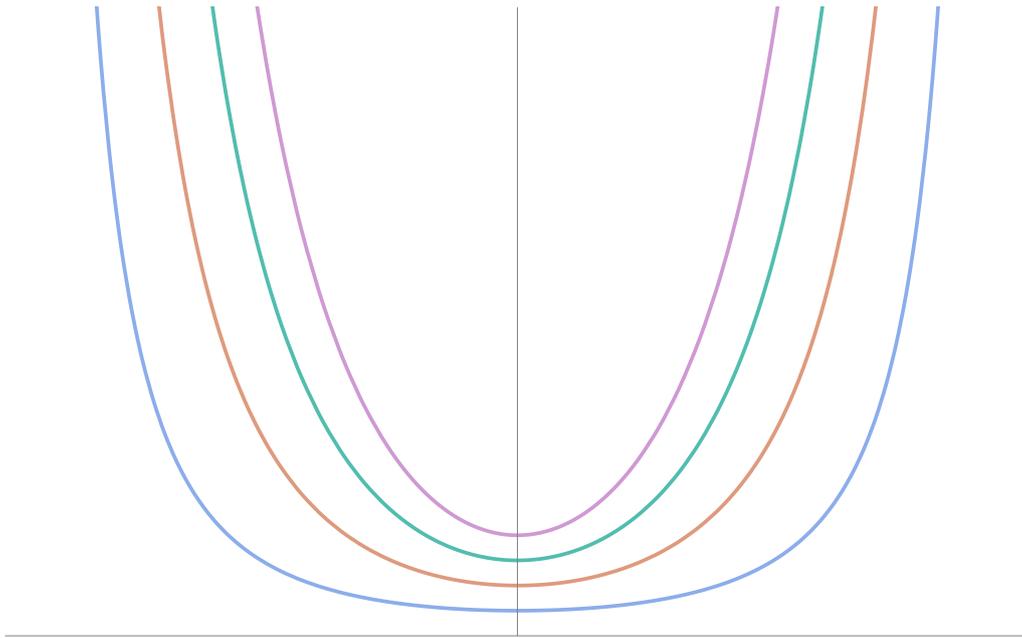


# Mecánica cuántica supersimétrica y potenciales $V(x) = \beta|x|^\alpha$

Trabajo fin de Grado



Realizado por  
Carlos Alonso Viñas

Dirigido por  
Luis Miguel Nieto Calzada



---

**Universidad de Valladolid**

Grado en Física  
Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica



## Resumen

En esta memoria se presentan los fundamentos de la mecánica cuántica supersimétrica y algunas de sus aplicaciones principales. En ella se demuestran las características más importantes y se añaden algunos ejemplos ilustrativos. Algunos de estos aspectos son las relaciones entre parejas de potenciales supersimétricos, sus autovalores y sus estados propios. Dentro de este marco, el primer capítulo se articula como una introducción a la supersimetría, y cómo de esas teorías surgió la mecánica cuántica supersimétrica. El segundo capítulo es el cuerpo de esta parte, en el que se explican los fundamentos partiendo de ideas abstractas del álgebra supersimétrica a modelos más concretos.

A continuación, en una segunda parte, se explica la técnica que permite crear familias de parejas de potenciales dado un potencial con un estado ligado, estableciendo jerarquías. Esto permite establecer una interesante relación con los potenciales que son solubles analíticamente en mecánica cuántica, como el oscilador armónico o el pozo de potencial. Dentro de esta parte, en el tercer capítulo se explican las propiedades que deben cumplir dichos potenciales y la forma de trabajar con ellos, para a continuación incluir algunos ejemplos que permiten comprobar las ideas tanto de los fundamentos de la mecánica cuántica supersimétrica como de las propiedades de los potenciales de forma invariante. Finalmente, los capítulos cuarto y quinto (la parte original de este trabajo) son la aplicación de estas técnicas a potenciales unidimensionales del tipo

$$V(x) = |x|^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

y a su equivalente tridimensional,

$$V(r) = r^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

Esta familia de potenciales tiene como interés el contener al oscilador armónico.



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Las teorías de unificación . . . . .	1
1.2. Supersimetría como solución . . . . .	3
1.3. Supersimetría y mecánica cuántica . . . . .	5
<b>2. Fundamentos</b>	<b>7</b>
2.1. Álgebra supersimétrica . . . . .	7
2.2. Propiedades del caso $N = 2$ . . . . .	8
2.3. Modelo de Witten . . . . .	12
<b>3. Jerarquías e invariancia de forma</b>	<b>15</b>
3.1. Jerarquías del Hamiltoniano . . . . .	15
3.2. Potenciales de forma invariante . . . . .	17
3.3. Ejemplos . . . . .	19
<b>4. Potencial unidimensional <math>V_\alpha(x) = \beta x ^\alpha</math></b>	<b>23</b>
4.1. El problema en mecánica clásica . . . . .	23
4.2. Estudio cuántico . . . . .	29
4.3. Potenciales y socios supersimétricos . . . . .	34
<b>5. Socios supersimétricos de <math>V_\alpha(r) = \beta r^\alpha</math></b>	<b>41</b>
5.1. Ecuación de Schrödinger radial . . . . .	41
5.2. Resolución . . . . .	42
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>
<b>A. Método de Numerov</b>	<b>47</b>
A.1. Desarrollo teórico . . . . .	47
A.2. Implementación del método . . . . .	52



# 1

## Introducción

La supersimetría es una simetría entre fermiones y bosones. Una teoría de campos supersimétrica consiste en un conjunto de campos cuánticos y de un Lagrangiano que contenga esa simetría. El Lagrangiano determina, a través del principio de acción, el comportamiento dinámico de las partículas. Un modelo supersimétrico en los que la supersimetría sea una simetría local y no global se denomina teoría de supergravedad. Las teorías supersimétricas describen la creación de partículas del vacío y las interacciones entre ellas, y se manifiesta en sus espectros de energía y en los procesos de interacción, aunque se traten de partículas con diferente espín y estadística.

Tanto la supersimetría como la supergravedad buscan una descripción unificada de la materia, que actualmente dividimos en quarks y leptones (ambos fermiones); y las interacciones, descritas como intercambio de partículas (bosones), que clasificamos en cuatro interacciones básicas: gravedad, nuclear débil, nuclear fuerte y electromagnética. El marco de trabajo para lograr esta teoría unificada son las teorías cuánticas de campos relativistas. Esta unificación debe incluir, por tanto, las cuatro interacciones. Sin embargo existen diferencias entre la gravedad y las otras tres interacciones: como la gravedad es atractiva y de largo alcance, los objetos grandes colapsarían por su propio peso si las otras interacciones no fuesen mucho más fuertes que la gravedad a pequeñas distancias. Esta diferencia entre las fuerzas ha hecho que la física de la gravedad se encuentre muy alejada del resto de la física, volviendo también muy difícil diseñar experimentos en los que comprobar teorías unificadas o para obtener datos para dichas teorías.

### 1.1. Las teorías de unificación

#### 1.1.1. Teorías gauge para describir las interacciones

La fuerza nuclear fuerte, la débil y el electromagnetismo se pueden modelar en una teoría cuántica de campos gauge, en los que la interacción entre fermiones puede ser vista como el resultado de introducir transformaciones 'locales' pertenecientes al grupo de simetría interna en el que se base la teoría gauge. El Lagrangiano que describe dicho campo debe ser invariante gauge de forma local, lo que implica que las cargas (carga eléctrica, energía, isoespín...) deben conservarse, como sabemos gracias al teorema de Noether. El hecho de que además deba ser local hace necesario introducir un campo adicional, que se llama potencial gauge, cuyos cuantos interactúan con las partículas cargadas. Esta interacción genera las fuerzas entre las partículas. Por ejemplo, la invariancia gauge de la carga eléctrica nos obliga a introducir el cuadripotencial y sus cuantos, los fotones. Esto

## 2 Introducción

resulta en la electrodinámica de Maxwell, en los campos clásicos; o en la electrodinámica cuántica. En resumen, si requerimos que una invariancia del Lagrangiano sea invariancia gauge, obtendremos interacciones y fuerzas.

Las transformaciones gauge bajo las cuales un Lagrangiano es invariante tienen estructura de grupo: dos transformaciones gauge son una transformación, una no transformación es el elemento identidad, existe una transformación inversa para cada transformación y tres transformaciones son asociativas. Esto permite identificar al grupo  $SU(3)$  con las interacciones fuertes y al grupo  $U(1) \times SU(2)$  con las interacciones electrodébiles.

### 1.1.2. La gravedad y la renormalización

Las teorías gravitatorias y de partículas están bien definidas en sus respectivos dominios: una partícula elemental puede ser tratada como si la gravitación no existiera, debido a las masas y las distancias de trabajo. Por tanto, cualquier teoría que incluya la gravedad debe ser muy cercana a las teorías que no la consideran. Sin embargo, aún no se ha conseguido una teoría cuántica de la gravedad.

Una vez asumimos que la gravedad debe ser cuantizada, el problema de la renormalización se vuelve muy importante. La renormalización es necesaria en las teorías cuánticas de campos para dar sentido a algunas integrales divergentes que aparecen en las expansiones perturbativas de procesos físicos. Estas divergencias generalmente son modeladas como polarizaciones del vacío e interacciones de partículas virtuales, y son ilustrados por los diagramas de Feynman. En las teorías renormalizables las divergencias pueden tratarse redefiniendo un número finito de parámetros de forma que se reproduzcan los resultados experimentales. Una motivación por las teorías gauge es que son renormalizables. Una teoría es no renormalizable si se necesitan infinitos parámetros. Por lo general, las constantes con dimensiones negativas de masa llevan a teorías no renormalizables, y siempre que se intenta cuantizar la gravedad se acaba obteniendo una teoría con una constante de Newton  $G$  con dimensiones (en unidades naturales)  $m^{-2}$ .

### 1.1.3. El problema de unificación

La energía de Planck es la energía en la que la gravedad y los efectos cuánticos tienen una fuerza comparable, y es donde las teorías actuales de la gravedad y de las otras interacciones se vuelven incompatibles y donde se espera que se manifieste la unificación de las interacciones. Esta energía puede estimarse de la única expresión con dimensiones de energía que puede formarse con las constantes  $\hbar$ ,  $c$  y  $G$ ,

$$E_{Planck} = c^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{19} \text{ GeV}, \quad (1.1)$$

lo cual hace imposible esperar resultados experimentales de la región de Planck (para hacernos una idea, en el LHC se está trabajando actualmente con energías de  $10^3 \text{ GeV}$ ).

Además la imagen de  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  de las otras fuerzas no es una imagen unificada completamente. La única propiedad que los une es que están descritos por teorías gauge, que sin embargo sugieren alguna idea de unificación. Se ha realizado mucho trabajo en la búsqueda de un grupo gauge más grande que pueda describir las tres interacciones

en altas energías, que se conocen como teorías de gran unificación (GUTs, por sus siglas en inglés). De ocurrir esto, debería darse alrededor de los  $10^{15}$  GeV. Estas teorías han tenido algunos éxitos y algunos fracasos.

## 1.2. Supersimetría como solución

Una fuerza únicamente atractiva como la de la gravedad debe ser descrita por un campo con espín entero y par (en concreto, espín 2). La fuerza electromagnética, que puede ser atractiva o repulsiva, viene descrita por un campo de espín 1. Existen teoremas de imposibilidad (no-go theorems) que prohíben transformaciones directas de simetría entre campos con diferente número entero de espín, haciendo que las teorías supersimétricas sean las únicas posibles de utilizar para unificar las fuerzas de la naturaleza, ya que estas no cumplen los teoremas de imposibilidad. La supersimetría relaciona ambos campos a través de un intermediario, el gravitino, que posee espín  $\frac{3}{2}$ .

La supersimetría postula una simetría entre bosones y fermiones [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Una teoría supersimétrica deberá, por tanto, entender cómo una transformación de simetría afecta a las demás (el álgebra) y a los posibles sistemas (los multipletes) sobre las que actúa. Las operaciones transformarán a los miembros dentro de un multiplete, y se podrán representar como operadores lineales en la representación generada por los multipletes. Deberá también predecir la evolución temporal, a través de un Hamiltoniano o un Lagrangiano apropiado. El marco de trabajo es la teoría cuántica de campos.

El progreso en entender las partículas elementales en  $SU(3)$  a través del camino óctuple llevó a buscar algún tipo de simetría que relacionase los diferentes multipletes aunque tuviesen diferente espín. Los fracasos en esta búsqueda llevaron a la formulación del teorema de imposibilidad de Coleman-Mandula [10], en los que se demuestra que es imposible, dentro del marco de las teorías de campo relativistas, relacionar las simetrías espaciotemporales con las simetrías internas como la carga eléctrica, la hipercarga o el isoespín a través de operadores bosónicos. Este obstáculo puede salvarse, ya que se pueden incluir espines diferentes en el mismo multiplete si se incluyen operaciones de simetría cuyos generadores obedezcan relaciones de anticonmutación.

En 1973 Wess y Zumino [11] presentaron un modelo de campo renormalizable de una partícula de espín  $\frac{1}{2}$  que interactuaba con dos partículas de espín 0, relacionados por transformaciones de simetría, y que por tanto se encontraban en el mismo multiplete. Las limitaciones del teorema de Coleman-Mandula fueron evitadas introduciendo un operador fermiónico de espín  $\frac{1}{2}$  que obedecía relaciones de anticonmutación. Con trabajos posteriores, en los que se extendieron los resultados del teorema de no-go a los fermiones [12], se pudo probar que sólo las teorías supersimétricas pueden ser solución a los problemas de unificación, y que además están restringidas: las simetrías espaciotemporales y las simetrías internas sólo se pueden relacionar usando operadores fermiónicos  $Q$  con espín  $\frac{1}{2}$  con las propiedades del modelo de Wess Zumino o muy parecidas a ellas. Sólo con la supersimetría puede haber partículas con diferente espín en un multiplete, como el gravitón y el fotón.

## 4 Introducción

### 1.2.1. Transformaciones supersimétricas y supersimetrías N-extendidas

Las transformaciones supersimétricas son generados por operadores fermiónicos  $Q$  que cambian estados fermiónicos por bosónicos y viceversa,

$$Q|fermi\acute{o}n\rangle = |bos\acute{o}n\rangle, \quad Q|bos\acute{o}n\rangle = |fermi\acute{o}n\rangle. \quad (1.2)$$

La relación entre los fermiones y los bosones, el número de operadores  $Q$  y las propiedades de cada estado dependen del modelo supersimétrico, sin embargo, hay algunas propiedades generales:

- El comportamiento de los operadores  $Q$  es el de un espinor, concretamente se comporta como un operador de espín  $\frac{1}{2}$ : si aplicamos una rotación de  $2\pi$  radianes alrededor de un eje, tenemos que

$$UQ|bos\acute{o}n\rangle = UQU^{-1}U|bos\acute{o}n\rangle = U|fermi\acute{o}n\rangle, \quad (1.3)$$

$$UQ|fermi\acute{o}n\rangle = UQU^{-1}U|fermi\acute{o}n\rangle = U|bos\acute{o}n\rangle, \quad (1.4)$$

y como los estados fermiónicos tienen un cambio de signo en una rotación de  $2\pi$  y los bosones no, se tiene que

$$U|fermi\acute{o}n\rangle = -|fermi\acute{o}n\rangle, \quad U|bos\acute{o}n\rangle = |bos\acute{o}n\rangle, \quad (1.5)$$

y por tanto,

$$UQU^{-1} = -Q, \quad (1.6)$$

que es el comportamiento de un operador fermiónico. Si se realiza el mismo proceso con todas las transformaciones de Lorentz, se obtiene que se trata de un espinor.

- Los operadores  $Q$  son invariantes bajo traslaciones, lo que implica que conmutan con la energía y el momento: no importan las traslaciones de coordenadas antes o después de realizar una transformación supersimétrica. Puede demostrarse que el anticonmutador de un operador  $Q$  y su adjunto  $Q^\dagger$  debe ser una combinación lineal de la energía y el momento,

$$\{Q, Q^\dagger\} = \alpha E + \vec{\beta}\vec{E}. \quad (1.7)$$

Esto es un resultado importante, ya que relaciona las transformaciones supersimétricas con transformaciones espaciotemporales.

- Otra consecuencia que se obtiene de la anterior es que el espectro del operador Hamiltoniano en una teoría supersimétrica no tiene autovalores negativos. Si sumamos el anticonmutador dado en la ecuación 1.7 sobre todos los operadores  $Q$  los términos del momento se anulan y se tiene que

$$\sum_{\text{todos } Q} \{Q, Q^\dagger\} \propto E. \quad (1.8)$$

El signo de la constante de proporcionalidad, para que tenga un significado físico correcto, debe ser positivo.

- Todo supermultiplete debe contener al menos un fermión y un bosón cuyos espines se diferencien en  $\frac{1}{2}$ . Si llamamos vacío  $|0\rangle$  al estado con energía cero tenemos que

$$E|0\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q|0\rangle = 0 = Q^\dagger|0\rangle \quad \forall Q, \quad (1.9)$$

y por tanto todo estado con energía no nula  $|1\rangle$  no puede ser invariante bajo una transformación supersimétrica. Esto implica que debe existir al menos una pareja  $Q|1\rangle$  del estado  $|1\rangle$ , con una diferencia de espín de  $\frac{1}{2}$ .

- Todos los estados en un multiplete tienen la misma masa si no hay ruptura espontánea de la supersimetría. Esto se debe a la conmutación entre los generadores de supersimetría  $Q$  y los generadores de transformaciones espaciotemporales.
- Hay ruptura espontánea de la supersimetría si y solo si la energía del estado más bajo, el vacío, es no nula, ya que de esta forma se tiene que

$$Q|0\rangle \neq 0, \quad \text{o bien} \quad Q^\dagger|0\rangle \neq 0. \quad (1.10)$$

Los operadores  $Q$  son espinores en el espacio-tiempo, y por tanto tienen cuatro componentes reales. Si consideramos un único operador  $Q$ , estamos ante una teoría supersimétrica  $N = 1$ . Si por el contrario consideramos  $N$  operadores  $Q$ , tenemos entonces una teoría con supersimetría  $N$ -extendida, que dará lugar a  $N$  supercompañeros de cada partícula del modelo estándar. A los supercompañeros de los bosones se les denomina añadiendo el sufijo -ino, mientras que a los supercompañeros de los fermiones se les añade el prefijo  $s$ -.

Existe un valor máximo para  $N$ , dependiendo de la teoría en la que se trabaje. Si tenemos, por ejemplo,  $N = 2$ , podremos tener dos supercompañeros del fotón, normalmente diferentes en espín entre ellos. Esto implica que en un multiplete de una supersimetría  $N$ -extendida contiene partículas con un espín hasta  $\frac{1}{4}N$ . Las teorías de campo renormalizables que consideran un espacio plano contienen espines hasta  $\frac{3}{2}$  (espines superiores requieren introducir constantes con dimensiones de masa negativas), mientras que las teorías gravitatorias contienen espines hasta  $\frac{5}{2}$ , y por tanto tenemos los límites  $N_{max} = 4$  para teorías de espacio plano renormalizables, y  $N_{max} = 8$  para supergravedad.

En dichas teorías existe un único multiplete con espines  $0 \leq s \leq 1$  y  $0 \leq s \leq 2$ , respectivamente. Tras estudiar estas teorías se ha comprobado que  $N = 4$  es renormalizable y finito, sin embargo, el espectro no se ajusta al de las partículas elementales. La supergravedad  $N = 8$ , y especialmente la que tiene invariancia local, aunque no tiene las propiedades de renormalización que  $N = 4$ , es la principal candidato para una teoría del todo.

### 1.3. Supersimetría y mecánica cuántica

Una de las predicciones de la supersimetría es la existencia de supercompañeros de las partículas conocidas, los cuales tienen la misma masa. Sin embargo no se han encontrado dichos supercompañeros, lo que implica que debe existir ruptura espontánea de la supersimetría. Se espera que esta ruptura sea en la escala electrodébil para que así pueda explicar los problemas de jerarquía de las diferencias de masas. Esto lleva a un problema, y es que la escala natural de ruptura de simetría es la escala de Planck. Surgieron ideas para explicarlo, entre las que se encuentra una ruptura de la supersimetría no perturbativa.

## 6 Introducción

Es dentro de este contexto cuando se empezó a estudiar [13, 14] un caso más simple de la supersimetría, la mecánica cuántica supersimétrica. En papers posteriores [15] Witten introdujo un índice para estudiar la ruptura de la supersimetría. En esta primera época, solamente se utilizó como 'campo de pruebas' para estudiar métodos no perturbativos de ruptura de la supersimetría en teorías de campos.

Una vez que se comenzaron a estudiar los diferentes aspectos de la mecánica cuántica supersimétrica se fue viendo que era un área de propio interés. Por ejemplo, se encuentra relacionada con el método de factorización introducido por Schrödinger [16] y generalizado por Infled y Hull [17], que fue el primer método en categorizar los potenciales solubles analíticamente. Pronto se desarrolló toda una técnica para entender mejor los problemas con potenciales solubles. Las ideas de la mecánica cuántica supersimétrica se han podido aplicar a otras áreas de la física [18] como la física nuclear, física atómica, materia condensada y física estadística.

En la mecánica cuántica supersimétrica se considera un álgebra supersimétrica simplificada, que incluye operadores fermiónicos y bosónicos. Como los operadores fermiónicos conmutan con el Hamiltoniano, se obtienen relaciones entre los autovalores y los estados propios de cada componente del Hamiltoniano supersimétrico. La mecánica cuántica supersimétrica puede verse como un campo degenerado dentro de la teoría de Wess-Zumino, sin embargo, dentro del marco de estudio no es necesario hacer referencia a bosones y fermiones.

En 1983 se introdujo el concepto de potenciales de forma invariante. Un potencial es de forma invariante si su compañero supersimétrico tiene la misma dependencia espacial salvo posibles cambios en los parámetros. Dichos potenciales permiten obtener el espectro de energías de forma algebraica, al igual que sus estados propios y sus S-matrices. La clasificación de los potenciales que cumplen la condición de invariancia de forma aún no se ha resuelto.

# 2

## Fundamentos

En este capítulo se introduce lo que se conoce como mecánica cuántica supersimétrica  $N$ -extendida [19]. Esto fue inicialmente formulado por Nicolai [20] para  $N = 2$  y posteriormente por Witten para  $N > 2$ , intentando encontrar modelos no relativistas de sistemas cuánticos para estudiar rupturas de la simetría en las teorías cuánticas de campos. Veremos que para  $N \geq 2$  se tienen todas las propiedades de la mecánica cuántica supersimétrica, ya que nos permite introducir el operador paridad de Witten. Este operador permite separar el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  en dos subespacios. Posteriormente se estudia un caso particular introducido por Witten, con  $N = 2$ , que es el modelo más común utilizado.

### 2.1. Álgebra supersimétrica

Supongamos un sistema cuántico caracterizado por un Hamiltoniano  $H_s$  (al que denominamos Hamiltoniano supersimétrico), que actúa sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Supongamos que podemos definir  $N$  operadores autoadjuntos  $Q_i = Q_i^\dagger$  en el mismo espacio, a los que llamaremos supercargas. El sistema se denomina supersimétrico si cumple las condiciones del superálgebra

$$\{Q_i, Q_j\} = H_s \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker y  $\{\cdot, \cdot\}$  es el anticonmutador, que viene definido por

$$\{B, C\} = BC + CB. \quad (2.2)$$

Estas condiciones imponen ciertas restricciones sobre el Hamiltoniano supersimétrico. De la ecuación (2.1) se deduce

$$H_s = 2Q_1^2 = 2Q_2^2 = \dots = 2Q_N^2 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N Q_i^2, \quad (2.3)$$

y de esta última se deduce además que

$$[H_s, Q_i] = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4)$$

lo que implica que las supercargas son constantes del movimiento siempre y cuando no dependan explícitamente del tiempo. Otra consecuencia que se extrae de la ecuación (2.3) es que los autovalores son todos mayores o iguales que cero. Esto implica que la energía del estado fundamental de un sistema supersimétrico es mayor o igual que cero,  $E_0 \geq 0$ .

## 8 Fundamentos

Se dice que un sistema supersimétrico tiene buena supersimetría si  $E_0 = 0$ , y que tiene una ruptura de supersimetría si  $E_0 > 0$ . Que  $E_0 = 0$  implica que todas las supercargas aniquilan todos los posibles estados (normalizados) fundamentales del sistema  $|\psi_0^j\rangle$  ( $j$  se incluye para dar cuenta de las posibles degeneraciones):

$$Q_i |\psi_0^j\rangle = 0, \quad \forall i, j, \quad (2.5)$$

ya que podemos reescribir la ecuación de Schrödinger en términos de las supercargas gracias a la ecuación (2.3),

$$H_s |\psi_0^j\rangle = E_0 |\psi_0^j\rangle \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \|Q_i |\psi_0^j\rangle\|^2 = E_0 |\psi_0^j\rangle, \quad (2.6)$$

y si  $E_0 = 0$  entonces  $Q_i |\psi_0^j\rangle = 0, \forall i = 1, 2, \dots, N$ . También se puede ver que si se rompe la supersimetría, es decir,  $E_0 \neq 0$ , entonces tiene que existir algún par de valores de  $i, j$  que no cumplan la ecuación (2.5).

## 2.2. Propiedades del caso $N = 2$

En esta sección veremos que si nos restringimos a  $N = 2$  tenemos un caso lo suficientemente general para poder establecer todas las propiedades de la mecánica cuántica supersimétrica. Para este caso, y también para los casos  $N > 2$  se puede definir un operador adicional, que se denomina paridad de Witten. Estudiando las propiedades de este operador veremos que los sistemas que tienen  $N \geq 2$  poseen degeneración de autovalores en el Hamiltoniano y que por tanto se puede construir una transformación supersimétrica, que explicaremos más adelante.

El caso  $N = 2$  está formado por dos supercargas  $Q_1$  y  $Q_2$  y un Hamiltoniano  $H$ , y la ecuación (2.1) queda

$$Q_1 Q_2 = -Q_2 Q_1, \quad (2.7)$$

y por tanto la ecuación (2.3)

$$H_s = 2Q_1^2 = 2Q_2^2 = Q_1^2 + Q_2^2. \quad (2.8)$$

Se pueden definir dos supercargas complejas, una la adjunta de la otra, a partir de las dos anteriores,

$$Q := \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1 + iQ_2), \quad Q^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1 - iQ_2). \quad (2.9)$$

Estas nuevas supercargas cumplen

$$Q^2 = 0, \quad (2.10)$$

$$(Q^\dagger)^2 = 0, \quad (2.11)$$

$$\{Q, Q^\dagger\} = H_s. \quad (2.12)$$

### 2.2.1. Paridad de Witten

Supongamos que podemos definir un nuevo operador  $\mathcal{W}$  a parte de los que definen la superálgebra señalada en las ecuaciones (2.10), (2.11), y (2.12), al que denominamos paridad de Witten, que cumple las siguientes relaciones:

$$\mathcal{W}^2 = 1, \quad (2.13)$$

$$\{\mathcal{W}, Q\} = 0, \quad (2.14)$$

$$\{\mathcal{W}, Q^\dagger\} = 0, \quad (2.15)$$

$$[\mathcal{W}, H] = 0. \quad (2.16)$$

Por la ecuación (2.13) se tiene que los valores propios de dicho operador sólo pueden ser  $\pm 1$ . Esto permite dividir el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  en dos subespacios definiendo la proyección de  $\mathcal{H}$  en los espacios asociados a los autovalores del operador de Witten,

$$\mathcal{P}^\pm := \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{W}), \quad (2.17)$$

y por tanto los subespacios son

$$\mathcal{H}^\pm := \mathcal{P}^\pm \mathcal{H} = \{|\psi\rangle \in \mathcal{H} : \mathcal{W}|\psi\rangle = \pm |\psi\rangle\}, \quad (2.18)$$

que se denominan subespacios de paridad positiva ( $\mathcal{H}^+$ ) o negativa ( $\mathcal{H}^-$ ), cumpliendo que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ . Esto permite representar los operadores lineales que actúan en  $\mathcal{H}$  como matrices  $2 \times 2$ . El operador de Witten y los proyectores quedan definidos como

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Por tanto, y en conjunto con las ecuaciones (2.10) y (2.14), la forma de los operadores  $Q$  y  $Q^\dagger$  puede escribirse

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

donde  $A$  y  $A^\dagger$  son operadores que actúan sobre  $\mathcal{H}^-$  y  $\mathcal{H}^+$ , respectivamente, y veremos su significado más adelante. Una definición equivalente a la dada en la ecuación (2.20) es

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

En adelante utilizaremos la definición dada en la ecuación (2.20). Esto implica que los operadores iniciales son de la forma

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Como ya se ha mencionado anteriormente, los operadores  $A$  y  $A^\dagger$ , que actúan como  $A : \mathcal{H}^- \rightarrow \mathcal{H}^+$  y su adjunto  $A^\dagger : \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$ , se denominan operadores aniquilación y

## 10 Fundamentos

creación generalizados, respectivamente. Usando las ecuaciones (2.20) y (2.12), el Hamiltoniano  $H_s$  se puede escribir entonces como

$$H_s = \begin{pmatrix} AA^\dagger & 0 \\ 0 & A^\dagger A \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Bajo esta representación, el Hamiltoniano supersimétrico es diagonal, y está compuesto por dos Hamiltonianos, cada uno actuando sobre uno de los subespacios, llamados socios supersimétricos, definidos por los operadores creación y aniquilación,

$$H_+ := AA^\dagger, \quad H_- := A^\dagger A. \quad (2.24)$$

### 2.2.2. Transformación supersimétrica

Introduzcamos ahora los estados propios de los proyectores  $\mathcal{P}^\pm$  y estudiemos cómo actúan sobre ellos las supercargas  $Q_i$ . Los estados propios de  $P^\pm$  cumplen

$$\mathcal{P}^\pm |\psi^\pm\rangle = \pm |\psi^\pm\rangle, \quad (2.25)$$

que en la notación de matrices introducida en la ecuación (2.19) se escriben como

$$|\psi^+\rangle = \begin{pmatrix} |\phi^+\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi^-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |\phi^-\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

donde  $|\phi^\pm\rangle \in \mathcal{H}^\pm$ . Es claro por tanto que las supercargas de la ecuación (2.20) generan una transformación, ya que transforman los estados de una paridad a la otra:

$$Q\mathcal{H}^- \subset \mathcal{H}^+, \quad Q^\dagger\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^-. \quad (2.27)$$

Esto se puede estudiar de forma explícita con los estados propios del Hamiltoniano debido a que son a la vez estados propios del operador de Witten, ya que  $\mathcal{W}$  y  $H_s$  conmutan, como se puede comprobar en la ecuación (2.16). Por tanto, dado un estado propio contenido en  $\mathcal{H}^+$  ( $\mathcal{H}^-$ ) que denotamos como  $|\psi_n^+\rangle$  ( $|\psi_n^-\rangle$ ), donde  $E_n > 0$  es el autovalor del Hamiltoniano, existe un estado propio contenido en  $\mathcal{H}^-$  ( $\mathcal{H}^+$ ) con el mismo autovalor. Esto puede demostrarse a través de la ecuación de Schrödinger: supongamos un estado  $|\psi_n^-\rangle \in \mathcal{H}^-$ . Como se trata de un estado propio del Hamiltoniano, se tiene

$$H_s |\psi_n^-\rangle = E_n |\psi_n^-\rangle. \quad (2.28)$$

Como además  $[H, Q] = 0$ , se tiene que

$$HQ |\psi_n^-\rangle = QH |\psi_n^-\rangle = E_n Q |\psi_n^-\rangle. \quad (2.29)$$

Y entonces  $Q |\psi_n^-\rangle \in \mathcal{H}^+$ . Por tanto, se tienen las siguiente relaciones entre ambos estados propios, una vez normalizados:

$$|\psi_n^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_n}} Q^\dagger |\psi_n^+\rangle, \quad |\psi_n^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_n}} Q |\psi_n^-\rangle. \quad (2.30)$$

Si tenemos un estado  $|\phi_n^\pm\rangle \in \mathcal{H}^\pm$  que sea estado propio de  $H_\pm$  con autovalor positivo ( $H_\pm |\phi_n^\pm\rangle = E_n |\phi_n^\pm\rangle$ ,  $E_n > 0$ ), entonces:

$$|\phi_n^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_n}} A^\dagger |\phi_n^+\rangle, \quad |\phi_n^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_n}} A |\phi_n^-\rangle. \quad (2.31)$$

Además, para que haya una buena supersimetría, por definición, tiene que existir al menos un estado en  $\mathcal{H}$ , que denominamos  $|\psi_0\rangle$ , tal que  $H_s |\psi_0\rangle = 0$ . Esto implica que las supercargas deben aniquilar el estado:

$$Q |\psi_0\rangle = 0, \quad Q^\dagger |\psi_0\rangle = 0. \quad (2.32)$$

Pueden darse dos opciones, que  $|\psi_0\rangle$  esté en el subespacio  $\mathcal{H}^-$  o en  $\mathcal{H}^+$ , y entonces

$$|\psi_0^-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |\phi_0^-\rangle \end{pmatrix}, \quad |\psi_0^+\rangle = \begin{pmatrix} |\phi_0^+\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

que se pueden ver como

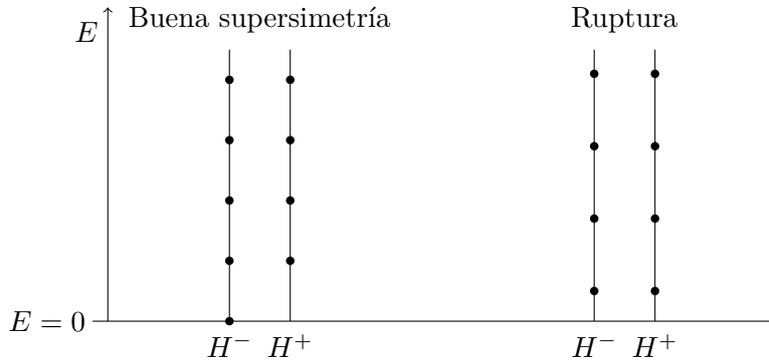
$$A |\phi_0^-\rangle = 0, \quad A^\dagger |\phi_0^+\rangle = 0. \quad (2.34)$$

Esto implica que el espectro de ambos Hamiltonianos será idéntico a excepción del estado fundamental  $E_0 = 0$ . Los operadores que cumplen esta condición son denominados esencialmente isoenergéticos [21]. Observemos que para que un estado se encuentre desemparejado necesariamente debe tener autovalor  $E_0 = 0$ , ya que si  $E_0 > 0$  siempre se cumple las relaciones dadas en la ecuación (2.31). La Figura 2.1 muestra cómo es una buena supersimetría y qué situación se tiene cuando existe ruptura de la supersimetría ( $E_0 > 0$ ). En el Capítulo 3 se profundiza en las relaciones entre ambos Hamiltonianos.

El estado fundamental  $|\psi_0\rangle$  puede tener una paridad de Witten positiva o negativa. Si el estado es degenerado, puede darse el caso en el que tenga ambas paridades. Por lo general este estado no suele estar emparejado, como ocurre con los estados de autovalor positivo. El estado fundamental juega un papel importante a la hora de construir un sistema supersimétrico. Si denotamos por  $n_\pm$  al número de estados con energía nula de  $H^\pm$ , se define el índice de Witten como

$$\Delta := n_- - n_+. \quad (2.35)$$

Este índice indica si la supersimetría es buena ( $\Delta > 0$ ) o si existe ruptura ( $\Delta = 0$ ).



**Figura 2.1:** Comparación de los estados propios de los Hamiltonianos.

### 2.3. Modelo de Witten

En esta sección se estudia un modelo supersimétrico particular, introducido por Witten para estudiar las rupturas de la supersimetría en las teorías de campo. El modelo de Witten es un sistema supersimétrico con  $N = 2$ , donde se definen las supercargas

$$Q_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{P}{\sqrt{2m}} \otimes \sigma_2 + W(x) \otimes \sigma_1 \right), \quad (2.36)$$

$$Q_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{P}{\sqrt{2m}} \otimes \sigma_1 + W(x) \otimes \sigma_2 \right), \quad (2.37)$$

donde  $P$  es el operador momento, el término  $W(x)$  es una función real que asumimos diferenciable y denominamos potencial supersimétrico, y  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

y por tanto las supercargas vienen dadas por

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{iP}{\sqrt{2m}} + W(x) \\ -\frac{iP}{\sqrt{2m}} + W(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{P}{\sqrt{2m}} - iW(x) \\ \frac{P}{\sqrt{2m}} + iW(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Obtenemos, por la relación dada en la ecuación (2.22), que los operadores aniquilación y creación vienen dados por

$$A := \frac{iP}{\sqrt{2m}} + W(x) \quad , \quad A^\dagger = -\frac{iP}{\sqrt{2m}} + W(x), \quad (2.41)$$

y por tanto, los Hamiltonianos  $H_\pm$  definidos en la ecuación (2.24) vienen dados por

$$H_\pm = \frac{P^2}{2m} + V_\pm(x), \quad (2.42)$$

y la ecuación que relaciona los potenciales  $V_\pm$ , llamados socios supersimétricos, con el superpotencial es una ecuación de Ricatti

$$V_\pm(x) = \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} + W(x)^2. \quad (2.43)$$

Para este modelo el operador paridad es la matriz de Pauli  $\sigma_3 = \mathcal{W}$ , por el conmutador  $[Q_1, Q_2] = iH\sigma_3$ , que nos permite dividir el espacio en  $\mathcal{H}^\pm$ . Dados los estados propios  $|\phi_n^\pm\rangle$

de  $H_{\pm}$ , los operadores aniquilación y destrucción actúan como

$$A|\phi_n^-\rangle = \left( \frac{iP}{\sqrt{2m}} + W(x) \right) |\phi_n^-\rangle = \sqrt{E_n} |\phi_n^+\rangle, \quad (2.44)$$

$$A^\dagger|\phi_n^+\rangle = \left( -\frac{iP}{\sqrt{2m}} + W(x) \right) |\phi_n^+\rangle = \sqrt{E_n} |\phi_n^-\rangle. \quad (2.45)$$

En la representación de coordenadas,  $\phi_n^\pm(x) = \langle x|\phi_n^\pm\rangle$ , estos operadores toman la forma

$$\left( \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \phi_n^\mp(x) = \sqrt{E_n} \phi_n^\pm(x), \quad (2.46)$$

donde se recuerda que el operador momento  $P$ , en representación de coordenadas, viene dado por

$$P = -i\hbar \frac{d}{dx}. \quad (2.47)$$

### 2.3.1. El estado fundamental y el potencial supersimétrico

Dentro del modelo de Witten es posible saber si hay ruptura de la supersimetría o no con la forma del potencial supersimétrico. Supongamos que no hay ruptura y tenemos un estado de paridad negativa con autovalor  $E = 0$ . Esto implica que, de la ecuación (2.46),

$$\left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \phi_0^-(x) = 0, \quad (2.48)$$

que se puede integrar, resultando

$$\phi_0^-(x) = C \exp \left\{ -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{x_0}^x W(z) dz \right\}, \quad (2.49)$$

siendo  $C$  una constante de normalización  $\phi_0^-(x_0) = C$ . Se define el superpotencial como

$$U(x) := \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{x_0}^x W(z) dz, \quad (2.50)$$

y por tanto el estado fundamental queda como

$$\phi_0^-(x) = C \exp \{-U(x)\}. \quad (2.51)$$

De forma análoga, si se realizan los cálculos para  $\phi_0^+(x)$  se obtiene

$$\phi_0^+(x) = K \exp \{U(x)\}. \quad (2.52)$$

Observemos que, de haber una buena supersimetría, es decir, un estado fundamental con energía nula, sólo puede estar en  $\mathcal{H}^+$  o en  $\mathcal{H}^-$ , ya que si la función  $\phi_0^-(x)$  dada en la ecuación (2.51) es de cuadrado integrable entonces no lo es la función  $\phi_0^+(x)$  de la ecuación (2.52) y viceversa, ya que

$$\phi_0^+(x) \propto \frac{1}{\phi_0^-(x)}. \quad (2.53)$$

Esto implica que el estado fundamental  $E_0 = 0$  es no degenerado. El proceso inverso también es posible, ya que conocido el estado fundamental, el potencial supersimétrico y el superpotencial vienen dados, respectivamente, por

$$U(x) = \pm \ln \left( \frac{\phi_0^\pm(x)}{\phi_0^\pm(x_0)} \right), \quad (2.54)$$

$$W(x) = \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \ln \phi_0^\pm(x). \quad (2.55)$$

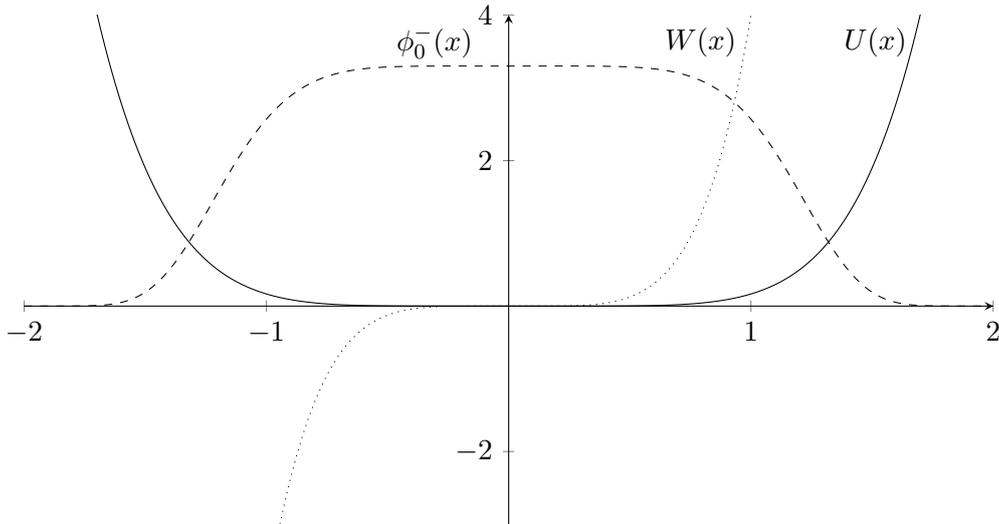
Como se puede observar a través de las ecuaciones (2.42) y (2.43), basta con cambiar el signo del superpotencial para cambiar  $H_\pm \rightarrow H_\mp$ . Por convenio, suele tomarse el signo tal que el estado fundamental con energía nula pertenezca a  $\mathcal{H}^-$ , y esto es que  $A|\phi_0^- \rangle = 0$ .

### 2.3.2. Comportamiento asintótico del superpotencial

Como se ha señalado anteriormente, la función  $\phi_0^-$  en la ecuación (2.51) debe ser de cuadrado integrable. Esto introduce algunas restricciones al superpotencial: debe diverger cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , de manera que

$$\int_{\mathbb{R}} dx \exp \{-2U(x)\} < \infty \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp \{-2U(x)\} = 0. \quad (2.56)$$

Es decir: que exista una buena supersimetría o ruptura sólo depende del comportamiento asintótico del potencial supersimétrico, quedando invariante ante deformaciones que preserven el comportamiento asintótico. La Figura 2.2 muestra cualitativamente cómo debe ser el comportamiento del superpotencial y el estado fundamental para que exista una buena supersimetría.



**Figura 2.2:** Comportamiento que han de tener el superpotencial  $U(x)$  y el estado fundamental  $\phi_0^-(x)$  para que exista una buena supersimetría.

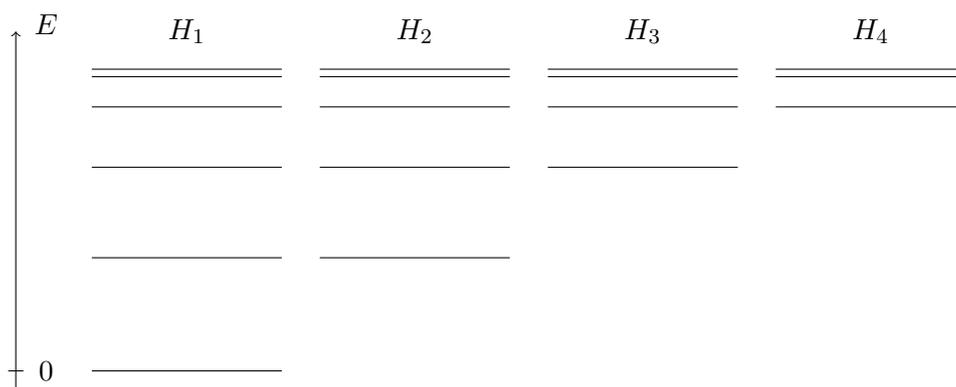
# 3

## Jerarquías e invariancia de forma

La formulación supersimétrica de un sistema no siempre es posible, aunque para sistemas de una dimensión siempre se puede aplicar el modelo de Witten. En este capítulo veremos cómo crear una familia de Hamiltonianos isoenergéticos para aprovechar una interesante propiedad de algunos potenciales, llamada invariancia de forma [22], que nos permitirá obtener el espectro y los estados del potencial supersimétrico [23] generalizando el elegante método utilizado en algunas ocasiones para resolver el oscilador armónico mediante los operadores creación y aniquilación [24].

### 3.1. Jerarquías del Hamiltoniano

Hasta ahora hemos visto que si tenemos el espectro de un Hamiltoniano  $H^- = H_1$  (introducimos el cambio de notación a subíndices para poder trabajar con más de dos Hamiltonianos), podemos obtener un Hamiltoniano  $H^+ = H_2$  isoenergético al primero, con un estado fundamental determinado por el primer estado excitado de  $H^- = H_1$  a través del operador  $A$ . Una vez se tiene  $H^+ = H_2$ , también puede factorizarse para obtener un tercer Hamiltoniano haciendo que  $H^+ = \tilde{H}^- = H_2$  y obteniendo  $\tilde{H}^+ = H_3$ , con un nivel menos de energía que  $\tilde{H}^- = H_2$  y dos menos que  $H^- = H_1$ . Este proceso puede iterarse, obteniendo una familia de Hamiltonianos isoenergéticos, como se indica en la Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Jerarquía de Hamiltonianos.

Esto permite obtener todas las funciones propias y energías de toda la familia de Hamiltonianos si tenemos un potencial soluble en  $H_1$ , pero también, si se tiene el estado

fundamental de toda la familia de Hamiltonianos, se puede reconstruir el espectro de  $H_1$ . Dado un Hamiltoniano  $H$  podemos identificarlo, salvo una constante, con el Hamiltoniano  $H_1$ . Para ajustar el Hamiltoniano  $H$  a una energía nula en el estado fundamental, y así poder aplicar el modelo de Witten, se debe añadir una constante con dimensiones de energía, que tomaremos siempre con el valor de la energía del estado fundamental, de tal forma que

$$H_1 = A_1^\dagger A_1 - E_0^{(1)}, \quad (3.1)$$

donde  $E_n^{(i)}$  es la energía del nivel  $n$  del Hamiltoniano ( $i$ )-ésimo. Obtenemos inmediatamente  $H_2$  como

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)}. \quad (3.2)$$

Los estados, dados por la ecuación (2.31) y siguiendo la misma notación que para las energías, quedan de la forma:

$$|\phi_n^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}}} A_1 |\phi_{n+1}^{(1)}\rangle. \quad (3.3)$$

Al Hamiltoniano  $H_2$  dado en la ecuación (3.2) le podemos factorizar de nuevo, obteniendo un nuevo Hamiltoniano  $H_3$ ,

$$H_3 = A_2 A_2^\dagger + E_1^{(1)}, \quad (3.4)$$

con una relación entre energías de la forma

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)}, \quad (3.5)$$

y los estados propios, al igual que lo señalado en la ecuación (3.3), son

$$|\phi_n^{(3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}}} A_2 |\phi_{n+1}^{(2)}\rangle, \quad (3.6)$$

que en términos del primer Hamiltoniano  $H_1$  es

$$|\phi_n^{(3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}}} \frac{1}{\sqrt{E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}}} A_2 A_1 |\phi_{n+2}^{(1)}\rangle. \quad (3.7)$$

Es decir, podemos generalizar de la siguiente forma: para las energías tenemos que

$$E_n^{(k)} = E_{n+k-1}^{(1)}, \quad (3.8)$$

y para las funciones de onda

$$|\phi_n^{(k)}\rangle = \prod_{i=0}^{k-1} \left( \frac{A_k}{\sqrt{E_{n+k-1}^{(1)} - E_i^{(1)}}} \right) |\phi_{n+k-1}^{(1)}\rangle, \quad (3.9)$$

donde  $k$  puede ser, como máximo, el número de estados ligados del Hamiltoniano  $H_1$ .

### 3.2. Potenciales de forma invariante

Se dice que los socios  $V_{\pm}(c_0, x)$  son de forma invariante si cumplen

$$V_+(x, c_0) = V_-(x, c_1) + R(c_1), \quad (3.10)$$

donde  $c_1$  es un parámetro y  $c_2$  es una función de  $c_1$ :  $c_2 = f(c_1)$ . Esto es una condición de integrabilidad, y junto a la jerarquía de Hamiltonianos, permite resolver todos los sistemas que cumplan dicha condición si no hay ruptura de la supersimetría. Partiendo del Hamiltoniano  $H_1$  (y trabajando en la representación de coordenadas) obtenemos un segundo Hamiltoniano  $H_2$ ,

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} + V_1(x, c_1) \quad \longrightarrow \quad H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} + V_2(x, c_1). \quad (3.11)$$

Podemos utilizar la ecuación (3.10) para reescribir el segundo Hamiltoniano como

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} + V_1(x, c_2) + R(c_1). \quad (3.12)$$

Si factorizamos este Hamiltoniano para obtener un tercero:

$$H_3 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} + V_2(x, c_2) + R(c_1) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} + V_1(x, c_3) + R(c_2) + R(c_1), \quad (3.13)$$

y seguimos iterando el proceso, podemos generalizarlo como

$$H_k = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} + V_1(x, c_k) + \sum_{i=1}^{k-1} R(c_i). \quad (3.14)$$

¿Qué tiene de importancia esto para obtener las energías de  $H_1$ ? Observemos que, dado que el estado fundamental es de energía nula, se tiene que

$$H_1 \psi_0^{(1)}(x) = 0, \quad (3.15)$$

y por tanto

$$H_2 \psi_0^{(1)}(x) = H_1 \psi_0^{(1)}(x) + R(c_1) \psi_0^{(1)}(x) = R(c_1) \psi_0^{(1)}(x), \quad (3.16)$$

Lo que nos lleva a identificar

$$E_0^{(2)} = R(c_1). \quad (3.17)$$

Si se itera el proceso, se tiene

$$H_k \psi_0^{(1)}(x) = H_1 \psi_0^{(1)}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} R(c_i) \psi_0^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} R(c_i) \psi_0^{(1)}(x), \quad (3.18)$$

de donde

$$E_0^{(k)} = \sum_{i=1}^{k-1} R(c_i). \quad (3.19)$$

En el Cuadro 3.1 se incluyen los potenciales unidimensionales conocidos en la literatura especializada que cumplen la invariancia de forma.

**Cuadro 3.1:** Potenciales unidimensionales conocidos que cumplen la condición de invariancia de forma.

Potencial	$V(x)$	$W(x)$
Oscilador	$\frac{1}{2}m\omega^2 \left(x - \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{a}{\omega}\right)^2$	$\sqrt{m}\omega x + \sqrt{2}a$
Oscilador isotrópico (3D)	$\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - \left(l + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega$	$\sqrt{m}\omega r - \frac{(l+1)\hbar}{\sqrt{mr^2}}$
Coulomb	$-\frac{e}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + \frac{me^4}{2(l+1)^2\hbar^2}$	$\sqrt{m} \frac{e^2}{(l+1)\hbar} - \frac{(l+1)\hbar}{\sqrt{mr^2}}$
Rosen - Morse I	$a^2 + \frac{b^2}{a^2} + 2b \tanh \alpha x - a \left(a + \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \operatorname{sech}^2 \alpha x$	$\sqrt{2} \left(a \tanh \alpha x + \frac{b}{a}\right)$
Rosen - Morse II	$a^2 + \left(b^2 + a^2 + \frac{a\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \operatorname{cosech}^2 \alpha x - b \left(2a + \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \coth \alpha x \operatorname{cosech} \alpha x$	$\sqrt{2} \left(a \coth \alpha x - b \operatorname{cosech} \alpha x\right)$ $a < b$
Eckart I	$a^2 + \frac{b^2}{a^2} - 2b \coth \alpha x + a \left(a - \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \operatorname{cosech}^2 \alpha x$	$-\sqrt{2} \left(a \coth \alpha x - \frac{b}{a}\right)$ $b > a^2$
Eckart II	$-a^2 + \left[b^2 + a \left(a - \frac{a\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right)\right] \csc^2 \alpha x - b \left(2a - \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \csc \alpha x \cot \alpha x$	$-\sqrt{2} \left(-a \cot \alpha x + b \csc \alpha x\right)$ $\alpha x \in [0, \pi], a > b$
Poschl - Teller I	$-(a+b)^2 + a \left(a - \frac{a\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \sec^2 \alpha x + b \left(b - \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \csc^2 \alpha x$	$\sqrt{2} \left(a \tan \alpha x - b \cot \alpha x\right)$ $\alpha x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
Poschl - Teller II	$(a-b)^2 - a \left(a + \frac{a\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \operatorname{sech}^2 \alpha x - b \left(b - \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \csc^2 \alpha x$	$\sqrt{2} \left(a \tanh \alpha x - b \coth \alpha x\right)$ $b < a$
Morse I	$a^2 + b^2 e^{-2\alpha x} - 2b e^{-\alpha x} \left(a + \frac{\alpha\hbar}{2\sqrt{2m}}\right)$	$\sqrt{2} \left(a - b e^{-\alpha x}\right)$
Hiperbólico	$-a^2 + \left[b^2 - a \left(a + \frac{a\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right)\right] \operatorname{sech}^2 \alpha x + b \left(2a + \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \operatorname{sech} \alpha x \tanh \alpha x$	$\sqrt{2} \left(\tanh \alpha x + b \operatorname{sech} \alpha x\right)$
Trigonométrico	$-a^2 + \frac{b^2}{a^2} + a \left(a + \frac{a\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \csc^2 \alpha x - 2b \cot \alpha x$	$\sqrt{2} \left(a \cot \alpha x - \frac{b}{a}\right) - 2b \cot \alpha x$

### 3.3. Ejemplos

A continuación veremos algunos ejemplos en los que se aplican las herramientas que se acababan de comentar.

#### 3.3.1. Pozo de potencial

Para el caso de un pozo de potencial con anchura  $L$ , cuyo potencial es:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (0, L) \\ \infty & \text{si } x \notin [0, L] \end{cases} \quad (3.20)$$

se tienen unas funciones propias

$$\psi_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (3.21)$$

y unas energías

$$E_n^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22)$$

Para conseguir un Hamiltoniano con energía nula en el estado fundamental hacemos  $H_1 = H - E_0^{(1)}$ , obteniendo las funciones propias (haciendo que  $n$  comience en 0 en lugar de 1)

$$\psi_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{L}\right), \quad (3.23)$$

y unas energías

$$E_n^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n(n+2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Para obtener el potencial  $V_1(x)$  necesitamos la segunda derivada, y para el superpotencial  $W(x)$  la primera:

$$\psi_n^{(1)'}(x) = -\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{(n+1)\pi x}{L} \cos\left(\frac{(n+1)\pi x}{L}\right), \quad (3.25)$$

$$\psi_n^{(1)''}(x) = -\sqrt{\frac{2}{L}} \left(\frac{(n+1)\pi x}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{L}\right). \quad (3.26)$$

Se obtiene el potencial

$$V_1(x) = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^2, \quad (3.27)$$

y un superpotencial

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (3.28)$$

Ambos definidos sólo para  $x \in [0, L]$ . El socio supersimétrico, por tanto, resulta

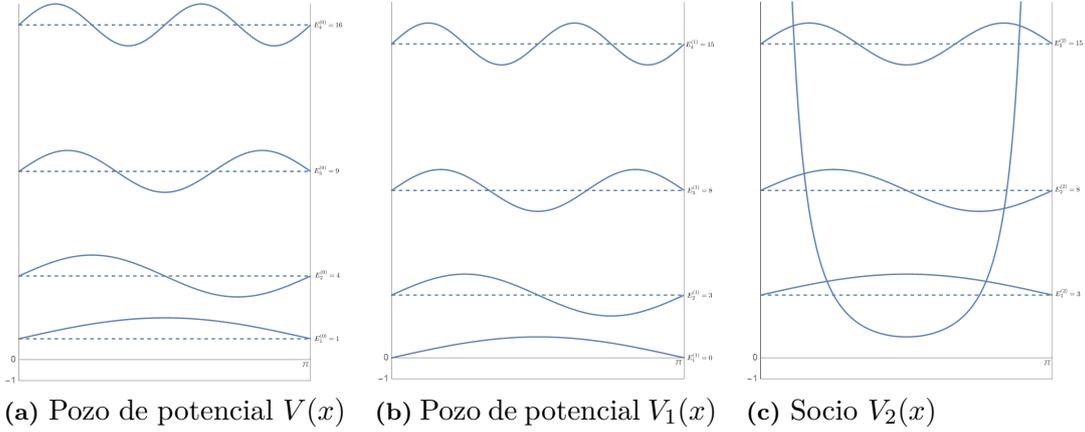
$$V_2(x) = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar\pi}{L} \right)^2 \left[ 2 \csc^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) - 1 \right], \quad (3.29)$$

con energías

$$E_n^{(2)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} (n+1)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.30)$$

Las funciones propias del estado fundamental se obtiene mediante la ecuación (3.9) y resulta

$$\psi_0^{(2)} = -2\sqrt{\frac{2}{3L}} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right). \quad (3.31)$$



**Figura 3.2:** Jerarquías del pozo de potencial con  $L = \pi$ . La Figura 3.2a corresponde al pozo de potencial original. La Figura 3.2b corresponde al pozo de potencial ajustando el estado fundamental a una energía nula. Finalmente la Figura 3.2c corresponde al primer socio supersimétrico del pozo de potencial.

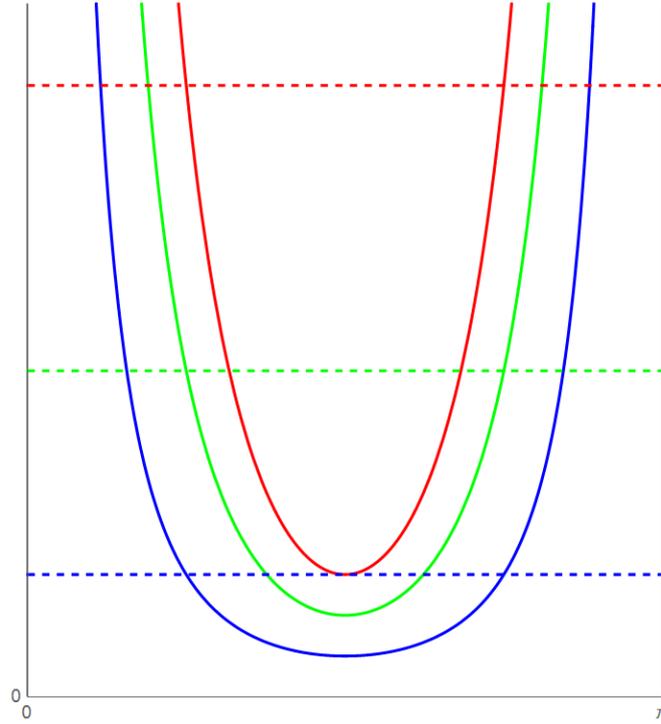
Construyamos ahora una jerarquía de Hamiltonianos. Aplicando el mismo proceso que antes, obtenemos un potencial  $V_3(x)$  que es

$$V_3(x) = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar\pi}{L} \right)^2 \left[ 6 \csc^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) - 4 \right]. \quad (3.32)$$

Iterando el proceso se obtiene toda una familia de potenciales con  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ :

$$V_{(\ell+1)}(x) = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar\pi}{L} \right)^2 \left[ \ell(\ell+1) \csc^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) - \ell^2 \right]. \quad (3.33)$$

Los primeros potenciales se han representado en la Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Jerarquía de potenciales del pozo de potencial para los primeros valores de  $\ell$ :  $\ell = 1$  (azul),  $\ell = 2$  (verde) y  $\ell = 3$  (rojo). Los colores también indican el estado fundamental correspondiente a cada uno de los  $\ell$ .

### 3.3.2. Átomo de hidrógeno

El átomo de hidrógeno se describe usando un potencial de Coulomb

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad (3.34)$$

que introducido en la parte radial de la ecuación de Schrödinger queda (la ecuación radial reducida)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[ -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u(r) = E_0 u(r). \quad (3.35)$$

Lo primero es ajustar el Hamiltoniano para que se tenga un estado fundamental con energía nula. Podemos tomar como nuevo potencial

$$V_1(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - E_0. \quad (3.36)$$

Para obtener el superpotencial, se propone como solución

$$W(r) = C - \frac{D}{r}, \quad (3.37)$$

lo que lleva a los valores

$$C = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0(\ell+1)}, \quad (3.38)$$

$$D = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(\ell+1). \quad (3.39)$$

El superpotencial resulta

$$W(r) = \frac{e^2\sqrt{2m}}{2\pi\epsilon_0\hbar(\ell+1)} - \frac{\hbar(\ell+1)}{\sqrt{2m}} \frac{1}{r}, \quad (3.40)$$

y el socio supersimétrico resulta

$$V_2(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{r^2} + \frac{e^4 m}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2 (\ell+1)^2}. \quad (3.41)$$

Comprobemos a continuación si estos potenciales son de forma invariante. Dado que  $a_2 = \ell$  y  $f(a_1) = \ell + 1$  es claro que si que cumplen la condición de integrabilidad. Iterando el proceso se puede obtener que

$$R(\ell) = \frac{e^4 m (2\ell + 3)}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2 (\ell + 1)^2 (\ell + 2)^2}, \quad (3.42)$$

y recordando la ecuación (3.19), ajustando la energía (ya que la energía inicial no es nula) se obtiene que

$$E_n = \frac{e^4 m}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} \left( \frac{1}{(\ell+1)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{2(\ell+i-1)+3}{(\ell+i)^2(\ell+i+1)^2} \right) \quad (3.43)$$

Para  $\ell = 0$  se puede reescribir el sumatorio y se obtiene el ya conocido

$$E_n = \frac{e^4 m}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2 (n+1)^2} \quad (3.44)$$

# 4

## Potencial unidimensional

$$V_\alpha(x) = \beta|x|^\alpha$$

En esta sección se ha estudiado la familia de potenciales

$$V_\alpha(x) = \beta|x|^\alpha, \quad \alpha > 0. \quad (4.1)$$

Estos potenciales no son todos solubles analíticamente. Tras realizar un estudio de los potenciales en mecánica clásica, se han calculado las energías de los primeros niveles de forma numérica. Por último se han calculado sus socios supersimétricos.

### 4.1. El problema en mecánica clásica

#### 4.1.1. Trayectorias

Dada una partícula que se mueve bajo la acción de un potencial par unidimensional del tipo  $V(x) = \beta|x|^\alpha$ , el Hamiltoniano [25, 26] del sistema viene determinado por:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \beta|x|^\alpha = E, \quad (4.2)$$

que coincide con la energía por ser un sistema conservativo. Para obtener las ecuaciones del movimiento, se resuelven las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\beta\alpha|x|^{\alpha-2}x. \end{cases} \quad (4.3)$$

Combinando ambas para obtener la ecuación del movimiento se obtiene

$$m\ddot{x} = -\beta\alpha|x|^{\alpha-2}x. \quad (4.4)$$

Esta ecuación se puede reescribir como una derivada respecto al tiempo de una función (una integral primera):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\beta}{m}|x|^\alpha \right) = 0, \quad (4.5)$$

24 **Potencial unidimensional**  $V_\alpha(x) = \beta|x|^\alpha$

y por tanto, la función del interior debe ser constante:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\beta}{m}|x|^\alpha = C_1, \quad (4.6)$$

donde la constante  $C_1$  introducida no es más que la energía dividida entre la masa, como se puede comprobar en la ecuación (4.2). Para hallar el movimiento se debe resolver esta ecuación diferencial ordinaria, que contiene un término con valor absoluto de  $x$ . Para ello, lo más sencillo es dividir el espacio en dos regiones para eliminarlo. Se resuelve para  $x > 0$ . Una vez obtenido el resultado final, bastará con hacer una leve modificación para extender su validez a  $x < 0$ . Despejando  $\dot{x}$  de (4.6):

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2mC_1 - 2\beta x^\alpha}{m}}, \quad x > 0. \quad (4.7)$$

Esta es una ecuación diferencial separable, obteniendo como solución:

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{mC_1 - \beta x^\alpha}} dx = t - C_2, \quad (4.8)$$

y resolviendo la integral se obtiene:

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{x(t) \sqrt{1 - \frac{\beta x(t)^\alpha}{mC_1}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}; \frac{\alpha+1}{\alpha}; \frac{\beta x(t)^\alpha}{mC_1}\right)}{\sqrt{\frac{mC_1}{\beta} - x(t)^\alpha}} = t - C_2, \quad (4.9)$$

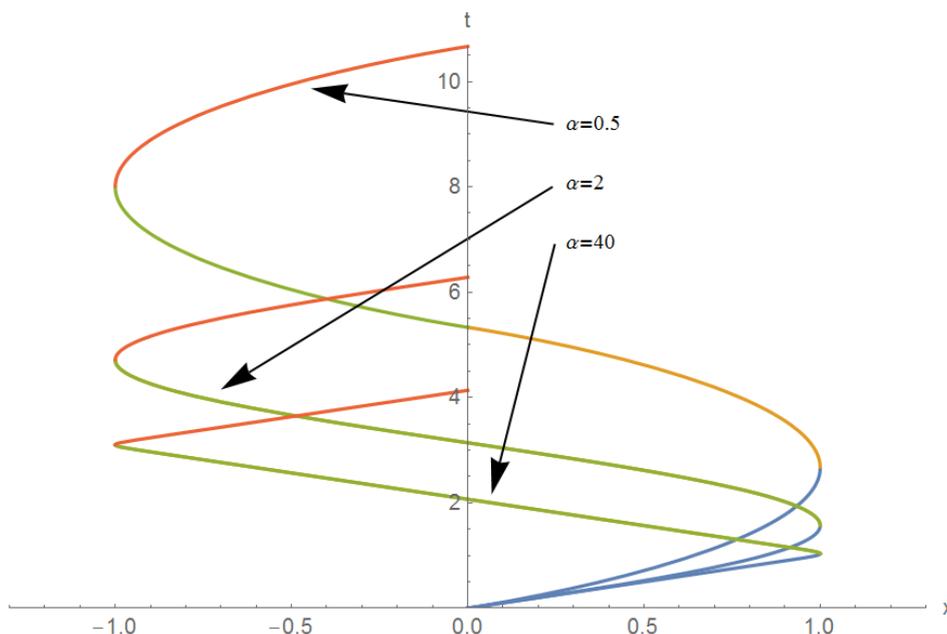
donde el término  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  es una función hipergeométrica [27]. Simplificando los términos con raíces:

$$\pm \sqrt{\frac{\beta}{2C_1}} x(t) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}; \frac{\alpha+1}{\alpha}; \frac{\beta x(t)^\alpha}{mC_1}\right) = t - C_2. \quad (4.10)$$

Los signos representan el movimiento hacia la derecha para el positivo y el movimiento hacia la izquierda del negativo en cada oscilación. Para el caso  $x < 0$ , siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene:

$$\pm \sqrt{\frac{\beta}{2C_1}} x(t) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha}; \frac{\alpha+1}{\alpha}; \frac{\beta(-x(t))^\alpha}{mC_1}\right) = t - C_2. \quad (4.11)$$

Para la mayoría de los casos no se puede despejar  $x(t)$ , aunque siempre se pueden representar para poder comparar, como se puede ver en la Figura 4.1, donde se ha tomado  $m = \beta = C_1 = 1$  y  $C_2 = 0$  por simplificar.



**Figura 4.1:** Trayectorias para distintos valores de  $\alpha$ .

Para el caso del oscilador armónico sí que es posible despejar  $x(t)$ . La función de la trayectoria, para  $\alpha = 2$  toma la forma

$$t = C_2 + \sqrt{\frac{m}{2\beta}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{\beta}{C_1 m}} x \right), \quad (4.12)$$

que si se despeja  $x$  se obtiene el ya conocido:

$$x = \sqrt{\frac{C_1 m}{\beta}} \sin \left( \sqrt{\frac{2\beta}{m}} (t - C_2) \right). \quad (4.13)$$

#### 4.1.2. Período

En este apartado se calcula el período del movimiento [26] de la partícula que se mueve en el potencial dado en la ecuación (4.2), ya que dicho movimiento es periódico. Con el objetivo de obtener dicho período, se despeja el momento:

$$m \frac{dx}{dt} = p = \pm \sqrt{2m(E - \beta|x|^\alpha)}. \quad (4.14)$$

Para poder realizar la integral, primero se deben de hallar los puntos de retorno,  $x_{\pm}$ , que son los dos puntos en los que el movimiento de la partícula es nulo y toda su energía es potencial:

$$\beta|x_{\pm}|^\alpha = E \quad \longrightarrow \quad x_{\pm} = \pm \left( \frac{E}{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (4.15)$$

Debido a la simetría de todos los potenciales estudiados, para determinar el período se puede integrar desde el centro del potencial hasta su punto de retorno positivo, es decir, el dominio  $[0, x_+]$ , y el período resulta ser el cuádruple de dicha integral. Esto, además, permite eliminar el valor absoluto en los cálculos:

$$\int_0^T dt = T = 4 \int_0^{\left(\frac{E}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{m}{\sqrt{2m(E - \beta x^\alpha)}} dx. \quad (4.16)$$

Para poder realizar la integral, se realiza el cambio de variable:

$$\beta x^\alpha = Ey, \quad (4.17)$$

y la integral queda:

$$T = \frac{4}{\alpha} \left(\frac{E}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy. \quad (4.18)$$

Dicha integral resulta ser una función Beta [27], por lo que el período, finalmente:

$$T = \frac{4}{\alpha} \left(\frac{E}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{\frac{m}{2E}} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{E}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{2\beta}} \frac{4}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{2}\right). \quad (4.19)$$

La función Beta se define como:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt. \quad (4.20)$$

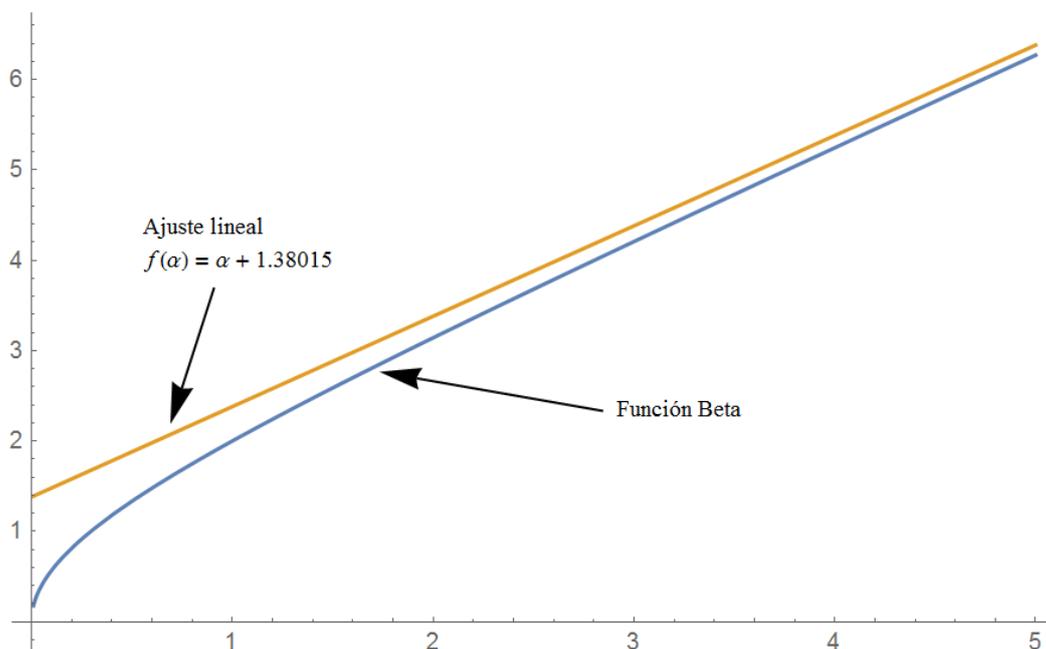
Si se toma  $\alpha = 2$  se obtiene el período del oscilador armónico, ya que:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi, \quad (4.21)$$

quedando el período de la forma:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\beta}}. \quad (4.22)$$

Como se puede observar, una vez más el oscilador armónico es un caso especial ya que es el único valor de  $\alpha$  para el cual el período del movimiento no depende de la energía total  $E$ . La ecuación (4.19) tiene una parte dependiente de la energía y una parte que sólo depende de  $\alpha$ . Si se estudia el límite cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ , se tiene, salvando las constantes, una función Beta (Figura 4.2) dividida por  $\alpha$ ; lo que en el límite es igual a la unidad. En el límite  $\alpha \rightarrow 0$  se tiene un período infinito porque es una partícula libre.



**Figura 4.2:** Función beta de la ecuación (4.19) en función de  $\alpha$ .

Si se observan las trayectorias dadas en la Figura 4.1 pueden comprobarse ambos límites.

### 4.1.3. Trayectorias en el espacio de fases

Clásicamente el estado de una partícula viene determinado por sus posiciones y sus momentos conjugados. El espacio fásico [25, 26] permite representar todo el conjunto, en el cual cada punto del espacio representa un estado del sistema. Puesto que se están considerando potenciales unidimensionales, el espacio de fases tendrá dos dimensiones: la referida a la coordenada y la referida a su momento asociado, relacionadas por el Hamiltoniano, que se recuerda que es

$$\frac{p^2}{2m} + \beta|x|^\alpha = E. \tag{4.23}$$

El factor determinante es  $\alpha$ , los valores de  $\beta$  sólo influyen en la excentricidad en el espacio de fases y en la 'anchura' en el potencial. Las siguientes imágenes corresponden a diferentes valores de  $\alpha$  para los casos más representativos, en los que se ha tomado para simplificar  $E = \beta = m = 1$ . La imagen de la izquierda corresponde al potencial  $V(x) = \beta|x|^\alpha$  y la de la derecha a las trayectorias en el espacio fásico para el mismo valor de  $\alpha$ :

- **Caso  $\alpha < 1$ :** Para los valores de  $\alpha \in (0, 1)$  el potencial presenta un pico en  $x = 0$ , y por tanto ahí no es derivable. Este hecho también se manifiesta en el espacio fásico como un pico. La imagen corresponde para  $\alpha = 0,3$ .

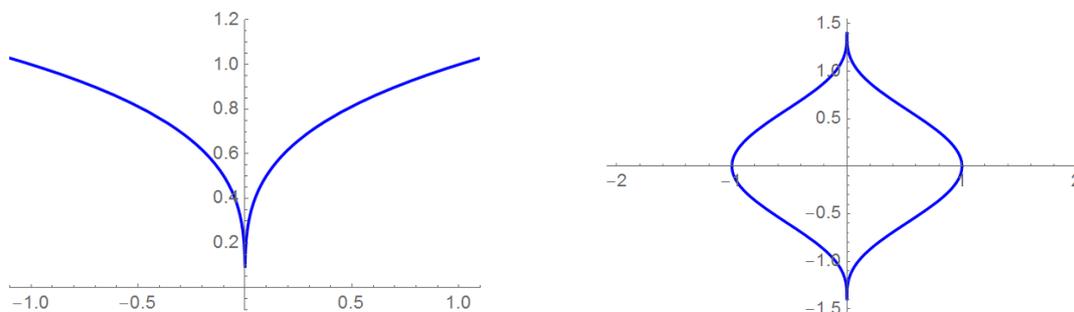


Figura 4.3: Caso  $\alpha < 1$ .

- **Caso  $\alpha = 2$ :** El caso del oscilador armónico, se expone debido a su gran importancia en todas las ramas de la Física. Las trayectorias en el espacio de fases son elipses.

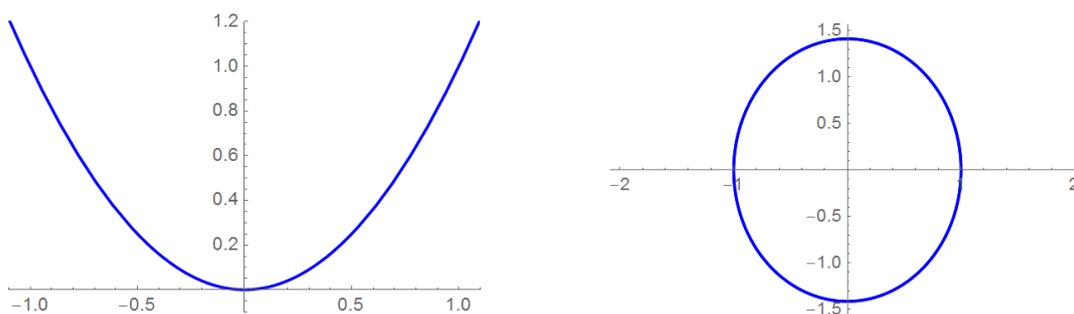


Figura 4.4: Caso  $\alpha = 2$ .

- **Caso  $\alpha > 2$ :** Según va aumentando  $\alpha$  el potencial va tomando la forma del pozo de potencial y el espacio fásico va obteniendo una forma cuadrada. La imagen corresponde para  $\alpha = 6,3$ .

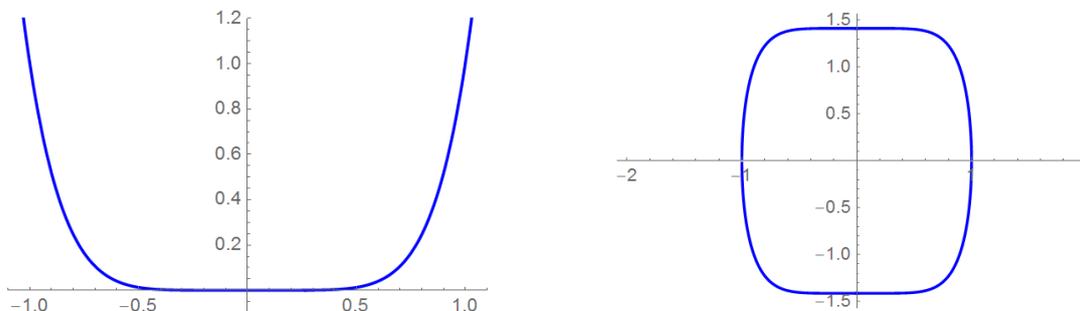


Figura 4.5: Caso  $\alpha > 2$ .

- **Caso  $\alpha \rightarrow \infty$ :** Finalmente se tiene el caso del pozo de potencial en un contexto puramente clásico, con una trayectoria rectangular en el espacio fásico. La imagen corresponde para  $\alpha = 300$ .

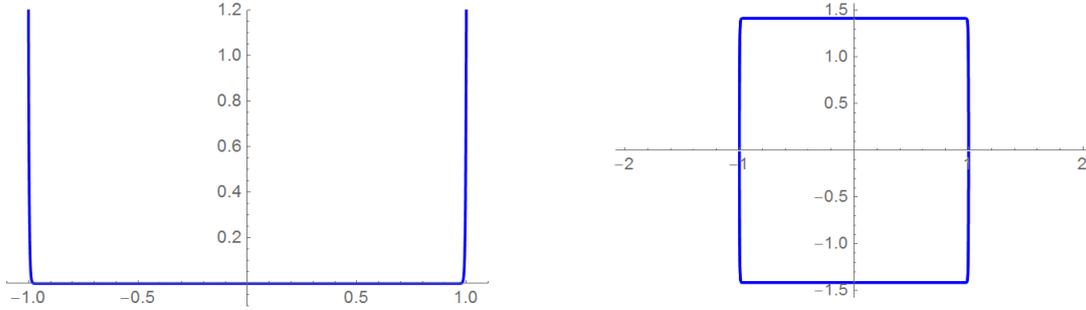


Figura 4.6: Caso  $\alpha \rightarrow \infty$ .

## 4.2. Estudio cuántico

Se debe resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

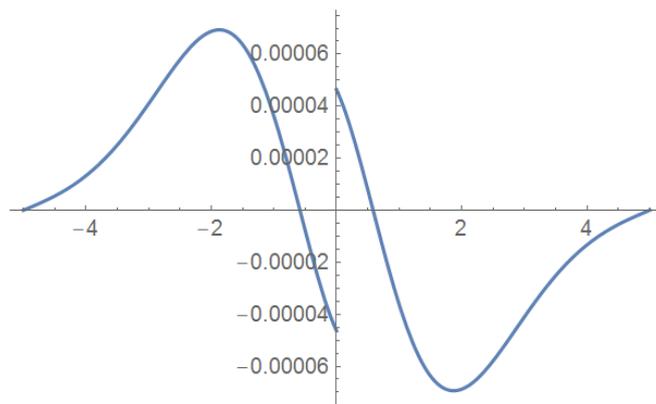
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \beta |x|^\alpha \psi(x) = E\psi(x). \tag{4.24}$$

Generalmente, esta ecuación no es resoluble de forma analítica, y se debe recurrir a métodos numéricos, en los que generalmente se integran dos funciones prueba con unas condiciones de contorno adecuadas y un parámetro libre  $E$ , el cual se ajusta de tal forma que la unión entre ambas funciones sea continua y derivable [28]. En ese caso, el valor  $E$  resulta ser la energía asociada a dicho estado. Un ejemplo gráfico de dicha técnica se muestra en las Figuras 4.7, 4.8 y 4.9. Otra forma de resolver esta ecuación es realizar la integración en todo el dominio. El resultado de dicha integración resultará la solución trivial excepto para determinados valores de la energía [28].

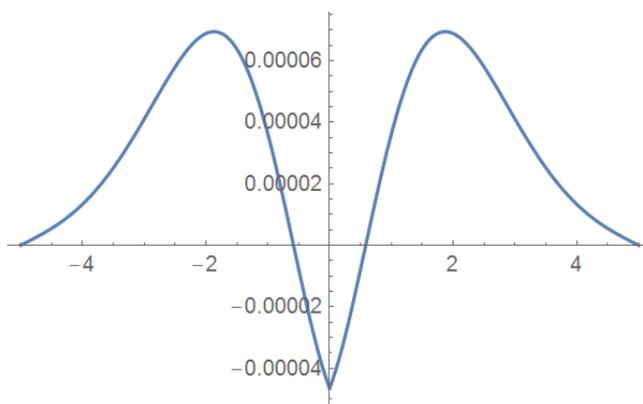
Un enfoque muy interesante es una formulación matricial de los métodos numéricos [29, 30], que además, para estos casos, permite enlazar con un enfoque muy práctico de la física cuántica, el formalismo de Dirac: A cada estado le corresponde un ket,  $|\psi\rangle$ , en un espacio conocido como espacio de estados. De esta forma, la ecuación de Schrödinger se representaría de la forma:

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \tag{4.25}$$

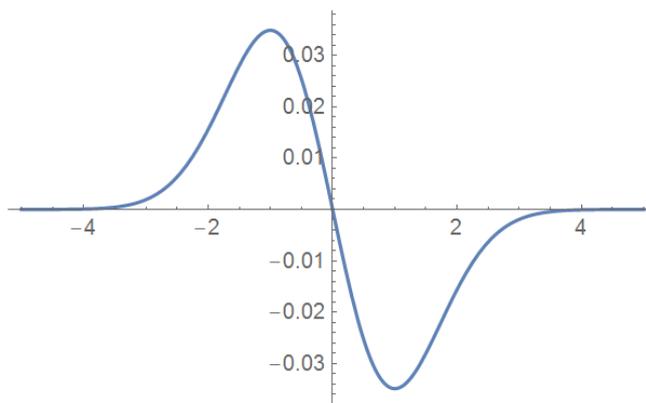
Una vez se elige una base en concreto, el operador Hamiltoniano queda determinado y el problema de la energía queda reducido a un problema de valores propios, esta vez, de matrices. El objetivo, por tanto, consiste en imitar dicho formalismo con ayuda de cálculos numéricos, con dos objetivos principales: primero, que permita dejar el término  $d^2\psi(x)/dx^2$  en función de una combinación lineal de  $\psi(x)$ ; y segundo, que nos permita asociar un espacio de estados con el que poder trabajar con el Hamiltoniano. De esta forma, el problema se reduce de nuevo a un problema de valores propios, esta vez en matrices.



**Figura 4.7:** Se proponen dos funciones prueba, las cuales se integran desde dos puntos alejados a los de retorno, donde se supone que la función ya no tiene vida. Se introduce un parámetro libre  $E$ .



**Figura 4.8:** Se impone que ambas funciones sean continuas.



**Figura 4.9:** Se impone que las derivadas sean continuas ajustando la energía  $E$ .

### 4.2.1. Energías

Aunque los potenciales estudiados no se pueden resolver de forma analítica, puede obtenerse información acerca del espectro de energías y los valores límite. El espectro será discreto, por ser un potencial confinante, y además todas las energías de los estados ligados serán nulas o positivas, ya que el potencial tiene una cota inferior para  $E = 0$ .

#### 4.2.1.1. Estudio de los límites

**Caso  $\alpha \rightarrow \infty$ :** Para este caso debería esperarse el mismo comportamiento que el pozo de potencial infinito de anchura  $L = 2$ . Esto es debido a que cuando  $\alpha \rightarrow \infty$  se cumple que:

$$V(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-1, 1) \\ \infty & \text{si } x \notin (-1, 1) \\ \beta & \text{si } x = \pm 1 \end{cases} \quad (4.26)$$

Los valores que se obtienen cuando  $x = \pm 1$  son dos conjuntos de medida nula que se pueden despreciar, obteniendo por tanto un pozo infinito de potencial. Las energías permitidas para un pozo de anchura  $L$  son bien conocidas (ecuación (3.22)):

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2. \quad (4.27)$$

Para el caso en el que  $L = 2$  se tiene:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m} n^2. \quad (4.28)$$

**Caso  $\alpha \rightarrow 0$ :** En este caso, para un  $\alpha$  lo suficientemente pequeño, el potencial se podría aproximar a una función con valor constante  $V(x) = \beta$  en todo el dominio menos para  $x = 0$  en el cual tomaría un valor nulo. Sin embargo, esto es un conjunto de medida nula, lo que significa que no influye en la integración y es lo mismo que integrar un potencial constante en todo el dominio. Este tipo de potencial no es confinante, y por tanto, no hay cuantización.

### 4.2.2. Resolución

A continuación se presenta un resumen con los pasos seguidos. Los dos primeros puntos están completamente desarrollados, sin embargo para el tercer punto sólo está indicado, ya que el desarrollo matemático es extenso y se perdería la continuidad del estudio. De cualquier forma, dicho desarrollo se encuentra al completo en el Apéndice A y en [30].

#### 4.2.2.1. Cambio a variables adimensionales

El paso a variables adimensionales permite, en este caso, cumplir dos objetivos: el primero es eliminar parámetros, lo que simplifica la ecuación de forma ostensible; el segundo es que dichos parámetros eliminados son los términos físicos, como por ejemplo, la masa

### 32 Potencial unidimensional $V_\alpha(x) = \beta|x|^\alpha$

de la partícula. De esta forma, se resuelve una ecuación general que a posteriori se puede ajustar para los parámetros físicos requeridos.

Para este caso, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = \left( \frac{\hbar}{2m\beta} \right)^{\frac{1}{2+\alpha}} y, \quad (4.29)$$

obteniendo, por tanto:

$$-\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + |y|^\alpha \psi(y) = \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{2}{2+\alpha}} E \psi(y). \quad (4.30)$$

Renombrando los términos a la derecha de la igualdad, se obtiene una 'energía' adimensional:

$$\epsilon = \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{2}{2+\alpha}} E, \quad (4.31)$$

y la ecuación de Schrödinger queda entonces de una forma más sencilla:

$$-\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + |y|^\alpha \psi(y) = \epsilon \psi(y). \quad (4.32)$$

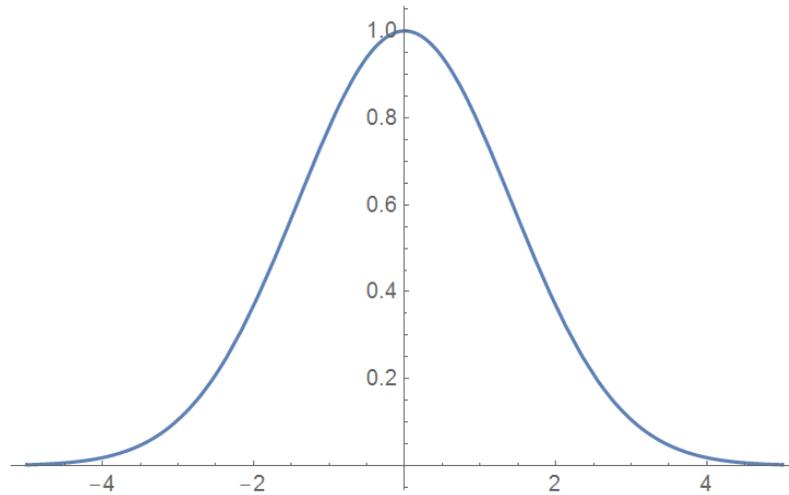
#### 4.2.2.2. Obtención de una forma 'vectorial' de $\psi(y)$

El objetivo ahora es obtener una forma vectorial de la ecuación (4.32), y se puede explicar visualmente en la Figura 4.10. Discretizando la función podemos escribirla como

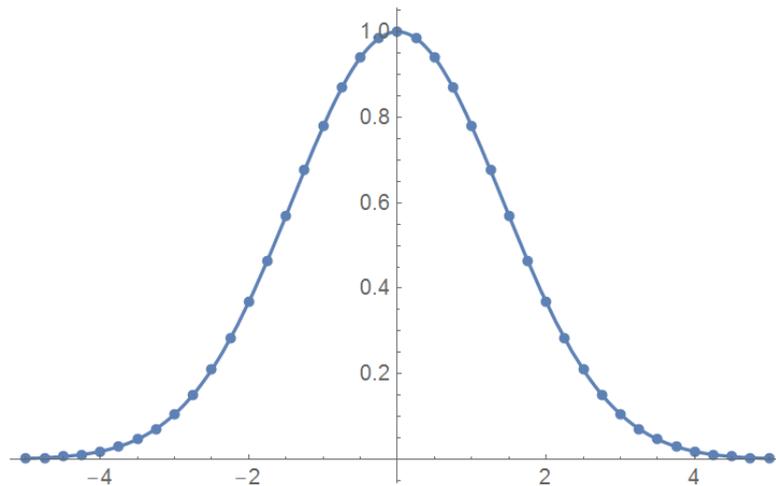
$$\psi(y) \simeq |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi(-N) \\ \vdots \\ \psi\left(i\frac{D}{N}\right) \\ \vdots \\ \psi(N) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

donde  $D$  es la longitud tomada para discretizar (para más información, consultar el Apéndice A.1.3) y se toman  $2N + 1$  puntos. Dependiendo de ambos valores se obtendrá el equiespaciado  $d$  de dichos puntos, dado por

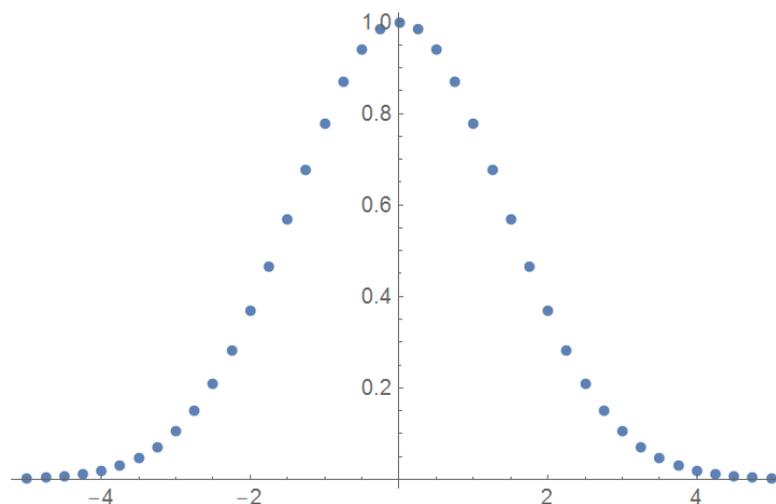
$$d = \frac{D}{N}. \quad (4.34)$$



(a) Función original.



(b) Valores equiespaciados.



(c) Función discretizada.

**Figura 4.10:** Aproximación que se va a realizar a la función de onda  $\Psi(y)$  por sus valores discretos  $\left\{ \Psi\left(i\frac{D}{N}\right), i = -N, -N + 1, \dots, N - 1, N \right\}$ .

**4.2.2.3.  $d^2\psi(y)/dy^2$  como combinación lineal de  $\psi(y)$**

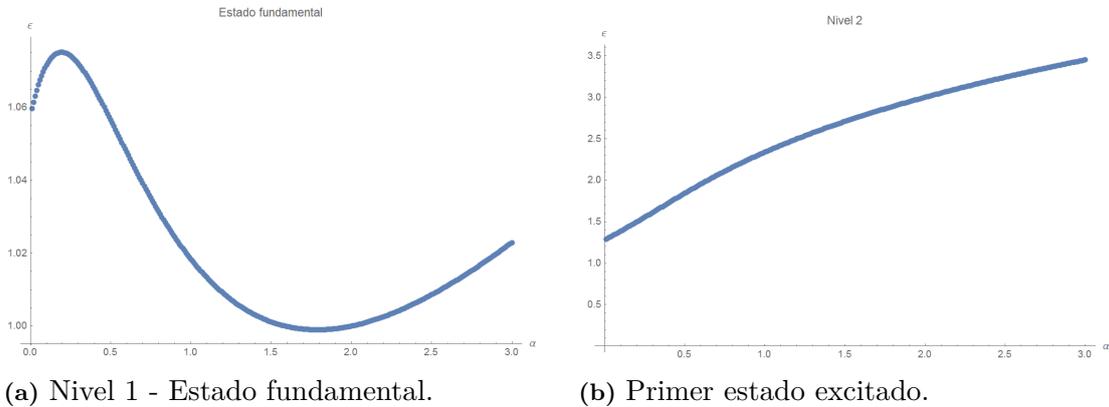
Se debe aplicar un método numérico para obtener dicha relación. Se señala que se puede escribir la ecuación (4.32) de la forma:

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} = f(y)\psi(y). \tag{4.35}$$

Existe un método numérico específico para este tipo de ecuaciones, que tienen la particularidad de no tener el término de la derivada primera. Este método fue desarrollado por Numerov y se encuentra, como ya se ha mencionado, en el Apéndice A. Se ha utilizado una formulación matricial y generalizada de dicho método.

**4.2.3. Valores obtenidos**

A continuación se muestran los valores obtenidos. Respecto al estudio de los límites, los valores deben retornar al valor obtenido de forma semiclásica, la discrepancia de los valores obtenidos se debe a la dificultad de trabajo del cálculo numérico en las proximidades de las singularidades que se encuentran en dichos límites. Se ha representado la energía adimensional  $\epsilon$ . Las ondulaciones que se presentan en el primer nivel aparecen, al obtener la energía real  $E$ , en todos los niveles y resultan de diferentes combinaciones entre  $\beta$  y la masa de la partícula.



**Figura 4.11:** Niveles de energía  $\epsilon$ . Se hace notar la diferencia de escala de ambos gráficos.

**4.3. Potenciales y socios supersimétricos**

Tomando  $\epsilon = 0$  y renombrando  $y \rightarrow x$ , la ecuación (4.32) queda:

$$-u''(x) + |x|^\alpha u(x) = 0. \tag{4.36}$$

Separando los dominios para eliminar el valor absoluto, se tiene, para  $x \geq 0$ , y realizando el cambio  $u(x) = \sqrt{x}f(x)$ :

$$f''(x) + \left(\frac{1}{x}\right) f'(x) - \left(\frac{1}{4x^2} + x^\alpha\right) f(x) = 0. \tag{4.37}$$

Realizando un nuevo cambio,  $z = x^{1+\alpha/2}/(1 + \alpha/2)$ , se obtiene:

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} - \left[ z^2 + \frac{1}{(2 + \alpha)^2} \right] f = 0, \quad (4.38)$$

cuya solución son las funciones de Bessel modificadas. En términos de  $u(x)$ :

$$u(x) = \sqrt{x} \left[ C_1^+ I_{\frac{1}{2+\alpha}} \left( \frac{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) + C_2^+ K_{\frac{1}{2+\alpha}} \left( \frac{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) \right], \quad (4.39)$$

donde  $C_{1,2}^+$  son dos constantes de integración. Puesto que la ecuación (4.36) es invariante ante transformaciones  $x \rightarrow -x$ , la solución para  $x \leq 0$  es:

$$u(x) = \sqrt{-x} \left[ C_1^- I_{\frac{1}{2+\alpha}} \left( \frac{(-x)^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) + C_2^- K_{\frac{1}{2+\alpha}} \left( \frac{(-x)^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) \right], \quad (4.40)$$

siendo  $C_1^-$  y  $C_2^-$  dos constantes de integración. Para determinar el valor de estas cuatro constantes se considera una solución particular con un comportamiento asintótico nulo cuando  $x \rightarrow \infty$ , de forma que:

$$C_1^+ = 0, \quad (4.41)$$

ya que la función de Bessel modificada de primera especie diverge cuando  $x \rightarrow \infty$ . Si además se impone la continuidad de la función y de la derivada en  $x = 0$  se tiene, para la continuidad de la función,

$$C_2^- = C_2^+, \quad (4.42)$$

y para la continuidad de la derivada,

$$C_1^- = \Gamma \left( \frac{1}{2 + \alpha} \right) \Gamma \left( \frac{1 + \alpha}{2 + \alpha} \right) C_2^+. \quad (4.43)$$

Se tiene ahora una función que es una solución particular con una constante  $C_2^+$  que se puede hacer igual a la unidad. De esta forma se tiene:

$$u_+(x) = \begin{cases} \sqrt{x} K_{\frac{1}{2+\alpha}} \left( \frac{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} \left[ K_{\frac{1}{2+\alpha}} \left( \frac{(-x)^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) + \Gamma \left( \frac{1}{2+\alpha} \right) \Gamma \left( \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right) I_{\frac{1}{2+\alpha}} \left( \frac{(-x)^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) \right] & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Se puede obtener una segunda solución independiente con el mismo procedimiento pero tomando nulo el comportamiento asintótico cuando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$u_-(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \left[ K_{\frac{1}{2+\alpha}} \left( \frac{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) + \Gamma \left( \frac{1}{2+\alpha} \right) \Gamma \left( \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right) I_{\frac{1}{2+\alpha}} \left( \frac{x^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) \right] & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} K_{\frac{1}{2+\alpha}} \left( \frac{(-x)^{1+\frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

**36 Potencial unidimensional**  $V_\alpha(x) = \beta|x|^\alpha$

Se puede reescribir la solución general como una combinación lineal de ambas soluciones particulares:

$$u(x) = u_+(x) + cu_-(x). \quad (4.46)$$

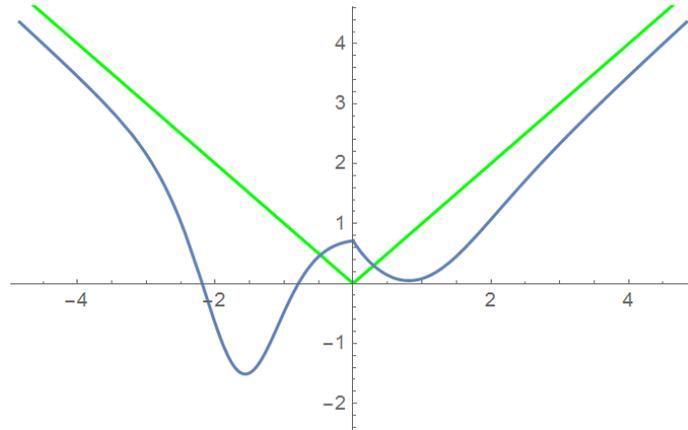
La ventaja de reescribir así la solución general es que es más sencillo saber cómo y donde tendrá nodos la función: para  $c > 0$  no habrá nodos, mientras  $c < 0$  habrá siempre algún nodo en una posición finita de  $x$ . Para  $c = 0$  existirá un nodo asintótico en  $x \rightarrow \infty$  y para  $c \rightarrow \infty$  estará en  $x \rightarrow -\infty$ . Puesto que se tiene:

$$W(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}, \quad (4.47)$$

el valor para  $W(x)$  resulta:

$$W(x) = \begin{cases} x^{\alpha/2} \frac{-c\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)I_{\frac{1}{\alpha+2}-1}\left(\frac{2x^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\alpha+2}\right) + (c+1)K_{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}\left(\frac{2x^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\alpha+2}\right)}{(c+1)K_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2x^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\alpha+2}\right) + c\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)I_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2x^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\alpha+2}\right)} & \text{si } x \geq 0 \\ (-x)^{\alpha/2} \frac{-(c+1)K_{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}\left(\frac{2(-x)^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\alpha+2}\right) + \Gamma\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)I_{\frac{1}{\alpha+2}-1}\left(\frac{2(-x)^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\alpha+2}\right)}{(c+1)K_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2(-x)^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\alpha+2}\right) + \Gamma\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)I_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2(-x)^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\alpha+2}\right)} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

A continuación se presentan algunos de los socios supersimétricos obtenidos



**Figura 4.12:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 1$  y  $c = 10$ .

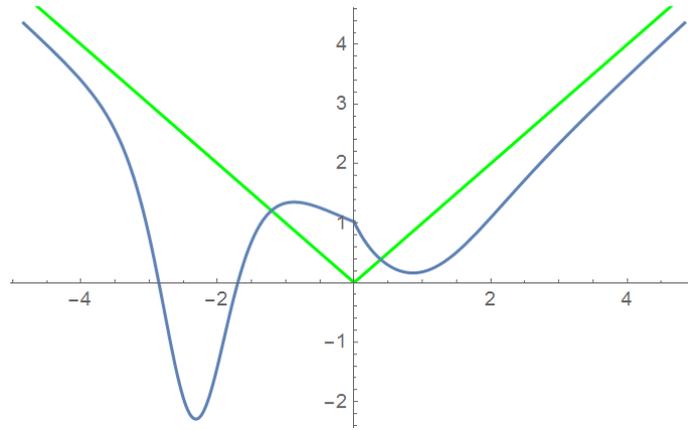


Figura 4.13: Socios supersimétricos con  $\alpha = 1$  y  $c = 100$ .

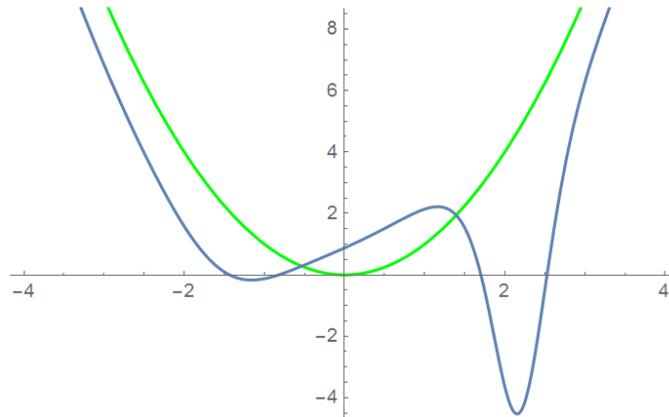


Figura 4.14: Socios supersimétricos con  $\alpha = 2$  y  $c = 0,01$ .

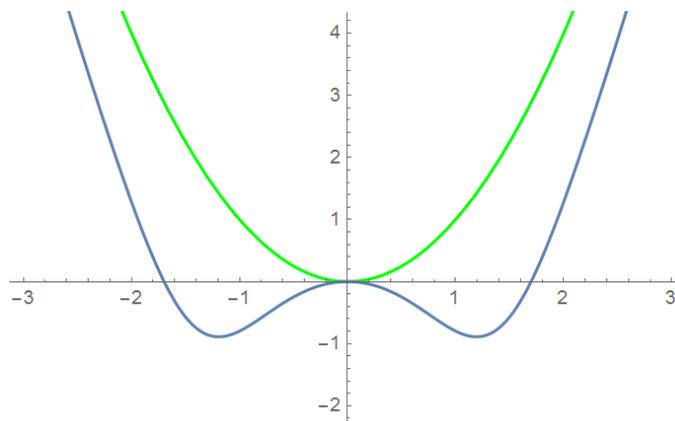
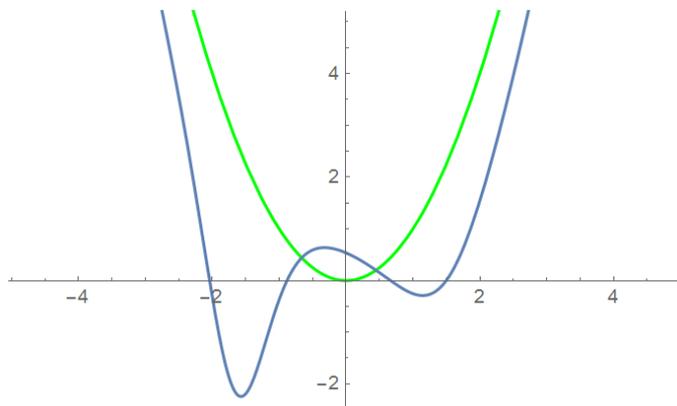
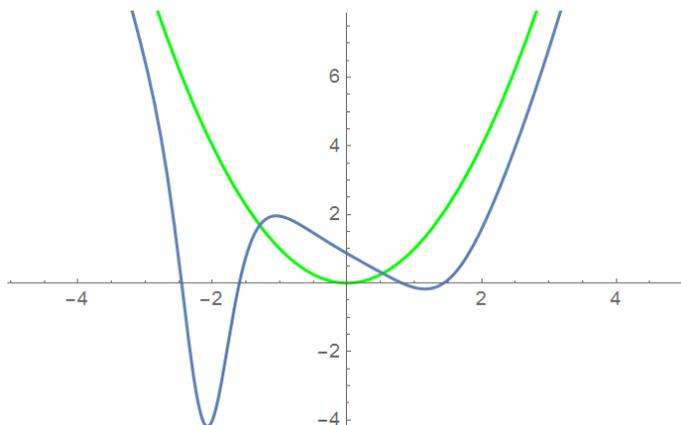


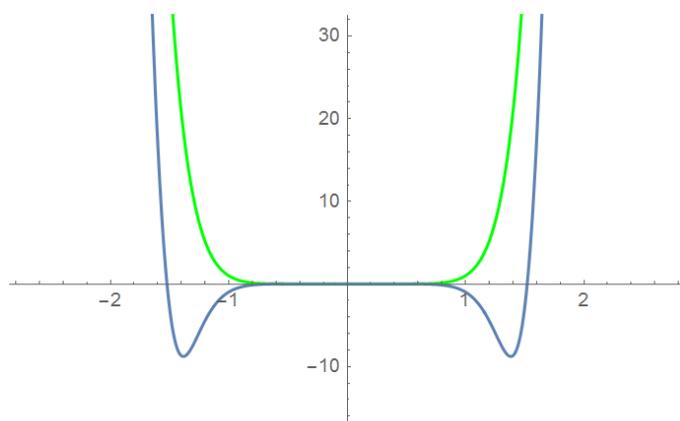
Figura 4.15: Socios supersimétricos con  $\alpha = 2$  y  $c = 1$ .



**Figura 4.16:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 2$  y  $c = 7,5$ .



**Figura 4.17:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 2$  y  $c = 70$ .



**Figura 4.18:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 9$  y  $c = 1$ .

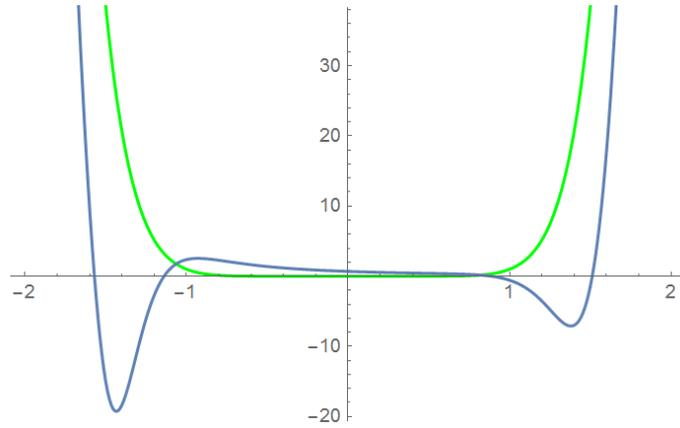


Figura 4.19: Socios supersimétricos con  $\alpha = 9$  y  $c = 10$ .

### 4.3.1. Como potencial supersimétrico $U(x)$

Si tomamos  $U(x) = |x|^\alpha$  obtenemos que los socios supersimétricos son

$$V_{\pm}(x) = \pm \frac{d^2U(x)}{dx^2} + \left( \frac{dU(x)}{dx} \right)^2 = \pm \alpha(\alpha - 1)|x|^{\alpha-2} + \alpha^2 x^{2\alpha-2}. \quad (4.49)$$

Observemos que si  $\alpha > 2$  no obtenemos ningún problema, puesto que no aparecen puntos singulares en todo  $\mathbb{R}$ . Si  $\alpha \in (1, 2)$  obtenemos una divergencia en  $x = 0$  debido al primer sumando  $\pm \alpha(\alpha - 1)|x|^{\alpha-2}$ , pero seguimos teniendo un potencial confinante gracias al segundo sumando  $\alpha^2 x^{2\alpha-2}$  que tiende a infinito cuando  $x \rightarrow \infty$ . Para los valores comprendidos entre  $\alpha \in (0, 1)$  ambos sumandos presentan un punto singular en  $x = 0$  y se desvanecen cuando  $x \rightarrow \infty$ . El potencial  $V_-(x)$  resultará confinante, mientras que el potencial  $V_+(x)$  no.

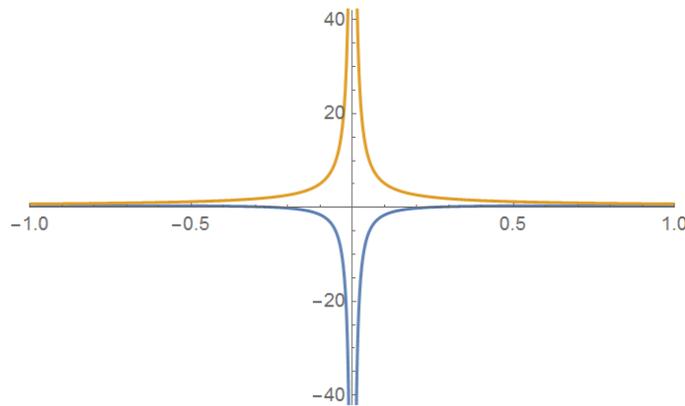
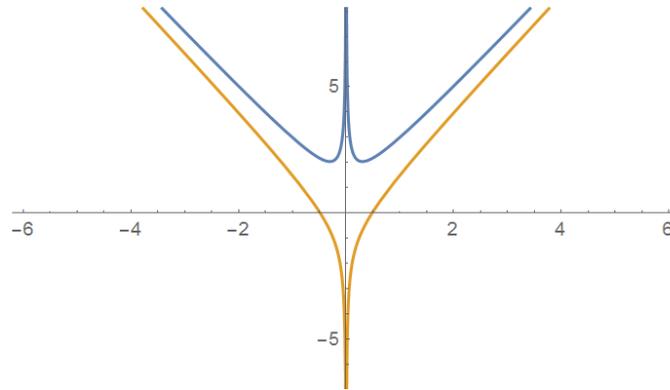
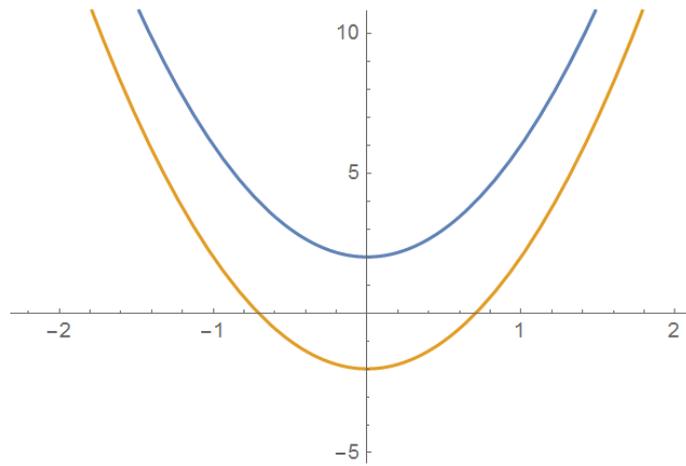


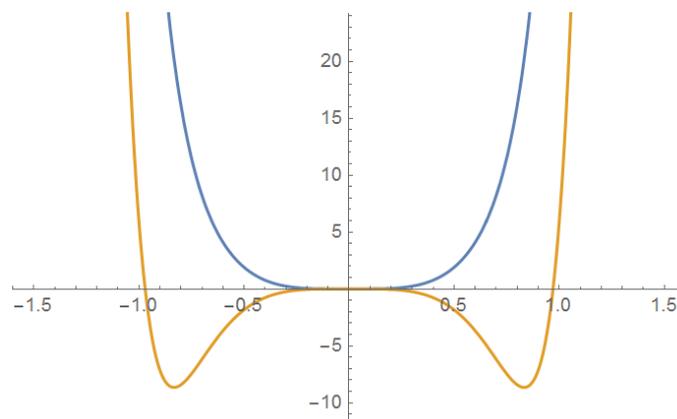
Figura 4.20: Socios supersimétricos con  $\alpha = 0,75$ .



**Figura 4.21:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 1,5$ .



**Figura 4.22:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 2$ .



**Figura 4.23:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 6$ .

# 5

## Socios supersimétricos de

$$V_\alpha(r) = \beta r^\alpha$$

Consideramos ahora el caso tridimensional. Este caso es de especial interés ya que corresponde a problemas más reales que los del caso unidimensional.

### 5.1. Ecuación de Schrödinger radial

Podemos considerar ahora un potencial central de la forma

$$V_\alpha(r) = \beta r^\alpha, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (5.1)$$

con la ecuación de Schrödinger tridimensional

$$\left(-\frac{1}{2m}P^2 + V(r)\right)\varphi(x, y, z) = E\varphi(x, y, z). \quad (5.2)$$

Como nos encontramos con un potencial esféricamente simétrico, resulta más conveniente hacer un paso a coordenadas esféricas,  $\varphi(r, \theta, \phi)$ , y podemos separar la parte angular (de la que se obtienen los armónicos esféricos) y la parte radial, de forma que

$$\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (5.3)$$

y la ecuación de Schrödinger queda, para la parte radial,

$$\left(\frac{1}{2m}P^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V_\alpha(r)\right)R_\ell(r, \alpha) = ER_\ell(r, \alpha), \quad (5.4)$$

donde  $L$  es el operador momento angular y el operador momento se escribe, para las coordenadas esféricas,

$$P = -i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r. \quad (5.5)$$

Si ahora introducimos los cambios de variable

$$\varepsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad U_\alpha(r) = \frac{2mV_\alpha(r)}{\hbar^2}, \quad (5.6)$$

la ecuación radial queda

$$\frac{d^2R_\ell(r, \alpha)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_\ell(r, \alpha)}{dr} + \left[\varepsilon - U_\alpha(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]R_\ell(r, \alpha) = 0. \quad (5.7)$$

## 42 Socios supersimétricos de $V_\alpha(r) = \beta r^\alpha$

Si hacemos  $\varepsilon = 0$  podemos calcular sus socios supersimétricos. La solución de la ecuación es la combinación lineal de dos funciones,

$$R_\ell(r, \alpha) = C_1 X_\ell(r, \alpha) + C_2 Z_\ell(r, \alpha), \quad (5.8)$$

### 5.2. Resolución

Se debe realizar el cambio

$$R(r) = r^\beta y(r), \quad (5.9)$$

con el cual se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + 2(\beta + 1) \frac{1}{r} \frac{dy(r)}{dr} + \left[ [\beta(\beta + 1) - \ell(\ell + 1)] \frac{1}{r^2} - r^\alpha \right] y(r) = 0. \quad (5.10)$$

A continuación, realizamos el cambio de variable

$$x = \frac{2\sqrt{r^{\alpha+2}}}{\alpha + 2}, \quad (5.11)$$

de donde se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{2\beta + 1 + \frac{\alpha+2}{2}}{\frac{\alpha+2}{2}} \frac{1}{x} \frac{dy(x)}{dx} + \left[ [\beta(\beta + 1) - \ell(\ell + 1)] \left( \frac{2}{2 + \alpha} \right)^2 \frac{1}{x^2} - 1 \right] y(x) = 0. \quad (5.12)$$

Para transformarlo en una ecuación de Bessel basta hacer que el coeficiente de la primera derivada sea la unidad, lo que nos da el valor de

$$\beta = -\frac{1}{2}, \quad (5.13)$$

resultando en la ecuación

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy(x)}{dx} - \left[ \left( \frac{2\ell + 1}{\alpha + 2} \right)^2 \frac{1}{x^2} + 1 \right] y(x) = 0. \quad (5.14)$$

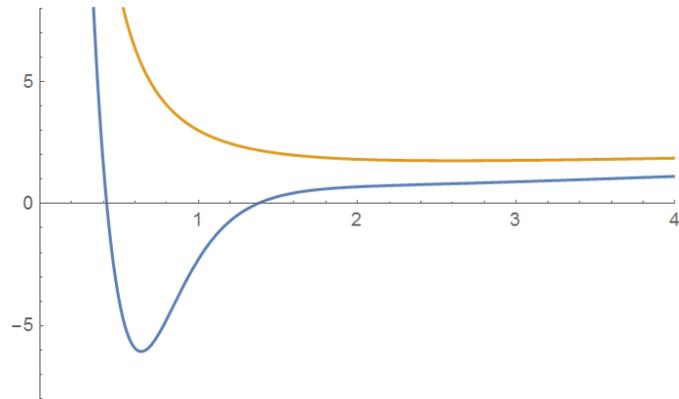
Esta ecuación diferencial tiene soluciones conocidas, que son las funciones de Bessel modificadas. Deshaciendo los cambios realizados obtenemos las dos funciones solución de la ecuación (5.8):

$$R_\ell(r, \alpha) = r^{-\frac{1}{2}} \left[ C_1 I_{\frac{2\ell+1}{\alpha+2}} \left( \frac{2\sqrt{r^{\alpha+2}}}{\alpha + 2} \right) + C_2 K_{\frac{2\ell+1}{\alpha+2}} \left( \frac{2\sqrt{r^{\alpha+2}}}{\alpha + 2} \right) \right]. \quad (5.15)$$

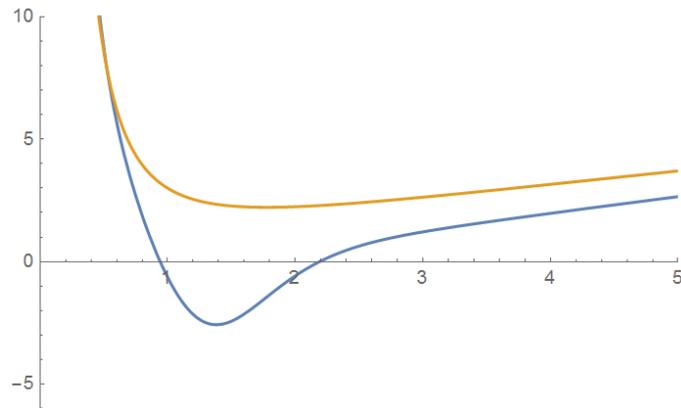
Las condiciones que deben cumplir ambas constantes, para que no aparezcan divergencias y ruptura de la supersimetría, es que

$$C_1 C_2 > 0, \quad (5.16)$$

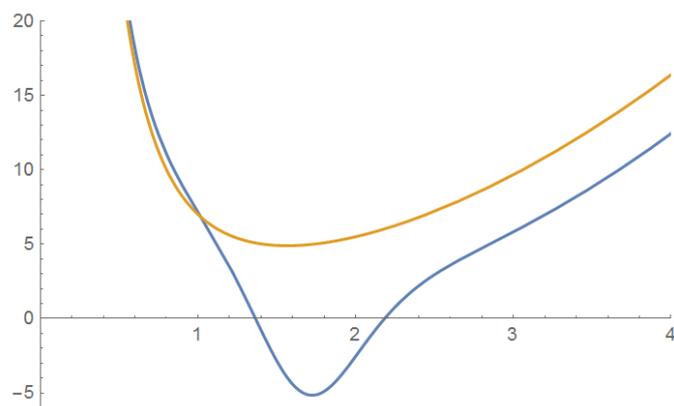
cumpliéndose además que se obtiene el mismo socio supersimétrico para dos valores dados  $C_1$  y  $C_2$  que para el par  $-C_1$  y  $-C_2$ .



**Figura 5.1:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 0,4$ ,  $\ell = 1$ ,  $C_1 = 0,2$  y  $C_2 = 2$ .

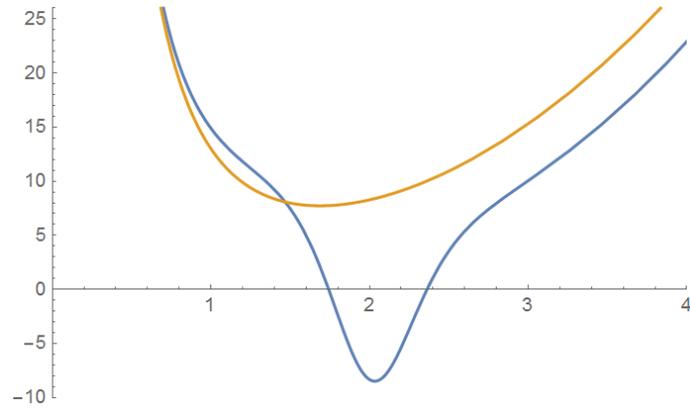


**Figura 5.2:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 0,8$ ,  $\ell = 1$ ,  $C_1 = 0,1$  y  $C_2 = 0,1$ .

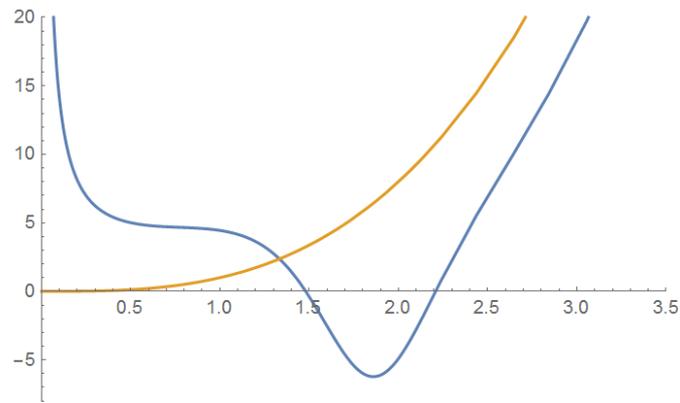


**Figura 5.3:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 2$ ,  $\ell = 2$ ,  $C_1 = 1,2$  y  $C_2 = 0,7$ .

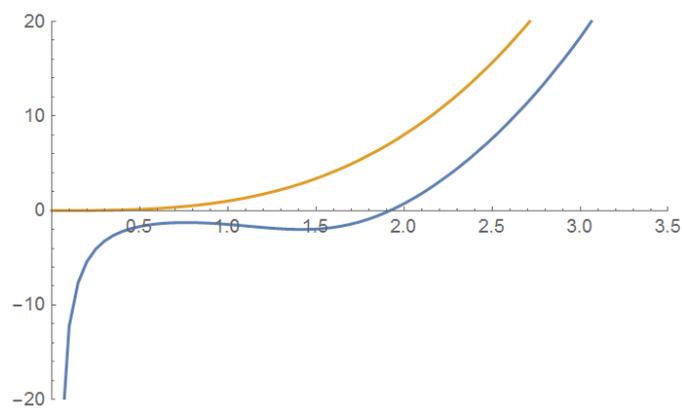
44 Socios supersimétricos de  $V_\alpha(r) = \beta r^\alpha$



**Figura 5.4:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 2,4$ ,  $\ell = 3$ ,  $C_1 = 1,8$  y  $C_2 = 0,3$ .



**Figura 5.5:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 3$ ,  $\ell = 0$ ,  $C_1 = 1,8$  y  $C_2 = 0,3$ .



**Figura 5.6:** Socios supersimétricos con  $\alpha = 3$ ,  $\ell = 0$ ,  $C_1 = 0,2$  y  $C_2 = 1,1$ .

# Bibliografía

- [1] Martin F Sohnius. Introducing supersymmetry. *Physics reports*, 128(2-3):39–204, 1985.
- [2] David Bailin and Alexander Love. *Supersymmetric gauge field theory and string theory*. CRC Press, 1994.
- [3] Matteo Bertolini. Lectures on supersymmetry. *Lecture notes given at SISSA*, 2015.
- [4] Sven Krippendorff, Fernando Quevedo, and Oliver Schlotterer. Cambridge lectures on supersymmetry and extra dimensions. *arXiv preprint arXiv:1011.1491*, 2010.
- [5] Manuel Drees. An introduction to supersymmetry. *arXiv preprint hep-ph/9611409*, 1996.
- [6] Joseph D Lykken. Introduction to supersymmetry. *arXiv preprint hep-th/9612114*, 1996.
- [7] Ian Aitchison. *Supersymmetry in particle physics: an elementary introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] Adel Bilal. Introduction to supersymmetry. *arXiv preprint hep-th/0101055*, 2001.
- [9] Stephen P Martin. A supersymmetry primer. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys*, 21(515):1–153, 2010.
- [10] S. Coleman y J. Mandula. All possible symmetries of the  $s$  matrix. *Phys. Rev.*, 159:1251–1256, Jul 1967.
- [11] J. Wess y B. Zumino. Supergauge transformations in four dimensions. *Nuclear Physics B*, 70(1):39 – 50, 1974.
- [12] R. Haag y J. T. Łopuszański y M. Sohnius. All possible generators of supersymmetries of the  $s$ -matrix. *Nuclear Physics B*, 88(2):257 – 274, 1975.
- [13] Edward Witten. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nuclear Physics B*, 188(3):513 – 554, 1981.
- [14] Fred Cooper and Barry Freedman. Aspects of supersymmetric quantum mechanics. *Annals of Physics*, 146(2):262–288, 1983.
- [15] Edward Witten. Constraints on supersymmetry breaking. *Nuclear Physics*, B202:253–316, 1982.
- [16] Erwin Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad.(Sect. A)*, 46:9–16, 1940.
- [17] L. Infeld y T. E. Hull. The factorization method. *Rev. Mod. Phys.*, 23:21–68, Jan 1951.
- [18] V Alan Kostelecky and DK Campbell. Supersymmetry in physics. *Physica D*, 1985.
- [19] Georg Junker. *Supersymmetry methods in Quantum and Statistical Physics*. Springer, 1996.

- [20] H Nicolai. Supersymmetry and spin systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 9:1497–1506, 1976.
- [21] U. W. Schmincke. On schrödinger’s factorization method for sturm-liouville operators. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 80(1-2):67–84, 1978.
- [22] L. E. Gendenshtein. Derivation of exact spectra of schrödinger equation by means of supersymmetry. *JETP Lett*, 38(356), 1983.
- [23] Fred Cooper y Avinash Khare y Uday Sukhatme. Supersymmetry and quantum mechanics. *Physics Reports*, 1995.
- [24] Claude Cohen-Tannoudji y Bernard Diu y Franck Laloë. *Quantum Mechanics*. Springer, 1990.
- [25] Jerry B. Marion. *Dinámica clásica de partículas y sistemas*. Reverté, 1998.
- [26] Lev Landau y Evgeni Lifshitz. *Curso de física teórica: Mecánica*. Reverté, 2013.
- [27] Manuel Gadella y Luis Miguel Nieto. *Métodos matemáticos avanzados para ciencias e ingenierías*. Gráficas Varona, 2000.
- [28] Tao Pang. *An introduction to computational physics*. Cambridge University press, 2008.
- [29] Mohandas Pillai y Joshua Goglio y Thad G. Walkera. Matrix numerov method for solving schrödinger’s equation. *American Journal of Physics*, 2012.
- [30] Tang Dongjiao. *Generalized Matrix Numerov Solutions to the Schrödinger Equation*. PhD thesis, Universidad Nacional de Singapur, 2014.

# A

## Método de Numerov

### A.1. Desarrollo teórico

#### A.1.1. Método de Numerov básico

Dada una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = f(x)y(x) \quad (\text{A.1})$$

Se realiza un desarrollo de Taylor de  $y(x)$  alrededor del punto  $x_0$ :

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y^{(1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y^{(2)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}y^{(3)}(x_0) + \mathcal{O}(h^4) \quad (\text{A.2})$$

Llamando  $\pm h = x \mp x_0$ :

$$y(x_0 \pm h) = y(x_0) \pm hy^{(1)}(x_0) + \frac{h^2}{2!}y^{(2)}(x_0) \pm \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_0) + \mathcal{O}(h^5) \quad (\text{A.3})$$

Si ahora se calcula  $y(x_0 + h) + y(x_0 - h)$  se obtiene:

$$y(x_0 + h) + y(x_0 - h) = 2y(x_0) + \frac{2h^2}{2!}y^{(2)}(x_0) + \frac{2h^4}{4!}y^{(4)}(x_0) + \mathcal{O}(h^6) \quad (\text{A.4})$$

Que es lo mismo que:

$$y^{(2)}(x_0) = \frac{y(x_0 + h) + y(x_0 - h) - 2y(x_0)}{h^2} - \frac{2h^2}{4!}y^{(4)}(x_0) + \mathcal{O}(h^6) \quad (\text{A.5})$$

Sustituyendo en la ecuación (A.1) se obtiene:

$$f(x_0)y(x_0) = \frac{y(x_0 + h) + y(x_0 - h) - 2y(x_0)}{h^2} - \frac{2h^2}{4!}y^{(4)}(x_0) + \mathcal{O}(h^6) \quad (\text{A.6})$$

Ahora, atendiendo a que:

$$y^{(4)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}y^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)y(x) \quad (\text{A.7})$$

Y realizando la derivada de la forma:

$$\frac{d^2}{dq^2}g(q) = \frac{g(q+h) - g(q)}{h} \quad (\text{A.8})$$

Se obtiene, sustituyendo:

$$y(x_0 + h) \left( 1 + \frac{h^2}{12} f(x_0 + h) \right) - 2y(x_0) \left( 1 - \frac{5h^2}{12} f(x_0) \right) + \\ + y(x_0 - h) \left( 1 + \frac{h^2}{12} f(x_0 - h) \right) = \mathcal{O}(h^6) \quad (\text{A.9})$$

Si se desprecian los términos de orden 6 y superior:

$$y(x_0 + h) \left( 1 + \frac{h^2}{12} f(x_0 + h) \right) - 2y(x_0) \left( 1 - \frac{5h^2}{12} f(x_0) \right) + \\ + y(x_0 - h) \left( 1 + \frac{h^2}{12} f(x_0 - h) \right) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Si ahora se introduce la función concreta de una ecuación de Schrödinger adimensional como la que se ha calculado previamente  $f(x) = V'(x) - \epsilon$  se obtiene:

$$y(x_0 + h) \left( 1 + \frac{h^2}{12} (V'(x_0 + h) - \epsilon) \right) - 2y(x_0) \left( 1 - \frac{5h^2}{12} (V'(x_0) - \epsilon) \right) + \\ + y(x_0 - h) \left( 1 + \frac{h^2}{12} (V'(x_0 - h) - \epsilon) \right) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Si ahora se reordenan términos:

$$y(x_0 + h) - 2y(x_0) + y(x_0 - h) + \frac{h^2}{12} V'(x_0 + h) y(x_0 + h) + \frac{10h^2}{12} V'(x_0) y(x_0) + \\ + \frac{h^2}{12} V'(x_0 - h) y(x_0 - h) = \frac{h^2}{12} \epsilon y(x_0 + h) + \frac{10h^2}{12} \epsilon y(x_0) + \frac{h^2}{12} \epsilon y(x_0 - h) \quad (\text{A.12})$$

Donde  $V'(x)$  es el potencial simplificado, no el original. En el caso anterior,  $V(x) = \beta|x|^\alpha$  y  $V'(x) = \alpha|x|^{\alpha-1}$ . Esta ecuación se puede poner en términos matriciales, como se buscaba:

$$\mathcal{A} |y(x)\rangle + \mathcal{B} \mathcal{V} |y(x)\rangle = \mathcal{B} \epsilon |y(x)\rangle \quad (\text{A.13})$$

Donde:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} V'(x_0 + h) & 0 & 0 \\ 0 & V'(x_0) & 0 \\ 0 & 0 & V'(x_0 - h) \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Despejando:

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}|y(x)\rangle + \mathcal{B}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{V}|y(x)\rangle = \epsilon|y(x)\rangle \longrightarrow \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}|y(x)\rangle + \mathcal{V}|y(x)\rangle = \epsilon|y(x)\rangle \quad (\text{A.16})$$

Se obtiene finalmente la matriz  $\mathcal{H}$ , que es la que se debe diagonalizar:

$$\mathcal{H} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A} + \mathcal{V} \quad (\text{A.17})$$

Este desarrollo es suficiente si se utilizan potenciales que se puedan considerar sencillos. Para el caso de estudio bastaría con sustituir los valores concretos de  $f(x)$ . Para potenciales más complicados, o si se quiere una mayor precisión en los resultados obtenidos, se puede generalizar el método para poder elegir el orden del error realizado, pudiendo tomar órdenes mucho más altos. Esta generalización es la que se va a desarrollar a continuación.

### A.1.2. Generalización del método

El objetivo ahora es lograr generalizar dicho método de forma que se pueda prefijar el orden de error. Volviendo a la ecuación obtenida, es sencillo comprobar que:

$$\frac{y(x_0 + h) - 2y(x_0) + y(x_0 - h)}{2} = \sum_{n=1}^N \frac{h^{2n}}{(2n)!} y^{(2n)}(x_0) + \mathcal{O}(h^{2N+2}) \quad (\text{A.18})$$

Se puede crear un sistema de  $R$  ecuaciones considerando múltiplos enteros de  $h$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{2} = \sum_{n=1}^N \frac{h^{2n}}{(2n)!} y^{(2n)}(x_0) + \mathcal{O}(h^{2N+2}) \\ \frac{y(x+2h) - 2y(x) + y(x-2h)}{2} = \sum_{r=1}^N \frac{(2h)^{2n}}{(2n)!} y^{(2n)}(x_0) + \mathcal{O}((2h)^{2N+2}) \\ \vdots \\ \frac{y(x+Rh) - 2y(x) + y(x-Rh)}{2} = \sum_{n=1}^N \frac{(Rh)^{2n}}{(2n)!} y^{(2n)}(x_0) + \mathcal{O}((Rh)^{2N+2}) \end{array} \right. \quad (\text{A.19})$$

Donde se debe imponer que  $N = R$  para que el sistema sea resoluble. Poniéndolo en términos de matrices para verlo más visualmente, para el caso concreto  $N = 2$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{h^2}{2!} & \frac{h^4}{4!} \\ \frac{(2h)^2}{2!} & \frac{(2h)^4}{4!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{(2)}(x_0) \\ y^{(4)}(x_0) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y(x+h) + y(x-h) - 2y(x) \\ y(x+2h) + y(x-2h) - 2y(x) \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Por tanto, se ha obtenido una forma de obtener las derivadas como combinación lineal de las funciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(2)}(x_0) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=-N}^N C_{(2,m)} y(x_0 + mh) \\ y^{(4)}(x_0) = \frac{1}{h^4} \sum_{m=-N}^N C_{(4,m)} y(x_0 + mh) \\ \vdots \\ y^{(2N)}(x_0) = \frac{1}{h^{2N}} \sum_{m=-N}^N C_{(2N,m)} y(x_0 + mh) \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

Se puede ver a través de las ecuaciones A.18 y A.21 lo siguiente:

$$y^{(2)}(x_0) + \frac{2h^{2N}}{(2N+2)!} y^{(2N+2)}(x_0) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=-N}^N C_{(2,m)} y(x_0 + mh) \quad (\text{A.22})$$

Esto permite introducir el término  $f(x)$  que es el que particulariza la ecuación. Atendiendo a:

$$y^{(2N)}(x_0) = \frac{1}{h^{2N}} \sum_{m=-N}^N C_{(2N,m)} y(x_0 + mh) \quad (\text{A.23})$$

Si ahora se deriva dos veces respecto de  $x$  y se tiene en cuenta que  $y^{(2)}(x) = f(x)y(x)$ :

$$y^{(2r+2)}(x_0) = \frac{1}{h^{2N}} \sum_{m=-N}^N C_{(2N,m)} y^{(2)}(x_0 + mh) = \frac{1}{h^{2N}} \sum_{m=-N}^N C_{(2N,m)} f(x_0 + mh) y(x_0 + mh) \quad (\text{A.24})$$

Que si se introduce en la ecuación A.22 se obtiene finalmente:

$$f(x_0)y(x_0) + \frac{2}{(2N+2)!} \sum_{m=-N}^N C_{(2N,m)} f(x_0 + mh) y(x_0 + mh) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=-N}^N C_{(2,m)} y(x_0 + mh) \quad (\text{A.25})$$

El término de la izquierda se puede condensar con una delta de Kronecker de la forma:

$$\sum_{m=-N}^N \left( \frac{2}{(2N+2)!} C_{(2N,m)} + \delta_{m,0} \right) f(x_0 + mh) y(x_0 + mh) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=-N}^N C_{(2,m)} y(x_0 + mh) \quad (\text{A.26})$$

Poniendo los términos explícitos de  $f(x)$  para obtener las matrices  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  como antes se obtiene que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = -\frac{1}{h^2} \sum_{m=-N}^N C_{(2,m)} \\ \mathcal{B} = \frac{2}{(2N+2)!} \sum_{m=-N}^N C_{(2N,m)} + \delta_{m,0} \end{array} \right. \quad (\text{A.27})$$

Por tanto, el problema ahora se reduce a encontrar las matrices  $C_{(2,m)}$  y  $C_{(2N,m)}$ , utilizando ya la herramienta Mathematica.

### A.1.3. Dominio y dimensiones

Puesto que no se puede integrar numéricamente en un dominio infinito, se debe realizar una aproximación. Como la función de onda no tiene vida fuera de los puntos de retorno clásicos, ya que decae rápidamente, pueden resultar unos buenos candidatos como límites de integración, o por lo menos, indicar el dominio mínimo que debe considerarse para realizar la integración. Por tanto, fijada una energía máxima, se pueden obtener los puntos de retorno asociados.

A continuación, se debe definir el número de puntos a considerar, que es lo que determinará la dimensión de  $|\psi\rangle$  y de las matrices ( $N \times N$ ); y también el espaciado entre los puntos. Para ello, se puede realizar una aproximación también utilizada en campos como la física estadística: considerando longitudes de onda de De Broglie. Estas longitudes de onda, y en concreto, la longitud de onda mínima, viene dada por:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \quad (\text{A.28})$$

Sustituyendo a la energía adimensional y dividiendo entre  $2\pi$  (para trabajar con  $\hbar$ ) se obtiene:

$$d = \frac{\lambda}{2\pi} = \left( \frac{\hbar^2}{2m\beta} \right)^{\frac{1}{2+\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \quad (\text{A.29})$$

Este valor  $d$  es del orden de magnitud adecuado físicamente para definir el espaciado de los puntos. Sin embargo, se debe definir el valor de  $m$  y  $\beta$ , lo que implicaría una pérdida de generalidad y tener que añadir incógnitas al cálculo del ordenador. Sin embargo, lo importante está ahí: la energía depende inversamente con la raíz cuadrada. Para evitar tener que añadir más incógnitas, se ha utilizado:

$$d = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \quad (\text{A.30})$$

El número de puntos queda entonces determinado: si se llama  $D$  a la longitud entre los dos puntos de retorno y  $d$  es el espaciado entre los puntos, resulta:

$$N = \frac{D}{d} \quad (\text{A.31})$$

### A.1.4. Comprobación del rango de utilidad del método

Se comparan los resultados obtenidos mediante el método con un potencial resoluble analíticamente, el oscilador armónico. Esto permite conocer el rango de utilidad del método. Como se puede observar, para niveles bajos de energía, el resultado es impecable. Según se van subiendo los niveles de energía, hasta acercarse a la energía máxima introducida, los valores empiezan a desviarse. Esto es debido a la suposición hecha anteriormente en la cual se supone que la función de onda no tiene vida fuera del potencial, ya que no es así. Para energías menores, los puntos de retorno son menores que el dominio de integración, y por tanto se obtiene una mayor precisión. Según estos puntos de retorno se vayan aproximando al dominio de integración, la aproximación será peor. Los niveles

de energía superiores a dicha energía máxima son descartados automáticamente. Se hace notar que, debido a esto, una manera de lograr cálculos más precisos es aumentar la energía máxima permitida, sin tener que aumentar el orden de  $r$ . Se hace notar también que debido a la relación de la energía con el espaciado y el número de puntos, al aumentar esta energía permitida se obtienen más puntos con una separación menor, lo que implica mayor precisión de cálculo pero un tiempo de computación mayor.

Se obtienen los siguientes valores para la energía:

**Cuadro A.1:** Energía del oscilador armónico.

n	0	1	2	3	10	20	40
Exacto	0.5	1.5	2.5	3.5	10.5	20.5	40.5
$\mathcal{O}(h^4)$	0.50000	1.50000	2.50000	3.49999	10.4998	20.498	40.4879
$\mathcal{O}(h^8)$	0.50000	1.50000	2.50000	3.50000	10.5000	20.4999	40.4982
$\mathcal{O}(h^{16})$	0.50000	1.50000	2.50000	3.50000	10.5000	20.5000	40.5000

## A.2. Implementación del método

A continuación se incluye el código Mathematica utilizado para realizar los cálculos, con las diferentes secciones explicadas:

### A.2.1. Definición de las variables

Se define el potencial, el valor de  $\alpha$ , la energía permitida y el orden de error. Más adelante se explica cómo modificar el código para calcular para varios valores de  $\alpha$ :

$$V(x_, \alpha_) := |x|^\alpha;$$

$$\alpha = 2;$$

$$e = 20.;$$

$$r = 3;$$

### A.2.2. Espaciado y número de puntos

Se determina el espaciado y el número de puntos. Como se indicaba, se toman los puntos de retorno como fronteras del dominio, y de ellos se obtiene el resto:

$$\text{retorno} = \text{FindRoot}[v(x, \alpha) = e, \{x, e\}][[1, 2]];$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{20e}};$$

$$n = \text{Round} \left[ 2 \left( \frac{\text{retorno}}{d} + 4\pi \right) \right];$$

$$x = \text{Table} \left[ di - \frac{1}{2}d(n+1), \{i, n\} \right];$$

### A.2.3. Planteamiento del sistema

Se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve. El mismo sistema sirve para calcular los coeficientes de ambas matrices auxiliares:

$$\begin{aligned}
 g &= \text{Solve} \left[ \text{Table} \left[ \frac{(ad)^{2b}}{(2b)!}, \{a, 1, r\}, \{b, 1, r\} \right], \text{Table}[\Psi(2c), \{c, r\}] = \right. \\
 &= \text{Table} \left[ \frac{1}{2} (\Psi_{i-k} + \Psi_{i+k} - 2\Psi_i), \{k, r\} \right], \text{Table}[\Psi(2c), \{c, r\}] \left. \right]; \\
 \text{CoefficientA} &= \text{Coefficient} [g[[1]][[1]][[2]], \text{Table} [\Psi_{i+m}, \{m, -r, r\}]]; \\
 \text{CoefficientBraw} &= \frac{2d^{2r} \text{Coefficient} [g[[1]][[-1]][[2]], \text{Table} [\Psi_{i+m}, \{m, -r, r\}]]}{(2r+2)!}; \\
 \text{CoefficientB} &= \text{ReplacePart}[\text{CoefficientBraw}, r+1 \rightarrow \text{CoefficientBraw}[[r+1]]+1];
 \end{aligned}$$

### A.2.4. Creación de las matrices

Se crean las matrices potencial y cinética y la matriz del Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
 \text{matriz}(n\_ , d\_ ) &:= \text{DiagonalMatrix}[0\text{Range}[n - |d|] + 1, d] \\
 B &= \text{Total}[\text{Table}[\text{CoefficientB}[[r+u+1]]\text{matriz}(n, u), \{u, -r, r\}]]; \\
 A &= \text{Total}[\text{Table}[\text{CoefficientA}[[r+v+1]]\text{matriz}(n, v), \{v, -r, r\}]]; \\
 \text{KE} &= -B^{-1}.A; \\
 H &= \text{DiagonalMatrix}[v(x, \alpha)] + \text{KE};
 \end{aligned}$$

### A.2.5. Valores propios

Se obtienen los valores propios, se ordenan, se descartan los que superan la energía máxima, y se imprimen en pantalla los válidos:

$$\begin{aligned}
 \{\text{eval}, \text{vec}\} &= \text{Eigensystem}[H]; \\
 \text{in} &= \text{Ordering}[\text{eval}]; \\
 \text{eval} &= \text{eval}[[\text{in}]]; \\
 \text{vec} &= \text{vec}[[\text{in}]]; \\
 \text{evalnum} &= \text{Select}[\text{eval}, \#1 \leq e\&]; \\
 \text{evalnum} &[[]]
 \end{aligned}$$

### A.2.6. Cálculo de varios $\alpha$ de forma simultánea

La primera opción que aparece es incluir todo el código anterior en el comando Table y que realice todo el proceso para cada valor de  $\alpha$ . Sin embargo, esto causa que el tiempo de computación se haga muy grande. La forma de evitar eso y poder seguir teniendo un código

que pueda ser ejecutado en ordenadores personales, es realizar una nueva aproximación: se hace que el dominio de integración sea constante para todo valor de  $\alpha$ . Es decir, modificar el siguiente término:

$$\text{retorno} = \text{FindRoot}[v(x, \alpha) = e, \{x, e\}][[1, 2]]; \longrightarrow \text{retorno} = \text{constante}; \quad (\text{A.32})$$

De esta forma, si para compensar esta aproximación se toman valor de la energía altos y/o un dominio de  $\alpha$  no muy grande, se puede realizar el cálculo de los coeficientes de las matrices una sola vez, y la única iteración es ahora la de la matriz potencial y el cálculo de los autovalores. Con esta pequeña aproximación se ahorra muchísimo tiempo de computación.