Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Economía

Modernas variantes de la regla de votación de Borda

Presentado por:

Mutlu Suhat Dolapchiev

Tutelado por:

Miguel Martínez Panero

Valladolid, 29 de Junio de 2018

RESUMEN

La regla de Borda es uno de los métodos de votación más antiguos y referentes en el campo de la Elección Social. A partir de esta regla de votación, basada en puntuaciones otorgadas por los agentes participantes según sus preferencias, se han ido desarrollando numerosas variantes, que en parte tratan de conciliar las discrepancias entre el ganador de Borda y el ganador de Condorcet. Y, por otra parte, es interesante idear nuevos métodos un tanto novedosos a partir de la regla de Borda original, con objeto de facilitar y ampliar el contexto de aplicación.

Por tales motivos, este trabajo pretende desarrollar las recientes variantes de la regla de Borda y constatar la viabilidad y comodidad de su puesta en práctica donde se lleve a cabo una votación y se precise un ganador que resulte elegido de acuerdo con la puntuación obtenida según el método seleccionado y los criterios establecidos.

Palabras clave: Elección social, Métodos de votación, Regla de Borda.

Códigos de la Clasificación JEL: Análisis de la toma de decisiones colectiva (D7): Elección social; Bienes club; Comités; Asociaciones (D71).

ABSTRACT

The Borda rule is one of the oldest referential voting methods in the field of Social Choice. From this voting rule, based on scores awarded by the participating agents according to their preferences, several variants have been developed, which in part try to reconcile the discrepancies between the Borda winner and the Condorcet winner. On the other hand, it is interesting to devise new and somewhat novel methods based on the original Borda rule, in order to facilitate a broaden application context.

This are the reasons why this work aims to develop the recent variants of the Borda rule and to verify the feasibility and convenience of its implementation where a vote is carried out and a winner is required under a selected method, according to the score obtained taking in to account the established criteria.

Keywords: Social choice, Voting methods, Borda’s Count.

JEL Classification Codes: Analysis of Collective Decision – Making (D7)**:** Social Choice; Clubs; Committees; Associations (D71)

INDICE

1. INTRODUCCIÓN

La moderna Teoría de la Elección Social (TES) tal y como la conocemos hoy en día se encuentra dividida entre dos vertientes o directrices bien diferentes. Por un lado, el enfoque posicional donde se sitúa la regla de Borda, entendido este como un método de votación por puntos o ponderado. Y, por otro, el enfoque no posicional encabezado por Condorcet[1]. Nótese aquí la fuerte e irreconciliable rivalidad no solo entre estos dos intelectuales coetáneos y sus teorías, sino de todas las corrientes de pensamiento sobre la TES que presentarán autores posteriores[2]. Por lo tanto, una de las principales motivaciones de este trabajo es tratar de resolver esta polémica sobre qué alternativa debe ser la ganadora en una votación (primera parte de este estudio), y debido a las propias discrepancias presentes, concebir un método o modelo diferente que se trate de dar respuesta a este problema y cuya base siga siendo la regla de Borda. Por tanto, sus modernas variantes constituirán el núcleo fundamental de este estudio.

Quizás el motivo de mayor peso para el desarrollo del presente trabajo es, por un lado tratar de demostrar, una vez más, la contundencia del método de Borda frente a Condorcet en cuanto a la constatación de la existencia de un ganador. Y, por otro lado, la legitimidad de su uso en la actualidad que se debería de hacer de forma extensiva por razones que expondremos a lo largo de la presente memoria.

Y es que, a pesar de la gran extensión histórica de la regla de Borda, es sorprendente la escasa difusión y aplicación práctica que tiene en la actualidad, si bien es cierto que existe una institución ("De Borda Institute") dedicada a la promoción del método Borda, con numerosas series de publicaciones, software… así como una página web (www.deborda.com) de gran interés y fuente de información de la puesta en práctica de la regla de Borda. Pese a ello, además del empleo de una variante suya en el célebre concurso de Eurovisión solo hay constancia de su uso en política en: una pequeña nación de las islas del Pacífico, denominada Nauru (como un sistema electoral, ya que permite su extrapolación tanto a distritos uninominales como plurinominales); Eslovenia (en las elecciones parlamentarias); Italia y Hungría, para elegir a los

[1] Para más detalle sobre los enfoques posicional y no posicional véase Gärdenfors (1973).
[2] Para más detalle sobre esta polémica en su vertiente histórica véanse Black (1958) y McLean - Urken (1995).

representantes de las minorías; Kiribati (para las primarias presidenciales) y por parte del Partido Verde irlandés, de acuerdo con Emerson (1998)[3].

La estructura fundamental del presente Trabajo de Fin de Grado tiene por objeto un estudio básico y una contextualización de la regla de Borda clásica que ha venido desarrollándose desde 1770 gracias a Jean Chales de Borda (1733-1799), así como los antecedentes alternativos y subsiguientes variantes modernas. Sin embargo, será el análisis comparativo de las diferentes variantes que realizaremos (el tema más importante y esencial), lo que nos determinará cuál (de todas las variantes) se ajusta mejor según el escenario en el que nos encontremos lo que constituirá el pilar fundamental de las conclusiones finales.

El trabajo se organiza como sigue. En la segunda sección se describen los diferentes sistemas de votación y Elección Social vigentes antes de la implementación de la regla de Borda en 1770 desarrollada por propio Jean Charles de Borda, donde podemos mencionar autores tan influyentes como Ramón Llull (1232-1316) y Nicolás de Cusa (1401-1464). Posteriormente estudiaremos los autores coetáneos de Borda del siglo XVIII, también conocido esta época como la "Edad de Oro" de la TES debido a los grandes avances y a la adquisición de importancia de esta disciplina, donde destacan y merecen una atención especial autores como el marqués de Condorcet y José Isidoro Morales. A continuación, repasaremos brevemente el siglo XIX y el siglo XX, también conocido este último como la época de la Elección Social "moderna".

La tercera sección aborda de lleno la regla de Borda, describiendo de forma minuciosa y detallada tanto la formulación teórica, así como la notación matemática y finalmente las propiedades que cumple.

En la cuarta sección abordaremos las variantes que están presentes en la actualidad de la originaria regla de Borda clásica, donde lo más llamativo, además del procedimiento y objetivo de cada variante, es gran número extensiones vigentes de una regla que aparentemente parece sencilla y sin gran capacidad de innovación. También detallaremos los posibles campos y escenarios de aplicación de dichas variantes que han tenido y tienen lugar en la actualidad.

[3] Destacamos aquí la figura de Peter Emerson, presidente del citado organismo ("De Borda Institute"), valedor de su utilidad y autor de un libro pro-regla de Borda (Emerson (1998), quién me ha facilitado información y algunas de las referencias utilizadas en el presente trabajo.

Y finalmente destacaremos una serie de conclusiones finales como colofón, justificando la elección personal del estudio de este tema respecto a otros.

2. ORIGEN Y EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA REGLA DE BORDA

En esta sección detallaremos mediante una visión histórica el origen y la evolución de la regla de Borda hasta la actualidad. Como veremos, dicho recorrido histórico no siempre ha sido continuo y uniforme.

2.1 Precursores de la regla de Borda

El fundamento de la TES o teoría del voto propiamente dicho no tiene su origen hasta la Ilustración. Aunque sí es cierto que hubo atisbos e intención de desarrollo de sistemas de votación previamente, las limitaciones sociales, económicas y políticas dificultaron la proliferación de nuevas corrientes de pensamiento acerca de los sistemas de votación. Es por eso que hasta el siglo XVIII ("Edad de Oro") la TES no adquirirá la atención merecida. Aunque si podemos destacar figuras tan influyentes y predecesoras de la regla de Borda como Ramón Llull y Nicolás de Cusa.

En 1283 el mallorquín Ramón Llull (1232-1316), considerado el precursor de la regla de Borda, detalla en su novela Blanquerna un nuevo método de votación para determinar la elección de la abadesa de un monasterio. Este autor no solo contribuyó a la primera datación de la regla de Borda, sino también, como se puede observar en su trabajo *De Arte Electionis* de 1299, fue el primero en tener en cuenta las posibles comparaciones por pares de alternativas a la hora determinar la elección final. Y por ello también considerado el precursor de Condorcet y más recientemente de la moderna regla de Copeland. La figura de Llull como precursora de la TES es tratada en The Augsburg Web Edition of Llull's Electoral Writings (2016).

Otro de los precursores de la regla de Borda es Nicolás de Cusa (1401-1464). Este cardenal, tras un análisis de varios métodos de votación en un contexto de elección papal anticipó un sistema de votación que a efectos prácticos se trataba nada menos que una regla de Borda con voto secreto.

Por tanto, las aportaciones de Llull como del Cardenal Cusa supusieron importantes avances en el ámbito de la TES cuando se presentaban más de dos candidatos o alternativas, pero lejos del avance que supondrían en la TES las aportaciones de las figuras de la denominada “Edad de Oro”.

2.2 La “Edad de Oro”

Jean Charles de Borda (1733 - 1799) propuso en su *Memoria* en 1770 un nuevo sistema de votación, que hoy lleva su nombre, que ha supuesto un punto de inflexión en la historia de la TES. De esta manera se ha convertido no solo en uno de los métodos más idóneos y óptimos (al menos a nivel teórico), sino también en uno de los métodos más utilizados y de mayor facilidad para llevar a la práctica. A este respecto, véanse Dummett (1998, p. 290) y Saari (1995, p. 19) quienes consideran la regla de Borda como uno de los métodos más equitativos para determinar el resultado de una votación.

Borda [1770] (1784) descubrió que en el método de la pluralidad los votantes al manifestar sus preferencias solo informan del candidato más deseado para cada uno de los electores, desechando al resto de candidatos aun cuando la capacidad de los no votados pudiera ser muy diversa. Así pues, para mitigar este error, propone un sistema de voto ponderado en la cual los agentes manifiestan sus preferencias por las diferentes alternativas mediante puntuaciones correlativas y escalonadas de mayor a menor mérito. De tal forma que cada agente da a cada alternativa tantos puntos como alternativas peores haya, siendo vencedor el candidato que obtiene una mayor puntuación total. Así pues, las puntuaciones otorgadas tienen en cuenta no solo los candidatos más deseados sino también los menos deseados, es decir, todos los candidatos. Ya nos hemos referiremos como la regla de Borda clásica con el fin de diferenciarlo con las posteriores variantes y extensiones.

Mientras tanto, el máximo antagonista de Borda y diseñador de un modelo de “homo suffragans” con argumentos filosóficos, el marqués de Condorcet (1743-1794), postuló su propio modelo de determinación del vencedor en una votación en Condorcet (1785), según el cual, el candidato ganador es aquel que vence al resto de candidatos por mayoría simple en comparaciones por parejas, lo que implica que no siempre existirá un vencedor. Este último hecho junto con otros que veremos a continuación serán los principales argumentos de esta irreconciliable polémica intelectual entre Borda y Condorcet sobre la idoneidad de un método en una votación.

Aunque Condorcet reconoció el mérito de Borda, criticó duramente su sistema de puntuaciones, ya que con el fin de evitar los defectos de la pluralidad su modelo había incurrido en otros errores propios como la manipulabilidad y el incumplimiento del principio de Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI), así como, seleccionar como ganador a un candidato que fuese derrotado por mayoría simple por alguna de las alternativas en las comparaciones por parejas para un conjunto de votantes, algo totalmente impensable para Condorcet. Para Condorcet era incuestionable que el ganador en una votación debía ser aquel que derrotara al resto de alternativas en confrontaciones por parejas, concepto que a partir de ahora denominaremos *principio de Condorcet*. Sin embargo, el argumento de Condorcet se veía menoscabado por la ausencia en ocasiones de este ganador ideal o absoluto denominado *ganador de Condorcet*[4]. Hecho del que era consciente Condorcet, pero que no suponía un obstáculo o impedimento para que variasen sus posiciones.

Tanto es así que, en ocasiones, la ausencia de un *ganador de Condorcet* produce mayorías cíclicas como se puede observar en la *paradoja del voto* de acuerdo con Condorcet (1785). En tal caso cada uno de los candidatos vence por mayoría simple a otro candidato en comparaciones por parejas, y a su vez es vencido por otro candidato por mayoría simple de forma cíclica, de modo que es imposible determinar un ganador. Se tendría así un método que no cumple la *consistencia de Condorcet* o *Condorcet -consistente*[5].

Otro inconveniente, que a lo largo del tiempo ha ido ganando cada vez más importancia en la TES, es la paradoja de la abstención que presentan los sistemas de votación condorcetianos. Según la cual un candidato podría mejorar el resultado que se obtuvo en una votación habiendo votado por sus preferencias, si dicho candidato no votara.

En contrapartida otros defectos que son criticados a los métodos *Condorcet -consistentes* por Borda y los defensores de su método son la inmunidad de esta frente a

[4] De forma análoga se puede definir un *perdedor de Condorcet* el que es derrotado por todos y cada uno de los candidatos por mayoría simple en comparaciones por parejas).

[5] Un método de votación es *Condorcet-consistente*, cumple el *Principio de Condorcet* o la propiedad de la *consistencia de Condorcet*, cuando existe una alternativa que es vencedora de Condorcet y además dicha alternativa es elegida como única vencedora.

la paradoja del voto y la paradoja de la abstención. A modo de resumen y de forma sintética, para Borda el candidato ganador es aquel que más puntuación obtenga mediante la aplicación de su método; mientras que para Condorcet el candidato ganador, en caso de que exista, será aquel que gane por mayoría simple al resto de candidatos al enfrentarse con cada uno de ellos. Tales candidatos pueden no coincidir.

Adicionalmente en este periodo, además de los ya citados, mencionamos autores como Pierre-Simon Laplace o marqués de Laplace (1749-1827) quien justificó las puntuaciones de Borda con argumentos probabilísticos; Pierre Claude François Daunou (1761-1840) quien en un primer momento fue defensor de la regla de Borda pero posteriormente crítico con esta última debido a la manipulabilidad de este método (adoptando una postura más condorcetiana); y Simon Antoine Jean L'Huilier o Simon Lhuilier (1750-1840) quien escribió sobre la manipulabilidad del enfoque de Condorcet.

Y finalmente tenemos que citar a José Isidoro Morales (1758-1818)[6] quien merece una mención especial, no solo por ser uno de los intelectuales más importantes a nivel nacional, sino también en el ámbito internacional. Importancia que ha pasado casi desapercibida[7], sobre todo en lo que respecta a temas electorales, debido al desconocimiento hasta hace poco de sus obras Morales (1797) y (1805), tras casi dos siglos en el semiolvido. Es más, se ha convertido en autor de referencia en lo que se refiere a la TES moderna publicándose sus obras de nuevo tanto en inglés (McLean – Urken (1995, pp. 197 – 235), solo la Memoria) como reeditadas en español (Ródenas (2001) y Martínez Panero – García Lapresta (2003), tanto la *Memoria* como el *Apéndice*).

Al igual que Borda, Morales afirma que el método de pluralidad puede elegir al peor candidato por la mayoría, véase en este sentido Morales (1797, pp. 2 y ss.). Es por eso que defiende el "método de compensación y suma" que a efectos prácticos es la regla de Borda. Aunque hemos de insistir que este argumento solo es válido cuando se trata de "elecciones numerosas" (más de dos alternativas). Cuando se trata de votar sobre una

[6] Los detalles históricos y biográficos expuestos a continuación, así como las fuentes bibliográficas y documentales acerca de Morales en los que se basan, se pueden completar en Martínez Panero – García Lapresta (1999 y 2003), Martínez Panero (2004, cap. 1) y en Lara Ródenas (2017).

[7] Tanto es así que no se recoge referencia alguna sobre Morales en la literatura de nuestro país sobre la historia de la ciencia.

propuesta (dos alternativas) o se enfrentan dos candidatos por el contrario, el método de la pluralidad es perfectamente válido; véase a este respecto Morales (1797, prólogo).

Una de las principales diferencias sin embargo entre Borda y Morales es el desconocimiento de la manipulabilidad de este método, idea que se le escapa a Borda. Por el contrario, Morales sí fue consciente de ello, por lo que una buena parte de la *Memoria* está dedicada a analizarla; en este sentido véase Morales (1797, p. 49 y ss).

2.3 Siglo XIX

Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) es más conocido sus por dotes y obras[8] literarias bajo el pseudónimo de Lewis Carroll que por sus trabajos sobre la TES. Se le atribuye el mérito del redescubrimiento de la regla de Borda y la *paradoja del voto* de Condorcet (la existencia de mayorías cíclicas), consecuencia del desconocimiento de Carroll de tales aportaciones con anterioridad. Consciente de la confrontación entre estos dos últimos modelos, trato de diseñar un procedimiento híbrido a fin de conciliar ambos métodos lo que le ha merecido el título de precursor de la regla de Black o Método de Black. Podemos decir de forma resumida que la Regla de Black trata de elegir el ganador por el método de Condorcet (en caso de que exista); y en caso contrario, aplicar el método de Borda; véase en este sentido Black (1958, p. 66). Mientras que en Dodgson (1876) realiza una propuesta de un método emparentado con los enfoques de Borda y Condorcet dando lugar a un nuevo método que hoy en día lleva su nombre (método de Dodgson).

En esta misma línea, el siguiente avance se produce con Edward John Nanson (1850-1936), quien diseñó una regla de Borda iterada, con eliminación recursiva de las alternativas que no alcancen una puntuación media total (hallada por el método de Borda) en cada fase de su aplicación, seleccionando así al *ganador de Condorcet*, en caso de existir. Por consiguiente, que la regla de Borda nunca seleccione como ganador al perdedor de Condorcet será la base del método de Nanson.

Modificación con la cual, la regla de Nanson cumple la propiedad de *consistencia de Condorcet*. Lo que le lleva a desestimar los métodos de pluralidad sin eliminación

[8] *Alicia en el País de las Maravillas (1865)* y *Alicia a través del espejo (1872)* son sin lugar a duda las más conocidas.

(pluralidad pura) y con eliminación sucesiva, como el conocido método de Hare[9], por no seleccionar al *ganador de Condorcet* cuando existe. Una reinterpretación del método de Nanson es el desarrollado por su coetáneo Joseph Mason Baldwin (1878 – 1945), según el cual, los candidatos votados son clasificados como en el recuento de Borda en un primer momento. A continuación, el candidato con menos puntos se elimina, y los puntos se vuelven a contar como si ese candidato no estuviera. Así sucesivamente hasta se selecciona el ganador, si es que existe, de Condorcet. Es decir, se eliminan las alternativas peor puntuadas en cada fase de su aplicación. Sin embargo, dichos métodos pueden seleccionar una alternativa vencedora diferente ante la ausencia de un *ganador de Condorcet*.

2.4 Siglo XX

A pesar de no ser poseedor de un premio Nobel (aunque bien podría serlo), Duncan Black (1908 – 1991) podría ser considerado la madre de la TES moderna (por analogía a Arrow, quien podría considerarse el padre). Las aportaciones de Black a la TES moderna se centran, entre otros aspectos, en el método híbrido (método de Black, Black (1958) que conjuga el modelo de Borda y Condorcet y el denominado teorema del votante mediano (Black (1948, 1958, pp. 14 y ss.)), que estudia la paradoja del voto si las preferencias de los agentes son unimodales.

Si bien Duncan Black fue relevante, más aún lo es Kenneth Joseph Arrow (1921- 2017) sin el cual no se entiende ni la reciente historia de la TES ni la importancia que ha ido adquiriendo en los últimos 50 años. Sin lugar a duda una de las contribuciones más importantes de Arrow, donde se manifiesta su pesimismo sobre la búsqueda de un método ideal y justo (es decir, la ausencia de una regla de votación que sea respetuosa con las opiniones individuales de los votantes), se expone en su Teorema de Imposibilidad (Arrow, 1951, edición revisada y corregida en 1963).

Con el Teorema de Gibbard - Satterthwaite[10] (también de corte pesimista) en el año 1973, Allan Gibbard y Mark Satterthwaite vuelven de nuevo hacia esa idea inicial ya anticipada anteriormente por Arrow. Cualquier sistema de votación que satisfaga ciertas propiedades razonables es manipulable.

[9] Para más información sobre el método de Hare, véase Nurmi (1987, pp. 54 y ss.).
[10] Allan Gibbard (1973) y Mark Satterthwaite (1975).

La relación tanto del Teorema de la Imposibilidad de Arrow como del Teorema de Gibbard-Satterthwaite con la regla de Borda es, que es el método o regla de votación que más se acerca o más próximo se encuentra de cumplir las propiedades idóneas que se han de exigir para que un sistema de votación se considere ideal o perfecto (descrito tanto por Arrow como por Gibbard y Satterthwaite). Concretamente, el incumplimiento de la IAI (en el caso del Teorema de Arrow) y la manipulabilidad (en el caso del Teorema de Gibbard-Satterthwaite)[11] de la regla de Borda constatan la imposibilidad de un sistema de votación perfecto.

Y finalmente, los matemáticos y expertos en el ámbito de la TES que mayor repercusión tienen en la actualidad son Donald Saari (Regla de Borda y Geometría del voto) (Saari (1994)), Steven Brams (voto aprobatorio) (Brams and Fishburn (1978)) y Michel Balinski y Rida Laraki (Juicio Mayoritario) (Balinski and Laraki (2010)), entre otros.

3. LA REGLA DE BORDA CLÁSICA

A continuación, vamos a describir de forma general la regla de Borda clásica, aunque como podemos ver en Borda (1784), el diseño original de la regla considera únicamente el supuesto teórico órdenes lineales[12], impidiendo así a los votantes a manifestar indiferencia entre alternativas diferentes. Sin embargo, al igual que ocurre en la vida cotidiana donde a veces es difícil decantarse por una opción en concreto, a menudo se plantea la indiferencia de los votantes ante una alternativa u otra. Lo que implica que se ha de modificar el enfoque original de Borda para adaptarse a esta situación de indiferencia entre alternativas. Consideramos por tanto ahora el supuesto teórico de órdenes débiles[13], sin limitación alguna sobre las preferencias de los votantes. Una notación formal de la regla de Borda clásica, así como de la correspondiente modificación se detalla en la siguiente subsección. Y concluimos la sección

[11] Precisamente Saari (1990) ha demostrado que la regla de Borda es el método de votación posicional menos manipulable. Adicionalmente, Niemi – Riker [1976] (1991, p. 481) testificaron que, de acuerdo con el Teorema de Gibbard-Satterthwaite, todos los sistemas de votación son manipulables. Por lo que la manipulabilidad deja de ser una propiedad interesante. En consecuencia, recomiendan la búsqueda de métodos sean al menos “decisivos” (propiedad que si cumple la regla de Borda).

[12] Esto implica que los diferentes votantes al manifestar sus preferencias sobre cada una de las alternativas lo hacen de acuerdo con un orden descendente. De esta forma las alternativas en niveles superiores son más preferidas (mayor puntuación) a las alternativas de niveles inferiores (menor puntuación).

[13] Supuesto idéntico a ordenes lineales; adicionalmente se admite la indiferencia de alternativas o mismo nivel de preferencia entre sí (igual puntuación).

describiendo las principales propiedades (que cumple o no) el método de Borda, sean deseables estas o no.

3.1 Descripción teórica

A continuación, exponemos los principales conceptos a partir de los cuales se modelizan las preferencias de los votantes con los que es posible formular distintos procedimientos de votación.

Consideramos a partir de ahora m votantes o electores que establecen sobre n alternativas o candidatos *órdenes lineal (1)* o bien ó*rdenes débiles (2)*, a partir de los cuales se describirán la regla de Borda tanto en su versión clásica, como en una modificada y más laxa (permitiendo la indiferencia entre alternativas, respectivamente).

3.2 Formulación matemática

La descripción formal de la regla de Borda se puede realizar en dos fases. La primera se basa en la asignación de puntuaciones Borda individuales de los m votantes sobre diferentes alternativas, x_i. Y posteriormente obtenemos las puntuaciones colectivas asignadas a cada alternativa a partir de la suma de las puntuaciones Borda individuales.

Más concretamente, suponiendo una ordenación escalonada (de mayor a menor preferencia) de las alternativas de los agentes, se procede a la adjudicación de puntos. La puntuación concedida por cada votante sobre la *i*-ésima alternativa, siguiendo el mismo esquema, será el número de alternativas que son peores para él[14]. En caso de admitir indiferencias, habría que reordenar dichas preferencias linealizándolas, como se ha descrito antes, y posteriormente proceder con la concesión de puntos. Otorgadas las puntuaciones por los k agentes (revelar sus preferencias sobre las diferentes alternativas), se procede a sumar las puntuaciones individuales de cada alternativa[15]. Declararemos vencedora (o vencedoras en caso de que haya más de una) aquella(s) alternativa(s) que tenga una mayor puntuación global. En el caso de que respetemos la indiferencia en las preferencias de los votantes, el esquema anterior se vería ligeramente modificado.

---

[14] La mejor alternativa recibe n-1, la segunda mejor n-2, y así sucesivamente hasta llegar a la última (peor) alternativa, cual recibirá 0 puntos.

[15] La mejor alternativa recibe n-1, la segunda mejor n-2, así sucesivamente hasta llegar a la última (peor) (igual que antes). Pero en este caso las alternativas indiferentes reciben la media aritmética de lo que hubieran obtenido si no hubiese indiferencias.

De manera más formal supongamos *m* número de votantes o electores, $V= \{1, 2, 3, ... m\}$, que manifiestan sus preferencias o relación de preferencias mediante R^k (donde P^k, I^k son la preferencia estricta e indiferencia)[16] sobre un conjunto finito de alternativas, $X= \{x_1, x_2, x_3, ... x_n\}$, y con $m, n \geq 2$.

La *matriz* asociada a las *preferencias individuales del agente k* viene dada por:

$$\left(r_{ij}^k\right) = \begin{pmatrix} r_{11}^k & r_{12}^k & \cdots & r_{1n}^k \\ r_{21}^k & r_{22}^k & \cdots & r_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}^k & r_{n2}^k & \cdots & r_{nn}^k \end{pmatrix} \text{(1a)} \qquad \left(\tilde{r}_{ij}^k\right) = \begin{pmatrix} \tilde{r}_{11}^k & \tilde{r}_{12}^k & \cdots & \tilde{r}_{1n}^k \\ \tilde{r}_{21}^k & \tilde{r}_{22}^k & \cdots & \tilde{r}_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{r}_{n1}^k & \tilde{r}_{n2}^k & \cdots & \tilde{r}_{nn}^k \end{pmatrix} \text{(2a)}$$

donde los *índices o coeficientes* r_{ij}^k vienen definidos por:

$$r_{ij}^k = \begin{cases} 1, si\ x_i P^k x_j \\ 0, en\ caso\ contrario \end{cases} \text{(1b)} \qquad \tilde{r}_{ij}^k = \begin{cases} 1, si\ x_i P^k x_j \\ 1/2, si\ x_i I^k x_j \\ 0, si\ x_j P^k x_i \end{cases} \text{(2b)}$$

donde (1) es el *contador de Borda clásico individual* (órdenes lineales) y (2) *contador de Borda modificado individual* (órdenes débiles).

Por lo tanto, el *contador de Borda clásico individual* para un agente *k*, que asigna una puntuación a la alternativa $x_i \in X$, se define como:

$$r_k(x_i) = \sum\nolimits^n_{\substack{j=1 \\ x_i P^k x_j}} r_{ij}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n r_{ij}^k \text{ (1c)} \qquad \tilde{r}_k(x_i) = \sum\nolimits^n_{\substack{j=1 \\ x_i R^k x_j}} \tilde{r}_{ij}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \tilde{r}_{ij}^k \text{ (2c)}$$

Que no es otra cosa que la suma de los *índices o coeficientes* de la *i*-ésima fila de la *matriz de preferencia individual del agente k*. Donde el *índice o coeficiente* $\tilde{r}_{ij}^k$ (con $i=j$), situado la diagonal principal, tiene un valor ½ (constantemente). Una expresión alternativa (explicitada por Morales (1805)) a esta suma de puntuaciones Borda individuales es aquella que enumera, mediante el cardinal (#), el número de casos en los que una alternativa x_i es mejor que otra x_j en términos preferenciales. A saber:

$$r_k(x_i) \equiv \#\{x_j | x_i P^k x_j\} \equiv card\{x_j | x_i P^k x_j\} \text{ (1d)}$$

[16] Ya sean mediante órdenes lineales (no se admite la indiferencia) o mediante órdenes débiles (se admite la indiferencia).

$$\tilde{r}_k(x_i) \equiv \#\{x_j | x_i P^k x_j\} + \frac{1}{2}\#\{x_j \neq x_i | x_i I^k x_j\} \equiv card\{x_j | x_i P^k x_j\} + \frac{1}{2} card\{x_j \neq x_i | x_i I^k x_j\} \quad (2d)$$

para cualesquiera x_i, $x_j \in X$. Cuyos valores oscilan entre el intervalo $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ para el caso lineal, donde la presencia o ausencia de indiferencia entre alternativas nos determinará los valores máximos y mínimos de dicho conjunto o intervalo.

Como ya hemos mencionado, una vez asignadas las puntuaciones Borda por los k agentes a las x_i alternativas, hemos de obtener las puntuaciones colectivas asignadas a cada alternativa a partir de la suma de las puntuaciones Borda individuales. Para lo cual necesitaremos conjugar bajo una *matriz agregada* las preferencias individuales de todos los agentes (no de uno en concreto, k), esto es, una suma de *matrices de preferencias individuales*.

$$(r_{ij}) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}, \text{donde } r_{ij} = \sum_{k=1}^{m} r_{ij}^k \quad (1e)$$

$$(\tilde{r}_{ij}) = \begin{pmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \cdots & \tilde{r}_{1n} \\ \tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{22} & \cdots & \tilde{r}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{r}_{n1} & \tilde{r}_{n2} & \cdots & \tilde{r}_{nn} \end{pmatrix}, \text{donde } \tilde{r}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{r}_{ij}^k \quad (2e)$$

Lo que nos permite definir el *contador de Borda clásico colectivo (agregado)* conforme los agentes asignan una puntuación a la alternativa x_i como:

$$B(x_i) = \sum_{k=1}^{m} r_k(x_i) \quad (1) \qquad \tilde{B}(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \tilde{r}_k(x_i) \quad (2)$$

Alternativamente se puede calcular la puntuación total de Borda, mediante la matriz agregada anteriormente definida, como:

$$B(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} r_{ij} \quad (1) \qquad \tilde{B}(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \tilde{r}_{ij} \quad (2)$$

Del mismo modo que hemos señalado una expresión alternativa (en términos de preferencia) para el *contador de Borda clásico* individual, lo podemos hacer para el *contador de Borda clásico colectivo*. La relación de preferencia colectiva, P^B, correspondiente a la regla de Borda clásica para cualquier x_i, $x_j \in X$ viene dado por:

$$x_i P^B x_j \Leftrightarrow r(x_i) > r(x_j) \quad (1f) \qquad\qquad x_i P^{\tilde{B}} x_j \Leftrightarrow \tilde{r}(x_i) > \tilde{r}(x_j) \quad (2f)$$

identidad que verifica la transitividad de las preferencias. Por tanto, la alternativa que resulta ganadora por el método de Borda clásico viene determinada por la mayor puntuación recibida (o las alternativas ganadoras en caso de que haya más de un único ganador). Véanse los Ejemplos 3.2.1 y 3.2.2 del Anexo.

Como ya anticipábamos en el origen y evolución histórica de la regla de Borda, existe una fuerte rivalidad debido a la discrepancia de ideas entre Borda y Condorcet. Para entender esta disputa hemos de exponer formalmente, al igual que hemos hecho con Borda, el *principio de Condorcet*[17] (Condorcet (1785)).

Por tanto, la alternativa x_i es *ganadora de Condorcet* si para cualquier alternativa $x_i \neq x_j \in X$ se verifica:

$$card\{m | x_i P^k x_j\} > card\{m | x_j P^k x_i\}$$

Mientras que x_i es *perdedora de Condorcet* si para cualquier alternativa $x_i \neq x_j \in X$ se verifica:

$$card\{m | x_i P^k x_j\} < card\{m | x_j P^k x_i\}$$

Además, si la alternativa ganadora mediante un determinado método de votación coincide con la alternativa ganadora por el método de Condorcet (si esta existe), se dirá que el método es *Condorcet-consistente*[18] o que cumple la *consistencia de Condorcet*. Es precisamente esta última característica una de las razones de esta discrepancia entre estos autores, ya que el método de Borda clásico[19] no es *Condorcet-consistente*. Se explicita cómo Condorcet (1785) puso de manifiesto que el método de Borda no cumple su criterio en el Ejemplo 3.2.3 del Anexo.

Es más, Condorcet demostró que cualquier *regla de puntuación*[20] recae en la misma inconsistencia que la regla de Borda como puede observarse en Gärdenfors (1973). Por

[17] Que en un principio fue postulado más desde un punto de vista filosófico que con fines pragmáticos.
[18] También denominado *Condorcet–eficiente* o *eficiencia de Condorcet*, según la fuente bibliográfica que se consulte.
[19] Y por tanto tampoco las extensiones de la regla de Borda presentes en dicho trabajo.
[20] Una *regla de puntuación* o *scoring rule* se define mediante un vector con tantas componentes como alternativas haya, (s_1, s_2, s_3, ..., s_n). De manera que cada votante, que muestra sus preferencias sobre las pares de alternativas a través de órdenes lineales, asigna a cada alternativa una puntuación en función de

tanto, la regla de Borda no es más que restricción o delimitación de una regla de puntuación, con ponderaciones $s_i = n - i$. O equivalentemente, también podemos definir la regla de Borda como cualquier regla de puntuación con ponderaciones que siguen una progresión aritmética de diferencia común positiva, esto es, $s_i - s_{i+1} = d > 0\ , i = 1, \ldots, n-1$.

A partir de la definición de alternativa ganadora de Condorcet, podemos deducir la unicidad de esta última (suponiendo que exista). Tal alternativa sin embargo no tiene por qué existir (hecho que menoscaba el firme razonamiento de Condorcet, y del que fue plenamente consciente). El ejemplo clásico de ausencia de ganador de Condorcet (o existencia de mayorías cíclicas) se puede observar en la denominada *terna de Condorcet*. Véase Ejemplo 3.2.4 del Anexo.

A pesar de la discordia entre los enfoques posicional (Borda) y no posicional (Condorcet) Fishburn – Gehrlein (1976) demostraron que la alternativa ganadora de Condorcet nunca puede ser la peor puntuada por el método de Borda. Implicación que es verídica y mutuamente excluyente en sentido inverso, tal y como demostró Gärdenfors (1973). Es decir, el *ganador de Condorcet* no puede ser perdedor (último) por el método de Borda. Así mismo, el ganador por el método de Borda puede perder por mayoría simple en confrontaciones por pares con alguna de sus oponentes, pero no con todas ellas. O lo que es lo mismo, el ganador de Borda no puede ser el *perdedor de Condorcet* (concepto que hemos definido y formalizado en anteriores apartados). Es más, Van Newenhizen (1992) y Saari (2000) han demostrado que la regla de Borda es la que tiene menor posibilidad de incumplir el *principio de Condorcet* de todas las *reglas de puntuación o scoring rules* existentes. Igualmente, Baharad – Nitzan (2003) han argumentado que, si se aplicara el criterio de la mayoría cualificada en vez de la simple con un principio de Condorcet generalizado, la regla de Borda sería *Condorcet-consistente*.

El estudio y comparación de las relaciones existentes entre los resultados obtenidos por el método de Borda y las alternativas ganadoras de Condorcet, han dado lugar a una posición casi antagónica (por no decir totalmente antagónica) de estos dos modelos de

---

la posición que ocupe: s_1 a la alternativa que ocupa la primera posición en sus preferencias, s_2 a la que ocupa la segunda posición, y así sucesivamente hasta asignar s_n puntos a la que ocupa la última posición.

Elección Social en lo que a propiedades se refiere y que veremos en el siguiente apartado.

3.3 Propiedades

A lo largo de esta subsección se analizan algunas de las propiedades más relevantes que aparecen en la literatura de la TES (véase Felsenthal (2012)). Siguiendo esta línea, caracterizaremos dichas propiedades relativas a la regla de Borda, ya sean deseables (o buenas) o no (o malas).

Las propiedades incuestionables que se suelen exigir de partida a los sistemas de votación para considerarse como tales son: el respeto al *anonimato*, según la cual se asegura el tratamiento igualitario de los votantes; y la *neutralidad*, que asegura el tratamiento igualitario de las alternativas.[21]

Además de las ya estudiadas hasta ahora, prestaremos especial atención, entre otras, a propiedades como el *criterio de mayoría*, *IAI*, *consistencia ("consistency")* o *agrupamiento* ("*reinforcement*") y *manipulabilidad*. Así mismo, presentaremos como aval para el empleo de la regla de Borda su inmunidad a la denominada *paradoja de la abstención* ("*no show paradox*")[22], verificación de las propiedades de *monotonía* y *principio débil de Pareto (PDP)*.

3.3.1 Criterio de la Mayoría (CM)

Un sistema de votación satisface el criterio de la mayoría si, cuando existe una alternativa que es la mejor para más de la mitad de los votantes, dicha alternativa es elegida como única vencedora. La vulneración de esta propiedad de la regla de Borda implica que, incluso cuando una amplia mayoría votase como más deseada una misma alternativa x_i al ser comparada con el resto x_j, $j \neq i$, podría ocurrir que la ganadora por el método de Borda no fuese la alternativa más votada, si no otra alternativa distinta, si esta tiene "en media" una posición más elevado en las preferencias de los agentes, como ya señalaba Morales (1797, pp. 16 y ss.). Esto es, la regla de Borda no cumple el CM, pero si cumple la propiedad de Respeto por la Media (RM). Lo que sí se puede asegurar

[21] No lo mencionamos en todo el trabajo hasta ahora, ya que se da por supuesto o por hecho el cumplimiento de estas dos propiedades mínimas. De no ser así no podríamos hablar de un método o sistema de votación.

[22] Un aspecto que tiene cada vez más importancia en los últimos años de la TES, como ya señalábamos en la primera sección.

es que la regla de Borda sí que cumple la propiedad de *Inmunidad a la Paradoja del Perdedor Absoluto (IPPA)* o *Absolute Loser Paradox*[23]. Véase Ejemplo 3.3.1 del Anexo.

3.3.2 Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI)

La propiedad de IAI supone que, dadas las preferencias individuales de los votantes de las cuales se deduce una preferencia colectiva, la comparación entre dos alternativas cualesquiera depende únicamente de las preferencias individuales de cada agente respecto de ellas dos, y no de la relación de estas con otras alternativas. Es decir, las preferencias individuales de dos alternativas cualesquiera no deberían cambiar por la inclusión o interacción de otra alternativa. Desafortunadamente, la regla de Borda incumple esta propiedad, como puede verse en Sen (1976). A este respecto véase Ejemplo 3.3.2 del Anexo.

Y de nuevo, muestra de esta rivalidad entre Borda y Condorcet, se puede observar en la constatación de Condorcet (véase a este respecto, Gärdenfors (1973)) de que cualquier regla de puntuación (incluido el método de Borda) es susceptible a la IAI y razón por la cual señala que "los resultados obtenidos mediante reglas de puntuación necesariamente se basan en factores irrelevantes".

3.3.3 Consistencia ("Consistency") o Agrupamiento ("Reinforcement")

Un sistema de votación satisface la propiedad de consistencia o agrupamiento cuando existen dos grupos de votantes independientes (N_1 y N_2) con n alternativas comunes entre ellas y además tengan un mismo vencedor x_i por separado o de forma aislada, entonces, el nuevo grupo de votantes formado por la unión de los dos grupos anteriores ($N = N_1 \cup N_2$), han de tener la misma alternativa vencedora x_i aplicando la misma regla o sistema de votación. La regla de Borda satisface la hipótesis de consistencia o agrupamiento como ya demostró Young (1974) en su teorema de caracterización. Para ver una aplicación de esta propiedad véase en el Anexo el Ejemplo 3.3.3.

[23] Se puede definir por antónimo al criterio de mayoría (CM), como el posible escenario según la cual, la alternativa peor valorada para más de la mitad de los votantes en una votación puede resultar vencedora.

3.3.4 Manipulabilidad.

Un sistema de votación es manipulable cuando un votante puede mejorar su posición final o salir beneficiado en una votación falseando sus preferencias sobre las alternativas, conociendo las preferencias en del resto de votantes de antemano. Hacemos hincapié aquí sobre la clara diferenciación entre manipulabilidad y paradoja de la abstención (que explicaremos en la siguiente subsección). El incumplimiento de esta propiedad será uno de los talones de Aquiles de la regla de Borda y centro de todo estudio y crítica de los defensores de los métodos no posicionales. Algo que ya fue apuntado por Condorcet, tal como antes se ha señalado. Un caso de manipulabilidad de la regla de Borda puede verse en el Ejemplo 3.3.4 del Anexo.

3.3.5 Paradoja de la abstención (“No Show Paradox”).

Se dice que un sistema de votación es vulnerable a la paradoja de la abstención cuando un votante puede mejorar su posición final u obtener un mejor resultado no participando en el proceso de elección que haciéndolo, es decir absteniéndose de votar. Por alusión a la referencia del apartado anterior, diferenciamos claramente manipulabilidad frente a la paradoja de la abstención, ya que no es lo mismo votar de un modo desleal (con unas preferencias falsas) que directamente no votar (abstenerse). Aunque bien es cierto que a veces el lenguaje cotidiano da lugar a confusión, entre manipulación y abstención. Por otro lado, la abstención puede describirse como una forma particular de incumplimiento de la propiedad de monotonía (que veremos en el siguiente apartado). La diferencia principal entre esta propiedad y la siguiente es que, la primera demuestra que una alternativa seguirá siendo ganador si se reduce el número de votos. Mientras que la segunda testifica que, una alternativa seguirá siendo ganadora si aumenta el número de votos. Centrado en nuestro caso, podemos decir que la regla de Borda es inmune a la paradoja de la abstención. Ejemplificación de tal propiedad se puede observar en el Ejemplo 3.3.5 del Anexo.

3.3.6 Monotonía.

Si una alternativa no puede resultar perjudicada cuando alguno de los votantes incrementa su apoyo a dicha alternativa, entonces dicho sistema de votación es monótono. Dicho de otro modo y de forma un poco menos formal, si una alternativa vence a otra en una primera votación, y posteriormente algún votante cambia sus preferencias en favor de la alternativa ganadora que en un principio no prefería, está seguirá siendo la alternativa ganadora. Por lo tanto, parece lógico que la regla de Borda satisfaga la propiedad de la monotonía, ya que no tiene mucho sentido que un votante asigne mayor puntuación a una alternativa menos deseada que otra. Véase a tal efecto el Ejemplo 3.3.6 del Anexo.

3.3.7 Principio débil de Pareto (Optimalidad de Pareto).

Si todos los votantes prefieren estrictamente una alternativa x_i a otra alternativa x_j, esta última no puede ser vencedora de un sistema de votación. En ese caso, diremos que dicho sistema de votación satisface el principio débil de Pareto. La regla de Borda selecciona por tanto óptimos paretianos en el sentido de que, no hay otra alternativa que todos los votantes consideren al menos tan preferida como la seleccionada y que al menos un votante considere estrictamente mejor que esta. Cualidad tan evidente que eludiremos la ejemplificación dicha propiedad.

3.3.8 Paradoja del Orden Inverso.

Propiedad, en principio, en la que no reparan muchos autores. Aunque bien es cierto que cada vez va adquiriendo una mayor importancia entre los defensores la regla de Borda, por ser uno de los métodos que no es vulnerable a esta paradoja. Esta se da cuando una alternativa es vencedora única por un método de elección y sigue siéndolo cuando todos los votantes invierten sus preferencias. Véase Ejemplo 3.3.8 del Anexo.

4. VARIANTES MODERNAS DE LA REGLA DE BORDA

En esta sección se propone un tratamiento detallado de algunas de las extensiones y variantes modernas que podemos encontrar en la actualidad a partir de la regla de Borda clásica. Para ello expondremos seis contadores diferentes: *Método de Borda Gradual, Sistema Des-Borda, Método de Borda Geométrico Truncado, Conteo de Borda Modificado, Sistema de Cuotas de Borda y Juicio Mayoritario Borda.*

Con ánimo de continuidad y uniformidad trataremos, en la medida de lo posible, de seguir el siguiente esquema: planteamiento teórico y presencia en la actualidad. Más detalladamente, en el planteamiento teórico trataremos de realizar, cuando sea sencilla una descripción y formulación matemática de la variante en cuestión, para posteriormente estudiar el peso y la representatividad que tiene en la actualidad dicho método.

4.1 Método de Borda Gradual

4.1.1 Descripción teórica y formulación matemática

El *Método de Borda Gradual ($\bar{B}$)* ideado en principio por Thierry Marchant (1996, 2000), siguiendo el mismo desarrollo planteado a su homologo discreto (regla de Borda clásica), se basa en la teoría del voto usando intensidades de preferencia de los agentes pero, como su propio nombre indica, tomando como barómetro una escala de preferencias circunscrita al intervalo $[0, 1]$, a diferencia del Borda clásico y Borda modificado (con indiferencias) cuyos valores admisible son $\{0, 1\}$ y $\{0, {}^{1}/_{2}, 1\}$, respectivamente. Lo que se traduce, no solo en una posible alteración en la suma total del contador o puntuaciones Borda, si no, también del resultado final en cuanto a alternativas ganadoras y perdedoras se refiere.

En cuanto a su formulación matemática, no exige gran modificación la *matriz de preferencias individuales* de la regla de Borda clásica para su adaptación al caso gradual. La única condición que ha de cumplir es que la suma de las intensidades de las preferencias recíprocas entre dos alternativas cualesquiera ha de sumar la unidad. Hacemos hincapié aquí sobre este matiz sutil, pero de gran calado, ya que no debe confundirse con la suma total de las puntuaciones (suma total por filas) de una alternativa cualquiera frente a otra, pudiendo esta ser legítimamente inferior, igual y superior a la unidad. Véase García – Lapresta y Martínez - Panero (2002).

Suponiendo, al igual que lo hicimos inicialmente para la regla de Borda clásica, m número de votantes o electores, $V= \{1, 2, 3,\ldots m\}$, que manifiestan sus preferencias o relación de preferencias mediante R^n sobre un conjunto finito de alternativas, $X= \{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$, y con $m, n \geq 2$.

La *matriz* asociada a las *intensidades de preferencias individuales del agente* k para cualquier x_i, $x_j \in X$ viene dado por:

$$\left(\bar{r}_{ij}^k\right) = \begin{pmatrix} \bar{r}_{11}^k & \bar{r}_{12}^k & \cdots & \bar{r}_{1n}^k \\ \bar{r}_{21}^k & \bar{r}_{22}^k & \cdots & \bar{r}_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{r}_{n1}^k & \bar{r}_{n2}^k & \cdots & \bar{r}_{nn}^k \end{pmatrix}$$

pero en este caso, los *índices o coeficientes* $\bar{r}_{ij}^k$ tienen que verificar únicamente:

$$\bar{r}_{ij}^k + \bar{r}_{ji}^k = 1$$

Propiedad a partir de la cual se deduce la diagonal principal de la matriz:

$$i = j \Rightarrow \bar{r}_{ii}^k + \bar{r}_{ii}^k = 1 \Rightarrow \bar{r}_{ii}^k = \frac{1}{2}$$

Esto es,

$$\bar{r}_{ij}^k \begin{cases} > {}^1\!/_2 \text{ , } si\ x_i P^m x_j \\ = {}^1\!/_2 \text{ , } si\ x_i I^m x_j \\ < {}^1\!/_2 \text{ , } si\ x_j P^m x_i \end{cases}$$

Las preferencias individuales de todos los agentes se reflejar en una matriz agregada que corresponde a la suma de las *matrices de preferencias individuales*:

$$\left(\bar{r}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \bar{r}_{11} & \bar{r}_{12} & \cdots & \bar{r}_{1n} \\ \bar{r}_{21} & \bar{r}_{22} & \cdots & \bar{r}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{r}_{n1} & \bar{r}_{n2} & \cdots & \bar{r}_{nn} \end{pmatrix}, \text{ donde } \bar{r}_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{m} \bar{r}_{ij}^k$$

De manera paralela a como se hizo con el contador de Borda clásico, a partir de esta matriz agregada se puede definir el *contador de Borda Gradual colectivo (agregado)* como:

$$\bar{B}(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \bar{r}_{ij}$$

Como resultado la relación de preferencia colectiva, $P^{\bar{B}}$, correspondiente a la regla de Borda Gradual para cualquier x_i, $x_j \in X$ viene dada por:

$$x_i P^{\bar{B}} x_j \Leftrightarrow \bar{r}(x_i) > \bar{r}(x_j)$$

Ejemplo 4.1.1. Supongamos que tiene lugar una votación con 6 electores que manifiestan sus preferencias e intensidades sobre 3 alternativas (*1*, *2* y *3*). Así mismo, consideramos que los votantes que manifiestan idénticas preferencias lo hacen con la misma intensidad:

2 votantes	3 votantes	1 votante
x_1	x_2	x_3
x_2	x_3	x_1
x_3	x_1	x_2

Tabla Ejemplo 4.1.1.

Fuente: Elaboración propia.

$$\left[2 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.65 & 0.95 \\ 0.35 & 0.5 & 0.55 \\ 0.05 & 0.45 & 0.5 \end{pmatrix}\right] + \left[3 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.5 & 0.75 \\ 0.9 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.35 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.65 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3.2 & 0.9 & 0.95 \\ 1.8 & 4.65 & 0.7 \\ 1 & 3.45 & 1.35 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo las puntuaciones ponderadas de cada alternativa según el método de Borda Gradual son:

$$\bar{B}(X_1) = 2 \cdot (0.65 + 0.95) + 3 \cdot (0.2 + 0.1) + 0.6 + 0.35 = 5.05$$

$$\bar{B}(X_2) = 2 \cdot (0.35 + 0.55) + 3 \cdot (0.8 + 0.75) + 0.4 + 0.3 = 7.15$$

$$\bar{B}(X_3) = 2 \cdot (0.05 + 0.45) + 3 \cdot (0.9 + 0.25) + 0.65 + 0.7 = 5.8$$

Donde la alternativa vencedora es X_2.

Si por el contrario, los agentes tuvieran que pronunciarse y manifestar sus preferencias de una forma estricta sobre los pares de alternativas, las puntuaciones variarían del siguiente modo: las alternativas valoradas con intensidades de preferencia ≤ 0.5, se sustituirán por 0 puntos para el cómputo global. Por el contrario, si las alternativas son valoradas con intensidades de preferencia > 0.5, se sustituirán por 1 punto para el cómputo global. De esta forma las matrices de preferencias individuales de los agentes y la agregada se configuran como sigue:

$$\left[2\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right]+\left[3\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&1\\2&6&0\\0&3&2\end{pmatrix}$$

Las puntuaciones de cada alternativa según el método de Borda clásico son:

$$\bar{B}(X_1)=2\cdot(0+1+1)+3\cdot(0+0+0)+0+1+0=5$$

$$\bar{B}(X_2)=2\cdot(0+0+1)+3\cdot(1+0+1)+0+0+0=8$$

$$\bar{B}(X_3)=2\cdot(0+0+0)+3\cdot(1+0+0)+1+1+0=5$$

La alternativa vencedora sigue siendo x_2, aunque no tiene por qué ser así, ya que puede cambiar. Si embargo, sí que se ven alteradas las últimas posiciones con respecto al resultado obtenido por el método de Borda Gradual, ya que hay un empate técnico entre las alternativas x_1 y x_3.

4.1.2 Presencia en la actualidad

Esta variante de la regla de Borda, a diferencia de su versión clásica, tiene una mayor presencia en la actualidad debido a que admite una variante lingüística, para más información al respecto véase García - Lapresta y Martínez - Panero (2002). Ha sido aplicada en casos de gestión forestal y administración de cuencas hidrográficas y fluviales. A este respecto, véanse Zarghami y Szidarovszky (2009, 2011).

En Finlandia, por ejemplo, se ha desarrollado un método de optimización y planificación forestal llamado HERO. Véase Kangas (1999); Kangas and Kangas (2005); Kangas, Laukkanen and Kangas (2006).

Otro ejemplo, en este caso para el manejo y gestión de cuencas hidrográficas, lo encontramos en Yavuz y Baycan (2013). Aborda el estudio de la cuenca del lago

Beyşehir, el lago de agua dulce más grande de Turquía, y se centra en las percepciones y enfoques de los habitantes a fin de descubrir las estrategias de gestión óptimas. Los resultados proporcionan una información crucial sobre las estrategias de gestión de cuencas hidrográficas más apropiadas que permitan la sostenibilidad ecológica y sociocultural de la cuenca.

4.2 Sistema DesBorda (Sistema Echenique)

4.2.1 Descripción teórica y formulación matemática

El *Método o Sistema DesBorda (DB),* como variante moderna de la regla de Borda clásica, se fundamenta sobre la misma idea progenitora. Lo que es realmente novedoso es la elección, un tanto arbitraria, de las puntuaciones asignadas a cada votante, que será la causa de las numerosas críticas a dicho sistema y consecuencia del fallo de algunas propiedades que consideramos elementales en un sistema de votación. Por otro lado, este método ideado por el secretario de la Organización política Podemos Pablo Echenique en 2016 para las elecciones primarias del propio partido, introduce dos mejoras al método de Borda clásico: incentivo de acuerdos y pactos entre los candidatos o alternativas, resultado directo del desplazamiento del inicio del contaje y garantía de representación de terceras alternativas (alternativas menos votadas). Se propugna como idóneo para candidaturas de unidad popular municipalista y elecciones internas de partidos políticos.

Más en detalle, se presentan listas ordenadas y abiertas de longitud mínima de 20 y máxima de 62 candidatos. Se podrán presentar candidatos individuales que conformarán, entre todos ellos, la llamada “lista blanca”. Cada individuo puede votar hasta 62 candidatos de según sus preferencias. En cuanto a las puntuaciones otorgadas: el primer candidato recibe 80 puntos, el segundo 79, el tercero 78…y así sucesivamente. De tal forma que el último candidato recibe 19 puntos (frente a la puntuación, también decreciente, que otorgaría el método de Borda clásico: 62 puntos el primero, 61 puntos el segundo, 60 puntos el tercero, y así sucesivamente… y el último recibe 1 punto)[24]. Para más detalle véase Vistalegre 2 – Podemos. Reglamentos y protocolos (2016).

Así pues, el *contador del método DesBorda* para un agente k, que asigna una puntuación a la alternativa $x_i \in X$, se define como (usando una notación análoga a la de secciones anteriores):

$$DB(x_i) = 19 + \sum_{\substack{j=1 \\ x_i P^k x_j}}^{n} r_{ij} = 19 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} r_{ij}$$

Los candidatos vencedores serán aquellos que hayan obtenido, en suma, la mayor puntuación. Este método pretende corregir dos aspectos: garantizar la paridad del órgano y evitar el posible perjuicio a las candidatas mujeres; y garantizar la representación de las minorías. Según este argumento cualquier lista con más de un 5% de los puntos agregados (y menor que 15%), ya sean mujeres o una minoría en particular, esta tendrá derecho a al menos dos escaños si el sistema base le hubiera adjudicado menos. Del mismo modo, si obtienen más de un 15% de los puntos agregados, tendrá derecho a al menos cuatro escaños si el sistema base le hubiera adjudicado menos.

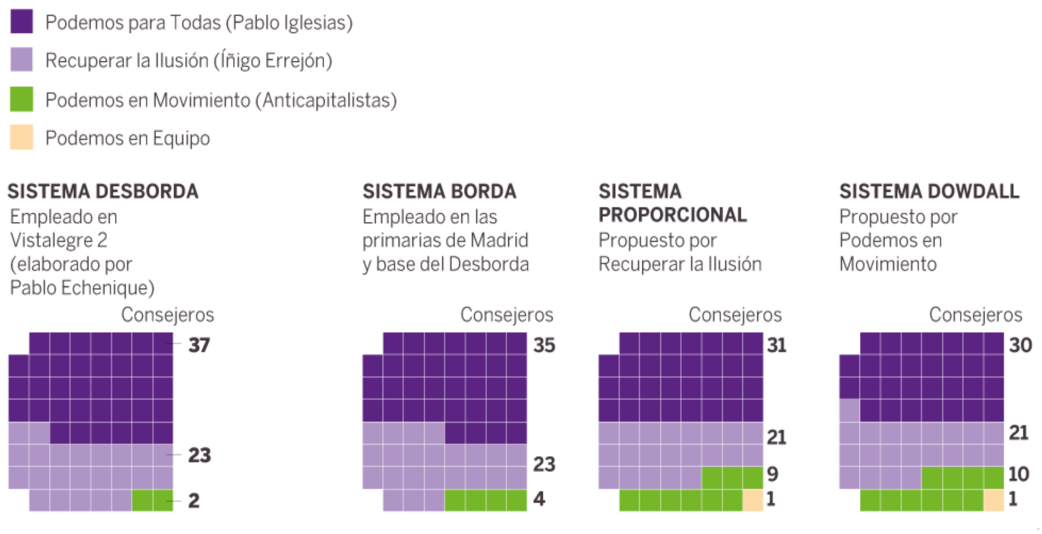
4.2.2 Presencia en la actualidad

El método *DB* nace de la propuesta del secretario de la Organización de Podemos en España, Pablo Echenique, para cuestiones procedimentales sobre Vistalegre II (votaciones del próximo Congreso Nacional de Podemos). Fue la más mediática, junto con la de Íñigo Errejón (*“Recuperar la ilusión”*) y la de los anticapitalistas (*“Podemos en movimiento”*), de las 36 propuestas en total que se presentaron. Todas ellas un tanto discutibles, pero sobre todo el de Pablo Echenique, que de entrada, ya sostengo que es un método perverso, un tanto manipulable y nada proporcional, y que probablemente fuera lo que pretendiese el secretario de la Organización de Podemos con el fin de beneficiar a un candidato en concreto, Pablo Iglesias. De este modo los resultados finales fueron los siguientes: Véase Vistalegre 2 – Podemos. Resultados de las votaciones

[24] El sistema de Echenique utiliza, por tanto, un rango de puntuaciones 1,2,3…, en lugar de 0,1,2…, equivalente al anterior.

(2017a) para la puntuación final y el número de veces que fue cada candidato votado en el *i*-ésimo lugar y para más detalles Vistalegre 2 – Podemos. Resultados de las votaciones (2017b).

Este método tan polémico se debe a que, como hemos descrito inicialmente, el último candidato de dicha lista ya no recibe 1 solo punto, si no 19 puntos, lo que supone serios problemas de proporcionalidad ya de entrada (se multiplica la puntuación del último candidato por 19). Esto es, un candidato ahora solo necesita que le voten o que tenga 5 votos en última posición (95 puntos) para superar a un candidato que ha sido elegido el más votado en una sola lista (80 puntos). Frente al Borda clásico, donde un candidato precisaría de 63 votos o últimas posiciones (63 puntos) para poder vencer a uno candidato que fuera votado o tuviera una primera posición en una lista (62 puntos).
Este sistema, aparte de favorecer mucho a las primeras listas, es contrario a terceras, cuartas y quintas listas (idea precisamente contraria por la que adopta este sistema, "evitar el posible perjuicio a las candidatas mujeres y garantizar la representación de las minorías"). Lo que conduce a Pablo Echenique a introducir el factor corrector que ya introdujimos al principio. No obstante, este factor corrector, tampoco se libra de críticas, veamos por qué. Si una minoría no hubiera alcanzado el 5% de los votos, se les otorgaría 2 escaños. Con una proporción de votos entre el 5% y el 15% (no incluido este último) de los votos, estos seguirían recibiendo solo 2 escaños, he aquí lo paradoja de dicho factor corrector. Se obtendría los mismos escaños (2) con un 4% de los votos que con el 14% de los votos. Sin embargo, si se aplicara proporcionalidad pura, a este grupo (5% de los votos) le correspondería 4 escaños. Situación que se agravaría aún más si tuvieran el 15% o más de los votos, que en lugar de recibir 4 escaños (según el factor corrector de Echenique), les correspondería 9 escaños. De tal forma que los resultados, vistos con anterioridad pueden variar sustancialmente dependiendo del método que se utilice, como se puede observar a continuación:



Fuente: EL PAIS (2017).

Esta “tarifa plana” de escaños otorgados por % de votos, de nuevo contraria a la virtud propuesta de este modelo por Echenique, desincentiva la formación de listas. Ya que, si se tiene el 5% de los votos, por ejemplo, y la unión de varias listas les confiere el 13%, no interesa la formación de acuerdos entre candidaturas ya que no van a incrementar sus escaños. Lo que da lugar a una lucha interna o guerra civil dentro del propio grupo de candidatos e incentiva el individualismo. Para una crítica interna véase Politeia. El Enfoque Inteligente (2016).

4.3 Método de Borda Geométrico Truncado

4.3.1 Descripción teórica y formulación matemática

El Partido PIRATA español utiliza una variante moderna de la clásica regla de Borda, conocida como *Método Borda Geométrico Truncado (BGT) con base un tercio* ($^1/_3$), se caracteriza (como su propio nombre de familia indica) porque clasifica las candidaturas por orden de preferencia, de forma que cuanto menor sea el orden de preferencia en un voto emitido, menor será la puntuación que recibirá la alternativa en cuestión en la mencionada candidatura. El calificativo “truncado” hace referencia a que, cuando existan varias candidaturas no existirá obligación de votar a todas, sino que podrán elegirse una sola, algunas de ellas o incluso todas. Del mismo modo, que sea geométrico significa que la concesión de puntos a cada una de las candidaturas que sean elegidas en un voto sigue una progresión geométrica.

Más en detalle, en el caso que nos ocupa y por tener base de un tercio, en una votación determinada (suponiendo ordenes lineales) la primera opción recibirá un punto, que es el resultado de elevar un tercio a cero[25]. La segunda opción, caso de que la hubiera, recibiría un tercio de punto, que es el resultado de elevar un tercio a uno. La tercera opción, caso de que la hubiera, recibiría un noveno de punto, que es el resultado de elevar un tercio a dos. Y así sucesivamente hasta la enésima opción, caso de que la hubiera, que recibiría un tercio de punto elevado a *n – 1*, de acuerdo con Reglamento de la Asamblea Nacional del Partido PIRATA (2015).

Por lo tanto, el *contador de Borda Geométrico Truncado individual* para un agente k, que asigna una puntuación a la alternativa $x_i \in X$, se define como:

$$\hat{r}_k(x_i) = \left(\frac{1}{3}\right)^{card\{x_i P^k x_j\}}$$

Lo que nos permite definir el *contador de Borda Geométrico Truncado colectivo* conforme los agentes asignan una puntuación a la alternativa x_i como:

$$BGT(x_i) = \sum_{k=1}^{m} \hat{r}_k(x_i)$$

En lo que respecta a la clasificación de los resultados, salvo que se indique lo contrario, no se tienen en cuenta las candidaturas que hayan obtenido cero puntos. Se ordenan de mayor a menor, en una columna, las cifras de puntos obtenidos por el resto de candidaturas. Si hubiese dos o más candidaturas empatadas a puntos, serán clasificadas en función del número de puntos que hayan obtenido como primera opción. Escrutados todos los votos, se suman las puntuaciones y se declaran como alternativas ganadoras tantas opciones como haya que superen un umbral mínimo hasta cubrir las plazas designadas para un proceso electoral en concreto.

25 Recibe la misma puntuación que con el método de Borda clásico, pero no aplica el mismo razonamiento.

En cuanto a la resolución de empates, caso de que existan, el procedimiento es ligeramente diferente al Borda clásico. Si una vez aplicado lo dispuesto en el párrafo anterior hubiese dos o más candidaturas empatadas a puntos generales y a puntos como primera opción, se repetirá el proceso computando los puntos obtenidos como segundas y sucesivas opciones.

Más aún, si una vez aplicado lo dispuesto en el párrafo anterior hubiese (de nuevo) dos o más candidaturas empatadas, este último empate se resolverá mediante sorteo.

4.3.2 Presencia en la actualidad

Hoy en día esta variante, que se sepa, solo la utiliza el partido político PIRATA. Fundado este por primera vez, el 1 de enero de 2006 en Suecia por Rickard Falkvinge bajo el nombre de Piratpartiet. A partir de ahí se han ido creado numerosos partidos PIRATA en diferentes países. Según datos oficiales de su página web existen actualmente 19 países que cuentan con un partido PIRATA oficial registrado, y otros 23 países donde se están llevando procesos de formación de dicho partido, véase Partido PIRATA (2017a). Sin embargo, aquellos que tienen mayor participación en el gobierno en elecciones nacionales, destacan Alemania con el 2,1% de los votos, República Checa con el 2,66%, Suecia con 0,43%, Islandia 5,10% y Ucrania 9,0%. Así mismo en 2009 conseguían su primer escaño en el Parlamento Europeo (hasta 2014). En España por su parte, cuenta ya con diversas agrupaciones, en Cataluña, Madrid, Aragón, Extremadura, Murcia, Galicia, Navarra, Andalucía, Comunidad Valenciana, Ceuta, La Rioja y País Vasco[26].

Los Partidos PIRATA no se fundan sobre una corriente ideológica y política, sino por: la defensa de los derechos civiles y sociales; el derecho a la democracia directa; la participación ciudadana; la transparencia; la reforma del copyright y el sistema de patentes; el libre acceso al conocimiento y a la cultura (cultura libre); la libertad de información; la neutralidad en la red; la protección, el fomento y el derecho universal de acceso a Internet, incluido el ámbito rural; así como la educación gratuita y sanidad universal.

[26] Para una mayor información (nombre, estado actual de registro, si pertenece al partido pirata internacional y cargos que poseen) pueden visitar: Wikipedia Partidos PIRATAS (2018).

En cuanto al ámbito de aplicación, el método *BGT* es un método muy recurrente en los partidos PIRATA, aunque se utiliza exclusivamente en sus Asambleas Generales. En las cuales incorporan ciertas modificaciones, sobre todo a la hora de calcular las mayorías cualificadas, del siguiente modo:

- *El voto será público, salvo que se indique lo contrario o se trate de procesos electorales internos. En cuyo caso, y de acuerdo con el artículo 7.3 LOPP, el voto será secreto.*
- *Un punto equivale a un miembro de PIRATA.*
- *Un compromisario multiplicará el valor de su voto por tantos miembros como represente, incluido el mismo.*
- *Cada miembro solo podrá emitir un único voto sobre cada uno de los puntos tratados durante una reunión de la Asamblea Nacional.*

Algunos ejemplos de la aplicación de este método se pueden encontrar en las votaciones que tiene lugar para la elección de los cargos de la nueva Junta:

- *El 20 de junio de 2015 en la X Asamblea General del PIRATA. Resultados oficiales facilitados y publicados por el propio Partido PIRATA (2015) el 22 de junio de 2015.*
- *El 29 de octubre de 2016 en la XI Asamblea General del PIRATA. Resultados oficiales facilitados y publicados por el propio Partido PIRATA (2016) el 11 de noviembre de 2016. 18 de noviembre de 2017*
- *El 17 de noviembre de 2017 en la XII Asamblea General del PIRATA. Resultados oficiales facilitados y publicados por el propio Partido PIRATA (2017b) el 18 de noviembre de 2017.*

4.4 Conteo de Borda Modificado

4.4.1 Descripción teórica

El Conteo de Borda Modificado también conocido como *Modified Borda Count (MBC)* o *Qualified Borda Count (QBC)*[27] y concebido por Peter Emerson (véase Emerson (2011)) es otra variante del modelo de Borda clásico, en virtud de la

[27] Con frecuencia, en la práctica se utiliza la nomenclatura de *MBC* en lugar de *QBC*, con el fin de evitar la confusión con el método *QBS* que veremos en el siguiente apartado.

cual los votantes pueden expresar ordenes de preferencia individual incompletos, tal como ocurría en el método de aplicación del Borda Geométrico Truncado. Así, si existen cinco alternativas, por ejemplo, los votantes pueden escoger o mostrar sus preferencias sobre: una única alternativa, dos alternativas, tres alternativas o cuatro alternativas. Lo realmente interesante de esta variante del método es que, los votantes que emiten órdenes incompletos no pueden beneficiarse de la mayor puntuación que reciben las alternativas que son más preferidas (las que ocuparían las primeras posiciones en el caso de que la orden de preferencias hubiese sido completa).

Dicho de otra forma y a modo de ejemplo: si se escogen dos alternativas (de un total de cinco como mencionábamos anteriormente), correspondientes a la primera y segunda en el orden de preferencias del votante, estas no reciben el valor 5 y 4, sino, que las alternativas van ocupando las posiciones desde abajo a arriba (al revés de como ocurre con el método de Borda clásico), recibiendo así las puntuaciones correspondientes a cada nivel pero empezando desde el nivel más bajo en el orden de preferencias. Si son dos alternativas de cinco, entonces la segunda alternativa ocupa la última posición y recibe un punto, mientras que la primera alternativa ocupa la anteúltima posición y recibe dos puntos.

Para que pueda darse un ganador se exige adicionalmente un promedio mínimo en términos de preferencia superior a 5/2 (2.5), que han superar todas aquellas alternativas que son candidatas para ganar la votación en cuestión. Retomando el ejemplo anterior de cinco alternativas, si el ganador (el que recibe la mayor puntuación) obtiene una clasificación media en términos de preferencia entre 1 (primer puesto) y 3/2 (entre primero y segundo puesto), se puede decir que representa o tiene un apoyo abrumador y por tanto ganadora por el Conteo de Borda Modificado. Si la valoración que recibe es aproximadamente 2 (segundo puesto), se dice que existe un consenso común y por tanto la alternativa en cuestión sigue siendo ganadora. Mientras que si obtiene 5/2 (2.5), se puede describir a esta como el mejor compromiso posible (y sigue siendo ganadora por el *MBC*). Si la opción ganadora obtiene una clasificación inferior, en lo que a preferencias se refiere, por ejemplo 2.7 (promedio mínimo), entonces se debería repetir el proceso de votación. Ya que, a pesar de tener la máxima puntuación por Borda, no cuenta con suficientes apoyos para ser considerado ganador por

MBC. El proceso se repetirá hasta que se logre el nivel requerido de consenso, véase Emerson (2012).

De este modo, por un lado, se incentiva que los votantes expresen órdenes preferenciales completos si quieren beneficiarse de las mayores puntuaciones que obtienen las alternativas más preferidas, y por otro, que sea en término medio el más preferido por los electores.

Ejemplo 4.4.1. A partir de la plantilla en Emerson (2012) y 10 votantes con unas determinadas preferencias, tenemos:

		VOTANTES									
PUNTOS	**PREFERENCIA**	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
5	*1º*					*D*	*E*		*E*		
4	*2º*	*E*	*E*	*B*		*B*	*D*		*D*	*D*	
3	*3º*	*C*	*C*	*E*	*A*	*A*	*B*	*E*	*B*	*B*	*D*
2	*4º*	*B*	*D*	*D*	*E*	*E*	*C*	*D*	*A*	*C*	*E*
1	*5º*	*A*	*A*	*C*	*B*	*C*	*A*	*A*	*C*	*A*	*A*

Tabla Ejemplo 4.4.1a

Fuente: Elaboración propia.

Donde los puntos enumeran la puntuación que otorgan los votantes a cada alternativa, siendo el 5 y el 1 las puntuaciones máximas (más alta) y mínimas (más baja) respectivamente. Mientras que la preferencia refleja el puesto (en orden cardinal) que los votantes otorgan a cada alternativa, siendo el 1 y el 5, el primer y último puesto. Así se tiene que:

ALTERNATIVAS	PUNTUACIÓN	MEDIA DE PREFERENCIAS	CLASIFICACIÓN
A	*14*	*4.44*	*4*
B	*20*	*3.14*	*3*
C	*13*	*4.14*	*5*
D	*26*	*2.75*	*2*
E	*30*	*2.16*	*1*

Tabla Ejemplo 4.4.1b

Fuente: Elaboración propia.

donde se obtienen unas puntuaciones $(\breve{B})$ y medias de preferencias $(\ddot{B})$ del siguiente modo:

$$\breve{B}(x_A) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 14 \qquad \ddot{B}(x_A) = \frac{3º \cdot 2 + 4º \cdot 1 + 5º \cdot 6}{9} = 4.44$$

$$\breve{B}(x_B) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 20 \qquad \ddot{B}(x_B) = \frac{2º \cdot 2 + 3º \cdot 3 + 4º \cdot 1 + 5º \cdot 1}{7} = 3.14$$

$$\breve{B}(x_C) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 13 \qquad \ddot{B}(x_C) = \frac{3º \cdot 2 + 4º \cdot 2 + 5º \cdot 3}{7} = 4.14$$

$$\breve{B}(x_D) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 26 \qquad \ddot{B}(x_D) = \frac{1º \cdot 1 + 2º \cdot 3 + 3º \cdot 1 + 4º \cdot 3}{8} = 2.75$$

$$\breve{B}(x_E) = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 30 \qquad \ddot{B}(x_E) = \frac{1º \cdot 2 + 2º \cdot 2 + 3º \cdot 2 + 4º \cdot 3}{9} = 2.16$$

Vemos así que la alternativa *E* termina con la puntuación más alta, lo cual lo convierte en el potencial ganador por *MBC*. No obstante, como ya hemos mencionado, ha de cumplir un promedio mínimo en términos de preferencia, la cual verifica. Por tanto, como 2.16 > 2.5 en un orden cardinal (lo que sugiere un apoyo abrumador por parte de los votantes), la alternativa *E* no solo es la ganadora por *MBC*, sino también la mejor opción (la de mayor consenso).

4.4.2 Presencia en la actualidad

Al igual que el resto de variantes vistas hasta ahora, su reciente creación limita la presencia que pueda tener en el panorama actual. Aunque es posible citar algunos casos en los que se podría haber aplicado, como es el caso de la votación del nombre del nuevo puente sobre el río Liffey, el puente Rosie Hackett, llevado a cabo por el ayuntamiento de Dublín el 2 de septiembre de 2013. Lo que hace que esta sea una decisión histórica es que, parece haber sido la primera decisión autorizada tomada por un organismo público no solo en Irlanda, sino tal vez incluso en Europa, por haber utilizado la regla Borda clásica y *MBC* como procedimiento de votación, véase Dublin City Council (2013). En John Baker (2014) se resume el proceso y analiza los resultados obtenidos mediante la regla de Borda clásica, así como por *MBC*, concluyendo que los resultados habrían sido idénticos, en lo que a alternativa ganadora se refiere, si se hubiera aplicado un método u otro.

4.5 Sistema de Cuotas de Borda

4.5.1 Descripción teórica y formulación matemática

Lo cierto es que el *Quota Borda System (QBS)* es más bien un sistema electoral[28], y más concretamente, de selección de candidatos, que un método de votación, aplicado a una variante del método de Borda clásico (*MBC*), lo que lo posterga a una nueva categoría que podemos denominar "variante de variantes". Por tanto, dicho sistema se suele utilizar cuando un electorado elige a más de un candidato en unas elecciones generales y en la que se han de repartir un determinado número de escaños. El escenario ideal donde mejor funciona el *QBS* es en circunscripciones[29] de múltiples miembros de entre 4 a 6 miembros. Este método de votación en sí fue concebido por el británico Michael Dummett, bajo la denominación de *Quota Borda System (QBS)*, de acuerdo con Dummett (1984).

Así pues, el método de *QBS* consiste en, a efectos teóricos, una transcripción idéntica al método *MBC* incorporando una única novedad, la denominada *cuota Droop* o *cociente Droop* (c_i) que se define como:

$$c_i = \frac{S}{V} + 1$$

Fuente: Dummett (1984).

donde S es el número de escaños a repartir y V el número de votos emitidos.

Los escaños vacantes (si los hay) se otorgan a los partidos que tienen un mayor número de votos no utilizados (restos), favoreciendo así los grupos o partidos grandes. Y, al igual que el método de los *Restos Mayores*, no es monótono ni

[28] Sistema electoral: *"Conjunto de actos, momentos y operaciones regladas a través de los cuales se consiguen formar, mediante emisión del voto, órganos representativos que expresan las preferencias políticas de los ciudadanos".* Véase Giner et al. (1998).

[29] *"Conjunto de ciudadanos o de electores agrupados generalmente sobre una base territorial a partir de cuyos votos se procede a distribuir los escaños de un parlamento a los partidos o a las coaliciones".* Véase Giner et al. (1998).

respecto al número de escaños (*paradoja de Alabama*), ni respecto al número de votos (*paradoja de los votos*). Incumple también la condición de la *cuota*[30] (q_i).

La determinación de escaños se procede en etapas, como sigue:

- *Etapa I: si un candidato alcanza 1 cuota (o la primera) de primeras preferencias, será elegido para recibir un escaño.*
- *Etapa II: si un par de candidatos consiguen superar 2 cuotas (o la segunda cuota), ambos candidatos obtienen un escaño.*
- *Etapa III: si cualquier trío de candidatos supera 3 cuotas (o el tercer nivel cuotas), los tres candidatos obtienen un escaño.*
- *Etapa IV: en caso de empate técnico durante la Etapa III y escasez de escaños, el (los) candidato(s) que rebasa(n) 2 cuotas (o la segunda cuota) con las puntuaciones MBC más altas, obtendrá(n) un escaño.*

Entonces, los escaños vacantes (si los hay) que aún no se han asignado, continúan con las siguientes etapas:

- *Etapa V: si un par de candidatos llegan a la cuota, el candidato con la puntuación MBC más alta obtiene un escaño.*
- *Etapa VI: si cualquier trío de candidatos consiguen alcanzar una cuota, el candidato con la puntuación MBC más alta obtiene un escaño.*

Y finalmente, si aún quedan escaños por repartir:

- *Etapa VII: los candidatos con las puntuaciones más altas MBC obtiene un escaño.*

A modo de ejemplo: en una circunscripción con un solo escaño a repartir, la *cuota* coincide con la mayoría absoluta, es decir, (50% + 1) del voto válido; en una circunscripción con dos escaños a repartir la *cuota* sería, 33% + 1 del voto válido; con tres escaños a repartir la *cuota* sería, 25% + 1 del voto válido; con cuatro, 20% + 1 del voto válido; y así sucesivamente.

---

30 $q_i = \frac{S}{V} \cdot v_i$; donde q_i es la cuota del partido *i*, $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ es el número de escaños a repartir, $V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ es el número de votos emitidos y v_i el número de votos que recibe el partido *i*. Por tanto, un método cumple la condición de la cuota si: $|S_i - q_i| < 1$.

Ejemplo 4.5.1. Tomando como referencia la distribución de puntos según el método expuesto en el método de *MBC*:

Si votas por:	1 candidato	2 candidatos	3 candidatos	4 candidatos	5 candidatos	6 candidatos
La 1º alternativa obtiene	*1 punto*	*2 puntos*	*3 puntos*	*4 puntos*	*5 puntos*	*6 puntos*
La 2º alternativa obtiene		*1 punto*	*2 puntos*	*3 puntos*	*4 puntos*	*5 puntos*
La 3º alternativa obtiene			*1 punto*	*2 puntos*	*3 puntos*	*4 puntos*
La 4º alternativa obtiene				*1 punto*	*2 puntos*	*3 puntos*
La 5º alternativa obtiene					*1 punto*	*2 puntos*
La 6º alternativa obtiene						*1 punto*

Tabla Ejemplo 4.5.1a

Fuente: Elaboración propia.

Un votante, partidario del candidato *A* (afiliado del partido *L*), presenta la siguiente lista de votos:

CANDIDATO	**PARTIDO**	**PUNTOS**	**PREFERENCIA**
A	*W*	*4*	*1º*
B	*X*	-	-
-	*Y*	*1*	*4º*
D	-	-	-
E	*Z*	*3*	*2º*
F	-	*2*	*3º*

Tabla Ejemplo 4.5.1b

Fuente: Elaboración propia.

Vemos que el individuo presenta preferencias incompletas, lo cual no supone ningún problema. No así, si un votante está indeciso entre qué partido es su favorito (1º preferencia) asignando la misma preferencia a dos partidos diferentes, en cuyo caso la lista de votos del candidato *A* se considerará invalida. Es decir, si un individuo valora con la misma preferencia (1º lugar, la más preferida) dos partidos diferentes, la papeleta o lista de votos del candidato *A* se considerará nula. Para un ejemplo más visual véase en el Anexo Ejemplo 4.5.1c. Si dicha indecisión se produce en las sus preferencias más bajas (menos preferidas), por ejemplo, entre dos preferencias que ocupan la 4º posición en sus votos, dicha lista se considera parcialmente valida. Es decir, solamente se tiene en cuenta las preferencias y puntuaciones respectivas de los tres primeros partidos. El resto, el 4º (indecisión entre 2 partidos) y el 5º se consideran nulos. Para una muestra mas detallada véase en el Anexo Ejemplo 4.5.1d.

Una vez comprendido cómo funciona el método, veamos un ejemplo completo de su aplicación, tomando como referencia Emerson (2007):

PARTIDO	**W**			**X**			**Y**		**Z**	**INDEP**	*Total puntos asignados*
Candidatos / *Votantes*	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	
j	*1* **3**	*2* **2**	*3* **1**								6
k	*2* **2**	*1* **3**	*3* **1**								6
l	*1* **3**	*2* **2**	*3* **1**								6
m	*1* **3**	*3* **1**	*2* **2**								6
n				*1* **2**	*2* **1**						3
o				*1* **2**	*2* **1**						3
p				*1* **2**	*2* **1**						3
q	*3* **1**	*2* **2**	*1* **3**								6
r	*3* **1**	*2* **2**	*1* **3**								6
s				*2* **2**	*1* **3**					*3* **1**	6
t									*1* **2**	*2* **1**	3
u							*4* **1**	*3* **2**	*2* **3**	*1* **4**	10
MBC	13	12	10	8	6	0	1	2	5	6	64

Tabla Ejemplo 4.5.1e

Fuente: Emerson (2007) modificado.

Leyenda:

Preferencias

Puntuaciones

Si tenemos 12 votantes que desean repartirse 6 escaños. Lo primero que hemos de hacer es, proceder a calcular esto es, el número de escaños a repartir (S) entre el número de votos **válidos** emitidos (V) más 1. Por tanto, la *cuota Droop* o *cociente Droop* (c_i) es 2 ($\frac{6}{12} + 1 = 1.5 \rightarrow 2$ individuos o votantes). Ahora, procederemos con la primera parte de selección de candidatos (*etapas I, II, III* y *IV*) y posteriormente con la segunda y tercera parte, en caso de haber escaños todavía sin distribuir (*etapas V, VI* y *etapa VII*, respectivamente).

Etapa I: A (*j, l* y *m*), C (*q* y *r*) y D (*n, o* y *p*) tienen una cuota de dos o más primeras preferencias. Los candidatos A y D tienen tres primeros puestos en términos de preferencia, y ambos tienen un voto de segunda preferencia (*k* y *s* respectivamente). Pero A ocupa el primer lugar, por delante de D, debido a dos terceros puestos (*q* y *r*) frente a una ausencia de preferencia del candidato D. Entonces, el orden exacto de elección es A, D y C.

Etapa II: Hay un par de candidatos con 2 cuotas, es decir, cuatro primeras preferencias. Estos candidatos, D y E, ocupan la primera y/o el segunda lugar de cuatro votantes (*n, o, p* y *s*). Como el candidato D ya ha sido elegido en la primera etapa ya no puede recibir más escaños, al menos hasta que finalicen todas las etapas de la distribución de escaños, por lo que el cuarto escaño se asigna al candidato E.

Etapa III: Un trio de candidatos, tiene 3 cuotas, es decir, seis primeras preferencias. Estos candidatos A, B y C tienen el primer, el segundo y/o tercer puesto de seis votantes (*j, l, m, q* y *r*). Como A y C ya han sido elegidos en la primera etapa ya no puede recibir más escaños, por el mismo motivo que antes. Por tanto, el candidato B obtiene el quinto escaño.

Finalizada la primera parte, los escaños vacantes (si los hay) que aún no se han asignado, continúan con las siguientes etapas[31]:

Etapa V: Hay un par de candidatos, I y J, que comparten una cuota de votantes (la de los votantes *t* y *u*). Por tanto, el escaño restante se asigna al candidato J (independiente, sin partido), como consecuencia de una mayor puntuación *MBC*.

[31] De aquí en adelante, ninguno de los candidatos que han sido elegidos en la primera parte hasta ahora (*etapas I, II, III* y *IV*) se tienen en cuenta.

Así pues, los candidatos A, D, C, E, B y J obtiene un escaño y además en este mismo orden. Lo que sugiere el siguiente resultado final: el partido W obtiene 3 escaños, el partido X 2 escaños y el individuo J (sin partido, independiente) 1.

4.5.2 Presencia en la actualidad

A pesar de que tiene un interés teórico indudable, como ocurre con la propia regla de Borda clásica, no ha tenido una aplicación práctica por el momento en la actualidad, donde son más valorados los métodos que son fáciles y sencillos de aplicar, como pueden ser los métodos D´Hondt, Sainte-Laguë, etc.

No obstante, Emerson desde el Instituto de Borda hace una labor activa y continua de promoción no solo de la regla de Borda clásica, sino, de un gran número de variantes que el presente trabajo recoge, así como otras no contempladas aquí, tales como el voto matriz por ejemplo.

4.6 Juicio Mayoritario Borda

4.6.1 Descripción teórica y formulación matemática

En principio, sabemos que Juicio Mayoritario no es método posicional, sin embargo, sus creadores Michel Balinski y Rida Laraki (2010) han sido capaces de idear un nuevo método posicional a partir de la fusión de su método con de Borda clásico. Esta variante, también denominado *Borda Majority Count (BMC)*, exige únicamente que los votantes jerarquicen las alternativas disponibles de mayor a menor. Es decir, en primer lugar y al igual que el *JM*, es necesario que los votantes juzguen o evalúen las alternativas mediante un idioma común o valoraciones lingüísticas (sistema de calificación), dentro de una escala ordenada prefijada (de peor a mejor). A continuación, se asignan puntuaciones a todas las alternativas en cada orden individual según la valoración lingüística otorgada a cada una siguiendo el método Borda. Y finalmente, se halla la puntuación "*mediana*" que recibe cada candidato o alternativa, en lugar de la suma de la puntuación total. Así, la alternativa con la puntuación mediana mayor es la ganadora.

Matemáticamente, el modelo se constituye del siguiente modo: Se define en primer lugar una matriz $n \times m$, denominada perfil, que contiene la clasificación de los votantes o jueces por las diferentes alternativas (g_{ij}). Donde g_{ij} denota la valoración del agente j sobre la alternativa A_i. Entonces la fila i de un perfil de calificaciones es la valoración de todos los agentes *j* otorgan a una alternativa en concreto *i*. Mientras que la columna j, contiene todas las valoraciones del agente en cuestión (*j*) sobre las diferentes alternativas *i*. Luego el método de calificación de *JMB* es, una función F que asigna a cada perfil la calificación final de cada votante. Esto es, $F : \mathcal{L}^{n\times m} \rightarrow \mathcal{L}^{m}$, tal que:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nm} \end{pmatrix} \xrightarrow{F} (f(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1m}), \dots, f(g_{n1}, g_{n2}, \dots, g_{nm}))$$

donde $f(g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{im})$ es la calificación final de un votante respecto sobre la alternativa A_i y f la *función de agregación*. Por tanto, una vez reordenados, si $g_1 \geq g_2 \dots \geq g_m$ es la valoración otorgada a *A*, entonces el *JMB* de un candidato se define como:

$$\begin{cases} f^{JMB}(A) = g_{(k+1)/2} \text{ , si m es impar (\textit{mediana})} \\ f^{JMB}(A) = g_{k/2} \text{ , si m es par (\textit{mediana baja})} \end{cases}$$

Siguiendo a Zahid y Swart (2015) en su formalización de *JMB*, asociamos números naturales a las valoraciones lingüísticas de manera similar a como se asignan las puntuaciones Borda, $g_1 = k - 1, g_2 = k - 2, \dots, g_m = 0$.

Lo novedoso en este enfoque es que el resultado final, en vez de ser lingüístico (*mediana* o *mediana baja*), es numérico según la fórmula:

$$JMB\ (A_i) = \frac{g_{i1} + \cdots + g_{im}}{n}$$

Si el número de etiquetas lingüísticas es reducido, varios candidatos pueden empatar al recibir la misma puntuación por el método *JMB*. En tal caso, Zahid y Swart (2015) proponen dos reglas de desempate diferentes, aunque ambas estrechamente relacionadas con las de *JM* de Balinski y Laraki.

Ejemplo 4.6.1. La siguiente tabla refleja las preferencias de 100 votantes con las siguientes valoraciones lingüísticas:

	VALORACIÓN LINGÜÍSTICA					
PARTIDO	*Excelente*	*Muy Buena*	*Buena*	*Regular*	*Mala*	*Muy Mala*
A	11	33	21	29	2	4
B	13	34	18	24	7	4
C	13	29	22	31	1	4

Tabla Ejemplo 4.6.1a

Fuente: Elaboración propia.

Tras los cálculos oportunos, aplicando *JMB* se obtiene un empate en una primera etapa (*JMB-1*). Eliminando la peor etiqueta lingüística (muy mala) de nuevo se obtiene un empate en *JMB-2*; finalmente descartando el valor lingüístico (malo) se obtienen los valores reflejados en *JMB-3*.

CANDIDATOS	**JMB-1**	**JMB-2**	**JMB-3**
A	*3,1*	*2,14*	*1,2*
B	*3,1*	*2,14*	*1,25*
C	*3,1*	*2,14*	*1,19*

Tabla Ejemplo 4.6.1b

Fuente: Elaboración propia.

Así, la alternativa vencedora por *JMB*, tras aplicar una de las propuestas de desempate de Zahid y Swart, es el candidato *A*.

Cabe señalar que su amplio rango de valoraciones hace que *JMB* sea propenso a incurrir en la manipulabilidad, aunque es conocido que este hecho es imputable en mayor o menor medida a todos los sistemas de votación.

Una reinterpretación de este modelo es el denominado *Range Voting* de Warren Smith. La principal diferencia entre el *JMB* de Balinski y Laraki y el *Range Voting* de Smith es, que en el primer caso se toma la *mediana* o el *valor medio*, de manera que el resultado es lingüístico, mientras que en el segundo caso se considera el promedio de las calificaciones libres otorgadas a un candidato como la calificación final numérica, de esa alternativa.

4.6.2 Presencia en la actualidad

Al igual que ocurre con el método de *QBS*, no contamos con ejemplo alguno de la aplicación de este método. Sin embargo, existen algunos análisis a posteriori sobre casos concretos ya dados. Véase Zahid y Swart (2015), quienes a partir del experimento de Orsay de Balinski y Laraki (2007), aplican el *JMB* al resultado de las elecciones francesas en 2007. Lo paradójico de esta situación, es la diferente y dispar combinación de candidatos ganadores según el método que se hubiese utilizado. Si se considera el experimento de Orsay inicial con el *JM* como método de votación o el *JMB* de Zahid y Swart, el candidato ganador habría sido Bayrou (Royal segunda y Sarkozy tercero). Pero no coincidiría el resto de la clasificación de dicha votación. Además, la clasificación según *JM* se determinaría resolviendo los empates que hubiese, mientras que, con el *JMB* no habría posibilidad en este caso de empate. Sin embargo, fue Sarkozy quien ganó las elecciones en 2007 (Royal segunda y Bayrou tercero).

Ejemplo 4.6.2. Experimento de Orsay, Zahid y Swart (2015):

	VALORACIÓN LINGÜÍSTICA					
CANDIDATO	*Excelente*	*Muy Buena*	*Buena*	*Regular*	*Mala*	*Muy Mala*
Besancenot	*4.1*	*9.9*	*16.3*	*16*	*22.6*	*31.1*
Buffet	*2.5*	*7.6*	*12.5*	*20.6*	*26.4*	*30.4*
Schivardi	*0.5*	*1*	*3.9*	*9.5*	*24.9*	*60.4*
Bayrou	*13.6*	*30.7*	*25.1*	*14.8*	*8.4*	*7.4*
Bové	*1.5*	*6*	*11.4*	*16*	*25.7*	*39.5*
Voynet	*2.9*	*9.3*	*17.5*	*23.7*	*26.1*	*20.5*
Villiers	*2.4*	*6.4*	*8.7*	*11.3*	*15.8*	*55.5*
Royal	*16.7*	*22.7*	*19.1*	*16.8*	*12.2*	*12.6*
Nihous	*0.3*	*1.8*	*5.3*	*11*	*26.7*	*55*
Le Pen	*3*	*4.6*	*6.2*	*6.5*	*5.4*	*74.4*
Laguiller	*2.1*	*5.3*	*10.2*	*16.6*	*25.9*	*40.1*
Sarkozy	*19.1*	*19.8*	*14.3*	*11.5*	*7.1*	*28.2*

Tabla Ejemplo 4.6.2a

Fuente: Zahid y Swart (2015).

Configurando la siguiente clasificación y distribución puntos de para cada candidato.

CANDIDATO	JMB
Besancenot	*16.36*
Buffet	*14.80*
Schivardi	*6.21*
Bayrou	***30.41***
Bové	*12.34*
Voynet	*17.77*

CANDIDATO	JMB
Villiers	*10.21*
Royal	***27.74***
Nihous	*7.33*
Le Pen	*7.04*
Laguiller	*12.14*
Sarkozy	***24.77***

Tablas Ejemplo 4.6.2b

Fuente: Zahid y Swart (2015).

5. CONCLUSIONES

Ya hemos señalado desde el principio del presente trabajo el amplio recorrido de la regla de Borda primitiva, así como, su enfrentamiento frente a Condorcet. Es decir, el hecho de que la regla de Borda puede dar la victoria a una alternativa que incumpla el principio de Condorcet.

También se ha puesto de manifiesto según las propiedades expuestas, que tanto la regla de Borda como cualquiera de sus modernas variantes cumplen unos requisitos mínimos que otros métodos y/o sistemas de votación no cumplen, y que se han de exigir en cualquier votación que se lleve a cabo.

No obstante, ha de llamarse la atención sobre el hecho de que las distintas versiones de la regla de Borda pueden arrojar distintos ganadores según la versión utilizada. Lo cual, es reflejo de la gran variedad de ámbitos en los cuales se puede aplicar una de las reglas de votación más viables y consistentes en la actualidad.

Nos ha parecido interesante analizar, para cada una de las modernas variantes consideradas cómo se obtienen las alternativas ganadoras (primer lugar o puntuación más alta) en cada caso. Así mismo, con ánimo divulgativo y tratando de promover su uso extensivo en un futuro cercano hemos tratado de exponer, mediante los escasos casos verídicos disponibles, la puesta en práctica de casi todos los métodos descritos.

Personalmente, la preferencia de este tema como objetivo fundamental del presente trabajo se basa en los beneficios y el enorme potencial sin aprovechar que presenta la aplicación tanto la regla de Borda original como todas y cada una de sus extensiones en cualquier ámbito, independientemente de que sea económico o no, en la que se precise decidir sobre una alternativa ganadora cuando existen más de dos candidatos. Es decir, tratar de dar respuesta al resultado paradójico de su escasa aplicación y practica en la vida cotidiana a pesar de la gran cantidad de virtudes que presenta.

Es importante destacar aquí lo que en principio parece una sutil matización, pero que en realidad tiene un papel fundamental a la hora de decidir si un sistema o método de votación es idóneo o no. En primer lugar, el hecho de que una elección se realice con una gran masa de votantes hace que quizás el método de Borda y sus respectivas variantes modernas no sean los métodos más idóneos. Sin embargo, si los votantes constituyen un número reducido, por mencionar algún ejemplo: elecciones primarias de partidos políticos, elecciones de comités ejecutivos, elecciones de rectorado en la universidad, delegados de clases en el ámbito educativo, etc., entonces los métodos descritos en este trabajo podrían ser los que mejor se ajustan a tal votación. En segundo lugar, cabe también llamar la atención sobre la escasa importancia y la interpretación, un tanto infiel, que la regla de Borda clásica da a las preferencias incompletas[32]. Esta última situación se subsana mediante las variantes descritas en el presente trabajo, las cuales tratan de manera más verosímil y fidedigna la realidad ante la ausencia de preferencia sobre una o varias alternativas.

[32] La regla de Borda clásica considera todas aquellas alternativas sobre las que no se manifiesta una preferencia al mismo nivel y les otorga puntuación nula.

ANEXO

- **Ejemplo 3.2.1.** Supongamos que tiene lugar una votación con 33 electores que manifiestan sus preferencias mediante órdenes lineales sobre 3 candidatos o alternativas posibles (*1*, *2*, y *3*). La distribución de los votos es la siguiente:

12 votantes	7 votantes	9 votantes	4 votantes	1 votante
x_1	x_2	x_3	x_2	x_3
x_2	x_3	x_2	x_1	x_1
x_3	x_1	x_1	x_3	x_2

Tabla Ejemplo 3.2.1.

Fuente: Elaboración propia.

Si consideramos la pluralidad como método de votación[33], el candidato vencedor es x_1 con 12 primeras posiciones frente sus contrincantes x_2 y x_3, con 11 y 10 votos respectivamente. Sin embargo, como apunta Borda, este vencedor (por pluralidad) no tiene por qué tener el apoyo de los electores, tanto es así, que es considerado la peor alternativa para la mayoría de los votantes (18 de los 33 votantes).

Es por esta razón, entre otras, por las que se considera la regla de Borda (hallar la alternativa que tiene una mayor cantidad de apoyo a favor por parte de los electores). Por tanto, las puntuaciones ponderadas de cada alternativa según el método de Borda son:

$$B(x_1) = 12 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 29$$

$$B(x_2) = 21 \cdot 1 + 11 \cdot 2 = 43$$

$$B(x_3) = 7 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 27$$

En cuyo caso, el ganador sería X_2.

[33] Es el método más común y sencillo a la hora de aplicar, en caso de tener n = 2 candidatos o alternativas. No así cuando n > 2.

Adicionalmente si consideramos que los agentes muestran sus preferencias mediante órdenes débiles, los resultados pueden cambiar sustancialmente.

- **Ejemplo 3.2.2.** Supongamos que tiene lugar una votación con 33 electores que manifiestan sus preferencias mediante órdenes débiles sobre 3 candidatos o alternativas posibles (*1*, *2*, y *3*). La distribución de los votos es la siguiente:

12 votantes	7 votantes	9 votantes	4 votantes	1 votante
x_1	x_2	x_3	x_2	x_3 x_2
x_2	x_3	x_2 x_1	x_1 x_3	x_1
x_3	x_1			

Tabla Ejemplo 3.2.2.[34]

Fuente: Elaboración propia.

En este caso, con el método de votación de la pluralidad, el candidato vencedor sigue siendo x_1 con 12 primeras posiciones, pero no el único. Ya que el candidato X_2 presenta el mismo número de votos (12). Mientras que x_3 obtiene los mismos votos (10). Al igual que antes uno de los vencedores (el candidato x_1), no tiene el apoyo de la mayoría de los electores, ya que es considerado la peor alternativa para 23 de los 33 votantes.

Si utilizamos por el contrario el método de Borda, las puntuaciones ponderadas de cada alternativa son:

$$\tilde{B}(x_1) = 12 \cdot 2 + 13 \cdot {}^{1}\!/_{2} = \frac{61}{2}\ (30.5)$$

$$\tilde{B}(x_2) = 11 \cdot 2 + 13 \cdot 1 + 10 \cdot {}^{1}\!/_{2} = 40$$

$$\tilde{B}(x_3) = 9 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 5 \cdot {}^{1}\!/_{2} = \frac{57}{2}\ (28.5)$$

En cuyo caso, el ganador seguiría siendo X_2.

[34] Las alternativas que aparecen en un mismo nivel indican indiferencia entre las alternativas para los agentes y las que aparecen en un nivel superior son preferidas a todas aquéllas que están en un nivel inferior. Lo que implica transitividad de las relaciones de preferencia (fuerte y débil) e indiferencia de los agentes.

- **Ejemplo 3.2.3.** Supongamos una comisión de 30 votantes en la que se presentan 3 candidatos (*1*, *2* y *3*) y donde existen dos coaliciones cuyas preferencias se ordenan del siguiente modo:

19 votantes	11 votantes
x_1	x_2
x_2	x_3
x_3	x_1

Tabla Ejemplo 3.2.3.

Fuente: Condorcet (1785).

Como x_1 vence a x_2 y x_3 (por 19 votos frente a 11), decimos que x_1 es *ganadora de Condorcet*. Sin embargo, las puntuaciones colectivas, según el contador de Borda clásico, son:

$$B(x_1) = 19 \cdot 2 = 38$$

$$B(x_2) = 11 \cdot 2 + 19 \cdot 1 = 41$$

$$B(x_3) = 11 \cdot 1 = 11$$

Así, la alternativa ganadora según la regla de Borda clásica es x_2. Ya que, como se ha mencionado anteriormente, los agentes que manifiestan sus preferencias mediante órdenes lineales originan la misma ordenación colectiva.

- **Ejemplo 3.2.4.** Supongamos 3 votantes cuyas que ordenan sus preferencias sobre las alternativas *1*, *2* y *3* del siguiente modo:

1 votante	1 votante	1 votante
x_1	x_2	x_3
x_2	x_3	x_1
x_3	x_1	x_2

Tabla Ejemplo 3.2.4.

Fuente: Condorcet (1785) modificado.

En este caso ninguna alternativa vence a otra al enfrentarlas entre sí, por tanto, no existe una alternativa ganadora. A pesar de que los votantes individualmente son transitivos, la relación de preferencia colectiva entre los tres candidatos no es *triple* *acíclica*[35], también denominada *paradoja del voto* o *existencia de mayorías cíclicas*. Paradoja que nunca tiene lugar si empleamos el método de Borda[36].

$$B(x_1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3$$

$$B(x_2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$B(x_3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

Como podemos observar las tres alternativas tienen la misma puntuación, así pues, el ganador, o ganadores en este caso, son las 3 alternativas a la vez (pero remarcamos el hecho de que existen ganadores).

- **Ejemplo 3.3.1.** Supongamos una comisión de 100 votantes, cuyas preferencias sobre 3 alternativas (*1*, *2* y *3*) vienen dadas del siguiente modo:

55 votantes	35 votantes	10 votantes
x_1	x_2	x_3
x_2	x_3	x_2
x_3	x_1	x_1

Tabla Ejemplo 3.3.1.

Fuente: Elaboración propia.

$$B(x_1) = 55 \cdot 2 = 110$$

$$B(x_2) = 35 \cdot 2 + 55 \cdot 1 = 135$$

$$B(x_3) = 10 \cdot 2 + 35 \cdot 1 = 55$$

Se puede observar inmediatamente que x_2 obtiene una mayor puntuación que x_1, a pesar de que esta última es la mejor alternativa para más de la mitad de los votantes. Es decir, x_2 tiene "en media" una posición más elevada en cuanto a preferencia de los agentes se refiere.

[35] Lo que conlleva a que no es transitiva, esto es, $\neg\, (\forall x, y, z \in X\ (xSy \wedge ySz) \Rightarrow xSz)) \Leftrightarrow \exists\, x, y, z \in X\ (xSy \wedge ySz \wedge \neg(xSz))$. Que en nuestro caso implica que dos de los tres votantes prefieren: $x_1 P^S x_2$, $x_2 P^S x_3$ y $x_3 P^S x_2$.

[36] Siempre genera una relación de preferencia colectiva negativamente transitiva (por tanto, transitiva) y acíclica.

♦ **Ejemplo 3.3.2.** Supongamos 3 agentes con las siguientes preferencias individuales:

1 votante	1 votante	1 votante
x_1	x_3	x_3
x_2	x_1	x_1
x_3	x_2	x_2

Tabla Ejemplo 3.3.2.

Fuente: Sen (1976).

$$B(x_1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$B(x_2) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$B(x_3) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

Se puede observar que, mediante la regla de Borda, tanto x_1 como x_3 reciben 4 puntos, luego $x_1 I^B x_3$.

Supongamos ahora que las preferencias de x_1 y x_3 son idénticas los tres agentes, pero el primero de ellos decide modificar su opinión de x_2 situándola ahora en último lugar, es decir, es peor que x_1 y x_3 $(x_1 P x_3 \wedge x_3 P x_2)$ Permutación que no influye en la puntuación que recibe x_1 pero si en la recibe x_3 (que se incrementa en una unidad), por lo que ahora $B(x_3) = 5$ y por tanto $x_3 P^B x_1$. Así pues, a pesar de que la posición relativa de x_1 y x_3 sigue siendo la misma para todos los agentes, la alternativa x_2 ha resultado ser relevante en la configuración final de la Elección Social, es decir, la alternativa *2* ha resultado ser relevante para la elección entre las alternativas *1* y *3*.

♦ **Ejemplo 3.3.3.** Consideremos dos grupos o dos coaliciones de votantes, con las siguientes preferencias sobre las diferentes alternativas, *1*, *2* y *3*:

Grupo A			*Grupo B*	
4 votantes	4 votantes	2 votantes	10 votantes	8 votantes
x_1	x_2	x_3	x_2	x_3
x_2	x_3	x_1	x_3	x_2
x_3	x_1	x_2	x_1	x_1

Tabla Ejemplo 3.3.3a.

Fuente: Elaboración propia.

Así, las puntuaciones Borda resultantes son:

$B_A(x_1) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 10$ $\qquad$ $B_B(x_1) = 0$

$B_A(x_2) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 12$ $\qquad$ $B_B(x_2) = 10 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 28$

$B_A(x_3) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 8$ $\qquad$ $B_B(x_3) = 8 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 18$

Podemos observar así que los vencedores según la regla de Borda tanto para el grupo A como para el grupo B es la alternativa x_2. A continuación, la coalición toma la decisión de formar un único grupo con el fin de reafirmar su apoyo sobre la alternativa x_2. Por tanto, el grupo AB presentara ahora la siguiente distribución de preferencias:

Grupo AB

4 votantes	14 votantes	2 votantes	8 votantes
x_1	x_2	x_3	x_3
x_2	x_3	x_1	x_2
x_3	x_1	x_2	x_1

Tabla Ejemplo 3.3.3b.

Fuente: Elaboración propia.

Ahora las puntuaciones Borda correspondientes son:

$$B_{AB}(x_1) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 10$$

$$B_{AB}(x_2) = 14 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 40$$

$$B_{AB}(x_3) = 10 \cdot 2 + 14 \cdot 1 = 34$$

Podemos observar por lo tanto, como sigue siendo vencedora la alternativa x_2 para el nuevo grupo formado por la unión de los dos grupos iniciales. Algo que ya anticipábamos en el planteamiento teórico-formal de dicha propiedad, que es la satisfacción de la propiedad de consistencia o agrupamiento de la regla de Borda.

♦ **Ejemplo 3.3.4.** Consideremos un conjunto de votantes donde las preferencias sobre las 4 alternativas (*1*, *2*, *3* y *4*) son:

2 votantes	2 votantes	1 votante *(votante estratégico)*
x_1	x_4	x_3
x_2	x_3	x_1
x_3	x_1	x_2
x_4	x_2	x_4

Tabla Ejemplo 3.3.4a.

Fuente: Elaboración propia.

Como venimos haciendo hasta ahora, calculamos las puntuaciones Borda y tenemos que:

$$B(x_1) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 10$$

$$B(x_2) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$$

$$B(x_3) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 9$$

$$B(x_4) = 3 \cdot 2 = 6$$

Por consiguiente, el vencedor por el método de Borda es la alternativa x_1, mientras que la alternativa x_3 es la segunda alternativa más votada. Ahora bien, si el último votante (*votante estratégico*) conociera el perfil de preferencias del resto de votantes, podría modificar sus propias preferencias con el fin de mejorar su posición en la clasificación global. La nueva distribución de preferencias ahora es:

1 votante	1 votante	1 votante *(votante estratégico)*
x_1	x_4	x_3
x_2	x_3	x_2
x_3	x_1	x_4
x_4	x_2	x_1

Tabla Ejemplo 3.3.4b.

Fuente: Elaboración propia.

En cambio, las puntuaciones Borda ahora son:

$$B(x_1) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$$

$$B(x_2) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6$$

$$B(x_3) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 9$$

$$B(x_4) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4$$

Podemos observar entonces como el vencedor por el método de Borda es la alternativa x_3. Siendo este el hecho más relevante, ya que cambia el vencedor con respecto al ejemplo anterior, llama también la atención la notoria perdida de puntuaciones Borda de la alternativa x_1 como consecuencia del falseamiento de las preferencias del *votante estratégico*.

- **Ejemplo 3.3.5.** Consideremos un conjunto de votantes donde cuyas preferencias sobre las 4 alternativas (*1*, *2*, *3* y *4*) son:

1 votante	1 votante	1 votante
x_1	x_4	x_3
x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_1
x_4	x_1	x_4

Tabla Ejemplo 3.3.5a.

Fuente: Elaboración propia.

Las puntuaciones Borda correspondientes a dicha ordenación de preferencias son:

$$B(x_1) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4$$

$$B(x_2) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$B(x_3) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$B(x_4) = 3 \cdot 1 = 3$$

El ganador por el método de Borda por tanto es la alternativa x_2, mientras que la alternativa x_3 obtiene la segunda posición más votada. No obstante, el último individuo, el cual tiene predilección por la alternativa x_3, en un afán ganador tratar de manipular la votación absteniéndose, con la esperanza de que esto beneficie a su alternativa preferida (x_3). Si este votante se abstiene, configurando el siguiente esquema de preferencias, tenemos que:

1 votante	1 votante
x_1	x_4
x_2	x_2
x_3	x_3
x_4	x_1

Tabla Ejemplo 3.3.5b.

Fuente: Elaboración propia.

Las puntuaciones Borda correspondientes a dicha ordenación de preferencias son:

$$B(x_1) = 3 \cdot 1 = 3$$

$$B(x_2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$B(x_3) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$B(x_4) = 3 \cdot 1 = 3$$

Queda claro que el ganador sigue siendo la alternativa x_2, produciéndose así un empate entre las alternativas x_1 y x_4. Mientras que la alternativa x_3 no solo no mejora su posición, o a lo sumo mantener su ordenación, si no que resulta castigada por tratar de beneficiarse absteniéndose. No puede darse la paradoja de la abstención si se emplea el método de Borda.

- **Ejemplo 3.3.6.** Consideremos un conjunto de votantes con las siguientes preferencias:

11 votantes	8 votantes	4 votantes
x_1	x_3	x_3
x_2	x_2	x_1
x_3	x_1	x_2

Tabla Ejemplo 3.3.6a.

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos por el método de Borda son:

$$B(x_1) = 11 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 26$$

$$B(x_2) = 19 \cdot 1 = 19$$

$$B(x_3) = 12 \cdot 2 = 24$$

En este caso la alternativa x_1 es la vencedora por el método de Borda. Ahora el último grupo de votantes (4 votantes) decide modificar sus preferencias uniéndose así a la coalición ganadora (11 votantes). Habrá entonces dos grupos de votantes a continuación, cuyas preferencias son:

15 votantes	8 votantes
x_1	x_3
x_2	x_2
x_3	x_1

Tabla Ejemplo 3.3.6b.

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos por el método de Borda son:

$$B(x_1) = 15 \cdot 2 = 30$$

$$B(x_2) = 23 \cdot 1 = 23$$

$$B(x_3) = 8 \cdot 2 = 16$$

Se puede observar, así pues, que la alternativa x_1 no solo sigue siendo la vencedora, sino que incluso ha incrementado, en términos de poder de decisión, su puntuación. Resultados previsibles y que ya anticipábamos en la descripción teórica.

- **Ejemplo 3.3.8.** Tomando el ejemplo expuesto por Felsenthal (2012):

4 votantes	4 votantes	5 votantes	2 votantes
x_1	x_2	x_3	x_3
x_2	x_3	x_1	x_2
x_3	x_1	x_2	x_1

Tabla Ejemplo 3.3.8a.

Fuente: Felsenthal (2012).

Con estas preferencias las puntuaciones Borda correspondientes son:

$$B(x_1) = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 13$$

$$B(x_2) = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 12$$

$$B(x_3) = 7 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 18$$

La alternativa ganadora correspondiente a dichas preferencias es x_3. Por el contra, si invertimos el orden de las preferencias, tenemos:

4 votantes	4 votantes	5 votantes	2 votantes
x_3	x_1	x_2	x_1
x_2	x_3	x_1	x_2
x_1	x_2	x_3	x_3

Tabla Ejemplo 3.3.8b.

Fuente: Felsenthal (2012).

Alterando se así las puntuaciones Borda y el resultado final:

$$B(x_1) = 6 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 17$$

$$B(x_2) = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 16$$

$$B(x_3) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 12$$

Como es lógico, de ahí el nombre de la propiedad, al invertirse las preferencias también lo hace la clasificación final las alternativas. Por consiguiente, la alternativa ganadora ahora es x_1.

- **Ejemplo 4.5.1c.** Un votante, partidario del candidato *A* (afiliado del partido *L*), presenta la siguiente lista de votos:

CANDIDATO	PARTIDO	PUNTOS	PREFERENCIA
A	***L***	***4***	***1º***
B	*M*	-	-
-	*N*	*1*	*4º*
D	***O***	***4***	***1º***
E	*P*	*3*	*2º*
F	-	*2*	*3º*

Tabla Ejemplo 4.5.1c

Fuente: Elaboración propia.

En este caso, la lista de votos se considera invalida o nula.

- **Ejemplo 4.5.1d.** Un votante, partidario del candidato *A* (afiliado del partido *L*), presenta la siguiente lista de votos:

CANDIDATO	PARTIDO	PUNTOS	PREFERENCIA
A	*L*	*5*	*1º*
B	*M*	*1*	*5º*
-	***N***	***2***	***4º***
D	***O***	***2***	***4º***
E	*P*	*4*	*2º*
F	-	*3*	*3º*

Tabla Ejemplo 4.5.1d (1)

Fuente: Elaboración propia.

En este caso, la lista de votos se considera valida parcialmente, como se describe a continuación:

CANDIDATO	PARTIDO	PUNTOS	PREFERENCIA
A	*L*	*3*	*1º*
B	*M*	-	-
-	*N*	-	-
D	*O*	-	-
E	*P*	*2*	*2º*
F	-	*1*	*3º*

Tabla Ejemplo 4.5.1d (2)

Fuente: Elaboración propia.

BIBLIOGRAFÍA

- Arrow, K. J. [1951] (1963): *Social Choice and Individual Values*. Wiley, Nueva York [Traducción al castellano de Eusebio Aparicio Auñón. Instituto de Estudios Fiscales, Madrid, 1974].
- Baharad, E. – Nitzan, S. (2003): "The Borda rule, Condorcet consistency and Condorcet stability", *Economic Theory* 22, pp. 685 – 688.
- Baker, Professor J. (2014): "Dublin City Council's Rosie Hackett Bridge: A landmark in Decision-Making".
- Balinski M. and Laraki, R (2007): "Election by Majority Judgement: Experimental evidence". *Ecole Polytechnique – Centre National de la Recherche Scientifique*. Cahier 28, 2007.
- Balinski M. and Laraki, R. (2010): *Majority Judgment: Measuring Ranking and Electing*. MIT Press.
- Black, D. (1948): "On the rationale of group decision-making", *Journal of Political Economy* 56, pp. 23 – 34.
- Black, D. (1958): *The Theory of Committees and Elections*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Borda, J.C. de (1784): "Mémoire sur les élections au scrutin", *Historie de l'Académie Royale des Sciences*, París. [Se reproduce, en inglés, en Grazia (1953) y en McLean – Urken (1995, pp. 81 – 89)].
- Brams, Steven and Fishburn, Peter (1978): "Approval Voting", *American Political Science Review* 72, pp. 831–847.
- Carroll, L. (1988): *Las Aventuras de Alicia (Alicia en el País de las Maravillas. A través del Espejo y lo que Alicia Encontró Allí).* Editorial Anaya, Madrid. [Traducción y notas de Ramón Buckley de las ediciones originales, 1865 y 1871].
- Condorcet, J.A.M.N.C., marqués de (1785): *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix*, L'Imprimerie Royale, París. [Se reproducen fragmentos escogidos, en inglés, en McLean – Sommerlad (1991) y en McLean – Urken (1995, pp. 91 – 112)].

- Dodgson, C.L. (1876): “A method of taking votes on more than two issues”, Edición privada, Oxford. [Se reproduce en Black (1958, pp. 224 – 234) y también en McLean – Urken (1995, pp. 288 – 297)].
- Dublin City Council (2013): “Monthly City Council Meeting 02/09/2013: Minutes”. Dublin City Council.
- Dummett, M. (1984): *Voting Procedures*. Clarendon Press, Oxford.
- Dummett, M. (1998): “The Borda count and agenda manipulation”, *Social Choice and Welfare* 15, pp. 289 – 296.
- EL PAIS (2017): “El sistema de elección de la dirección de Podemos en Vistalegre 2 benefició a Iglesias”. Disponible en https://tinyurl.com/comparacion-de-resultados [consulta: 15/04/2018].
- Emerson, P.J. (1998): *Beyond the Tyranny of the Majority. Voting Methodologies in Decision-Making and Electoral Systems*. The De Borda Institute, Belfast.
- Emerson, P. (2007): *Designing an All - Inclusive Democracy*. Springer Verlag. Part I, pp 39-60.
- Emerson, P. (2011): “The original Borda Count and partial voting”, *Social Choice and Welfare* 40.
- Emerson, P. (2012): *Defining Democracy: Voting Procedures in Decision-Making, Elections and Governance*. Springer, Heidelberg, p 41.
- Felsenthal, Dan S. and Machover, Moshé, eds. (2012): *Electoral systems: paradoxes, assumptions, and procedures.* Studies in choice and welfare. Springer, Berlín.
- Fishburn, P.C. – Gehrlein, W.V. (1976): “Borda’s rule, positional voting and Condorcet’s simple majority principle”, *Public Choice* 28, pp. 79 – 88.
- García Lapresta, J.L. – Martínez Panero, M. (2002): “Borda count versus approval voting: A fuzzy approach”, *Public Choice* 112, pp. 167 – 184.
- Gärdenfors, P. (1973): “Positionalist voting functions”, *Theory and Decision* 4, pp. 1 – 24.
- Gibbard, A. (1973): “Manipulation of Voting Schemes: A General Result”, *Econometrica*, Vol. 41, No. 4, pp. 587-601.
- Giner, S, Lamo de Espinosa, E. y Torres, C. (1998): *Diccionario de Sociología*. Alianza Editorial, Madrid.

- Grazia, A. de (1953): “Mathematical derivation of an election system”, *Isis* 44, pp. 42 – 51.
- Kangas, A., Laukkanen, S. and Kangas, J. (2006): “Policy and Economics. Social choice theory and its applications in sustainable forest management”, *Forest Policy and Economics* Vol. 9, No 1, pp. 77-92.
- Kangas, J. (1999): *Multiple Use of Forests and Other Natural Resources: Aspects of Theory and Application.* Chapter: *The Analytic Hierarchy Process (AHP): Standard Version, Forestry Application and Advances.* In: Helles, F., Holten-Andersen P. and L. Wichmann, L. (eds.). Forestry Sciences, Vol. 61. Springer, Dordrecht.
- Kangas, J. and Kangas, A. (2005): “Multiple criteria decision support in forest management - the approach, methods applied, and experiences gained”, *Forest Ecology and Management,* Vol. 207, pp. 133-143.
- Lara Ródenas, M.J. de (2001): *José Isidoro Morales, un Matemático en la Corte de Carlos IV. Con la Edición Facsímil de la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinión en las Elecciones y su Apéndice*. Universidad de Huelva, Huelva.
- Lara Ródenas, M.J. de (2017): *José Isidoro Morales. De Andalucía a París: la vida del padre de la libertad de imprenta*. Centro de Estudios Andaluces.
- Marchant, T. (1996): “Valued relations aggregation with the Borda method”, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 5, pp. 127 – 132.
- Marchant, T. (2000): “Does the Borda rule provide more than a ranking?”, *Social Choice and Welfare* 17, pp. 381 – 391.
- Martínez Panero, M. – García Lapresta, J.L. (1999): “El matemático ilustrado José Isidoro Morales y sus aportaciones a la Teoría de la Elección Social”, *Llull* 22, pp. 165–191.
- Martínez Panero, M. – García Lapresta, J.L. (2003): *José Isidoro Morales, Precursor Ilustrado de la Teoría de la Elección Social: Edición Facsímil de la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones (1797) y Apéndice (1805).* Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial. Universidad de Valladolid, Valladolid. Prólogo de Salvador Barberá.
- Martínez Panero, M. (2004): *Generalizaciones y Extensiones de la Regla de Votación de Borda,* Capítulo 1.

- McLean, I. (1995): "Independence of irrelevant alternatives before Arrow", *Mathematical Social Sciences* 30, pp. 107 – 126.
- McLean, I. – Sommerlad, F. (eds.) (1991): *The Political Theory of Condorcet, II*. University of Oxford Social Studies Faculty Centre. Working Paper 1, Oxford.
- McLean, I. – Urken, A.B. (eds.) (1995): *Classics of Social Choice*. The University of Michigan Press, Ann Arbor.
- Morales, J.I. (1797): Memoria *Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*. Imprenta Real, Madrid.
- Morales, J.I. (1805): *Apéndice á la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones*. Imprenta de Sancha, Madrid.
- Niemi, R.G. – Riker, W.H. (1991): "La elección de los sistemas de votación", en Colomer, J.M. (ed.): *Lecturas de Economía Política Positiva*, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. [Traducción del artículo original en inglés, 1976].
- Nurmi, H. (1987): *Comparing Voting Systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Partido PIRATA (2015): "X Asamblea General". Disponible en https://tinyurl.com/resultado-x-asamblea-general [consultado: 18/04/2018].
- Partido PIRATA (2016): "X Asamblea General". Disponible en https://tinyurl.com/resultado-xi-asamblea-general [consultado: 18/04/2018].
- Partido PIRATA (2017a): "List of Pirate Parties". Disponible en https://tinyurl.com/list-of-pirate-parties o https://tinyurl.com/lista-de-partidos-pirata [consulta: 17/04/2018].
- Partido PIRATA (2017b): "X Asamblea General". Disponible en https://tinyurl.com/resultado-xii-asamblea-general [consultado: 17/04/2018].
- Politeia. El Enfoque Inteligente (2016): "Podemos: desmontando el Desborda de Echenique". Disponible en https://tinyurl.com/criticas-al-metodo-desborda [consulta: 15/04/2018].
- Reglamento de la Asamblea Nacional del Partido PIRATA (2015): Título I: Naturaleza de la Asamblea. Artículo 5: Método de votación y escrutinio. Disponible en https://tinyurl.com/reglamento-partido-pirata [consulta: 23/06/2018].
- Saari, D.G. (1995): *Basic Geometry of Voting*. Springer – Verlag, Berlín.

- Saari, D.G. (1990): “Susceptibility to manipulation”, *Public Choice* 64, pp. 21 – 41.
- Saari, D.G. (1994): *Geometry of Voting*. Studies in Economic Theory 3, Springer-Verlag, Berlín.
- Saari, D.G. (2000): “Mathematical structure of voting paradoxes. II. Positional voting”, *Economic Theory* 15, pp. 55 – 102.
- Satterthwaite, M. (1975): “Strategy-proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 2, No. 2, pp. 187-217.
- Sen, A.K. (1976): “Poverty: An ordinal approach to measurement”, *Econometrica* 44, pp. 219 – 223.
- The Augsburg Web Edition of Llull's Electoral Writings (2016): Disponible en https://tinyurl.com/la-figura-de-llul [consulta: 10/06/2018].
- Van Newenhizen, J. (1992): “The Borda Method is most likely to respect the Condorcet principle”, *Economic Theory* 2, pp. 69 – 83.
- Vistalegre 2 – Podemos. Reglamentos y protocolos (2016). Disponible en https://tinyurl.com/desborda [consulta: 23/06/2018].
- Vistalegre 2 – Podemos. Resultados de las votaciones (2017a). Disponible en https://tinyurl.com/puntos-clasificacion [consulta: 15/04/2018].
- Vistalegre 2 – Podemos. Resultados de las votaciones (2017b): Disponible en https://tinyurl.com/resultados-vistalegre-ii [consulta: 15/04/2018].
- Wikipedia Partidos PIRATAS (2018): “Anexo de Partidos PIRATAS”. Disponible en https://tinyurl.com/anexo-partidos-pirata [consulta 17/04/2018].
- Yavuz, F. and Baycan, T. (2013): “Use of Swot and Analytic Hierarchy Process Integration as a Participatory Decision Making Tool in Watershed Management”, *Procedia Technology*, Vol. 8, pp. 134-143.
- Young, H.P. (1974): “An axiomatization of Borda’s rule”, *Journal of Economic Theory* 9, pp. 43 – 52.
- Zahid, M. A. y Swart, H. de (2015): “The Borda Majority Count”, *Information Sciences* 299, pp. 429-440.
- Zarghami, M. and F. Szidarovszky, F. (2009): “Stochastic-fuzzy multi criteria decision making for robust water resources management”, *Stoch Environ Res Risk Assess* 23, pp. 329-339.

- Zarghami, M. and F. Szidarovszky, F. (2011): *Multicriteria Analysis: Applications to Water and Environment Management*. Springer – Verlag, Berlín.