



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**Análisis de vibraciones con radar Doppler: determinación de los modos de vibración de una placa rectangular.**

*Autor: Adrián Lentijo Noval*

*Tutor/es: José María Muñoz Muñoz*

# Índice general

<b>1. Metodología de análisis de vibraciones.</b>	<b>1</b>
1.1. Métodos de contacto: Acelerómetros. . . . .	1
1.2. Métodos remotos: Láser Doppler. . . . .	5
<b>2. Determinación de los modos de vibración de una placa rectangular libre con radar doppler. Fundamento teórico.</b>	<b>8</b>
2.1. Análisis de vibraciones con radar Doppler. . . . .	8
2.1.1. Cambio de la sensibilidad con la distancia. . . . .	14
2.2. Modos de vibración. . . . .	15
2.2.1. Cálculo de los modos de vibración de una placa rectangular libre. . . . .	16
2.2.2. Determinación experimental clásica de los modos de vibración de una placa rectangular libre. . . . .	18
2.2.3. Resonancia . . . . .	20
2.2.4. Factor de calidad . . . . .	21
<b>3. Determinación de los modos de vibración de una placa rectangular libre con radar doppler. Desarrollo experimental.</b>	<b>23</b>
3.1. Montaje experimental y descripción de instrumentos. . . . .	23
3.2. Desarrollo experimental. . . . .	33
3.2.1. Comprobaciones previas. . . . .	34
3.2.2. Determinación de los modos de vibración de la placa. . . . .	34
3.2.2.1. Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio de la frecuencia. . . . .	35
3.2.2.2. Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio del tiempo. . . . .	35
3.2.2.3. Radar de 24 GHz. Excitación en el dominio de la frecuencia. Comparativa . . . . .	36

3.2.2.4. Método alternativo. . . . .	36
<b>4. Determinación de los modos de vibración de una placa rectangular libre con radar doppler. Resultados.</b>	<b>38</b>
4.1. Comprobaciones previas. . . . .	38
4.2. Determinación de los modos de vibración de la placa. . . . .	43
4.2.1. Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio de la frecuencia. . . . .	43
4.2.2. Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio del tiempo.	47
4.2.3. Radar de 24 GHz. Excitación en el dominio de la frecuencia. Comparativa . . . . .	49
4.2.4. Método alternativo. . . . .	50
<b>5. Conclusiones.</b>	<b>52</b>

# Índice de figuras

1.1. Acelerómetro mecánico . . . . .	2
1.2. Acelerómetro piezoeléctrico . . . . .	3
1.3. Acelerómetro capacitivo . . . . .	4
1.4. Vibrómetro láser . . . . .	6
2.1. Radar Doppler CW . . . . .	10
2.2. Radar doppler CW para análisis de vibraciones . . . . .	12
2.3. Dispositivo experimental para la determinación de los modos de vibración con micrófono . . . . .	19
2.4. Dispositivo experimental para la determinación de los modos de vibración con micrófono(2) . . . . .	19
2.5. Modos naturales de vibración de la placa obtenidos con micrófono . . . . .	20
2.6. Factor de Calidad, Q . . . . .	22
3.1. Montaje experimental primario . . . . .	24
3.2. Conversor A-D . . . . .	25
3.3. Software de adquisición de datos . . . . .	26
3.4. Esquema de diseño del amplificador . . . . .	27
3.5. Respuesta en frecuencia del amplificador . . . . .	29
3.6. Amplificador para radar doppler . . . . .	29
3.7. Módulo radar principal. Banda X . . . . .	30
3.8. Banco de trabajo y altavoz . . . . .	30
3.9. Altavoces de salida . . . . .	31
3.10. Montaje experimental definitivo . . . . .	31
3.11. Montaje experimental definitivo (2) . . . . .	32
3.12. Placa metálica problema . . . . .	32
3.13. Montaje experimental definitivo con placa problema . . . . .	33
3.14. Montaje experimental definitivo con placa problema (2) . . . . .	33

4.1.	Sensibilidad máxima, $f = 500$ Hz. Dominio del $t$ . . . . .	39
4.2.	Sensibilidad máxima, $f = 500$ Hz. Dominio de la $f$ . . . . .	39
4.3.	Sensibilidad máxima, $f = 1$ kHz. Dominio del $t$ . . . . .	40
4.4.	Sensibilidad máxima, $f = 1$ kHz. Dominio de la $f$ . . . . .	40
4.5.	Sensibilidad media, $f = 500$ Hz. Dominio del $t$ . . . . .	41
4.6.	Sensibilidad media, $f = 500$ Hz. Dominio de la $f$ . . . . .	41
4.7.	Sensibilidad mínima, $f = 500$ Hz. Dominio del $t$ . . . . .	42
4.8.	Sensibilidad mínima, $f = 500$ Hz. Dominio de la $f$ . . . . .	42
4.9.	Primer pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con $t$ . . .	43
4.10.	Primer pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con $f$ . . .	44
4.11.	Segundo pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con $t$ . .	44
4.12.	Segundo pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con $f$ . .	45
4.13.	Tercer pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con $t$ . . .	45
4.14.	Tercer pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con $f$ . . .	46
4.15.	Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio del tiempo. De- pendencia con $t$ . . . . .	47
4.16.	Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio del tiempo. De- pendencia con $f$ . . . . .	48
4.17.	Radar 24 GHz. Dependencia con $t$ . . . . .	49
4.18.	Radar 24 GHz. Dependencia con $f$ . . . . .	50
4.19.	Método alternativo de análisis de modos de vibración . . . . .	51

# Índice de cuadros

4.1. Valores de frecuencia de los modos de vibración. Dominio de la frecuencia . . . . .	46
4.2. Valores de frecuencia de los modos de vibración. Dominio del tiempo . . . . .	48
4.3. Valores de frecuencia de los modos de vibración. Método alternativo . . . . .	51

## Agradecimientos.

En primer lugar agradecer todos los conocimientos aprendidos, la ayuda prestada y la profesionalidad al tutor del trabajo: José María Muñoz.

En siguiente lugar agradecer a todas aquellas personas que me han acompañado durante esta etapa, ahora que termina. Empezando por mis padres, por su incansable apoyo en todos los aspectos que alguien pueda imaginar y sobre todo por darme libertad y a la vez concienciarme de la importancia que tiene el futuro laboral. También a todos a mis amigos, a los de siempre, a los que he conocido gracias al Grado y con los que he compartido momentos que no se pueden y no se deben contar, a cualquier otro grupo social en el que me haya desarrollado estos años y a toda esa gente que he ido conociendo y que de alguna forma ha tocado mi cerebro para siempre.

Y en último lugar algo que no es muy común pero sí considero necesario. Agradecerme a mí mismo, a mi yo del presente que está leyendo este documento y a mi yo del futuro que lo releerá, el esfuerzo realizado tanto dentro como fuera de la facultad, el haberme concedido la oportunidad de vivir esta experiencia y sobre todo el haberla vivido como he querido.

## **Resumen**

El trabajo que aquí se presenta describe un método de análisis de vibraciones no perturbativo basado en un radar doppler. El objetivo principal es diseñar un sistema (hardware y software) capaz de analizar vibraciones de forma precisa, remotamente y que no suponga un elevado coste económico, y su aplicación en la determinación de los modos de vibración de una placa de aluminio rectangular libre. El interés de esta aplicación radica principalmente en los campos de la industria y de la ingeniería, y en la necesidad de medir vibraciones en ambientes en los que resultaría imposible con los métodos clásicos: entornos ruidosos, ausencia de atmósfera...

En primer lugar se estudian los diferentes métodos de análisis de vibraciones, la necesidad de un método como el que aquí se presenta y su fundamento. Después se exponen los resultados obtenidos hasta la fecha para la determinación de los modos propios de vibración de la placa. En siguiente lugar se diseña e implementa el instrumento de medida y se realizan las mediciones considerando excitaciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia, analizando las diferencias entre dos radares de distintas bandas de frecuencia y presentando una alternativa instrumental de fácil adquisición. Finalmente se muestran los resultados y las conclusiones.



## **Abstract**

The work presented here describes a non-perturbative method of vibration sensing based on a Doppler radar. The aim of this paper is the design of a system (hardware and software) which can analyze vibrations accurately, remotely and cheaply, and its use in computing the vibration modes of a free rectangular aluminum plate. The interest of this lies in fields like industry and engineering, and in the desire of sensing vibrations in environments where it is impossible with classical methods: noisy environments, absence of atmosphere...

First of all, different methods of vibration analysis are studied and theoretical foundations of the experience are exposed. Second, we show the results for the determination of the vibration modes of a free rectangular plate. Then, the instrument is designed and the measurements are made, considering excitations in time and frequency domains, studying the differences between two different radars and showing an easily acquired alternative. Finally, results and conclusions are written.

# Capítulo 1

## Metodología de análisis de vibraciones.

En este primer capítulo se estudian los diferentes métodos de análisis de vibraciones desarrollados y la justificación de la aparición de un método no perturbativo basado en un radar Doppler.

En primer lugar estudiamos los métodos de contacto basados en acelerómetros y en segundo lugar los métodos remotos que emplean interferometría láser.

### 1.1. Métodos de contacto: Acelerómetros.

El primero de los métodos de análisis de vibraciones que vamos a considerar es el más común de todos ellos: los métodos de contacto empleando acelerómetros. Cronológicamente fue el primer método empleado.

Un acelerómetro es un dispositivo destinado a medir aceleraciones. Normalmente son instrumentos pequeños, de poco peso (para perturbar lo menos posible la medida) y robustos (para resistir a ambientes hostiles). En general se pueden clasificar atendiendo a diferentes parámetros:

En primer lugar, acelerómetros de desviación o de balance nulo. Los de desviación son los más empleados en el análisis de vibraciones.

En siguiente lugar, se puede clasificar en dinámicos o cinemáticos y en mecánicos o eléctricos, dependiendo del mecanismo que empleen para la determinación de la aceleración.

En cuanto a la forma de analizar vibraciones empleando estos instrumentos,

básicamente consiste en adherir el acelerómetro a la superficie que se quiere estudiar (de ahí que sean métodos de contacto), de tal forma que este genere por algún mecanismo una señal proporcional al movimiento armónico experimentado en el punto de contacto. El mecanismo físico a través del cual se genera esta señal determina el tipo concreto de acelerómetro ante el que estamos. A continuación se describen brevemente los más importantes:

- **Acelerómetros mecánicos:** Poseen lo que se conoce como una masa sísmica, que es una masa en equilibrio en un determinado punto y sujeta a fuerzas recuperadoras a través de resortes elásticos. Mientras el sistema a analizar vibra, la carcasa del acelerómetro también lo hará, pero esta masa permanecerá fija en su posición de equilibrio. El análisis del movimiento relativo entre ambos proporciona la señal de vibración del instrumento. Esta señal se recoge a través de un transductor, que puede ser por ejemplo un sistema formado por un medidor y un puente de wheatstone que detecta una variación de corriente proporcional a la vibración.

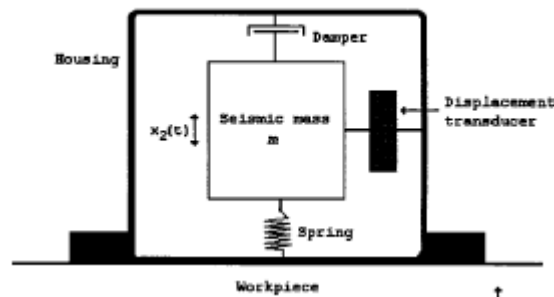


Figura 1.1: Acelerómetro mecánico

- **Acelerómetros piezoeléctricos:** Su funcionamiento se basa en el efecto piezoeléctrico. Poseen una masa sísmica en contacto con un cristal piezoeléctrico. Cuando se aplica una vibración al acelerómetro, la masa vibra con él, ejerciendo una fuerza sobre el cristal. Este experimenta una deformación en su estructura cristalina que por el efecto piezoeléctrico produce una señal eléctrica proporcional a la misma. Presentan mal comportamiento a bajas frecuencias.

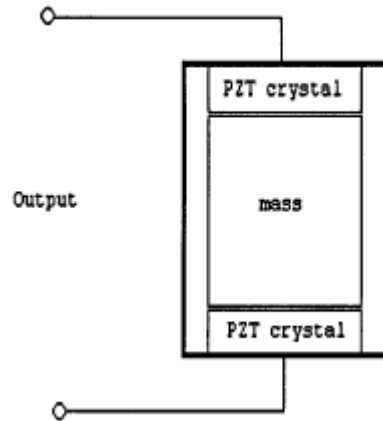


Figura 1.2: Acelerómetro piezoeléctrico

- Acelerómetros piezorresistivos: Su funcionamiento es muy similar al de los piezoeléctricos, pero en lugar de un cristal piezoeléctrico utilizan un sustrato. De tal forma que las fuerzas ejercidas por la masa en este varían su resistencia y a través de un puente de wheatstone se determina la corriente, que será proporcional a la vibración. Frente a los piezoeléctricos estos son útiles a bajas frecuencias.
- Acelerómetros capacitivos: Al someter al sistema a aceleración, la masa sísmica varía la distancia entre las placas de un condensador. Esto hace que se genere una variación de la capacidad. Esto se detecta y se emplea para determinar la vibración de la masa y por tanto del sistema analizado.

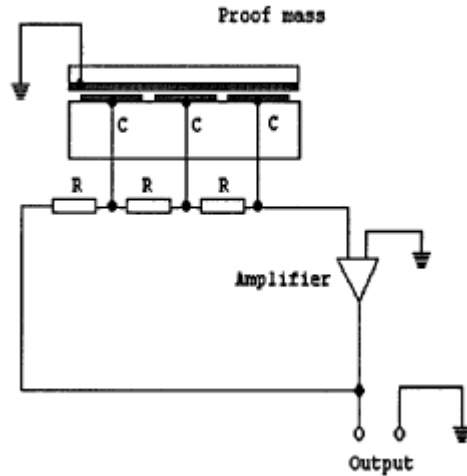


Figura 1.3: Acelerómetro capacitivo

- Acelerómetros microelectromecánicos (MEMS): Son acelerómetros de tamaño micrométrico desarrollados en la década de los 80. Sus principios de funcionamiento son análogos a los estudiados anteriormente, siendo los más utilizados los capacitivos y los piezorresistivos. Cabe mencionar que son los más empleados en la tecnología actual: teléfonos móviles, controladores de vuelo de drones...etc.

Todos estos dispositivos han sido empleados en gran cantidad de aplicaciones, principalmente en el área de la industria y concretamente en el mantenimiento preventivo de maquinaria. Con estos instrumentos somos capaces de analizar la vibración de una máquina y detectar posibles vibraciones anómalas, lo que es un indudable indicio de que algo no está funcionando correctamente. A pesar de que tienen una precisión bastante razonable y de que su precio es reducido, cuentan con importantes inconvenientes que hacen que sea necesario desarrollar otras tecnologías. El principal problema es la accesibilidad. En el caso del estudio de vibraciones de maquinaria, hay ciertas partes de la máquina que sería interesante monitorizar y que no son accesibles por su propia construcción. De esta forma se hace necesario diseñar y construir métodos remotos para el análisis de vibraciones.

Otro inconveniente de estos sistemas es que la medida se realiza con contacto directo con el instrumento a medir. Por ello es una medida perturbativa: a

pesar de que los acelerómetros tienen una masa muy pequeña el hecho de adherirlos a la superficie modificará ligeramente la vibración del sistema, lo cual será más acusado cuanto menor masa tenga este.

## 1.2. Métodos remotos: Láser Doppler.

Los problemas planteados por los métodos de contacto pueden ser solventados utilizando métodos remotos, es decir sistemas posicionados a una cierta distancia del objeto a analizar y capaces de extraer la información pertinente sin contactar con él.

Esto presenta a priori dos grandes ventajas: En primer lugar soluciona el problema de la accesibilidad comentado en el apartado anterior. Puesto que la medida es ahora remota, no hay problema en realizarla en cualquier parte inaccesible de una máquina. En segundo lugar, dado que la medida se realiza sin contacto directo con el objeto esta será no perturbativa, lo que mejora sensiblemente la medición y permite además medir en objetos de muy pequeño peso.

El primero de los métodos remotos que se analiza es el láser doppler.

El láser doppler es un transductor óptico basado en el efecto doppler y en la interferometría. Este instrumento envía luz al objeto a analizar, esta rebota y vuelve de nuevo al sistema analizador. De esta forma, a través del análisis del desfase entre la luz incidente y la reflejada, se obtiene información acerca de las vibraciones del objeto.

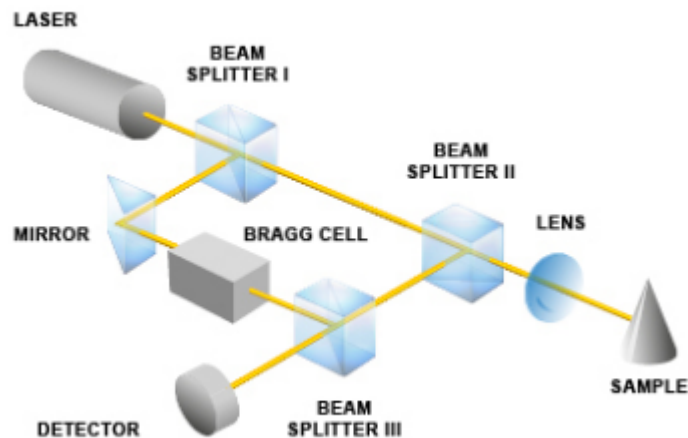


Figura 1.4: Vibrómetro láser

En la imagen se observa el detalle técnico de su funcionamiento. El fundamento matemático es muy similar al del radar doppler, que se analizará después, y por eso aquí no se entra en muchos detalles. Como se ve es un dispositivo plenamente óptico. La luz que parte del láser, se divide en una primera superficie («Beam Splitter 1»), yendo una parte directa al objetivo («Sample») y otra parte a focalizar a través de la lente («Lens») al detector («Detector»). La parte que va directa al detector constituye el rayo de referencia, y su camino óptico es constante en el tiempo. Por su parte, el otro rayo (rayo de medición) se refleja en el objetivo y va al detector; su camino óptico va variando con el movimiento del objetivo, haciendo que el patrón de interferencia que se produce en el detector cambie con el tiempo. De esta forma por el Efecto Doppler, la frecuencia de modulación del patrón de interferencia será proporcional a la velocidad de movimiento del objetivo y esta se podrá determinar (además de otras magnitudes cinemáticas, como el desplazamiento, la ecuación de movimiento...). La célula de Bragg («Bragg Cell») permite además conocer la dirección de movimiento del objetivo.

El vibrómetro láser es el método de análisis de vibraciones que mejor precisión ofrece. Tiene una sensibilidad de femtómetros y una amplitud considerable hasta frecuencias del orden del GHz. Además los hay de muy diferentes tipos, en función de lo que se quiera analizar: un punto, un plano, un

volumen, varios puntos...etc.

Estos dispositivos han sido empleados, al igual que los acelerómetros, para el mantenimiento preventivo de maquinaria, de hecho por ello fueron creados. Pero el hecho de que sean instrumentos remotos abre el abanico de aplicaciones. Entre ellas:

- Biología y ciencias de la salud: En la biología se pueden emplear para realizar estudios de la comunicación de insectos u otros grupos animales cuya comunicación esté fuera del rango audible, y en ciencias de la salud en la monitorización de la actividad respiratoria o cardíaca.
- Acústica: Estudio del espectro sonoro de instrumentos musicales de cara a corregir errores de diseño o a mejorar el timbre.
- Seguridad: Para sensores de movimiento y localización de objetivos vivos (aplicaciones bélicas).

La principal desventaja que presentan estos sistemas frente a los acelerómetros es su precio. El empleo de una tecnología tan sofisticada como la que se ha expuesto en este apartado hace que estos sistemas tengan un precio considerablemente elevado. Este inconveniente es una de las razones de peso que hace necesario encontrar nuevos métodos remotos de análisis de vibraciones.



## Capítulo 2

# Determinación de los modos de vibración de una placa rectangular libre con radar doppler. Fundamento teórico.

En este capítulo se analiza el fundamento teórico que subyace a todo el trabajo.

Como se concluye del apartado anterior, necesitamos hallar un método de análisis de vibraciones no perturbativo, debido a las ventajas que estos muestran frente a los sí perturbativos, y que además no tenga un coste tan elevado como los sistemas de láseres. La respuesta a todo esto es el análisis de vibraciones empleando un radar.

De esta forma en este capítulo se analizan los fundamentos físicos del análisis de vibraciones con radar y además se sientan los cimientos teóricos de lo que constituirá la parte de aplicación del trabajo: la determinación experimental de los modos de vibración de una placa rectangular.

### 2.1. Análisis de vibraciones con radar Doppler.

Un radar (por sus siglas en inglés RAdio Detecting And Ranging) es, de forma muy general, un instrumento que emite una señal que es reflejada por

un objetivo y recogida en un punto próximo al de emisión, de tal forma que analizando esta señal reflejada se puede conocer información acerca del objeto reflector.

A pesar de que la única aplicación que nos interesa aquí es el análisis de vibraciones, cabe mencionar que estos instrumentos tienen utilidad en resolución de diferentes problemas: determinación de velocidades de objetos, determinación de distancias de objetos, reconstrucción de imágenes, sistemas de inmovilización en automóviles...

Hay radares de tipos muy diferentes:

- En primer lugar pueden ser vectoriales o escalares: Los radares vectoriales son más complejos y proporcionan dos señales (I: en fase, Q: en cuadratura) mientras que los escalares proporcionan una única señal.
- En segundo lugar pueden ser primarios o secundarios: Un radar primario recibe un eco de la señal enviada al rebotar en el objetivo, mientras que en un radar secundario se envía la señal al objetivo y en este, un instrumento denominado transpondedor, responde con una señal codificada.
- En siguiente lugar, hay que distinguir entre radares de pulsos o radares de onda continua (CW), dependiendo de las características de la onda que emitan. Además, los de onda continua pueden ser en ocasiones de frecuencia modulada (FMCW). Esto significa que su frecuencia no sea constante en el tiempo, si no que varíe de acuerdo a una onda moduladora determinada. Dicha modulación, proporciona una referencia temporal, lo cual es necesario para por ejemplo la medida de distancias.
- En último lugar se pueden considerar radares monoestáticos o biestáticos. Radares monoestáticos son aquellos en los que transmisor y receptor están en el mismo sitio, y por contra, los biestáticos son aquellos en los que transmisor y receptor están en sitios distintos.

Los radares que se van a emplear en nuestro desarrollo son: escalares, primarios, de onda continua sin modulación y biestáticos. Se entra ahora a analizar detalladamente el fundamento del funcionamiento de este instrumento y de su aplicación en análisis de vibraciones.

Nuestro radar por tanto, emitirá una señal continua a una determinada frecuencia constante que rebotará en el objetivo y lo que se pretende es hallar

la ecuación del movimiento de dicho objetivo.

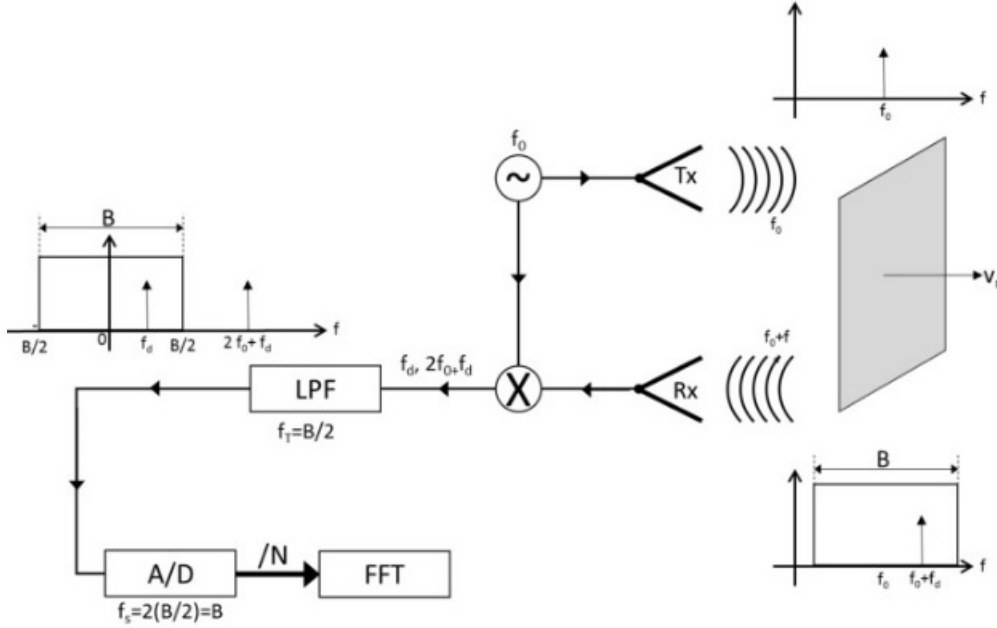


Figura 2.1: Radar Doppler CW

Consideramos un seno como señal transmitida por el radar:

$$t_x(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t) \quad (2.1)$$

La señal recibida en el radar estará desfasada respecto a la original, es decir que llegará con un cierto retraso temporal dado por dos contribuciones: la distancia que recorre hasta la posición de equilibrio del objetivo (ida y vuelta) y la distancia que recorre desde ahí hasta la posición en la que se encuentre el objetivo (también ida y vuelta)

$$\tau(t) = \frac{2d_0}{c} + \frac{2v_r}{c}t \quad (2.2)$$

En esta ecuación  $d_0$  es la distancia entre el instrumento y el objetivo en equilibrio y  $v_r$  es la velocidad de dicho objetivo.

La señal recibida será por tanto:

$$r_x(t) = A_r t_x(t - \tau) = A_r \text{sen}[2\pi f_0(t - \tau(t))] = A_r \text{sen}[2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau(t)] \quad (2.3)$$

Además se puede introducir la frecuencia doppler  $f_d$ , puesto que el movimiento del objetivo hace que se pueda considerar ese aparente cambio de frecuencia en la onda recibida:

$$f_d = -\frac{2v_r}{\lambda} \quad (2.4)$$

Entonces la señal recibida queda como:

$$r_x(t) = A_r \text{sen}\left\{2\pi(f_0 + f_d)t - \frac{4\pi d_0}{\lambda}\right\} \quad (2.5)$$

Lo que se pretende en análisis de vibraciones es hallar la ecuación del movimiento, por tanto vamos a buscar esto en la expresión (2.5).

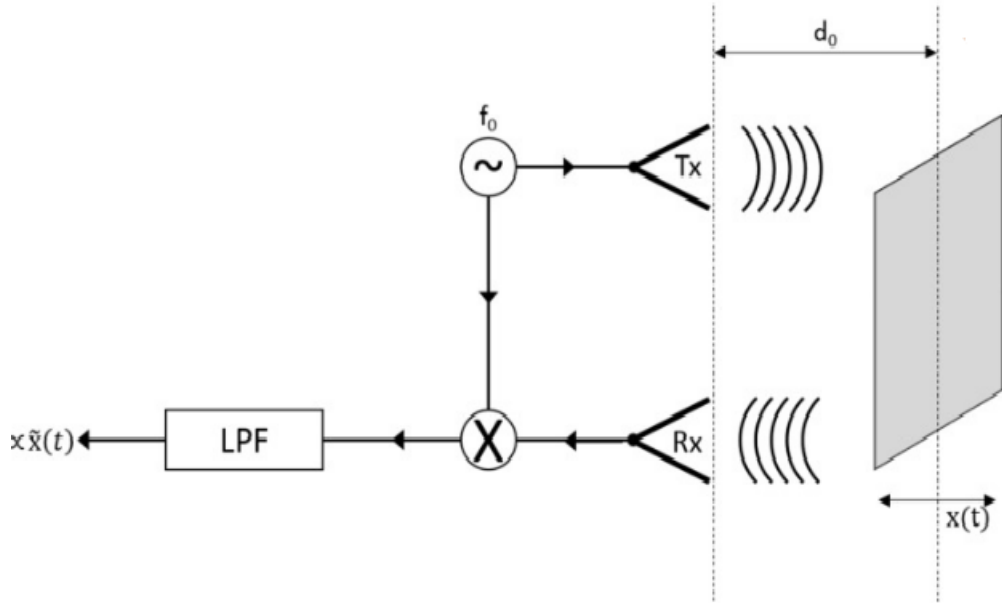


Figure 2.2: Radar doppler CW para análisis de vibraciones

El objetivo estará sometido a un movimiento armónico, de tal forma que sustituyendo el valor de  $f_d$  en la ecuación (2.5) y considerando pequeños desplazamientos respecto a la posición de equilibrio  $d_0$ :

$$r_x(t) = A_r \text{sen}\left(2\pi f_0 t - \frac{4\pi d_0}{\lambda} - \frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right) \quad (2.6)$$

Las siguientes operaciones que realiza el instrumento, como se puede ver en el diagrama, son el mezclado de las señales y el filtrado pasa baja. Se demuestra ahora que con estas operaciones somos capaces de determinar la ecuación de movimiento del objeto vibrante. El mezclado de señales consiste matemáticamente en el producto de las mismas y el filtrado pasa baja es un circuito electrónico que impide el paso a las frecuencias altas.

Por tanto, considerando la actuación del mezclador se multiplica la ecuación (2.1) por la (2.6):

Se designa por  $x_{mez}$  a la señal que sale del mezclador:

$$x_{mez}(t) = A_r \text{sen}\left(2\pi f_0 t - \frac{4\pi d_0}{\lambda} - \frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right) \text{sen}(2\pi f_0 t) \quad (2.7)$$

Empleando la siguiente relación trigonométrica:

$$\text{sen}(A)\text{sen}(B) = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \quad (2.8)$$

Llegamos a:

$$x_{mez}(t) = A_r \left[ \cos\left(-\frac{4\pi d_0}{\lambda} - \frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right) - \cos\left(4\pi f_0 t - \frac{4\pi d_0}{\lambda} - \frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right) \right] \quad (2.9)$$

Donde el factor  $1/2$  se ha introducido en la constante.

Se considera ahora la aplicación del filtro pasa baja a la señal (2.9). El segundo término no pasa el filtrado por el sumando  $4\pi f_0 t$ . Por tanto nos quedamos únicamente con el primer término.

Designemos por  $x_{LPF}$  a la señal que sale después del filtro pasa baja.

$$x_{LPF}(t) = A_r \cos\left(-\theta - \frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right) \quad (2.10)$$

Aplicando la paridad del coseno:

$$x_{LPF}(t) = A_r \cos\left(\theta + \frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right) \quad (2.11)$$

Se expresa ahora en función de un seno considerando

$$x_{LPF}(t) = -A_r \text{sen}\left(\theta + \frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right) \quad (2.12)$$

$$\theta = \frac{4\pi d_0}{\lambda} + \frac{3\pi}{2} \quad (2.13)$$

### 2.1.1. Cambio de la sensibilidad con la distancia.

En radares escalares, como el que se emplea en esta experiencia, aparece un problema de sensibilidad a la hora de determinar el movimiento vibratorio del objetivo. Aquí se describe este problema.

Como se ve, el valor de  $\vartheta$  viene determinado por la distancia entre el radar y el punto de equilibrio del objetivo. Por tanto, esta distancia no va a ser irrelevante.

Aplicando la siguiente identidad trigonométrica, sobre la ecuación (2.7).

$$\text{sen}(A + B) = \text{sen}(A)\cos(B) + \text{sen}(B)\cos(A) \quad (2.14)$$

Llegamos a:

$$x_{LPF}(t) = -A_r \text{sen}(\theta) \cos\left(\frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right) - A_r \text{sen}\left(\frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right) \cos(\theta) \quad (2.15)$$

Considerando pequeñas vibraciones en torno a la posición de equilibrio, se pueden aproximar el seno y coseno por los primeros términos de sus desarrollos en serie:

$$x_{LPF}(t) = -A_r \text{sen}(\theta) \left(1 - \left(\frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right)^2\right) - A_r \frac{4\pi x(t)}{\lambda} \cos(\theta) \quad (2.16)$$

No olvidemos que  $\theta$  es proporcional a la distancia entre radar y objetivo. Por tanto, como se ve en la fórmula anterior, si se analizan los casos extremo, habrá ciertas distancias para las que nos podamos quedar solo con el primer sumando y otras distancias para las que nos quedemos solo con el segundo:

Para  $\theta$  número impar de  $\pi/2$ :

$$x_{LPF}(t) = \pm A_r \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi x(t)}{\lambda}\right)^2\right) \quad (2.17)$$

Para  $\theta$  múltiplo de  $\pi$ :

$$x_{LPF}(t) = \pm A_r \frac{4\pi x(t)}{\lambda} \quad (2.18)$$

El primer caso corresponde a lo que se conoce punto nulo, en él la amplitud obtenida no es proporcional a la vibración del objetivo y por tanto no es interesante.

El segundo caso corresponde al máximo de sensibilidad, como se ve en él la amplitud es proporcional a la vibración del objetivo, que es lo que se pretende hallar, y es por tanto el caso interesante.

Así pues, se pretende evitar el punto nulo y medir siempre en el máximo de sensibilidad. La solución típica a este problema consiste en adoptar otro receptor que proporcione una señal en cuadratura, de forma que se tenga lo que se conoce como un radar vectorial. En este sistema se trabaja con las dos proyecciones en el plano complejo de la señal recibida, de forma que se puede determinar la amplitud y fase de la señal incógnita en todos los casos. La solución alternativa que se adoptará aquí, para no tener que emplear un radar vectorial, es comprobar antes de realizar las mediciones que efectivamente se está en el máximo de sensibilidad. Para ello basta con desplazar el sistema unos milímetros hacia delante y hacia atrás hasta que se observe que la amplitud de la lectura es máxima. Una vez estemos en el máximo, se podrán realizar las medidas.

## 2.2. Modos de vibración.

Dado que el instrumento de análisis de vibraciones que se va a desarrollar va a ser eventualmente aplicado a la determinación de los modos de vibración de una placa rectangular, en este apartado se explican los conceptos necesarios para comprender desde un punto de vista teórico esta aplicación.

¿Por qué es interesante determinar los modos de vibración de una placa rectangular? Conocer las vibraciones de placas delgadas es importante tanto en el ámbito industrial como en el de la ingeniería. En el ámbito industrial, como ya se ha comentado se realiza un mantenimiento preventivo de maquinaria, en el que juega un papel muy importante la detección de vibraciones anómalas en distintas superficies. Además, en ingeniería mecánica, civil y aeroespacial hay muchas estructuras que se pueden considerar placas delgadas (por ejemplo los revestimientos de las cubiertas de los barcos) y la determinación de sus modos es de vital importancia para controlar los fenómenos de



resonancia de carácter destructivo que se pudieran producir en ellas.

¿Qué aporta la metodología que aquí se desarrolla? Ya se han desarrollado métodos para la determinación de modos de vibración de placas, mayoritariamente empleando micrófonos cercanos a ellas (después se estudia esto más a fondo). Las ventajas que presenta el empleo de un radar doppler frente a los métodos tradicionales son:

- La posibilidad de eliminar el ruido de ambiente en las medidas realizadas en entornos ruidosos, como puede ser un ambiente industrial.
- La posibilidad de medir en ambientes sin atmósfera, lo cual es útil para aplicaciones espaciales.
- La posibilidad de analizar vibraciones en un espectro más amplio. Los métodos tradicionales basados en micrófonos están limitados al espectro sonoro (20 Hz - 20 kHz).

Todas las vibraciones producidas por la placa serán una combinación de sus modos de vibración. Un modo de vibración es cada una de las formas en que un sistema puede vibrar, y cada uno de ellos está caracterizado por una única frecuencia. Los modos de vibración están también asociados a las ondas estacionarias que se generan en el instrumento en cuestión, por ello cada modo generará en la placa un patrón de máximos y mínimos de amplitud característico.

### **2.2.1. Cálculo de los modos de vibración de una placa rectangular libre.**

Una vez se han introducido los conceptos que se manejarán en la parte de aplicación del trabajo, en esta sección se profundiza en el cálculo teórico de los modos de vibración de una placa rectangular, que precisamente será lo que posteriormente se desarrolle desde un punto de vista experimental.

El cálculo teórico de modos de vibración en placas delgadas es un tema muy tratado en la bibliografía y se podría decir que ya ha sido resuelto para todos los casos posibles, al contrario de lo que ocurre para placas gruesas, en las que aún se continúa investigando.

El análisis que se emplea más comúnmente es la Teoría Clásica de Placas, desarrollada por Gustav Kirchhoff.

Se parte de la ecuación diferencial del movimiento para el desplazamiento transversal  $w$ :

$$D\nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

donde,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  se conoce como rigidez flexional,  $E$  es el módulo de Young,  $h$  el espesor de la placa,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson y  $\rho$  es la densidad de masa por unidad de área de la placa.

Asumiendo vibraciones armónicas, se pueden plantear soluciones de la siguiente forma:

$$w = W \cos(\omega t) \quad (2.20)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular y  $W$  es una función que solo depende de las coordenadas de posición (es la forma de los modos de vibración).

Sustituyendo la ecuación (2.20) en la (2.19) se obtiene

$$(\nabla^4 - k^4)W = 0 \quad (2.21)$$

donde

$$k^4 = \frac{\rho\omega^2}{D} \quad (2.22)$$

En el caso de que se tenga la placa sujeta o incrustada en un medio elástico hay que añadir un término nuevo a la ecuación (2.19):

$$D\nabla^4 w + Kw + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.23)$$

Lo que modifica la ecuación (2.22):

$$k^4 = \frac{\rho\omega^2 - K}{D} \quad (2.24)$$

Así pues, las soluciones de la ecuación (2.21), con la  $k$  que corresponda, serán las componentes espaciales de los modos de vibración buscados.

El siguiente punto es definir las condiciones de contorno de la placa en cuestión y con estas y la ecuación (2.21) hallar los modos de vibración.

Las condiciones de contorno serán todas las posibles diferentes combinaciones

de bordes apoyados, sujetos y libres. En nuestro caso, los cuatro bordes de la placa son completamente libres, lo cual es un problema para el cálculo analítico.

Hasta ahora se conocen soluciones analíticas relativamente sencillas para mínimo dos bordes apoyados. Para el resto de casos menos restrictivos el cálculo se complica.

Para el caso que nos atañe, hay algunos precedentes en las referencias, como por ejemplo en la referencia [8], en la que se determinan los modos de vibración con un método numérico: Método de Rayleigh-Ritz. También se pueden determinar analíticamente, como en la referencia [9] en la que se emplea el Método de la transformada de coseno. No obstante todas estas alternativas son demasiado complejas matemáticamente como para desarrollarlas aquí, y en su lugar se va a emplear otra metodología.

### **2.2.2. Determinación experimental clásica de los modos de vibración de una placa rectangular libre.**

Con objeto de contrastar la veracidad de los resultados experimentales que posteriormente se hallarán con nuestro sistema de análisis no perturbativo de vibraciones, aquí se desarrolla el método clásico de determinación de los modos de vibración de la placa rectangular de forma experimental, puesto que como se ha analizado en el apartado anterior el cálculo teórico, ya sea analítico o numérico, es muy complejo matemáticamente.

El método consiste en la aplicación de una serie de excitaciones pulsadas (impactos) que contengan un espectro de frecuencias suficientemente amplio a diversos puntos de la placa, de tal forma que puedan excitar multitud de modos. La oscilación se capta con un micrófono situado cerca de la placa.

- Se cuenta con el siguiente dispositivo experimental: placa rectangular, micrófono, tarjeta de sonido y software de adquisición de datos: Soundcard Scope.



Figure 2.3: Dispositivo experimental para la determinación de los modos de vibración con micrófono



Figure 2.4: Dispositivo experimental para la determinación de los modos de vibración con micrófono(2)

- Se va golpeando la placa en diferentes posiciones para excitar el mayor número de modos de vibración posibles.
- Se recogen las vibraciones de la placa con el micrófono y a través de la tarjeta de sonido se llevan al software de adquisición de datos. En el propio software de adquisición de datos se implementa un filtro pasa alta de frecuencia mínima 100 Hz y se realizan las mediciones con la funcionalidad «Retención de pico», de tal forma que el software recogerá las vibraciones de la placa, realizará la transformada de Fourier e irá almacenando esos valores y acumulando espectros indefinidamente hasta

que se detenga la adquisición de datos.

Se muestran aquí los resultados obtenidos para las frecuencias naturales de vibración de la placa:

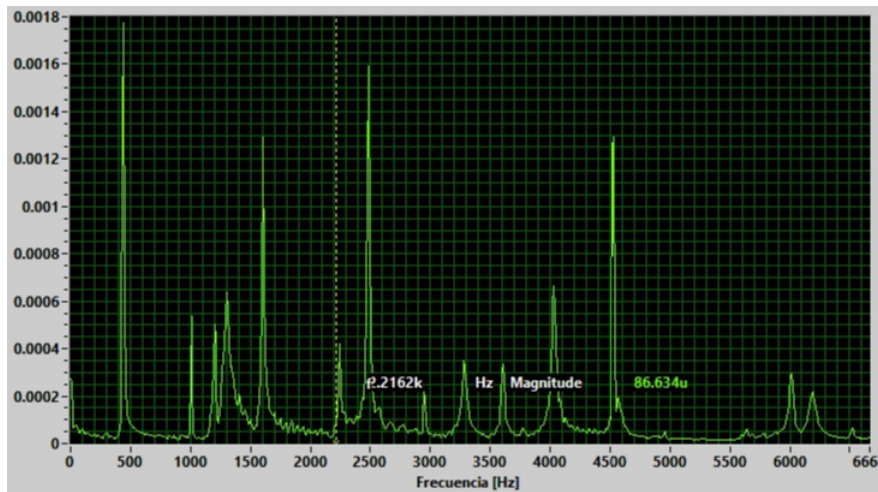


Figure 2.5: Modos naturales de vibración de la placa obtenidos con micrófono

Destaca en el espectro la abundancia de modos y la estrechez de los picos, lo que refleja un alto factor de calidad de la lámina (asunto que se tratará después). Además se puede ver que los picos no son equidistantes, lo que implica que las frecuencias de los modos no están relacionadas armónicamente entre sí. Esto de algún modo refleja lo que ya se ha comentado en el apartado 2.2.1: la complejidad matemática de las ecuaciones y sus soluciones para este caso.

### 2.2.3. Resonancia

En el método anterior, se analiza la excitación en el dominio del tiempo (impacto) y el resultado en el de la frecuencia (espectro). Para analizar con detalle cada modo se podría aplicar una excitación en el dominio de la frecuencia, mucho más controlable que la anterior, y con mucha más energía en la zona de interés del espectro. En la determinación experimental clásica esto

no se hará puesto que lo único que se pretende es que el método clásico sirva como comparativa para el que aquí se desarrolla, pero en el método que aquí proponemos se van a realizar excitaciones en ambos dominios.

Esto nos lleva a la necesidad de analizar el concepto de resonancia. La resonancia consiste en lo siguiente: al excitar un sistema a una de las frecuencias de sus modos de vibración (frecuencia natural o frecuencia de resonancia), la amplitud sonora que emita dicho sistema será máxima. De tal forma que se puede usar esto para determinar los modos naturales de vibración de un sistema, simplemente viendo a qué frecuencias se obtienen emisiones sonoras máximas. Esto es lo que después denominaremos «excitaciones en el dominio de la frecuencia».

#### 2.2.4. Factor de calidad

Para finalizar se estudia el concepto de Factor de Calidad, puesto que se presentará posteriormente como uno de los resultados de nuestro análisis. El Factor de Calidad ( $Q$ ) es un parámetro que mide la relación entre la energía que almacena y la que disipa un resonador durante un ciclo completo de señal. Se define como el cociente entre una frecuencia de resonancia y el ancho de banda de la misma:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (2.25)$$

Además, el ancho de banda se define como la diferencia entre los valores de frecuencia cuya atenuación respecto a la principal es de 3 db. Esto equivale a decir frecuencias cuyo valor de intensidad se reduce en un factor  $\sqrt{2}$ , es decir que su intensidad es aproximadamente un 70,7% de la intensidad del pico principal:

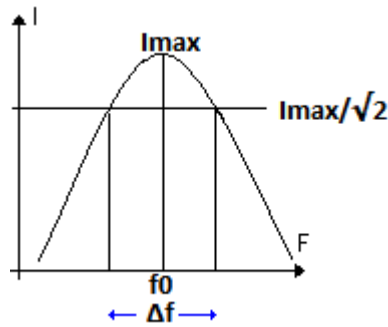


Figura 2.6: Factor de Calidad, Q

El factor de calidad representa una medida de la "calidad" de la resonancia producida. Un factor de calidad alto supone que la resonancia a una determinada frecuencia es muy aguda, y que por tanto la energía perdida por el resonador a esa frecuencia es pequeña en comparación con la energía absorbida. Es decir, un sistema con un factor de calidad alto a una determinada frecuencia será un sistema muy eficiente.

## Capítulo 3

# Determinación de los modos de vibración de una placa rectangular libre con radar doppler. Desarrollo experimental.

En este capítulo se describe el desarrollo experimental de la experiencia. En primer lugar se explican los diferentes montajes empleados y los elementos que intervienen en ellos, y en segundo lugar las mediciones experimentales realizadas.

### 3.1. Montaje experimental y descripción de instrumentos.

En primer lugar se montó un sistema de prueba para comprobar si el método era realizable desde el punto de vista experimental y si los resultados obtenidos eran razonablemente sensatos:





Figura 3.1: Montaje experimental primario

En la imagen se pueden observar los siguientes elementos:

1. Altavoz: No tiene ninguna peculiaridad técnica, es un transductor acústico que transforma la señal eléctrica que le llega del generador en vibraciones sonoras. Se va a emplear como objetivo de las medidas en la primera parte del desarrollo y como excitador en frecuencia de la placa de aluminio en la segunda parte.
2. Sistema radar: Se emplea un radar escalar, primario, de onda continua sin modulación de frecuencia y biestático. En este caso no es un sistema modular, como se empleará después. Sus componentes tienen tamaños de unos cuantos centímetros. Es el instrumento de medición que se empleará en esta primera experiencia.
3. Fuentes de alimentación: Son fuentes de DC. Se emplean para alimentar el sistema radar.

4. Generador de señal: Se emplea el modelo 33220A de Agilent. Genera la señal eléctrica de entrada del altavoz.
5. Conversor analógico-digital: Transforma la señal eléctrica tratada por el radar en información digital que se envía al ordenador. Se emplea el modelo U2542A de Agilent. Este permite digitalizar cuatro canales con resolución de 16 bits y hasta 500K muestras por segundo. Se comunica con el ordenador por USB y se controla mediante el lenguaje SCPI (Standard Commands for Programmable Instruments).



Figura 3.2: Conversor A-D

6. Osciloscopio: Se utiliza el modelo DSOX1102G de Keysight. Se va a emplear como método de visualización de la señal tratada por el radar en tiempo real.
7. Ordenador: Se usa como soporte físico del software, que se empleará para adquirir, tratar y guardar los datos obtenidos.

A continuación se diseñó y programó el software de adquisición y tratamiento de datos. Para ello se emplea el lenguaje de programación Agilent VEE (Visual Engineering Environment). Este es un lenguaje gráfico que reduce significativamente la dificultad de programar, dado su carácter intuitivo y el tiempo, ya que es muy sencillo realizar diferentes mediciones y conectar instrumentos. Aquí se adjunta y explica brevemente el programa empleado:

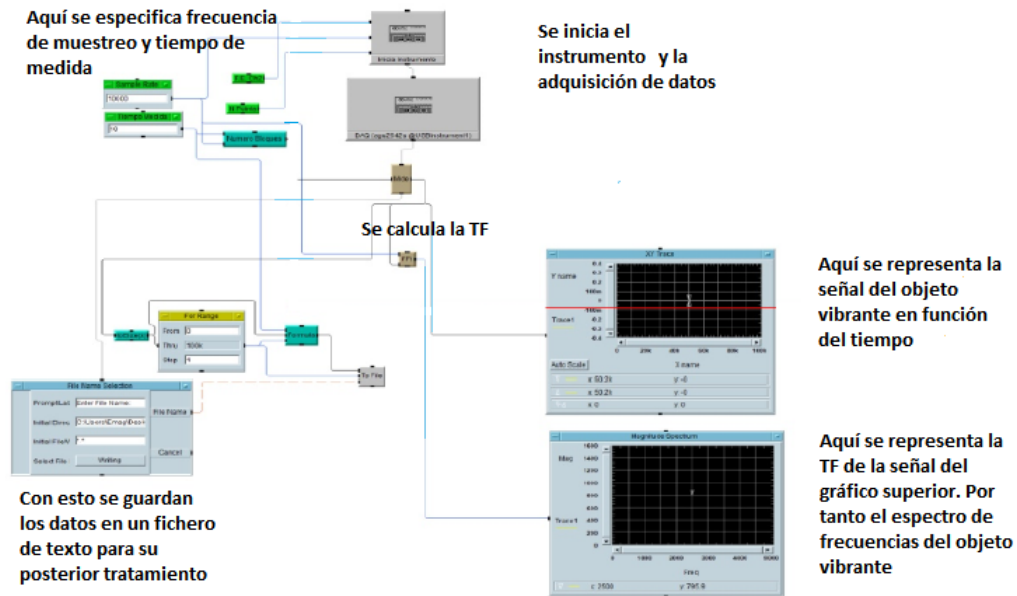


Figura 3.3: Software de adquisición de datos

Una vez probado, se atestiguó que la señal era demasiado débil. Se hizo necesario amplificarla, para lo cual se optó por un amplificador electrónico de uso común en sistemas de radar doppler. Antes de construirlo se diseñó una simulación con el software Multisim para ajustar los valores de los componentes electrónicos que mejor amplificasen nuestro intervalo de frecuencias (como ya se ha dicho, el espectro sonoro: 20Hz-20KHz) y que proporcionasen ganancias cercanas a lo que buscábamos. Aquí se presenta el esquema de esta simulación:

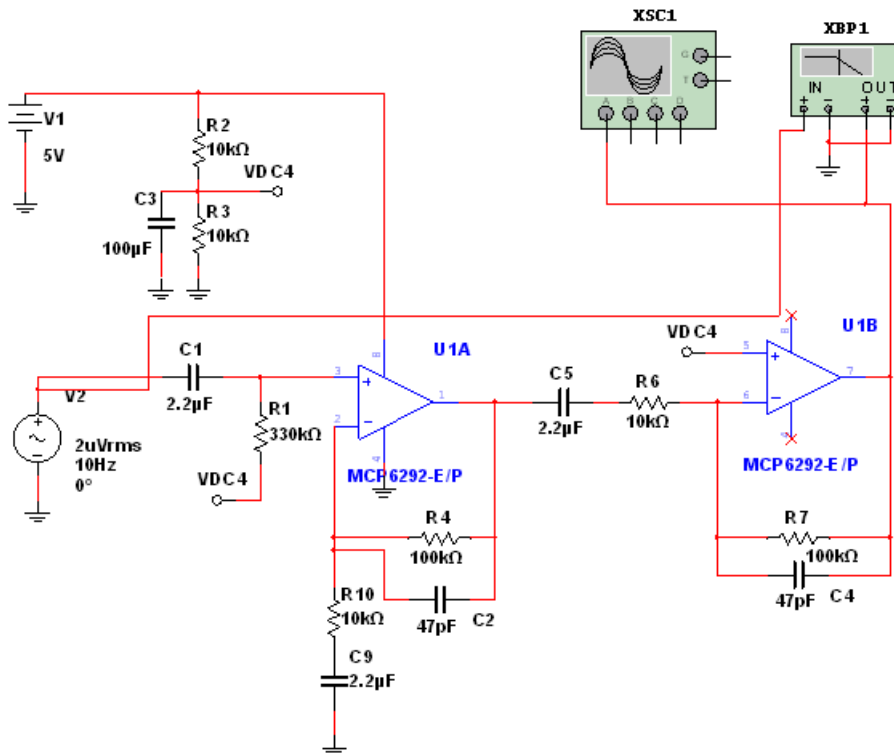


Figura 3.4: Esquema de diseño del amplificador

Como se ve, hemos diseñado un circuito amplificador de dos etapas con amplificadores operacionales, concretamente un módulo doble modelo MCP6292 (producto ancho de banda-ganancia de 10 MHz). El hecho de presentar dos etapas no es una cuestión de ganancia, ya que se podría obtener la ganancia necesaria para nuestro montaje solo con una etapa, es una cuestión de estabilidad: el circuito con dos etapas es más estable y menos sensible a la tolerancia de sus componentes.

En primer lugar se determina la ganancia. Sin entrar en muchos detalles, se puede demostrar que la ganancia de la primera etapa será:  $A_1 = \frac{R_4}{R_{10}}$  y de la segunda etapa:  $A_2 = \frac{R_7}{R_6}$ .

La ganancia total del circuito amplificador:  $A = A_1 A_2$ .

Calculando para nuestro caso se tiene que:

$$A_1 = \frac{R_4}{R_{10}} = 10 \quad (3.1)$$

$$A_2 = \frac{R_7}{R_6} = 10 \quad (3.2)$$

$$A = A_1 A_2 = 100 = 40db \quad (3.3)$$

En siguiente lugar, el rango de frecuencias del circuito será la intersección de los rangos de frecuencias de cada etapa. Dentro de cada etapa se calcula como:

1. Frecuencia más baja detectable:  $f_{l1} = \frac{1}{2\pi C_9 R_{10}}$ ; frecuencia más alta detectable:  $f_{h1} = \frac{1}{2\pi C_2 R_4}$
2. Frecuencia más baja detectable:  $f_{l2} = \frac{1}{2\pi C_5 R_6}$ ; frecuencia más alta detectable:  $f_{h2} = \frac{1}{2\pi C_4 R_7}$

En nuestro caso se calculan estos valores:

$$f_{l1} = \frac{1}{2\pi C_9 R_{10}} \simeq 7Hz \quad (3.4)$$

$$f_{h1} = \frac{1}{2\pi C_2 R_4} \simeq 34000Hz \quad (3.5)$$

$$f_{l2} = \frac{1}{2\pi C_5 R_6} \simeq 7Hz \quad (3.6)$$

$$f_{h2} = \frac{1}{2\pi C_4 R_7} \simeq 34000Hz \quad (3.7)$$

Por tanto el rango de frecuencias será 7 Hz-34000 Hz. Como se ve, se cubre de sobra el espectro sonoro.

Además, el software de simulación del circuito tiene una función que determina la respuesta en frecuencia del mismo. Exportando los datos y representando en Excel para nuestra simulación se obtuvo el diagrama de Bode del amplificador, en el que se visualiza la zona de ganancia constante, que como se ve coincide con los valores previamente calculados:

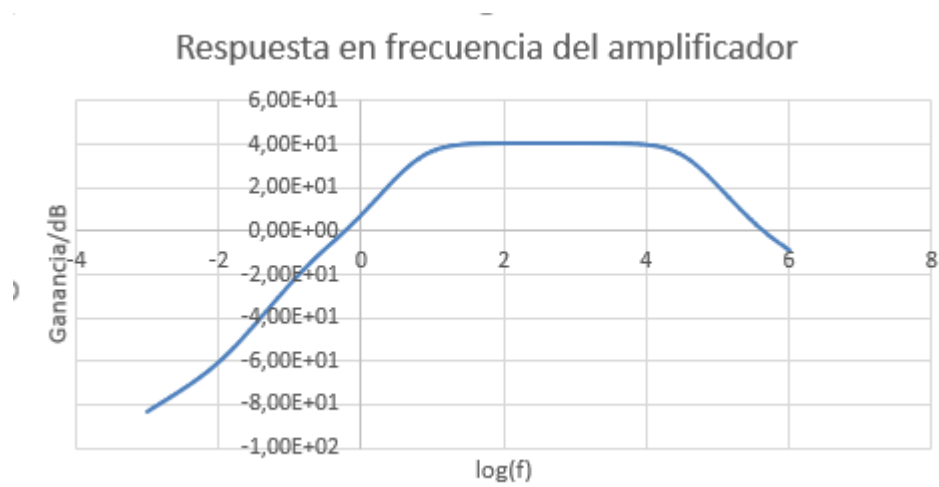


Figura 3.5: Respuesta en frecuencia del amplificador

Tras simularlo y ajustar valores se construyó y acopló al sistema:

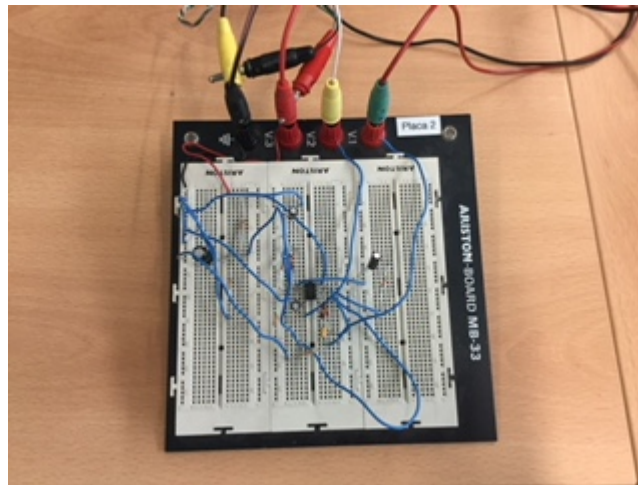


Figura 3.6: Amplificador para radar doppler

En siguiente lugar se procedió a montar el dispositivo final. Se substituyó el radar por un módulo radar, para darle portabilidad al sistema, se cambió el altavoz, y se incorporó un banco de trabajo para controlar mejor las distancias y unos altavoces a la salida, de forma que se pudiera escuchar lo que el

radar detectaba. El resto de elementos, incluidos el software desarrollado, se mantuvieron:

Se emplean dos módulos radares, uno de banda X (unos 10 GHz) y otro de banda K (unos 24 GHz).

Ambos son módulos escalares, biestáticos, de onda continua y sin modulación.

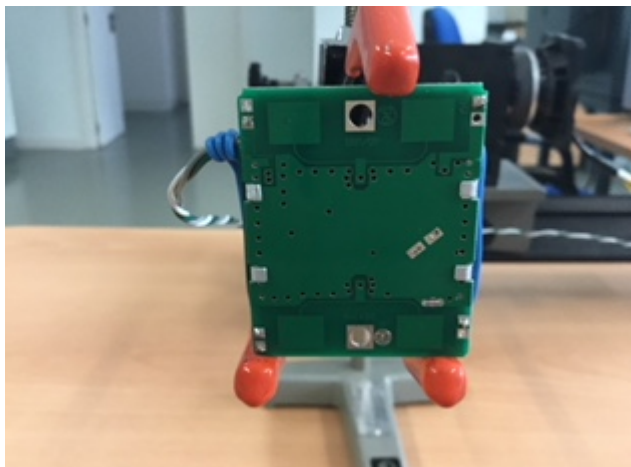


Figura 3.7: Módulo radar principal. Banda X

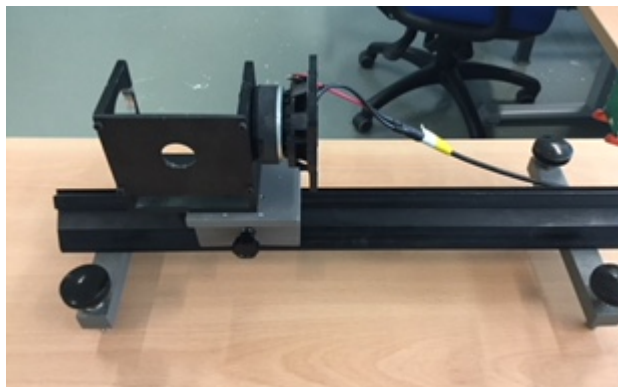


Figura 3.8: Banco de trabajo y altavoz



Figura 3.9: Altavoces de salida



Figura 3.10: Montaje experimental definitivo





Figura 3.11: Montaje experimental definitivo (2)

Se incorporó después el objetivo, la placa metálica de la que se pretenden determinar los modos de vibración:



Figura 3.12: Placa metálica problema

La placa es de aluminio. Aquí se muestra el dispositivo experimental final:



Figura 3.13: Montaje experimental definitivo con placa problema



Figura 3.14: Montaje experimental definitivo con placa problema (2)

## 3.2. Desarrollo experimental.

Una vez se tiene el montaje experimental, se empieza la toma de medidas. En este apartado se describen de forma ordenada las medidas llevadas a cabo:

### 3.2.1. Comprobaciones previas.

Se pretende en este apartado comprobar el funcionamiento del instrumento de medida y analizar el cambio de sensibilidad en función de la distancia estudiado en el estudio teórico de este trabajo.

- Se parte del montaje definitivo descrito en el apartado anterior, pero sin disponer aún la placa rectangular.
- La fuente de alimentación a 5 voltios, en el generador se selecciona una señal sinusoidal de amplitud 10 VPP y de frecuencia de 500Hz y en el software de medición se fija la frecuencia de muestreo a 10000 y el tiempo de medida a 5 segundos.
- Se repite la medida cambiando la frecuencia a 1 KHz, para demostrar que el instrumento capta bien las frecuencias.
- Se repite la primera medida pero variando la distancia entre el instrumento y el altavoz hasta que nos posicionemos en un punto de sensibilidad media.
- Se repite la primera medida variando la distancia hasta posicionarnos en un mínimo de sensibilidad.
- Se obtienen las 4 gráficas en función del tiempo y de la frecuencia y los valores de los picos de frecuencia.

### 3.2.2. Determinación de los modos de vibración de la placa.

Una vez que se ha demostrado que el instrumento funciona, vamos ya a describir el procedimiento para determinar los modos de vibración de la placa. En primer lugar se van a determinar con el radar de 10 GHz, considerando excitaciones en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo. En siguiente lugar, se busca el primer pico con el radar de 24 GHz de cara a proporcionar una comparativa entre este y el de 10. Finalmente se muestra una alternativa a la instrumentación compleja empleada, en la que se cambia el conversor A/D por una tarjeta de sonido, y el software empleado.

### 3.2.2.1. Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio de la frecuencia.

- Se parte del montaje definitivo descrito en el punto 3.1, en el que se dispone ya la placa de aluminio y el primero de los radares, el de 10 GHz.
- La fuente de alimentación a 5 voltios, en el generador se selecciona una señal sinusoidal a la frecuencia del primer modo de vibración del sistema, de amplitud 10 VPP.
- Con ayuda del osciloscopio, se busca la distancia para la cual nos hayamos en un máximo de sensibilidad.
- La fuente de alimentación a 5 voltios, en el generador se selecciona una señal sinusoidal de barrido (función «sweep») en torno al primero de los picos (lo cual se sabe por la experiencia del micrófono), de amplitud 10 VPP y en el software de medición se fija la frecuencia de muestreo a 10000 y el tiempo de medida a 10 segundos. Se van realizando barridos de frecuencia para todos los picos.
- Para cada pico se determina la frecuencia fundamental, así como su factor de calidad. Para calcular el factor de calidad, hay que determinar el ancho de banda. Puesto que el software hace un muestreo, no vamos a tener un continuo de puntos, y por tanto no será posible en general determinar los dos puntos justos en que la frecuencia se atenúa 3 dB. Por ello se hace una interpolación lineal tomando valores de puntos que sí aparezcan, y con ello se determinan las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ , con las que se calcula el ancho de banda y con el que se determina el factor de calidad (Q).
- Se recogen las gráficas de la amplitud de oscilación en función del tiempo y de la frecuencia, los datos de las frecuencias obtenidas para los picos y los factores de calidad de cada pico.

### 3.2.2.2. Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio del tiempo.

- Se parte del montaje definitivo descrito en el punto 3.1, en el que se dispone ya la placa de aluminio y el primero de los radares, el de 10 GHz. Se retira ahora el altavoz, dado que para excitaciones en dominio

del tiempo no es necesario. Se retira también el amplificador, dado que para excitaciones en el dominio del tiempo se va a golpear la placa, causando movimientos muy abruptos de la misma que junto con el amplificador hacen que la señal saturé y resulte imposible determinar las frecuencias.

- Se busca un máximo de sensibilidad (con el procedimiento que ya se ha descrito) en caso de que se haya perdido.
- La fuente de alimentación a 5 voltios, se fija la frecuencia de muestreo a 10000 y el tiempo de medida sigue fijo en 10 segundos.
- Se va golpeando la placa en diferentes puntos para procurar excitar el mayor número posible de modos de vibración mientras se mide con el software.
- Se recogen las gráficas de la amplitud de oscilación en función del tiempo y de la frecuencia así como los valores de frecuencia obtenidos para cada pico.

### **3.2.2.3. Radar de 24 GHz. Excitación en el dominio de la frecuencia. Comparativa**

Para comparar los resultados obtenidos de dos instrumentos diferentes, se cambia el radar de 10 GHz por otro de 24 GHz. Se procede de forma análoga a lo descrito en el apartado de excitación en el dominio de la frecuencia para el otro radar, solo que únicamente se determina el primero de los picos puesto que con esto es suficiente para realizar la comparativa. Se recoge la gráfica de la amplitud de oscilación en función del tiempo y de la frecuencia, así como el dato del pico principal.

### **3.2.2.4. Método alternativo.**

Para finalizar, se presenta una alternativa con instrumentación más sencilla y económica. La idea es que se pueda realizar la misma experiencia y con unos resultados razonablemente similares sin necesidad de tener un conversor A-D, que es un instrumento muy caro, y sin necesidad de programar, dado las dificultades que esto puede acarrear.

Para ello se sustituye el conversor por una tarjeta de sonido como la mostrada en el fundamento teórico.

Además se emplea el software de adquisición de datos Soundcard Scope, que es un emulador digital de osciloscopio, y que ya ha sido empleado cuando se determinaban los modos de vibración con el micrófono. De nuevo aquí se implementa un filtro pasa baja con frecuencia de corte de 300 Hz. La principal desventaja que presenta este método está precisamente en que este software no permite el volcado de datos en ficheros externos.

Por lo demás, se procede como en el apartado 3.2.2.2, excitando la placa en el dominio del tiempo, y recogiendo a través de la funcionalidad de retención de pico del programa, la gráfica obtenida del espectro de frecuencias y el valor numérico de los picos.

## Capítulo 4

# Determinación de los modos de vibración de una placa rectangular libre con radar doppler. Resultados.

Una vez fundamentado y descrito minuciosamente el desarrollo seguido en el laboratorio, en este capítulo se recogen los resultados y el análisis de los mismos.

### 4.1. Comprobaciones previas.

Se recogen los resultados obtenidos para los siguientes casos:

- Sensibilidad máxima,  $f = 500$  Hz.

En primer lugar se muestra la representación gráfica de la señal en función del tiempo.

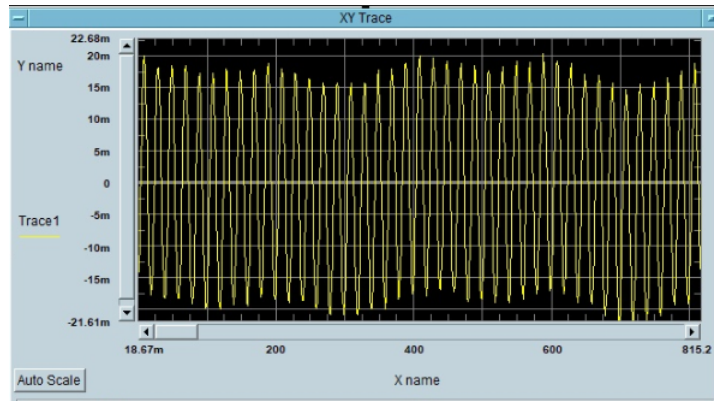


Figura 4.1: Sensibilidad máxima,  $f = 500$  Hz. Dominio del t

La señal en función de la frecuencia:

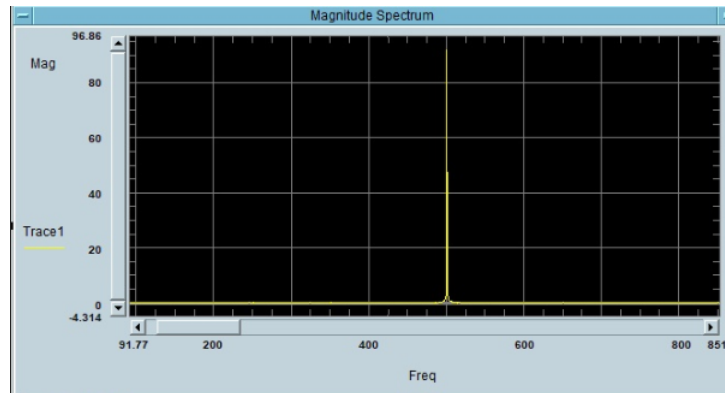


Figura 4.2: Sensibilidad máxima,  $f = 500$  Hz. Dominio de la f

- Sensibilidad máxima,  $f = 1$  kHz



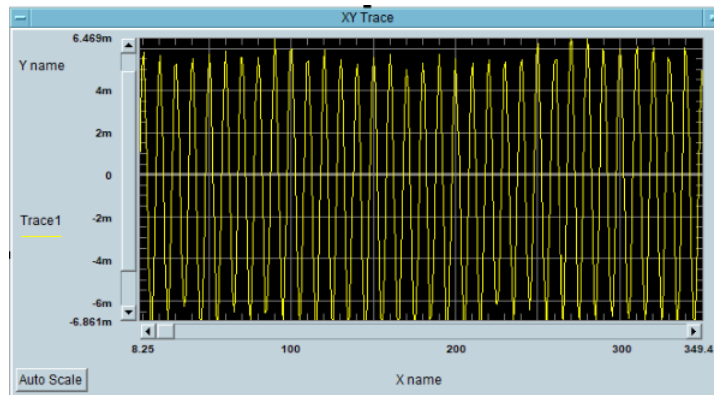


Figura 4.3: Sensibilidad máxima,  $f = 1$  kHz. Dominio del  $t$

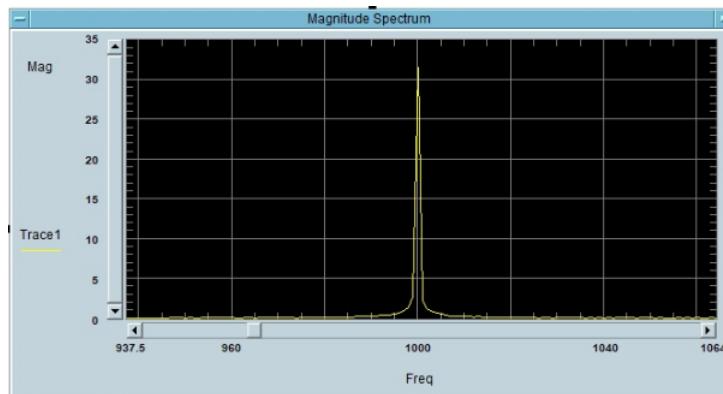


Figura 4.4: Sensibilidad máxima,  $f = 1$  kHz. Dominio de la  $f$

Como se puede ver en ambos casos, el sistema funciona correctamente: Las representaciones en función del tiempo muestran las vibraciones armónicas de la membrana del altavoz. A partir de esas representaciones se podrían obtener con un correcto tratamiento las amplitudes de vibración. Además se ve que la señal oscila levemente sobre sí misma. Esto es debido a movimientos indeseados de la placa consecuencia de su manejo manual.

En las representaciones en función de la frecuencia se puede ver el pico de frecuencia al que está emitiendo el altavoz, que como se ve es el que correspondería en ambos casos.

Cabe destacar que las escalas empleadas en las gráficas no guardan relación entre sí, por ello lo verdaderamente importante son los valores numéricos.

- Sensibilidad media,  $f = 500$  Hz

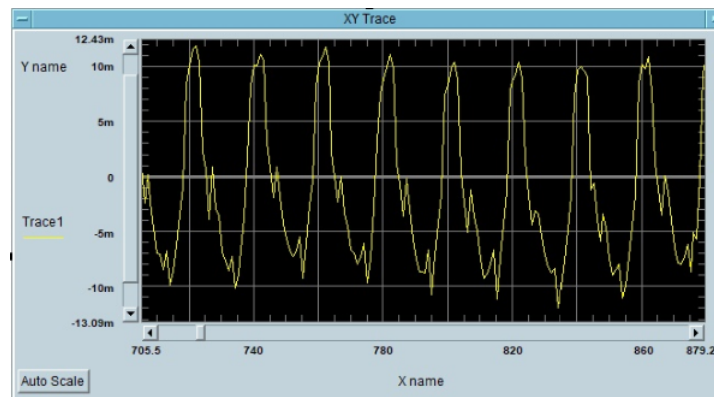


Figura 4.5: Sensibilidad media,  $f = 500$  Hz. Dominio del t

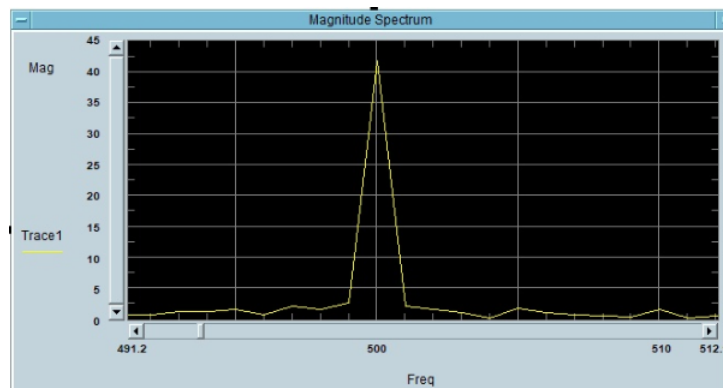


Figura 4.6: Sensibilidad media,  $f = 500$  Hz. Dominio de la f.

- Sensibilidad mínima,  $f = 500$  Hz

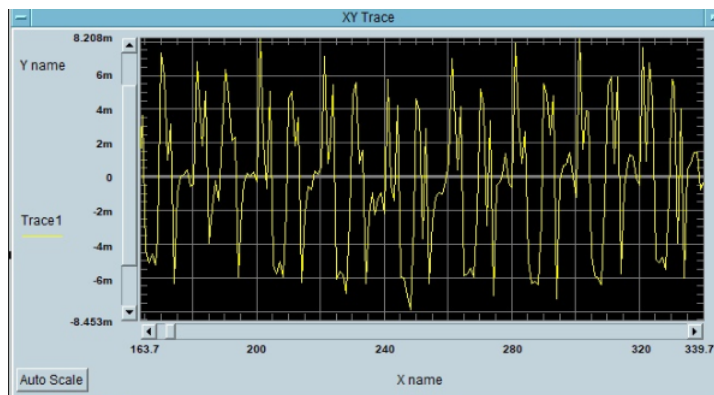


Figura 4.7: Sensibilidad mínima,  $f = 500$  Hz. Dominio del  $t$

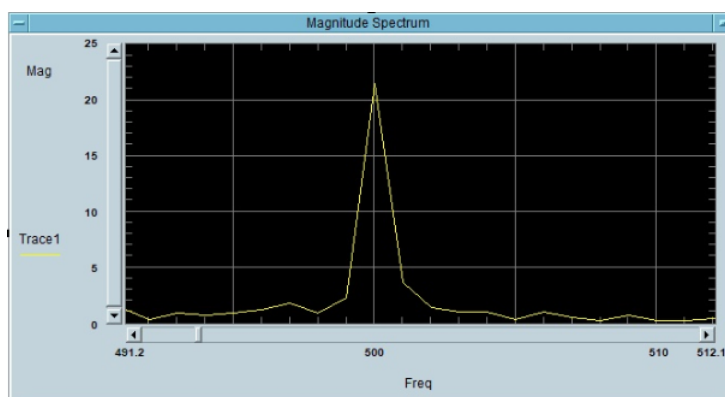


Figura 4.8: Sensibilidad mínima,  $f = 500$  Hz. Dominio de la  $f$

Al desplazarnos del máximo de sensibilidad progresivamente se van obteniendo señales peores, y es por ello que se desea evitar estas situaciones: En el dominio del tiempo las señales distan cada vez más de una representación armónica, como se puede ver en las figuras (4.5) y (4.7) y por tanto no son útiles en ningún análisis. No obstante, en el dominio de la frecuencia (figuras (4.6) y (4.8)) el pico aún se presenta a la frecuencia correcta, aunque con una intensidad menor.

Es muy importante, según lo visto, asegurarse de que estamos en el máximo de sensibilidad antes de realizar cualquier medida.

## 4.2. Determinación de los modos de vibración de la placa.

Se recopilan aquí los resultados obtenidos en cada uno de los siguientes casos:

### 4.2.1. Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio de la frecuencia.

Se muestran todas las representaciones, frente al tiempo y frente a la frecuencia, para cada uno de los modos de vibración:

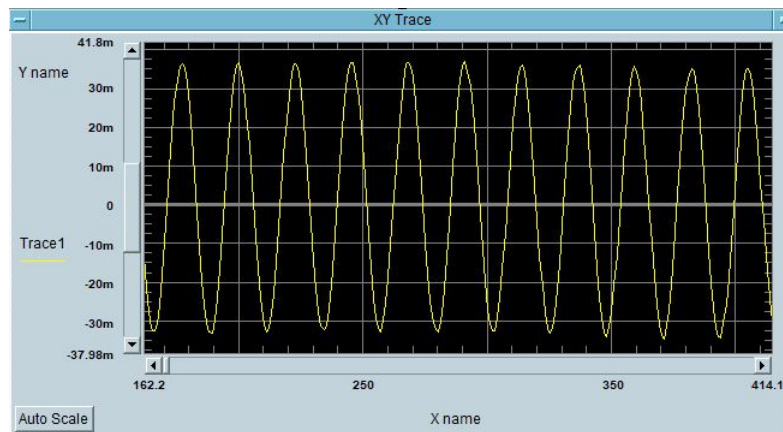


Figura 4.9: Primer pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con  $t$

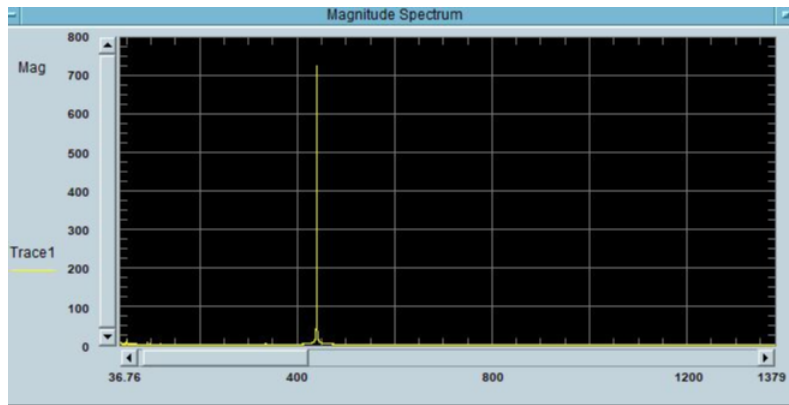


Figura 4.10: Primer pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con  $f$

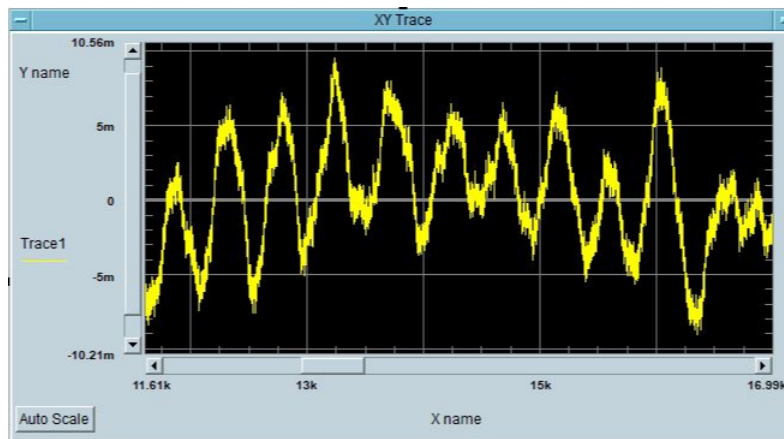


Figura 4.11: Segundo pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con  $t$

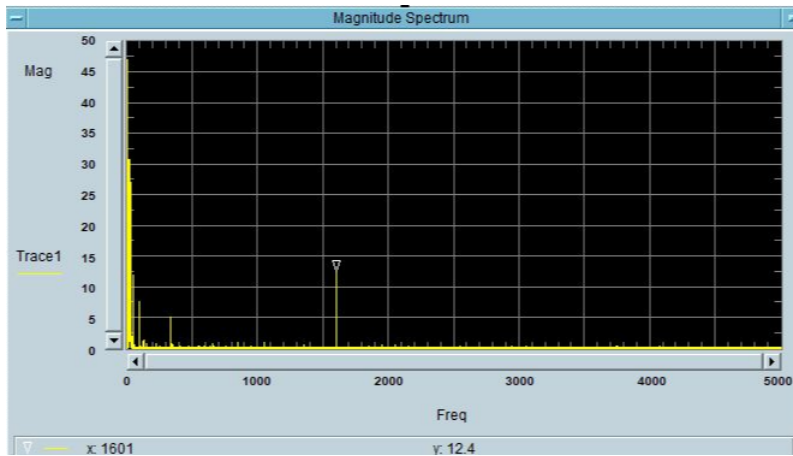


Figura 4.12: Segundo pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con  $f$

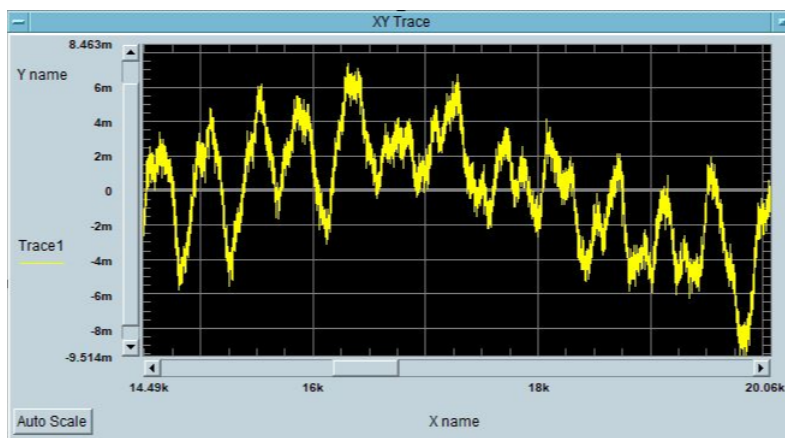


Figura 4.13: Tercer pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con  $t$

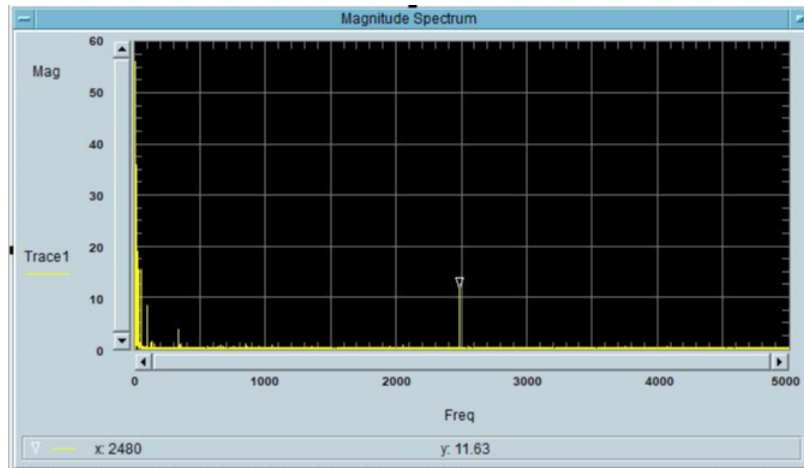


Figura 4.14: Tercer pico. Dominio de la frecuencia. Dependencia con  $f$

Además, en la siguiente tabla se recogen los resultados obtenidos para las frecuencias de los picos, y el ancho de banda y factor de calidad calculados:

$f/\text{Hz}$	$\Delta f/\text{Hz}$	$Q$
438,8	0,28	1570
1601	0,63	2530
2480	0	$\infty$

Cuadro 4.1: Valores de frecuencia de los modos de vibración. Dominio de la frecuencia

Como se ve, los factores de calidad de la lámina son muy elevados. Esto significa que la lámina es muy eficiente en la emisión a las frecuencias de sus modos naturales de vibración: pierde muy poca energía en relación a la que absorbe.

El método es interesante puesto que permite afinar mucho las frecuencias de los modos, sin embargo también es complicado experimentalmente debido al elevadísimo factor de calidad de la lámina. Las frecuencias de los modos resonantes tienen picos muy estrechos, y localizarlas con barridos en frecuencia se hace muy arduo. Por eso solamente se han determinado algunos modos de todos los posibles.

En las gráficas en el dominio de la frecuencia ((4.10), (4.12), (4.14)) se puede ver un ruido periódico a frecuencias múltiplos de 50 Hz. Este ruido proviene de la corriente alterna suministrada por la red eléctrica al generador, por tanto no es interesante desde el punto de vista del análisis de resultados. Se puede contrastar la veracidad de estos resultados empleando los obtenidos en el apartado 2.2.2. Como se ve, los valores determinados aquí corresponden aproximadamente con los 3 picos más intensos que se obtenían en el apartado 2.2.2. Por tanto este método es acertado experimentalmente y además permite afinar los valores numéricos de las medidas.

#### 4.2.2. Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio del tiempo.

Los resultados para la excitación en el dominio del tiempo:

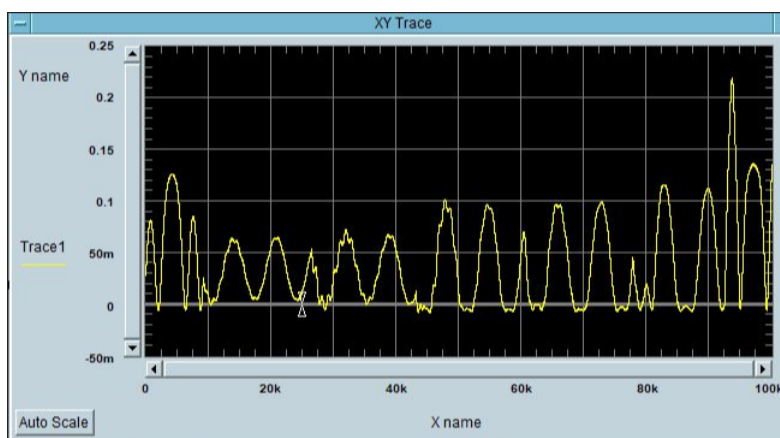


Figura 4.15: Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio del tiempo. Dependencia con  $t$



Pico	f/Hz
1	439,1
2	589,4
3	1007
4	1179
5	1406
6	1671
7	1930
8	2041
9	4083

Cuadro 4.2: Valores de frecuencia de los modos de vibración. Dominio del tiempo

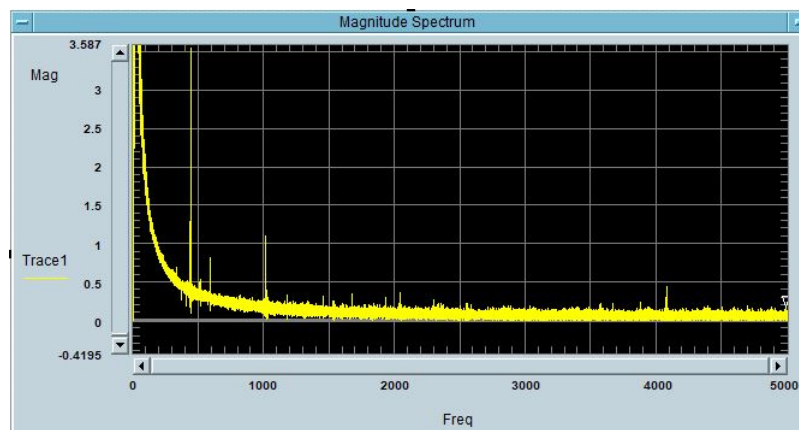


Figura 4.16: Radar de 10 GHz. Excitación en el dominio del tiempo. Dependencia con  $f$

Se presentan además los valores de frecuencia determinados con este método:

Comparando de nuevo con los resultados del apartado 2.2.2, se ve que utilizando este método se obtienen valores certeros. Sin embargo aquí aparecen algunos picos a mayores (Pico 2, 7 y 8). Esto puede ser debido a que este método no es tan riguroso experimentalmente como el anterior: como se puede ver, la amplitud de los picos es mucho menor en este caso: recordemos que se había retirado el amplificador, y además, el propio método hace que

sea más complejo determinar los modos de vibración: se excitan todos los modos a la vez, dependiendo de la posición de los impactos se excitarán unos modos sí y otros no...etc. La principal ventaja es que el método es mucho más rápido.

En la representación frente al tiempo lo que se visualiza son oscilaciones de gran amplitud. Estas son debidas al movimiento de la placa ocasionado por los impactos que recibe y por tanto no son interesantes desde el punto de vista del análisis de resultados.

### 4.2.3. Radar de 24 GHz. Excitación en el dominio de la frecuencia. Comparativa

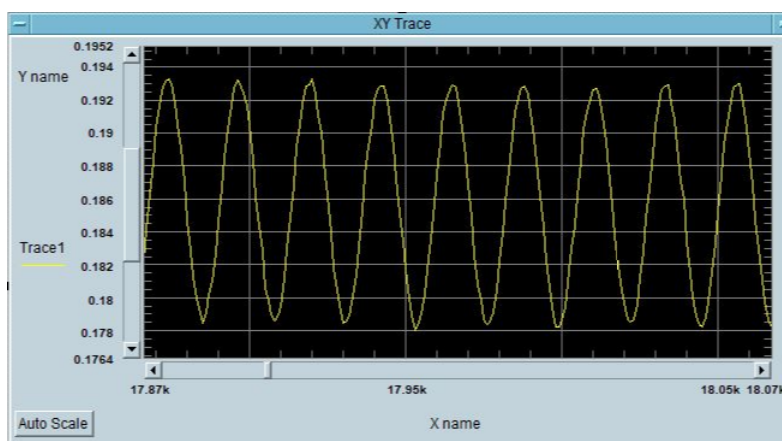


Figura 4.17: Radar 24 GHz. Dependencia con t

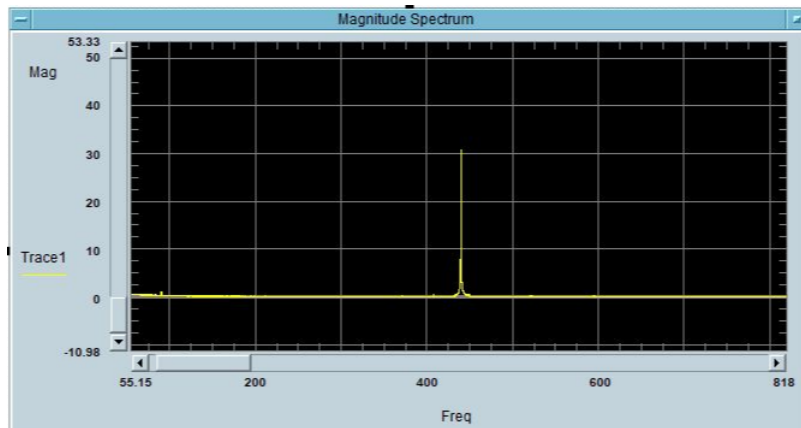


Figura 4.18: Radar 24 GHz. Dependencia con  $f$ .

El valor de frecuencia obtenido para el primer pico es  $f = 439$  Hz. El resultado es correcto si se compara con el obtenido con el otro radar. El radar de 24 GHz, al tener una frecuencia de trabajo mayor, tiene también una sensibilidad mayor. Esto es por una parte una ventaja, y por otra parte un inconveniente puesto que también será más sensible al ruido, lo cual es siempre indeseable. Desde el punto de vista operativo, es más complicado determinar el máximo porque la longitud de onda a la que trabaja es menor.

#### 4.2.4. Método alternativo.

Se presenta la gráfica obtenida, así como los resultados numéricos de las frecuencias de los modos de vibración:

Pico	f/Hz
1	441,18
2	1001
3	1218,9
4	1626,1
5	1994
6	2442
7	2846
8	3250
9	4003
10	5000
11	6018,1

Cuadro 4.3: Valores de frecuencia de los modos de vibración. Método alternativo

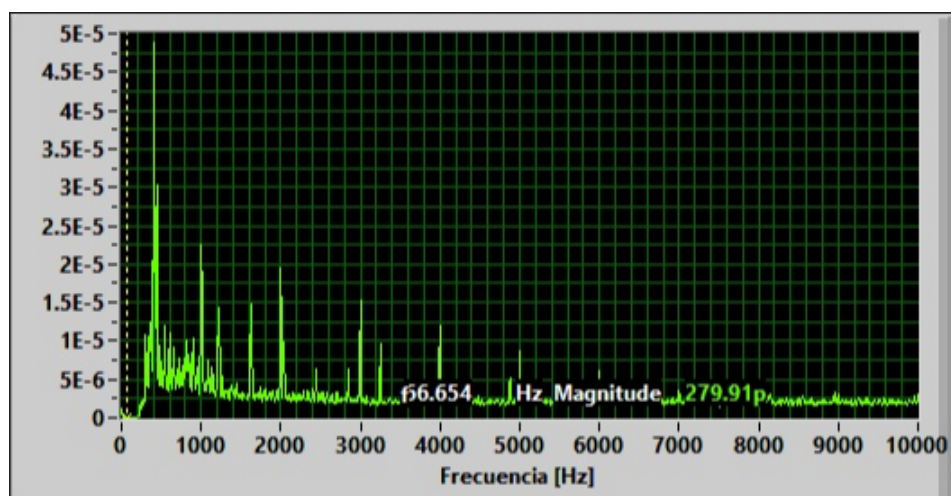


Figura 4.19: Método alternativo de análisis de modos de vibración

Los resultados empleando este método son también razonables si se comparan con los obtenidos en el apartado 2.2.2. De nuevo hay picos que no coinciden exactamente, pero en computo global se podría decir que hay acuerdo experimental.

# Capítulo 5

## Conclusiones.

Para finalizar el desarrollo en este capítulo se extraen las conclusiones derivadas del trabajo.

En primer lugar se ha diseñado y montado completamente un sistema de análisis de vibraciones. El sistema que hemos elegido es un radar Doppler, por sus ventajas frente a otros métodos: es no perturbativo, permite realizar medidas a distancia y está formado por elementos sencillos y relativamente económicos. Se ha podido comprobar que el sistema funciona razonablemente bien, aunque presenta el inconveniente del cambio de sensibilidad con la distancia entre instrumento y objetivo. Este problema se ha solucionado buscando siempre el punto de máximo de sensibilidad para realizar mediciones. Este sistema ha servido de base para desarrollar un método de determinación de modos de vibración de placas, con aplicaciones en industria e ingeniería y cuya principal novedad frente a los métodos clásicos basados en micrófonos es que permite medir en ambientes ruidosos, sin atmósfera o fuera del espectro sonoro. Este método consta de excitaciones en el dominio del tiempo (impactos en diferentes puntos de la placa a través de los cuales se excitan todos los modos de vibración a la vez), e impactos localizados en el dominio de la frecuencia. Se ha comprobado que el método funciona y que las excitaciones en dominio de la frecuencia son más precisas aunque más complejas experimentalmente, sobre todo si el sistema presenta un alto factor de calidad (como es el caso).

Se ha presentado una comparativa entre radares de diferentes bandas de frecuencia, comprobando que el de banda K a pesar de ser más preciso por-

que es más sensible, también es más sensible al ruido y las medidas tienen más ruido. Además su manejo experimental es más complejo por los mismos motivos.

Se ha desarrollado una metodología para determinar los modos de vibración en condiciones muy sencillas: sin necesidad de programar y eliminando uno de los instrumentos más complejos del sistema: El conversor A-D, y sustituyéndolo por una tarjeta de sonido. Se comprueba que el método así también funciona.

De todo esto se ha podido concluir que las placas rectangulares libres tienen unos modos de vibración muy complejos (no armónicos), que no siempre es posible excitar todos debido a las condiciones experimentales y que en este caso concreto el sistema presenta muchos modos diferentes y es un resonador muy eficiente (factores de calidad de los picos notablemente elevados) lo cual ha complicado también las condiciones experimentales. A pesar de ello se han conseguido determinar muchos modos de vibración de la placa, aunque no siempre todos.

Como futuras líneas de investigación queda el hecho de repetir la experiencia con un radar vectorial, para eliminar el problema del cambio de sensibilidad, y, por otra parte, la aplicación del instrumento y la metodología con diferentes problemas: por ejemplo placas con diferentes geometrías, diferentes condiciones de contorno...etc.

# Bibliografía

- [1] Raffo, A., Costanzo, S., & Di Massa, G. (2017). Software Defined Doppler Radar as a Contactless Multipurpose Microwave Sensor for Vibrations Monitoring. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 17(1), 115.
- [2] Moll, J., & Krozer, V. (2016). Radar-based Mechanical Vibration Sensing for Structural Health Monitoring Applications : A Comparison of Radar Transceiver Measurements at 24 GHz and 100 GHz. *EWSHM 2016, Sensors other than PZT and FOS*.
- [3] Peczalski A., Kim K. & Mylaraswamy D. (2010). Advanced Vibration Sensing with Radar - ADVISER. *Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society, 2010*
- [4] Capítulo 17. Webster J. (2014). *Measurement, Instrumentation, and Sensors Handbook*. EE.UU: CRC Press.
- [5] Wolff C. *Classification of radar systems*. Recuperado de: <http://www.radartutorial.eu/>
- [6] Leissa, A. W. (1969). *Vibration of Plates*, NASA SP—160, Washington, D.C.
- [7] *Laser Doppler Vibrometry. (s.d.)*. Recuperado del sitio web de Polytec: <https://www.polytec.com/eu/vibrometry/technology/>
- [8] Senjanović, I., Tomić, M., Vladimir, N. i Hadžić, N. (2016). An Analytical Solution to Free Rectangular Plate Natural Vibrations by Beam Modes – Ordinary and Missing Plate Modes. *Transactions of FAME-NA*, 40 (3), 1-18.

- [9] Zhong, Yang, Zhao, Xue-feng, & Liu, Heng. (2014). Vibration of plate on foundation with four edges free by finite cosine integral transform method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11(5), 854-863.
- [10] *Typical Doppler Signal Amplifier Application Note AN-04 (s.d.)*. Recuperado de: [http://logosfoundation.org/ii/Radar\\_2017/AN-04 %20TypicalSignalAmp.pdf](http://logosfoundation.org/ii/Radar_2017/AN-04%20TypicalSignalAmp.pdf)



## APÉNDICE: BIBLIOGRAFÍA DE FIGURAS:

1. Figuras 1.1-1.3: Capítulo 17. Webster J. (2014). *Measurement, Instrumentation, and Sensors Handbook*. EE.UU: CRC Press.
2. Figura 1.4: <https://www.polytec.com/eu/vibrometry/technology/>
3. Figuras 2.1-2.2: Raffo, A., Costanzo, S., & Di Massa, G. (2017). Software Defined Doppler Radar as a Contactless Multipurpose Microwave Sensor for Vibrations Monitoring. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 17(1), 115.