



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

# TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**Abanico de Gröbner y  
politopo de estados de un ideal.**

*Autor: Rubio de Nicolás, Cristina*

*Tutor: Núñez Jiménez, Carolina Ana*



# Índice general

Capítulos	Página
<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Órdenes monomiales y bases de Gröbner.</b>	<b>7</b>
1.1. Órdenes monomiales. . . . .	7
1.2. Bases de Gröbner. . . . .	11
<b>2. Ideales iniciales de un ideal.</b>	<b>17</b>
2.1. Bases universales de Gröbner. . . . .	17
2.2. Órdenes monomiales pesados. . . . .	22
2.3. Región de Gröbner: ejemplo. . . . .	28
<b>3. Nociones básicas de geometría poliedral.</b>	<b>33</b>
3.1. Teorema fundamental de inecuaciones lineales. . . . .	33
3.2. Poliedros, conos y politopos. . . . .	35
3.3. Caras de un poliedro. . . . .	40
3.4. Abanico normal de un poliedro. . . . .	44
<b>4. Politopo de estados.</b>	<b>49</b>
4.1. Abanico de Gröbner. . . . .	49
4.2. Politopo de Newton. . . . .	61
4.3. Politopo de estados. . . . .	63
4.4. Caso general. . . . .	70



# Introducción

El concepto de base de Gröbner fue introducido por Bruno Buchberger en su tesis en 1965 (traducida por él mismo al inglés en [2]) y llamada así en honor a su director Wolfgang Gröbner. Una base de Gröbner de un ideal  $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$  es un conjunto de generadores del ideal con ciertas “buenas” propiedades que permiten resolver, de forma algorítmica, problemas cuya solución es conocida en una indeterminada, como el de pertenencia al ideal  $I$ , o el cálculo de las soluciones de un sistema polinomial de ecuaciones. Su introducción, junto con el desarrollo de la capacidad de cálculo de los ordenadores, ha permitido afrontar de forma computacional muchos problemas de Álgebra Conmutativa, Geometría Algebraica o Investigación Operativa (el propio Buchberger lista muchos de ellos en [3]). De hecho son la base de paquetes de software matemático enfocado al álgebra de polinomios, como SINGULAR, Macaulay 2 o CoCoA entre otros.

Previo a la definición de base de Gröbner está la definición de orden monomial, que es un buen orden en los monomios de  $k[x_1, \dots, x_n]$  compatible con el producto, y que permite describir un algoritmo de división entre una lista ordenada de polinomios. Para más de una variable hay infinitos órdenes monomiales posibles. Sin embargo, tal como se prueba en el trabajo, para un ideal  $I$  los ideales iniciales (ideales generados por los mayores monomios de todos los polinomios de  $I$ ), respecto a todos ellos, resultan ser sólo una cantidad finita. El abanico de Gröbner del ideal, introducido por Mora y Robbiano en [7], es un complejo poliedral formado por conos, que describe el comportamiento de estos ideales iniciales. En particular, sus conos maximales están en biyección con dichos ideales.

Este trabajo está enfocado en entender bien la estructura del abanico de Gröbner, y en comprobar que para los ideales homogéneos respecto de una graduación positiva, dicho abanico coincide con el abanico normal de un politopo, conocido como el politopo de estados del ideal. Las dos referencias

básicas seguidas son [9] y [5]. Se han añadido además dos capítulos complementarios, uno sobre bases de Gröbner y otro sobre geometría poliedral, con el fin de hacer el trabajo más autocontenido.

La estructura del trabajo es la siguiente:

En el primer capítulo se hace una introducción a las bases de Gröbner y sus propiedades, que utilizaremos a lo largo todo el trabajo. Describiremos el algoritmo de Buchberger para construir dichas bases, así como el algoritmo de división anteriormente mencionado.

En el segundo capítulo se estudian diferentes resultados acerca de los ideales iniciales, que están íntimamente relacionados con las bases de Gröbner, viendo que sólo hay una cantidad finita de ellos. Definiremos, asociadas a dichos ideales, unas clases de equivalencia que van a resultar ser conos poliedrales,  $C_{\prec}(I)$ , que recubren  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ , y estudiaremos algunas de sus propiedades.

En el tercer capítulo, se dan unas nociones básicas de geometría poliedral, necesarias para el último capítulo. Definiremos el abanico normal de un poliedro, que es un complejo poliedral formado por conos que están en biyección con las caras del poliedro.

El trabajo se cierra con el cuarto capítulo, definiendo el abanico de Gröbner y viendo que es efectivamente un abanico, es decir, un complejo poliedral formado por conos. Se define el concepto de politopo de estados de un ideal, que es un politopo cuyo abanico normal coincide con el abanico de Gröbner del ideal. Se prueba que dicho politopo existe en el caso particular de un ideal homogéneo, y que de hecho, si el ideal es además principal, su politopo de Newton es un politopo de estados. Se termina el capítulo, y el trabajo, con un comentario acerca del caso no homogéneo.

# Capítulo 1

## Órdenes monomiales y bases de Gröbner.

En este capítulo introduciremos algunas de las nociones sobre bases de Gröbner que necesitaremos para el posterior desarrollo del trabajo y cuyas demostraciones no están incluidas, ya que es materia que se ve en la asignatura álgebra conmutativa y computacional del grado. Se pueden encontrar, por ejemplo, en [4].

Se trata de generalizar al anillo de polinomios en varias variables, algunos de los resultados que conocemos en una variable. Por ejemplo, en una variable, para ver si un polinomio pertenece a un ideal del anillo, es suficiente comprobar que el resto de la división del polinomio entre un generador del ideal es cero, y para realizar dicha división escribimos los polinomios en orden decreciente de las potencias de  $x$ .

Así, en varias variables, se plantea un algoritmo de división basado en un orden entre los monomios.

### 1.1. Órdenes monomiales.

Empecemos definiendo lo que entendemos por un orden en los monomios de un polinomio de varias variables.

Sea  $k$  un cuerpo. Denotaremos  $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$  y dado  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ . Identificaremos de esta forma  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  con los monomios del anillo de polinomios. Un *término* de  $k[x]$  es un polinomio de la forma

$\lambda x^\alpha$ , donde  $\lambda \in k$ , con  $\lambda \neq 0$ .

**Definición 1.1.** *Un orden monomial sobre  $k[x_1, \dots, x_n]$  es una relación de orden  $\preceq$  sobre  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  (equivalentemente, sobre los monomios de  $k[x_1, \dots, x_n]$ ), cumpliendo:*

1.  $\preceq$  es un buen orden sobre  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , (es decir, todo subconjunto no vacío de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  tiene un elemento mínimo).
2.  $\alpha \preceq \beta$  implica  $\alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$  para todo  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . (En términos de monomios, esto quiere decir que si  $x^\alpha \preceq x^\beta$  entonces  $x^{\alpha+\gamma} \preceq x^{\beta+\gamma}$ ).

El siguiente resultado será interesante más adelante.

**Proposición 1.2.** *Sea  $\preceq$  un orden total en  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  tal que si  $\alpha \preceq \beta$  entonces  $\alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$  para todo  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . Entonces  $\preceq$  es un buen orden si, y sólo si,  $0 \preceq \alpha$  para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ .*

**Notación 1.3.** *Como es usual,  $\alpha \prec \beta$  equivale a decir que  $\alpha \preceq \beta$  y  $\alpha \neq \beta$ . En lo que sigue, llamaremos también orden monomial a la relación  $\prec$ .*

A diferencia de lo que sucede en el anillo de polinomios en una variable (donde sólo hay un orden monomial), ahora podemos definir diferentes órdenes. Veamos algunos de los órdenes monomiales más conocidos.

**Definición 1.4** (Orden lexicográfico). *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  escribiremos  $\alpha \prec_{lex} \beta$  si la primera coordenada no nula desde la izquierda del vector  $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}^n$  es positiva.*

**Definición 1.5** (Orden lexicográfico graduado). *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  escribiremos  $\alpha \prec_{grlex} \beta$  si  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i < |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$ , o  $|\alpha| = |\beta|$  y  $\alpha \prec_{lex} \beta$ .*

**Definición 1.6** (Orden lexicográfico graduado inverso). *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  escribiremos  $\alpha \prec_{grevlex} \beta$  si  $|\alpha| < |\beta|$ , o  $|\alpha| = |\beta|$  y la primera coordenada no nula desde la derecha del vector  $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}^n$  es negativa.*

Obsérvese que para estos tres órdenes monomiales  $1 \prec_* x_n \prec_* x_{n-1} \prec_* \dots \prec_* x_1$ .

Para poder ordenar los términos de cualquier polinomio necesitamos introducir algo más de notación.



**Definición 1.7.** Sea  $\prec$  un orden monomial sobre  $k[x]$  y consideramos un polinomio  $f = \sum_{\alpha \in \Gamma} c_{\alpha} x^{\alpha} \in k[x]$  ( $\Gamma \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  finito) distinto de 0.

- El multigrado de  $f$  es  $\text{multideg}_{\prec}(f) = \max_{\prec} \{\alpha \in \Gamma \mid c_{\alpha} \neq 0\}$ .
- El coeficiente dominante de  $f$  es  $LC_{\prec}(f) = c_{\text{multideg}_{\prec}(f)}$ .
- El monomio dominante o inicial de  $f$  es  $\text{in}_{\prec}(f) = x^{\text{multideg}_{\prec}(f)}$ .

El anillo de polinomios en una variable es un dominio de ideales principales, pero en varias variables, dado un ideal  $I \subseteq k[x]$ , gracias al teorema de la base de Hilbert, que afirma que  $k[x]$  es un anillo Noetheriano, solo podemos asegurar la existencia de  $f_1, \dots, f_s \in k[x]$  tales que  $I = (f_1, \dots, f_s)$ . Por tanto, es conveniente disponer de un algoritmo de división entre un número finito de polinomios. El algoritmo es el siguiente:

### Algoritmo de división.

Fijado un orden monomial  $\prec$  en  $k[x]$  se considera el conjunto ordenado  $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ . En cada paso, se construyen polinomios  $a_1, \dots, a_s, p$  y  $r$  tales que  $f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + p + r$ . Se termina cuando  $p = 0$ .

- Inicialización: Se parte de  $p = f$ ,  $r = 0$ ,  $a_1 = \dots = a_s = 0$
- Iteración: Se busca el primer  $i = 1, \dots, s$  tal que  $\text{in}_{\prec}(f_i)$  divide a  $\text{in}_{\prec}(p)$  y se sustituye  $a_i$  por  $a_i + \frac{\text{in}_{\prec}(p)LC_{\prec}(p)}{\text{in}_{\prec}(f_i)LC_{\prec}(f_i)}$ , y  $p$  por  $p - \frac{\text{in}_{\prec}(p)LC_{\prec}(p)}{\text{in}_{\prec}(f_i)LC_{\prec}(f_i)} f_i$ . Si tal elemento no existe, se sustituye  $r$  por  $r + \text{in}_{\prec}(p)LC_{\prec}(p)$  y  $p$  por  $p - \text{in}_{\prec}(p)LC_{\prec}(p)$ .

El algoritmo termina cuando  $p = 0$ , lo que siempre acaba por ocurrir por ser  $\prec$  un buen orden.

Veamos esto mejor con un ejemplo:

Consideremos el orden lexicográfico en  $k[x, y]$  con  $y \prec_{lex} x$ . Sean  $f = x^2 y + xy^2 + y^2$ ,  $f_1 = xy - 1$  y  $f_2 = y^2 - 1$ .

- $a_1 = a_2 = 0$ ,  $p = f$ ,  $r = 0$
- $\text{in}_{\prec_{lex}}(f_1) = xy$  divide a  $\text{in}_{\prec_{lex}}(p) = \text{in}_{\prec_{lex}}(f) = x^2 y$   
 $a_1 = 0 + \frac{x^2 y}{xy} = x$ ,  $a_2 = 0$   
 $p = f - \frac{x^2 y}{xy} \cdot f_1 = xy^2 + x + y^2$   
 $r = 0$

- $in_{\prec_{lex}}(f_1) = xy$  divide a  $in_{\prec_{lex}}(p) = xy^2$   
 $a_1 = x + \frac{xy^2}{xy} = x + y, a_2 = 0$   
 $p = p - \frac{xy^2}{xy} \cdot f_1 = x + y^2 + y$   
 $r = 0$
- Ningún  $in_{\prec_{lex}}(f_i)$  divide a  $in_{\prec_{lex}}(p)$ .  
 $a_1 = x + y, a_2 = 0$   
 $p = p - in_{\prec_{lex}}(p) = y^2 + y$   
 $r = 0 + in_{\prec_{lex}}(p) = x$
- $in_{\prec_{lex}}(f_2) = y^2$  divide a  $in_{\prec_{lex}}(p) = y^2$   
 $a_1 = x + y, a_2 = 0 + \frac{y^2}{y^2} = 1$   
 $p = p - \frac{y^2}{y^2} \cdot f_2 = y + 1$   
 $r = x$
- Ningún  $in_{\prec_{lex}}(f_i)$  divide a  $in_{\prec_{lex}}(p)$ .  
 $a_1 = x + y, a_2 = 1$   
 $p = p - in_{\prec_{lex}}(p) = 1$   
 $r = x + in_{\prec_{lex}}(p) = x + y$
- Ningún  $in_{\prec_{lex}}(f_i)$  divide a  $in_{\prec_{lex}}(p)$ .  
 $a_1 = x + y, a_2 = 1$   
 $p = p - in_{\prec_{lex}}(p) = 0$   
 $r = x + y + in_{\prec_{lex}}(p) = x + y + 1$

Por tanto,  $f = (x + y)f_1 + f_2 + (x + y + 1)$ .

Como consecuencia del algoritmo se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.8.** *Sea  $\prec$  un orden monomial. Sea  $F = \{f_1, \dots, f_s\}$  un conjunto ordenado de polinomios en  $k[x]$ . Para cada  $f \in k[x]$  existen  $a_1, \dots, a_s, r \in k[x]$  cumpliendo:*

P1)  $f = a_1f_1 + \dots + a_sf_s + r$ .

P2) Si  $r \neq 0$ , ninguno de los monomios de  $r$  es divisible por ninguno de los monomios  $in_{\prec}(f_1), \dots, in_{\prec}(f_s)$ .

En general no hay unicidad de  $a_1, \dots, a_s, r$ , cumpliendo las condiciones  $P1$  y  $P2$ . Es claro que la salida del algoritmo puede depender, por ejemplo, de la forma en que se ordenen  $f_1, \dots, f_s$ . Como consecuencia, puede darse el caso de que un polinomio esté en un ideal y el resto de la división no sea cero. Por ejemplo, consideremos  $k[x, y]$  con el orden lexicográfico con  $y \prec_{lex} x$  y  $f = x(y^2 - 1) \in (y^2 - 1, xy + 1)$ , sin embargo  $f = y \cdot (xy + 1) + 0 \cdot (y^2 - 1) + (-x - y)$ , donde  $r = (-x - y) \neq 0$ . Más ejemplos de estos casos pueden verse en [4].

Todo esto, hace conveniente buscar generadores de los ideales en varias variables que tengan “buenas propiedades” relativas al algoritmo de división, y este es precisamente el papel de las bases de Gröbner.

A partir de ahora denotaremos por  $r = \bar{f}^F$  al polinomio  $r$  que proporciona el algoritmo de división aplicado a  $(F, f)$ . A este polinomio se le llama *resto de la división de  $f$  por el conjunto ordenado  $F = \{f_1, \dots, f_s\}$* .

## 1.2. Bases de Gröbner.

En el algoritmo de división, nos fijamos en los monomios iniciales para ir avanzando el cociente, por eso nos interesan estos términos y los ideales que generan.

Para toda la sección fijaremos un orden monomial  $\prec$ .

**Definición 1.9.** *Se dice que un ideal  $I$  de  $k[x]$  es monomial si tiene un conjunto de generadores formado por monomios, esto es, si existe un subconjunto  $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  tal que  $I = (\{x^\alpha \mid \alpha \in A\})$ .*

**Observación 1.10.**  $x^\alpha \in (x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_r}) \iff \exists i \text{ tal que } x^{\alpha_i} \mid x^\alpha \iff \iff \exists i \text{ tal que } \alpha \in \alpha_i + \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$

Un ejemplo de un ideal monomial viene dado por:

$$I = (x^4y^2, x^3y^4, x^2y^5) \subset k[x, y].$$

Los exponentes de los monomios en  $I$  forman el subconjunto de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ :

$$((4, 2) + \mathbb{Z}_{\geq 0}^2) \cup ((3, 4) + \mathbb{Z}_{\geq 0}^2) \cup ((2, 5) + \mathbb{Z}_{\geq 0}^2).$$

**Definición 1.11.** Dado un ideal  $I \subseteq k[x]$ , llamamos *ideal inicial* de  $I$  con respecto a  $\prec$  al ideal monomial  $in_{\prec}(I) = (\{in_{\prec}(f) \mid f \in I \setminus \{0\}\})$ .

Dado un conjunto finito de generadores para  $I$ ,  $I = (f_1, \dots, f_s)$ , es cierto que  $in_{\prec}(f_i) \in in_{\prec}(I)$  por definición, lo cual implica que  $(in_{\prec}(f_1), \dots, in_{\prec}(f_s)) \subset in_{\prec}(I)$ . Sin embargo, ambos ideales pueden ser distintos. Veamos esto con un ejemplo:

Sea  $I = (f_1, f_2)$ , donde  $f_1 = x^3 - 2xy$  y  $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$ . Usaremos el orden lexicográfico graduado en  $k[x, y]$  con  $y \prec_{grlex} x$ . Entonces  $x^2 = x \cdot f_2 - y \cdot f_1 \in I$ , y esto implica que  $x^2 = in_{\prec_{grlex}}(x^2) \in in_{\prec_{grlex}}(I)$ . Sin embargo,  $x^2$  no es divisible por  $in_{\prec_{grlex}}(f_1) = x^3$  ni por  $in_{\prec_{grlex}}(f_2) = x^2y$ , luego  $x^2 \notin (in_{\prec_{grlex}}(f_1), in_{\prec_{grlex}}(f_2))$ .

Intentaremos encontrar unos generadores del ideal donde se dé la igualdad. Esa es la definición de las bases de Gröbner.

**Definición 1.12.** Se dice que un conjunto finito de polinomios de un ideal  $I$ ,  $G = \{g_1, \dots, g_r\} \subset I$ , es una *base de Gröbner* de  $I$  para el orden monomial  $\prec$ , si  $in_{\prec}(I) = (in_{\prec}(g_1), \dots, in_{\prec}(g_r))$ .

Equivalentemente, podemos decir que dado  $G = \{g_1, \dots, g_r\} \subset I$ ,  $G$  es una base de Gröbner si, y sólo si, el término inicial de cualquier elemento de  $I$  es divisible por uno de los  $in_{\prec}(g_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

**Proposición 1.13.** Si  $G$  es una base de Gröbner del ideal  $I$ , entonces  $I = (G)$ .

En el último ejemplo expuesto nos encontramos con que  $\{f_1, f_2\}$  no es una base de Gröbner para  $I$  respecto del orden lexicográfico graduado, ya que  $x^2 \in in_{\prec}(I)$  pero  $x^2 \notin (in_{\prec}(f_1), in_{\prec}(f_2))$ .

Una versión particular del teorema de la base de Hilbert, conocido como lema de Dickson, permite deducir la existencia de bases de Gröbner.

**Teorema 1.14.** Todo ideal no nulo admite una base de Gröbner para el orden monomial fijado.

Vamos a dar un criterio que permita determinar cuándo una base de un ideal  $I$  es una base de Gröbner. Para ello necesitamos una definición previa.

**Definición 1.15.** *Dados dos polinomios  $f$  y  $g$  en  $k[x]$ , se define el  $S$ -polinomio de  $f$  y  $g$  con respecto a  $\prec$  como:*

$$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{in_\prec(f)} \cdot \frac{f}{LC_\prec(f)} - \frac{x^\gamma}{in_\prec(g)} \cdot \frac{g}{LC_\prec(g)},$$

donde  $x^\gamma = mcm(in_\prec(f), in_\prec(g))$ .

Por ejemplo, sean  $f = x^3y^2 - x^2y^3 + x$ ,  $g = 3x^4y + y^2$  dos polinomios en  $\mathbb{R}[x, y]$ ; y usamos el orden lexicográfico graduado con  $y \prec_{grlex} x$ . Entonces,  $x^\gamma = mcm(x^3y^2, x^4y) = x^4y^2$  y

$$\begin{aligned} S(f, g) &= \frac{x^4y^2}{x^3y^2} \cdot f - \frac{x^4y^2}{3x^4y} \cdot g \\ &= x \cdot f - \frac{1}{3} \cdot y \cdot g = -x^3y^3 + x^2 - \frac{1}{3}y^3. \end{aligned}$$

**Observación 1.16.** *Notemos que si  $in_\prec(f)$  e  $in_\prec(g)$  son primos entre sí, entonces*

$$S(f, g) = in_\prec(g) \cdot f - in_\prec(f) \cdot g \quad .$$

**Teorema 1.17** (Criterio de Buchberger). *Sea  $I$  un ideal y sea  $G = \{g_1, \dots, g_r\}$  un sistema de generadores de  $I$ . Entonces,  $G$  es una base de Gröbner para el orden monomial  $\prec$  de dicho ideal si y sólo si  $\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$ , para cualesquiera  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ .*

Del criterio de Buchberger surge el algoritmo de Buchberger el cuál, a partir de un conjunto de generadores de un ideal, encuentra una base de Gröbner. Para ello, la idea natural es intentar extender el conjunto de generadores a una base de Gröbner añadiendo polinomios de  $I$ , de tal forma que cumplan el criterio.

### Algoritmo de Buchberger.

Dado dicho conjunto de generadores  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ , calculamos los correspondientes  $S$ -polinomios  $S(f_i, f_j)$ , para todo  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ , y el resto de su división por  $F$ ,  $\overline{S(f_i, f_j)}^F$ . Si alguno de estos restos es un polinomio distinto de cero, se añade al conjunto de generadores. Se repite dicho procedimiento hasta que todos los restos de la división de todos los  $S$ -polinomios

de polinomios de  $F$  entre  $F$  sean nulos, obteniendo así un conjunto de generadores que ahora sí es una base de Gröbner. Tenemos asegurado que el procedimiento acaba gracias al teorema de la base de Hilbert.

Vamos a ver un ejemplo de cómo funciona dicho algoritmo.

**Ejemplo 1.** Consideramos el orden monomial lexicográfico  $\prec_{lex}$  en  $k[x, y]$  con  $y \prec_{lex} x$  y sea  $I = (f_1, f_2) = (xy - y, x + 1)$  un ideal. Podemos afirmar que  $\{f_1, f_2\}$  no es una base de Gröbner pues

$$S(f_1, f_2) = \frac{xy}{xy} \cdot f_1 - \frac{xy}{x} \cdot f_2 = -2y \in I,$$

cuyo resto no es cero al dividir por  $\{f_1, f_2\}$ . Si añadimos el resto  $f_3 = -2y \in I$  al conjunto de generadores, y llamamos  $G = \{f_1, f_2, f_3\}$ , se tiene que  $\overline{S(f_1, f_2)}^G = 0$ . Calculamos ahora los  $S$ -polinomios restantes:

$$S(f_1, f_3) = -y, \quad \implies \quad \overline{S(f_1, f_3)}^G = 0,$$

$$S(f_2, f_3) = y, \quad \implies \quad \overline{S(f_2, f_3)}^G = 0.$$

Por lo que  $G$  es una base de Gröbner de  $I$ .

**Teorema 1.18.** Si el conjunto  $F = \{f_1, \dots, f_s\}$  es un sistema de generadores del ideal  $I \subseteq k[x]$ , entonces el algoritmo de Buchberger aplicado al conjunto  $F$  devuelve, en un número finito de pasos, una base de Gröbner para el ideal  $I$ .

Es importante observar que el “mal comportamiento” del algoritmo de división expuesto anteriormente no ocurre cuando dividimos por elementos de una base de Gröbner.

**Proposición 1.19.** Sea  $\prec$  un orden monomial. Sea  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  una base de Gröbner de un ideal  $I \subseteq k[x]$  y sea  $f \in k[x]$ . Entonces, existe un único polinomio  $r \in k[x]$  con las siguientes propiedades:

1. Si  $r \neq 0$ , entonces ningún término de  $r$  es divisible por ninguno de los términos  $in_{\prec}(g_1), \dots, in_{\prec}(g_s)$ .
2.  $f - r \in I$ .

En particular,  $r$  es el resto de la división de  $f$  por  $G$  (ordenado de cualquier forma), esto es,  $r = \bar{f}^G$ .

**Definición 1.20.** *Dados una base de Gröbner  $G$  del ideal  $I \subseteq k[x]$  y un polinomio  $f$  de  $k[x]$ , llamaremos forma normal de  $f$  módulo  $G$  al resto  $\bar{f}^G$  (el cuál no depende de la forma en que se ordene  $G$ ).*

Como consecuencia, se resuelve el problema de pertenencia a un ideal:

**Corolario 1.21.** *Sean  $\prec$  un orden monomial,  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  una base de Gröbner de un ideal  $I \subseteq k[x]$  y  $f \in k[x]$ . Entonces,  $f \in I$  si, y sólo si,  $\bar{f}^G = 0$ .*

**Definición 1.22.** *Se dice que una base de Gröbner  $G$  es minimal cuando, para todo  $g \in G$ , se cumple que:*

- $LC_{\prec}(g) = 1$ .
- $in_{\prec}(g) \notin in_{\prec}(G \setminus \{g\})$ .

Para calcular una base de Gröbner minimal primero calcularíamos una base de Gröbner  $G$  con el algoritmo de Buchberger y eliminaríamos, de uno en uno, los elementos  $g_i$  tales que  $in_{\prec}(g_i) \in in_{\prec}(G \setminus \{g_i\})$ . Para terminar no hay más que dividir cada  $g_i$  por  $LC_{\prec}(g_i)$ .

En un ideal podemos tener muchas bases de Gröbner minimales, sin embargo hay solamente una que verifique la siguiente definición:

**Definición 1.23.** *Se dice que una base de Gröbner  $G$  es reducida para el orden monomial  $\prec$  cuando, para todo  $g \in G$ , se cumple:*

- $LC_{\prec}(g_i) = 1$ .
- Ningún monomio de  $g$  está en el ideal  $in_{\prec}(G \setminus \{g\})$ .

**Teorema 1.24.** *Dados un orden monomial  $\prec$  y un ideal  $I$ , existe una única base de Gröbner reducida de  $I$  para el orden  $\prec$  que denotaremos por  $G_{\prec}(I)$ .*

En [4] podemos encontrar la demostración del teorema y ver que partiendo de una base de Gröbner minimal  $G$  de  $I$  y definiendo  $\tilde{g} = \bar{g}^{G \setminus \{g\}}$ , entonces  $\tilde{G} = \{\tilde{g} : g \in G\}$  es una base de Gröbner reducida de  $I$ .

El problema de la pertenencia a un ideal (que ya hemos comentado), el problema de la pertenencia al radical, el problema del cálculo de radical y el problema de la igualdad de ideales son algunos de los resultados que, entre muchos otros, pueden ser resueltos usando bases de Gröbner.



# Capítulo 2

## Ideales iniciales de un ideal.

En este capítulo comenzaremos el estudio de los ideales iniciales de un ideal con respecto a órdenes monomiales,  $in_{\prec}(I)$ , destacando que sólo hay un número finito de ellos. Introduciremos también los ideales iniciales de  $I$  respecto de pesos  $\omega \in \mathbb{R}^n$  y estudiaremos algunas de sus propiedades, que van a ser un avance del estudio que se hará en el último capítulo sobre el abanico de Gröbner, en el cual es fundamental entender la relación  $in_{\omega}(I) = in_{\prec}(I)$ . Finalizaremos con un ejemplo en el que calcularemos todos los ideales iniciales citados, y veremos la estructura conjunta de todos ellos, que servirá de idea para el desarrollo del capítulo 4.

Para la elaboración de este capítulo nos hemos basado fundamentalmente en el libro [9].

### 2.1. Bases universales de Gröbner.

**Definición 2.1.** *Dado un ideal  $I \subseteq k[x]$  y un orden monomial  $\prec$ , llamaremos monomios estándar de  $I$  respecto de  $\prec$  a aquellos monomios que no pertenezcan al ideal inicial  $in_{\prec}(I)$ . Denotaremos al conjunto de monomios estándar por  $SM_{\prec}(I)$ .*

**Proposición 2.2.** *Sean  $I \subseteq J \subseteq k[x]$  ideales, y  $\prec$  un orden monomial tal que  $in_{\prec}(I) = in_{\prec}(J)$ . Entonces  $I = J$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una base de Gröbner de  $I$  respecto del orden  $\prec$ . Por la definición 1.12 y por la hipótesis de que  $in_{\prec}(I) = in_{\prec}(J)$  tenemos que  $in_{\prec}(J) = in_{\prec}(I) = (in_{\prec}(g) : g \in G)$ . Como  $G \subseteq I \subseteq J$ , de nuevo por la

definición 1.12,  $G$  es una base de Gröbner de  $J$  respecto de  $\prec$ . Del teorema 1.13 se deduce  $J = (G) = I$ , y por lo tanto la igualdad  $I = J$ .  $\square$

**Proposición 2.3.** *Las imágenes de los monomios estándar forman una base del  $k$ -espacio vectorial para el anillo cociente  $k[x]/I$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una base de Gröbner de  $I$  y sea  $\pi : k[x] \rightarrow k[x]/I$  el paso al cociente. Veamos primero que  $\pi(SM_{\prec}(I))$  genera  $k[x]/I$ . Sea  $f \in k[x]$ , y sea  $r = \bar{f}^G$ . Por la proposición 1.8 se tiene que ninguno de los monomios de  $r$  es divisible por ninguno de los monomios  $in_{\prec}(g)$  para todo  $g \in G$ , es decir, para todo monomio  $x^{\alpha}$  de  $r$ ,  $x^{\alpha} \in SM_{\prec}(I)$ . Además,  $r$  verifica que  $\pi(f) = \pi(r)$ , luego  $\pi(SM_{\prec}(I))$  genera  $k[x]/I$ .

Veamos ahora que los monomios estándar son  $k$ -linealmente independientes módulo  $I$ . Si se tiene  $f = \sum_{x^{\alpha} \in M} c_{\alpha} x^{\alpha} \in I$  con  $M \subseteq SM_{\prec}(I)$ , entonces  $f = \bar{f}^G = 0$ , luego  $c_{\alpha} = 0$ , para todo  $\alpha$  con  $x^{\alpha} \in M$ .  $\square$

De esta proposición se deduce un resultado que usaremos con frecuencia en posteriores demostraciones:

**Corolario 2.4.** *Sean  $\prec$  y  $\prec'$  dos órdenes monomiales con  $in_{\prec}(I) \subseteq in_{\prec'}(I)$ . Entonces dicha contención no puede ser estricta, es decir,  $in_{\prec}(I) = in_{\prec'}(I)$ .*

**Teorema 2.5.** *Cada ideal  $I \subseteq k[x]$  tiene un número finito de ideales iniciales distintos.*

*Demostración.* Vamos a hacer la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que el ideal  $I$  tiene un conjunto  $\Sigma_0$  infinito de ideales iniciales distintos,  $\Sigma_0 = \{in_{\prec}(I) : \prec \text{ orden monomial}\}$ .

Tomamos un elemento no nulo del ideal,  $f_1$ . Podemos escribir  $f_1 = \sum_{\alpha \in \Gamma_1} c_{\alpha} x^{\alpha}$  con  $\Gamma_1$  finito. Entonces, para cada elemento  $M = in_{\prec}(I)$  de  $\Sigma_0$  existe un monomio  $x^{\alpha}$  de  $f_1$  tal que  $x^{\alpha} = in_{\prec}(f) \in M$ . Como  $\Sigma_0$  es infinito y  $\Gamma_1$  es finito, tiene que existir un monomio de  $f_1$ ,  $m_1$ , tal que el conjunto

$$\Sigma_1 := \{M \in \Sigma_0 : m_1 \in M\} \text{ es infinito.}$$

En particular, existe un ideal inicial de  $I$  que contiene estrictamente al ideal  $(m_1)$ , y como consecuencia de la proposición 2.3, los monomios que no están en  $(m_1)$  son linealmente dependientes módulo  $I$ . Es decir, existe otro

elemento no nulo del ideal,  $f_2 = \sum_{\beta \in \Gamma_2} c_\beta x^\beta$ , cuyos monomios no pertenecen ninguno a  $(m_1)$ . De nuevo, como  $f_2$  tiene un número finito de términos y  $\Sigma_1$  es infinito, por el mismo razonamiento, existe un monomio  $m_2$  de  $f_2$  tal que  $m_2 \notin (m_1)$  y el conjunto

$$\Sigma_2 := \{M \in \Sigma_1 : m_2 \in M\} \text{ es infinito.}$$

En particular,  $(m_1, m_2)$  está estrictamente contenido en algún ideal inicial de  $I$ , y por lo tanto, por la proposición 2.3, los monomios que no pertenecen a  $(m_1, m_2)$  son linealmente dependientes modulo  $I$ , y se encuentra un monomio  $m_3 \notin (m_1, m_2)$ , tal que  $(m_1, m_2, m_3)$  está estrictamente contenido en un ideal inicial de  $I$ .

Repitiendo este procedimiento, obtenemos una cadena estrictamente creciente de ideales monomiales:

$$(m_1) \subsetneq (m_1, m_2) \subsetneq (m_1, m_2, m_3) \subsetneq \dots$$

Pero como  $k[x]$  es un anillo Noetheriano, hemos llegado a contradicción con la condición de cadena ascendente de ideales de un anillo Noetheriano. Por lo tanto, el conjunto  $\Sigma_0$  es finito. □

**Definición 2.6.** *Sea  $I$  un ideal y  $\mathcal{U}$  un subconjunto finito de  $I$ . Se dice que  $\mathcal{U}$  es una base universal de Gröbner si es una base de Gröbner de  $I$  con respecto a todos los órdenes monomiales  $\prec$  simultáneamente.*

**Corolario 2.7.** *Todo ideal  $I \subseteq k[x]$  posee una base universal de Gröbner finita.*

*Demostración.* El teorema 2.5 que acabamos de probar afirma que todo ideal tiene un conjunto finito de ideales iniciales. Esto implica que existe también un número finito de bases de Gröbner reducidas para  $I$ . Si llamamos  $\mathcal{U}$  a la unión de dichas bases de Gröbner,  $\mathcal{U} = G_1 \cup \dots \cup G_n$ , esta unión también es finita y es una base universal de Gröbner para  $I$ . □

**Ejemplo 2.** *Consideremos  $I = (f_1, f_2)$  con  $\{f_1, f_2\} = \{x - 1, y - 1\}$  y un orden monomial  $\prec$  cualquiera. Tenemos las dos siguientes opciones:*

- $x \prec y. \implies S(f_1, f_2) = \frac{xy}{x} \cdot (x - 1) - \frac{xy}{y} \cdot (y - 1) = x - y \in I$   
 $\implies \overline{S(f_1, f_2)}^F = 0$   
 $\implies F = \{x - 1, y - 1\}$  es base de Gröbner.

- $y \prec x$ . El razonamiento es exactamente el mismo.  
Por lo tanto en este caso también  $F = \{x - 1, y - 1\}$  es base de Gröbner.

Por lo tanto, como para cualquier orden monomial que consideremos  $F$  es una base de Gröbner, estamos ante una base de Gröbner universal.

**Ejemplo 3** (Menores  $2 \times 2$  en matrices  $2 \times m$ ). Consideremos el anillo de polinomios en  $2m$  indeterminadas, que distribuimos en forma de matriz  $2 \times m$ :

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \end{pmatrix}$$

Sea  $I$  el ideal generado por los  $\binom{m}{2}$  menores  $2 \times 2$ ,  $D_{i,j} = x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i}$  para  $1 \leq i < j \leq m$ .

Vamos a probar que el conjunto  $\{D_{i,j} : i, j\}$  es una base de Gröbner universal. Para ello, vamos a considerar un orden monomial  $\prec$  cualquiera y aplicaremos el criterio de Buchberger. Consideraremos primero el caso en que  $m = 3$ .

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Podemos distinguir fácilmente ocho posibles casos de ordenación:

- (1)  $x_{11}x_{22} \succ x_{12}x_{21}$ ,  $x_{11}x_{23} \succ x_{13}x_{21}$  y  $x_{12}x_{23} \succ x_{13}x_{22}$
- (2)  $x_{11}x_{22} \succ x_{12}x_{21}$ ,  $x_{11}x_{23} \succ x_{13}x_{21}$  y  $x_{12}x_{23} \prec x_{13}x_{22}$
- (3)  $x_{11}x_{22} \succ x_{12}x_{21}$ ,  $x_{11}x_{23} \prec x_{13}x_{21}$  y  $x_{12}x_{23} \succ x_{13}x_{22}$
- (4)  $x_{11}x_{22} \succ x_{12}x_{21}$ ,  $x_{11}x_{23} \prec x_{13}x_{21}$  y  $x_{12}x_{23} \prec x_{13}x_{22}$
- (5)  $x_{11}x_{22} \prec x_{12}x_{21}$ ,  $x_{11}x_{23} \succ x_{13}x_{21}$  y  $x_{12}x_{23} \succ x_{13}x_{22}$
- (6)  $x_{11}x_{22} \prec x_{12}x_{21}$ ,  $x_{11}x_{23} \succ x_{13}x_{21}$  y  $x_{12}x_{23} \prec x_{13}x_{22}$
- (7)  $x_{11}x_{22} \prec x_{12}x_{21}$ ,  $x_{11}x_{23} \prec x_{13}x_{21}$  y  $x_{12}x_{23} \succ x_{13}x_{22}$
- (8)  $x_{11}x_{22} \prec x_{12}x_{21}$ ,  $x_{11}x_{23} \prec x_{13}x_{21}$  y  $x_{12}x_{23} \prec x_{13}x_{22}$

Por permutación de las columnas, podemos agrupar los ocho posibles casos en dos órbitas distintas,  $\{(1), (2), (4), (5), (7), (8)\}$  y  $\{(3), (6)\}$ . Por lo tanto, es suficiente con que consideremos un caso de cada uno de los dos grupos. Analizaremos los casos (1) y (3).

(3): Multiplicamos los lados derechos e izquierdos de las tres desigualdades que tenemos, obteniendo así

$$(x_{11}x_{22})(x_{13}x_{21})(x_{12}x_{23}) \succ (x_{12}x_{21})(x_{11}x_{23})(x_{13}x_{22})$$

Haciendo cuentas a ambos lados de la desigualdad podemos darnos cuenta de que ambos términos son iguales, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe tal orden monomial.

(1): Vamos a aplicar el criterio de Buchberger para verificar que el conjunto  $\{D_{12}, D_{13}, D_{23}\} = G$  es una base de Gröbner.

$$\begin{aligned} S(D_{12}, D_{13}) &= x_{23}D_{12} - x_{22}D_{13} = \\ &= x_{23}(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) - x_{22}(x_{11}x_{23} - x_{13}x_{21}) = \\ &= x_{13}x_{21}x_{22} - x_{12}x_{21}x_{23} = x_{21}(x_{13}x_{22} - x_{12}x_{23}) = -x_{21}D_{23} \end{aligned}$$

Por tanto  $\overline{S(D_{12}, D_{13})}^G = 0$ . Lo mismo pasa con el  $S$ -polinomio de  $D_{13}$  y  $D_{23}$ ,

$$S(D_{13}, D_{23}) = x_{12}D_{13} - x_{11}D_{23} = x_{13}D_{12},$$

luego  $\overline{S(D_{13}, D_{23})}^G = 0$ . Finalmente, los menores  $D_{12}$  y  $D_{23}$  tienen términos dominantes primos entre sí, y por eso  $\overline{S(D_{12}, D_{23})}^G = 0$  (por la observación 1.16).

Esto completa la prueba de las propiedades de la base universal de Gröbner para los tres menores  $2 \times 2$  de matrices  $2 \times 3$ .

Consideremos ahora el caso general en que  $m \geq 4$  y fijemos un orden monomial  $\prec$  cualquiera. Consideramos dos menores,  $D_{ij}$  y  $D_{kl}$ .

- Si el conjunto  $\{i, j, k, l\}$  tiene cuatro elementos, entonces las variables en  $D_{ij}$  son disjuntas de las variables de  $D_{kl}$ . Por lo tanto, sus términos dominantes son primos entre sí, y el  $S$ -polinomio  $S(D_{ij}, D_{kl})$  se reduce a cero con respecto a  $\{D_{ij}, D_{kl}\}$  (por la observación 1.16).
- Si el conjunto  $\{i, j, k, l\}$  tiene tres o menos elementos, podemos considerar una submatriz  $2 \times 3$  que contenga las columnas  $i, j, k, l$ ; y ya hemos visto que el  $S$ -polinomio  $S(D_{ij}, D_{kl})$  se reduce a cero con respecto a los tres menores  $2 \times 2$  que hemos analizado en el caso  $m = 3$ .

## 2.2. Órdenes monomiales pesados.

Fijemos  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ . Escribiremos  $\omega \geq 0$  si  $\omega_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$ .

**Definición 2.8.** Sea  $\omega \in \mathbb{R}^n$ , llamamos forma inicial respecto de  $\omega$  de un polinomio  $f = \sum c_i x^{\alpha_i}$ , y la denotamos por  $in_\omega(f)$ , a la suma de los términos  $c_i x^{\alpha_i}$  tales que el producto  $\omega \cdot \alpha_i$  es máximo. Diremos que  $\delta = \max\{\omega \cdot \alpha_i : c_i \neq 0\}$  es el  $\omega$ -grado de  $f$ .

**Definición 2.9.** Sea  $I$  un ideal. Definimos el ideal inicial de  $I$  respecto de  $\omega$  como el ideal generado por todas las formas iniciales respecto de  $\omega$ , es decir

$$in_\omega(I) := (in_\omega(f) : f \in I).$$

Nótese que el ideal inicial no es necesariamente un ideal monomial, como vemos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.** Sea  $I$  el ideal generado por  $f(x_1, x_2) = x_1^5 x_2^2 + x_1^4 x_2^4 + x_1^4 + x_1^2 x_2^5 + x_1 x_2^2 + x_2^6 + x_2$ . Veremos ahora que para algunos valores de  $\omega$ , el ideal inicial no es monomial. Más adelante, volveremos a este ejemplo donde estudiaremos los posibles ideales iniciales monomiales y no monomiales y el por qué de la existencia de los mismos.

- Para  $\omega = (1, 1)$  el ideal inicial  $in_\omega(I) = (x_1^4 x_2^4)$  es monomial.
- Sin embargo, para  $\omega = (1, 2)$  el ideal inicial  $in_\omega(I) = (x_1^4 x_2^4 + x_1^2 x_2^5 + x_2^6)$  no es monomial.

Vamos a definir un nuevo orden monomial a partir de un orden monomial  $\prec$  y  $\omega \geq 0$ .

**Proposición 2.10.** Sea  $\omega \geq 0$  y sea  $\prec$  un orden monomial cualquiera. Definimos  $\prec_\omega$  de la siguiente manera: para  $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$

$$a \prec_\omega b \quad :\iff \begin{cases} \omega \cdot a < \omega \cdot b \\ \text{ó} \\ \omega \cdot a = \omega \cdot b \quad \text{y} \quad a \prec b \end{cases}$$

Entonces  $\prec_\omega$  es un orden monomial.

*Demostración.* Veamos que es un orden monomial. Es fácil verificar que  $\preceq_\omega$  cumple las propiedades de orden (total), por ser  $\preceq$  un orden total. La segunda propiedad de orden monomial también la verifica:

$$\text{Si } \alpha \prec_\omega \beta \implies \begin{cases} \omega \cdot \alpha < \omega \cdot \beta \implies \omega \cdot (\alpha + \gamma) < \omega \cdot (\beta + \gamma) \\ \text{ó} \\ \omega \cdot \alpha = \omega \cdot \beta \text{ y } \alpha \prec \beta \implies \\ \implies \omega \cdot (\alpha + \gamma) = \omega \cdot (\beta + \gamma) \text{ y } \alpha + \gamma \prec \beta + \gamma, \end{cases}$$

luego  $\alpha + \gamma \prec_\omega \beta + \gamma$ .

Por último, para probar que es un buen orden, haremos uso de la proposición 1.2:

$$\text{Para } \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \implies \begin{cases} \omega \cdot \alpha \neq 0 \implies \omega \cdot \alpha > 0 \implies 0 \prec_\omega \alpha \\ \text{ó} \\ \omega \cdot \alpha = 0 = \omega \cdot 0 \text{ y } 0 \prec \alpha \implies 0 \preceq_\omega \alpha, \end{cases}$$

luego  $0 \preceq_\omega \alpha$ . □

**Proposición 2.11.** *Dado  $\omega \geq 0$ , y  $\prec$  un orden monomial, para cada ideal  $I \subseteq k[x]$  se tiene*

$$in_{\prec}(in_\omega(I)) = in_{\prec_\omega}(I).$$

*Demostración.* Es claro que para cada polinomio  $f \in k[x]$  se tiene la igualdad  $in_{\prec}(in_\omega(f)) = in_{\prec_\omega}(f)$ . Esto implica que los ideales monomiales,  $in_{\prec}(in_\omega(I))$  e  $in_{\prec_\omega}(I)$ , contienen los mismos monomios, y por lo tanto son iguales. □

Los dos siguientes resultados son consecuencias directas de esta proposición. El primero de ellos nos va a proporcionar un método para calcular bases de Gröbner de ideales iniciales del tipo  $in_\omega(I)$  con  $\omega \geq 0$ , que no son monomiales.

**Corolario 2.12.** *Si  $\omega \geq 0$ ,  $\prec$  es un orden monomial y  $G$  es una base de Gröbner de  $I$  respecto del orden  $\prec_\omega$ , entonces  $\{in_\omega(g) : g \in G\}$  es una base de Gröbner para  $in_\omega(I)$  con respecto al orden monomial  $\prec$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una base de Gröbner de  $I$  respecto al orden monomial  $\prec_\omega$ . Entonces una base del ideal inicial  $in_{\prec_\omega}(I) = in_{\prec}(in_\omega(I))$  es  $\{in_{\prec_\omega}(g) :$

$g \in G\} = \{in_{\prec}(in_{\omega}(g)) : g \in G\}$ , por lo que  $\{in_{\omega}(g) : g \in G\}$  es una base de Gröbner de  $in_{\omega}(I)$  respecto al orden monomial  $\prec$ . □

**Corolario 2.13.** *Si  $\omega \geq 0$ ,  $\prec$  es un orden monomial e  $in_{\omega}(I)$  es un ideal monomial, entonces  $in_{\omega}(I) = in_{\prec_{\omega}}(I)$ .*

*Demostración.* Dado que los ideales monomiales permanecen fijos por la operación de pasar al ideal inicial, entonces  $in_{\omega}(I) = in_{\prec}(in_{\omega}(I)) = in_{\prec_{\omega}}(I)$ . □

**Definición 2.14.** *Fijado un ideal  $I \subseteq k[x]$ , podemos definir la siguiente relación de equivalencia en  $\mathbb{R}^n$ :*

$$\omega' \sim \omega \iff in_{\omega'}(I) = in_{\omega}(I). \quad (2.1)$$

Denotaremos por  $c_{\omega}(I)$  la clase de equivalencia de  $\omega$  para la relación anterior y por  $C_{\omega}(I)$  su adherencia en  $\mathbb{R}^n$ .

Además, dado un orden monomial  $\prec$  en  $I$ , denotaremos  $c_{\prec}(I) = \{\omega \in \mathbb{R}^n : in_{\omega}(I) = in_{\prec}(I)\}$  y  $C_{\prec}(I) = \overline{c_{\prec}(I)}$ . Es obvio que dados  $\prec$  y  $\prec'$ , o bien  $c_{\prec}(I) = c_{\prec'}(I)$  o  $c_{\prec}(I) \cap c_{\prec'}(I) = \emptyset$ .

La siguiente proposición proporciona un criterio de cálculo de  $c_{\prec}(I)$ :

**Proposición 2.15.** *Dado  $\prec$  un orden monomial, para  $\omega \in \mathbb{R}^n$  se tiene,*

$$in_{\omega}(I) = in_{\prec}(I) \iff \forall g \in G_{\prec}(I), in_{\omega}(g) = in_{\prec}(g).$$

*Demostración.*

$\implies$ ] Sea  $g \in G_{\prec}(I)$ . Por la definición de base de Gröbner reducida, de los monomios de  $g$  sólo  $in_{\prec}(g)$  pertenece a  $in_{\prec}(I)$ . Por otro lado, tenemos que  $in_{\omega}(g) \in in_{\omega}(I) = in_{\prec}(I)$ , luego  $in_{\omega}(g) = in_{\prec}(g)$ , ya que todo monomio de  $in_{\omega}(g)$  pertenece a  $in_{\prec}(I)$  por ser monomial.

$\impliedby$ ] Queremos ver que  $in_{\prec}(I) = in_{\omega}(I)$ , donde  $in_{\prec}(I) = \{in_{\prec}(g) : g \in G_{\prec}(I)\}$ .

$$\subseteq] in_{\prec}(I) = \{in_{\prec}(g) : g \in G_{\prec}(I)\} = \{in_{\omega}(g) : g \in G_{\prec}(I)\} \subseteq in_{\omega}(I).$$



⊇] Como  $in_\omega(I) = \{in_\omega(f) : f \in I\}$ , es suficiente con probar que para todo  $f \in I$  se tiene que  $in_\omega(f) \in in_\prec(I)$ .

Sea  $f \in I$ . Ejecutamos para  $f$  el algoritmo de división respecto al orden monomial  $\prec$  con la base de Gröbner reducida  $G_\prec(I)$ . Como resultado llegamos a una expresión  $f = \sum_{g_i \in G_\prec(I)} a_i g_i$ , y separando los términos de los cocientes  $a_i$ , podemos reescribir  $f$  de la forma

$$f = m_1 g_{i_1} + \dots + m_r g_{i_r},$$

donde  $m_i$  son términos y los  $g_{i_j}$ , para  $j = 1, \dots, r$ , son elementos de la base de Gröbner reducida (que pueden aparecer repetidos). Vamos a analizar esta expresión revisando el algoritmo de división. En cada paso, se tiene un polinomio  $p$  (inicialmente  $p = f$ ) y una expresión

$$f = m_1 g_{i_1} + \dots + m_s g_{i_s} + p,$$

(dado que en esta ocasión el resto es cero), y se cambia por

$$f = m_1 g_{i_1} + \dots + m_s g_{i_s} + m_{s+1} g_{i_{s+1}} + p',$$

donde  $m_{s+1} = \lambda \frac{in_\prec(p)}{in_\prec(g_{i_{s+1}})}$  y  $p' = p - m_{s+1} g_{i_{s+1}}$ . Escribamos  $in_\prec(p) = x^\alpha$  e  $in_\prec(g_{i_{s+1}}) = x^\beta$ . Cada monomio de  $m_{s+1} g_{i_{s+1}}$  añadido a la expresión (y restado de  $p$ ) es  $m_{s+1} x^\gamma$  donde  $x^\gamma \preceq in_\prec(g_{i_{s+1}}) = in_\omega(g_{i_{s+1}}) = x^\beta$ , luego  $\gamma \leq \beta$  y  $\omega \cdot (\alpha - \beta + \gamma) \leq \omega \cdot \alpha$ . Por tanto, nunca se añade un monomio cuyo  $\omega$ -grado exceda el  $\omega$ -grado de  $f$ .

En particular, si  $J$  es el conjunto de índices  $j$  tales que  $m_j in_\omega(g_{i_j})$  tenga el mismo  $\omega$ -grado que  $f$ , se tiene

$$in_\omega(f) = \sum_{j \in J} m_j in_\omega(g_{i_j}) = \sum_{j \in J} m_j in_\prec(g_{i_j}),$$

donde la última igualdad se da por hipótesis. Por lo tanto,  $in_\omega(f) \in in_\prec(I)$ .

□

**Corolario 2.16.** *Sea  $\prec$  un orden monomial y  $\omega \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,*

$$\omega \in C_\prec(I) \iff \forall g \in G_\prec(I) : in_\prec(in_\omega(g)) = in_\prec(g).$$

*Demostración.* Si  $g \in G_{\prec}(I)$  es  $g = \lambda_1 x^{\alpha_1} + \cdots + \lambda_r x^{\alpha_r}$  con  $in_{\prec}(g) = x^{\alpha_1}$ , entonces, para  $\omega \in \mathbb{R}^n$ ,

$$in_{\omega}(g) = in_{\prec}(g) \iff \omega \cdot \alpha_j < \omega \cdot \alpha_1, \text{ para todo } j > 1.$$

Es decir, por la proposición 2.15, se tiene que  $c_{\prec}(I)$  está definida por una cantidad finita de desigualdades estrictas del tipo anterior, obtenidas a partir de los elementos de  $G_{\prec}(I)$ . Su adherencia,  $C_{\prec}(I)$ , estará entonces definida por las mismas ecuaciones pero reemplazando en ellas desigualdades estrictas por no estrictas. Ahora bien,  $\omega \cdot \alpha_j \leq \omega \cdot \alpha_1$  para todo  $j = 2, \dots, r$  y esto equivale a  $in_{\prec}(in_{\omega}(g)) = in_{\prec}(g)$ , con lo que se tiene demostrado el resultado. □

**Corolario 2.17.**

$$\mathbb{R}_{\geq 0}^n \subseteq \bigcup_{\prec} C_{\prec}(I).$$

*Demostración.* Sea  $\omega \geq 0$ . Para cualquier orden monomial  $\prec$  podemos considerar el orden monomial  $\prec_{\omega}$  y es claro que

$$in_{\prec_{\omega}}(in_{\omega}(f)) = in_{\prec_{\omega}}(f), \forall f \in k[x],$$

luego por el corolario 2.16,  $\omega \in C_{\prec_{\omega}}(I)$ . □

**Observación 2.18.** *Lo que sabemos hasta ahora de la colección  $\{C_{\prec}(I) : \prec \text{ orden monomial}\}$  es que en ella hay un número finito de conjuntos (tantos como ideales iniciales  $in_{\prec}(I)$ , ver teorema 2.5) y que recubren  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ .*

Veremos a continuación que  $C_{\prec}(I) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n \neq \emptyset$ , para cualquier orden monomial  $\prec$ . Previamente, para su demostración, usaremos un corolario del lema de Farkas, cuya demostración se puede ver en [8] (corolario 7.1.f, sección 7.3, capítulo 7):

**Proposición 2.19** (Lema de Farkas). *Sea  $A$  una matriz  $n \times m$  y  $b$  un vector de  $\mathbb{Q}^n$ . Entonces el sistema  $Ax \leq b$  tiene solución  $x \geq 0$  si y sólo si  $yb \geq 0$  para cada vector fila  $y \geq 0$  con  $yA \geq 0$ .*

**Proposición 2.20.** *Para cualquier orden monomial  $\prec$  y cualquier ideal  $I \subseteq k[x]$ , existe un vector de números enteros no negativos,  $\omega \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , tal que  $in_{\omega}(I) = in_{\prec}(I)$ . Es decir,  $c_{\prec}(I) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n \neq \emptyset$*

*Demostración.* Sea  $G_{\prec}(I) = \{g_1, \dots, g_r\}$  la base de Gröbner reducida de  $I$  respecto al orden monomial  $\prec$ . Escribiremos

$$g_i = x^{a_{i0}} + c_{i1}x^{a_{i1}} + \dots + c_{ij_i}x^{a_{ij_i}},$$

donde  $in_{\prec}(g_i) = x^{a_{i0}}$ . Consideramos el conjunto

$$\begin{aligned} C_{I,\prec} &= \{\omega \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^n : in_{\omega}(g_i) = x^{a_{i0}} \text{ para } i = 1, \dots, r\} \\ &= \{\omega \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^n : \omega \cdot a_{i0} > \omega \cdot a_{il}, \text{ para } i = 1, \dots, r, l = 1, \dots, j_i\} \\ &= \{\omega \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^n : \omega \cdot (a_{i0} - a_{il}) > 0 \text{ para } i = 1, \dots, r, l = 1, \dots, j_i\}. \end{aligned}$$

Empecemos por comprobar que el conjunto  $C_{I,\prec}$  no es vacío. Para ello supondremos lo contrario, que  $C_{I,\prec} = \emptyset$ , esto es, el sistema  $x(a_{i0} - a_{il}) > 0$ , para  $i = 1, \dots, r$  y  $l = 1, \dots, j_i$ , no tiene solución en  $\mathbb{Q}_{\geq 0}^n$ . Si llamamos  $A$  a la matriz cuyas filas son los vectores  $(a_{il} - a_{i0})$ , de tamaño  $N \times n$ , con  $N = \sum_{i=1}^r j_i$ , entonces estamos suponiendo que el sistema  $-Ax > 0$  no tiene solución en  $\mathbb{Q}_{\geq 0}^n$ , luego tampoco la tiene en  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ . O lo que es lo mismo,  $-Ax \geq -b = (1, \dots, 1)$  no tiene solución en  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ , es decir, el sistema  $Ax \leq (-1, \dots, -1)$  no tiene solución en  $\mathbb{Q}_{\geq 0}^n$  y podemos aplicar la proposición 2.19. Existe así un vector  $y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^N$  con  $yb < 0$  e  $yA \geq 0$ . Esto quiere decir que existen enteros  $\lambda_{il}$ , no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{j_i} \lambda_{il}(a_{il} - a_{i0}) \geq 0, \text{ es decir, } \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{j_i} \lambda_{il}a_{i0} \leq \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{j_i} \lambda_{il}a_{il}.$$

En términos de monomios, esto se traduce en

$$\prod_{i=1}^r \prod_{l=1}^{j_i} (x^{a_{i0}})^{\lambda_{il}} \preceq \prod_{i=1}^r \prod_{l=1}^{j_i} (x^{a_{il}})^{\lambda_{il}}.$$

Pero por otro lado tenemos que, como  $in_{\prec}(g_i) = x^{a_{i0}}$ ,  $x^{a_{i0}} \succ x^{a_{il}}$  para cualquier  $l = 1, \dots, j_i$ , y por lo tanto

$$\prod_{i=1}^r \prod_{l=1}^{j_i} (x^{a_{i0}})^{\lambda_{il}} \succ \prod_{i=1}^r \prod_{l=1}^{j_i} (x^{a_{il}})^{\lambda_{il}}$$

llegando así a una contradicción y concluyendo que  $C_{I,\prec}$  no es un conjunto vacío.

Para probar que  $in_\omega(I) = in_{\prec}(I)$  basta con hacer uso de la proposición 2.15, ya que tenemos que  $in_{\prec}(g_i) = in_\omega(g_i)$  para todo  $g_i \in G_{\prec}(I)$ . Se deduce que  $C_{I,\prec} = c_{\prec}(I) \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}^n$ . □

**Ejemplo 5.** *Volvamos al ejemplo 4, donde  $f(x_1, x_2) = x_1^5 x_2^2 + x_1^4 x_2^4 + x_1^4 + x_1^2 x_2^5 + x_1 x_2^2 + x_2^6 + x_2$ . Si consideramos el orden lexicográfico con  $y \prec_{lex} x$  y  $\omega = (1, 0)$ ,*

$$in_{\prec_{lex}}(I) = (x_1^5 x_2^2) = in_\omega(I)$$

### 2.3. Región de Gröbner: ejemplo.

En esta sección vamos a calcular en un ejemplo particular todos los conjuntos  $C_{\prec}$  y  $C_\omega$ , como motivación para el estudio que haremos en el capítulo 4.

Recordemos que en el ejemplo 4 teníamos el ideal  $I$  generado por

$$f(x_1, x_2) = x_1^5 x_2^2 + x_1^4 x_2^4 + x_1^4 + x_1^2 x_2^5 + x_1 x_2^2 + x_2^6 + x_2.$$

Vamos a representar en el plano coordenado los 7 monomios que aparecen en  $f(x_1, x_2)$ , es decir, el conjunto de puntos

$$X = \{(4, 0), (5, 2), (4, 4), (2, 5), (0, 6), (0, 1), (1, 2)\}.$$

Su envolvente convexa es un pentágono  $P$  de vértices

$$\{\alpha_1 = (4, 0), \alpha_2 = (5, 2), \alpha_3 = (4, 4), \alpha_4 = (0, 6), \alpha_5 = (0, 1)\}.$$

Para  $\omega \in \mathbb{R}^n$ , denotamos  $M_\omega = \max\{\omega \cdot \alpha : \alpha \in X\}$ . Es claro que  $in_\omega(f)$  es no monomial si, y sólo si, existen al menos dos puntos de  $X$  en la recta  $\omega \cdot \alpha = M_\omega$ . Además, todos los puntos de  $X$  deben estar en el semiplano  $\omega \cdot \alpha \leq M_\omega$ , por lo que  $\omega$  es un vector normal externo respecto de  $P$  a dicha recta.

Así, los  $\omega$  para los cuales  $in_\omega(f)$  son no monomiales son, salvo producto por constantes positivas, los siguientes:

- Si  $\omega_1 = (2, -1)$ , correspondiendo a la recta  $L_1$  de dirección  $\alpha_2 - \alpha_1 = (1, 2)$ .

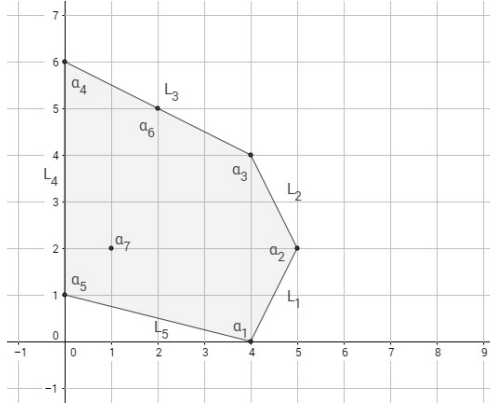


Figura 2.1: Polígono P

- Si  $\omega_2 = (2, 1)$ , correspondiendo a la recta  $L_2$  de dirección  $\alpha_3 - \alpha_2 = (-1, 2)$ .
- Si  $\omega_3 = (1, 2)$ , correspondiendo a la recta  $L_3$  de dirección  $\alpha_4 - \alpha_3 = (-2, 1)$ .
- Si  $\omega_4 = (-1, 0)$ , correspondiendo a la recta  $L_4$  de dirección  $\alpha_5 - \alpha_4 = (0, -1)$ .
- Si  $\omega_5 = (-1, -4)$ , correspondiendo a la recta  $L_5$  de dirección  $\alpha_1 - \alpha_5 = (4, -1)$ .

Y los posibles ideales no monomiales son:

- $in_{\omega_1}(I) = (x_1^4 + x_1^5 x_2^2)$ .
- $in_{\omega_2}(I) = (x_1^5 x_2^2 + x_1^4 x_2^4)$ .
- $in_{\omega_3}(I) = (x_1^4 x_2^4 + x_1^2 x_2^5 + x_2^6)$ .
- $in_{\omega_4}(I) = (x_2^6 + x_2)$ .
- $in_{\omega_5}(I) = (x_2 + x_1^4)$ .

(Obviamente,  $in_{\omega}(I) = in_{\lambda\omega}(I)$  si  $\lambda > 0$ ).

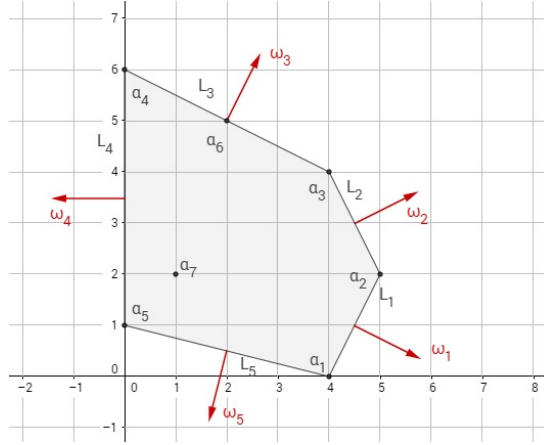


Figura 2.2: Vectores normales

Los vectores  $\omega_i$  dividen  $\mathbb{R}^2$  en cinco conos:

$$R_i = \{\omega \in \mathbb{R}^n : \omega \cdot \alpha_k \leq \omega \cdot \alpha_i, \forall k\}, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

de forma que  $in_\omega(f) = x^{\alpha_i}$  si, y sólo si,  $\omega$  está en el interior de  $R_i$ . Así, por ejemplo,

- Si  $\omega'_1 = (3, -2)$ , entonces  $in_{\omega'_1}(I) = (x_1^4)$ .
- Si  $\omega'_2 = (1, 0)$ , entonces  $in_{\omega'_2}(I) = (x_1^5 x_2^2)$ .
- Si  $\omega'_3 = (1, 1)$ , entonces  $in_{\omega'_3}(I) = (x_1^4 x_2^4)$ .
- Si  $\omega'_4 = (0, 1)$ , entonces  $in_{\omega'_4}(I) = (x_2^6)$ .
- Si  $\omega'_5 = (-2, -1)$ , entonces  $in_{\omega'_5}(I) = (x_2)$ .

Para  $\omega'_2$ ,  $\omega'_3$  y  $\omega'_4$ , puesto que son no negativos, ya hemos visto que existen órdenes monomiales  $\prec_2$ ,  $\prec_3$  y  $\prec_4$  con  $in_{\prec_i}(I) = in_{\omega'_i}(I)$ . Por ejemplo,  $\prec_2 = \prec_{lex}$  con  $x_2 \prec_{lex} x_1$ ,  $\prec_3 = \prec_{grlex}$  con  $x_2 \prec_{grlex} x_1$  y  $\prec_4 = \prec_{lex}$  con  $x_1 \prec_{lex} x_2$ . Por lo tanto,  $C_{\prec_i}(I) = R_i$ , para  $i = 2, 3, 4$ .

Como se verifica que  $c_{\prec}(I) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \neq 0$ , no pueden existir más ideales iniciales (para órdenes monomiales) que estos, luego no pueden existir órdenes monomiales tales que  $in_{\prec}(I) = in_{\omega_i}(I)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  o  $in_{\prec}(I) = in_{\omega'_i}(I)$ , para  $i = 1, 5$ .

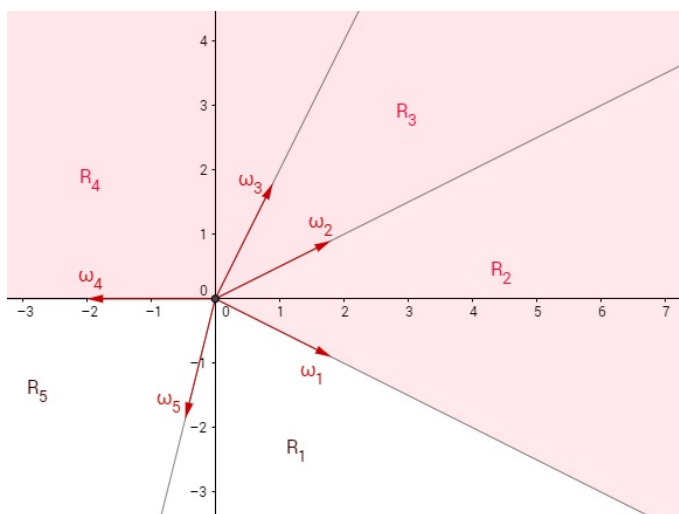


Figura 2.3: Región de Gröbner

Así pues, la unión  $C_{\prec_2} \cup C_{\prec_3} \cup C_{\prec_4}$  (conocido como *región de Gröbner* de  $I$ ) es

$$GR(I) = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \omega_2 > 0, \omega_1 + 2\omega_2 > 0\}.$$





# Capítulo 3

## Nociones básicas de geometría poliedral.

Este capítulo recoge algunas nociones de geometría poliedral necesarias para el desarrollo posterior, con el fin de hacer el trabajo más autocontenido. Definimos en particular el concepto de abanico normal de un poliedro.

Para su desarrollo nos basamos principalmente en [8].

### 3.1. Teorema fundamental de inecuaciones lineales.

**Teorema 3.1.** *Sean  $b, a_1, \dots, a_m$  vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces se da una y sólo una de estas dos opciones:*

1.  *$b$  es una combinación lineal no negativa de un subconjunto de  $\{a_1, \dots, a_m\}$  de vectores linealmente independientes.*
2. *Existe un hiperplano  $\{x : c \cdot x = 0\}$ , conteniendo un subconjunto de  $t-1$  vectores linealmente independientes de  $\{a_1, \dots, a_m\}$  tal que  $c \cdot b < 0$  y  $c \cdot a_1, \dots, c \cdot a_m \geq 0$ , donde  $t := \text{rg}\{a_1, \dots, a_m, b\}$ .*

*Demostración.* Si  $b \notin \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)$ , cualquier hiperplano que contenga a  $a_1, \dots, a_m$  y no a  $b$  verifica 2. Podemos por tanto suponer que  $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) = \mathbb{R}^n$ , pues cualquier hiperplano  $H$  de  $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_m)$  se puede extender a un hiperplano  $H'$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $H' \cap \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) = H$ .

Las dos opciones son excluyentes, ya que si  $b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$  con  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ ,  $c \cdot b = \lambda_1 c \cdot a_1 + \cdots + \lambda_m c \cdot a_m \geq 0$ , para todo  $c$  tal que  $c \cdot a_i \geq 0$ , para cada  $i$ . Consideremos  $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$  vectores linealmente independientes de  $\{a_1, \dots, a_m\}$  y sea  $D := \{a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}$ . Realicemos la siguiente iteración:

- (i) Escribimos  $b$  como combinación lineal de  $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ ,  $b = \lambda_{i_1} a_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n} a_{i_n}$ . Si  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n} \geq 0$  entonces hemos terminado porque nos encontramos en el caso 1.
- (ii) En caso contrario, sea  $h$  el menor de entre  $\{1, \dots, n\}$  con  $\lambda_{i_h} < 0$ . Consideramos el hiperplano  $\{x : c \cdot x = 0\}$  generado por  $D \setminus \{a_{i_h}\}$ . Podemos normalizar  $c$  para que  $c \cdot a_{i_h} = 1$  y así tenemos que  $c \cdot b = \lambda_{i_h} < 0$ .
- (iii) Si  $c \cdot a_1, \dots, c \cdot a_m \geq 0$ , hemos terminado porque nos encontramos en el caso 2.
- (iv) En caso contrario, sea  $s$  el menor de entre  $\{1, \dots, m\}$  con  $c \cdot a_s < 0$ . Sustituimos  $D$  por  $(D \setminus \{a_{i_h}\}) \cup \{a_s\}$ , y empezamos de nuevo la iteración.

Terminaremos la demostración si comprobamos que este proceso termina.

Denotemos por  $D_k$  al conjunto  $D$  que obtenemos en la iteración  $k$ -ésima. Si el proceso no termina, entonces  $D_k = D_l$  para algún  $k < l$ , puesto que solamente hay un número finito de elecciones del conjunto  $D$ . Sea  $r$  el mayor índice para el cual  $a_r$  se ha quitado del conjunto  $D$  al final de una de las iteraciones  $k, k+1, \dots, l-1$  y supongamos que esto sucede en la iteración  $p$ . Es decir,  $D_{p+1} = (D_p \setminus \{a_r\}) \cup \{a_j\}$ . Como  $D_k = D_l$ , sabemos que  $a_r$  ha sido añadido al conjunto  $D$  en alguna iteración  $q$ , con  $p < q < l$ . Entonces, por la forma en que elegimos  $a_r$ ,

$$D_p \cap \{a_{r+1}, \dots, a_m\} = D_q \cap \{a_{r+1}, \dots, a_m\}.$$

Sea  $D_p = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}$ ,  $b = \lambda_{i_1} a_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n} a_{i_n}$  y  $c'$  el vector  $c$  encontrado en (ii) en la iteración  $q$ -ésima. Entonces  $0 > c' \cdot b$  por construcción de  $c'$ , y

$$c' \cdot b = c' \cdot (\lambda_{i_1} a_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n} a_{i_n}) = \lambda_{i_1} c' \cdot a_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n} c' \cdot a_{i_n}. \quad (3.1)$$

Veamos que  $\lambda_{i_1} c' \cdot a_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n} c' \cdot a_{i_n} > 0$ , con lo que llegamos a contradicción.

- Si  $i_j > r \implies c' \cdot a_{i_j} = 0$  por (3.1), ya que  $a_{i_j}$  pertenecerá a  $c' \cdot x = 0$ .

- Si  $i_j = r$  entonces  $\lambda_{i_j} < 0$  porque  $a_r$  es el elemento que hemos quitado en la iteración  $(p + 1)$ -ésima y  $c' \cdot a_{i_j} < 0$  porque  $a_r$  es el elemento que hemos añadido en la iteración  $q$ -ésima.
- Si  $i_j < r$  entonces  $\lambda_{i_j} \geq 0$  por la elección de  $r$  en (ii) en el paso  $(p + 1)$  y  $c' \cdot a_{i_j} \geq 0$  por la elección de  $r$  en (iv) en el paso  $q$ .

□

## 3.2. Poliedros, conos y politopos.

A lo largo de esta sección vamos a dar algunos conceptos básicos de geometría poliedral y resultados que serán consecuencia del teorema 3.1.

**Definición 3.2.** *Un conjunto  $P$  de vectores en  $\mathbb{R}^n$  se denomina poliedro (convexo) si*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad (3.2)$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^m$  (es decir, si  $P$  se puede ver como la intersección finita de semiespacios cerrados de  $\mathbb{R}^n$ ). En este caso, decimos que  $Ax \leq b$  define o determina  $P$ .

**Definición 3.3.** *Un conjunto  $C$  no vacío de puntos en el espacio euclídeo se denomina cono (convexo) si para  $x, y \in C$  y  $\lambda, \mu \geq 0$  se verifica que  $\lambda x + \mu y \in C$ .*

*Un cono  $C$  es poliedral si*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}, \quad (3.3)$$

para alguna matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ , (es decir,  $C$  es la intersección de finitos semiespacios lineales).

Nótese que un cono poliedral es un poliedro.

**Definición 3.4.** *Decimos que un cono  $C \subset \mathbb{R}^n$  está generado por  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  si es el menor cono (convexo) que contiene a  $x_1, \dots, x_m$ . Denotaremos  $C = \text{cono}\{x_1, \dots, x_m\}$ .*

**Lema 3.5.**  *$\text{cono}\{x_1, \dots, x_m\} = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0\}$ .*

*Demostración.* Veamos que  $C = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0\}$  es el cono generado por  $x_1, \dots, x_m$ , es decir, que es el menor cono que contiene a  $x_1, \dots, x_m$ .

- Es evidente que  $x_1, \dots, x_m \in C$ .
- Veamos que  $C$  es un cono (convexo). Sean  $x, y \in C$  y  $\lambda, \mu \geq 0$ , entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \text{ con } \lambda_i \geq 0 \\ y = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i \text{ con } \mu_i \geq 0 \end{array} \right.$$

Entonces  $\lambda x + \mu y = \lambda \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + \mu \sum_{i=1}^m \mu_i x_i = \sum_{i=1}^m (\lambda \lambda_i + \mu \mu_i) x_i$ , con  $\lambda \lambda_i + \mu \mu_i \geq 0$ . Entonces  $\lambda x + \mu y \in C$  y, por lo tanto,  $C$  es un cono.

- Veamos que  $C$  es el menor cono que contiene a  $x_1, \dots, x_m$ . Supongamos que  $C'$  es otro cono conteniendo a  $x_1, \dots, x_m$  y veamos que  $C \subseteq C'$ . Para cada  $x \in C$ , se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \text{ con } \lambda_i \geq 0 \\ x_i \in C' \\ C' \text{ es un cono} \end{array} \right\} \implies x \in C'.$$

Luego  $C \subseteq C'$ .

□

Se deduce del teorema 3.1 el siguiente resultado, que afirma que los conceptos de “poliedral” y “finitamente generado” para conos son equivalentes.

**Teorema 3.6.** *Un cono (convexo) es poliedral si, y sólo si, está finitamente generado.*

*Demostración.*

←] Sean  $x_1, \dots, x_m$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Veremos que  $\text{cono}\{x_1, \dots, x_m\}$  es poliedral. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_m) = \mathbb{R}^n$ .

Vamos a considerar todos los semiespacios lineales  $H = \{x : c \cdot x \geq 0\}$  tales que  $x_1, \dots, x_m \in H$  y  $\{x : c \cdot x = 0\}$  contiene a  $n - 1$  vectores linealmente independientes. Sea  $\mathcal{H}$  el conjunto (finito) de tales semiespacios.

Veamos que  $\text{cono}(x_1, \dots, x_m) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ , es intersección finita de semiespacios lineales, y por lo tanto, el cono es poliedral y habremos acabado.

$\subseteq$ ]  $\{x_1, \dots, x_m\} \subset H$ , para todo  $H \in \mathcal{H}$ , entonces  $\text{cono}\{x_1, \dots, x_m\} \subset H$ , para todo  $H \in \mathcal{H}$ .

$\supseteq$ ] Si  $b \notin \text{cono}\{x_1, \dots, x_m\}$ , entonces no se da la condición 1 del teorema 3.1, por lo tanto debe darse la segunda condición, es decir, existe  $H \in \mathcal{H}$  tal que  $b \notin H$ .

$\implies$ ] Sea  $C = \{x : a_1^T x \leq 0, \dots, a_m^T x \leq 0\}$  un cono poliedral, donde  $a_1, \dots, a_m$  son vectores columna. Vimos en la otra implicación que todo cono finitamente generado es poliedral, esto es, existen vectores columna  $b_1, \dots, b_t$  tales que

$$\text{cono}\{a_1, \dots, a_m\} = \{x : b_1^T x \leq 0, \dots, b_t^T x \leq 0\} \quad (3.4)$$

Veremos que  $C = \text{cono}\{b_1, \dots, b_t\}$ , lo cual implicará que  $C$  está finitamente generado.

$\supseteq$ ] En efecto,  $\text{cono}\{b_1, \dots, b_t\} \subseteq C$ , ya que  $a_i \in \text{cono}\{a_1, \dots, a_m\} \stackrel{(3.4)}{=} \{x : b_j^T x \leq 0, \forall j = 1, \dots, t\}$ , luego  $b_j^T a_i \leq 0$  para  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, t$ . Por tanto  $b_j \in C$ , para todo  $j = 1, \dots, t$ .

$\subseteq$ ] Veamos que  $C$  está contenido en  $\text{cono}\{b_1, \dots, b_t\}$ . Usando de nuevo que todo cono finitamente generado es poliedral, tendremos  $\text{cono}\{b_1, \dots, b_t\} = \{x : v_1^T x \leq 0, \dots, v_s^T x \leq 0\}$ . Como  $b_j \in \text{cono}\{b_1, \dots, b_t\}$  entonces  $v_k^T b_j \leq 0$  para todo  $k, j$ , por lo tanto,  $v_k \in \text{cono}\{a_1, \dots, a_m\}$  para todo  $k = 1, \dots, s$ , luego  $v_k = \sum_{i=1}^m \lambda_{ik} a_i$ .

Sea  $x \in C$ , entonces  $a_i^T x \leq 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ , luego,  $v_k^T x = (\sum_{i=1}^m \lambda_{ik} a_i)^T x = \sum_{i=1}^m \lambda_{ik} (a_i^T x) \leq 0$ . Por lo tanto,  $x \in \text{cono}\{b_1, \dots, b_t\}$ .

□

**Definición 3.7.** *Un politopo (convexo)  $Q$  es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos,*

$$Q = \text{conv}\{v_1, \dots, v_m\} := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

**Definición 3.8.** *La suma de Minkowski de dos poliedros  $P_1$  y  $P_2$  es el poliedro*

$$P_1 + P_2 := \{p_1 + p_2 : p_1 \in P_1, p_2 \in P_2\}.$$

Es intuitivo que las definiciones de poliedro y politopo están relacionadas. Los dos siguientes corolarios del teorema 3.1 demuestran esta afirmación:

**Corolario 3.9** (Teorema de descomposición de poliedros). *Un conjunto  $P$  de vectores es un poliedro si, y sólo si, se puede escribir como la suma de un politopo  $Q$  y un cono poliedral  $C$ ,  $P = Q + C$ .*

*Demostración.*

$\implies$ ] Sea  $P = \{x : Ax \leq b\}$  un poliedro en  $\mathbb{R}^n$ . Por el teorema 3.6, el cono poliedral en  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\tilde{C} = \{(x, \lambda) : x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0, Ax - \lambda b \leq 0\} \quad (3.5)$$

está generado por unos vectores  $(x_1, \lambda_1), \dots, (x_r, \lambda_r)$ .

Podemos suponer que el valor de cada  $\lambda_i$  es 0 ó 1 y ordenar estos elementos para que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_t = 0$  y  $\lambda_{t+1} = \dots = \lambda_r = 1$ . Llamaremos  $C$  al cono generado por  $x_1, \dots, x_t$  y  $Q$  a la envolvente convexa de  $x_{t+1}, \dots, x_r$ . Entonces,

$$\begin{aligned} x \in P &\iff (x, 1) \in \tilde{C} \\ &\iff (x, 1) \in \text{cono}\{(x_1, 0), \dots, (x_t, 0), (x_{t+1}, 1), \dots, (x_r, 1)\} \\ &\iff (x, 1) = \sum_{i=1}^t \mu_i (x_i, 0) + \sum_{i=t+1}^r \mu_i (x_i, 1) \text{ con } \mu_i \geq 0 \\ &\implies \begin{cases} x = \sum_{i=1}^t \mu_i x_i + \sum_{i=t+1}^r \mu_i x_i, \\ 1 = \sum_{i=1}^t \mu_i \cdot 0 + \sum_{i=t+1}^r \mu_i \cdot 1 \implies 1 = \sum_{i=t+1}^r \mu_i \end{cases} \end{aligned}$$

Sea  $c = \sum_{i=1}^t \mu_i x_i \in C$  y  $q = \sum_{i=t+1}^r \mu_i x_i$  (con  $\sum_{i=t+1}^r \mu_i = 1$ ), entonces  $q \in Q$ . Por lo tanto,  $x = c + q \in C + Q$ .

$\Leftarrow$ ] Sea  $P = Q + C$ , donde  $Q = \text{conv}\{x_1, \dots, x_s\}$  es un politopo y  $C = \text{cono}\{y_1, \dots, y_t\}$  es un cono poliedral. Entonces,

$$x_0 \in P \iff (x_0, 1) \in \tilde{C} = \text{cono}\{(x_1, 1), \dots, (x_s, 1), (y_1, 0), \dots, (y_t, 0)\}.$$

Por el teorema 3.6,  $\tilde{C}$  es poliedral, es decir,

$$\tilde{C} = \{(x, \lambda) : Ax + \lambda b \leq 0\}$$

para una matriz  $A$  y un vector  $b$ . Entonces  $x_0 \in P \iff (x_0, 1) \in \tilde{C} \iff Ax_0 + b \leq 0$ . Luego  $P$  es el poliedro dado por  $Ax \leq -b$ .

□

**Ejemplo 6.** Vamos a ver un ejemplo del corolario 3.9 con la descomposición de un poliedro  $P$  en suma de un politopo  $Q$  y un cono  $C$ .

$$\text{Sea el poliedro } P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -7 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right\},$$

y consideremos el cono

$$\begin{aligned} C &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -7 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

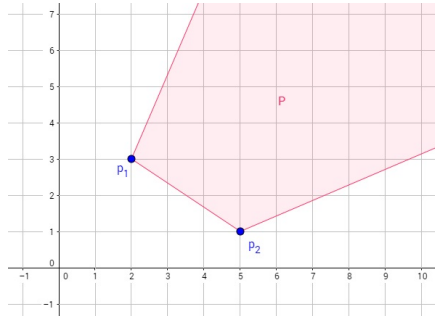
Sea  $Q = \text{conv}\{p_1, p_2\} = \{\lambda(2, 3) + (1 - \lambda)(5, 1) \text{ con } 0 \leq \lambda \leq 1\}$  un politopo, donde  $p_1 = (2, 3)$  y  $p_2 = (5, 1)$  son los vértices de  $P$ .

Entonces  $P = Q + C$ .

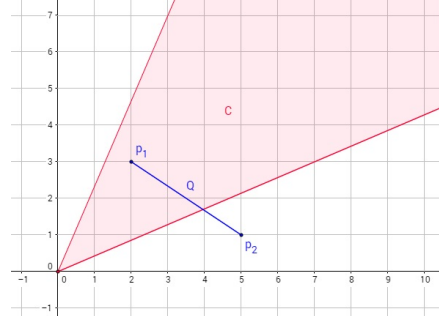
Si  $P$  es de la forma

$$P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_s\} + \text{cono}\{y_1, \dots, y_t\},$$

diremos que  $P$  está generado por los puntos  $x_1, \dots, x_s$  y por las direcciones  $y_1, \dots, y_t$ .



(a) Poliedro P



(b) Descomposición en politopo Q y cono C

**Corolario 3.10** (Teorema de base finita para politopos). *Un conjunto  $P$  es un politopo si, y sólo si,  $P$  es un poliedro acotado.*

*Demostración.*

$\implies$ ] Es claro.

$\impliedby$ ] Si  $P$  es un poliedro acotado, según el corolario anterior,  $P = Q + C$ , entonces  $C = \{0\}$  y, por lo tanto,  $P = Q$ .

□

### 3.3. Caras de un poliedro.

**Definición 3.11.** Sean  $P$  un poliedro de  $\mathbb{R}^n$  y  $\omega \in \mathbb{R}^n$ . Se llama cara de  $P$  respecto a  $\omega$  al subconjunto de  $P$  definido por

$$\text{face}_\omega(P) := \{u \in P : \omega \cdot u \geq \omega \cdot v, \forall v \in P\},$$

es decir, el subconjunto de  $P$  donde se maximiza  $\omega \cdot v$ , para todo  $v$  de  $P$ , si es que este máximo existe.

**Observación 3.12.** Notemos que un poliedro  $P$  es una cara de sí mismo, pues para  $\omega = 0$  tenemos que  $P = \text{face}_0(P)$ . Pero puede no ser el único valor, como se ve en el siguiente ejemplo.



**Ejemplo 7.** Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  el poliedro  $P = \{(x, y, z) : z = 0\}$ . Entonces, para  $\omega = (0, 0, 1)$  tenemos que

$$\text{face}_\omega(P) = \{(u_1, u_2, u_3) \in P : u_3 \geq v_3, \forall (v_1, v_2, v_3) \in P\} = P.$$

**Observación 3.13.**  $\text{face}_\omega(P)$  puede ser vacía. Esto sucede cuando el poliedro no es acotado, como se ve en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 8.** Consideremos el cono poliedral en  $\mathbb{R}^2$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x \geq y\}.$$

Entonces para  $\omega = (1, 0)$ , tenemos

$$\text{face}_\omega(C) = \{(u_1, u_2) \in C : u_1 \geq v_1, \forall (v_1, v_2) \in C\} = \emptyset.$$

**Proposición 3.14.** Sea  $P = \{x : Ax \leq b\}$  un poliedro y  $F \subset P$ ,  $F \neq \emptyset$ .  $F$  es una cara de  $P$  si, y sólo si,  $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ , para un subsistema  $A'x \leq b'$  de  $Ax \leq b$ .

*Demostración.*

$\implies$ ] Sea  $F$  una cara no vacía de  $P$ . Entonces, existe un  $\omega$  no nulo con  $F = \{x \in P : \omega \cdot x \geq \omega \cdot y, \forall y \in P\}$ . Sea  $\delta = \text{máx}\{\omega \cdot x : x \in P\} = \text{máx}\{\omega \cdot x : Ax \leq b\} = \text{mín}\{y \cdot b : y \geq 0, y^T A = \omega\}$ , donde la última igualdad se da por el teorema de dualidad de programación lineal (ver [8], capítulo 7, sección 7.4, corolario 7.1g). Como  $F$  no es vacía, entonces  $\text{mín}\{y \cdot b : y \geq 0, y^T A = \omega\} \neq \emptyset$ . Sea entonces  $y_0 \geq 0$  con  $y_0 \cdot b = \delta$  e  $y_0^T A = \omega$ . Sean  $i_1, \dots, i_r$  aquellas componentes positivas y no nulas de  $y_0$  y sea  $A'x \leq b'$  el subsistema de  $Ax \leq b$  que corresponde a las filas  $i_1, \dots, i_r$ . Sea  $x \in P$ , se tiene que

$$\omega \cdot x = \delta \iff y_0^T A x = y_0 \cdot b \iff A'x = b'.$$

Esta última equivalencia es cierta porque las componentes  $i_1, \dots, i_r$  de  $y_0$  son no negativas y, además, como  $x \in P$ , entonces  $Ax \leq b$ , por tanto,  $A'x \leq b'$ .

Por lo tanto,  $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ .

$\Leftarrow$ ] Sea  $F = \{x \in P : A'x = b'\} \neq \emptyset$ . Sean  $i_1, \dots, i_r$  las filas de  $A$  que forman  $A'$ . Sea  $\omega$  la suma de las filas de  $A'$ , esto es,  $\omega = \sum_{j=1}^r a_{i_j}$ . Veamos que  $F = \{x \in P : \omega \cdot x = \delta\}$ , donde  $\delta = \max\{\omega \cdot x : x \in P\} = \sum_{j=1}^r b_{i_j}$ . Para todo  $x \in P$ ,  $\omega \cdot x = \sum_{j=1}^r (a_{i_j} \cdot x) \leq \sum_{j=1}^r b_{i_j}$ , y puesto que, para cada  $i, j$  y para todo  $x \in P$  se tiene  $a_{i_j} \cdot x \leq b_{i_j}$ , entonces

$$\omega \cdot x = \sum_{j=1}^r b_{i_j} \iff \forall i, j, a_{i_j} x = b_{i_j} \iff x \in F.$$

□

Daremos ahora unos resultados que se deducen inmediatamente de la proposición previa:

**Corolario 3.15.** *Cada poliedro  $P$  tiene un número finito de caras.*

**Corolario 3.16.** *Cada cara no vacía es un poliedro.*

**Corolario 3.17.** *Si  $F$  es una cara de  $P$  y  $F' \subseteq F$  entonces;  $F'$  es una cara de  $P$  si, y sólo si,  $F'$  es una cara de  $F$ .*

**Lema 3.18.** *Sea  $V \subset \mathbb{R}^n$  finito. Sean  $\omega$  y  $\omega' \in \mathbb{R}^n$ . Sean  $A = \max\{\omega \cdot \alpha : \alpha \in V\}$ ,  $V' = \{\alpha \in V : \omega \cdot \alpha = A\}$ ,  $B = \max\{\omega' \cdot \alpha : \alpha \in V'\}$ ,  $V'' = \{\alpha \in V' : \omega' \cdot \alpha = B\}$ . Entonces,  $V'' = \{\alpha \in V : (\omega + \epsilon\omega') \cdot \alpha \text{ es máximo}\}$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño.*

*Demostración.* Para ver dónde se alcanza el máximo de  $(\omega + \epsilon\omega') \cdot \alpha = \omega \cdot \alpha + \epsilon\omega' \cdot \alpha$ , tendremos que distinguir entre tres casos:

- Si  $\alpha \in V''$ ,  $\omega \cdot \alpha + \epsilon\omega' \cdot \alpha = A + \epsilon B, \forall \epsilon$ .
- Si  $\alpha \in V' \setminus V''$ ,  $\omega \cdot \alpha + \epsilon\omega' \cdot \alpha = A + \epsilon\omega' \cdot \alpha < A + \epsilon B, \forall \epsilon > 0$ .
- Si  $\alpha \in V \setminus V'$ , entonces  $\omega \cdot \alpha + \epsilon\omega' \cdot \alpha < A + \epsilon\omega' \cdot \alpha$ . Sea  $\epsilon_\alpha$  definido por

$$\epsilon_\alpha = \frac{A - \omega \cdot \alpha}{\omega' \cdot \alpha - B} \quad \text{si } \omega' \cdot \alpha > B.$$

Consideramos  $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_\alpha : \omega' \cdot \alpha > B, \omega \cdot \alpha < A\}$ . Entonces  $(\omega + \epsilon\omega') \cdot \alpha < A + \epsilon B$ .

Por lo tanto, el máximo de  $(\omega + \epsilon\omega') \cdot \alpha$  se alcanza en el conjunto  $V''$  y se tiene que  $V'' = \{\alpha \in V : (\omega + \epsilon\omega') \cdot \alpha \text{ es máximo}\}$ . □

**Proposición 3.19.** *Sea  $P$  un politopo,  $\omega, \omega' \in \mathbb{R}^n$ , para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, tenemos*

$$face_{\omega'}(face_{\omega}(P)) = face_{\omega + \epsilon\omega'}(P).$$

*Demostración.* Sabemos que el conjunto de vértices de  $P$ ,  $V$ , es finito. Se tiene que  $face_{\omega}(P) = conv(V')$  y  $face_{\omega'}(face_{\omega}(P)) = conv(V'')$  con las notaciones del lema anterior y, por lo tanto,  $face_{\omega'}(face_{\omega}(P)) = face_{\omega + \epsilon\omega'}(P)$ . □

**Definición 3.20.** *La dimensión de la cara  $F$  de un poliedro  $P$  es la dimensión del espacio afín que genera y su codimensión viene dada por*

$$codim_P(F) := dim(P) - dim(F).$$

**Definición 3.21.** *Llamaremos caras maximales a las caras cuya codimensión es 1. O lo que es lo mismo, a las caras propias maximales del poliedro.*

**Definición 3.22.** *Llamamos vértices a aquellas caras cuya dimensión es 0. Las caras de dimensión 1 se llaman aristas.*

**Definición 3.23.** *Llamaremos caras minimales de  $P$  a aquellas caras que no contienen a ninguna otra.*

**Ejemplo 9.** *Consideramos en  $\mathbb{R}^3$  el poliedro  $P = \{(x, y, z) : z \geq 0, y \geq 0\}$ . Su cara minimal es  $\{(x, y, z) : y = z = 0\}$ .*

**Observación 3.24.** *Notemos que cada politopo es la envolvente convexa de sus vértices, y cada cono es la envolvente positiva de sus aristas.*

**Ejemplo 10.** *En el caso del cubo en  $\mathbb{R}^3$ , tenemos 27 caras en total:*

- *Vértices: Ocho caras de dimensión 0 y codimensión 3.*
- *Aristas: Doce caras de dimensión 1 y codimensión 2.*
- *Caras maximales: Seis caras de dimensión 2 y codimensión 1.*
- *Una cara de dimensión 3 y codimensión 0, que sería el propio cubo.*

**Observación 3.25.** *De la definición de suma de Minkowski se deduce la siguiente igualdad:*

$$face_{\omega}(P_1 + P_2) = face_{\omega}(P_1) + face_{\omega}(P_2), \quad (3.6)$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  son dos poliedros.

Dado un vértice  $v$  de  $P_1 + P_2$ , existe un único vértice  $p_1$  de  $P_1$  y un único vértice  $p_2$  de  $P_2$  tales que  $p_1 + p_2 = v$ . Sin embargo, no todas las sumas de vértices dan un vértice de  $P_1 + P_2$ , a veces obtenemos puntos del interior. Cabe señalar también que cada arista de  $P_1 + P_2$  es la traslación en paralelo de las aristas de  $P_1$  y de  $P_2$ .

**Ejemplo 11.** *Ilustremos esto con un ejemplo, donde  $P$  es el poliedro definido por los vértices  $p_1 = (-1, 2)$ ,  $p_2 = (3, -1)$ ,  $p_3 = (3, 2)$ ,  $p_4 = (0, 5)$ , y  $Q$  queda delimitado por los vértices  $q_1 = (4, 0)$ ,  $q_2 = (6, 0)$ ,  $q_3 = (8, 4)$ ,  $q_4 = (4, 4)$ .*

*El poliedro  $R$ , que lo obtenemos con la suma de Minkowski de  $P$  y de  $Q$ , queda definido por los vértices:*

$$r_1 = p_1 + q_1 = (3, 2), \quad r_2 = p_2 + q_1 = (7, -1), \quad r_3 = p_2 + q_2 = (9, -1),$$

$$r_4 = p_2 + q_3 = (11, 3), \quad r_5 = p_3 + q_3 = (11, 6), \quad r_6 = p_4 + q_3 = (8, 9),$$

$$r_7 = p_4 + q_4 = (4, 9) \quad \text{y} \quad r_8 = p_1 + q_4 = (3, 6).$$

*El resto de combinaciones nos dan puntos que quedan en el interior de  $R$ , estos son:  $p_1 + q_2 = (5, 2)$ ,  $p_1 + q_3 = (7, 6)$ ,  $p_2 + q_4 = (7, 3)$ ,  $p_3 + q_1 = (7, 2)$ ,  $p_3 + q_2 = (9, 2)$ ,  $p_3 + q_4 = (7, 6)$ ,  $p_4 + q_1 = (4, 5)$  y  $p_4 + q_2 = (6, 5)$ .*

*Podemos apreciar a simple vista (ver figura 3.1) también cómo las aristas del poliedro  $R$  son traslaciones de las aristas de los poliedros  $P$  y  $Q$ .*

### 3.4. Abanico normal de un poliedro.

**Definición 3.26.** *Un complejo poliedral  $\Delta$  es una colección finita de poliedros en  $\mathbb{R}^n$  tal que:*

1. *Si  $P \in \Delta$  y  $F$  es una cara de  $P$ , entonces  $F \in \Delta$ .*
2. *Si  $P_1, P_2 \in \Delta$ , entonces  $P_1 \cap P_2$  es una cara de  $P_1$  y de  $P_2$ .*

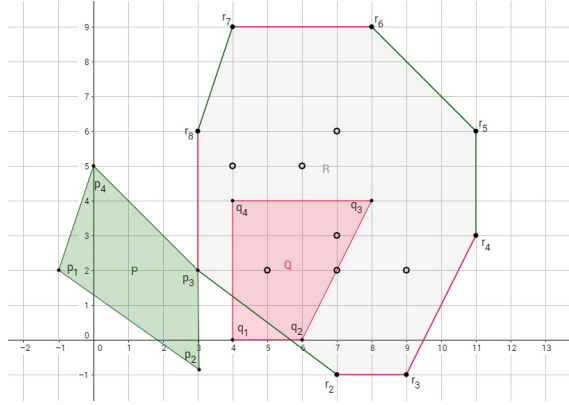


Figura 3.1: Suma de Minkowski

Definimos el soporte de un complejo poliedral  $\Delta$  como  $|\Delta| := \bigcup_{P \in \Delta} P$ .

Un complejo  $\Delta$  que está constituido sólo por conos se denomina abanico. Además, si el abanico verifica que  $|\Delta| = \mathbb{R}^n$  se dice que es completo.

**Definición 3.27.** Sea  $P \in \mathbb{R}^n$  un poliedro y  $F$  una cara de  $P$ . Se define el cono normal de  $F$  en  $P$  como

$$\mathcal{N}_P(F) = \overline{\{\omega \in \mathbb{R}^n : \text{face}_\omega(P) = F\}}.$$

**Observación 3.28.** Estudiando las ecuaciones de  $P$  y  $F$  se puede deducir (ver capítulo 2 de [9]):

1.  $\dim(\mathcal{N}_P(F)) = n - \dim(F)$ .
2. Si  $F$  y  $F'$  son caras de  $P$ , entonces  $F'$  es una cara de  $F$  si, y sólo si,  $\mathcal{N}_P(F)$  es una cara de  $\mathcal{N}_P(F')$ .

**Definición 3.29.** El conjunto de conos normales  $\mathcal{N}_P(F)$  para las caras  $F$  de  $P$  es un abanico. Dicho abanico se denomina abanico normal de  $P$  y se denota por  $\mathcal{N}(P)$ .

Si  $Q$  es un politopo, entonces su abanico normal  $\mathcal{N}(Q)$  es un abanico completo.

**Ejemplo 12.** Sea  $P$  el poliedro del ejemplo 6. Vamos a calcular los conos normales de todas las caras de  $P$ :

- Para  $F_1 = P$ , entonces  $\mathcal{N}_P(F_1) = \{(0, 0)\}$ .

- Para el vértice  $F_2 = \{p_1 = (2, 3)\}$ , entonces

$$\mathcal{N}_P(F_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 7y \leq 0, 3x - 2y \leq 0\}.$$

- Para el vértice  $F_3 = \{p_2 = (5, 1)\}$ , entonces

$$\mathcal{N}_P(F_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 7x + 3y \leq 0, -3x + 2y \leq 0\}.$$

- Para la arista  $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -7x + 3y = -5, x \geq 2\}$ , entonces

$$\mathcal{N}_P(F_4) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 7y = 0, x \leq 0\}.$$

- Para la arista  $F_5 = Q$ , entonces

$$\mathcal{N}_P(F_5) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 0, x \leq 0\}.$$

- Para la arista  $F_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 7y = 8, x \geq 5\}$ , entonces

$$\mathcal{N}_P(F_6) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 7x + 3y = 0, x \geq 0\}.$$

Por lo tanto, el abanico normal de  $P$  es

$$\mathcal{N}(P) = \{\mathcal{N}_P(F_1), \mathcal{N}_P(F_2), \mathcal{N}_P(F_3), \mathcal{N}_P(F_4), \mathcal{N}_P(F_5), \mathcal{N}_P(F_6)\}.$$

**Observación 3.30.** Si  $Q$  es un politopo, la aplicación que a cada cono  $C$  de  $\mathcal{N}_Q$  le hace corresponder  $\text{face}_\omega(Q)$  (donde  $\omega$  es cualquier vector del interior relativo de  $C$ ) es inversa de la aplicación que a cada cara de  $Q$ ,  $F$ , le hace corresponder el cono  $\mathcal{N}_Q(F)$ . Entonces se tiene una biyección que cambia las contenciones entre las caras de  $Q$  y los conos de  $\mathcal{N}_Q$ .

**Definición 3.31.** Decimos que dos politopos  $Q$  y  $Q'$  son fuertemente isomorfos si  $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(Q')$ .

**Ejemplo 13.** *En el ejemplo podemos ver como los conos normales de los dos politopos coinciden para uno de sus vértices, y análogamente sucede para cada cara.*

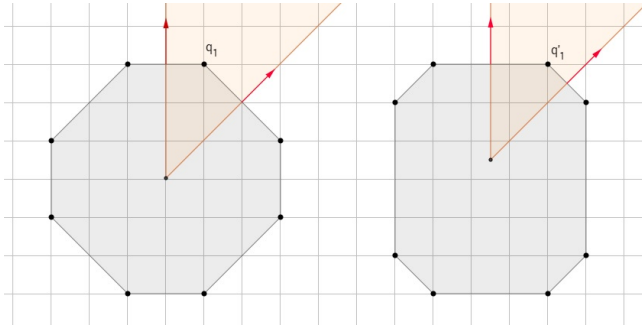


Figura 3.2: Conos normales





# Capítulo 4

## Politopo de estados.

Este capítulo tiene dos partes básicas: por un lado, la definición de abanico de Gröbner de un ideal, con la comprobación que de hecho es un abanico (complejo poliedral formado por conos), y por otro, el problema de encontrar lo que se conoce como politopo de estados de un ideal, que es un politopo cuyo abanico normal coincide con el abanico de Gröbner del ideal. Construiremos en particular un politopo de estados en el caso de un ideal homogéneo.

Para el desarrollo del capítulo nos hemos basado en [5] y [9].

### 4.1. Abanico de Gröbner.

Recordemos que habíamos definido  $C_\omega(I)$  y  $C_{\prec}(I)$  como:

$$C_{\prec}(I) = \overline{\{\omega' \in \mathbb{R}^n : in_{\omega'}(I) = in_{\prec}(I)\}} \text{ y}$$
$$C_\omega(I) = \overline{\{\omega' \in \mathbb{R}^n : in_{\omega'}(I) = in_\omega(I)\}}.$$

Por el corolario 2.16,  $C_{\prec}(I)$  es un cono poliedral convexo y además, la proposición 2.15 implica que su interior,  $c_{\prec}(I)$ , es también un cono (se dice que es un cono poliedral abierto).

En particular, si  $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ,  $C_\omega(I)$  es también un cono poliedral convexo, pero si no se cumple que  $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  entonces  $C_\omega(I)$  no es necesariamente convexo. Veamos un contraejemplo:

**Ejemplo 14.** *Sea un ideal  $I = (x - 1, y - 1)$ . Aplicando el algoritmo de Buchberger, comprobamos que  $G = \{x - 1, y - 1\}$  es la base de Gröbner universal. El ideal  $I$  tiene cinco ideales iniciales:*

- Para  $\omega = (0, 0)$ ,  $in_\omega(I) = (x - 1, y - 1)$ .
- Para  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ , con  $\omega_1 > 0$  y  $\omega_2 = 0$ ,  $in_\omega(I) = (x, y - 1)$ .
- Para  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ , con  $\omega_1 = 0$  y  $\omega_2 > 0$ ,  $in_\omega(I) = (x - 1, y)$ .
- Para  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ , con  $\omega_1 > 0$  y  $\omega_2 > 0$ ,  $in_\omega(I) = (x, y) = in_{\prec}(I)$ .
- Para  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ , con  $\omega_1 < 0$  ó  $\omega_2 < 0$ ,  $in_\omega(I) = (1)$ .

En el caso particular en que  $\omega = (-1, 3)$  y  $\omega' = (3, -1)$ , se tiene que  $in_\omega(I) = in_{\omega'}(I) = (1)$ . Sin embargo,  $in_{\frac{1}{2}(\omega+\omega')}(I) = (x, y)$  no pertenece a la clase de equivalencia de  $\omega$ , y por lo tanto hemos comprobado que no es convexa. (De hecho,  $C_\omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x > 0, y > 0\}$ ).

**Definición 4.1.** Definimos el abanico de Gröbner de un ideal  $I \subseteq k[x]$  como el complejo formado por todos los conos  $C_{\prec}(I)$ , con  $\prec$  orden monomial en  $I$ , y sus caras propias. Denotaremos el abanico de Gröbner por  $GF(I)$ .

**Nota 4.2.** Recordemos que el conjunto de conos  $\{C_{\prec}(I)\}$  coincide con el conjunto  $\{C_\omega(I) : c_\omega(I) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n \neq \emptyset\}$ . Por lo tanto, el soporte del abanico de Gröbner que acabamos de definir no es más que la región de Gröbner que definimos en la sección 2.3. Además, el número de tales conos es finito, luego el soporte del abanico de Gröbner es unión de un número finito de conos, de los cuales los de dimensión máxima están en biyección con los ideales iniciales.

**Ejemplo 15.** En la sección 2.3 calculamos el abanico de Gröbner para el ideal generado por  $f(x_1, x_2) = x_1^5 x_2^2 + x_1^4 x_2^4 + x_1^4 + x_1^2 x_2^5 + x_1 x_2^2 + x_2^6 + x_2$  y vimos que los conos que forman dicho abanico son:

- $C_{\prec_2} = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : -x - 2y \leq 0, 2y - x \leq 0\}$ ,
- $C_{\prec_3} = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y \leq 0, y - 2x \leq 0\}$ ,
- $C_{\prec_4} = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y \leq 0, -y \leq 0\}$ ,

y sus caras propias.

El objetivo ahora es llegar a demostrar que el abanico de Gröbner es un abanico, es decir, un complejo poliedral formado sólo por conos. Para ello, daremos una serie de resultados previos. Uno de los pasos más importantes hasta llegar a dicho teorema, será el de demostrar que  $C_\omega(I)$  es un cono poliedral (proposición 4.10). Este resultado también es una versión general de la proposición 2.3 en [9], donde es posible que los vectores  $\omega, \omega'$  tengan componentes negativas. Lo siguiente que haremos será ver que el interior relativo de cualquier cara del abanico de Gröbner es una clase de equivalencia  $c_\omega(I)$  (proposición 4.12) y finalmente probaremos que la intersección de dos conos de un abanico es una cara de ambos (proposición 4.14).

Para los próximos teoremas, fijemos un ideal  $I \subseteq k[x]$ .

**Definición 4.3.** Sea  $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in k[x]$ . Se dice que  $f$  es homogéneo de grado  $\nu$  respecto a la graduación dada por  $\deg(x_i) = d_i > 0, i = 1, \dots, n$  si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i = \nu, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  tal que  $c_\alpha \neq 0$ . Un ideal  $I \subseteq k[x]$  se dice que es homogéneo respecto a la graduación anterior si tiene un conjunto de generadores formados por polinomios homogéneos.

**Nota 4.4.** Recordemos que si  $I \subseteq k[x]$  un ideal homogéneo y  $f$  un polinomio que podemos escribir como suma de componentes homogéneas respecto de  $d = (d_1, \dots, d_n)$ ,  $f = \sum_{i=1}^r f_i$ , entonces  $f \in I$  si, y sólo si,  $f_i \in I, \forall i = 1, \dots, r$ .

**Lema 4.5.** Un polinomio  $f \in in_\omega(I)$  se puede escribir de la forma  $f = \sum_i in_\omega(c_i)$ , donde  $c_i \in I$  y todos los sumandos del sumatorio tienen diferentes  $\omega$ -grados.

*Demostración.* El ideal inicial  $in_\omega(I)$  está generado por polinomios homogéneos respecto a  $\omega$ . Podemos escribir  $f$  como suma de componentes homogéneas respecto a  $\omega$ , donde todas las componentes están en  $in_\omega(I)$  (por la nota 4.4) y cada una de ellas tiene grado distinto. Sea  $h$  una de esas componentes y veamos que  $h$  es la forma inicial de un elemento de  $I$  respecto a  $\omega$ . Escribiremos  $h$  como  $h = in_\omega(a_1) + \dots + in_\omega(a_s)$  para algunos polinomios  $a_1, \dots, a_s \in I$ . Dado que  $h$  es homogéneo respecto de  $\omega$ , se puede reescribir  $h$  como suma de elementos con el mismo  $\omega$ -grado de la forma  $h = \sum_{j \in J} in_\omega(a_j)$ , y tenemos entonces que  $h = in_\omega(\sum_{j \in J} a_j) = in_\omega(c_i)$ , con  $c_i = \sum_{j \in J} a_j \in I$ . □

**Lema 4.6.** Sea  $\prec$  un orden monomial. Si  $\omega \in C_\prec(I)$ , entonces

$$in_\prec(in_\omega(I)) = in_\prec(I).$$

*Demostración.*

⊇] En el corolario 2.16 probamos que si  $\omega \in C_{\prec}(I)$ , para  $g \in G_{\prec}(I)$  se tiene que  $in_{\prec}(g) = in_{\prec}(in_{\omega}(g))$ , y por lo tanto,  $in_{\prec}(I) = (in_{\prec}(g) : g \in G_{\prec}(I)) = (in_{\prec}(in_{\omega}(g)) : g \in G_{\prec}(I)) \subseteq in_{\prec}(in_{\omega}(I))$ .

⊆] Sabemos que  $in_{\prec}(in_{\omega}(I))$  está generado por formas iniciales de elementos  $f \in in_{\omega}(I) \setminus \{0\}$  respecto al orden monomial  $\prec$ . Bastará entonces con demostrar que  $in_{\prec}(f) \in in_{\prec}(I)$ . Como vimos en el lema 4.5, podemos escribir  $f$  como la suma de componentes homogéneas respecto a  $\omega$  de distintos grados, con  $c_1, \dots, c_s \in I$ , es decir,

$$f = \sum_{i=1}^s in_{\omega}(c_i).$$

Como  $in_{\omega}(c_i)$ , para  $i = 1, \dots, s$ , son de distintos grados, sus términos no se anulan. Si aplicamos entonces la forma inicial respecto a  $\prec$  a ambos lados,  $in_{\prec}(f) = in_{\prec}(in_{\omega}(c_1) + \dots + in_{\omega}(c_s)) = in_{\prec}(in_{\omega}(c_j))$ , para algún  $j$ .

Queremos ver ahora que entonces  $in_{\prec}(in_{\omega}(c_j)) \in in_{\prec}(I)$ . Si aplicamos el algoritmo de división como lo hicimos en la demostración de la proposición 2.15, podemos escribir  $c_j$  como

$$c_j = m_1 g_{i_1} + \dots + m_r g_{i_r},$$

donde  $m_1, \dots, m_r$  son monomios y los  $g_{i_1}, \dots, g_{i_r} \in G_{\prec}(I)$  pueden aparecer repetidos. Llamaremos  $M$  al grado máximo de  $c_j$  respecto de  $\omega$ . Un razonamiento similar al hecho en la demostración de la proposición 2.15, usando que, por el corolario 2.16,  $in_{\prec}(g)$  tiene  $\omega$ -peso máximo en  $g$  si  $g \in G_{\prec}(I)$ , prueba que existe un conjunto  $K$  de forma que

$$in_{\omega}(c_j) = \sum_{k \in K} in_{\omega}(m_k g_{i_k}).$$

El algoritmo de división garantiza que los exponentes de  $in_{\prec}(m_j g_{i_j})$ , para  $j = 1, \dots, r$ , son distintos. Como  $\omega \in C_{\prec}(I)$ , por el corolario 2.16,  $in_{\prec}(m_j g_{i_j}) = in_{\prec}(in_{\omega}(m_j g_{i_j}))$ , luego el monomio de grado máximo respecto a  $\prec$  no puede cancelarse en la suma. Entonces, para algún  $k$ ,

$$in_{\prec}(in_{\omega}(c_j)) = in_{\prec}(m_k g_{i_k}) \in in_{\prec}(I). \quad \square$$

Un corolario de este lema es un método para construir bases de Gröbner para ideales iniciales. Se trata de un resultado que generaliza el corolario 2.12 visto anteriormente.

**Corolario 4.7.** *Sea  $\prec$  un orden monomial. Si  $\omega \in C_{\prec}(I)$ , entonces*

$$G_{\prec}(in_{\omega}(I)) = \{in_{\omega}(g) : g \in G_{\prec}(I)\}.$$

*Demostración.* Como  $\omega \in C_{\prec}(I)$ , por el corolario 2.16 se tiene que

$$(in_{\prec}(in_{\omega}(g)) : g \in G_{\prec}(I)) = (in_{\prec}(g) : g \in G_{\prec}(I)) = in_{\prec}(I),$$

y en el lema 4.6 probamos que  $in_{\prec}(I) = in_{\prec}(in_{\omega}(I))$ , por lo que

$$in_{\prec}(in_{\omega}(I)) = (in_{\prec}(in_{\omega}(g)) : g \in G_{\prec}(I)),$$

lo cual prueba que  $\{in_{\omega}(g) : g \in G_{\prec}(I)\}$  es una base de Gröbner de  $in_{\omega}(I)$  respecto al orden monomial  $\prec$  por la definición de base de Gröbner. Y además, es reducida ya que  $G_{\prec}(I)$  lo es. □

**Lema 4.8.** *Sea  $f \in k[x]$ ;  $\omega, \omega' \in \mathbb{R}^n$ . Tenemos entonces que*

$$in_{\omega'}(in_{\omega}(f)) = in_{\omega+\epsilon\omega'}(f),$$

para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño.

*Demostración.* Sea  $f = \sum_{i=1}^r c_i x^{\alpha_i}$  con  $c_i \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, r$ ,  $P = \{\alpha_i : i = 1, \dots, r\} \subset \mathbb{R}^n$  finito. Sea  $A = \max\{\omega \cdot \alpha_i : i = 1, \dots, r\}$ ,  $P' = \{\alpha_i : \omega \cdot \alpha_i = A\}$ ,  $B = \max\{\omega' \cdot \alpha_i : \alpha_i \in P'\}$  y  $P'' = \{\alpha_i \in P' : \omega' \cdot \alpha_i = B\}$ . Tenemos entonces que  $in_{\omega}(f) = \sum_{\alpha_i \in P'} c_i x^{\alpha_i}$  e  $in_{\omega'}(in_{\omega}(f)) = \sum_{\alpha_i \in P''} c_j x^{\alpha_j}$ . Estamos en condiciones de aplicar el lema 3.18 y, por lo tanto,  $P'' = \{\alpha_i \in P : (\omega + \epsilon\omega') \cdot \alpha_i \text{ es máximo}\}$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, luego  $in_{\omega'}(in_{\omega}(f)) = in_{\omega+\epsilon\omega'}(f)$ . □

**Corolario 4.9.** *Sea  $I \subseteq k[x]$  y sea  $\prec$  un orden monomial. Sea  $\omega \in C_{\prec}(I)$ ,  $\omega' \in c_{\prec}(I)$ . Entonces, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,*

$$in_{\omega'}(in_{\omega}(I)) = in_{\omega+\epsilon\omega'}(I).$$

*Demostración.* Sea  $G_{\prec}(I)$  una base de Gröbner reducida de  $I$  para  $\prec$ . Elegimos  $\epsilon$  suficientemente pequeño para que  $\omega + \epsilon\omega' \in c_{\prec}(I)$  (recordemos que  $C_{\prec}(I)$  es un cono convexo cuyo interior es  $c_{\prec}(I)$ ), y para que  $in_{\omega'}(in_{\omega}(g)) = in_{\omega+\epsilon\omega'}(g)$ , para cada  $g \in G_{\prec}(I)$ .

Se tiene:

- $\omega \in C_{\prec}(I)$ , entonces  $in_{\prec}(in_{\omega}(g)) = in_{\prec}(g)$ , para cada  $g \in G_{\prec}(I)$  (por el corolario 2.16).
- $\omega + \epsilon\omega' \in c_{\prec}(I)$ , entonces  $in_{\omega+\epsilon\omega'}(g) = in_{\prec}(g)$ , para todo  $g \in G_{\prec}(I)$  (por la proposición 2.15).

Luego

$$in_{\omega'}(in_{\omega}(g)) = in_{\omega+\epsilon\omega'}(g) = in_{\prec}(g) = in_{\prec}(in_{\omega}(g)),$$

y por ser  $\{in_{\omega}(g) : g \in G_{\prec}(I)\}$  base de Gröbner reducida de  $in_{\omega}(I)$  para  $\prec$  (corolario 4.7), se deduce que  $\omega' \in c_{\prec}(in_{\omega}(I))$  (por la definición de  $c_{\prec}(I)$ ). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} in_{\omega'}(in_{\omega}(I)) &= in_{\prec}(in_{\omega}(I)) = (\{in_{\prec}(in_{\omega}(g)) : g \in G_{\prec}(I)\}) \\ &= (\{in_{\prec}(g) : g \in G_{\prec}(I)\}) = in_{\prec}(I) = in_{\omega+\epsilon\omega'}(I). \end{aligned}$$

□

Ahora sí, estamos en condiciones de demostrar uno de los pasos más importantes para llegar a probar el teorema que afirma que el abanico de Gröbner es un abanico:

**Proposición 4.10.** *Sea  $\prec$  un orden monomial y  $\omega \in C_{\prec}(I)$ . Para  $\omega' \in \mathbb{R}^n$  se tiene que*

$$in_{\omega'}(I) = in_{\omega}(I) \iff \forall g \in G_{\prec}(I), in_{\omega'}(g) = in_{\omega}(g).$$

*Demostración.*

⟨=] Partimos de que  $in_{\omega'}(g) = in_{\omega}(g)$  para cada  $g \in G_{\prec}(I)$ . Aplicando la forma inicial respecto a  $\prec$ , la igualdad se mantiene, por lo que

$in_{\prec}(in_{\omega'}(g)) = in_{\prec}(in_{\omega}(g))$  para todo  $g \in G_{\prec}(I)$ . Como  $\omega \in C_{\prec}(I)$  se tiene que

$$\begin{aligned} in_{\prec}(g) &\stackrel{\text{cor. 2.16}}{=} in_{\prec}(in_{\omega}(g)) = in_{\prec}(in_{\omega'}(g)), \forall g \in G_{\prec}(I) \\ &\implies in_{\prec}(g) = in_{\prec}(in_{\omega'}(g)) \\ &\stackrel{\text{cor. 2.16}}{\implies} \omega' \in C_{\prec}(I) \end{aligned}$$

Luego, por el corolario 4.7,  $G_{\prec}(in_{\omega'}(I)) = \{in_{\omega'}(g) : g \in G_{\prec}(I)\} = \{in_{\omega}(g) : g \in G_{\prec}(I)\} = G_{\prec}(in_{\omega}(I))$ , obteniendo la misma base de Gröbner para  $in_{\omega}(I)$  y para  $in_{\omega'}(I)$ , por lo tanto  $in_{\omega'}(I) = in_{\omega}(I)$ .

$\implies$ ] Sea  $g \in G_{\prec}(I)$ . Partiendo de que  $in_{\omega'}(I) = in_{\omega}(I)$ , tenemos que ver que  $in_{\omega'}(g) = in_{\omega}(g)$ . Como  $G_{\prec}(I)$  es una base de Gröbner reducida, sólo el monomio  $in_{\prec}(g)$  de  $g$ , puede estar en  $in_{\prec}(I)$ . Probaremos que dicho monomio es un monomio tanto de  $in_{\omega}(g)$  como de  $in_{\omega'}(g)$ . Por el corolario 2.16,  $in_{\prec}(in_{\omega}(g)) = in_{\prec}(g)$ . También tenemos  $in_{\prec}(in_{\omega'}(g)) \in in_{\prec}(in_{\omega'}(I)) = in_{\prec}(in_{\omega}(I)) = in_{\prec}(I)$  por el corolario 4.6. Como sólo un monomio de  $g$  está en  $in_{\prec}(I)$ , tenemos que  $in_{\prec}(g) = in_{\prec}(in_{\omega'}(g))$ . La diferencia  $in_{\omega'}(g) - in_{\omega}(g)$ , que pertenece a  $in_{\omega'}(I) = in_{\omega}(I)$ , tiene que ser cero. De no serlo llegaríamos a contradicción puesto que dicha diferencia, al anularse los  $in_{\prec}(g)$ , no contendría términos de  $in_{\prec}(I) = in_{\prec}(in_{\omega}(I))$ . Por lo tanto,  $in_{\omega'}(g) = in_{\omega}(g)$ .

□

**Corolario 4.11.** Si  $\omega \in C_{\prec}(I)$ ,

$$\omega' \in C_{\omega}(I) \iff \forall g \in G_{\prec}(I), in_{\omega}(in_{\omega'}(g)) = in_{\omega}(g).$$

En particular,  $C_{\omega}(I)$  es un cono poliedral convexo.

*Demostración.* Si  $g \in G_{\prec}(I)$  es  $g = \lambda_1 x^{\alpha_1} + \dots + \lambda_r x^{\alpha_r}$  con  $in_{\omega}(g) = \lambda_1 x^{\alpha_1} + \dots + \lambda_t x^{\alpha_t}$ , entonces, para  $\omega' \in \mathbb{R}^n$ , por la proposición 4.10 se tiene

$$in_{\omega'}(g) = in_{\omega}(g) \iff \begin{cases} \omega' \cdot \alpha_j = \omega \cdot \alpha_j, \text{ para todo } j = 1, \dots, t \\ \omega' \cdot \alpha_j < \omega \cdot \alpha_1, \text{ para todo } j > t \end{cases}$$

Estas ecuaciones definen  $c_{\omega}(I)$  y por lo tanto, su adherencia,  $C_{\omega}(I)$ , estará definida por las mismas ecuaciones pero reemplazando en ellas desigualdades

estrictas por no estrictas y las ecuaciones restantes equivalen a decir que los monomios de  $in_\omega(g)$  se encuentran entre los monomios de  $in_{\omega'}(g)$ , es decir,  $in_\omega(in_{\omega'}(g)) = in_\omega(g)$ , con lo que se tiene demostrado el resultado.  $\square$

Las ecuaciones que se derivan del corolario 4.11 y de la proposición 4.10 muestran que  $c_\omega(I)$  es el interior relativo de  $C_\omega(I)$  (es decir, el interior topológico en el subespacio generado por  $C_\omega(I)$ ). Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 16.** Sea  $I = (x + y, x + y^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$  y sea  $\prec$  el orden lexicográfico con  $y \prec x$ . La base de Gröbner reducida viene dada por  $G_\prec(I) = (x + y, y^2 - y)$ . Si  $\omega = (2, 1)$ , entonces se verifica que  $in_\prec(I) = in_\omega(I) = (x, y^2)$  y, por lo tanto,  $c_\omega(I) = c_\prec(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^2 : in_{\omega'}(I) = in_\omega(I)\}$ . Por la proposición 4.10, para  $\omega' = (\omega'_x, \omega'_y) \in \mathbb{R}^2$  se verifica  $in_{\omega'}(I) = in_\omega(I)$  si, y sólo si, se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} in_{\omega'}(x + y) &= x & (\iff \omega'_x > \omega'_y) \\ in_{\omega'}(y^2 - y) &= y^2 & (\iff 2\omega'_y > \omega'_y) \end{aligned} \right\}$$

Haciendo desigualdades no estrictas e igualdades en el sistema de desigualdades estrictas, tenemos la descripción de  $C_\prec(I)$ . El cono está definido por  $\{\omega'_x \geq \omega'_y, 2\omega'_y \geq \omega'_x\}$  y tiene por aristas a  $C_{(1,1)}(I)$  y  $C_{(1,0)}(I)$ , y por vértice a  $C_{(0,0)}(I)$ . Veámoslo (fig. 4.1):

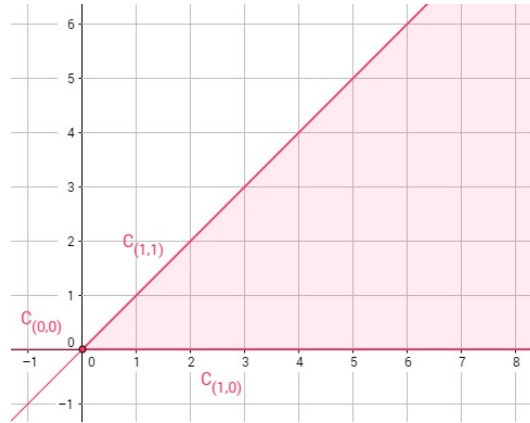


Figura 4.1: Ejemplo 16



- $C_{(1,1)}(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^2 : in_{\omega'}(I) = (x + y, y^2)\} : \begin{cases} \omega'_x = \omega'_y \\ 2\omega'_y > \omega'_x \end{cases}$
- $C_{(1,0)}(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^2 : in_{\omega'}(I) = (x, y^2 - y)\} : \begin{cases} \omega'_x > \omega'_y \\ 2\omega'_y = \omega'_x \end{cases}$
- $C_{(0,0)}(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^2 : in_{\omega'}(I) = (x + y, y^2 - y)\} : \begin{cases} \omega'_x = \omega'_y \\ 2\omega'_y = \omega'_x \end{cases}$

Consideremos ahora un ejemplo en  $\mathbb{R}^3$ :

**Ejemplo 17.** Sea  $I = (x + y + z, x^3z + x + y^2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$  y sea  $\prec$  el orden lexicográfico con  $x \prec y \prec z$ . Sea  $G_{\prec}(I) = \{y^2 + x - x^3y - x^4, z + y + x\}$  la base de Gröbner reducida. Si tomamos  $\omega = (1, 4, 5)$ , entonces,  $in_{\omega}(I) = in_{\prec}(I) = (y^2, z)$  y  $c_{\omega}(I) = c_{\prec}(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^3 : in_{\omega'}(I) = in_{\omega}(I)\}$ . Por la proposición 4.10, para  $\omega' = (\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z) \in \mathbb{R}^3$  se verifica  $in_{\omega'}(I) = in_{\omega}(I)$  si, y sólo si, se satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} in_{\omega'}(y^2 + x - x^3y - x^4) &= y^2 & (\iff 2\omega'_y > \max\{\omega'_x, 3\omega'_x + \omega'_y, 4\omega'_x\}) \\ in_{\omega'}(z + y + x) &= z & (\iff \omega'_z > \max\{\omega'_y, \omega'_x\}) \end{aligned} \right\}$$

Haciendo, en este sistema de desigualdades estrictas, desigualdades no estrictas e igualdades, tenemos la descripción de  $C_{\prec}(I)$ . El cono está definido por  $\{\omega'_z \geq \omega'_y, \omega'_z \geq \omega'_x, 2\omega'_y \geq \omega'_x, 2\omega'_y \geq 3\omega'_x + \omega'_y, 2\omega'_y \geq 4\omega'_x\}$ . Este sistema equivale a  $\{\omega'_z \geq \omega'_y, 2\omega'_y \geq \omega'_x, 2\omega'_y \geq 3\omega'_x + \omega'_y\}$  y es fácil probar que el conjunto de soluciones es el cono  $\{(0, 0, 1), (1, 3, 3), (-2, -1, -1)\}$ , que tiene por aristas a  $C_{(0,0,1)}(I)$ ,  $C_{(1,3,3)}(I)$ ,  $C_{(-2,-1,-1)}(I)$  y por caras maximales a  $C_{(1,3,4)}(I)$ ,  $C_{(-2,-1,0)}(I)$  y  $C_{(-1,2,2)}(I)$ , donde  $(1, 3, 4) = (0, 1, 1) + (1, 3, 3)$ ,  $(-2, -1, 0) = (0, 0, 1) + (-2, -1, -1)$  y  $(-1, 2, 2) = (1, 3, 3) + (-2, -1, -1)$ . Veámoslo:

- $C_{(0,0,1)}(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^3 : in_{\omega'}(I) = (y^2 + x - x^3y - x^4, z)\} :$

$$\begin{cases} \omega'_z \geq \omega'_y \\ 2\omega'_y = \omega'_x \\ \omega'_y = 3\omega'_x \end{cases} \iff \begin{cases} \omega'_x = \omega'_y = 0 \\ \omega'_z \geq 0 \end{cases}$$

- $C_{(1,3,3)}(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^3 : in_{\omega'}(I) = (y^2 - x^3y, y + z)\} :$

$$\begin{cases} \omega'_z = \omega'_y \\ 2\omega'_y \geq \omega'_x \\ \omega'_y = 3\omega'_x \end{cases} \iff \begin{cases} \omega'_z = \omega'_y = 3\omega'_x \\ \omega'_x \geq 0 \end{cases}$$

- $C_{(-2,-1,-1)}(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^3 : in_{\omega'}(I) = (y^2 + x, y + z)\} :$

$$\begin{cases} \omega'_z = \omega'_y \\ 2\omega'_y = \omega'_x \\ \omega'_y \geq 3\omega'_x \end{cases} \iff \begin{cases} \omega'_x = 2\omega'_y = 2\omega'_z \\ \omega'_x \leq 0 \end{cases}$$

- $C_{(1,3,4)}(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^3 : in_{\omega'}(I) = (y^2 - x^3y, z)\} :$

$$\begin{cases} \omega'_z \geq \omega'_y \\ 2\omega'_y \geq \omega'_x \\ \omega'_y = 3\omega'_x \end{cases} \iff \begin{cases} 3\omega'_x = \omega'_y \\ \omega'_z \geq \omega'_y \\ \omega'_x \geq 0 \end{cases}$$

- $C_{(-2,-1,0)}(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^3 : in_{\omega'}(I) = (y^2 + x, z)\} :$

$$\begin{cases} \omega'_z \geq \omega'_y \\ 2\omega'_y = \omega'_x \\ \omega'_y \geq 3\omega'_x \end{cases} \iff \begin{cases} \omega'_x = 2\omega'_y \\ \omega'_z \geq \omega'_y \\ \omega'_x \leq 0 \end{cases}$$

- $C_{(-1,2,2)}(I) = \{\omega' \in \mathbb{R}^3 : in_{\omega'}(I) = (y^2, y + z)\} :$

$$\begin{cases} \omega'_z = \omega'_y \\ 2\omega'_y \geq \omega'_x \\ \omega'_y \geq 3\omega'_x \end{cases}$$

Veamos ahora, generalizando los ejemplos anteriores, que el interior relativo de cada cono en el abanico de Gröbner es una clase de equivalencia  $c_{\omega}(I)$ .

**Proposición 4.12.** *El interior relativo de un cono del abanico de Gröbner es una clase de equivalencia  $c_{\omega}(I)$ .*

*Demostración.* Sea  $C$  un cono del abanico de Gröbner de  $I$ . Entonces existe un orden monomial  $\prec$  tal que  $C$  es una cara de  $C_{\prec}(I)$ .

Por el corolario 2.16,  $C_{\prec}$  viene definido por las ecuaciones  $in_{\prec}(in_{\omega}(g_i)) = in_{\prec}(g_i)$ , para cada  $i = 1, \dots, n$  con  $G_{\prec}(I) = \{g_1, \dots, g_n\}$ . En coordenadas, si  $g_i = x^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{r_i} a_{ij}x^{\alpha_{ij}}$  y  $x^{\alpha_i} = in_{\prec}(g_i)$ , lo anterior se traduce en el sistema

$$\omega \cdot \alpha_i \geq \omega \cdot \alpha_{ij}, \forall i, j.$$

Una cara  $C$  de  $C_{\prec}$  tendrá por ecuaciones

$$\begin{aligned} \omega \cdot \alpha_i &= \omega \cdot \alpha_{ij}, \text{ para } (i, j) \in J, \\ \omega \cdot \alpha_i &\geq \omega \cdot \alpha_{ij}, \text{ para } (i, j) \notin J, \end{aligned}$$

para algún  $J \subset \{(i, j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r_i\}$ . Las ecuaciones del interior relativo de  $C$  son

$$\begin{aligned} \omega \cdot \alpha_i &= \omega \cdot \alpha_{ij}, \text{ para } (i, j) \in J, \\ \omega \cdot \alpha_i &> \omega \cdot \alpha_{ij}, \text{ para } (i, j) \notin J, \end{aligned}$$

y estas ecuaciones equivalen a  $in_{\omega}(g_i) = x^{\alpha_i} + \sum_{(i,j) \in J} a_{ij}x^{\alpha_{ij}}$ . Es decir, el interior relativo de  $C$  es  $c_{\omega}(I)$  para  $\omega$  en dicho interior (por la proposición 4.10). □

**Corolario 4.13.** *Sea  $C$  un cono del abanico de Gröbner. Si  $\omega \in C$ , entonces para  $\omega' \in \mathbb{R}^n$  se tiene que*

$$in_{\omega'}(I) = in_{\omega}(I) \implies \omega' \in C.$$

*Demostración.* El vector  $\omega$  pertenece al interior relativo de alguna cara de  $C$ . Dicha cara está en el abanico de Gröbner, luego por la proposición 4.12,  $\omega'$  está en el interior relativo de la misma cara, y por lo tanto,  $\omega' \in C$ . □

**Proposición 4.14.** *Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos conos del abanico de Gröbner de  $I$ . Entonces la intersección  $C_1 \cap C_2$  es una cara de  $C_1$  y de  $C_2$ .*

*Demostración.* Vamos a probar que  $C_1 \cap C_2$  es una cara de  $C_1$ . Análogamente se haría para probar que también es cara de  $C_2$ .

Por el corolario 4.13, tanto  $C_1$  como  $C_2$  son uniones de clases de equivalencia  $c_{\omega}(I)$ . Además, si  $\omega \in C_1 \cap C_2$ , de nuevo por el corolario 4.13, la clase de equivalencia de  $\omega$  está contenida tanto en  $C_1$  como en  $C_2$ , y por lo tanto, también está contenida en la intersección. Entonces  $C_1 \cap C_2$  es también unión de clases de equivalencia.

Sea  $\omega'$  un vector perteneciente a  $E$ , una de las clases de equivalencia de  $C_1 \cap C_2$ . El vector  $\omega'$  pertenece al interior relativo de una cara de  $C_1$ , que, por la proposición 4.12, es exactamente la clase de equivalencia  $E$ . Por lo

tanto, cada clase de equivalencia es el interior relativo de una cara de  $C_1$  y su clausura es dicha cara.

Consideremos ahora el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial generado por cada clase de equivalencia contenida en  $C_1 \cap C_2$ . Dado que  $C_1$  es un cono, los espacios vectoriales para cada cara de  $C_1$  deben ser diferentes. Veamos que solamente puede haber un cono de dimensión máxima: de haber dos conos de dimensión máxima, su envolvente convexa estaría en  $C_1 \cap C_2$ , tendría al menos una dimensión más y no podría ser recubierto por un número finito de clases de equivalencia de dimensión menor. Llegamos así a un absurdo, ya que  $C_1 \cap C_2$  es unión de clases de equivalencia y hay un número finito de éstas.

Sea  $E$  la clase de equivalencia de  $C_1 \cap C_2$  de dimensión máxima (que, por lo dicho anteriormente, cumple que  $\overline{E}$  es una cara de  $C_1$ ). Veamos que  $\overline{E} = C_1 \cap C_2$ . Puesto que  $C_1 \cap C_2$  es cerrado, es evidente que  $\overline{E} \subseteq C_1 \cap C_2$ . Para probar la otra contención, supongamos que existe  $\omega \in (C_1 \cap C_2) \setminus \overline{E}$ . Entonces  $\text{conv}\{\overline{E}, \omega\} \setminus \overline{E}$  está contenido en  $C_1 \cap C_2$  y su dimensión es, al menos, la de  $E$ . Llegamos así a contradicción, ya que  $\text{conv}\{\overline{E}, \omega\} \setminus \overline{E}$  no puede ser recubierto por un número finito de clases de equivalencia de dimensión menor. Por lo tanto, concluimos así que  $\overline{E} = C_1 \cap C_2$ , y por lo tanto  $C_1 \cap C_2$  es cara de  $C_1$ .  $\square$

**Teorema 4.15.** *El abanico de Gröbner es un complejo poliedral de conos y, por lo tanto, es un abanico.*

*Demostración.* Sabemos que el abanico de Gröbner está formado por conos poliedrales (proposición 4.10). En cuanto a que sea un complejo poliedral, la primera condición se tiene por la propia definición y la segunda condición se verifica por la proposición 4.14.  $\square$

**Proposición 4.16.** *Supongamos que  $I \subseteq k[x]$  es un ideal homogéneo respecto a una graduación  $\deg(x_i) = d_i > 0$ . Entonces  $GF(I)$  es completo.*

*Demostración.* Basta ver que para todo  $\omega \in \mathbb{R}^n$ , existe un  $\omega' > 0$  tal que  $\text{in}_\omega(I) = \text{in}_{\omega'}(I)$ , pues entonces  $\omega \in c_{\omega'}(I)$  que es una de las caras de  $GF(I)$ .

Sea  $\omega \in \mathbb{R}^n$  cualquiera. Elegimos  $\lambda > 0$  tal que el vector  $\omega' := \omega + \lambda(d_1, \dots, d_r)$  es positivo. Vamos a ver que  $\text{in}_\omega(f) = \text{in}_{\omega'}(f)$ , para todo  $f \in I$ , con lo que  $\text{in}_\omega(I) = \text{in}_{\omega'}(I)$ . En el caso en que  $f = \sum c_\alpha x^\alpha \in I$  sea un polinomio homogéneo respecto al grado  $\deg(x_i) = d_i$ , esto es obvio.

Por lo tanto, consideremos un polinomio general  $f \in I$ , el cual lo podemos reescribir como  $f = \sum_{i=1}^r f_i$  donde cada  $f_i$  es homogéneo. Por ser  $I$  un ideal

homogéneo, por la nota 4.4  $f_i \in I$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ , luego se tiene  $in_\omega(f_i) = in_{\omega'}(f_i)$ , para  $i$ . Puesto que  $in_\omega(f) = in_\omega(f_{i_1}) + \dots + in_\omega(f_{i_s})$  para un subconjunto  $\{i_1, \dots, i_s\}$ , se deduce

$$in_\omega(f) = in_\omega(f_{i_1}) + \dots + in_\omega(f_{i_s}) = in_{\omega'}(f_{i_1}) + \dots + in_{\omega'}(f_{i_s}) = in_{\omega'}(f).$$

□

## 4.2. Politopo de Newton.

**Definición 4.17.** *A todo polinomio  $f = \sum_{i=1}^m c_i \cdot x^{\alpha_i}$  en  $k[X]$  se le asocia el politopo de Newton de  $f$  definido por*

$$New(f) := conv\{\alpha_i : i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Antes de definir el siguiente lema referente a politopos de Newton, daremos un resultado referente a formas iniciales respecto de  $\omega$ .

**Proposición 4.18.** *Para todo  $f, g \in k[x]$ , tenemos la igualdad*

$$in_\omega(fg) = in_\omega(f) \cdot in_\omega(g).$$

*Demostración.* Sean  $f$  y  $g$  de la forma  $f = \sum c_\alpha x^\alpha$ ,  $g = \sum c_\beta x^\beta$  y llamamos  $A$  al producto  $\omega \cdot \alpha$  y  $B$  al producto  $\omega \cdot \beta$  que sean máximos, de forma que

$$in_\omega(f) = \sum_{\omega \cdot \alpha = A} c_\alpha x^\alpha \quad \text{y} \quad in_\omega(g) = \sum_{\omega \cdot \beta = B} c_\beta x^\beta$$

Entonces,  $A + B = \max\{\omega \cdot (\alpha + \beta)\}$ , y

$$\begin{aligned} in_\omega(f) \cdot in_\omega(g) &= \left( \sum_{\omega \cdot \alpha = A} c_\alpha x^\alpha \right) \cdot \left( \sum_{\omega \cdot \beta = B} c_\beta x^\beta \right) \\ &= \sum_{\substack{\omega \cdot \alpha = A \\ \omega \cdot \beta = B}} c_\alpha c_\beta x^{\alpha + \beta} = \sum_{\substack{\omega \cdot (\alpha + \beta) = \\ = A + B}} (c_\alpha c_\beta) x^{\alpha + \beta} = in_\omega(fg). \end{aligned}$$

□

**Lema 4.19.**  $face_\omega(New(f)) = New(in_\omega(f))$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f \neq 0$  y escribamos  $f = \sum_{i=1}^m c_i x^{\alpha_i}$  con  $c_i \neq 0$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ . Sea  $M_\omega = \max\{\omega \cdot \alpha_i : 1 \leq i \leq m\}$ , y reordenamos  $f$  de forma que  $\omega \cdot \alpha_i = M_\omega$  si, y sólo si,  $1 \leq i \leq r$ . Así tenemos que  $in_\omega(f) = \sum_{i=1}^r c_i x^{\alpha_i}$ , y  $New(in_\omega(f)) = conv\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ .

Puesto que  $New(f) = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i\}$ , se tiene

$$\omega \cdot \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (\omega \cdot \alpha_i) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot M_\omega = M_\omega, \quad (4.1)$$

por lo tanto,  $\max\{\omega \cdot \alpha : \alpha \in New(f)\} = M_\omega$  y  $face_\omega(New(f)) = \{\alpha \in New(f) : \omega \cdot \alpha = M_\omega\}$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \alpha \in face_\omega(New(f)) &\iff \alpha = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \alpha_i \text{ con } \omega \cdot \alpha = M_\omega, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \\ &\stackrel{(4.1)}{\iff} \omega \cdot \alpha_i = M_\omega, \forall i \text{ tal que } \lambda_i \neq 0 \\ &\iff \{i : \lambda_i \neq 0\} = \{1, \dots, r\} \\ &\iff \alpha \in conv\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = New(in_\omega(f)). \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.20.**  $New(f \cdot g) = New(f) + New(g)$ .

*Demostración.* Es fácil ver que este resultado se verifica en el caso en que  $f = x^\alpha$  y  $g = x^\beta$ , ya que  $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ . En general, será suficiente comprobar que ambos politopos tienen las mismas caras.

$$\begin{aligned} face_\omega(New(f \cdot g)) &= New(in_\omega(f \cdot g)) \stackrel{\text{prop. 4.18}}{=} New(in_\omega(f) \cdot in_\omega(g)) \\ &= New(in_\omega(f)) + New(in_\omega(g)) \\ &= face_\omega(New(f)) + face_\omega(New(g)) \\ &\stackrel{(3.6)}{=} face_\omega(New(f) + New(g)). \end{aligned}$$

Hemos probado que los politopos  $New(f \cdot g)$  y  $New(f) + New(g)$  tienen las mismas caras y por lo tanto son iguales, obteniendo así la igualdad deseada.

□

### 4.3. Politopo de estados.

A partir de ahora vamos a considerar  $I \subseteq k[x]$  un ideal homogéneo respecto a una graduación  $\deg(x_i) = d_i > 0$ .

Denotaremos por  $I_d$  al espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado  $d$  en  $I$ . Sea  $M$  cualquier ideal monomial y denotamos por  $\sum M_d$  a la suma de todos los vectores  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tales que  $x^\alpha \in M$  y  $x^\alpha$  tiene grado  $d$ . Definimos entonces

$$\text{State}_d(I) := \text{conv} \left\{ \sum in_{\prec}(I)_d : \prec \text{ orden monomial} \right\} \quad (4.2)$$

Sea  $D$  el grado máximo de los elementos de una base de Gröbner universal minimal de  $I$ . Consideramos la suma de Minkowski

$$\text{State}(I) := \sum_{d=1}^D \text{State}_d(I) \quad (4.3)$$

**Observación 4.21.** *Puesto que  $in_{\prec'}(in_{\prec}(I)) = in_{\prec}(I)$  si  $\prec$  y  $\prec'$  son órdenes monomiales, es claro que  $\text{State}_d(in_{\prec}(I))$  es un punto, y por lo tanto también  $\text{State}(in_{\prec}(I))$  es un punto.*

El siguiente resultado es una generalización de la fórmula que probamos en el lema 4.19:

**Proposición 4.22.** *Para todo  $\omega \in \mathbb{R}^n$ , se verifica*

$$\text{face}_\omega(\text{State}_d(I)) = \text{State}_d(in_\omega(I)).$$

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que  $\omega \in \mathbb{R}^n$  es genérico, en el sentido de que  $in_\omega(I)$  es un ideal monomial y  $\text{face}_\omega(\text{State}_d(I))$  es un vértice (recordemos que por ser  $I$  homogéneo, el abanico de Gröbner es  $\mathbb{R}^n$ , por la proposición 4.16).

Sea  $I_d$  el espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado  $d$  en  $I$ , sean  $x^{a_1}, \dots, x^{a_m}$  todos los monomios de grado  $d$  y sea  $r := \dim(I_d) \leq m$ .

Sea  $\prec$  un orden monomial para el que  $in_\omega(I) = in_{\prec}(I)$ . Reordenando los monomios, podemos suponer que  $x^{a_1}, \dots, x^{a_r}$  son exactamente aquellos que

pertenecen a  $in_{\prec}(I)$  y, por lo tanto, pertenecen también a  $in_{\prec}(I)_d$  por tener grado  $d$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} State_d(in_{\omega}(I)) &:= conv \left\{ \sum in_{\prec^*}(in_{\omega}(I))_d : \prec^* \text{ cualquier orden monomial} \right\} \\ &= \left\{ \sum in_{\omega}(I) \right\} = \{a_1 + \cdots + a_r\}. \end{aligned}$$

Pasando al cociente  $k[x]_d/I_d$  según vimos en la proposición 2.3, los monomios estándar módulo  $I_d$ ,  $\{x^{a_{r+1}} + I_d, \dots, x^{a_m} + I_d\}$ , son una base de dicho  $k$ -espacio vectorial. Entonces, se puede escribir cada  $x^{a_i} + I_d$ ,  $i = 1, \dots, r$ , como combinación lineal de las clases de los monomios estándar:

$$x^{a_i} + I_d = \sum_{j=r+1}^m c_{ij}x^{a_j} + I_d \implies f = x^{a_i} - \sum_{j=r+1}^m c_{ij}x^{a_j} \in I_d.$$

Como  $in_{\prec}(I) = in_{\omega}(I)$  y  $x^{a_i}$ , para  $1 \leq i \leq r$ , son los monomios que están en  $in_{\prec}(I)$ , entonces  $in_{\prec}(f) = in_{\omega}(f) = x^{a_i}$ , para  $i = 1, \dots, r$ . Es decir, siempre que  $c_{ij} \neq 0$ ,

$$\omega \cdot a_i > \omega \cdot a_j \text{ para cada } i = 1, \dots, r \text{ y para cada } j = r + 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

Ahora, por ser  $face_{\omega}(State_d(I))$  un vértice, para algún orden monomial  $\prec'$ ,

$$\begin{aligned} face_{\omega}(State_d(I)) &= face_{\omega} \left\{ conv \left\{ \sum in_{\prec'}(I)_d : \prec' \text{ orden monomial} \right\} \right\} \\ &= \left\{ \sum in_{\prec'}(I)_d \right\} = \{a_{j_1} + \cdots + a_{j_r}\}, \end{aligned}$$

donde  $x^{a_{j_1}}, \dots, x^{a_{j_r}}$  son los monomios de grado  $d$  que pertenecen a  $in_{\prec'}(I)_d$ .

Supongamos que el lema no es cierto, es decir,

$$face_{\omega}(State_d(I)) \neq State_d(in_{\omega}(I)),$$

luego  $a_1 + \cdots + a_r \notin face_{\omega}(State_{\omega}(I))$ , por lo que

$$\omega \cdot (a_1 + \cdots + a_r) < \omega \cdot (a_{j_1} + \cdots + a_{j_r}) \quad (4.5)$$

Tenemos  $B = \{x^{a_{r+1}} + I_d, \dots, x^{a_m} + I_d\}$  y  $B' = \{x^{a_k} + I_d : k \neq j_1, \dots, j_r\}$  que son dos bases de  $k[x]_d/I_d$ , y sea  $h = \#(B \cap B')$ . Observemos que por



4.4,  $\omega \cdot a_i > \omega \cdot a_j$  si  $x^{a_i} + I_d \in B' \setminus B$ ,  $x^{a_j} + I_d \in B$  y  $c_{ij} \neq 0$ . Siguiendo el lema de reemplazamiento de Steinitz, vamos a pasar de  $B$  a  $B'$  cambiando en cada paso un elemento de  $B$  que no está en  $B'$  por uno de  $B'$  con cierta propiedad. Concretamente, vamos a construir de forma recursiva bases  $B_k$ ,  $k = h, \dots, m - r$ , con  $B = B_h$ ,  $B' = B_{m-r}$  y, si denotamos por  $S_k = \omega \cdot \sum_{x^\alpha + I_d \notin B_k} a$  se cumpla para cada  $k$ :

1.  $B \cap B' \subset B_k \subset B \cup B'$ .
2.  $\#(B_k \cap B') = k$ .
3.  $\forall x^\alpha + I_d \in B' \setminus B_k$  y  $\forall x^\beta + I_d \in (B' \setminus B) \cap B_k$ ,  $\omega \cdot \alpha \geq \omega \cdot \beta$ .
4.  $S_{k+1} \leq S_k$ .

Empecemos definiendo  $B_h = B$ . Suponemos que tenemos construido  $B_k$ , vamos a construir  $B_{k+1}$  (si  $k < m - r$ ).

Como  $\#(B_k \cap B') = k < m - r = \#B'$ , entonces existe  $x^b + I_d \in B' \setminus B_k$ ; si existiesen varios, escogemos uno que tenga  $\omega \cdot b$  mínimo.

Dado que  $B_k$  es base, entonces  $x^b + I_d = \sum_{x^\alpha + I_d \in B_k} c_{\alpha,b}(x^\alpha + I_d)$ . Como  $(B_k \cap B') \cup \{x^b + I_d\}$  es libre, entonces existe  $x^a + I_d \in B_k \setminus B'$  con  $c_{a,b} \neq 0$ .

Se define  $B_{k+1} = (B_k \setminus \{x^a + I_d\}) \cup \{x^b + I_d\}$ , verificando las tres primeras condiciones. Veamos que se cumple la cuarta condición: como  $x^b + I_d = \sum_{x^\alpha + I_d \in B_k} c_{\alpha,b}(x^\alpha + I_d)$ , entonces

$$g = x^b - \sum_{x^\alpha + I_d \in B_k \cap (B' \setminus B)} c_{\alpha,b} x^\alpha - \sum_{x^\alpha + I_d \in B_k \cap B} c_{\alpha,b} x^\alpha \in I_d.$$

Se tiene que  $in_\omega(g) = in_\omega(x^b - \sum_{x^\alpha + I_d \in B_k \cap (B' \setminus B)} c_{\alpha,b} x^\alpha)$  y, por lo tanto, por la condición 3, el  $\omega$ -grado de  $in_\omega(g)$  es  $b \cdot \omega$ . Así tenemos en particular que  $\omega \cdot b \geq \omega \cdot a$ . Como  $S_{k+1} = S_k - \omega \cdot b + \omega \cdot a$ , entonces tenemos la cuarta condición. Esto implica que  $S_1 \geq S_2$ , lo cual es contradictorio con (4.5).

Esto prueba que la igualdad que nos da el lema es cierta para casi todo  $\omega \in \mathbb{R}^n$ . Para probarlo en general, comprobaremos que ambos politopos tienen los mismos vértices, probando así que son el mismo politopo. Por lo tanto, sea  $\omega' \in \mathbb{R}^n$  genérico como antes y  $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  cualquiera. Entonces, para

$\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, de forma que  $\omega + \epsilon\omega'$  sea genérico, se tiene

$$\begin{aligned} \text{face}_{\omega'}(\text{face}_{\omega}(\text{State}_d(I))) &\stackrel{\text{prop.3.19}}{=} \text{face}_{\omega+\epsilon\omega'}(\text{State}_d(I)) = \\ &= \text{State}_d(\text{in}_{\omega+\epsilon\omega'}(I)) = \\ &\stackrel{\text{cor.4.9}}{=} \text{State}_d(\text{in}_{\omega'}(\text{in}_{\omega}(I))) = \\ &= \text{face}_{\omega'}(\text{State}_d(\text{in}_{\omega}(I))). \end{aligned}$$

□

**Corolario 4.23.** Sean  $\prec, \prec'$  dos órdenes monomiales distintos, entonces

$$\text{in}_{\prec}(I)_d = \text{in}_{\prec'}(I)_d \iff \sum \text{in}_{\prec}(I)_d = \sum \text{in}_{\prec'}(I)_d.$$

*Demostración.*

$\implies$ ] Es trivial.

$\implies$ ] Razonamos por reducción al absurdo y supongamos que  $\text{in}_{\prec}(I)_d \neq \text{in}_{\prec'}(I)_d$ . Sean  $\{x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_r}\}$  los monomios de grado  $d$  de  $\text{in}_{\prec}(I)$  y  $\{x^{\alpha_{j_1}}, \dots, x^{\alpha_{j_r}}\}$  los monomios de grado  $d$  de  $\text{in}_{\prec'}(I)$ . Por la proposición 2.20, existe un  $\omega$  con  $\text{in}_{\prec}(I) = \text{in}_{\omega}(I)$ . Por el procedimiento usado en la demostración del lema anterior,  $\omega \cdot (\alpha_1 + \dots + \alpha_r) < \omega \cdot (\alpha_{j_1} + \dots + \alpha_{j_r})$ . Por lo tanto,  $\sum \text{in}_{\prec}(I)_d = (\alpha_1 + \dots + \alpha_r) \neq (\alpha_{j_1} + \dots + \alpha_{j_r}) = \sum \text{in}_{\prec'}(I)_d$ , lo cual es absurdo.

□

**Teorema 4.24.** Sea  $I$  un ideal homogéneo en  $k[x]$ . Entonces el abanico normal  $\mathcal{N}(\text{State}(I))$  coincide con el abanico de Gröbner de  $I$ .

*Demostración.* Queremos ver que  $\mathcal{N}(\text{State}(I)) = GF(I)$ . Recordemos que, como vimos en el teorema 4.15, el abanico de Gröbner es un complejo poliedral, y todas las caras de un complejo poliedral vienen determinadas por caras maximales. Es por ello que dos complejos poliedrales coinciden si, y sólo si, coinciden sus caras maximales. Por lo tanto, y teniendo en cuenta que  $GF(I)$  es completo, será suficiente probar que los conos (abiertos)  $c_{\prec}(I)$  del abanico de Gröbner coinciden con los conos (abiertos) maximales de  $\mathcal{N}(\text{State}(I))$ . Puesto que los conos maximales de  $\mathcal{N}(\text{State}(I))$  se corresponden con los vértices de  $\text{State}(I)$ , basta con demostrar que para dos vectores  $\omega, \omega' \in \mathbb{R}^n$  genéricos con  $\omega \in c_{\prec}(I)$ , se tiene que

$$\text{in}_{\omega}(I) = \text{in}_{\omega'}(I) \iff \text{face}_{\omega}(\text{State}(I)) = \text{face}_{\omega'}(\text{State}(I)). \quad (4.6)$$

Por genéricos entendemos aquí que las caras que  $\omega$  y  $\omega'$  seleccionan en  $State(I)$  son vértices, y que  $\omega'$  es tal que  $c_{\omega'}(I) = c_{\prec'}(I)$ , para algún orden monomial  $\prec'$ .

Dos ideales homogéneos son iguales si, y sólo si, coinciden en cada grado. Sea  $D$ , definido en (4.3), el máximo de los grados de los generadores de una base de Gröbner universal. Como  $I$  es homogéneo, también lo son  $in_{\omega}(I)$  e  $in_{\omega'}(I)$ , luego

$$in_{\omega}(I) = in_{\omega'}(I) \iff in_{\omega}(I)_d = in_{\omega'}(I)_d, \quad \forall d = 1, \dots, D. \quad (4.7)$$

Se tiene también, por (3.6),

$$face_{\omega}(State(I)) = face_{\omega}\left(\sum_{d=1}^D State_d(I)\right) = \sum_{d=1}^D (face_{\omega}(State_d(I))). \quad (4.8)$$

Análogamente tenemos la misma igualdad para  $\omega'$ . Probemos la equivalencia (4.6):

$\implies$ ] Supongamos que  $in_{\omega}(I) = in_{\omega'}(I)$ , Usando el lema 4.22 se tiene

$$\begin{aligned} face_{\omega}(State(I)) &= \sum_{d=1}^D face_{\omega}(State_d(I)) = \sum_{d=1}^D State_d(in_{\omega}(I)) = \\ &= \sum_{d=1}^D State_d(in_{\omega'}(I)) = \sum_{d=1}^D face_{\omega'}(State_d(I)) = face_{\omega'}(State(I)). \end{aligned}$$

$\impliedby$ ] Supongamos ahora que  $face_{\omega}(State(I)) = face_{\omega'}(State(I))$ . Entonces, por (4.8),

$$\sum_{d=1}^D face_{\omega}(State_d(I)) = \sum_{d=1}^D face_{\omega'}(State_d(I)).$$

Dado que  $face_{\omega}(State_d(I))$  y  $face_{\omega'}(State_d(I))$  son vértices, se deduce que  $face_{\omega}(State_d(I)) = \{v_i\} = face_{\omega'}(State_d(I))$ , para cada  $d = 1, \dots, D$ , luego por la proposición 4.22,  $State_d(in_{\omega}(I)) = State_d(in_{\omega'}(I))$ , para todo  $d$ . Como  $in_{\omega}(I)$  y  $in_{\omega'}(I)$  son monomiales, podemos considerar  $in_{\omega}(I) = in_{\prec}(I)$ ,  $in_{\omega'}(I) = in_{\prec'}(I)$  y, por definición de  $State_d(I)$ ,

se tiene que

$$\begin{aligned} \sum in_{\prec}(I)_d &= \sum in_{\prec'}(I)_d, \forall d = 1, \dots, D \\ \stackrel{\text{cor.4.23}}{\implies} in_{\prec}(I)_d &= in_{\prec'}(I)_d, \forall d = 1, \dots, D \\ \implies in_{\omega}(I) &= in_{\prec}(I) = in_{\prec'}(I) = in_{\omega'}(I). \end{aligned}$$

□

**Definición 4.25.** Sea  $I \subseteq k[x]$  un ideal. Diremos que un politopo  $Q \subset \mathbb{R}^n$  es un politopo de estados de  $I$  si  $\mathcal{N}(Q) = GF(I)$ .

El teorema 4.24 afirma que si  $I$  es homogéneo y  $Q$  es un politopo de estados de  $I$ , entonces  $\mathcal{N}(Q) = GF(I) = \mathcal{N}(State(I))$ , luego el politopo de estados de  $I$  y  $State(I)$  son fuertemente isomorfos.

**Proposición 4.26.** Sea  $I$  un ideal homogéneo y sea  $\prec$  un orden monomial. Sea  $G_{\prec}(I)$  una base de Gröbner reducida. Si  $\omega \in c_{\prec}(I)$  entonces

$$c_{\prec}(I) = \text{int}(\mathcal{N}_Q(\text{face}_{\omega}(Q))),$$

donde  $Q = \text{New}(\prod g_i) = \sum \text{New}(g_i)$ .

*Demostración.* Queremos ver que

$$in_{\omega}(I) = in_{\omega'}(I) \iff \text{face}_{\omega}(Q) = \text{face}_{\omega'}(Q).$$

Por el lema 4.19, tenemos que  $\text{face}_{\omega}(\text{New}(\prod g_i)) = \text{New}(in_{\omega}(\prod g_i))$  y por la proposición 4.18,  $in_{\omega}(\prod g_i) = \prod in_{\omega}(g_i)$ , luego hay que probar que

$$in_{\omega}(I) = in_{\omega'}(I) \iff \text{New}(\prod in_{\omega}(g_i)) = \text{New}(\prod in_{\omega'}(g_i)).$$

$\implies$ ] Si  $in_{\omega}(I) = in_{\omega'}(I)$ , entonces por la proposición 4.10,  $in_{\omega}(g_i) = in_{\omega'}(g_i)$  para todo  $g_i \in G_{\prec}(I)$ .

$\Leftarrow$ ] Puesto que  $\omega \in c_{\prec}(I)$ ,  $in_{\omega}(I) = in_{\prec}(I)$  es monomial y por lo tanto,  $\text{New}(\prod in_{\omega}(g_i))$  es un vértice. Así,  $\text{New}(\prod in_{\omega'}(g_i))$  es el mismo vértice, y por definición del politopo de Newton, se deduce que  $in_{\omega}(g_i) = in_{\omega'}(g_i)$  para todo  $i$ , luego  $in_{\omega}(I) = in_{\omega'}(I)$ . □

**Corolario 4.27.** *Sea  $G$  una base de Gröbner universal de  $I$  y  $G$  es una base de Gröbner reducida de  $I$  respecto a cualquier orden monomial. Entonces  $\sum_{g \in G} \text{New}(g)$  es un politopo de estados de  $I$ .*

**Ejemplo 18.** *Recordemos el ejemplo 3, donde teníamos que*

$$G = \{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}, x_{11}x_{23} - x_{13}x_{21}, x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22}\}$$

*era una base universal de Gröbner y reducida para cada orden monomial  $\prec$ . Estamos en condiciones entonces de aplicar entonces el corolario 4.27.*

*Tenemos los tres politopos de Newton:*

- $P_1 = \text{New}(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})$ ,
- $P_2 = \text{New}(x_{11}x_{23} - x_{13}x_{21})$ ,
- $P_3 = \text{New}(x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22})$ .

*Llamemos  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$  a las seis variables en  $\mathbb{R}^6$ , con  $x_{11} \in X_1$ ,  $x_{22} \in X_2$ ,  $x_{12} \in X_3$ ,  $x_{21} \in X_4$ ,  $x_{23} \in X_5$  y  $x_{13} \in X_6$ . Los tres politopos de Newton son segmentos (de dimensión dos) en  $\mathbb{R}^6$ :*

- $P_1$  es el segmento  $(-1, -1, 1, 1, 0, 0)$  de extremos  $p_{11} = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$  y  $p_{12} = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$ .
- $P_2$  es el segmento  $(-1, 0, 0, 1, -1, 1)$  de extremos  $p_{21} = (1, 0, 0, 0, 1, 0)$  y  $p_{22} = (0, 0, 0, 1, 0, 1)$ .
- $P_3$  es el segmento  $(0, 1, -1, 0, -1, 1)$  de extremos  $p_{31} = (0, 0, 1, 0, 1, 0)$  y  $p_{32} = (0, 1, 0, 0, 0, 1)$ .

*Si hacemos la suma de Minkowski de los tres segmentos, obtenemos un hexágono regular cuyos vértices vienen dados por:*

- $p_{11} + p_{21} + p_{31} = (2, 1, 1, 0, 2, 0)$ ,
- $p_{12} + p_{21} + p_{31} = (1, 0, 2, 1, 2, 0)$ ,
- $p_{12} + p_{22} + p_{31} = (0, 0, 2, 2, 1, 1)$ ,
- $p_{12} + p_{22} + p_{32} = (0, 1, 1, 2, 0, 2)$ ,

- $p_{11} + p_{22} + p_{32} = (1, 2, 0, 1, 0, 2)$ ,
- $p_{11} + p_{21} + p_{32} = (2, 2, 0, 0, 1, 1)$ ,

y donde el segmento  $P_1$  forma un ángulo de  $\frac{\pi}{3}$  con el segmento  $P_2$ , un ángulo de  $\frac{2\pi}{3}$  con el segmento  $P_3$  y, entre ellos, forman un ángulo de  $\frac{\pi}{3}$ .

## 4.4. Caso general.

En la sección anterior hemos trabajado con ideales homogéneos. Para terminar, comentaremos brevemente en esta sección el caso general, sin demostraciones.

**Definición 4.28.** Sean  $F$  y  $F'$  dos abanicos en  $\mathbb{R}^n$ . Su refinamiento común es el abanico definido por

$$F \wedge F' := \{C \cap C'\}_{(C,C') \in F \times F'}.$$

**Definición 4.29.** Definimos el abanico de Gröbner restringido de un ideal  $I \subseteq k[x]$  como el refinamiento común de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  con sus caras propias y el abanico de Gröbner de  $I$ .

Como consecuencia del corolario 2.17, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.30.** El soporte del abanico de Gröbner restringido es  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ .

La pregunta ahora es: ¿el abanico de Gröbner es siempre el abanico normal de un politopo? La respuesta es no, dado que el abanico de Gröbner no es siempre completo. Podemos, por lo tanto, preguntarnos: ¿el abanico restringido de Gröbner de un ideal es siempre el abanico normal de un poliedro? Sabemos que la respuesta es afirmativa en estos casos:

- Si el ideal  $I$  es homogéneo, entonces el abanico de Gröbner de  $I$  es el abanico normal de un politopo de estados de  $I$  (ver el teorema 4.24).
- En el caso de un ideal principal,  $I = (f)$ , consideramos el poliedro resultado de la la suma de Minkowski  $New(f) + \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ . Es casi inmediato que su abanico normal es el abanico de Gröbner restringido de  $I$  (véase el ejemplo desarrollado en la sección 2.3).

Sin embargo, la respuesta en general es que no. Se puede ver un ejemplo en [6], donde se prueba que el abanico de Gröbner restringido del ideal

$$I = (xzt + x^2z - xy, xt^2 - z, xt^4 + xz) \subseteq k[x, y, z, t]$$

no es un abanico normal de un poliedro.





# Bibliografía

- [1] ATIYAH, M.F. y MACDONALD, I.G., *Introducción al Álgebra Conmutativa*, Ed. reverté, 1980.
- [2] BUCHBERGER, B. *Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal*, Journal of Symbolic Computation 41, 475-511, 2006
- [3] BUCHBERGER B. *Gröbner Bases: A Short Introduction for Systems Theorists*. Lecture Notes in Computer Science, vol 2178. Ed. Springer, 2001.
- [4] COX, D., LITTLE, J. y O'SHEA, D. , *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Ed. Springer, 1992.
- [5] FUKUDA, K., JENSEN, A.N. y THOMAS, R.R. *Computing Gröbner fans*, Mathematics of computation, Vol. 76(260),2189-2212, 2007.
- [6] JENSEN, A.N. *A Non-Regular Gröbner Fan*, Discrete Comput Geom 37:443-453, Ed. Springer, 2007.
- [7] MORA, T. y ROBBIANO, L., *The Gröbner fan of an ideal*,Journal of Symbolic Computation, Vol. 6, Issues 2-3, 183-208, 1988.
- [8] SCHRIJVER, A. , *Theory of Linear and Integer Programming*, Ed. John Wiley & Sons, 1986.
- [9] STURMFELS, B., *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series, Vol. 8, American Mathematical Society, 1996.