UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. de Matemática Aplicada

Materiales y Recursos Didácticos para Geometría Plana y Semejanza en 4º de E.S.O

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Francisco Hernando Quintanilla

Tutor: Cesáreo Jesús González Fernández

Valladolid, Junio 2018

Contenidos

1 Introducción

1.1 Objeto, Contenido, y Estructura del TFM

El objeto de este TFM es el desarrollo de dos unidades didácticas del cuarto curso de E.S.O. de matemáticas académicas: Geometría analítica en el plano y Semejanza. El desarrollo no se limita a una enumeración de contenidos y problemas, sino que se ha querido adoptar la óptica de un profesor que decide elaborar sus propios recursos didácticos, por supuesto sin presunción de originalidad alguna en cuanto al contenido: no se va a descubrir de nuevo el Teorema de Tales. Para la practica docente, esto tiene la ventaja de que permite al profesor seleccionar y dar los contenidos exactamente como él considere oportuno, por así decirlo, los contenidos se adaptan al profesor que los va a impartir, cosa que no puede hacerse con los libros de texto a los que un profesor debe adaptarse.

Esto comporta algunas ventajas a la hora de impartir clase: la clase fluirá de una forma mucho más natural pues el profesor esta siguiendo su propio hilo de pensamiento y no uno ajeno. En la mayoría de los casos, las explicaciones y unidades tendrán, valga la redundancia, más unidad que la que se consigue siguiendo un libro pues el profesor puede discrepar con los autores y por ello omitir ciertos contenidos secundarios en el libro.

Pero además comporta otras ventajas para el profesor: la elaboración de unas notas o apuntes para un curso, en este caso evidentemente hay que limitarse a dos unidades didácticas, comporta un ejercicio de reflexión pedagógica que no se consigue siguiendo un libro. Evidentemente, uno puede usar varias fuentes para tener una idea más precisa de los contenidos mínimos que hay que incluir según establece la ley, pero la estructura, los ejemplos, y los matices ya corren por cuenta del profesor que elabora el material. A un nivel mas pragmático, la elaboración de notas propias facilita enormemente la labor de adaptación del currículo a posibles eventualidades externas como cambios de ley, tan habituales en España, alumnos con dificultades cognitivas, o alumnos con altas capacidades. Esto es debido a que el autor de las notas tiene mś interiorizado el conjunto, y cómo se relacionan sus partes que aquel profesor que se limita a seguir un libro, aunque finalmente acabe por conocerlo hasta en los más mínimos detalles. En suma, todo material de elaboración propia es muchísimo más dinámico que cualquier libro, o material "acabado": puede ser actualizado en algunos detalles cada año, y en función de sugerencias de alumnos, u observaciones acerca de su reacción a las clases y los contenidos, algo que es difícil de lograr con un libro de texto más estándar.

El contenido del TFM consistirá en notas y recursos elaborados por el autor, que en la práctica serían usados durante la clase y entregadas a los alumnos. El libro de texto quedaría como fuente alternativa. En las notas se incluyen los contenidos que se cubrirán en la unidad didáctica así como algunas aclaraciones que se espera clarifiquen conceptos a los alumnos. Asimismo, a medida que se avanza en los contenidos se van incluyendo diversos ejemplos para que los alumnos vayan ejercitándose y asimilando los conceptos antes de avanzar. Éstos recursos básicos se completan con actividades de aprendizaje y enseñanza que contienen una selección de problemas de dificultad variable y que servirán para que los alumnos trabajen sobre los contenidos, el profesor pueda evaluar el trabajo continuo, y monitorizar su evolución en los casos en los que sean entregables. Finalmente, se incluye el ejercicio de evaluación de la unidad didáctica, completando así todo el proceso de enseñanza.

Por tanto, el contenido del TFM se enmarca dentro de las asignaturas de diseño curricular, didáctica, metodología, y evaluación. A fin de evitar que el lector tenga que estar constantemente pasando de unas páginas a otras, los comentarios, reflexiones, y análisis relativos a la didáctica y la metodología se han intercalado en el texto bajo los correspondientes epígrafes. Están en letra cursiva para distinguirlos claramente de los contenidos propiamente dichos que están en letra normal, estos últimos serán los que reciban los alumnos, quedando los comentarios e indicaciones metodológicas y didácticas para el profesor.

El TFM consta de 5 capítulos. El primero, introductorio, contiene consideraciones generales sobre objetivos del curso, atención a la diversidad, metodología, didáctica, y evaluación. En el segundo y tercer capítulos se desarrollan las unidades didácticas mencionadas al principio, esto constituye el cuerpo central del trabajo. Cada unidad didáctica consta de su introducción contextual, objetivos y contenidos específicos, recursos a utilizar desarrollados, planificación temporal, y evaluación. El cuarto capítulo constituye un cuestionario para el profesor que le puede servir de guía para la autoevaluación y mejora de su labor. Algunas de estas preguntas o similares podrían hacerse también a los alumnos para complementar el proceso de auto crítica. El capítulo final contiene algunas reflexiones sobre el practicum y la conclusión del trabajo.

1.2 Objetivos de Matemáticas Académicas en 4 E.S.O.

Los Objetivos de Etapa Generales del cuarto curso de E.S.O. pueden encontrarse en el Real Decreto 1105/2014 del 26 de Diciembre y por brevedad no los repetiremos aquí.

Los Objetivos Comunes correspondientes a la asignatura de Matemáticas para las Enseñanzas Académicas del cuarto curso de E.S.O. se encuentran recogidos bajo los Criterios de Evaluación en el Bloque 1 del apartado correspondiente del BOCyL (Orden de Educación 362/2015). A continuación se enumeran algunos de especial relevancia para las unidades didácticas:

- Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

- Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.

- Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.

- Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilistas) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.

- Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.

- Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.

- Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desćonocidas.

- Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.

- Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebráicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

En cada una de las unidades, se expondrán y detallarán los contenidos específicos correspondientes a ellas.

1.3 Objetivos Generales de las Unidades Didácticas de este TFM

Los objetivos que recoge el BOCyL se especificarán más en las unidades a desarrollar. En particular se hará énfasis en el desarrollo del pensamiento abstracto, orden lo mas lógico y deductivo posible de los contenidos de acuerdo al nivel del curso, y precisión en el lenguaje matemático para evitar vaguedades que generen confusión en los alumnos. Esto se detalla aún más en los párrafos que siguen. Cuando ello no suponga un aumento substancial de materia, el objetivo será generalizar lo máximo posible resultados con el fin de ayudar a los alumnos a desarrollar capacidad de visión general y pensamiento abstracto. Por ejemplo, al determinar si 3 puntos están alineados, es inmediato generalizar para un número arbitrario de ellos y se presta a ilustrar las propiedades de las relaciones de transitividad y reflexividad de una propiedad matemática.

Ordenación más lógica de algunos contenidos para que el flujo de los contenidos y la explicación sean más deductivos. Un mayor uso de conceptos ya conocidos y analogías para la construcción de otros nuevos. Por ejemplo, el libro de [1] introduce las combinaciones lineales de vectores antes de explicar las ecuaciones de las rectas. Es un planteamiento posible ya que los alumnos están familiarizados con las funciones lineales del curso anterior. Sin embargo, este no es el único camino. Puede llegarse al mismo resultado por medio de las operaciones básicas entre vectores y puntos explicadas. Una vez el alumno haya visto las distintas formas analíticas de expresar una recta, o línea, puede introducirse de forma más natural la operación de combinación lineal de vectores. La analogía evidente entre esta operación y la forma general de la ecuación de una recta ayudará además a la comprensión de las transformaciones lineales de carácter mas general. Lo que permitirá enlazar con lo visto sobre funciones lineales en el curso anterior.

Precisión en los términos y el lenguaje. Los libros de texto, algunas veces, tienden a ser poco precisos con el lenguaje matemático, quizá por evitar un exceso de formalismo, lo cual es una buena razón, pero esto puede llevar a que se produzca también una confusión entre conceptos. En estos casos, es preferible introducir el formalismo y la terminología necesarios para delinear los conceptos con precisión y claridad. Un ejemplo bastante común de esta confusión es el que se da en las expresiones analíticas entre puntos y vectores, puesto que ambos se escriben con expresiones de la forma: (a, b). Esto se clarificará en la correspondiente sección 2.5.1 de la unidad didáctica.

1.4 Atención a la Diversidad.

La Atención a la Diversidad se trata en las secciones tercera y cuarta del BOCyL (Orden de Educación 362/2015). La Atención a la Diversidad trata de dar respuesta a las diferentes necesidades educativas y a veces personales del alumnado en la medida que los recursos disponibles en el centro lo permitan.

Entre los alumnos que requieran de medidas de atención a la diversidad, pueden encontrarse alumnos con discapacidades físicas o psíquicas, inmigrantes, o alumnos con altas capacidades entre otros. Cada caso debe ser estudiado por separado y junto con el departamento de orientación.

El plan general de actuación se recoge, como se establece en el BOCyL en el Plan de Atención a la Diversidad que será elaborado por el centro. Algunas medidas de carácter general vienen recogidas en el Artículo 25 del susodicho BOCyL:

- La acción tutorial.
- Actuaciones preventivas y de detección de dificultades de aprendizaje dirigidas a todo el alumnado.
- Adaptaciones curriculares que afecten unicamente a la metodología didáctica.
- Medidas de atención personalizada dirigidas a aquel alumnado que, habiéndose presentado a la evaluación final de etapa, no la haya superado.

Como se verá más adelante, las unidades didácticas incluyen una evaluación al final, lo cual servirá tanto para facilitar a los alumnos el que lleven la materia al día, como para detectar posibles alumnos con retraso, o adelanto significativo. Esto con el fin de poder tomar medidas apropiadas a cada caso lo antes posible. Entre ellas, la señalada en el tercer punto citado anteriormente que sólo afecta a la metodología dejando los contenidos intactos en la medida de lo posible.

En el Artículo 26 que va a continuación se detallan algunas específicas y extraordinarias:

- Las medidas especializadas y extraordinarias de atención a la diversidad pueden modificar los elementos curriculares y organizativos, siempre que con ello se favorezca el desarrollo personal del alumnado, y se le permita alcanzar con el máximo éxito su progresión de aprendizaje.
- Adaptaciones curriculares significativas de los elementos del currículo dirigidas al alumnado con necesidades educativas especiales. Se realizarán buscando el máximo desarrollo posible de las competencias; la evaluación continua, y la promoción tomarán como referencia los elementos fijados en ellas.
- Aceleración y ampliación parcial del currículo que permita al alumnado con altas capacidades la evaluación con referencia a los elementos del currículo del curso superior al que este escolarizado.
- Flexibilización del periodo de permanencia en la etapa para el alumnado con altas capacidades intelectuales en los términos que determine la normativa vigente.

Finalmente, el Articulo 27 se ocupa de las medidas dirigidas al refuerzo educativo cuya aplicación individual será revisada periódicamente como se establece en el punto 7, otras medidas de refuerzo podrán ser propuestas por el profesor y llevadas a la práctica con la debida aprobación del departamento de orientación y la dirección del centro.

1.5 Contribución a Competencias Básicas.

Las competencias del currículo se establecen en el articulo 2.2 del Real Decreto 1105/2014 del 26 de Diciembre. Aquí nos limitaremos a detallar cómo las unidades didácticas de este TFM contribuyen al desarrollo de cada una de ellas.

- Matemática y Ciencia y Tecnología: Al tratarse de la asignatura de matemáticas es evidente que esta será una de las competencias cuyo desarrollo será más potenciado.

- Lingüística: Será desarrollada gracias a la necesidad por parte de los alumnos de una correcta comprensión de los enunciados, así como de las respuestas y explicaciones que habrán de dar al realizar los distintos problemas. Además, como se ha explicado en la sección 1.2, es importante que los alumnos manejen con soltura la terminología especifica, y sean capaces de referirse a los conceptos e ideas de forma inequívoca y clara. Esto potenciará su capacidad de expresión lingüística.

- Digital: Será desarrollada durante la sesión en el aula de informática. En particular, el programa Geogebra se presta especialmente para la realizacion de ejemplos y ejercicios sobre vectores en el plano.

- Aprender a Aprender: Las notas y la resolución de los problemas servirán para que el alumno se ejercite en el estudio autónomo. Se pretende que las notas que aquí se detallan sean el material principal usado por el alumno para el estudio. Éstas podrán ser complementadas por él durante la clase, o en casa.

- Sociales y Cívicas: El trabajo en clase con puestas en común de resultados y discusión de problemas contribuirá a crear en los alumnos un hábito de debate cívico, y a ser mas hábiles en las interacciones sociales.

- Iniciativa y Espíritu Emprendedor: Los problemas entregables, y parcialmente evaluables, servirán para fomentar la iniciativa personal de los alumnos. Además, como se ha dicho en el apartado anterior, la participación activa en clase ayudará a desarrollar su espíritu de iniciativa y emprendedor.

- Conciencia y Expresiones Culturales: los ejemplos mostrados durante las clases de aplicaciones al arte, la técnica, y las ciencias naturales servirán para que el alumno tome conciencia de la presencia de las matemáticas en diversas expresiones artísticas y culturales, y así desarrollar su sensibilidad artística.

También habría que tener en cuenta los elementos transversales tal y como se especifican en el Real Decreto 1105/2014 del 26 de Diciembre. Puesto que esta materia no está en el foco de atención de este TFM, se remite al lector a la legislación vigente ya referida.

1.6 Metodología.

En este apartado se describe la manera en que se van a abordar los contenidos de las unidades didácticas. Los pilares sobre los que descansara la metodología son:

- Clases Magistrales: Durante las cuales se expondrán y explicaran los conceptos fundamentales a partir de las notas.

- Clases de Resolución de Problemas y Ejemplos: Éstas se combinarán con las Clases Magistrales de tal forma que los conceptos abstractos sean clarificados y concretados con ejemplos y problemas sencillos que permitan al alumno asimilar y afianzar los conceptos, así como sus diversas variantes, si las hubiere, antes de proceder con el siguiente tema. En los ejemplos y problemas mas sencillos, se dejará a los alumnos algún tiempo para que puedan pensarlos, a continuación ponerlos en común y comentarlos, antes de su resolución por parte del profesor, o los mismos alumnos de forma voluntaria. Tanto los ejemplos como los problemas ilustrativos estarán sacados, bien del libro, bien de las notas correspondientes. Con el fin de mostrar a los alumnos las aplicaciones de los conceptos y técnicas aplicables en la vida cotidiana, algunos de estos problemas y ejemplos vendrán motivados por dichas aplicaciones.

- Resolución de Problemas Individual: Para cada unidad didáctica, se preparará una colección de problemas que se resolverán por el alumno de forma individual y serán corregidos en clase y algunos de ellos evaluados. Esta colección será entregada a los alumnos junto con las notas. A medida que se vaya avanzando en los contenidos, se irá indicando a los alumnos qué ejercicios han de realizar de forma individual, en grupo, como tarea para casa, o bien para realizar y discutir en la clase.

- Resolución de Problemas en Grupos con Geogebra: Resolución de problemas más avanzados durante la clase, en grupos, con la ayuda del programa Geogebra y las notas.

1.7 Didáctica.

A lo largo del TFM, en cada una de las unidades didácticas se van a presentar diversos problemas y ejemplos, cuya finalidad es ayudar al alumno a asimilar los conceptos y adquirir destreza matemática en los cálculos.

El aprendizaje ha de ser gradual, comenzando por los conceptos más simples que, una vez asimilados, permitan construir conceptos e interrelaciones mas complejas. Con el fin de lograr esto, se puede establecer una jerarquía de tipo cognitivo para las tareas que realizará el alumno. Esto constituirá una referencia constante a lo largo de todo el TFM, tanto en los ejemplos y problemas propuestos, como a la hora de evaluar los conocimientos. Una breve descripción de los cuatro niveles de demanda cognitiva que se establecen en [2] se dá a continuación:

- Nivel 1. Tareas y actividades de memorización: como su propio nombre indica, son aquellas en las que el alumno debe memorizar una definición, o fórmula.

- Nivel 2. Tareas y actividades de procedimientos sin conexión: se limitan a un único concepto o procedimiento. Por ejemplo, el calculo de la distancia entre dos puntos usando la formula correspondiente. Destinadas a afianzar y asimilar conceptos, de forma aislada, así como, a desarrollar destrezas en el cálculo matemático.

- Nivel 3. Tareas y actividades de procedimientos con conexión: van un paso mas allá con respecto a las anteriores, en la medida en que han de relacionarse diversos conceptos conocidos, y debidamente asimilados para la resolución del problema. Una tarea de este tipo podría ser la determinación de la recta perpendicular a una dada que pase por un punto. En esta tarea, el alumno debe primero dominar con soltura la descripción de puntos en el plano, las diversas formas de expresar una recta, las condiciones de perpendicularidad, y cómo se aplican éstas a las rectas dadas en el problema.

- Nivel 4. Tareas y actividades de "hacer matemáticas": las tareas más avanzadas requieren, no sólo relacionar conceptos, sino cierto grado de originalidad y creatividad. El procedimiento de resolución no es inmediato, ni puede sistematizarse como muchos de los procedimientos que engloba el nivel anterior. Un ejemplo de esta tarea se da en la primera unidad didáctica desarrollada en la que se pide al alumno deducir la ecuación del circunferencia en el plano.

En relación con los objetivos generales de la sección 1.2, otra parte fundamental de la didáctica será la explicación del lenguaje y la simbología matemática como $\cup$, $\in$, o $\leftrightarrow$. No se pretende que los alumnos la utilicen, pero sí que sean capaces de entender los rudimentos cuando vean definiciones y deducciones realizadas en las notas. Es una parte fundamental en el desarrollo del pensamiento abstracto y lógico.

Finalmente, en los casos que sea posible, se intentará introducir los conceptos de una forma lo más intuitiva posible haciendo uso de situaciones de la vida cotidiana con las que los alumnos estén familiarizados. Por ejemplo, la introducción de las coordenadas cartesianas en el plano. En este caso, puede uno recurrir a juegos como el ajedrez, o hundir la flota que utilizan un sistema similar para identificar las posiciones sobre el tablero de juego. Esto ayudará a los alumnos a tener una idea intuitiva desde el principio, la cual se formalizará durante la clase y con las explicaciones de las notas.

1.8 Evaluación.

Para la evaluación se tendrán en cuenta los estándares de aprendizaje evaluables que aparecen en la tercera columna del BOCyL (Orden de Educación 362/2015) basados en los criterios de evaluación de la segunda columna: *Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir, y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.*

Con el fin de que la evaluación sea completa y equilibrada, los ejercicios incluidos en ella abarcaran todos los grados de demanda cognitiva, teniendo los de mayor demanda cognitiva (Nivel 4) un peso relativamente inferior a los de media (Nivel 3), y básica (Niveles 1 y 2) . Con ello se pretende una evaluación de los contenidos mínimos solida y accesible a la mayoría del alumnado (puesto que se trata de educación obligatoria), y a la vez dar la oportunidad a los alumnos más capaces de desarrollar su potencial más allá de lo mínimamente exigido.

2 Unidad Didáctica: Geometría Analítica en el Plano

2.1 Introducción Contextual.

2.1.1 Contextualizado de la Unidad Didáctica.

Esta Unidad Didáctica pertenece al Bloque 3 de Geometría del cuarto curso de E.S.O. de enseñanzas académicas.

Comencemos por una breve recapitulación de aquellos conocimientos que se suponen sabidos por aquellos alumnos que hayan superado la asignatura homóloga del tercer curso de E.S.O., y que guardan una relación más o menos estrecha con los contenidos de la unidad didáctica a desarrollar.

Como puede verse en el BOCyL (Orden de Educación 362/2015), más concretamente, en el apartado correspondiente a la asignatura de Matemáticas para las Enseñanzas Académicas de tercero de la E.S.O., tanto el Bloque 3 de Geometría, como el Bloque 4 de Funciones guardan una relación bastante estrecha con los contenidos de las unidades didácticas aquí desarrolladas.

En el Bloque 3 de Geometría aparecen contenidos tales como: Geometría del Plano, Transformaciones o Movimientos del Plano, y Cálculo de Áreas con sus correspondientes desarrollos de contenidos, criterios de evaluación, y estándares de aprendizaje. El Bloque 4 de Funciones explícitamente menciona entre sus contenidos: Utilización de modelos lineales y Expresiones de la ecuación de la recta.

Esto indica que los alumnos ya parten de una base y se les supondrá familiarizados, tanto intuitivamente, como formalmente con los rudimentos de las rectas en el plano, así como de otros conocimientos básicos de geometría plana.

En el propio curso de cuarto de la E.S.O., la unidad didáctica no cuenta con ningún antecedente excepto en el propio bloque de Geometría, y será imprescindible para el Bloque 4 de Funciones, dónde vuelven a estudiarse las funciones lineales, así como para la interpretación gráfica de funciones, y construcción de recta secante a partir de funciones tabuladas.

2.1.2 Proyección hacia Bachillerato.

Dado que se trata de Matemáticas para las Enseñanzas Académicas, se espera que la gran mayoría de los alumnos continúe cursando el Bachillerato. Así, habrá que tener en cuenta los contenidos que han de cursarse en el futuro para asegurarse de que, tras superar el último curso de secundaria, los alumnos poseen una base conceptual sólida, y resuelven con un grado mínimo de soltura ciertos problemas, cuya comprensión sera esencial para su progreso futuro, tanto en el área de matemáticas, como en otras relacionadas.

En particular, en el Bloque 3 de Análisis se incluyen en los contenidos las rectas tangente y normal a la gráfica de una función, así como su interpretación geométrica. En el siguiente Bloque 4 de Geometría, vuelve a aparecer la Geometría Métrica Plana junto con los contenidos estudiados en cuarto de E.S.O. en la presente unidad didáctica a desarrollar. Por lo tanto, es de gran importancia asegurarse de que los conceptos básicos relativos a la geometría plana están bien afianzados al terminar la secundaria para poder profundizar en ellos en el Bachillerato.

2.2 Objetivos Didácticos.

Los Objetivos específicos de esta unidad didáctica se detallan en la segunda columna del Bloque 3 del BOCyL (Orden de Educación 362/2015), en este caso, se da un único objetivo: *Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir, y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.* Éste se desglosa posteriormente en diversos estándares de aprendizaje que se detallan en la sección 10 dónde se habla de la evaluación.

Particularizando un poco más los contenidos de la unidad didáctica, el objetivo es que los alumnos comprendan y asimilen los siguientes conceptos:

- Lenguaje de coordenadas en $\mathbb{R}^2$.

- Diferencia entre un Punto y un Vector. Coordenadas *vs.* Componentes.

- Expresiones analíticas de una recta en $\mathbb{R}^2$.

Con estos conocimientos se espera que sean capaces de resolver los siguientes problemas de geometría plana:

- Determinar si 3 o más puntos están alineados. Transitividad y Reflexividad.

- Calcular el punto medio entre dos puntos dados. División de un segmento en n partes iguales.

- Calcular distancias entre dos puntos dados.

- Resolución de problemas de incidencia y paralelismo de rectas.

- Resolución de problemas dependientes de un parámetro.

2.3 Contenidos.

La descripción general de los contenidos puede encontrarse en el BOCyL (Orden de Educación 362/2015). Aquí vamos a dar una descripción más pormenorizada de ellos.

Esta unidad didáctica consta de los siguientes contenidos:

1. Coordenadas Cartesianas en el Plano y Vectores: Puntos y Vectores: Diferencias. Adición de vectores. Producto de vectores por un escalar. Relación con las Transformaciones elementales del plano: traslación, y cambio de escala.

2. Distancia entre dos puntos. Módulo de un Vector. Relaciones entre ambas. Desigualdad Triangular.

3. La Recta y sus elementos: Definición de Euclides. Definición Axiomática: Recta por un par de puntos. Vectores Unitarios. Vector Director de una Recta.

4. Ecuaciones de la Recta: Vectorial. Parametrica. Continua. General o Implícita. Combinación lineal de Vectores.

5. Incidencia y Paralelismo: Condiciones sobre las coordenadas y vectores directores.

6. Aplicaciones en el Arte y las Ciencias Naturales: Frisos y Mosaicos. Cristalografía.

7. Manejo de TIC adecuadas a los contenidos de esta unidad didáctica.

Los **contenidos mínimos** de esta Unidad Didática son los siguientes:

1. Puntos, Vectores. Elementos y Operaciones entre ellos.
2. Distancia entre dos puntos y Módulo de un vector.
3. Cálculo de Punto Medio entre dos puntos.
4. Vector Normal y Director de una recta.
5. Reconocer e interpretar los distintos elementos en las diferentes expresiones de una recta.
6. Cálculo de la ecuación de una recta en función de los datos conocidos.
7. Condiciones de Paralelismo y Perpendicularidad.
8. Cálculo del punto de corte entre dos rectas.
9. Rectas paralelas a los ejes coordenados.

En los diversos problemas y ejemplos, así como en la prueba de evaluación, se hará alusión a éstos mediante el acrónimo CM# junto con el número. o números que correspondan.

2.4 Recursos.

Los recursos necesarios para esta unidad didáctica son los siguientes:

1. Notas desarrolladas en este TFM, proporcionadas por el profesor a los alumnos, para facilitar el seguimiento de las clases por parte de estos.
2. Pizarra analógica, o digital si la hubiere, lápiz, y papel.
3. Colección de Problemas con sus soluciones detalladas (algunas incluidas en este TFM) proporcionadas por el profesor.
4. Problemas de Evaluación.
5. Ordenador y programa Geogebra. Puesto que no puede asumirse que todos los alumnos vayan a disponer de un ordenador personal, este tipo de tareas se desarrollarán íntegramente en el centro docente, en el aula destinada a tal efecto.
6. Libro de Texto.

2.5 Geometría Analítica en el Plano: Notas, ejemplos y problemas.

2.5.1 Coordenadas Cartesianas en el Plano y Vectores.

Un **plano** es una región infinita bidimensional. Por ejemplo, una mesa es una región, o porción de plano. Para hacer posible la descripción de los elementos geométricos planos introducimos en el plano un **sistema de ejes cartesianos coordenados** de la forma siguiente:

1. Se toma arbitrariamente un punto del plano que sera el **origen de coordenadas** y que denotaremos por O.

2. Tomamos dos rectas perpendiculares entre sí cuyo punto de intersección sea el origen de coordenadas O. Estas rectas son los **ejes de coordenadas o ejes coordenados**. Designaremos a una como el eje de **ordenadas**, eje y o eje vertical; y a la otra como eje de **abscisas**, eje x o eje horizontal.

Este sistema de ejes coordenados o de forma mas abreviada, *sistema de coordenadas*, nos va a permitir describir puntos y otros elementos del plano de una forma muy sencilla.

Puntos y Vectores. Diferencias. Para averiguar la expresión de un punto arbitrario A del plano $\mathbb{R}^2$ (se escribe $A \in \mathbb{R}^2$) basta con trazar sendas paralelas a los ejes coordenados a partir del punto y observar los *puntos de corte*, x con el eje de abscisas, e y con el ordenadas. x e y serán, por lo general números reales arbitrarios determinados por la escala elegida en cada eje y el punto A en cuestión.

Un **punto** $A \in \mathbb{R}^2$ se describe de forma *única* mediante un par de **coordenadas** (x, y). De forma abreviada se escribe $A = (x, y)$ (o $A(x, y)$ en algunos libros). En particular tenemos $O = (0, 0)$ (o $O(0, 0)$ en algunos libros). Ver figura 1.

De forma análoga a como con dos puntos distintos se determina una *única* linea r_{AB} que pasa por ambos, con dos puntos A y B podemos definir *dos* vectores: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. La razón de esta pequeña diferencia en la analogía es que la noción subyacente a la línea, o recta, es la de *dirección* determinada por dos puntos A y B, mientras que la idea de vector es más fina ya que además incorpora la noción de *sentido* en el que se recorre esa dirección. Como una dirección puede recorrerse en dos sentidos opuestos, entonces, dos puntos A y B determinan dos vectores, dos flechas.

Dos puntos A y B de $\mathbb{R}^2$ definen dos **vectores**: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. El punto A es el **origen** del vector $\overrightarrow{AB}$ y el **extremo** del vector $\overrightarrow{BA}$. Asimismo, el punto B es el origen del vector $\overrightarrow{BA}$ y el extremo del vector $\overrightarrow{AB}$.

Didáctica. *Esta explicación busca delinear las nociones de sentido y dirección. Para facilitar su comprensión, se ha evitado un lenguaje formal*

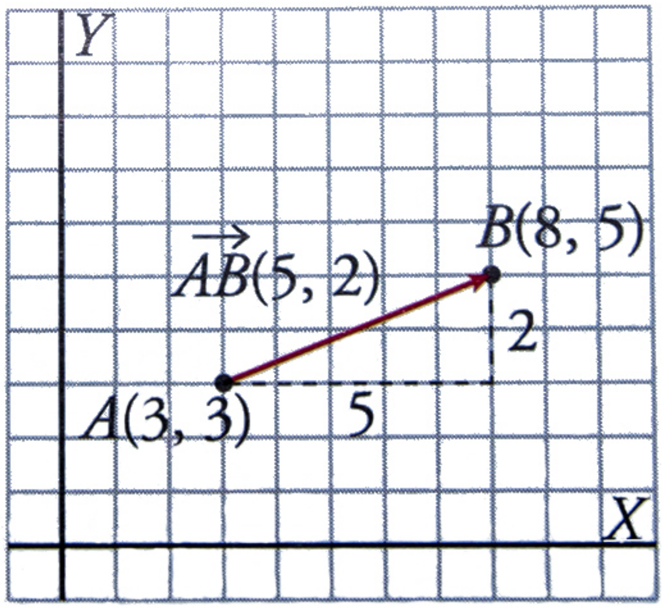

Fig. 1

de tal forma que los alumnos puedan, idealmente, leer y comprender esta aclaración importante por sí mismos, por ejemplo, mientras estudian en casa. Esto desarrollará su competencia de aprender a aprender y les dará confianza en sus propias capacidades haciéndoles más autónomos. Las palabras origen y extremo están íntimamente ligadas a la noción de sentido, y por ello a la de vector, por esta razón se han resaltado.

Un vector $\overrightarrow{AB}$ se describe mediante un par de **componentes** (x, y). Estas componentes son las proyecciones del vector sobre cada uno de los ejes coordenados. Se escribe $\overrightarrow{AB} = (x, y)$ o bien $\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB}_x, \overrightarrow{AB}_y)$.

Las componentes se determinan de la forma siguiente a partir de las coordenadas de los puntos $A = (a_x, a_y)$ y $B = (b_x, b_y)$:

$$\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB}_x, \overrightarrow{AB}_y) \equiv ((b_x - a_x), (b_y - a_y)) \tag{1}$$

Cuidado: si consideramos el vector con origen en el punto origen de coordenadas O y extremo en el punto $A = (x, y)$, según la definición anterior $\overrightarrow{OA} = ((x - 0), (y - 0)) = (x, y)$, sin embargo $\overrightarrow{OA} \neq A$

Ejemplo 2.1. *(CM:1. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 2) Dados los puntos* $A = (3, 2)$ *y* $B = (6, 4)$ *los dos vectores que determinan son:*

$$\overrightarrow{AB} = ((b_x - a_x), (b_y - a_y)) = ((6 - 3), (4 - 2)) = (3, 2) \neq A \tag{2}$$

$$\overrightarrow{BA} = ((a_x - b_x), (a_y - b_y)) = ((3-6), (2-4)) = (-3, -2) \tag{3}$$

Pregunta 2.1. *¿Son iguales dos vectores con las mismas componentes pero diferentes orígenes y extremos?*

No. Pero esta circunstancia da lugar a una definición más abstracta de vector conocida como **vector libre**, en el que no se hace referencia a ningún origen ni extremo concretos: $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y)$.

En general, cuando trabajamos con vectores libres:

Vectores Libres Iguales: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff u_x = v_x \quad u_y = v_y$.

Intuitivamente, nos quedamos solamente con la flecha, la despegamos del plano y la podemos recolocar dónde queramos. Esta abstracción nos va a permitir hacer algo interesante como *sumar* un vector libre a un punto cualquiera y obtener otro punto del plano. Se hace de la forma siguiente: Tenemos el punto $A = (a_x, a_y)$ y el vector libre $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y)$. Si apoyamos, o pegamos, el vector $\overrightarrow{u}$ en A, la punta de la flecha $\overrightarrow{u}$ será otro punto del plano que podemos llamar B con coordenadas:

$$B = A + \overrightarrow{u} = (a_x + u_x, a_y + u_y) \tag{4}$$

Se dice que el punto B es una **traslación** del punto A mediante el vector $\overrightarrow{u}$.

Didáctica. *En este apartado se introduce la noción de vector libre, que es el paso que va a permitir una mayor abstracción respecto a los vectores fijos con origen y extremo introducidos anteriormente. Este concepto es importante para que los alumnos piensen en un vector como un ente abstracto, y no como una simple flecha pegada al plano. Otra forma de verlo es que identifiquen un vector dado con la familia de vectores que se obtienen al colocar este sobre todos los puntos del plano.*

Ejemplo 2.2. *(CM:1. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 2) Dado el punto $A = (3, 2)$ del ejemplo anterior y el vector $\overrightarrow{u} = (3, 2)$ el punto B determinado por su suma es:*

$$B = A + \overrightarrow{u} = (a_x + u_x, a_y + u_y) = (6, 4) \tag{5}$$

Fijarse en que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Por esto, el punto extremo es el mismo que en el ejemplo anterior. Simplemente hemos despegado la flecha $\overrightarrow{AB}$ del plano y la hemos vuelto a colocar en el mismo sitio. Se entiende que por el punto A, queremos decir el vector cuyo extremo es el punto A:$\overrightarrow{OA}$, esto es un abuso de notación pero resulta más cómodo siempre que uno tenga claro el significado subyacente.

También podemos definir un **vector nulo** $\overrightarrow{0} = (0, 0)$. Además, a partir de la definición (1): $\forall A \in \mathbb{R}^2$ resulta $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Metodología. *En clase se explicarán las formas de describir puntos y rectas en el plano mediante las ilustraciones incluidas. Se pondrá especial énfasis en la diferencia entre ellos cuando se trata de un punto y de un vector: "puntos se describen con coordenadas y vectores se describen con componentes". La notación y el hecho de que la mayor parte de los libros usen el término coordenada para referirse tanto a puntos como a vectores es una fuente potencial de confusión para los alumnos. Por esta razón, se ha optado por introducir el término componente. Además, dicho término tiene la ventaja de poder ser captado de forma mas intuitiva al explicarse como la proyección del vector sobre los ejes coordenados. La idea de vector se hará intuitiva a los alumnos usando la idea de flecha que incluye las nociones de dirección y sentido, en contraposición a la simple línea que sólo incluye la de dirección. Esto se ilustrará en la pizarra mediante un gráfico similar al que se incluye aquí. Asimismo, se ilustrará el cálculo de las componentes de un vector mediante el ejemplo 2.1, que además pondrá de relieve las diferencias cualitativas entre coordenadas y componentes.*

Trabajo Individual:*Los Ejemplos 2.1 y 2.2 se resolverán de forma individual.*

Incluir casos especiales o potencialmente confusos como ejemplos, siempre acompañados de ilustraciones en la pizarra.

Para incentivar la participación de los alumnos y mantener su nivel de atención, se recurrirá a preguntas como la 2.1, que darán lugar a la explicación de resultados nuevos o conocidos, pero más generales. Se les presentará la forma más general de vector libre sin necesidad de hacer referencia a un origen y un extremo lo cual nos permitirá llegar a un nivel de abstracción superior que nos facilitará la labor de introducir las operaciones con vectores y puntos en el plano afín.

En estos casos se empleará un lenguaje vacío de formalismos y lo más intuitivo posible con el fin de que las ideas lleguen a los alumnos lo mas claramente posible.

Comentario. Aunque matemáticamente es correcto usar el término coordenadas para referirse a vectores, esto se hace cuando dichos vectores se consideran elementos de un espacio vectorial. En el caso que nos ocupa, nuestros puntos no son vectores de un espacio vectorial sino puntos físicos en un espacio euclídeo bidimensional cuyo espacio vectorial subyacente es, a su vez, un espacio vectorial euclídeo bidimensional. En suma, estamos trabajando en un **espacio afín euclídeo** de dimensión dos. Por esta razón, es preferible, desde el punto de vista pedagógico usar términos diferentes para referirse a las descripciones de puntos y vectores de tal forma que ambos conceptos queden delineados de la forma más clara posible.

Adición de Vectores. La suma de dos vectores $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y)$ y $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$ cualesquiera se define de la forma siguiente:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \equiv (u_x + v_x, u_y + v_y) \tag{6}$$

La suma es **conmutativa** a partir de la definición anterior:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \tag{7}$$

Producto de vectores por un escalar. La multiplicación de un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por un vector $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y)$ cualquiera se define de la forma siguiente:

$$\lambda\overrightarrow{u} = \lambda(u_x, u_y) \equiv (\lambda u_x, \lambda u_y) \tag{8}$$

Por la definición anterior se verifica:

$$\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\lambda \tag{9}$$

También puede pensarse en esto como sumar $\overrightarrow{u}$ "λ" veces.

Ejemplo 2.3. *(CM:1. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 2) Dado el vector* $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$ *del Ejemplo 6.1, el vector* $\overrightarrow{v} = (6, 4)$ *y los escalares* $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -1$ *y* $\lambda_3 = 0$*. Calculamos, usando las definiciones anteriores:*

$$\lambda_3\overrightarrow{AB} = (0, 0) = \overrightarrow{0} \tag{10}$$

$$\lambda_3\overrightarrow{v} = (0, 0) = \overrightarrow{0} \tag{11}$$

$$\lambda_2\overrightarrow{AB} = (\lambda_2 3, \lambda_2 2) = (-3, -2) = \overrightarrow{BA} \tag{12}$$

$$\overrightarrow{AB} + \lambda_2\overrightarrow{AB} = ((3-3), (2-2)) = \overrightarrow{0} \tag{13}$$

$$\overrightarrow{AB} + \lambda_1\overrightarrow{v}\lambda_2 = ((3 + \lambda_1\lambda_2 6), (2 + \lambda_1\lambda_2 4)) = (0, 0) = \overrightarrow{0} \tag{14}$$

$$\overrightarrow{AB} + \lambda_3\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} \tag{15}$$

$$\overrightarrow{v} + \lambda_2\overrightarrow{AB} = ((6 - \lambda_2 3), (4 - \lambda_2 2)) = (3, 2) = \overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{AB} \tag{16}$$

A partir de la última ecuación, y como se podía anticipar de la definición (8), podemos ver que dos vectores pueden ser proporcionales pero que la división de un vector entre otro carece de sentido.

Como se ha ilustrado en los ejemplos las consecuencias de estas definiciones, y de las definiciones de la sección anterior nos permiten obtener varias identidades útiles. Para cualquier vector $\overrightarrow{u}$:

$$0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}0 = \overrightarrow{0} \tag{17}$$

$-\overrightarrow{u} = (-u_x, -u_y)$ es el **vector opuesto** de $\overrightarrow{u}$, en particular se cumple:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \tag{18}$$

Para cualquier vector $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \tag{19}$$

Combinando la definición de suma de vectores y de producto de vector por un escalar podemos definir la resta de vectores:

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \equiv \overrightarrow{u} + (-1)\overrightarrow{v} \tag{20}$$

Ver figura 2.

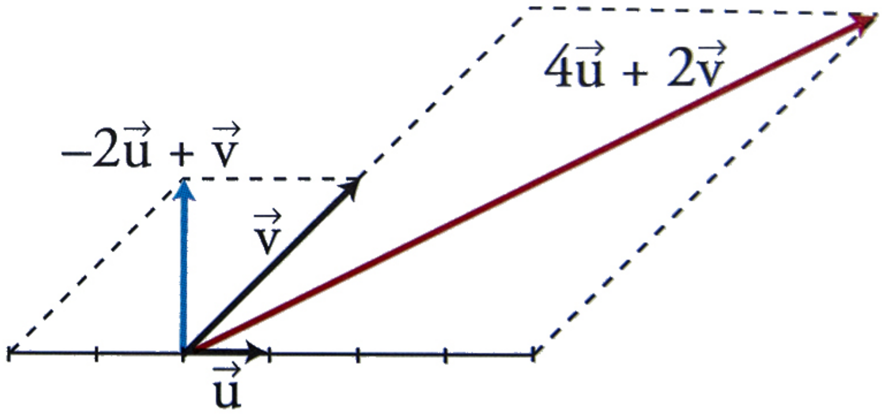

Fig. 2

Metodología. *El concepto central de este apartado es el de suma de vectores ya que el de multiplicación por un escalar λ puede verse como una suma de λ copias de un vector.*

La suma se ilustrará en la pizarra usando:

- *El vector suma se obtiene colocando el origen de un vector en el extremo del otro, y uniendo el origen del primero con el extremo libre del segundo.*
- *Regla del paralelogramo, por la cual el vector suma es la diagonal del paralelogramo formado por los vectores sumados con punto de origen común.*

Para valores pequeños de λ también se mostrará en la pizarra cómo la multiplicación coincide gráficamente con la suma de λ copias del vector sumado y se confirmará formalmente a partir de las definiciones.

A continuación, se procederá a derivar algunas relaciones e identidades útiles que involucrán la suma de vectores y multiplicación por escalares. Esto *se hará mediante un ejemplo numérico que sirva de motivación para después dar la versión más general y formal de dichas propiedades. Esto se muestra en el Ejemplo 2.3, dónde cada una de las cantidades pedidas ilustra alguna propiedad o consecuencia importante. Así, en las ecuaciones (10-11), el alumno se familiarizará con la importante propiedad (17), en la ecuación (12), se introducirá la idea de vector opuesto apoyándose en una ilustración en la pizarra, en las ecuaciones (13-15) se opera con el vector opuesto y el vector nulo y finalmente la ecuación (16) proporciona un caso sencillo de igualdad entre vectores y proporciones. Cuyo fin es resaltar que dos vectores pueden ser proporcionales pero que la operación de división de vectores no tiene ningún sentido.*

Trabajo Cooperativo: *El Ejemplo 2.3 será resuelto en clase por los alumnos en grupos de 3 o 4 con asistencia por parte del profesor. Se les darán 5 minutos tras los cuales el profesor mostrará las soluciones en la pizarra, se comentarán posibles errores y se procederá a derivar las propiedades en su forma general.*

Para ir iniciando a los alumnos en el razonamiento deductivo y acostumbrarles a deducir consecuencias inmediatas de las definiciones, se presentan primero ejemplos prácticos para conectar con la intuición y después se procede con elaboraciones más formales para llegar a los resultados generales como se ha hecho a continuación del Ejemplo 2.3 con las ecuaciones (17-20).

2.5.2 Distancia entre Puntos y Módulo de un Vector.

Distancia entre dos puntos. Dados dos puntos del plano $A = (a_x, a_y)$ y $B = (b_x, b_y)$ la distancia entre los puntos A y B viene dada por la siguiente expresión que se obtiene a partir del Teorema de Pitágoras:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2} \tag{21}$$

Ejemplo 2.4. *(CM:1-2. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) Dados los puntos del plano $A = (3, 2)$, $B = (6, 2)$ y $C = (6, 6)$ calculamos, a partir de la fórmula lo siguiente:*

$$d(A, A) = \sqrt{(3 - 3)^2 + (2 - 2)^2} = 0 \tag{22}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (2 - 2)^2} = 3 \tag{23}$$

$$d(B, A) = \sqrt{(3 - 6)^2 + (2 - 2)^2} = 3 \tag{24}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(6 - 6)^2 + (6 - 2)^2} = 4 \tag{25}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \tag{26}$$

Podemos ver que, en este ejemplo concreto, las distancias entre los tres puntos cumplen el Teorema de Pitagoras $z^2 = x^2 + y^2$ tomando $x = d(A, B)$,

$y = d(B,C)$ y $z = d(A,C)$. Tres números $x, y, z \in \mathbb{Z}$ que satisfacen el Teorema de Pitágoras se llaman ***terna pitagórica****.*

Además se comprueba de inmediato que se satisface la siguiente desigualdad:

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C) \tag{27}$$

ya que obviamente $5 \leq 3 + 4 = 7$. Este resultado es un caso particular de la desigualdad triangular.

¿Podéis deducir o conjeturar tres propiedades matemáticas de carácter general de la distancia a partir de los ejemplos numéricos anteriores?

Ejemplo 2.5. *(CM: 3. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 2) Hallar las coordenadas del punto medio $M = (m_x, m_y)$ entre dos puntos dados $A = (a_x, a_y)$ y $B = (b_x, b_y)$ cualesquiera en función de las coordenadas de estos últimos.*

Solución. *Despejando las coordenadas m_x, m_y en la igualdad $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.*

Propiedades de la Distancia entre dos puntos.

$$d(A,B) = 0 \iff A = B \tag{28}$$

$$d(A,B) = d(B,A) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^2 \tag{29}$$

$$d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C) \quad \forall A, B, C \in \mathbb{R}^2 \tag{30}$$

La última ecuación es la conocida **desigualdad triangular**.

Metodología. *Esta primera sección es con la que los alumnos están mas familiarizados intuitivamente. Una forma posible de introducir esta sección sería la siguiente:*

El concepto de distancia entre dos puntos es conocido por todos: longitud del segmento que los une. Como cualquier segmento podemos proyectarlo sobre un par de ejes coordenados perpendiculares, siempre podemos obtener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es precisamente el segmento cuya longitud deseamos calcular. Ahora no tenemos más que usar el Teorema de Pitágoras para obtener la longitud deseada que es la distancia entre los dos puntos.

Esta explicación se acompañaría de la secuencia de dibujos esquemáticos en la pizarra para facilitar que los alumnos sigan el procedimiento geométrico, y entiendan de donde viene la definición de distancia entre dos puntos que se da en las notas. Ver figura 3.

Trabajo Cooperativo: *El Ejemplo 2.4 será resuelto en clase por los alumnos en grupos de 3 o 4 con asistencia por parte del profesor. Se les darán 5 minutos tras los cuales el profesor mostrará las soluciones en la pizarra, se comentarán posibles errores y se procederá a derivar las propiedades en su forma general.*

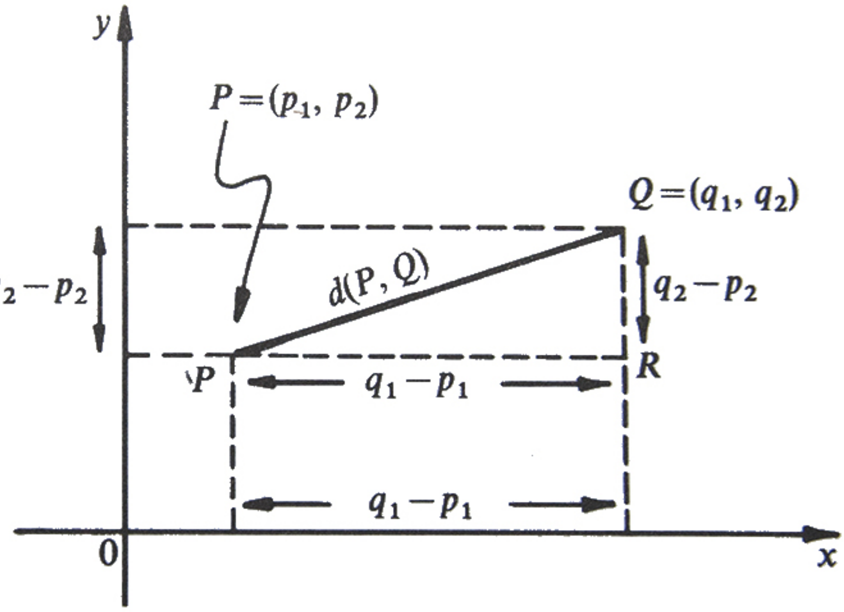

Fig. 3

Una vez se haya dado la solución del Ejemplo 2.4, el profesor deducirá las propiedades de la distancia en la pizarra. La ***desigualdad triangular*** *se demostrará gráficamente argumentando que la proyección de un segmento tiene siempre una longitud igual o inferior a la longitud de dicho segmento. Puesto que el Teorema del Coseno forma parte del currículo del curso siguiente no es posible utilizarlo en la deducción de este resultado. Ver figura 4.*

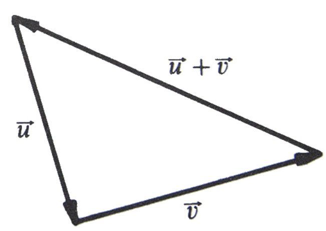

Fig. 4

El Ejemplo 2.5 forma parte de los contenidos mínimos, y será resuelto por el profesor en la pizarra tras dejar a los alumnos 5 minutos para pensar en el planteamiento de la solución.

Módulo de un Vector. Dado un vector arbitrario $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y)$, el módulo de $\overrightarrow{u}$ se define como:

$$\|\overrightarrow{u}\| \equiv \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad \geq 0 \tag{31}$$

En particular, cuando el vector está expresado en función de su origen y extremo $\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB}_x, \overrightarrow{AB}_y) \equiv ((b_x - a_x), (b_y - a_y))$ se obtiene inmediatamente de la definición de módulo y distancia entre dos puntos:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}_x^2 + \overrightarrow{AB}_y^2} = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2} = d(A, B) \tag{32}$$

esto pone de relieve que el módulo de un vector es la longitud del segmento que va desde el origen al extremo del vector. Para un vector libre $\overrightarrow{u}$ es la longitud de la flecha que representa el vector en cuestión.

Ejemplo 2.6. *(CM: 2. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) Dados los puntos del plano* $A = (3, 2)$*,* $B = (6, 2)$ *y* $C = (6, 6)$ *se pide calcular lo siguiente:*

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ *y* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$
2. $\|\overrightarrow{AA}\|$, $\|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}\|$
3. $\|\overrightarrow{u}\|$
4. $\|\overrightarrow{v}\|$
5. $\|\overrightarrow{w}\|$
6. *¿Puede establecerse alguna desigualdad que involucre:* $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$ *y* $\|\overrightarrow{w}\|$*?*
7. $\|\lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}\|$ *para algún* $\lambda \in \mathbb{R}$
8. *¿Podeis deducir o conjeturar tres propiedades matemáticas de carácter general del módulo a partir de los ejemplos numéricos anteriores?*

Propiedades del Módulo de un Vector.

$$\|\overrightarrow{u}\| = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \tag{33}$$

$$\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\| \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \tag{34}$$

$$\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| \geq \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \quad \forall\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \tag{35}$$

Cuando $|\lambda| < 1$ hablamos de **contracción** del vector $\overrightarrow{u}$ por un factor de escala $|\lambda|$. Mientras que si $|\lambda| > 1$ hablamos de **dilatación** del vector $\overrightarrow{u}$ por un factor de escala $|\lambda|$. La última ecuación es la conocida **desigualdad triangular**.

Didáctica. *Esta sección es similar en estructura a la anterior. La introducción de la distancia anteriormente facilitará a los alumnos la comprensión de lo que es el módulo de un vector así como de sus propiedades. Es importante hacer énfasis en la conexión intuitiva y conceptual entre módulo y distancia, una posible forma de hacerlo es la siguiente:*

El de módulo es simplemente un nombre diferente para decir: longitud de la flecha que representa el vector que coincide con la distancia entre los puntos origen y extremo del vector.

La ***desigualdad triangular*** *juega un papel tan importante porque se usará en la sección siguiente para dar una justificación de que la distancia más corta entre dos puntos es una linea recta, puesto que la noción de derivada se estudia en cursos posteriores y, por lo tanto, no puede hacerse uso de ella para plantear un problema de optimización.*

Metodología. ***Trabajo Cooperativo:*** *El Ejemplo 2.5 será resuelto en clase por los alumnos en grupos de 3 o 4 con asistencia por parte del profesor. Se les darán 10 minutos tras los cuales el profesor mostrará las soluciones en la pizarra, se comentaran posibles errores y se procederá a derivar las propiedades en su forma general.*

Una vez se haya dado la solución del Ejemplo 2.5, el profesor deducirá las propiedades del módulo en la pizarra poniendo de relieve las analogías y relaciones entre las correspondientes propiedades de la distancia.

En este punto, los alumnos disponen de suficiente bagaje como para realizar dos tareas cuya demanda cognitiva sea de un nivel superior. Estas tareas se realizarán de forma individual en casa y serán entregadas al profesor. Se registrarán aquellos alumnos que las hayan resuelto o intentado y aquellos que no la hayan entregado. Su fin es el de ***monitorizar el progreso*** *de los alumnos y el de afianzar conceptos y corregir errores antes de seguir avanzando en materia*

Tarea 2.1. *(Demanda Cognitiva Nivel 4) Sean los puntos $A = (a_x, a_y)$ y $B = (b_x, b_y)$ cualesquiera. Hallar las coordenadas el punto $T = (t_x, t_y)$ que se encuentra a una distancia de A igual a un tercio de la distancia entre A y B en función de las coordenadas de estos últimos. Proponer un método general para dividir un segmento entre dos puntos dados A y B en n partes iguales.*

Solución. *Despejando las coordenadas m_x, m_y en la igualdad $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Despejando las coordenadas t_x, t_y en la igualdad $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Hacer $\overrightarrow{AN_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{AB}$ para $k = 1, ..., (n-1)$.*

Para completar el bloque sobre puntos, vectores y operaciones entre ellos se propondrá a los alumnos un ***estudio de casos realizado en grupos*** *de $5-6$ alumnos en clase mediante el cual podrán familiarizarse con algunas transformaciones elementales en el plano: traslaciones y cambios de escala.*

El ***objetivo principal del estudio es que asocien las operaciones vistas con puntos y vectores con dichas transformaciones en el plano****. Como objetivo secundario, se logrará ir introduciendo intuitivamente las nociones de proporcionalidad y semejanza que serán de utilidad para el tema siguiente dónde se desarrollarán en mayor profundidad.*

La duración total del estudio será de 30 *minutos, repartidos en* 5 *de explicación del profesor,* 15 *de trabajo de los alumnos, y* 10 *de puesta en común de resultados y comentario final.*

Los panales de abejas tienen una estructura como la que se muestra en ([3]). Las celdas son hexágonos (idealmente regulares) que cubren una región plana del espacio. Cualquier vértice de una celda, así como su punto central pueden describirse por dos coordenadas cartesianas referidas a ejes coordenados perpendiculares, como hemos hecho hasta ahora.

Un caso más sencillo, pensad que las celdas fuesen cuadradas o rectangulares. El sistema más cómodo que nos permitiría describir todos los vértices y centros de las celdas cuadradas o rectangulares serían dos vectores perpendiculares $\overrightarrow{i}$ *y* $\overrightarrow{j}$ *cuyas longitudes serían la mitad de las longitudes de los lados del cuadrado o rectángulo* $\|\overrightarrow{i}\| = \frac{1}{2}l_x$ *y* $\|\overrightarrow{j}\| = \frac{1}{2}l_y$ *cuyas longitudes serían la mitad de las longitudes de los lados del cuadrado o rectángulo. Fijando un vértice cualquiera como origen* O*: ?Cual sería la ecuación de cualquier punto* $P = (x, y)$*, vértice o centro, de la malla en función de los vectores* $\overrightarrow{i}$ *y* $\overrightarrow{j}$*? La respuesta es:* $P = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$*. Ver figura 5.*

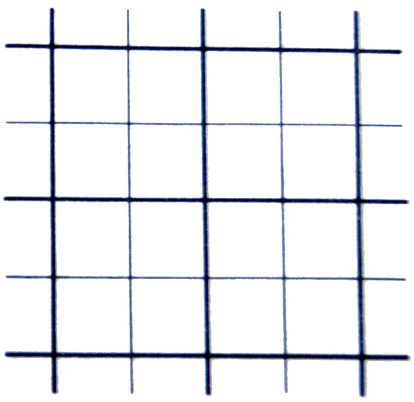

Fig. 5

Para el caso real del panal hexagonal, podemos usar un sistema de referencia más sencillo que el cartesiano (perpendicular) usando ***exactamente*** *dos vectores (¿Por que dos?), como hemos hecho arriba, y las operaciones que involucran, puntos y vectores estudiadas. Para el panal hexagonal (real) con origen en O se pide:*

1. *Proponer algún par de vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ que sirvan como sistema de referencia en este caso. (Pista: Dibujar en la pizarra algunas de las posibles flechas que parten de O a otros puntos de la celda o el panal)*

2. *Ecuación de cualquier punto $P = (x, y)$ de la malla en términos de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ hallados anteriormente.*

3. *Si cambiamos el origen de O a O'. ¿Es necesario cambiar también los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$? ¿Cambia la ecuación del punto genérico P?*

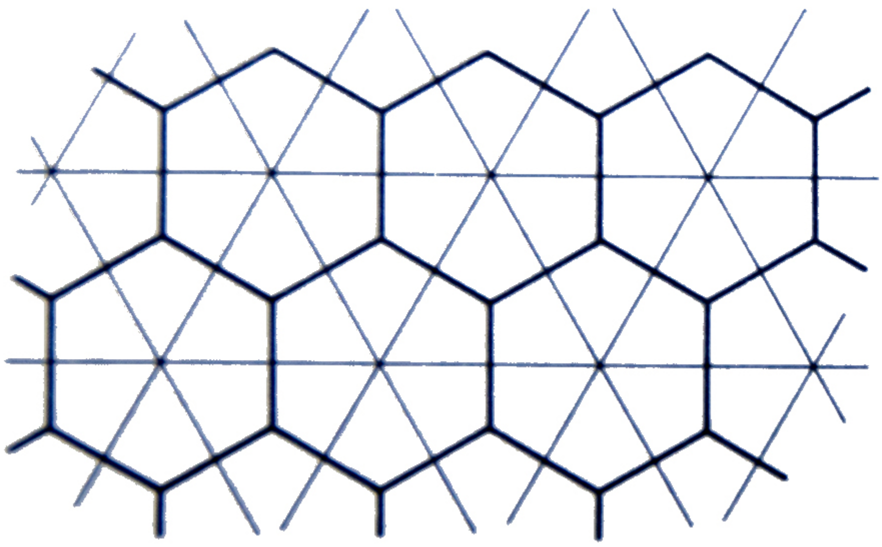

Fig. 6

En conclusión, podemos generar todo el panal mediante traslaciones del origen con los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Debido a esta simetría, la ecuación del punto genérico P no cambia al trasladar el origen a otro punto mediante dichos vectores, es decir: es ***invariante bajo traslaciones****.*

2.5.3 La Recta y sus elementos.

Didáctica. *En esta sección se darán las nociones intuitivas básicas sobre la recta. Se darán varias definiciones de distintos matemáticos que aportan* *diferentes puntos de vista. Se terminará introduciendo la noción fundamental de vector director que será las más fructífera desde el punto de vista práctico, tanto en la sección siguiente, como en otras áreas de la matemática, la física y la técnica. Se comienza con la definición de Euclides por ser la más antigua, ademas carece de aplicación practica. A continuación se dan tres axiomas debidos a Hilbert que resultaran útiles en algunos razonamientos, dan una fundamentación teórica a las definiciones posteriores como la de vector director que se introduce en último lugar.*

Definición de Euclides. Euclides fué un matemático griego que vivió en torno a los años 325 a.C. y 265 a.C. Su obra más célebre son los "Elementos" dividida en 13 libros que abarcan los fundamentos de la geometría y la teoría elemental de números. La Recta o Línea juega un papel fundamental en geometría, por ello, en su Libro I, la define como: **"Una linea es una longitud sin anchura".**

Definición Axiomática: Recta por un par de puntos. Varios siglos después, concretamente en el siglo XIX-XX, el matemático alemán David Hilbert replanteó los fundamentos de la geometría desde un punto de vista axiomático en el cual no define puntos, rectas, y planos sino que se limita a tomarlos como tres conjuntos distintos de cosas entre las cuales se dan ciertas relaciones *a priori*. Estas relaciones, cuya verdad se admite sin demostración, se llaman *axiomas*. Su primer grupo de axiomas se refiere a la conexión entre puntos, rectas y planos. De sus 8 axiomas sólo vamos a mencionar los tres primeros que se refieren directamente a las rectas:

1. Para cualquier par de puntos A y B, siempre hay una recta r que los una.

2. Para cualquier par de puntos A y B distintos, no hay más de una recta r que los una.

3. Una recta cualquiera r siempre contiene al menos dos puntos A y B. Hay al menos tres puntos A, B y C que no están sobre una recta r.

Axiomas del tipo 1 se conocen como axiomas o resultados de *existencia* y los del tipo 2 de *unicidad*.

Vectores Normales o Unitarios. Un **vector unitario o normal es aquél cuyo módulo vale 1:**

$$\overrightarrow{u} \quad UNITARIO\; o\; NORMAL \quad \equiv \quad \|\overrightarrow{u}\| = 1 \tag{36}$$

Cuando tenemos un vector cualquiera $\overrightarrow{u}$ cuyo módulo $\|\overrightarrow{u}\| \neq 1$, es decir que no es unitario, podemos **normalizarlo, hacerlo unitario** multiplicándolo por el inverso de su módulo:

$$\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} \quad \rightarrow \quad \|\vec{v}\| = |\frac{1}{\|\vec{u}\|}|\|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1 \tag{37}$$

Hemos usado la propiedad del módulo (34).

Vector Director de una Recta. Dos puntos cualesquiera de una recta dada, determinan un único vector. Por lo tanto, una recta determina tantos vectores diferentes como parejas distintas de puntos sobre ella podamos formar, es decir infinitos. Sin embargo vamos a ver que todos ellos son proporcionales a un único vector normal o unitario que llamaremos **vector director** de la recta.

Vamos a tomar dos pares de puntos de la recta r: A y B con el que formaremos el vector $\overrightarrow{AB} = ((b_x - a_x), (b_y - a_y))$ y C y D con el que formaremos el vector $\overrightarrow{CD} = ((d_x - c_x), (d_y - c_y))$. Como acabamos de explicar, a partir de estos vectores podemos formar sendos vectores normales:

$$\vec{d} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \quad \vec{d'} = \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|} \tag{38}$$

Al estar los cuatro puntos sobre la misma recta, los dos triángulos que forman sus proyecciones sobre los ejes coordenados son semejantes. Por lo tanto, como los triángulos son semejantes, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{(b_x - a_x)}{(d_x - c_x)} = \frac{(b_y - a_y)}{(d_y - c_y)} = \kappa > 0 \tag{39}$$

A consecuencia de la cual se deduce que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son proporcionales:

$$\overrightarrow{AB} = \kappa\overrightarrow{CD} \tag{40}$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación (38) del vector normal $\vec{d}$ y aplicando las propiedades del módulo obtenemos el resultado final:

$$\vec{d} = \vec{d'} \tag{41}$$

El vector $\vec{d}$ recibe el nombre de **vector director** de la recta r, es único y normal o unitario $\|\vec{d}\| = 1$. El propio nombre ya nos da una pista de lo que indica este vector: la **dirección de la recta** r.

Además, a partir del dibujo se ve que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ también determinan la misma dirección, son proporcionales como se ve en la ecuación (40) y sus módulos son diferentes.

En conclusión, podemos decir que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **son paralelos o están alineados** cuando son proporcionales $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. A nivel de cálculos prácticos, esto es equivalente, en virtud de la definición de vector, a que sus componentes sean proporcionales dos a dos con la misma constante de proporcionalidad λ.

Ejemplo 2.7. *(CM: 4. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 2) Normalizar los siguientes vectores:* $\overrightarrow{u} = (3,4)$, $\overrightarrow{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *y* $\overrightarrow{w} = (5,2)$.

Ejemplo 2.8. *(CM: 4. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) Dados los tres puntos siguientes* $A = (3,3)$, *y* $B = (-1,5)$ *y* $C = (-4,0)$ *se pide:*

1. *Localizar los puntos sobre un plano de ejes coordenados.*

2. *¿Cuantas rectas se pueden trazar que pasen por al menos dos puntos?*

3. *¿Cuantos vectores directores diferentes podemos formar a partir de estos tres puntos?*

4. *Calcularlos.*

Ejemplo 2.9. *(CM: 4. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 2) Dados los siguientes vectores* $\overrightarrow{u} = (3,4)$, $\overrightarrow{v} = (\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2})$ *y* $\overrightarrow{w} = (5,1)$. *Determinar que parejas de todas las posibles son proporcionales así como la constante de proporcionalidad en cada caso.*

Ejemplo 2.10. *(CM: 4. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) Tenemos un vector arbitrario* $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y)$. *Ahora consideramos el vector* $\overrightarrow{v} = (\alpha u_x, \beta u_y)$ *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *¿Que relación o relaciones tiene que haber entre* α *y* β *para que los vectores* $\overrightarrow{u}$ *y* $\overrightarrow{v}$ *sean proporcionales?*

Metodología. *Las primeras partes de la sección, dónde se exponen la definición de Euclides y los axiomas de Hilbert se explicarán de viva voz en la pizarra acompañándola de algunos dibujos sencillos. Puesto que los alumnos dispondrán de las notas, podran añadir ellos mismos esos dibujos, lo que contribuirá a un aprendizaje más activo. Los axiomas de Hilbert serán necesarios para la realización del Ejemplo 2.9.*

Los vectores normales no tienen una dificultad conceptual particular, simplemente se les explicará la definición apoyándola de un dibujo de un vector de longitud la unidad, lo cual se comprobará mediante geometría elemental usando el Teorema de Pitágoras. Se detallará en la pizarra como se realiza el proceso de normalización que aparece en las notas, explicando cada paso haciendo alusión a la propiedad correspondiente que ya se ha visto anteriormente.

La definición de vector normal y el proceso de normalización se afianzarán mediante la realización individual del sencillo Ejemplo 2.7 para el que los alumnos dispondrán de 4 minutos máximo.

Trabajo Cooperativo: *El Ejemplo 2.8 será resuelto en clase por los alumnos en grupos de 3 o 4. Se les darán 10 minutos tras los cuales el profesor mostrará las soluciones en la pizarra, se comentarán posibles errores y se procederá a derivar las propiedades en su forma general.*

El último punto en este tema es el de vectores proporcionales, alineados o paralelos. En este momento, gracias a los diversos dibujos que se hayan *ido realizando en clase, o que hayan realizado los propios alumnos, es de esperar que la gran mayoría de ellos ya se hayan dado cuenta de este hecho. No obstante, se introducirá formalmente y ilustrará en la pizarra a nivel gráfico dejando la parte de cálculo para los dos ejemplos siguientes, 2.9 y 2.10, que se relizarán en clase de forma individual y para los que se dejarán 10 minutos.*

Didáctica. *En la última parte de este apartado se introduce al alumno a la conexión entre recta y vector. Lo fundamental será explicar en la pizarra, mediante el dibujo adjunto, el hecho de que una recta puede describirse con un único vector director. Para ello se les explicará que, si tomamos dos parejas arbitrarias de puntos en la recta y mostramos que dan lugar a un mismo vector unitario, podemos concluir que este vector será el mismo, y por tanto, el único, para cualquier otra pareja, ya que las parejas de partida eran arbitrarias. Hay que enfatizar el hecho de que la conclusión es correcta y general debido a que no se toman parejas concretas de puntos.*

Usando la descomposición de los vectores determinados por las dos parejas de puntos en sus proyecciones en los ejes, los alumnos podrán ver que ambos triángulos son semejantes, de dónde se obtiene el resultado de proporcionalidad deseado. A continuación, como se hizo en el proceso de normalización de un vector, se detallarán los pasos en la pizarra que conducen a la igualdad final buscada en la ecuación (41). La noción de vector director y su relación con la recta será estudiada en el siguiente ejemplo.

2.5.4 Ecuaciones de la Recta.

En esta sección vamos a ver las cuatro formas distintas que hay de describir los puntos de una recta en un plano con ejes cartesianos. Al principio del tema, vimos que podíamos sumar un vector $\overrightarrow{d}$ a un punto P y obteníamos el punto Q. Este será nuestro punto de partida. Ver figura 7.

Ecuación Vectorial. A partir de lo anterior, si al punto P le sumamos un vector proporcional a $\overrightarrow{d}$, para cada valor diferente del parámetro λ (que es nuestra constante de proporcionalidad), obtendremos un punto diferente $X(\lambda)$ que estará **alineado** con el punto P.

Es decir, cuando λ toma valores en $\mathbb{R}$, $X = (x, y)$ recorre todos los puntos de la recta r que pasa por P. Recordando que un punto también puede indicarse como el vector con origen en el origen de coordenadas O, y extremo el punto en cuestión X tenemos: $\overrightarrow{OX}$. La **ecuación vectorial** de la recta r con vector director $\overrightarrow{d}$ que pasa por el punto P es:

$$r: \quad \overrightarrow{OX} = P + \lambda \overrightarrow{d} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{42}$$

De nuevo hemos abusado de notación al escribir P, en lugar de $\overrightarrow{OP}$.

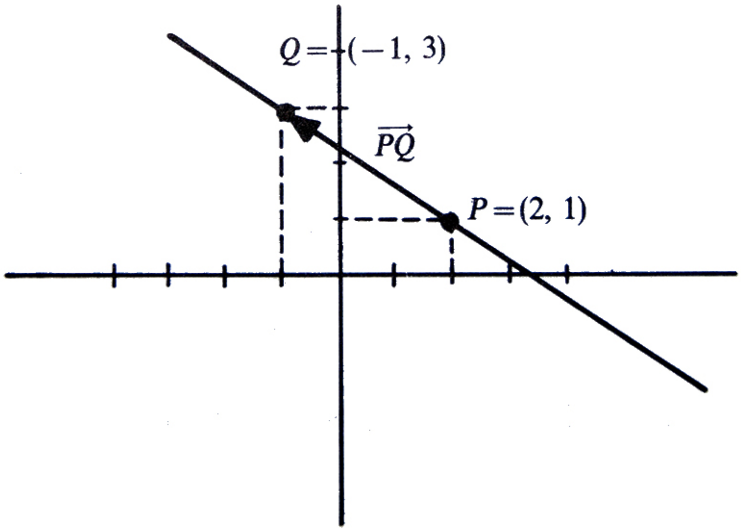

Fig. 7

Ecuaciones Paramétricas. Teniendo en cuenta las coordenadas de $P = (p_x, p_y)$, y las componentes de los vectores $\overrightarrow{OX} = (x, y)$, y $\overrightarrow{d} = (d_x, d_y)$ podemos reescribir la ecuación vectorial (42) como:

$$r: \quad (x, y) = (p_x, p_y) + \lambda(d_x, d_y) \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \tag{43}$$

Igualando componente a componente obtenemos las **ecuaciones paramétricas** de la recta r con vector director $\overrightarrow{d}$ que pasa por el punto P:

$$r: \begin{cases} x = p_x + \lambda d_x \\ y = p_y + \lambda d_y \end{cases} \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \tag{44}$$

Ecuación en forma Continua. Si ahora despejamos λ de ambas ecuaciones obtenemos la **ecuación en forma continua** de la recta r con vector director $\overrightarrow{d}$ que pasa por el punto P:

$$r: \quad \frac{x - p_x}{d_x} = \frac{y - p_y}{d_y} = \lambda \tag{45}$$

Ecuación Punto-Pendiente. Si despejamos la coordenada y en función de x en la ecuación anterior sin agrupar términos, de tal forma que las componentes del vector director $\overrightarrow{d}$ y el punto P sean claramente distinguibles, tenemos la **ecuación punto-pendiente** de la recta r con vector director $\overrightarrow{d}$ y/o pendiente m que pasa por el punto P:

$$r: \quad y = p_y + \frac{d_y}{d_x}(x - p_x) \tag{46}$$

o un forma equivalente:

$$r: \quad y = p_y + m(x - p_x) \tag{47}$$

dónde $m = d_y/d_x$ es la **pendiente**.

Ecuación General o Explícita. Si despejamos la coordenada y en función de x en la ecuación anterior y agrupamos los términos obtenemos la **ecuación general o explícita** de la recta r con vector director $\overrightarrow{d}$ y/o pendiente m que pasa por el punto P o tiene **ordenada en el origen** n:

$$r: \quad y = mx + n \tag{48}$$

con m y n dados por:

$$m = \frac{d_y}{d_x} \qquad n = p_y - p_x \frac{d_y}{d_x} \tag{49}$$

Combinación lineal de Vectores. En la ecuación general de una recta o línea (48) vemos que y como función de x solo involucra dos operaciones: producto y suma. Debido a esto, toda función que solamente involucra expresiones polinómicas de grado uno, recibe el nombre de **función lineal**, por ejemplo $z = \lambda x + \mu y$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, así que, z es una función lineal de x e y.

Si substituimos x e y por dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tenemos como resultado un nuevo vector:

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{50}$$

El vector $\overrightarrow{w}$ se llama **combinación lineal** de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Ejemplo 2.11. *(CM: 5 y 6. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) Dados el punto $P = (7,3)$ y el vector director $\overrightarrow{d} = (2,3)$ hallar todas las ecuaciones de la recta r que determinan.*

Ejemplo 2.12. *(CM: 5 y 6. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) Hallar todas las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $P = (3,5)$ con pendiente $m = 5$.*

Ejemplo 2.13. *(CM: 5 y 6. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) Dada la pendiente $m = \frac{3}{5}$ y la ordenada en el origen $n = 6$ hallar, por este orden, la ecuación de la recta en forma general, en forma punto pendiente, en forma continua, las ecuaciones paramétricas y la ecuación vectorial.*

Metodología. *El orden de presentación de los contenidos en esta sección deja poco lugar para maniobrar, siendo el elegido el que aparece en los libros por ser el más lógico, pues parte de la expresión más intuitiva de una recta que es la ecuación vectorial, y que fácilmente se ilustrará con un dibujo en* *la pizarra, haciendo énfasis en cómo el punto X cambia cuando cambia el parámetro λ.*

A partir de esta ecuación, mediante manipulaciones muy sencillas, que los alumnos deberían dominar, se obtienen las demás expresiones. Estas manipulaciones se detallarán en la pizarra para que a los alumnos les sea más fácil seguir las notas. Se explicará de dónde viene el término "ordenada en el origen" para que los alumnos comprendan la idea intuitiva. De la misma forma, se ilustrará en la pizarra la idea intuitiva de pendiente y su relación con el vector director de la recta usando $\Delta y = m\Delta x$ y $\overrightarrow{d} = (\Delta x, \Delta y)$.

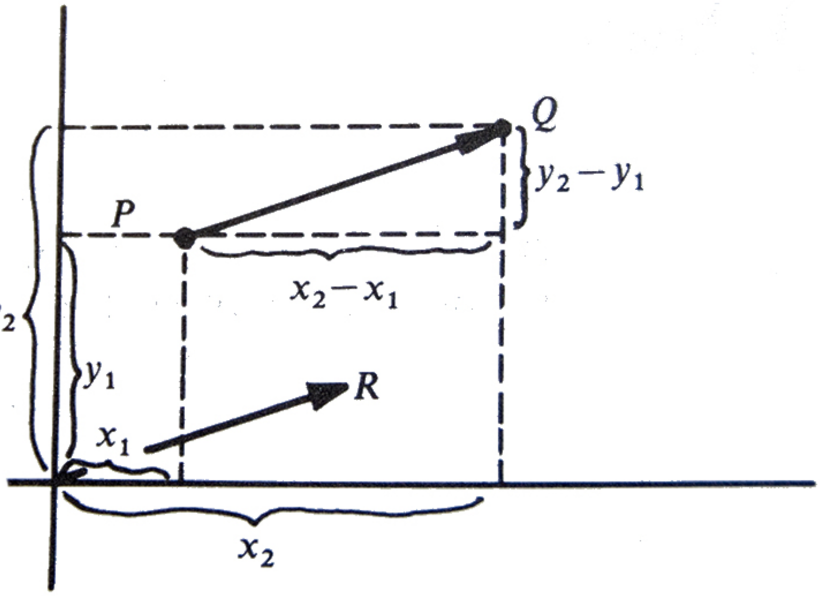

Fig. 8

Cada uno de los ejemplos tiene como objetivo desarrollar la capacidad del alumno para obtener, a partir de unos datos determinados, las distintas expresiones estudiadas de la recta, y ser capaz de pasar de unas a otras. En particular, el Ejemplo 2.10 busca que los alumnos, cuando se les presente un punto P, y un vector director $\overrightarrow{d}$, inmediatamente recurran a la ecuación vectorial, que es la más intuitiva, a partir de la cual pueden obtenerse el resto.

Sin embargo partiendo de un punto P, y un vector director $\overrightarrow{d}$, también es muy sencillo ir directamente a la ecuación paramétrica o continua sin más que substituir coordenadas y componentes en la ecuación correspondiente. Esto se les mostrará al resolver el ejemplo. La única desventaja puede ser que se corra el riesgo de que el alumno aprenda las cosas sin razonar recurriendo únicamente a la memoria. Por esta razón se hará hincapié en que partan *siempre que puedan de la ecuación más intuitiva que es la vectorial y de ella deduzcan las demás. Cuando hayan asimilado los contenidos y desarrollado suficiente destreza de cálculo serán capaces de escribir directamente a una ecuación determinada sin necesidad de pasar por la forma vectorial.*

Todos los Ejemplos se resolverán de forma individual por los alumnos en clase. Se dejarán 8, 7 y 6 minutos respectivamente para la resolución de cada ejemplo. Tras lo cual se resolverán en la pizarra. Haciendo énfasis en cual es el camino más directo para alguna ecuación de la recta en función de los datos dados. En resumen, se les dejará claro que:

1. *Punto P y vector director $\overrightarrow{d} \longrightarrow$ Ecuación Vectorial, Paramétrica, Continua.*

2. *Punto P y pendiente $m \longrightarrow$ Ecuación Punto-Pendiente*

3. *Ordenada en el Origen n y pendiente $m \longrightarrow$ Ecuación General*

Didáctica. *Dado que otra forma muy común de presentar las rectas es mediante un punto de las mismas y la pendiente, el Ejemplo 2.11 busca que también se familiaricen con esta forma de expresar las rectas. En este caso se busca que los alumnos identifiquen rápidamente que son las ecuaciones punto-pendiente, y general, las que se obtienen más rápidamente a partir de la información dada en el problema. Después, usando las definiciones de pendiente en función de las componentes del vector director etc. tendrán que hallar las ecuaciones vectorial, paramétrica y continua.*

El último Ejemplo 2.13, busca que el alumno también sea capaz de ir de lo abstracto a lo más concreto o intuitivo. Por eso se le pide que, partiendo de la pendiente y ordenada en el origen, derive la forma general de una recta y las demás expresiones en orden inverso al mostrado en clase. Esto tiene gran utilidad a la hora de desarrollar su capacidad para aplicar conceptos abstractos a problemas reales.

En este punto, en el que ya se ha introducido la recta, se propondrá a los alumnos una tarea que podrán realizar libremente, en grupos, o individualmente en su casa, cuyo objetivo es que intenten demostrar por ellos mismos el hecho de que 'la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta". La solución se les mostrará durante la clase siguiente.

Tarea 2.2. *(Demanda Cognitiva Nivel 4) Dados dos puntos arbitrarios A y B en el plano. Razónese si el camino más corto entre ambos es el segmento de la línea recta que pasa por ellos o no.*

Solución. *Considerar una línea quebrada entre ellos. Ver que cada segmento de línea quebrada es de mayor longitud que la proyección sobre la línea recta que une los puntos. Por lo tanto, la suma de los segmentos de la línea quebrada es mayor que la suma de sus proyecciones sobre la línea recta.*

2.5.5 Incidencia y Paralelismo

Según su posición relativa en el plano, dos rectas r y s pueden ser: Coincidentes, Paralelas, Perpendiculares, o Incidentes. Lo fundamental a la hora de estudiar las relaciones entre dos rectas es el vector director $\overrightarrow{d}$.

El problema que queremos resolver es: **dadas dos rectas r y s encualquiera de las formas anteriores, determinar cual de las cuatro relaciones hay entre ellas.**

Rectas Paralelas. Dos rectas son paralelas si tienen la misma dirección. Es decir, r y s son paralelas, $r \parallel s$, si sus vectores directores son proporcionales:

$$r \parallel s \quad \leftrightarrow \quad \overrightarrow{d_r} = \kappa \overrightarrow{d_s} \tag{51}$$

Como hemos visto en la sección anterior que la pendiente es $m = d_y/d_x$, la condición de arriba es equivalente a:

$$r \parallel s \quad \leftrightarrow \quad m_r = m_s \tag{52}$$

Dos casos particulares de rectas paralelas que son útiles en la práctica son las rectas paralelas a los ejes coordenados.

Rectas Paralelas al eje x: Todos sus puntos tienen la misma coordenada y, que coincide con el punto de corte de la recta con dicho eje. Su ecuación es $y = k$ para alguna constante $k \in \mathbb{R}$. Por lo que la ecuación del eje coordenado x es: $y = 0$.

Rectas Paralelas al eje y: Todos sus puntos tienen la misma coordenada x, que coincide con el punto de corte de la recta con dicho eje. Su ecuación es $x = k$ para alguna constante $k \in \mathbb{R}$. Por lo que la ecuación del eje coordenado y es: $x = 0$.

Rectas Coincidentes. Como el propio término indica, dos rectas r y s son coincidentes, $r \equiv s$,si coinciden, es decir, si son la misma recta $r \equiv s$. Las rectas coincidentes siempre son paralelas pero además tienen todos sus puntos en común. Por lo tanto, a las condiciónes de paralelismo anteriores tendremos que añadir una condición extra. Por suerte no hay que comprobar que TODOS los puntos coinciden. Basta comprobar que hay UNO en común ya que, como se ha visto en la sección anterior, un punto y una dirección determinan una única recta.

Para que $r \equiv s$ sus vectores directores $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$ tienen que ser proporcionales, o bien sus pendientes $m_r = m_s$, y tiene que haber un punto P que esté en las dos rectas r y s.

$$r \equiv s \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{d_r} = \kappa \overrightarrow{d_s} \\ \exists P \in r \cap s \end{array} \tag{53}$$

Como hemos visto en la sección anterior que la pendiente es $m = d_y/d_x$, la condición de arriba es equivalente a:

$$r \equiv s \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{c} m_r = m_s \\ \exists P \in r \cap s \end{array} \tag{54}$$

IMPORTANTE: Si $\overrightarrow{d_r} \neq \lambda \overrightarrow{d_s}$ o $m_r \neq m_s$ las rectas **no pueden ser coincidentes**, $r \neq s$. Por lo tanto, siempre comprobaremos en primer lugar alguna de estas condiciones. Sólo depués comprobaremos la referente al punto P.

Didáctica. *En este apartado se introducen todas las relaciones posibles entre las rectas. Se han usado símbolos habituales en el lenguaje matemático para expresar relaciones como $\in$. Esto persigue acostumbrar al alumno a los rudimentos del lenguaje matemático pero no se puede olvidar que ha de ser capaz de ver cómo esto se materializa y se pone en practica. Con este fin se incluye la siguiente explicación más detallada de como verificar el paralelismo entre dos rectas, para cada una de las expresiones vistas hasta el momento. Se espera que con ello, el alumno sea capaz de entender y aplicar las indicaciones a la resolución de problemas en cualquiera de las variantes que se les pueda presentar.*

Como se ha hecho anteriormente, se comenzará por la ecuación vectorial de la recta. Ésta es la más accesible intuitivamente puesto que únicamente hace uso de las nociones de punto y flecha, a partir de las que se desarrolla la ecuación final. A partir de esta ecuación, se obtienen las demás mediante manipulaciones algebraicas sencillas. Se espera que los alumnos, también desarrollen cierta soltura con dichas manipulaciones para que sean capaces de pasar de una expresión a otra sin dificultad, y sin que les sea necesario comenzar siempre por la ecuación vectorial.

Vamos a ver como se traduce esto a nivel práctico para cada una de las expresiones de la recta que hemos estudiado:

- Ecuacion Vectorial: Tras comprobar que $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$ son proporcionales. Escribimos la ecuación de r (42) como en (43):

  $$r := \quad (x, y) = (p_x, p_y) + \lambda(d_x, d_y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{55}$$

  Para comprobar que existe algun punto que pertenece a ambas rectas, podemos tomar el punto $Q = (q_x, q_y) \in s$ y comprobar si $Q \in r$. Para hacer esto, basta tomar $x = q_x$ e $y = q_y$ en la ecuación (52). Considerando las componentes por separado obtenemos dos ecuaciones de las que podemos despejar dos valores λ_x y λ_y. Si $\lambda_x = \lambda_y$ entonces $Q \in r$ ya que hay un único λ tal que $X = Q$. Como además $Q \in s$, concluimos que $Q \in r \cap s$

- Ecuaciones Paramétricas:Tras comprobar que $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$ son proporcionales. Se procede de forma análoga a la anterior y se llega otra vez al par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_x &= p_x + \lambda d_x \\ q_y &= p_y + \lambda d_y \end{aligned} \tag{56}$$

ecuaciones de las que podemos despejar dos valores λ_x y λ_y. Si $\lambda_x = \lambda_y$ entonces $Q \in r$ ya que hay un único λ tal que $X = Q$. Como además $Q \in s$, concluimos que $Q \in r \cap s$

- Ecuacion Continua: Tras comprobar que $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$ son proporcionales. Comprobamos que la siguiente igualdad es cierta tomando $x = q_x$ e $y = q_y$:

$$\frac{q_x - p_x}{d_x} = \frac{q_y - p_y}{d_y} \tag{57}$$

Esto es equivalente a comprobar que el punto Q satisface la ecuación de la recta r, es decir que $Q \in r$ y como además $Q \in s$, concluimos que $Q \in r \cap s$.

- Ecuacion Punto Pendiente: Tras comprobar que $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$ son proporcionales o que $m_r = m_s$, comprobamos que la igualdad correspondiente se cumpla según sea el caso:

$$q_y = p_y + \frac{d_y}{d_x}(q_x - p_x) \tag{58}$$

o un forma equivalente:

$$q_y = p_y + m(q_x - p_x) \tag{59}$$

De nuevo, esto es equivalente a comprobar que el punto Q satisface la ecuacion de la recta r, es decir que $Q \in r$ y como además $Q \in s$, concluimos que $Q \in r \cap s$.

- Ecuaciones Generales: Este es el caso más sencillo, si $m_r = m_s$ y las rectas r y s tienen todos sus puntos en común, en particular, su ordenadas en el origen también serán iguales $n_r = n_s$. Por lo que simplemente, ambas ecuaciones serán idénticas cuando $r \equiv s$.

En resumen, las rectas coincidentes siempre son paralelas, pero dos rectas paralelas no tienen porque ser coincidentes, en lenguaje matemático esto se escribe así:

$$\begin{array}{ccc} r \equiv s & \rightarrow & r \parallel s \\ r \equiv s & \not\leftarrow & r \parallel s \end{array} \tag{60}$$

Rectas Perpendiculares. Dos rectas r y s son perpendiculares $r \perp s$ cuando forman un ángulo de 90 grados. Como los vectores directores de las rectas tienen la misma dirección que las mismas, esto se traduce en que dos rectas r y s son perpendiculares cuando sus vectores directores $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$ son perpendiculares.

Si $\overrightarrow{d_r} = (a, b)$:

$$r \perp s \quad \leftrightarrow \quad \overrightarrow{d_r} = (a, b) \perp \overrightarrow{d_s} \quad \leftrightarrow \quad \overrightarrow{d_s} = (-b, a) \tag{61}$$

Rectas Incidentes. Cuando dos rectas r y s no satisfacen ninguna de las condiciones vistas anteriormente, es decir, ni son coincidentes, ni paralelas ni perpendiculares se dice que son incidentes, oblicuas o simplemente que se cortan.

Vamos a ver que dos rectas cuyos vectores directores no son proporcionales ni perpendiculares se cortan en un único punto. Vamos a ver dos métodos equivalentes pero que cada uno parte de distintos datos.

Método 1: Nos dan los vectores directores y puntos de la recta r, y s: $\overrightarrow{d_r} = (a, b)$ y A. Y para la recta s tenemos: $\overrightarrow{d_s} = (c, d)$ y B. Con la formula (49) planteamos el sistema de las dos ecuaciones generales:

$$\left\{ \begin{array}{c} r : ay - bx = an_r \\ s : cy - dx = cn_s \end{array} \right\} \tag{62}$$

Como los vectores $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$ no son paralelos, sus componentes no son proporcionales, luego las ecuaciones del sistema tampoco lo son (**compatible determinado**) y tienen solución (c_x, c_y) única. Esta solución es el punto de corte entre las rectas r y s.

Método 2: Si nos dan las ecuaciones de r y s en forma general directamente, tenemos un sistema parecido al anterior:

$$\left\{ \begin{array}{c} r : y - m_r x = n_r \\ s : y - m_s x = n_s \end{array} \right\} \tag{63}$$

Como hemos visto en (52), si las rectas no son paralelas, entonces $m_r \neq m_s$ y de nuevo las ecuaciones no son proporcionales por lo que habrá una única solución (c_x, c_y), el punto de corte entre las rectas r y s.

Ejemplo 2.14. *(CM: 7 y 8. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) Determinar de forma razonada la relación entre los siguientes pares de rectas:*

1. $r : y = 7 - 3x$; $s :\quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-4}{6}$.
2. $r : y = 6 - \frac{1}{5}x$; $s :\quad \overrightarrow{OX} = (3, 2) + \lambda(-2, 10)$.
3. $r :\quad \frac{x-5}{6} = \frac{y-8}{9}$; $s : y = 8 + \frac{3}{2}x$.
4. $r :\quad \frac{x-1}{7} = \frac{y}{2}$; $s :\quad \overrightarrow{OX} = (4, 9) + \lambda(3, 10)$.

Calcular su punto de corte cuando proceda.

Ejemplo 2.15. *(CM: 7 y 8. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) Hallar la recta paralela a $r: y = 8 - \frac{1}{3}x$ que pase por el origen de coordenadas. Hallar la recta perpendicular a ambas que corte a r en su ordenada en el origen.*

Ejemplo 2.16. *(CM: 7 y 8. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) Para la recta s con vector director $\overrightarrow{u} = (\lambda, 12)$ y que pasa por el punto $P = (2, 5)$ hallar el valor del parámetro λ para que sea perpendicular a la recta $r: y = \frac{3}{4}x$. Calcular su punto de corte.*

Metodología. *Se comenzará con lo más sencillo que son las paralelas. En el caso de las coincidentes se dan los detalles de como comprobarlos en los diferentes casos que pueden presentarse*

Los Ejemplos 2.14-16 se realizarán de forma individual por los alumnos en clase. Para su resolución dispondrán de 6 minutos por ejemplo. Tras ello, se procederá a su resolución en la pizarra para que puedan contrastar con sus soluciones y formular las preguntas que se les ocurren.

En el caso de que tengamos dos rectas cuyas ecuaciones sean de tipo diferente, podemos transformar una de ellas y proceder como arriba o extrayendo la información necesaria para comprobar directamente las condiciones pedidas. Esto se ilustra en el Ejemplo 2.14.

Tarea 2.3. *(Demanda Cognitiva Nivel 4) Hallar la ecuación de la circunferencia de radio r con centro en el punto $C = (c_x, c_y)$.*

Solución. *Aplicando la definición de circunferencia $||\overrightarrow{CX}|| = r$.*

2.6 Actividades de Aprendizaje y Enseñanza.

Como se ha explicado en el apartado de Metodología, la unidad didáctica se desarrollará a partir de una combinación de clases magistrales dónde se explicarán los conceptos ayudándose de ejemplos y problemas ilustrativos sencillos sacados, bien de las notas, bien del libro de texto de la asignatura.

Los diez problemas presentes en la colección que se detalla abajo tienen como objetivo el afianzamiento de los conceptos, y la adquisición de las habilidades de cálculo necesarias para los alumnos. Todos y cada uno de ellos cubren alguno de los estándares de aprendizaje que serán evaluados después (ver la sección Evaluación para mas detalles).

Algunos, serán resueltos en clase por alumnos voluntarios, otros serán entregados al profesor para monitorización del progreso general, y evaluación del 10% de la nota final (ver la sección Evaluación para mas detalles). Los problemas entregados servirán también para que el profesor pueda hacerse una idea de que conceptos no han quedado lo suficientemente claros para poder repasar éstos, y hacer las aclaraciones necesarias antes de la evaluación final de la unidad.

Una vez que los alumnos cuenten con un bagaje suficiente de conocimientos sobre el tema, hayan adquirido cierta destreza en el cálculo y manejo de las ecuaciones, y hayan trabajado individualmente sobre los problemas de la colección, se procederá a realizar el último problema de la colección en el aula de informática con el programa Geogebra. Además, esta hora en el aula de informatica servirá para poder repasar e ilustrar aquellos conceptos que no estén los suficientemente claros a la luz de los problemas entregados.

2.6.1 Colección de Problemas

Problema 2.1. *(CM: 1. Demanda Cognitiva Nivel 2.) Dados los cuatro pares de puntos de la tabla, hallar el vector único que tiene como origen el punto A y como extremo el punto B.*

Par	Punto A	Punto B	Vector Resultante
I	A=(2,3)	B=(3,5)	$\vec{v}_I = (\ , \ )$
II	A=(8,9)	B=(9,11)	$\vec{v}_{II} = (\ , \ )$
III	A=(2,3)	B=(0,4)	$\vec{v}_{III} = (\ , \ )$
IV	A=(5,3)	B=(5,7)	$\vec{v}_{IV} = (\ , \ )$

Didáctica. *Con este problema se pretende que los alumnos adquieran destreza en el cálculo, se familiaricen con la notación, y sean capaces de operar con vectores y puntos sin confundirlos. Se incluye al principio porque será necesario manipular con soltura los vectores y puntos en todos los problemas subsiguientes.*

Problema 2.2. *(CM: 1. Demanda Cognitiva Nivel 2.) Dados los vectores $\vec{v}_{II}$ y $\vec{v}_{III}$ del Problema 2.1. Se pide calcular:*

1. *La suma de ambos.*
2. *La suma de $\vec{v}_{II}$ y el opuesto de $\vec{v}_{III}$.*
3. *El producto de cada uno de los vectores con un número real λ.*
4. *La expresión para $\alpha\vec{v}_{II} + \beta\vec{v}_{III}$*

Didáctica. *En este problema se tratan las operaciones básicas entre vectores y escalares. Se persigue que los alumnos adquieran soltura con las operaciones de adición y multiplicación de vectores. Este problema y el anterior sentarán las bases en cuanto a destreza de cálculo para los siguientes.*

Problema 2.3. *(CM: 2 y 3. Demanda Cognitiva Nivel 2.) Para cada uno de los pares de puntos dados en el Problema 2.1 se pide calcular:*

1. *Distancia entre los puntos A y B.*

2. *Punto Medio entre los puntos A y B.*

3. *Módulo de cada uno de los vectores* $\vec{v}_I$, $\vec{v}_{II}$, $\vec{v}_{III}$ *y* $\vec{v}_{IV}$.

4. *Distancia entre los puntos B y A.*

A la vista de los resultados, ¿podría mostrarse o razonar que la distancia entre dos puntos cualesquiera es siempre igual al módulo del único vector que determinan?

Didáctica. *De nuevo, el objetivo fundamental es que los alumnos se familiaricen y adquieran soltura con el cálculo de distancias y módulos que serán necesarios en etapas posteriores. En este problema, además se les plantean algunas propiedades evidentes de la distancia, pero que pueden quedar obscurecidas por el formalismo y la notación. Ya que otro de los objetivos es que sean capaces de relacionar conceptos, y resolver problemas que no se limiten a una mera aplicación de una fórmula determinada, se les plantea una cuestión algo mas compleja en el apartado 2.*

Problema 2.4. *(CM: 2. Demanda Cognitiva Nivel 2.) Calcular el módulo de cada uno de los vectores del Problema 2.2. Comentar con vuestras propias palabras, pero de la forma más precisa posible, la relación con los módulos* $\vec{v}_{II}$ *y* $\vec{v}_{III}$. *¿Alguno de los resultados vistos en clase guarda relación con este problema? Si, sí. ¿cuál o cuáles? Razónese la respuesta.*

Didáctica. *Problema más sencillo que persigue hacer reflexionar a los alumnos sobre las propiedades del módulo. Se ha elegido la comparación ya que es de esta forma, como ćlaramente se perciben las diferencias, en lugar de una simple enumeración mecánica de las propiedades tal como aparecen en las notas.*

Problema 2.5. *(CM: 4. Demanda Cognitiva Nivel 2.) Hallar el vector director correspondiente a la recta determinada por cada par de puntos dados en el Problema 2.1.*

Didáctica. *Problema cuyo objetivo es que el alumno sea capaz de calcular uno de los elementos principales de la recta, dados dos puntos. Fundamental para problemas de rectas posteriores.*

Problema 2.6. *(CM: 5 y 6. Demanda Cognitiva Nivel 3.) Para cada par de puntos dado en el Problema 2.1 se pide hallar:*

1. *Ecuación Vectorial de la recta que pasa por ellos.*

2. *Ecuaciones Paramétricas de la recta que pasa por ellos.*

3. *Ecuación Continua de la recta que pasa por ellos.*

4. *Ecuación General o Implícita de la recta que pasa por ellos.*

Didáctica. *Persigue desarrollar en el alumno la soltura en el calculo de cada una de las diferentes expresiones para una recta, así como inducirle a reflexionar sobre su equivalencia subyacente: todas las expresiones describen el mismo objeto matemático. La familiaridad con las fórmulas de una recta es un paso imprescindible antes de poder resolver problemas de paralelismo e incidencia. Estos problemas se verán a continuación.*

Problema 2.7. *(CM: 5 y 6. Demanda Cognitiva Nivel 3.) Dados el vector director* $\vec{u} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}}$ *y el punto O=(2,3) hallar las cuatro expresiones de la recta que determinan. Dada la recta* $y = 3 + 5x$ *hallar sus ecuaciones vectoriales, paramétricas y continuas.*

Didáctica. *A partir de la destreza adquirida en el problema anterior, en este problema se les plantea el paso de una expresión a otra. Esta conversión puede ser conveniente o necesaria a la hora de replantear problemas de paralelismo o similares, por eso se le dedica un problema específico.*

Problema 2.8. *(CM: 7. Demanda Cognitiva Nivel 3.) En el Problema 2.6 habéis hallado las diversas ecuaciones de la única recta que pasa por cada par de puntos dados en el Problema 2.1. Considerando las relaciones de incidencia y paralelismo de cada una de las cuatro rectas con las restantes y con ella misma, se pide que completéis la tabla dada mas abajo usando las abreviaturas siguientes: coincidentes* ($\equiv$)*, paralelas (* $\parallel$*), incidentes* ($\nparallel$) *y perpendiculares*($\perp$)*. Cuando proceda calculad los puntos de intersección.*

	I	II	III	IV
I				
II				
III				
IV				

Didáctica. *En este problema se pretende que los alumnos utilicen las destrezas adquiridas a lo largo de la unidad didáctica para estudiar las relaciones de incidencia y paralelismo, así como para calcular los puntos de corte. Se pretende que sean capaces de aplicar los procedimientos que se han mostrado en clase para determinar la relación de paralelismo entre rectas. Además, gracias a la presentación de los resultados en forma de tabla, se busca inducirles a pensar en las propiedades de las distintas relaciones como la reflexividad: si una recta es perpendicular a una segunda, la segunda lo es a la dada. Esto se reflejará en que la tabla de resultados debe ser simétrica, con coincidencia a lo largo de la diagonal.*

Problema 2.9. *(CM: 7. Demanda Cognitiva Nivel 4.) Dadas la rectas* $r_1 : z = b_1 + a_1 x$ *y* $r_2 : z = b_2 + a_2 x$*. Hallar la relación que tiene que haber* *entre los parámetros* $\{a_1, b_1\}$ *de* r_1 *y* $\{a_2, b_2\}$ *de* r_2 *para que:*

1. $r_1 \equiv r_2$
2. $r_1 \parallel r_2$
3. $r_1 \nparallel r_2$
4. $r_1 \perp r_2$

Como paso previo y para familiarizarse con las manipulaciones y procedimiento a seguir podeis partir de los siguientes valores $a_1 = 3$ *y* $b_1 = 5$ *y hallar los correspondientes* $\{a_2, b_2\}$ *para que las condiciones de arriba sean satisfechas.*

Didáctica. *Este es el único problema de un carácter marcadamente diferente a los anteriores puesto que pide razonar de una forma general y totalmente abstracta. Por esta razón ocupa el ultimo lugar. Se espera que los alumnos hayan desarrollado ya la suficiente intuición para que sean capaces de, por lo menos, plantear algunas ideas sobre su resolución. Las herramientas y desarrollos necesarios para su resolución se habrán mostrado en clase y están en las notas, pero se espera que los alumnos intenten resolverlos por su cuenta para ejercitarse en las manipulaciones más abstractas.*

Problema 2.10. *El ejercicio consistirá en la repetición de varios de los Problemas anteriores o variantes similares con número que sean menos manejables para lo cual el uso del programa Geogebra es muy adecuado.*

En la tabla siguiente se da una indicación del tiempo que se espera que los alumnos inviertan en la resolución de cada problema de la colección. El

Problema	Tiempo Estimado	Resolución	Dificultad
2.1	1/3 h.	Individual	Baja
2.2	1/3 h.	Individual	Baja
2.3	1/3 - 1/2 h.	Individual	Baja
2.4	1/3 h.	Individual	Baja
2.5	1/3 h.	Individual	Baja
2.6	1/2 - 3/4 h.	Individual con Entrega	Media
2.7	1/2 - 3/4 h.	Individual con Entrega	Media
2.8	1/2 h.	Individual con Entrega	Media
2.9	1 h.	Individual con Entrega	Alta
2.10	1/2 h.	Grupo con Geogebra	Media

tiempo total fuera del aula invertido por el alumno en la resolución de los problemas es de 4 horas y 50 minutos repartidas a lo largo de dos semanas y media.

2.7 División en Tiempos y Espacios.

Para el cómputo del tiempo disponible en cada unidad didáctica, vamos a suponer un curso escolar de 36 semanas de duración, con 4 horas semanales de matemáticas, lo cual da un total de 144 horas durante el curso. Estas horas habrá que repartirlas entre las unidades didácticas de que se componga el curso, así como dejar algunas horas libres para exámenes y posibles actividades complementarias. Pongamos que 3 horas se dedicarán a cada uno de los tres exámenes de final de trimestre, y una hora se dejará libre para alguna actividad complementaria a determinar por el profesor durante el desarrollo del curso escolar. Esto deja un total de 140 horas disponibles.

Suponiendo que por cada bloque podamos elaborar tantas unidades didácticas como puntos aparecen en la sección de estándares evaluables obtenemos un total de 15 unidades didácticas en cuarto de E.S.O. Teniendo en cuenta lo anterior obtenemos una media de 9,3 horas por unidad didáctica.

Evidentemente no todas las unidades didácticas son de la misma extensión y dificultad, lo cual hace posible que el reparto de horas entre ellas no sea homogéneo, pudiendo hacer hincapié en aquellas que se consideren clave o más difíciles. Como se ha visto en la contextualización, los contenidos de la presente unidad didáctica aparecen tanto en el curso anterior como en el posterior, prácticamente en su totalidad, y además son usados en otros bloques dentro de la asignatura. Esto hace que la unidad didáctica revista cierta importancia dentro de la Programación Didáctica por lo que le asignaremos 10 horas.

En el cuadro que se presenta a continuación se recoge la distribución de tareas entre las distintas horas así como las particularidades relevantes si las hubiere:

Clase	Teoría	Ejemplos	Tareas	Problemas
1	2.5.1	2.1-2 (8') 2.3 (5')		2.1 y 2.2
2	2.5.2	2.4-5 (15')		2.3
3	2.5.2	2.6 (15')	2.1 (10')	2.4
4	2.5.3	2.7-8 (15')	Est. Casos	
5	2.5.3	2.9-10 (15')		2.5
6	2.5.4			
7	2.5.4	2.11-12 (20')		2.6
8	2.5.4	2.13 (12')	2.2 (5')	2.7
9	2.5.5	2.14 (10')		
10	2.5.5	2.15 (10')		2.8
11	2.5.5	2.16 (10')	2.3 (5')	2.9
12	Problemas			

Table 1 Geometría Analítica: Organigrama Temporal.

2.8 Planes Complementarios.

Se considerarán todas las exposiciones de relevancia e interés para los alumnos relacionadas con los contenidos de la unidad didáctica o alguna de sus aplicaciones.

2.9 Evaluación.

Para la evaluación se tendrán en cuenta los estándares de aprendizaje evaluables que aparecen en la tercera columna del BOCyL (Orden de Educación 362/2015) basados en los criterios de evaluación de la segunda columna: *Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir, y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.*

Los estándares de aprendizaje evaluables BOCyL (Orden de Educación 362/2015) de estas unidades didácticas son los siguientes:

1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.

2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.

3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.

4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.

5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.

6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

La evaluación se realizará mediante una prueba escrita que tendrá un peso del 90%. El otro 10% se obtendrá de forma voluntaria mediante la entrega de los problemas marcados en la tabla de la sección 2.6. Como se verá más abajo, ésta constará de una parte de mínimos compuesta por cuestiones y problemas cuya demanda cognitiva no superará el nivel 2. Con esta parte de mínimos será posible obtener, por lo menos, los 5 puntos necesarios para superar el examen. Los 5 puntos restantes se reparten en 3 ejercicios con diversos apartados de mayor dificultad.

Por comodidad, reproducimos aquí otra vez los contenidos mínimos de esta unidad didática:

1. Puntos, Vectores. Elementos y Operaciones entre ellos.

2. Distancia entre dos puntos y Módulo de un vector.
3. Cálculo de Punto Medio entre dos puntos.
4. Vector Normal y Director de una recta.
5. Reconocer e interpretar los distintos elementos en las diferentes expresiones de una recta.
6. Cálculo de la ecuación de una recta en función de los datos conocidos.
7. Condiciones de Paralelismo y Perpendicularidad.
8. Cálculo del punto de corte entre dos rectas.
9. Rectas paralelas a los ejes coordenados.

2.9.1 Prueba de Evaluación.

La prueba de evaluación será por escrito e involucrará tareas de todos los niveles de demanda cognitiva de acuerdo al cuadro siguiente: A contin-

Puntos Puntos	Nivel de Demanda Cognitiva	Descripción de la tarea
0-3	1-2	Definiciones y Aplicaciones Algorítmicas de ellas
3-9	3	Aplicaciones Algorítmicas y Actividades de Conexión
9-10	4	Actividades de Conexión y Elaboración Complejas

uación, se presenta una prueba tipo junto con sus soluciones y el comentario correspondiente a cada ejercicio en el que se detalla qué evalúa el mismo y la forma de corrección y puntuación.

Durante las clases, se explicará a los alumnos la forma correcta de responder que se espera de ellos mediante ejemplos de exámenes de cursos anteriores. La razón de hacer esto, es que tienen derecho a saber como se les va a evaluar para poder prepararse de forma adecuada. Esto se hace para evitar que, por ejemplo, enuncien definiciones con vaguedades o de forma imprecisa.

Además de los problemas que se han mostrado arriba, con el paso de los cursos, pueden añadirse las cuestiones de exámenes anteiores a la colección de problemas junto con ejemplos de respuestas correctas e incorrectas.

La prueba estará dividida en tres partes y tendrá una duración total de 60 minutos:

1. Parte I: 0-3 puntos. Demanda Cognitiva Nivel 1-2. 20 Minutos de duración. Cuestiones 2.1-2.6. Contenidos Mínimos 1-5 y 7.
2. Parte II: 0-6 puntos. Demanda Cognitiva Nivel 3. 30 Minutos de duración. Cuestiones 2.7-2.10. Para aprobar es necesario realizar al menos una de las cuestiones 2.10 y 2.9 completas correctamente, o ambas cuestiones 2.7 y 2.8. Esto es así para asegurarse de que el alumno ha alcanzado los conocimientos mínimos. Esto se les explicará al comienzo de esta parte y cada alumno podrá elegir que cuestiones contestar. Contenidos Mínimos 6 y 8.
3. Parte III: 0-1 puntos. Demanda Cognitiva Nivel 2. 10 Minutos de duración. Cuestión 2.11.

Las cuestione son las siguientes. Junto a cada cuestión se indica con CM# el contenido mínimo o contenidos mínimos que se están evaluando.

Cuestión 2.1. *Un punto A del plano se representa como* (a_x, a_y)*. ¿Como se llaman los números* a_x *y* a_y *y que representan?. Dibujarlo.*
Un vector u se representa como (u_x, u_y)*. ¿Como se llaman los números* u_x *y* u_y *y que representan?. Dibujarlo.*

Evaluación. *Puntuación total: 0.5. Cada pregunta vale 0.25. Nivel de Demanda Cognitiva 1. Será imprescindible que las palabras en negrita aparezcan en la respuesta y que, bien el dibujo esté bien hecho, bien lo expresen con las palabras adecuadas resaltadas en negrita para que la respuesta se considere correcta.*

Solución. (a_x, a_y) *se llaman* ***coordendas*** *del punto y son los* ***cortes con los ejes coordenados*** *de las rectas que pasan por A y son paralelas a los ejes coordenados.*
(u_x, u_y) *se llaman* ***componentes*** *del vector y son las* ***proyecciones*** *del vector sobre los ejes coordenados.*

Cuestión 2.2. *Definición de d(A,B) para dos puntos arbitrarios* $A = (a_x, a_y)$ *y* $B = (b_x, b_y)$*. Dados los puntos* $A = (5, 3)$*,* $B = (2, 1)$ *y* $C = (3, 5)$ *calcular las componentes de:*

1. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *y* $\overrightarrow{AC}$
2. *d(A,B)*

Evaluación. *Puntuación total: 0.5. Cada pregunta vale 0.25. Nivel de Demanda Cognitiva 2. Debido a su bajo nivel de demanda cognitiva, para que la cuestión se considere correcta, tanto el procedimiento como el resultado final han de ser correctos.*

Solución. $\overrightarrow{AB} = (-3,-2)$, $\overrightarrow{BC} = (1,4)$ *y* $\overrightarrow{AC} = (-2,2)$.
d(A,B)=$\sqrt{(2-5)^2+(1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{15} = \|\overrightarrow{AB}\|$

Cuestión 2.3. *Definición de Vector Normal o Unitario.*
Con los datos de la cuestión anterior, calcular:

1. $\|\overrightarrow{AB}\|$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
3. $-\overrightarrow{AC}$

Evaluación. *Puntuación total: 0.5. La definición y 1 valen 0.25. 2 y 3 valen los restantes 0.25. Nivel de Demanda Cognitiva 1-2. Debido a su bajo nivel de demanda cognitiva, para que la cuestión se considere correcta, tanto el procedimiento como el resultado final han de ser correctos.*

Solución.

1. *Por la cuestión anterior y la definición de Módulo o bien por cálculo directo:* $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{15}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-3,-2) + (1,4) = (-2,2) = \overrightarrow{AC}$
3. $-\overrightarrow{AC} = (2,-2)$

Cuestión 2.4. *Calcular el punto medio del segmento entre los puntos* $A = (5,3)$ *y* $C = (3,5)$.

Evaluación. *Puntuación total: 0.5. Nivel de Demanda Cognitiva 2. Debido a su bajo nivel de demanda cognitiva, para que la cuestión se considere correcta, tanto el procedimiento (bien razonarlo desde el principio, bien citar la fórmula correspondiente vista en el Ejemplo 2.5), como el resultado final han de ser correctos.*

Solución. *Ejemplo 4.5.* $m_x = \frac{a_x+c_x}{2}$ *y* $m_y = \frac{a_y+c_y}{2}$.

Cuestión 2.5. *Condiciones de Paralelismo entre dos rectas r y s.*
Ecuaciones de rectas paralelas al eje x y eje y.

Evaluación. *Puntuación total: 0.5. 0.25 por las condiciones de paralelismo y 0.25 por las ecuaciones. Nivel de Demanda Cognitiva 1. No se pedirá que los alumnos usen símbolos matemáticos como $\leftrightarrow$, pero sí será imprescindible que expresen ambas condiciones con ecuaciones como se muestra. Pueden además expresarlo con palabras.*

Solución. *r y s son paralelas cuando sus vectores directores son proporcionales* $\overrightarrow{d}_r = \kappa \overrightarrow{d}_s$ *o cuando sus pendientes son iguales* $m_r = m_s$.
Paralela al eje x: $y = k$ *con* $k \in \mathbb{R}$.
Paralela al eje y: $x = q$ *con* $q \in \mathbb{R}$.

Cuestión 2.6. *Condiciones de Perpendicularidad entre dos rectas r y s.*

Evaluación. *Puntuación total: 0.5. Nivel de Demanda Cognitiva 1.*

Solución. *r y s son perpendiculares cuando sus vectores directores satisfacen $\overrightarrow{d}_r = (a, b)$ y $\overrightarrow{d}_s = (-b, a)$.*

Cuestión 2.7. *Dados los puntos $A = (5, 3)$, $B = (2, 4)$, $C = (3, 5)$ y $D = (3, 3)$se pide:*

1. *Ecuación vectorial y paramétrica de la recta r que pasa por A y C.*
2. *Ecuación en forma continua y punto-pendiente de la recta s que pasa por B y C.*
3. *Ecuación en forma general de la recta t que pasa por B y D.*
4. *Razonar la relación que hay entre las rectas r y s.*
5. *Razonar la relación que hay entre las rectas r y t.*
6. *A partir de los dos resultados anteriores, razonar que relación hay entre las rectas s y t.*

Evaluación. *Puntuación total: 1.5. 1 vale 0.5. 2 y 3 valen 0.5 y los restantes 4-6 también 0.5 puntos. Nivel de Demanda Cognitiva 3. En esta cuestión se podrá dar un apartado o ejercicio como correcto cuando tenga fallos de cálculo o errores de substitución siempre y cuando no quede duda de que el razonamiento se ha realizado de forma correcta y se detalle cada paso apoyándose en los resultados teóricos pertinentes.*

Solución.

1. *Ecuación Vectorial: $\overrightarrow{OX} = (5, 3) + \lambda(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Ecuaciones parametricas $x = 5 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ e $y = 3 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$*
2. *El vector director es $\overrightarrow{d} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Substituyendo en la forma de la ecuación continua tenemos:*

   $$\frac{x-2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \tag{64}$$

   La ecuación punto pendiente: $y = 4 + (x - 2)$
3. *El vector director es $\overrightarrow{d} = \frac{\overrightarrow{BD}}{\|\overrightarrow{BD}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. La ecuación en forma general es $y = 6 - x$.*
4. *Como los vectores directores satisfacen $\overrightarrow{d}_r = (a, b)$ y $\overrightarrow{d}_s = (-b, a)$, las rectas r y s son perpendiculares.*
5. *Como los vectores directores satisfacen $\overrightarrow{d}_r = -\overrightarrow{d}_t$, las rectas r y t son paralelas.*

6. *Como s es perpendicular a r, y r es paralela a t. Entonces s es perpendicular a t. Ademas puede comprobarse que sus vectores directores satisfacen la condición requerida.*

Cuestión 2.8. *Dadas las rectas $r : y = 2x + 3$ y $s : \overrightarrow{OX} = (0, 6) + \lambda(-2, 1)$. Encontrar el punto de corte entre ellas.*

Evaluación. *Puntuación total: 0.5. Nivel de Demanda Cognitiva 3. Se valorará sobretodo que el alumno sepa plantear el sistema de ecuaciones que da lugar a la solución. Puede haber varias formas de llegar a él, y si los razonamientos son correctos, todas se considerarán correctas por igual.*

Solución. *Planteamos primero las ecuaciones paramétricas de s: $x = -2\lambda$ e $y = 6 + \lambda$ y de aquí podemos obtener la ecuación general despejando λ: $y = 6 - \frac{x}{2}$. Tenemos un sistema de dos ecuaciones. Resolviendo el sistema se obtiene el punto de corte: $(\frac{6}{5}, \frac{27}{5})$.*

Cuestión 2.9. *Dado el puntos $A = (5, 3)$ y el vector $\overrightarrow{d} = (-1, 2)$ se pide:*

1. *Calcular todas las expresiones (vectorial, paramétrica, continua, punto pendiente y general) de la recta r que pasa por A y tiene $\overrightarrow{d}$ como vector director.*

2. *Hallar una expresión de la recta paralela a r que pase por el punto $P = (-1, 2)$*

3. *Dado el vector $\overrightarrow{u} = (2, \lambda)$. ¿Cuánto tiene que valer λ para que una recta s con vector director $\overrightarrow{u}$ corte a la recta r en algún punto? ¿Cuánto tiene que valer λ para que s sea perpendicular a r? Hallar el punto de corte cuando son perpendiculares.*

Evaluación. *Puntuación total: 2. Nivel de Demanda Cognitiva 3. Como en los casos anteriores, se valorará especialmente la correción del razonamiento, admitiéndose como correcto un problema correctamente planteado, con todos los pasos detallados, y justificados pero en el que, un error de cálculo, omisión de signo, o error de substitución, den un resultado erróneo.*

Solución.

1. *Empezando por la ecuación vectorial, reproducir los cálculos que se han mostrado en clase y que están más arriba en la sección correspondiente.*

2. *Lo más fácil es tomar el vector $\overrightarrow{d}$ dado y con el punto $P = (-1, 2)$ plantear la ecuación vectorial de la recta correspondiente. Como los vectores directores de ambas son iguales, un caso particular de proporcionalidad, son paralelas y la última pasa por P.*

3. *Para que esto ocurra, las rectas no pueden ser paralelas. Es decir, sus vectores directores NO deben ser proporcionales:* $\overrightarrow{u} \neq \kappa \overrightarrow{d}$. *Si* $\overrightarrow{u} = \kappa \overrightarrow{d}$, *la constante de proporcionalidad entre las primeras componentes es* $\kappa - 2$, *por lo que el valor buscado es* $\lambda \neq -4$. *Para ser perpendiculares* $\lambda = 1$ *y el punto de corte se halla como en la Cuestión 2.8.*

Cuestión 2.10. *Dadas las rectas* $r : y = 3+2x$ *y* $s : \overrightarrow{OX} = (0,6)+\lambda(-2,1)$.

1. *Razonar cual es la posición relativa entre las rectas* r *y* s.
2. *Calcular su punto de corte.*
3. *Hallar las ecuaciónes paramétricas de la recta* r.
4. *Hallar la ecuación general de la recta* s.

Evaluación. *Puntuación total: 2. Nivel de Demanda Cognitiva 3. Igual que en la cuestión anterior.*

Solución. 1. *Basta usar la definición de la pendiente* $m = \frac{d_y}{d_x} = 2$. *Por lo tanto* $\overrightarrow{d} = (1,2)$ *que satisface la condición de perpendicularidad con el vector director de* s $(-2,1)$. *Por lo tanto,* r *y* s *son perpendiculares.*

2. *Esto ya se ha resulto en la Cuestión 2.8.*
3. *Esto se habrá mostrado en clase con un ejemplo. Basta tomar* $x = \lambda$.
4. *Seguir los pasos mostrados en clase y en estas notas: obtener la ecuación en forma continua y de ella la forma general.*

Cuestión 2.11. *Dada la circunferencia* $S : (x-c_x)^2 + (y-c_y)^2 = R^2$ *de centro* $C = (c_x, c_y)$ *y radio* R. *Calcular* ***una*** *ecuación (la que se quiera) de la recta tangente a* S *por un punto* $P \in S$ *cualquiera de la circunferencia.*

Evaluación. *Puntuación total: 1. Nivel de Demanda Cognitiva 4. El problema admite varias soluciones, tantas como formas diferentes hay de expresar una recta, todas ellas igualmente correctas. Lo importante en este problema es plantearlo correctamente: conocer la definición de tangente a una circunferencia en un punto* P *y su propiedad fundamental de ser siempre perpendicular a la recta que una el centro con el punto de tangencia. A partir de este punto, es sencillo usar vectores para calcular el vector director de la recta tangente y usar la ecuación vectorial con* P *que proporciona la solución inmediatamente.*

Solución. *Calcular el vector* $\overrightarrow{CP}$ *que es perpendicular a la recta tangente en* P. *La solución más directa es escribir la forma vectorial de la recta tangente sin olvidarse de normalizar el vector director* $\overrightarrow{d} = (-(p_y - c_y), (p_x - c_x))$ *perpendicular a* $\overrightarrow{CP}$: $\overrightarrow{OX} = P + \lambda \frac{\overrightarrow{d}}{\| \overrightarrow{d} \|}$

3 Unidad Didáctica: Semejanza de figuras planas y aplicaciones al cálculo de longitudes áreas y volúmenes

3.1 Introducción Contextual.

3.1.1 Contextualización de la Unidad Didáctica.

Esta Unidad Didáctica pertenece al Bloque 3 de Geometría del cuarto curso de E.S.O. de enseñanzas académicas.

Como puede verse en el BOCyL (Orden de Educación 362/2015) y en el BOE (Real Decreto 1105/2014, 26 de Diciembre de 2014), en el curso anterior los alumnos ya han sido expuestos al concepto intuitivo de semejanza de triangulos, así como al Teorema de Tales que serán el tema central de esta unidad didáctica.

Además, durante el presente curso, antes de la unidad didáctica de Geometría Analítica se ha visto la unidad didáctica de trigonometría por lo que podrán hacerse referencias a este material libremente durante la presente unidad didáctica, o bien usar conceptos de aquella en ésta.

La colocación de esta unidad didáctica dentro del programa no es fija. Mientras que el BOE coloca la semejanza después de la unidad didáctica de Geometría Anaítica, en el BOCyL, y en algunos libros de texto aparece antes de la unidad didáctica de Geometría Analítica. En este trabajo he decidido situarla a continuación de la unidad didáctica de Geometría Analítica por doz razones:

- Una transformación de semejanza general puede expresarse como una traslación por un vector, una dilatación o contracción (multiplicación por un escalar) y una rotación. Por esta razón, la secuencia más lógica de presentación de los contenidos es la que se indica en el BOE como el BOCyL. Este enfoque además presenta la ventaja de que podremos usar en algunos casos lo que los alumnos han aprendido sobre geometría analítica plana para ciertos problemas y aplicaciones, de esta manera se conseguirá que afiancen todavía más los conceptos, y los relacionen con problemas reales.

- El nivel de abstracción requerido para esta unidad didáctica es significativamente menor que el de la anterior. Por esta razón creo que, si es posible, es mejor no dejar lo más arduo y duro para los alumnos para el final cuando ya se encuentren más cansados y saturados.

3.1.2 Proyección hacia Bachillerato.

Consideraciones análogas a las ya hechas en la unidad didáctica anterior se aplican a ésta.

3.2 Objetivos Didácticos.

Los Objetivos de Etapa Generales del cuarto curso de ESO pueden encontrarse en el Real Decreto 1105/2014 del 26 de Diciembre y por brevedad no los repetiremos aquí.

Los Objetivos Comunes correspondientes a la asignatura de Matemáticas para las Enseñazas Académicas del cuarto curso de E.S.O., se encuentran recogidos bajo los Criterios de Evaluación en el Bloque 1 del apartado correspondiente del BOCyL (Orden de Educación 362/2015). Éstos ya fueron detallados en la unidad didáctica anterior y se omiten en esta.

Los Objetivos específicos de esta unidad didáctica, se detallan también en la segunda columna del Bloque 3, en este caso, se da un único objetivo:*Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas en situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.* Este Criterio de Evaluación es algo ambiguo y puede interpretarse como correspondiente a la unidad didáctica de Trigonometría que se da antes que esta y la anterior o también aplicable a ésta.

Por esta razón vamos a particularizar aún más los objetivos de la unidad didáctica, el objetivo es que los alumnos comprendan y asimilen los siguientes conceptos:

- Reconocer triángulos semejantes mediante los diferentes criterios así como saber aplicar el Teorema de Tales.
- Entender cómo se aplica esto al caso particular de triángulos rectángulos, Teoremas del Cateto y la Altura.
- Uso y aplicación de las fórmulas y razonamientos de semejanza para el cálculo de volúmenes, áreas y longitudes.

3.3 Contenidos.

La descripción general de los contenidos puede encontrarse en el BOCyL (Orden de Educación 362/2015). Aquí vamos a dar una descripción más pormenorizada de ellos.

Esta unidad didática consta de los siguientes contenidos:

1. Figuras semejantes. Escalas. Relación entre Áreas y Volúmenes.
2. Semejanza de Triángulos: Nociones Generales y Teorema de Tales.
3. Semejanza de Triángulos: Triángulos rectángulos y Teoremas del Cateto y de la Altura.
4. Semejanza de Rectángulos y la Proporción Áurea.

5. Colección de Problemas: Aplicaciones de la semejanza al Cálculo de longitudes, áreas, y volúmenes.

Los **contenidos mínimos** de esta unidad didática son los siguientes:

1. Reconocimiento de figuras semejantes y obtención de su razón de semejanza.
2. Teorema de Tales y sus Aplicaciones.
3. Tres criterios de semejanza de triángulos.
4. Triángulos Rectángulos Semejantes. Teorema del Cateto y de la Altura.
5. Cálculo de longitudes, áreas, y volúmenes mediante triángulos semejantes.

En los diversos problemas y ejemplos, así como en la prueba de evaluación, se hará alusión a éstos mediante el acrónimo CM# junto con el número o números que correspondan.

3.4 Recursos

En este apartado se detallan los contenidos que se impartirán en esta unidad didáctica. Se incluyen ejemplos, así como comentarios referentes a la metodología, demanda cognitiva de las actividades, y los contenidos mínimos (CM) que trabajan.

3.4.1 Figuras semejantes. Escalas. Relación entre Áreas y Volúmenes

En lenguaje coloquial, dos figuras son semejantes si su forma es igual aunque su tamaño pueda ser distinto. Para hacer el concepto de semejanza matemáticamente preciso no podemos hablar de "forma" o "tamaño", sino que tenemos que usar términos que no dejen lugar a ambigüedades y que, preferiblemente, sean susceptibles de ser medidos.

Diremos que **dos figuras poligonles son semejantes** si:

1. *Ángulos* correspondientes en las dos figuras son *iguales.*
2. *Longitudes de segmentos* correspondientes en las dos figuras son *proporcionales.*

La **razón de semejanza o escala** es el cociente entre las longitudes de los segmentos de una figura y las correspondientes longitudes de los segmentos de la otra. Así, dadas dos figuras 1 y 2, tomemos un segmento de longitud

L_1 en la figura 1 y el segmento correspondiente de longitud L_2 en la figura 2. La **razón de semejanza** κ viene dada por:

$$\kappa = \frac{L_2}{L_1} \tag{65}$$

En el plano de nuestra casa por ejemplo: podríamos tomar como L_1 la longitud de una pared determinada, y compararla con la longitud L_2 que aparece en el plano. Una propiedad fundamental de la razón de semejanza o escala es que es **adimensional** al ser un cociente de dos longitudes que se expresan en las mismas unidades.

A partir de la fórmula (65) podemos deducir la relación entre las áreas $A = L^2$ y volúmenes $V = L^3$ de figuras semejantes:

$$\kappa^2 = \frac{A_2}{A_1} \tag{66}$$

Lo mismo con los volúmenes:

$$\kappa^3 = \frac{V_2}{V_1} \tag{67}$$

Ejemplo 3.1. *(CM: 1. Demanda Cognitiva Nivel Máx. 3) En la figura tenéis un plano de nuestro instituto en el que se ha señalado nuestra clase. También se incluye el dibujo a la misma escala de la sección transversal vertical de la clase (un corte). Se da la escala o razón de semejanza k y se pide que halléis la longitud de la pared donde esta la pizarra en m, la superficie del aula en m^2 y el volumen de la misma en m^3.*

Didáctica. *En esta sección introductoria se les recordará el concepto de* ***razón de semejanza*** *haciendo especial hincapié en que es adimensional al ser un cociente de dos longitudes. Esta noción sera fundamental en todos los desarrollos posteriores y por ello se comienza por aqui. Obviamente, éstas han de estar en las mismas unidades. Por comodidad, y puesto que los cambios de unidades son mas propios de asignaturas como tecnología o física, se trabajará en la unidad de longitud del SI que es el metro.*

Metodología. *Se les explica primero la noción intuitiva de semejanza con la que todos son familiares y despueés se da una definición más precisa matemáticamente. Esto les proporcionará un ejemplo que les ayudará a "matematizar" nociones intuitivas en otro casos similares.*

Finalmente, se aplicarán las fórmulas a un caso práctico en el que tendrán que calcular varias magnitudes relativas a la clase a partir de un trozo de plano que se les proporcionará. Para la resolución de este ejemplo se les darán 8 minutos.

En la parte de problemas se les presenta un caso más interesante obtenido directamente de la pagina oficial [4] de recursos de investigación de la Alhambra. Se trata del plano de la cúpula del templete del Patio de los Leones *que consta de una semicircunferencia apoyada en un cilindro del mismo diámetro. Se les pide que calculen, a partir del plano, el volumen total de la misma.*

3.4.2 Semejanza de Triángulos: Nociones Generales y Teorema de Tales.

Teorema de Tales: Los segmentos determinados por un haz de rectas paralelas a, b y c sobre dos restas concurrentes r y s son proporcionales.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \longrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \kappa \tag{68}$$

Según se aprecia en la figura: **Recíproco del Teorema de Tales**: Si

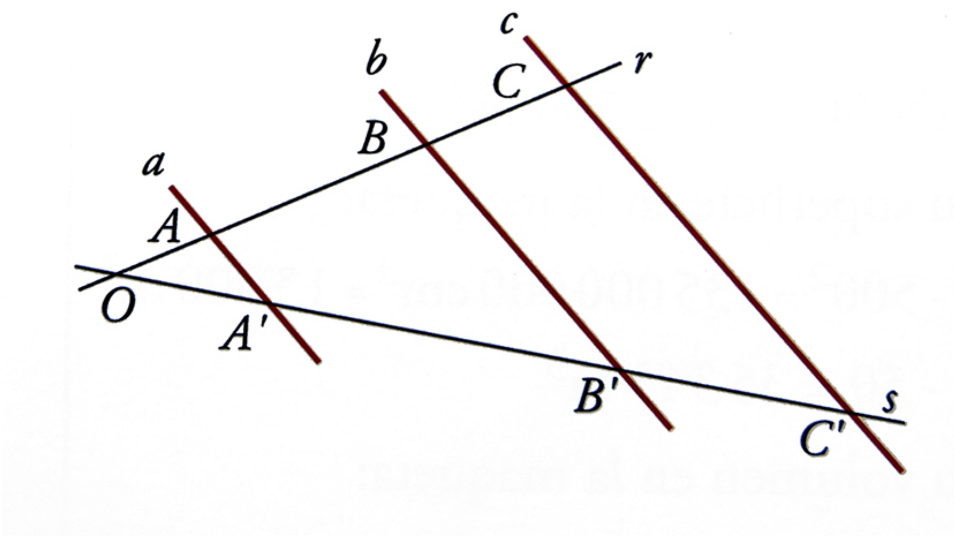

Fig. 9

se cumple la primera igualdad de la ecuación (68) y las rectas a y b son paralelas. Entonces c es paralela a ellas.

En el caso particular de que r y s sean paralelas, entonces $kappa = 1$.

Dos **triángulos son semejantes** si se cumplen las cinco condiciones siguientes:

1. Lados correspondientes proporcionales.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \tag{69}$$

2. Ángulos correspondientes iguales.

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{C} = \hat{C}', \tag{70}$$

Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ están en **posición de Tales** si:

1. El ángulo $\hat{A} = \hat{A}'$ es común a ambos.
2. Lados opuestos a $\hat{A}$ son paralelos

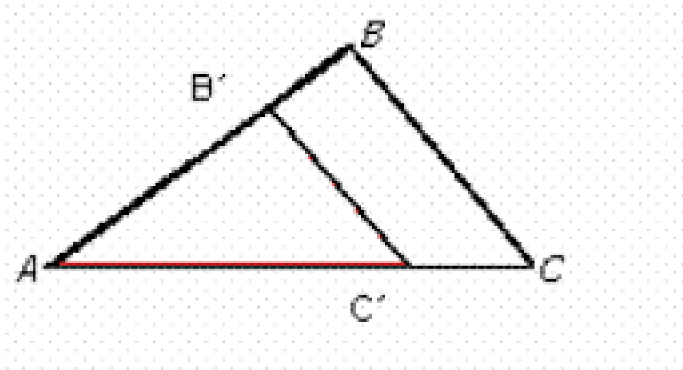

Fig. 10

Criterios de semejanza entre triángulos: En algunas situaciones puede no ser fácil comprobar las condiciones de semejanza entre dos triángulos dadas en las ecuaciones (69) y (70).

Hay condiciones más sencillas que son equivalentes a las anteriores, y que si se verifican, puede concluirse que los triángulos son semejantes. Ver figura 11:

1. **Criterio de semejanza de los ángulos:** ABC y $A'B'C'$ son semejantes si:
$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}' \tag{71}$$
2. **Criterio de semejanza de los lados:** ABC y $A'B'C'$ son semejantes si:
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \kappa \tag{72}$$
3. **Criterio de semejanza mixto:** ABC y $A'B'C'$ son semejantes si:
$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \kappa \tag{73}$$

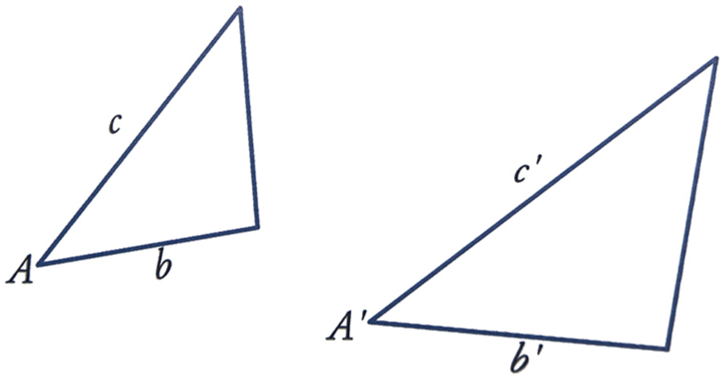

Fig. 11

Ejemplo 3.2. *(CM: 2 y 3. Demanda Cognitiva Nivel 3) Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos en posición de Tales. Responder de forma razonada si son o no semejantes.*

Ejemplo 3.3. *(CM: 2 y 3. Demanda Cognitiva Nivel 2) Identifica los Triángulos en posición de Tales y calcula la longitud del segmento DE:*

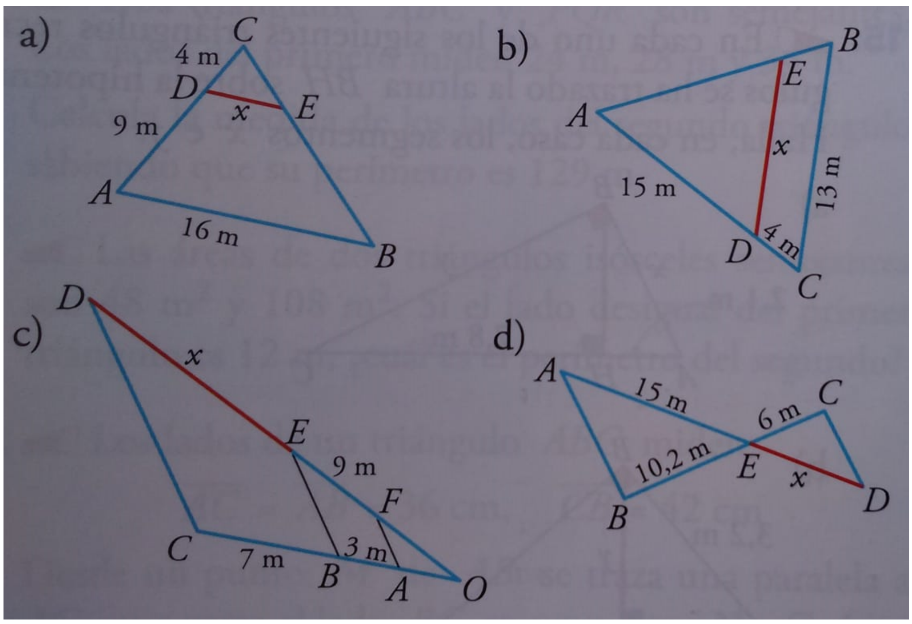

Fig. 12

Solución. *Los triángulos en Posición de Tales son el a, b y c. La longitud del segmento DE se calcula en cada caso usando las razones de proporcionalidad correspondientes. Los resultados, con sus unidades, son:*

1. 4.92 m
2. 10.96 m
3. 21 m
4. 8.82 m

En el último caso, hay que tener en cuenta que el segmento x que nos piden hallar se corresponde con el de 15 *m. que está sobre la misma línea. Tomar la correspondencia con el otro segmento da como resultado un segmento menor que* 6 *m. lo cual es erróneo como también puede comprobarse en el dibujo.*

Metodología. *Se comenzará por enunciar el Teorema de Tales que es el resultado más importante de la sección. Para ello nos serviremos de un dibujo en la pizarra como el propuesto y les explicaremos la demostración del mismo a partir del Teorema de los Segmentos proporcionales (Haces de paralelas cortan segmentos proporcionales) mediante prolongación de los lados del triángulo dado. Se hará especial hincapié en que vean las tres posibilidades que surgen y como tarea se les pedirá que completen dos de las tres posibles demostraciones, que se detallan en la didáctica, una vez hayan visto una. Para la resolución de los ejemplos se les dejarán 2 y 8 minutos respectivamente. Mediante el primer ejemplo se espera que apliquen el último criterio de semejanza visto para llegar a la conclusión de que los triángulos en posición de Tales son semejantes. Con el segundo ejemplo se pretende que apliquen la teoría vista en la sección así como que desarrollen destreza en el cálculo de proporciones.*

El Problema 3.2 y el 3.3 también son aplicaciones, una de ellas más práctica de lo estudiado en esta sección.

Didáctica. *Se les explicará lo que son triángulos semejantes y la posición de Tales y se procederá a darles los tres criterios de semejanza pues esto constituye la base de todas las aplicaciones geométricas de la semejanza para obtener distancias accesibles o inaccesibles. Con el objetivo de acostumbrar a los alumnos al razonamiento formal, se harán las demostraciones de cada uno de los tres criterios de forma constructiva y siempre ilustrando los pasos en la pizarra. Los razonamientos a seguir se dan a continuación:*

1. *Criterio de semejanza de los ángulos: Partiamos de que $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$. Como la suma de los ángulos de un triángulo suman* 180 *grados, esto implica que $\hat{C} = \hat{C}'$. Ahora tenemos que probar que los lados correspondientes son proporcionales o bien construir un triángulo*

proporcional a DEF e igual a ABC. Si $AB = DE$ los triángulos son iguales ya que tienen ángulos iguales y un lado común $AB = DE$. Si $\frac{AB}{DE} \neq 1$, tomamos un segmento $DG = AB$ sobre DE y trazamos por G una paralela a EF. Entonces $DEF \sim DGH$ son semejantes y $DGH = ABC$ ya que tienen ángulos iguales y un lado común $DG = AB$. Por lo tanto, $DEF \sim ABC$ y se cumple la proporcionalidad entre lados correspondientes.

2. *Criterio de semejanza de los lados: Partíamos de que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Tomamos un segmento $DG = AB$ sobre DE y trazamos por G una paralela a EF. Entonces $DEF \sim DGH$ son semejantes. A partir de la hipótesis de proporcionalidad tenemos $\frac{GH}{EF} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ lo que implica $GH = BC$. También tenemos que $\frac{DH}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DE}$ lo que implica $DH = AC$. Por lo tanto, $ABC = DGH$, lo que implica $ABC \sim DEF$*

3. *Criterio de semejanza mixto: Partimos de que $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.Tomamos un segmento $DG = AB$ sobre DE y trazamos por G una paralela a EF. Entonces $DEF \sim DGH$ son semejantes. Por lo tanto se cumple $\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}$ como $DG = AB$, teniendo en cuenta la hipótesis, se tiene $\frac{AB}{DE} = \frac{DH}{DF} = \frac{AC}{DF}$ de dónde $DH = AC$ y los triángulos $ABC = DGH$ serán iguales por tener lados iguales y el ángulo comprendido también igual. De aquí, y de la semejanza de los otros dos triángulos se concluye que $DEF \sim ABC$.*

Ver figura 13.

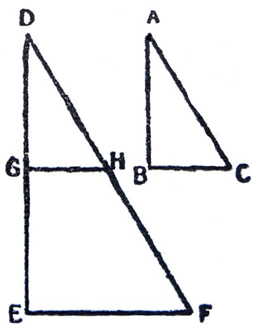

Fig. 13

Se ha decidido incluir estas demostraciones debido a que son ilustradas fácilmente mediante dibujos que ayuden al razonamiento.

3.4.3 Semejanza de Triángulos: Triángulos rectángulos y Teoremas del Cateto y de la Altura.

Cuando tenemos triángulos rectángulos, es más fácil determinar la semejanza ya que sabemos que uno de sus ángulos es recto, es decir siempre tiene

90 grados.

Criterios de semejanza entre triángulos rectángulos: Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen uno de sus ángulos agudos correspondientes iguales. Esto puede verse como un caso particular del criterio de

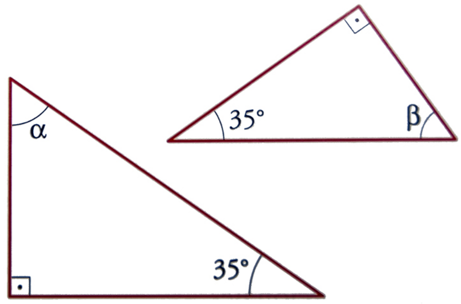

Fig. 14

semejanza de los ángulos ya visto. Tenemos dos consecuencias inmediatas de este criterio:

Consecuencia 1: Todos los triángulos obtenidos al trazar perpendiculares a alguno de los lados de un ángulo dado son semejantes.

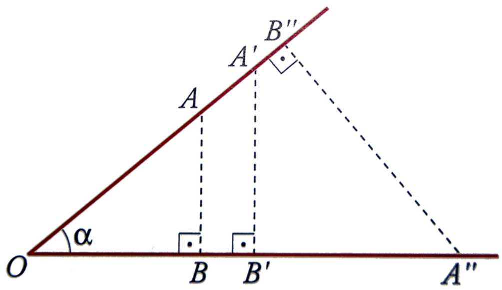

Fig. 15

Consecuencia 2: En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa determina dos triángulos semejantes al original.

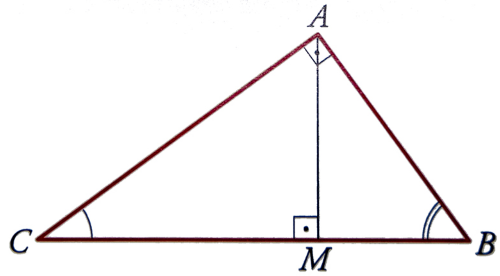

Fig. 16

Ambas consecuencias se usan para demostrar los teoremas siguientes:

Teorema del Cateto: El cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa.

$$\begin{aligned} b^2 &= am \\ c^2 &= an \end{aligned} \tag{74}$$

Como puede verse en la figura, a partir de la Consecuencia 2, los triángulos ABC y MAC son semejantes, de donde se deduce la primera igualdad. De forma análoga se deduce la segunda.

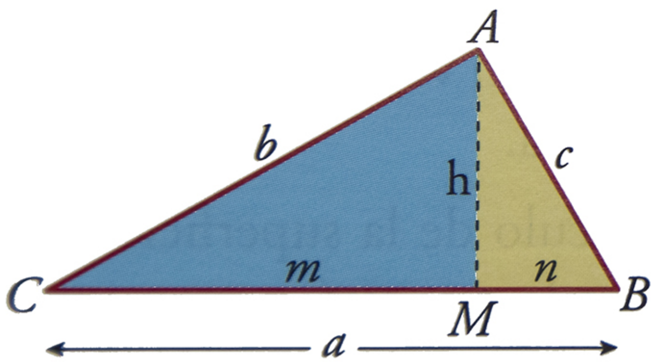

Fig. 17

Teorema de la Altura: El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de los dos segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa.

$$h^2 = mn \tag{75}$$

Como puede verse en la figura, a partir de la Consecuencia 2, los triángulos MAC y MBA son semejantes, de donde se deduce la igualdad.

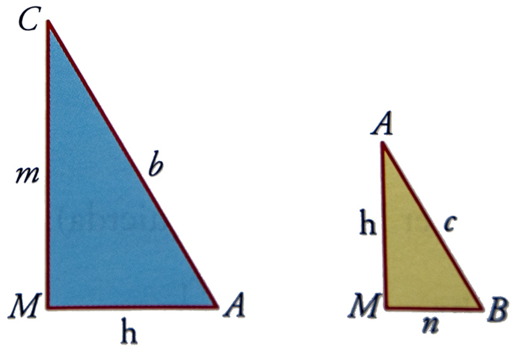

Fig. 18

Ejemplo 3.4. *(CM: 4. Demanda Cognitiva Nivel 3) Calcula los valores que faltan los triángulos, rectángulos en el vértice A. Ver figura 19:*

Solución. *En cada caso combinaremos según convenga los Teoremas vistos del Cateto y la Altura.*

1. *Por el Teorema de Pitágoras $26^2 + 15^2 = H^2$ y hallamos $H = m + n$. Con este dato, ahora podemos usar el Teorema del Cateto $26^2 = Hm$ y $15^2 = Hn$ para hallar las proyecciones $m = 22.52$ m y $n = 7.5$ m respectivamente. Finalmente, con el Teorema de la Altura $h^2 = mn$ calculamos $h = 13$ m.*

2. *Por el Teorema del Cateto, $28^2 = 53n$ despejamos n. Como $53 = m+n$ podemos hallar m. Aplicando el Teorema del cateto otra vez $c^2 = 53m$ calculamos c. Aplicando el Teorema de la Altura obtenemos h.*

3. *Por el Teorema de la Altura $6^2 = 8n$ podemos despejar $n = 4.5$ m. Usando el Teorema del Cateto $b^2 = 8(8 + n)$ y $c^2 = n(8 + n)$ podemos hallar $b = 10$ m y $c = 7.5$ m respectivamente.*

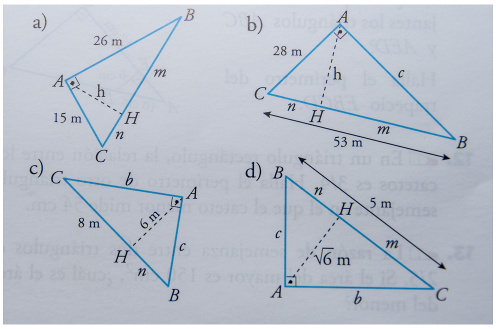

Fig. 19

Didáctica. *En esta sección, se les explicarán los resultados que se deducen de los vistos en la anterior cuando se estudia el caso particular de triángulos rectángulos. Se usará el método deductivo para que los alumnos vayan acostumbrándose a hacer este tipo de razonamientos y extraer las consecuencias de los resultados que conozcan.*

Para que desarrollen destreza aplicando estos teoremas y sus posibles combinaciones en situaciones diversas se les propondrá el Ejemplo 3.4 para resolver en clase durante 6 *minutos que luego se corregirá en la pizarra.*

Además del ejemplo, se les mandará el Problema 3.4 para que resuelvan en casa solos y sea entregado para poder monitorizar su progreso, y ver en que medida se han asimilado los resultados y el nivel de destreza en el cálculo adquirido.

3.4.4 Semejanza de Rectángulos y la Proporción Áurea.

La semejanza de rectángulos es mucho más sencialla que la de triángulos: Dos **rectángulos son semejantes** si tienen sus lados proporcionales.

Metodología. *En esta última sección de teoría se les dará el criterio de semejanza entre rectángulos y mediante dos ejemplos se les ilustrará este criterio y se les introducirá la proporción áurea.*

Ambos ejemplos serán resueltos de forma individual y posteriormente explicados y corregidos en la pizarra. El tiempo total será de 12 *minutos,* 6 *para cada uno.*

Como ilustración de la importancia de la proporción áurea se explicará el dibujo de El Hombre de Vitruvio de Leonardo. Ver figura 20.

3.5 Actividades de Aprendizaje y Enseñanza

En esta sección, como en su homóloga de la unidad didáctica anterior, se presenta un cuadro en el que se dan los tiempo estimados de realización de cada tarea por los alumnos, su dificultad, y modalidad: Individual o en

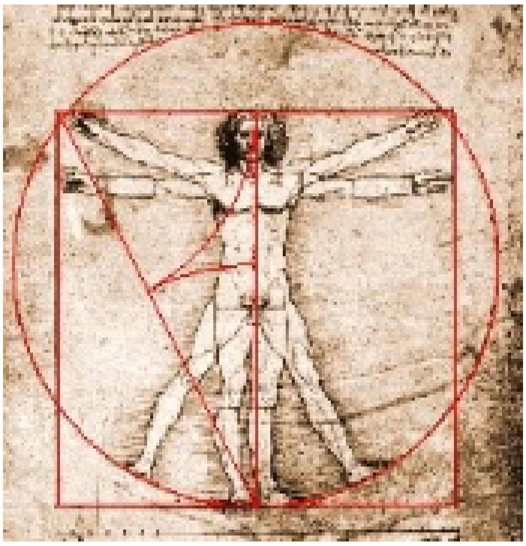

Fig. 20

clase, con o sin entrega. Además, se presenta la colección de problemas destinada a afianzar y desarrollar las destrezas matemáticas de esta unidad y la asimilación de sus contenidos.

Las entregas de problemas persiguen una doble finalidad: de monitorización y evaluadora (contarán hasta el 10% de la nota final). Como herramienta de monitorización, servirán para que el profesor sepa en qué medida los alumnos han adquirido los conceptos y si hay que reforzar o repasar alguna de las partes. El tiempo total estimado de realización de problemas en

Problema	Tiempo Estimado	Resolución	Dificultad
3.1	5'	Clase	Baja
3.2	5'	Clase	Baja
3.3	10'	Clase	Media- Baja
3.4	15'	Clase	Media
3.5	15'	Individual con Entrega	Media
3.6	30	Individual con Entrega	Alta
3.7	20'	Individual con Entrega	Media-Alta
3.8	20'	Individual con Entrega	Media-Alta

casa por cada alumno será de 2 horas.

3.5.1 Colección de Problemas y Aplicaciones de la semejanza al Cálculo de longitudes, áreas, y volúmenes.

Problema 3.1. *(CM: 1. Demanda Cognitiva Nivel 3) En la figura se muestra el plano de la cúpula del templete del Patio de los Leones de la Alhambra de Granada. En primer lugar hay que obtener el centro de la semiesfera para lo cual tomaremos tres puntos cualesquiera sobre la semiesfera del plano, y trazando las mediatrices a los dos segmentos que los unen, obtenemos dicho centro. Como se verá, esta semiesfera esta apoyada sobre un cilindro de igual diámetro. A partir del plano, en el que se os da la escala que es* $Plano/Realidad = 0.05m$ *calcular el volumen que encierra la cúpula.*

Solución. *Simple aplicación de las fórmulas del volumen de un cilindro y una esfera.*

Didáctica. *Con este problema se pretende que pongan en práctica el concepto de escala en un contexto cotidiano.*

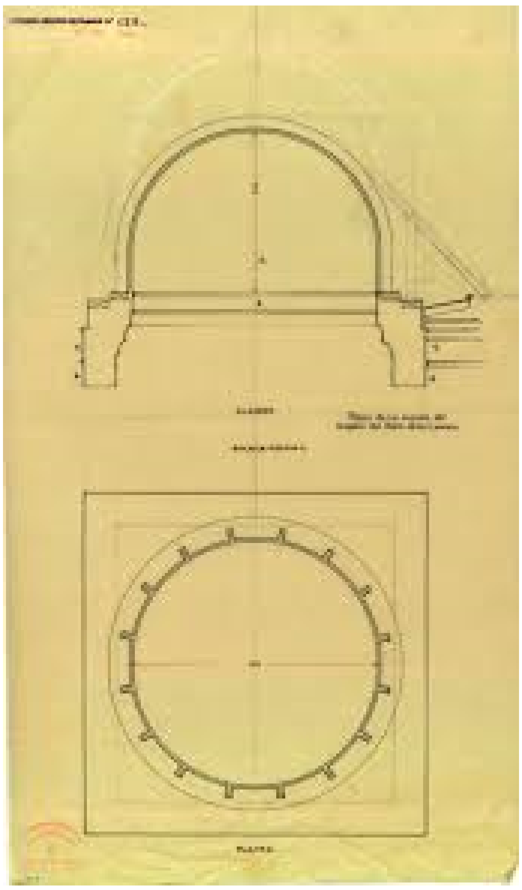

Fig. 21

Problema 3.2. *(CM: 2 y 3. Demanda Cognitiva Nivel 3) En la figura, el segmento DE es paralelo a AB. Justifica de forma razonada que los triángulos ABC y CDE son semejantes y calcula las longitudes de los segmentos DE y EC.*

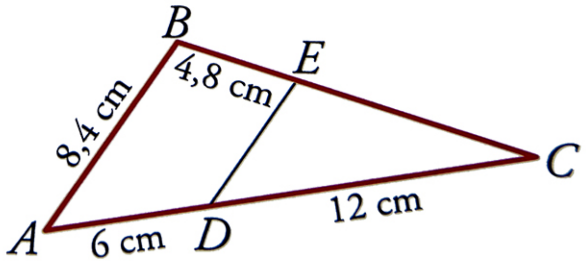

Fig. 22

Solución. *Son semejantes porque están en posición de Tales y los triángulos en posición de Tales son semejantes: tienen un ángulo común y los lados opuestos a este son paralelos.* $DE = 5.6$ *cm y* $EC = 9.6$ *cm.*

Didáctica. *Problema que busca desarrollar en el alumno la capacidad de razonamiento geométrico y su posterior aplicación para realizar un cálculo que puede tener aplicaciones prácticas en la medida de alturas a partir de otras conocidas.*

Problema 3.3. *(CM: 2 y 3. Demanda Cognitiva Nivel 3) Entre los pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia entre ellos podemos calcular la longitud del segmento AB. Para ellos tomamos un punto P desde el que se ven los pueblos A y B. Midiendo obtenemos las distancias* $AP = 15$ *km,* $PM = 7.2$ *km, y* $MN = 12$ *km. Sabiendo que los segmentos MN y AB son paralelos. Razonar si puede hallarse la distancia longitud de AB a partir de los datos proporcionados. En caso afirmativo, calcularla. Ver figura 23.*

Solución. *Por el tercer criterio de semejanza, los triángulos APB y MPN son semejantes. Usando la razón de semejanza se obtiene que* $AB = 25$ *km.*

Didáctica. *Problema de aplicación cuya finalidad es que los alumnos vean con un ejemplo cotidiano la utilidad de los contenidos.*

Problema 3.4. *(CM: 2 y 3. Demanda Cognitiva Nivel 3) El perímetro de un triángulo isósceles es de* 64 *m, y el lado desigual mide 14 m.*

Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 *m.*

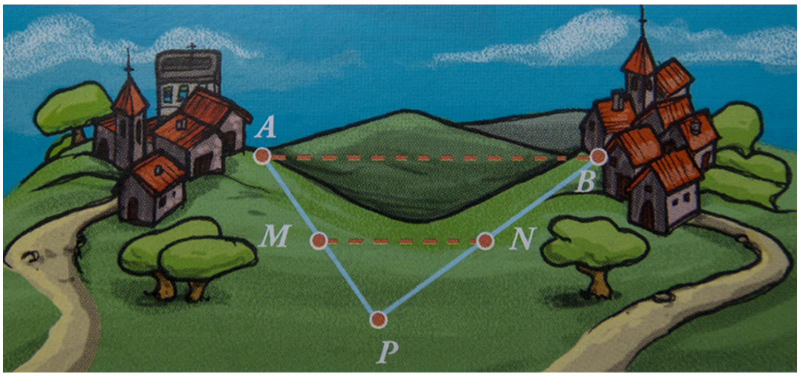

Fig. 23

Solución. *Lo primero planteamos las fórmulas del perímetro:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + 14 = 64 \\ 2a' + b' = 96 \end{array} \right\} \tag{76}$$

Podemos despejar inmediatamente $a = 25m$. *Ahora necesitamos otra condición que relaciones* a' *y* b'. *Ésta se obtiene de la semejanza entre los triángulos que se nos dice en el enunciado:* $\frac{25}{a'} = \frac{14}{b'}$. *Despejando* b' *en esta relación y substituyendo en la ecuación del perímetro obtenemos* $a' = 37.5$ *m y por tanto* $b' = 21'$.

Para terminar, necesitamos calcular la altura del triángulo grande para poder calcular el área que se nos pide. Esto se hace por aplicación directa del Teorema de Pitágoras: $h^2 + (\frac{b'}{2})^2 = (a')^2$ *despejando* h. *El área del triángulo se obtiene substituyendo los datos calculados en la conocida formula* $\frac{hb'}{2}$ *que da como resultado* $378\ m^2$

Didáctica. *Con este problemas mas teórico, se busca que sean capaces de relacionar conceptos ya conocidos como el perímetro con los nuevos de semejanza y, a partir de aquí, ser capaces de realizar los cálculos apropiados para obtener el resultado que se les pide. Para ello deberán entender la semejanza para así utilizar la formula que corresponda en función de los datos que les sean conocidos.*

Problema 3.5. *(CM: 4. Demanda Cognitiva Nivel 3) En cada uno de los siguientes triángulos rectángulos se ha trazado la altura* BH *sobre la hipotenusa. Hallar en cada caso los valores de* x *e* y *explicando razonadamente que Teoremas utilizas y los pasos que se siguen.*

Solución. *Este problema se resuelve por aplicación combinada de los Teoremas del Cateto y de la Altura.*

1. $a = 2.1 + 7.8\ m$. *Aplicando el Teorema del Cateto a* x *y a* y *se obtiene* $x = 4.56\ m$ *e* $y = 8.79\ m$.

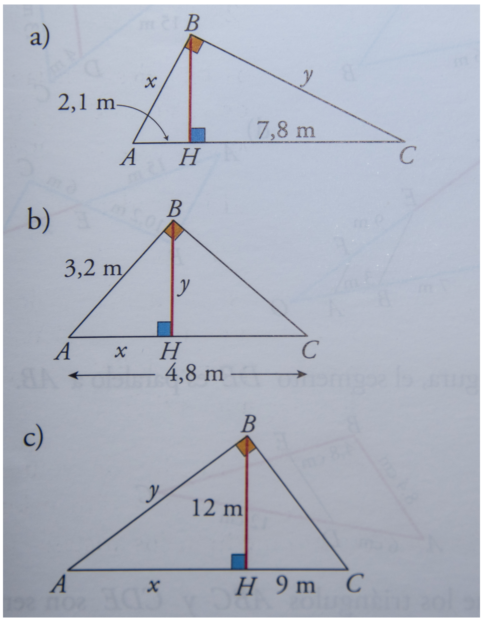

Fig. 24

2. *Con el Teorema del Cateto* $3.2^2 = 4.8x$ *despejamos* $x = 2.13$ *m. Con el Teorema de la Altura* $y^2 = x(4.8 - x)$*, obtenemos* $y = 2.39m$*.*

3. *Teorema de la Altura y hallamos* $x = 16$ *m. Por el Teorema del Cateto hallamos* $y = 20$ *m.*

Didáctica. *Problema más específico, dónde se busca que los alumnos profundicen en la compresión de los Teoremas del Cateto y la Altura a través de numerosos ejemplos, que les obligan a utilizarlos y aplicarlos desde perspectivas diferentes en función de los datos conocidos y de los que se les pidan.*

Problema 3.6. *(CM: 4. Demanda Cognitiva Nivel 4) En el triángulo rectángulo* ABC*, hemos trazado la altura sobre la hipotenusa* BH*. Hallar el área del triángulo en el que conocemos* $AB = 15$ *m y* $HC = 16$ *m.*

Solución. *En este problema se nos presentan dos métodos de resolución ya que bien podemos tomar* AC *como base y* BH *por altura, bien podemos tomar* AB *como base y* BC *por altura pues es rectángulo. En cualquier caso, el trabajo es más o menos el mismo.*

Método 1*: Tomamos* AC *como base y* BH *por altura. Conocemos* HC *y necesitamos hallar* HA*. Como esto es la proyección del cateto conocido* AB*, el resultado que relaciona estas magnitudes es el Teorema del Cateto:*

$$15^2 = (HA + 16)HA \tag{77}$$

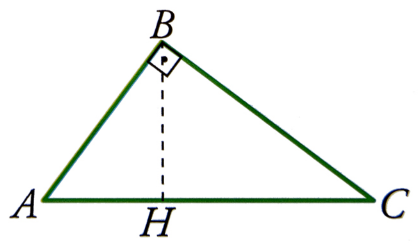

Fig. 25

Lo que da como resultado una ecuación de segundo grado en HA:

$$(HA)^2 + 16(HA) - 225 = 0 \tag{78}$$

cuyas raíces aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado son 9 *y* -25 *m. Evidentemente, descartamos la negativa ya que una longitud negativa no tiene sentido. Por lo tanto* $HA = 9$*. Con este dato ya podemos calcular la base* $AC = AH + HC = 9 + 15 = 25$ *m.*

En este punto, podríamos calcular tanto la altura BH usando el Teorema de la Altura, como el cateto BC usando el Teorema del Cateto. Puesto que estamos tomando como base AC, tenemos que calcular BH para poder hallar el área. La segunda opción se estudiara en el Método 2.

Aplicamos el Teorema de la Altura:

$$(BH)^2 = (AH)(HC) = (9)(16) = 144 \tag{79}$$

Que tiene como solución $BH = 12$ *m. Por lo tanto el área en* m^2 *del triángulo es:*

$$\frac{(AC)(BH)}{2} = \frac{(25)(12)}{2} = (25)(6) = 150 \tag{80}$$

Método 2: *En este caso tomamos AB como base y BC por altura pues es rectángulo. Como se ha dicho, la primera parte del problema es común a ambos pues necesitamos conocer la hipotenusa para poder hallar la altura sobre ella o el cateto que falta.*

En este caso, vamos a continuar a partir de la hipotenusa $AC = 25$ *m y aplicando el Teorema del Cateto:*

$$(BC)^2 = (AC)(HC) = (25)(16) = 400 \tag{81}$$

Que tiene como solución $BC = 20$ *m. Por lo tanto el área en* m^2 *del triángulo es:*

$$\frac{(AB)(BC)}{2} = \frac{(15)(20)}{2} = (15)(10) = 150 \tag{82}$$

Que confirma el resultado obtenido anteriormente.

Didáctica. *En este problema se busca que los alumnos "hagan matemáticas" puesto que no hay una unica forma de resolución. En particular, utiliza los Teoremas del Cateto y la Altura que se han usado en problemas más simples anteriormente para abordar un problemas de mayor nivel. No importa tanto que lleguen al resultado correcto sino que sean al menos capaces de esbozar una estrategia de resolución razonada y consistente.*

Problema 3.7. *(CM: 5. Demanda Cognitiva Nivel 4) En una esfera de* 15 *m de radio hemos inscrito un cono de altura* 12 *m. Calcula su área lateral.*

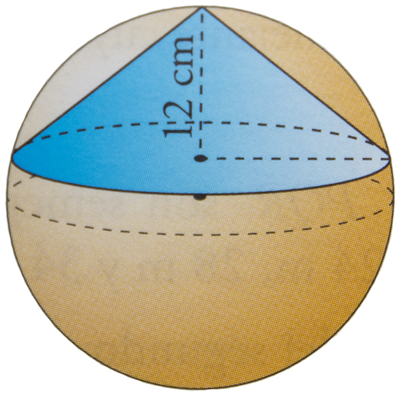

Fig. 26

Solución. *La fórmula del área lateral del cono es:*

$$A_{Lateral} = \pi r g \tag{83}$$

Por lo tanto necesitamos hallar tanto el radio de la base del cono r como la generatriz g.

Nos dicen que el cono esta inscrito en la esfera por lo que, llamando A al vértice superior del cono, podemos prolongar la altura del mismo hasta que corte a la esfera en el punto B. Para completar el triángulo, tomamos cualquier generatriz del cono que corta a la esfera en el punto C. Entonces el triángulo ABC esta inscrito en la circunferencia y su hipotenusa es el diámetro de la misma por lo que es rectángulo en $\hat{C}$.

Dibujando ABC se ve claramente que $AC = g$ y $h = r$ dónde h es la altura de ABC sobre la hipotenusa AB. Podemos aplicar los Teorema de la Altura y el Cateto respectivamente y obtenemos las siguientes ecuaciones que nos permiten hallar las incógnitas g y r:

$$\left\{ \begin{array}{l} g^2 = (AB)h_{cono} = (30)12 = 360 \\ r^2 = (AB - h_{cono})h_{cono} = (30-12)12 = 216 \end{array} \right\} \tag{84}$$

con los que la solución, el área lateral del cono viene dada por la fórmula del principio: $\pi 12\sqrt{540}\ m^2$.

Didáctica. *Con este problema se busca que los alumnos apliquen los conceptos de semejanza en problemas de cálculo de superficies que pueden presentarse en contextos de arquitectura o ingeniería. Ademas, no consiste en una mera aplicación de las fórmulas, se pretende que reflexionen sobre que criterio de semejanza tendrán que aplicar en función de los datos de que dispongan.*

Problema 3.8. *(CM: 5. Demanda Cognitiva Nivel 4) En una esfera de* 24 *m de diámetro se inscribe un cono cuya generatriz mide* 10*. Calcula el volumen del cono.*

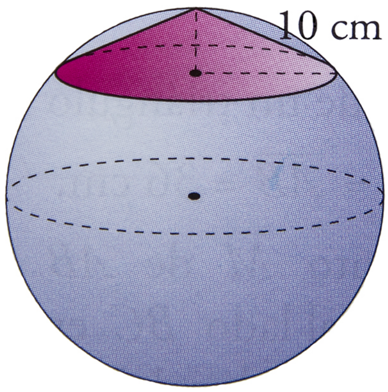

Fig. 27

Solución. *Este problema es similar al anterior en planteamiento. La fórmula del volumen del cono es:*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_{cono} \tag{85}$$

Conocemos la generatriz g pero desconocemos la altura h y el radio de la base del cono r que necesitamos.

Realizamos la misma construcción del triángulo inscrito en la esfera que por tener el diámetro como hipotenusa será rectángulo. Usando los Teoremas del Cateto y la Altura respectivamente obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^2 = 24h_{cono} \\ r^2 = (24 - h_{cono})h_{cono} \end{array} \right\} \tag{86}$$

Por lo que, substituyendo en la fórmula del volumen obtenemos el resultado final en m^3

$$V = \frac{1}{3}\pi(24 - h_{cono})h_{cono}^2 = 114.85\pi \tag{87}$$

Didáctica. *Análogo del problema anterior pero para el cálculo de volúmenes.*

3.6 División en Tiempos y Espacios

En el cuadro que se presenta a continuación, se recoge la distribución de tareas entre las distintas horas, así como las particularidades relevantes si las hubiere:

Clase	Teoría	Ejemplos	Problemas
1	5.4.1	5.1 (12')	5.1
2	5.4.2	5.2 (8')	
3	5.4.2	Demostraciones	
4	5.4.2	5.3 (12')	5.3 y 5.4
5	5.4.3		
6	5.4.3	5.4 (10')	
7	5.4.3		5.5
8	5.4.4		5.6
9	Problemas		5.7 y 5.8

Table 2 Semejanza: Organigrama Temporal.

3.7 Planes Complementarios

3.8 Evaluación

Para la evaluación se tendrán en cuenta los estándares de aprendizaje evaluables que aparecen en la tercera columna del BOCyL (Orden de Educación 362/2015) que ya se indicaron en la unidad didáctica anterior.

Los contenidos mínimos de esta unidad didáctica son los ya indicados más arriba:

1. Reconocimiento de figuras semejantes y obtención de su razón de semejanza.

2. Teorema de Tales y sus Aplicaciones.

3. Tres criterios de semejanza de triángulos.

4. Triángulos Rectángulos Semejantes. Teorema del Cateto y de la Altura.

5. Cálculo de longitudes, áreas, y volúmenes mediante triángulos semejantes.

3.8.1 Prueba de Evaluación.

Como en la unidad didática anterior, la prueba de evaluación será por escrito e involucrará tareas de todos los niveles de demandada cognitiva de acuerdo al cuadro siguiente:

Puntos Puntos	Nivel de Demanda Cognitiva	Descripción de la tarea
0-3	1-2	Definiciones y Aplicaciones Algoritmicas de ellas
3-9	3	Aplicaciones Algorítmicas y Actividades de Conexión
9-10	4	Actividades de Conexión y Elaboración Complejas

La prueba estará dividida en tres partes y tendrá una duración total de 60 minutos:

1. Parte I: 0-5.5 puntos. Demanda Cognitiva Nivel 1-2. 30 Minutos de duración. Cuestiones 3.1-3.6. Contenidos Minimos 1-5.

2. Parte II: 0-4 puntos. Demanda Cognitiva Nivel 3. 25 Minutos de duración. Cuestiones 3.7-3.9.

3. Parte III: 0-0.5 puntos. Demanda Cognitiva Nivel 4. 5 Minutos de duración. Cuestiones 3.10.

La última parte sólo se contará para nota si el alumno ha conseguido todos los puntos en los apartados anteriores. De esta forma se pretende evitar que el alumno reproduzca la demostración de memoria para conseguir los 0.5 puntos.

Si pedir la demostración no da el resultado esperado en lo que a notas y evaluación se refiere, y se observa que los alumnos reproducen la misma sin comprenderla, puede optarse por darles una demostración con errores y que sean ellos quienes los encuentren, corrijan, y expliquen el razonamiento correcto. Sin embargo, para esta alternativa habría que darles 10 minutos prolongando el examen hasta los 65 minutos.

Las cuestiones son las siguientes:

Cuestión 3.1. *Definir Razón de Proporcionalidad.*

Evaluación. *Puntuación total: 0.5 Nivel de Demanda Cognitiva 1.*

Cuestión 3.2. *Enunciar el Teorema de Tales y los tres Criterios de Semejanza de Triángulos.*

Evaluación. *Puntuación total: 1. Nivel de Demanda Cognitiva 1.*

Cuestión 3.3. *Enunciar los Teoremas del Cateto y de la Altura.*

Evaluación. *Puntuación total: 0.5. Nivel de Demanda Cognitiva 1.*

Cuestión 3.4. *Se dan dos triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *en posición de Tales. Se conoce la razón de semejanza* $\kappa = 0.5$*,* $a = 3m$ *y* $c' = 12$ *m. Calcular* a'*,* c *y el cociente* $\frac{b}{b'}$*.*

Evaluación. *Puntuación total: 1. Nivel de Demanda Cognitiva 2-3. El alumno tendrá que explicar con claridad qué fórmulas utiliza y por que razón para poder conseguir todos los puntos de la pregunta.*

Solución. *Simple aplicación directa de la fórmula (72).*

Cuestión 3.5. *Se da el triángulo rectángulo de catetos* $c = 3$ *m,* $b = 4$ *m e hipotenusa* $H = 5$ *m. Se pide calcular las proyecciones de cada cateto sobre la hipotenusa y la altura del triángulo sobre la hipotenusa.*

Evaluación. *Puntuación total: 1. Nivel de Demanda Cognitiva 2-3. El alumno tendrá que explicar con claridad qué fórmulas utiliza y por que razón para poder conseguir todos los puntos de la pregunta.*

Solución. *Aplicación directa de los Teoremas del Cateto y la Altura.*

Cuestión 3.6. *De un cono de radio* 5 *cm hemos cortado otro cono de radio* 2 *cm y altura* 3 *cm. Calcular el volumen del cono grande con sus unidades correspondientes. La fórmula para calcular el volumen del cono es* $V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

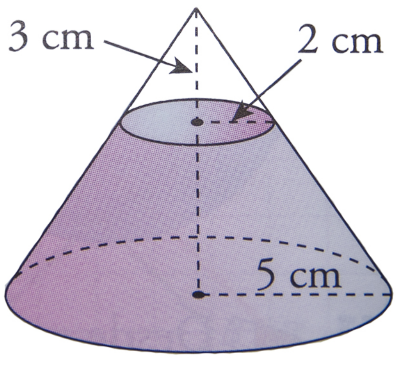

Fig. 28

Evaluación. *Puntuación total: 1.5. Nivel de Demanda Cognitiva 2-3. El alumno tendrá que explicar con claridad qué fórmulas utiliza y por que razón para poder conseguir todos los puntos de la pregunta.*

Solución. *Necesitamos hallar* h *que es la altura del cono grande. Como ambos triángulos están en posición de Tales o bien como son rectángulos y tienen un ángulo agudo común son semejantes. Aplicando la fórmula (72):* $\frac{2}{3} = \frac{5}{h}$*. Las unidades, al ser un volumen son* m^3*.*

Cuestión 3.7. *Se da el triángulo* ABC*. Por los puntos medios* D*,* E *y* F *de sus lados se trazan paralelas a los mismos que dan lugar a los cuatro triángulos:* DEF*,* BDF*,* CDE *y* AEF*.*

1. *Explicar razonadamente si cada uno de estos triángulos es semejante o no al triángulo original* ABC*.*

2. *Conociendo la longitud de los lados de* DEF*, ¿ es posible calcular las longitudes de los lados de los otros tres triangulos:* BDF*,* CDE *y* AEF*? Contestar razonadamente.*

3. *¿Y los de* ABC*? ? Contestar razonadamente.*

4. *Para* $DE = 3$ *m,* $EF = 8$ *m, y* $FD = 5$ *m, si es posible, realizar los cálculos pedidos en los dos puntos anteriores.*

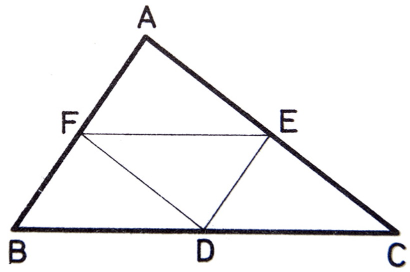

Fig. 29

Evaluación. *Puntuación total:* 1.2*. Cada apartado vale* 0.3 *puntos. Nivel de Demanda Cognitiva* 3*. Para obtener todos los puntos, será imprescindible que los alumnos razonen sus respuestas como se les pide, indicando que resultados usan y porque éstos. Si se detectan errores de substitución o despistes tales como cambios de signo etc., éstos se penalizareán muy poco si el razonamiento y los pasos están hechos con suficiente detalle de tal forma que no quede duda de que se trata de un error "humano" y no de falta de comprensión del procedimiento.*

Solución. 0.5 *puntos por apartado.*

1. *Todos son semejantes a* ABC*. Esto se deduce del criterio de semejanza de los ángulos.*

2. *Si, ya que* DEF *tiene un lado común con cada uno de ellos. Además, usando el hecho de que rectas paralelas cortan segmentos iguales sobre rectas paralelas, se concluye que los cutro tirnágulos* DEF*,* BDF*,* CDE*, y* AEF *son iguales.*

3. *Como D, E y F son los puntos medios de los lados de ABC, los lados de cada uno de los triángulos pequeños son la mitad que los correspondientes de ABC.*

4. $AB = 6$ *m*, $BC = 16$ *m*, *y* $CA = 10$ *m*.

Cuestión 3.8. *En la figura, los segmentos AB y CD son paralelos.*

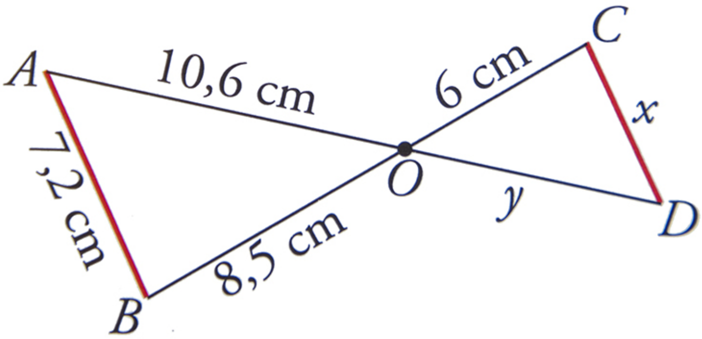

Fig. 30

1. *¿Están en posición de Tales? Explicar razonadamente.*

2. *Moviendo uno de los triángulos, sin deformarlo, ¿pueden ponerse en posición de Tales? Explicar razonadamente.*

3. *Explicar razonadamente si son o no semejantes.*

4. *Calcular x e y.*

Evaluación. *Puntuación total:* 1.2. *Cada apartado vale* 0.3 *puntos. Nivel de Demanda Cognitiva* 3. *Para obtener todos los puntos, será imprescindible que los alumnos razonen sus respuestas como se les pide, indicando que resultados usan y el por que éstos. Si se detectan errores de substitución o despistes tales como cambios de signo etc., éstos se penalizareán muy poco si el razonamiento y los pasos están hechos con suficiente detalle de tal forma que no quede duda de que se trata de un error "humano" y no de falta de comprensión del procedimiento.*

Solución. 0.5 *puntos por apartado.*

1. *No.*

2. *Como sus ángulos en el vértice O son iguales y los segmentos AB y CD son paralelos, podemos rotar COD alrededor de O* 180 *grados de manera que llevemos el segmento OC sobre OB y ambos triángulos quedán en posición de Tales.*

3. *Lo son por estar en posición de Tales, o bien, por el criterio mixto de semejanza ya que tienen un ángulo igual y los lados puestos a este paralelos.*

4. *Usando la razón de semejanza obtenida de los segmentos OC y OB.*

Cuestión 3.9. *(CM: 4. Demanda Cognitiva Nivel 3) Dibuja en cada caso un triángulo rectángulo y traza su altura sobre la hipotenusa.*

1. *Calcula la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa de* 50 *cm sabiendo que el cateto mayor mide* 40 *cm.*

2. *La altura sobre la hipotenusa mide* 6 *cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa mide* 4.5 *cm. Hallar cuanto mide la hipotenusa.*

3. *La altura sobre la hipotenusa mide* 25 *cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa mide* 9 *cm. Halla el cateto mayor.*

En cada caso, explicar el teorema o teoremas que se utilicen y enunciarlos con claridad escribiendo las igualdades que corresponda.

Evaluación. *Puntuación total:* 1.6. *Los dos primeros apartados valen* 0.5 *puntos cada uno y el último* 0.6 *puntos. Nivel de Demanda Cognitiva* 3. *Para obtener todos los puntos, será imprescindible que los alumnos razonen sus respuestas como se les pide, indicando que resultados usan y porque éstos. Si se detectan errores de substitución o despistes, tales como cambios de signo etc., éstos se penalizarán muy poco si el razonamiento y los pasos están hechos con suficiente detalle, de tal forma que no quede duda de que se trata de un error de cálculo, y no de falta de comprensión del procedimiento conceptual.*

Solución. *En este problema los dos primeros apartados vales* 0.6 *puntos y el último* 0.8.

1. *Basta con aplicar el Teorema del Cateto y resolver las ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 40^2 = 50m \\ m + n = 50 \end{array} \right\} \tag{88}$$

2. *Usando el Teorema de la Altura se llega a las siguientes ecuaciones, con H la hipotenusa:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 6^2 = m4.5 \\ H = m + 4.5 \end{array} \right\} \tag{89}$$

3. *Usando los Teoremas de la Altura y el Cateto se llega a las siguientes dos igualdades:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 25^2 = m9 \\ b^2 = m(m = 9) \end{array} \right\} \tag{90}$$

Cuestión 3.10. *(CM: 3. Demanda Cognitiva Nivel 4) Demostrar uno de los tres criterios de semejanza de triángulos vistos en clase.*

Evaluación. *Puntuación total:* 0.5. *Nivel de Demanda Cognitiva* 4. *Se valorará especialmente que el alumno no haya copiado literalmente la demostración dada en clase. No se espera que invente un nueva demostración sino que muestre, en la medida de lo posible, que ha entendido el razonamiento y es capaz de reproducirlo por sí mismo.*

Solución. *Ver la correspondiente sección de Didáctica.*

4 Evaluación de las Unidades Didácticas

Este apartado servirá el propósito de evaluación para el profesor, y monitorización de los resultados obtenidos. Puede entregarse a colegas de departamento y cumplimentarse con los resultados obtenidos por los alumnos en los distintos problemas entregables, así como en la evaluación final.

Algunas cuestiones y puntos que pueden servir de ayuda a la hora de evaluar la unidad didáctica son:

1. ¿Cómo de bien se ajustan los contenidos a los objetivos generales de la asignatura y a los específicos del bloque en el que se encuadre la unidad didáctica?

2. ¿Son suficientemente ilustrativos los ejemplos propuestos durante la exposición de la teoría?

3. ¿Cómo de bien se ajustan los problemas propuestos a los contenidos y objetivos de la unidad didáctica?

4. ¿Ayudan estos problemas a los alumnos de cara a preparar también la evaluación final de la unidad didáctica?

5. ¿Ayudan estos problemas a los alumnos de cara a preparar también la evaluación final trimestral?

6. ¿Contribuyen los problemas y explicaciones a un aprendizaje significativo, y a largo plazo, más que a prepararlos para superar una prueba?

7. ¿Son los estándares de aprendizaje evaluables consistentes con los objetivos generales de la asignatura asi como con los específicos de la unidad didáctica?

8. ¿Cómo de bien se ajustan las pruebas de evaluación a los estándares evaluables?

9. ¿Cómo de bien evalúan las pruebas propuestas los conocimientos, la comprensión de los mismos y las destrezas de cálculo de los alumnos?

10. A juzgar por el material presente en la unidad didáctica y la evaluación del mismo, con una confianza de al menos 80%. ¿Cabría afirmar que quien supera la prueba, incluso con la nota mínima de 5 , domina razonablemente los contenidos mínimos de la unidad y por tanto se han conseguido plenamente los objetivos mínimos establecidos ?

11. ¿Es adecuado el uso que se hace de las TIC en la unidad didáctica?

12. ¿Se detallan algunas medidas específicas de atención a la diversidad dentro de la unidad didáctica?

5 Reflexiones acerca del Practicum y Conclusión

Debido a incompatibilidades de calendario y a los grupos a los que daba clase mi tutor (tercero de la ESO y segundo de Bachillerato), no me fue posible usar el presente material durante el Practicum, máxime cuando la elección de TFM y su contenido fue hecha a principio de curso, y su germen fue la unidad didáctica elaborada en la asignatura de diseño curricular.

Sin embargo, como se ha explicado en la introducción, sí tuve la oportunidad de comparar y comprobar la ventaja que comporta la elaboración propia de material frente al uso del libro. Durante las prácticas, pude dar clase a un grupo de tercero de la E.S.O. de matemáticas aplicadas, y a otro de segundo de Bachillerato de ciencias sociales.

En el primero, tuve que explicar ecuaciones de primer y segundo grado, para ello, debido a la relativa facilidad de la materia, decidí guiarme por el libro. En cuanto al contenido, a dicho nivel no hay mucho espacio para maniobrar, pero si que noté una diferencia substancial en cuanto a la forma de explicar que yo utilizé y aquella que usaba el libro: el libro comenzaba dando la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado y luego estudiaba los casos particulares, mientras que a mí me pareció más didáctico (por partir de casos más accesibles y conocidos) seguir el orden inverso: comenzar por los casos particulares de la ecuación de segundo grado, que pueden ser resueltos de forma inmediata por los alumnos puesto que ya dominan las de primer grado, las potencias, y las raíces, y terminar con la fórmula general.

Ante esta situación, se me planteaba el problema de pensar en que los alumnos al repasar la lección en casa, pudiesen encontrarse perdidos al principio leyendo el libro, debido a la diferencia en el orden de presentación de los contenidos. Hay tres soluciones posibles para esto: el profesor renuncia a su criterio propio y visión, y sigue el libro con mínimas variaciones que no afecten al flujo principal, busca un libro que se adapte más a su visión sobre la asignatura, o finalmente, elabora su propio material siguiendo su propio criterio. El último es el enfoque del que se ha partido para elaborar este trabajo.

En el grupo de segundo de Bachillerato de ciencias sociales tuve que explicar la integral definida. El tema tenía más entidad que el de tercero, y en este caso, tras mirar el libro para hacerme una idea del nivel y contenidos básicos que había que incluir, decidí elaborar mis propias notas para dar las clases. En los contenidos, decidí añadir algunas propiedades muy sencillas de la integral definida que no aparecían en el libro, como por ejemplo el cambio de signo al intercambiar los extremos de integración. Además, la estructura y el orden de presentación eran diferentes: el libro tendía más a dar los resultados a modo de "receta de cálculo", mientras que yo adopté un enfoque más deductivo en el cual dichas recetas se derivaban de una forma más natural a partir de los conceptos. A un nivel muy rudimentario, apoyándose en dibujos, apelando fundamentalmente a su intuición, y a las nociones básicas que tenían de limites, también les expliqué las sumas inferiores y superiores de Riemann para darles una idea de dónde venía y qué es lo que se pretende con la integral definida: calcular un área. Cabe destacar, que el profesor tutor había realizado un programa en Geogebra en el cual, mediante un deslizador se refinaban las particiones y los alumnos veían como el valor de la integral se encontraba entre los dos limites dados por las sumas inferior y superior.

Además de las explicaciones con sus ejemplos, la mayoría de ellos sacados de aplicaciones estadísticas por serles las más familiares, resolví un problema en la pizarra que entrañaba el uso de la integral definida para llegar a hallar una incognita. El problema pedía, para una parábola desplazada en el eje vertical, calcular en intervalo tal que la integral definida en él fuese nula. No había ningún ejercicio similar en el libro. Con este ejercicio perseguía varias cosas: llamar su atención sobre como se relacionan las propiedades de simetría respecto al origen de una función con el cálculo de una integral definida, en este caso, al ser simétrica, el intervalo era simétrico, y por tanto, sólo había una incógnita, que fuesen capaces de operar y usar la integral definida para plantear la ecuación que les permitiese despejar la incógnita. Además la ecuación era tal que podría dar un resultado negativo, lo cual les forzaba a reflexionar sobre la interpretación geométrica de lo que estaban haciendo, y elegir por tanto la solución positiva.

En este ultimo caso, no se me presentó el problema anteriormente citado, dí la clase sin apenas consultar los apuntes más que para cerciorarme de seguir el orden que me había propuesto. Las notas, junto con varios problemas resueltos del libro se pusieron a disposición de los alumnos en internet. Esto puso de manifiesto las ventajas anteriormente mencionadas sobre la elaboración propia de material que se han mencionado en la introducción.

Para concluir, algunas reflexiones sobre el presente TFM. La selección de contenido, en su mayoría, estaba fijada por ley, sin embargo hay espacio para añadir ciertos matices y propiedades sencillas, como las de la distancia y módulo, que no son conceptualmente complicadas y sin embargo son muchas veces omitidas en los libros. Esta labor de completar el temario, creo que es positiva pues aporta riqueza y personalidad al currículo, pero ha de hacerse con sumo cuidado y midiendo muy bien los tiempos ya que, por mi experiencia en el practicum, puede uno considerarse afortunado si le da tiempo a dar todo el contenido mínimo bien, esto hace que el material extra tenga que reducirse a casi lo anecdótico, y no suponga un esfuerzo añadido para los alumnos.

Junto con la selección de contenidos, hay que reflexionar en la didáctica y metodología a utilizar. Me ha parecido fundamental en este aspecto, fijarse y tener muy claros los contenidos mínimos y objetivos que se pretende alcanzar. A partir de ahí, digamos de forma retrospectiva, ir hilvanando los contenidos junto con sus ejemplos y problemas destinados al aprendizaje y asimilación de los mismos. En general, creo que es buena práctica ir introduciendo ejemplos con cada nuevo concepto antes de pasar al siguiente, y es esta la filosofía que he seguido en el presente trabajo.

Otra dificultad es decidir el planteamiento de las notas: deductivo y lógico en el que los resultados aplicables sean derivados a partir de conceptos y razonamientos, o más pragmático dando prioridad a las "recetas de cálculo", y justificándolas a posteriori. En mi caso, he preferido seguir el primer camino pues me parece que es matemáticamente más instructivo por educar en el razonamiento lógico, deductivo y abstracto, para posteriormente aplicar dichos resultados a situaciones cotidianas.

El tema que comportaba más dificultad y ha conllevado más reflexión ha sido el de Geometría Analítica Plana debido a su contenido más abstracto que el de Semejanza. Sin embargo, a este nivel y dadas las destrezas previas de los alumnos, es el último el que se ha prestado a un mayor número de ilustraciones de tipo práctico y artístico como los ejemplos y tareas ponen de manifiesto.

Como se ha comentado en la introducción, una ventaja importante de la elaboración de notas propias es su dimensión dinámica. Lo que aquí se ha expuesto constituye el punto de partida, algo sobre lo que yo, en el ejercicio de la profesión iría modificando en cierto grado según el alumnado y los cambios curriculares. Por ejemplo, una vez se tiene una batería de problemas consistente y variada, puede trabajarse en llevar algunos de esos problemas al programa Geogebra. Algo más ambicioso y experimental, podría ser el uso de Geogebra en alguna de las lecciones que más se prestén a ello.

En definitiva, unas notas o cualquier material elaborado por el profesor es siempre un trabajo inconcluso y por ello, creo que aporta mucha más flexibilidad y naturalidad a la docencia, en la medida que puede adaptarse mejor que los libros de texto terminados.

Referencias

[1] J. Colera Jiménez, M. J. Oliveira González, I. Gaztelu Albero, R. Colera Cañas, *Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas*, ANAYA.

[2] J. M. Goñi (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas*, Editorial GRAÓ, Ministerio de Educación, 2011.

[3] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley and Sons, 1969.

[4] http://www.alhambra-patronato.es/ria/handle/10514/1543, consultado por última vez , 13 de Junio de 2018.