l,j,m} = \begin{cases} 2^{-\frac{m}{2}} & , \text{ si } l = +, j = 0, m > 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

- Si $n = 0, r = 0, 1, 2, \dots$,

$$\alpha_{2^r,0}^{l,j,m} = \begin{cases} -2^{-\frac{1}{2}} & , \text{ si } l = +, j = 0, m = r + 1 \\ 2^{\frac{r-m}{2}} & , \text{ si } l = +, j = 0, m > r + 1 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

- Si $n = 0, r = 0, 1, 2, \dots$ y $t = 2^p + q$ (con $0 \leq p < r$ y $q = 0, 1, \dots, 2^p - 1$),

$$\alpha_{2^{r+t},0}^{l,j,m} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = +, j = t, m = r - p \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

- Si $n = 1$ y $i \geq 0$,

$$\alpha_{i,1}^{l,j,m} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = +, j = i, m = 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

- Si $n > 1$ y $i > 0$, con $n = 2^u + v$ ($u = 1, 2, \dots, v = 0, 1, \dots, 2^u - 1$) y $i = 2^r + t$ ($r = 0, 1, \dots, t = 0, 1, \dots, 2^r - 1$),

$$\alpha_{2^{r+t},2^{u+v}}^{l,j,m} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = +, j = 2^r(2^u + v) + t, m = -u \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

- Si $n > 1$ y $i = 0$, con $n = 2^u + v$ ($u = 1, 2, \dots, v = 0, 1, \dots, 2^u - 1$),

$$\alpha_{0,2^{u+v}}^{l,j,m} = \begin{cases} 2^{-\frac{u}{2}} & , \text{ si } l = +, j = 0, m = -u \\ (-1)^{w(u,v,p)} 2^{\frac{p-u}{2}} & , \text{ si } \begin{cases} l = +, j = 2^p + \lfloor \frac{v}{2^{u-p}} \rfloor \\ \text{con } 0 \leq p < u, m = -u \end{cases} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la parte entera de \dots y¹

$$w(u, v, p) = \left\lfloor \frac{v - 2^{u-p} \lfloor \frac{v}{2^{u-p}} \rfloor}{2^{u-p-1}} \right\rfloor. \quad (\text{A.1})$$

¹Teniendo en cuenta la expresión binaria $v = \sum_{k=0}^{u-1} t_k 2^k$, con $t_k = 0$ ó 1 , se tiene que $w(u, v, p) = t_{u-p-1}$ y $\lfloor \frac{v}{2^{u-p}} \rfloor = \sum_{k=u-p}^{u-1} t_k 2^{k-(u-p)}$.

- Si $n = -1$, $i = 0$,

$$\alpha_{0,-1}^{l,j,m} = \begin{cases} 2^{-\frac{m}{2}} & , \text{ si } l = -, j = 0, m > 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

- Si $n = -1$, $r = 0, 1, 2, \dots$,

$$\alpha_{2^{r+1}-1,-1}^{l,j,m} = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2}} & , \text{ si } l = -, j = 0, m = r + 1 \\ -2^{\frac{r-m}{2}} & , \text{ si } l = -, j = 0, m > r + 1 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

- Si $n = -1$, $r = 1, 2, \dots$, $0 \leq p < r$ y $q = 0, 1, \dots, 2^p - 1$,

$$\alpha_{2^{r+1}-2^{p+1}+q,-1}^{l,j,m} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = -, j = 2^p + q, m = r - p \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

- Si $n = -2$ y $i \geq 0$,

$$\alpha_{i,-2}^{l,j,m} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = -, j = i, m = 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

- Si $n < -2$ y $i > 0$, con $n = -2^{u+1} + v$ ($u = 1, 2, \dots$, $v = 0, 1, \dots, 2^u - 1$) y $i = 2^r + t$ ($r = 0, 1, \dots$, $t = 0, 1, \dots, 2^r - 1$),

$$\alpha_{2^r+t,-2^{u+1}+v}^{l,j,m} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = -, j = 2^r(2^u + v) + t, m = -u \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

- Si $n < -2$ y $i = 0$, con $n = -2^{u+1} + v$ ($u = 1, 2, \dots$, $v = 0, 1, \dots, 2^u - 1$),

$$\alpha_{0,-2^{u+1}+v}^{l,j,m} = \begin{cases} 2^{-\frac{u}{2}} & , \text{ si } l = -, j = 0, m = -u \\ (-1)^{w(u,v,p)} 2^{\frac{p-u}{2}} & , \text{ si } \begin{cases} l = -, j = 2^p + \lfloor \frac{v}{2^{u-p}} \rfloor \\ \text{con } 0 \leq p < u, m = -u \end{cases} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

donde $w(u, v, p)$ viene dada por (A.1).

La matriz de cambio de representación $(\beta_{i,j,l}^{n,m,k})$ se describe por (puesto que $\beta_{i,j,l}^{0,0,0} = \beta_{j,i,l}^{0,0,0}$, se puede suponer $i \leq j$):

$$\beta_{i,j,l}^{n,m,k} \neq 0 \Leftrightarrow n = m = k$$

$$\beta_{i,j,l}^{n,n,n} = \beta_{i,j,l}^{0,0,0}$$

$$\beta_{0,0,l}^{0,0,0} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

Si $a \geq 0$ y $0 \leq b < 2^a$,

$$\beta_{0,2^a+b,l}^{0,0,0} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = 2^a + b \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

Si $u \geq 0$ y $0 \leq v < 2^u$,

$$\beta_{2^u+v,2^u+v,l}^{0,0,0} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = 0 \\ 2^{\frac{x}{2}}(-1)^{w(u,v,x)} & , \text{ si } l = 2^x + y, \quad x < u, y = \lfloor \frac{v}{2^{u-x}} \rfloor \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

Si $u \geq 0$, $0 \leq v < 2^u$ y $v < b < 2^u$,

$$\beta_{2^u+v,2^u+v,l}^{0,0,0} = 0$$

Si $u \geq 0$, $0 \leq v < 2^u$, $a \geq u$, $0 \leq b < 2^a$,

$$\beta_{2^u+v,2^a+b,l}^{0,0,0} = \begin{cases} 2^{\frac{u}{2}} & , \text{ si } l = 2^a + b, b = 2^{a-u}v + r, 0 \leq r < 2^{a-u-1} \\ -2^{\frac{u}{2}} & , \text{ si } l = 2^a + b, b = 2^{a-u}v + r, 2^{a-u-1} \leq r < 2^{a-u} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

A.2. La base de Walsh-Paley

Sea r la función de $[0, 1)$ definida por

$$r(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & , \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

extendida a \mathbb{R} por periodicidad de periodo 1. El *sistema de Rademacher* $\mathbf{r} := (r_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ se define por

$$r_n(x) := r(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, su *expansión binaria* es la (única) expresión

$$n = \sum_{\gamma=0}^{\infty} n_{\gamma} 2^{\gamma}$$

donde $n_{\gamma} \in \{0, 1\}$, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. El sistema (base) de Walsh-Paley $\boldsymbol{\omega} := \{\omega_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ se define mediante productos de funciones de Rademacher de la forma siguiente: si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tiene coeficientes binarios $(n_{\gamma}, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ entonces

$$\omega_n := \prod_{\gamma=0}^{\infty} r_{\gamma}^{n_{\gamma}}$$

Este producto es siempre finito porque $n_\gamma = 0$ para γ suficientemente grande, $\omega_0 = 1$ y $\omega_{2^n} = r_n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Fijadas

$$\begin{aligned} K_{+,j}^{(0)}(x) &:= \omega_j(x-1) & \text{y} & & L_i^{(0)}(x) &:= \omega_i(x) \\ K_{-,j}^{(0)}(x) &:= \omega_j(x+2) \end{aligned}$$

con $i, j \geq 0$, entonces $\mathbb{I} = \mathbb{J} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

La matriz de cambio de representación $(\alpha_{i,n}^{\pm,j,m})$ se describe por:

$$i = \sum_{\gamma \geq 0} i_\gamma 2^\gamma \quad (= 2^x + y, \text{ si } i > 0), \quad i_\gamma \in \{0, 1\}$$

$$j = \sum_{\gamma \geq 0} j_\gamma 2^\gamma \quad (= 2^u + v, \text{ si } j > 0), \quad j_\gamma \in \{0, 1\}$$

▪ Si $n < 0$, $\alpha_{i,n}^{+,j,m} = 0$

▪ Si $n = 0$,

• si $m \leq 0$, $\alpha_{i,0}^{+,j,m} = 0$

• si $m > 0$,

$$\alpha_{i,0}^{+,j,m} = \begin{cases} 2^{-\frac{m}{2}} (-1)^{\delta_{m-x-1}} & , \text{ si } \begin{cases} j = 0 \\ x \leq m-1 \\ i > 0 \end{cases} \\ 2^{-\frac{m}{2}} (-1)^{i_{m-1}} & , \text{ si } \begin{cases} j > 0 \\ x = u+m \\ i > 0 \end{cases} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

$$\alpha_{0,0}^{+,j,m} = \begin{cases} 2^{-\frac{m}{2}} & , \text{ si } j = 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

▪ Si $n > 0$,

• si $m > 0$, $\alpha_{i,n}^{+,j,m} = 0$

• si $m = 0$, $\alpha_{i,n}^{+,j,0} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n = 1, i = j \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$

$$\bullet \text{ si } m < 0, \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i,n}^{+,j,m} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } j = 0 \\ 2^{\frac{m}{2}} \omega_r \left(\frac{n-2^{-m}}{2^{-m}} \right) & , \text{ si } \begin{cases} 2^{-m} \leq n < 2^{-m+1} \\ j > 0 \\ x = u + m \\ i > 0 \\ i_\gamma = j_{\gamma-m}, \quad \forall \gamma \geq 0 \\ r = \sum_{\gamma=0}^{-m-1} j_\gamma 2^\gamma \end{cases} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} \\ \alpha_{0,n}^{+,j,m} = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}} \omega_j \left(\frac{n-2^{-m}}{2^{-m}} \right) & , \text{ si } \begin{cases} 2^{-m} \leq n < 2^{-m+1} \\ 0 \leq u \leq -m-1 \\ \acute{o} \\ j = 0 \\ i > 0 \end{cases} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\blacksquare \text{ Si } n \geq 0, \quad \alpha_{i,n}^{-,j,m} = 0$$

$$\blacksquare \text{ Si } n = -1,$$

$$\bullet \text{ si } m \leq 0, \quad \alpha_{i,-1}^{-,j,m} = 0$$

$$\bullet \text{ si } m > 0, \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i,-1}^{-,j,m} = \begin{cases} 2^{-\frac{m}{2}} (-1)^{(1-\delta_{m-x-1})} & , \text{ si } \begin{cases} j = 0 \\ x \leq m-1 \\ i > 0 \end{cases} \\ 2^{-\frac{m}{2}} \omega_r \left(\sum_{\beta=1}^{m-1} 2^{-\beta} \right) & , \text{ si } \begin{cases} j > 0 \\ x = u + m \\ i > 0 \\ i_\gamma = j_{\gamma-m}, \quad \forall \gamma \geq m \\ r = \sum_{\gamma=0}^{m-1} i_\gamma 2^\gamma \end{cases} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} \\ \alpha_{0,-1}^{-,j,m} = \begin{cases} 2^{-\frac{m}{2}} & , \text{ si } j = 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\blacksquare \text{ Si } n < -1,$$

$$\bullet \text{ si } m > 0, \quad \alpha_{i,n}^{-,j,m} = 0$$

$$\bullet \text{ si } m = 0, \quad \alpha_{i,n}^{-,j,0} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } n = -2, i = j \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ si } m < 0, \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i,n}^{-,j,m} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } j = 0 \\ 2^{\frac{m}{2}} \omega_r \left(\frac{n-2^{-m+1}}{2^{-m}} \right) & , \text{ si } \begin{cases} -2^{-m+1} \leq n < -2^{-m} \\ j > 0 \\ x = u + m \\ i > 0 \\ i_\gamma = j_{\gamma-m}, \quad \forall \gamma \geq 0 \\ r = \sum_{\gamma=0}^{-m-1} j_\gamma 2^\gamma \end{cases} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} \\ \alpha_{0,n}^{-,j,m} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \begin{cases} -2^{-m+1} \leq n < -2^{-m} \\ 0 \leq u \leq -m-1 \\ \acute{o} \\ j = 0 \\ i > 0 \end{cases} \\ 2^{\frac{m}{2}} \omega_j \left(\frac{n-2^{-m+1}}{2^{-m}} \right) & , \text{ si } \end{cases} \\ 0 & , \text{ resto} \end{array} \right.$$

A.3. La base Trigonométrica

Sea $\mathbf{e} = \{e_k(x) := e^{2\pi i k x} : x \in \mathbb{R}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ el sistema (base) trigonométrico de $L^2([n, n+1])$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Fijadas

$$K_{\pm,j}^{(0)}(x) := e_j(x) \quad \text{y} \quad L_i^{(0)}(x) := e_i(x)$$

con $i, j \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathbb{I} = \mathbb{J} = \mathbb{Z}$.

La matriz de cambio de representación $(\alpha_{i,n}^{\pm,j,m})$ se describe por:

$$\alpha_{k,0}^{l,j,m} = \begin{cases} -\frac{i 2^{\frac{m}{2}} e^{2\pi i k 2^{-m}} (e^{2\pi i k 2^{-m}} - 1)}{2\pi(k-j2^m)} & , \text{ si } l = +, m > 0, y k - j2^m \neq 0 \\ 2^{-\frac{m}{2}} & , \text{ si } l = +, m > 0, y k - j2^m = 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

$$\alpha_{k,-1}^{l,j,m} = \begin{cases} \frac{i 2^{\frac{m}{2}} e^{-2\pi i k 2^{-m}} (e^{-2\pi i k 2^{-m}} - 1)}{2\pi(k-j2^m)} & , \text{ si } l = -, m > 0, y k - j2^m \neq 0 \\ 2^{-\frac{m}{2}} & , \text{ si } l = -, m > 0, y k - j2^m = 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

$$\alpha_{k,1}^{l,j,m} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = +, m = 0, y k = j \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

$$\alpha_{k,-2}^{l,j,m} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = -, m = 0, y k = j \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

Para $p \in \mathbb{N}$ y $q = 0, 1, \dots, 2^p - 1$,

$$\alpha_{k,2^p+q}^{l,j,m} = \begin{cases} -\frac{i2^{\frac{p}{2}} e^{-2\pi i j 2^{-p} q}}{2\pi(k2^p-j)} (e^{-2\pi i j 2^{-p}} - 1) & , \text{ si } l = +, m = -p, y k2^p - j \neq 0 \\ 2^{-\frac{p}{2}} & , \text{ si } l = +, m = -p, y k2^p - j = 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

$$\alpha_{k,-2^p-q-1}^{l,j,m} = \begin{cases} \frac{i2^{\frac{p}{2}} e^{2\pi i j 2^{-p} q}}{2i(k2^p-j)} (e^{2\pi i j 2^{-p}} - 1) & , \text{ si } l = -, m = -p, y k2^p - j \neq 0 \\ 2^{-\frac{p}{2}} & , \text{ si } l = -, m = -p, y k2^p - j = 0 \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

La matriz de cambio de representación $(\beta_{i,j,l}^{n,m,k})$ se describe por:

$$\beta_{i,j,l}^{n,m,k} \neq 0 \Leftrightarrow n = m = k$$

$$\beta_{i,j,l}^{n,n,n} = \beta_{i,j,l}^{0,0,0}$$

$$\beta_{i,j,l}^{0,0,0} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } l = i + j \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases}$$

Apéndice B

Coeficientes dilatados, trasladados 1/2 y conjugados

B.1. La base de Haar

Sea $\{L_i^{(n)}\}_{i,n}$ la base de Haar y sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ 1-periódica (omitimos los superíndices debido a la periodicidad).

$$\left(\widehat{f\left(\cdot + \frac{1}{2}\right)}\right)_i = \begin{cases} \hat{f}_0 & , \text{ si } i = 0 \\ -\hat{f}_1 & , \text{ si } i = 1 \\ \hat{f}_{2^u+v+2^{u-1}(-1)^{\lfloor \frac{v}{2^{u-1}} \rfloor}} & , \text{ si } i = 2^u + v, \quad u \geq 0, 0 \leq v < 2^u \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\left(\widehat{f(2\cdot)}\right)_i = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2}} \hat{f}_{2^{u-1}(1 - \lfloor \frac{v}{2^{u-1}} \rfloor) - v} & , \text{ si } i = 2^u + v, \quad u \geq 1 \\ 0 & , \text{ si } u \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$\widehat{\hat{f}}_i = \overline{\hat{f}}_i \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.3})$$

B.2. La base Trigonométrica

Sea $\{L_i^{(n)}\}_{i,n}$ la base de trigonométrica y sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ 1-periódica (omitimos los superíndices debido a la periodicidad).

$$\left(\widehat{f\left(\cdot + \frac{1}{2}\right)}\right)_i = (-1)^i \hat{f}_i \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.4})$$

$$\widehat{f(2\cdot)}_i = \begin{cases} \hat{f}_{2^{-1}i} & , \text{ si } i \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & , \text{ resto} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$\widehat{\bar{f}}_i = \widehat{f}_{-i} \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \quad (\text{B.6})$$

Apéndice C

Funciones auxiliares

A la hora de definir las medidas de similitud en la Sección 5.3.3, son necesarias varias funciones auxiliares, definidas a continuación. La función $|\cdot|$ representa el cardinal del correspondiente conjunto ($|A| = \text{Cardinal del conjunto } A$).

- La Media Local de una imagen/volumen I en el pixel/voxel de posición m se define como

$$\text{LM}(I, m) := \frac{1}{|N_m|} \sum_{i \in N_m} I(i), \quad (\text{C.1})$$

donde N_m es un vecindario del pixel/voxel m .

- La Varianza Local de una imagen/volumen I en el pixel/voxel de posición m se define como

$$\text{LV}(I, m) := \frac{1}{|N_m|} \sum_{i \in N_m} I(i)^2 - \text{LM}(I, m)^2, \quad (\text{C.2})$$

donde N_m es un vecindario del pixel/voxel m .

- La Media Global de una imagen/volumen I se define como

$$\text{GM}(I) := \frac{1}{M} \sum_m I(m), \quad (\text{C.3})$$

donde M es el número total de pixels/voxels y m representa las diferentes posiciones de pixel/voxel en la imagen/volumen I .

- La Varianza Global de una imagen/volumen I se define como

$$\text{GV}(I) := \frac{1}{M} \sum_m I(m)^2 - \text{GM}(I)^2, \quad (\text{C.4})$$

donde M es el número total de pixels/voxels y m representa las diferentes posiciones de pixel/voxel en la imagen/volumen I .

- La Covarianza Global de unas imágenes/volúmenes I y \tilde{I} se define como

$$\text{GCV}(I, \tilde{I}) := \frac{1}{M} \sum_m I(m)\tilde{I}(m) - \text{GM}(I)\text{GM}(\tilde{I}), \quad (\text{C.5})$$

donde M es el número total de pixels/voxels y m representa las diferentes posiciones de pixel/voxel en las imágenes/volúmenes I y \tilde{I} .

Bibliografía

- [1] G. K. Aguirre, E. Zarahn, and M. D'Esposito. The Variability of Human, BOLD Hemodynamic Responses. *Neuroimage*, 8(4):360–369, November 1998.
- [2] S. Aja-Fernández, C. Alberola-López, and C.-F. Westin. Noise and Signal Estimation in Magnitude MRI and Rician Distributed Images: A LMMSE Approach. *IEEE Transactions on Image Processing*, 17(8):1383–1398, August 2008.
- [3] S. Aja-Fernández, R. San José Estépar, C. Alberola-López, and C.-F. Westin. Image Quality Assessment based on Local Variance. In *Proceedings of the 28th IEEE Engineering in Medicine and Biology Society Annual International Conference, New York City, USA*, August 2006.
- [4] S. Aja-Fernández, A. Tristán-Vega, and C. Alberola-López. Noise estimation in single- and multiple-coil magnetic resonance data based on statistical models. *Magnetic Resonance Imaging*, 27(10):1397–1409, December 2009.
- [5] S. Aja-Fernández, G. Vegas-Sánchez-Ferrero, and A. Tristán-Vega. A review on statistical noise models for Magnetic Resonance Imaging. *Technical Report of the LPI, University of Valladolid, Spain*, pages 1–23, June 2013.
- [6] C. S. Anand and J. S. Sahambi. Wavelet domain non-linear filtering for MRI denoising. *Magnetic Resonance Imaging*, 28(6):842–861, July 2010.
- [7] B. A. Ardekani, J. Kershaw, K. Kashikura, and I. Kanno. Activation Detection in Functional MRI Using Subspace Modeling and Maximum Likelihood Estimation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(2):101–114, February 1999.
- [8] N. Atreas, A. Melas, and T. Stavropoulos. Affine dual frames and Extension Principles. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 36(1):51–62, January 2014.
- [9] S. P. Awate and R. T. Whitaker. Higher-Order Image Statistics for Unsupervised, Information-Theoretic, Adaptive, Image Filtering. In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Salt Lake City, Utah, USA*, volume 2, pages 44–51, June 2005.

- [10] S. P. Awate and R. T. Whitaker. Unsupervised, Information-Theoretic, Adaptive Image Filtering for Image Restoration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(3):364–376, March 2006.
- [11] S. P. Awate and R. T. Whitaker. Feature-Preserving MRI Denoising: a Non-parametric Empirical Bayes Approach. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 26(9):1242–1255, September 2007.
- [12] A. L. Baert, M. Knauth, and K. Sartor. *Clinical Functional MRI - Presurgical Functional Neuroimaging*, chapter Localization of Brain Activity using Functional Magnetic Resonance Imaging. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [13] P. A. Bandettini, E. C. Wong, R. S. Hinks, R. S. Tikofsky, and J. S. Hyde. Time course EPI of human brain function during task activation. *Magnetic Resonance in Medicine*, 25(2):390–397, June 1992.
- [14] I. N. Bankmann. *Handbook of Medical Imaging*. Academic-Press, 2000.
- [15] S. Basu, T. Fletcher, and R. Whitaker. Rician noise removal in diffusion tensor MRI. In *9th international conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention, Copenhagen, Denmark*, volume 9, pages 117–125, 2006.
- [16] R. Baumgartner, L. Ryner, W. Richter, R. Summers, M. Jarmasz, and R. Somorjai. Comparison of two exploratory data analysis methods for fMRI: fuzzy clustering vs. principal component analysis. *Magnetic Resonance Imaging*, 18(1):89–94, January 2000.
- [17] J. J. Benedetto. *Wavelets: a tutorial in theory and applications*, chapter Irregular sampling and frames, pages 445–507. Academic-Press, Boston, 1992.
- [18] J. J. Benedetto and O. M. Treiber. *Wavelet Transforms and Time-Frequency Signal Analysis*, chapter Wavelet frames: multiresolution analysis and extension principles, pages 3–36. Birkhäuser Boston, Boston, 2001.
- [19] K. Berkner and J. R. O. Wells. Smoothness Estimates for Soft-Thresholding Denoising via Translation Invariant Wavelet Transform. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 12(1):1–24, January 2002.
- [20] M. S. Birman and M. Z. Solomjak. *Spectral Theory of Self Adjoint Operators in Hilbert Space*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1987.
- [21] C. E. Bonferroni. *Teoria statistica delle classi e calcolo delle probabilità*. Pubblicazioni del R Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Firenze, Vol. 8, 1936.

- [22] P. I. Burt and E. H. Adelson. The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code. *IEEE Transactions on Communications*, 31(4):532–540, April 1983.
- [23] A. P. Calderón. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Mathematica*, 24:113–190, 1964.
- [24] A. P. Calderón and A. Torchinsky. Parabolic maximal functions associated with a distribution I. *Advances in Mathematics*, 16(1):1–64, April 1975.
- [25] A. P. Calderón and A. Torchinsky. Parabolic maximal functions associated with a distribution II. *Advances in Mathematics*, 24(1):101–171, April 1977.
- [26] S. Y. A. Chang and R. Fefferman. A Continuous Version of Duality of H^1 and BMO on the Bidisc. *Annals of Mathematics*, 112(1):179–201, July 1980.
- [27] O. Christensen. *Applied and Numerical Harmonic Analysis*, chapter Frames and bases. Birkhäuser Boston, Inc., 2008.
- [28] C. K. Chui, W. He, , and J. Stöckler. Compactly supported tight and sibling frames with maximum vanishing moments. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 13(3):224–262, November 2002.
- [29] C. K. Chui and W. He. Compactly Supported Tight Frames Associated with Refinable Functions. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 8(3):293–319, May 2000.
- [30] A. Cohen. Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroirs en quadrature. *Annales de l’Institut Henri Poincaré. Analyse non linéaire*, 7(5):439–459, 1990.
- [31] R. Coifman and D. L. Donoho. *Translation-Invariant De-Noising*, pages 125–150. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [32] R. Coifman, Y. Meyer, S. Quake, and M. Wickerhauser. *Signal processing and compression with wavelets packets*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1990.
- [33] R. Coifman, Y. Meyer, and M. Wickerhauser. Wavelets Analysis and Signal Processing. In *In Wavelets and their Applications, Ruskai et al., eds. Boston: Jones and Bartlett*, pages 153–178, 1992.
- [34] D. L. Collins, A. P. Zijdenbos, V. Killokian, J. G. Sled, N. J. Kabani, C. J. Holmes, and A. C. Evans. Design and construction of a realistic digital brain phantom. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(3):463–468, June 1998.
- [35] P. Coupe, P. Yger, S. Prima, P. Hellier, C. Kervrann, and C. Barillot. An optimized blockwise non local means denoising filter for 3-D magnetic resonance images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 27(4):425–441, April 2008.

- [36] R. Crochiere, S. Weber, and J. Flanagan. Digital coding of speech in subband. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 233–236, April 1976.
- [37] A. Croisier, D. Esteban, and C. Galand. Perfect channel splitting by use of interpolation/decimation/tree decomposition techniques. *International Conference on Information Sciences and Systems*, pages 443–446, August 1976.
- [38] K. Dabov, A. Foi, V. Katkovnik, and K. Egiazarian. Image denoising by sparse 3D transform-domain collaborative filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(8):2080–2095, August 2007.
- [39] X. Dai and D. R. Larson. Wandering vectors for unitary systems and orthogonal wavelets. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 134(viii):640, 1998.
- [40] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41:909–996, November 1988.
- [41] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61., SIAM, Philadelphia, 1992.
- [42] I. Daubechies, B. Han, A. Ron, and Z. Shen. Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 14(1):1–46, 2003.
- [43] I. Daubechies and J. C. Lagarias. Two-scale difference equations I. Existence and global regularity of solutions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 22(5):1388–1410, September 1991.
- [44] I. Daubechies and J. C. Lagarias. Two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(4):1031–1079, July 1992.
- [45] H. F. Davids. *Fourier series and orthogonal functions*. Dover Publications Inc., New York, 1989.
- [46] D. Van de Ville, T. Blu, and M. Unser. Surfing the Brain: An Overview of Wavelet-Based Techniques for fMRI Data Analysis. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 25(2):65–78, March/April 2006.
- [47] C. DeBoor, R. A. DeVore, and A. Ron. Approximation from shift-invariant subspaces of $l_2(\mathbb{R}^d)$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 341(2):787–806, February 1994.

- [48] C. DeBoor, R. A. DeVore, and A. Ron. The structure of finitely generated shift-invariant spaces in $l_2(\mathbb{R}^d)$. *Journal of Functional Analysis*, 119(1):37–78, January 1994.
- [49] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 39:1–38, 1977.
- [50] I. D. Dinov, J. W. Boscardin, M. S. Mega, E. L. Sowell, and A. W. Toga. A Wavelet-Based Statistical Analysis of fMRI Data I. Motivation and Data Distribution Modeling. *Neuroinformatics*, 3(4):319–142, 2005.
- [51] D. Donoho and I. Johnstone. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3):425–455, August 1994.
- [52] D. Esteban and C. Galand. Applications for quadrature mirror filters to split-band voice coding schemes. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Hartford*, pages 191–195, 1977.
- [53] M. Figueiredo and R. Nowak. Bayesian wavelet-based signal estimation using noninformative priors. In *Thirty-Second Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers, Pacific Grove*, volume 2, pages 1368–1373, 1998.
- [54] B. Fischl, D. H. Salat, A. J. W. Van der Kouwe, N. Makris, F. Ségonne, B. T. Quinn, and A. M. Dale. Sequence independent segmentation of magnetic resonance images. *NeuroImage*, 23:69–84, 2004.
- [55] L. R. Frank, R. B. Buxton, and E. C. Wong. Probabilistic analysis of functional magnetic resonance imaging data. *Magnetic Resonance in Medicine*, 39(1):132–148, January 1998.
- [56] M. Frazier and B. Jawerth. Decomposition of besov spaces. *Indiana University Mathematics Journal*, 34:777–799, 1985.
- [57] M. Frazier and B. Jawerth. *The φ -transform and applications to distribution spaces*, pages 223–246. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [58] M. Frazier and B. Jawerth. A discrete transform and decompositions of distribution spaces. *Journal of Functional Analysis*, 93:34–170, 1990.
- [59] M. Frazier, B. Jawerth, and G. Weiss. Littlewood-Palet theory and the study of function spaces. In *CBMS Conference Lecture Notes, 79, Providence: American Mathematical Society*, 1991.

- [60] O. Friman, M. Borga, P. Lundberg, and H. Knutsson. Adaptive analysis of fMRI data. *NeuroImage*, 19(3):837–845, July 2003.
- [61] O. Friman, J. Cedefamn, P. Lundberg, M. Borga, and H. Knutsson. Detection of neuronal activity in functional MRI using canonical correlation analysis. *Magnetic Resonance in Medicine*, 45(2):323–330, February 2001.
- [62] K. J. Friston, A. P. Holmes, K. J. Worsley, J.P. Poline, C. D. Frith, and R. S. J. Frackowiak. Statistical parametric maps in functional imaging: A general linear approach. *Human Brain Mapping*, 2(4):189–210, November 1994.
- [63] M. Fuderer. The information content of MR images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 7(4):368–380, December 1988.
- [64] D. Gabor. *Theory of communication*. Institution of Electrical Engineering, 1946.
- [65] G. Gerig, O. Kubler, R. Kikinis, and F. A. Jolesz. Nonlinear anisotropic filtering of MRI data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 11(2):221–232, June 1992.
- [66] F. Gómez-Cubillo, M. Martín-Fernández, and S. Villullas. Minimal support tight wavelet frames in a probabilistic MRI denoising method. *En preparación*.
- [67] F. Gómez-Cubillo and Z. Suchanecki. Inner functions and local shape of orthonormal wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 30(3):273–287, 2011.
- [68] F. Gómez-Cubillo and Z. Suchanecki. Spectral models for orthonormal wavelets and multiresolution analysis of $l^2(\mathbb{R})$. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 17(2):191–225, 2011.
- [69] F. Gómez-Cubillo, Z. Suchanecki, and S. Villullas. Generalized Lawton conditions for tight framelets. *En preparación*.
- [70] F. Gómez-Cubillo, Z. Suchanecki, and S. Villullas. Spectral techniques for wavelet frames. *En revisión*.
- [71] F. Gómez-Cubillo, Z. Suchanecki, and S. Villullas. Orthonormal MRA wavelets: spectral formulas and algorithms. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 10(1):19 pages, 2012.
- [72] T. N. T. Goodman, S. L. Lee, and W. S. Tang. Wavelets in wandering subspaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 338(2):639–654, 1993.
- [73] P. Gorgel, A. Sertbas, and U. N. Ucan. A wavelet-based mammographic image denoising and enhancement with homomorphic filtering. *Journal of Medical Systems*, 34(6):993–1002, December 2010.

- [74] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15(4):723–736, July 1984.
- [75] H. Gudbjartsson and S. Patz. The Rician distribution of noisy MRI data. *Magnetic Resonance in Medicine*, 34(6):910–914, December 1995.
- [76] A. Haar. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Annals of Mathematics*, 69:331–371, 1910.
- [77] P. R. Halmos. Shifts on Hilbert spaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 208:102–112, 1961.
- [78] B. Han. Pairs of frequency-based nonhomogeneous dual wavelet frames in the distribution space. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 29(3):330–353, November 2010.
- [79] L. He and I. R. Greenshields. A Nonlocal Maximum Likelihood Estimation method for Rician noise reduction in MR images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 28(2):165–172, February 2009.
- [80] H. Helson. *Lectures on invariant subspaces*. Academic Press, New York, 1964.
- [81] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis [Vol. 1]*. Wiley, 1974.
- [82] O. Henriksen, H. B. W. Larsson, P. Ring, E. Rostrup, A. Stensgaard, M. Stubgaard, F. Stahlberg, L. Søndergaard, C. Thomsen, and P. Toft. Functional mr imaging at 1.5t. In *Acta Radiologica*, volume 34, pages 101–103, 1993.
- [83] E. Hernández and G. Weiss. *A First Course on Wavelets*. CRC Press, 1996.
- [84] E. Hille and R. S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups (Third printing of the revised edition of 1957)*. American Mathematical Society, Providence, 1974.
- [85] M. Hilton, T. Ogden, D. Hattery, G. Eden, and B. Jawerth. *Wavelets in Medicine and Biology*, chapter Wavelet Denoising of Functional MRI Data. CRC Press, 1996.
- [86] A. K. Jain. *Fundamentals of digital image processing*. Prentice Hall, 1988.
- [87] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*. Vol. 15 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, 1997.

- [88] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II.* Vol. 16 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, 1997.
- [89] S. C. Kale, X. J. Chen, and R. M. Henkelman. Trading off SNR and resolution in MR images. *Nuclear Magnetic Resonance in Biomedicine*, 22(5):488–494, June 2009.
- [90] S. C. Kale, J. P. Lerch, and X. J. Chen R. M. Henkelman and. Optimization of the SNR-resolution tradeoff for registration of magnetic resonance images. *Human Brain Mapping*, 29:1147–1158, 2008.
- [91] K. K. Kwong, J. W. Belliveau, D. A. Chesler, I. E. Goldberg, R. M. Weisskoff, B. P. Poncelet, D. N. Kennedy, B. E. Hoppel, M. S. Cohen, R. Turner, H. M. Cheng, T. J. Brady, and B. R. Rosen. Dynamic magnetic resonance imaging of human brain activity during primary sensory stimulation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, 89(12):5675–5679, June 1992.
- [92] M. Lang, H. Guo, J. E. Odegard, C. S. Burrus, and R. O. Wells. Noise reduction using an undecimated discrete wavelet transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 3(1):10–12, January 1996.
- [93] W. M. Lawton. Tight frames of compactly supported affine wavelets. *Journal of Mathematical Physics*, 31:1898–1901, 1990.
- [94] W. M. Lawton. Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelet bases. *Journal of Mathematical Physics*, 32(1):57–61, 1991.
- [95] P. D. Lax. Translation invariant spaces. In *Proceedings of the International Symposium of Linear Spaces, Jerusalem: Jerusalem Academic Press*, pages 299–306, 1961.
- [96] P. G. Lemarié and Y. Meyer. Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2:1–18, 1986.
- [97] Z. P. Liang and P. C. Lauterbur. Principles of magnetic resonance imaging: a signal processing perspective. *IEEE Press Series in Biomedical Engineering*, 2000.
- [98] A. K. Louis, P. Maass, and A. Rieder. *Wavelets. Theory and Applications.* John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [99] A. Macovski. Noise in MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 36(3):494–497, September 1996.

- [100] S. Mallat. An efficient image representation for multiscale analysis. In *Proceedings of Machine Vision Conference, Lake Tahoe*, 1987.
- [101] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, July 1989.
- [102] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L_2(\mathbb{R})$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 315:69–87, 1989.
- [103] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing, Second Edition*. Academic Press, 1998.
- [104] S. Mallat and W. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):617–643, March 1992.
- [105] J. V. Manjon, J. Carbonell-Caballero, J. J. Lull, G. Garcia-Marti, L. Marti-Bonmati, and M. Robles. MRI denoising using non-local means. *Medical Image Analysis*, 12(4):514–523, August 2008.
- [106] D. Marr. *Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*. MIT Press, 1982.
- [107] M. Martin-Fernandez, C. Alberola-Lopez, J. Ruiz-Alzola, and C. F. Westin. Sequential anisotropic Wiener filtering applied to 3D MRI data. *Magnetic Resonance Imaging*, 25(2):278–292, February 2007.
- [108] M. Martin-Fernandez and S. Villullas. Temporal MRA-wavelet decomposition in paradigm-free fMRI analysis. *En preparación*.
- [109] M. Martin-Fernandez and S. Villullas. The E.M. Method in a Probabilistic Wavelet-Based MRI Denoising. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2015:21 pages, 2015.
- [110] R. S. Menon, S. Ogawa, X. Hu, J. P. Strupp, P. Anderson, and K. Ugurbil. BOLD based functional MRI at 4 Tesla includes a capillary bed contribution: echo-planar imaging correlates with previous optical imaging using intrinsic signals. *Magnetic Resonance in Medicine*, 33(3):453–459, March 1995.
- [111] Y. Meyer. Principe d’incertitude, bases Hilbertiennes et algèbres d’opérateurs. In *Séminaire Bourbaki*, volume 662, pages 1–15, 1985.
- [112] Y. Meyer. *Wavelets and Operators. Advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1992.

- [113] C. A. Micchelli and H. Prautzsch. Uniform refinement of curves. *Linear Algebra and its Applications*, 114-115:841–870, March-April 1989.
- [114] T. K. Moon. The expectation-maximization algorithm. *IEEE Signal Processing Magazine*, 13(6):47–60, November 1996.
- [115] R. Nowak. Wavelet-based Rician noise removal for magnetic resonance imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(10):1408–1419, October 1999.
- [116] S. Ogawa, T. M. Lee, A. R. Kay, and D. W. Tank. Brain magnetic resonance imaging with contrast dependent on blood oxygenation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, 87(24):9868–9872, December 1990.
- [117] S. Ogawa, R. S. Menon, D. W. Tank, S. G. Kim, H. Merkle, J. M. Ellermann, and K. Ugurbil. Functional brain mapping by blood oxygenation level-dependent contrast magnetic resonance imaging. A comparison of signal characteristics with a biophysical model. *Biophysical Journal*, 64(3):803–812, March 1993.
- [118] S. Ogawa, D. W. Tank, R. S. Menon, J. M. Ellermann, S. G. Kim, H. Merkle, and K. Ugurbil. Intrinsic signal changes accompanying sensory stimulation: functional brain mapping with magnetic resonance imaging. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, 89(13):5951–5955, July 1992.
- [119] J. A. Packer. Applications of the work of Stone and von Neumann to wavelets. In *Operator Algebras, Quantization, and Noncommutative Geometry, Contemporary Mathematics 365*, American Mathematical Society, Providence, pages 253–279, 2004.
- [120] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, July 1990.
- [121] A. Pizurica, W. Philips, I. Lemahieu, and M. Acheroy. A versatile wavelet domain noise filtration technique for medical imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(3):323–331, March 2003.
- [122] V. Protasov. Refinement equations and corresponding linear operators. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 4(3):461–474, 2006.
- [123] H. Rademacher. Einige sätze über reihen von allgemeinen Orthogonal-funktionen. *Mathematische Annalen*, 87:112–138, 1922.
- [124] O. Rioul and M. Vetterli. Wavelets and signal processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 14–38, October 1991.

- [125] A. Ron and Z. Shen. Frames and stable bases for shift-invariant subspaces of $l_2(\mathbb{R}^d)$. *Canadian Journal of Mathematics*, 47(5):1051–1094, 1995.
- [126] A. Ron and Z. Shen. Affine systems in $l_2(\mathbb{R}^d)$ ii: Dual systems. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 3(5):617–637, 1997.
- [127] A. Ron and Z. Shen. Affine systems in $l_2(\mathbb{R}^d)$: the analysis of the analysis operator. *Journal of Functional Analysis*, 148(2):408–447, 1997.
- [128] A. Ron and Z. Shen. Compactly supported tight affine spline frames in $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Mathematics of Computation*, 67(221):191–207, 1998.
- [129] A. Ron and Z. Shen. Construction of compactly supported affine frames in $L_2(\mathbb{R}^d)$. in: *Advances in wavelets (Hong Kong, 1997)*, Springer, Singapore, pages 27–49, 1999.
- [130] A. Ron and Z. Shen. Generalized shift-invariant systems. *Constructive Approximation*, 22(1):1–45, 2005.
- [131] M. Rosenblum and J. Rovnyak. *Hardy classes and operator theory*. Dover Publications Inc., Mineola, 1997.
- [132] J. Rovnyak. Ideals of square summable power series. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 13, pages 360–365, 1962.
- [133] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973.
- [134] U. E. Ruttimann, M. Unser, R. R. Rawlings, D. Rio, N. F. Ramsey, V. S. Mattay, D. W. Hommer, J. A. Frank, and D. R. Weinberger. Statistical Analysis of Functional MRI Data in the Wavelet Domain. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(2):142–154, April 1998.
- [135] G. I. Sánchez, D. Rueckert, and P. Burger. Knowledge-Based Tensor Anisotropic Diffusion of Cardiac Magnetic Resonance Images. *Medical Image Analysis*, 3:77–101, 1999.
- [136] F. Schipp, W. R. Wade, and P. Simon. *Walsh series: an introduction to dyadic harmonic analysis*. Adam Hilger, 1990.
- [137] J. Sijbers, A. J. den Dekker, P. Scheunders, and D. Van Dyck. Maximum-likelihood estimation of Rician distribution parameters. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(3):357–361, June 1998.

- [138] A. Singh, D. Goldgof, and D. Terzopoulos. Deformable models in Medical Image Analysis. *IEEE Computer Society*, 1998.
- [139] K. Sivaramakrishnan and T. Weissman. A context quantization approach to universal denoising. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(6):2110–2129, June 2009.
- [140] M. Smith and T. Barnwell. Exact reconstruction for tree-structured subband codes. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 34:434–441, 1986.
- [141] T. P. Srinivasan. Simply invariant subspaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 69:706–709, 1963.
- [142] A. Stadler, W. Schima, A. Ba-Ssalamah, J. Kettenbach, and E. Eisenhuber. Artifacts in body MR imaging: their appearance and how to eliminate them. *European Radiology*, 17:1242–1255, 2007.
- [143] T. Stavropoulos. The geometry of extension principles. *Houston Journal of Mathematics*, 38(3):833–853, 2012.
- [144] E. M. Stein. *Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley theory*. Princeton University Press, 1970.
- [145] J. Stöckler. A Laurent operator technique for multivariate frames and wavelet bases. In *Advanced topics in multivariate approximation*, World Scientific Publishing Company, River Edge, pages 339–354, 1996.
- [146] J. Stöckler. Affine frames and multiresolution. In *Multivariate approximation and splines*, International Series of Numerical Mathematics, Basel- Birkhäuser, volume 125, pages 307–320, 1997.
- [147] J. V. Stone, J. Porrill, N. R. Porter, and I. D. Wilkinson. Spatiotemporal independent component analysis of event-related fMRI data using skewed probability density functions. *Neuroimage*, 15(2):407–421, February 2002.
- [148] A. Uchiyama. A constructive proof of the Fefferman-Stein decomposition of $BMO(\mathbb{R}^n)$. *Acta Mathematica*, 148(1):215–241, July 1982.
- [149] P. Vaidyanathan. Multirate digital filters, filter banks, polyphase network and applications: a tutorial. *Proceedings of the IEEE*, 78:56–93, 1990.
- [150] M. Vetterli and C. Herley. Wavelets and filter banks: theory and design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40:2207–2232, 1992.

- [151] L. F. Villemoes. Wavelet analysis of refinement equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 25(5):1433–1460, 1994.
- [152] J. von Neumann. On rings of operators: reduction theory. *Annals of Mathematics*, 50:401–485, 1949.
- [153] U. Vovk, F. Pernus, and B. Likar. A review of methods for correction of intensity inhomogeneity in MRI. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 26(3):405–421, 2007.
- [154] J. Walsh. A closed set of normal orthogonal functions. *American Journal of Mathematics*, 45:5–24, 1923.
- [155] Z. Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh, and E. P. Simoncelli. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(4):600–612, April 2004.
- [156] R. Wirestam, A. Bibic, J. Lätt, S. Brockstedt, and F. Stahlberg. Denoising of complex MRI data by Wavelet-domain filtering: application to high-b-value diffusion-weighted imaging. *Journal of the American College of Cardiology*, 56(5):1114–1120, November 2006.
- [157] G. Wright. Magnetic resonance imaging. *IEEE Signal Processing Magazine*, 14(1):56–66, January 1997.
- [158] X. Yang and B. Fei. A wavelet multiscale denoising algorithm for magnetic resonance (MR) images. *Measurement Science and Technology*, 22(2):1–26, February 2011.
- [159] E. Zarahn, G. K. Aguirre, and M. D’esposito. Empirical analysis of BOLD fMRI statistics. Spatial unsmoothed data collected under null-hypotesis conditions. *Neuroimage*, 5(3):179–197, April 1997.