



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Matemática Aplicada

**Propuesta didáctica para la enseñanza de
los movimientos del plano.
Perspectiva histórica.**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación
Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.**

**Alumna: Covadonga Santos Rubio
Tutora: M^a Encarnación Reyes Iglesias**

Valladolid, Julio 2018

Yo, Covadonga Santo Rubio, como alumna del Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato, en la especialidad de Matemáticas, y bajo la tutela de M^a Encarnación Reyes Iglesias, concluyo la presente formación con el siguiente Trabajo Fin de Máster, titulado: *“Propuesta didáctica para la enseñanza de los movimientos del plano. Perspectiva histórica”*.

ÍNDICE

ÍNDICE	1
1. INTRODUCCIÓN Y DECLARACIÓN DE INTENCIONES	3
2. MARCO NORMATIVO. FUNDAMENTACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	5
2.1. OBJETIVOS Y CONTENIDOS QUE DEFINE LA LEGISLACIÓN	5
2.1.1. Objetivos Generales de Educación Secundaria	5
2.1.2. Objetivos Didácticos del Área de Matemáticas Orientadas a las Enseñanza Académicas de 3º de E.S.O.....	6
2.1.3. Contenidos Didácticos de la Unidad Didáctica: <i>Movimientos en el Plano. Frisos y Mosaicos</i>	7
3. ANÁLISIS DIDÁCTICO	8
3.1. ANÁLISIS DE CONTENIDO.....	8
3.1.1. Perspectiva histórica. Evolución histórica de las Transformaciones Geométricas: Línea del Tiempo.....	9
3.1.2. Perspectiva histórica. Evolución histórica de las Transformaciones Geométricas: Desarrollo histórico	16
3.1.3. Transformaciones Geométricas: <i>Definición y Escritura Matricial</i>	31
3.2. ANÁLISIS COGNITIVO	35
3.2.1. Mapa conceptual.....	35
3.2.2. Expectativas de aprendizaje	36
3.2.3. Limitaciones de aprendizaje	40
3.2.4. Oportunidades de aprendizaje	43
3.3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN	47
3.3.1. Contenido matemático.....	47
3.3.2. Relación con el contexto y aproximación a situaciones de la vida cotidiana.....	47
3.3.3. Implicación del razonamiento personal	48

3.4. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LIBROS DE TEXTO.....	50
3.4.1. Selección de libros de texto.....	50
3.4.2. Análisis de libros.....	51
3.4.3. Comparación y conclusiones.....	57
4. PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA.....	59
5. CONCLUSIONES.....	84
5.1. CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS Y COMPETENCIAS DEL MÁSTER	89
5.1.1. Objetivos.....	89
5.1.2. Competencias.....	90
5.2. CONTRIBUCIÓN DE LAS ENSEÑANZAS DEL MÁSTER A LA	
ELABORACIÓN DEL PRESENTE TRABAJO.....	95
6. BIBLIOGRAFÍA.....	93
ANEXOS.....	96
<i>Anexo I.</i>	
<i>Actividades: según las funciones a practicar por el alumno.....</i>	<i>97</i>
<i>Anexo II.</i>	
<i>Actividades: según la implicación en el aprendizaje matemático del alumno.....</i>	<i>106</i>
<i>Anexo III.</i>	
<i>Índice de Figuras.....</i>	<i>113</i>

1. INTRODUCCIÓN Y DECLARACIÓN DE INTENCIONES

Este trabajo nace con la intención de realizar una propuesta didáctica para la enseñanza del tema *Movimientos en el plano*, que forma parte del currículo de la asignatura “*Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*”, del curso 3º de ESO.

La selección de la propuesta se justifica por la inquietud personal de conocer, de manera más profunda, algunas de las tareas que realiza el profesorado en su docencia. La elaboración de una Unidad Didáctica, la selección de materiales y recursos adicionales, el análisis del grupo de alumnos para ajustar su didáctica a las necesidades de cada uno de ellos, la selección de actividades y la creación de otras innovadoras para mejorar la motivación, y con ella, un mayor aprendizaje en el alumnado, etc., son sólo algunas de las funciones que los profesores han de llevar a cabo, siempre con la voluntad de lograr una buena enseñanza por parte del profesor, y el fructífero aprendizaje del alumnado.

Además de las intenciones personales, en el trabajo se pretende desarrollar una propuesta didáctica que se motive con la historia de las Matemáticas, en concreto, con la evolución histórica que caracteriza el tema analizado: los *Movimientos en el Plano*.

El presente documento se estructura en cuatro bloques diferenciados:

- En primer lugar, se enmarca la enseñanza de la unidad dentro de la *Legislación Educativa Vigente*, atendiendo con ello a las especificaciones que determina la ley para las enseñanzas de la Educación Secundaria. Este hecho viene dado por ser fundamental en el desarrollo de la docencia y ser coherente con las consideraciones que exige la Normativa.
 - Establecidos los fundamentos a cumplir, se procede a la elaboración de un *Análisis Didáctico* de la enseñanza de los *Movimientos en el Plano*, estudiando, tanto los contenidos matemáticos y su evolución histórica, como las capacidades cognitivas que presentan los alumnos en los cursos de Secundaria, y a su vez, realizando un análisis de la posible instrucción docente.
- Cabe destacar la importancia que va a tener la historia del tema en la elaboración de la unidad, ya que, se persigue con esta, la motivación en los alumnos. Por medio de ejemplificaciones reales en el arte, la arquitectura, la naturaleza o la industria, se demuestra a los alumnos la importancia y utilidad del estudio de los *Movimientos en el Plano*.
- Considerando la perspectiva histórica que va a subyacer en la propuesta, y tras haber extraído los fundamentos esenciales que se deben cumplir a la hora de elaborar el planteamiento de la enseñanza, se conformará la correspondiente Unidad Didáctica, que se basará en todos ellos.
 - Por último, como el objetivo del presente Máster es formar a los futuros docentes en el campo de la enseñanza, se expone en qué grado se satisface dicho principio. Las conclusiones

extraídas se realizan conforme al cumplimiento con los objetivos que perfija el Máster, y con el desarrollo de las competencias que deben adquirir los alumnos que lo cursan.

2. MARCO NORMATIVO.

FUNDAMENTACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Para llevar a cabo la realización de una Unidad Didáctica es necesario atender a la Legislación en materia de educación, ya que, desde la Institución Pública, se constituyen una serie de referencias que deben ser cumplidas a la hora de planificar la enseñanza.

La unidad *Movimientos en el Plano* se establece en la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas del curso 3º de ESO. Se ha de atender, por tanto, al Currículo Básico Vigente, que establece la Institución Estatal y la Institución Autonómica, para la asignatura y curso específicos: **Real Decreto 1105/2014** y **Orden EDU 362/2015**.

Analizada la Normativa, se extraen de ella todas las referencias que hacen alusión al tema *Movimientos en el Plano*. Por un lado, se definen una serie de objetivos que deben afianzarse como principios básicos para la planificación de la enseñanza; y por otro lado, se establecen los contenidos mínimos que deben ser enseñados en las aulas, para las asignaturas y cursos concretos.

2.1. OBJETIVOS Y CONTENIDOS QUE DEFINE LA LEGISLACIÓN.

Tanto para la Unidad Didáctica, *Movimientos en el Plano*, como para el resto de unidades, asignaturas y cursos que componen la Educación Secundaria Obligatoria, se fijan una serie de objetivos y contenidos mínimos.

2.1.1. Objetivos Generales de Educación Secundaria

Para la etapa de Secundaria se concretan una serie de objetivos generales, extensibles a todos los cursos y asignaturas.

Los Objetivos Generales de la Etapa de Secundaria que establece el BOE (Real Decreto 1105/2014 de 26 de Diciembre), se expresan a continuación:

- a) *Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.*
- b) *Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.*
- c) *Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.*
- d) *Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo,*

los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

- e) **Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información** para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
- f) **Concebir el conocimiento científico como un saber integrado**, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g) **Desarrollar el espíritu emprendedor** y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, **la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender**, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) **Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana** y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y **expresarse en una o más lenguas** extranjeras de manera apropiada.
- j) **Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura** y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, **respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales** e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) **Apreciar la creación artística** y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

2.1.2. Objetivos Didácticos del Área de Matemáticas Orientadas a las Enseñanza Académicas de 3º E.S.O.

A la hora de definir objetivos específicos, asociados a la unidad que corresponde, se puede establecer una similitud entre estos y los criterios de evaluación que implanta la Normativa. Esta relación se justifica por ser correspondiente el objetivo de enseñanza-aprendizaje que debe marcarse el profesor, con aquellos criterios en los que luego basará la evaluación del alumno. Es decir, el alumno debe adquirir unos conocimientos mínimos sobre los que será evaluado, mientras que el profesor debe evaluar los conocimientos aprendidos por el alumno, siendo el objetivo de la docencia el logro del aprendizaje.

Los objetivos didácticos establecidos por el BOCYL (ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015) para el Bloque *Contenidos comunes*, que pueden atribuirse a la unidad de análisis son:

1. **Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas**, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
2. Describir y analizar situaciones de cambio para **encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas** en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.
3. **Expresar verbalmente**, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.

4. **Elaborar y presentar informes**, de manera clara y ordenada, **sobre el proceso, resultados y conclusiones** obtenidas en los procesos de investigación.
5. **Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana** (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.
6. **Desarrollar y cultivar las actitudes personales** inherentes al quehacer matemático.
7. **Superar bloqueos e inseguridades** ante la resolución de situaciones desconocidas.
8. **Reflexionar sobre las decisiones tomadas**, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.
9. **Emplear las herramientas tecnológicas** adecuadas, inicialmente de manera guiada, realizando cálculos básicos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.
10. **Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje**, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.

Los objetivos didácticos establecidos por el BOCYL (ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015) para el Bloque *Geometría*, que se atribuyen para nuestra unidad son:

4. **Reconocer las transformaciones** que llevan una figura a otra mediante movimientos en el plano, aplicar dichos movimientos y **analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza**.
5. **Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros**.

2.1.3. Contenidos Didácticos de la Unidad Didáctica: Movimientos en el Plano. Frisos y Mosaicos.

En cuanto a contenidos, la ley establece en concreto para la unidad, los descritos a continuación. Los contenidos que establece el BOCYL (ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015) para el Bloque *Geometría*, centrados en la unidad que estamos estudiando, son los siguientes:

- **Movimientos del Plano: Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Elementos dobles o invariantes. Reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y la naturaleza.**
- **Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas.**
- **Geometría del espacio. Poliedros. Planos de simetría en los poliedros.**

Tras determinar, dentro de las especificaciones de la Legislación, cuáles son los objetivos a perseguir con la docencia de dicha unidad, y los contenidos mínimos que deben ser enseñados a los alumnos, se procede a concretar la fundamentación de la Propuesta Didáctica.

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO

En este trabajo se pretende realizar una propuesta didáctica para la enseñanza de los *Movimientos en el plano*. Para ello, es necesario estudiar y analizar diversas cuestiones, con el objeto de adecuar la docencia, hacia la búsqueda de un aprendizaje más fructífero en los alumnos. Las cuestiones a las que se debe atender en este análisis previo son:

- El **contenido** matemático e histórico del tema. Es importante que el docente conozca los contenidos que va a exponer, y resulta interesante que amplíe dichos conocimientos abarcando temas históricos, por ejemplo, para poder utilizar sus saberes en la mejora de su docencia. El uso de los conocimientos históricos como recurso motivacional para el alumnado es un pilar fundamental en el desarrollo del presente trabajo.
- La **capacidad cognitiva** del alumnado. Se deben tener en cuenta las cualidades del alumnado, y acorde a ellas, considerar qué enseñanzas podemos aplicar para conseguir el mayor aprendizaje posible. Para impartir una buena docencia, se intentarán solventar dificultades y potenciar fortalezas.
- La **instrucción** que se va a desarrollar. Tenemos que comprobar que el aprendizaje sea significativo, que los alumnos asienten conocimientos, y para ello, utilizaremos actividades diversas que contribuyan a la asimilación de conceptos por parte del alumno.




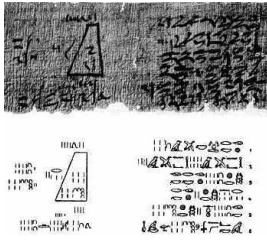
3.1. ANÁLISIS DE CONTENIDO





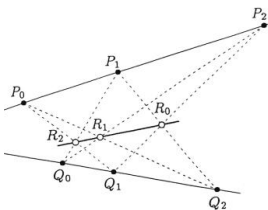
Se realiza a continuación el estudio exhaustivo del tema que aborda esta Propuesta Didáctica, comenzando por su evolución histórica, de especial importancia en este trabajo, y prosiguiendo con una explicación matemática rigurosa de los contenidos.

3.1.1 Perspectiva histórica:

Evolución histórica de las Transformaciones Geométricas.

LÍNEA DEL TIEMPO

<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">GEOMETRIA EN EL PALEOLITICO-NEOLITICO</p> <p>Hace 2,85 millones de años – 3000 a.C.</p>	 <p><i>Figura 3.1.1. Lanzas y Flechas del Paleolítico.</i></p>  <p><i>Figura 3.1.2. Vasija cerámica del Paleolítico.</i></p>	<p>Paleolítico: 2,85 millones de años-10000 a.C</p> <p>Neolítico: 6000 a.C-3000 a.C</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Frisos, mosaicos y rosetones</i> utilizados en elementos decorativos. - <i>Simetrías</i> presentes en pinturas y útiles de caza. - En la época de transición Paleolítico - Neolítico se fabrican objetos cerámicos, donde aparecen representaciones basadas en <i>traslaciones</i>.
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">GEOMETRIA EN EL ANTIGUO EGIPTO</p> <p>3150 a.C. – 35 a.C.</p>	 <p><i>Figura 3.1.3. Papiro de Ahmes.</i></p>  <p><i>Figura 3.1.4. Papiro de Moscú.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> - La <i>geometría</i> es utilizada para reconstruir las parcelas cultivables tras las inundaciones del Nilo. - Realizaron <i>cálculos de áreas</i> mediante triangulación. - Cálculo aproximado del área del círculo y de áreas y volúmenes de pirámides y poliedros. - Aparecen <i>problemas matemáticos en los papiros</i> conservados.

<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">GEOMETRIA EN BABILONIA</p> <p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">1800 a.C. – 539 a.C.</p>	 <p>Figura 3.1.5. Tablilla Plimpton.</p>  <p>Figura 3.1.6. Tablilla cuneiforme.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Uso de la geometría para la resolución de problemas prácticos relacionados con los cultivos. - Eran más “algebristas” que geómetras, no utilizaban las construcciones geométricas como meras herramientas auxiliares, sino que aplicaban reglas “algebraicas”. - Realizaron cálculos aproximados. - Abordaron problemas como: Semejanza de triángulos, Teorema de “Pitágoras”, superficies aproximadas circular y trapecial. - Estas evidencias se constatan en tablillas cuneiformes.
<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">GEOMETRIA EN LA ANTIGUA GRECIA</p> <p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">700 a.C. – 400 d.C.</p>	 <p>Figura 3.1.7. Euclides</p>  <p>Figura 3.1.8. Los Elementos</p>  <p>Figura 3.1.9. Ilustración del Teorema</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Euclides (325–265 a.C.) escribe una recopilación de los fundamentos matemáticos que regían la geometría del momento, presentes desde la época de Tales de Mileto (624 a.C.–546 a.C.). - La obra recibió el nombre de: Los Elementos. Ya se hace referencia a la percepción de los objetos en la realidad. No se describen aún las transformaciones, únicamente se afirma la igualdad entre figuras que se corresponden al ser superpuestas (Proposición 8, Libro I: Congruencia o igualdad de triángulos). - Otra obra destacada de Euclides es su: Tratado de óptica. Escribió sobre perspectiva y habla del cambio de tamaño aparente que sufre un objeto al ser observado en función de la distancia a la que se encuentra el observador. - Pappus de Alejandría (290-350 a.C) fue otro matemático griego, que destaca en relación al tema tratado, por su teorema: Teorema de Pappus.

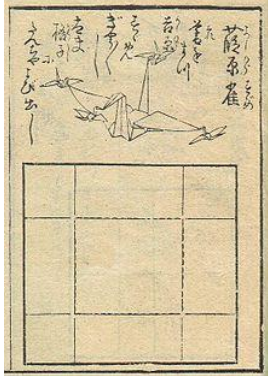
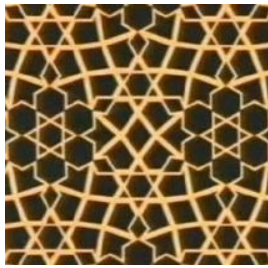

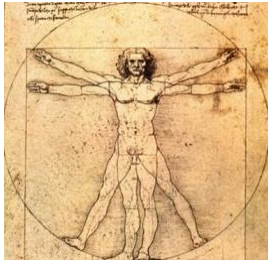
<p>GEOMETRIA EN ORIENTE (Heian, Japón) 794 – 1185</p>	 <p>Figura 3.1.10. Primer libro de Origami.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Construcción de figuras Origami. - China: origen del papel y plegados con el mismo. - En el siglo VI, el <i>Origami</i> se integró en la tradición japonesa. - En el <i>Periodo Heian</i>, destaca el uso de estas figuras decorativas en las ceremonias de la nobleza. - El <i>Origami</i> se construye a través de pliegues de papel, aplicando simetrías, giros y traslaciones.
<p>GEOMETRIA EN LA EDAD MEDIA 476 – 1492</p>	 <p>Figura 3.1.11. Ventana del Patio de los Arrayanes</p>  <p>Figura 3.1.12. Patio de los Leones</p>	<ul style="list-style-type: none"> - En la cultura islámica la geometría adquiere gran importancia. - El círculo, la forma perfecta, se usaba como patrón; las simetrías, los giros y las traslaciones de figuras geométricas, eran recursos utilizados repetidamente por los artesanos musulmanes. - Elementos base para teselar el plano: <ul style="list-style-type: none"> ⇒ Motivos iniciales. ⇒ Movimientos en el Plano. ⇒ Recubrimiento. - ALHAMBRA DE GRANADA. Máxima expresión del Arte Musulmán. Aparecen los 17 grupos cristalográficos en sus decoraciones.
<p>GEOMETRÍA EN EL RENACIMIENTO 1300 – 1600</p>	 <p>Figura 3.1.13. Hombre de Vitrubio.</p>	<p>Surge la preocupación de representar tanto los objetos tridimensionales como sus sombras, en el plano bidimensional.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Se manifiesta incesantemente la geometría en la pintura: planos de profundidad, trama de elementos geométricos elementales, sección áurea, búsqueda del ideal de belleza a partir de la geometría...



Figura 3.1.14.
F. Brunelleschi.



Figura 3.1.15.
L.B. Alberti.



Figura 3.1.16.
P.D. Francesca.



Figura 3.1.17.
A. Durer

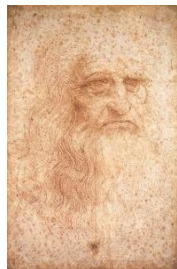


Figura 3.1.18.
L.D. Vinci.

PERSONAJES SIGNIFICATIVOS:

Filippo Brunelleschi (1377-1446):

Estudió las matemáticas para usarlas en sus obras. Esto le llevó al descubrimiento de la *perspectiva cónica*.

En su arquitectura destaca el rigor al establecer relaciones y proporciones.

Leon Battista Alberti (1404-1472):

En su obra *Los tres libros de pintura* (1435), establece las reglas de la perspectiva que se han de seguir en la pintura. (Idea: Pirámide visual).

Piero Della Francesca (1415-1492):

En *De prospectiva pingendi*, escribe acerca de procedimientos prácticos para la creación de composiciones en perspectiva.

En *De quinque corporibus regularibus*, investiga la realidad basada en leyes matemáticas.

Alberto Durer (1419-1528):

En sus publicaciones: *Los Cuatro Libros de la Medida*, y *Los Cuatro Libros de la Proporción Humana*, describe minuciosamente distintas técnicas para elaborar perspectiva en el plano. En todas sus obras, la geometría y la medida adquieren protagonismo.

Leonardo Da Vinci (1452-1519):

Con la publicación de su obra *Trattato della pittura*, Leonardo defiende el uso de reglas geométricas en las pinturas.

Sus trabajos son precursores del concepto matemático de transformación en el plano.

GEOMETRÍA PROYECTIVA EN LA EDAD MODERNA

1492 – 1789



Figura 3.1.19.
G. Desargues.



Figura 3.1.20.
B. Pascal.

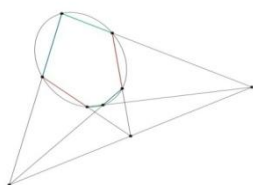


Figura 3.1.21.
Teorema de Pascal.

- Nace la **Geometría Proyectiva**.
- Se recuperan algunos conocimientos griegos (*Teorema de Pappus*) y se aplican a la ciencia y la técnica.

Gerard Desargues (1591-1661):

Algunas de las investigaciones que interesaron a *Desargues* fueron: los *puntos situados en el infinito* y el estudio de las *secciones cónicas*; las *cuaternas armónicas* y la *invarianza de la razón doble*; y, ante todo, el célebre *Teorema de Desargues*, en el plano y en el espacio.

Blaise Pascal (1623-1662):

Realiza numerosas contribuciones en el mundo de la ciencia.

Desarrollo también su teorema: *Hexagrama místico de Pascal*.

- Con los estudios de *Desargues* y *Pascal*, se configura la *Geometría Proyectiva* como disciplina en sí misma, separada de la *Geometría Descriptiva*.

GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA EDAD MODERNA

1492 – 1789



Figura 3.1.22.
R. Descartes.



Figura 3.1.23.a
P. Fermat.



Figura 3.1.23b.
L. Euler.

- Se introduce en el estudio de la geometría, la llamada **Geometría Analítica**. Esta modalidad se eleva como método general para la resolución de problemas geométricos y, permite realizar nuevas investigaciones para la representación de figuras.

René Descartes (1596-1650):

Introduce en la matemática los *Ejes Cartesianos*.

Pierre Fermat (1601-1665):

Hace corresponder las curvas con sus ecuaciones.

Euler (1707-1783):

Logra demostrar que un desplazamiento del plano es una rotación, o una traslación, o una traslación seguida de simetría.



Figura 3.1.24.
J.D. Gergonne.



Figura 3.1.25.
J.V. Poncelet.



Figura 3.1.26.
M.F. Chasles.



Figura 3.1.27.
A. Möbius.

- Consolidación de la *Geometría Proyectiva* y *Noción de Transformación*.

Joseph Diaz Gergonne (1771-1859):

Procedente de la escuela Francesa, contribuye a la consolidación de la *geometría proyectiva*.

Jean-Víctor Poncelet (1788- 1867):

En su *Traité des propriétés projectives des figures*, realiza el estudio de las figuras homólogas. Además, elaboró el *Método de las Transformaciones*.

Michel Floréal Chasles (1793-1880):

Los trabajos de *Chasles* versaron sobre temas de *geometría proyectiva* y *descriptiva*.

- Otros matemáticos que contribuyeron al desarrollo de la nueva *geometría proyectiva*, fueron algunos matemáticos procedentes de Suiza y Alemania, como:

Möbius (1790-1868)

Steiner (1796-1863)

von Staudt (1798-1867)

Plücker (1801-1868).



Figura 3.1.28.a
E. Galois.



Figura 3.1.28.b
J.L. Lagrange.

- Establecido ya el concepto de *Transformación Geométrica*, sustentado en las propiedades de los elementos invariantes y el estudio de la *geometría proyectiva*, nace la necesidad de realizar una *clasificación de las transformaciones y de los elementos variantes e invariantes* que las caracterizan.

- Clasificación de *Transformaciones*:

Évariste Galois (1811-1832):

Creó la Teoría de Grupos, de la que surge la clasificación de transformaciones conocida hoy en día.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813):

Desarrolló la Teoría de Grupos.

<p>GEOMETRIA EN LA EDAD CONTEMPORANEA</p> <p>1789 –</p>	<div data-bbox="438 219 598 414" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="430 414 566 470" data-label="Caption"> <p>Figura 3.1.29. M.S. Lie.</p> </div> <div data-bbox="438 488 614 694" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="430 694 566 750" data-label="Caption"> <p>Figura 3.1.30. F. Klein.</p> </div> <div data-bbox="438 768 614 981" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="430 981 566 1037" data-label="Caption"> <p>Figura 3.1.31. C. Jordan.</p> </div>	<p><u>Marius Sophus Lie</u> (1842-1899) Creó, en gran parte, la teoría de la simetría continua, y la aplicó al estudio de la geometría y las ecuaciones diferenciales.</p> <p><u>Felix Klein</u> (1849-1925): Elaboró su PROGRAMA de ERLANGEN: Definición del concepto <i>geometría</i>. Da solución a las controversias acerca de la coherencia entre geometrías y sus métodos geométricos. Describe las propiedades y las relaciones de aquellas figuras sobre las que ha actuado un grupo de transformaciones concreto. Tras realizar este descubrimiento, <i>Klein</i> se percató, que antes de él, <i>Möbius</i> ya había hallado en uno de sus estudios, de manera implícita, esta teoría.</p> <p><u>Camille Jordan</u> (1838-1922): Memoria sobre los grupos de movimientos. Estudio de las transformaciones geométricas a partir del concepto de grupo.</p>
<p>GEOMETRIA EN LA ACTUALIDAD</p> <p>Actualidad</p>	<div data-bbox="438 1108 614 1272" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="430 1272 606 1328" data-label="Caption"> <p>Figura 3.1.32. J.H.C. Whitehead.</p> </div> <div data-bbox="438 1344 614 1500" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="430 1500 566 1556" data-label="Caption"> <p>Figura 3.1.33. H. Weyl.</p> </div> <div data-bbox="438 1572 614 1758" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="430 1758 566 1814" data-label="Caption"> <p>Figura 3.1.34. E. Cartan.</p> </div> <div data-bbox="438 1830 614 1989" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="430 1989 566 2045" data-label="Caption"> <p>Figura 3.1.35. J. Dieudonné.</p> </div>	<p><u>J.H. Constantine Whitehead</u> (1861-1947): Definición de <i>geometría</i>: “estudio de la invarianza bajo un grupo de transformaciones”. El <i>espacio</i> se estudia ahora como una estructura en la que se establecen <i>relaciones que pueden estar definidas por un conjunto de transformaciones.</i></p> <p><u>Hermann Weyl</u> (1885-1955): Escribió los libros <i>The Classical Groups</i> y <i>Symmetry</i>. En el primero, <i>Weyl</i> desarrolló la teoría de grupos en términos de representación de matrices. En el segundo, más general, habla sobre la idea matemática de simetría.</p> <p><u>Élie Cartan</u> (1869-1951) y <u>Jean Dieudonné</u> (1906-1992): <i>Destacan por su teorema, Teorema de Cartan-Dieudonné, que enuncia:</i> <i>”Todo movimiento en el plano se puede descomponer en producto de, a lo más, tres simetrías respecto rectas”.</i></p>



Figura 3.1.36.
B. Mandelbrot.

Benoît Mandelbrot (1924-2010).
Realizó el descubrimiento de la **geometría fractal**.



Figura 3.1.37.a
J. Tits.
Figura 3.1.37.b
J.G. Thompson.

Jacques Tits (1930-) y **John Griggs Thompson** (1932-).
Investigaron acerca de **simetrías en teoría de grupos**, y fueron galardonados por ello con el premio *Abel* de las ciencias, en el año 2008.

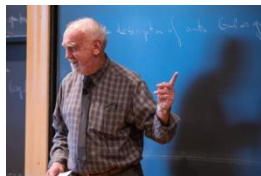


Figura 3.1.38
R.P. Langlands

Robert P. Langlands (1936-)
Premio Abel de Matemáticas 2018 por su teoría unificada de las matemáticas.
Creador del llamado “Programa de Langlands”.

3.1.2. Perspectiva Histórica:

Evolución histórica de las Transformaciones Geométricas

DESARROLLO HISTÓRICO

Los *Movimientos en el Plano* se engloban en la rama de las matemáticas dedicada a la Geometría. Por ello, para estudiar la evolución que los *Movimientos en el Plano* han sufrido a lo largo de la historia, debemos analizar los orígenes y el progreso de la propia Geometría.

GEOMETRÍA EN EL PALEOLÍTICO

Los frisos, rosetones y teselados, obtenidos a partir de movimientos, han sido elementos utilizados en arte y decoración desde la antigüedad.

En el periodo Paleolítico se detecta la presencia de simetrías, tanto en las representaciones de figuras humanas en pinturas, como en las formas que definen los útiles empleados por los hombres ancestrales para la caza de animales. Es probable que las flechas y hachas que fabricaban los hombres en la antigüedad no definieran formas arbitrarias, sino que ellos, gracias a la experiencia, encontraron buenas propiedades en los objetos con bordes simétricos.

Durante el periodo de transición del Paleolítico al Neolítico, se comienzan a fabricar objetos cerámicos. En estas piezas aparecían representaciones artísticas basadas en traslaciones de

figuras, pudiendo distinguir la cultura a la que pertenecía la pieza, según los motivos geométricos plasmados.

GEOMETRÍA EN EL ANTIGUO EGIPTO

En Egipto, la geometría está vinculada a la resolución de problemas relacionados con la agricultura. Se utiliza para afrontar los problemas generados por las inundaciones del Nilo y la consecuente necesidad de reconstruir las parcelas cultivables.

La triangulación de campos poligonales debió ser una práctica común para el pueblo egipcio, ya que calculaban superficies a partir del área de un triángulo.

En los papiros conservados aparece gran cantidad de problemas geométricos, como el cálculo aproximado del área del círculo, áreas y volúmenes de pirámides y poliedros, etcétera.

GEOMETRÍA EN BABILONIA

Más allá del uso de la geometría como mera decoración, en Mesopotamia aparece la geometría como medio para la resolución de problemas prácticos relacionados con las superficies de campos, volúmenes de tierra, depósitos de agua, etcétera.

Los antiguos pueblos mesopotámicos no hacían estudios teóricos sobre figuras geométricas o cuerpos en el espacio, aunque sí utilizaban determinadas propiedades de las figuras en cuestión.

Eran más “algebristas” que geómetras, reduciendo los problemas, no para usar construcciones geométricas auxiliares, sino para aplicar reglas algebraicas.

Otra característica de la geometría mesopotámica fue el uso de cálculos aproximados como medidas suficientes para sus necesidades prácticas.

Abordaron problemas de semejanza de triángulos en repartos de campos entre herederos, usaron el “teorema de Pitágoras” y calcularon superficies aproximadas de campos circulares y trapeziales, entre otros, como se ha evidenciando en las tablillas cuneiformes.

GEOMETRÍA EN LA ANTIGUA GRECIA

Para los griegos, la geometría y la matemática regían la estructura del universo. Con esta premisa, los genios de la Antigua Grecia afirmaban que el universo debía cumplir con los principios de proporción y simetría. Esta convicción sirvió de motivación a matemáticos y geómetras que realizarían estudios e investigaciones basados en las matemáticas.

A comienzos del siglo III a.C., Ptolomeo I Soter (323-285 a.C.), faraón de Egipto, encomendó a *Euclides* (325–265 a.C.) la tarea de escribir una recopilación de los fundamentos matemáticos que regían la Geometría del momento. El resultado de dicho trabajo fueron los trece libros de *Los Elementos*, a los que se añadieron dos más, escritos por Hipsicles de Alejandría.

Euclides realmente sintetizó en una obra todos los conocimientos matemáticos presentes desde la época de *Tales de Mileto* (624 a.C.–546 a.C.). Dicha obra fue titulada con el nombre de *Los*

Elementos y sirvió de cimiento para el estudio de la geometría desde su creación hasta finales del siglo XIX. La obra se compone de los siguientes libros:

- Libro I: Fundamentos de la Geometría. Teoría de triángulos, paralelas y el área.
- Libro II: Álgebra geométrica.
- Libro III: Teoría de la circunferencia.
- Libro IV: Figuras inscritas y circunscritas.
- Libro V: Teoría de las proporciones abstractas.
- Libro VI: Figuras geométricas semejantes y proporcionales.
- Libro VII: Fundamentos de la teoría de los números.
- Libro VIII: Continuación de proporciones a la teoría de números.
- Libro IX: Teoría de los números.
- Libro X: Clasificación de los inconmensurables.
- Libro XI: Geometría de los sólidos.
- Libro XII: Medición de figuras.
- Libro XIII: Sólidos regulares.

En esta época no se encuentra aún una descripción de transformación, sino que únicamente se llega a afirmar la igualdad entre figuras por su correspondencia al ser superpuestas.

Es en el primero de los libros, “*Libro I: Los Fundamentos de la Geometría. Teoría de los triángulos, paralelas y el área*”, donde encontramos un total de 23 definiciones, 48 proposiciones y los famosos 5 postulados de Euclides, sobre los que se sientan las bases de la Geometría.

Los tres primeros postulados hablan de construcciones geométricas y el cuarto determina la igualdad entre todos los ángulos rectos. Con este postulado deducimos que, a diferencia de la actual geometría dinámica que explica las transformaciones llevadas a cabo en el plano o en el espacio, en la Antigua Grecia las propiedades geométricas de las figuras no dependen de su posición en el espacio. Por tanto, se establecía en la época una geometría estática. Demostración de ello es la Proposición 8 del Libro I, basada en la idea de Congruencia o Igualdad de Triángulos.

Proposición 8. *Si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales, y también tienen la base igual, tendrán iguales los ángulos comprendidos por los segmentos iguales.*

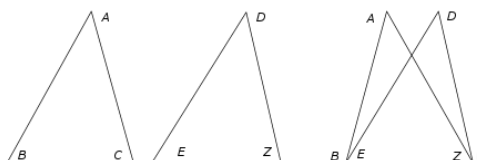


Figura 3.1.39. Proposición 8. Libro I

Euclides, en otra de sus obras, *El tratado de óptica*, escribió sobre perspectiva, supuestamente con el objeto de resolver problemas de astronomía. En esta obra, expone la idea de visión como

rayos proyectados por el ojo, y además habla acerca del cambio de tamaño aparente que sufre un mismo objeto al ser observado en función de la distancia a la que se encuentra el observador. En relación a todas estas fundamentaciones, Euclides investiga las formas que presentan cilindros y conos al ser observados desde diferentes puntos de vista.

Además de Euclides, otro personaje fundamental para la evolución de la geometría fue el matemático griego **Pappus de Alejandría** (290-350 a.C). De entre sus trabajos, cabe destacar el *Teorema de Pappus*, que como veremos más adelante, fue la base en la que se apoyarían matemáticos posteriores, para dar origen a la llamada *Geometría Proyectiva*.

Teorema de Pappus.

Sean L y M dos rectas del plano proyectivo. Si P_0, P_1, P_2 pertenecen a L y Q_0, Q_1, Q_2 a M , y con el requisito de que ninguno de ellos sea intersección de ambas rectas, entonces los tres puntos de intersección (ver figura siguiente), están alineados.

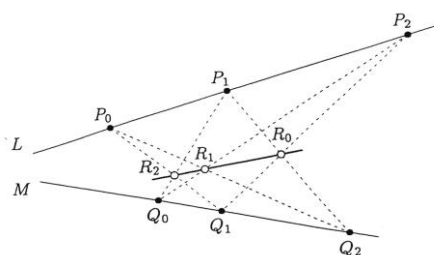


Figura 3.1.40. Ilustración del Teorema

GEOMETRÍA EN ORIENTE

A China se debe el origen del papel y el arte del plegado con el mismo. Posteriormente, en el siglo VI, llega a Japón y es en el Periodo Heian, entre los años 794 y 1185, donde la construcción de figuras con doblado de papel adquiere relevancia. Era en las ceremonias de los nobles, donde destacaba la presencia de dichas figuras. El papel era considerado en la época un artículo de lujo, y sólo los más poderosos tenían posibilidad de acceder a él.

En estas composiciones realizadas por plegado de papel se pueden observar ciertas transformaciones geométricas: simetrías, giros o traslaciones.

GEOMETRÍA EN LA EDAD MEDIA (Mundo árabe)

La pulcritud y la perfección son cualidades características de los mosaicos árabes.

Como es sabido, la religión islámica prohíbe estrictamente la representación de seres vivos en las expresiones artísticas, y por ello, los artistas musulmanes optaron por otro tipo de obras, donde la geometría sería la protagonista de la composición.

En el Islam, el círculo o forma perfecta, se usaba como patrón; simetrías, giros y traslaciones de figuras geométricas, eran recursos utilizados repetidamente por los artesanos musulmanes.

El arte islámico utiliza diversos patrones geométricos, de entre los que destacan: los **polígonos estrellados**, que se entrelazan unos con otros (lacería); y los **teselados**, para cubrir el plano.

La Alhambra

El mayor esplendor del mundo árabe llega en los *siglos XII, XIII y XIV* con la dinastía Nazarí, cuando esta, con el Reino de Granada, adquiere una gran importancia en la zona sur de España.

Destaca la obra sublime de la Alhambra, un conjunto de palacios, jardines y fortaleza, que servía de alojamiento para el monarca y su corte. Las estancias y jardines que presenta son la expresión máxima del arte musulmán en nuestro continente.

La Alhambra alberga sorprendentes manifestaciones artísticas realizadas en distintas materialidades. Son relevantes los alicatados y estucos de yeso, que cubren los espacios con composiciones geométricas, donde dicha geometría no es sólo un elemento decorativo, sino que actúa como principio regidor de dicha decoración.

Los artesanos elegían el grupo ornamental que consideraban más adecuado para cada espacio, generando un gran abanico de composiciones geométricas cuyo diseño fue evolucionando y sofisticándose con el paso del tiempo.

En la Alhambra podemos encontrar composiciones simples, constituidas por meras repeticiones de figuras; y composiciones complejas, donde las formas se giran, se trasladan..., creando a su vez nuevas composiciones geométricas.

Sólo existen 17 grupos cristalográficos planos, es decir, sólo podemos teselar el plano de 17 formas posibles. Aunque la demostración de este fundamento matemático no se llevó a cabo hasta 1891, por el cristalógrafo ruso E. S. Federov, ya los artesanos Nazaríes habían representado estos 17 grupos de simetría del plano siglos atrás, en la Alhambra de Granada.

Los artistas hispanomusulmanes lograban teselar el plano basándose en el uso de tres elementos:

1. **Motivo inicial:** Como elemento base de la composición.
2. **Movimientos en el plano** de dicho motivo inicial: (Traslación, giro, simetría y simetría con deslizamiento), y creando con ello la composición geométrica.
3. **Recubrimiento:** Posibilidad de continuidad de la composición hasta el infinito.

GEOMETRÍA EN EL RENACIMIENTO

En el Renacimiento, a los pintores y artistas les surgen algunas preocupaciones, como la representación de objetos tridimensionales del espacio en el plano bidimensional, o la reproducción de las sombras que estos arrojan en las superficies que los rodean. Las transformaciones que van a sufrir los objetos en estas representaciones, se traduce en un problema matemático a resolver. Por ello, el estudio de la perspectiva va a ser objeto principal de las investigaciones realizadas, para conseguir plasmar figuras tridimensionales de una manera realista, en lienzos bidimensionales, puesto que la idea de generar perspectiva no había sido conseguida por sus antecesores medievos.

Algunos nombres destacados del Renacimiento son Leonardo Da Vinci o Alberto Durero, quienes lograron representar en sus obras estos objetos tridimensionales, tal y como son observados por el ojo humano.

La perspectiva, el estudio de las proyecciones y las secciones, nacen en el Renacimiento, cuando se realizan investigaciones de cómo nuestro ojo visualiza una figura al verla en una pantalla colocada entre dicha figura y nosotros. Este hecho significativo se recoge en las preguntas que se hacían los artistas, como Leon Battista Alberti: *¿Qué relación hay entre dos secciones de la misma figura?, ¿cuáles son las propiedades comunes a dos secciones cualesquiera?*

A continuación se expone la evolución de esta geometría durante el Renacimiento:

Contexto histórico.

El Renacimiento nace en Italia en el siglo XV, y se desarrolla en toda Europa durante el siglo XVI, dando origen al Mundo Moderno.

En este momento histórico surgen grandes transformaciones de importante transcendencia:

Se llevan a cabo los *descubrimientos geográficos* de castellanos y portugueses; aparece una nueva concepción del mundo, el *Humanismo*, donde las divinidades pierden protagonismo y el hombre se convierte en el centro del mundo; las ideas pueden difundirse gracias a la creación de la *impresión* y al desarrollo de las *enseñanzas universitarias*.

En este contexto, **Italia** se alza como principal impulsor del movimiento renacentista en el arte, promoviendo una total renovación, tanto cultural, como artística.

Los artistas adquieren una nueva consideración social y comienzan a trabajar con los estudiosos de la época, en la búsqueda de conocimientos científicos y también en el arte.

La Pintura del Renacimiento y su relación con la geometría.

En este momento cultural se busca plasmar en el lienzo las representaciones de la realidad. Los problemas que surgen son conseguir dotar de cierto volumen a las figuras, y separar los elementos que intervienen en la composición pictórica del fondo de la misma. Como punto de partida para resolver los problemas planteados, se consideraba que establecer un orden en las figuras representadas era fundamental, ya que estas, que ocupaban una posición concreta del espacio físico, debían también disponerse en un lugar definido del plano. Se buscaba por tanto, encontrar fórmulas que dieran base a esta disposición organizada. Se construiría así la perspectiva.

Los pioneros en romper con los convencionalismos fueron los pintores flamencos e italianos, que durante el siglo XIV, y de forma meramente intuitiva, generan la idea de profundidad: las figuras no quedan recortadas sobre un fondo neutro, sino que dotando de distintas tonalidades que se degradan del claro al oscuro, se da un posicionamiento diferenciado a las figuras. Este

método permite al pintor encajar los elementos del cuadro en diferentes planos de profundidad, planos paralelos y horizontales.

En el siglo XV, los pintores florentinos pretenden dotar a la pintura de la categoría de ciencia. Su objetivo es encontrar un método de representación de la realidad que responda a postulados matemático-científicos. Este hecho vendría dado por influencia de los intelectuales neoplatónicos de la alta burguesía, y tendría su base en la geometría que hasta ese momento se conocía, la *geometría euclídea*.

Establecer una construcción ordenada del espacio, siguiendo unas leyes matemáticas preestablecidas y basadas en la teoría de la perspectiva lineal, fue una de las aportaciones fundamentales para la representación del espacio en el plano. A partir de este momento, en la composición pictórica, los objetos se sitúan de manera proporcionada siguiendo un orden, y el cuadro aparece ante el espectador como si fuera una ventana abierta.

Serán figuras elementales, como el *triángulo*, *círculo* o *pentágono*, las que organicen las composiciones del momento; y será la *sección áurea* la encargada de ajustar proporciones.

Esta obsesión por establecer reglas matemáticas en las representaciones artísticas, se lleva hasta la búsqueda *del ideal de belleza*, ya definido por los clásicos, y cuyos principios son: equilibrio, proporción y armonía de las partes del cuerpo.

Personajes significativos en el estudio de la perspectiva durante el Renacimiento.

Cabe destacar la gran importancia que tienen algunos autores del Renacimiento en el estudio de la geometría, en ocasiones, experimentando en sus propias obras.

- Filippo Brunelleschi (1377-1446):

Fue un artista pionero en estudiar las matemáticas para posteriormente utilizarlas en sus obras. Su gran dedicación y entusiasmo por estas le encaminó hasta lograr el descubrimiento de la perspectiva cónica.

Su arquitectura queda definida también por el rigor matemático, llegando a utilizar fórmulas para establecer relaciones y proporciones entre las distintas partes de las construcciones, y entre estas y el todo.

- Leon Battista Alberti (1404-1472):

Alberti fue un arquitecto y teórico. En su obra *Los tres libros de pintura*, establece las reglas de la perspectiva que se han de seguir en la pintura, basadas en las reglas geométricas, que a su vez, Brunelleschi había aplicado a su arquitectura.

La idea es crear un espacio cerrado, de forma rectangular, abierto únicamente al espectador. La imagen se genera al suponer una pirámide visual, cuyo vértice es el punto de fuga al que convergen todas las líneas del espacio representado. Estas líneas generalmente se observan en el techo o pavimento, creando habitualmente cuadrículas que disminuyen proporcionalmente hacia el fondo.

- **Piero Della Francesca (1415-1492):**

Con el fin de divulgar las normas de la representación artística, Piero Della Francesca escribe dos tratados.

. *De prospectiva pingendi*: En este escrito incluye diversos procedimientos prácticos para la creación de composiciones en perspectiva, de utilidad en los talleres.

. *De quinque corporibus regularibus*: De gran rigor matemático, esta obra establece la presencia de formas geométricas en las formas naturales. Con su pintura investiga la realidad basada en leyes matemáticas.

En su obra “*Virgen con el Niño, seis santos, cuatro ángeles y el duque Federico II de Montefeltro*” o “*Pala de Brera*”, (Figura 3.1.41.), las formas humanas se disponen siguiendo un semicírculo, además, ilustra el desarrollo y aplicación de la perspectiva lineal; los objetos se ordenan siguiendo proporciones y geometrías elementales.

En la obra se superponen la pintura y las matemáticas, concretamente, la geometría.

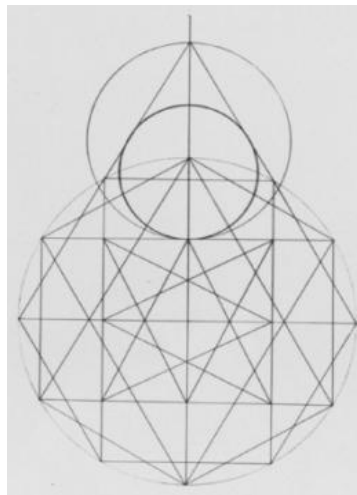


Figura 3.1.41.a. Obra

Figura 3.1.41.b. Composición geométrica

- **Alberto Durer (1419-1528):**

En todas sus obras, la geometría y la medida adquieren protagonismo.

En sus publicaciones: *Los Cuatro Libros de la Medida*, y *Los Cuatro Libros de la Proporción Humana*, reflexiona sobre los conocimientos que había adquirido en Italia, y describe minuciosamente distintas técnicas para elaborar perspectiva en el plano.

Grabados.

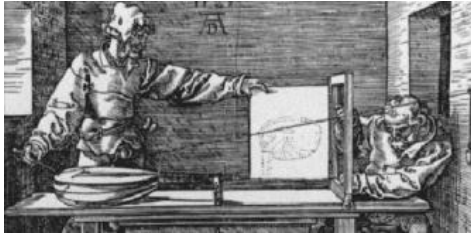


Figura 3.1.42.a. Grabado 1

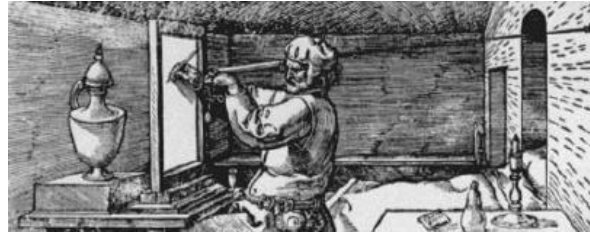


Figura 3.1.42.b. Grabado 2

- **Leonardo Da Vinci (1452-1519):**

Con la publicación de su obra *Trattato della pittura*, Leonardo procura dotar a la pintura de una cierta libertad, eximiéndola de la rigidez geométrica establecida por las normas de representación. Quiere devolver la expresión natural a este arte, considerando que “la dulzura, invención o la gracia”, características de una obra pictórica, no puede responder a proporciones y números inmóviles.

A partir de esta publicación, los pintores comienzan a alejar la pintura de las matemáticas, centrándose en aspectos más libres, como la luz y el color.

“*La última cena*”



Figura 3.1.43.a. Obra

La obra describe una clara y rigurosa composición geométrica, pero con una cierta libertad. En esta obra no subyace una enrevesada trama de figuras geométricas elementales, sino que ésta es mucho más liviana. Se diferencian las siguientes fases:

1. *Leonardo coloca un cuadrado central junto a dos medios cuadrados laterales. Seguidamente traza las diagonales del cuadrado central.*
2. *Traza las diagonales del rectángulo total y divide en seis partes verticales e iguales el cuadrado central.*
3. *Uniendo los puntos de encuentro entre diagonales y líneas verticales, se obtienen dos nuevos cuadrados que se inscriben el uno en el otro. En el centro se sitúa Cristo. El cuadrado intermedio delimita la pared del fondo y los lados de los dos cuadrados inscritos, definen la posición de los huecos.*

4. Divide en tres partes la mitad inferior del rectángulo total y delimita la superficie de la mesa. Las diagonales del rectángulo dan la perspectiva del límite superior de los huecos laterales, confluyendo dicha perspectiva en la cabeza de Cristo.

Por último, las figuras de los apóstoles se disponen en grupos de tres, en cada cuarto de la escena.

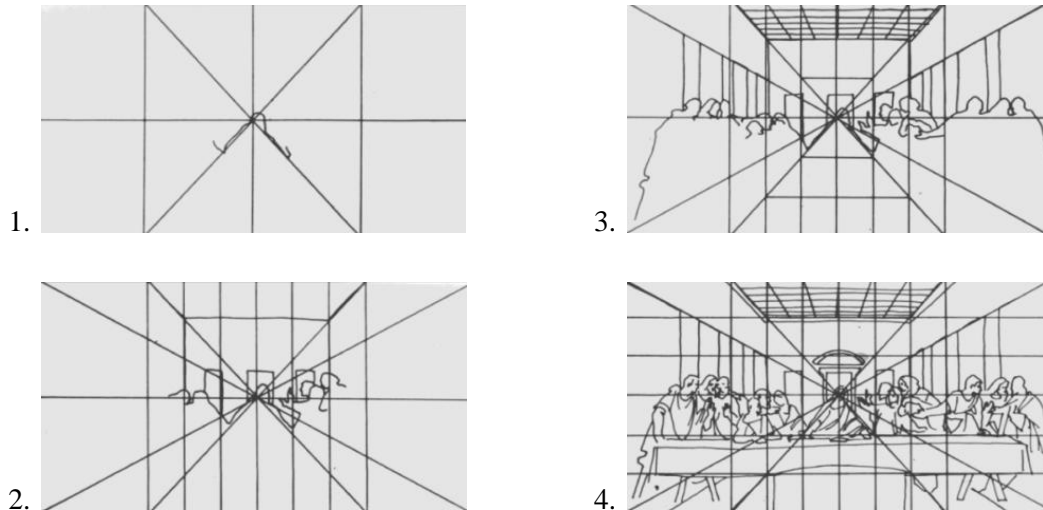


Figura 3.1.43.b. Composición geométrica

GEOMETRÍA PROYECTIVA EN LA EDAD MODERNA

En el Renacimiento, como se ha visto, los pintores habían trabajado en la idea de perspectiva, buscando en la geometría, una visión analítica como precursora del concepto matemático de transformación en el plano. A su vez, diversos problemas de la ciencia aplicada habían sido expuestos. Es en este contexto cuando, una vez entrado el siglo XVII, diversas figuras significativas de las matemáticas recuperan los conocimientos que sus antecesores griegos habían estudiado y los dotan de nuevos enfoques. Nace así la *Geometría Proyectiva*.

Uno de estos personajes emblemáticos fue **Kepler** (1571-1630), quien orientó su investigación a los campos de la Óptica y la Astronomía. Otra figura importante fue **Philippe de la Hire** (1640-1719). Pero, los personajes que destacaron por su importancia en el resultado de sus estudios sobre esta rama de la geometría fueron: Girard Desargues y Blaise Pascal.

- **Girard Desargues** (1591–1661)

Sobre sus estudios previos a 1626 no se tiene constancia, sólo es sabido que es a partir de este año cuando Desargues empieza a formar parte de los círculos filosóficos y científicos cercanos a Descartes, de quién fue gran amigo.

Trabajó como arquitecto en París, sirviendo al Cardenal Richelieu. Durante esta etapa, entabló amistades con diversas figuras emblemáticas de las matemáticas: Pierre de Fermat, Gilles Personne de Roberval, Marin Mersenne y los Pascal, padre e hijo.

Sus oficios se centraron, fundamentalmente, en la ingeniería y la arquitectura, por ello, sus investigaciones y descubrimientos matemáticos persiguen siempre la aplicación práctica. Los métodos geométricos que Desargues desarrollaba causaban extrañeza, y esto originó un sinfín de críticas por parte de sus contemporáneos. Además, utilizaba términos poco familiares para los estudiosos de las matemáticas, generalmente relacionados con la botánica, para que fueran mejor comprendidos. Sin embargo, su estilo era conciso y riguroso, y algunos pensadores como Descartes, Fermat, Mersenne y Pascal, reconocieron la grandeza de sus obras. Aunque no le disgustaba crear polémica en el círculo de las ciencias, le agotó la incompreensión de sus coetáneos, y en 1650 se retiró a su ciudad natal, para vivir en el anonimato hasta su muerte.

Algunas de las investigaciones que interesaron a Desargues fueron: *los puntos situados en el infinito* y *el estudio de las secciones cónicas*; *las cuaternas armónicas* y *la invarianza de la razón doble* y, ante todo, su célebre *Teorema de Desargues*.

Teorema de Desargues.

Si AA' , BB' y CC' son líneas concurrentes en el plano o en el espacio, entonces los puntos $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ y $AC \cap A'C'$ están alineados.

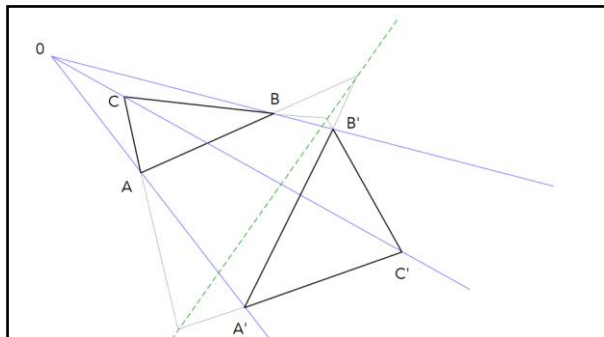


Figura 3.1.44. Ilustración del Teorema

- Blaise Pascal (1623-1662)

Desde niño, Pascal estuvo interesado por la geometría. Con tan sólo 11 años, acompañado de su padre, Pascal asistía a las sesiones de la “Academia Mersenne”. Allí conoció a Desargues, quien le animó a trabajar con su método de proyección y sección.

Sorprendentemente, a la edad temprana de 16 años publicó su obra *Essay pour les coniques*, trabajo en el que aparece su sugerente teorema:

Teorema de Pascal.

Cuando un hexágono queda inscrito en una cónica, los puntos resultantes de la intersección de los pares de lados opuestos se encuentran en la misma recta, están alineados.

En este teorema, el hexágono inscrito en una cónica, denominado: *hexagrama místico*.

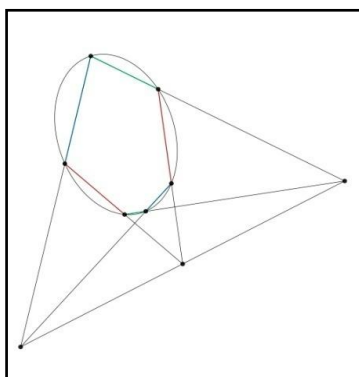


Figura 3.1.45. Ilustración del Teorema

(Cabe destacar la importancia que para el origen de la *Geometría Proyectiva* tuvo el Teorema de Pappus, explicado anteriormente en este trabajo, ya que fue base de los teoremas aquí expuestos).

Desargues y Pascal, además de los aportes que realizan a la geometría proyectiva, en sus tratados estudian también la existencia de elementos invariantes, que aparecen en la definición actual que damos a las *Transformaciones Geométricas*.

Los estudios sobre geometría pura en el siglo XVII no tuvieron continuidad. En esta época se requerían métodos algebraicos que resolvieran, mediante cálculos efectivos, problemas científicos relacionados con la aplicación tecnológica.

Esta es la razón por la que se abandona la investigación en *Geometría Proyectiva*, para dar paso a la *Geometría Analítica*, al *Álgebra* y al *Cálculo Infinitesimal*.

GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA EDAD MODERNA

En el siglo XVII, **René Descartes** (1596-1650) y **Pierre Fermat** (1601-1665), introducen en el estudio de la geometría la llamada *Geometría Analítica*. Esta modalidad se eleva como método general para lograr la resolución de problemas geométricos, y concretamente, para ahondar en el estudio de las curvas y superficies. Esta nueva geometría permitiría realizar investigaciones geométricas utilizando ecuaciones algebraicas para la representación de figuras geométricas.

Fermat introdujo de manera más concreta la idea de ecuación de una curva.

Con el método analítico se asocian los puntos del plano a sus respectivas coordenadas, y a las curvas, sus correspondientes ecuaciones.

“La notion de transformation en géometrie a une origine indéniable: elle se trouve dans la géometrie analytique”. (Piaget, J. y García, R. (1983). *Psychogenèse et Histoire des sciences*. (p. 120). París, Francia: Flammarion).

Según Piaget, J. y García, R., *“la noción de transformación tiene su origen innegable en la Geometría Analítica”*.

“Euler aboutit à démontrer qu'un déplacement plan est une rotation ou une translation, ou une translation suivie d'une symétrie”. (Piaget, J. y García, R. (1983). *Psychogénèse et Histoire des sciences*. (p. 121). París: Flammarion).

Como afirman de nuevo los autores Piaget, J. y García, R., ya **Euler** (1707-1783) logra demostrar que un desplazamiento del plano es una rotación, o una traslación, o una traslación seguida de simetría.

Con los estudios de Desargues y Pascal, y la geometría analítica ya descubierta, se configura la *Geometría Proyectiva* como disciplina en sí misma, separada de la *Geometría Descriptiva*. La razón de este hecho viene dada con la diferencia clara que existe entre ambas geometrías:

La *geometría descriptiva* existía antes de ser formalizada, las representaciones artísticas describían sus principios, manteniendo tamaños y formas de la realidad en los lienzos. Será **Gaspard Monge** (1746-1818) quién la eleve a categoría de ciencia autónoma. Esta geometría permite representar los objetos del espacio tridimensional en un plano bidimensional, y mediante una lectura adecuada, realizar el proceso inverso. Sin embargo, las representaciones se realizan utilizando proyecciones ortogonales, y no permite una reproducción de la realidad percibida por el ojo del observador. Como se ha analizado, en el Renacimiento aparece la necesidad, en el arte, de representar fielmente la realidad, y es con los estudios de la perspectiva y de las bases matemáticas que la sustentan, cuando nace la *geometría proyectiva*.

En la consolidación de la *geometría proyectiva*, destacan los nombres de **Gergonne** (1771-1859) y **Poncelet** (1788- 1867), de la *Escuela Francesa*.

Poncelet es uno de los más importantes contribuidores al desarrollo de la *Geometría Proyectiva*. En su “*Traité des propriétés projectives des figures*” (1822), expuso coherentemente los fundamentos de esta geometría. A su vez, realizó diversos estudios en relación a las *figuras homólogas*: figuras que derivan una de otra, en forma de sucesión de proyecciones seccionadas. El fin que buscaba era encontrar figuras homólogas más simples a una dada, para estudiar con ello las propiedades de la primera. Además de lo expuesto, Poncelet elaboró el llamado *Método de las Transformaciones*, de gran trascendencia en el estudio de las *transformaciones geométricas*.

También **Michel Floréal Chasles** (1793-1880) investigó sobre temas de geometría proyectiva, en base al Método de las Transformaciones de Poncelet.

Otros matemáticos que contribuyeron al desarrollo de la nueva *geometría proyectiva*, fueron: **Möbius** (1790-1868), **Steiner** (1796-1863), **von Staudt** (1798-1867) y **Plücker** (1801-1868), de la *Escuela Suíza-Alemana*. En su contribución al desarrollo de la geometría proyectiva, **Steiner** y **von Staudt** renunciaron al uso de métodos analíticos, mientras que **Möbius** y **Plücker**

contribuyeron con sus investigaciones a la ampliación de la geometría analítica, y además introdujeron las llamadas *coordenadas homogéneas*.

GEOMETRÍA EN LA EDAD CONTEMPORÁNEA

Establecido ya el concepto de *Transformación Geométrica*, sustentado en las propiedades de los elementos invariantes y el estudio de la *geometría proyectiva*, nace la necesidad de realizar una clasificación de estas transformaciones y de los elementos variantes e invariantes que las caracterizan.

La clasificación que hoy en día conocemos, surge a partir de los estudios acerca de la *Teoría de Grupos* realizados por **Galois** (1811-1832), y desarrollados posteriormente por **Lagrange** (1736-1813), quien dedicó la mayor parte de su vida a su estudio.

Las relaciones entre teoría de Grupos y Geometría llevarán a **Felix Klein** (1849-1925) a establecer, en su *Programa de Erlangen*, una definición del concepto de Geometría. El autor describe en su programa, las propiedades y las relaciones de aquellas figuras sobre las que ha actuado un grupo de transformaciones concreto.

Programa de Erlangen

A mediados del siglo XIX existían confusiones acerca de la coherencia entre geometrías y sus métodos geométricos. Gracias al *Programa de Erlangen* se da solución a tales controversias. Este hecho se produce gracias al establecimiento de la *Teoría de Grupos* de **Marius Sophus Lie** (1842-1899) y **Klein**.

Tras realizar este descubrimiento, **Klein** se percató, que antes que él, **Möbius** ya había hallado en uno de sus estudios, de manera implícita, esta teoría. **Möbius** investigó las denominadas relaciones geométricas entre un par de figuras, y enumeró las siguientes: *igualdad*, *semejanza*, *afinidad* y *colineación*. Establecía una clara relación entre igualdad y semejanza, considerando mínima su diferenciación. Esta relación conformaría el llamado “grupo principal” en el *Programa de Erlangen*. Consideraba a las afinidades más generales, y en ellas incluía la igualdad y semejanza. Por último, la transformación más general era la colineación, adelantándose a la consideración de que la *geometría proyectiva* contiene a la *geometría afín*.

Resulta sorprendente la investigación llevada a cabo por **Möbius**, teniendo en cuenta que en el año que la realiza, 1827, no había sido concebida la *Teoría de Grupos*, que si era conocida por **Klein**.

En relación a la *Teoría de Grupos*, hay que destacar a **Camille Jordan** (1838-1922). Con la publicación de su *Memoria sobre los grupos de movimientos*, se pudieron estudiar las transformaciones geométricas a partir del concepto de grupo.

GEOMETRÍA EN LA ACTUALIDAD. Fractales y Transformaciones

Con el descubrimiento de *Klein* en su *Programa de Erlangen*, han sido numerosos los matemáticos que han continuado realizando investigaciones en relación a las *transformaciones geométricas*. Tal es el caso de **John Henry Constantine Whitehead** (1861-1947), quién estableció el concepto de Geometría con la siguiente definición: “*estudio de la invarianza bajo un grupo de transformaciones*”. Con esta idea, el espacio se estudiaría como una estructura en la que se establecen relaciones que pueden estar definidas por un conjunto de transformaciones.

Hermann Weyl (1885-1955), escribió los libros *The Classical Groups* y *Symmetry*. En el primero de ellos, *Weyl* desarrolló la teoría de grupos en términos de representación de matrices, fundamentales para entender la estructura simétrica de la mecánica cuántica, y en el segundo, más general, habla sobre la idea matemática de simetría: bilateral, de traslación, de rotación y similares, así como simetría ornamental y de cristales.

Destacan también **Élie Cartan** (1869-1951) y **Jean Dieudonné** (1906-1992), por sus investigaciones sobre los movimientos del plano, y su *Teorema de Cartan-Dieudonné*, que se enuncia: “Todo movimiento en el plano se puede descomponer en producto de a lo más tres simetrías respecto a rectas”.

Con el descubrimiento y formalización de la geometría fractal, por **Benoît Mandelbrot** (1924-2010), se abrió un nuevo horizonte para las transformaciones geométricas.

El estudio de las transformaciones geométricas sigue estando presente en la actualidad.

John Griggs Thompson (1932-) y **Jacques Tits** (1930-), fueron galardonados con el premio Abel de las ciencias en el año 2008, por la investigación que llevaron a cabo acerca de simetrías en teoría de grupos y **Robert P. Langlands** (1936-) ha recibido el 20 de Marzo de 2018 el Premio Abel de Matemáticas, por su teoría unificada de las matemáticas o “Programa de Langlands”, donde la Teoría de los Grupos de Galois tiene gran protagonismo, además de la teoría de números, el análisis armónico y la física matemática.

“Una de las características principales de la geometría que se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XIX, fue el entusiasmo con que estudiaron los matemáticos una gran variedad de transformaciones. De entre ellas, las que se hicieron más populares las que constituyen el grupo de transformaciones que define la llamada geometría proyectiva. Los orígenes de esta geometría estaban ya, en realidad, en las obras de Pascal y de Desargues, pero hasta comienzos del siglo XIX no se produjo su desarrollo sistemático, desarrollo debido especialmente a Poncelet.” (Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. (p. 661). Madrid: Alianza.).

3.1.3. Transformaciones Geométricas: Definición y Escritura Matricial

▪ **Definición:**

Una transformación geométrica del plano o del espacio es una aplicación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ó $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, respectivamente. Con más generalidad, llamamos también transformación geométrica a una aplicación que quizás no esté definida en todos los puntos de \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^3 , es decir, una aplicación $T:U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ó $T:U \rightarrow \mathbb{R}^3$, siendo U el conjunto de puntos donde T está definida. En adelante denotaremos por E al espacio afín \mathbb{R}^2 ó \mathbb{R}^3 , indistintamente.

▪ **Definición:**

Una transformación geométrica $T: E \rightarrow E$ se llama:

- *Aplicación afín.* Si la aplicación definida por $\vec{T}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{T(P)T(Q)}$ es lineal.
- *Afinidad.* Si es una aplicación afín biyectiva.
- *Movimiento.* Si $d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$, es decir, si conserva formas y tamaños.
- *Semejanza.* Si es la composición de un movimiento con una homotecia, es decir, si conserva las formas.

Toda aplicación afín $T : E \rightarrow E$ queda determinada por la imagen de un punto, O, y por una aplicación lineal, \vec{T} ; explícitamente: $T(P) = T(O) + \vec{T}(\overrightarrow{OP})$. Este hecho, nos permite caracterizar las aplicaciones afines $T : E \rightarrow E$ cuando están expresadas mediante coordenadas en una referencia $R = \{O, B\}$. En concreto, si:

$$T(x_1, \dots, x_n)_R = (x'_1, \dots, x'_n)_R; n = 2, 3$$

Plano: $T(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2)$ o bien, $T(x, y) = (x', y')$

Espacio: $T(x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3)$ o bien, $T(x, y, z) = (x', y', z')$

T es afín si y sólo si cada x'_i es combinación lineal de $1, x_1, \dots, x_n$; $n = 2, 3$. Podemos asociar a T una matriz en una referencia $R = \{O; B\}$ de E. Esta matriz será llamada matriz de T en R y la denotaremos por $M(T)_R$:

$$M(T)_R = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right); n = 2, 3$$

Plano: $M(T)_R = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} \end{array} \right)$

La ecuación matricial de T en la referencia R es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Donde $(a_1, a_2) = T(O)$ y $(a_{ij}) = M(\vec{T})_B$.

Espacio:

$$M(T)_R = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

La ecuación matricial de T en la referencia R es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donde $(a_1, a_2, a_3) = T(O)$ y $(a_{ij}) = M(\vec{T})_B$.

Una aplicación afín T queda determinada por las imágenes de tres puntos de \mathbb{R}^2 no alineados P_1 , P_2 y P_3 . Si P es un punto genérico de \mathbb{R}^2 , entonces $\overrightarrow{P_1P} = a \overrightarrow{P_1P_2} + b \overrightarrow{P_1P_3}$ ya que $\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\}$ es base de \mathbb{R}^2 . Luego como $P = P_1 + \overrightarrow{P_1P} = P_1 + a \overrightarrow{P_1P_2} + b \overrightarrow{P_1P_3}$ al aplicar T se obtiene:

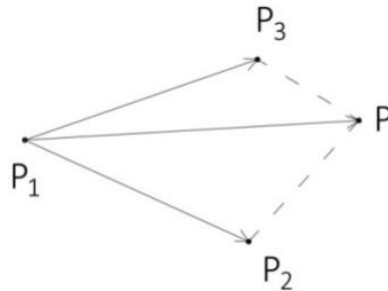


Figura 3.1.46. Visualización.

$$T(P) = T(P_1) + \vec{T}(\overrightarrow{P_1P}) = T(P_1) + a \cdot \overrightarrow{T(P_1)T(P_2)} + b \cdot \overrightarrow{T(P_1)T(P_3)},$$

Y así, $T(P)$ está determinado por sus valores en P_1 , P_2 y P_3 .

MOVIMIENTOS EN \mathbb{R}^2

A continuación se establecen las propiedades y clasificación de los movimientos del plano.

▪ Propiedades:

- Todo movimiento es una afinidad. $|M(T)| \neq 0$.
- Sea T una afinidad y $R = \{0; B\}$ una referencia ortonormal, entonces:
 T es movimiento $\Leftrightarrow M(T)_R$ es ortogonal, es decir $M(T) \cdot M(T)^t = I$.
- En toda matriz ortogonal M se cumple $\det(M) = \pm 1$.
 En efecto, $M(T)$ es una matriz ortogonal $M(T) \cdot M(T)^t = I \Rightarrow |M(T)| \cdot |M(T)^t| = |M(T)|^2 = 1 \Rightarrow |M(T)| = \pm 1$.

Esto permite distinguir dos tipos de movimientos:

- *Movimientos Directos*, si $\det(M(\vec{T})_B) = 1$
- *Movimientos Indirectos o Inversos*, si $\det(M(\vec{T})_B) = -1$

(Obviamente $\det(M(T)_R) = \det(M(\vec{T})_B)$)

- La composición de movimientos es un movimiento. El inverso de un movimiento es un movimiento.

Para describir la totalidad de los movimientos en \mathbb{R}^2 , denotaremos por $F(T)$ el conjunto de puntos fijos de un movimiento T , es decir:

$$F(T) = \{P \in \mathbb{R}^2 / T(P) = P\}$$

El conjunto $F(T)$ es una variedad afín y por tanto es, o todo el plano \mathbb{R}^2 , o bien una recta, o bien un punto, o bien el vacío. Así se tienen las situaciones siguientes:

1. Si $F(T) = \mathbb{R}^2$, entonces *T es la identidad.*
2. Si $F(T)$ es una recta r , entonces *T es la simetría con respecto a r.*
3. Si $F(T) = \{P\}$, entonces *T es un giro de centro P y ángulo α .*
4. Si $F(T) = \emptyset$, entonces: si *T es Movimiento Directo*, es *una traslación* y si *T es Movimiento Inverso*, es una *simetría deslizante*.

$F(T)$		MOVIMIENTO
\mathbb{R}^2	\rightarrow	Identidad
r	\rightarrow	Simetría de eje r
P	\rightarrow	Giro de centro P y ángulo α .
\emptyset	\rightarrow	$\det(M(T)) = 1$ Traslación
		$\det(M(T)) = -1$ Simetría deslizante

En cuanto a la **orientación**, un movimiento T es directo o:

$$\textit{Directo} \text{ o conserva la orientación si } \det(M(T)) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Identidad} \\ \text{Traslación} \\ \text{Giro} \end{cases}$$

$$\textit{Inverso} \text{ o no conserva la orientación, si } \det(M(T)) = -1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Simetría} \\ \text{Simetría deslizante} \end{cases}$$

El conjunto de los movimientos del plano, con la composición de aplicaciones, tiene estructura de grupo, este grupo es llamado Grupo de Movimientos del Plano.

SUBGRUPOS NOTABLES DEL GRUPO DE MOVIMIENTOS EN EL PLANO

- Denotaremos como M , al grupo de movimientos en el plano.
- El conjunto T , de todas las traslaciones de vector $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, es un subgrupo del grupo M .
- A continuación estudiamos los grupos de simetría G en función de su intersección con T .

- **Grupos puntuales o de Leonardo:**

Son los subgrupos G de M , que no contienen traslaciones, es decir, tal que:

$$G \cap T = \{id\}$$



Figura 3.1.47. Rosetón de la Catedral de León.

- **Frisos:**

Son los subgrupos G de M , que contienen traslaciones en una única dirección, es decir, tal que:

$$G \cap T = \{t_{m\vec{a}}/m \in \mathbb{Z}, \vec{a} \in \mathbb{R}^2, \vec{a} \neq \vec{0}\}$$



Figura 3.1.48. Friso de la iglesia San Juan de Baños.

- **Grupos Cristalográficos:**

Son los subgrupos G de M , que contienen traslaciones en dos direcciones linealmente independientes, es decir, tal que:

$$G \cap T = \{t_{m\vec{a}} \circ t_{n\vec{b}} = t_{m\vec{a}+n\vec{b}} / \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \mathbb{R}^2, m, n \in \mathbb{Z}\}$$



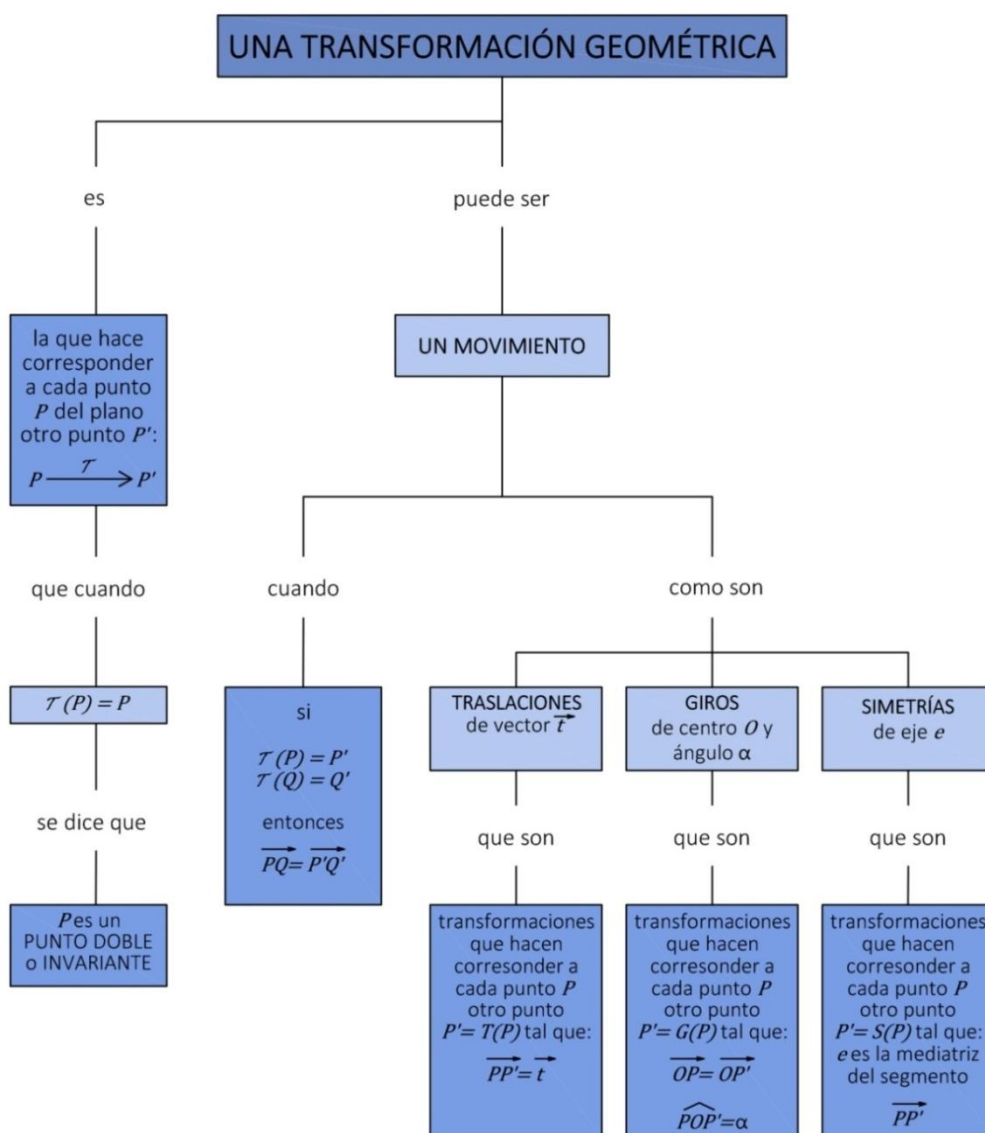
Figura 3.1.49.a y Figura 3.1.49.b. Grupos Cristalográficos de la Alhambra.

3.2. ANÁLISIS COGNITIVO

Este análisis se realiza con el objeto de conocer que capacidades de aprendizaje tienen los alumnos, y de esta manera planificar una docencia adaptada. Se estudian las dificultades que suelen presentar, los errores más frecuentes, pero también, cuales son los conceptos de fácil asimilación.

Tras llevar a cabo las reflexiones apropiadas, se concretan los logros que se esperan conseguir, así como los posibles problemas que puedan surgir. Consecuentemente, estas expectativas determinarán los objetivos personales del docente.

3.2.1. Mapa conceptual:



Mapa Conceptual: Tomado de

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M^a. J. y Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3*. Editorial Anaya.

3.2.2. Expectativas de aprendizaje:

Centrándonos en el tema *Movimientos en el Plano*, podemos establecer cinco temáticas diferentes, sobre las cuales se plantean una serie de metas a conseguir por el profesor a través de su enseñanza, y en consecuencia, a conseguir por el alumno, con su aprendizaje. En relación a estos cinco focos del tema, se extraen una serie de fines, que corresponden a aquellas expectativas que el docente pone para el aprendizaje del alumno.

Las temáticas, y los objetivos que llevan asociados cada una de ellas, son:

A) Identificación y Representación de Movimientos.

1. Identificar figuras congruentes.
2. Reconocer las transformaciones que llevan una figura a otra mediante movimientos en el plano.
3. Clasificar los movimientos en el plano: Movimientos Directos y Movimientos Inversos.
4. Distinguir y describir cada uno de los movimientos siguientes: Traslación, Giro y Simetría.
5. Localizar, en las figuras transformadas mediante movimientos, los elementos dobles o invariantes.
6. Generar creaciones propias mediante aplicación de un sólo movimiento o mediante composición de movimientos, utilizando el grafismo manual o herramientas informáticas.
7. Reconocer y analizar movimientos en el plano presentes en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

B) Movimientos Directos: Traslación y Giro.

8. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un vector de traslación dado.
9. Identificar el vector generador de una determinada traslación.
10. Analizar y justificar, si una recta paralela al vector de traslación, se mantiene invariante.
11. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un giro dado.
12. Deducir el centro y el ángulo de un giro aplicado a una figura dada.
13. Analizar y justificar que una recta a la que se aplica un giro de 180° se mantiene invariante.

C) Movimientos Inversos: Simetría.

14. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un eje de simetría dado.
15. Identificar el eje de simetría en un movimiento de simetría axial.
16. Analizar y justificar que el eje de simetría en una simetría axial es el único elemento que se mantiene invariante.
17. Deducir el centro de simetría en una simetría central.

18. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un centro de simetría dado.

19. Analizar y justificar que todas las rectas que pasan por un centro de simetría son invariantes.

D) Composición de Movimientos.

20. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de una composición de movimientos.

21. Identificar los movimientos que han sido aplicados a una figura determinada para dar como resultado su transformada.

E) Frisos, Mosaicos y Rosetones.

22. Razonar acerca de la construcción de frisos y realizar una composición de uno de los mismos, a partir de un motivo dado y un vector de traslación.

23. Identificar y reconocer frisos y sus elementos generadores presentes en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

24. Razonar acerca de la construcción de mosaicos y generar alguno de ellos, a partir de un motivo dado y dos vectores de traslación que permitan el llenado del plano.

25. Identificar y reconocer mosaicos presentes en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

26. Razonar acerca de la construcción de rosetones y realizar dicha composición a partir de un motivo dado y un giro concreto.

27. Identificar y reconocer rosetones presentes en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

Establecidos los objetivos concretos para lograr el buen aprendizaje, se relacionan con la Competencias Clave. Es fundamental el desarrollo de las Competencias en los alumnos, no sólo por ser cumplimiento obligatorio marcado por la legislación, sino que también se obtiene con esta práctica la evolución significativa en el aprendizaje.

En la siguiente tabla se asocian los objetivos concretos que se establecen para alumnos a nivel general, y las competencias a las que satisface el logro de dichos objetivos.

C.Clave:	CCL	Competencia en Comunicación Lingüística.
	CMCT	C. Matemática y Competencias Básicas en Ciencia y Tecnología.
	CD	C. Digital
	CAA	C. de Aprender a Aprender
	CSC	C. Social y Cívica
	SIE	Sentido de Iniciativa y Espíritu Emprendedor
	CC	Conciencia y expresiones Culturales

OBJETIVOS	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIE	CC
1. Identificar figuras congruentes.		X					
2. Reconocer las transformaciones que llevan una figura a otra mediante movimientos en el plano.		X		X			
3. Clasificar los movimientos en el plano: Movimientos Directos y Movimientos Inversos.	X	X					
4. Distinguir y describir cada uno de los movimientos siguientes: Traslación, Giro y Simetría.	X	X	X				
5. Localizar, en las figuras transformadas mediante movimientos, los elementos dobles o invariantes.		X		X			
6. Generar creaciones propias mediante aplicación de un sólo movimiento o mediante composición de movimientos, utilizando el grafismo manual o herramientas informáticas.		X		X		X	
7. Reconocer y analizar movimientos en el plano presentes en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.		X		X	X		X
8. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un vector de traslación dado.	X	X		X		X	
9. Identificar el vector generador de una determinada traslación.		X					
10. Analizar y justificar, que una recta paralela al vector de traslación se mantiene invariante.		X		X			
11. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un giro dado.	X	X		X		X	
12. Deducir el centro y el ángulo de un giro aplicado a una figura dada.		X		X			
13. Analizar y justificar si una recta a la que se aplica un giro de 180° se mantiene invariante.		X		X			
14. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un eje de simetría dado.	X	X		X		X	
15. Identificar el eje de simetría en un movimiento de simetría axial.		X		X			
16. Analizar y justificar que el eje de simetría en una simetría axial es el único elemento que se mantiene invariante.		X		X			
17. Deducir el centro de simetría en una simetría central.	X	X		X		X	

18. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un centro de simetría dado.		X		X			
19. Analizar y justificar que todas las rectas que pasan por un centro de simetría son invariantes.		X		X			
20. Construir y describir la construcción de la transformada de una figura, resultante de la aplicación de una serie de movimientos.	X	X		X		X	
21. Identificar los movimientos que han sido aplicados a una figura determinada para dar como resultado su transformada.		X		X			
22. Razonar acerca de la construcción de frisos y realizar una composición de uno de los mismos, a partir de un motivo dado y un vector de traslación.	X	X		X		X	
23. Identificar y reconocer frisos y sus elementos generadores en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.		X	X	X	X		X
24. Razonar acerca de la construcción de mosaicos y generar alguno de ellos, a partir de un motivo dado y dos vectores de traslación que permitan el llenado del plano.	X	X		X		X	
25. Identificar y reconocer mosaicos y sus elementos generadores en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.		X	X	X	X		X
26. Razonar acerca de la construcción de rosetones y realizar dicha composición a partir de un motivo dado y un giro concreto.	X	X		X		X	
27. Identificar y reconocer rosetones y sus elementos generadores en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. .		X	X	X	X		X

Recogiendo estas reflexiones, acerca de como los objetivos didácticos de contenido ayudan a la impulsión de las competencias, podemos deducir con la siguiente tabla una serie de conclusiones:

	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIE	CC
- Identificación y Representación de Movimientos.	2	7	1	4	1	1	1
- Movimientos Directos: Traslación y Giro.	2	6	0	5	0	2	0
- Movimientos Inversos: Simetría.	2	6	0	6	0	2	0
- Composición de Movimientos.	1	2	0	2	0	1	0
- Frisos, Mosaico y Rosetones.	3	6	3	6	3	3	3
TOTAL	10	27	4	23	4	9	4

Como es de esperar, la competencia más desarrollada, al conseguir el logro de los objetivos definidos, es la *Competencia Matemática*. Este hecho viene dado como consecuencia de estar tratando con conceptos matemáticos, que implican un aumento del conocimiento de la materia de manera directa. Le sigue de cerca la *Competencia de Aprender a Aprender*, ya que se invita al alumno a reflexionar y deducir, y con ello, conseguir una mayor autonomía en el estudio y desarrollo intelectual personal. Al plantear como objetivo la elaboración de descripciones y razonamientos, se impulsa el desarrollo de la *Competencia Lingüística*. Además, con actividades que conllevan la construcción de creaciones propias utilizando los distintos movimientos, se estimula el *Sentido de Iniciativa y Emprendimiento* de los estudiantes. Por último, se incentiva también el desarrollo de: la *Competencia Digital*, con el uso de programas informáticos como *Geogebra*, o *Kali*, para la construcción de frisos, mosaicos y rosetones; y las *Competencias Social y Cívica y Conciencia y Expresiones Culturales*, con la introducción, en las explicaciones, de ejemplos reales del entorno, o con la práctica de actividades que fomenten el trabajo en equipo.

El análisis realizado, y las conclusiones extraídas, nos permiten incidir en la necesidad de utilizar en el aula prácticas que se centren en la impulsión de las competencias que no se satisfacen con los objetivos conceptuales marcados. Sería conveniente realizar lecturas adicionales, juegos, actividades y problemas..., que consigan generar en el alumno ciertas habilidades con el uso de las nuevas tecnologías, que le hagan tomar conciencia de la importancia de las buenas relaciones interpersonales, así como del valor que tiene la cultura que le rodea.

3.2.3. Limitaciones de aprendizaje:

Como en otras muchas lecciones, en esta unidad algunos conocimientos pueden generar ciertos problemas a la hora de ser estudiados. Por ello, el profesor debe prever cuales son los temas que conllevan más controversia, y así, anticiparse al problema y solventarlo de manera óptima.

Para concretar los problemas que pueden sufrir los alumnos en el estudio de la unidad, vamos a diferenciar entre los factores: dificultad (D) y error (E). Entendemos por *dificultad*, en este contexto, la interpretación de que un determinado concepto alberga gran complejidad, y por tanto el estudiante debe trabajar duro para llegar a comprenderlo. Y *error*, a la creencia, por parte del alumno, de que algo está aprendido y asimilado, y sin embargo, no es cierto, porque el concepto ha calado en el estudio de manera confusa.

- Algunas de las *dificultades* que pueden presentar los alumnos en el aprendizaje de esta unidad son:

D.1. Identificar un vector de traslación en posición oblicua.

D.2. Reconocer el centro y ángulo de giro, entre una figura y su transformada a partir de un giro.

D.3. Distinguir entre simetría axial y simetría central.

D.4. Localizar el centro de simetría que determina una simetría central.

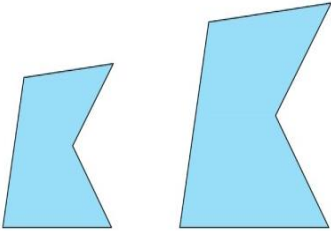
D.5. Identificar el eje de simetría entre una figura y su homóloga, cuando éste no es paralelo o perpendicular a alguno de los bordes de la figura.

D.6. Dudar respecto el orden correcto los movimientos que intervienen en una composición.

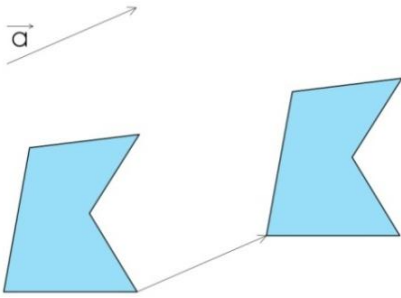
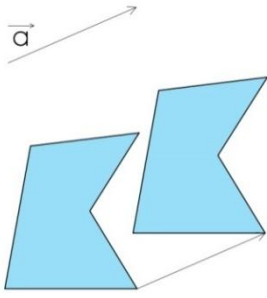
D.7. Encontrar el elemento mínimo generador de un friso, mosaico o rosetón.

- A su vez, se pueden determinar ciertos *errores* comunes a muchos de los estudiantes:

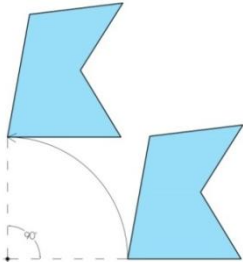
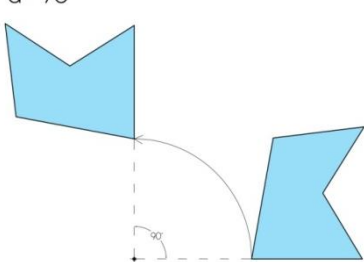
E.1. Identifica como movimientos, transformaciones que no mantienen forma o tamaño.

	<p>ERROR E.1: Movimiento</p>
	<p>SOLUCIÓN CORRECTA E.1: Transformación, No movimiento, No conserva tamaño</p>

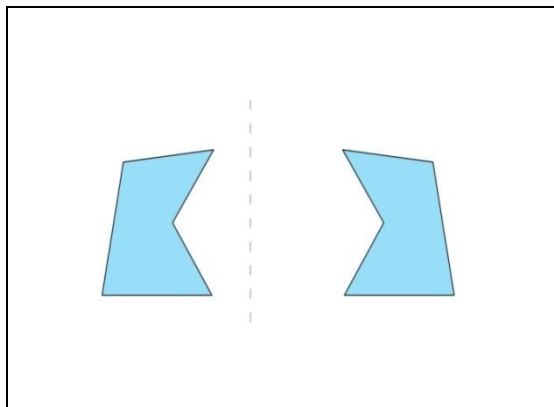
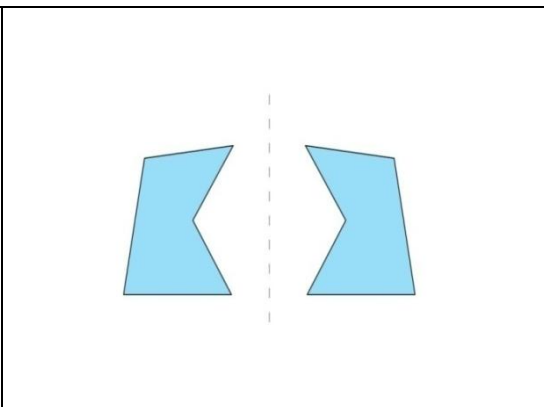
E.2. Realizar la traslación de una figura aplicando de manera incorrecta el vector de traslación.

	
<p>ERROR E.2</p>	<p>SOLUCIÓN CORRECTA E.2</p>

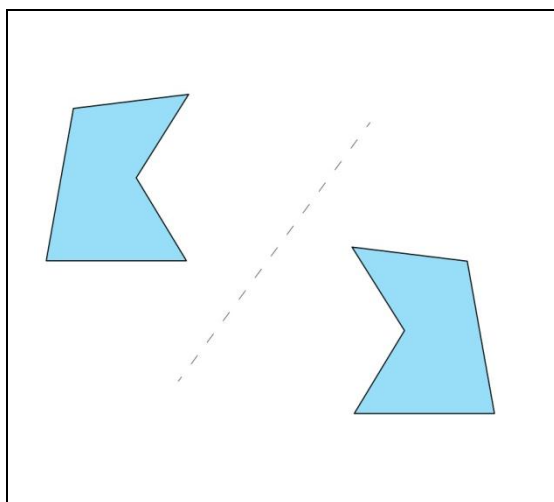
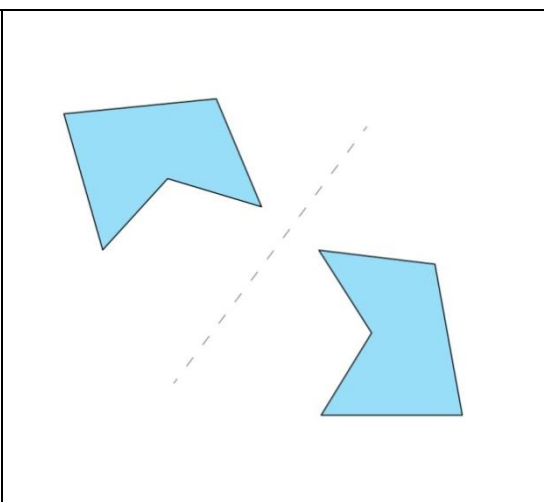
E.3. Aplicar un giro de manera incorrecta.

	
<p>ERROR E.3</p>	<p>SOLUCIÓN CORRECTA E.3</p>

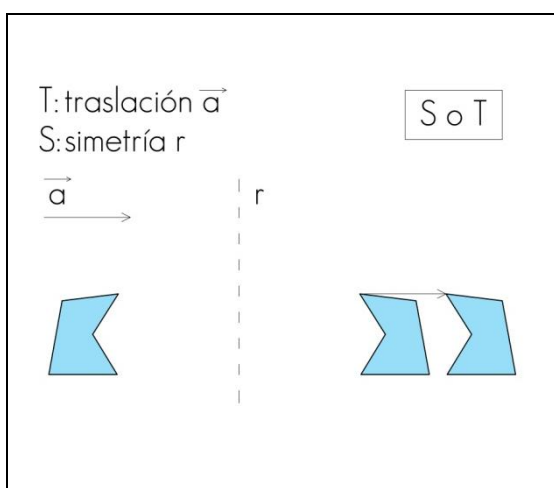
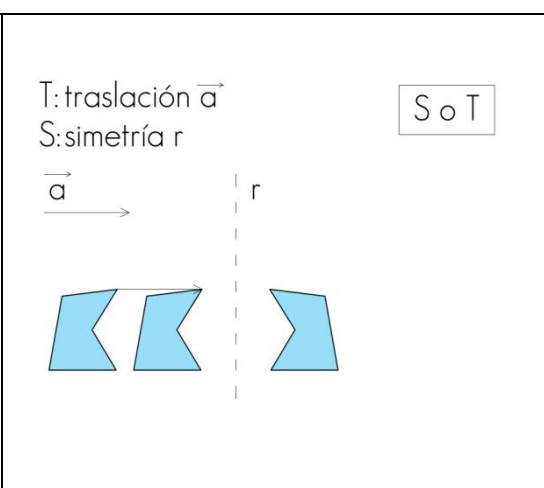
E.4. Construir la figura homóloga a otra, aplicando una simetría sin guardar la equidistancia al eje entre los puntos iniciales y los transformados.

	
ERROR E.4	SOLUCIÓN CORRECTA E.4

E.5. Reconocer de manera errónea ejes de simetría axial.

	
ERROR E.5	SOLUCIÓN CORRECTA E.5

E.6. Realizar la composición de dos o más movimientos en orden equivoco.

<p>T: traslación \vec{a} S: simetría r</p> <p>\vec{a} →</p>  <p style="text-align: right;">S o T</p>	<p>T: traslación \vec{a} S: simetría r</p> <p>\vec{a} →</p>  <p style="text-align: right;">S o T</p>
ERROR E.6	SOLUCIÓN CORRECTA E.6

A continuación se establecen las relaciones que existen entre los objetivos conceptuales definidos previamente, y cada una de las dificultades y errores que pueden surgir al intentar cumplir con dichos objetivos, ya que estos se basan en los conocimientos a adquirir por el alumno.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
D. 1									X																		
D. 2					X						X	X															
D. 3		X	X	X	X		X								X												
D. 4																	X	X	X								
D. 5													X	X	X												
D. 6																				X	X						
D. 7																						X		X		X	
E. 1		X																									
E. 2						X	X																				
E. 3						X				X																	
E. 4						X				X																	
E. 5													X				X										
E. 6															X			X									
E. 7																				X							

Esta correlación, sirve al docente para establecer las medidas necesarias cuando proceda a explicar un concepto que engloba dificultades o errores determinados. Así pues, para alcanzar el objetivo propuesto, se debe adaptar una didáctica que solucione el problema, logrando el entendimiento por parte del alumno.

3.2.4. Oportunidades de aprendizaje:

En este apartado se pretende demostrar la posibilidad de contribuir a mejorar el aprendizaje con el uso de actividades personalizadas. Estas actividades permiten minorar las dificultades que presentan los alumnos y la posibilidad de cometer errores. Asimismo, por medio de actividades alternativas, podemos impulsar el desarrollo de aquellas competencias que quedan escasamente cubiertas con los objetivos que únicamente centran su atención en el desarrollo matemático. Además, se consigue aumentar la motivación en los alumnos y demostrar la aplicación y utilidad de las matemáticas de una manera más atractiva para ellos.

Ejemplos de actividades:

Actividad 1:

Copia en tu cuaderno una figura similar a la pajarita de las imágenes.

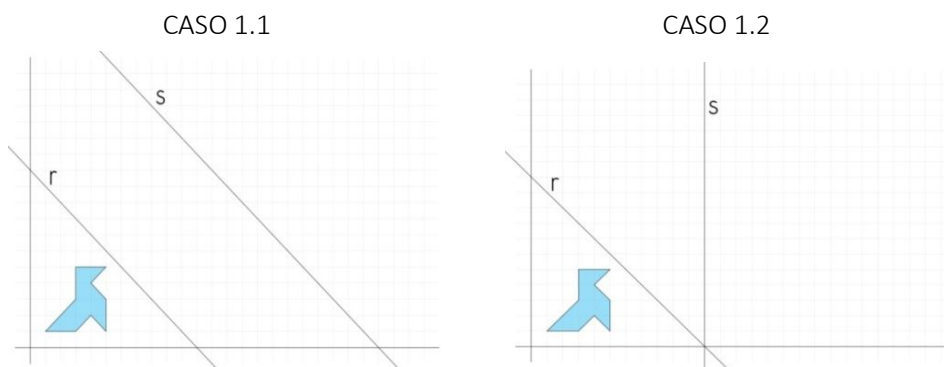
a) En el Caso 1, dibuja la figura simétrica a la dada respecto de la recta r , y después la simétrica de la obtenida respecto de la recta s .

¿Qué tipo de movimiento hay que aplicar a la figura inicial para transformarla en la que se genera después de aplicar las dos simetrías?

b) En el Caso 2, dibuja la figura simétrica a la dada respecto de la recta r , y después la simétrica de la obtenida respecto de la recta s .

¿Qué tipo de movimiento hay que aplicar a la figura inicial para transformarla en la que se genera después de componer las dos simetrías?

c) Razona y describe a qué tipo de movimiento corresponde la composición de dos simetrías de ejes paralelos y la composición de dos simetrías de ejes concurrentes.



Objetivos a desarrollar con la actividad:

2. Reconocer las transformaciones que llevan una figura a otra mediante movimientos en el plano.
4. Distinguir y describir cada uno de los movimientos siguientes: Traslación, Giro y Simetría.
6. Generar creaciones propias mediante aplicación de un sólo movimiento o mediante composición de movimientos, utilizando el grafismo manual o herramientas informáticas.
9. Identificar el vector generador de una determinada traslación.
12. Deducir el centro y el ángulo de un giro aplicado a una figura dada.
14. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un eje de simetría dado.
20. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de una composición de movimientos.
21. Identificar los movimientos que han sido aplicados a una figura determinada para dar como resultado su transformada.

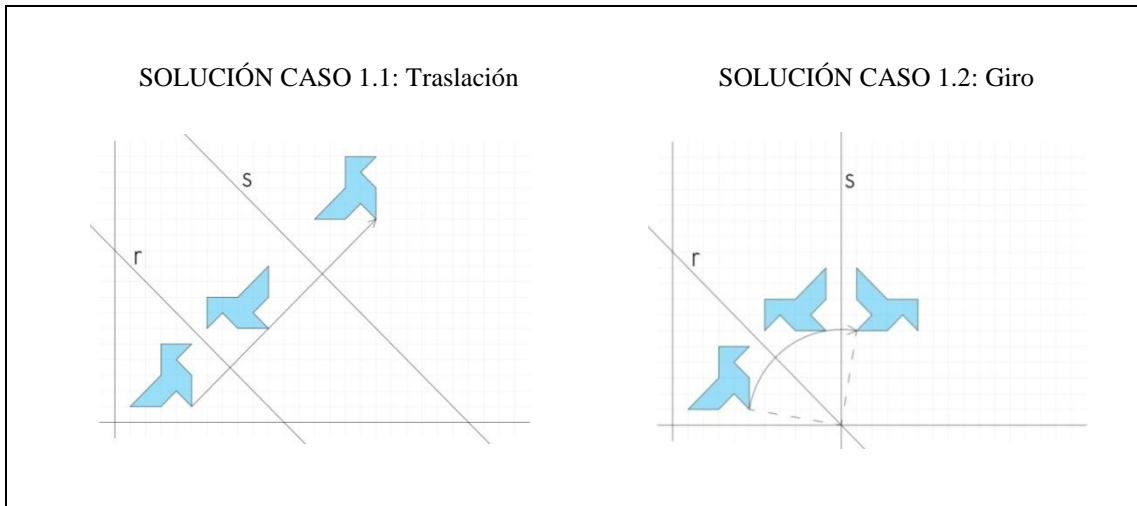
Dificultades y errores que pueden surgir:

D.1. Identificar un vector de traslación oblicuo.

D.2. Reconocer el centro y ángulo de un giro de una figura y su transformada a partir de un giro.

E.2. Realizar la traslación de una figura aplicando de manera incorrecta el vector de traslación.

E.5. Construir la figura homóloga a otra aplicando una simetría sin guardar la equidistancia al eje entre los puntos iniciales y los transformados.



Actividad 2:

Introducción: El Arte Nazarí

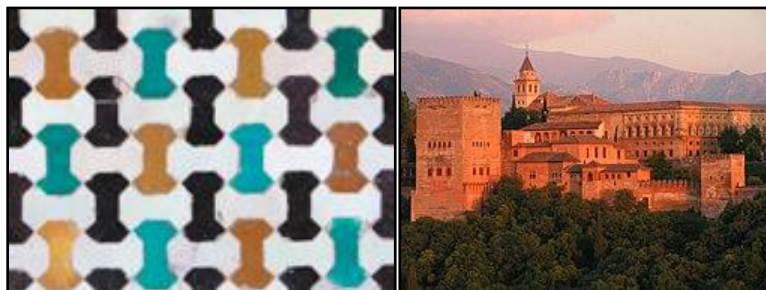


Figura 3.2.1. (Ac.2) Alhambra

Figura 3.2.2. (Ac.2) Grupos Cristalográficos de la Alhambra.

La dinastía nazarí se inicia con el Sultán Muhamad ibn Yusuf Ibn Nasr en 1237, consolidándose en el reino de Granada, como oposición al avance cristiano tras la batalla de las Navas de Tolosa. Y perdura hasta la capitulación de Boabdil, ante los Reyes Católicos, en 1492.

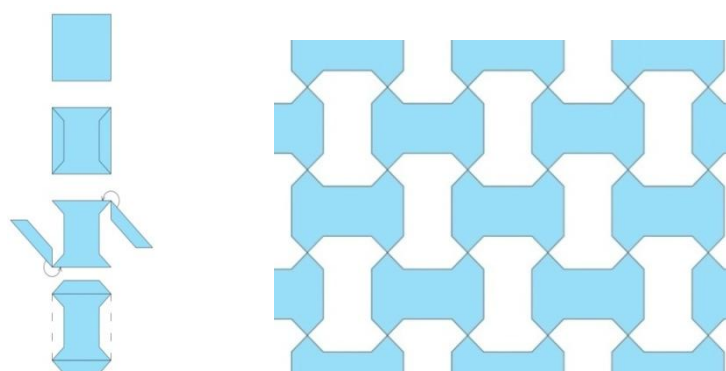
De esta época quedan numerosas muestras que avalan el alto nivel de conocimiento científico y el refinamiento cultural y artístico alcanzado en torno a la corte de los reyes nazaríes.

La obra más emblemática es la Alhambra (Qatal al-Hamra, el castillo rojo): palacio, fortificación, jardín y lugar para el deleite de los sentidos.

Una característica del arte nazarí consiste en la utilización del mosaico como elemento

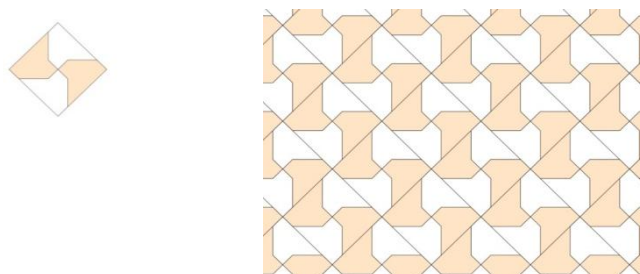
decorativo, del que sus artesanos eran verdaderos maestros. El análisis de estos mosaicos muestra un profundo conocimiento de la geometría.

Observa, como por ejemplo, en el llamado “multihueso”, su forma básica se obtiene de una transformación del cuadrado:

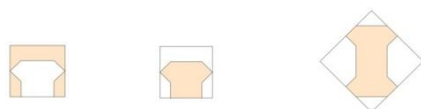


Problema:

La industria actual copia los diseños de los mosaicos nazaríes pero en vez de construirlos pieza a pieza, que sería mucho más costoso en dinero y tiempo, lo consigue mediante baldosas cuadradas e iguales, con cuya composición se obtiene el dibujo deseado. Observa la ilustración siguiente:



a) ¿Sabrías decir cuáles de estas baldosas sirven para reproducir el “multihueso”?



b) ¿Te atreves a descubrir alguna por tu cuenta?

Actividad 1: Elaboración propia.

Actividad 2: Tomada de

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M^a. J. y Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3*. Editorial Anaya.

3.3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

Para realizar una propuesta didáctica y, por consiguiente, planificar una unidad, es necesario realizar un análisis de instrucción, es decir, cómo vamos a comprobar el grado de aprendizaje obtenido por el alumno. Basado en el análisis de contenido y el cognitivo, el de instrucción estudia las tareas seleccionadas para ser realizadas por los alumnos. Las tareas van a ser elegidas en función de su afinidad con los objetivos establecidos, según su adecuación con respecto a la voluntad de minimizar dificultades y posibles errores, y también apoyándose en la idea de motivar y generar interés por el tema en los alumnos.

El estudio de las actividades se realiza en relación a tres factores:

- **Contenido matemático.** (*Temática de las actividades: Movimientos en el Plano. Aparecerán contenidos matemáticos correspondientes a unidades anteriores, que deben ser conocidos por el alumno*).
- **Relación con el contexto y aproximación a situaciones de la vida cotidiana.** (*Enfocar los problemas a situaciones de la vida real es fundamental para que el alumno pueda enfrentarse a situaciones de su vida futura. Además, también destaca el hecho de acercar las matemáticas a los alumnos, mostrando con ello la necesidad de su aprendizaje y la infinidad de aplicaciones que tienen en su contexto más cercano*).
- **Implicación del razonamiento personal.** (*Las actividades pueden requerir de un mayor o menor razonamiento para alcanzar la solución. Habrá actividades metódicas de soluciones inmediatas, y otras de mayor complejidad, donde alzar la solución implique un mayor detenimiento y reflexión*).

3.3.1. Contenido matemático:

Las actividades han de estar estrechamente relacionadas con el tema tratado en la unidad. Los ejercicios y problemas requerirán de conocimientos matemáticos que el alumno ha adquirido previamente en las sesiones de docencia impartidas por el profesor.

Con la realización de las actividades se debe poner en práctica la representación gráfica de los movimientos del plano; el alumno tiene que ser, a su vez, capaz de identificar traslaciones, giros y simetrías, así como frisos, mosaicos y rosetones, en una composición dada; invitarán también estas tareas a la localización de elementos invariantes de cada uno de los movimientos, así como aquellos componentes generadores de dicho movimiento (vectores, ángulos de giro, centros de giro o centros y ejes de simetría).

3.3.2. Relación con el contexto y aproximación a situaciones de la vida cotidiana:

En esta unidad, la conexión de las actividades con la vida diaria es directa. En infinidad de diseños presentes en nuestro contexto aparecen simetrías, traslaciones, giros... Es importante aprovechar este hecho, para demostrar al alumno la importancia del aprendizaje de los movimientos en el plano.

Se pueden extraer obras presentes en la arquitectura, pintura, y arte en general, para invitar a los alumnos a buscar en ellas distintos movimientos. Además, es interesante realizar actividades que propongan realizar una búsqueda de situaciones cotidianas que reproduzcan los contenidos que se están estudiando, haciendo con ello al alumno protagonista del estudio. Ejemplificando los contenidos con situaciones que los estudiantes practican diariamente, como mirarse a un espejo o comprobar el giro de las agujas de un reloj, contribuimos a la reflexión y al razonamiento.

3.3.3. Implicación del razonamiento personal:

Las actividades presentan distintos niveles de dificultad. Es importante comenzar a poner en práctica los conocimientos aprendidos con ejercicios sencillos, para ir aumentando la complejidad a medida que el alumno va asimilando lo aprendido.

Ejercicios sistemáticos:

Las actividades características del inicio de la unidad, serán ejercicios metódicos, repetitivos, donde se pida al alumno la realización de representaciones gráficas y la identificación de movimientos sencillos.

Ejercicios y Problemas relacionados con el contexto:

A medida que avanza la unidad y el alumno sabe reproducir con facilidad traslaciones, giros y simetrías, se introducen actividades que lleven a la reflexión de cómo los movimientos se presencian en el día a día.

Ejercicios y Problemas que requieren razonamientos matemáticos:

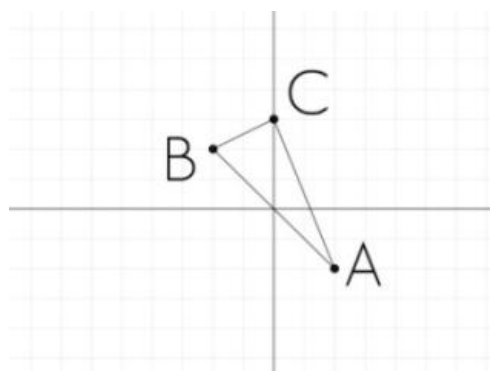
Una vez se dominen las actividades más sencillas, se procederá a la realización de tareas más complejas, que conlleven razonamientos matemáticos más profundos.

Ejemplos de actividades:

Actividad 3: Contenido matemático:

Dibuja en tu cuaderno unos ejes de coordenadas. Considera el giro G con centro de giro el origen, y ángulo $\alpha = 90^\circ$. Dibuja un triángulo ABC de puntos $A(2,-2)$, $B(-2,2)$, $C(0,3)$.

- Transforma el triángulo mediante el giro G y señala el nuevo triángulo $A'B'C'$.
- ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y B ?
- ¿En qué se transforma una circunferencia de centro el origen, y radio 2?



Actividad 4: Relación con el contexto y aproximación a situaciones de la vida cotidiana.

La figura de la imagen corresponde a un rosetón presente en la Catedral de León.

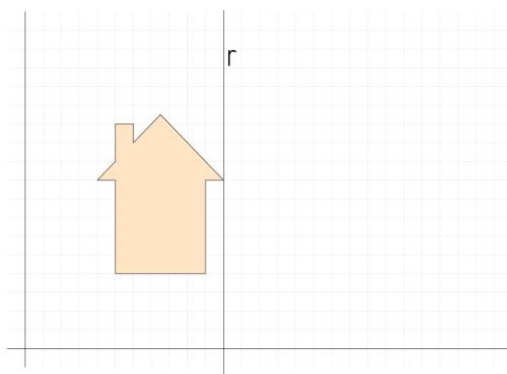
- a) ¿Cuál es el giro que deja invariante este rosetón?
- b) ¿Hay algún otro movimiento que cumpla esta condición?



Figura 3.3.1. (Ac.4) Rosetón de la Catedral de León.

Actividad 5: Implicación del razonamiento personal. Ejercicios sistemáticos.

Aplica a la figura siguiente una simetría de eje r . ¿Existe algún punto invariante en este movimiento?

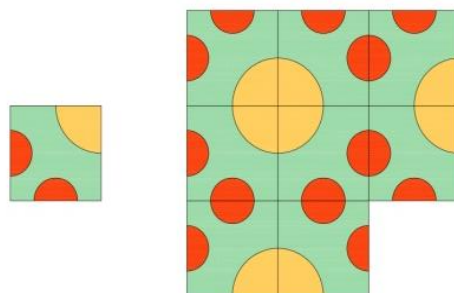


Actividad 6: Implicación del razonamiento personal. Ejercicios y Problemas relacionados con el contexto.

Queremos alicatar una pared de 4,6 m x 3 m con azulejos cuadrados de 20 cm de lado, como este:

- a) Completa en tu cuaderno un mosaico de 7 x 7 azulejos.
- b) Averigua cuántos círculos grandes y cuántos pequeños (completos) habrá en la pared alicatada.
- c) ¿Qué proporción de cada color (superficie) habrá en la pared?

Radio círculo grande: 10 cm; radio círculo pequeño: 4 cm.



Actividad 7: *Implicación del razonamiento personal. Ejercicios y Problemas que requieren razonamientos matemáticos.*

La composición de movimientos no cumple la propiedad conmutativa, es decir, que, en general el orden en el que se aplican dos movimientos influye en el resultado final. Sin embargo, si las transformaciones son de ciertos tipos, sí se cumple la propiedad conmutativa.

Justifica en cuales de los siguientes casos es así:

- Composición de dos traslaciones.
- Composición de dos giros del mismo centro.
- Composición de dos simetrías axiales.
- Composición de una traslación y un giro.

Actividades 3, 4 y 5: Elaboración propia.

Actividad 6 y 7: Tomadas de

Colera Jiménez, J., Gaztelu Alberio, I., Oliveira González, M^a. J. y Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3*. Editorial Anaya.

3.4. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LIBROS DE TEXTO

El libro de texto es un recurso muy utilizado en las aulas. Por ello, se pretende realizar en este epígrafe un análisis comparativo de libros de texto del curso 3º de ESO de Enseñanzas Académicas, concretamente en referencia a la unidad *Movimientos en el plano*.

Este análisis comparativo se desarrolla teniendo en cuenta la correlación del contenido de los libros seleccionados con el currículo básico vigente, establecido por la legislación para la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de ESO. Se atiende por tanto a las ya mencionadas leyes: **Real Decreto 1105/2014** y **Orden EDU 362/2015**.

Así mismo, se estudiarán algunos aspectos referidos a la Didáctica:

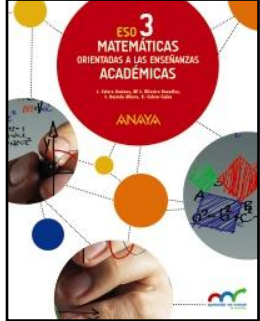

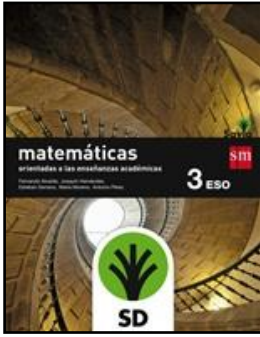
- Claridad y rigor en las explicaciones, profundidad en el tema tratado, introducciones motivacionales, expresión gráfica, actividades propuestas, ayuda al desarrollo de Competencias Clave, atención a la diversidad, u otros.

Finalmente, haciendo balance de los resultados obtenidos, se extraerán una serie de conclusiones.

3.4.1. Selección de los libros de texto:

Para elaborar esta comparación se han seleccionado tres libros de texto de editoriales distintas, pero enmarcados en la misma legislación. Los libros han sido utilizados en la enseñanza del presente año lectivo, en tres centros diferentes:

Centro de Educación Obligatoria público en núcleo rural (Ed. Anaya);
 Instituto concertado en núcleo urbano (Ed. Bruño);
 Instituto público en núcleo urbano (Ed. SM Savia).

<p>LIBRO DE TEXTO ANAYA:</p> <p>Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M^a. J. y Colera Cañas, R. (2015). <i>Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3</i>. Editorial Anaya. ISBN: 9788467852127</p> <p style="text-align: right;"><i>Figura 3.4.1.</i></p> <p style="text-align: center;">Portada del libro Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. Editorial Anaya</p>	
<p>LIBRO DE TEXTO BRUÑO:</p> <p>Arias, J.M. y Maza, I. (2015). <i>Matemáticas académicas 3^o ESO</i>. Editorial Bruño. ISBN: 9788469609682</p> <p style="text-align: right;"><i>Figura 3.4.2.</i></p> <p style="text-align: center;">Portada del libro Matemáticas académicas 3^o ESO. Editorial Bruño</p>	
<p>LIBRO DE TEXTO SM SAVIA:</p> <p>Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M. y Pérez, A. (2015). <i>Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3^o ESO</i>. Editorial SM Savia. ISBN: 9788467581386</p> <p style="text-align: right;"><i>Figura 3.4.3.</i></p> <p style="text-align: center;">Portada del libro Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3^o ESO. Editorial SM Savia</p>	

3.4.2. Análisis de los libros:

- **LIBRO DE TEXTO EDITORIAL ANAYA:**

El libro de texto de la editorial Anaya es el primero de los libros analizados.

Descripción de la unidad:

Introducción: (2 páginas).

La introducción del tema se lleva a cabo a través de la Historia y el Arte, con actividades propuestas donde el alumno reflexionará acerca de todo aquello que va a estudiar a lo largo de la unidad.

1. Transformaciones Geométricas: (1 página).

Define el concepto de *Transformación Geométrica*, apoyándose en ejemplos reales.

2. Movimientos en el Plano: (1 página).

Define el concepto de *Movimiento*, y realiza la clasificación entre *Movimientos Directos e Inversos*.

3. Estudio de las Traslaciones: (2 páginas).

Hace un recordatorio sobre *Vectores*, define *Concepto de Traslación*, clasifica las traslaciones como *Movimientos Directos*, y describe los *Elementos Dobles (Invariantes) en una Traslación*.

4. Estudio de los Giros: (2 páginas).

Define *Concepto de Giro*, clasifica los giros como *Movimientos Directos*, describe los *Elementos Dobles en un Giro* y analiza las *Figuras con Centro de Giro*.

En una nota adicional se explica el concepto de Simetría Central, y su asociación con un giro de ángulo 180°.

5. Simetrías Axiales: (1 página).

Define *Concepto de Simetría Axial*, clasifica las simetrías axiales como *Movimientos Inversos*, describe los *Elementos Dobles en una Simetría*.

6. Composición de Movimientos: (1 página).

Describe la *Composición de Movimientos*, analizando sus propiedades. En concreto, se centra en la *Composición de dos Simetrías Axiales*.

7. Mosaicos, Cenefas y Rosetones: (2 páginas).

Define el concepto de *Mosaico*, diferenciando entre mosaico regular y semiregular. Define también el concepto de *Friso o Cenefa* y el concepto de *Rosetón*. Añade a la explicación una nota extra, donde habla del Artista M. C. Escher y sus obras.

Ejercicios Resueltos: (1 página).

La unidad contiene algunos ejemplos resueltos, referidos al epígrafe *Mosaicos, Cenefas y Rosetones*.

Ejercicios y Problemas: (3 páginas).

Además de las incluidas en cada página de las explicaciones, se agrupan actividades al finalizar la lección para que el alumno practique lo aprendido.

Actividades Complementarias: (2 páginas).

Al finalizar el tema aparecen una serie de actividades diferentes, donde los estudiantes pueden ampliar sus conocimientos. Una de ellas “*Infórmate*”, propone al alumno la búsqueda de información sobre el Arte Nazarí y sus mosaicos. Otra actividad, “*Investiga*”, invita a la reflexión y deducción del alumno sobre la aplicación de lo aprendido. Por último, se incluye una sección, donde el alumno puede ser consciente de su aprendizaje realizando una “*Autoevaluación*”.

Adecuación de Objetivos y Contenidos:

El libro se adecúa a muchos de los ***Objetivos Generales de la Educación Secundaria***. En el lenguaje utilizado, subyacen valores de respeto e igualdad. Asimismo, se incluyen bastantes conocimientos de arte, cultura e historia, relacionados con los temas tratados en la unidad estudiada. Además, al tener acceso en esta editorial al “*libro del profesor*”, pude cerciorarme de la inclusión de propuestas, realizadas por la editorial, donde aparecen actividades que incentivan el uso de las nuevas tecnologías como fuentes de información, y también, donde se proponen actividades de trabajo cooperativo.

Respecto a los ***Objetivos Didácticos del Área de Matemáticas Orientas a las Enseñanza Académicas de 3º E.S.O.***, es apreciable que la editorial, en efecto, se marca el logro de estos fines. En sus explicaciones, actividades resueltas, así como en los ejercicios y problemas propuestos, se evidencia el interés por fomentar el razonamiento del alumno y la elaboración de estrategias y patrones matemáticos. También se incluyen actividades donde el alumno deba expresar verbalmente el proceso de resolución que ha aplicado a un determinado problema, así como los resultados y las conclusiones obtenidas tras estudiar con rigor el procedimiento seguido. Algunas de las explicaciones utilizan también ejemplos de la vida real para acercar las matemáticas a la vida cotidiana. Del mismo modo, muchos de los problemas describen situaciones del día a día, mostrando con ello como las matemáticas están insertas en el propio contexto. En cuanto al desarrollo de la autonomía del alumno, se promueve al incluir actividades que invitan a la reflexión y a la deducción personal. Por último, se aportan notas adicionales, donde se propone el uso de las nuevas tecnologías para poner en práctica lo aprendido. En este caso, como en los posteriores, la editorial incluye una aplicación online como recurso al que pueden acceder los alumnos.

Centrándonos ya en la unidad que nos acontece, *Movimientos en el plano*, los ***Objetivos que la legislación atribuye a dicha unidad, así como los personales que yo considero importantes para plantear en un libro de texto***, se reflejan de manera significativa. Se trabaja la identificación de transformaciones y movimientos, así como la de sus elementos variantes e invariantes. Todo ello, con ejemplos reales, de diseños cotidianos, manifestaciones artísticas o elementos de la naturaleza. Además, incluye contenido relacionado con el arte y la historia, que ayuda a despertar el interés en los alumnos.

En cuanto a los ***Contenidos***, están incluidos todos los presentes en el BOCYL (ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015) para esta unidad didáctica. El estudio de los planos y ejes de simetría en los cuerpos geométricos, no están incluidos en esta lección. La editorial Anaya separa este contenido de la unidad *Movimientos en el plano*, para incluirlo en la unidad *Cuerpos Geométricos*.

Destaco como puntos fuertes de este primer libro analizado: la claridad de las explicaciones; la organización de los puntos explicados; la profundidad que hace en el tema; el acierto en la

expresión gráfica, con el uso de numerosas fotografías que reflejan situaciones reales con la presencia de transformaciones y movimientos; y por supuesto, la inclusión de material motivacional a través de la historia y el arte.

▪ **LIBRO DE TEXTO EDITORIAL BRUÑO:**

El siguiente libro de texto que se estudia es el libro de la editorial Bruño.

Descripción de la unidad:

Introducción: (1 página).

La introducción del tema se realiza de manera breve y concisa, explicando la expresión del contenido de la unidad en el Arte y la Naturaleza.

1. Vectores y Traslaciones: (2 páginas).

Hace un recordatorio sobre *Vectores*, define *Concepto de Traslación*, y describe la *Composición de dos Traslaciones*.

2. Giros y Simetría Central: (2 páginas).

Define *Concepto de Giro*, describe el *Cálculo del Centro de Giro* y analiza las *Figuras con Centro de Giro*. A posteriori, define *Concepto de Simetría Central* y analiza las *Figuras con Centro de Simetría*.

3. Simetría Axial. Frisos y Mosaicos: (2 páginas).

Define *Concepto de Simetría Axial*, describe la *Composición de dos Simetrías Axiales* y analiza las *Figuras con Eje de Simetría*. A continuación, define los conceptos de *Friso* y *Mosaico*, diferenciando en este último entre mosaico regular y semirregular.

4. Planos y ejes de Simetría: (2 páginas).

Describe los *Planos de Simetría de Poliedros y Cuerpos Redondos*, así como sus *Ejes de Simetría*.

Ejercicios y Problemas Resueltos: (2 páginas).

Este apartado contiene un total de 12 ejercicios resueltos, tratando todos los temas estudiados en la unidad.

Ejercicios y Problemas Propuestos: (3 páginas).

En cada una de las páginas de las explicaciones se incluyen actividades, pero también al finalizar la lección, se proponen una amplia lista de ejercicios y problemas para que el alumno practique lo aprendido.

Actividades Complementarias: (1 página).

Para que el alumno tome consciencia de su aprendizaje, se proponen las actividades del llamado “*Comprueba lo que sabes*”.

Además, aparece un apartado con el título: “*Matematización en contextos reales*”, con aplicaciones en la vida real.

Actividades con Geogebra: (3 páginas).

La unidad contiene numerosas actividades donde el alumno debe practicar lo aprendido utilizando herramientas informáticas, concretamente, el programa *Geogebra*.

Adecuación de Objetivos y Contenidos:

Ciertos objetivos subyacentes en este libro de texto, se corresponden con algunos de los ***Objetivos Generales de la Educación Secundaria***. El lenguaje utilizado en el libro, refleja valores de respeto e igualdad. Además, se incluyen numerosas actividades que incentivan el uso de las nuevas tecnologías.

En mi opinión, con respecto a los ***Objetivos Didácticos del Área de Matemáticas Orientadas a las Enseñanza Académicas de 3^º E.S.O.***, fomenta el razonamiento y la elaboración de estrategias en muchas de las actividades, incluye numerosos ejercicios en los que se pide la construcción de movimientos que actúan sobre figuras dadas, de manera gráfica, tanto manual como digital. Este libro promueve, extraordinariamente, la introducción de abundantes actividades para trabajar con el programa *Geogebra*.

En cuanto a los ***Objetivos que la legislación atribuye a dicha Unidad, así como los personales que yo considero importantes para plantear en un libro de texto***, podemos encontrar algunos de ellos. Se trabaja mucho la identificación y la construcción de los distintos movimientos. El alumno tiene numerosas actividades donde poner en práctica los conocimientos aprendidos.

En cuanto a los ***Contenidos***, están incluidos todos los presentes en el BOCYL (ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015) para esta unidad didáctica. El estudio de los planos y ejes de simetría en los cuerpos geométricos, se incluyen también en esta unidad.

Destaco como puntos fuertes de este segundo libro analizado: la cuantía de ejercicios donde se propone al alumno dibujar movimientos, la introducción de abundantes ejercicios a realizar con Geogebra, la inclusión en la unidad de planos y ejes de simetría en cuerpos geométricos.

▪ **LIBRO DE TEXTO EDITORIAL SM SAVIA:**

Por último, analizamos el libro de texto de la editorial SM Savia.

Descripción de la unidad:

Introducción: (1 página).

La introducción se realiza a través del arte, en concreto, a través de la obra de M.C. Escher.

1. Vectores: (1 página).

Hace un recordatorio sobre *Vectores*.

2. Traslaciones: (1 página)

Define *Concepto de Traslación* y describe la *Composición de Traslaciones*.

3. Giros: (2 páginas).

Define *Concepto de Giro* y describe el *Producto de Giros*. Señala que la *Composición* de dos giros de mismo centro es conmutativo, pero que no lo es cuando los centros no coinciden.

4. Simetrías Axial y Central: (2 páginas).

Define *Concepto de Simetría Axial*, y *Simetría Central* y describe la *Composición de simetrías*.

5. Ejes y Centros de Simetría en figuras planas: (2 páginas).

Define *Eje* y *Centro de Simetría*.

6. Movimientos Inversos: (1 página).

Este apartado habla del movimiento inverso a un movimiento dado. No hace referencia a aquellos movimientos que cambian la orientación en la figura.

Organiza tus ideas: (1 página).

El libro incluye un esquema de los contenidos de la unidad.

Actividades Clave: (1 páginas).

Son ejercicios resueltos sobre los temas tratados.

Actividades: (4 páginas).

Se proponen diversas actividades para poner en práctica los conocimientos aprendidos.

Actividades Complementarias: (1 páginas).

Las actividades agrupadas en el llamado: “*Ponte a prueba*”, son actividades que debe realizar el alumno, y después comprobar el resultado, ya que son ejercicios con soluciones.

Existe a su vez una llamada: “*Autoevaluación*”, donde el alumno puede realizar ejercicios y comprobar su grado de aprendizaje.

Actividades con Geogebra:

En todas las páginas se propone acceder a la aplicación de la editorial para practicar actividades con el programa Geogebra.

Adecuación de Objetivos y Contenidos:

Algunos de los ***Objetivos Generales de la Educación Secundaria*** sí son reflejados por el presente libro. El lenguaje utilizado, al igual que los libros anteriores, refleja valores de respeto e igualdad. Asimismo, se incorporan conocimientos de arte, relacionados con el tema. Para incentivar el uso de las tecnologías, se incluyen notas en las páginas que invitan al alumno a acceder a una plataforma online, para realizar ejercicios con el programa Geogebra.

Respecto a los ***Objetivos Didácticos del Área de Matemáticas Orientadas a las Enseñanza Académicas de 3º E.S.O.***, se deduce que esta editorial los adquiere como prioridad. En algunos de los ejercicios y problemas propuestos, se evidencia el interés por fomentar el razonamiento del alumno y la elaboración de estrategias matemáticas. Para promover el uso de la expresión verbal en matemáticas, también se incluyen actividades donde el alumno deba explicar y redactar el proceso de resolución que ha aplicado a un determinado problema. Se muestran algunos ejemplos de la vida real donde se aprecian movimientos, y muchas de las actividades finales de la unidad, se presentan como aplicaciones a la vida cotidiana. En diversos problemas, se invita al alumno a la reflexión y a la deducción, favoreciendo así al desarrollo de su

autonomía. Por último, como se ha explicado con anterioridad, se incluyen notas adicionales, donde se propone el uso de las nuevas tecnologías para poner en práctica lo aprendido.

Los *Objetivos que la legislación atribuye a la Unidad que nos acontece, así como los personales que yo considero importantes plantear*, se encuentran claramente también en este libro de texto. Se trabaja la identificación de transformaciones y movimientos. Se incluyen ejemplos reales, de manifestaciones artísticas. Cabe destacar la introducción al tema, relacionando con el arte todo aquello que va a ser estudiado.

En cuanto a los *Contenidos*, están incluidos todos los presentes en el BOCYL (ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015) para esta unidad didáctica. El estudio de los planos y ejes de simetría en los cuerpos geométricos, no están incluidos en esta unidad. Al igual que la editorial Anaya, SM Savia separa dicho contenido, incluyéndolo en el tema “Cuerpos Geométricos”.

Destaco como puntos fuertes de este último libro: la claridad de las explicaciones; la organización de los puntos explicados; la inclusión de un esquema; la presencia de actividades con aplicaciones reales; y por supuesto, la inclusión de material motivacional a través de la historia y el arte.

3.4.3. Análisis comparativo y conclusiones:

Análisis Comparativo:

Al comparar los tres libros del análisis, podemos determinar que la claridad en las explicaciones es correcta en todos ellos, así como la estructuración del tema.

La inclusión de temas históricos y artísticos, así como de manifestación que esta parte de las matemáticas tiene en la naturaleza, también se hace presente en los libros analizados. La inclusión de introducciones que hagan referencia a elementos de la vida real, o a manifestaciones presentes en la naturaleza, puede servir de motivación al alumnado. Asimismo, descubrir las aplicaciones que las matemáticas tienen en la arquitectura y el diseño, puede resultar igualmente motivacional. En este aspecto, los libros responden de manera satisfactoria al análisis.

Entre otras prácticas, es realmente importante que el alumno sepa representar en los ejes cartesianos todos los movimientos estudiados. En este aspecto, los libros de Bruño y SM Savia aportan un gran contenido en representaciones cartesianas.

Con respecto a Anaya, recalco su manera de introducir la *historia* y la *realidad*, en los ejemplos utilizados para la explicación, sin duda un acierto relevante.

De la editorial Bruño destaco el amplio abanico que presenta en cuanto a actividades con *herramientas informáticas*, el interés por este tipo de didáctica es realmente superior al resto de libros.

De SM Savia cabe recalcar el gran acierto al incluir un *esquema* de la unidad, donde los alumnos con un sólo vistazo, puedan establecer un orden en los conocimientos adquiridos, y así entenderlos de manera más clara.

En cuanto a las *actividades*, todos ellos presentan ejercicios y problemas de similares características, ofrecen tanto actividades enfocadas a ejercicios mecánicos, como problemas que invitan a la reflexión.

Conclusiones:

Como hemos podido comprobar en el análisis, cada libro de texto es diferente. Por esta razón, el docente debe conocer las distintas aportaciones que hacen unas y otras editoriales. Es importante tener acceso a un amplio abanico de posibilidades, como por ejemplo, conocer el contenido de diversos libros. El departamento seleccionará un libro de texto determinado, según su adecuación con los objetivos planteados, analizando la totalidad del libro y no una única lección, como es nuestro caso. No obstante, a pesar de que se haga la elección de un libro concreto, los profesores deben extraer informaciones, actividades, ideas, etc., de otros materiales didácticos, y con ello, completar sus explicaciones de una manera óptima.

4. PROPUESTA DE UNIDAD DIDACTICA:

A continuación se expone la propuesta para la Unidad Didáctica del tema *Movimientos en el Plano*.

Para la realización de dicha propuesta se ha tenido en cuenta todo lo estudiado con anterioridad en el presente trabajo. Se hace referencia al marco legal al que los docentes deben atender para cumplir con su desarrollo profesional, al estudio de los conocimientos matemáticos que abarca el tema, a la evolución histórica de tales conceptos y a su aplicación en la enseñanza de las matemáticas, a los análisis realizados con respecto al alumnado y la didáctica más adecuada para su aprendizaje, y otras consideraciones más.

El desarrollo de esta unidad se lleva a cabo con unos principios claros. Se pretende lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, que estos mejoren en autonomía fomentando el conocimiento de sus capacidades y fortalezas, para con ello alcanzar sus metas satisfactoriamente. Además se busca motivar y generar curiosidad en el alumnado, utilizando diferentes recursos, como por ejemplo la historia o el acercamiento a situaciones reales. Estas prácticas consiguen demostrar la utilidad de las matemáticas, y su importancia a lo largo de la historia, y los alumnos lo experimentan de manera directa, absorbiendo el conocimiento de manera más óptima.

La siguiente Unidad Didáctica se compone de los siguientes apartados:

- Introducción Contextual.
- Contribución a las Competencias Clave.
- Objetivos Didácticos.
- Contenidos.
- Metodología: Estrategias Didácticas.
- Recursos.
- División en Tiempos y Espacios.
- Actividades de Aprendizaje y Enseñanza.
- Planes Complementarios.
- Evaluación.
- Atención a la Diversidad.
- Autoevaluación de la Unidad.

INTRODUCCIÓN CONTEXTUAL

1. INTRODUCCIÓN CONTEXTUAL: *Matemáticas 3º E.S.O*

Nos encontramos en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de Educación Secundaria Obligatoria, que posee la siguiente estructuración:

- Bloque 1: Contenidos comunes
Bloque 2: Números y álgebra (Uds: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).
Bloque 3: Geometría (Uds: 10, 11, 12, 13).
Bloque 4: Funciones (Uds: 8, 9).
Bloque 5: Estadística y probabilidad (Uds: 14, 15).

2. INTRODUCCIÓN CONTEXTUAL: *Bloque 3. Geometría*

La Unidad Didáctica que vamos a describir pertenece al Bloque de Geometría, se desarrolla tras el Bloque de Números y Álgebra, y antecede al Bloque de Funciones.

Según la Real Academia de la Lengua, se define geometría como: “*Estudio de las propiedades y de las magnitudes de las figuras en el plano o en el espacio*”.

Partiendo de dicha definición, sabemos que la temática que va a aprender el alumnado durante el desarrollo de esta unidad está relacionada con las propiedades que presentan las figuras del plano. Así mismo se estudiarán las distintas transformaciones que pueden sufrir dichas figuras.

Temas que incorpora el Bloque 3.

GEOMETRÍA (3º E.S.O)

- Geometría del plano. Lugar geométrico. Mediatriz, bisectriz, circunferencia. Otros lugares geométricos que den lugar a rectas, segmentos y arcos de circunferencia.
- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas.
- Aplicación a la resolución de problemas.
- Movimientos del Plano: Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Elementos dobles o invariantes. Reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y la naturaleza.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Geometría del espacio. Poliedros. Planos de simetría en los poliedros. Fórmula de Euler para los poliedros simples. Poliedros regulares, poliedros duales. Cilindro, cono, tronco de cono y esfera. Intersecciones de planos y esferas.
- Cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Contextualización en la realidad.
- El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.

Para que el alumno aprenda todos los conocimientos que se requieren en este bloque, se determina un total de 26 sesiones, que corresponden a 6,5 semanas, ya que para cada semana se establece un total de cuatro sesiones de Matemáticas, según el BOCyL (ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015). Siguiendo la organización adecuada de la temática y el calendario académico del curso, ocupará este bloque las cinco primeras semanas de la 3ª Evaluación.

Concretando, este tercer Bloque de Geometría, para las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, en el curso de 3º de E.S.O, se divide en tres unidades didácticas, y a cada una de ellas se le asigna el siguiente número de sesiones:

Bloque 3: Geometría. UNIDADES	SESIONES
10. Figuras planas. Problemas métricos en el plano.	8
11. Figuras en el espacio.	8
EVALUACIÓN. prueba escrita	1
12. Movimientos en el Plano. Frisos y Mosaicos.	8
EVALUACIÓN. prueba escrita	1
Total	26
Posibles sesiones adicionales por desajustes	4

3. INTRODUCCIÓN CONTEXTUAL: *Unidad Didáctica. Movimientos en el plano. Frisos y Mosaicos.*

La Unidad Didáctica que se trata a continuación, corresponde a la Unidad 12, *Movimientos en el plano. Frisos y Mosaicos*. Esta unidad está estrechamente ligada al resto de unidades del bloque, ya que reconocer figuras planas, conocer el plano cartesiano y la situación de puntos en él, son herramientas esenciales que se usarán a lo largo de la Unidad 12.

Para que el alumno afronte un aprendizaje óptimo con el transcurso de esta unidad, debe tener unos conocimientos mínimos previos, y a su vez, debe finalizar la unidad con una serie de conceptos asimilados, que le servirán de base para posteriores cursos académicos.

- **Conocimientos mínimos**

Para que el alumno logre la asimilación de los nuevos contenidos que configuran esta unidad, es necesario que posean unos conocimientos previos mínimos:

- Conocimiento de las Figuras planas.
- Identificar figuras semejantes.
- Poseer algunas nociones sobre el concepto de Traslación, Simetría axial y Giro.
- Identificación los elementos que definen las figuras planas: ejes, vértices, lados...

- **Conocimientos necesarios para cursos posteriores**

Es necesario analizar también los conocimientos que deben aprender los alumnos en esta unidad para llegar al curso posterior con una base mínima afianzada.

Los alumnos han de conocer los conceptos y prácticas que se explican a continuación:

- Idea de transformación geométrica y como caso particular, idea de movimiento.
- Concepto de traslación, giro y simetría axial.
- Identificación de los elementos que definen las traslaciones, los giros y las simetrías axiales.
- Identificación de traslaciones, giros y simetrías en algunos mosaicos y frisos sencillos extraídos del mundo real.
- Utilización de la terminología relativa a las transformaciones geométricas para elaborar y transmitir información sobre el entorno.

- **Temporalización**

Tras la distribución de la temática de todo el curso, se determina que la unidad *Movimientos en el plano. Frisos y Mosaicos* se desarrollará en la tercera Evaluación, y se establece para la unidad didáctica un total de 4 sesiones.

Repaso	1ª Evaluación (Uds: 1, 2, 3, 4, 5)		
Números y álgebra		2ª Evaluación (Uds: 6, 7, 8, 9)	
Geometría			3ª Evaluación (Uds: 10, 11, 12, 13, 14, 15)
Funciones			
Estadística y probabilidad			

CONTRIBUCIÓN A LAS COMPETENCIAS CLAVE

Desde las instituciones de la Unión Europea, se establece la adquisición de las Competencias Clave como una necesidad, y se señala la exigencia de una contribución a su aprendizaje en cada una de las asignaturas que se imparten en la enseñanza. Además, es esencial entrelazar las distintas materias y habilidades en cada una de las asignaturas, para contribuir al desarrollo completo del alumno.

Las Competencias Clave han de ser entrenadas día a día, y se adquieren con el tiempo. Tienen una importancia significativa, ya que preparan al alumno para su propia evolución dentro de un mundo globalizado. Por tanto, la adquisición de estas competencias clave es imprescindible para que el individuo alcance su realización personal, social y profesional; ejerciendo una ciudadanía activa; pudiendo incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria; y desarrollando un aprendizaje continuo a lo largo de su vida.

Existen siete competencias clave. A continuación se explica cómo la Unidad Didáctica *Movimientos en el plano. Frisos y Mosaicos*, contribuye a su desarrollo:

1. Competencia en Comunicación Lingüística

Los alumnos deben tener la capacidad de utilizar el lenguaje como instrumento de comunicación, y han de saber interpretar y traducir los problemas que surgen en la vida cotidiana al lenguaje matemático. En matemáticas, el pensamiento se formaliza mediante expresiones orales, escritas, y sobre todo, mediante el razonamiento.

- En concreto, la unidad que nos acontece, aporta estructuras lingüísticas y gramáticas que deben ser interpretadas por el alumno. Además, surgen nuevos conceptos que ha de asimilar y relacionar con otros de dicha unidad. Invitar al alumno a expresar mediante el lenguaje escrito u oral las propiedades o características de algunos de los movimientos estudiados, es una forma de impulsar la competencia. (Se realizarán actividades de este tipo).

2. Competencia Matemática y Competencias Básicas en Ciencia y Tecnología

Esta es la competencia más significativa desarrollada en la asignatura, ya que en ella se basa el currículo en su totalidad. El mero hecho de tratar temas matemáticos desarrolla directamente capacidades en los alumnos para afrontar situaciones del día a día: resuelven problemas por sí mismos, llegan a conclusiones propias... La resolución de dichos problemas será llevada a cabo utilizando numerosas herramientas matemáticas, razonando con distintas formas de pensamiento, interpretando la realidad y, finalmente, actuando sobre ella.

- En esta unidad se estudian las transformaciones geométricas, presentes en asignaturas relacionadas con la delineación, como dibujo técnico; también presentes en algunas cuestiones de la Física o la Tecnología (mallas hexagonales que rigen distribuciones óptimas en sistemas de telecomunicaciones), incluso podemos encontrar todo tipo de movimientos en del plano en la Naturaleza, es decir, puede relacionarse el tema de la unidad con las asignaturas que abordan las Ciencias Naturales.

3. Competencia Digital

Es necesario hoy en día el dominio de herramientas informáticas que permitan hacer ver al alumnado las distintas aplicaciones que las matemáticas tienen en situaciones reales.

- Esta competencia se desarrollará mediante el uso, por parte de los alumnos, de distintos programas informáticos, fundamentalmente Geogebra y Kali, con los que realizarán actividades diversas. Así mismo, se incentivará el uso de los medios informáticos para la búsqueda de información sobre expresiones artísticas que hacen referencia a los temas tratados en la unidad.

4. Competencia de Aprender a Aprender

Los alumnos deben aprender a utilizar distintas herramientas matemáticas, y a comprender la información que reciben. Sólo así podrán determinar qué herramienta es la más apropiada para usar en cada caso, o la que se ajuste más a su forma de razonar. Se genera con esta competencia

la deseada autonomía del individuo y la capacidad de abordar situaciones complejas a través de un pensamiento crítico.

- En esta unidad el alumno puede aprender distintas formas de proceder a la elaboración de formas geométricas en el plano; podrá comprobar, por ejemplo, cómo la composición de movimientos puede traducirse en un solo movimiento.

5. Competencia Social y Cívica

Con esta competencia se busca reforzar la capacidad de trabajar en equipo, ya que se inculcan aspectos como la aceptación de distintos puntos de vista, o distintas formas de proceder a las soluciones matemáticas. Con la imposición de trabajos que necesiten la participación de varios compañeros, fomentamos esta competencia.

- En esta unidad habrá ejercicios grupales, donde los alumnos trabajarán de manera cooperativa. Todo ello, para concienciar al alumnado de la importancia que tiene el desarrollar una convivencia adecuada en la sociedad.

6. Sentido de Iniciativa y Espíritu Emprendedor

Se desarrolla con esta competencia una serie de actitudes que permiten al alumno tener confianza y autonomía personal. Existe también una evolución en el alumno en relación a la responsabilidad, creatividad y sentido crítico para afrontar situaciones.

- Una forma de lograr dicha competencia es potenciar el uso de herramientas informáticas que causen curiosidad e intriga en el alumnado, y que genere en él un interés personal por alcanzar su manejo. Además, aportar material didáctico relacionado con aspectos históricos, artísticos y culturales, así como realizar actividades que dejen paso a la creatividad personal, genera motivación en el alumnado.

7. Conciencia y expresiones Culturales

Es importante hacer entender a los alumnos que el conocimiento matemático es una expresión cultural, y de carácter universal. Además, la Geometría está estrechamente ligada con las formas y materializaciones artísticas e históricas. El uso de las transformaciones geométricas en el plano ha sido y es una inspiración muy recurrente en el arte. Podemos encontrar diversas manifestaciones en pintura, escultura, arquitectura, diseño gráfico o industrial, donde las simetrías, traslaciones o giros de figuras planas, toman un protagonismo significativo.

- Se desarrollará esta competencia mostrando a los alumnos diversos ejemplos de arte antiguo y actual, que han empleado transformaciones geométricas, y a su vez, se les invitará a encontrar ejemplos de su entorno.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

1. Objetivos Generales de Educación Secundaria y Objetivos Didácticos de la Unidad Didáctica: *Movimientos en el Plano. Frisos y Mosaicos.*

En esta unidad didáctica, como en el resto de unidades, asignaturas y cursos que componen la Educación Secundaria, se deben plantear los objetivos que nos define la Normativa.

(Estos objetivos han sido descritos en los epígrafes: 2.1.1. *Objetivos Generales de Educación Secundaria* y 2.1.2. *Objetivos Didácticos del Área de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º E.S.O.*, del presente trabajo, y se tendrán en cuenta para esta propuesta de Unidad Didáctica.

2. Objetivos Didácticos planteados por el profesor.

Los objetivos representan los cambios que el proceso de aprendizaje provoque en el alumnado, es decir, los fines que deberían ser conseguidos por los alumnos tras impartirles una formación.

Para esta unidad en concreto, se plantean los objetivos descritos en *el epígrafe: 3.2.2. Expectativas de aprendizaje.* A continuación se incluye la tabla que enlaza los objetivos marcados, con competencias clave que impulsa el logro de los mismos. Esta relación es esencial en el modelo educacional presente en nuestro país, que se rige por la búsqueda de un aprendizaje competencial.

OBJETIVOS	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIE	CC
1. Identificar figuras congruentes.		X					
2. Reconocer las transformaciones que llevan una figura a otra mediante movimientos en el plano.		X		X			
3. Clasificar los movimientos en el plano: Movimientos Directos y Movimientos Inversos.	X	X					
4. Distinguir y describir cada uno de los movimientos siguientes: Traslación, Giro y Simetría.	X	X	X				
5. Localizar, en las figuras transformadas mediante movimientos, los elementos dobles o invariantes.		X		X			
6. Generar creaciones propias mediante aplicación de un sólo movimiento o mediante composición de movimientos, utilizando el grafismo manual o herramientas informáticas.		X		X		X	
7. Reconocer y analizar movimientos en el plano presentes en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.		X		X	X		X
8. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un vector de traslación dado.	X	X		X		X	
9. Identificar el vector generador de una determinada traslación.		X					
10. Analizar y justificar, que una recta paralela al vector de traslación se mantiene invariante.		X		X			

11. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un giro dado.	X	X		X		X	
12. Deducir el centro y el ángulo de un giro aplicado a una figura dada.		X		X			
13. Analizar y justificar que una recta a la que se aplica un giro de 180° se mantiene invariante.		X		X			
14. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un eje de simetría dado.	X	X		X		X	
15. Identificar el eje de simetría en un movimiento de simetría axial.		X		X			
16. Analizar y justificar que el eje de simetría en una simetría axial es el único elemento que se mantiene invariante.		X		X			
17. Deducir el centro de simetría en una simetría central.	X	X		X		X	
18. Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un centro de simetría dado.		X		X			
19. Analizar y justificar que todas las rectas que pasan por un centro de simetría son invariantes.		X		X			
20. Construir y describir la construcción de la transformada de una figura, resultante de una composición de movimientos.	X	X		X		X	
21. Identificar los movimientos que han sido aplicados a una figura determinada para dar como resultado su transformada.		X		X			
22. Razonar acerca de la construcción de frisos y realizar una composición de uno de los mismos, a partir de una figura dada y un vector de traslación.	X	X		X		X	
23. Identificar y reconocer frisos y sus elementos generadores en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.		X	X	X	X		X
24. Razonar acerca de la construcción de mosaicos y generar alguno de ellos, a partir de una figura dada y dos vectores de traslación que permitan el llenado del plano.	X	X		X		X	
25. Identificar y reconocer mosaicos y sus elementos generadores en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. .		X	X	X	X		X
26. Razonar acerca de la construcción de rosetones y realizar dicha composición a partir de un motivo dado y un giro concreto.	X	X		X		X	
27. Identificar y reconocer rosetones y sus elementos generadores en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. .		X	X	X	X		X

CONTENIDOS

En concreto, para la Unidad Didáctica *Movimientos en el plano. Frisos y Mosaicos*, los contenidos se basarán en los contenidos que redacta la normativa, descritos en este trabajo, en el epígrafe 2.1.3. *Contenidos Didácticos de la Unidad Didáctica: Movimientos en el Plano. Frisos y Mosaicos*.

Se clasifican los contenidos, en relación a aquellas funciones que contemplan:

▪ **Contenidos Conceptuales.** *Aportación de conocimientos.*

El desarrollo de las sesiones vendrá dado a través de explicaciones de conceptos matemáticos. Los contenidos que van a ser explicados, se resumen en el *Mapa Conceptual*, incluido previamente en el *Análisis Didáctico*, epígrafe: 3.2.1.

<p>Transformaciones geométricas</p> <ul style="list-style-type: none">- Nomenclatura- Identificación de movimientos geométricos y distinción entre directos e inversos. <p>Traslaciones</p> <ul style="list-style-type: none">- Elementos dobles de una translación.- Resolución de problemas en los que intervienen figuras trasladadas y localización de elementos invariantes. <p>Giros</p> <ul style="list-style-type: none">- Elementos dobles en un giro.- Figuras con centro de giro.- Localización del “ángulo mínimo” en figuras con centro de giro.- Resolución de problemas en los que intervienen figuras giradas.- Localización de elementos invariantes. <p>Simetrías axiales</p> <ul style="list-style-type: none">- Elementos dobles en una simetría.- Hallar el simétrico de una figura.- Figuras con eje de simetría.	<p>Composición de transformaciones</p> <ul style="list-style-type: none">- Traslación y simetría axial.- Dos simetrías con ejes paralelos.- Dos simetrías con ejes concurrentes. <p>Mosaicos, cenefas y rosetones</p> <ul style="list-style-type: none">- Significado y relación con los movimientos.- “Motivo mínimo” de una de estas figuras.- Identificación de movimientos que dejan invariante un mosaico, un friso (o cenefa) o un rosetón.
---	---

- **Contenidos Procedimentales.** *Aportación de herramientas para realizar creaciones propias.*

Se explicará cada uno de los procesos a seguir, para que el alumno adquiriera habilidades en la identificación visual y dibujo de transformaciones geométricas.

- Identificación de los elementos invariantes en una traslación, un giro o una simetría axial.
- Construcción de la imagen transformada de una figura en cualquier movimiento simple.
- Creación de mosaicos, frisos y rosetones.
- Identificación de las piezas que generan un determinado mosaico.

- **Contenidos Actitudinales.** *Aportaciones para el desarrollo de una educación en valores.*

Se inculca, a su vez, ciertas formas de conducta y actitud.

- Limpieza y precisión en el dibujo.
- Presentación.
- Razonamiento deductivo en las demostraciones geométricas.
- Confianza y capacidades propias para afrontar problemas y proceder a las soluciones
- Respeto hacia los compañeros y cooperación.

METODOLOGÍA: ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

La metodología será el conjunto de mecanismos en los que pretende basarse el profesor para **lograr los objetivos planteados y contribuir**, asimismo, **al desarrollo de las competencias clave**. El profesor debe adaptar su tiempo y espacio a la unidad, valiéndose de diferentes medios y recursos que lo ayuden a alcanzar sus fines.

En esta unidad didáctica, la metodología utilizada será una combinación de la exposición explicativa por parte del profesor y la participación del alumnado tras la asimilación de conceptos. Pretende con ello contribuir a desarrollar la capacidad crítica del alumno y su imaginación, promover la cooperación y el trabajo en equipo, así como generar cierta responsabilidad en la figura del estudiante. Además, busca en todo momento la relación con el mundo real, es decir, la aplicación a la vida cotidiana de los conocimientos matemáticos.

La metodología podrá sufrir modificaciones a lo largo del curso, adaptándose a los conceptos enseñados y a las necesidades del alumnado en cada momento, superando imprevistos o problemas que puedan surgir.

Con las siguientes **ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS**, se busca que los estudiantes alcancen los objetivos planteados para la unidad, e incentiven su desarrollo personal:

- **“Exposición explicativa”.**

Se trata de una metodología reinterpretada, a modo personal, de la famosa Clase Magistral. Consiste en la exposición por parte del profesor hacia los alumnos, explicando cada uno de los

temas y conceptos que se tratan en la unidad, pero permitiendo las intervenciones siempre que sea necesario. Habrá un diálogo entre profesor y alumno cuando se considere oportuno: por medio de preguntas realizadas por el docente, consulta de dudas por parte de los alumnos, etc. Con esta explicación se introduce el tema que posteriormente los alumnos pondrán en práctica. El profesor se valdrá de los recursos educativos que posea el aula: pizarra, fotocopias, TICs... Los roles del profesor deben estar en la dinámica de ser facilitador, motivador, innovador, investigador, flexible, etcétera.

- **Trabajo individual reflexivo.**

El profesor determinará una serie de actividades que el alumno ha de realizar en el aula o en casa, aplicando los conocimientos adquiridos durante la explicación.

El proceso de asimilación de conocimientos por parte del alumno, mejora cuando participa en la construcción de su propio aprendizaje. El trabajo propuesto para los alumnos, debe recoger las siguientes premisas: descubrir, diseñar, experimentar, calcular, sacar conclusiones.

- **Trabajo cooperativo.**

1. En algunas de las sesiones de la unidad, tras haber recibido todas las explicaciones oportunas en clases anteriores, se procede a la realización de trabajos cooperativos entre grupos de alumno, formando equipos heterogéneos.

En algunas de las actividades programadas se procede a la elaboración de fichas, mediante el trabajo en equipo. (El contenido de las mismas se refleja como una puesta en práctica de todo lo tratado por el profesor en las sesiones anteriores).

Cada alumno del grupo desempeñará un rol diferente (a lo largo del curso se harán algunas actividades de este tipo, con diferentes roles en función de la actividad. Se rotará la asignación de dichos papeles, para que todos los alumnos puedan poner en práctica las distintas funciones).

Para explicar los roles a desarrollar por los estudiantes, se utiliza de referencia una de las actividades cooperativas planificadas para la unidad: *TANGRAM* (explicada en el *Anexo I*). Los papeles a asumir serán los siguientes:

• Todos:

En primer lugar todos los componentes participan en la actividad de la misma manera, manejando el *Tangram* para dar con la solución a la figura que se plantea en la ficha.

Seguidamente se diferencian los papeles.

• Líder – Portavoz:

El alumno organizará el proceso que ha de seguir el grupo para alcanzar la resolución del problema propuesto en la ficha. Este problema consistirá en la identificación de transformaciones geométricas, a través del instructivo juego del *Tangram*.

Además, otra función que tiene este alumno, es la de comunicar al profesor las dudas que surjan y transmitir posteriormente a sus compañeros la resolución de dichas controversias.

- Secretario:

El estudiante que adquiera este rol deberá escribir el procedimiento que han seguido los cuatro miembros del grupo, hasta llegar a la solución del problema.

- Diseñador:

El papel del diseñador consiste en dibujar en la ficha los movimientos que han sufrido las fichas del juego para alcanzar su posición final.

Finalmente:

- Todos: tras la finalización de la tarea, cada grupo se situará frente al resto de la clase, y expondrá, públicamente y en conjunto, el trabajo realizado.

2. Se podrán realizar, siempre que sea posible, otro tipo de actividades que fomentan el trabajo en grupo, como por ejemplo: buscar y encontrar en el entorno transformaciones geométricas; paseos, visitas a edificios, etcétera.

- **Puesta en común** de las actividades realizadas.

El profesor determinará qué actividades debe hacer el alumno como tareas para casa, y estas serán puestas en común al inicio de la sesión siguiente. Es decir, cada día, y en cada actividad, será un alumno diferente el encargado de exponer, al resto de la clase, la solución que ha tomado para resolver el ejercicio.

- **Resolución de problemas.**

Los alumnos deberán realizar ejercicios en armonía con los temas que se estudian en la unidad, siendo estos aplicados a una situación real, es decir, siempre intentando buscar un enlace con situaciones dadas en la vida cotidiana. Resultará atractivo el uso de imágenes que muestren manifestaciones artísticas-históricas que presenten *Movimientos*.

- Uso de **herramientas informáticas.**

Se comunicará a los alumnos la existencia de medios informáticos óptimos para mejorar su aprendizaje. Tal es el caso del programa *Geogebra*, aplicación que usarán los alumnos para la puesta en práctica de ejercicios relacionados con la unidad, o el programa *Kali* para la representación de mosaicos, cenefas y rosetones.

RECURSOS

Los recursos necesarios para llevar a cabo el desarrollo de la Unidad Didáctica, deben complementar de forma efectiva el aprendizaje del alumno, y servirán de ayuda para la puesta en práctica de los conocimientos adquiridos.

Los materiales y recursos que se van a utilizar serán los siguientes:

- **Libro de texto** propio del alumno, para que los estudiantes puedan comprobar dudas, repasar conceptos, practicar actividades...

- **Fotocopias de apoyo** con contenidos complementarios o con ejercicios para practicar los aprendizajes alcanzados.
 - **Cuaderno** del alumno para apuntar los nuevos conocimientos adquiridos, que puede servir como apuntes de repaso y estudio, y donde además, se realizarán las actividades del libro de texto y de las fotocopias de apoyo que el profesor considere oportunas, o que el alumno decida hacer por iniciativa propia.
 - **Pizarra** para realizar la exposición del temario, ya sea digital, de tiza o rotulador, donde el profesor y los alumnos puedan dibujar y escribir lo que se estipule necesario: desarrollo de la exposición del profesor, corrección de actividades...
 - **Lápiz, goma y bolígrafo**, tanto como, para escribir en el cuaderno como en fichas.
 - **Reglas** para dibujar figuras geométricas.
 - **Cartulinas, papel de colores u otros materiales**, aportados por el profesor.
 - **Tijeras y pegamento** para recortar y unir las piezas en la construcción de frisos o mosaicos.
 - **Libros, enciclopedias o medios informáticos** para realizar consultas.
 - Fotocopias adicionales, con **contenidos de distintos niveles**, para atender a la diversidad.
 - Juegos:
 - Tangram.*
 - Libro de espejos* que ayuda a visualizar con claridad algunas de las transformaciones estudiadas, por ejemplo reconocer e identificar ejes de simetría de figuras.
 - **Ordenadores y TICs** para el desarrollo de aprendizajes mediante el uso de herramientas informáticas: Geogebra, Kali, acceso a información vía online, etc.
- De esta forma se favorecerá a que la unidad didáctica se elabore dentro del contexto STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas).
- **URL de páginas web de contenido útil** para el aprendizaje de los conocimientos que se imparten en la unidad: ejercicios complementarios de frisos y mosaicos, juegos relacionados con la geometría, etcétera.

DIVISIÓN EN TIEMPOS Y ESPACIOS

TEMPORALIZACIÓN

Como se explicó en la Introducción Contextual, para que el alumno aprenda todos los conocimientos que se requieren en el Bloque de *Geometría*, se determina un total de 26 sesiones, que corresponden a seis semanas y media. Siguiendo la organización adecuada de la temática y el calendario académico del curso, ocupará este bloque parte de la 3ª Evaluación.

Esta Unidad Didáctica se desarrolla en 4 sesiones, que seguirán la forma metodológica previamente explicada. Cada una de las sesiones tiene una planificación concreta:

▪ **Sesión 1:**

Introducción a la Unidad: Se realiza un breve repaso de conceptos básicos relacionados con el tema de la unidad: preguntar a los alumnos si reconocen ciertas transformaciones geométricas, si recuerdan el concepto simetría, giro, traslación...

- Introducción histórica: *Ejemplificación del tema a tratar en manifestaciones artísticas históricas y contemporáneas.*

Visualización del vídeo:

<http://www.rtve.es/alacarta/videos/mas-por-menos/aventura-del-saber-serie-mas-menosmovimientos-plano/1283084/>

Exposición explicativa: El profesor procede a la introducción general del tema y seguidamente profundiza en el primero de los apartados de los que se compone la unidad. El alumno debe tomar nota en su cuaderno de los conceptos y contenidos que el profesor anota en la pizarra.

- Transformaciones geométricas: *Identificación de movimientos geométricos y distinción entre directos e inversos.*
- Traslación.

Conclusiones: Se realiza una conclusión final a modo de síntesis de todo lo tratado.

Tareas para casa (TPC): El profesor define que actividades han de hacer los alumnos en casa. Estarán ligadas a los temas tratados en clase.

▪ **Sesión tipo:**

Corrección TPC: Se procede a corregir las tareas. Cada actividad será corregida por un alumno diferente. El seleccionado expone su resolución, ya sea de manera oral, o escrita en la pizarra.

Resumen: El profesor realiza una breve introducción a la explicación, resumiendo los temas vistos el día anterior.

Exposición explicativa:

- Giro. (Sesión 2).
- Simetría axial. (Sesión 3).
- Composición de transformaciones. (Sesión 4).

Conclusiones.

Tareas para casa (TPC).

▪ **Sesión 5:**

Resumen.

Exposición explicativa: El profesor realiza una exposición de todo lo tratado hasta el momento sobre los movimientos en el plano, es decir, resume los temas tratados en las anteriores sesiones, para refrescar la memoria de los alumnos, ya que han de realizar una actividad basada en tales conocimientos.

Actividad cooperativa: Tras la explicación del profesor los alumnos realizarán un trabajo grupal que consistirá en la determinación de los movimientos que sufren las piezas del *Tangram* al construir nuevas figuras. Además, los alumnos deben completar el ejercicio realizando anotaciones pertinentes. Por último, el grupo expone el trabajo realizado.

▪ **Sesión 6:**

Corrección TPC.

Resumen.

Exposición explicativa:

- Mosaico, Frisos, Rosetones.

Conclusiones.

Tareas para casa (TPC)

▪ **Sesión 7:**

Corrección TPC

Visualización del vídeo:

<http://www.rtve.es/alacarta/videos/mas-por-menos/aventura-del-saber-serie-mas-menosgeometria-se-hace-arte/1291007/>

Exposición explicativa: El profesor realiza una exposición de todo lo tratado hasta el momento. Además, incluirá aplicaciones de los movimientos en el arte.

Actividad cooperativa: Tras la explicación del profesor los alumnos realizan un trabajo grupal que consiste en la creación de un mural en forma de Mosaico.

Conclusiones.

▪ **Sesión 7** (Alternativa a la sesión anterior. Elección a determinar por el docente):

Salida a visitar el entorno del centro: Buscar figuras en el entorno inmediato del centro que presenten frisos, mosaicos y rosetones.

▪ **Sesión 8:**

En el Aula de informática: Practicar con los programas Geogebra y Kali, la transformación de figuras y la creación de mosaicos, frisos y rosetones.

▪ **Sesión para la prueba escrita:**

Esta sesión no se incluye en la temporalización, pero debe estar presente.

DIVISIÓN EN ESPACIOS

El desarrollo de esta unidad didáctica, en la mayor parte del tiempo, se realiza en el **aula habitual de 3º de E.S.O.** En dicho aula ha de ser posible una disposición flexible de mesas, tal

que éstas puedan quedar agrupadas para la realización de las actividades cooperativas o de grupos de experimentación y proyectos.

Para la actividad alternativa de la sesión 7, es necesario trasladarse al exterior del centro, por **zonas cercanas del entorno**.

La Sesión 8 se debe llevar a cabo en el **aula de informática**, para que los alumnos, ya sea de forma individual, o en parejas, puedan realizar las actividades propuestas. Si el aula común dispone de ordenadores suficientes, no sería necesario el desplazamiento.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA

Las actividades que se propondrán al alumno a lo largo de esta unidad didáctica, se basarán en temas enseñados en el aula. El aprendizaje de los alumnos se acentúa mediante la elaboración de tales actividades. La resolución de los ejercicios requiere de un tiempo determinado, donde el alumno tendrá que reflexionar y tomar decisiones.

Las actividades que serán realizadas, se pueden clasificar de diferentes modos:

En primer lugar, en relación a las *funciones a desempeñar por los alumnos*.

1. **Ejercicios de repaso:** Hoja complementaria de ejercicios de contenido previamente estudiado y necesario para el aprendizaje de la nueva unidad. A realizar por el alumno de manera voluntaria si él mismo considera que lo necesita.
2. **Actividades cooperativas:** Se proponen, para esta unidad, algunas actividades que han de ser resueltas de manera cooperativa, en grupos de tres o cuatro componentes.
3. **Tareas para casa (TPC) y Tareas a realizar en el aula:** Los alumnos deben realizar estas tareas para completar su aprendizaje. Serán similares a los ejemplos que utiliza el profesor en sus explicaciones, y a las actividades que se realizan en el aula o en casa.
4. **Empleo de programas informáticos:** Se incluyen actividades de este tipo para ayudar a la asimilación de contenidos concretos y fomentar el uso de las herramientas informáticas.
 - En el *Anexo I* se muestran algunos ejemplos de actividades de estos tipos.

Por otro lado, como se ha visto en el *epígrafe 3.3. Análisis de Instrucción*, las actividades pueden clasificarse en función de su *implicación en el aprendizaje matemático del alumno*:

5. **Actividades de contenido matemático:** Ejercicios con enfoques exclusivamente matemáticos.
6. **Relación con el contexto y aproximación a situaciones de la vida cotidiana:** Actividades que van a incluir un factor diferente a las anteriores, ya que se relacionan con aspectos de la vida cotidiana.
7. **Implicación del razonamiento personal:** El alcance de la solución de estas actividades implica una mayor o menor reflexión por parte del alumno.

Ejercicios sistemáticos: La implicación del razonamiento es mínima.

Ejercicios y Problemas relacionados con el contexto: La implicación del razonamiento adquiere mayor relevancia, y además, sitúa al estudiante frente situaciones que puede afrontar en su vida real.

Ejercicios y Problemas que requieren razonamientos matemáticos: A realizar una vez se domine el tema, ya que son tareas más complejas, que conllevan razonamientos matemáticos más profundos.

- En el **Anexo II** se muestran algunos ejemplos de actividades de estos tipos.

PLANES COMPLEMENTARIOS

1. Los planes complementarios más inmediatos son realizar ofertas a los alumnos para participar en olimpiadas matemáticas u otros concursos. Se informará a principio de curso a todos los alumnos, y se orientará a aquellos que decidan sumarse a la experiencia.

2. Se pretende realizar salidas del centro, para visitar en el entorno urbano construcciones, mobiliario y figuras que presenten transformaciones geométricas.

3. Otros planes complementarios se conformarán en función de aquellas actividades que proponga el centro educativo, o las instituciones públicas: Ayuntamiento Municipal, Diputación Provincial, Comunidad Autónoma..., que tengan relación con la materia de la unidad o con el interés de los alumnos, desde el punto de vista matemático.

Esta oferta cultural a la que el centro puede aspirar depende del contexto: Museos cercanos, Exposiciones, etc. Las obras expuestas, si se relacionan con la materia, resultarán interesantes y atractivas para la formación complementaria del alumnado, y se podría proceder a su visita.

En estas actividades, el profesor deberá preparar un *Cuaderno de Trabajo* que el alumno deberá completar. En él, se incluirán ejercicios, problemas o preguntas que el alumno deberá resolver y responder, y que fomenten la reflexión y valoración crítica de lo aprendido en la visita.

EVALUACIÓN

La evaluación nos permite obtener información sobre el aprendizaje adquirido por nuestros alumnos, y la comprobación del grado de cumplimiento de los **objetivos planteados**. De esta manera comprobaremos también si la **metodología** aplicada es la correcta, o por el contrario, es necesaria su modificación.

Los alumnos serán conocedores de los criterios utilizados por el profesor para evaluar y calificar el aprendizaje.

Criterios de Evaluación

Los Criterios de Evaluación vienen establecidos por el cumplimiento de objetivos que se plantean con la enseñanza de la presente unidad. Dichos criterios están vinculados a los Estándares de Aprendizaje Evaluables, es decir, a las capacidades que debe adquirir el alumno en relación al tema en cuestión. Por tanto, podemos definir para la unidad “*Movimientos en el Plano*” ciertos **Criterios de Evaluación**, basados en los **Estándares de Aprendizaje Evaluables** que los alumnos deberían conseguir, y los cuales, siguiendo un criterio marcado, determinarán la **calificación**.

En la siguiente tabla se muestran los Criterios y Estándares de Aprendizaje que establece el BOCyL (ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015) para la Unidad. Se refleja también en la tabla siguiente la relación entre los Estándares de Aprendizaje y las Competencias Clave que se incentivan al ser conseguidos dichos estándares.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	C.CLAVE
<i>4. Reconocer las transformaciones que llevan una figura a otra mediante movimientos en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.</i>	4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.	CCL, CMCT, CAA, CSC, CC
	4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.	CMCT, CD, CAA, SIE
<i>5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.</i>	5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.	CMCT, CAA, CSC, SIE, CC

En definitiva, los criterios que se evaluarán estarán basados en el cumplimiento de los objetivos marcados, así como en el desarrollo de las competencias clave que el alumno ha experimentado:

- **Identificación y Representación de Movimientos.**

El alumno identifica figuras congruentes; reconoce las transformaciones que llevan una figura a otra mediante movimientos en el plano; clasifica los movimientos en el plano en Movimientos Directos e Inversos; distingue y describe cada uno de los movimientos siguientes: Traslación, Giro y Simetría; localiza, en las figuras transformadas mediante movimientos, los elementos dobles o invariantes; genera creaciones propias mediante aplicación de un sólo movimiento o mediante composición de movimientos, utilizando el grafismo manual y herramientas

informáticas; reconoce y analiza movimientos en el plano presentes en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

- **Movimientos Directos: Traslación y Giro.**

El alumno construye y describe la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un vector de traslación dado; identifica el vector generador de una determinada traslación; analiza y justifica, que una recta paralela al vector de traslación, se mantiene invariante; construye y describe la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un giro dado; deduce el centro y el ángulo de un giro aplicado a una figura dada; analiza y justifica que una recta a la que se aplica un giro de 180° se mantiene invariante.

- **Movimientos Inversos: Simetría.**

El alumno construye y describe la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un eje de simetría dado; identifica el eje de simetría en un movimiento de simetría axial; analiza y justifica que el eje de simetría en una simetría axial es el único elemento que se mantiene invariante; deduce el centro de simetría en una simetría central; construye y describe la transformada de una figura, resultante de la aplicación de un centro de simetría dado; analiza y justifica que todas las rectas que pasan por un centro de simetría son invariantes.

- **Composición de Movimientos.**

El alumno construye y describe la transformada de una figura, resultante de la aplicación de una serie de movimientos; identifica los movimientos que han sido aplicados a una figura determinada para dar como resultado su transformada.

- **Frisos, Mosaicos y Rosetones.**

El alumno realiza una composición de un friso, a partir de un motivo dado y un vector de traslación; identifica y reconoce frisos y sus elementos generadores presentes en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza; razona acerca de la construcción de mosaicos y genera alguno de ellos, a partir de una figura dada y dos vectores de traslación que permitan el llenado del plano; Identifica y reconoce mosaicos presentes en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza; razona acerca de la construcción de rosetones y realiza dicha composición a partir de un motivo dado y un giro concreto; identifica y reconoce rosetones presentes en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

Instrumentos de Evaluación

▪ **Prueba escrita.**

Se procede examinar la unidad con una prueba escrita, de modo que el examen evaluará los contenidos de la unidad.

La prueba escrita estará compuesta por una serie de problemas y ejercicios, basados en los estándares citados, con los que se pretende comprobar el aprendizaje de los alumnos y el desarrollo de las competencias clave.

▪ **Trabajos cooperativos.**

Para esta unidad didáctica se evaluarán también los trabajos cooperativos realizados en clase.

▪ **Expresión escrita y exposición oral.**

Se valora también la expresión que el alumno utiliza para la explicación de las tareas, así como la exposición oral que debe realizar.

▪ **Actitud y participación en clase.**

También es un factor a evaluar la actitud por parte de los alumnos, apostado siempre por el respeto y el compañerismo.

La participación en clase también se tendrá en cuenta.

▪ **Trabajo diario.**

Es obligación de los alumnos realizar las tareas que el profesor determine necesarias, por tanto también será un punto a evaluar.

▪ **Cuaderno de clase.**

La organización clara y limpia del cuaderno, la toma de apuntes en el mismo, y la corrección de las actividades es otro requisito que se tiene en cuenta a la hora de evaluar.

▪ **Participación en actividades complementarias: concursos, olimpiadas, etc.**

Se tendrá en cuenta el interés que muestren los alumnos hacia la participación en concursos relacionados con la asignatura. Este interés se calificará como 0,5 puntos sumativos en la nota final del curso.

Criterios de Calificación

1. Calificación: Evaluación Trimestral

La calificación por evaluación trimestral, es el resultado de una suma final, siguiendo una ponderación entre pruebas escritas, trabajos cooperativos, actitud y participación.

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN	% CALIFICACIÓN
Pruebas escritas* (Media de las pruebas realizadas)	60%
Presentación de trabajos cooperativos. Trabajo diario. Cuaderno individual	20%
Expresión escrita y exposición oral	10%
Actitud y participación en clase	10%
Calificación total	100%

Pruebas escritas*

Se establece un total de dos o tres pruebas escritas en cada una de las evaluaciones. La realización de dichas pruebas se ubicará al final de un bloque didáctico, o de una unidad didáctica concreta.

Cada prueba se configurará con varios ejercicios, de dificultad y puntuación variable, cuyo contenido cumpla con los Estándares de aprendizaje. (Es necesario obtener 4 puntos en esta prueba para optar al aprobado de la asignatura).

Recuperaciones*

Se establecen también una serie de pruebas de recuperación por evaluaciones. Estas pruebas parciales se realizan al comienzo de la evaluación siguiente, tras el periodo vacacional correspondiente.

Se contempla un último examen de recuperación a final del curso, en el mes de Junio, donde los alumnos con evaluaciones suspensas y cuya media no suponga una suma de 5 puntos, deberán enfrentarse a una prueba escrita del temario que no se haya superado.

2. Calificación: Final del Curso

CALIFICACIÓN POR EVALUACIONES	% CALIFICACIÓN
1ª Evaluación	≥4
2ª Evaluación	≥4
3ª Evaluación	≥4
Calificación final	$(1^{\text{a}} \text{ Ev.} + 2^{\text{a}} \text{ Ev.} + 3^{\text{a}} \text{ Ev.}) / 3$

Para superar la asignatura la Calificación Final ha de ser ≥ 5 .

Prueba extraordinaria

Si tras el examen final de la asignatura no se logra una media de aprobado, se procede a realizar en la convocatoria extraordinaria, una nueva prueba, cuyo contenido es la totalidad de la materia.

3. *Calificación: Unidad Didáctica:*

En cada unidad se evaluará a los alumnos en función de sus resultados en cada uno de los instrumentos de evaluación utilizados por el docente. Al final del trimestre, se realiza un cómputo global de todas las unidades, para finalmente poner la calificación, y extraer las conclusiones pertinentes.

Para esta unidad se tendrá en cuenta: el resultado de una prueba escrita, dos trabajos cooperativos, numerosas actividades de trabajo diario, el cuaderno de clase, la expresión oral y escrita en las exposiciones públicas, y la actitud del alumno.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

La diversidad entre el alumnado en la etapa de Secundaria es muy probable. No todos los alumnos poseen la misma motivación o interés por la materia, el mismo ritmo de aprendizaje o las mismas capacidades para asimilar conceptos. Esto obliga al profesor a realizar una atención personalizada a sus alumnos.

Para tratar la diversidad se desarrolla el currículo de manera que sea abierto y susceptible a cambios durante su aplicación en el curso académico. Esta práctica permite realizar adaptaciones cuando se observe una necesidad específica por parte del alumnado.

Para la detección de necesidades específicas, es conveniente valorar la situación de la que parte cada uno de los alumnos a principio de curso: rendimiento en etapas anteriores, interés mostrado por el estudio, personalidad... Si se observan casos que requieran de esta atención (alumnos con superdotación intelectual, con déficit de atención, con dificultades para el aprendizaje, alumnos repetidores, etc.), ya sea, desde principio de curso, como a mitad del mismo, se han de tomar medidas concretas, pero siempre evitando la discriminación hacia el alumno en cuestión por parte de sus compañeros.

Una vez se realice un análisis grupal, y se determinen las necesidades individuales de cada uno de los alumnos, se procede a la realización de **adaptaciones curriculares, de programas de refuerzo, de recursos para alumnos con dotaciones intelectuales superiores a la media...** sin dejar de atender al resto de los alumnos. Todo estudiante recibirá la misma atención que cada uno de sus compañeros, pero esta se adaptará a sus necesidades individuales.

Por ello, a grandes rasgos, se puede estipular, desde el momento de partida del curso, una serie de pautas para abordar las distintas situaciones de los alumnos:

Adaptaciones curriculares significativas

Esta adaptación se llevará a cabo junto al Departamento de Orientación Educativa, y las medidas tomadas se centrarán en la modificación de los recursos materiales y personales, adaptándolos a las necesidades del alumno: adecuación de actividades a sus capacidades,

adaptación en la metodología utilizada por el profesor, ajuste de los contenidos, y como recurso último, la modificación de los objetivos que se esperan conseguir.

- En la unidad tratada, esta medida se concretará en el ajuste de recursos adicionales con contenidos de la unidad. Se pondrán poner a disposición de alumnos con necesidades especiales, actividades de refuerzo relacionadas con las transformaciones geométricas. Se adoptará una metodología apropiada a la hora de explicar la unidad, etcétera.

Adaptaciones curriculares no significativas

Se trata de adaptaciones en aquellos casos donde la dificultad para asimilar los conceptos no es significativa, no existe un problema de capacidad. Para estos casos se recurrirá a otros tipos de metodología, con el objetivo de captar la atención del alumno, motivándole, buscando su participación...

- En esta unidad didáctica se implantarán actividades grupales, lo que contribuye a la atención a la diversidad, ya que formando grupos heterogéneos se favorece al aprendizaje cooperativo y el compañerismo, pudiendo aprender unos de otros, ayudando los más avanzados a aquellos que necesiten apoyo.

Se intentará también lograr un mayor interés y curiosidad hacia el tema por parte del alumno, realizando actividades dinámicas y con el uso de herramientas informáticas.

Atención a los alumnos de altas capacidades

Los alumnos con superdotación intelectual requieren de una atención especial, ya que sus capacidades pueden alcanzar conocimientos más avanzados que los impartidos en clase. La falta de una atención personalizada a estos alumnos, podría desencadenar en fracaso escolar, ya que, al no aprovechar su potencial, el alumno puede sentir frustración y aburrimiento.

- Los alumnos de tales características serán informados de las competiciones matemáticas que resulten de su interés, se les ofrecerá la oportunidad de realizar trabajos de investigación con mayor dificultad que al resto de compañeros, etcétera.

Atención a los alumnos con evaluación negativa en el curso anterior

Los alumnos que aún no hayan superado la asignatura de Matemáticas (Orientadas a las Enseñanza Académicas) de 3º de E.S.O, y se encuentren cursando 4º de E.S.O, realizarán una serie de actividades que recogen contenidos de todo el curso. Estas actividades tendrán entregas periódicas, previas a la fecha de la prueba de recuperación. Con ello, se realiza un seguimiento del trabajo realizado, mediante la concreción de tutorías, que permita al alumno resolver dudas y recibir las explicaciones necesarias.

Las medidas aquí descritas abordan las situaciones de estudiantes concretos, con perfiles que suelen integrarse en Secundaria, pero queda abierta la posibilidad de tomar otro tipo de decisiones cuando se den casos diferentes a los expuestos.

AUTOEVALUACIÓN DE LA UNIDAD

Tras finalizar el desarrollo total de la unidad didáctica, el profesor analizará diversos aspectos que él considere significativos y que le permitan valorar el funcionamiento de la metodología utilizada, los resultados obtenidos, los elementos o facetas que debe mejorar a la hora de impartir la materia de la unidad, los que son óptimos para el aprendizaje de los alumnos y merece la pena mantener, etcétera.

En esta Autoevaluación, las preguntas que el profesor puede hacerse quedan registradas en una tabla, y tras la finalización de la unidad, se procederá a responder dicho cuestionario:

ASPECTOS A EVALUAR	A DESTACAR	A MEJORAR	PROPUESTAS DE MEJORA
Temporalización de la UD			
Desarrollo de los objetivos didácticos			
Manejo de los contenidos de la UD			
Despeño de competencias			
Realización de tareas			
Estrategias metodológicas aplicadas			
Recursos y material didáctico			
Claridad en los criterios de evaluación			
Uso de diversas herramientas de evaluación			
Atención a la diversidad			
Resultados			
Satisfacción del profesor			
...			

Es importante que los alumnos realicen también su propia autoevaluación, la cuál será entregada al profesor. El docente será consciente de las carencias que puedan tener sus alumnos, de cuáles son los contenidos que resultan más complicados de asimilar, de los temas que requieren un mayor detenimiento en su explicación, etcétera.

Este tipo de evaluación se realizará al finalizar cada evaluación, y los aspectos que se pregunten serán los siguientes:

1 = Totalmente en desacuerdo

...

5 = Totalmente de acuerdo

ASPECTOS A EVALUAR	1	2	3	4	5
Estoy comprendiendo y afianzando mis conocimientos en matemáticas.					
Entiendo al profesor cuando nos plantea el trabajo.					
La asignatura me está resultando más difícil de lo que esperaba.					
La asignatura me está resultando más fácil de lo que esperaba.					
Deberíamos hacer más trabajos en grupo.					
Deberíamos hacer más trabajos individuales.					
Se necesitan más trabajos y actividades para comprender la materia.					
Si trabajo más, podré mejorar mi nota.					
Creo que voy a obtener mejor nota de la que esperaba.					
Creo que voy a obtener peor nota de la que esperaba.					
Espero superar con éxito la asignatura al finalizar el curso.					
Llevar el trabajo de la asignatura al día es importante para sacar buena nota.					
Resulta fácil preguntar dudas al profesor.					
Prefiero hacer actividades en el cuaderno.					
Prefiero hacer actividades en el ordenador.					
La exposición oral me ha sido útil.					
La asignatura me parece interesante.					
Creo que lo aprendido es útil para entender el mundo en el que vivimos.					
Creo que estoy aprendiendo.					
Estoy contento en esta clase.					
...					

Teniendo en cuenta, tanto el análisis propio que el profesor realiza de cada una de las unidades didácticas, como las respuestas dadas por los alumnos en el cuestionario, que fundamentan las impresiones que todos ellos tienen acerca de la asignatura, el profesor extraerá conclusiones.

Dichas conclusiones serán argumentos de peso para tomar decisiones en relación a posibles modificaciones en la planificación, la metodología, la selección de material didáctico..., siempre con el fin de mejorar el aprendizaje de los alumnos.

5. CONCLUSIONES

A continuación, expongo mis propias impresiones acerca de cómo el presente Máster contribuye al desarrollo de las capacidades personales de los alumnos que lo cursan, y en concreto, aquellas relacionadas con la profesión docente.

Los objetivos del Máster, así como las competencias que pretende desarrollar en los alumnos, se explican en el actual epígrafe. En conexión con cada uno de los objetivos y competencias, y como alumna de dicho Máster, explico el grado de satisfacción y cumplimiento de tales fines.

Los objetivos y competencias que se exponen a continuación están extraídos de: Objetivos y Competencias. Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas. Curso 2017/18.

5.1. CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS Y COMPETENCIAS DEL MÁSTER

5.1.1. Objetivos:

“La finalidad del máster es la adquisición por los estudiantes de una formación avanzada, orientada a la especialización profesional, que les habilite para el ejercicio de las profesiones reguladas de Profesor de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas”.

Los objetivos generales que este Máster se plantea, a su vez, corresponden con los objetivos de la asignatura TFM. Esto se debe a que el Trabajo Fin de Máster ha de ser un documento que demuestre la adquisición de los conocimientos y capacidades que doten al alumno para realizar la función docente.

Objetivos generales:

“OG1: Que los estudiantes sepan aplicar, como profesionales docentes, los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con la especialidad cursada.

OG2: Que los estudiantes sean capaces, como profesionales docentes, de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación en los centros escolares de sus conocimientos y juicios.

OG3: Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones, conocimientos y razones últimas en las que se sustentan como profesionales docentes, tanto a públicos especializados como a no especializados, de un modo claro y sin ambigüedades.

OG4: Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando y formándose como profesionales docentes, de un modo en gran medida autodirigido o autónomo.”

A mi modo de ver, en relación a todos estos objetivos, considero que el máster cumple en cierta medida todos y cada uno de ellos.

- En primer lugar, el ***OG1***, se cumple, exponiendo distintos supuestos casos en algunas de las clases, explicando las maneras de actuar en diferentes contextos, invitando a la reflexión y a la iniciativa de actuación de los alumnos, y dotándolos de herramientas para afrontar numerosas situaciones. A su vez, al incitar a la reflexión y el razonamiento, se contribuye también al logro del ***OG2***, ya que el alumno, analizando diferentes situaciones y maneras de afrontarlas, realiza juicios y reflexiones abarcando a su vez valores éticos y morales. Con las exposiciones de trabajos elaborados en las diferentes asignaturas del Máster se desarrolla la capacidad de comunicar a públicos especializados, y asimismo, con las prácticas docentes en un centro de Secundaria, el estudiante del Máster experimenta la comunicación con los alumnos. Así pues, el Máster satisface las intenciones perseguidas con el ***OG3***. Por último, puedo afirmar que el ***OG4***, se ve logrado con el mero hecho de encontrarnos en una formación académica universitaria, donde la autonomía en el aprendizaje es primordial.

5.1.2. Competencias:

Para este Máster, se redactan las competencias generales y las específicas que se pretenden desarrollar al cursarlo:

Competencias generales

G.1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones.

G.2. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes, así como la orientación de los mismos, tanto individualmente, como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.

G.3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.

G.4. Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.

G.5. Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible.

G.6. Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.

G.7. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.

G.8. Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

G.9. Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.

G.10. Conocer y analizar las características históricas de la profesión docente, su situación actual, perspectivas e interrelación con la realidad social de cada época.

G.11. Informar y asesorar a las familias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje y sobre la orientación personal, académica y profesional de sus hijos.”

- Las competencias generales del Máster se potencian al adquirir los conocimientos de las asignaturas. Se enseñan los contenidos curriculares relacionados con la especialización docente: *Matemáticas*, ampliando los conocimientos que se imparten en Educación Secundaria y Bachillerato, es decir, se dota al profesor de conocimientos de mayor nivel. Así mismo se dan herramientas que capacitan al alumno para buscar y elaborar información en distintos medios que le ayude en su futura profesión, y para planificar y conformar el proceso de enseñanza. Todo ello basándose en las pautas que marca la legislación en cuanto a *currículum* o contenidos, y en relación también a los objetivos mínimos y competencias que deben lograrse o desarrollarse. Por otro lado, se hace reflexionar al estudiante del Máster acerca de la importancia de la interacción con los alumnos de Secundaria, así como con sus familias, ya que, para que se dé el proceso enseñanza-aprendizaje, la comunicación es fundamental. Cabe destacar cómo en ciertas asignaturas se trabaja el hecho de utilizar estrategias y mecanismos que contribuyen al desarrollo de un buen aprendizaje, buscando la motivación en el alumno, ya sea por medio de

enseñanzas innovadoras, o utilizando actividades que resulten atractivas. Estos objetivos suelen quedar inmersos en la enseñanza de todas las asignaturas, ya que el enfoque que se da en cada una de ellas siempre está relacionado con la docencia en la ESO y Bachillerato.

Competencias específicas del módulo genérico

▪ Aprendizaje y desarrollo de la personalidad

*“E.G.1. Conocer las características de los **estudiantes**, sus contextos sociales y motivaciones.*

*E.G.2. Comprender el desarrollo de la **personalidad** de estos estudiantes y las posibles **disfunciones** que afectan al aprendizaje.*

*E.G.3. Elaborar **propuestas** basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales.*

*E.G.4. Identificar y planificar la **resolución de situaciones educativas** que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y diferentes ritmos de aprendizaje.”*

▪ Procesos y contextos educativos

*“E.G.5. Conocer los **procesos de interacción y comunicación** en el aula y en el centro, abordar y resolver posibles problemas.*

*E.G.6. Conocer la **evolución histórica** del sistema educativo en nuestro país.*

*E.G.7. Conocer y aplicar **recursos y estrategias de información, tutoría y orientación académica y profesional.***

*E.G.8. Promover **acciones de educación emocional, en valores y formación ciudadana.***

*E.G.9. Participar en la **definición del proyecto educativo y en las actividades generales del centro** atendiendo a criterios de mejora de la calidad, atención a la diversidad, prevención de problemas de aprendizaje y convivencia.”*

▪ Sociedad, familia y educación

*“E.G.10. Relacionar la **educación con el medio y comprender la función educadora de la familia** y la comunidad, tanto en la adquisición de competencias y aprendizajes, como en la educación en el respeto de los derechos y libertades, en la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres y en la igualdad de trato y no discriminación de las personas con discapacidad.*

*E.G.11. Conocer la **evolución histórica de la familia**, sus diferentes tipos y la incidencia del contexto familiar en la educación.*

*E.G.12. Adquirir **habilidades sociales en la relación y orientación familiar.**”*

- Las competencias específicas del módulo genérico son desarrolladas en cada una de las asignaturas del mismo. Con la exposición de contenidos y la realización de diversas prácticas, se cumple con el desarrollo de los futuros docentes de estas competencias. Se ha tratado en la

asignatura *Aprendizaje y desarrollo de la personalidad* tanto las posibles personalidades que podemos encontrar en alumnos de Educación Secundaria, como las herramientas que ayudan a afrontar distintas situaciones. Además, en la asignatura *Procesos y Contextos educativos* se han explicado temas relacionados con la evolución histórica de la educación y las distintas funciones que el profesor debe realizar, más allá de la propia docencia de la asignatura concreta. Podemos encontrar, como ejemplo de estas labores, aquellas relacionadas con la educación ciudadana, social y cívica de los alumnos que se trabajan en tutorías o en sesiones de orientación. A su vez, se ha explicado el papel del profesor en el funcionamiento del centro y las actividades que a nivel general puede, y debe, llevar a cabo. La última de las asignaturas de este módulo, *Sociedad, familia y educación*, contribuye, con su enseñanza, a desarrollar las competencias necesarias para ejercer la futura profesión como docentes de aquellos que lo cursan. Entre sus contenidos están los relacionados con la historia y evolución de las familias, y la importancia de la interacción con ellas para el logro de un buen proceso enseñanza-aprendizaje. Con el conocimiento de todas estas cuestiones, el alumno desarrolla habilidades sociales para tratar temas familiares que influyen en la educación.

Competencias específicas del módulo específico

▪ ***Complementos para la formación disciplinar***

“E.E.1. Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas.

E.E.2. Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.

E.E.3. Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.

E.E.4. En formación profesional, conocer la evolución del mundo laboral, la interacción entre sociedad, trabajo y calidad de vida, así como la necesidad de adquirir la formación adecuada para la adaptación a los cambios y transformaciones que puedan requerir las profesiones.

E.E.5. En el caso de la orientación psicopedagógica y profesional, conocer los procesos y recursos para la prevención de problemas de aprendizaje y convivencia, los procesos de evaluación y de orientación académica y profesional.”

▪ ***Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes***

“E.E.6. Conocer los desarrollos teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las materias correspondientes.

E.E.7. Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo.

E.E.8. Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos.

E.E.9. Fomentar un clima que facilite el aprendizaje y ponga en valor las aportaciones de los estudiantes.

E.E.10. Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza aprendizaje.

E.E.11. Conocer estrategias y técnicas de evaluación y entender la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo.”

▪ **Innovación docente e iniciación a la investigación educativa**

“E.E.12. Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialización cursada.

E.E.13. Analizar críticamente el desempeño de la docencia, de las buenas prácticas y de la orientación utilizando indicadores de calidad.

E.E.14. Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las materias de la especialización y plantear alternativas y soluciones.

E.E.15. Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de investigación y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación.”

- Con el aprendizaje de las distintas asignaturas del módulo de matemáticas, se contribuye a desarrollar y lograr las competencias específicas del módulo específico. Se ha estudiado la historia y la evolución de las matemáticas, se han visto diversas aplicaciones de estas en numerosos contextos y además, se ha trabajado acerca de la necesidad real de aprender esta materia en niveles de Secundaria, para formar una sociedad cultivada y crítica, con ciudadanos no manipulables. Además, se han estudiado métodos educativos que mejoran el aprendizaje, se ha dotado a los futuros profesores de criterios que les ayudan a seleccionar información y actividades apropiadas, y herramientas para elaborar contenidos de manera personal. Una de las asignaturas, concreta su enseñanza en las pautas y principios que persigue una evaluación, por lo que con su aprendizaje se desarrolla esta competencia. Por último, se inculca a los alumnos del Máster la necesidad de usar herramientas informáticas en el proceso enseñanza-aprendizaje, adaptando así la docencia al contexto temporal en el que se ubica, con el auge de las Nuevas Tecnologías y la incesante evolución de las mismas.

▪ **Competencias Específicas del módulo Practicum**

Las competencias que se fijan para este módulo del Máster corresponden a las que, el propio TFM pretende potenciar en los alumnos, por pertenecer este a dicho módulo.

Encontramos las siguientes:

“E.P.1. Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de las materias correspondientes a la especialización.

E.P.2. Acreditar un buen dominio de la expresión oral y escrita en la práctica docente.

E.P.3. Dominar las destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar un clima que facilite el aprendizaje y la convivencia.

E.P.4. Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica.

E.P.5. Para la formación profesional, conocer la tipología empresarial correspondiente a los sectores productivos y comprender los sistemas organizativos más comunes en las empresas.

E.P.6. Respecto a la orientación, ejercitarse en la evaluación psicopedagógica, el asesoramiento a otros profesionales de la educación, a los estudiantes y a las familias.”

- Las competencias específicas del Practicum se ven potenciadas al realizar las prácticas docentes en un centro de Educación Secundaria. Con la experiencia del *Practicum* se viven en primera persona las situaciones a las que se enfrenta un profesor, tanto dentro del aula, como detrás de ella. Con la elaboración e impartición de la unidad didáctica se refuerzan las competencias anteriormente definidas: es necesario planificar la docencia, definir y justificar su evaluación, exponer ante los alumnos el temario, afrontar situaciones que implican el dominio de habilidades sociales para lograr la buena convivencia, etc. Además, al tener contacto directo con un centro educativo y el personal que lo forma, se contribuye a desarrollar algunas capacidades, como pueden ser: poder evaluar psicopedagógicamente a los alumnos, tener conciencia de la importancia de la relación con las familias, conocer los frutos del trabajo en equipo y el apoyo que debe existir entre los docentes, etcétera

5.2. CONTRIBUCIÓN DE LAS ENSEÑANZAS DEL MÁSTER A LA ELABORACIÓN DEL PRESENTE TRABAJO

“Estas competencias, junto con las propias del resto de materias, quedarán reflejadas en el Trabajo fin de Máster que compendia la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas descritas.”

El Trabajo Fin de Máster se constituye como trabajo unificador de las enseñanzas aprendidas. Por tanto, tal y como se describe en la cita anterior, se requiere reflejar en dicho trabajo la contribución de cada una de las asignaturas del Máster, así como las competencias que pretenden potenciar en los futuros docentes.

El presente documento se centra en la elaboración de una ***Propuesta Didáctica para la enseñanza de los Movimientos en el Plano***, enfocado desde una ***perspectiva histórica***. Así pues, a continuación se va a describir cómo las diferentes asignaturas del Máster han contribuido a su desarrollo.

- Para llevar a cabo la elaboración de una Unidad Didáctica, ha sido fundamental conocer qué contenidos mínimos se establecen para el tema desarrollado en los documentos institucionales,

así como los objetivos que plantea para la Educación Secundaria en general, y para el tema tratado en particular. También es muy importante, para la realización de una propuesta didáctica, tener conocimiento del sistema educativo y el modelo educacional que impone la legislación, basado en competencias, al que hay que acogerse y cumplir. Todo ello, junto con el estudio de cada una de las partes que componen una unidad didáctica, ha sido estudiado en la asignatura *Diseño Curricular en Matemáticas*.

- El docente debe poseer conocimientos de mayor nivel que el tratado en la aulas de Secundaria y Bachillerato. Los profesores pueden transmitir mejor los conocimientos y sentir seguridad sobre ellos cuanto más formados estén. Además en ocasiones han de resolver dudas a alumnos con altas capacidades o puede impartir su docencia en Bachilleratos de Excelencia o Internacionales; así pues, es necesaria la adquisición de unos conocimientos complementarios que les aseguren tal nivel académico, y en este máster se contribuye a ello a través de la asignatura *Complementos de Matemáticas*.

- La planificación de la docencia que se establece en el trabajo se ha realizado teniendo en cuenta las consideraciones tratadas en la asignatura *Didáctica de la Matemática*. Es necesario analizar cuál es la forma más adecuada para transmitir los conocimientos a los alumnos a los que nos dirigimos, escogiendo aquella manera que contribuya al desarrollo del aprendizaje significativo.

- En el planteamiento de la docencia, es necesario elaborar modelos que permitan el entendimiento del tema. Así mismo, en la propuesta se estipula como objetivo: conseguir que el alumno sea capaz de realizar sus propias deducciones y estrategias para lograr la resolución de un problema dado. En la asignatura de *Modelos Matemáticos en Educación Secundaria* se han estudiado diversos modelos y situaciones que pueden servir de ejemplo, y basándose en ellos se han incluido diversas actividades en esta unidad didáctica.

- Han sido muy necesarios los conocimientos aprendidos en la asignatura *Metodología y Evaluación en Matemáticas*. Todo lo tratado en esta asignatura ha sido fundamental para escoger metodologías que se adecúen a los objetivos y competencias que se plantean. Además, se han tenido en cuenta las consideraciones estudiadas para desarrollar un método de evaluación.

- En la elaboración de las distintas actividades incluidas en la Unidad Didáctica, también se ha considerado introducir matices innovadores, que puedan motivar al alumno y lograr un aprendizaje más afianzado. El uso de herramientas informáticas también está muy presente en esta unidad. Tanto la importancia de incluir métodos innovadores en la docencia, como el uso de las TICs en el aula de Secundaria, ha sido analizado en la asignatura *Innovación Docente en Matemáticas*.

- En *Iniciación a la Investigación educativa en Matemáticas* se han tratado temas relacionados con la investigación, imprescindible en educación, ya que con estudios de este tipo

podemos contribuir a mejorar la docencia. Se han tenido en cuenta las estrategias estudiadas en la asignatura citada para el análisis didáctico de contenidos y de instrucción, análisis de libros de texto, etcétera.

- Como el propio título del TFM indica, el enfoque que se da a la propuesta didáctica es histórico, por tanto, se tendrá en cuenta la evolución de los *Movimientos en el Plano* en la Historia, así como las manifestaciones culturales y artísticas en las que subyacen tales contenidos matemáticos. Este hecho eleva como asignatura primordial para el trabajo la optativa ***Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia***.

- Por último, destaco lo fundamental que han resultado las ***Prácticas Externas*** en un centro de Educación Secundaria. Aunque durante mi estancia en el *Practicum*, no se explicó el tema de la Unidad, debido a la no correspondencia temporal, sí que he podido basar mi propuesta en las observaciones realizadas. Asistí a clases de 3º de la ESO durante todo el periodo de prácticas, y pude observar las dificultades que presentan los alumnos, y sobre todo, la falta de interés y de atención que muestran la mayor parte de ellos. Por ello, se intenta en esta unidad captar la atención y mantener a los alumnos concentrados y motivados, mediante actividades innovadoras y atractivas, que usen por ejemplo materiales diversos, manipulación de instrumentos, y programas informáticos.

Como se puede deducir de todo lo explicado en estas líneas, el Máster se convierte en medio fundamental para poder llevar a cabo el desarrollo de este TFM, y por consiguiente, para poder realizar, en el futuro, la planificación docente y cada una de las unidades didácticas correspondientes a la Educación Secundaria y Bachillerato. Esta es una labor, entre otras, que como profesora, deberé desarrollar en el futuro.

6. BIBLIOGRAFÍA

▪ NORMATIVA VIGENTE

España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3 de enero de 2015, núm. 3. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

España. Orden EDU 362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León, 8 de mayo de 2015, núm. 86. Consejería de Educación.

▪ LIBROS

Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M. y Pérez, A. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3^º ESO*: SM Savia.

Alsina, C. y Trillas, E. (1984). *Lecciones de Álgebra y Geometría*. Barcelona: G-G.

Arias, J.M. y Maza, I. (2015). *Matemáticas académicas 3^º ESO*: Bruño.

Blanco Martin, M.F. (1994). *Movimientos y simetrías*. Valladolid: Ediciones Universidad de Valladolid.

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

Chamoso, J., Fernandez, I. y Reyes, E. (2009). *Burbujas de arte y matemáticas*. Madrid: Nivola.

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M^a. J. y Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3*: Anaya.

González Urbaneja, P.M. (2017). *Los Elementos de Euclides*. Badajoz: FESPM

Hernández, E. (1998). *Álgebra y Geometría*. Madrid: Addison-Wesley.

Klein, F. (1974). *Le programme d'Erlangen*. París: Gauthier-Villars Éditeur.

Pedoe, D. (1979). *Geometría en el Arte*. Barcelona: Gustavo Gili.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psychogenèse et histoire des sciences*. París: Flammarion.

Reyes Iglesias, E., Fernández Benito, I. (2015). *Pentágonos: Construcciones. Mosaicos. Geometría Sagrada*: Ediciones Universidad de Valladolid.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de España Editores.

▪ ARTÍCULOS Y TRABAJOS ACADÉMICOS

Bermejo, A. (1999). Mosaicos. Movimientos en el plano. *Suma*, 30, pp. 111-120. Disponible en <http://revistasuma.es/IMG/pdf/30/111-120.pdf>.

Bermejo, A. (2002). El libro de espejos. Aplicaciones didácticas. *Suma*, 41, pp. 83-92. Disponible en <http://revistasuma.es/IMG/pdf/41/083-092.pdf>.

Blanco, H. (s.f.). *Un cambio en el paradigma de la Geometría*. Instituto Superior del Profesorado. Buenos Aires. Disponible en <http://www.soarem.org.ar/Documentos/28%20Blanco.pdf>.

Julio Barrera, L. J. (2014). *Las Transformaciones en el plano y la noción de Semejanza* (Trabajo fin de Grado). Universidad Nacional de Colombia. Disponible en <http://bdigital.unal.edu.co/39463/1/1186931.2014.pdf>.

Moriena, S. (s.f.). *Reseña histórica y aplicaciones de las Transformaciones geométricas del plano*. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe, Argentina. Disponible en <http://www.soarem.org.ar/Documentos/31%20Moriena.pdf>.

Martínez García, M. A. (2012). *Movimiento. Simetrías*. (Trabajo fin de Máster). Universidad de Granada. Granada. Disponible en https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM%20Miguel%20Angel%20Martinez%20Garcia_2012.pdf.

Romero Santos, C. C. (2012). *Movimientos en el plano: Simetría. Traslación y Giro. 3º ESO*. (Trabajo fin de Máster). Universidad de Córdoba. Disponible en https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM%20Miguel%20Angel%20Martinez%20Garcia_2012.pdf.

▪ APUNTES ACADÉMICOS UNIVERSITARIOS

Blanco Martín, M. F. y Reyes Iglesias, M. E. (2018). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid.

González Arteaga, T., Población Sáez, J. A. y Reyes Iglesias, M. E. (2018). Apuntes Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid.

Apuntes Dpto. Matemática Aplicada. Sección Arquitectura. Universidad de Valladolid.

▪ DOCUMENTOS DE CENTRO EDUCATIVO

C.E.O. Boecillo. (2018). Programación Didáctica de Matemáticas, curso 2017/18.

C.E.O. Boecillo. (2018). Propuesta Curricular CEO Boecillo, curso 2015/16.

▪ WEBGRAFÍA

<http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html>. Última consulta 09/07/2018

<http://jmora7.com/Mosaicos/1100mosai.htm>. Última consulta 09/07/2018

<http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/despas.html>. Última consulta 09/07/2018

<http://www.matem.unam.mx/max/GP/N5.pdf>. Última consulta 09/07/2018

<https://www.geogebra.org/>. Última consulta 09/07/2018

<http://www.geom.uiuc.edu/java/Kali/program.html>. Última consulta 09/07/2018

ANEXOS

1. Ejercicios de repaso:

Se dará a los alumnos una fotocopia para repaso de la representación cartesiana.

Actividad 1.1:

Representa los siguientes puntos en los ejes cartesianos.

$A = (-7, -3)$

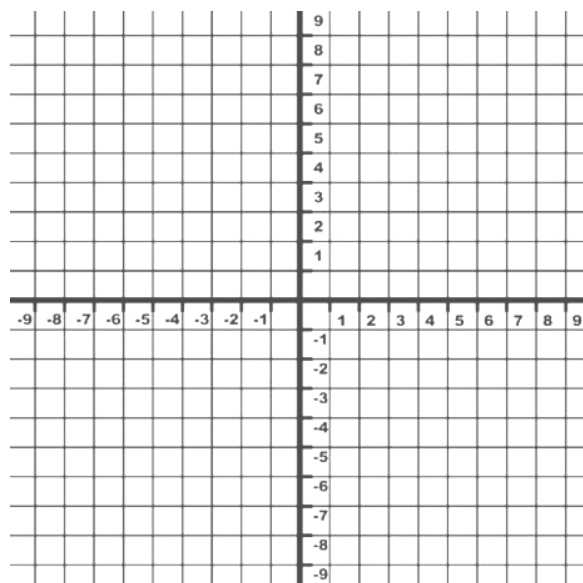
$B = (8, 0)$

$C = (-4, 6)$

$D = (0, 2)$

$E = (1, 2)$

$F = (-8, -5)$



Actividad 1.2:

Representa los siguientes vectores en los ejes cartesianos.

$\vec{a} = (-2, 3)$

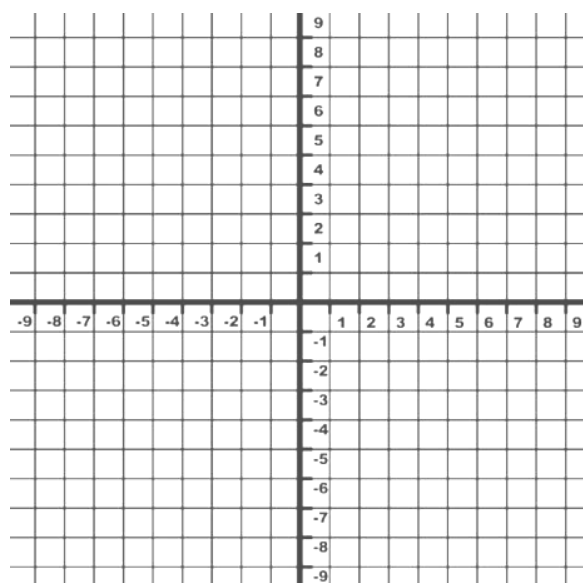
$\vec{b} = (3, 0)$

$\vec{c} = (-1, 7)$

$\vec{d} = (-5, 1)$

$\vec{e} = (8, 8)$

$\vec{f} = (-1, -6)$



Actividades 1.1 Y 1.2: Elaboración propia.

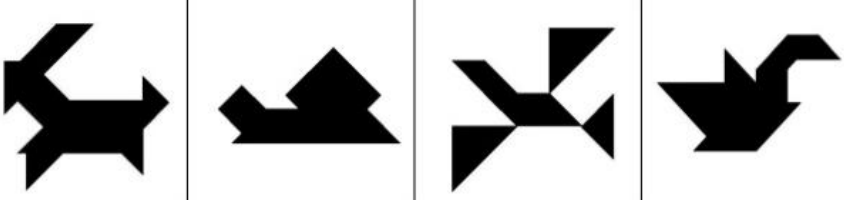

2. Actividad cooperativa.

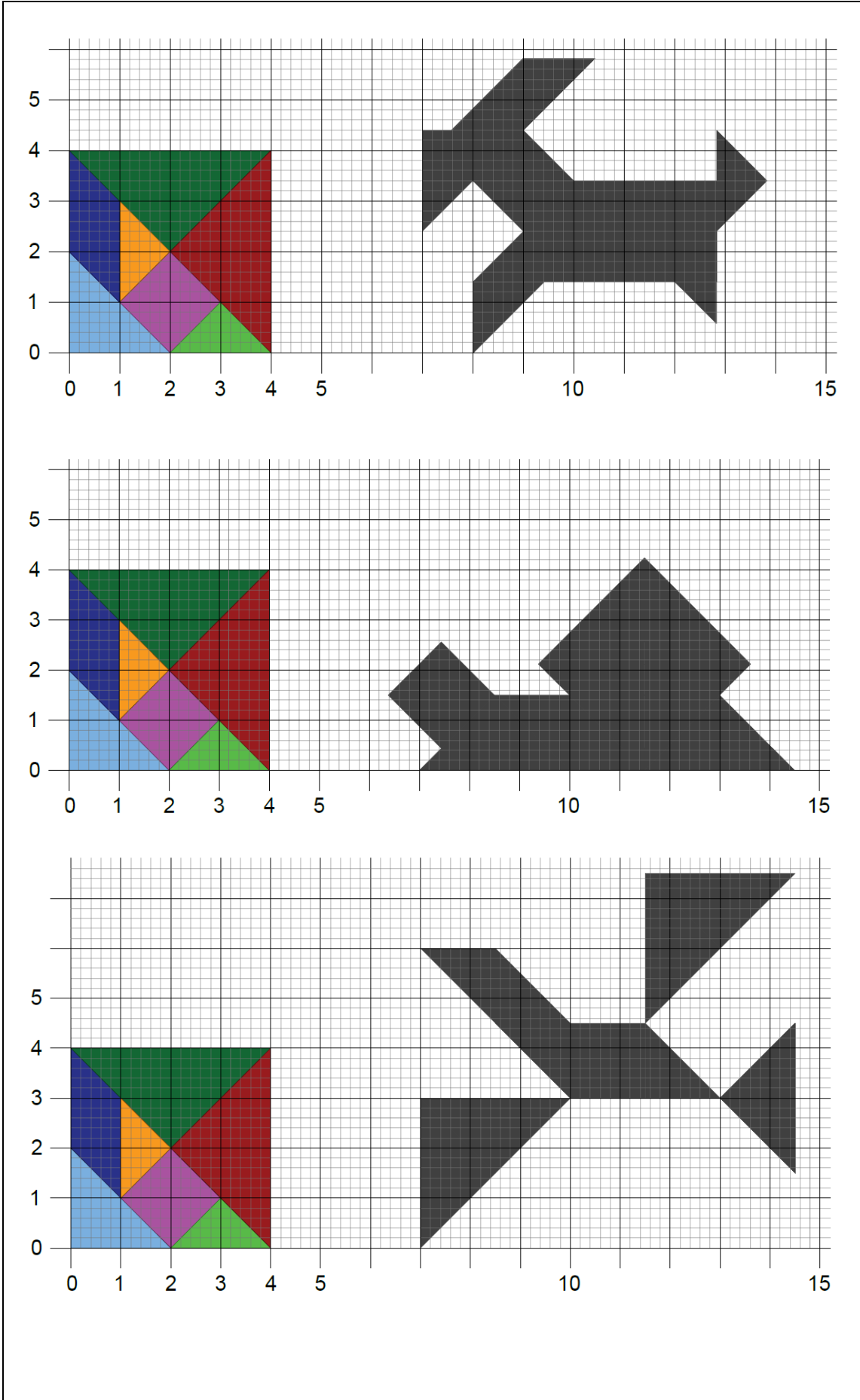
Con el objetivo de fomentar el compañerismo y trabajo en equipo, se realizan actividades de este tipo. Se entregará a los alumnos una ficha, la cuál debe ser rellenada por los componentes del grupo.

Actividad 2.1: "TANGRAM"

Este ejercicio plantea la puesta en práctica de lo aprendido durante la explicación del profesor: identificación de los movimientos en el plano, diferenciar entre movimientos directos e inversos, localizar elementos invariantes de las transformaciones.

Fichas tipo para realizar en grupos

FICHA Grupo N° 1	Construye las siguientes figuras con el juego del <i>Tangram</i> . 
	
<ol style="list-style-type: none">1. Dibujar en un folio la solución adoptada, coloreando cada pieza con su color.2. Seguidamente, partiendo de la construcción original del <i>Tangram</i>, en forma de cuadrado, identifica qué movimientos ha sufrido cada pieza para dar lugar a cada una de las cuatro figuras. (Puede tratarse de composición de movimientos). (Determina ángulos de giro y vectores de traslación).	



3. Enumera las características de cada una de las transformaciones encontradas. Determina cuáles son movimientos directos y cuáles inversos. Escribe en una columna los elementos invariantes de cada una de estas transformaciones.

Actividad 2.2: “MURAL”

Con este ejercicio o actividad se plantea una actividad, donde los alumnos afianzarán el aprendizaje del concepto de “mosaico”. Además, los alumnos podrán observar aplicaciones de los conocimientos matemáticos en situaciones de la vida diaria, en las expresiones artísticas, industriales, de diseño, etcétera.



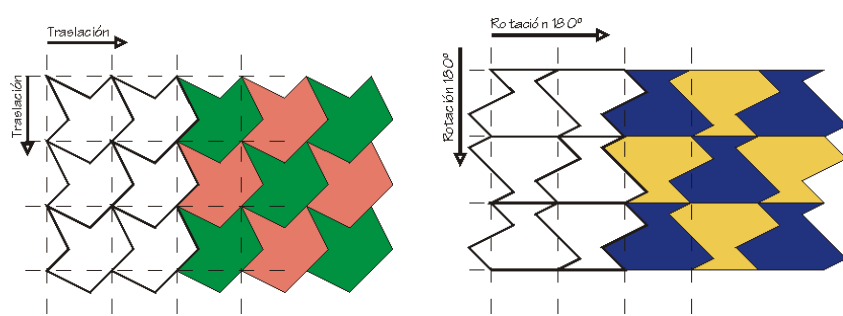
Figura A.2.2.1.

El objetivo es realizar un mural en forma de mosaico. Para inspirar a los alumnos se realiza una introducción teórica enseñando distintas composiciones del artista Maurits Cornelis **Escher**.



Figura A.2.2.2, A.2.2.3 y A.2.2.4.

Fichas tipo para realizar en grupos.

<p>FICHA</p> <p>Grupo N° 1</p>	<p>Utilizar vuestra imaginación, y realizar un mural artístico.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Realiza una trama que conformará la base del mosaico. 2. Después, dejando fluir vuestra creatividad, elaborar formas artísticas. <p>(Recuerda, cada porción que quites por el interior del elemento mínimo, debes añadírsela por el exterior).</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">  </div> <p>Figura A.2.2.5 y A.2.2.6.</p>
--	---

Actividades 2.1 Y 2.2: Elaboración propia.

3. Tareas para casa (TPC) y tareas a realizar en el aula:

Los estudiantes deben practicar, tanto en clase como en casa, los conocimientos adquiridos. Por ello, se aportan distintos ejercicios y problemas que deben resolver aplicando razonamientos matemáticos.

Actividad 3.1 :

Traslada una figura (por ejemplo con forma de letra L) mediante la traslación vector $(-4,5)$ y repite el proceso con la figura trasladada empleando el vector $(3,-6)$.

¿Qué movimiento utilizas para ir de la primera figura a la última?

Actividad 3.2 :

Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices A $(4,2)$, B $(3,-2)$ y C $(5,0)$. Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo.

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A', B' y C' del triángulo girado?

Actividades 3.1 Y 3.2: Elaboración propia.

4. Empleo de programas informáticos:

Estas actividades se incluyen para que los alumnos:

- Experimenten por sí mismo la aplicación de los movimientos en el plano.
- Creen sus propios diseños.

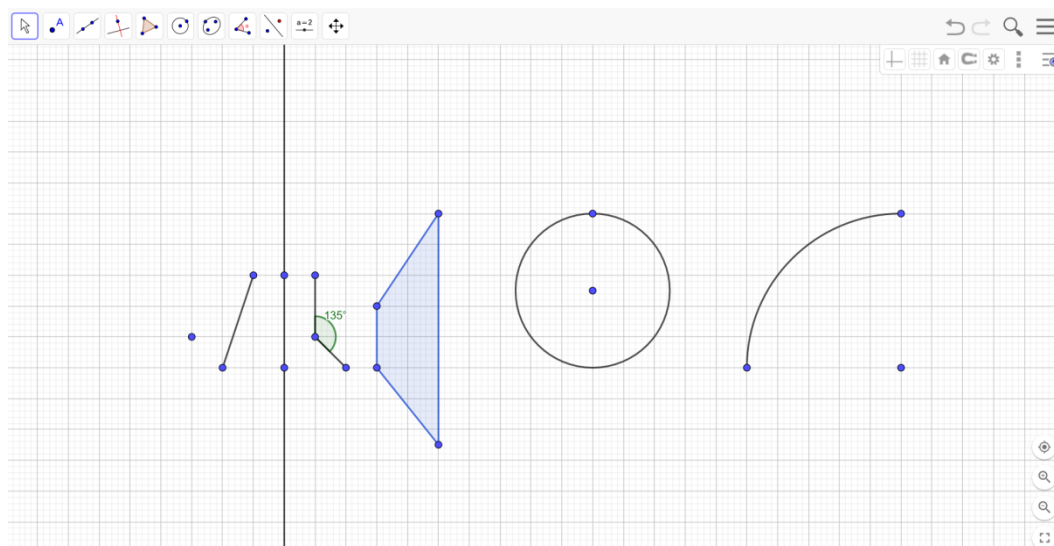
Actividad 4.1:

Práctica inicial con Geogebra:

1. Representación de figuras

* Busca la herramienta adecuada en la barra de herramientas y dibuja: Un punto, un segmento, una recta, un ángulo, un polígono, una circunferencia y un arco de circunferencia.

* Mueve las figuras anteriores, primero seleccionando la figura, y después moviendo los puntos que la determinan.

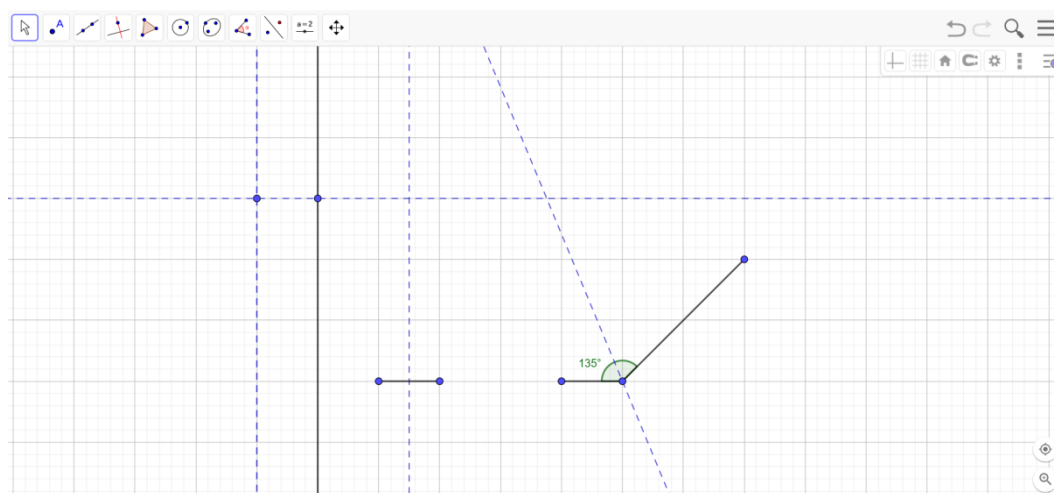


2. Algunas construcciones

* Representa una recta, un segmento y un ángulo.

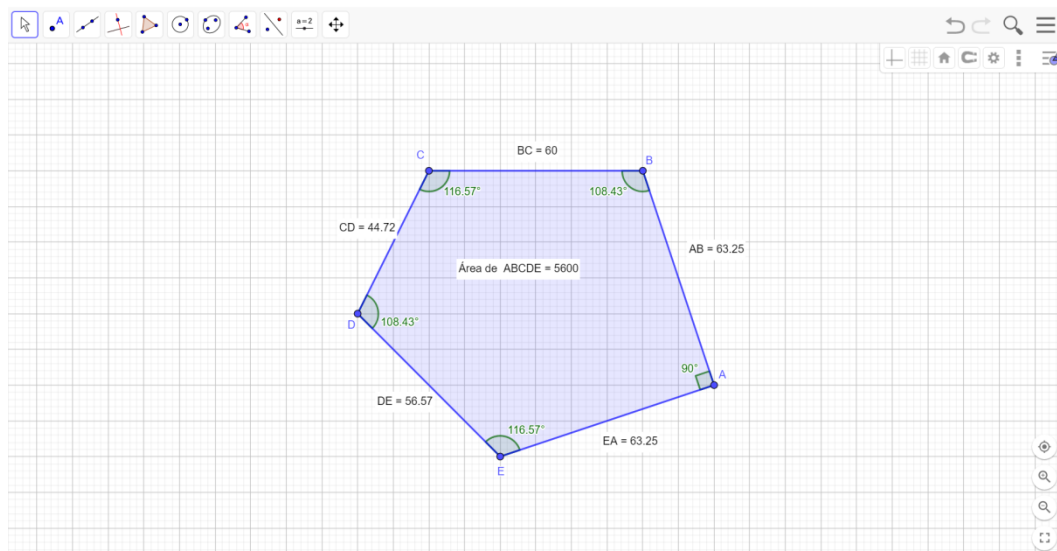
* Selecciona la herramienta adecuada para representar una paralela y una perpendicular a la recta, la mediatriz del segmento y la bisectriz del ángulo.

* Mueve la figura original y observa lo que ocurre con las construcciones.



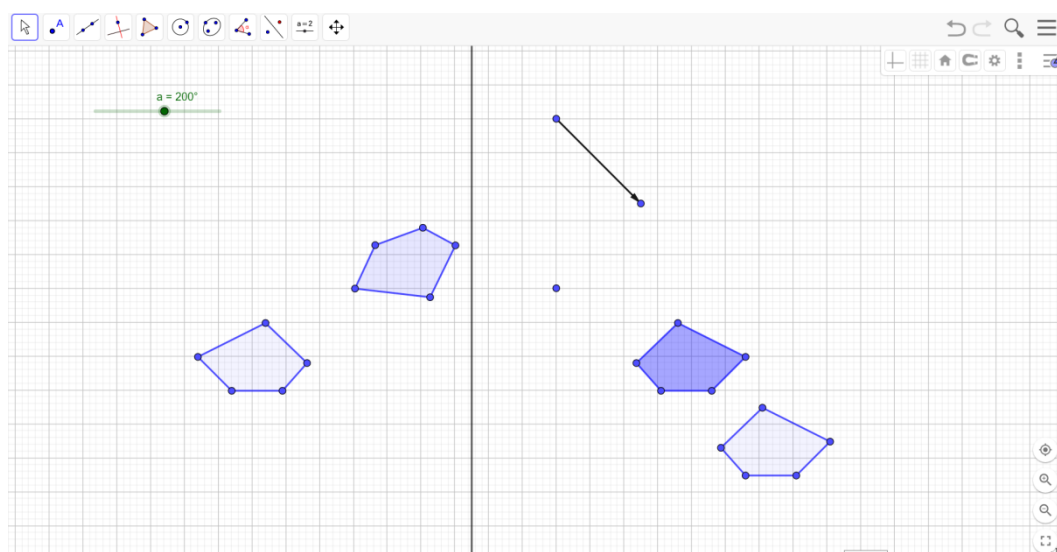
3. Medidas

- * Representa un polígono.
- * Busca entre las herramientas de medida y mide la longitud de los lados, la amplitud de los ángulos interiores y el área del polígono.



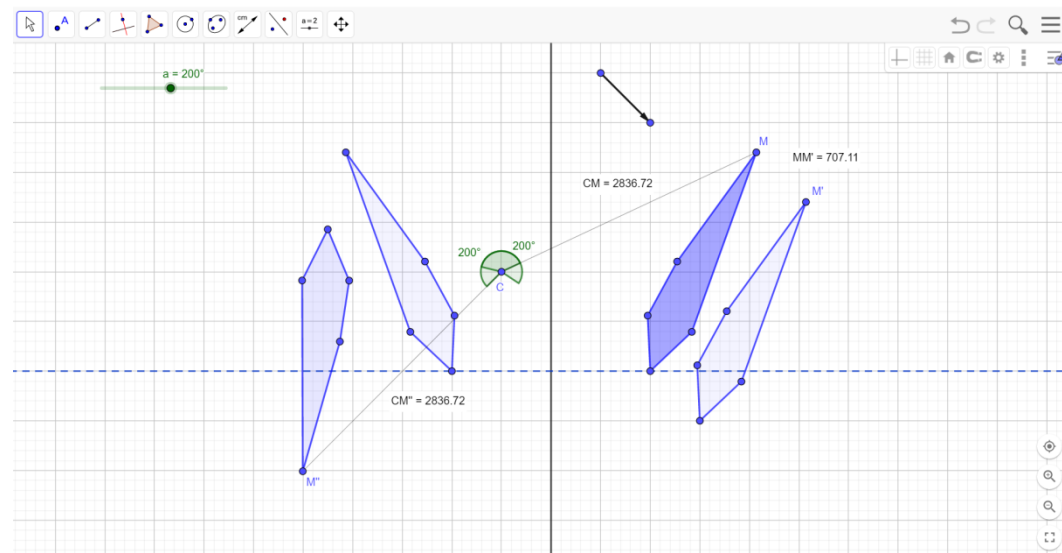
4. Movimientos

- * Representa un vector, una recta, un punto y un deslizador de ángulo α (los elementos necesarios para hacer los movimientos). Dibuja también un polígono.
- * Traslada el polígono siguiendo el vector.
- * Representa el simétrico del polígono respecto a la recta.
- * Gira el polígono respecto al punto el ángulo α (Mueve el deslizador y observa cómo se convierte una figura en otra).



5. Investiga

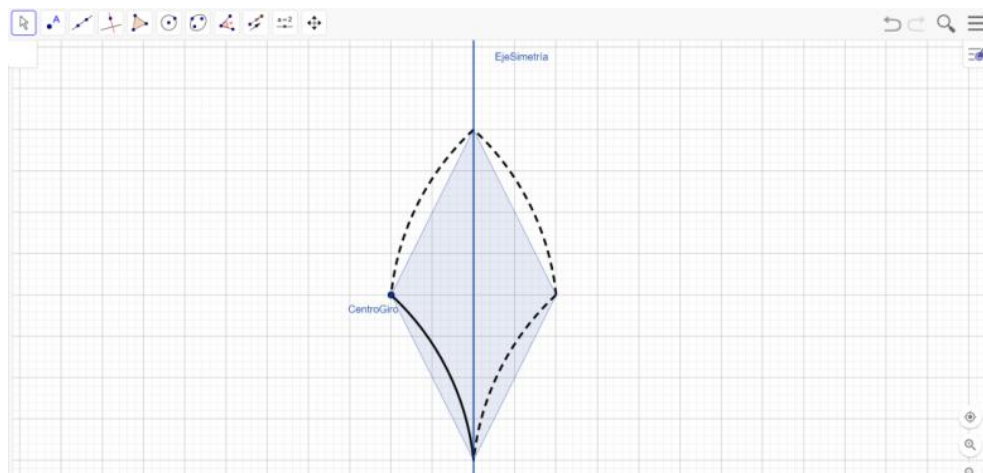
- * Mueve el polígono pinchando cualquiera de sus vértices, ¿cómo son el polígono original y el transformado?
- * Traza paralelas al vector de traslación que pasen por los vértices del polígono, ¿por qué otros puntos pasan?, ¿cuál es la distancia entre un vértice del polígono y su trasladado?, ¿depende del vértice elegido?
- * Une mediante un segmento un vértice del polígono con su simétrico y traza la mediatriz del segmento, ¿con qué coincide?, ¿depende del vértice elegido?
- * Traza el ángulo con vértice en el centro de giro y extremos en un vértice del polígono y en el vértice que se obtiene en el giro, ¿cuánto mide dicho ángulo?, ¿depende del vértice seleccionado?
- * Mide la distancia de un vértice al centro de giro y la distancia del vértice girado al centro de giro, ¿qué observas?, ¿depende del vértice seleccionado?



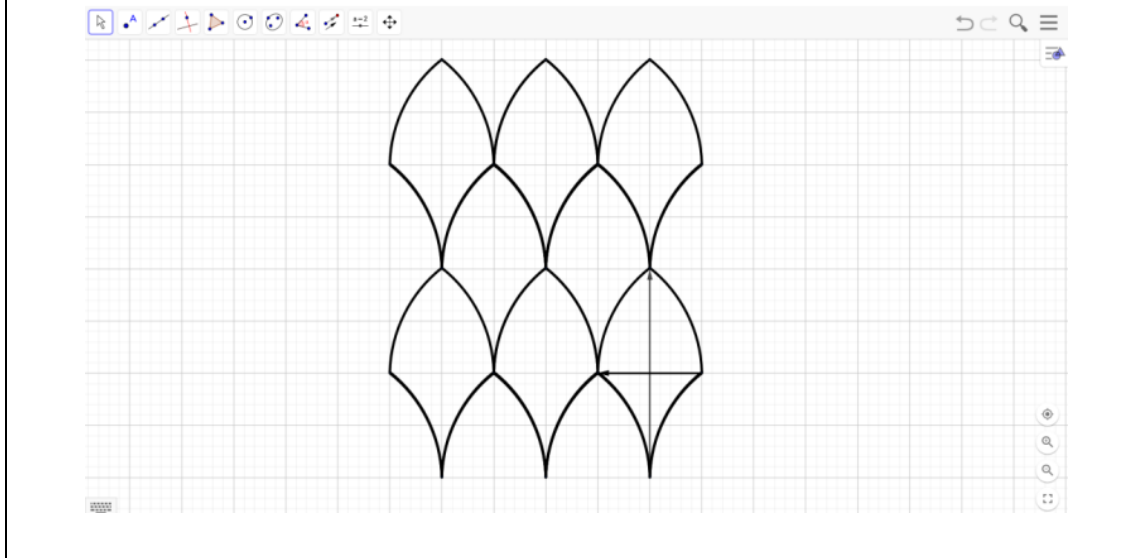
Actividad 4.2:

Práctica mosaicos con Geogebra:

Practica con *Geogebra* la construcción de mosaicos a partir de un elemento mínimo. Construye mediante movimientos un elemento mínimo. (Ejemplo: El Pétalo Nazarí).



Utilizando movimientos en el plano, conforma un mosaico.



Actividad 4.1: Actividad diseñada por el Dpto. de Matemáticas del IES Pio del Río Horteiga de Portillo.

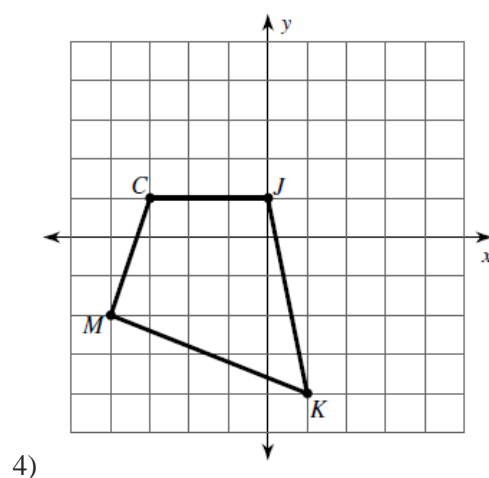
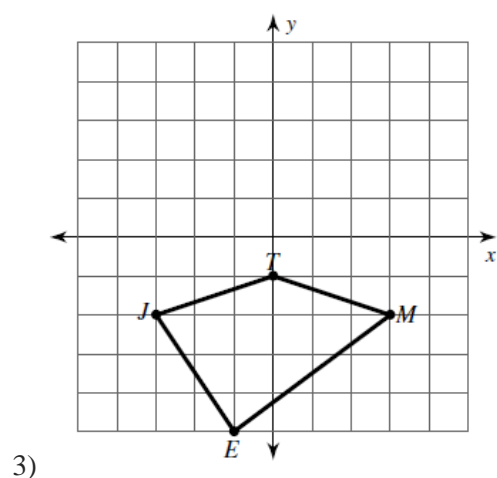
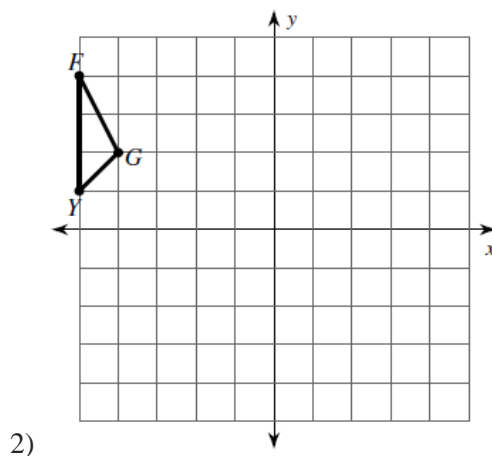
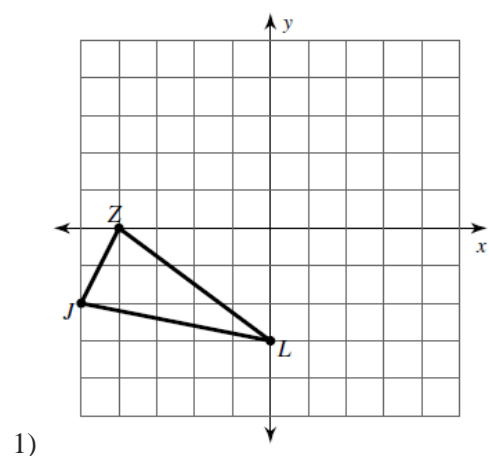
Actividad 4.2: Elaboración propia.

5. Actividades de contenido matemático:

Actividad 5.1.

Utilizando la cuadrícula como guía, aplica, a las figuras dibujadas, los siguientes movimientos.

- 1) Giro de 90° , con centro en el origen.
- 2) Traslación de 4 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia abajo.
- 3) Traslación de 1 unidad hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba.
- 4) Simetría respecto el eje de abscisas (x).



Actividad 5.2.

Dibuja los romboides de vértices ABCD y A'B'C'D', siendo

A(1,1), B(7,1), C(10,4) y D(4,4).

A'(11,7), B'(17,7), C'(20,10) y D'(14,10).

Calcula las coordenadas del vector que transforma el romboide ABCD en el romboide A'B'C'D'.

Actividad 5.1: Tomada de <https://www.kutasoftware.com/>

Actividad 5.2: Tomada de Arias, J.M. y Maza, I. (2015). Matemáticas académicas 3º ESO. Editorial Bruño.

6. Relación con el contexto y aproximación a situaciones de la vida cotidiana:

Se buscan manifestaciones en la naturaleza, el arte, la arquitectura, el diseño gráfico e industrial, para que el alumno identifique las numerosas aplicaciones que tienen las matemáticas en la vida real.

Actividad 6.1.

Dibuja en tu cuaderno el contorno de la mariposa de la imagen y explica si posee simetría axial.



Figura A.6.1.1.

Actividad 6.2.

Observa las siguientes imágenes. ¿Detectas la presencia de simetrías en alguna de ellas? Si es así, indica en cuáles, y a continuación dibuja el eje o ejes de simetría que aparecen.



Figura A.6.2.1.



Figura A.6.2.2.



Figura A.6.2.3.



Figura A.6.2.4.



Figura A.6.2.5.



Figura A.6.2.6.

Actividad 6.3.

Investiga si las siguientes señales de tráfico poseen simetría axial o central y, en su caso, indica el eje o centro de simetría.

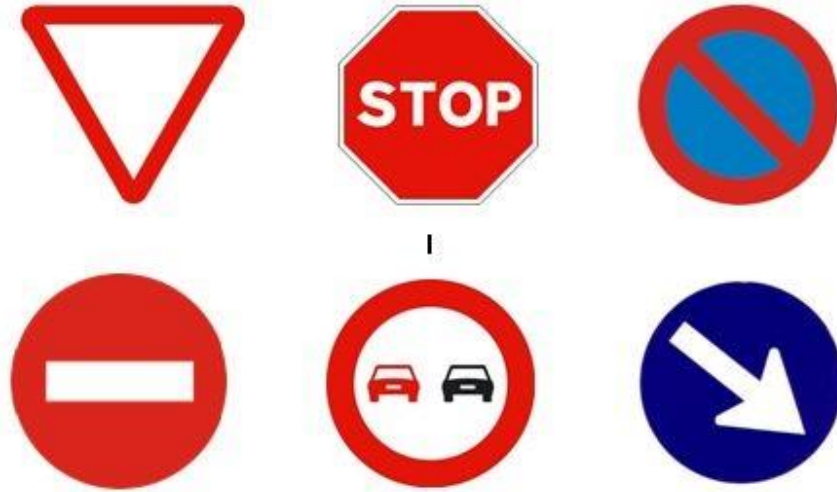


Figura A.6.3.1.

Actividad 6.4. (Salida al entorno del centro)

En los edificios, mobiliario urbano, plantas, pavimentos, barandillas..., de nuestro entorno, podemos encontrar formas que definen simetrías, traslaciones o giros; incluso frisos, rosetones o mosaicos.

Se pide:

- Buscar objetos que contengan dichos movimientos o composiciones.
- Nombrar de qué objeto se trata, y describir los movimientos que presenta.
- Dibujar al menos cinco ejemplos de los encontrados, de manera esquemática, y después señala sus elementos significativos.

Actividad 6.1: Tomada de Arias, J.M. y Maza, I. (2015). Matemáticas académicas 3º ESO. Editorial Bruño.

Actividad 6.2: Elaboración propia.

Actividad 6.3: Tomada de <https://sites.google.com/site/transformacionesenelplano1213/home/transformaciones-en-el-plano/tarea>

Actividad 6.4: Elaboración propia.

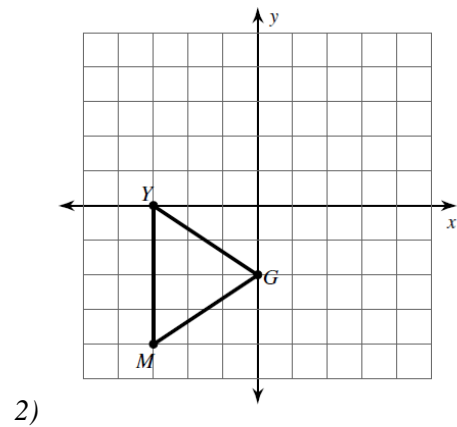
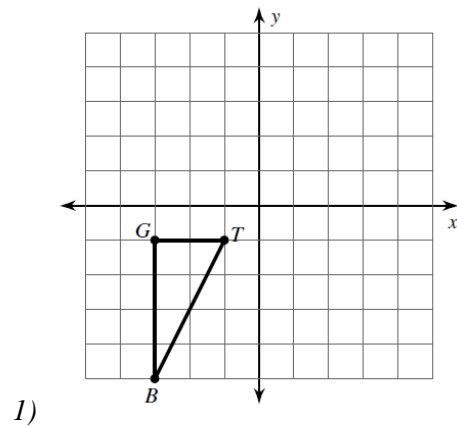
7. Implicación del razonamiento personal:

Ejercicios sistemáticos:

Actividad 7.1.

Utilizando la cuadrícula como guía, aplica, a las figuras dibujadas, las siguientes traslaciones.

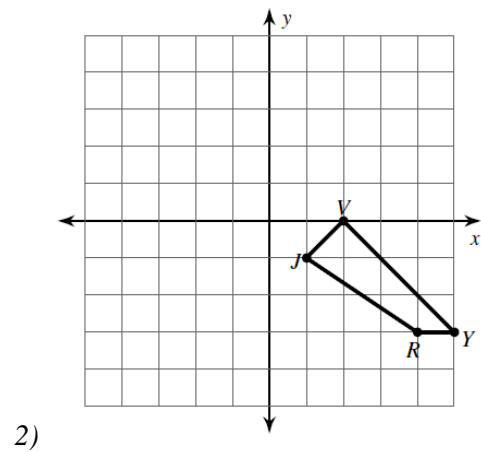
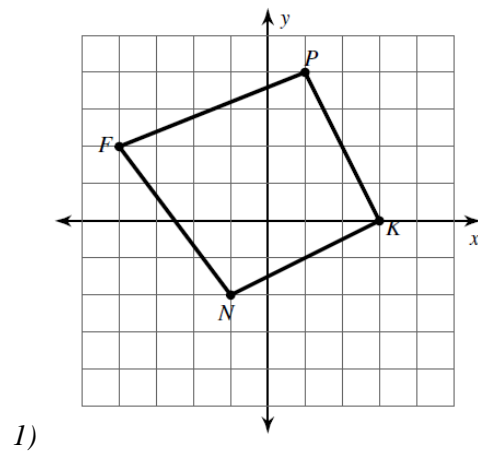
- 1) 5 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba.
- 2) 1 unidad hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba.



Actividad 7.2.

Utilizando la cuadrícula como guía, aplica, a las figuras dibujadas, los siguientes giros.

- 1) 180° con centro en el origen.
- 2) 90° con centro en el origen.

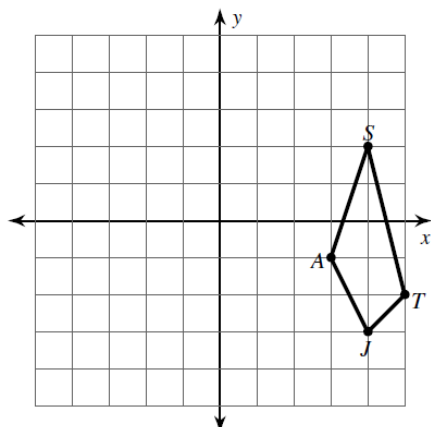


Actividad 7.3.

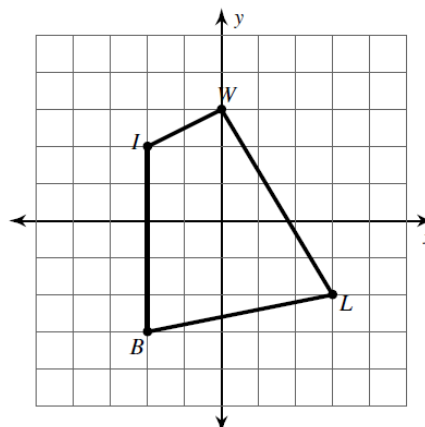
Utilizando la cuadrícula como guía, aplica, a las figuras dibujadas, las siguientes simetrías.

1) Con eje de simetría $y = -x$.

2) Con eje de simetría $y = -1$.



1)



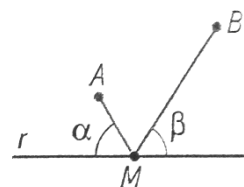
2)

Actividades 7.1, 7.2 y 7.3: Tomadas de <https://www.kutasoftware.com/>

Ejercicios y Problemas relacionados con el contexto:

Ejemplo

Se quiere ir desde el punto A hasta el B , pero tocando en algún punto M a la recta r . ¿Cómo debes hallar el punto M para que el camino sea lo más corto posible? ¿Cómo son en este caso los ángulos α y β ?

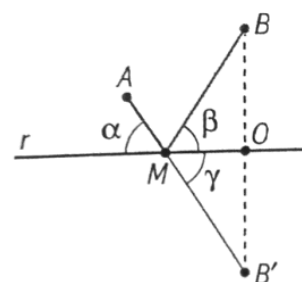


(Solución)

B' es el simétrico de B respecto de r .

La longitud de A a B pasando por M será igual a la longitud de A a B' pasando por M . Por tanto para que el camino sea lo más corto posible, M debe ser la intersección de r con AB' .

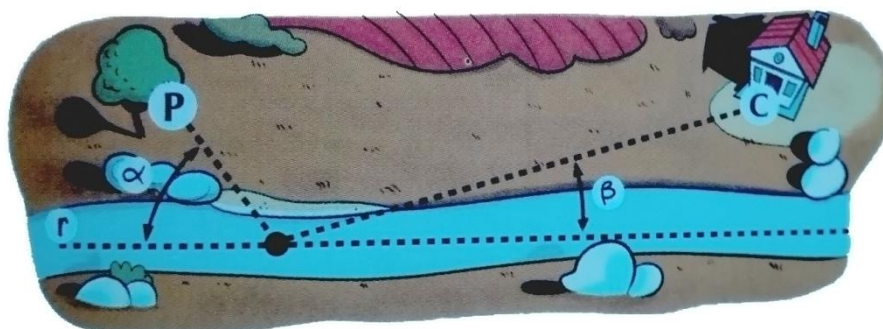
Los triángulos MOB y MOB' son iguales, ya que los dos tienen un ángulo recto, el lado MO es común a ambos y OB mide lo mismo que OB' . Por tanto, los ángulos β y γ son iguales, y como α y γ son alternos internos, $\alpha = \beta$.



Actividad 7.4.

Tomando el ejemplo como referencia, resuelve el siguiente problema.

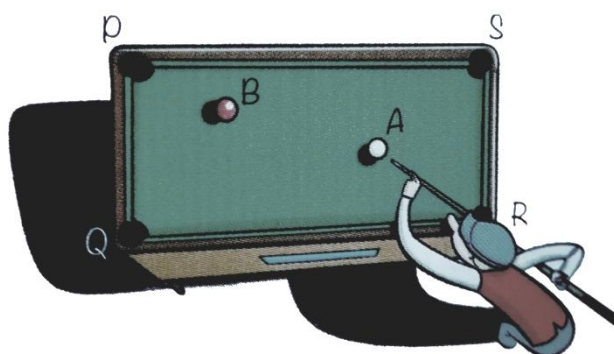
Se quiere ir del pino P a la casa C, pero pasando por el río r. ¿Cuál será el trayecto más corto?



Actividad 7.5.

Tomando el ejemplo como referencia, resuelve el siguiente problema.

Calcula el camino más corto que debe seguir la bola A para chocar con la bola B tocando primero en la banda PS de la mesa de billar. ¿Y si primero debe tocar en la banda PS, después en la banda SR y, por último, tocar con la bola B?



Ejemplo y actividades 7.4 y 7.5: Tomada de

Icaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M. y Pérez, A. (2015). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO: SM Savia.

Ejercicios y Problemas que requieren razonamientos matemáticos:

Actividad 7.6.

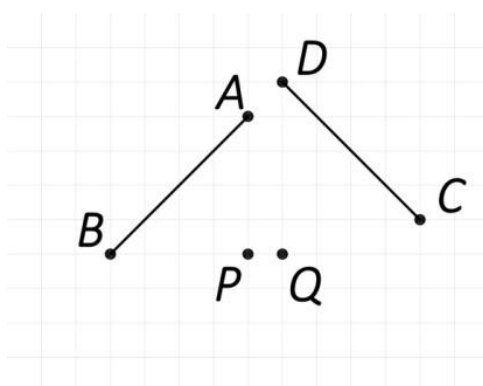
Halla la ecuación de la parábola que se obtienen al trasladar $y = x^2$, según el vector $\vec{v}=(2,-5)$

Actividad 7.7.

Al segmento AB se le ha aplicado un giro de amplitud 270° y se ha obtenido el segmento de extremos CD.

El centro de giro y el homólogo del extremo A son:

- a) P y C .
- b) Q y D .
- c) Q y C .
- d) Ninguna de las anteriores.



Actividad 7.8.

Justifica que sólo se puede hacer un mosaico regular con triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares. Para ello ten en cuenta el valor del ángulo interior de un polígono regular y la suma de los ángulos interiores de los polígonos que concurren en un vértice del mosaico.

Actividad 7.6: Tomada de

Arias, J.M. y Maza, I. (2015). Matemáticas académicas 3º ESO. Editorial Bruño.

Actividad 7.7: Tomada de

Icaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M. y Pérez, A. (2015). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO: SM Savia.

Actividad 7.8: Tomada de

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M^a. J. y Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3*. Editorial Anaya.

- Figura 3.1.1.** *Lanzas y Flechas del Paleolítico.* Recuperado de <https://historiaguerrasyarmas.blogspot.com/2009/01/paleolitico.html>
Última consulta 09/07/2018
- Figura 3.1.2.** *Vasija cerámica del Paleolítico.* Recuperado de <https://historiadelarte1univia.files.wordpress.com/2012/03/ha-3-14.png>
Última consulta 09/07/2018
- Figura 3.1.3.** *Papiro de Ahmes.* Recuperado de Reyes Iglesias, M. E. (2018). Apuntes Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.
- Figura 3.1.4.** *Papiro de Moscú.* Recuperado de http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_moscu.htm
Última consulta 09/07/2018
- Figura 3.1.5.** *Tablilla Plimpton.* Recuperado de Reyes Iglesias, M. E. (2018). Apuntes Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.
- Figura 3.1.6.** *Tablilla cuneiforme.* Recuperado de Reyes Iglesias, M. E. (2018). Apuntes Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.
- Figura 3.1.7.** *Euclides.* Recuperado de <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euclides.htm>
Última consulta 09/07/2018
- Figura 3.1.8.** *Los Elementos.* Recuperado de <http://www.todolibroantiguo.es/libros-raros/elementos-euclides.html>
Última consulta 09/07/2018
- Figura 3.1.9.** *Ilustración del Teorema.* Recuperado de <http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.10.** *Primer libro de Origami.* Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hidden_Senbazuru_Orikata-S17-2.jpg
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.11.** *Ventana del Patio de los Arrayanes.* Recuperado de Blanco Martín, M. F. (2018). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.
- Figura 3.1.12.** *Patio de los Leones.* Recuperado de Blanco Martín, M. F. (2018). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.

- Figura 3.1.13.** *Hombre de Vitrubio*. Recuperado de <http://tom-historiadelarte.blogspot.com/2011/01/el-remacimiento-contexto-historico-e.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.14.** *L. F. Brunelleschi*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Filippo_Brunelleschi
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.15.** *L.B. Alberti*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Leon_Battista_Alberti
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.16.** *P.D. Francesca*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Piero_della_Francesca
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.17.** *A. Durero*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Alberto_Durero
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.18.** *L.D. Vinci*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.19.** *G.Desargues*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Girard_Desargues
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.20.** *B. Pascal*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.21.** *Teorema de Pascal*. Recuperado de <http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.22** *R. Descartes*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.23.a** *P.Fermat*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.23.b** *Euler*. Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.24.** *J.D. Gergonne*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Joseph_Diaz_Gergonne
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.25.** *J.V. Poncelet*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Jean-Victor_Poncelet
Última consulta 09/07/2018.

- Figura 3.1.26.** *M.F. Chasles.* Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Michel_Chasles
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.27.** *A. Möbius.* Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/August_M%C3%B6bius
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.28.a** *E. Galois.* Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.28.b** *J. L. Lagrange.* Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_de_Lagrange
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.28.b** *M.S. Lie.* Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.30.** *F.Klein.* Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.31.** *C. Jordan.* Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Camille_Jordan
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.32.** *J. H. C. Whitehead.* Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/J._H._C._Whitehead
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.33.** *H.Weyl.* Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Weyl
Última consulta 09/07/2018
- Figura 3.1.34.** *E. Cartan.*
<https://www.pinterest.es/pin/488288784569348570/?lp=true>
Última consulta 09/07/2018
- Figura 3.1.35.** *J. Dieudonné.*
https://es.wikipedia.org/wiki/Jean_Dieudonn%C3%A9
Última consulta 09/07/2018
- Figura 3.1.36.** *B.Mandelbrot.* Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.37.a** *J. Tits.* Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Jacques_Tits
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.37.b** *J.G.Thompson.* Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/John_G._Thompson
Última consulta 09/07/2018.

- Figura 3.1.38.** *R.P Langlands*
<https://www.icmat.es/Prensa/2018/NP-20-03-18.pdf>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.40.** *Ilustración del Teorema.* Recuperado de
<http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.41.a.** *Obra.* Recuperado de
<http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.41.b.** *Composición geométrica.* Recuperado de
<http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.42.a.** *Grabado 1.* Recuperado de
<http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/durero.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.42.b.** *Grabado 2.* Recuperado de
<http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/durero.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.43.a.** *Obra.* Recuperado de
<http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.43.b.** *Composición geométrica.* Recuperado de
<http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.44.** *Ilustración del Teorema.* Recuperado de
<http://www.matem.unam.mx/max/GP/N5.pdf>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.45.** *Teorema de Pascal.* Recuperado de
<http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.1.46.** *Visualización.* Elaboración propia.
- Figura 3.1.47.** *Rosetón de la Catedral de León.* Recuperado de
Blanco Martín, M. F. (2018). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.
- Figura 3.1.48.** *Friso de la iglesia San Juan de Baños.* Recuperado de
Blanco Martín, M. F. (2018). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.
- Figura 3.1.49.a.** *Grupos Cristalográficos de la Alhambra.* Recuperado de
Blanco Martín, M. F. (2018). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.

- Figura 3.1.49.b.** *Grupos Cristalográficos de la Alhambra.* Recuperado de Blanco Martín, M. F. (2018). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.
- Figura 3.2.1. (Ac.2)** *Alhambra.* Recuperado de <https://es.wikipedia.org/wiki/Alhambra>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.2.2. (Ac.2)** *Grupos Cristalográficos de la Alhambra.* Recuperado de Blanco Martín, M. F. (2018). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.
- Figura 3.3.1. (Ac.4)** *Rosetón de la Catedral de León.* Recuperado de Blanco Martín, M. F. (2018). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.
- Figura 3.4.1** *Portada del libro Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. Ed. Anaya.* Recuperado de https://www.anayaeducacion.es/jpg_g/educacion/ET01971001.jpg
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.4.2** *Portada del libro Matemáticas académicas 3º ESO. Ed. Bruño.* Recuperado de https://www.editorialbruno.es/jpg_g/bruno_escolar/BS00718701.jpg
Última consulta 09/07/2018.
- Figura 3.4.3** *Portada del libro Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO. Ed. SM Savia.* Recuperado de http://ecat.server.grupo-sm.com/ecat_Imagenes/Maxi/A146850_167352.jpg
Última consulta 09/07/2018.
- Figura A.2.2.1** *Ejemplo Mural.* Recuperado de <https://crievta.webnode.es/conexion-matematica/artematicas/>
Última consulta 09/07/2018.
- Figuras A.2.2.2, A.2.2.3 y A.2.2.4** *Mosaicos de Escher.* Recuperado de <https://www.wikiart.org/es/Search/escher>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura A.2.2.5** *Ayudas al dibujo.* Recuperado de <http://www.educacionplastica.net/MosEsch1.htm>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura A.2.2.6** *Ayudas al dibujo.* Recuperado de <http://www.educacionplastica.net/MosEsch3.htm>
Última consulta 09/07/2018.
- Figuras A.6.1.1, A.6.2.1, A.6.2.2 y A.6.2.6** *Simetría axial.* Recuperado de <http://simetriaaxialprimero.blogspot.com/>
Última consulta 09/07/2018.
- Figura A.6.2.3** *Simetría axial.* Recuperado de http://www.lanubear artistica.es/dibujo_artistico_1/Unidad3/DA1_U3_T2_Contenidos_v02/Flower_jtca001.jpg
Última consulta 09/07/2018.

Figuras A.6.2.4
y A.6.2.5

Simetría axial. Recuperado de
<http://geometraaplicada.blogspot.com/2009/07/publicidad-no-es-objeto-discutir-la.html>
Última consulta 09/07/2018.

Figura A.6.3.1

Simetría axial. Recuperado de
<https://sites.google.com/site/transformacionesenelplano1213/home/transformaciones-en-el-plano/tarea>
Última consulta 09/07/2018.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Covadonga Santos Rubio