Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo fin de Máster

Máster en Investigación en Matemáticas

Transformadas de Laplace y Borel generalizadas para funciones asociadas a un orden aproximado

Autor:
J.Javier JIMÉNEZ GARRIDO

Tutor:
Javier SANZ GIL

Curso 2012/2013

D. JAVIER SANZ GIL, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que el presente trabajo, "Transformadas de Laplace y Borel generalizadas para funciones asociadas a un orden aproximado", ha sido realizado bajo su dirección en el Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, por D. J. Javier Jiménez Garrido, y constituye su Trabajo Fin de Máster para optar al título de Máster en Investigación en Matemáticas.

Que le consta que el trabajo es original e inédito, y que autoriza su presentación.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a quince de julio de dos mil trece.

Fdo.: Javier Sanz Gil

Índice

Introducción **6**

Notación **12**

1. Órdenes aproximados y funciones enteras **15**

1.1. Preliminares: orden y tipo de una función entera 15

1.2. Órdenes aproximados, propiedades y orden aproximado de una función entera 20

1.3. Construcción de funciones enteras con un orden aproximado dado 34

2. Diagrama indicador **55**

2.1. Semicontinuidad inferior. Funcionales de Minkowski 55

2.2. Funciones trigonométricamente ρ-convexas 60

2.3. Conjuntos ρ-convexos planos. Diagrama indicador 69

3. Órdenes aproximados analíticos **82**

3.1. Orden aproximado analítico de una función entera 82

3.2. Clase de funciones asociada a un orden analítico dado 89

4. Función entera asociada a un orden analítico **109**

4.1. Fórmula de Hankel para la función $\Delta(\lambda)$ 109

4.2. Orden y tipo de la función entera $E_\rho(z, V)$ 115

4.3. Representación integral de la función $E_\rho(z, V)$ 120

4.4. Propiedades asintóticas de $E_\rho(z, V)$ 121

4.5. La función indicatriz de $E_\rho(z, V)$ 127

5. Transformadas de Borel y Laplace generalizadas **131**

5.1. Transformada de Borel generalizada y representación integral 131

5.2. Teorema de Polya-Martineau-Ehrenpreis generalizado 134

A. Apéndice **138**

Introducción

Esta memoria tiene como objetivo profundizar en el estudio de los resultados y propiedades relativos al crecimiento de las funciones enteras, para culminar proporcionando generalizaciones de los clásicos teoremas de Polya y de Martineau-Ehrenpreis para las transformadas de Borel-Laplace generalizadas en clases de funciones con crecimiento gobernado por un orden aproximado, concepto que extiende el de orden exponencial habitual. Aunque no se presentarán resultados originales de investigación, se ha realizado un análisis detallado de los resultados estudiados y se han aportado las demostraciones correspondientes, en muchos casos únicamente indicadas en los artículos con los que se ha trabajado. Más aún, se han incluido, junto con su prueba, todos los resultados utilizados que no forman parte del currículo de los estudios actuales de Grado en Matemáticas y del Máster en Investigación en Matemáticas de la Universidad de Valladolid. Se espera que este trabajo haya proporcionado parte de las herramientas necesarias para empezar a desarrollar un proyecto de investigación que, presentado más adelante en esta introducción, previsiblemente formará parte sustancial de la formación doctoral consecuente.

Dentro del temario de la asignatura “Ampliación de Teoría de Funciones”, cursada en el Máster de Investigación en Matemáticas, se ha realizado durante el presente curso académico el estudio de los resultados básicos en la teoría de crecimiento de las funciones enteras, que se apoyan en las nociones que lo caracterizan como son los conceptos de orden, tipo y función indicatriz. Así, se han presentado el teorema de factorización de Hadamard y las relaciones elementales entre el orden, el género y el exponente de convergencia de la sucesión de ceros de una función entera, y se ha estudiado el teorema de Phragmén-Lindelöf y algunas de sus consecuencias directas. Este es el bagaje previo de que se disponía para el inicio del estudio que nos ocupa. Muchos textos clásicos de variable compleja cubren perfectamente estos contenidos, como pueden ser los libros de A. I. Markushevich [23, Cap. 7] o de B. Y. Levin [18, Cap. 1].

Un papel prominente en estos desarrollos y, en particular, en la teoría de la transformada de Laplace, lo juegan las funciones enteras de tipo exponencial, que son aquellas funciones f para las cuales existe una constante $\alpha > 0$ tal que se verifica

$$|f(z)| < e^{\alpha|z|},$$

para todo $|z| > R$ con $R > 0$ suficientemente grande.

Vamos a recordar varias definiciones elementales necesarias para el enunciado del Teorema I, con el que culminará todo la tarea realizada. La *transformada de Borel* $F(w)$ de una función entera $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k/k!$ de tipo exponencial se define en un dominio adecuado mediante

$$F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{w^{k+1}}.$$

Conviene señalar antes de seguir que no hay consenso en la literatura en cuanto a la denominación de las transformadas utilizadas. Así, la que acabamos de denominar transformada de Borel, siguiendo a L. S. Maergoiz [19], es llamada de Laplace en otros textos, por ejemplo, el de P. Henrici [12], mientras que en otros se denomina transformada de Laplace de f a la función que, con la notación previa, viene dada por

$$G(w) = \frac{F(1/w)}{w} = \sum_{n=0}^{\infty} a_k w^k$$

(véase, por ejemplo, el libro de W. Balser [2]).

Recordamos también que una aplicación $\eta : H(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ se dice que es un funcional analítico si es lineal y continua, donde $H(\mathbb{C})$ es el espacio de las funciones enteras en el que consideramos la topología de la convergencia uniforme en los compactos. En esta situación, diremos que un compacto $K \subseteq \mathbb{C}$ *determina* η si para todo entorno Ω de K existe una constante C_Ω, tal que

$$|\eta(\varphi)| \leq C_\Omega \sup\{|\varphi(z)| : z \in \Omega\}, \quad \varphi \in H(\mathbb{C}).$$

Dentro del conjunto $\mathfrak{L}(\eta)$ de todos los compactos que determinan η podemos considerar subclases $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{L}(\eta)$ (por ejemplo, la de los conjuntos convexos). Un elemento $K \in \mathfrak{C}$ decimos que es un *soporte de* η si es minimal en $\mathfrak{C}$ para la inclusión. Por último, para todo funcional analítico η podemos considerar una función compleja $L_\eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que denominaremos la *transformada de Laplace del funcional*, dada por la expresión

$$L_\eta(z) = \eta(e^{zw}),$$

y que resulta ser una función entera de tipo exponencial. G. Polya introduce la noción de *diagrama indicador de* f, como el conjunto compacto convexo

$$I_h := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) \leq h_c(\theta),\, \theta \in \mathbb{R}\},$$

donde

$$h_c(\theta) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{\theta})|}{r}, \qquad \theta \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

es la *función indicatriz* de f. Con la ayuda de este concepto se prueba el siguiente teorema, denominado de Polya-Ehrenpreis-Martineau, que relaciona la transformada de Borel con la función indicatriz y afirma que la transformada de Laplace establece un isomorfismo.

Teorema I. Sea f una función entera de tipo exponencial. Sea $h = h_c$ su función indicatriz, y sea K el conjunto compacto convexo más pequeño al complementario del cual se prolonga analíticamente la transformada de Borel F de f. Entonces:

(1) K es el simétrico de I_h con respecto al eje real, es decir,

$$K = X_h := \{w \in \mathbb{C} : \overline{w} \in I_h\}.$$

(2) Existe un funcional analítico η cuya transformada de Laplace coincide con $f(z)$, además, X_h es el soporte convexo de η.

De forma natural surge el intento de generalizar este resultado para funciones enteras con un crecimiento menos específico. Entre los años 30 y 60 del siglo veinte, el trabajo de diversos autores soviéticos, como M. F. Subbotin, I. F. Lokshin, A. E. Avetisyan y M. M. Dzhrbashyan (ver [9]) llevó a un resultado análogo al Teorema I para la clase de funciones enteras de orden $\rho > 0$, tipo normal y función indicatriz no negativa. En esta memoria se desgrana el trabajo de L. S. Maergoiz [19] quien mediante los órdenes aproximados, un concepto que generaliza la noción de orden de una función entera, consigue demostrar un refinamiento de este teorema para funciones enteras de orden $\rho > 0$, función indicatriz no negativa y tipo arbitrario (es decir, incluyendo los casos en que el tipo es maximal o minimal). Esto es posible gracias a que a toda función entera de orden finito se le puede asignar un orden aproximado de modo que su tipo asociado sea normal.

Describimos a continuación con más detalle el contenido de esta memoria. La Sección 1.1 del primer capítulo, de carácter preliminar, está dedicada a recordar los conceptos básicos de orden y tipo de una función entera, así como algunos resultados clásicos sobre productos de factores elementales de Weierstrass. En la Sección 1.2 de este mismo capítulo introduciremos el concepto de orden aproximado, estudiaremos las propiedades inmediatas que se deducen de este concepto, y probaremos el Teorema 1.25, que afirma que toda función entera admite un orden aproximado para el cuál el tipo asociado es normal. La demostración de este resultado se basa en la recogida en el libro de A. A. Goldberg y I. V. Ostrovskii [11, Cap. 2]. En la última sección de este capítulo, se construirán funciones enteras con un orden aproximado dado, como se indica en el Teorema 1.44 para el caso en que el orden es no entero, y en el Teorema 1.47 para el caso en que el orden es entero. Cabe resaltar que la necesidad de esta distinción entre orden entero (siempre el caso más complicado) o no entero (el más sencillo) es una constante en buena parte de los resultados de la teoría general de crecimiento de las funciones enteras.

El segundo capítulo de la memoria está dedicado a generalizar el concepto de diagrama indicador para funciones enteras de orden $\rho > 0$ siguiendo el desarrollo realizado en el libro de L. S. Maergoiz [20]. Para ello, en la

Sección 2.1 comenzaremos por recordar hechos elementales sobre el funcional de Minkowski de conjuntos estrellados, lo que nos conducirá a probar un resultado de dualidad entre los cerrados estrellados y las funciones semicontinuas inferiormente y homogéneas de grado 1 (Teorema 2.11). En la siguiente sección, estableceremos la noción de función trigonométricamente ρ-convexa, con el objetivo de probar el Teorema 2.33 en el que veremos que la función indicatriz generalizada h_f, asociada a una función entera f y a un orden aproximado correspondiente, es una función de esta clase. Finalmente, en la Sección 2.3 definiremos los conjuntos ρ-convexos, analizaremos sus particularidades y consideraremos la función Φ_ρ (ver (2.12)) que nos permitirá describir de forma sencilla el soporte de estos conjuntos. El Teorema 2.53 da un resultado de dualidad para conjuntos cerrados ρ-convexos análogo al resultado dado en la primera sección de este capítulo. Para terminar, definiremos el concepto de diagrama indicador generalizado y apoyándonos en estos resultados de dualidad veremos la unicidad del mismo en el Teorema 2.55. Este diagrama indicador generalizado va a jugar el mismo papel que el conjunto I_h en la generalización del Teorema I que describiremos en el capítulo quinto.

A partir del tercer capítulo expondremos los resultados descritos en el trabajo de L. S. Maergoiz [19]. Para comenzar, ampliaremos de nuevo el concepto de orden, introduciendo la noción de orden analítico aproximado, que es una función analítica en un sector de la superficie de Riemann del logaritmo bisecado por el semieje real positivo, y que se comporta sobre dicho semieje como un orden aproximado en el sentido previamente definido. En primer lugar estudiaremos las propiedades de estos órdenes en el Teorema 3.6 que nos va a servir para, dado un orden aproximado $\rho(r)$, definir la clase de funciones analíticas $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ en la Sección 3.2, cuya introducción será crucial en la construcción de los núcleos integrales que aparecerán en las transformadas de Borel y Laplace generalizadas. Cerraremos esta misma sección estudiando las características de esta clase de funciones, entre las que cabe destacar la existencia de una función inversa dentro de una clase del mismo tipo para cada elemento de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ (ver el Teorema 3.15).

Llegados a este punto, en el capítulo cuarto continuamos con la generalización mediante la construcción de una función de momentos Δ para cada función $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, en concreto, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ se define la función

$$\Delta(\lambda) = \Delta_\rho(\lambda, V) = \rho \int_0^\infty t^{\lambda-1} \exp(-V(t))dt.$$

que va a jugar el papel que la función *Gamma de Euler* representaba en el caso clásico. En primer lugar, se probará un análogo a la fórmula de Hankel para esta función Δ, en el Teorema 4.3. A partir de esta función Δ vamos a definir una función E_ρ, similar a la función de Mittag-Leffler y que aparecerá en el núcleo de las transformadas integrales correspondientes: dados $\rho(r)$ un orden aproximado y $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, para todo $z \in \mathbb{C}$ denotamos por

$$E_\rho(z, V) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_\rho(k+1, V)}.$$

Concluiremos describiendo algunas de las propiedades asintóticas y estudiando el comportamiento de la función indicatriz de esta función.

El último capítulo tiene como objetivo primordial demostrar el Teorema 5.12, que es la versión generalizada del Teorema I. Para lograrlo, previamente definiremos adecuadamente las transformadas generalizadas de Borel y Laplace y probaremos varios resultados sobre su representación integral y el dominio de definición de las mismas.

Hasta aquí extendemos la descripción de los resultados presentados en la memoria. Como se indicó al principio de esta introducción, procedemos a continuación a comentar la forma en que estos resultados pueden ser de utilidad para estudios posteriores.

Dado un sistema meromorfo, lineal o no, de ecuaciones diferenciales ordinarias en un punto singular irregular del plano complejo, es natural la búsqueda de soluciones en forma de serie de potencias. Cuando dicha solución existe, no es, en general, convergente, pero sí tiene un significado asintótico, en el sentido de que existe una solución analítica en un sector con vértice en el punto singular y cuyo desarrollo asintótico es precisamente la serie de potencias formal. En los años 80 y 90 del siglo pasado se ha diseñado por varios autores (J. P. Ramis, Y. Sibuya, B. L. J. Braaksma, W. Balser, entre otros; el libro [2] de este último autor es una referencia fundamental) un método de sumación, llamado multisumabilidad, que bajo condiciones adecuadas permite la reconstrucción de la solución analítica a partir de la formal. Esta técnica se basa en el carácter Gevrey de la solución formal (es decir, sus coeficientes tienen un crecimiento gobernado por las potencias $n!^k$ para cierto $k > 0$) y en la teoría asintótica homónima, que incluye resultados como el teorema de Borel-Ritt-Gevrey y el lema de Watson, que establecen la sobreyectividad, respectivamente la inyectividad, de la aplicacíón que envía cada función sobre su serie de desarrollo asintótico en sectores estrechos, resp. amplios, del plano complejo. En el desarrollo de esta teoría asintótica juegan un papel primordial las transformadas de Laplace y Borel de orden $k > 0$, tanto formales como analíticas, que pueden ser definidas por ramificación a partir de las transformadas clásicas para funciones de tipo exponencial, o bien, como prueba W. Balser en su libro citado más arriba, mediante el uso de núcleos integrales específicos definidos a partir de una función plana (esto es, con desarrollo nulo) en un sector adecuado. Esta técnica, que el autor denomina de métodos de sumabilidad de momentos, ya ha encontrado aplicación al estudio de ciertas ecuaciones en derivadas parciales, entre ellas las llamadas de momentos (ver los trabajos de W. Balser y Y. Yoshino [3], de S. Malek [21, 22] y de S. Michalik [25, 26, 27, 28]).

Sin embargo, existen fenómenos físicos cuyas magnitudes no se limitan o asocian a un crecimiento Gevrey concreto, sino que pueden permanecer entre dos órdenes de esta magnitud (ver por ejemplo el caso de ecuaciones en diferencias tratado por G. Immink [14]), o superar cualquiera de estos órdenes (como en el caso de las ecuaciones en q-diferencias, con soluciones de crecimiento q-exponencial; ver Di Vizio, Ramis, Sauloy y Zhang [6]; Di Vizio y Zhang [7]). Procede entonces considerar clases de funciones holomorfas más generales que las Gevrey, denominadas clases ultraholomorfas, y las correspondientes clases de series formales, de crecimiento (para sus derivadas o para sus coeficientes, respectivamente) controlado en términos de una sucesión numérica denominada fuertemente regular, de las que las potencias del factorial no son más que un ejemplo, si bien el más significativo. Los resultados paralelos al teorema de Borel-Ritt-Gevrey y lema de Watson en este tipo de clases han sido obtenidos recientemente por J. Schmets y M. Valdivia [33], V. Thilliez [34] y A. Lastra y J. Sanz [16, 17]. Pues bien, siguiendo las ideas de W. Balser y sus métodos de momentos, es posible extender las técnicas de sumabilidad antes descritas para el caso Gevrey a estas clases más generales, y a partir de ellas esperamos desarrollar nuevas herramientas analíticas que permitan estudiar las propiedades asintóticas de soluciones formales en estas clases para diversos tipos de ecuaciones algebraicas, en diferencias o diferenciales, en situaciones similares a las tratadas por V. Thilliez [35] o que generalicen los recientes trabajos mencionados en el párrafo previo.

Agradecimientos. Me gustaría dar las gracias a mi tutor, el profesor Dr. D. Javier Sanz Gil, por haber aceptado dirigir este trabajo, por su infinita paciencia y por su apoyo persistente. También por su corrección exhaustiva que ha sido de gran valía.

Notación

$\mathbb{N}$	Números naturales $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Números reales
$[a]$	Parte entera de un número $a \in \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	Números complejos
$\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$	Partes real e imaginaria de un complejo $z \in \mathbb{C}$
$\mathrm{int}\, A$	Interior de $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\overline{A}$	Adherencia de $A \subseteq \mathbb{R}^n$
∂A	Frontera de $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\dim_{AF} M$	Dimensión del subespacio afín que genera $M \subseteq \mathbb{R}^n$, página 56
$\mathrm{int}_{AF}\, M$	Interior de $M \subseteq \mathbb{R}^n$ en el subespacio afín que genera, página 56
D	Disco unidad cerrado de $\mathbb{C}$ o de $\mathbb{R}^n$ $D = \{u : \|u\| \leq 1\}$
$\mathcal{R}$	Superficie de Riemann del logaritmo
$\mathcal{R}(\alpha, \beta)$	Sector abierto de $\mathcal{R}$ con $\alpha < \arg Z < \beta$, página 61
$\overline{\mathcal{R}}(\alpha, \beta)$	Sector cerrado de $\mathcal{R}$ con $\alpha \leq \arg Z \leq \beta$, página 66
ρ	Orden de una función entera, página 15
$\rho(r)$	Orden aproximado, página 20
$\rho^*(t)$	Orden conjugado de un orden aproximado $\rho(r)$, página 30
$\rho_m(r)$	$\rho_m(r) := m\rho(r^m) \to m\rho$ donde $\rho(r)$ es un orden aproximado y $m > 1$ entero, página 99
σ_c	Tipo de una función entera, página 15
σ_f	Tipo de f asociado a un orden aproximado $\rho(r)$, página 21
$h_c(\theta)$	Función indicatriz de una función entera, página 19
$h_f(\theta)$	Función indicatriz generalizada de f asociada a un orden aproximado $\rho(r)$, página 21

A_ρ	Clase de funciones $f : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ semicontinuas inferiormente y ρ-sublineales, página 79
$\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$	Clase de funciones analíticas en $L(\gamma)$ asociada a $\rho(r)$, página 89
$\Delta_\rho(\lambda, V)$	Generalización de la función Γ de Euler para órdenes aproximados, página 109
$\mathfrak{D}_\theta$	Sector cerrado de $\mathbb{C}$ de bisectriz $-\theta$ y amplitud $2\gamma_\rho$, página 70
$E_p(z), E(z; p)$	Factores elementales de Weierstrass $p \in \mathbb{N}_0$, página 19
$E_\rho(z, V, \mu)$	Función de Mittag-Leffler generalizada, página 115
$\mathrm{epi}(V)$	Epigrafo de $V : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$, página 55
$\Phi_\rho(z)$	Función auxiliar para caracterizar el ρ-soporte, página 73
G_φ	Región de $\mathbb{C}$ dada por $\{\zeta \in L(\alpha) : \mathrm{Re}[(\zeta^\rho - 1)e^{i\varphi}] > 0\}$ donde $0 < \alpha < \pi$, página 99
$\Gamma(\lambda)$	Función Gamma de Euler
$\Gamma_\varphi(a)$	Semirrecta $\{a + te^{i\varphi} : t \geq 0\}$ donde $a > 0$, página 99
$\gamma(R, \varphi)$	Contorno de $\mathbb{C}$, página 109
γ_ρ	Constante $\gamma_\rho = \text{mín}\{\pi, \pi/(2\rho)\}$ donde $\rho > 0$
$H(\mathbb{C})$	Espacio de las funciones enteras
$H_0(\infty)$	Clase de funciones holomorfas en un entorno de ∞ que se anulan en ∞, página 131
$\int_0^{\infty(\arg u = \theta)}$	Integral de 0 a infinito a lo largo de la semirrecta $\arg u = \theta$
$L(\gamma)$	Sector abierto de $\mathcal{R}$ de bisectriz $\theta = 0$ y amplitud 2γ, página 82
$L(\gamma, R)$	Subconjunto de $L(\gamma)$ de los elementos (r, θ) con $r > R$, página 82
L_φ	Contorno de $\mathbb{C}$, página 110
$\lambda(\{a_k\}_{k=1}^\infty)$	Exponente de convergencia de la sucesión $\{a_k\}_{k=1}^\infty$, página 34
$\liminf\limits_{u \to x} V(u)$	Límite inferior de $V : S \subseteq \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ en x, página 55
$M_f(r)$	$M_f(r) = \text{máx}_{\lvert z \rvert = r} \lvert f(z) \rvert$, página 15
$\mathfrak{M}_\rho(V)$	Clase de funciones enteras cuyo crecimiento está mayorado por $\ln V(t)/\ln t$, página 131

$\mu_f(r)$	$\mu_f(r) = \max_{n\geq 0} \lvert c_n\rvert r^n$ donde $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ es una función entera, página 16
$N(\zeta), N_\varphi(\zeta)$	Funciones holomorfas en G_φ y $L(\alpha)\backslash\{1\}$, página 99
$n(r)$	Número de miembros de una sucesión, de números reales positivos con límite infinito, menores que r, página 34
$P(H_\rho, X)$	Conjunto de todas las funciones H_ρ-convexas, página 78
P_ρ^+	Clase de funciones finitas, 2π-periódicas, no negativas y trigonométricamente ρ-convexas, página 132
$P_\rho(V, h)$	Clase de funciones enteras cuyo crecimiento está gobernado por $h \in P_\rho^+$, página 132
Π_θ	Sector abierto de $\mathcal{R}$ de bisectriz θ y amplitud $2\gamma_\rho$, página 89
$\pi(r,\theta)$	Proyección $\pi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ con $\pi(r,\theta) = re^{i\theta}$
$p_M(x)$	Funcional de Minkowski de $M \subseteq \mathbb{R}^n$, página 57
$p_M(z,\rho)$	ρ-funcional de Minkowski de $M \subseteq \mathbb{C}$, página 71
$\sup U$	Denota la función $f(z) = \sup\{g(z) : g \in U\}$ para un $U \subseteq \{f : \mathbb{C} \to [0,\infty]\}$, página 78
$T_\alpha(V)$	Conjunto de nivel $T_\alpha(V) = \{\overline{u} \in \mathbb{R}^n : V(\overline{u}) \leq \alpha\}$ de una función $V : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$, página 55
$\tilde{V}(W)$	Si $V : L(\gamma, R) \subseteq \mathcal{R} \to \mathbb{C}$, $\tilde{V}(W) = (\lvert V(W)\rvert, \arg V(W))$, página 91
$Z_1 \otimes Z_2$	El único $Z \in \mathcal{R}$ que verifica $Z^\rho = Z_1^\rho + Z_2^\rho$ y $\arg Z_1 = \theta_1 \leq \arg Z \leq \theta_2 = \arg Z_2$ donde $0 \leq \rho(\theta_2 - \theta_1) < \pi$, página 61

1. Órdenes aproximados y funciones enteras

1.1. Preliminares: orden y tipo de una función entera

En esta primera sección vamos a recordar brevemente los conceptos clásicos de orden y tipo de una función entera. Estos dos conceptos sirven para comparar el crecimiento de las funciones enteras con funciones de la forma $e^{Kr^{\mu}}$ donde $|z| = r$. Podemos encontrar un estudio detallado de los resultados asociados a estos conceptos en el libro de A. I. Markushevich [23, Cap. 7, p.254-281]. También incluimos en esta sección algunos resultados de la teoría de productos infinitos de funciones enteras que usaremos más adelante, especialmente en la Sección 1.3, para la construcción de funciones enteras con un orden aproximado dado. En el libro de P. Henrici [12, Cap. 8, p.1-61] podemos encontrar el desarrollo específico de esta teoría de productos infinitos.

Definición 1.1. Sea f una función entera, se define $M_f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ por

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Observación 1.2. Como f es holomorfa, en particular es continua, y por tanto, $M_f(r)$ es una función continua en $(0, \infty)$. Además en virtud del *Principio del Módulo Máximo*, si f no es constante, M_f es una función estrictamente creciente y, por el *Teorema de Liouville*, $M_f(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$.

Definición 1.3. Sea f una función entera. Si existe un número $\mu > 0$, de modo que existe $R_\mu > 0$ tal que

$$M_f(r) < e^{r^{\mu}}, \qquad r > R_\mu, \tag{1.1}$$

se dice que f es de *orden finito*. En este caso, definimos el *orden de* f como

$$\rho := \inf\{\mu > 0 : \exists R_\mu > 0 \text{ de modo que se verifica (1.1) }\} \geq 0.$$

Si f no es de orden finito, diremos que $\rho := \infty$.

Definición 1.4. Sea f una función entera de orden finito ρ, si existe $K > 0$ de modo que existe $R_K > 0$ tal que

$$M_f(r) < e^{Kr^{\rho}}, \qquad r > R_K, \tag{1.2}$$

se dice que f es de *tipo finito*. En este caso, definimos el *tipo de* f como

$$\sigma_c := \inf\{K > 0 : \exists R_K > 0 \text{ de modo que se verifica (1.2) }\} \geq 0.$$

Si f no es de tipo finito, diremos que $\sigma_c := \infty$. Además si $\sigma_c = 0$ diremos que f es de *tipo minimal*, si $\sigma_c = \infty$ diremos que f es de *tipo maximal* y si $0 < \sigma_c < \infty$ diremos que f es de *tipo normal*.

Observación 1.5. Es inmediato comprobar que si f es polinómica es de orden $\rho = 0$. Más aún, en virtud de las desigualdades de Cauchy, sólo para las funciones polinómicas se tiene que $M_f(r)$ es de crecimiento potencial. De otro modo, si f es transcendente, $M_f(r)$ crece más rápido que cualquier potencia r^α, con $\alpha > 0$, cuando $r \to \infty$.

Propiedad 1.6. (Ver [23, Cap. 7]) Sea f una función entera, entonces

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}. \tag{1.3}$$

Si además $\rho < \infty$ se tiene que

$$\sigma_c = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}. \tag{1.4}$$

Definición 1.7. Sea $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ una función entera, definimos la función $\mu_f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ por

$$\mu_f(r) := \max_{n\geq 0} |c_n| r^n, \qquad r > 0. \tag{1.5}$$

Observación 1.8. Como $|c_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$, este máximo existe para todo $r > 0$.

Observación 1.9. El siguiente resultado da una definición equivalente del concepto de tipo de una función entera f de orden finito $\rho > 0$. Su demostración, aunque clásica, se incluye principalmente por dos motivos. En primer lugar, esboza el tipo de técnicas que aplicaremos más adelante al considerar conceptos más generales de orden aproximado y del correspondiente tipo. En segundo lugar, en la prueba de este teorema obtendremos algunos resultados intermedios que usaremos más adelante en la demostración del Teorema 1.31, que generaliza este resultado.

Teorema 1.10. Sea $f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$ una función entera de orden finito $\rho > 0$ y de tipo $\sigma_c \geq 0$, entonces

$$(\sigma_c e \rho)^{1/\rho} = \limsup_{n\to\infty} (n^{1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|}).$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\sigma_c < \infty$ y sea $\sigma > \sigma_c$. Por las desigualdades de Cauchy para los coeficientes del desarrollo en serie de f tenemos que para todo $r > 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$|c_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n}.$$

Por la definición de tipo, se tiene que para todo $r > R_\sigma$ suficientemente grande

$$|c_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n} < \frac{e^{\sigma r^\rho}}{r^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Tomando logaritmos,

$$\ln |c_n| < \sigma r^\rho - n \ln r, \qquad r > R_\sigma, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Si para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $r_n := (n/\sigma\rho)^{1/\rho}$, vemos que existe $n_\sigma \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_\sigma$ se tiene que $r_n > R_\sigma$, y por tanto

$$\ln |c_n| < \frac{n}{\rho} - \frac{n}{\rho} \ln \frac{n}{\sigma\rho} = \frac{n}{\rho}(1 + \ln(\sigma\rho)) - \frac{n}{\rho} \ln n$$

para todo $n \geq n_\sigma$. De forma equivalente, se verifica que

$$\ln n^{1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\rho} \left(1 + \ln(\sigma\rho)\right), \qquad n \geq n_\sigma,$$

de donde tomando exponenciales y pasando al límite cuando $n \to \infty$, se deduce que

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} \leq (\sigma\rho e)^{1/\rho}.$$

Como hemos escogido $\sigma > \sigma_c$ arbitrario, podemos afirmar que

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} \leq (\sigma_c\rho e)^{1/\rho}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\sigma' := \frac{1}{\rho e} \left(\limsup_{n\to\infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^\rho = \frac{1}{\rho e} \limsup_{n\to\infty} n \, |c_n|^{\rho/n},$$

tenemos que $\sigma' \leq \sigma_c$ y en consecuencia para concluir basta con probar que $\sigma' \geq \sigma_c$. Tomamos σ verificando que $\sigma' < \sigma$. Por la definición de σ', para $n \geq n_1$ suficientemente grande, se tiene que

$$|c_n| < \left(\frac{e\sigma\rho}{n}\right)^{n/\rho}. \tag{1.6}$$

Dado $r > 0$, definimos $m_r = [2^\rho e\sigma\rho r^\rho]$, donde $[\ ]$ denota la parte entera. Puesto que $m_r \to \infty$ se tiene que $m_r \geq n_1$ si $r > R_0$ suficientemente grande. Por tanto, si $z \in \mathbb{C}$ y $|z| = r > R_0$ se deduce que para todo $n > m_r$ se verifica (1.6) y, en consecuencia,

$$|c_n z^n| < \left(\frac{e\rho\sigma}{n}\right)^{n/\rho} r^n \leq \left(\frac{1}{2^\rho r^\rho}\right)^{n/\rho} r^n = 2^{-n}.$$

Entonces,

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{m_r} |c_n z^n| + \sum_{n=m_r+1}^{\infty} |c_n z^n| < \sum_{n=0}^{m_r} |c_n| r^n + 2^{-m_r},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = r > R_0$. A partir de la definición de la función μ_f dada en (1.5), y considerando valor de m_r, para todo $r > R_0$ podemos afirmar que

$$M_f(r) < (1 + m_r)\mu_f(r) + 2^{-m_r} \leq (1 + 2^\rho e\sigma\rho r^\rho)\mu_f(r) + 2^{-m_r}. \qquad (1.7)$$

Como $\rho > 0$, f no es una función polinomial por lo que $M_f(r)$ crece más rápido que cualquier potencia r^α, con $\alpha > 0$, cuando $r \to \infty$ (ver Observación 1.5). De acuerdo con la desigualdad (1.7) que acabamos de probar, lo mismo es cierto para $\mu_f(r)$. Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $r_k > 0$ de modo que si $r > r_k$,

$$\mu_f(r) = \max_{n \geq 0} |c_n| r^n > r^k.$$

Por lo tanto, si ponemos $M := \max_{n<n_1} |c_n|$ y tomamos $R_1 > 0$ suficientemente grande de forma que $r^{n-n_1} < 1/M$ cuando $r > R_1$ y $n < n_1$, y si tomamos $R_2 > 0$ de forma que $\max_{n \geq n_1} |c_n| r^{n-n_1} > 1$ si $r > R_2$, lo que es posible porque f es trascendente, obtenemos que para $r > R_{n_1} = \max\{R_1, R_2, r_{n_1}\}$, se verifica

$$\begin{aligned}\frac{\mu_f(r)}{r^{n_1}} &= \max\left(\max_{n \geq n_1} |c_n| r^{n-n_1}, \max_{n<n_1} |c_n| r^{n-n_1}\right) \\ &\leq \max\left(\max_{n \geq n_1} |c_n| r^{n-n_1}, 1\right) = \max_{n \geq n_1} |c_n| r^{n-n_1}.\end{aligned}$$

En consecuencia si $r > R_{n_1}$ tenemos que $\mu_f(r) = \max_{n \geq n_1} |c_n| r^n$, luego por la desigualdad (1.6) se tiene que

$$\mu_f(r) = \max_{n \geq n_1} |c_n| r^n < \max_{n \geq n_1} \left(\frac{e\sigma\rho}{n}\right)^{n/\rho} r^n, \qquad r > R_{n_1}.$$

Si consideramos la función $l(x) = (e\sigma\rho r^\rho/x)^{x/\rho}$, vemos que $l'(x) = 0$ para $x = \sigma\rho r^\rho$. Se comprueba inmediatamente que en este valor $l(x)$ tiene un máximo. Así pues, para $r > R_{n_1}$ se tiene que

$$\mu_f(r) < \max_{n \geq n_1} \left(\frac{e\sigma\rho}{n}\right)^{n/\rho} r^n \leq \left(\frac{e\sigma\rho r^\rho}{\sigma\rho r^\rho}\right)^{\sigma\rho r^\rho/\rho} = e^{\sigma r^\rho}.$$

Uniendo este resultado a la desigualdad (1.7) se deduce que para todo $r > R = \max\{R_0, R_{n_1}\}$ tenemos que

$$M_f(r) < (1 + 2^\rho e\sigma\rho r^\rho)e^{\sigma r^\rho} + 1 < (2 + 2^\rho e\sigma\rho r^\rho)e^{\sigma r^\rho},$$

y tomando logaritmos,

$$\frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} < \frac{\ln[r^\rho((2/r^\rho) + 2^\rho e\sigma\rho)]}{r^\rho} + \sigma.$$

Tomando límite superior cuando $r \to \infty$ y teniendo en cuenta (1.4) se deduce que $\sigma_c \leq \sigma$. Puesto que $\sigma > \sigma'$ es arbitrario, se concluye que $\sigma' \geq \sigma_c$ y por tanto, $\sigma' = \sigma_c$ con lo que finaliza la demostración en el caso finito. Con la misma notación, cuando $\sigma_c = \infty$ tenemos que evidentemente $\sigma' \leq \sigma_c$, y vemos que $\sigma' = \infty$, porque en caso contrario usando el mismo razonamiento que en el caso finito para $\sigma' < \sigma$ llegamos a contradicción. ★

Definición 1.11. Sea f una función entera de orden $\rho > 0$, entonces definimos la *función indicatriz* de f por

$$h_c(\theta) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}. \tag{1.8}$$

Observación 1.12. Esta función indicatriz permite estudiar el crecimiento de una función entera sobre cada uno de las semirrectas que parten del origen.

Definición 1.13. Llamamos *factores elementales de Weierstrass* a las funciones enteras E_p para $p \in \mathbb{N}_0$ definidas por

$$E_0(z) = E(z;0) = 1 - z,$$
$$E_p(z) = E(z;p) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Los dos resultados siguientes son forman parte de la teoría clásica de productos infinitos de funciones holomorfas. La mayor parte de los textos sobre variable compleja desarrollan esta teoría y podemos encontrar la pruba de los mismos en los libros de J. B. Conway [5, Cap. 11, p.279-291], P. Henrici [12, Cap. 8, p.1-61] o S. Lang [15, Cap. 13, p.372-390].

Teorema 1.14. Sea $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión de números complejos tal que $0 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_n| \leq \ldots$ y sea $p \in \mathbb{N}$ tal que la serie $\sum_{k=1}^\infty |a_k|^{-1-p}$ converge, entonces el producto infinito

$$f(z) = \prod_{k=1}^\infty E(z/a_k;p)$$

converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{C}$ y define una función entera.

Teorema 1.15. *(Teorema de Factorización de Hadamard)* Sea f una función entera de orden finito ρ y sea $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ la sucesión de raíces de f distintas de 0 tal que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_n| \leq \ldots$ y sea $p \in \mathbb{N}_0$ el menor de los elementos de $\mathbb{N}_0$ verificando que $\sum_{k=1}^\infty |a_k|^{-p-1}$ converge. Entonces

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{k=1}^\infty E(z/a_k;p),$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado $q \leq \rho$ y donde m es el orden de 0 como raíz de f. Además se comprueba que si ρ no es entero $p < \rho$.

1.2. Órdenes aproximados, propiedades y orden aproximado de una función entera

En esta seción se introduce el concepto de orden aproximado $\rho(r)$. Siguiendo las indicaciones del libro de A. A. Goldberg y I. V. Ostrovskii [11, Cap. 2] estudiaremos algunas de las caracteristicas inmediatas que se deducen de este concepto, y probaremos el Teorema 1.25 que nos dice que toda función entera admite un orden aproximado para el cuál el tipo asociado σ_f es normal. Continuaremos estudiando el comportamiento de la función $V(r) = r^{\rho(r)}$ y obtendremos la Proposición 1.28, que describe una propiedad de crecimiento regular de V que, junto con sus análogas para órdenes analíticos aproximados, va a ser clave en el desarrollo de toda la teoría. En el Teorema 1.29 probaremos que la función $V(r)$ admite una inversa $U(t)$ y que además esta inversa es del tipo $U(t) = t^{\rho^*(t)}$, con $\rho^*(t)$ un orden aproximado. Por último, el Teorema 1.31 da, para órdenes aproximados, una caracterización de σ_f análoga a la que da el Teorema 1.10 para σ_c.

Definición 1.16. Sea $\rho(r) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función, se dice que $\rho(r)$ es un *orden aproximado*, si :

(1) ρ es diferenciable con continuidad,

(2) $\rho(r) \geq 0$ para todo $r > 0$,

(3) $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho < \infty$,

(4) $\lim_{r\to\infty} r\rho'(r) \ln r = 0$.

Observación 1.17. Cuando se defina un orden aproximado mediante una expresión funcional, ésta deberá verificar siempre las condiciones (3) y (4), mientras que las condiciones (1) y (2) podrán verificarse sólo en un intervalo (c, ∞) con $c > 0$. En este caso, se entiende que $\rho(r)$ se redefine adecuadamente en $(0, c]$ de modo que se satisfagan (1) y (2) en todo $(0, \infty)$.

Definición 1.18. Sean $\rho_1(r)$ y $\rho_2(r)$ órdenes aproximados, decimos que son *equivalentes si*

$$\lim_{r\to\infty} [\rho_1(r) - \rho_2(r)] \ln r = 0.$$

Observación 1.19. Si $\rho_1(r)$ es un orden aproximado equivalente a otro orden aproximado $\rho_2(r)$ y $\lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho_1 < \infty$ entonces se comprueba inmediatamente que

$$\lim_{r\to\infty} \rho_2(r) = \rho_1 \quad \text{y} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{r^{\rho_1(r)}}{r^{\rho_2(r)}} = 1.$$

Propiedad 1.20. Sea $\rho(r)$ una función no negativa y diferenciable con continuidad en $(0,\infty)$, entonces $\rho(r)$ es un orden aproximado si y sólo si la función $V(r) = r^{\rho(r)}$ satisface

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln V(r)}{\ln r} = \rho < \infty \quad \text{y} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{rV'(r)}{V(r)} = \rho. \tag{1.9}$$

Demostración. Supongamos que $\rho(r)$ es un orden aproximado. Entonces

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln V(r)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\rho(r)\ln r}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho < \infty.$$

Por otra parte, como $\lim_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0$ se deduce que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{rV'(r)}{V(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{r(\rho(r)/r + \rho'(r)\ln r)V(r)}{V(r)} = \lim_{r\to\infty} \rho(r) + r\rho'(r)\ln r = \rho.$$

Recíprocamente, si $\rho(r)$ es función no negativa y diferenciable con continuidad verificando (1.9), tenemos que

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \lim_{r\to\infty} \frac{\rho(r)\ln r}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln V(r)}{\ln r} = \rho < \infty.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r &= \lim_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r + \rho - \rho = \lim_{r\to\infty} r(\rho'(r)\ln r + \rho/r) - \rho \\ &= \lim_{r\to\infty} r\frac{r(\rho'(r)\ln r + \rho(r)/r)V(r)}{V(r)} - \rho = \lim_{r\to\infty} \frac{rV'(r)}{V(r)} - \rho = 0,\end{aligned}$$

lo que termina la demostración. ★

Observación 1.21. Si $\ln V(r) = \rho(r)\ln r \to \infty$ cuando $r \to \infty$, entonces la primera fórmula de (1.9) es consecuencia directa de la segunda, aplicando la regla de L'Hôpital.

Definición 1.22. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado y sea f una función entera. Definimos el *tipo de f asociado a $\rho(r)$* por

$$\sigma_f(\rho(r)) = \sigma_f := \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho(r)}},$$

donde $M_f(r) = \text{máx}_{|z|0r} |f(z)|$. Decimos que $\rho(r)$ es un *orden aproximado de f* si se verifica que

$$0 < \sigma_f < \infty. \tag{1.10}$$

Por otra parte, la función $h_f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ dada por

$$h_f(\theta) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} \tag{1.11}$$

se denomina *función indicatriz generalizada de f asociado a $\rho(r)$*.

Observación 1.23. Comprobamos inmediatamente que si $\rho(r)$ es un orden aproximado de f, con $\rho(r) \to \rho$ cuando $r \to \infty$, entonces f es una función entera de orden ρ. Más aún, si f es una función entera de orden ρ y tipo σ_c normal, es decir, $0 < \sigma_c < \infty$, entonces $\rho(r) \equiv \rho$ es un orden aproximado de f.

Observación 1.24. La función indicatriz generalizada extiende el concepto de la función indicatriz definido en (1.8) y sirve de forma análoga para estudiar el crecimiento a lo largo de las semirrectas que parten del origen de una forma más precisa. Se verifica de forma inmediata que para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $h_f(\theta) \leq \sigma_f$. En el Teorema 2.33 de la Sección 2.2 se muestran algunas de las propiedades que verifica esta función.

Teorema 1.25. Sea f una función entera no constante de orden $\rho < \infty$, entonces existe un orden aproximado $\rho(r)$ de f, es decir, de modo que σ_f verifica (1.10).

Demostración. En primer lugar vamos a ver que existe una función $\rho(r)$ verificando las condiciones (2), (3) y (4) de los órdenes aproximados y que, en lugar de verificar (1), verifica la siguiente condición más débil: $\rho(r)$ es continua en $(0, \infty)$ y diferenciable con continuidad en todas partes excepto en un conjunto aislado de puntos en los que tiene derivadas laterales finita. Veremos, en segundo lugar, que en entornos suficientemente pequeños de los puntos donde la derivada no existe la función $\rho(r)$ puede sustituirse por una función que se diferencia de $\rho(r)$ en una $o((\ln r)^{-1})$, de modo que la función resultante sea $\mathcal{C}^1$ en $(0, \infty)$ y de modo que siga verificando las condiciones (2), (3) y (4).

Construyamos la función $\rho(r)$ antes mencionada. Como $\ln M_f(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$, sea $R_0 > 0$ tal que $\ln M_f(r) > 1$ para todo $r > R_0$. Definimos

$$d(r) := \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}$$

para todo $r > R_0$, y $d(r) = 0$ para $r \leq R_0$. Observamos que en virtud de la igualdad (1.3) se tiene que

$$\limsup_{r \to \infty} d(r) = \rho.$$

Por tanto, tenemos dos posibilidades:

(A) Existe una sucesión de reales positivos $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $r_k \to \infty$ y $d(r_k) > \rho$. En este caso, definimos $\varphi(r) := \max_{r \leq x} d(x)$ y observamos que esta función verifica, las siguientes propiedades:

- La existencia de la sucesión $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ permite afirmar que $\varphi(r) > \rho \geq 0$.
- $\varphi(r)$ es decreciente, puesto que se ve fácilmente que si $s \leq t$, entonces $\varphi(s) \geq \varphi(t)$.

- $\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = \limsup_{r\to\infty} d(r) = \rho$.

Definimos el conjunto de máximos por $\mathfrak{M} = \{r \geq 0 : d(r) = \varphi(r)\}$. Observamos que $\mathfrak{M}$ es no acotado, puesto que si $\mathfrak{M}$ fuera acotado existiría un $r_0 > R_0$ tal que si $r \geq r_0$ entonces $r \notin \mathfrak{M}$. Por lo tanto, para todo $r \geq r_0$, $d(r) < \varphi(r)$, de donde se deduce que, si $r_0 \leq r < t$, $\varphi(r) = \varphi(t)$. Como para todo $r_k > r_0$ se tiene que $\rho < d(r_k) < \varphi(r_k) = \varphi(r)$ con $r > r_0$, tomando límite cuando $r \to \infty$, tenemos que $\rho < \lim_{r\to\infty} \varphi(r)$, lo que es absurdo.

Sea $R_1 \in \mathfrak{M}$ tal que $R_1 > \max\{\exp(e^e), R_0\}$. Definimos

$$\rho(r) := \varphi(R_1) \qquad r \in [0, R_1].$$

Como $\varphi(r)$ decrece hacia ρ, podemos asegurar que existe

$$t_1 := \inf\{n \in \mathbb{N} : \ n > 1 + R_1 \ y \ \varphi(R_1) > \varphi(n)\},$$

y definimos $\rho(r) := \varphi(R_1)$ cuando $r \in [R_1, t_1]$.

Por otra parte consideramos las curvas

$$\zeta_{1,A} : \ y = \varphi(x), \quad \zeta_{1,B} : \ y = \rho(R_1) - \ln_3 x + \ln_3 t_1,$$

donde $\ln_3 x = \ln(\ln(\ln x))$. Observamos que para $x \geq t_1 > \exp(e^e)$ están bien definidas. Definimos

$$u_1 := \inf\{x \in \mathbb{R}, \ x > t_1 : \ \varphi(x) = \rho(R_1) - \ln_3 x + \ln_3 t_1\}.$$

La curva $\zeta_{1,A}$ está por debajo de la curva $\zeta_{1,B}$ en t_1, puesto que

$$\varphi(t_1) < \varphi(R_1) = \rho(R_1) = \rho(R_1) - \ln_3 t_1 + \ln_3 t_1.$$

Al ser las dos curvas continuas y como $\varphi(x) > \rho$ y $\rho(R_1) - \ln_3 x + \ln_3 t_1 \to -\infty$ cuando $x \to \infty$, se concluye que este u_1 existe.

Definimos $\rho(r) := \rho(R_1) - \ln_3 r + \ln_3 t_1$, en el intervalo $[t_1, u_1]$. Observamos que en este intervalo $\rho(r) \geq \varphi(r)$, dándose la igualdad sólo para $r = u_1$.

Tomamos ahora $R_2 := \min(\mathfrak{M} \cap \{r \geq u_1\})$ y definimos $\rho(r) := \varphi(R_2)$ en $[u_1, R_2]$. Observamos que en este intervalo $\rho(r) = \varphi(r)$. Para terminar de definir $\rho(r)$ iteramos la construción que acabamos de realizar, lo que es posible porque $\mathfrak{M}$ es no acotado.

Veamos que la función $\rho(r)$ construida es un orden aproximado de f. Se verifica que:

- $\rho(r)$ está definida en $(0, \infty)$, puesto que $R_n - R_{n-1} \geq u_{n-1} - R_{n-1} \geq t_{n-1} - R_{n-1} \geq 1$.
- $\rho(r) \geq \varphi(r) > \rho \geq 0$.

- La función $\rho(r)$ es continua y diferenciable con continuidad, en todo $(0,\infty)$, excepto en los puntos, t_n y u_n.
- Por una parte, como $\rho(r) \geq \varphi(r)$ para todo $r > R_1$, tenemos que

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) \geq \lim_{r\to\infty} \varphi(r) = \rho.$$

  Por otra parte, para todo $\varepsilon > 0$ existe un s_0 tal que para todo $r > s_0$, $\varphi(r) < \rho + \varepsilon$. Sea $R_n > s_0$, para todo $r \geq R_n$ se tiene que

$$\rho(r) \leq \varphi(R_n) < \rho + \varepsilon.$$

  Consecuentemente, $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$.
- En los tramos donde $\rho(r)$ es constante su derivada es nula, y en los tramos donde $\rho(r) = \rho(R_n) - \ln_3 r + \ln_3 t_n$, se tiene que

$$\rho'(r) = \frac{-1}{r \ln r \ln_2 r},$$

  donde $\ln_2 x = \ln(\ln x)$. Esto nos permite afirmar que, en todo caso, $\lim_{r\to\infty} r \ln r \rho'(r) = 0$.
- Por último, como $\ln M_f(r) = r^{d(r)} \leq r^{\varphi(r)} \leq r^{\rho(r)}$, tenemos que

$$\sigma_f \leq 1 < \infty,$$

  y como para todo $n \in \mathbb{N}$, $\ln M_f(R_n) = {R_n}^{d(R_n)} = {R_n}^{\varphi(R_n)} = {R_n}^{\rho(R_n)}$, podemos concluir que $0 < \sigma_f = 1$.

Por tanto, $\rho(r)$, excepto porque no es $\mathcal{C}^1$ en todo $(0,\infty)$, cumple las condiciones para ser un orden aproximado de f.

(B) Si $d(r) \leq \rho$ para todo $r > R_0$, tomamos $R_0 > \exp(e^e)$ de modo que se verifique que $\ln M_f(r) > 1$ para todo $r > R_0$. En esta ocasión diferenciamos dos casos:

(B.1) Si existe una sucesión de reales positivos $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $r_k \to \infty$ y tales que $d(r_k) = \rho$, definimos $\rho(r) \equiv \rho$ en $(0,\infty)$. Se comprueba fácilmente que $\rho(r) = \rho$ es un orden aproximado. Además, se tiene que

$$\ln M_f(r) = r^{d(r)} \leq r^{\rho}$$

y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\ln M_f(r_n) = {r_n}^{d(r_n)} = {r_n}^{\rho}$, por lo tanto, $\sigma_f = 1$.

(B.2) Si $0 \leq d(r) < \rho$ para todo $r > R_0$, definimos

$$\psi(r) := \max_{[R_0,r]} d(x).$$

Observamos que $\psi(r)$ es continua, creciente, y con $\lim_{r\to\infty} \psi(r) = \rho$.

Consideramos el conjunto $\mathfrak{L} = \{r > R_0 : \psi(r) = d(r)\}$. $\mathfrak{L}$ es un conjunto no acotado, puesto que si existiera $r_0 > R_0$, de modo que para todo $r \geq r_0$ $d(r) < \psi(r) = d(y)$, con $y < r_0$, tendríamos que

$$\rho = \lim_{r\to\infty} d(r) \leq \lim_{r\to\infty} \psi(r) = d(y) < \rho,$$

lo que es imposible.

Sea $R_1 \in \mathfrak{L}$, consideramos las curvas

$$\eta_{1,A} : y = \psi(x), \qquad \eta_{1,B} : \; y = \rho + \ln_3 x - \ln_3 R_1,$$

que están bien definidas para $x \geq R_0 > \exp(e^e)$. En el punto R_1 la curva $\eta_{1,A}$ está por debajo de la curva $\eta_{1,B}$. Si tomamos R_1 suficientemente grande existe $s \in (R_0, R_1)$, abscisa de un punto de corte entre las curvas; basta con tomar R_1 de modo que $\rho + \ln_3 R_0 - \ln_3 R_1 \leq \psi(R_0) - 1$, lo que es posible porque $-\ln_3 x \to -\infty$ cuando $x \to \infty$. Tomamos R_1 suficientemente grande también para que $\mathfrak{L} \cap (R_0, s] \neq \emptyset$.

Para ese R_1, denotamos $s_1 := \sup\{s \in (R_0, R_1) : \psi(s) = \rho + \ln_3 s - \ln_3 R_1\}$. Como $\mathfrak{L} \cap (R_0, s_1) \neq \emptyset$ denotamos por $v_1 := \max\{v \in \mathfrak{L} \cap (R_0, s_1)\}$. Definimos $\rho(r) := \psi(v_1) = d(v_1)$ en $(0, s_1]$.

Sea $R_2 > 1 + R_1$, $R_2 \in \mathfrak{L}$, suficientemente grande de modo que existe $s_2 := \sup\{s \in (R_1, R_2) : \psi(s) = \rho + \ln_3 s - \ln_3 R_2\}$, y de forma que $\mathfrak{L} \cap (R_1, s_2) \neq \emptyset$. Denotamos por $v_2 := \max\{v \in \mathfrak{L} \cap (R_1, s_2)\}$, como $\psi(s_1) \leq \psi(v_2) = d(v_2) < \rho$, existe $s_1 \leq w_1 \leq R_1$ tal que $\rho + \ln_3 w_1 - \ln_3 R_1 = \psi(v_2)$. Así pues, definimos $\rho(r) := \rho + \ln_3 r - \ln_3 R_1$ en $[s_1, w_1]$, y $\rho(r) := \psi(v_2)$ en $[w_1, s_2]$. Iterando la construcción definimos $\rho(r)$ para todo $r > 0$.

Análogamente a lo probado en el apartado (A), se ve que, salvo por la condición de derivabilidad, $\rho(r)$ es un orden aproximado. Con esta construcción $\psi(r) \leq \rho(r)$ para todo $r \geq R_0$, y por lo tanto, como $\ln M_f(r) = r^d(r) \leq r^{\psi(r)} \leq r^{\rho(r)}$, se tiene que $\sigma_f \leq 1$, y como para todo $n \in \mathbb{N}$ $\ln M_f(t_n) = {t_n}^{d(t_n)} = {t_n}^{\psi(t_n)} = {t_n}^{\rho(t_n)}$ se verifica que $\sigma_f = 1$.

Veamos ahora cómo podemos sustituir estos órdenes $\rho(r)$ que hemos construido por unos órdenes $\rho_1(r)$ derivables con continuidad en todo $(0, \infty)$. En concreto, vamos a ver cómo remplazar el orden construido en (A) en un entorno de t_n por otro que sea derivable con continuidad en dicho entorno. Para el resto de puntos donde no tenemos derivabilidad y para el resto de casos la construcción es análoga. Fijado un $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n > 0$, que denotaremos por brevedad como $\delta_n = \delta$, suficientemente pequeño de forma que

$$\rho(r) = \begin{cases} \varphi(R_n) & \text{si } \; r \in [t_n - \delta, t_n], \\ \varphi(R_n) - \ln_3 r + \ln_3 t_n & \text{si } \; r \in [t_n, t_n + \delta]. \end{cases}$$

Vamos a sustituir $\rho(r)$ en el intervalo $[t_n - \delta, t_n + \delta]$ por una función $\rho_1(r)$, polinómica de grado 3, a la que vamos a imponer las siguiente condiciones:

$$\begin{aligned} \rho_1(t_n-\delta)=\rho(t_n-\delta)=\rho(t_n)>0, &\qquad \rho_1(t_n+\delta)=\rho(t_n+\delta)>0,\\ \rho_1'(t_n-\delta)=\rho'(t_n-\delta)=0, &\qquad \rho_1'(t_n+\delta)=\rho'(t_n+\delta)<0. \end{aligned}$$

En consecuencia, existen a, b en $\mathbb{R}$ de modo que podemos escribir

$$\rho_1(r)=\rho(t_n)+a(r-(t_n-\delta))^2+b(r-(t_n-\delta))^3.$$

Sustituyendo los otros dos datos, comprobamos que tomando $\delta>0$ suficientemente pequeño, se tiene que

$$\rho_1'(r)<0, \qquad r\in(t_n-\delta,t_n+\delta). \tag{1.12}$$

Como $\rho(r)$, $\rho_1(r)$ toman el mismo valor en $t_n-\delta$ y $t_n+\delta$ y como $\rho(r)$ es constante en $[t_n-\delta,t_n]$, usando (1.12) podemos afirmar que

$$|\rho_1'(r)|\le \sup_{s\in(t_n,t_n+\delta)}|\rho'(s)|$$

para todo $r\in(t_n-\delta,t_n+\delta)$, de la expresión de ρ' además sabemos que este superior es menor que $|\rho'(t_n^+)|$. Este hecho, junto con el hecho de que $|\rho'(s)|$ decrece en $(t_n,t_n+\delta)$, permite afirmar, por un lado, que si $r\in(t_n-\delta,t_n)$ tenemos que

$$r\ln r|\rho_1'(r)|\le t_n\ln t_n|\rho'(t_n^+)|\to 0, \quad \text{cuando} \quad n\to\infty;$$

por otro lado, si $r\in(t_n,t_n+\delta)$ tenemos que

$$\begin{aligned} r\ln r|\rho_1'(r)| &\le (t_n+\delta)\ln(t_n+\delta)|\rho'(t_n^+)|\\ &= t_n\left(1+\frac{\delta}{t_n}\right)\left[\ln t_n+\ln\left(1+\frac{\delta}{t_n}\right)\right]|\rho'(t_n)|\to 0, \end{aligned}$$

cuando $n\to\infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{r\to\infty} r\ln r\rho_1'(r)=0.$$

Por otra parte, también de (1.12) se deduce que

$$|\rho(r)-\rho_1(r)|\le|\rho(t_n)-\rho_1(t_n)|\le|a|\delta^2+|b|\delta^3,$$

para todo $r\in[t_n-\delta,t_n+\delta]$. Si suponemos que $0<\delta<1$ es suficientemente pequeño de forma que $|a|\delta^2+|b|\delta^3<1/(t_n+1)$, deducimos que

$$|\rho(r)-\rho_1(r)|\le\frac{1}{t_n+1}<\frac{1}{r}$$

para todo $r \in [t_n - \delta, t_n + \delta]$. Consecuentemente,

$$\lim_{r\to\infty} (\rho(r) - \rho_1(r)) \ln r = 0,$$

de donde se concluye que

$$\lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho,$$

y que $\rho(r)$ y $\rho_1(r)$ son equivalentes. Por lo tanto, podemos concluir que $\rho_1(r)$ es un orden aproximado asociado a f.

★

Observación 1.26. En la prueba de este resultado sólo hemos utilizado que $\ln M_f(r)$ está en la clase Λ de las funciones $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ continuas, no negativas y no decrecientes a partir de un determinado $R > 0$ y tales que

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln g(r)}{\ln r} < \infty.$$

Por lo tanto, a toda función g de Λ le podemos asociar un orden aproximado de modo que

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{g(r)}{r^{\rho(r)}} \in (0, \infty).$$

Propiedad 1.27. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado, entonces la función $L(r) = r^{\rho(r)-\rho}$ satisface la relación

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(sr)}{L(r)} = 1, \quad s \in (0, \infty), \tag{1.13}$$

y la convergencia es uniforme en todos los compactos $[a, b] \subseteq (0, \infty)$.

Demostración. Sea $[a, b] \subseteq (0, \infty)$, Observamos que para todo $s \in (0, \infty)$ se tiene que

$$\ln \frac{L(sr)}{L(r)} = \ln \frac{(sr)^{\rho(sr)-\rho}}{r^{\rho(r)-r}} = [\rho(sr) - \rho] \ln s + [\rho(sr) - \rho(r)] \ln r. \tag{1.14}$$

Por otra parte, para todo $\varepsilon > 0$, como $\rho(r)$ es un orden aproximado existe $r_0 > 1$ tal que para todo $R > r_0$, tenemos que

$$|\rho(R) - \rho| < \varepsilon,$$

$$R|\rho'(R)| \ln R < \varepsilon.$$

En particular, para todo r verificando que $ar > r_0$, se tiene que $sr \geq ar > r_0$, para todo $s \in [a, b]$, y por tanto,

$$|\rho(sr) - \rho| < \varepsilon, \quad sr|\rho'(sr)| \ln sr < \varepsilon. \tag{1.15}$$

Como queremos probar la convergencia uniforme en los compactos, dilantando $[a,b]$ si es necesario, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $1 \in [a,b]$.

Si $s \in (1,b]$ y $r \in (0,\infty)$ aplicamos el *teorema del Valor Medio de Lagrange* a la función $\rho(e^t)$ en $[\ln r, \ln(sr)]$ y obtenemos que existe $t^* \in (\ln r, \ln(sr))$, tal que

$$\rho(sr) - \rho(r) = (\ln(sr) - \ln r)e^{t^*}\rho'(e^{t^*}).$$

Si definimos $s^* := e^{t^*}/r$ se tiene que $s^* \in (1,s)$ y también

$$\rho(sr) - \rho(r) = (\ln s)s^* r\rho'(s^* r).$$

Si $s \in [a,1)$ y $r \in (0,\infty)$ aplicamos el *teorema del Valor Medio de Lagrange* a la función $\rho(e^t)$ en $[\ln(sr), \ln r]$ y obtenemos que existe $t^* \in (\ln(sr), \ln r)$, tal que

$$\rho(r) - \rho(sr) = (\ln r - \ln(sr))e^{t^*}\rho'(e^{t^*}).$$

Si definimos $s^* = e^{t^*}/r$ se verifica que $s^* \in (1,s)$ y además

$$\rho(r) - \rho(sr) = (-\ln s)s^* r\rho'(s^* r).$$

En ambos casos, si tomamos r de forma que $ar > r_0$, usando (1.15), como $s^* > \min\{s,1\} \geq a$ obtenemos la desigualdad

$$|\rho(sr) - \rho(r)| = |\ln s|s^* r|\rho'(s^* r)| < M_{a,b}\frac{\varepsilon}{\ln(s^* r)} < M_{a,b}\frac{\varepsilon}{\ln(ar)}, \tag{1.16}$$

para todo $s \in [a,b]$, donde $M_{a,b} = \max\{|\ln a|, \ln b\}$. Por tanto, si $s \in [a,b]$ y $ar > r_0$, usando (1.14), (1.15) y (1.16) se tiene que

$$\left|\ln\frac{L(sr)}{L(r)}\right| < \varepsilon M_{a,b} + \varepsilon M_{a,b}\frac{\ln r}{\ln(ar)} \leq \varepsilon M_{a,b}\left(1 + \frac{\ln r}{\ln(ar)}\right).$$

Teniendo en cuenta que la función $\ln r/\ln(ar)$ es decreciente si $r > r_0/a$, vemos que

$$\left|\ln\frac{L(sr)}{L(r)}\right| < \varepsilon M_{a,b}\left(1 + \frac{\ln(r_0/a)}{\ln r_0}\right).$$

Esta desigualdad nos permite concluir que $\ln(L(sr)/L(r))$ converge uniformemente hacia 0 en $[a,b]$, y consecuentemente $L(sr)/L(r)$ converge uniformemente hacia 1 en $[a,b]$. ★

Cualquier función satisfaciendo la Propiedad (1.13) se dice que es una *función de variación lenta.*

Propiedad 1.28. Sea $\rho(r)$ el orden aproximado de una función entera f, sea $V(r) = r^{\rho(r)}$. Entonces

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(sr)}{V(r)} = s^\rho, \qquad s \in (0,\infty)$$

y la convergencia es uniforme en todos los compactos $[a,b] \subseteq (0,\infty)$.

Demostración. La demostración es inmediata, basta observar que $L(r) = V(r)/r^{\rho}$ y aplicar la Propiedad 1.27. ★

Propiedad 1.29. Sea $\rho(r)$ el orden aproximado de una función entera f, con $\rho > 0$. Entonces existe $R > 0$ tal que la función $V(r) = r^{\rho(r)}$ es monótona estrictamente creciente para todo $r > R$. Además si $r = U(t)$ es la función inversa de V definida para $t > V(R)$, tenemos que

$$\rho^*(t) = \frac{\ln U(t)}{\ln t}$$

es un orden aproximado con $\rho^*(t) \to 1/\rho$ cuando $t \to \infty$.

Demostración. Para todo $r > 0$, se tiene que

$$V'(r) = \rho(r) r^{\rho(r)-1} + r^{\rho(r)} \rho'(r) \ln r = r^{\rho(r)-1}(\rho(r) + r\rho'(r) \ln r).$$

Como $r\rho'(r) \ln r$ tiende a 0 cuando $r \to \infty$, si tomamos $0 < \varepsilon < \rho$ existe $R > 1$ tal que para todo $r > R$,

$$\rho - \varepsilon < \rho(r) + r\rho'(r) \ln r < \rho + \varepsilon.$$

Por tanto, para $r > R$,

$$V'(r) > (\rho - \varepsilon) r^{\rho(r)-1} = (\rho - \varepsilon) e^{(\rho(r)-1) \ln r} > 0.$$

Luego $V(r)$ es estrictamente creciente para todo $r > R$, por lo que podemos definir la función inversa $r = U(t)$ para todo $r > R$, es decir, cuando $t = V(r) > V(R)$.

Tomamos R suficientemente grande de forma que $V(R) > 1$. Veamos que la función $\rho^*(t) := \ln U(t)/\ln t$ es un orden aproximado. En primer lugar, $\rho^*(t)$ es $\mathcal{C}^1$ por serlo $V(r)$. En segundo lugar, como $U(t)$ es estrictamente creciente para $t > V(R)$, se tiene que

$$\rho^*(t) = \frac{\ln U(t)}{\ln t} \geq \frac{\ln U(V(R))}{\ln t} = \ln R/\ln t > 0.$$

Por otra parte, como $\rho(r)$ es un orden aproximado se deduce que

$$\lim_{t\to\infty} \rho^*(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln U(t)}{\ln t} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln U(V(r))}{\ln V(r)} = \frac{1}{\rho} < \infty, \tag{1.17}$$

y del mismo modo, usando la propiedad 1.20,

$$\lim_{t\to\infty} t\rho^{*\prime}(t) \ln t = \lim_{t\to\infty} t \frac{\frac{U'(t)\ln t}{U(t)} - \frac{\ln U(t)}{t}}{(\ln t)^2} \ln t = \lim_{r\to\infty} V(r) \frac{\frac{\ln V(r)}{V'(r) r} - \frac{\ln r}{V(r)}}{\ln V(r)} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{V(r) \ln V(r) - rV'(r) \ln r}{V'(r) r \ln V(r)} = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{V(r)}{V'(r) r} - \frac{\ln r}{\ln V(r)} \right) = 0.$$

Consecuentemente, concluimos que $\rho^*(t)$ un orden aproximado verificando que $\rho^*(t) \to 1/\rho$ cuando $t \to \infty$. ★

Definición 1.30. Dado un orden aproximado $\rho(r)$ el orden aproximado $\rho^*(t)$ definido en la propiedad anterior se dice *orden conjugado de* $\rho(r)$.

Teorema 1.31. Sea $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ una función entera de orden finito $\rho > 0$, de orden aproximado $\rho(r)$ y con tipo asociado σ_f. Entonces

$$(\sigma_f e\rho)^{1/\rho} = \limsup_{k\to\infty} U(k)\sqrt[k]{|c_k|}, \tag{1.18}$$

donde $U(t) = r$ es la inversa de $V(r) = r^{\rho(r)}$ para todo $r > R$ suficientemente grande.

Demostración. Como $\rho > 0$, podemos considerar $\rho^*(t)$ el orden conjugado de $\rho(r)$. Por la propiedad 1.28, la función $U(t) = t^{\rho^*(t)}$ verifica que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(kt)}{U(t)} = k^{1/\rho}, \qquad k \in (0,\infty). \tag{1.19}$$

Por otra parte, por las desigualdades de Cauchy y por la definición del tipo σ_f, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, para todo $\sigma > \sigma_f$ y para $r > R_1$ suficientemente grande se tiene que

$$|c_n| \le \frac{M_f(r)}{r^n} < \frac{e^{\sigma r^{\rho(r)}}}{r^n},$$

tomando logaritmos deducimos que para $r > R_1$ se tiene que

$$\ln|c_n| < \sigma r^{\rho(r)} - n\ln r.$$

La función $V(r) = r^{\rho(r)}$ es estrictamente creciente para $r > R > R_1$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $n/(\sigma\rho) > V(R)$ si $n \ge n_0$. Como además $\lim_{r\to\infty} V(r) = \infty$, dado $n \ge n_0$ existe un único $r_n > R$ tal que

$$\frac{n}{\sigma\rho} = r_n{}^{\rho(r_n)} = V(r_n).$$

Luego para todo $n \ge n_0$ se verifica que

$$\ln|c_n| < \frac{n}{\rho} - n\ln r_n = \frac{n}{\rho} - n\ln U(\frac{n}{\sigma\rho})$$

o, equivalentemente, sumando $\ln U(n)$ a ambos lados y tomando $n \ge n_0$ suficientemente grande para que U esté definida,

$$\ln U(n)\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\rho} + \ln\frac{U(n)}{U(\frac{n}{\sigma\rho})}.$$

Finalmente, tomando exponenciales en esta última desigualdad, pasando al límite superior cuando $n \to \infty$ y aplicando la igualdad (1.19) tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} U(n)\sqrt[n]{|c_n|} \le (\sigma\rho e)^{1/\rho},$$

y como hemos tomado $\sigma > \sigma_f$ arbitrario, podemos concluir que

$$\limsup_{n\to\infty} U(n)\sqrt[n]{|c_n|} \leq (\sigma_f \rho e)^{1/\rho}. \tag{1.20}$$

Si definimos

$$\sigma_0 := \frac{1}{\rho e}\left(\limsup_{n\to\infty} U(n)\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{\rho},$$

de la desigualdad (1.20) se deduce inmediatamente que $\sigma_0 \leq \sigma_f$. Veamos ahora que se verifica la desigualdad contraria. Tomemos σ_1 verificando que $\sigma_0 < \sigma_1$. Sea $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $\sigma_0 < (1-\varepsilon)^\rho \sigma_1$, por la definición de σ_0 para n suficientemente grande se tiene que

$$\sqrt[n]{|c_n|} < (1-\varepsilon)\frac{(\sigma_1 \rho e)^{1/\rho}}{U(n)}.$$

Aplicando la igualdad (1.19) para $k = 1/(\sigma_1\rho)$, para n suficientemente grande se deduce que

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{U(n)}{(\sigma_1\rho)^{1/\rho} U(n/\sigma_1\rho)} \frac{(\sigma_1\rho e)^{1/\rho}}{U(n)} = \frac{e^{1/\rho}}{U(n/\sigma_1\rho)}.$$

Tomamos n_1 suficientemente grande vemos que para $n \geq n_1$, y para todo $r > 0$,

$$|c_n r^n| < \left(\frac{e^{1/\rho}}{U(n/\sigma_1\rho)} r\right)^n.$$

Por lo tanto, tomando máximos, y teniendo en cuenta que $|c_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$, para todo $r > 0$ se tiene que

$$\max_{n\geq n_1} |c_n| r^n < \max_{n\geq n_1}\left(\frac{e^{1/\rho}}{U(n/\sigma_1\rho)}\right)^n r^n. \tag{1.21}$$

Por otra parte, podemos ver que para $\rho_1 > \rho$, por la definición de orden de f asociado a $\rho(r)$, para toda constante positiva $c > 0$ se tiene que para $r > r_1$ suficientemente grande,

$$|c_n z^n| \leq M_f(r) < e^{cr^{\rho_1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Consideramos $h_2(x) = e^{cx^{\rho_1}} x^{-n}$ definida para $x > 0$. La función $h_2(x)$ alcanza su mínimo en $x = (n/(\rho_1 c))^{1/\rho_1}$. Consideramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(n/(\rho_1 c))^{1/\rho_1} > r_1$ para todo $n > n_0$. Por tanto, para todo $n > n_0$,

$$|c_n| < e^{n/\rho_1}\left(\frac{\rho_1 c}{n}\right)^{n/\rho_1} = \left(\frac{\rho_1 c e}{n}\right)^{n/\rho_1}.$$

Podemos observar que esta igualdad es análoga a la igualdad (1.6) de la demostración del Teorema 1.31. En consecuencia, si $r > 0$ definimos $m_r =$

$[2^{\rho_1} ec\rho_1 r^{\rho_1}]$, donde [ ] denota la parte entera y realizamos el mismo razonamiento que en la prueba del citado teorema. Para todo $r > R_0$ suficientemente grande podemos concluir que

$$M_f(r) < (1 + 2^{\rho_1} ec\rho_1 r^{\rho_1})\mu_f(r) + 2^{-m_r} < (2 + 2^{\rho_1} ec\rho_1 r^{\rho_1})\mu_f(r), \qquad (1.22)$$

donde consideramos la función μ_f definida en (1.5). Como f no es una función polinomial, por ser de orden estrictamente positivo (ver Observación 1.5), deducimos, al igual que en el Teorema 1.31, que existe $R_{n_1} > 0$ tal que si $r > R_{n_1}$ tenemos que $\mu_f(r) = \max_{n \geq n_1} |c_n| r^n$. Luego por la desigualdad (1.21) se tiene que

$$\mu_f(r) = \max_{n \geq n_1} |c_n| r^n < \max_{n \geq n_1} \left(\frac{e^{1/\rho}}{U(n/\sigma_1 \rho)} \right)^n r^n, \qquad r > R_{n_1}. \qquad (1.23)$$

Consideramos la función definida para $x \geq n_1$ por

$$h_r(x) = \left(\frac{e^{1/\rho} r}{U(x/(\sigma_1 \rho))} \right)^x,$$

y vamos a estudiar donde alcanza sus máximos. En primer lugar, tomamos n_2 de modo que $U(x/\sigma_1 \rho)$ es inyectiva cuando $x \in [n_2, \infty)$. Esto nos permite, para simplificar los cálculos, realizar el cambio de variable $y = U(x/(\sigma_1 \rho))$. Derivando, observamos que

$$h'_r(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_r(y) := \ln r - \ln y + \frac{1}{\rho} - \frac{V'(y)}{yV(y)} = 0, \qquad (1.24)$$

donde $V(r) = r^{\rho(r)}$. Además por la propiedad (1.9) de V, sabemos que existe $y_0 > 0$ suficientemente grande tal que para todo $y \geq y_0 > U(n_2/(\sigma_1 \rho))$ se verifica que

$$\frac{-1}{3} < \alpha(y) := \frac{1}{\rho} - \frac{V'(y)}{yV(y)} < \frac{1}{3}.$$

Observamos que si $r > y_0 e^{1/3}$ se tiene que

$$T_r(y_0) = \ln r - \ln y_0 + \alpha(y_0) \geq \ln y_0 e^{1/3} - \ln y_0 + \alpha(y_0) > \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Del mismo modo, observamos que para $r > y_0 e^{1/3}$ fijo, si tomamos $y \geq re^{1/3} \geq y_0$ se cumple que

$$T_r(y) = \ln r - \ln y + \alpha(y) \leq \ln r - \ln re^{1/3} + \alpha(y) < -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.$$

Por lo tanto, de la continuidad de T_r se deduce que T_r se anula en $[y_0, re^{1/3}]$. Más precisamente, teniendo en cuenta que si $y \in [y_0, re^{-1/3}]$ se verifica que

$$T_r(y) = \ln r - \ln y + \alpha(y) \geq \ln r - \ln re^{-1/3} + \alpha(y) > \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0,$$

y podemos afirmar que para $r > y_0 e^{1/3}$, h_r alcanza sus máximos en el intervalo $[re^{-1/3}, re^{1/3}]$. Tomamos $y^*(r)$, el máximo global de h_r. Poniendo $\alpha^*(r) := \alpha(y^*(r))$, y despejando en (1.24) vemos que podemos escribir

$$y^*(r) = e^{\alpha^*(r)} r, \quad \text{con} \quad \alpha^*(r) \to 0 \quad \text{cuando} \quad r \to \infty, \tag{1.25}$$

porque $y^*(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$. Observamos que podemos tomar n_1 suficientemente grande de modo que $y_0 < U(n_1/\sigma_1\rho)$. Aplicando esto a la desigualdad (1.23) vemos que

$$\mu_f(r) < \max_{n \geq n_1} \left(\frac{e^{1/\rho} r}{U(n/\sigma_1\rho)} \right)^n \leq \max_{y \geq y_0} h_r(y) = \left(\frac{e^{1/\rho} r}{y^*(r)} \right)^{\sigma_1 \rho V(y^*(r))}$$

para todo $r > R_{n_1}$. Usando que $y^*(r) = e^{\alpha^*(r)} r$, mediante un pequeño cálculo vemos que

$$\left(\frac{e^{1/\rho} r}{y^*(r)} \right)^{\sigma_1 \rho V(y^*(r))} = \exp\Big((1/\rho - \alpha^*(r)) \sigma_1 \rho V(e^{\alpha^*(r)} r) \Big).$$

Por la Propiedad 1.28, sabemos que para $r > R > R_{n_1}$ suficientemente grande se tiene que $V(e^{\alpha^*(r)} r) = e^{\rho\alpha^*(r)} V(r)(1 + o(1))$, puesto que $\alpha^*(r) \in [-1/3, 1/3]$ y tenemos convergencia uniforme en los compactos. Encadenando las desigualdades para $r > R$ vemos que

$$\mu_f(r) < e^{\sigma_1 r^{\rho(r)}(1+o(1)) e^{\rho\alpha^*(r)}} e^{-\alpha^*(r)\sigma_1 r^{\rho(r)}(1+o(1)) e^{\rho\alpha^*(r)}}.$$

Observamos que $(1 + o(1))e^{\rho\alpha^*(r)} = (1 + o(1))$. En consecuencia, de la desigualdad (1.22) deducimos que

$$M_f(r) < (2 + 2^{\rho_1} e c \rho_1 r^{\rho_1}) e^{-\alpha^*(r)\sigma_1 r^{\rho(r)}(1+o(1))} e^{\sigma_1 r^{\rho(r)}(1+o(1))},$$

y tomando logaritmos para $r > R$ vemos que

$$\frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho(r)}} < \frac{\ln[r^{\rho_1}((2/r^{\rho_1}) + 2^{\rho_1} e c \rho_1)]}{r^{\rho(r)}} - \alpha^*(r)\sigma_1(1 + o(1)) + (1 + o(1))\sigma_1.$$

Tomando límite superior cuando $r \to \infty$, se deduce que $\sigma_f \leq \sigma_1$, y por tanto, $\sigma_0 = \sigma_f$ con lo que finaliza la demostración del teorema. ★

Observación 1.32. Sea $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ una función transcendente entera y $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho > 0$, que no es necesariamente el orden de f. Modificando ligeramente la prueba del teorema anterior, podemos asegurar que si el límite

$$\limsup_{k \to \infty} U(k) \sqrt[k]{|c_k|}, \tag{1.26}$$

es finito y no nulo, entonces $\rho(r)$ es un orden aproximado de f y su tipo asociado σ_f viene dado por (1.18).

1.3. Construcción de funciones enteras con un orden aproximado dado

En esta sección vamos a ver cómo, dado un orden aproximado $\rho(r)$, podemos construir una función entera para el cual $\rho(r)$ sea un orden aproximado. Para probar este resultado vamos a diferenciar dos casos, ρ entero y ρ no entero. En el caso en que ρ no sea entero el Teorema 1.44 nos permitirá concluir el resultado. Análogamente en el caso ρ entero el Teorema 1.47 solucionará el problema. La prueba de estos teoremas se basa en los resultados descritos en el libro de B. Y. Levin [18][Cap. I,Sec. 17, p.61-70], para demostrarlos usaremos resultados elementales sobre el orden y el tipo de una función entera y emplearemos la notación y las técnicas de la Integral de Stieltjes (ver Definición A.1). Por último, probaremos el Teorema 1.49 que vamos a usar en la demostración del Teorema 2.33 que describe las propiedades de la función indicatriz h_f. Esta función h_f es clave en la descripción del dominio de la transformada de Borel genralizada de f. Comencemos por demostrar una serie de lemas auxiliares acerca de la densidad de las sucesiones de ceros de una función entera que nos van a permitir probar los teoremas.

Definición 1.33. Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión no decreciente de números reales positivos tal que $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$, denotamos por $n(r)$ el número de miembros de $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ verificando que $a_k \leq r$. Llamamos *exponente de convergencia de la sucesión* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ al número

$$\lambda(\{a_k\}_{k=1}^{\infty}) = \inf\{\lambda > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^{\lambda}} < \infty\},$$

y definimos el *orden de* $n(r)$ por

$$\rho\,(n(r)) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r}.$$

Observación 1.34. Este concepto de orden generaliza la definición de orden de la función $\ln M_f(r)$ a la clase de funciones positivas no decrecientes.

Lema 1.35. Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión no decreciente de números reales positivos tal que $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$, entonces $\lambda(\{a_k\}_{k=1}^{\infty}) = \rho\,(n(r))$.

Demostración. Para todo $\lambda > 0$, usando la terminología de la integral de Stieltjes (ver Definición A.1) podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^{\lambda}} = \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{t^{\lambda}}.$$

Por otra parte, de la integración por partes obtenemos la siguiente igualdad

$$\int_0^r \frac{dn(t)}{t^{\lambda}} = \left[\frac{n(t)}{t^{\lambda}}\right]_0^r - \lambda \int_0^r -\frac{n(t)dt}{t^{\lambda+1}} = \frac{n(r)}{r^{\lambda}} + \lambda \int_0^r \frac{n(t)dt}{t^{\lambda+1}}, \tag{1.27}$$

puesto que $a_1 > 0$. Esta identidad nos permite afirmar que, si tomamos $\lambda > \lambda(\{a_k\}_{k=1}^{\infty})$, es decir, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-\lambda}$ converge, entonces ambos términos en el lado derecho de (1.27) están acotados. Como el segundo término es monótono creciente, además de acotado, converge, es decir,

$$\int_0^{\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\lambda+1}} < \infty.$$

De esta convergencia para $\varepsilon > 0$, y $r > R_\varepsilon > 1$, deducimos que

$$\frac{n(r)}{r^{\lambda}} = \lambda n(r) \int_r^{\infty} \frac{dt}{t^{\lambda+1}} \leq \lambda \int_r^{\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\lambda+1}} < \varepsilon,$$

lo que nos permite afirmar que para $\varepsilon = 1$,

$$\frac{\ln n(r)}{\ln r} < \frac{\ln r^{\lambda}}{\ln r} = \lambda,$$

para todo $r > R_\varepsilon$. De esta desigualdad se deduce que $\rho(n(r)) < \lambda$ para todo $\lambda > \lambda(\{a_k\}_{k=1}^{\infty})$, y en consecuencia $\lambda(\{a_k\}_{k=1}^{\infty}) \geq \rho(n(r))$.

Recíprocamente, si tomamos $\rho > \rho(n(r))$, para todo $\varepsilon > 0$ tal que $\rho > \varepsilon + \rho(n(r))$, tenemos que

$$n(t) < t^{\rho(n(r))+\varepsilon},$$

para todo $t > t_\varepsilon$ y por lo tanto, para todo $t > t_\varepsilon$,

$$\int_{t_\varepsilon}^{\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\rho+1}} < \int_{t_\varepsilon}^{\infty} \frac{t^{\rho(n(r))+\varepsilon}dt}{t^{\rho+1}} < \infty,$$

$$\frac{n(t)}{t^{\rho}} < t^{\rho(n(r))+\varepsilon-\rho} \leq M = cte,$$

de donde se demuestra, usando la igualdad (1.27), que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^{\rho}} = \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{t^{\rho}} < \infty.$$

Consecuentemente, $\rho > \lambda(\{a_k\}_{k=1}^{\infty})$ para todo $\rho > \rho(n(r))$, lo que nos permite concluir que $\rho(n(r)) \geq \lambda(\{a_k\}_{k=1}^{\infty})$, y unido a la otra desigualdad que acabamos de probar $\rho(n(r)) = \lambda(\{a_k\}_{k=1}^{\infty})$. ★

Lema 1.36. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado satisfaciendo que existe p entero tal que $p \leq \rho < p+1$ y sea $0 < \Delta < \infty$. Entonces existe $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión no decreciente de números reales positivos de modo que p es el más pequeño de los enteros positivos verificando que $\Sigma_{k=1}^{\infty}(a_k)^{-1-p}$ converge y de forma que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} = \Delta \qquad \left(n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)}, \quad r \to \infty\right). \tag{1.28}$$

Demostración. A partir de un $R>0$, $V(r)$ es inyectiva, lo que nos permite considerar su inversa $U(t)$. Basta tomar $a_k = U(k/\Delta)$, la única raíz de la ecuación $k=\Delta r^{\rho(r)}$, lo que es posible para todo $k>\Delta V(R)$. Si $\Delta V(R)\geq 1$, definimos $a_1=a_2=\ldots=a_K=U[(K+1)/\Delta]$, donde $K=\inf\{k\in\mathbb{N}: \Delta V(R)\geq k\}$. Por tanto, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión no decreciente de números reales positivos, y se tiene que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{\rho(r)}}=\lim_{s\to\infty}\frac{n(U(s))}{s}=\lim_{s\to\infty}\frac{\sup\{k\in\mathbb{N}:\ k\leq \Delta s\}}{s}=\Delta.$$

Por último, como $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho<p+1$, para todo $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño y $r>R_\varepsilon$ adecuado se tiene que

$$\frac{\ln n(r)}{\ln r}=\frac{\ln(n(r)/r^{\rho(r)})+\ln r^{\rho(r)}}{\ln r}<\frac{\varepsilon}{2}+\rho(r)<\varepsilon+\rho.$$

Esta desigualdad nos permite afirmar que $\limsup_{r\to\infty} n(r)/\ln r\leq\rho<p+1$. Por lo tanto, con las notaciones del Lema 1.35, $p+1>\rho(n(r))=\lambda(\{a_k\}_{k=1}^{\infty})$ y consecuentemente, $\Sigma_{k=1}^{\infty}(a_k)^{-1-p}$ converge. ★

Lema 1.37. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho(r)\to\rho$ cuando $r\to\infty$. Entonces si $\lambda<\rho+1$ se tiene que

$$\int_a^r t^{\rho(t)-\lambda}dt=\frac{1}{\rho+1-\lambda}r^{\rho(r)+1-\lambda}+o(r^{\rho(r)+1-\lambda}),\tag{1.29}$$

y si $\lambda>\rho+1$ entonces

$$\int_r^{\infty} t^{\rho(t)-\lambda}dt=\frac{1}{\lambda-1-\rho}r^{\rho(r)+1-\lambda}+o(r^{\rho(r)+1-\lambda}).\tag{1.30}$$

Demostración. Integrando por partes tenemos que

$$\int_a^r t^{\rho-\lambda}t^{\rho(t)-\rho}dt$$

$$=\left[\frac{t^{\rho(t)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda}\right]_{t=a}^{t=r}-\int_a^r\frac{t^{\rho(t)-\lambda}(\rho(t)-\rho)+t^{\rho(t)+1-\lambda}\rho'(t)\ln t}{\rho+1-\lambda}dt.\tag{1.31}$$

Por la definición de orden aproximado para todo $\varepsilon>0$ existe un $T_\varepsilon>0$ tal que si $t>T_\varepsilon$ se tiene que

$$|\rho(t)-\rho|<\varepsilon/2,\quad |t\rho'(t)\ln t|<\varepsilon/2,$$

por lo que podemos afirmar que

$$\frac{(\rho(t)-\rho)+t\rho'(t)\ln t}{\rho+1-\lambda}=o(1).$$

Pasando el segundo término del lado derecho de la igualdad (1.31) al otro lado obtenemos que

$$(1+o(1))\int_a^r t^{\rho(t)-\lambda}dt = \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} - \frac{a^{\rho(a)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} = \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} + O(1).$$

Dividiendo por el factor $(1+o(1))$ y teniendo en cuenta que a partir de un r sabemos que $\rho(r)+1>\lambda$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(1{+}o(1))\int_a^r t^{\rho(t)-\lambda}dt &= \frac{1}{1+o(1)}\left[\frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda}+O(1)\right] \\
&= \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{(\rho+1-\lambda)(1+o(1))} + \frac{O(1)}{(1+o(1))} + \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} - \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} \\
&= \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} + \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}-(1+o(1))r^{\rho(r)+1-\lambda}+O(1)(\rho+1-\lambda)}{(\rho+1-\lambda)(1+o(1))} \\
&= \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} + \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}-r^{\rho(r)+1-\lambda}+o(r^{\rho(r)+1-\lambda})+O(1)}{(\rho+1-\lambda)(1+o(1))} \\
&= \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} + \frac{o(r^{\rho(r)+1-\lambda})+O(1)}{(\rho+1-\lambda)(1+o(1))} = \frac{o(r^{\rho(r)+1-\lambda})}{(\rho+1-\lambda)(1+o(1))} \\
&= \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} + O(1)o(r^{\rho(r)+1-\lambda}) = \frac{r^{\rho(r)+1-\lambda}}{\rho+1-\lambda} + o(r^{\rho(r)+1-\lambda}),
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. Por otra parte, operando de forma análoga para $\lambda > \rho+1$ se prueba (1.30). ★

Notación 1.38. Precisamos el concepto de logaritmo de un producto de factores de Weierstrass, puesto que los siguientes resultados contienen varias estimaciones de estos logaritmos. En primer lugar, definimos la función

$$\log E(z;\rho) = \log\Big((1-z)e^{P(z)}\Big) = \ln|1-z| + i\arg(1-z) + P(z),$$

en $\mathbb{C}\backslash[1,\infty)$ donde $P(z) = z + z^2/2 + \ldots + z^p/p$ y $|\arg(1-z)| < \pi$. En segundo lugar, dada una sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números complejos, de forma que $\Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/a_k;p)$ converge, tenemos que la función $\log E(z/a_k;p)$ está definida en $\mathbb{C}\backslash\Gamma_k$, donde Γ_k es la semirrecta que parte de a_k en la dirección de $\theta = \arg a_k$, y definimos sobre el domino estrellado $\mathbb{C}\backslash\left(\cup_{k=1}^{\infty}\Gamma_k\right)$ la función

$$\log\Pi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\log E(z/a_k;p).$$

Lema 1.39. Sea $p > 0$ un entero, entonces para todo número complejo $u \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\ln|E(z;p)| < A_p \frac{|z|^{p+1}}{1+|z|}, \tag{1.32}$$

donde $A_p = 3e(2 + \ln p)$. Por otra parte, si $p = 0$ se tiene que

$$\ln|E(z;0)| \leq \ln(1+|z|). \tag{1.33}$$

donde las funciones $E(z;k)$ son los factores elementales de Weierstrass.

Demostración. Para $p = 0$, el resultado es inmediato puesto que $|E(z;0)| = |1-z| \leq 1+|z|$. Por otra parte, si $p > 0$, y si $|z| \leq p/p+1$, aplicando el desarrollo en serie del logaritmo para $|z| < 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\ln|E(z;p)| &= \ln\left|(1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)\right| \\
&= \ln|1-z| + \operatorname{Re}\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) = -\operatorname{Re}\left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, para $|z| \leq p/p+1$,

$$\begin{aligned}
\ln|E(z;p)| &= -\operatorname{Re}\left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\right) \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} < \frac{|z|^{p+1}}{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |z|^{k-p-1} \\
&= \frac{|z|^{p+1}}{(p+1)(1-|z|)} \leq \frac{|z|^{p+1}}{[(p+1)(p+1-p)]/(p+1)} \leq |z|^{p+1}.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\frac{A_p}{1+|z|} \geq 3e\left(1 + \frac{(p+1)\ln p + 1}{2p+1}\right) \geq 1,$$

por lo que podemos concluir que para $|z| \leq p/p+1$,

$$\ln|E(z;p)| < A_p \frac{|z|^{p+1}}{1+|z|}.$$

Para $|z| > p/p+1$, como $\ln(1+|z|) \leq |z|$, podemos afirmar

$$\begin{aligned}
\ln|E(z;p)| &\leq \ln(1+|z|) + |z| + \frac{|z|^2}{2} + \ldots + \frac{|z|^p}{p} \\
&\leq |z|^p \left(2\left|\frac{1}{z}\right|^{p-1} + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{z}\right|^{p-2} + \ldots + \frac{1}{p-1}\left|\frac{1}{z}\right| + \frac{1}{p}\right) \\
&< |z|^p \left[2\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p-1} + \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p-k}\right].
\end{aligned}$$

En consecuencia, como $\sum_2^p 1/k \leq \int_1^p x^{-1}dx$, tenemos que

$$\ln|E(z;p)| < |z|^p \left(1+\frac{1}{p}\right)^p \left(\sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k} + 2\right) < |z|^p \left(1+\frac{1}{p}\right)^p \left(\int_1^p \frac{dx}{x} + 2\right)$$

$$< |z|^p e\,(\ln p + 2) = \frac{|z|^p|z|}{3|z|} 3e\,(\ln p + 2) < A_p \frac{|z|^{p+1}}{1+|z|}.$$

★

Lema 1.40. Sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tal que la sucesión de módulos $\{|a_k|\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión no decreciente de números reales positivos. Sea $p \in N_0$ tal que $\Sigma_{k=1}^{\infty}(a_k)^{-1-p}$ converge. Entonces el producto

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/a_k; p)$$

verifica la desigualdad

$$\ln|\Pi(z)| < k_p r^p \left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt\right),$$

donde $r = |z|$ y donde $k_p = 3e(p+1)(2+\ln p)$ si $p > 0$, y si $p = 0$ entonces $k_0 = 1$.

Demostración. Si $p > 0$, a partir de (1.32) tenemos que

$$\ln|\Pi(z)| < A_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{p+1}}{|a_n|^p(|a_n|+r)}.$$

Usando la notación de la integral de Stieltjes se tiene que

$$\ln|\Pi(z)| < A_p r^{p+1} \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{t^p(t+r)}.$$

Teniendo en cuenta que $0 < |a_1|$ e integrando por partes (ver Teorema A.4) obtenemos que

$$\int_0^r \frac{dn(t)}{t^p(t+r)} = \frac{n(r)}{t^p(t+r)} + \int_0^r \frac{pr+(p+1)t}{t^p+1(t+r)^2} n(t)dt.$$

Por otra parte, la convergencia de la serie $\Sigma_{k=1}^{\infty}(a_k)^{-1-p}$ implica, aplicando el Lema 1.35, que $p+1 > \lambda(\{a_k\}) = \rho(n(r))$ y en consecuencia,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{p+1}} = 0.$$

Junto con los dos resultados anteriores, tomando límite cuando $r \to \infty$ en la igualdad de la integración por partes, tenemos que

$$\ln |\Pi(z)| < A_p r^{p+1} \int_0^\infty \frac{pr + (p+1)t}{t^p + 1(t+r)^2} n(t)dt < A_p r^{p+1} \int_0^\infty \frac{(p+1)n(t)}{t^p + 1(t+r)} dt,$$

puesto que $(pr + (p+1)t)(t+r)^{-1} < p+1$ para todo $t > 0$ y todo $r > 0$. Por último, dividiendo la integral en dos partes vemos que

$$\ln |\Pi(z)| < A_p(p+1)r^p \left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \right).$$

Cuando $p = 0$ la estimación se demuestra de manera análoga usando (1.33) en lugar de (1.32). ★

El siguiente teorema nos muestra la relación existente entre un orden aproximado de una función y el número de ceros en caso en que ρ no es entero. Esta relación nos va a servir para poder afirmar que las funciones que vamos a constuir tienen el orden aproximado deseado.

Teorema 1.41. Sea f una función entera no constante, sea $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ la sucesión no decreciente, en módulo, de ceros de f, sea $n(r)$ el número de miembros de $\{|a_k|\}_{k=1}^\infty$ contados con su multiplicidad verificando que $|a_k| \leq r$ y, por último, sea $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho > 0$ no entero. Si existe $0 < \Delta < \infty$ tal que $n(r) \sim \Delta\rho(r)$, entonces

$$\sigma_f = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho(r)}} \leq a_\rho \Delta,$$

donde $a_\rho > 0$ es una constante que no depende de la función f.

Demostración. Usando la representación de f dada por el Teorema de Factorización de Hadamard (Teorema 1.15) y aplicando el Lema 1.40, vemos que

$$\ln M_f(r) < m \ln r + \max_{|z|=r} |P(z)| + k_p r^p \left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}} dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{p+2}} dt \right),$$

donde $p < \rho$ porque ρ no es entero. Observamos que, como el grado de P es menor o igual que p, $m \ln r + \max_{|z|=r} |P(z)| = O(r^p)$. Por otra parte, como $n(r) \sim \Delta\rho(r)$, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ de modo que

$$n(r) < (\Delta + \varepsilon) r^{\rho(r)} \qquad r > R,$$

y existe $A > 0$ tal que

$$n(r) < (\Delta + \varepsilon) A r^{\rho(r)}, \qquad r > 0.$$

Como $p+1 < \rho+1 < p+2$, podemos aplicar (1.29) y (1.30) y uniéndolo a todo lo anterior vemos que

$$\begin{aligned}
\ln M_f(r) &< O(r^p) + k_p r^p(\Delta+\varepsilon)\left(A\int_0^r \frac{t^{\rho(t)}}{t^{p+1}}dt + r\int_r^\infty \frac{t^{\rho(t)}}{t^{p+2}}dt\right) \\
&< o(r^{\rho(r)}) + k_p r^p(\Delta+\varepsilon)\left(\frac{Ar^{\rho(r)-p}}{\rho-p} + \frac{r^{\rho(r)-p}}{p+1-\rho} + o(r^{\rho(r)-p})\right) \\
&= o(r^{\rho(r)}) + k_p(\Delta+\varepsilon)\left(\left[\frac{A}{\rho-p} + \frac{1}{p+1-\rho}\right] r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)})\right),
\end{aligned}$$

de donde se deduce que para $r > R' > 0$, suficientemente grande, tenemos que

$$\frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho(r)}} \leq a'_\rho(\Delta+\varepsilon)+\varepsilon,$$

y tomando límites concluimos que $\sigma_f \leq a_\rho \Delta$. ★

Lema 1.42. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado satisfaciendo que existe p entero tal que $p < \rho < p+1$, sea $0 < \Delta < \infty$ y sea $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ la sucesión no decreciente de números reales positivos dada por el Lema 1.36. Sea $0 < \nu < 1/2$, si consideramos la función definida a trozos y sin ceros

$$f_\nu(z) = \prod_{|a_k|<\nu|z|} E\left(\frac{z}{a_k};p\right),$$

entonces se verifica que

$$|\log f_\nu(z)| < C_p \nu^{\rho-p} r^{\rho(r)},$$

(ver Notación 1.38) para todo $|z| = r > R_\nu > 0$, donde la constante C_p no depende de ν.

Demostración. Vamos a acotar $|\ln|f_\nu(z)||$ en primer lugar, y en segundo lugar $|\arg f_\nu(z)|$. Para $\rho > 0$, si $r = |z|$, por la igualdad (1.32) del Lema 1.39 podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
\ln|f_\nu(z)| &\leq \sum_{|a_k|<\nu r} \ln|E(z/a_k;p)| \leq A_p \sum_{|a_k|<\nu r} \frac{(|z|/|a_k|)^{p+1}}{1+|z|/|a_k|} \\
&\leq A_p|z|^{p+1} \sum_{|a_k|<\nu r} \frac{1}{|a_k|^p(|a_k|+|z|)} = A_p r^{p+1} \sum_{|a_k|<\nu r} \frac{1}{|a_k|^p(|a_k|+r)}.
\end{aligned}$$

Esto equivalentemente quiere decir, considerando la notación de la integral de Stieltjes, que

$$\ln|f_\nu(z)| \leq A_p r^{p+1} \int_0^{\nu r} \frac{dn(t)}{t^p(t+r)}.$$

Integrando por partes, y teniendo en cuenta que $(p+1)t+r \leq (p+1)(t+r)$ para todo $t \in [0,\nu r]$ y que $0 < a_1$, se deduce que

$$\begin{aligned}\ln|f_\nu(z)| &\leq A_p r^{p+1}\left[\left[\frac{n(t)}{t^p(t+r)}\right]_{t=0}^{t=\nu r} + \int_0^{\nu r} n(t)\frac{(p+1)t+r}{t^{p+1}(t+r)^2}dt\right] \\ &\leq A_p r^{p+1}\left(\frac{n(\nu r)}{(\nu r)^p(1+\nu)r} + (p+1)\int_0^{\nu r}\frac{n(t)}{t^{p+1}(t+r)}dt\right).\end{aligned}$$

Como sabemos que $n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)}$, existe $C > 0$ tal que $n(r) < Cr^{\rho(r)}$ para todo $r > 0$, y por tanto,

$$\begin{aligned}\ln|f_\nu(z)| &< A_p\frac{C(\nu r)^{\rho(\nu r)}}{\nu^p(1+\nu)} + (p+1)A_pCr^{p+1}\int_0^{\nu r}\frac{t^{\rho(t)}}{t^{p+1}(t+r)}dt \\ &\leq A_p\frac{C(\nu r)^{\rho(\nu r)}}{\nu^p(1+\nu)} + (p+1)A_pCr^p\int_0^{\nu r}t^{\rho(t)-p-1}dt.\end{aligned}$$

puesto que $(t+r) \geq r$ para todo $t \in [0,\nu r]$. Esta última integral se puede calcular usando (1.29), puesto que $p+1 < \rho+1$, y tenemos que

$$\int_0^{\nu r} t^{\rho(t)-p-1}dt = \frac{1}{\rho-p}(\nu r)^{\rho(\nu r)-p} + o\left((\nu r)^{\rho(\nu r)-p}\right).$$

Por lo que, junto con la desigualdad anterior, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\ln|f_\nu(z)| &< \frac{A_pC}{\nu^p}\left[\frac{(\nu r)^{\rho(\nu r)}}{(1+\nu)} + \frac{p+1}{\rho-p}(\nu r)^{\rho(\nu r)} + o\left((\nu r)^{\rho(\nu r)}\right)\right] \\ &\leq \frac{A_pC(\nu r)^{\rho(\nu r)}}{\nu^p}\left[\frac{1}{(1+\nu)} + \frac{p+1}{\rho-p} + \frac{o\left((\nu r)^{\rho(\nu r)}\right)}{(\nu r)^{\rho(\nu r)}}\right].\end{aligned}$$

Recordamos que por la Proposición 1.28,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(\nu r)}{V(r)} = \lim_{r\to\infty}\frac{(\nu r)^{\rho(\nu r)}}{r^{\rho(r)}} = \nu^\rho, \qquad \nu \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Por lo tanto, para todo $\nu \in (0,1/2)$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $R_{\varepsilon,\nu} > 0$ tal que para todo $r > R_{\varepsilon,\nu}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\ln|f_\nu(z)| &< \frac{A_pC\nu^\rho(1+\varepsilon)r^{\rho(r)}}{\nu^p}\left[1 + \frac{p+1}{\rho-p} + \varepsilon\right] \\ &< A_pC\nu^{\rho-p}(1+\varepsilon)r^{\rho(r)}D_p = C_p' r^{\rho(r)}\nu^{\rho-p}.\end{aligned}$$

En particular, tomando $\varepsilon = 1$, si $R_{1,\nu} =: R'_\nu$ tenemos que, para todo $r > R'_\nu$,

$$\ln|f_\nu(z)| < A_p C 2\nu^{\rho-p} r^{\rho(r)} \left[1 + \frac{p+1}{\rho - p} + 1\right]$$
$$= A_p C 2\nu^{\rho-p} r^{\rho(r)} D_p = c'_p r^{\rho(r)} \nu^{\rho-p},$$

donde la constante $c'_p := 2A_p C D_p$ no depende de ν.

Por otra parte, como $\nu < 1/2$ para $|z| = r \geq 1/\nu > 2$, tenemos que $\ln|1-z| \geq 0$, y consecuentemente

$$\begin{aligned}
\ln|E(z;p)| &= \ln|1-z| + \operatorname{Re}\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) \\
&\geq -|z| - \frac{|z|^2}{2} - \ldots - \frac{|z|^p}{p} = -|z|^p \left(1 + \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k}\left|\frac{1}{z}\right|^{p-k}\right) \\
&\geq -|z|^p \left(1 + \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k}\right) \geq -|z|^p \left(1 + \int_1^p \frac{dx}{x}\right) = -|z|^p(1 + \ln p),
\end{aligned}$$

de donde se deduce de forma inmediata que

$$\ln|E(z;p)| > -|z|^p e\frac{3|u|}{3|u|}(1+\ln p) \geq -|z|^{p+1}\frac{3e(2+\ln p)}{|z|+1} = -A_p \frac{|z|^{p+1}}{|z|+1}.$$

Usando esta desigualdad en lugar de (1.32) y razonando de forma análoga obtenemos que dado $\nu \in (0, 1/2)$ existe $R''_\nu > 0$ tal que para todo $r > R''_\nu$,

$$\ln|f_\nu(z)| > -c''_p r^{\rho(r)} \nu^{\rho-p},$$

y en consecuencia, para todo $r > R^1_\nu = \max\{R''_\nu, R'_\nu\}$,

$$|\ln|f_\nu(z)|| < c_p r^{\rho(r)} \nu^{\rho-p}. \tag{1.34}$$

donde $c_p = \max\{c''_p, c'_p\}$.

Para $p = 0$ y $\rho > 0$ también obtenemos la desigualdad (1.34) operando de manera similar al caso $p > 0$, haciendo uso de (1.33).

Estimemos ahora $\arg f_\nu(z)$. Para todo $|z| \geq 1$, tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}
&|\arg E(z;p)| \leq |\arg(1-z)| + \left|\arg\exp\left(z + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)\right| \\
&\leq |\arg(1 - (1 + re^{i\theta}))| + \operatorname{Im}\left(z + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) < 2\pi + \sum_{k=1}^{p} \frac{|z|^k}{k} \\
&\leq |z|^p \left[2\pi + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\right] = A'_p |z|^p.
\end{aligned}$$

Como $|a_k| < r\nu < r$ tenemos que $r/|a_k| \geq 1$ y deducimos que

$$|\arg f_\nu(z)| \leq \sum_{|a_k|<\nu r} |\arg E(z/a_k;p)| \leq A'_p \sum_{|a_k|<\nu r} \frac{|z|^p}{|a_k|^p} \leq A'_p r^p \int_0^{\nu r} \frac{dn(t)}{t^p}.$$

Realizando un proceso análogo de estimación al realizado para obtener (1.34), tenemos que para todo $\nu \in (0,1/2)$, existe $R_\nu^2 > 0$ tal que para todo $r > R_\nu^2$, se verifica

$$|\arg f_\nu(z)| < c_p''' r^{\rho(r)} \nu^{\rho-p},$$

con c_p''' independiente de ν, lo que unido a (1.34) nos permite concluir que para todo $\nu \in (0,1/2)$, y para todo $r > \text{máx}\{R_\nu^1, R_\nu^2\}$ se verifica que

$$|\log f_\nu(z)| \leq |ln|f_\nu(z)|| + |\arg f_\nu(z)| \leq C_p r^{\rho(r)} \nu^{\rho-p},$$

donde $C_p = \text{máx}\{c_p, c_p'''\}$ no depende de ν. ★

Lema 1.43. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado satisfaciendo que existe p entero tal que $p < \rho < p+1$, sea $0 < \Delta < \infty$ y sea $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ la sucesión no decreciente de números reales positivos dada por el Lema 1.36. Sea $\tau > 2$, si consideramos la función definida a trozos y sin ceros

$$f^\tau(z) = \prod_{|a_k|\geq \tau r} E(z/a_k;p),$$

entonces se verifica que

$$|\log f^\tau(z)| < C^p \tau^{\rho-p-1} r^{\rho(r)}$$

(ver Notación 1.38) para todo $r > R_\tau > 0$, donde la constante C^p no depende de τ.

Demostración. Consideramos el siguiente desarrollo en serie, válido para todo $|z| < 1$ dado por

$$\log E(z;p) = \log(1-z) + \log\left(\exp\left(z + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)\right) = -\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Si $|z| < 1/2$ deducimos consecuentemente que

$$|\log E(z;p)| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} \leq \frac{|z|^{p+1}}{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \leq \frac{|z|^{p+1}}{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2|z|^{p+1}}{p+1}. \tag{1.35}$$

Para estimar $|\log f^\tau(z)|$ podemos aplicar esta desigualdad, puesto que si $|a_k| \geq r\tau > 2|z|$, siempre se da que $|z|/a_k < 1/2$, y se sigue que

$$|\log f^\tau(z)| \leq \sum_{|a_k|\geq \tau r} |\log E(z/a_k;p)| \leq \sum_{|a_k|\geq \tau r} \frac{2|z|^{p+1}}{|a_k|^{p+1} p+1}.$$

Considerando la notación de la integral de Stieltjes (ver Definición A.1) y realizando una integración por partes, obtenemos la siguiente desigualadad,

$$|\log f^{\tau}(z)| < \frac{2r^{p+1}}{p+1}\int_{\tau r}^{\infty}\frac{dn(t)}{t^{p+1}} = \frac{2r^{p+1}}{p+1}\left[-\frac{n(\tau r)}{(\tau r)^{p+1}} + (p+1)\int_{\tau r}^{\infty}\frac{n(t)dt}{t^{p+2}}\right],$$

puesto que $\lim_{r\to\infty} n(r)/r^{p+1} = 0$ porque $\rho < p+1$. Por otro lado, como $n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)}$, existe $C > 0$ tal que $n(r) < Cr^{\rho(r)}$ para todo $r > 0$, y se tiene que

$$|\log f^{\tau}(z)| < -\frac{2r^{p+1}n(\tau r)}{(p+1)(\tau r)^{p+1}} + 2r^{p+1}C\int_{\tau r}^{\infty}\frac{t^{\rho(t)}dt}{t^{p+2}} < 2r^{p+1}C\int_{\tau r}^{\infty}\frac{t^{\rho(t)}dt}{t^{p+2}}.$$

Para calcular esta última integral podemos hacer uso de (1.30), puesto que $p+2 > \rho+1$, y tendríamos que

$$\int_{\tau r}^{\infty} t^{\rho(t)-p-2}dt = \frac{1}{p+1-\rho}(\tau r)^{\rho(\tau r)-p-1} + o((\tau r)^{\rho(\tau r)-p-1}),$$

de donde se deduce que

$$|\log f^{\tau}(z)| < 2C\tau^{-p-1}(\tau r)^{\rho(\tau r)}\left[\frac{1}{p+1-\rho} + \frac{o((\tau r)^{\rho(\tau r)})}{(\tau r)^{\rho(\tau r)}}\right].$$

Por la Proposición 1.28, y la definición de la notación o de Landau, se tiene que para todo $\nu \in (0, 1/2)$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $R_{\varepsilon,\nu} > 0$ tal que para todo $r > R_{\varepsilon,\nu}$, tenemos que

$$|\log f^{\tau}(z)| < 2C\tau^{\rho-p-1}(1+\varepsilon)r^{\rho}(r)\left[\frac{1}{p+1-\rho} + \varepsilon\right].$$

En particular, para $\varepsilon = 1$, existe $R_{\nu} > 0$ tal que para todo $r > R_{\nu}$ tenemos que

$$|\log f^{\tau}(z)| < 4C\tau^{\rho-p-1}r^{\rho}(r)\left[\frac{1}{p+1-\rho} + 1\right] = C_p\tau^{\rho-p-1}r^{\rho}(r),$$

donde C_p no depende de ν. ★

Teorema 1.44. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado satisfaciendo que existe p entero tal que $p < \rho < p+1$, sea $0 < \Delta < \infty$ y sea $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ la sucesión no decreciente de números reales positivos dada por el Lema 1.36. Entonces la función $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/a_k; p)$ es una función entera y se tiene que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log f(-re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}} = \frac{\pi\Delta}{\operatorname{sen}(\pi\rho)}e^{i\rho\theta}, \quad |\theta| < \pi; \quad \log f(0) = 0, \tag{1.36}$$

(ver Notación 1.38) y la convergencia es uniforme en todos los compactos $[a, b] \subseteq (-\pi, \pi)$. Además podemos afirmar que f es una función entera de orden ρ y orden aproximado $\rho(r)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como $p < \rho < p+1$, podemos tomar $\nu > 0$ suficientemente pequeño y $\tau > 2$ suficientemente grande de forma que para todo $r > R_{\tau,\nu} = \text{máx}\{R_\nu, R_\tau\}$,

$$|\log f_\nu(z) + \log f_\tau(z)| \leq C'_p \nu^{\rho-p} r^{\rho}(r) + C''_p \tau^{\rho-p-1} r^{\rho}(r) < \frac{\varepsilon}{8} r^{\rho}(r) + \frac{\varepsilon}{8} r^{\rho}(r),$$

por lo tanto, tomando ν y τ de este modo se tiene que

$$\left|\log f(z) - \sum_{\nu r \leq a_k < \tau r} \log E(z/a_k; p)\right| \leq |\log f_\nu(z) + \log f_\tau(z)| < \frac{\varepsilon}{4} r^{\rho}(r), \tag{1.37}$$

donde $|z| = r > R_{\tau,\nu}$. El sumatorio que aparece en esta desigualdad se puede expresar mediante la integral de Stieltjes del siguiente modo:

$$\sum_{\nu r \leq a_k < \tau r} \log E(z/a_k; p) = \int_{\nu r}^{\tau r} \log E\left(\frac{z}{t}; p\right) dn(t).$$

Integrando por partes tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\nu r}^{\tau r} \log E\left(\frac{z}{t}; p\right) dn(t) &= \left[n(t) \log E\left(\frac{z}{t}; p\right)\right]_{\nu r}^{\tau r} - \int_{\nu r}^{\tau r} \frac{n(t)\partial_t E\left(\frac{z}{t}; p\right) dt}{E\left(\frac{z}{t}; p\right)} \\
&= n(\tau r) \log E\left(\frac{z}{\tau r}; p\right) - n(\nu r) \log E\left(\frac{z}{\nu r}; p\right) \\
&\quad - \int_{\nu r}^{\tau r} \frac{n(t)\left(\frac{z}{t^2}\right) - (1 - \frac{z}{t}) P'(\frac{z}{t}) \frac{z}{t^2}\right) dt}{(1 - z/t)} \\
&= n(\tau r) \log E\left(\frac{e^{i\theta}}{\tau}; p\right) - n(\nu r) \log E\left(\frac{e^{i\theta}}{\nu}; p\right) \\
&\quad - \int_{\nu r}^{\tau r} \frac{n(t)\left(t^p z - z(t-z) t^{p-1} P'(z/t)\right) dt}{t^{p+1}(t-z)}
\end{aligned}$$

$$= n(\tau r) \log E\left(\frac{e^{i\theta}}{\tau}; p\right) - n(\nu r) \log E\left(\frac{e^{i\theta}}{\nu}; p\right) - \int_{\nu r}^{\tau r} \frac{n(t) z^{p+1} dt}{t^{p+1}(t-z)}, \tag{1.38}$$

donde $P(z) = z + z^2/2 + \ldots + z^p/p$ y donde $z = re^{i\theta}$. Por otro lado, para todo $\varepsilon > 0$, como $n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)}$ y por la Proposición 1.28, para $r > R'_\tau$ se tiene que

$$n(\tau r) < (\Delta + \delta)(\tau r)^{\rho(\tau r)} < (\Delta + \delta)(1 + \delta) \tau^{\rho} r^{\rho(r)} \leq (\Delta + \varepsilon) \tau^{\rho} r^{\rho(r)},$$

donde tomamos $\delta > 0$ verificando $\delta(1 + \Delta + \delta) < \varepsilon$ suficientemente pequeño. En consecuencia, usando la desigualdad (1.35) y tomando $\tau > 2$ suficientemente grande,

$$n(\tau r) \left|\log E(e^{i\theta}/\tau; p)\right| < (\Delta + \varepsilon) \tau^{\rho} r^{\rho(r)} \frac{2}{p+1} \frac{1}{\tau^{p+1}} < \frac{\varepsilon}{8} r^{\rho(r)},$$

para todo $r > R'_\tau$. Operando de manera similar pero utilizando, en esta ocasión, el Lema 1.42, obtenemos que para todo $r > R'_\nu$ suficientemente grande se tiene que

$$n(\nu r)\left|\log E(e^{i\theta}/\nu;p)\right| < \frac{\varepsilon}{8}r^{\rho(r)},$$

para valores de ν suficientemente pequeños. Aplicando estas desigualdades en (1.38) podemos escribir que

$$\left|\sum_{\nu r\leq a_k<\tau r}\log E(z/a_k;p) + z^{p+1}\int_{\nu r}^{\tau r}\frac{n(t)dt}{t^{p+1}(t-z)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}r^{\rho(r)}, \tag{1.39}$$

para todo $r > R_1 := \text{máx}\{R'_\tau, R'_\nu\}$. Como sabemos que $n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)}$, para todo $\delta > 0$ tenemos que

$$|n(t) - \Delta t^{\rho(t)}| = |n(t) - \Delta t^\rho L(t)| < \delta t^\rho L(t),$$

donde $L(t) = t^{\rho(t)-\rho}$, para valores de t suficientemente grandes. Así pues, para todo $0 < \theta < 2\pi$ se tiene que

$$\left|z^{p+1}\int_{\nu r}^{\tau r}\frac{\Delta t^\rho L(t)dt}{t^{p+1}(t-z)} - z^{p+1}\int_{\nu r}^{\tau r}\frac{n(t)dt}{t^{p+1}(t-z)}\right| < \delta r^{p+1}\int_{\nu r}^{\tau r}\frac{t^{\rho-p-1}L(t)dt}{|t-re^{i\theta}|},$$

donde r es suficientemente grande. Por otra parte, recordamos que por la Proposición 1.27,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(sr)}{L(r)} = \lim_{r\to\infty}\frac{(sr)^{\rho(sr)-\rho}}{r^{\rho(r)-\rho}} = 1, \qquad s\in(0,\infty),$$

con convergencia uniforme en todos los compactos $[a,b] \subseteq (0,\infty)$. Por tanto, para todo $t \in [\nu r, \tau r]$ tenemos que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(t)}{L(r)} = 1, \tag{1.40}$$

uniformemente en t, por lo que para $r > R_2 > 0$ suficientemente grande tenemos que

$$r^{p+1}\int_{\nu r}^{\tau r}\frac{t^{\rho-p-1}L(t)dt}{|t-re^{i\theta}|} < 2r^{p+1}L(r)\int_{\nu r}^{\tau r}\frac{t^{\rho-p-1}dt}{|t-re^{i\theta}|} = 2r^{\rho(r)}\int_{\nu}^{\tau}\frac{u^{\rho-p-1}du}{|u-e^{i\theta}|},$$

donde se ha hecho el cambio de variable $t = ur$. Como dado $\eta > 0$, para todo $\theta \in [\eta, 2\pi-\eta]$ la integral del lado derecho de la igualdad está acotada uniformemente, tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeño se obtiene que

$$\left|z^{p+1}\int_{\nu r}^{\tau r}\frac{\Delta t^\rho L(t)dt}{t^{p+1}(t-z)} - z^{p+1}\int_{\nu r}^{\tau r}\frac{n(t)dt}{t^{p+1}(t-z)}\right| < \frac{\varepsilon}{8}r^{\rho(r)}, \tag{1.41}$$

para todo $r > R_3 > R_2 > 0$ uniformemente en $[\eta, 2\pi - \eta]$. Del mismo modo usando también (1.40),

$$\left|\Delta e^{i(p+1)\theta} r^{\rho} L(r) \int_{\nu}^{\tau} \frac{u^{\rho-p-1}du}{u-e^{i\theta}} - z^{p+1} \int_{\nu r}^{\tau r} \frac{\Delta t^{\rho} L(t) dt}{t^{p+1}(t-z)}\right|$$

$$= \left|\Delta e^{i(p+1)\theta} r^{\rho} \left[L(r) \int_{\nu}^{\tau} \frac{u^{\rho-p-1}du}{u-e^{i\theta}} - \frac{r^{-\rho} z^{p+1}}{e^{i(p+1)\theta}} \int_{\nu}^{\tau} \frac{r^{\rho} u^{\rho} L(ur) r du}{r^{p+1} u^{p+1}(ur - re^{i\theta})}\right]\right|$$

$$= \left|\Delta e^{i(p+1)\theta} r^{\rho} \left[\int_{\nu}^{\tau} \frac{u^{\rho}(L(r) - L(ur))du}{u^{p+1}(u-e^{i\theta})}\right]\right| \leq \Delta \int_{\nu}^{\tau} \frac{r^{\rho} L(r) u^{\rho} \varepsilon' du}{u^{p+1}|u-e^{i\theta}|} < \frac{\varepsilon}{8} r^{\rho(r)}, \tag{1.42}$$

porque para todo $\theta \in [\eta, 2\pi - \eta]$ la integral está uniformemente acotada y tomando $r > R_4$ suficientemente grande podemos hacer ε' tan pequeño como necesitemos para que se verifique el resultado. A continuación, por la definición de integral impropia, para $\nu > 0$ suficientemente pequeño y $\tau > 2$ suficientemente grande se tiene que

$$\left|\int_{0}^{\infty} \left(\frac{u^{\rho-p-1}du}{u-e^{i\theta}}\right) - \int_{\nu}^{\tau} \left(\frac{u^{\rho-p-1}du}{u-e^{i\theta}}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{8\Delta},$$

y en consecuencia, para todo $r > 0$ y todo $\theta \in (0, 2\pi)$ se tiene que

$$|\Delta r^{\rho(r)} e^{i(p+1)\theta}| \left|\int_{0}^{\infty} \left(\frac{u^{\rho-p-1}du}{u-e^{i\theta}}\right) - \int_{\nu}^{\tau} \left(\frac{u^{\rho-p-1}du}{u-e^{i\theta}}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{8} r^{\rho(r)}. \tag{1.43}$$

Encadenando las desigualdes (1.37),(1.39), (1.41), (1.42) y (1.43) deducimos que dado $\eta \in (0, \pi)$ existe $R_\eta > \text{máx}\{R_{\tau,\nu}, R_1, R_4, R_3\}$ tal que para todo $r > R_\eta$ y todo $\theta \in [\eta, 2\pi - \eta]$ se tiene que

$$\left|\log f(z) + r^{\rho(r)} \Delta e^{i(p+1)\theta} \int_{0}^{\infty} \frac{u^{\rho-p-1}}{u-e^{i\theta}} du\right| < \varepsilon r^{\rho(r)}. \tag{1.44}$$

Para finalizar, calculamos esta última integral. Tomamos $\lambda = \rho - p - 1$, $P(u) = 1$ y $Q(u) = u - e^{i\theta}$, y vemos que se verifican las hipótesis de la Proposición A.5; por tanto,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{u^{\rho-p-1}}{u-e^{i\theta}} du = \frac{2\pi i}{1 - e^{2i\pi(\rho-p-1)}} \operatorname{Res}\left(\frac{\exp((\rho-p-1)\log_0 u)}{u-e^{i\theta}}, e^{i\theta}\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{1 - e^{2i\pi(\rho-p-1)}} e^{i\theta(\rho-p-1)} = e^{i\theta(\rho-p-1)} \frac{\pi 2i}{1 - e^{2i\pi\rho}} = e^{i\theta(\rho-p-1) - i\pi\rho} \frac{-\pi}{\operatorname{sen}(\pi\rho)}.$$

Juntando esto con (1.44) concluimos que para $r > R_\eta$,

$$\left|\log f(z) - r^{\rho(r)} \frac{\Delta \pi e^{i\rho(\theta-\pi)}}{\operatorname{sen}(\pi\rho)}\right| = \left|\log f(z) + \frac{r^{\rho(r)}\Delta}{e^{-i(p+1)\theta}} \int_{0}^{\infty} \frac{u^{\rho-p-1}}{u-e^{i\theta}} du\right| < \varepsilon r^{\rho(r)}$$

que es equivalente a (1.36) observando que $-re^{i\theta} = re^{i(\theta-\pi)}$ y que $f(0) = 1$. Usando este límite veamos que $\rho(r)$ es un orden aproximado para f. Por una parte, por el Teorema 1.41 sabemos que $\sigma_f \leq a_\rho \Delta < \infty$. Por otro lado, del lema que acabamos de probar se deduce que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|f(-re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{Re}(\log f(-re^{i\theta}))}{r^{\rho(r)}} = \frac{\pi\Delta}{\operatorname{sen}(\pi\rho)} \cos(\rho\theta),$$

con convergencia uniforme en los compactos de $|\theta| < \pi$. Tomamos θ_0 de modo que $\operatorname{sen}(\pi\rho)\cos(\rho\theta_0) > 0$, lo que es siempre posible: si $\rho \leq 1/2$, $|\rho\theta| \leq \pi/2$ y $0 < \rho\pi \leq \pi/2$ y por tanto, el seno y el coseno toman valores positivos; y si $\rho > 1/2$ el coseno toma valores positivos y negativos y podemos tomar θ_0 verificando la hipótesis. De este hecho deducimos que

$$\sigma_f = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho(r)}} \geq \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|f(-re^{i\theta_0})|}{r^{\rho(r)}} = \frac{\pi\Delta}{\operatorname{sen}(\pi\rho)} \cos(\rho\theta_0) > 0.$$

Por tanto, $0 < \sigma_f < \infty$ y f es una función entera de orden ρ y orden aproximado $\rho(r)$. ★

El razonamiento que hemos utilizado para probar este teorema no es aplicable en el caso en el que ρ es entero, puesto que los Lemas 1.42 y 1.43 no pueden usarse para probar la desigualdad (1.37). Para estudiar el caso en que ρ es entero vamos a probar el siguiente lema.

Lema 1.45. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado satisfaciendo que $\rho(r) \to \rho \in \mathbb{N}$ ($\rho > 0$) cuando $r \to \infty$, sea $0 < \Delta < \infty$ y sea $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ la sucesión no decreciente de números reales positivos dada por el Lema 1.39. Consideramos la función definida a trozos

$$V(z) = \prod_{|a_k|<r} E\left(\frac{z}{a_k}; \rho - 1\right) \prod_{|a_k|\geq r} E\left(\frac{z}{a_k}; \rho\right),$$

donde $r = |z|$. Entonces, para $z = re^{i\theta}$ con $0 < \theta < 2\pi$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log V(re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}} = -\Delta \left[\frac{1}{\rho} - i(\theta - \pi)\right] e^{i\rho\theta},$$

(ver Notación 1.38) con convergencia uniforme en todo intervalo de la forma $[\eta, 2\pi - \eta] \subseteq (0, 2\pi)$.

Demostración. Partimos de la ecuación

$$\log V(z) = \sum_{a_k<r} \log E(z/a_k; \rho - 1) + \sum_{a_k\geq r} \log E(z/a_k; \rho).$$

Usando la notación de la integral de Stieltjes, a partir de los Lemas 1.42 y 1.43 obtenemos, de forma análoga a (1.37), que para ν pequeño, τ grande y r suficientemente grande,

$$\left|\log V(z) - \int_{\nu r}^{r} \log E(z/t; \rho-1) dn(t) - \int_{r}^{\tau r} \log E(z/t;\rho) dn(t)\right|$$

$$= \left|\log V(z) - \sum_{\nu r \leq a_k < r} \log E(z/a_k; \rho - 1) - \sum_{r \leq a_k < \tau r} \log E(z/a_k; \rho)\right|$$

$$= \left|\sum_{a_k < \nu r} \log E(z/a_k; \rho-1) + \sum_{a_k \geq \tau r} \log E(z/a_k;\rho)\right| < \frac{\varepsilon}{4} r^{\rho(r)},$$

Integrando por partes como en (1.38) cuando $0 < \arg z < 2\pi$, se obtiene que

$$\int_{\nu r}^{r} \log E_{\rho-1}(z/t) dt + \int_{\nu r}^{r} \log E_{\rho-1}(z/t) dt$$

$$= n(r) \log E_{\rho-1}(e^{i\theta}) - n(\nu r) \log E_{\rho-1}\left(\frac{e^{i\theta}}{\nu}\right) - \int_{\nu r}^{r} \frac{z^{\rho} n(t) dt}{t^{\rho}(t-z)}$$

$$+ n(\tau r) \log E_{\rho}\left(\frac{e^{i\theta}}{\tau}\right) - n(r) \log E_{\rho}(e^{i\theta}) - \int_{r}^{\tau r} \frac{z^{\rho+1} n(t) dt}{t^{\rho+1}(t-z)}$$

$$= -\frac{e^{i\rho\theta}}{\rho} n(r) - \int_{\nu r}^{r} \frac{z^{\rho} n(t) dt}{t^{\rho}(t-z)} - - \int_{r}^{\tau r} \frac{z^{\rho+1} n(t) dt}{t^{\rho+1}(t-z)}$$

$$+ n(\nu r) \log E_{\rho}\left(\frac{e^{i\theta}}{\nu}\right) + n(\nu r) \log E_{\rho}\left(\frac{e^{i\theta}}{\nu}\right).$$

Acotando del mismo modo que en (1.39) y uniendo este resultado a la desigualdad anterior obtenemos la siguiente acotación,

$$\left|\log V(z) + \frac{e^{i\rho\theta}}{\rho} n(r) + \int_{\nu r}^{r} \frac{z^{\rho} n(t) dt}{t^{\rho}(t-z)} + \int_{r}^{\tau r} \frac{z^{\rho+1} n(t) dt}{t^{\rho+1}(t-z)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} r^{\rho(r)}.$$

Por otra parte, al igual que en la demostración del Teorema 1.44 obtenemos a partir de las propiedades de la función $t^{\rho(t)} = t^{\rho} L(t)$ y para $[\eta, 2\pi - \eta]$ con $\eta > 0$ las desigualdades

$$\left|z^{\rho} \int_{\nu r}^{r} \frac{n(t) dt}{t^{\rho}(t-z)} - \Delta r^{\rho(r)} e^{i\rho\theta} \int_{\nu}^{1} \frac{dt}{t - e^{i\theta}}\right| < \frac{\varepsilon}{8} r^{\rho(r)}$$

y

$$\left|z^{\rho+1} \int_{r}^{\tau r} \frac{n(t) dt}{t^{\rho+1}(t-z)} - \Delta r^{\rho(r)} e^{i(\rho+1)\theta} \int_{1}^{\tau} \frac{dt}{t(t-e^{i\theta})}\right| < \frac{\varepsilon}{8} r^{\rho(r)}.$$

Por otro lado, es claro que

$$\int_\nu^1 \frac{dt}{t-e^{i\theta}} = \log\left(\frac{1-e^{i\theta}}{\nu-e^{i\theta}}\right) = \log\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}-\nu}\right) = \log(1-\frac{1}{e^{i\theta}}) - \log(1-\frac{\nu}{e^{i\theta}}),$$

$$\int_1^\tau \frac{dt}{t-e^{i\theta}} = \log(\tau - e^{i\theta}) - \log(1-e^{i\theta}),$$

$$e^{i\theta}\int_1^\tau \frac{dt}{t(t-e^{i\theta})} = -\int_1^\tau \frac{dt}{t} + \int_1^\tau \frac{dt}{t-e^{i\theta}},$$

y en conscuencia, para ν suficientemente pequeño y τ suficientemente grande se tiene que

$$\left|\int_\nu^1 \frac{dt}{t-e^{i\theta}} - \log(1-e^{-i\theta})\right| < \frac{\varepsilon}{8},$$

$$\left|e^{i\theta}\int_1^\tau \frac{dt}{t(t-e^{i\theta})} + \log(1-e^{i\theta})\right| = \left|\int_1^\tau \frac{-dt}{t} + \log(\tau - e^{i\theta})\right|$$

$$= \left|\log(1-\frac{e^{i\theta}}{\tau})\right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Uniendo todas estas desigualdades para r suficientemente grande y θ en el intervalo $[\eta, 2\pi-\eta]$ tenemos que

$$\left|\log V(re^{i\theta}) + \Delta\left[\frac{1}{\rho} - i(\theta-\pi)\right]e^{i\rho\theta}r^{\rho(r)}\right| < \varepsilon r^{\rho(r)}.$$

★

Observación 1.46. La función $V_r(z)$ construida en este lema no es una función no entera, de hecho, tiene discontinuidades en las circunferencias $|z| = a_k$. Sin embargo, nos va a servir para construir una función entera de orden ρ entero como se describe en el siguiente teorema.

Teorema 1.47. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado satisfaciendo que $\rho(r) \to \rho \in \mathbb{N}$ ($\rho > 0$) cuando $r \to \infty$, sea $0 < \Delta < \infty$ y sea $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ la sucesión no decreciente de números reales positivos dado por el Lema 1.39. Consideramos las funciones

$$u^{(1)}(z) = \prod_{k=1}^\infty E\left(\frac{z}{a_k};\rho\right), \quad u^{(2)}(z) = \prod_{k=1}^\infty E\left(\frac{ze^{-i\pi/\rho}}{a_k};\rho\right),$$

y sea $f(z) = u^{(1)}(z)u^{(2)}(z)$, entonces

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log f(re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}} = \frac{i\pi}{\rho}\Delta e^{i\rho\theta}, \tag{1.45}$$

(ver Notación 1.38) con convergencia uniforme en cada intervalo cerrado contenido en uno de los intervalos $(0,\pi/\rho)$ ó $(\pi/\rho, 2\pi)$.

Demostración. Con la notación del Lema 1.45 podemos representar la función $u^{(1)}(z)$ en la forma

$$u^{(1)}(z) = \prod_{a_k<r} E_\rho\left(\frac{z}{a_k}\right) \prod_{a_k\geq r} E_\rho\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

$$= \prod_{a_k<r} \exp\left(\frac{1}{\rho}\frac{z^\rho}{a_k^\rho}\right) E_{\rho-1}\left(\frac{z}{a_k}\right) \prod_{a_k\geq r} E_\rho\left(\frac{z}{a_k}\right) = \exp\left(\frac{z^\rho}{\rho}\sum_{a_k<r} a_k^{-\rho}\right) u_r^{(1)}(z),$$

donde $u_r^{(1)}(z) := V(z)$. También del mismo modo, representamos $u^{(2)}(z)$ por

$$u^{(2)}(z) = \exp\left(-\frac{1}{\rho}z^\rho \sum_{a_k<r} a_k^{-\rho}\right) u_r^{(2)}(z),$$

donde $u_r^{(2)}(z) := V(ze^{-i\pi/\rho})$. Por lo tanto, vemos que

$$f(r) = u^{(1)}(z)u^{(2)}(z) = u_r^{(1)}(z)u_r^{(2)}(z) = V(z)V\left(ze^{-i\pi/\rho}\right).$$

Consecuentemente, por el Lema 1.45 tenemos que en cada intervalo cerrado contenido en uno de los intervalos $(0, \pi/\rho)$ ó $(\pi/\rho, 2\pi)$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log f(re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}} = \lim_{r\to\infty}\left[\frac{\log V(re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}} + \frac{\log V\left(re^{i(\theta-\pi/\rho)}\right)}{r^{\rho(r)}}\right]$$

$$= -\Delta\left[\frac{1}{\rho} - i(\theta-\pi)\right]e^{i\rho\theta} - \Delta\left[\frac{1}{\rho} - i\left(\theta - \frac{\pi}{\rho} - \pi\right)\right]e^{i\rho(\theta-\pi/\rho)}$$

$$= -\Delta\left[\frac{1}{\rho} - i(\theta-\pi)\right]e^{i\rho\theta} + \Delta\left[\frac{1}{\rho} - i\left(\theta-\pi\right) + i\frac{\pi}{\rho}\right]e^{i\rho\theta} = \frac{i\pi}{\rho}\Delta e^{i\rho\theta}.$$

★

Observación 1.48. Mediante un resultado auxiliar análogo al Teorema 1.41 y aplicando una técnica similar a la empleada en la demostración del Teorema 1.44 deducimos que $f(z)$ es una función entera de orden aproximado $\rho(r)$ (Ver [18][Cap. 13, p.45]). Para nuestros objetivos es suficiente con conocer que podemos construir una función entera verificando (1.45).

Lema 1.49. Sea $\rho(r)$ un orden aproxiamdo con $\rho > 0$, sean θ_1,θ_2 tales que $0 < (\theta_2 - \theta_1) < \min\{2\pi, \pi/\rho\}$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces podemos construir una función $W(z)$ holomorfa y sin ceros en la región angular $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ tal que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|W(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = a\cos\rho\theta + b\,\mathrm{sen}\,\rho\theta$$

uniformemente en $[\theta_1, \theta_2]$.

Demostración. En primer lugar consideremos el caso en el que ρ no es entero. Para ψ_1 y ψ_2 arbitrarios verificando que $0 < \rho(\psi_2 - \psi_1) < \pi$, consideramos el sistema

$$\begin{cases} A_1 \cos \rho(\psi_1 + \pi) + A_2 \cos \rho(\psi_2 + \pi) = a, \\ A_1 \operatorname{sen} \rho(\psi_1 + \pi) + A_2 \operatorname{sen} \rho(\psi_2 + \pi) = b. \end{cases}$$

Este sistema tiene solución única A_1, A_2 puesto que su determinante es

$$\cos \rho(\psi_1 + \pi) \operatorname{sen} \rho(\psi_2 + \pi) - \cos \rho(\psi_2 + \pi) \operatorname{sen} \rho(\psi_1 + \pi) = \operatorname{sen} \rho(\psi_2 - \psi_1) > 0.$$

Tomamos $\psi_1 < \theta_1$ y $\theta_2 < \psi_2$, lo que es posible porque $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$, pero dentro de un intervalo de amplitud 2π, posible también porque $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$. Para la solución dada en este caso, consideramos la siguiente notación:

$$\Delta_j = \left| A_j \frac{\operatorname{sen} \pi\rho}{\pi} \right|, \qquad \varepsilon_j = \operatorname{signo}(A_j \operatorname{sen} \pi\rho), \qquad j = 1, 2.$$

Si Δ_1, $\Delta_2 \neq 0$, construimos sucesiones $\{a_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{a_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ de reales positivos con densidades Δ_1 y Δ_2, basta tomar la sucesión dada por el Lema 1.36 enunciado anteriormente. Para estas sucesiones, consideramos las funciones

$$V_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/a_k^1; p), \qquad V_2(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/a_k^2; p),$$

donde $p < \rho < p + 1$. Definimos ahora la función

$$W(z) = V_1^{\varepsilon_1}(ze^{-i\psi_1}) V_2^{\varepsilon_2}(ze^{-i\psi_2})$$

que es holomorfa en el sector de argumento θ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$, porque en cualquiera de los casos tenemos un cociente de funciones holomorfas sin ceros, puesto que, los ceros de $V_j^{\varepsilon_j}(ze^{-i\psi_j})$ se encuentran sobre la semirrecta de argumento ψ_j y se tiene que

$$\begin{aligned} 0 < \theta_1 - \psi_1 \leq \theta - \psi_1 \leq \theta_2 - \psi_1 < \psi_2 - \psi_1 < 2\pi, \\ 0 > \theta_2 - \psi_2 \geq \theta - \psi_2 \geq \theta_1 - \psi_2 > \psi_1 - \psi_2 > -2\pi. \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando a las funciones $V_1^{\varepsilon_1}(ze^{-i\psi_1})$, $V_2^{\varepsilon_2}(ze^{-i\psi_2})$ el Teorema 1.44 y teniendo en cuenta las ecuaciones que verifican A_1 y A_2,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \frac{\ln |W(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} &= \lim_{r\to\infty} \frac{\varepsilon_1 \ln |V_1(ze^{-i\psi_1})|}{r^{\rho(r)}} + \frac{\varepsilon_2 \ln |V_2(ze^{-i\psi_2})|}{r^{\rho(r)}} \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon_1 \pi \Delta_1}{\operatorname{sen}(\pi\rho)} e^{i\rho(\theta - \psi_1 - \pi)} + \frac{\varepsilon_2 \pi \Delta_2}{\operatorname{sen}(\pi\rho)} e^{i\rho(\theta - \psi_2 - \pi)} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i\rho\theta} \left[\frac{A_1}{e^{i\rho(\psi_1 + \pi)}} + \frac{A_2}{e^{i\rho(\psi_2 + \pi)}} \right] \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i\rho\theta} \left[a - bi \right] \right) \\ &= a \cos \rho\theta + b \sin \rho\theta \end{aligned}$$

uniformemente para $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Si $\Delta_j = 0$ tomamos $V_j \equiv 1$ y procediendo del mismo modo obtenemos el resultado.

Si $\rho > 0$ es entero, para ψ_1 y ψ_2 arbitrarios verificando que $0 < \rho(\psi_2 - \psi_1) < \pi$, consideramos el sistema

$$\begin{cases} A_1 \cos \rho\psi_1 + A_2 \cos \rho\psi_2 = b, \\ A_1 \operatorname{sen} \rho\psi_1 + A_2 \operatorname{sen} \rho\psi_2 = a. \end{cases}$$

Como en el caso anterior, el sistema tiene solución única A_1, A_2, y como $\rho \geq 1$, podemos tomar ψ_1, $\psi_1 + \pi/\rho$, $\psi_2 + \pi/\rho$ y ψ_2 fuera del intervalo $[\theta_1, \theta_2]$, es decir, verificando que $\psi_1 + \pi/\rho < \psi_1 < \theta_1$, $\theta_2 < \psi_2 < \psi_2 + \pi/\rho$ y $\psi_2 - \psi_1 < 2\pi$. Consideramos la notación:

$$\Delta_j = \left| A_j \frac{p}{\pi} \right|, \qquad \varepsilon_j = \operatorname{signo}(A_j), \qquad j = 1, 2.$$

Si $\Delta_1 = 0$ y/o $\Delta_2 = 0$ tomamos $V_1 \equiv 1$ y/o $V_2 \equiv 1$, si no, construimos sucesiones $\{a_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{a_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ con densidades respectivas Δ_1 y Δ_2 y construimos V_1 y V_2 igual que en el caso anterior pero en este caso dadas por el Teorema 1.47. De igual modo, definimos la función

$$W(z) = V_1^{\varepsilon_1}(ze^{-i\psi_1}) V_2^{\varepsilon_2}(ze^{-i\psi_2})$$

que es holomorfa en el sector $[\theta_1, \theta_2]$ por la elección de ψ_1, $\psi_1 + \pi/\rho$, $\psi_2 + \pi/\rho$ y ψ_2. Finalmente, por el Teorema 1.47 tenemos que, uniformemente en $[\theta_1, \theta_2]$,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln |W(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = a \cos \rho\theta + b \sin \rho\theta.$$

★

2. Diagrama indicador

Nuestro objetivo en este apartado es probar el Teorema 2.55 sobre el diagrama indicador generalizado, que será fundamental en la extensión del Teorema I. Para conseguirlo, recordamos algunos resultados sobre funciones semicontinuas y los conjuntos cerrados y estrellados. Continuaremos definiendo el concepto de función trigonométricamente ρ-convexa, con el objetivo de probar el Teorema 2.33 en el que veremos que la función indicatriz generalizada h_f de una función entera f es una función de esta clase. Finalmente, definiremos los conjuntos ρ-convexos cuyas propiedades usaremos para probar el citado teorema. El desarrollo de este capítulo se hará siguiendo el libro de L. S. Maergoiz [20, Cap.1-3].

2.1. Semicontinuidad inferior. Funcionales de Minkowski

Comentaremos en esta sección la noción de semicontinuidad inferior, propiedad que van a cumplir los funcionales de Minkowski de conjuntos estrellados y cerrados. Después de probar varias propiedades intermedias sobre funciones convexas, probaremos el Teorema 2.11 que describe la dualidad que existe entre los cerrados estrellados y las funciones semicontinuas inferiormente homogéneas de grado 1 para escalares positivos.

Definición 2.1. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V : S \to (-\infty, \infty]$. Se dice que V es *semicontinua inferiormente* si para todo $x \in S$ se tiene que

$$\liminf_{u \to x} V(u) = V(x), \quad \text{donde} \quad \liminf_{u \to x} V(u) = \sup_{\varepsilon > 0} \left\{ \inf_{|u-x|<\varepsilon} V(x) \right\}.$$

Se dice que V es *semicontinua superiormente* si $-V$ es semicontinua inferiormente.

Teorema 2.2. Sea V una función de $\mathbb{R}^n$ en $(-\infty, \infty]$, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) La función V es semicontinua inferiormente.

(2) El epigrafo de V, $\mathrm{epi}(V) = \{(\overline{u}, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : V(\overline{u}) \leq u\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$.

(3) El conjunto de nivel $T_\alpha(V) = \{\overline{u} \in \mathbb{R}^n : V(\overline{u}) \leq \alpha\}$ es cerrado para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $(\overline{u}_m, u_m) \in \mathrm{epi}(V)$ una sucesión que converge a $(\overline{u}, u)$ cuando $m \to \infty$. De esta convergencia se deduce que para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $u+\varepsilon > u_m \geq V(\overline{u}_m)$ para todo $m > m'_\varepsilon$. Por otra parte, como V es semicontinua inferiormente $V(\overline{u}_m) > V(\overline{u}) - \varepsilon$ para todo $m > m''_\varepsilon > m'_\varepsilon$. Juntando estas dos desigualdades $V(\overline{u}) < u + 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, y en consecuencia $V(\overline{u}) \leq u$, por lo que $(\overline{u}, u) \in \mathrm{epi}(V)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sabemos que el conjunto $\Sigma_\alpha = \{(\overline{u}, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : u = \alpha\}$ es un cerrado, como epi(V) es cerrado por (2), tenemos que

$$T_\alpha(V) = \Sigma_\alpha \bigcap \mathrm{epi}(V)$$

es un conjunto cerrado.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $x \in \mathbb{R}^n$ pongamos $L_\alpha := \mathbb{R}^n \backslash T_\alpha(V)$. Como $V(x) > -\infty$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $V(x) > \alpha$. Si $V(x) > \alpha$ se tiene que $x \in L_\alpha$. Como por (3) L_α es abierto en $\mathbb{R}^n$, existe un $\varepsilon > 0$ de modo que $u \in L_\alpha$ si $|x - u| < \varepsilon$, y en consecuencia $V(u) > \alpha$, lo que nos permite afirmar que

$$\liminf_{u \to x} V(u) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf\{V(u) : |x - u| < \varepsilon\} > \alpha.$$

Por lo tanto, tenemos que $\liminf_{u \to x} V(u) \geq V(x)$ al considerar $\alpha \to V(x)$, y como siempre se da que $\liminf_{u \to x} V(u) \leq V(x)$, podemos concluir que V es semicontinua inferiormente. ★

Proposición 2.3. Sea V una función semicontinua inferiormente definida en un compacto K. Entonces V está acotada inferiormente en K y existe un punto $x \in K$ tal que $V(x) = \inf\{V(u) : u \in K\}$.

Demostración. La prueba de este resultado es análoga a la prueba del teorema de Weierstrass para funciones continuas. ★

Teorema 2.4. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, y sea $\mathrm{int}_{AF}\, M$ el interior de M dentro del subespacio afín que genera, si la dimensión del subespacio afín generado por M es $\dim_{AF} M \geq 1$, entonces $\mathrm{int}_{AF}\, M$ es convexo.

Demostración. Como $\dim_{AF} M \geq 1$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la dimensión del subespacio afín generada por M es n, en cuyo caso tenemos que $\mathrm{int}_{AF}\, M = \mathrm{int}\, M$. Claramente, como $\dim_{AF} M \geq 1$, $\mathrm{int}\, M \neq \emptyset$. Sean $y \in \overline{M}$, $x \in \mathrm{int}\, M$, $D := \{u \in \mathbb{R}^n, |u| \leq 1\}$ y sea $\lambda \in [0, 1)$. Como $\overline{M} = \cap_{\varepsilon > 0}(M + \varepsilon D)$, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $y \in (M + \varepsilon D)$. Por otra parte, como $x \in \mathrm{int}\, M$ es claro que $x + \delta D \subseteq M$ para algún $\delta > 0$. Así pues, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo que $\varepsilon(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1} < \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned}(1-\lambda)x + \lambda y + \varepsilon D &\subseteq (1-\lambda)x + \lambda(M + \varepsilon D) + \varepsilon d \\ &= \lambda M + (1-\lambda)[x + \varepsilon(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1} D] \subseteq \lambda M + (1-\lambda)M = M.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(1-\lambda)x + \lambda y \in \mathrm{int}\, M$ para todo $\lambda \in [0, 1)$, con $x \in \mathrm{int}\, M$ e $y \in \overline{M}$. Si tomamos $x, y \in \mathrm{int}\, M \subseteq \overline{M}$, por la simetría del resultado que acabamos de probar tenemos que $(1-\lambda)x + \lambda y \in \mathrm{int}\, M$ para todo $\lambda \in [0, 1]$ y por tanto $\mathrm{int}\, M = \mathrm{int}_{AF}\, M$ es convexo. ★

Definición 2.5. Sea M un conjunto de $\mathbb{R}^n$ no vacío. Decimos que M es estrellado (respecto del origen) si se verifica que si $x \in M$ entonces $\lambda x \in M$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. En este caso llamamos *funcional de Minkowski* de M a la función definida de $\mathbb{R}^n$ en $[0, \infty]$ por $p_M(x) = \text{ínf}\{\alpha > 0 : \ \alpha^{-1}x \in M\}$. Se entiende que si este conjunto es vacío tenemos que $p_M(x) = \infty$.

Observación 2.6. El funcional de Minkowski está bien definido, puesto que si $x \neq 0$ la semirrecta que parte de 0 y pasa por x corta la frontera de M en un sólo punto por ser M estrellado.

Propiedad 2.7. Sean A, B, $\{A_i\}_{i\in I}$ conjuntos estrellados no vacíos, entonces el funcional de Minkowski del conjunto verifica las siguientes propiedades

(1) $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$ y $p_{\lambda A}(x) = \lambda p_A(x)$ para todo $\lambda > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) Si $A \subseteq B$ entonces $p_A(x) \geq p_B(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) Si $A = \cap_{i\in I} A_i$ entonces $p_A(x) = \sup_{i\in I}\{p_{A_i}(x)\}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Las tres propiedades se comprueban de forma inmediata a partir de la definición de funcional de Minkowski. ★

Definición 2.8. Sea $P_1 := \{p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]\}$ la clase de todas las funciones semicontinuas inferiormente homogéneas de grado 1 para escalares positivos, es decir, tales que $P(\lambda x) = \lambda p(x)$ para todo $\lambda > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos en esta clase la relación de orden parcial dada por $f \leq g$, si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y denotamos por P_2 la subclase de P_1 definida por $P_2 := \{p \in P_1 : \ p(x) > 0, \, x \neq 0\}$.

Definición 2.9. Denotamos por X_1 la clase de todos los conjuntos cerrados y estrellados de $\mathbb{R}^n$. Consideramos en ella la relación de orden parcial dada por la inclusión y la subclase X_2 de todos los compactos de X_1.

Definición 2.10. Sean M y M' dos conjuntos parcialmente ordenados, decimos que una aplicación $\varphi : M \to M'$ es un *(anti-)morfismo de orden* si $a \leq b$ implica que $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ (resp. $\varphi(b) \leq \varphi(a)$); si además φ es biyectivo, diremos que φ es un *(anti-)isomorfismo de orden.*

Teorema 2.11. *(Dualidad cerrados estrellados)* Sea $V : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$, si denotamos por $\Omega(V) = \Omega_V := \{x \in \mathbb{R}^n : \ V(x) \leq 1\}$, entonces la aplicación

$$\Phi : P_1 \to X_1, \quad \Phi(p) = \Omega(p),$$

es un anti-isomorfismo de orden con las siguientes propiedades:

(1) $\Phi^{-1}(F) = p_F$ para todo $F \in X_1$, donde p_F es el funcional de F.

(2) $\Phi(P_2) = X_2$.

Demostración. Si $p \in P_1$, por el Teorema, 2.2 se sabe que $T_1(p) = \Omega_p$ es cerrado y como p es homogénea de grado 1 para escalares positivos, se tiene que Ω_p es estrellado. En consecuencia, $\Phi(p) \in X_1$ para todo $p \in P_1$ y Φ está bien definida. Por otra parte, si $p \in P_1$, por la definición del funcional de Minkowski

$$p_{\Omega(p)}(x) = \text{ínf}\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in \Omega_p\} = \text{ínf}\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}p(x) \leq 1\} = p(x),$$

y por lo tanto, Φ es inyectiva. Veamos ahora que Φ es sobreyectiva, para ello dado $F \in X_1$ vamos que $p_F \in P_1$ y que $\Phi(p_F) = F$. Si $x \in F$, $p_F(x) \leq 1$ y por tanto $x \in \Omega(p_F)$. Por otro lado, si $x \in \Omega(p_F)$ tenemos que $p_F(x) \leq 1$; si $p_F(x) < 1$ tenemos que $x \in F$ y si $p_F(x) = 1$ entonces para todo $\varepsilon > 0$, $x(1+\varepsilon)^{-1} \in F$ tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$, como F es cerrado $x \in F$.

Así pues, hemos probado que $F = \Omega(p_F)$. Tenemos que $p_F : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, p_F es homogénea de grado 1 para escalares positivos, por la propiedad (1) de la Proposición 2.7, y como el conjunto $F = \Omega(p_F) = T_1(p_F)$ es cerrado usando la homogeneidad vemos que también son cerrados los conjuntos $T_\alpha(p_F)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. En consecuencia, por el Teorema 2.2 p_F es semicontinua inferiormente. Por tanto, $p_F \in P_1$, $\Phi^{-1}(F) = p_F$ y Φ es sobreyectiva. Además, por la propiedad (2) de la Proposición 2.7, deducimos que Φ es un anti-morfismo, y como es biyectivo, Φ es un anti-isomorfismo.

Veamos ahora que se verifica (2). Si $p \in P_2$, denotamos por

$$m := \text{ínf}\{p(x) : x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}.$$

Por la Proposición 2.3 sabemos que $m = p(x_0) > 0$ con $|x_0| = 1$, y se tiene que $p(x) \geq m|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, $\Omega_p \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1/m\}$, luego $\Omega_p \in X_2$. Recíprocamente, si $K \in X_2$ y si $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $p(x) > 0$, porque si $p(x) = 0$, entonces $\{tx : t > 0\} \subseteq K$, lo que contradice el hecho de que K es compacto. Por lo tanto, $\Phi(P_2) = X_2$. ★

Definición 2.12. Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ decimos que es una función *sublineal* si $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $\lambda > 0$ y si $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.13. Sea C un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ que contiene al 0. Entonces su funcional de Minkowski $p_C(x)$ es una función sublineal.

Demostración. Como C contiene al 0 es estrellado y p_C y toma valores en $[0, \infty]$. Por la propiedad (1) de la Proposición 2.7, para todo $\lambda > 0$, $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$. Por otra parte, si $\alpha_1 > p_C(x)$ y $\alpha_2 > p_C(y)$, tenemos que $\alpha_1^{-1}x \in C$ y $\alpha_2^{-1}y \in C$, y como C es convexo, $\lambda\alpha_1^{-1}x + (1-\lambda)\alpha_2^{-1}y \in C$ para todo $\lambda \in [0,1]$, tomando $\lambda = \alpha_2^{-1}/(\alpha_2^{-1}+\alpha_1^{-1})$ tenemos que $(\alpha_1+\alpha_2)^{-1}(x+y) \in C$, por tanto, $p_C(x+y) \leq \alpha_1 + \alpha_2$. Luego $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. ★

Para terminar esta sección demostramos un par de resultados elementales sobre funciones convexas.

Definición 2.14. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V : S \to [-\infty, \infty]$. Decimos que V es *convexa* si el epigrafo $\operatorname{epi}(V)$ es convexo en $\mathbb{R}^{n+1}$. Decimos que es *cóncava* si $-V$ es convexa.

Proposición 2.15. Supongamos que S es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $V : S \to [-\infty, \infty)$ ó $V : S \to (-\infty, \infty]$. Entonces, V es convexa si, y sólo si, para todo $m \in \mathbb{N}$, para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, con $\sum_{k=0}^{m} \lambda_k = 1$, y para todos $x_1, \ldots, x_m \in S$ se tiene que

$$V\left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=0}^{m} \lambda_k V(x_k).$$

Demostración. Basta probarlo para el caso $m = 2$. Sean $x, y \in S$ y sea $\lambda \in [0,1]$, tenemos que $V(\lambda x + (1-\lambda)y)$ está bien definido por ser S convexo. Si suponemos que $\operatorname{epi}(V)$ es convexo, como $(x, V(x))$ e $(y, V(y))$ están en $\operatorname{epi}(V)$ para todo $\lambda \in [0,1]$ se tiene que $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda V(x) + (1-\lambda)V(y)) \in \operatorname{epi}(V)$, es decir, $V(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda V(x) + (1-\lambda)V(y)$.

Recíprocamente, dados (x, u), (y, v) en $\operatorname{epi}(V)$ tenemos que

$$V(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda V(x) + (1-\lambda)V(y) \leq \lambda u + (1-\lambda)v,$$

por tanto $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda u + (1-\lambda)v) \in \operatorname{epi}(V)$ y $\operatorname{epi}(V)$ es convexo. ★

Teorema 2.16. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto, sea $V : S \to (-\infty, \infty)$ una función convexa, entonces si $\dim_{AF} S \geq 1$, V es continua en $\operatorname{int}_{AF} S$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\dim_{AF} S = n$ y, en consecuencia, $\operatorname{int}_{AF} S = \operatorname{int} S$, que sabemos por el Teorema 2.4 que es un conjunto convexo. Sea $x \in \operatorname{int} S$, veamos que V es continua en x. Consideramos la función $g(y) = V(x+y) - V(x)$, se comprueba de forma inmediata que está bien definida, por ser V finita, y que es una función convexa por serlo V y por ser el conjunto de definición $\operatorname{int} S - x$ convexo. Como $x \in \operatorname{int} S$, existe una bola B centrada en 0 y un símplice n-dimensional de la forma

$$\Sigma = \left\{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k : \, x_k \in \mathbb{R}^n, \, \lambda_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1\right\},$$

de modo que $B \subseteq \operatorname{int} \Sigma \subseteq \Sigma \subseteq (\operatorname{int} S - x)$. Por la proposición 2.15,

$$g\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k g(x_k) \leq \max\{g(x_1), \ldots, g(x_n)\} =: a,$$

para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, con $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1$, donde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son los vértices del símplice Σ. Como $0 \in \Sigma$, tenemos que $g(0) = V(x) - V(x) = 0 \leq a$. Así pues, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta \in (0, 1)$ tal que $\delta a < \varepsilon$ y consideramos la bola $D = \delta B \subseteq B$. Haciendo uso de nuevo, de la convexidad de g y de la Proposición 2.15, para todo $y \in D$ se tiene que

$$g(y) = g\left((1-\delta)0 + \delta\frac{y}{\delta}\right) \leq \delta g\left(\frac{y}{\delta}\right) \leq \delta a < \varepsilon.$$

Del mismo modo, como g es convexa en $D \subseteq B$, para todo $y \in D$

$$0 = g(0) = g\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(-y)\right) \leq \frac{1}{2}g(y) + \frac{1}{2}g(-y).$$

Consecuentemente, como $-y \in D$, $g(y) \geq -g(-y) \geq -\delta a > -\varepsilon$, se tiene que $|g(y)| = |V(x+y) - V(x)| < \varepsilon$, es decir, V es continua en $x \in \operatorname{int}_{AF} S$. ★

2.2. Funciones trigonométricamente ρ-convexas

Estableceremos aquí por una parte la noción de función trigonométricamente ρ-convexa y por otra parte, la noción de ρ-sublinealidad. Veremos la relación que existe entre ellas en la Proposición 2.22. A continuación demostraremos varias propiedades sobre estas clases de funciones, consiguiendo finalmente probar el Teorema 2.33, que nos dirá que la función indicatriz generalizada h_f es trigonométricamente ρ-convexa. La prueba de este resultado la haremos siguiendo la demostración realizada por B. Y. Levin en su libro [18, Cap. I, Sec. 18, p.70-73] que se apoya en el Teorema 1.49. Este resultado es fundamental para el manejo del diagrama indicador generalizado que describiremos en la siguiente sección y emplearemos en el último capítulo.

Definición 2.17. Sea $h : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para $\rho > 0$, denotamos por $l_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a la función $l_{a,b}(\theta) = a\cos(\rho\theta) + b\operatorname{sen}(\rho\theta)$ y consideramos la clase de funciones $M = \{l_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$. La función h se dice que es *trigonométricamente ρ-convexa* si para cada par de puntos θ_1, θ_2 en (α, β) tales que $0 < \rho(\theta_2 - \theta_1) < \pi$ y para cada función $l \in M$ verificando $h(\theta_1) \leq l(\theta_1)$ y $h(\theta_2) \leq l(\theta_2)$ se tiene que $h(\theta) \leq l(\theta)$ para todo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Observación 2.18. Observamos que toda función $l \in M$ está completamente determinada por sus valores en θ_1 y en θ_2, pues para $\theta \in \mathbb{R}$ desarrollando se tiene que

$$\begin{aligned}
l(\theta)\operatorname{sen}\rho(\theta_2 - \theta_1) &= a\cos(\rho\theta)\operatorname{sen}\rho(\theta_2 - \theta_1) + b\operatorname{sen}(\rho\theta)\operatorname{sen}\rho(\theta_2 - \theta_1) \\
&= a\cos(\rho\theta)\operatorname{sen}(\rho\theta_2)\cos(\rho\theta_1) - a\cos(\rho\theta)\cos(\rho\theta_2)\operatorname{sen}(\rho\theta_1) \\
&\quad + b\operatorname{sen}(\rho\theta)\operatorname{sen}(\rho\theta_2)\cos(\rho\theta_1) - b\operatorname{sen}(\rho\theta)\cos(\rho\theta_2)\operatorname{sen}(\rho\theta_1),
\end{aligned}$$

y reagrupando tenemos que

$$\begin{aligned} l(\theta)\operatorname{sen}\rho(\theta_2-\theta_1) &= a\cos(\rho\theta_1)[\operatorname{sen}(\rho\theta_2)\cos(\rho\theta)-\cos(\rho\theta_2)\operatorname{sen}(\rho\theta)] \\ &+ a\cos(\rho\theta_2)[\operatorname{sen}(\rho\theta)\cos(\rho\theta_1)-\cos(\rho\theta)\operatorname{sen}(\rho\theta_1)] \\ &+ b\operatorname{sen}(\rho\theta_1)[\operatorname{sen}(\rho\theta_2)\cos(\rho\theta)-\cos(\rho\theta_2)\operatorname{sen}(\rho\theta)] \\ &+ b\operatorname{sen}(\rho\theta_2)[\operatorname{sen}(\rho\theta)\cos(\rho\theta_1)-\cos(\rho\theta)\operatorname{sen}(\rho\theta_1)] \\ &= l(\theta_1)\operatorname{sen}\rho(\theta_2-\theta)+l(\theta_2)\operatorname{sen}\rho(\theta-\theta_1). \end{aligned}$$

Esta fórmula nos permite dar una definición equivalente, como se comprueba fácilmente, de las funciones trigonométricamente ρ-convexas.

Definición 2.19. Sea $h:(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. La función h se dice que es *trigonométricamente ρ-convexa* si para cada par de puntos θ_1, θ_2 en (α,β) tales que $0<\rho(\theta_2-\theta_1)<\pi$ y para todo $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$ se verifica que

$$h(\theta)\operatorname{sen}\rho(\theta_2-\theta_1)\leq h(\theta_1)\operatorname{sen}\rho(\theta_2-\theta)+h(\theta_2)\operatorname{sen}\rho(\theta-\theta_1). \tag{2.1}$$

Observación 2.20. Sea $\mathcal{R}$ la superficie de Riemann del logaritmo, $\pi:\mathcal{R}\to\mathbb{C}$ con $\pi(r,\theta)=re^{i\theta}$, entonces para $Z\in\mathcal{R}$ denotamos por $Z^\rho=(|Z|^\rho,\rho\arg Z)$. Así pues, para cada par de puntos $Z_1,Z_2\in\mathcal{R}$ satisfaciendo que $0\leq\rho(\theta_2-\theta_1)<\pi$, donde $\theta_1=\arg Z_1$ y $\theta_2=\arg Z_2$, existe un único $Z\in\mathcal{R}$ tal que $Z^\rho=Z_1^\rho+Z_2^\rho$, con $\theta_1\leq\arg Z\leq\theta_2$, que denotamos por $Z:=Z_1\otimes Z_2$.

Definición 2.21. Sean $(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}$ y $\mathcal{R}(\alpha,\beta)=\{Z\in\mathcal{R}:\ \alpha<\arg Z<\beta\}$. Se dice que una función $H:\mathcal{R}(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ es *ρ-sublineal* si satisface las siguientes condiciones:

(1) $H(tZ)=t^\rho H(Z)$ para todos $t>0$ y $Z\in\mathcal{R}(\alpha,\beta)$.

(2) $H(Z_1\otimes Z_2)\leq H(Z_1)+H(Z_2)$ para todos $Z_1,Z_2\in\mathcal{R}(\alpha,\beta)$ verificando que $0\leq\rho(\theta_2-\theta_1)<\pi$, donde $\theta_1=\arg Z_1$ y $\theta_2=\arg Z_2$.

La siguiente proposición nos muestra la relación entre las funciones ρ-sublineales y las funciones trigonométricamente ρ-convexas.

Proposición 2.22. Sea $h:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, sea $\rho>0$, sea $\gamma_\rho:=\min\{\pi,\pi/(2\rho)\}$. Entonces son equivalentes:

(1) h es trigonométricamente ρ-convexa.

(2) $H(Z):=r^\rho h(\theta)$, donde $Z=(r,\theta)\in\mathcal{R}(\alpha,\beta)$, es una función ρ-sublineal en $\mathcal{R}(\alpha,\beta)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $Z\in\mathcal{R}(\alpha,\beta)$ y sea $t>0$, tenemos que

$$H(tZ)=t^\rho|Z|^\rho h(\arg Z)=t^\rho H(Z).$$

Por otra parte si tomamos $Z_1, Z_2 \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$ verificando que $0 \leq \rho(\theta_2 - \theta_1) < \pi$, donde $\theta_1 = \arg Z_1$ y $\theta_2 = \arg Z_2$, tenemos que $H(Z_1 \otimes Z_2) = r^\rho h(\theta)$, con $r = |Z_1 \otimes Z_2| = |Z|$ y $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Como $Z^\rho = Z_1^\rho + Z_2^\rho$, igualando las partes real e imaginaria tenemos que

$$r^\rho \cos \rho\theta = r_1^\rho \cos \rho\theta_1 + r_2^\rho \cos \rho\theta_2, \tag{2.2}$$

$$r^\rho \operatorname{sen} \rho\theta = r_1^\rho \operatorname{sen} \rho\theta_1 + r_2^\rho \operatorname{sen} \rho\theta_2, \tag{2.3}$$

donde $\arg Z_j = \theta_j$ y $|Z_j| = r_j$ con $j = 1, 2$; en consecuencia,

$$\begin{aligned} r^\rho \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) &= r^\rho[\operatorname{sen} \rho\theta_2 \cos \rho\theta - \cos \rho\theta_2 \operatorname{sen} \rho\theta] \\ &= \operatorname{sen} \rho\theta_2[r_1^\rho \cos \rho\theta_1 + r_2^\rho \cos \rho\theta_2] - \cos \rho\theta_2[r_1^\rho \operatorname{sen} \rho\theta_1 + r_2^\rho \operatorname{sen} \rho\theta_2] \\ &= r_1^\rho \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Análogamente, por (2.2) y (2.3), se deduce que

$$r^\rho \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1) = r_2^\rho \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1). \tag{2.5}$$

Si $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, como $Z^\rho = Z_1^\rho + Z_2^\rho$, $H(Z_1 \otimes Z_2) = r^\rho h(\theta) = (r_1^\rho + r_2^\rho)h(\theta) = H(Z_1) + H(Z_2)$. En caso contrario ($\theta_1 < \theta \leq \theta_2$), se tiene que

$$H(Z_1 \otimes Z_2) = r^\rho h(\theta) = \frac{r_2^\rho}{\operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1)} \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1)h(\theta),$$

y como por hipótesis h es trigonométricamente ρ-convexa, usando (2.4) y (2.5) se obtiene que

$$\begin{aligned} H(Z_1 \otimes Z_2) &\leq \frac{r_2^\rho}{\operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1)}[\operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta)h(\theta_1) + \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1)h(\theta_2)] \\ &= \frac{r_1^\rho}{\operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1)} \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1)h(\theta_1) + H(Z_2) \leq H(Z_1) + H(Z_2), \end{aligned}$$

lo que nos premite afirmar que H es ρ-sublineal en $\mathcal{R}(\alpha, \beta)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Tomamos $\theta_1, \theta_2 \in (\alpha, \beta)$ de modo que $0 < \rho(\theta_2 - \theta_1) < \pi$ y $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Denotamos por $\arg Z = \theta$, $|Z| = r$, $\arg Z_j = \theta_j$ y $|Z_j| = r_j$ con $j = 1, 2$, con $Z^\rho = Z_1^\rho + Z_2^\rho$. Así pues, se verifican (2.4) y (2.5), y por lo tanto, como H es ρ-sublineal,

$$\begin{aligned} h(\theta) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1) &= \frac{\operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1)}{r_2^\rho} r^\rho h(\theta) = \frac{\operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1)}{r_2^\rho}[H(Z)] \\ &= \frac{\operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1)}{r_2^\rho}[H(Z_1) + H(Z_2)] \\ &= \frac{\operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1)r_1^\rho}{r_2^\rho} h(\theta_1) + \frac{\operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1)r_2^\rho}{r_2^\rho} h(\theta_2) \\ &= h(\theta_1) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1), \end{aligned}$$

para todo $\theta \in [\theta_2, \theta_1]$, es decir, h es trigonométricamente ρ-convexa. ★

Proposición 2.23. Sea $\rho > 0$ y sea $h : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ trigonométricamente ρ-convexa, entonces h es continua.

Demostración. Sea $\theta_0 \in (\alpha, \beta)$, veamos que h es continua en θ_0. Recordamos que para cada par de puntos, θ_1, θ_2 en (α, β) tales que $0 < \rho(\theta_2 - \theta_1) < \pi$ y para todo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ se verifica que

$$h(\theta) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1) \leq h(\theta_1) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1). \tag{2.6}$$

Tomando $\theta_1 = \theta_0$ y $\theta_2 > \theta_0$ con $0 < \rho(\theta_2 - \theta_0) < \pi$ y $\theta_2 \in (\alpha, \beta)$ tenemos que para todo $\theta \in (\theta_0, \theta_2)$

$$h(\theta) \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_0) \leq h(\theta_0) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_0).$$

Por lo tanto tomando límite superior cuando $\theta \to \theta_0$ y $\theta > \theta_0$ tenemos que

$$\limsup_{\theta > \theta_0,\, \theta \to \theta_0} h(\theta) \leq h(\theta_0).$$

Análogamente poniendo $\theta_2 = \theta_0$ en (2.6), vemos que

$$\limsup_{\theta < \theta_0,\, \theta \to \theta_0} h(\theta) \leq h(\theta_0).$$

Por otra parte, si en (2.6) tomamos $\theta = \theta_0$ y $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ con θ_1, θ_2 en (α, β) tales que $0 < \rho(\theta_2 - \theta_1) < \pi$ y tomamos limite inferior cuando $\theta_1 \to \theta_0$ y θ_2 fijo, en primer lugar, y cuando $\theta_2 \to \theta_0$ y $\theta_1 < \theta_0$ fijo vemos que

$$h(\theta_0) \leq \liminf_{\theta_1 < \theta_0,\, \theta_1 \to \theta_0} h(\theta_1), \qquad h(\theta_0) \leq \liminf_{\theta_2 > \theta_0,\, \theta_2 \to \theta_0} h(\theta_2).$$

Por lo tanto, se verifica que

$$\limsup_{\theta \to \theta_0} h(\theta) \leq h(\theta_0) \leq \liminf_{\theta \to \theta_0} h(\theta).$$

es decir, h es continua en θ_0. ★

Observación 2.24. Consecuencia directa de este resultado es que toda función ρ-sublineal es continua, puesto que puede escribirse como $H(Z) = r^\rho h(\theta)$, con $Z = (r, \theta)$ y $h : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ trigonométricamente ρ-convexa.

Proposición 2.25. Sea $\rho > 0$ y sea $h : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ trigonométricamente ρ-convexa, entonces para todos θ, $\theta + \pi/\rho$ en (α, β) se tiene que

$$h(\theta) + h\left(\theta + \frac{\pi}{\rho}\right) \geq 0. \tag{2.7}$$

Demostración. Aplicando (2.1) para $\theta_1 = \theta + \varepsilon$ y $\theta_2 = \theta + \pi/\rho - \varepsilon$, tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ y haciendo uso de la continuidad de h, demostramos la proposición. ★

Proposición 2.26. Sea $\rho > 0$ y sea $h : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ trigonométricamente ρ-convexa. Entonces h tiene derivadas laterales $h'_+(\theta)$, $h'_-(\theta)$ en todo punto $\theta \in (\alpha, \beta)$, con $h'_+(\theta) \geq h'_-(\theta)$ para todo $\theta \in (\alpha, \beta)$.

Demostración. Tomamos $\varphi \in (\alpha, \beta) \backslash \{\theta\}$ con $\rho|\varphi - \theta| < \pi$ y escribimos que

$$\frac{h(\varphi) - h(\theta)}{\varphi - \theta} = \left[A(\varphi) + \frac{h(\theta)[\cos \rho(\varphi - \theta) - 1]}{\operatorname{sen} \rho(\varphi - \theta)}\right] \frac{\operatorname{sen} \rho(\varphi - \theta)}{\varphi - \theta}$$

donde

$$A(\varphi) = [h(\varphi) - h(\theta) \cos \rho(\varphi - \theta)][\operatorname{sen} \rho(\varphi - \theta)]^{-1}.$$

Así pues, las derivadas $h'_+(\theta)$, $h'_-(\theta)$ existen si existen los límites

$$\lim_{\varphi \to \theta^-} A(\varphi) = h'_-(\theta)/\rho \quad \text{y} \quad \lim_{\varphi \to \theta^+} A(\varphi) = h'_+(\theta)/\rho. \tag{2.8}$$

Sea $\theta < \varphi_1 \leq \varphi_2$, $\varphi_1 \leq \varphi_2 < \theta$ o $\varphi_1 < \theta < \varphi_2$ entonces

$$\begin{aligned}
A(\varphi_2) - A(\varphi_1) &= \frac{h(\varphi_2) - h(\theta) \cos \rho(\varphi_2 - \theta)}{\operatorname{sen} \rho(\varphi_2 - \theta)} - \frac{h(\varphi_1) - h(\theta) \cos \rho(\varphi_1 - \theta)}{\operatorname{sen} \rho(\varphi_1 - \theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen} \rho(\varphi_1 - \theta) h(\varphi_2) - h(\theta) \operatorname{sen} \rho(\varphi_1 - \theta) \cos \rho(\varphi_2 - \theta)}{\operatorname{sen} \rho(\varphi_2 - \theta) \operatorname{sen} \rho(\varphi_1 - \theta)} \\
&- \frac{\operatorname{sen} \rho(\varphi_2 - \theta) h(\varphi_1) - h(\theta) \cos \rho(\varphi_1 - \theta) \operatorname{sen} \rho(\varphi_2 - \theta)}{\operatorname{sen} \rho(\varphi_2 - \theta) \operatorname{sen} \rho(\varphi_1 - \theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen} \rho(\varphi_1 - \theta) h(\varphi_2) - \operatorname{sen} \rho(\varphi_2 - \theta) h(\varphi_1) + h(\theta) \operatorname{sen} \rho(\varphi_2 - \varphi_1)}{\operatorname{sen} \rho(\varphi_2 - \theta) \operatorname{sen} \rho(\varphi_1 - \theta)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A(\varphi)$ es no decreciente en cada intervalo de longitud a lo sumo π/ρ que contiene a θ en su adherencia y se verifica que $h'_+(\theta) \geq h'_-(\theta)$. Además, $\rho A(\varphi) \leq h'_-(\theta)$ para todo $\varphi \in (\text{máx}\{\alpha, \theta - \pi/\rho\}, \theta)$ y $\rho A(\varphi) \geq h'_+(\theta)$ para todo $\varphi \in (\theta, \text{mín}\{\beta, \theta + \pi/\rho\})$, por lo tanto las derivadas laterales son finitas. ★

Teorema 2.27. Sean $\rho > 0$, $h : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ trigonométricamente ρ-convexa, $\theta \in (\alpha, \beta)$ y $\mathfrak{R}_\theta = \{\varphi \in (\alpha, \beta) : |\varphi - \theta| < \pi/\rho\}$. Entonces el conjunto

$$Dh(\theta) = \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(pe^{i\rho\theta}) = h(\theta) : \operatorname{Re}(pe^{i\rho\varphi}) \leq h(\varphi), \forall \varphi \in \mathfrak{R}_\theta\}$$

es no vacío para todo $\theta \in (\alpha, \beta)$, y

$$Dh(\theta) = \{p \in \mathbb{C} : \rho pe^{i\rho\theta} = \rho h(\theta) - i[(1 - \lambda)h'_-(\theta) + \lambda h'_+(\theta)], \lambda \in [0, 1]\}$$

Demostración. Sea $B_\theta = \{p \in \mathbb{C} : \rho pe^{i\rho\theta} = \rho h(\theta) - i[(1 - \lambda)h'_-(\theta) + \lambda h'_+(\theta)],$ $\lambda \in [0, 1]\}$, $B_\theta \neq \emptyset$ puesto que $p = [h(\theta) - it/\rho]e^{-i\rho\theta} \in B_\theta$ para todo $t \in [h'_-(\theta), h'_+(\theta)]$. Si tomamos $p = [h(\theta) - it/\rho]e^{-i\rho\theta} \in B_\theta$ con $t \in [h'_-(\theta), h'_+(\theta)]$, usando las cotas dadas para $h'_-(\theta)$ y $h'_+(\theta)$ en la Proposición 2.26, tenemos que

$$t \leq h'_+(\theta) \leq \rho A(\varphi) = \rho \frac{h(\varphi) - h(\theta)\cos\rho(\varphi-\theta)}{\operatorname{sen}\rho(\varphi-\theta)}, \quad \theta < \varphi < \text{mín}\{\beta, \theta + \frac{\pi}{\rho}\};$$
$$t \geq h'_-(\theta) \geq \rho A(\varphi) = \rho \frac{h(\varphi) - h(\theta)\cos\rho(\varphi-\theta)}{\operatorname{sen}\rho(\varphi-\theta)}, \quad \text{máx}\{\alpha, \theta - \frac{\pi}{\rho}\} < \varphi < \theta.$$

Es claro que

$$\operatorname{Re}(pe^{i\rho\theta}) = \operatorname{Re}(h(\theta) - it/\rho) = h(\theta).$$

Por otra parte, para todo $\varphi \in \mathfrak{R}_\theta$,

$$\operatorname{Re}(pe^{i\rho\varphi}) = \operatorname{Re}([h(\theta) - it/\rho]e^{i\rho(\varphi-\theta)}) = h(\theta)\cos\rho(\varphi-\theta) + \frac{t\operatorname{sen}\rho(\varphi-\theta)}{\rho}, \tag{2.9}$$

y se deduce de las desigualdades anteriores que, si $\theta < \varphi < \text{mín}\{\beta, \theta + \pi/\rho\}$, entonces $\operatorname{sen}\rho(\varphi-\theta) > 0$ y $\operatorname{Re}(pe^{i\rho\varphi}) \leq h(\varphi)$; mientras que si $\text{máx}\{\alpha, \theta - \pi/\rho\} < \varphi < \theta$, entonces $\operatorname{sen}\rho(\varphi-\theta) < 0$ y $\operatorname{Re}(pe^{i\rho\varphi}) \leq h(\varphi)$.

En consecuencia $\emptyset \neq B_\theta \subseteq Dh(\theta)$. Recíprocamente, dado $p = [a + bi]e^{-i\rho\theta} \in Dh(\theta)$, como $\operatorname{Re}(pe^{i\rho\theta}) = h(\theta)$, podemos afirmar que $a = h(\theta)$. Por otra parte, como $\operatorname{Re}(pe^{i\rho\varphi}) = h(\theta)\cos\rho(\varphi-\theta) - b\operatorname{sen}\rho(\varphi-\theta) \leq h(\varphi)$ podemos deducir que

$$b \geq \frac{h(\theta)\cos\rho(\varphi-\theta) - h(\varphi)}{\operatorname{sen}\rho(\varphi-\theta)} = -A(\varphi) \quad \text{si } \theta < \varphi < \text{mín}\{\beta, \theta + \pi/\rho\},$$
$$b \leq \frac{h(\theta)\cos\rho(\varphi-\theta) - h(\varphi)}{\operatorname{sen}\rho(\varphi-\theta)} = -A(\varphi) \quad \text{si } \text{máx}\{\alpha, \theta - \pi/\rho\} < \varphi < \theta.$$

Por lo tanto, tomando límites cuando $\varphi \to \theta^+$ ó $\varphi \to \theta^-$ y teniendo en cuenta la igualdad (2.8) de la Proposición 2.26 se obtiene que

$$\begin{aligned} &-b\rho \leq h'_+(\theta), \\ &-b\rho \geq h'_-(\theta), \end{aligned}$$

luego $-b\rho \in [h'_-(\theta), h'_+(\theta)]$ y en consecuencia $p \in B_\theta$, lo que nos permite concluir que $Dh(\theta) = B_\theta$. ★

En la siguiente sección trabajaremos con la clase de ρ-funcionales de Minkowski (ver Definición 2.37). Estos podrán tomar valores infinitos y, por tanto, se necesita redefinir el concepto de función trigonométricamente ρ-convexa y ρ-sublinealidad para describir sus propiedades. Observamos que la igualdad (2.1) permite extender de forma inmediata la definición de función trigonométricamente ρ-convexa a funciones definidas en un intervalo compacto $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ y que toman valores en $[-\infty, \infty)$ o en $(-\infty, \infty]$. Veamos un primer resultado que verifican estas fuciones.

Proposición 2.28. Sea $h : [\alpha, \beta] \to [-\infty, \infty)$ y verificando (2.1) para todos θ_1, θ_2 en $[\alpha, \beta]$ tales que $0 < \rho(\theta_2 - \theta_1) < \pi$. Si existe $\theta_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $h(\theta) = -\infty$, entonces $h(\theta) = -\infty$ cuando $\theta \in (\alpha, \beta)$.

Demostración. Consideramos $I_{\theta_0} = \{\theta \in \mathbb{R} : |\theta - \theta_0| < \pi/\rho\}$. Si $\theta \in I_{\theta_0} \cap (\alpha, \beta)$, supongamos que $\theta < \theta_0$, aplicando (2.1) para $\theta_1 = \theta + \varepsilon$ y $\theta_2 = \theta_0$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, deducimos que $h(\theta) = -\infty$. De forma análoga razonamos cuando $\theta > \theta_0$, y concluimos que $h(\theta) = -\infty$ para todo $\theta \in I_{\theta_0} \cap (\alpha, \beta)$.

Como podemos recubrir (α, β) por intervalos de la forma I_θ concluimos que $h(\theta) = -\infty$ para todo $\theta \in (\alpha, \beta)$ ★

Esta proposición muestra que las funciones definidas en un intervalo compacto a valores en $[-\infty, \infty)$ que verifican (2.1), o son idénticamente $-\infty$, excepto quizás en los extremos, o son funciones finitas en (α, β) que pueden tomar el valor $-\infty$ en los extremos. Usaremos este resultado en el Teorema 2.33 para ver que la función indicatriz generalizada es finita. Sin embargo, para el estudio de los ρ-funcionales de Minkowski interesa considerar las funciones a valores en $(-\infty, \infty]$. Observamos que, aunque podamos extender la definición de función trigonométricamente ρ-convexa a esta situación, para poder dar un análogo a la Proposición 2.22, vamos a necesitar que estas funciones verifiquen la desigualdad (2.7), que no se verifica de forma general. La siguiente definición extiende el concepto de forma adecuada.

Definición 2.29. Sea $h : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$. La función h se dice que es *trigonométricamente ρ-convexa* si se verifican las siguientes condiciones:

(1) Para cada par de puntos θ_1, θ_2 en $[\alpha, \beta]$ tales que $0 < \rho(\theta_2 - \theta_1) < \pi$ y para todo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ se tiene que

$$h(\theta) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1) \leq h(\theta_1) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1).$$

(2) Si $\beta - \alpha \geq \pi/\rho$, para cada $\theta \in [\alpha, \beta - \pi/\rho]$ se tiene que

$$h(\theta) + h\left(\theta + \frac{\pi}{\rho}\right) \geq 0.$$

Observación 2.30. Observamos que si $h : K \to \mathbb{R}$ es trigonométricamente convexa en todo intervalo compacto de (α, β) para la Definición 2.29 tenemos que h es trigonométricamente convexa en (α, β) para la Definición 2.19.

Para extender el concepto de ρ-sublinealidad necesitamos hacer algunas consideraciones previas. En primer lugar, denotamos los sectores cerrados de la superficie de Riemann del logaritmo por

$$\overline{\mathcal{R}}(\alpha, \beta) = \{Z \in \mathcal{R} : \alpha \leq \arg Z \leq \beta\}.$$

En segundo lugar, consideramos la extensión topológica del sector por un punto O, el "vértice", y la denotamos por $\overline{\mathcal{R}}_0(\alpha,\beta) = \overline{\mathcal{R}}(\alpha,\beta) \cup \{O\}$. Si $\pi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ es la proyección dada por $\pi(r,\theta) = re^{i\theta}$, entonces definimos $\pi(O) = 0$ y diremos que $Z_1 \oplus Z_2 = O$ si se verifica que $|Z_1| = |Z_2|$ y $\rho(\theta_2 - \theta_1) = \pi$, donde $\theta_j = \arg Z_j$ para $j = 1, 2$. Con esta notación consideramos la siguiente definición de ρ-sublinealidad.

Definición 2.31. Una función $H : \overline{\mathcal{R}}_0(\alpha,\beta) \to (-\infty,\infty]$ se dice que es *ρ-sublineal* si satisface las siguientes condiciones:

(1) $H(O) = 0$.

(2) $H(tZ) = t^\rho H(Z)$ para todos $t > 0$ y $Z \in \overline{\mathcal{R}}(\alpha,\beta)$.

(3) $H(Z_1 \otimes Z_2) \leq H(Z_1) + H(Z_2)$ para todos $Z_1, Z_2 \in \overline{\mathcal{R}}(\alpha,\beta)$ verificando que $0 \leq \rho(\theta_2 - \theta_1) \leq \pi$, donde $\theta_1 = \arg Z_1$ y $\theta_2 = \arg Z_2$.

Observación 2.32. Como hemos mencionado antes podemos demostrar un resultado completamente análogo a la Proposición 2.22 que relaciona los dos conceptos.

Teorema 2.33. Sea f una función entera de orden $\rho > 0$, sea $\rho(r)$ un orden aproximado de f con función indicatriz generalizada h_f (Ver (1.11)). Entonces h_f es una función finita, 2π-periódica y trigonométricamente ρ-convexa.

Además, verifica que si $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, con $b - a > \pi/\rho$ y $h_f(\theta) \leq 0$ si $\theta \in (a,b)$, entonces $h_f(\theta) = 0$ para todo $\theta \in (a,b)$.

Demostración. Se comprueba con facilidad que h_f es 2π-periódica puesto que la función $e^{i\theta}$ lo es. Por las definiciones de σ_f y $h_f(\theta)$ deducimos que $h_f(\theta) \leq \sigma_f < \infty$, por tanto, $h_f : \mathbb{R} \to [-\infty,\infty)$. Veamos que h_f en cada intervalo compacto $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$ verifica

$$h_f(\theta) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1) \leq h_f(\theta_1) \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta) + h_f(\theta_2) \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1), \quad (2.10)$$

para todos θ_1, $\theta_2 \in [\alpha,\beta]$ con $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$ y para todo $\theta \in [\theta_1,\theta_2]$. Tomamos $a_1 \geq h_f(\theta_1)$ y $a_2 \geq h_f(\theta_2)$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Para todo $\varepsilon > 0$, denotamos por

$$H_\varepsilon(\theta) = \frac{[a_2 + \varepsilon] \operatorname{sen} \rho(\theta - \theta_1) + [a_1 + \varepsilon] \operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta)}{\operatorname{sen} \rho(\theta_2 - \theta_1)},$$

que se puede escribir usando fórmulas trigonométricas como

$$H_\varepsilon(\theta) = a_\varepsilon \cos \rho\theta + b_\varepsilon \operatorname{sen} \rho\theta,$$

donde

$$a_\varepsilon = \frac{-[a_2+\varepsilon]\operatorname{sen}\rho\theta_1 + [a_1+\varepsilon]\operatorname{sen}\rho\theta_2}{\operatorname{sen}\rho(\theta_2-\theta_1)},$$

$$b_\varepsilon = \frac{[a_2+\varepsilon]\cos\rho\theta_1 - [a_1+\varepsilon]\cos\rho\theta_2}{\operatorname{sen}\rho(\theta_2-\theta_1)}.$$

Por el Lema 1.49, dado $\rho(r)$ existe una función holomorfa $W_\varepsilon(z)$ y sin ceros en $\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$ y tal que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|W_\varepsilon(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = a_\varepsilon\cos\rho\theta + b_\varepsilon\operatorname{sen}\rho\theta = H_\varepsilon(\theta),$$

uniformemente en $\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$.

Por lo tanto, por este límite y la definición de h_f, a lo largo de las semirrectas $\arg z = \theta_j$ para $j = 1, 2$, se tiene que

$$\frac{1}{|W_\varepsilon(re^{i\theta_j})|} < e^{-[a_j+\varepsilon/2]r^{\rho(r)}},$$

$$|f(re^{i\theta_j})| < e^{[a_j+\varepsilon/2]r^{\rho(r)}},$$

para $r > R$ suficientemente grande. En consecuencia, la función $f(z)W_\varepsilon^{-1}(z)$ es holomorfa y está acotada a lo largo de las semirrectas $\arg z = \theta_j$. A continuación, deducimos por el Teorema de Phragmén-Lindelöf (Teorema A.6) que $f(z)W_\varepsilon^{-1}(z)$ está acotada en el interior de $\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$. Se sigue de este hecho que para $r > R$ suficientemente grande

$$\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} \le \frac{\ln|W_\varepsilon(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} + \frac{M}{r^{\rho(r)}},$$

para todo $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$. Tomando límite cuando $r \to \infty$ se deduce que $h_f(\theta) \le H_\varepsilon(\theta)$ para todo $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ y para todo $\varepsilon > 0$, y tomando ahora límite cuando $\varepsilon \to 0$ y luego cuando $a_1 \to h_f(\theta_1)$ y cuando $a_2 \to h_f(\theta_2)$ obtenemos (2.10). Como $\sigma_f > 0$, deducimos que existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $h_f(\theta) \neq -\infty$ haciendo uso de la 2π-periodicidad y aplicando la Proposición 2.28 deducimos que h es finita y consecuentemente, h_f es trigonométricamente ρ-convexa para la Definición 2.19.

Veamos que la última aserción del enunciado del teorema es consecuencia directa de la propiedad de ρ-convexidad trigonométrica. En primer lugar, observamos que si aplicamos (2.10) al punto medio de $[\theta_1, \theta_2]$ con $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$, obtenemos, usando la fórmula del ángulo mitad, que

$$\begin{aligned} h_f\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) &\le h_f(\theta_1)\frac{\operatorname{sen}\left(\rho\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}{\operatorname{sen}\rho(\theta_2-\theta_1)} + h_f(\theta_2)\frac{\operatorname{sen}\left(\rho\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}{\operatorname{sen}\rho(\theta_2-\theta_1)} \le \\ &\le \frac{1}{\cos\left(\rho\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}\frac{h_f(\theta_1)+h_f(\theta_2)}{2}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

A partir de esta fórmula del punto medio podemos deducir que no existen θ' y θ'' en $\mathbb{R}$ con $\rho(\theta''-\theta')=\pi$ tales que $h_f(\theta')<0$ y $h_f(\theta'')<0$. En caso contrario, tomando $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño, $\theta_1=\theta'+\varepsilon$ y $\theta_2=\theta''-\varepsilon$, tenemos que $0<\theta_2-\theta_1<\pi/\rho$ y aplicando (2.11) vemos que

$$h_f\left(\frac{\theta'+\theta''}{2}\right)\leq\frac{h_f(\theta'+\varepsilon)+h_f(\theta''-\varepsilon)}{2\cos\left(\rho\frac{\theta''-\theta'-2\varepsilon}{2}\right)}=\frac{h_f(\theta'+\varepsilon)+h_f(\theta''-\varepsilon)}{2\operatorname{sen}(\rho\varepsilon)},$$

puesto que $\rho(\theta''-\theta')=\pi$. Tomando límite cuando $\varepsilon\to 0$, por la continuidad de h_f y como $h_f(\theta')<0$ y $h_f(\theta'')<0$, tenemos que $h_f\left((\theta'+\theta'')/2\right)=-\infty$. Esto es imposible puesto que h_f es finita, por lo tanto, no pueden existir tales θ' y θ'' en $\mathbb{R}$.

Finalmente, supongamos que $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$, con $b-a>\pi/\rho$ y $h_f(\theta)\leq 0$ si $\theta\in(a,b)$. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existe $\theta_0\in(a,b)$ con $h_f(\theta_0)<0$, tomamos un natural $m>\rho$, suficientemente grande de forma que $\theta_0+\pi/m$ ó $\theta_0-\pi/m$ estén en (a,b). Por la desigualdad (2.11) aplicada al intervalo de extremos θ_0, $\theta_0\pm\pi/m$ se tiene que

$$h_f\left(\theta_0\pm\frac{\pi}{2m}\right)\leq\frac{1}{\cos\left(\rho\frac{\pi}{2m}\right)}\frac{h_f(\theta_0)+h_f(\theta_0\pm\pi/m)}{2}<0,$$

puesto que $h_f(\theta_0\pm\pi/m)\leq 0$ y $h_f(\theta_0)<0$. Además por (2.10) se tiene que $h_f(\theta)<0$ cuando θ está en el intervalo de extremos θ_0, $\theta_0\pm\pi/(2m)$. Así pues, repitiendo esta construcción, tomando m suficientemente grande, podríamos encontrar θ' y θ'' en (a,b) con $\rho(\theta''-\theta')=\pi$ tales que $h_f(\theta')<0$ y $h_f(\theta'')<0$, lo que acabamos de ver es imposible. Por lo tanto, se tiene que $h(\theta)=0$ para todo $\theta\in(a,b)$, como queríamos probar. ★

Observación 2.34. Como hemos probado que h_f es ρ-trigonométricamente convexa, podemos afirmar de forma inmediata que h_f verifica las propiedades de este tipo de funciones, es decir, entre otras h_f es continua, tiene derivadas laterales.

2.3. Conjuntos ρ-convexos planos. Diagrama indicador

En esta sección vamos definir los conjuntos ρ-convexos, sobre los cuales probaremos varias propiedades. De la misma manera que para los conjuntos estrellados podíamos definir un funcional de Minkowski, en esta ocasión podemos definir un ρ-funcional de Minkowski. En el Teorema 2.53, veremos que existe un isomorfismo de orden entre cerrados ρ-convexos y los ρ-funcionales. Para lograr probar es teorema, previamente, definiremos la función Φ_ρ (2.12) que va a ayudar a describir el soporte de estos conjuntos y que va a permitir probar varios resultados auxiliares necesarios para establecer el isomorfismo. Para finalizar, utilizaremos este teorema para probar el Teorema 2.55, que nos indica cómo se relaciona la función indicatriz generalizada con el diagrama indicador, hecho fundamental para generalizar el Teorema I.

Definición 2.35. Sea $\rho > 0$, y sea $\gamma_\rho = \text{mín}\{\pi, \pi/2\rho\}$. Denotamos por $\mathfrak{D}_\theta = \{re^{i\psi} \in \mathbb{C} : r \geq 0, |\psi + \theta| \leq \gamma_\rho\}$, donde $\theta \in \mathbb{R}$. Un subconjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ se dice *ρ-convexo* si

(1) $0 \in E$, y

(2) La imagen del conjunto $E \cap \mathfrak{D}_\theta$ por la aplicación $F(re^{i\psi}) = r^\rho e^{i\rho\psi}$ es convexa, para todo $\theta \in \mathbb{R}$ y donde $\psi \in [-\theta - \pi, -\theta + \pi)$.

Propiedad 2.36. Los conjuntos ρ-convexos verifican las siguientes propiedades:

(1) La intersección de una familia no vacía de conjuntos ρ-convexos es un conjunto ρ-convexo.

(2) Todo conjunto ρ-convexo es estrellado.

Demostración. (1) Tomamos $\{E_j\}_{j\in J}$ una familia no vacía de conjuntos ρ-convexos. Observamos que $0 \in \cap_{j\in J} E_j$. Por otra parte, dado $\theta \in \mathbb{R}$, sabemos que $F(E_j \cap \mathfrak{D}_\theta)$ es convexo para todo $j \in J$. Si $\rho > 1/2$, $\gamma_\rho = \pi/(2\rho) < \pi$, y en consecuencia, F es un isomorfismo entre $\mathfrak{D}_\theta$ y $\{re^{i\psi} \in \mathbb{C} : r \geq 0, |\rho\theta + \psi| \leq \pi/2\}$. Como la intersección de conjuntos convexos es convexo, podemos concluir que

$$F\left(\bigcap_{j\in J}(E_j \cap \mathfrak{D}_\theta)\right) = \bigcap_{j\in J} F(E_j \cap \mathfrak{D}_\theta)$$

es un conjunto convexo, y por tanto $\cap_{j\in J} E_j$ es ρ-convexo.

Si $\rho \leq 1/2$, se tiene que $\gamma_\rho = \pi$. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, consideramos los siguientes conjuntos de la superficie de Riemann del logaritmo

$$O = \{(r, \psi) \in \mathcal{R} : r > 0, \psi \in [-\theta - \pi, -\theta + \pi]\},$$
$$L = \{(r, \psi) \in \mathcal{R} : r > 0, \psi \in [-\rho\theta - \rho\pi, -\rho\theta + \rho\pi]\}.$$

Definimos $\tilde{F} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ por $\tilde{F}(r, \psi) = (r^\rho, \psi\rho)$. Observamos que $\tilde{F} : O \to L$ es un isomorfismo. Por otra parte, recordamos que $\pi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ está definida por $\pi(r, \theta) = re^{i\theta}$ y observamos que para cada $j \in J$ podemos considerar un subconjunto A_j de $\mathcal{R}$ de modo que $A_j \subseteq O$ y $\pi(A_j) = E_j \cap \mathfrak{D}_\theta \backslash \{0\}$. Como $\tilde{F}$ es un isomorfismo entre O y L podemos afirmar que

$$\tilde{F}\left(\bigcap_{j\in J}(A_j)\right) = \bigcap_{j\in J} \tilde{F}(A_j).$$

Como la amplitud del sector L es menor que π, L y $\pi(L)$ son isomorfos. Observamos que $F(E_j \in \mathfrak{D}_\theta \backslash \{0\}) \subseteq \pi(L)$ y como la amplitud de

L es menor que π se tiene que $F(E_j \in \mathfrak{D}_\theta \backslash \{0\}) = F(E_j \in \mathfrak{D}_\theta)\backslash\{0\}$ es convexo. De la definición de $\tilde{F}$ y A_j deducimos que $\tilde{F}(A_j)$ es isomorfo a $F(E_j \in \mathfrak{D}_\theta \backslash \{0\})$ y por tanto, convexo. En consecuencia, como la intersección de conjuntos convexos es convexo, podemos afirmar que

$$\tilde{F}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$$

es convexo. Para concluir basta observar que

$$\pi\left(\tilde{F}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)\right) = F\left(\bigcap_{j\in J}(E_j \cap \mathfrak{D}_\theta)\backslash\{0\}\right).$$

En consecuencia, como la amplitud de L es menor que π podemos afirmar que $F\left(\cap_{j\in J}(E_j \cap \mathfrak{D}_\theta)\right)$ es un conjuto convexo, y por tanto, $\cap_{j\in J}E_j$ es ρ-convexo.

(2) Como $0 \in E$ basta probar que si $x \in E$, $x \neq 0$ y si $\lambda \in [0,1]$, entonces $\lambda x \in E$. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $x = re^{i\theta}$, observamos que $x \in E \cap \mathfrak{D}_{-\theta}$ y también $0 \in E \cap \mathfrak{D}_{-\theta}$, por tanto, $F(0), F(x) \in F[E \cap \mathfrak{D}_{-\theta}]$. Como E es ρ-convexo, $F[E \cap \mathfrak{D}_{-\theta}]$ es convexo y se tiene que

$$(1-\mu)F(0) + \mu F(x) = \mu F(x) \in F[E \cap \mathfrak{D}_{-\theta}],$$

para todo $\mu \in [0,1]$. Tomando $\mu = \lambda^\rho$, tenemos que $\lambda^\rho F(x) = F(\lambda x) \in F[E \cap \mathfrak{D}_{-\theta}]$. Ahora bien, como F es inyectiva en el interior de $\mathfrak{D}_{-\theta}$ y tenemos que $\lambda x \in \operatorname{int}(\mathfrak{D}_{-\theta})$ para todo $\lambda \in (0,1]$, deducimos que $\lambda x \in E \cap \mathfrak{D}_{-\theta}$, como queríamos demostrar.

★

Definición 2.37. Sea M un conjunto estrellado de $\mathbb{C}$ y sea $\rho > 0$, definimos el *ρ-funcional de Minkowski de M* por

$$p_M(z,\rho) = \operatorname{ínf}\{\alpha^\rho > 0 : z\alpha^{-1} \in M\}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Igual que en el caso del funcional de Minkowski, a partir de la definición, se verifica de forma inmediata la siguiente proposición.

Proposición 2.38. Sean A, B, $\{A_i\}_{i\in I}$ conjuntos estrellados no vacíos de $\mathbb{C}$, entonces el ρ-funcional de Minkowski del conjunto verifica las siguientes propiedades

(1) $p_A(\lambda z, \rho) = \lambda p_A(z,\rho)$ para todo $\lambda > 0$ y todo $z \in \mathbb{C}$.

(2) Si $A \subseteq B$ entonces $p_A(z,\rho) \geq p_B(z,\rho)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(3) Si $A = \cap_{i\in I}A_i$ entonces $p_A(z,\rho) = \sup_{i\in I}\{p_{A_i}(z,\rho)\}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Definición 2.39. Recordamos que $\pi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ es la aplicación $\pi(r,\theta) = re^{i\theta}$ donde $\mathcal{R}$ es la superficie de Riemann del logaritmo. Sea $\rho > 0$, y sea $p : \mathbb{C} \to [0,\infty]$. Se dice que p es *ρ-sublineal en* $\mathbb{C}$ si $p(0) = 0$ y la función $p \circ \pi$ es ρ-sublineal en $\mathcal{R}$, donde los valores θ_1, θ_2 que aparecen en la Definición 2.31 verifican $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq \gamma_\rho$ con $\gamma_\rho = \text{mín}\{\pi, \pi/(2\rho)\}$.

El siguiente teorema caracteriza el ρ-funcional de Minkowski de los conjuntos cerrados ρ-convexos.

Teorema 2.40. Sea $\rho > 0$. Una función $p : \mathbb{C} \to [0,\infty]$ es el ρ-funcional de Minkowski de un conjunto cerrado ρ-convexo E si, y sólo si, p es una función semicontinua inferiormente ρ-sublineal en $\mathbb{C}$. En este caso $E = \{z \in \mathbb{C} : p(z) \leq 1\}$.

Demostración. Sea $\theta \in \mathbb{R}$, supongamos que p es el ρ-funcional de Minkowski de un conjunto cerrado ρ-convexo E. Denotamos por $M_\theta := F[E \cap \mathfrak{D}_\theta]$, por la definición de conjunto ρ-convexo, M_θ es convexo en $\mathbb{C}$, y como $0 \in E \cap \mathfrak{D}_\theta$ tenemos que $0 \in M_\theta$. Además, como $E \cap \mathfrak{D}_\theta$ es cerrado, de la expresión de F se deduce de forma inmediata que M_θ es cerrado, operando de igual manera que al probar (1) de la Propiedad 2.36. Denotamos por

$$\begin{aligned} L_\theta =& \{te^{i\varphi} : t \geq 0, |\varphi + \rho\theta| \leq \rho\gamma_\rho\}, \\ q_\theta(te^{i\varphi}) =& p(t^{1/\rho}e^{i\varphi/\rho}), \quad te^{i\varphi} \in L_\theta. \end{aligned}$$

Veamos que q_θ coincide en L_θ con el funcional de Minkowski de M_θ . Como p es el ρ-funcional de Minkowski de E, se tiene que, para todo $x = te^{i\varphi} \in L_\theta$,

$$\begin{aligned} p_{M_\theta}(x) &= \text{ínf}\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in M_\theta\} = \text{ínf}\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} = r^\rho e^{i\rho\psi}, re^{i\psi} \in E \cap \mathfrak{D}_\theta\} \\ &= \text{ínf}\{\alpha > 0 : t^{1/\rho}e^{i\varphi/\rho}\alpha^{-\rho} = re^{i\psi} \in E \cap \mathfrak{D}_\theta\} \\ &= \text{ínf}\{\xi^\rho > 0 : t^{1/\rho}e^{i\varphi/\rho}\xi^{-1} \in E,\, t^{1/\rho}e^{i\varphi/\rho}\xi^{-1} \in \mathfrak{D}_\theta\} \\ &= \text{ínf}\{\xi^\rho > 0 : t^{1/\rho}e^{i\varphi/\rho}\xi^{-1} \in E,\, te^{i\varphi} \in L_\theta\} p(t^{1/\rho}e^{i\varphi/\rho}) = q_\theta(x). \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.13, p_{M_θ} es sublineal en $\mathbb{C}$, Como q_θ coincide en L_θ con el funcional de Minkowski de M_θ en L_θ y como si $x, y \in L_\theta$, $x + y \in L_\theta$, tenemos que q_θ es una función sublineal en L_θ, y por tanto, la función p es una función ρ-sublineal en $\mathfrak{D}_\theta$. Como $\theta \in \mathbb{R}$ cualquiera, p es una función ρ-sublineal en $\mathbb{C}$.

Por otra parte, por el Teorema 2.11, como M_θ es estrellado (por ser convexo) y cerrado, p_{M_θ} es semicontinua inferiormente en $\mathbb{C}$. Como q_θ coincide en L_θ con el funcional de Minkowski de M_θ, q_θ es semicontinua inferiormente en L_θ, por lo tanto, la función p es una función semicontinua inferiormente en $\mathfrak{D}_\theta$. Como $\theta \in \mathbb{R}$ cualquiera, p es una función semicontinua inferiormente en $\mathbb{C}$.

Recíprocamente, si p es una función ρ-sublineal y semicontinua inferiormente en $\mathbb{C}$, definimos $E = \{z \in \mathbb{C} : p(z) \leq 1\}$. Como p es semicontinua inferiormente E es cerrado, y como p es ρ-sublineal, $p(0) = 0$ y por tanto, $0 \in E$. Veamos ahora que E es ρ-convexo. Sea $\theta \in \mathbb{R}$, denotamos por $M_\theta := F[E \cap \mathfrak{D}_\theta]$. Sea $x_1, x_2 \in M_\theta$ y sea $\lambda \in [0,1]$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \lambda F(y_1) + (1-\lambda)F(y_2) &= \left(\lambda^{1/\rho} y_1\right)^\rho + \left((1-\lambda)^{1/\rho} y_2\right)^\rho \\ &= \left(\lambda^{1/\rho} y_1 \otimes (1-\lambda)^{1/\rho} y_2\right)^\rho = F\left(\lambda^{1/\rho} y_1 \otimes (1-\lambda)^{1/\rho} y_2\right),\end{aligned}$$

donde $y_1, y_2 \in \mathfrak{D}_\theta \cap E$. Vemos que $\lambda^{1/\rho} y_1 \otimes (1-\lambda)^{1/\rho} y_2 \in \mathfrak{D}_\theta$ porque la operación $\otimes$ es cerrada en sectores. Además, de la ρ-sublinealidad de p se deduce que

$$p\left(\lambda^{1/\rho} y_1 \otimes (1-\lambda)^{1/\rho} y_2\right) \leq \lambda p(y_1) + (1-\lambda)p(y_2) \leq \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

y por tanto, de la definición de E, se deduce que $\lambda^{1/\rho} y_1 \otimes (1-\lambda)^{1/\rho} y_2 \in E$. Juntando este hecho con el anterior deducimos que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M_\theta$, por lo que M_θ es un conjunto convexo y en consecuencia E es ρ-convexo.

Como E es ρ-convexo, es estrellado (Propiedad 2.36 (2)) y podemos considerar su ρ-funcional de Minkowski,

$$\begin{aligned} p_E(z,\rho) &= \text{ínf}\{\alpha^\rho > 0 : z\alpha^{-1} \in E\} = \text{ínf}\{\alpha^\rho > 0 : p(z\alpha^{-1}) \leq 1\} = \\ &= \text{ínf}\{\alpha^\rho > 0 : p(z) \leq \alpha^\rho\} = p(z),\end{aligned}$$

por tanto, p es el ρ-funcional de Minkowski de E. ★

Introducimos ahora la función Φ_ρ que, como veremos en los Teoremas 2.45 y 2.46, sirve para estudiar la frontera de los conjuntos cerrados ρ-convexos.

Definición 2.41. Sea $\rho > 0$, definimos la función Φ_ρ por

$$\Phi_\rho(z) = \begin{cases} |z|^\rho \cos(\rho \arg z) = \operatorname{Re}(z^\rho), & \text{si } |\arg z| \leq \gamma_\rho, \\ 0, & \text{si } \rho \geq 1/2,\ \gamma_\rho \leq |\arg z| \leq \pi. \end{cases} \tag{2.12}$$

con $\gamma_\rho = \text{mín}\{\pi, \pi/(2\rho)\}$.

Observación 2.42. De la definición se deduce que Φ_ρ es una función finita. Comprobamos también de forma inmediata que la función $\Phi_\rho(z)$ es una función semicontinua inferiormente (por ser continua) y ρ-sublineal, puesto que la función $\theta \to \Phi_\rho(e^{i\theta})$ es finita y trigonométricamente ρ-convexa (ver Definición 2.17 y Proposición 2.22).

Teorema 2.43. Sea $\rho > 0$, sea p una función finita, no negativa y ρ-sublineal en $\mathbb{C}$ tal que $p \not\equiv 0$. Entonces, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ existe $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ verificando,

$$\Phi_\rho(z_0\omega_0) = p(z_0), \quad \Phi_\rho(z\omega_0) \leq p(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2.13}$$

Demostración. Definimos $h(\theta) := p(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$.

A. Supongamos en primer lugar que $p(z_0) > 0$ con $z_0 = te^{i\psi}$. Como $p(\pi(r,\theta))$ es ρ-sublineal en $\mathcal{R}$, por la Proposición 2.22 tenemos que $p(\pi(1,\theta)) = h(\theta)$ es trigonométricamente ρ-convexa. Como h finita (por serlo p), por el Teorema 2.27, podemos afirmar que $Dh(\psi) = \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(pe^{i\rho\psi}) = h(\psi), \operatorname{Re}(pe^{i\rho\theta}) \leq h(\theta), \theta \in \mathfrak{R}_\psi\} \neq \emptyset$, con $\mathfrak{R}_\psi = \{\theta \in \mathbb{R} : |\psi - \theta| < \pi/\rho\}$ y, por tanto, sabemos que existe un $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re}(ce^{i\rho\theta}) \leq h(\theta), \quad \theta \in [\psi - \pi/\rho, \psi + \pi/\rho], \quad \text{y} \quad \operatorname{Re}(ce^{i\rho\psi}) = h(\psi). \tag{2.14}$$

En consecuencia, tenemos que $c \neq 0$, puesto que $h(\psi) = p(z_0)/t^\rho > 0$.

Así pues, para $\rho \geq 1/2$ podemos suponer que $c = |c|e^{i\rho\varphi}$ con $|\varphi + \psi| < \pi/(2\rho) = \gamma_\rho$. Definimos la función l_0 por

$$l_0(\theta) = \begin{cases} \operatorname{Re}(ce^{i\rho\theta}), & \text{si } |\theta + \varphi| \leq \gamma_\rho, \\ 0, & \text{si } \ \gamma_\rho \leq |\theta + \varphi| \leq \pi. \end{cases} \tag{2.15}$$

y denotamos por $l(\theta)$ a la extensión 2π-periódica de l_0 a $\mathbb{R}$. Como $h \geq 0$, tenemos por (2.14) que $l(\theta) \leq h(\theta)$. En consecuencia, tomando $\omega_0 := c^{1/\rho} = |c|e^{i\varphi}$, si $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} p(z_0) &= t^\rho h(\psi) = t^\rho l(\psi) = t^\rho \operatorname{Re}(ce^{i\rho\psi}) = \Phi_\rho(z_0\omega_0), \\ p(z) &= r^\rho h(\theta) \geq r^\rho l(\theta) = r^\rho \operatorname{Re}(ce^{i\rho\theta})\Phi_\rho(z\omega_0), \quad |\theta + \varphi| \leq \gamma_\rho, \\ p(z) &= r^\rho h(\theta) \geq r^\rho l(\theta) = 0 = \Phi_\rho(z\omega_0), \quad \gamma_\rho \leq |\theta + \varphi| \leq \pi. \end{aligned}$$

Por tanto, se verifica (2.13).

Supongamos ahora que $\rho < 1/2$, por tanto, $\pi/\rho > 2\pi$ y $\gamma_\rho = \pi$. Como h es 2π-periódica se tiene que

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(ce^{i2\pi\rho}e^{i\rho(\psi-2\pi)}) = \operatorname{Re}(ce^{i\psi\rho}) = h(\psi) = h(\psi - 2\pi), \\ &\operatorname{Re}(ce^{i2\pi\rho}e^{i\rho(\theta-2\pi)}) = \operatorname{Re}(ce^{i\theta\rho}) \leq h(\theta) = h(\theta - 2\pi), \quad |\theta - \psi| < \pi/\rho. \end{aligned}$$

Como $|\theta-\psi| = |\theta-2\pi-\psi+2\pi| \leq \pi/\rho$, tenemos que $ce^{i2\pi\rho} \in Dh(\psi-2\pi)$. Por lo tanto, para $|\theta - \psi + 2\pi| \leq \pi/\rho$,

$$\operatorname{Re}(ce^{\rho i(\theta+2\pi)}) \leq h(\theta).$$

Combinando esto con el hecho de que $c \in Dh(\psi)$, podemos deducir que

$$\text{máx}\{\operatorname{Re}(ce^{\rho i(\theta+2\pi)}), Re(ce^{\rho i\theta})\} \leq h(\theta), \quad \theta \in [\psi - 2\pi, \psi].$$

De forma análoga operando con el conjunto $Dh(\psi + 2\pi)$, verificamos que

$$\text{máx}\{\operatorname{Re}(ce^{\rho i(\theta-2\pi)}), Re(ce^{\rho i\theta})\} \leq h(\theta), \quad \theta \in [\psi, 2\pi + \psi].$$

Por lo tanto, como $\psi \in [\psi - 2\pi, \psi] \cap [\psi, \psi + 2\pi]$,

$$h(\psi) = \mathrm{Re}(ce^{\rho i(\psi - 2\pi)}) \geq \text{máx}\{\mathrm{Re}(ce^{\rho i(\psi + 2\pi)}), \mathrm{Re}(ce^{\rho i(\psi - 2\pi)})\},$$

y como h es 2π-periódica,

$$h(\psi + 2\pi) = h(\psi - 2\pi) = h(\psi) \geq \text{máx}\{h(\psi + 2\pi), h(\psi - 2\pi)\},$$

Por tanto mediante transformaciones elementales podemos tomar $c' = |c'|e^{i\rho\varphi'}$, con $|\varphi' + \psi| < \pi < \pi/\rho$.

Considerando l, la extensión de la función

$$l_0(\theta) = \mathrm{Re}(c'e^{i\rho\theta}), \qquad |\theta + \varphi| < \pi,$$

a todo $\mathbb{R}$, de nuevo por (2.14), tenemos que $l(\theta) \leq h(\theta)$, y operando igual que en el caso anterior, concluimos que se verifica (2.13).

B. En el caso en que $p(z_0) = 0$, como $p \not\equiv 0$, existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_1) > 0$, y por lo probado en A, existe $\omega_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que $\Phi_\rho(z\omega_1) \leq p(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En particular, para $z = z_0$, $0 \leq \Phi_\rho(z_0\omega_1) \leq p(z_0) = 0$ y por tanto, basta tomar $\omega_0 := \omega_1$.

★

Propiedad 2.44. Sea E un conjunto cerrado ρ-convexo en $\mathbb{C}$ verificando que $0 \in \operatorname{int} E$, y $E \neq \mathbb{C}$. Sea p_E su ρ-funcional de Minkowski, entonces

$$\operatorname{int} E = \{z \in \mathbb{C} : p_E(z) < 1\}, \quad \partial E = \{z \in \mathbb{C} : p_E(z) = 1\}.$$

donde ∂E denota la frontera de E.

Demostración. Sea $z \in \operatorname{int} E$, entonces existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo que $(1-\varepsilon)^{-1}z \in E$, y por tanto, $p_E(z) \leq (1-\varepsilon)^\rho < 1$, luego $\operatorname{int} E \subseteq \{z \in \mathbb{C} : p_E(z) < 1\}$.

Por otra parte, sea $z \in \{z \in \mathbb{C} : p_E(z) < 1\}$ y sea $\varepsilon \in (0, 1 - p_E(z))$, por el Teorema 2.40 se tiene que $w := (\varepsilon + p_E(z))^{-1/\rho} z \in E$.

Veamos que $\mu w \in \operatorname{int} E$ para todo $\mu \in (0,1)$. Sea $-\theta = \arg w = \arg z$, denotamos $D = \{u \in \mathbb{C}, |u| \leq 1\}$, como $0 \in \operatorname{int} E$ existe $\delta_0 > 0$ tal que $\delta_0 D \subseteq E$, por lo que, para todo $0 < \delta < \delta_0$, tenemos que $\delta e^{-i\theta} \in \operatorname{int} E$. Se combrueba de forma inmediata, por la forma del conjunto $\mathfrak{D}_\theta$, que $u_\delta := F(\delta e^{i-\theta}) \in \operatorname{int} M_\theta$, del mismo modo se comprueba también que $F(w) \in \overline{M_\theta}$. Tomamos $\lambda \in [0,1)$. Como $\overline{M_\theta} = \cap_{\varepsilon > 0}(M_\theta + \varepsilon D)$, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $F(w) \in (E + \varepsilon D)$. Por otra parte, como $u_\delta \in \operatorname{int} M_\theta$, existe $l_\delta D \subseteq M_\theta$ para algún $l_\delta > 0$. Así pues, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo que $\varepsilon(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1} < l_\delta$, como M_θ es convexo se tiene que

$$\begin{aligned}(1-\lambda)u_\delta + \lambda F(w) + \varepsilon D &\subseteq (1-\lambda)u_\delta + \lambda(M_\theta + \varepsilon D) + \varepsilon D \\ &= \lambda M_\theta + (1-\lambda)[u_\delta + \varepsilon(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1}D] \subseteq \lambda M_\theta + (1-\lambda)M_\theta = M_\theta.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(1-\lambda)u_\delta + \lambda F(w) \in \operatorname{int} M_\theta$ para todo $\lambda \in [0,1)$ y para todo $0 < \delta < \delta_0$.

Veamos que dado $a \in (0,1)$ se tiene que $aF(w) \in \operatorname{int} M_\theta$. Por construcción se tiene que $\arg F(w) = \arg u_\delta$, por tanto, si $|F(w)| = |u_\delta| = \delta$ para algún δ, sabemos que $aF(w) = au_\delta \in \operatorname{int} M_\theta$ para todo $a \in [0,1)$. Si $|F(w)| \geq \delta_0 > |u_\delta| = \delta$ dado $a \in (0,1)$, tomamos $\delta_0 > \delta > 0$ de modo que $a|F(w)| \geq |u_\delta|$ y tomamos $\lambda = (a|F(w)| - |u_\delta|)/(|F(w)| - |u_\delta|)$ tenemos que

$$0 \leq \lambda = \frac{a|F(w)| - |u_\delta|}{|F(w)| - |u_\delta|} < \frac{a|F(w)| - a|u_\delta|}{|F(w)| - |u_\delta|} = a < 1, \qquad \text{y}$$

$$\begin{aligned} aF(w) &= \left[\frac{\lambda(|F(w)| - |u_\delta|) + |u_\delta|}{|F(w)|}\right] F(w) = \left[\frac{(1-\lambda)|u_\delta| e^{-i\theta}}{|F(w)| e^{-i\theta}} + \lambda\right] F(w) = \\ &= \frac{(1-\lambda)u_\delta}{F(w)} F(w) + \lambda F(w) = (1-\lambda)u_\delta + \lambda F(w) \in \operatorname{int} M_\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto $aF(w) \in \operatorname{int} M_\theta$ para todo $a \in (0,1)$, luego para todo $\mu \in (0,1)$, si tomamos $a := \mu^{1/\rho} \in (0,1)$ de modo que $F(\mu w) = aF(w) \in \operatorname{int} M_\theta$, se tiene que $\mu w \in \operatorname{int} E$. Tomando $\mu = (\varepsilon + p_E(z))^{1/\rho}$, podemos ver que $z \in \operatorname{int} E$ y, consecuentemente, $\{z \in \mathbb{C} : p_E(z) < 1\} = \operatorname{int} E$.

Por último, por el Teorema 2.40, sabemos que $E = \{z \in \mathbb{C} : p_E(z) \leq 1\}$, de donde se deduce que

$$\partial E = \overline{E} \backslash \operatorname{int} E = E \backslash \operatorname{int} E = \{z \in \mathbb{C} : p_E(z) = 1\}$$

. ★

Teorema 2.45. Sea E un conjunto cerrado ρ-convexo con $E \neq \mathbb{C}$ y $0 \in \operatorname{int} E$, entonces para todo punto $z_0 \in \partial E$ existe $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que la curva $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega_0) = 1\}$ contiene al punto z_0 y no corta al conjunto $\operatorname{int} E$, además, $\Phi_\rho(z\omega_0) \leq 1$ para todo $z \in E$.

Demostración. Por el Teorema 2.40, el ρ-funcional de Minkowski de E, p_E, es una función ρ-sublineal en $\mathbb{C}$. Como $0 \in \operatorname{int} E$, p_E es finita y como $E \neq \mathbb{C}$, $p_E \not\equiv 0$, además todo ρ-funcional es no negativo. Por lo tanto, p_E verifica las hipótesis del Teorema 2.43, es decir, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ existe $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ verificando,

$$\Phi_\rho(z_0\omega_0) = p_E(z_0), \quad \Phi_\rho(z\omega_0) \leq p_E(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

En particular para $z_0 \in \partial E$, como por la Propiedad 2.44, $p_E(z_0) = 1$ y $p_E(z) < 1$ para $z \in \overset{\circ}{E}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_\rho(z_0\omega_0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad z_0 \in \Gamma, \\ \Phi_\rho(z\omega_0) < 1, \quad z \in \operatorname{int} E \quad &\Rightarrow \quad \Gamma \cap \operatorname{int} E = \emptyset, \end{aligned}$$

y además, como para todo $z \in E$ se tiene que $p_E(z) \leq 1$, concluimos que $\Phi_\rho(z\omega_0) \leq 1$. ★

Teorema 2.46. Sea E un conjunto cerrado ρ-convexo con $E \neq \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C} \backslash E$, entonces existe un punto $\omega_0 \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ tal que

$$\Phi_\rho(z_0 \omega_0) > \sup\{\Phi_\rho(z\omega_0) : z \in E\}.$$

Demostración. Consideramos una colección $\{F_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ de conjuntos ρ-convexos cerrados con las siguientes propiedades:

(I) $F_{\varepsilon_1} \subseteq F_{\varepsilon_2} \neq \mathbb{C}$ para $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$,

(II) $0 \in \operatorname{int} F_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$,

(III) $\cap_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon = E$.

Por ejemplo podemos considerar F_ε la envolvente ρ-convexa cerrada de $E \cup D(\varepsilon)$, donde $D(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varepsilon\}$.

Para esta colección, como $\cap_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon = E$, existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que $z_0 \in \mathbb{C} \backslash F_{\varepsilon_0}$. Como F_{ε_0} es un conjunto ρ-convexo cerrado y como $0 \in \operatorname{int} F_{\varepsilon_0}$, por la Propiedad 2.44, para el ρ-funcional de Minkowski de F_{ε_0}, p, tenemos que $F_{\varepsilon_0} = \{z \in \mathbb{C} : p(z) \leq 1\}$ y $\partial F_{\varepsilon_0} = \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 1\}$, lo que nos permite concluir que $p(z_0) > 1$.

Denotamos por $\lambda_0 = [p(z_0)]^{-1/\rho}$, entonces tenemos que $\xi = \lambda_0 z_0 \in \partial F_{\varepsilon_0}$ puesto que $p(\xi) = 1$. Por el Teorema 2.45, existe $\omega_0 \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ tal que la curva $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega_0) = 1\}$ pasa por ξ, además $\Phi_\rho(z\omega_0) \leq 1$ para todo $z \in E \subseteq F_{\varepsilon_0}$. Lo que nos permite concluir que

$$\Phi_\rho(z_0\omega_0) = \Phi_\rho(\xi\omega_0)[\lambda_0]^{-\rho} = [\lambda_0]^{-\rho} = p(z_0) > 1 \geq \sup_{z \in E} \Phi_\rho(z\omega_0).$$

★

Damos ahora otra definición de cerrado ρ-convexo que, como veremos, es equivalente a la definición anterior.

Definición 2.47. Sea $\omega \in \mathbb{C}$, $\xi \geq 0$. El conjunto $T_\rho(\omega; \xi) = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega) \leq \xi\}$ es llamado *conjunto ρ-convexo elemental.* La intersección de una familia cualquiera de conjuntos ρ-convexos elementales se denomina *conjunto ρ-convexo cerrado.*

Dado un conjunto $S \subseteq \mathbb{C}$ denominamos *función de ρ-soporte de S* a la función $k_S(\theta) = \sup\{\Phi_\rho(ze^{i\theta}) : z \in S\}$. Observamos que estas funciones son siempre 2π-periódicas

Observación 2.48. Para todos $\omega \in \mathbb{C}$ y $\xi \geq 0$ el conjunto $T_\rho(\omega, \xi)$ es estrellado, puesto que, si $z \in T_\rho(\omega, \xi)$, para todo $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que $\Phi_\rho(\lambda z) = \lambda^\rho \Phi_\rho(z) \leq \Phi_\rho(z) \leq \xi$, por tanto $\lambda z \in T_\rho(\omega, \xi)$.

Proposición 2.49. Las definiciones 2.35 y 2.47 son equivalentes para conjuntos cerrados de $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea E un conjunto cerrado ρ-convexo para la Definición 2.35, y consideramos la función $H(\omega) = \sup\{\Phi_\rho(z\omega) : z \in E\}$ para todo $\omega \in \mathbb{C}$. Por el Teorema 2.46, tenemos que si $z_0 \in \mathbb{C}\backslash E$, existe $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que

$$\Phi_\rho(z_0\omega) > \sup\{\Phi_\rho(z\omega) : z \in E\} = H(\omega).$$

Como para $z \in E$, $\Phi_\rho(z\omega) \leq H(\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{C}$, podemos afirmar que

$$E = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega) \leq H(\omega), \forall\, \omega \in \mathbb{C}\} = \cap_{\omega\in\mathbb{C}} T_\rho(\omega; H(\omega)).$$

Consecuentemente E es una intersección de conjuntos ρ-convexos elementales y por lo que E es un conjunto ρ-convexo para la Definición 2.47.

Recíprocamente, para $\omega \in \mathbb{C}$ y para $\xi \geq 0$ veamos que los conjuntos $T_\rho(\omega; \xi)$ son cerrados ρ-convexos, en el sentido de la Definición 2.35. Si $\xi = 0$ y $\rho \geq 1/2$, entonces $T_\rho(\omega; 0) = \{z \in \mathbb{C} : \pi/(2\rho) \leq |\arg z\omega| \leq \pi\}$ y por tanto, $T_\rho(\omega; 0)$ es el exterior de un sector abierto de amplitud π/ρ. Si $\xi = 0$ y $\rho < 1/2$, se tiene que $T_\rho(\omega, 0) = \{0\}$, es decir, que para $\xi = 0$ en ambos casos $T_\rho(\omega, 0)$ es un conjunto ρ-convexo cerrado para la Definicón 2.35. Si $\xi > 0$, observamos que

$$T_\rho(\omega; \xi) = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega) \leq \xi\} = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega\xi^{-1/\rho}) \leq 1\}. \quad (2.16)$$

Por la Observación 2.48, $T_\rho(\omega; \xi)$ es un conjunto estrellado, y podemos considerar $p_T(z)$ su ρ-funcional de Minkowski. Observamos que la función $z \to \Phi_\rho(z\omega\xi^{-1/\rho})$ es semicontinua inferiormente y ρ-sublineal (Observación 2.42) por el Teorema 2.40 podemos afirmar que es el ρ-funcional de Minkowski del conjunto cerrado ρ-convexo dado por

$$\{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega\xi^{-1/\rho}) \leq 1\} = T_\rho(\omega; \xi)$$

de donde deducimos que $p_T(z) = \Phi_\rho(z\omega\xi^{-1/\rho})$ y que $T_\rho(\omega, \xi)$, para la Definición 2.35, es un conjunto ρ-convexo cerrado.

Por último, por la Propiedad 2.36 (2) sabemos que la intersección de conjuntos ρ-convexos cerrados, es un conjunto ρ-convexo cerrado, por lo tanto, todo conjunto ρ-convexo cerrado para la Definicón 2.47 lo es para la Definición 2.35. ★

Definición 2.50. Sea $X = \{f : \mathbb{C} \to [0, \infty]\}$, parcialmente ordenado de forma natural, es decir, $f_1 \leq f_2$ si $f_1(z) \leq f_2(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Dado $U \subseteq X$, la función definida por $f(z) = \sup\{g(z) : g \in U\}$ para todo $z \in \mathbb{C}$ se denomina *superior de* U y se denota por $\sup U$. Sean $P, A \subseteq X$, diremos que la clase P es un *generador superior* de A, si toda función $h \in A$ se puede escribir de la forma $h = \sup U$ donde $U \subseteq P$.

Definición 2.51. Sea $\rho > 0$, consideramos el subconjunto $H_\rho = \{f_\omega(z) = \Phi_\rho(z\omega)\}_{\omega\in\mathbb{C}}$ de X. Una función $h \in X$ se dice que es H_ρ*-convexa* si existe $U \subseteq H_\rho$ tal que $h = \sup U$. El conjunto de todas las funciones H_ρ-convexas lo denotamos por $P(H_\rho, X)$.

Lema 2.52. Sea A_ρ la subclase de X formada por las funciones semicontinuas inferiormente, no negativas y ρ-sublineales. Entonces $P(H_\rho, X) = A_\rho$ y si $H \in A_\rho$ y $U_H = \{f_\omega \in H_\rho : f_\omega \leq H\}$ entonces $H = \sup U_H$, es decir, H_ρ es un generador superior de la clase de funciones A_ρ.

Demostración. Veamos en primer lugar que $P(H_\rho, X) \subseteq A_\rho$. Para $\omega \in \mathbb{C}$ fijo, la función $\Phi_\rho(z\omega)$ es una función finita y ρ-sublineal por lo visto en la Observación 2.42, y en consecuencia, es continua por la Observación 2.24. Observamos con una pequeña comprobación que el superior de una familia de funciones continuas, no negativas, y ρ-sublineales es semicontinuo inferiormente, ρ-sublineal, y no negativo. Por tanto, $P(H_\rho, X) \subseteq A_\rho$.

Sea $H \in A_\rho$, veamos que existe una familia $\{H_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de funciones finitas de A_ρ de modo que $H = \sup\{H_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$. Si $H \equiv 0$ se tiene que $H(z) = f_0(z)$. Si $H \not\equiv 0$, consideramos el conjunto $E = \{z \in \mathbb{C} : H(z) \leq 1\}$ que por el Teorema 2.40, es cerrado y ρ-convexo. Al igual que en la demostración del Teorema 2.46, construimos una familia $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de cerrados ρ-convexos. Denotamos por H_ε al conjunto de ρ-funcionales de Minkowski de los conjuntos F_ε, como F_ε es cerrado y ρ-convexo de nuevo por el Teorema 2.40, se tiene que $H_\varepsilon \in A_\rho$ para todo $\varepsilon > 0$. Por la propiedad (3) de la Proposición 2.38 sobre los ρ-funcionales de Minkowski, como $\cap_{\varepsilon>0} F_\varepsilon = E$, tenemos que $H = \sup\{H_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$. Por otro lado, como $0 \in \operatorname{int} F_\varepsilon$ por contrucción, a partir de la definición del ρ-funcional deducimos que H_ε es finita.

Por último, vamos a ver que existe una subfamilia U_H de H_ρ de modo que $H = \sup U_H$. Tomamos $\delta > 0$, y $z_0 \in \mathbb{C}$. Ponemos $M = H(z_0) - \delta > 0$ si $H(z_0) \in \mathbb{R}$, y ponemos $M = \delta$ si $H(z_0) = \infty$. En cualquier caso, como $H = \sup\{H_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $M < H_{\varepsilon_0}(z_0) \leq H(z_0)$. Como H_{ε_0} verifica las hipótesis del Teorema 2.43, existe una función $f_{\omega_0}(z) = \Phi_\rho(z\omega_0) \in H_\rho$, con $\omega_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, con las siguientes propiedades:

$$M < f_{\omega_0}(z_0) = \Phi_\rho(z_0\omega_0) = H_{\varepsilon_0}(z_0); \quad \Phi_\rho(z\omega_0) \leq H_{\varepsilon_0}(z) \leq H(z) \quad z \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, $H(z) = \sup\{H_\varepsilon(z) : \varepsilon > 0\} = \sup U_H$, donde $U_H = \{f_\omega \in H_\rho : f_\omega \leq H\}$. ★

Teorema 2.53. *(Dualidad cerrados ρ-convexos)* Sea $\mathfrak{C}_\rho$ la clase de todos los conjuntos cerrados ρ-convexos parcialmente ordenada por inclusión y sea A_ρ la subclase de X formada por las funciones semicontinuas inferiormente, no negativas y ρ-sublineales. Entonces, la aplicación

$$\nu : A_\rho \to \mathfrak{C}_\rho, \quad \nu(H) = E_H = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega) \leq H(\omega), \forall \omega \in \mathbb{C}\},$$

establece un isomorfismo entre los conjuntos ordenados A_ρ y $\mathfrak{C}_\rho$. Además, si A'_ρ es la subclase de funciones finitas de A_ρ y $\mathfrak{C}'_\rho$ es la subclase de los compactos de $\mathfrak{C}_\rho$, entonces $\nu' = \nu_{|A'_\rho} : A'_\rho \to \mathfrak{C}'_\rho$ es un isomorfismo de orden.

Demostración. En primer lugar veamos que dado $H \in A_\rho$, se tiene que $\nu(H) = E_H \in \mathfrak{C}_\rho$. Vemos que $E_H = \cap_{\omega\in\mathbb{C}} T_\rho(\omega, H(\omega))$, por lo tanto, por la Definición 2.47, que hemos visto que es equivalente a la Definición 2.35 en la Proposición 2.49, podemos afirmar que E_H es un conjunto cerrado ρ-convexo.

Veamos que ν es inyectiva. Sean H_1 y H_2 funciones de A_ρ, supongamos que $E_{H_1} = E_{H_2}$. Por el Lema 2.52, sabemos que $H_j(\omega) = \sup\{f_z(\omega) = \Phi_\rho(z\omega) : f_z(\omega) \le H_j(\omega), \forall\omega \in \mathbb{C}\}$ para $j = 1, 2$. Por otra parte, como $E_{H_1} = E_{H_2}$, se tiene que

$$\{z \in \mathbb{C} : f_z(\omega) \le H_1(\omega), \forall\omega \in \mathbb{C}\} = \{z \in \mathbb{C} : f_z(\omega) \le H_2(\omega), \forall\omega \in \mathbb{C}\},$$

y en consecuencia $f_z(\omega) \le H_1(\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{C}$ si, y sólo si, $f_z(\omega) \le H_2(\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{C}$, y por tanto, $H_1(\omega) = H_2(\omega)$.

Veamos que ν es sobreyectiva. Sea $E \in \mathfrak{C}_\rho$, definimos

$$H(\omega) = \sup\{f_z(\omega) = \Phi_\rho(z\omega), \, z \in E\}.$$

Por el Lema 2.52, sabemos que $H \in P(H_\rho, X) = A_\rho$. Por otro lado, por el Teorema 2.46 sabemos que

$$\nu(H) = E_H = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega) \le H(\omega), \forall\omega \in \mathbb{C}\} = E.$$

Por tanto, ν es sobreyectiva.

Observamos también que ν preserva el orden, puesto que si $H_1 \le H_2$ tenemos que

$$\{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega) \le H_1(\omega), \forall\omega \in \mathbb{C}\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega) \le H_2(\omega), \forall\omega \in \mathbb{C}\},$$

es decir, que $E_{H_1} \subseteq E_{H_2}$. En consecuencia concluimos que ν es un isomorfismo entre los conjuntos ordenados A_ρ y $\mathfrak{C}_\rho$.

Por otro lado, si $H \in A'_\rho$, sabemos por la Observación 2.24 que H es continua, lo que nos permite afirmar que $M = \sup\{H(e^{i\theta}) : \theta \in \mathbb{R}\} < \infty$. Consecuentemente, $H(\omega) \le M|\omega|^\rho$ para todo $\omega \in \mathbb{C}$, de donde se deduce que

$$\begin{aligned} E_H &= \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega) \le H(\omega), \forall\omega \in \mathbb{C}\} \\ &\subseteq \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(z\omega) \le M|\omega|^\rho, \forall\omega \in \mathbb{C}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(ze^{i\theta}) \le M, \forall\theta \in \mathbb{R}\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z|^\rho \le M\}, \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\nu(H) = E_H$ es acotado y, por tanto, compacto. En sentido contrario, supongamos que E es un conjunto compacto de $\mathfrak{C}_\rho$. Para cada $\omega \in \mathbb{C}$ fijo, la función $\Phi_\rho(z\omega)$ es continua en E, por lo que $H(\omega) = \sup\{\Phi_\rho(z\omega), \, z \in E\} < \infty$, es decir, $H \in A'_\rho$, lo que nos permite afirmar que $\nu' = \nu_{|A'_\rho} : A'_\rho \to \mathfrak{C}'_\rho$ es un isomorfismo de orden.

★

Definición 2.54. Sea f una función entera de orden $\rho > 0$, sea h_f la función indicatriz generalizada de f. Denotamos por $h_f^+(\theta) = \text{máx}\{0, h_f(\theta)\}$. Llamamos *diagrama indicador de* f al conjunto

$$X_{h_f^+} = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(ze^{i\theta}) \leq h_f^+(\theta),\, \theta \in \mathbb{R}\}. \tag{2.17}$$

Teorema 2.55. Sea $\rho > 0$ y sea h una función finita, no negativa y trigonométricamente ρ-convexa definida en $\mathbb{R}$. El conjunto $X_h = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(ze^{i\theta}) \leq h(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ es el único conjunto compacto ρ-convexo cuya función de ρ-soporte coincide con h.

Demostración. Consideramos la función $H(\omega) = r^\rho h(\theta)$ con $\omega = re^{i\theta}$. Por la Proposición 2.22, como h es trigonométricamente ρ-convexa, H es una función ρ-sublineal. Además H es no negativa y finita por serlo h. Por tanto, con las notaciones del teorema anterior tenemos que $H \in A'_\rho$, en consecuencuencia E_H es un compacto ρ-convexo. Observamos que,

$$\begin{aligned} E_H &= \{z \in \mathbb{C} : |\omega|^\rho \Phi_\rho(ze^{i\theta}) = \Phi_\rho(z\omega) \leq H(\omega) = |\omega|^\rho h(\theta),\, |\omega|e^{i\theta} \in \mathbb{C}\} = \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(ze^{i\theta}) \leq h(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = X_h. \end{aligned}$$

Por tanto, X_h es compacto ρ-convexo y además $H(\omega) = \sup\{\Phi_\rho(z\omega),\, z \in X_h\}$, por lo que su función de ρ-soporte $k_{X_h}(\theta) = \sup\{\Phi_\rho(ze^{i\theta}) : z \in X_h\}$ verifica que $k_{X_h}(\theta) = H(e^{i\theta}) = h(\theta)$, es decir, h es la función de ρ-soporte de X_h.

Para finalizar podemos afirmar que X_h es el único compacto ρ-convexo verificando esta propiedad por la unicidad dada por el isomorfismo $\nu' = \nu_{|A'_\rho} : A'_\rho \to \mathfrak{C}'_\rho$ del Teorema 2.53. ★

Observación 2.56. Por el Teorema 2.33 sabemos que la función $h_f^+(\theta) = \text{máx}\{0, h_f(\theta)\}$ verifica las hipótesis del Teorema 2.55.

3. Órdenes aproximados analíticos

A partir de este capítulo, como mencionamos en la introducción, respaldaremos la mayor parte de los resultados obtenidos en el trabajo de L. S. Maergoiz [19]. En la primera sección definiremos el concepto de orden analítico aproximado. Esta noción nos permite considerar funciones analíticas en un sector de la superficie de Riemann del logaritmo que se comportan como un orden aproximado sobre el semi-eje real positivo. En el Teorema 3.6, probaremos que a todo orden aproximado se le puede asociar un orden analítico aproximado de forma que este sea equivalente al anterior sobre el semi-eje real positivo, y además verifique otras cuatro propiedades adicionales de simetría o regularidad. El clase de todas las funciones satisfacen dichas propiedades la vamos a denotar por $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$. En la Sección 3.2 analizaremos las características de esta clase de funciones, en particular, el Teorema 3.15 permite probar la existencia de una función inversa dentro de una clase del mismo tipo. Terminaremos definiendo una función $N(\zeta)$ para cada función de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, cuya descripción y propiedades emplearemos en el capítulo siguiente para probar una fórmula de Hankel para una función auxiliar que desempeña en este contexto un papel similar al de la función Gamma de Euler en el estudio de la transformada de Laplace clásica (Teorema 4.3).

3.1. Orden aproximado analítico de una función entera

Definición 3.1. Sea $\gamma \in (0, \infty)$. Consideramos la siguiente notación para las regiones de la superficie de Riemann del logaritmo $\mathcal{R}$ descritas a continuación

$$L(\gamma, R) = \{(r, \theta) \in \mathcal{R} : |\theta| < \gamma : \, r > R\},$$
$$L(\gamma) = \{(r, \theta) \in \mathcal{R} : |\theta| < \gamma : \, r > 0\}.$$

Definición 3.2. Sea $\rho(r)$, para $r > 0$, una función no negativa tal que $\rho(r) \to \rho$ cuando $r \to \infty$, decimos que $\rho(r)$ es un *orden analítico aproximado* si la función $V(r) = r^{\rho(r)}$ admite una prolongación analítica $V(z)$ a un dominio que contiene una región del tipo $L(\gamma, R)$ con $R > 0$, y verifica

$$\lim_{r \to \infty} \frac{V(zr)}{V(r)} = z^{\rho}, \qquad z \in L(\gamma),$$

con convergencia uniforme en los compactos de $L(\gamma)$.

Observación 3.3. Con la notación z^{ρ} nos referiremos, de aquí en adelante, a la determinación principal del logaritmo, es decir, si $z = re^{i\theta}$, entonces $z^{\rho} = r^{\rho} e^{i\rho\theta}$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Proposición 3.4. Sea $\rho(r)$ un orden analítico aproximado, entonces $\rho(r)$ es un orden aproximado (en el sentido de la Definición 1.16).

Demostración. En primer lugar vemos que la función $\rho(r)$ es no negativa por definición. En segundo lugar para ver el carácter $\mathcal{C}^1$ de $\rho(r)$ observamos que como $V(z)$ es analítica en $L(\gamma, R)$, $V(r)$ es analítica en (R, ∞). Por lo tanto, como $\rho(r) = \ln V(r)/\ln r$, $\rho(r)$ es analítica, y en particular $\mathcal{C}^1$, en (R, ∞). Por la Observación 1.17, $\rho(r)$ verifica las propiedades (1) y (2) de los órdenes aproximados.

Por último, consideramos las funciones $f_r(z) := V(zr)/V(r)$ definidas en $L(\gamma)$ y $r > R$. Por la definición de orden analítico, estas funciones convergen hacia la función z^ρ uniformemente en los compactos de $L(\gamma)$ cuando $r \to \infty$, en particular en cada intervalo $[a, b] \subseteq (0, \infty)$.

Por lo tanto, por el teorema de *Weierstrass*, las funciones derivadas $f_r'(z)$ convergen uniformemente en cada intervalo $[a, b] \subseteq (0, \infty)$ hacia la función $\rho z^{\rho-1}$, es decir, tenemos que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{rV'(tr)}{V(r)} = \rho t^{\rho-1}, \quad t \in (0, \infty)$$

Observamos que para $t = 1$, $\rho(r)$ verifica la segunda condición de (1.9), como además $\rho(r) \to \rho$ si $r \to \infty$, usando la Propiedad 1.20 podemos afirmar que $\rho(r)$ es un orden aproximado. ★

Vamos a ver que toda función entera admite un orden analítico aproximado y que además este orden verifica una serie de propiedades.

Lema 3.5. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho > 0$ no entero, sea $\Delta>0$ consideremos la función entera f construida en el Teorema 1.44. Sea $\delta := (\pi\Delta)^{-1} \operatorname{sen}(\pi\rho)$ y sea $G(z) = \log f(-z)$ (ver Notación 1.38). Entonces

$$\lim_{r\to\infty} \frac{G(rz)}{G(r)} = z^\rho, \quad z \in L(\pi) \tag{3.1}$$

con convergencia uniforme en los compactos de $L(\pi)$. Además la función

$$\rho_1(r) = \frac{\ln \delta G(r)}{\ln r}$$

es un orden aproximado equivalente a $\rho(r)$.

Demostración. Por la igualdad (1.36) del Teorema 1.44 tenemos que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\delta G(re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}} = \frac{\operatorname{sen}(\pi\rho)}{\pi\Delta} \lim_{r\to\infty} \frac{\log f(-re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}} = e^{i\rho\theta}, \quad |\theta| < \pi, \tag{3.2}$$

donde la convergencia es uniforme en todos los compactos $[a, b] \subseteq (-\pi, \pi)$. Del mismo modo también sabemos, por la Propiedad 1.28, que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(sr)}{V(r)} = s^\rho, \quad s \in (0, \infty), \tag{3.3}$$

con convergencia uniforme en los compactos $[a, b] \subseteq (0, \infty)$. Por (3.2) y (3.3) deducimos que para todo $z = se^{i\theta} \in L(\pi)$ se tiene que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{G(rz)}{G(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{\delta G(rse^{i\theta})/(rs)^{\rho(rs)}}{\delta G(r)/r^{\rho(r)}} \frac{V(rs)}{V(r)} = e^{i\rho\theta} s^{\rho} = z^{\rho}$$

con convergencia uniforme en los compactos de $L(\pi)$, y se verifica (3.1).

Veamos ahora que $\rho_1(r)$ es un orden aproximado equivalente a $\rho(r)$. Por la igualdad (1.36),

$$\lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{\delta G(re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}}\right) + \ln r^{\rho(r)}}{\ln r} = \rho > 0, \tag{3.4}$$

luego para r suficientemente grande $\rho_1(r)$ es positivo. Como la función $G(z)$ es analítica en $L(\pi)$ la función $G(r)$ es $\mathcal{C}^1$ en $(0, \infty)$ y consecuentemente $\rho_1(r)$ es $\mathcal{C}^1$ para r suficientemente grande y teneiendo en cuenta la Observación 1.17, podemos afirmar que $\rho_1(r)$ verifica las propiedades (1) y (2) de los órdenes aproximados.

Por otra parte, tenemos que las funciones $g_r(z) = G(rz)/G(r)$ convergen hacia la función z^{ρ} uniformemente en los compactos de $L(\pi)$ por (3.1). Consecuentemente, por el *teorema de Weierstrass*, las funciones derivadas $g_r'(z)$ convergen uniformemente hacia $\rho z^{\rho-1}$ en $L(\pi)$. Luego para $z = 1$, tenemos que se verifica

$$\lim \frac{rG'(r)}{G(r)} = \rho,$$

donde la diferenciación $G'(r) = (\partial_z G)(r)$ con respecto a la variable z coincide con la diferenciación de $G(r)$ con repecto a la variable r. Así pues, por la igualdad (3.4) y por la Propiedad 1.20 y podemos afirmar que $\rho_1(r)$ es un orden aproximado y además, también por (1.36),

$$\lim_{r\to\infty} [\rho_1(r) - \rho(r)] \ln r = \lim_{r\to\infty} \ln \delta G(r) - \rho(r) \ln r = \lim_{r\to\infty} \ln \frac{\delta \ln f(-r)}{r^{\rho(r)}} = 0,$$

luego $\rho_1(r)$ es un orden aproximado equivalente a $\rho(r)$. ★

Teorema 3.6. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho(r) \to \rho > 0$ cuando $r \to \infty$, entonces para todo $\gamma > 0$ existe una función analítica $V_0(z)$ en $L(\gamma)$, tal que $\rho_0(r) := \ln V_0(r)/\ln r$ es un orden analítico aproximado equivalente a $\rho(r)$ y tal que se verifican las siguientes propiedades:

(1) Para todo $W = (r, \theta) \in L(\gamma)$ se tiene que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V_0(rW)}{V_0(r)} = W^{\rho}, \quad W \in L(\gamma), \tag{3.5}$$

donde $W^{\rho} = s^{\rho} e^{i\rho\theta}$ y con convergencia uniforme en los compactos de $L(\gamma)$.

(2) Se tiene que $\overline{V_0(W)} = V_0(\overline{W})$ para todo $W \in L(\gamma, R)$, donde $\overline{W} = (|W|, -\arg W)$.

(3) La función $V_0(r)$ es positiva y monotona creciente en $(0, \infty)$, es estrictamente convexa relativa a $\ln r$, es decir, la función $t \to V(e^t)$ es convexa y además, $V_0(0) = 0$.

(4) Para $r > 0$, $\ln V_0(r)$ es una función estrictamente cóncava.

Demostración. (1) Fijamos números ξ, α, γ tales que $0 < \xi < \alpha < \pi/\gamma$, $\rho > \xi$ y ponemos $\mu := \xi/\alpha$. Si $\rho(r)$ es el orden aproximado del enunciado, definimos $\xi(r) = \rho(r) - \rho + \xi$ y $\mu(t) = \alpha^{-1}\xi(t^{1/\alpha})$. Observamos que $\mu(t)$ es un orden aproximado, puesto que

(μ.1) Como $\xi(r)$ es $\mathcal{C}^1$, y para $\alpha > 0$ la función $t^{1/\alpha}$ es $\mathcal{C}^1$ en $(0, \infty)$ podemos afirmar que $\mu(t)$ es diferenciable con continuidad.

(μ.2) Como $\rho(r) \to \rho$, por la Observación 1.17 podemos considerar la definición de $\xi(r)$ a partir de un r, para que se verifique que $\xi(r) \geq 0$ y por lo tanto, que, $\mu(t) \geq 0$.

(μ.3) $\lim_{t\to\infty} \mu(t) = \lim_{t\to\infty} \alpha^{-1}[\rho(t^{1/\alpha}) - \rho + \xi] = \alpha^{-1}\xi = \mu < 1$,

(μ.4) $\lim_{t\to\infty} t\mu'(t)\ln t = \lim_{t\to\infty} t^{1/\alpha}\alpha^{-2}[\rho'(t^{1/\alpha})]\ln t =$
$= \lim_{r\to\infty} \alpha^{-1}[r\rho'(r)\ln r] = 0$.

Como $0 < \mu < 1$ podemos construir para $\Delta = \operatorname{sen}(\pi\mu)/\pi$ la función f_0 dada por el Teorema 1.44 y usando la misma notación que en este teorema y que en el Lema 3.5, podemos afirmar que la función $\mu_1(t) = \ln G(t)/\ln t$ es un orden aproximado equivalente a $\mu(t)$. Por las ecuaciones (3.1) y (1.36), se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(tz)}{t^{\mu(t)}} = \lim_{t\to\infty} \frac{G(tz)}{G(t)} = z^{\mu}, \quad z \in L(\pi), \tag{3.6}$$

con convergencia uniforme de ambos límites en los compactos de $L(\pi)$. Como $G(z)$ es analítica en $L(\pi)$, la función definida por $\Phi(W) = G(W^\alpha)$ es analítica en $L(\pi/\alpha)$. Por (3.6) y como $\mu(t) = \alpha^{-1}\xi(t^{1/\alpha})$ podemos escribir

$$W^{\xi} = W^{\mu\alpha} = \lim_{r\to\infty} \frac{G(r^\alpha W^\alpha)}{r^{\alpha\mu(r^\alpha)}} = \lim_{r\to\infty} \frac{\Phi(rW)}{r^{\xi(r)}} = \lim_{r\to\infty} \frac{\Phi(rW)}{\Phi(r)},$$

con convergencia uniforme en los compactos de $L(\pi/\alpha)$. Esto nos permite afirmar que la función

$$V_0(W) := W^{\rho-\xi}\Phi(W), \quad W \in L(\pi/\alpha),$$

satisface (3.5) puesto que, como $\gamma < \pi/\alpha$, $\overline{L(\gamma)} \subseteq L(\pi/\alpha)$ y, por tanto, tenemos convergencia uniforme en los compactos de $L(\gamma)$.

Definimos $\rho_0(r) = \ln V_0(r)/\ln r$, veamos que ρ_0 es un orden aproximado analítico. Como la función $V_0(W)$ es analítica en $L(\gamma)$, $V_0(r)$ es $\mathcal{C}^1$ en $(0,\infty)$ y consecuentemente $\rho_0(r)$ es también $\mathcal{C}^1$. Del mismo modo, observamos que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln V_0(r)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln r^{\rho-\xi} + \ln \Phi(r)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \left(\rho - \xi + \frac{\ln G(r^\alpha)}{\ln r}\right);$$

como $\mu_1(t) = \ln G(t)/\ln t$ es un orden aproximado equivalente a $\mu(t)$, podemos aplicar a μ_1 por la Propiedad 1.20, con lo que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln V_0(r)}{\ln r} = \rho - \xi + \lim_{t\to\infty} \alpha \frac{\ln G(t)}{\ln t} = \rho - \xi + \alpha\frac{\xi}{\alpha} = \rho. \tag{3.7}$$

Por lo tanto, $\lim_{r\to\infty} \rho_0(r) = \rho > 0$, lo que garantiza la positividad de $\rho_0(r)$ para r suficientemente grande. Por otra parte, para todo $z \in L(\gamma)$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V_0(zr)}{V_0(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{(zr)^{\rho-\xi}\Phi(zr)}{r^{\rho-\xi}\Phi(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{z^{\rho-\xi}\Phi(zr)}{\Phi(r)}.$$

Observamos que si $z \in L(\gamma) \subseteq L(\pi/\alpha)$, entonces $z^\alpha \in L(\pi)$, y por tanto por (3.6),

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V_0(zr)}{V_0(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{z^{\rho-\xi}G((zr)^\alpha)}{G(r^\alpha)} = z^{\rho-\xi} \lim_{t\to\infty} \frac{G(z^\alpha t)}{G(t)} = z^\rho. \tag{3.8}$$

Así pues, por las ecuaciones (3.7) y (3.8) podemos afirmar que $\rho_0(r)$ es un orden aproximado analítico. Por último, como μ_1 y μ son equivalentes,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} [\rho_0(r) - \rho(r)] \ln r &= \lim_{r\to\infty} [\rho_0(r) - \rho + \xi + \rho - \rho(r) - \xi] \ln r \\
&= \lim_{r\to\infty} \ln V_0(r) + [-\rho + \xi - \xi(r)] \ln r = \lim_{r\to\infty} \ln \Phi(r) - \xi(r) \ln r \\
&= \lim_{r\to\infty} \ln G(r^\alpha) - \alpha\mu(r^\alpha) \ln r = \lim_{t\to\infty} [\mu_1(t) - \mu(t)] \ln t = 0,
\end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que $\rho_0(r)$ y $\rho(r)$ son órdenes equivalentes y que $\rho_0(r)$ es el orden aproximado buscado.

(2) Sea $W \in L(\gamma, R)$, tenemos que

$$\overline{V_0(W)} = \overline{W^{\rho-\xi}\Phi(W)} = \overline{W}^{\rho-\xi}\overline{G(W^\alpha)}$$

De la misma manera, por la definición de $G(z)$ tenemos que para $z \in L(\pi)$

$$\begin{aligned}
e^{G(\overline{z})} = f_0(-\overline{z}) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\overline{z}}{a_k}\right) = \overline{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{a_k}\right)} = \\
= \overline{f_0(-z)} = \overline{e^{G(z)}} = e^{\overline{G(z)}}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\exp(\overline{G(\overline{z})}) = \exp(G(z))$ en $L(\pi)$, de donde se deduce que $G(z) = 2k\pi i + \overline{G(\overline{z})}$ y como $G(0) = 0$, podemos concluir que para todo $W \in L(\gamma, R)$,

$$\overline{V_0(W)} = \overline{W}^{\rho-\xi} G(\overline{W^\alpha}) = \overline{W}^{\rho-\xi} G(\overline{W}^\alpha) = V_0(\overline{W}).$$

(3) En primer lugar, de la definición de $G(r)$ y como $\rho > \xi$ deducimos que $V_0(r)$ es monótona creciente y positiva. También de la definición de $G(r)$ se deduce que $G(0) = 0$ y en consecuencia $V_0(0) = 0$.

En segundo lugar, observamos que para todo $r > 0$ se tiene que $G(r) = \log f_0(-r) = \ln M_{f_0}(r)$. Observamos también que como f_0 es entera, podemos aplicar el teorema de los tres círculos de Hadamard (Teorema A.9) y consecuentemente

$$\begin{aligned} G(r_2) = \ln M_{f_0}(r_2) &\leq \ln M_{f_0}(r_1) \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} + \ln M_{f_0}(r_3) \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1} \\ &\leq G(r_1) \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} + G(r_3) \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1}, \end{aligned}$$

para todos $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \infty$. De esta desigualdad deducimos que

$$\begin{aligned} \Phi(r_2) = G(r_2^\alpha) &\leq G(r_1^\alpha) \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} + G(r_3^\alpha) \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1} \\ &\leq \Phi(r_1) \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} + \Phi(r_3) \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1}, \end{aligned}$$

puesto que $\alpha > 0$, para todos $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \infty$. Las funciones $\Phi(r)$ y $r^{\rho-\xi}$ son funciones positivas, crecientes y convexas respecto de $\ln r$, y en consecuencia, $\Phi(e^t)$ y $e^{t(\rho-\xi)}$ son funciones positivas, crecientes y convexas y por el Lema A.7, que nos dice que esta clase de funciones es estable para el producto, deducimos que $\Phi(e^t)e^{t(\rho-\xi)} = V(e^t)$ es una función positiva, creciente y convexa, lo que nos permite concluir que $V(r)$ es una función positiva, creciente, y convexa respecto de $\ln r$.

(4) Para $c > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$ consideramos las funciones definidas por $\varphi_1(r) = \ln r$, $\varphi_2(r) = \ln(1 + cr^\alpha)$. Como φ_1' y φ_2' son estrictamente decrecientes en $(0, \infty)$, por el Lema A.8 tenemos que las funciones $\varphi_1(r)$ y $\varphi_2(r)$ son estrictamente cóncavas para $r > 0$. Por la definición de $V(r)$ tenemos que

$$\ln V_0(r) = \ln r^{\rho-\xi} \Phi(r) = (\rho - \xi) \ln r + \ln \log f_0(-r^\alpha).$$

Por otro lado, como $G(r) = \overline{G(\overline{r})} = \overline{G(r)}$, tenemos que $G(r) \in \mathbb{R}$, por lo que $G(r) = \log f_0(-r) = \ln |f_0(-r)|$. Además, como la suma de funciones estrictamente cóncavas (finita o infinita) es una función estrictamente cóncava y como la composición de funciones estrictamente cóncava también lo es, se tiene que

$$\ln V_0(r) = \ln r^{\rho-\xi} + \ln |f_0(-r^\alpha)| = (\rho - \xi)\ln r + \ln \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r^\alpha}{a_k}\right),$$

luego para todo $r > 0$, $\ln V(r)$ es una función estrictamente cóncava.

★

Observación 3.7. Por el Teorema 1.25 hemos visto que dada f una función entera podemos construir un orden aproximado asociado a ella, luego por este teorema podemos asociar a f un orden analítico aproximado.

Observación 3.8. Si $1/2 < \rho < 1$, y $\gamma \leq \pi$, entonces para el caso límite $\xi = \rho$ y $\alpha = 1$, de la prueba anterior, observamos que la función $G(z) = \log f_0(-z)$ satisface las condiciones del teorema.

Propiedad 3.9. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho(r) \to \rho > 0$ cuando $r \to \infty$, sea $\gamma > 0$ y sea $\alpha \in (0, \rho)$ con $\alpha < \pi/\gamma$. Entonces, para todo $\beta \in (\rho, \rho + \alpha)$, existe una función V_β, verificando las condiciones del Teorema 3.6, que admite una representación

$$V_\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{k+1} t^{\beta + k\alpha}, \quad t \in [0, 1], \tag{3.9}$$

donde $B_l > 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$, y la serie converge absolutamente y uniformemente para todo $t \in [0, 1]$.

Demostración. Consideramos la función G del Teorema 3.6, y podemos escribir

$$G(\omega) = \log f_0(-\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{\omega}{a_k}\right),$$

donde por el Teorema 1.14 sabemos que hay convergencia uniforme en todos los discos de la forma $D_\delta = \{\omega \in \mathbb{C} : \ |\omega| \leq \delta\}$ con $0 < \delta < a_1$, puesto que f_0 no se anula. Así pues, teniendo en cuenta el desarrollo en serie del logaritmo, vemos que G admite la siguiente representación en serie de potencias

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{\omega}{a_k}\right) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{A_l}{l} \omega^l, \quad \omega \in D_\delta, \quad A_l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^l}.$$

Observamos que podemos escribir $\beta \in (\rho, \rho + \alpha)$ en la forma $\beta = \rho - \xi + \alpha$, con $0 < \xi < \alpha < \rho$ y por lo tanto, la función definida en $V_1(t) = t^{\rho-\xi} G(t^\alpha)$ es una función como las construidas en el Teorema 3.6 y por lo tanto verifica las condiciones. Si consideramos la función $V(t) = V_1(\delta t)$ comprobamos que para todo $t \in [0,1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} V(t) =& V_1(\delta t) = (\delta t)^{\rho-\xi} G((\delta t)^{\alpha}) = (\delta t)^{\rho-\xi} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{A_l}{l} (\delta t)^{\alpha l} \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A_{k+1}}{k+1} (\delta t)^{\rho-\xi+\alpha(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{k+1} t^{\beta+k\alpha}, \end{aligned}$$

y además se comprueba de forma sencilla que $V(z)$ verifica las condiciones del Teorema 3.6 por verificarlas $V_1(t)$. ★

3.2. Clase de funciones asociada a un orden analítico dado

Definición 3.10. Sean $\gamma > 0$ y $\rho(r)$ un orden aproximado, con $\rho(r) \to \rho > 0$, entonces denotamos por $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r)) = \{V(z) : z \in L(\gamma)\}$ la clase de funciones que satisfacen las condiciones $(1)-(4)$ del Teorema 3.6 y tales que $\rho_V(r) := \ln V(r)/\ln r$ es un orden aproximado analítico equivalente a $\rho(r)$.

Notación 3.11. Si $\gamma_\rho = \text{mín}\{\pi, \pi/(2\rho)\}$ definimos el siguiente conjunto de la superficie de Riemann del logaritmo $\mathcal{R}$,

$$\Pi_\theta = \{(r,\varphi) \in \mathcal{R} : r > 0 : |\varphi - \theta| < \gamma_\rho\}. \tag{3.10}$$

Vamos a ver algunas de las propiedades de la clase $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$.

Proposición 3.12. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado, con $\rho(r) \to \rho > 0$, sea V una funcion de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, entonces se verifica que:

(1) Para todo $W \in L(\gamma)$ se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{tV'(tW)}{V(t)} = \rho W^{\rho-1}, \tag{3.11}$$

con convergencia uniforme en los compactos de $L(\gamma)$, donde si $W = (r,\theta)$, $V'(W) = e^{-i\theta}(\partial_r V)(W)$.

(2) Si $\pi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ con $\pi(r,\theta) = re^{i\theta}$, tenemos de forma uniforme que

$$\lim_{|W|\to\infty} \frac{\pi(W)V'(W)}{V(W)} = \rho, \quad |\arg W| \le \beta < \gamma. \tag{3.12}$$

(3) La función $v(W) = V(W)/W^\rho$ es una prolongación de analítica de la función de variación lenta $v(t) = V(t)/t^\rho$, $t > 0$, y además,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{v(tW)}{v(t)} = 1, \quad W \in L(\gamma), \tag{3.13}$$

con convergencia uniforme en los compactos.

(4) Para todo $K \subseteq L(\gamma)$ compacto y todo $0 < \beta < \gamma$ tales que si $Z \in K$ y $|\arg W| \leq \beta$, entonces $ZW \in L(\gamma)$, se tiene que

$$\lim_{|W|\to\infty} \frac{V(ZW)}{V(W)} = Z^\rho, \quad \lim_{|W|\to\infty} \frac{v(ZW)}{v(W)} = 1, \tag{3.14}$$

uniformemente en K. Además, para todo $\gamma > \beta > 0$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $S_\beta > 0$ y un argumento de la función V de modo que para todo $W \in L(\beta, S_\beta)$ se tiene que $V(W) \neq 0$ y $|\arg V(W) - \rho \arg W| < \varepsilon$.

Demostración. (1) Por la propiedad (1) del Teorema 3.6, las funciones holomorfas $f_t(W) := V(tW)/V(t)$ definidas en $L(\gamma)$ convergen hacia la función W^ρ uniformemente en los compactos de $L(\gamma)$ cuando $t \to \infty$. Luego, por el *teorema de Weierstrass*, si $W = (r, \theta)$, las funciones derivadas $(\partial_r f_t)(W)$ convergen uniformemente en cada compacto de $L(\gamma)$ hacia la función $\rho r^{\rho-1} e^{i\theta\rho}$. Es decir, que para todo $W \in L(\gamma)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{tV'(tW)}{V(t)} &= \frac{te^{-i\theta}(\partial_r V)(tW)}{V(t)} = \lim_{t\to\infty} e^{-i\theta} \frac{t\partial_r V(tW)}{V(t)} \\ &= \lim_{t\to\infty} e^{-i\theta}(\partial_r f_t)(W) = \rho W^{\rho-1},\end{aligned}$$

con convergencia uniforme en los compactos de $L(\gamma)$.

(2) Por la propiedad (1) de los elementos de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ y la igualdad (3.11), para todo W verificando $|\arg W| = |\varphi| \leq \beta < \gamma$ se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{|W|\to\infty} \frac{\pi(W)V'(W)}{V(W)} &= \lim_{|W|\to\infty} \frac{e^{i\varphi}|W|V'(|W|e^{i\varphi})}{V(|W|e^{i\varphi})} \\ = \lim_{|W|\to\infty} e^{i\varphi} \frac{|W|V'(|W|e^{i\varphi})}{V(|W|)} \frac{V(|W|)}{V(|W|e^{i\varphi})} &= e^{i\varphi}\rho e^{i(\rho-1)\varphi} \frac{1}{e^{i\rho\varphi}} = \rho,\end{aligned}$$

con convergencia uniforme en $|\arg W| \leq \beta$.

(3) Es inmediato comprobar que $v(W) = V(W)/W^\rho$ es una prolongación de analítica de la función $v(t) = V(t)/t^\rho$. Por otra parte, por la propiedad (1) de los elementos de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, para todo $W \in L(\gamma)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{v(tW)}{v(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{V(tW)/t^\rho W^\rho}{V(t)/t^\rho} = W^\rho \frac{t^\rho}{t^\rho W^\rho} = 1,$$

con convergencia uniforme en los compactos.

(4) Si $Z \in K$ y $|\arg W| = |\varphi| \leq \beta < \gamma$ con $ZW \in L(\gamma)$, se tiene que por la propiedad (1) de los elementos de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ aplicada dos veces

$$\lim_{|W|\to\infty} \frac{V(ZW)}{V(W)} = \lim_{|W|\to\infty} \frac{V(|W|Ze^{i\varphi})}{V(|W|)} \frac{V(|W|)}{V(|W|e^{i\varphi})} = Z^\rho.$$

Por otro lado, a partir de este límite se prueba el segundo límite de (3.14) procediendo de la misma manera que al demostrar (3.13).

Por último, dado $\gamma > \beta > 0$, tomamos $K = \{(1,\varphi) \in \mathcal{R} : |\varphi| \leq \beta < \gamma\}$, tomando $\beta' > 0$ tal que $\beta + \beta' < \gamma$ tenemos que $ZU \in L(\gamma)$ para todo U con $|\arg U| \leq b'$, en particular para $U \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, si $|\arg W| \leq \beta$ podemos escribir $W = Zr$ con $Z \in K$, $r > 0$ y $\arg W = \arg Z$ y por el resultado que acabamos de probar,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(Zr)}{V(r)} = \lim_{|W|\to\infty} \frac{V(W)}{V(W/Z)} = Z^\rho.$$

Como tenemos convergencia en módulo y en argumento, existe $S_\beta > 0$ y existe un argumento de V de forma que si $W \in L(\beta, S_\beta)$ tenemos que

$$0 < 1 - \frac{1}{2} = |Z^\rho| - \frac{1}{2} < |V(W)| \neq 0,$$
$$|\arg V(W) - \arg V(W/Z) - \arg Z^\rho| = |\arg V(W) - 0 - \rho \arg W| < \varepsilon.$$

★

Definición 3.13. Sean X e Y espacios topológicos y sea $\pi : Y \to X$ una aplicación continua. Decimos que la aplicación π es *una proyección recubridora* del espacio recubridor Y en el espacio base X, si para todo $x \in X$ existe un entorno $U \subseteq X$ de x tal que $\pi^{-1}(U)$ es unión disjunta de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de Y y de forma que, para cada $\alpha \in A$, la aplicación $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ es un homeomorfismo. En este contexto, si Z es otro espacio topológico y $f : Z \to X$ es una aplicación continua, decimos que una aplicación continua $\tilde{f} : Z \to Y$ es una *función de recubrimiento de* f si se verifica que $\pi \circ \tilde{f} = f$.

Observación 3.14. Teniendo en cuenta el apartado (4) de la proposición anterior, tomando $\varepsilon = \pi/2$, existe $Q_\beta > 0$ verificando que

$$V(W) \neq 0, \quad \text{y} \quad |\arg V(W) - \rho \arg W| < \frac{\pi}{2},$$

para todo $W \in L(\beta, Q_\beta)$. Si denotamos por $D = \cup_{0<\beta<\gamma} L(\beta, Q_\beta)$, la función $\tilde{V} : D \to \mathcal{R}$ dada por $\tilde{V}(W) = (|V(W)|, \arg V(W))$, es una función de recubrimiento de la función $V : D \to \mathbb{C}$ relativa a la proyección $\pi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\pi(r,\theta) = re^{i\theta}$.

Teorema 3.15. Sean $\rho(r) \to \rho > 0$ un orden aproximado, $\gamma > 0$ y $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$. Denotamos por $r = U(t)$, para $t > 0$, a la función inversa de $t = V(r)$, con $r > 0$, y denotamos por $\rho^*(t)$ al orden conjugado de $\rho(r)$. Entonces $\ln U(t)/\ln t$ es un orden aproximado analítico equivalente a $\rho^*(t)$, y $U(t)$ admite una prolongación analítica a una función $U(W)$ en un dominio $T \subseteq L(\rho\gamma)$ simétrico respecto al eje real, tal que para todo $\beta < \gamma$ el dominio T contiene un conjunto de la forma $L(\rho\beta, T_\beta)$. Además, la función U, en su dominio de definición, verifica las propiedades $(1) - (4)$ del Teorema 3.6 que verifican las funciones de la clase $\mathfrak{B}(\rho\gamma; \rho^*(t))$.

Demostración. Vamos a estructurar la prueba de este teorema en tres partes.

(I) En primer lugar vamos a probar que $\tilde{V}$ es invertible en los dominios de la forma $L(\beta, P)$ con P suficientemente grande, para lo cual vamos a probar varios resultados intermedios.

Fijado $\beta \in (0, \gamma)$, ponemos $K = \{(1, \varphi) \in \mathcal{R}; |\varphi| \leq \beta\}$. Sabemos por (3.11) que para todo $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ de forma qu,

$$\left| \frac{|W|V'(W)}{V(|W|)} - \rho e^{i\varphi(\rho-1)} \right| < \varepsilon \qquad W = (|W|, \varphi) \in L(\beta, R),$$

uniformemente respecto de φ, por ser K compacto de $L(\gamma)$. Así pues, como sabemos que $\rho e^{i\varphi(\rho-1)} \neq 0$, deducimos que existe $P_1 \geq Q_\beta$ (ver Observación 3.14) suficientemente grande de modo que $V'(W) \neq 0$ para todo $W \in L(\beta, P_1)$.

Veamos ahora que para todo $c \in (0, 1)$ existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$|V(Z) - V(W)| > c|V'(W)||z - \omega|, \; Z \in \Omega_\alpha(W), \; W \in L(\beta, P), \tag{3.15}$$

donde considerando la notación de (3.10) tenemos

$$\begin{gathered} P \geq P_1, \quad z = \pi(Z), \quad \omega = \pi(W), \quad Z \neq W, \\ \Omega_\alpha(W) = \{Z \in \Pi_{\arg W} : \, |z - \omega| \leq \alpha|\omega|\}. \end{gathered}$$

Observamos que para α suficientemente pequeño, $\Omega_\alpha(W) \subseteq L(\gamma)$, puesto que si $Z \in \Omega_\alpha(W)$, estudiando la geometría del triángulo de vértices 0, W y Z vemos que

$$\begin{aligned} Z \in \Pi_{\arg W} \quad &\Rightarrow \quad |\arg z - \arg w| = |\arg Z - \arg W| < \pi, \\ |z - \omega| \leq \alpha|\omega| \quad &\Rightarrow \quad \tan|\arg z - \arg w| \leq \alpha. \end{aligned}$$

Por la continuidad de la tangente basta tomar α suficientemente pequeño, y tenemos que $Z \in L(\gamma)$ cuando $W \in L(\beta)$.

Para $W \in L(\beta, P_1)$, y $Z \in L(\gamma) \cap \Pi_{\arg W}$ con $Z \neq W$ definimos la función

$$G(Z, W) = \frac{V(Z) - V(W)}{(z - \omega)V'(W)}.$$

Sea $A(W) = [\omega V'(W)]^{-1}V(W)$, y $\tau = (z - \omega)\omega^{-1}$. Si consideramos las funciones

$$\begin{aligned} G_1(W, Z) =& A(W)[(1 + \tau)^\rho - 1]\tau^{-1}, \\ G_2(W, Z) =& A(W)(1 + \tau)^\rho \tau^{-1}[W^\rho V(W)^{-1} Z^{-\rho} V(Z) - 1], \end{aligned}$$

vemos que

$$G_1(W,Z)+G_2(W,Z)=\frac{A(W)}{\tau}\left[-1+\frac{(1+\tau)^\rho W^\rho V(Z)}{V(W)Z^\rho}\right]$$

$$=[V'(W)(z-\omega)]^{-1}\left[-V(W)+\frac{z^\rho W^\rho V(Z)}{\omega^\rho Z^\rho}\right]=G(W,Z),$$

puesto que $z^\rho\omega^{-\rho}Z^{-\rho}W^\rho=1$, ya que $Z\in\Pi_{\arg W}$. Para todo $\delta_1\in(c,1)$ tomamos $0<\varepsilon<1$ de forma que $(1-\varepsilon)^2>\delta_1$. Estudiando el límite cuando $\tau\to 0$ y aplicando (3.12) deducimos que existen dos números $\alpha\in(0,1)$ y $P_2\geq P_1$ tales que

$$\left|\frac{[(1+\tau)^\rho-1]}{\tau}\right|>\rho(1-\varepsilon),\qquad |\tau|\leq\alpha,$$

$$\frac{1}{\rho}+1>|A(W)|=\left|\frac{V(W)}{\pi(W)V'(W)}\right|>\frac{1}{\rho}(1-\varepsilon),\quad W\in L(\beta,P_2).$$

Si tomamos $W\in L(\beta,P_2)$, y tomamos $\alpha\in(0,1)$ de forma que se verifique también $Z\in\Omega_\alpha(W)\subseteq L(\gamma)$ tenemos que $|\tau|\leq\alpha$ y consecuentemente

$$|G_1(W,Z)|=\left|\frac{V(W)}{\pi(W)V'(W)}\frac{[(1+\tau)^\rho-1]}{\tau}\right|\geq\frac{\rho}{\rho}(1-\varepsilon)^2>\delta_1. \quad (3.16)$$

Observamos, por otra parte, que dado $W\in L(\beta,P_2)$, la función definida por

$$X(W,\tau)=\frac{V(W(1+\tau))}{(1+\tau)^\rho W^\rho},$$

es una función holomorfa en un entorno del disco $D_\alpha=\{\tau\in\mathbb{C}:|\tau|\leq\alpha<1\}$, puesto que, en este caso, $(1+\tau)W\in\Omega_\alpha(W)\subseteq L(\gamma)$ y la función $V(Z)$ es analítica en $L(\gamma)$. Para todo $\varepsilon>0$, tomamos $0<\delta<\varepsilon(1-\alpha)^\rho$ y, aplicando (3.14), se tiene que existe $P_\varepsilon\geq P_2$ de modo que

$$|X(W,\tau)-X(W,0)|=\frac{|V(W(1+\tau))-(1+\tau)^\rho V(W)|}{(|1+\tau||W|)^\rho}$$

$$=\frac{|V(W)|\left|\frac{V(W(1+\tau))}{V(W)}-(1+\tau)^\rho\right|}{(|1+\tau||W|)^\rho}<\frac{\delta|V(W)|}{[(1-\alpha)|W|]^\rho}<\varepsilon\frac{|V(W)|}{|W|^\rho},$$

para todo $W\in L(\beta,P_\varepsilon)$ y todo $\tau\in D_\alpha$. Por lo tanto, aplicando el *Lema de Schwarz* a la función $H(u)=X(W,u\alpha)-X(W,0)$ tenemos que

$$|X(W,u\alpha)-X(W,0)|\leq|u|\frac{\varepsilon|V(W)|}{|W|^\rho},\quad u\in D=\{u\in\mathbb{C}:\,|u|\leq1\}.$$

Teniendo en cuenta que para todo $Z \in \Omega_\alpha(W)$ podemos escribir $Z = (1+\tau)W$ con $\tau \in D_\alpha$, y que

$$G_2(W,(1+\tau)W) = \frac{A(W)(1+\tau)^\rho W^\rho H(\tau\alpha^{-1})}{V(W)\tau},$$

obtenemos que

$$|G_2(W,Z)| \le \frac{|A(W)|(1+\alpha)^\rho}{|\tau|\alpha}|\tau|\varepsilon,$$

para todo $W \in L(\beta, P_\varepsilon)$ y $Z \in \Omega_\alpha(W)$. Aplicando (3.12) y tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$|G_2(W,Z)| < \left(\frac{1}{\rho}+1\right)\frac{(1+\alpha)^\rho}{\alpha}\varepsilon < \delta_1 - c \tag{3.17}$$

para todo $W \in L(\beta, P)$ y $Z \in \Omega_\alpha(W)$, con $P \ge P_\varepsilon$. En consecuencia, por (3.16) y por (3.17) se tiene que

$$|G(W,Z)| \ge |G_1(W,Z)| - |G_2(W,Z)| > \delta_1 - \delta_1 + c = c,$$

para todo $W \in L(\beta, P)$ y $Z \in \Omega_\alpha(W)$, con lo que queda demostrada la desigualdad (3.15).

Puesto que $|V'(W)| \ne 0$ si $P \ge P_1$, esta desigualdad que acabamos de probar nos permite afirmar que

$$\tilde{V}(Z) \ne \tilde{V}(W), \quad Z \in \Omega_\alpha(W), \quad W \in L(\beta, P). \tag{3.18}$$

Probaremos ahora que, con la notación de la desigualdad (3.15) que

$$\tilde{V}(Z) \ne \tilde{V}(W), \quad Z \in L(\beta, P)\backslash\Omega_\alpha(W), \quad W \in L(\beta, P). \tag{3.19}$$

Si $W \in L(\beta, P)$ definimos

$$\omega_\delta(W) = \{Z = \tau W \in \mathcal{R} :\ 1-\delta < |\tau| < 1+\delta,\ |\arg\tau| < \delta\},$$

donde escogemos $\delta \in (0,1)$ suficientemente pequeño de modo que $\omega_\delta(W) \subseteq \Omega_\alpha(W)$; esto es siempre posible porque

$$|\tau W - W| \le |W||\tau - 1| \le |W|||\tau|e^{i\arg\tau} - 1|.$$

Si $Z \notin \omega_\delta(W)$ hay tres casos posibles:

(A) $|\tau| \ge 1+\delta$. Como hemos tomado $P > Q_\beta$ (ver Observación 3.14) tenemos que $V(W) \ne 0$ para todo $W \in L(\beta, P)$. Sea $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño de modo que $(1+\delta)^\rho(1-\varepsilon) > 1$

de acuerdo con (3.14), si $P > 0$ suficientemente grande y $W \in L(\beta, P)$ se tiene que

$$|V(Z) - V(W)| \geq |V(W)| \left|\frac{V(Z)}{V(W)} - 1\right| \geq |V(W)| \left|\frac{V(\tau W)}{V(W)} - 1\right|$$

$$\geq |V(W)| \left[|\tau|^{\rho}(1-\varepsilon) - 1\right] \geq |V(W)| \left[(1+\delta)^{\rho}(1-\varepsilon) - 1\right] > 0.$$

(B) $|\tau| \leq 1 - \delta$. Operando de manera análoga, para $|W|$ suficientemente grande, obtenemos que

$$|V(Z) - V(W)| \geq |V(W)| \left[1 - (1-\delta)^{\rho}(1+\varepsilon)\right] > 0.$$

(C) $|\arg \tau| \geq \delta$. Sabemos que $\rho|\arg \tau| = \rho|\arg Z - \arg W| \geq \delta$. Consideramos además la siguiente condición adicional $\delta\rho < \pi/2$. Por el apartado (4) de la Proposición 3.12 existe $R_{\beta+\delta} > 0$ de modo que si $Y \in L(\beta + \delta, R_{\beta+\delta})$ tenemos que

$$|\arg V(Y) - \rho \arg Y| < \rho \frac{\delta}{2}.$$

Es claro que si $W \in L(\beta, (1-\delta)^{-1} R_{\beta+\delta})$ y $Z \in \omega_{\delta}(W)$, entonces Z, $W \in L(\beta + \delta, R_{\beta+\delta})$ y se tiene que

$$|\arg V(W) - \rho \arg W| < \rho \frac{\delta}{2}, \quad |\arg V(Z) - \rho \arg Z| < \rho \frac{\delta}{2}.$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} &|\arg V(W) - \arg V(Z)| \\ &\geq \rho|\arg W - \arg Z| - |\arg V(W) - \rho \arg W - \arg V(Z) + \rho \arg Z| > 0, \end{aligned}$$

y consecuentemente, $\tilde{V}(W) = \tilde{V}(Z)$.

Con ello, podemos concluir que $\tilde{V}$ es inyectiva en una región de la forma $L(\beta, R'_{\beta})$, y como $V'(W) \neq 0$, existe la función inversa $\tilde{U} = \tilde{V}^{-1}$ definida en el conjunto $O'_{\beta} := \tilde{V}(L(\beta, R'_{\beta}))$.

(II) En segundo lugar, vamos a ver que $U(t) = r$ la inversa de $t = V(r)$, verifica que $\ln U(t)/\ln t$ es un orden aproximado equivalente a $\rho^*(t)$, que $\tilde{U}(W)$ es una prolongación analítica de U y que el dominio de $\tilde{U}$ verifica las hipótesis del enunciado.

Por la Propiedad 1.29 sabemos que la función $y(t) = \ln U(t)/\ln t$ es un orden aproximado con $y(t) \to 1/\rho$ cuando $t \to \infty$. Como $\ln V(r)/\ln r$ es un orden aproximado equivalente a $\rho(r)$, mediante un cálculo sencillo vemos que $y(t)$ es equivalente a $\rho^*(t)$.

Para $\beta \in (0, \gamma)$ fijo, consideramos $\tilde{U}$ definida sobre O'_β, este dominio contiene un intervalo infinito de la forma $\{(t, 0) \in \mathcal{R} : \, t > V(R'_\beta)\}$, en el cual coincide con U por la unicidad de la inversa. En consecuencia, $\tilde{U}$ es una prolongación analítica de $U(t)$.

Para todo $\beta < \gamma$, por la propiedad (1) del Teorema 3.6 y por (3.14), para todo $0 < \rho\varepsilon < \pi$, existe $S_{\varepsilon,\beta} > R'_\beta$ de modo que si $W \in L(\beta, S_{\varepsilon,\beta})$ se tiene que

$$\left| \frac{|V(W)|}{V(|W|)} - 1 \right| < \varepsilon, \qquad |\arg V(W) - \rho \arg W| < \rho\varepsilon. \tag{3.20}$$

En consecuencia, para cada $\beta < \gamma$ podemos tomar fijo $\varepsilon_\beta > 0$ de forma que $\beta + \varepsilon_\beta < \gamma$, y tomando $R_\beta > S_{\varepsilon_\beta,\beta}$ tenemos que si $Y \in O_\beta := \tilde{V}(L(\beta, R_\beta))$, $Y = \tilde{V}(W)$, aplicando (3.20) vemos que

$$\begin{aligned} -\rho\gamma < -\rho\varepsilon_\beta - \rho\beta < \arg Y < \rho\beta + \rho\varepsilon_\beta < \rho\gamma, \quad \text{y} \\ |Y| > (1 - \varepsilon_\beta)V(|W|) > (1 - \varepsilon_\beta)V(S_{\varepsilon,\beta}) =: T_\beta, \end{aligned} \tag{3.21}$$

por lo que, $O_\beta \subseteq L(\rho(\beta+\varepsilon_\beta), T_\beta) \subseteq L(\rho\gamma)$. Consideramos los dominios de definición de $\tilde{V}$, el conjunto P, y $\tilde{U}$, el conjunto T, dados por

$$P = \bigcup_{\beta<\gamma} L(\beta, R_\beta), \qquad T = \bigcup_{\beta<\gamma} O_\beta.$$

Evidentemente $T \subseteq L(\rho\gamma)$ y observamos que existe una correspondecia conforme ente P y T dada por $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$. Por (3.20) podemos afirmar que un rayo $\arg W = \psi_0$ de P se corresponde con una curva de T que no está acotada en módulo y para la cual la dirección $\arg Y = \rho\psi_0$ es una dirección asintótica. Este hecho permite afirmar que dado $\beta \in (0, \gamma)$ el rayo $\arg W = \beta + \varepsilon_\beta$ se transforma en una curva que para $|V(W)| > S^1 > V(R_\beta) + \varepsilon_\beta$ suficientemente grande verifica que $\arg V(W) > \rho\beta$ y análogamente para el rayo $\arg W = -\beta - \varepsilon_\beta$ existe $S^2 > R_\beta + \varepsilon_\beta$ tal que $\arg V(W) < -\rho\beta$ cuando $|V(W)| > S^2$. Tomado $S^0 := \text{máx}\{S^1, S^2\}$, por la desigualdad de (3.20) para el módulo se tiene que la imagen del arco

$$\{W = S^0 e^{i\theta} : \, |\theta| < \beta + \varepsilon_\beta\}$$

está contenido en una corona circular. Uniendo estas observaciones a que tenemos una correspondecia conforme entre los dominios, es decir, que envía el borde en el borde y conserva puntos "interiores" y "exteriores", podemos afirmar que existe $T_\beta > 0$ suficientemente grande tal que

$$L(\rho\beta, T_\beta) \subseteq V(L(\beta + \varepsilon_\beta, S^0)) \subseteq V(L(\beta + \varepsilon_\beta, R_{\beta+\varepsilon_\beta})) \subseteq T.$$

(III) En tercer lugar, vamos a ver que $y(s)$ es un orden analítico, y que $U(W) = \pi(\tilde{U}(W))$, donde $\pi : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ está dado por $\pi(r, \theta) = re^{i\theta}$, verifica las propiedades $(1) - (4)$ del Teorema 3.6 en su domino de definición. Observamos que U está definida sobre el mismos dominio que $\tilde{U}$.

Sea $K \subseteq T$ un compacto y sea $Z \in K$, veamos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tZ)}{U(t)} = Z^{1/\rho}, \tag{3.22}$$

uniformemente en K. Por la estructura del dominio de U, dado $t_1 > 0$, existen $\beta \in (0, \gamma)$ y S_1 de modo que

$$tZ \in L(\rho\beta, S_1) \subseteq T,$$

para todos $Z \in K$ y $t > t_1$. Dado $\tilde{U}(tZ) = W = (r, \theta) \in L(\gamma)$ por la propiedad (1) del Teorema 3.6 y por (3.14) podemos escribir

$$\tilde{V}(r, \theta) = (V(r), \rho\theta)[1 + \varepsilon(W)],$$

donde $\varepsilon(W) \to 0$ cuando $|W| \to \infty$ con convergencia uniforme cuando $\theta \in [-\beta, \beta]$. Como $\tilde{U}(tZ) = W$, se tiene que $\tilde{V}(W) = tZ$, y si escribimos $Z = (s, \varphi)$ tenemos que

$$ts = |1 + \varepsilon(W)| V(r),$$

y por tanto,

$$r = U(ts|1 + \varepsilon(W)|^{-1}).$$

Como $\ln U(t)/\ln t$ es un orden aproximado, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(ts|1 + \varepsilon(W)|^{-1})}{U(t)} = s^{1/\rho},$$

puesto que $|W| \to \infty$ cuando $t \to \infty$. En consecuencia, podemos escribir $r = s^{1/\rho}U(t)[1 + \varepsilon_1(t)]$ donde $\varepsilon_1(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, con convergencia uniforme cuando $Z = (s, \varphi) \in K$. De aquí deducimos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|U(tZ)|}{|U(t)|} = \lim_{t\to\infty} \frac{r}{U(t)} = s^{1/\rho}, \tag{3.23}$$

y como $\varphi = \arg(tZ) = \arg V(W) = \rho\theta[1 + \varepsilon(W)]$, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \arg\left(\frac{U(tZ)}{U(t)}\right) = \lim_{|W|\to\infty} \arg W = \lim_{|W|\to\infty} \frac{\varphi\rho^{-1}}{1 + \varepsilon(W)} = \frac{\varphi}{\rho}, \tag{3.24}$$

con convergencia uniforme cuando $Z = (s, \varphi) \in K$. A partir de (3.23) y de (3.24) vemos que se verifica (3.22). De esta igualdad (3.22) se deduce que $y(s)$ es un orden analítico y que U verifica la propiedad (1) del Teorema 3.6.

Por otro lado, como V y U están definidas sobre conjuntos de la superficie de Riemann del logaritmo que son simétricos respecto de $\{(r,0) : r \geq 0\}$ tiene sentido hablar de $U(\overline{Z})$ cuando $Z \in T$. Como V verifica la propiedad (2) de los elementos de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, para todo $Z \in T$ con $V(W) = Z$ tenemos que

$$U(\overline{Z}) = U[\overline{V(W)}] = U[V(\overline{W})] = \overline{W} = \overline{U(Z)},$$

es decir, que en su dominio U verifica la propiedad (2) de los elementos de $\mathfrak{B}(\rho\gamma, \rho^*(t))$.

Veamos ahora que U verifica la propiedad (3) que cumplen los elementos de $\mathfrak{B}(\rho\gamma, \rho^*(t))$. Vemos en primer lugar que $U(0) = 0$, puesto que $V(0) = 0$ y $U(t)$ es la inversa de $V(r)$ para todos $r, t > 0$, luego por continuidad podemos afirmar que $U(0) = 0$. Por la Propiedad 1.29, sabemos que $U(t)$ es positiva y monótona creciente para $t > 0$ por serlo $V(r)$. Finalmente, sean $\lambda \in (0,1)$ y $0 < t < p$, $r = U(t)$ y $s = U(p)$. Por la propiedad (4) de los elementos de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ que verifica V tenemos que

$$\ln V(\lambda r + (1-\lambda)s) > \lambda \ln V(r) + (1-\lambda) \ln V(s),$$

luego

$$V(\lambda r + (1-\lambda)s) > V(r)^{\lambda} V(s)^{1-\lambda}.$$

En consecuencia tomando inversas y teniendo en cuenta que U es estrictamente creciente,

$$\lambda U(t) + (1-\lambda)U(p) > U(t^{\lambda} p^{1-\lambda}),$$

es decir, U es convexa respecto de $\ln t$ y por tanto, verifica la propiedad (3) de los elementos de $\mathfrak{B}(\rho\gamma, \rho^*(t))$.

Por último veamos que U verifica la propiedad (4) de los elementos de $\mathfrak{B}(\rho\gamma, \rho^*(t))$. Sean $\lambda \in (0,1)$ y $0 < t < p$, $r = U(t)$ y $s = U(p)$. Como, por la propiedad (3), V es una función estrictamente convexa del $\ln r$ tenemos que

$$V(r^{\lambda} s^{1-\lambda}) < \lambda V(r) + (1-\lambda)V(s).$$

Ahora bien, U es estricamente creciente y se tiene que

$$\begin{aligned} U(t)^{\lambda} U(p)^{1-\lambda} &= U(V(U(t)^{\lambda} U(p)^{1-\lambda})) \\ &< U(\lambda V(U(t)) + (1-\lambda)V(U(p))) = U(\lambda t + (1-\lambda)p), \end{aligned}$$

y en consecuencia tomando logaritmos

$$\lambda \ln U(t) + (1-\lambda)\ln U(p) < \ln U(\lambda t + (1-\lambda)p),$$

es decir, $\ln U$ es estrictamente cóncava y en consecuencia verifica la propiedad (4) de los elementos de $\mathfrak{B}(\rho\gamma, \rho^*(t))$.

★

Observación 3.16. Si $\rho > 1/2$ y $\gamma \leq \min\{\pi, \pi/\rho\}$, entonces $L(\gamma) \subseteq \mathbb{C}$ y $T \subseteq L(\rho\gamma) \subseteq \mathbb{C}$, y la función $z = U(\omega)$ es holomorfa en T, tiene inversa holomorfa y coincide con $\omega = V(z)$ para $z \in U(T) \subseteq L(\gamma)$.

Observación 3.17. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho > 0$, sea $m > 1$ un entero positivo, entonces se comprueba de forma inmediata que $\rho_m(r) := m\rho(r^m) \to m\rho$ es un orden aproximado. Además se tiene que el operador

$$M : \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r)) \to \mathfrak{B}(\gamma/m, \rho_m(r)), \quad M[V(Z)] = V(Z^m) =: V_m(Z)$$

es un biyección, y si U y F son las inversas de V y V_m, respectivamente, se tiene que $F(W) = [U(W)]^m$.

Teorema 3.18. Sean $\rho > 1/2$, $\rho(r) \to \rho$ un orden aproximado y sean $\gamma = \min\{\pi, \pi/\rho\}$, $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, y $\gamma' = \min\{\pi, \pi\rho\}$. Sea $U = V^{-1}$ la inversa de V, holomorfa en un conjunto $T \subseteq L(\gamma')$, de modo que para todo $\beta' < \gamma'$ existe $T_{\beta'}$ con $L(\beta', T_{\beta'}) \subseteq T$. Fijado $\varphi_0 \in (\pi/2, \gamma')$ escogemos $a > 0$ de modo que para todo $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ se tenga que

$$\Gamma_\varphi = \Gamma_\varphi(a) = \{a + te^{i\varphi} : t \geq 0\} \subseteq T. \tag{3.25}$$

Finalmente, ponemos

$$N_\varphi(\zeta) = \int_{\Gamma_\varphi} \exp(z - V(\zeta U(z)))dz, \quad G_\varphi = \{\zeta \in L(\alpha) : \operatorname{Re}[(\zeta^\rho - 1)e^{i\varphi}] > 0\},$$

donde $0 < \rho\alpha < \gamma' - \varphi_0 < \pi/2$. Entonces:

(1) N_φ es holomorfa en G_φ para todo $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$.

(2) Existe una función N holomorfa en $L(\alpha)\backslash\{1\}$ tal que $N(\zeta) = N_\varphi(\zeta)$ para todo $\zeta \in (L(\alpha)\backslash\{1\}) \cap G_\varphi$.

(3) El punto $\zeta = 1$ es un polo de $N(\zeta)$, y además

$$\lim_{\zeta \to 1} \rho(\zeta - 1)N(\zeta) = 1. \tag{3.26}$$

Demostración. (1) Tenemos que $z = V(U(z))$ y tenemos que

$$G_\varphi = \{\zeta \in L(\alpha) : \mathrm{Re}[(\zeta^\rho - 1)e^{i\varphi}] > 0\} \neq \emptyset$$

porque $\{\zeta^\rho - 1 : \zeta \in L(\alpha)\}$ es un sector de vértice -1 y bisectriz en la dirección $\arg\zeta = 0$, por lo tanto, contiene una bola centrada en 0 que corta a todo semiplano abierto con 0 en la frontera. Por otro lado, como U verifica la propiedad (1) de las funciones de $\mathfrak{B}(\rho\gamma, \rho^*(s))$, se tiene que para $|z| > R$

$$U(|z|) - \frac{1}{2} \leq |U(z)|,$$

es decir, si $|z| \to \infty$ tenemos que $|U(z)| \to \infty$, y por (3.14) se tiene que

$$\xi(z,\zeta) := \zeta^\rho - \frac{V(\zeta U(z))}{V(U(z))} \to \zeta^\rho - \zeta^\rho = 0, \tag{3.27}$$

cuando $|z| \to \infty$, con convergencia uniforme en todos los compactos $\zeta \in K \subseteq L(\alpha)$ para los que dado $\beta < \gamma$ se tiene que $\zeta U(z) \in L(\gamma)$ cuando $\zeta \in K$ y $|\arg U(z)| \leq \beta$.

En particular, si consideramos los compactos del tipo $K \subseteq \{\zeta \in L(\alpha) : \mathrm{Re}(\zeta^\rho - 1)e^{i\varphi} \geq b > 0\}$, observamos que fijado α podemos tomar $\delta > 0$ de forma que $\rho\alpha < \gamma' - \varphi_0 - \rho\delta$, por otro lado por (3.14) dado $\varepsilon > 0$ de forma que $\gamma' - \varphi_0 > \rho\delta - \rho\varepsilon > 0$ podemos tomar $a > 0$ suficientemente grande, independientemente de K, de forma que además de verificarse las hipótesis del enunciado se verifique que

$$\left|\arg U(z) - \frac{\arg z}{\rho}\right| < \varepsilon,$$

para todo $z \in \Gamma_\varphi$ y para todo $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$. Este hecho nos permite deducir que

$$\begin{aligned} |\arg(\zeta U(z))| &\leq |\arg\zeta| + \left|\arg U(z) - \frac{\arg z}{\rho}\right| + \left|\frac{\arg z}{\rho}\right| \\ &< \frac{\gamma' - \varphi_0}{\rho} - \delta + \varepsilon + \frac{\varphi_0}{\rho} < \frac{\gamma'}{\rho} = \gamma, \end{aligned}$$

para todo $\zeta \in K \subseteq L(\alpha)$, $z \in \Gamma_\varphi$ y todo $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, es decir, $\zeta U(z) \in L(\gamma)$. De aquí deducimos que se verifica (3.27) y que $V(\zeta U(z))$ está bien definida para todo $\zeta \in K \subseteq L(\alpha)$, todo $z \in \Gamma_\varphi$ y todo $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$.

Por lo tanto, considerando la notación

$$\begin{aligned} B(z,\zeta) :=& \exp[z - V(\zeta U(z))] = \exp[z - z\zeta^\rho + z\zeta^\rho - V(\zeta U(z))] \\ =& \exp[z[(1-\zeta^\rho) + \xi(z,\zeta)]], \end{aligned} \tag{3.28}$$

podemos afirmar que dado $b > \varepsilon > 0$ existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&|\exp(\xi(z,\zeta))| = \exp \operatorname{Re}(\xi(z,\zeta)) \leq \exp|\xi(z,\zeta)| \leq 1+\varepsilon,\\
&\operatorname{Re}(e^{i\varphi}\xi(z,\zeta)) \leq |e^{i\varphi}\xi(z,\zeta)| \leq b-\varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $\zeta \in K$ y para todo $z = a + te^{i\varphi} \in \Gamma_\varphi$ y todo $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ con $t > t_0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|N_\varphi(\zeta)| &\leq \int_{\Gamma_\varphi} |\exp(z - V(\zeta U(z)))|dz = \int_0^\infty |B(a+te^{i\varphi},\zeta)|dt\\
&\leq \int_0^{t_0} |B(a+te^{i\varphi},\zeta)|dt + \int_{t_0}^\infty \left| e^{[a+te^{i\varphi}][(1-\zeta^\rho)+\xi(a+te^{i\varphi},\zeta)]} \right| dt\\
&\leq \int_0^{t_0} |B(a+te^{i\varphi},\zeta)|dt + \int_{t_0}^\infty \frac{e^{t\operatorname{Re}(e^{i\varphi}(1-\zeta^\rho)+e^{i\varphi}\xi(a+te^{i\varphi},\zeta))}}{e^{-[\operatorname{Re}(a(1-\zeta^\rho))+a\operatorname{Re}(\xi(a+te^{i\varphi},\zeta))]}} dt\\
&\leq \int_0^{t_0} |B(a+te^{i\varphi},\zeta)|dt + \frac{e^{\operatorname{Re}(a(1-\zeta^\rho))}}{(1+\varepsilon)^{-a}} \int_{t_0}^\infty e^{t[\operatorname{Re}[e^{i\varphi}(1-\zeta^\rho)]+b-\varepsilon]} dt\\
&\leq \int_0^{t_0} |B(a+te^{i\varphi},\zeta)|dt + e^{\operatorname{Re}(a(1-\zeta^\rho))}(1+\varepsilon)^a e^{-\varepsilon t_0}\varepsilon^{-1}\\
&= \int_0^{t_0} |B(a+te^{i\varphi},\zeta)|dt + Ae^{a\operatorname{Re}(1-\zeta^\rho)},
\end{aligned}$$

donde $A := (1+\varepsilon)^a e^{-\varepsilon t_0}\varepsilon^{-1}$. Consecuentemente, la integral $N_\varphi(\zeta)$ converge uniformemente en K. Así pues, deducimos a partir de los teoremas de holomorfía bajo el signo de integral que $N_\varphi(\zeta)$ es holomorfa en G_φ para todo $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$.

(2) Veamos ahora que la familia $\{N_\varphi\}_{\varphi\in[-\varphi_0,\varphi_0]}$ define una función holomorfa en $\cup_{\varphi\in[-\varphi_0,\varphi_0]} G_\varphi$, conjunto que es precisamente $L(\alpha)\backslash\{1\}$. Comencemos probando esta última igualdad entre conjuntos. Si $\zeta \in L(\alpha)\backslash\{1\}$, como la amplitud de $[-\varphi_0, \varphi_0]$ es mayor que π, existe $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ de modo que al girar φ radianes el complejo no nulo $(\zeta^\rho - 1)$ nos situamos en el semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$, es decir, $\zeta \in G_\varphi$. Por otra parte, la contención $G_\varphi \subseteq L(\alpha)\backslash\{1\}$ es obvia para todo $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ por definición.

Por otro lado, sean $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ tales que existe $\zeta \in G_{\varphi_2} \cap G_{\varphi_1}$ y veamos que $N_{\varphi_1}(\zeta) = N_{\varphi_2}(\zeta)$. Observamos que

$$\operatorname{Re}[(\zeta^\rho - 1)e^{i\varphi}] > 0, \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2],$$

porque la función $g(\varphi) = \operatorname{Re}[(\zeta^\rho - 1)e^{i\varphi}]$ es continua, sus ceros distan al menos π entre ellos, y sabemos que $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ y que g es positiva en ambos puntos, por lo tanto, no puede cambiar de signo en $[\varphi_1, \varphi_1]$. Consecuentemente,

$$\text{máx}\{\text{Re}[(1-\zeta^\rho)e^{i\varphi}] : \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\} < 0.$$

Denotamos por $C_t = \{z \in \mathbb{C} : z = a + te^{i\varphi} : \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\}$; argumentando como antes, si $z \in C_t$ vemos que $B(z, \zeta)$ está bien definida y $\xi(z, \zeta) \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ uniformemente cuando $\zeta \in K$. Por lo tanto, dado un compacto $K \subseteq G_\varphi$, existe $d > 0$ verificando que

$$\text{máx}\{\text{Re}[(1-\zeta^\rho)e^{i\varphi}] : \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\} < -d < 0, \qquad \zeta \in K,$$

y si tomamos $\varepsilon \in (0, \delta)$, existe $t_0 \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\exp \text{Re}(\xi(z, \zeta)) \leq \exp |\xi(z, \zeta)| \leq 1 + \varepsilon, \\ &\text{Re}(e^{i\varphi}\xi(z, \zeta)) \leq |e^{i\varphi}\xi(z, \zeta)| \leq d - \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $\zeta \in K$, para todo $z = a + te^{i\varphi} \in C_t$ con $t > t_0$ y todo $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_t} B(z, \zeta) dz \right| &\leq \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} t \frac{e^{t\,\text{Re}(e^{i\varphi}(1-\zeta^\rho) + e^{i\varphi}\xi(a+te^{i\varphi}, \zeta))}}{e^{-[a\,\text{Re}(1-\zeta^\rho + \xi(a+te^{i\varphi}, \zeta))]}} d\varphi \\ &< te^{a\,\text{Re}(1-\zeta^\rho)}(1+\varepsilon)^a e^{-\varepsilon t}(\varphi_2 - \varphi_1) \to 0, \quad t \to \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, observando que

$$\int_{[a, a+te^{i\varphi_1}]} B(z, \zeta) dz + \int_{C_t} B(z, \zeta) dz + \int_{[a+te^{i\varphi_2}, a]} B(z, \zeta) dz = 0$$

y tomando límite cuando $t \to \infty$, se deduce que $N_{\varphi_1}(\zeta) = N_{\varphi_2}(\zeta)$ para todo $\zeta \in G_{\varphi_2} \cap G_{\varphi_1}$. Podemos concluir que si $\varphi \in (\pi/2, \varphi_0)$, N_φ y $N_{-\varphi}$ son prolongación analítica de N_0, y para terminar bastaría probar que N_φ y $N_{-\varphi}$ coinciden en $G := G_\varphi \cap G_{-\varphi}$. Observamos, que $(0, 1) \subseteq G$, puesto que para todo $\zeta \in (0, 1)$ se tiene que $(\zeta^\rho - 1)$ es un número real negativo, y al girarlo φ o $-\varphi$ radianes nos situamos en el semiplano $\text{Re}(z) > 0$. En consecuencia, por el Principio de Identidad basta ver que N_φ y $N_{-\varphi}$ coinciden en $(0, 1)$. Por la propiedad (2) que verifican las funciones V de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ tenemos que para todo $\zeta \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \overline{N_{-\varphi}(\zeta)} &= \int_{\Gamma_\varphi} \overline{e^{z - V(\zeta U(z))}} dz = \int_0^\infty e^{a + te^{i\varphi} - \overline{V(\zeta U(a + te^{-i\varphi}))}} dt \\ &= \int_0^\infty e^{a + te^{i\varphi} - V(\bar{\zeta} U(\overline{a + te^{-i\varphi}}))} dt = \int_0^\infty e^{a + te^{i\varphi} - V(\zeta U(a + te^{i\varphi}))} dt = N_\varphi(\zeta). \end{aligned}$$

Esta relación entre funciones holomorfas es sólo posible si son reales, es decir, si $N_{-\varphi}(\zeta) = N_\varphi(\zeta)$ en $(0, 1)$. Este hecho nos permite concluir que N, definida sin ambigüedad por $N(\zeta) := N_\varphi(\zeta)$, $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, $\zeta \in G_\varphi$, es una función holomorfa en $L(\alpha) \backslash \{1\}$.

(3) Representamos la función $B(z,\zeta)$ a través de la siguiente fórmula que se deduce de la igualdad (3.28):

$$B(z,\zeta) = \exp(z(1-\zeta^\rho))\exp(\zeta^\rho z - V(\zeta U(z))).$$

Integrando por partes, y usando la fórmula $U'(z) = (V'[U(z)])^{-1}$, obtenemos que

$$N_\varphi(\zeta) = \int_{\Gamma_\varphi} \exp(z(1-\zeta^\rho))\exp(\zeta^\rho z - V(\zeta U(z)))dz$$

$$= \left[\frac{\exp(\zeta^\rho z - V(\zeta U(z)))}{\exp[z(\zeta^\rho - 1)](1-\zeta^\rho)}\right]_{z=a}^{\infty} - \int_{\Gamma_\varphi} \frac{(\exp(\zeta^\rho z - V(\zeta U(z))))'}{(1-\zeta^\rho)\exp(z(\zeta^\rho - 1))}dz$$

$$= -\frac{B(a,\zeta)}{1-\zeta^\rho} - \int_{\Gamma_\varphi} \frac{B(z,\zeta)\left[\zeta^\rho - \zeta\frac{V'(\zeta U(z))}{V'(U(z))}\right]}{(1-\zeta^\rho)}dz = \frac{B(a,\zeta)+J_\varphi(\zeta)}{\zeta^\rho - 1},$$

para todo $\zeta \in G_\varphi$, donde

$$J_\varphi(\zeta) = \int_{\Gamma_\varphi} B(z,\zeta)H(z,\zeta)dz, \quad H(z,\zeta) = \zeta^\rho - \zeta\frac{V'(\zeta U(z))}{V'(U(z))}.$$

Observamos que, por la fórmula

$$J_\varphi(\zeta) = -B(a,\zeta) + (\zeta^\rho - 1)N_\varphi(\zeta),$$

podemos deducir que J_φ es holomorfa cuando $\zeta \in G_\varphi$ para todo $|\varphi| < \varphi_0$, y que si $\zeta \in G_{\varphi_1} \cap G_{\varphi_2}$ y $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$, tenemos que $J_{\varphi_1}(\zeta) = J_{\varphi_2}(\zeta)$. Obtendremos (3.26) si comprobamos que para todo $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ se tiene que

$$\lim_{\zeta\to 1} \rho(\zeta - 1)N_\varphi(\zeta) = \lim_{\zeta\to 1} \rho(\zeta-1)\frac{B(a,\zeta)+J_\varphi(\zeta)}{\zeta^\rho - 1} = 1, \tag{3.29}$$

lo que, dado que $B(a,1) = 1$, equivale a que

$$\lim_{\zeta\to 1} J_\varphi(\zeta) = 0, \qquad |\varphi| < \varphi_0. \tag{3.30}$$

Para probar (3.30), dividimos Γ_φ en dos partes Γ_φ^1, Γ_φ^2 por un punto z_0 (el correspondiente a un t_0) de modo que $\Gamma_\varphi^1 = [a, z_0]$ y $\Gamma_\varphi^2 = \Gamma_\varphi \backslash \Gamma_\varphi^1$, con lo que podemos escribir

$$J_\varphi(\zeta) = J_1(\zeta) + J_2(\zeta), \quad J_i(\zeta) = \int_{\Gamma_\varphi^i} B(z,\zeta)H(z,\zeta)dz, \, i = 1,2.$$

Por la propiedad (1) de las funciones de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ se tiene que $|U(z)| \to \infty$ cuando $|z| \to \infty$, y por (3.11) se tiene que

$$\lim_{z\in\Gamma_\varphi, |z|\to\infty} H(z,\zeta) = \lim_{z\in\Gamma_\varphi, |z|\to\infty} \left(\zeta^\rho - \frac{\zeta V'(\zeta U(z))}{V'(U(z))} \frac{|U(z)|V(|U(z)|)}{|U(z)|V(|U(z)|)} \right)$$

$$= \lim_{z\in\Gamma_\varphi, |z|\to\infty} \left(\zeta^\rho - \zeta \frac{|U(z)|V'(|U(z)|\zeta e^{i\psi})}{V(|U(z)|)} \frac{V(|U(z)|)}{|U(z)|V'(|U(z)|e^{i\psi})} \right) = 0, \tag{3.31}$$

uniformemente para todo $\zeta \in K$, entorno compacto de $\zeta = 1$. Entonces, $H(z,\zeta)$ está uniformemente acotada en $\Gamma_\varphi \times K$, pues

$$|H(z,\zeta)| \leq \max_{|z|\leq t,\, \zeta\in K} H(z,\zeta) + \sup_{|z|>t,\, \zeta\in K} H(z,\zeta) \leq M_t + \varepsilon =: M.$$

Como $H(z,1) \equiv 1 - V'(U(z))[V'(U(z))]^{-1} \equiv 0$ para todo $z \in \Gamma_\varphi$, por el *Lema de Schwarz* aplicado a las funciones $f_z(\zeta) = H(z,\zeta)$, tenemos que

$$|H(z,\zeta)| \leq M|\zeta - 1|, \qquad (z,\zeta) \in \Gamma_\varphi \times K,$$

y consecuentemente, para todo $\zeta \in K$,

$$|J_1(\zeta)| \leq M|\zeta - 1| \int_0^{t_0} |B(a + te^{i\varphi}, \zeta)| dt$$
$$\leq M|\zeta - 1| t_0 \max_{0\leq t\leq t_0} \left| B(a + te^{i\varphi}, \zeta) \right|.$$

Como B es continua en $(\cup_{\varphi\in[-\varphi_0,\varphi_0]}\Gamma_\varphi) \times K$ es obvio que

$$\lim_{\zeta\to 1} J_1(\zeta) = 0. \tag{3.32}$$

Para acotar $J_2(\zeta)$, procedemos igual que antes teniendo en cuenta (3.31):

$$|H(a + te^{i\varphi}, \zeta)| < \varepsilon(t_0),$$

donde $\varepsilon(t_0) = \sup\{H(a + te^{i\varphi}) : t \geq t_0, \zeta \in K\}$, y consecuentemente $\lim_{t_0\to\infty} \varepsilon(t_0) = 0$ y, de forma análoga al caso anterior, se deduce que

$$|H(z,\zeta)| < \varepsilon(t_0)|\zeta - 1| \tag{3.33}$$

para todo $(z,\zeta) \in \Gamma_\varphi^2 \times K$. De forma análoga, la función ξ descrita en (3.27) verifica que $\xi(z,1) = 0$ para todo $z \in \Gamma_\varphi$, y por tanto, se tiene que

$$|\xi(z,\zeta)| < P(t_0)|\zeta - 1|, \quad \lim_{t_0\to\infty} P(t_0) = 0, \tag{3.34}$$

para todo $(z,\zeta) \in \Gamma_\varphi^2 \times K$. Sea $\lambda \in (0, \pi/2)$ un número fijo. Para probar (3.30) podemos suponer que

$$\zeta \to 1, \quad \zeta \in G_\varphi(\lambda) := G_\varphi \cap \{\zeta \in L(\alpha) : |\varphi + \arg(\zeta^\rho - 1)| < \lambda\},$$

puesto que $\{\zeta \in L(\alpha) : |\varphi + \arg(\zeta^\rho - 1)| < \pi/2\} = G_\varphi$ y por lo tanto los $G_\varphi(\lambda)$ recubren K. En consecuencia, podemos restringirnos a considerar el límite cuando $\zeta \in G_\varphi(\lambda)$. Teniendo en cuenta la definición de J_2 y las desigualdades (3.27), (3.33) y (3.34) podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
|J_2(\zeta)| &\leq \varepsilon(t_0)|\zeta - 1| \int_{t_0}^{\infty} |B(a + te^{i\varphi}, \zeta)| dt \\
&\leq \varepsilon(t_0)|\zeta - 1| e^{\mathrm{Re}(a(1-\zeta^\rho))} \int_{t_0}^{\infty} e^{a\,\mathrm{Re}(\xi(z,\zeta)) + t\,\mathrm{Re}(e^{i\varphi}(1-\zeta^\rho) + e^{i\varphi}\xi(z,\zeta))} dt \\
&\leq \varepsilon(t_0)|\zeta - 1| e^{\mathrm{Re}(a(1-\zeta^\rho))} A_1 \int_{t_0}^{\infty} e^{t(-|\zeta^\rho - 1|\cos(\lambda) + P(t_0)|\zeta - 1|)} dt \\
&\leq \varepsilon(t_0)|\zeta - 1| e^{\mathrm{Re}(a(1-\zeta^\rho))} A_1 \left[\frac{e^{t(-|\zeta^\rho - 1|\cos(\lambda) + P(t_0)|\zeta - 1|)}}{-|\zeta^\rho - 1|\cos(\lambda) + P(t_0)|\zeta - 1|} \right]_{t_0}^{\infty} \\
&\leq \varepsilon(t_0) e^{\mathrm{Re}(a(1-\zeta^\rho))} A \frac{|\zeta - 1|}{|\zeta^\rho - 1|\cos(\lambda) - P(t_0)|\zeta - 1|}, \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

para todo $\zeta \in G_\varphi(\lambda)$. Como la cantidad $|\zeta - 1|/|\zeta^\rho - 1|$ está acotada en un entorno de $\zeta = 1$, y como $\lim_{t_0 \to \infty} \varepsilon(t_0) = 0$ podemos tomar t_0 suficientemente grande de forma que

$$|J_2(\zeta)| < \varepsilon/2 \qquad \zeta \in G_\varphi(\lambda) \cap S(1, \delta_{t_0,\varepsilon}). \qquad (3.36)$$

Usando (3.32) y (3.36) obtenemos (3.30) y en consecuencia (3.29) lo que termina la prueba.

★

Teorema 3.19. Con la notación del Teorema 3.18 si $\rho > 1/2$ y $\alpha \in (0, \pi/(2\rho))$, entonces existen constantes positivas b, A, $R > 0$ tales que

$$|N(\zeta)| \leq A e^{-bV(|\zeta|)}$$

para todo $\zeta \in L(\alpha, R)$.

Demostración. Observamos que si $R > (\cos(\rho\alpha))^{-1/\rho}$, y si $\zeta \in L(\alpha, R)$, tenemos que $\zeta^\rho \in L(\alpha\rho, R^\rho) \subseteq L(\pi/2, R^\rho)$ y deducimos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\zeta^\rho - 1) = \mathrm{Re}(\zeta^\rho) - 1 = |\zeta^\rho|\cos(\arg(\zeta^\rho)) - 1 &\geq R^\rho \cos(\rho \arg \zeta) - 1 \\
&\geq R^\rho \cos(\rho\alpha) - 1 > 0,
\end{aligned}$$

luego $\zeta \in G_0$ (definido en el Teorema 3.18); es decir, $L(\alpha, R) \subseteq G_0$. Definimos para $s \geq 0$,

$$\Phi(s, \zeta) = \mathrm{Re}[V(2s) - V(\zeta s)].$$

Como $\mathrm{Re}(2^\rho - 1) > 0$, $2 \in G_0$, y para todo $\zeta \in L(\alpha, R)$ tenemos que

$$|N(\zeta)| = |N_0(\zeta)| \leq \int_0^\infty |B(a+t,\zeta)|dt = \int_a^\infty \left| e^{u - V(\zeta U(u))} \right| du$$
$$\leq \int_a^\infty e^{u + \Phi(U(u),\zeta) - V(2U(u))} du \leq e^{\sup_{s \geq U(a)}\{\Phi(s,\zeta)\}} \int_a^\infty e^{u - V(2U(u))} du, \tag{3.37}$$

donde se ha tomado $a > 0$ suficientemente grande de forma que $U(t)$ crece en (a, ∞). Por otra parte, pongamos que $\zeta = \tau e^{i\lambda} \in L(\alpha, R)$; como $V(t) > 0$ para $t > 0$, por la fórmula (3.5) se tiene que

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{V(\zeta s)}{V(\tau s)} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{V(|\zeta| e^{i\lambda} s)/V(\tau)}{V(\tau s)/V(\tau)} = \frac{e^{i\rho\lambda} s^\rho}{s^\rho} = e^{i\rho\lambda}.$$

En conscecuencia, para todo $\delta \in (0,1)$ existe una constante $T_\delta > 0$ tal que para todo $s \geq 0$ y todo ζ con $|\zeta| = \tau > T_\delta$ tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(s,\zeta) &= \mathrm{Re}[V(2s)] - \mathrm{Re}[V(\zeta s)] < V(2s) - (1-\delta)\,\mathrm{Re}[e^{i\rho\lambda}] V(\tau s) \\ &= V(2s) - (1-\delta) V(\tau s)\cos(\rho\lambda),\end{aligned} \tag{3.38}$$

uniformemente en $\lambda \in [-\alpha, \alpha]$. Como $\alpha \in (0, \pi/(2\rho))$ se tiene que

$$b' := -(1-\delta)\cos(\rho\alpha) \geq -(1-\delta)\cos(\rho\lambda).$$

Tomamos $n \geq 2$ suficientemente grande de modo que $2n^{-\rho}2^\rho \leq b'$. De nuevo por la fórmula (3.5), tenemos que

$$\lim_{s \to \infty} \frac{V(2s)}{V(ns)} = \frac{2^\rho}{n^\rho}.$$

Como la convergencia es uniforme en el compacto $[2, n]$, existe $s_0 > 0$ tal que si $s > s_0$ tenemos que

$$\frac{V(2s)}{V(ns)} \leq \frac{2^\rho}{n^\rho}(1+1) \leq b'.$$

Podemos tomar a suficientemente grande de forma que $U(a) > s$. Aplicando esta desigualdad en (3.38) deducimos que

$$\Phi(s,\zeta) \leq b'(V(ns) - V(\tau s)), \tag{3.39}$$

para todo $s \geq U(a)$ y todo $\tau > T_\delta / a$. Para $\tau > R_1 := \max\{n, T_\delta\}$ definimos la función

$$A(s,\zeta) := V(ns) - V(\tau s).$$

Por la propiedad (3) de las funciones de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ tenemos que $V(e^t)$ es estrictamente convexa en $(0, \infty)$, de donde se deduce que $sV'(s)$ es estrictamente creciente. En consecuencia, para $\tau > n$ se tiene que

$$s(\partial_s A)(s, \zeta) = nsV'(ns) - \tau sV'(\tau s) < 0,$$

de donde se deduce que $(\partial_s A) < 0$ para todo $s \geq U(a)$ y $\tau > n$. Por tanto, A es estrictamente decreciente en s para $\tau > R_1$, y vemos que

$$\sup_{s \geq U(a)} A(s, \zeta) = A[U(a), \zeta], \quad \zeta = \tau e^{i\lambda}, \ |\lambda| \leq \alpha. \tag{3.40}$$

Aplicando (3.5) de nuevo,

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{V(\tau U(a))}{V(\tau)} = U(a)^\rho$$

y por tanto, encontramos de nuevo constantes $b'' > 0$, $R_2 > 0$, tales que

$$V[\tau U(a)] > b'' V(\tau), \quad \tau > R_2.$$

Juntando esta desigualdad con (3.39) y (3.40) obtenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{s \geq U(a)} \{\Phi(s, \zeta)\} \leq \sup_{s \geq U(a)} \{b' A(s, \zeta)\} &= b'(V(nU(a)) - V(\tau U(a))) \\ &\leq b'(V(nU(a)) - b'' V(\tau)), \end{aligned} \tag{3.41}$$

para todo $\tau > R = \max\{R_2, R_1\} > 0$. Considerando la notación

$$B := \int_a^\infty e^{u - V(2U(u))} du < \infty, \quad L := B \exp(b' V[nU(a)]), \quad b := b'b'',$$

por (3.37) y (3.41) tenemos que

$$|N(\zeta)| < B \exp\left(\sup_{s \geq U(a)} \Phi(s, \zeta) \right) \leq L \exp\left[-bV(|\zeta|)\right].$$

cuando $\zeta \in L(\alpha, R)$. ★

Propiedad 3.20. Sean $\rho > 0$, $\gamma \geq \pi/\rho$, $\rho(r)$ un orden aproximado, $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ y $\alpha \in (0, \pi/(2\rho))$. Entonces existen constantes $b > 0$ y $R_0 > 0$ tales que

$$\mathrm{Re}(V(Z)) \geq bV(|Z|), \quad Z \in L(\alpha, R_0). \tag{3.42}$$

Demostración. Por la propiedad (1) de las funciones de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, podemos escribir $V(Z)$ de la forma

$$V(Z) = V(|Z|) \exp((i\rho\theta)[1 + \varepsilon(Z)])$$

para todo $Z \in L(\gamma, R)$, donde $\theta = \arg Z$ y $\varepsilon(Z) \to 0$ cuando $|Z| \to \infty$ uniformemente en $\theta \in [-\alpha, \alpha]$. Así pues, existen funciones reales $\varepsilon_1(Z)$ y $\varepsilon_2(Z)$ tales que $\varepsilon(Z) = \varepsilon_1(Z) + i\varepsilon_2(Z)$, con $\varepsilon_j(Z)$ cuando $|Z| \to \infty$, uniformemente en $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ para $j = 1, 2$. Por tanto, si $k_\rho = \text{mín}\{1, \pi/(2\rho) - \alpha\}$, dado $\delta \in (0, k_\rho)$ existe $R_0 > R$ tal que

$$\begin{aligned}
&|\theta + \theta\varepsilon_1(Z)| \leq |\theta| + |\theta\varepsilon_1(Z)| < \alpha + \delta < \frac{\pi}{2\rho} \\
&e^{-\varepsilon_2(Z)\rho\theta} > 1 - \delta,
\end{aligned}$$

para todo $Z \in L(\alpha, R_0)$. Por lo tanto, si $Z \in L(\alpha, R_0)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(V(Z)) &= \mathrm{Re}[V(|Z|) \exp\left(i\rho\theta(1 + \varepsilon_1(Z)) - \varepsilon_2(Z)\rho\theta\right)] \\
&= V(|Z|)e^{-\varepsilon_2(Z)\rho\theta} \cos(\rho\theta(1 + \varepsilon_1(Z))) > V(|Z|)(1 - \delta)\cos(\rho(\alpha + \delta)),
\end{aligned}$$

lo que prueba la desigualdad (3.42). ★

4. Función entera asociada a un orden analítico

Una de las formas de definir las Transformadas de Borel y Laplace clásicas de una función analítica $f(z)$ es mediante el uso de la función Gamma de Euler y, de la función de Mittag-Leffler como núcleo del operador integral de la fórmula de inversión (ver [12, Cap. 10]). Entre nuestros objetivos está generalizar estas transformadas integrales. Para ello, en la primera sección para cada $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ vamos a definir una función Δ que va jugar un papel análogo al desarrollado por la función Gamma de Euler. Veremos, en el Teorema 4.3, que Δ admite una representación integral similiar a la representación que tenemos de la función Gamma mediante la Fórmula de Hankel. A partir de esta función Δ vamos a construir una función E_ρ similar a la función de Mittag-Leffler. En este capítulo estudiaremos el crecimiento de esta función, daremos una representación integral de la misma, describiremos algunas de sus propiedades asintóticas y estudiaremos el comportamiento de su función indicatriz. Esta función es fundamental en el estudio de las transformadas integrales de funciones enteras con un orden aproximado dado descritas en la sección siguiente.

4.1. Fórmula de Hankel para la función $\Delta(\lambda)$

Recordamos que la *fórmula de Hankel* para la función Gama dice que, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(R,\varphi)} e^{\omega} \omega^{-\lambda} d\omega, \tag{4.1}$$

donde $R > 0$, $\varphi \in (\pi/2, \pi]$ y $\gamma(R, \varphi)$ describe el contorno formado por las semirrectas $\{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| \geq R, \arg \omega = \pm\varphi\}$ y el arco $\{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = R, |\arg \omega| \leq \varphi\}$, orientado de modo que $\arg \omega$ es creciente y donde ω^λ describe el valor principal dado por

$$\omega^{-\lambda} = \exp[-\lambda(\ln |\omega| + i \arg \omega)], \quad \arg \omega \in [-\pi, \pi).$$

Vamos a ver cómo generalizar esta fórmula, para lo cual consideramos en primer lugar, los siguientes conceptos.

Definición 4.1. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho > 0$ y sea V un elemento de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ definimos para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, la función

$$\Delta(\lambda) = \Delta_\rho(\lambda, V) = \rho \int_0^\infty t^{\lambda-1} \exp(-V(t)) dt.$$

Observación 4.2. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ la integral de la igualdad anterior converge, y la función $\Delta(\lambda) = \Delta_\rho(\lambda, V)$ define una función análoga a la *función Gamma de Euler* para el orden analítco aproximado $\ln V(t)/\ln t$. El caso clásico se tiene cuando tomamos $\rho(r) \equiv 1$ y $V(z) = z$ puesto que

$$\Delta_\rho(\lambda, V) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} \exp(-t) dt = \Gamma(\lambda).$$

Teorema 4.3. Sean $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho(r) \to \rho > 0$ cuando $r \to \infty$, m el más pequeño de los naturales que verifican $m\rho > 1/2$, sea $\gamma \geq \text{mín}\{\pi/\rho, \pi m\}$, $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, $\Gamma_\varphi(a) = \{\omega = a + te^{i\varphi} : t \geq 0\}$, donde $\pi/2 < \varphi < \text{mín}\{\pi, \pi\rho m\}$ y $a > 0$ es escogido como en (3.25). Denotamos por $\Gamma_\varphi := \Gamma_\varphi(a)$, y definimos $L_\varphi := \Gamma_\varphi \cup \Gamma_{-\varphi}$, el contorno orientado de modo que $\arg \omega$ es creciente, y de modo que este contorno esté situado en el dominio de definición de la prolongación analítica $U(\omega)$ de $U(t) = r$, que es la inversa de $V(r)$. Entonces la función $1/\Delta(\lambda)$ se extiende a todo $\mathbb{C}$, y la fórmula de prolongación está dada por

$$\frac{1}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varphi} \frac{e^\omega}{|U(\omega)|^\lambda} d\omega, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

Esta fórmula sigue siendo cierta si reemplazamos el contorno L_φ por un contorno de la forma $\gamma(R, \varphi)$ (descrito en (4.1)) incluido en el dominio de U.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\rho > 1/2$, denotamos por $I(\lambda)$ la integral del lado derecho de (4.2). Veamos que $I(\lambda)$ es una función entera. Sea, para $\lambda \in \mathbb{C}$, $B_\lambda = \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) \in [\text{Re}(\lambda) - 1, \text{Re}(\lambda) + 1]\}$. Sabemos que $\cos(\varphi) < 0$ luego para todo $t \geq 0$, $z \in B_\lambda$ y ω suficientemente grande de modo que $|U(\omega)| > 1$, se tiene que

$$\left| \frac{e^\omega}{|U(\omega)|^z} \right| \leq e^a \frac{e^{t\cos\varphi}}{|U(\omega)|^{\text{Re}(z)}} \leq e^a \frac{e^{t\cos\varphi}}{|U(\omega)|^{\text{Re}(\lambda)-1}} < Ae^{t\cos\varphi},$$

y podemos aplicar los teoremas de holomorfía bajo el signo de integral para deducir que $I(\lambda)$ es entera. Por tanto, por el Principio de Identidad, basta probar (4.2) para $\lambda > 1$. Observamos que poniendo

$$I_\theta(\lambda) = \int_{\Gamma_\theta} e^\omega [U(\omega)]^{-\lambda} d\omega,$$

podemos representar la función $I(\lambda)$ como

$$I_\theta(\lambda) = \int_{\Gamma_\theta} e^\omega [U(\omega)]^{-\lambda} d\omega \quad I(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}[I_\varphi(\lambda) - I_{-\varphi}(\lambda)].$$

Utilizando esta expresión probaremos que $\Delta(\lambda)I(\lambda) = 1$ para todo $\lambda > 1$. Escogemos $\alpha > 0$, $\delta > 0$ de modo que

$$\alpha\rho \in (\varphi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \rho\delta < \frac{\pi}{2} + \text{mín}\{\rho\alpha - \varphi, -\rho\alpha\},$$

de donde se deduce que

$$\beta_+ := \frac{1}{\rho}(\rho\delta - \rho\alpha + \varphi) \leq \frac{1}{\rho}(\rho\delta - \text{mín}\{\rho\alpha - \varphi, -\rho\alpha\}) < \frac{1}{\rho}\frac{\pi}{2}, \tag{4.3}$$

$$\beta_- := \frac{1}{\rho}(\varphi - \rho\delta - \rho\alpha) > \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \rho\alpha - \rho\alpha\Big) > 0, \tag{4.4}$$

Dado $\delta > 0$ y puesto que $\varphi \in (\pi/2, \pi)$, tomando $\omega = a + te^{i\varphi} \in G_\varphi$ con $t \geq 0$ suficientemente grande tenemos que

$$|\varphi - \arg\omega| < \frac{\rho\delta}{2}.$$

De las propiedades asintóticas de U dadas por el Teorema 3.15 y de (3.14) deducimos que podemos escoger ω de módulo suficientemente grande de forma que se verifique la desigualdad

$$\left|\arg U(\omega) - \frac{\arg\omega}{\rho}\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Uniendo esta desigualdad y la anterior deducimos que asintóticamente

$$-\delta < -\delta + \frac{\varphi}{\rho} < \arg U(\omega) < \delta + \frac{\varphi}{\rho}, \quad \omega \in \Gamma_\varphi, \tag{4.5}$$

y teniendo en cuenta que $U(\omega) = \overline{U(\overline{\omega})}$ deducimos que

$$-\delta - \frac{\varphi}{\rho} < \arg U(\omega) < \delta - \frac{\varphi}{\rho} < \delta, \quad \omega \in \Gamma_{-\varphi}. \tag{4.6}$$

Si denotamos por $\theta(\omega) = \arg U(\omega) - \alpha$, para $\omega \in \Gamma_\varphi$, por (4.3), (4.4) y (4.5) se tiene que

$$\theta(\omega) = \arg U(\omega) - \alpha < \frac{\varphi}{\rho} + \delta - \alpha = \beta_+ < \frac{\pi}{2\rho},$$
$$0 < \beta_- = \frac{\varphi}{\rho} - \delta - \alpha < \arg U(\omega) - \alpha = \theta(\omega).$$

Por lo tanto, $\theta(\omega) \in (0, \pi/(2\rho))$ para $|\omega|$ suficientemente grande, y por la Propiedad 3.20 deducimos que, para cada $\omega \in \Gamma_\varphi$,

$$\left|\int_{\Gamma_{\theta(\omega)}(0)} u^{\lambda-1}e^{-V(u)}du\right| \leq \int_{\Gamma_{\theta(\omega)}(0)} |u|^{\lambda-1}e^{-\operatorname{Re}(V(u))}du$$
$$\leq \int_{\Gamma_{\theta(\omega)}(0)} |u|^{\lambda-1}e^{-bV(|u|)}du = \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-bt^{\rho(t)}}dt < \infty,$$

y la integral converge absolutamente para $\lambda > 1$. Del mismo modo, por la Propiedad 3.20 y la definición de $\Delta(\lambda)$, para $\lambda > 1$, se tiene que

$$\frac{\Delta(\lambda)}{[U(\omega)]^\lambda} = \frac{\rho}{[U(\omega)]^\lambda}\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-V(t)}dt < \infty.$$

Apoyándonos en la convergencia de estas dos integrales, podemos integrar sobre el sector de bordes $\arg z = \theta(\omega)$ y $\arg z = 0$ y arco $C_r = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, \varphi \in (0, \theta(\omega))\}$ y tomar límite cuando $r \to \infty$, y por la fórmula integral de Cauchy tenemos que

$$\frac{\Delta(\lambda)}{[U(\omega)]^\lambda} = \frac{\rho}{[U(\omega)]^\lambda} \int_{\Gamma_{\theta(\omega)}(0)} u^{\lambda-1} e^{-V(u)} du.$$

Realizando el cambio de variable $u = zU(\omega)$, vemos que

$$\frac{\Delta(\lambda)}{[U(\omega)]^\lambda} = \rho \int_{\Gamma_{-\alpha}(0)} z^{\lambda-1} e^{-V(zU(\omega))} dz$$

cuando $\lambda > 1$, y consecuentemente para se tiene que

$$\Delta(\lambda) I_\varphi(\lambda) = \int_{\Gamma_\varphi} e^\omega \frac{\Delta(\lambda)}{[U(\omega)]^\lambda} d\omega = \int_{\Gamma_\varphi} e^\omega \left(\rho \int_{\Gamma_{-\alpha}(0)} \frac{z^{\lambda-1}}{\exp(V(zU(\omega)))} dz \right) d\omega.$$

Consideramos la notación $\psi(z,\omega) = \rho z^{\lambda-1} \exp(\omega - V(zU(\omega)))$ y ponemos

$$J(\omega) = \int_{\Gamma_{-\alpha}(0)} \psi(z,\omega) dz.$$

Veamos que esta integral converge uniformemente en los compactos $K \subseteq \Gamma_\varphi$. Como $\gamma \geq \pi/\rho$, y como $\arg(zU(\omega)) = \theta(\omega) < \pi/(2\rho)$, podemos aplicar la Propiedad 3.20 y tenemos que existen $b > 0$ y $R_0 > 0$ de forma que

$$\mathrm{Re}(V(zU(\omega))) \geq bV(|z||U(\omega)|) \geq bV(|z|) \tag{4.7}$$

para todo $|z| > R$, y todo $\omega \in \Gamma_\varphi$. Aplicando esta desigualdad vemos que

$$\left| \int_{\Gamma_{-\alpha}(0)} \psi(z,\omega) dz \right| \leq A + \int_{R_0}^\infty |\psi(re^{-i\alpha}, \omega)| dr \leq A + \rho \int_{R_0}^\infty \frac{r^{\lambda-1} e^{\mathrm{Re}(\omega)}}{e^{bV(r)}} dr.$$

De este hecho se deduce que J converge uniformemente en los compactos K de Γ_φ. Del mismo modo, con la notación del Teorema 3.18 se ve que

$$\int_{\Gamma_\varphi} \psi(z,\omega) d\omega = z^{\lambda-1} N_\varphi(z),$$

y se prueba que esta integral converge uniformemente en los compactos $F \subseteq \Gamma_{-\alpha}(0)$. Denotamos por

$$Q_\varphi(\lambda) := \int_{\Gamma_\varphi} \left(\int_{\Gamma_{-\alpha}(0)} |\psi(z,\omega)| dz \right) d\omega.$$

Veamos que $Q_\varphi(\lambda)$ converge para $\lambda > 1$. Para ello consideramos la integral,

$$P(\theta, \lambda) = \rho \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-\operatorname{Re}(V(te^{i\theta}))} dt.$$

Usando la Propiedad 3.20 vemos que esta integral converge uniformemente cuando $\theta \in [\beta_-, \beta_+]$ y es continua en θ en ese intervalo. Consecuentemente se ve que

$$\begin{aligned}|Q_\varphi(\lambda)| &= \int_{\Gamma_\varphi} \left(\int_0^\infty \rho r^{\lambda-1} e^{\operatorname{Re}(\omega - V(rU(\omega)e^{-i\alpha}))} dr \right) d\omega \\ &\leq \int_{\Gamma_\varphi} \left(e^{\operatorname{Re}(\omega)} \rho \int_0^\infty r^{\lambda-1} e^{-\operatorname{Re}(V(rU(\omega)e^{-i\alpha}))} dr \right) d\omega.\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $r|U(\omega)| = t$ vemos que

$$|Q_\varphi(\lambda)| \leq \text{máx}\{P(\theta, \lambda) : \theta \in [\beta_-, \beta_+]\} \int_{\Gamma_\varphi} \frac{e^{\operatorname{Re}(\omega)}}{|U(\omega)|^\lambda} d\omega,$$

lo que nos permite deducir que la integral $Q_\varphi(\lambda)$ converge para $\lambda > 1$ y en consecuencia $\Delta(\lambda) I_\varphi(\lambda) < \infty$ y es posible cambiar el orden de integración para nos permite afirmar que

$$\Delta(\lambda) I_\varphi(\lambda) = \int_{\Gamma_{-\alpha}(0)} \int_{\Gamma_\varphi} \psi(z, \omega) d\omega dz = \int_{\Gamma_{-\alpha}(0)} \rho z^{\lambda-1} N(z) dz. \tag{4.8}$$

Considerando la notación $H(z) := \rho z^{\lambda-1} N(z)$ y razonando de manera análoga (usando, esta vez, la desigualdad (4.6)), deducimos que

$$\Delta(\lambda) I_{-\varphi}(\lambda) = \int_{\Gamma_\alpha(0)} H(z) dz. \tag{4.9}$$

A continuación, para $r > 1$ consideramos el sector S_r que tiene vértice 0 y cuyo borde está sobre las semirrectas $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pm\alpha\}$ y en el arco $A_r = \{z = re^{i\theta} : |\theta| \leq \alpha\}$, y de modo que esté orientado positivamente. Para $\alpha \in (0, \pi/(2\rho))$ fijo y $\lambda > 1$ tenemos, por el Teorema 3.19, que dado $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$\begin{aligned}\left| \int_{C_r} H(z) dz \right| &= \int_{-\alpha}^{\alpha} |\rho N(re^{i\theta})(re^{i\theta})^{\lambda-1}| d\theta \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho A e^{-bV(r)} r^{\lambda-1} d\theta \leq \\ &\leq 2\alpha\rho A e^{-bV(r)} r^{\lambda-1} < \varepsilon\end{aligned}$$

para r suficientemente grande, es decir,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} H(z) dz = 0.$$

Combinando este resultado con la definición de I_φ y $I_{-\varphi}$ y con las fórmulas (4.8), (4.9) y el apartado (3) del Teorema 3.18, obtenemos que

$$\Delta(\lambda)I(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma_{-\alpha}^{(0)}} H(z)dz - \int_{\Gamma_{\alpha}^{(0)}} H(z)dz\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to\infty}\int_{\partial S_r} H(z)dz = \operatorname{Res}(\rho N(z), 1) = 1$$

para todo $\lambda > 1$, lo que nos permite afirmar que se verifica (4.2) en el caso $\rho > 1/2$.

Supongamos ahora que $\rho \in (0, 1/2]$, sea $m > 1$ el número dado en el enunciado del teorema. Definimos $V_m(\tau) = V(\tau^m)$ para $\tau > 0$. Entonces $V_m \in \mathfrak{B}(\gamma/m; \rho_m(r))$ con $\rho_m(r) = m\rho(r^m)$ por la Observación 3.17. Con la notación de la definición de $\Delta(\lambda)$ se tiene que

$$\Delta(\lambda) = \Delta_\rho(\lambda, V) = \rho\int_0^\infty (t^{1/m})^{m(\lambda-1)}e^{-V(t^{m/m})}dt = \Delta_{m\rho}(m\lambda, V_m),$$

cuando $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Sea $\tau = F(s)$ cuando $s > 0$ la inversa de $s = V_m(\tau)$. De nuevo por la Observación 3.17, sabemos que $F(s) = [U(s)]^{1/m}$ donde U es la inversa de V. Aplicando el resultado que acabamos de demostrar para $m\rho > 1/2$, y teniendo encuenta el Principio de Identidad,

$$\frac{1}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{\Delta_{m\rho}(m\lambda, V_m)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varphi}\frac{e^\omega}{[F(\omega)]^{m\lambda}}d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varphi}\frac{e^\omega}{[U(\omega)]^{\lambda}}d\omega,$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\pi/2 < \varphi < \text{mín}\{\pi, \pi m\rho\}$. ★

Observación 4.4. La fórmula (4.2) nos permite afirmar que $\Delta(\lambda)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en un conjunto numerable de polos, porque es la inversa de una función entera. La siguiente propiedad nos muestra que estos polos pueden estar todos en el semieje real negativo.

Proposición 4.5. Sean $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho(r) \to \rho > 0$,$\gamma > 0$, $\alpha \in (0, \pi/\gamma)$ con $\alpha < \rho$, $\beta \in (\rho, \rho + \alpha)$ y V la función dada por la Propiedad 3.9 para este β. Entonces, se tiene que

$$\Delta(\lambda) = \Delta_\rho(\lambda, V) = \frac{\rho}{\lambda} - \rho\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k B_{k+1}}{\lambda + \beta + k\alpha} + A(\lambda),$$

donde $A(\lambda)$ es una función analítica en el semiplano $\operatorname{Re}\lambda > 2\beta$.

Demostración. Denotamos por $P(t) = \rho e^{-V(t)} t^{\lambda-1}$. Con esta notación

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1(\lambda) + \Delta_2(\lambda), \quad \Delta_1(\lambda) = \int_0^1 P(t)dt, \quad \Delta_2(\lambda) = \int_1^\infty P(t)dt,$$

donde $\Delta_2(\lambda)$ es una función entera debido al teorema de holomorfía bajo el signo de integral. Por otra parte, para $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ la función $\Delta_1(\lambda)$ admite la representación

$$\Delta_1(\lambda) = \rho \int_0^1 t^{\lambda-1} dt - \rho I_1(\lambda) + \rho I_2(\lambda) = \frac{\rho}{\lambda} - \rho I_1(\lambda) + \rho I_2(\lambda),$$

donde

$$I_1(\lambda) = \int_0^1 V(t) t^{\lambda-1} dt, \quad I_2(\lambda) = \int_0^1 [e^{-V(t)} - 1 + V(t)] t^{\lambda-1} dt.$$

Usando la representación de V en $[0,1]$ dada por la Propiedad 3.9, tenemos que

$$I_1(\lambda) = \int_0^1 t^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{k+1} t^{\beta+k\alpha} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B_{k+1}}{\lambda+\beta+k\alpha},$$

cuando $\mathrm{Re}(\lambda) > \beta$. Por otro lado, usando el desarrollo de Taylor de e^{-u} en $u = 0$ vemos que para todo $u \geq 0$ se tiene que

$$e^{-u} = 1 - u + u^2 e^{-cu}, \quad c \in [0,1],$$

y por tanto,

$$I_2(\lambda) = \int_0^1 e^{-cV(t)} (V(t))^2 t^{\lambda-1} dt.$$

Observamos que si $\mathrm{Re}\,\lambda > 2\beta$, haciendo uso de nuevo de la representación de V dada por la Propiedad 3.9 tenemos que

$$|e^{-cV(t)} (V(t))^2 t^{\lambda-1}| \leq e^{-cV(t)} h(t) t^{2\beta} t^{\mathrm{Re}(\lambda)-1},$$

donde $h(t)$ es una función continua, lo que nos permite concluir que $I_2(\lambda)$ es una función analítica en $\mathrm{Re}\,\lambda > 2\beta > \beta$. Poniendo $A(\lambda) = \Delta_1(\lambda) + I_2(\lambda)$ terminamos la prueba. ★

4.2. Orden y tipo de la función entera $E_\rho(z, V)$

Definición 4.6. Dados $\rho(r)$ un orden aproximado, $\mu \geq 0$ y $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, para todo $z \in \mathbb{C}$ denotamos por

$$E_\rho(z, V, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_\rho(k+\mu+1, V)}.$$

Si $\mu = 0$ denotamos simplemente $E_\rho(z, V, 0) = E_\rho(z, V)$.

Observación 4.7. Esta función es una generalización de la función de Mittag-Leffler, y va a ser el núcleo de la transformada de Laplace generalizada que definiremos en el siguiente capítulo. En el caso clasico, $\mu = 0$, $\rho(r) \equiv 1$ y $V(z) = z$, vemos que

$$E_\rho(z, V) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_1(k+1, z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z.$$

Observación 4.8. En la demostración del siguiente teorema probaremos una equivalencia sobre los coeficientes del desarrollo de la función $E_\rho(z, V, \mu)$ que permitirá deducir, aplicando el *criterio de Cauchy-Hadamard* que esta función es entera.

Teorema 4.9. Sean $\rho(r)$ un orden aproximado, $\mu \geq 0$ y $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ entonces la función $E_\rho(z, V, \mu)$ es una función entera de orden ρ, orden aproximado $\rho(r)$ y tipo $\sigma_f = 1$.

Demostración. Para cada $\lambda > 0$ definimos la función $f_\lambda(t) := e^{V(t)} t^{\lambda+\mu}$ para todo $t > 0$. Derivando vemos que si t_λ es un extremo entonces debe verificar que

$$V'(t_\lambda) - \frac{\lambda + \mu}{t_\lambda} = 0.$$

Por la propiedad (3) de las funciones de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ sabemos que $V(e^s)$ es estrictamente convexa, lo que nos permite deducir que $tV'(t)$ es estrictamente creciente. En consecuencia, $tV'(t)$ es inyectiva y para cada $\lambda > 0$ el extremo es único. Como f_λ es una función estrictamente positiva que decrece hacia 0 cuando $t \to \infty$ podemos afirmar que t_λ es un máximo.

Tomamos ahora λ suficientemente grande de forma que la inversa U de V esté definida en $(\lambda + \mu)/\rho$ y definimos $s_\lambda := U((\lambda + \mu)/\rho)$. Por (3.12) sabemos que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{tV'(t)}{\rho V(t)} = 1.$$

Por lo tanto, $tV'(t)$ es no acotada cuando $t \to \infty$, lo que permite deducir que $t_\lambda \to \infty$ cuando $\lambda \to \infty$. En consecuencia, tenemos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{V(s_\lambda)}{V(t_\lambda)} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{(\lambda + \mu)/\rho}{V(t_\lambda)} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{t_\lambda V'(t_\lambda)}{\rho V(t_\lambda)} = 1. \tag{4.10}$$

De esta igualdad y de la propiedad (3.5) que verifica U se deduce que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{U((\lambda + \mu)/\rho)}{t_\lambda} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{s_\lambda}{t_\lambda} = 1. \tag{4.11}$$

Consideramos ahora la integral

$$\int_{(1-\delta)t_\lambda}^{(1+\delta)t_\lambda} e^{-V(t)} t^{\lambda+\mu} dt, \qquad \delta \in (0, 1). \tag{4.12}$$

Ponemos $t = t_\lambda y$ donde $1-\delta \leq y \leq 1+\delta$, de nuevo por la propiedad (3.5) aplicada en esta ocasión a V, se tiene que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{V(t_\lambda y)}{y^\rho V(t_\lambda)} = 1,$$

uniformemente cuando $y \in [1-\delta, 1+\delta]$. En consecuencia, por (4.10) podemos escribir

$$V(t) = y^\rho \frac{\lambda+\mu}{\rho}(1+\varepsilon_1(\lambda, y))(1+\varepsilon_2(\lambda)), \qquad t \in [(1-\delta)t_\lambda, (1+\delta)t_\lambda]$$

donde ε_1, ε_2 tienden a 0 cuando $\lambda \to \infty$ uniformemente respecto de y. Observamos que podemos escribir $(1+\varepsilon_1(\lambda, y))(1+\varepsilon_2(\lambda)) = 1+\varepsilon_3(\lambda)$, donde ε_3 tiende a 0 cuando $\lambda \to \infty$ uniformemente respecto de y. Realizando el cambio de variable $t = t_\lambda y$ y aplicando el *teorema de la media integral* en (4.12) sabemos que existe $\zeta_\lambda \in [1-\delta, 1+\delta]$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{(1-\delta)t_\lambda}^{(1+\delta)t_\lambda} e^{-V(t)} t^{\lambda+\mu} dt &= \int_{(1-\delta)}^{(1+\delta)} e^{-y^\rho \frac{\lambda+\mu}{\rho}(1+\varepsilon_3(\lambda))} (t_\lambda y)^{\lambda+\mu} t_\lambda dy \\
&= t_\lambda^{\lambda+\mu+1} \int_{(1-\delta)}^{(1+\delta)} [e^{-y^\rho} y^\rho]^{\frac{\lambda+\mu}{\rho}} e^{-y^\rho \varepsilon_3(\lambda)[(\lambda+\mu)/\rho]} dy \\
&= t_\lambda^{\lambda+\mu+1} e^{-\zeta_\lambda^\rho \varepsilon_3(\lambda)[(\lambda+\mu)/\rho]} \int_{(1-\delta)}^{(1+\delta)} [e^{-y^\rho} y^\rho]^{\frac{\lambda+\mu}{\rho}} dy.
\end{aligned}$$

Por una parte, observamos que, como $|\zeta_\lambda| \leq 2$, podemos escribir

$$-\zeta_\lambda^\rho \varepsilon_3(\lambda)[(\lambda+\mu)/\rho] = (\lambda+\mu)\varepsilon_4(\lambda),$$

donde ε_4 tiende a 0 cuando $\lambda \to \infty$. Por otra parte, el libro de G. Polya y G. Szego [31, Tomo I, Cap. II, n.205, p.78,p.244] da la siguiente equivalencia cuando $\lambda \to \infty$,

$$\int_{(1-\delta)}^{(1+\delta)} [e^{-y^\rho} y^\rho]^{\frac{\lambda+\mu}{\rho}} dy \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\rho(\lambda+\mu)}} e^{-[(\lambda+\mu)/\rho]}.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que

$$\int_{(1-\delta)t_\lambda}^{(1+\delta)t_\lambda} e^{-V(t)} t^{\lambda+\mu} dt \sim t_\lambda^{\lambda+\mu+1} e^{(\lambda+\mu)\varepsilon_4(\lambda)} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho(\lambda+\mu)}} e^{-[(\lambda+\mu)/\rho]},$$

cuando $\lambda \to \infty$. Deducimos, con una pequeña comprobación, que

$$\int_{(1-\delta)t_\lambda}^{(1+\delta)t_\lambda} e^{-V(t)} t^{\lambda+\mu} dt \sim t_\lambda^{\lambda+\mu+1} e^{-[(\lambda+\mu)/\rho][1+\varepsilon_5(\lambda)]}, \tag{4.13}$$

cuando $\lambda \to \infty$, y donde ε_5 tiende a 0 cuando $\lambda \to \infty$.

Consideramos ahora la función

$$G(t) = e^{-\alpha V(t)} t^{\lambda+\mu},$$

donde $\alpha \in (0,1)$. Si t_0 es un extremo de G, debe verificar que

$$\frac{\lambda+\mu}{t_0} = \alpha V'(t_0).$$

Como antes, deducimos que este extremo es único y debe ser un máximo $t_{\alpha,\lambda}$ que, razonando como antes, verifica

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{U[(\lambda+\mu)/\rho\alpha]}{t_{\alpha,\lambda}} = 1,$$

y de la propiedad (3.5) que verifica U se deduce que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\alpha^{-\rho} U[(\lambda+\mu)/\rho]}{t_{\alpha,\lambda}} = 1.$$

Aplincando (4.11) se tiene que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\alpha^{-\rho} t_\lambda}{t_{\alpha,\lambda}} = 1.$$

Podemos tomar α suficientemente próximo a uno de modo que $1/\alpha^\rho < 1+\delta$ y, por tanto, $t_\lambda/\alpha^\rho \in (t_\lambda, (1+\delta)t_\lambda)$. En consecuencia, para λ suficientemente grande podemos afirmar que el máximo $t_{\alpha,\lambda}$ de G se alcanza en $(t_\lambda, (1+\delta)t_\lambda)$. De este hecho y del crecimiento de G deducimos que el máximo de G en los intervalos $[0,(1-\delta)t_\lambda]$ y $[(1+\delta)t_\lambda, \infty)$ se alcanza respectivamente en los puntos $(1-\delta)t_\lambda$ y $(1+\delta)t_\lambda$ para λ suficientemente grande y se concluye que

$$\int_0^{(1-\delta)t_\lambda} e^{-V(t)} t^{\lambda+\mu} dt \le e^{-\alpha V[(1-\delta)t_\lambda]} (1-\delta)^{\lambda+\mu} t_\lambda^{\lambda+\mu} \int_0^{(1-\delta)t_\lambda} e^{-(1-\alpha)V(t)} dt,$$

$$\int_{(1+\delta)t_\lambda}^{\infty} e^{-V(t)} t^{\lambda+\mu} dt \le e^{-\alpha V[(1+\delta)t_\lambda]} (1+\delta)^{\lambda+\mu} t_\lambda^{\lambda+\mu} \int_{(1+\delta)t_\lambda}^{\infty} e^{-(1-\alpha)V(t)} dt.$$

Observamos que las integrales del lado derecho de estas desigualdades se pueden acotar por

$$\int_0^\infty e^{-(1-\alpha)V(t)} dt = M < \infty,$$

lo que permite escribir para λ suficientemente grande

$$\int_0^{(1-\delta)t_\lambda} e^{-V(t)} t^{\lambda+\mu} dt \le e^{-\alpha V[(1-\delta)t_\lambda]} (1-\delta)^{\lambda+\mu} t_\lambda^{\lambda+\mu} M, \tag{4.14}$$

$$\int_{(1+\delta)t_\lambda}^{\infty} e^{-V(t)} t^{\lambda+\mu} dt \le e^{-\alpha V[(1+\delta)t_\lambda]} (1+\delta)^{\lambda+\mu} t_\lambda^{\lambda+\mu} M. \tag{4.15}$$

Por otra parte, de la propiedad (3.5) que verifica V y de la igualdad (4.10) para λ suficientemente grande deducimos que

$$V[(1\pm\delta)t_\lambda] \geq \alpha(1\pm\delta)^\rho V(t_\lambda) \geq \alpha^2(1\pm\delta)^\rho \frac{\lambda+\mu}{\rho}.$$

Esta desigualdad permite concluir que

$$e^{-\alpha V[(1\pm\delta)t_\lambda]}(1\pm\delta)^{\lambda+\mu} \leq \left[\alpha^3(1\pm\delta)^\rho e^{-\alpha^3(1\pm\delta)^\rho}\right]^{\frac{\lambda+\mu}{\rho}} \alpha^{-3(\lambda+\mu)/\rho}. \tag{4.16}$$

Observamos ahora que la función $x \to xe^{-x}$ tiene un máximo absoluto en el punto $x=1$ en el que la función vale $1/e$. Por tanto, podemos tomar α suficientemente cerca de 1 de forma que $(1+\delta)^\rho\alpha^3 > 1$, y en consecuencia

$$\alpha^3(1\pm\delta)^\rho e^{-\alpha^3(1\pm\delta)^\rho} < \frac{\tau}{e},$$

donde $\tau \in (0,1)$. Observamos también que para todo α suficientemente próximo a 1 la cantidad anterior es siempre inferior a una fracción de la forma τ_0/e con $\tau_0 \in (0,1)$ fijo para todo α. En consecuencia, tomando α suficientemente cerca de 1 para que $\tau_1 = \alpha^{-3}\tau_0 < 1$ y retomando la desigualdad (4.16) vemos que

$$e^{-\alpha V[(1\pm\delta)t_\lambda]}(1\pm\delta)^{\lambda+\mu} \leq \left(\frac{\tau_1}{e}\right)^{(\lambda+\mu)/\rho}.$$

Por tanto, podemos acotar las integrales (4.14) y (4.15) por

$$\int_0^{(1-\delta)t_\lambda} e^{-V(t)}t^{\lambda+\mu}dt \leq M\left(\frac{\tau_1}{e}\right)^{(\lambda+\mu)/\rho} t_\lambda^{\lambda+\mu},$$

$$\int_{(1+\delta)t_\lambda}^{\infty} e^{-V(t)}t^{\lambda+\mu}dt \leq M\left(\frac{\tau_1}{e}\right)^{(\lambda+\mu)/\rho} t_\lambda^{\lambda+\mu},$$

para λ suficientemente grande. Uniendo estas acotaciones con (4.13) y con la definición de $\Delta(\lambda+\mu+1)$ dada por

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda+\mu+1) &= \int_0^\infty e^{-V(t)}t^{\lambda+\mu}dt \\ &= \int_0^{(1-\delta)t_\lambda} e^{-V(t)}t^{\lambda+\mu}dt + \int_{(1-\delta)t_\lambda}^{(1+\delta)t_\lambda} e^{-V(t)}t^{\lambda+\mu}dt + \int_{(1+\delta)t_\lambda}^{\infty} e^{-V(t)}t^{\lambda+\mu}dt,\end{aligned}$$

se deduce que

$$\Delta(\lambda+\mu+1) \sim t_\lambda^{\lambda+\mu+1}e^{-[(\lambda+\mu)/\rho][1+\varepsilon_5(\lambda)]}.$$

cuando $\lambda \to \infty$, puesto que $\tau_1 < 1$. Tomando raíz λ-ésima, se comprueba de forma inmediata que

$$\sqrt[\lambda]{\Delta(\lambda+\mu+1)} \sim t_\lambda e^{-1/\rho}.$$

Usando ahora (4.11) vemos que

$$\sqrt[\lambda]{\Delta(\lambda+\mu+1)} \sim U\left(\frac{\lambda+\mu}{\rho}\right) e^{-1/\rho}.$$

Usando de nuevo la propiedad (1) del Teorema 3.6, cuando $\lambda \to \infty$ se tiene que

$$\sqrt[\lambda]{\Delta(\lambda+\mu+1)} \sim U(\lambda)(e\rho)^{-1/\rho}. \tag{4.17}$$

En consecuencia, como $|c_k| = 1/\Delta(k+\mu+1)$ se tiene que

$$\frac{1}{e\rho}\left(\limsup_{k\to\infty} U(k)\sqrt[k]{|c_k|}\right)^{\rho} = \frac{1}{e\rho}\left(\limsup_{k\to\infty} \frac{(e\rho)^{1/\rho}}{\sqrt[k]{|c_k|}}\sqrt[k]{|c_k|}\right)^{\rho} = 1.$$

Como es un valor finito y no nulo, por la Observación 1.32 del Teorema 1.31 podemos concluir que $E_\rho(z,V,\mu)$ es una función entera de orden ρ, tipo 1 y orden aproximado $\rho(r) = \ln V(r)/\ln r$. ★

4.3. Representación integral de la función $E_\rho(z,V)$

Teorema 4.10. Sean $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho(r) \to \rho > 0$ cuando $r \to \infty$, m el más pequeño de los naturales que verifican $m\rho > 1/2$, sea $\gamma \geq \text{mín}\{\pi/\rho, \pi m\}$, $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, $\Gamma_\varphi(a) = \{\omega = a + te^{i\varphi} : t \geq 0\}$, donde $\pi/2 < \varphi < \text{mín}\{\pi, \pi\rho m\}$ y $a > 0$ escogido como en (3.25). Denotamos por $\Gamma_\varphi := \Gamma_\varphi(a)$ y definimos $L_\varphi = \Gamma_\varphi \cup \Gamma_{-\varphi}$, el contorno orientado de modo que $\arg\omega$ es creciente, y de modo que este contorno esté situado en el dominio de definición de la prolongación analítica $U(\omega)$ de $U(t) = r$ que es la inversa de $V(r)$. Sea $s_a = \text{ínf}\{|U(\omega)| : \omega \in L_\varphi\}$, entonces para todo $|z| < s_a$ se tiene que

$$E_\rho(z,V,\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varphi} \frac{e^\omega}{(U(\omega)-z)[U(\omega)]^\mu}d\omega, \tag{4.18}$$

además $s_a \to \infty$ cuando $a \to \infty$. Análogamente a lo visto en (4.2), el contorno L_φ puede sustituirse por un contorno de la forma $\gamma(R,\varphi)$ contenido en el dominio de U, en cuyo caso la fórmula anterior es cierta para todo $|z| < d_R = \text{ínf}\{|U(\omega)|, \omega \in \gamma(R,\varphi)\}$.

Demostración. Por la definición de $E_\rho(z,V,\mu)$, y la expresión integral de $\Delta(\lambda)$ dada en (4.2) se tiene que

$$E_\rho(z,V,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta(k+\mu+1)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{L_\varphi} \frac{e^\omega z^k}{[U(\omega)]^{k+\mu+1}}d\omega$$

Por el Teorema 3.15 tenemos que $U(t) = t^{\rho^*(t)}$ para todo $t > 0$, donde $\rho^*(t)$ es un orden analítico aproximado y $\rho^*(t) \to 1/\rho$ cuando $t \to \infty$. Por consiguiente, sabemos que

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \frac{|U(\omega)|}{U(|\omega|)} = \lim_{|\omega|\to\infty} \frac{|U(|\omega|e^{i\varphi})|}{U(|\omega|)} = |e^{i\rho\varphi}| = 1,$$

con convergencia uniforme cuando $\varphi = \arg\omega \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, donde $\varphi_0 < \text{mín}\{\pi, \pi\rho\}$. Por lo tanto,

$$\lim_{a\to\infty} s_a = \lim_{a\to\infty} \text{ínf}\{|U(\omega)| : \omega = a + se^{i\pm\varphi},\ s \geq 0\} = \infty,$$

lo que nos permite afirmar que s_a tiene la propiedad asintótica requerida. Para z fijo con $|z| < s_a$, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\omega} z^k}{[U(\omega)]^{k+\mu+1}} = \frac{e^{\omega}}{[U(\omega)]^{\mu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[U(\omega)]^k}$$

converge uniformemente en $\omega \in L_\varphi$, puesto que $|z/U(\omega)| < 1$. Consecuentemente, es lícito permutar suma e integral, y deducimos que

$$E_\rho(z, V, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\omega} z^k}{[U(\omega)]^{k+\mu+1}} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varphi} \frac{e^{\omega}}{(U(\omega) - z)[U(\omega)]^{\mu}} d\omega,$$

puesto que, $|z/U(\omega)| < 1$, lo que prueba (4.18). ★

4.4. Propiedades asintóticas de $E_\rho(z, V)$

Proposición 4.11. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho > 1/2$, sea $\gamma > \text{mín}\{\pi/\rho, \pi\}$ y sea $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño verificando que $0 < \rho\varepsilon < \pi \,\text{mín}\{1/2, \rho - 1/2\}$ tenemos que cuando $|z| \to \infty$, se cumple la igualdad

$$E_\rho(z, V) = \begin{cases} V'(z)e^{V(z)} + O\left(\frac{1}{|z|}\right) & \text{si } |\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, \\ O\left(\frac{1}{|z|}\right) & \text{si } \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \leq |\arg z| \leq \pi. \end{cases} \tag{4.19}$$

Demostración. Dado $\pi/2 < \varphi < \text{mín}\{\pi, \pi\rho\}$ tomamos $\delta = \delta(\varphi) > 0$ suficientemente pequeño verificando $\pi/2 < \varphi \pm \rho\delta < \text{mín}\{\pi, \pi\rho\}$ y tomamos $R_0 > 0$ de modo que para todo $R \geq R_0$ la curva $\gamma(R, \varphi)$ está contenida en el dominio de U y de modo que

$$\left|\arg U(se^{i\varphi}) - \frac{\varphi}{\rho}\right| < \delta, \quad \left|\arg U(se^{-i\varphi}) + \frac{\varphi}{\rho}\right| < \delta. \tag{4.20}$$

para todo $s \geq R_0$, lo que es posible por la propiedad (3.14) de U. Tomamos ahora $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo que $\rho\varepsilon < \varphi - \rho\delta - \pi/2$. Consideramos $r_0 := \text{máx}\{|U(R_0 e^{i\theta})| : |\theta| \leq \varphi)\}$, y fijamos $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > r_0$ y con $|\arg z| < (\pi/(2\rho)) + \varepsilon$, por la elección que hemos hecho de ε se tiene que $|\arg z| < \text{mín}\{\pi, \pi/\rho\}$. Además, como por las propiedades asintóticas de U es claro que

$$d_R = \text{ínf}\{|U(\omega)|, \omega \in \gamma(R, \varphi)\} \to \infty$$

cuando $R \to \infty$, se tiene que existe $R_1 > R_0$ de modo que $|z| < d_{R_1}$. Por otra parte, observamos que la orientación de $\gamma(R_1,\varphi)$ determina una orientación en la curva de Jordan $J(R_1,\varphi) = \{U(\omega) \in \mathbb{C} : \omega \in \gamma(R_1,\varphi)\}$, y en consecuencia esta curva delimita un dominio positivamente orientado $D^+_{R_1}$. Usando (4.20) y razonando igual que en el Teorema 3.15 al describir el domino de U, podemos describir el dominio $D^+_{R_1}$ y asegurar que, como $|z| < d_{R_1}$ y $|\arg z| < \text{mín}\{\pi, \pi/\rho\}$, tenemos que $z \in D^+_{R_1}$.

Por el Teorema 4.10 para $\mu = 0$ se tiene que

$$E_\rho(z,V) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(R,\varphi)} \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} \tag{4.21}$$

porque $|z| < d_R$. Consideramos la curva cerrada orientada positivamente $\eta = \sum_{i=1}^{8} \eta_i$ donde

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \{z \in \mathbb{C} : R_1 \le |z| \le t, \arg z = -\varphi + \rho\delta'\}\\
\eta_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_1, |\arg z| \le \varphi - \rho\delta'\}\\
\eta_3 &= \{z \in \mathbb{C}. R_1 \le |z| \le t, \arg z = \varphi - \rho\delta'\}\\
\eta_4 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = t, \varphi - \rho\delta' \le \arg z \le \varphi + \rho\delta'\}\\
\eta_5 &= \{z \in \mathbb{C} : R \le |z| \le t, \arg z = \varphi + \rho\delta'\}\\
\eta_6 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, |\arg z| \le \varphi + \rho\delta'\}\\
\eta_7 &= \{z \in \mathbb{C} : R \le |z| \le t, \arg z = -\varphi - \rho\delta'\}\\
\eta_8 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = t, -\varphi - \rho\delta' \le \arg z \le -\varphi + \rho\delta'\}
\end{aligned}$$

con $0 < \delta' < \delta$. Observamos que existen $A > 0$ y $c > 0$ tales que

$$\left|\int_{\eta_4} \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} d\omega\right| \le A\int_{-\delta'}^{\delta'} e^{\mathrm{Re}(te^{i(\varphi+\rho\theta)})} d\theta \le A2\delta' e^{-ct} \to 0,$$

cuando $t \to \infty$ y $\delta' \to 0$. Análogamente se comprueba que a lo largo de η_8 la integral tiende a 0 cuando $t \to \infty$ y $\delta' \to 0$. Por otra parte, se puede comprobar fácilmente que

$$\int_{\eta_1,\eta_2,\eta_3} \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} d\omega \to \int_{\gamma(R_1,\varphi)} \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} d\omega, \quad t \to \infty, \quad \delta' \to 0,$$

y de un modo similar

$$\int_{\eta_5,\eta_6,\eta_7} \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} d\omega \to -\int_{\gamma(R_0,\varphi)} \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} d\omega, \quad t \to \infty, \quad \delta' \to 0.$$

En consecuencia, como la función $e^\omega/(U(\omega)-z)$ tiene un polo en el punto $\omega = V(z)$ que está situado en el interior del domino delimitado por η, puesto que, hemos escogido z adecuadamente para ello, aplicando el *Teorema de los Residuos* se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\eta \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} = \mathrm{Res}\left(\frac{e^\omega}{U(z)-\omega}; \omega = V(z)\right).$$

Tomando límites cuando $t \to \infty$ y $\delta' \to 0$ deducimos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(R_1,\varphi)} \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(R_0,\varphi)} \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} + \mathrm{Res}\left(\frac{e^\omega}{U(z)-\omega}; V(z)\right).$$

Para calcular este residuo vemos que

$$\lim_{\omega\to V(z)} \frac{(\omega - V(z))e^\omega}{U(\omega)-z} = \lim_{\omega\to V(z)} \frac{(\omega - V(z))e^\omega}{U(\omega)-U(V(z))} = \frac{e^{V(z)}}{U'(V(z))} = \frac{e^{V(z)}}{[V'(z)]^{-1}},$$

y, por lo tanto,

$$E_\rho(z,V) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(R_0,\varphi)} \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} + V'(z)e^{V(z)}.$$

Observamos que esta igualdad es cierta para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > r_0$ y con $|\arg z| < (\pi/(2\rho)) + \varepsilon$, además para todo z verificando estas condiciones, por la elección de R_0, existe $m > 0$ de modo que

$$\left|\frac{U(\omega)}{z} - 1\right| \geq m \qquad \omega \in \gamma(R_0, \varphi).$$

De estas propiedades deducimos la estimación

$$\int_{\gamma(R_0,\varphi)} e^{\mathrm{Re}(\omega)} d\omega \leq 2\varphi e^{R_0} + 2\frac{e^{R_0 \cos\varphi}}{\cos\varphi} =: M,$$

$$\left|\int_{\gamma(R_0,\varphi)} \frac{e^\omega}{U(\omega)-z} d\omega\right| \leq \int_{\gamma(R_0,\varphi)} \frac{e^{\mathrm{Re}(\omega)}}{|U(\omega)-z|} d\omega \leq \frac{M}{m|z|},$$

lo que nos permite escribir que cuando $|\arg z| < \pi/(2\rho) + \varepsilon$ y $|z| \to \infty$,

$$E_\rho(z,V) = V'(z)e^{V(z)} + O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Por otra parte, tomando $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > r_0$ y tal que $\pi/(2\rho) + \varepsilon \leq |\arg z| < \pi$, se puede proceder de igual forma que el el caso anterior para deducir (4.21). Como en esta ocasión z está fuera del dominio, cuando $|z| \to \infty$, se deduce que

$$E_\rho(z,V) = O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

como queríamos probar. ★

Observación 4.12. Consideramos la identidad

$$\frac{1}{u-1} = \frac{u^n}{u-1} - \sum_{k=0}^{n-1} u^k,$$

válida para todo $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, y la aplicamos a (4.18) para ver que

$$\begin{aligned} E_\rho(z,V) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(R_0,\varphi)} \frac{e^\omega}{z}\frac{1}{(U(\omega)/z-1)}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(R_0,\varphi)} \frac{e^\omega[U(\omega)]^n}{z^n(U(\omega)-z)}d\omega - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(R_0,\varphi)} \frac{e^\omega}{z}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{U(\omega)}{z}\right)^k .d\omega \end{aligned}$$

A partir de la representación integral de $1/\Delta(\lambda)$ dada en (4.2) tenemos que

$$E_\rho(z,V) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(R_0,\varphi)} \frac{e^\omega[U(\omega)]^n}{z^n(U(\omega)-z)}d\omega - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\Delta(-k)z^{k+1}}.$$

Observando que $1/\Delta(0) = 0$ y aplicando técnicas similares a las empleadas para obtener (4.19), cuando $\pi/(2\rho) + \varepsilon \leq |\arg z| < \pi$ y $|z| \to \infty$ vemos que

$$E_\rho(z,V) = -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\Delta(-k)z^{k+1}} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \tag{4.22}$$

lo que nos da un refinamiento de la estimación anterior.

Podemos adaptar estas estimaciones en al caso $\mu \geq 0$ con la siguiente proposición.

Proposición 4.13. Sean $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho > 1/2$, $\gamma > \min\{\pi/\rho, \pi\}$, $\mu \geq 0$ y $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño verificando que $0 < \rho\varepsilon < \pi \min\{1/2, \rho - 1/2\}$ tenemos que cuando $|z| \to \infty$, se cumple la igualdad,

$$E_\rho(z,V,\mu) = \begin{cases} z^{-\mu}V'(z)e^{V(z)} + O\left(\frac{1}{|z|}\right) & \text{si } |\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, \\ O\left(\frac{1}{|z|}\right) & \text{si } \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \leq |\arg z| \leq \pi, \end{cases} \tag{4.23}$$

donde $z^{-\mu} = e^{-\mu(\ln|z| + \arg z)}$ con $\arg z \in [-\pi, \pi)$.

Demostración. La prueba de este resultado es análoga a la de (4.19). ★

Lema 4.14. Sean $\rho(r)$ un orden aproximado con $0 < \rho \leq 1/2$, m el más pequeño de los enteros positivos impares que verifican $m\rho > 1/2$, $\gamma \geq \min\{\pi/\rho, \pi m\}$ y $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$. Consideramos la notación $\nu = (m-1)/2$ y $V_m(\tau) = V(\tau^m)$. Entonces para todo $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$mE_\rho(z,V) = \sum_{n=-\nu}^{\nu} E_{m\rho}\left(z^{1/m}\exp\left(\frac{i2\pi n}{m}\right), V_m, m-1\right), \tag{4.24}$$

donde $z^{1/m} = r^{1/m}\exp(i\theta/m)$, y $|\theta| \leq \pi m$, es decir, los sumandos a la derecha son funciones en la superficie de Riemann de $z^{1/m}$.

Demostración. Por la Observación 3.17 sabemos que $V_m \in \mathfrak{B}(\gamma/m, \rho_m(r))$, donde $\rho_m(r) = m\rho(r^m)$. Si en la definición de $\Delta(\lambda, V)$ realizamos el cambio de variable dado por $t = T^m$ vemos que

$$\Delta(\lambda, V) = \Delta(m\lambda, V_m),$$

para todo $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Por otro lado, de la definición de E_ρ se deduce que

$$E_\rho(\omega^m, V) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{km}}{\Delta(k+1, V)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{km}}{\Delta(m(k+1), V_m)}, \omega \in \mathbb{C}.$$

Mediante un cálculo sencillo se comprueba que

$$S_l := \sum_{n=-\nu}^{\nu} \exp\left(i\frac{2\pi l n}{m}\right) = \begin{cases} m & \text{si } \; l \equiv 0 \mod (m), \\ 0 & \text{si } \; l \not\equiv 0 \mod (m). \end{cases}$$

Esta notación nos permite escribir

$$E_\rho(\omega^m, V) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{S_l \omega^l}{\Delta(l+m, V_m)} = \frac{1}{m}\sum_{n=-\nu}^{\nu}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\omega^l \exp\left(i\frac{2\pi l n}{m}\right)}{\Delta(l+1+m-1, V_m)} =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{n=-\nu}^{\nu} E_{m\rho}\left(\omega e^{i2\pi n/m}, V_m, m-1\right),$$

y por lo tanto la fórmula (4.24) es válida. ★

Proposición 4.15. Sean $\rho(r)$ un orden aproximado con $0 < \rho \leq 1/2$, m el más pequeño de los enteros positivos impares que verifican $m\rho > 1/2$, $\gamma \geq \min\{\pi/\rho, \pi m\}$ y $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$. Consideramos la notación $\nu = (m-1)/2$ y $V_m(\tau) = V(\tau^m)$. Dado $\varepsilon > 0$ con $\rho\varepsilon < \pi \min\{1/2, m\rho - 1/2\}$ se tiene que para δ suficientemente pequeño

$$E_\rho(re^{i\theta}, V) = e^{V(r,\theta)}V'(r,\theta) + o(1), \tag{4.25}$$

cuando $r \to \infty$, uniformemente en $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ como en el enunciado tomamos $R = \varepsilon + \pi/(2\rho)$, cantidad mayor que π porque $\rho \leq 1/2$. Consideramos el conjunto $N_m = \{0, \pm 1, \ldots, \pm\nu\}$ y para cada $n \in N_m$ definimos

$$I_n(R) = \{\theta \in [-\pi, \pi] : |\theta + 2\pi n| \leq R\}.$$

Observamos que se verifica

$$\theta \in I_0(R) \Leftrightarrow |\theta| \leq \pi \quad \text{y} \quad |\theta| < R \Leftrightarrow \theta \in [-\pi, \pi],$$

de modo que $I_0(R) = [-\pi, \pi]$. Si $n \in \mathbb{N}$, veamos que $-\pi \in I_n(R)$:

$$|-\pi + 2\pi n| \leq (2n-1)\pi < \pi/(2\rho) < R.$$

Análogamente, si $-n \in \mathbb{N}$,

$$|\pi + 2\pi n| \leq (2n+1)\pi < \pi/(2\rho) < R,$$

y vemos que $\pi \in I_n(R)$. Esto nos permite afirmar que el sistema de intervalos $\{I_n(R)\}_{n\in\mathbb{N}}$ cubre $[-\pi, \pi]$ y $I_n(R) \neq \emptyset$ para todo $n \in N_m$. Observamos del mismo modo que dados $r > 0$, $n \in N_m$ y $\theta \in I_n(R)$, el par $(r, \theta+2\pi n) \in L(\gamma)$, que es el dominio de definición de V, puesto que se tiene que $|\theta + 2\pi n| \leq R < \text{mín}\{\pi/\rho, \pi m\} \leq \gamma$.

Por otro, lado usando las igualdades (4.23) y (4.24), tenemos el siguiente desarrollo para todo $re^{i\theta}$ cuando $r \to \infty$:

$$E_\rho(re^{i\theta}, V) = \sum_{n=-\nu}^{\nu} F_n(z_n), \qquad z_n := r^{1/m} e^{i(\theta+2\pi n)/m},$$

donde

$$F_n(z_n) = \begin{cases} \frac{V_m'(z_n)e^{V_m(z_n)}}{m z_n^{m-1}} + O\left(\frac{1}{r^{1/m}}\right) & \text{si } \theta \in I_n(R), \\ O\left(\frac{1}{r^{1/m}}\right) & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi] \backslash I_n(R). \end{cases}$$

Por la definición de V_m y tomando $\alpha := \text{mín}\{\pi, \pi/m\rho\} \leq \gamma/m$ tenemos que para todo $z \in L(\alpha)$

$$V_m(z) = V(|z|^m, m \arg z), \quad V_m'(z) = m z^{m-1} V'(|z|^m, m \arg z).$$

Consecuentemente, se verifica la siguiente fórmula cuando $|z| \to \infty$

$$F_n(z_n) = \begin{cases} V'(r, \theta + 2\pi n) e^{V(r, \theta+2\pi n)} + O\left(\frac{1}{r^{1/m}}\right), & \text{si } \theta \in I_n(R), \\ O\left(\frac{1}{r^{1/m}}\right) & \text{si } \theta \in [-\pi, \pi] \backslash I_n(R). \end{cases}$$

Buscamos ahora el término principal del desarrollo asintótico de $E_\rho(z, V)$ en un intervalo de la forma $[-\pi + \delta, \pi + \delta]$ con $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Para $n \in N_m \backslash \{0\}$, aplicando la propiedad (1) de los elementos de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ y (3.11) vemos que

$$\Psi_n(\theta) := \lim_{r\to\infty} \frac{\text{Re}[V(r, \theta + 2\pi n) - V(r, \theta)]}{V(r)} = \cos \rho(\theta + 2\pi n) - \cos \rho\theta,$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V'(r, \theta + 2\pi n)}{V'(r, \theta)} = \lim_{r\to\infty} \frac{rV'(r, \theta + 2\pi n)}{V(r)} \frac{V(r)}{rV'(r, \theta)} = \frac{\rho e^{i(\rho-1)(\theta+2\pi n)}}{\rho e^{i(\rho-1)\theta}} = 1,$$

en ambos casos con convergencia uniforme en $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$. Por la elección que hemos hecho de m, para todo $n \in N_m \backslash \{0\}$ se tiene que

$$0 < |n|\rho \leq \frac{m-1}{2}\rho \leq \frac{\rho(m-2)+\rho}{2} < \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Fijado $\delta > 0$, para todo $n \in N_m \backslash \{0\}$, aplicando la desigualdad anterior vemos que

$$\operatorname{sen}(\rho(\theta+\pi n))\operatorname{sen}(\rho\pi n) > 0, \qquad \theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta].$$

Por otra parte, aplicando fórmulas trigonométricas vemos que

$$\Psi_n(\theta) = -2\operatorname{sen}(\rho(\theta+\pi n))\operatorname{sen}(\rho\pi n).$$

Consecuentemente, observamos que $\Psi_n(\theta) < 0$ para todo $n \in N_m \backslash \{0\}$ y todo $\theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$, lo que nos permite afirmar que

$$\exp\left(V(r)\Psi_n(\theta)\right) \to 0, \quad \text{cuando} \quad r \to \infty, \quad n \in N_m \backslash \{0\},$$

uniformemente en $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$. Comparando el desarrollo de $E_\rho(re^{i\theta}, V)$ en $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$ con $V'(r,\theta)e^{V(r,\theta)}$ deducimos que

$$E_\rho(re^{i\theta}, V) = e^{V(r,\theta)}V'(r,\theta) + o(1),$$

cuando $r \to \infty$, uniformemente en $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$. ★

4.5. La función indicatriz de $E_\rho(z, V)$

Notación 4.16. Dado $E_\rho(z, V)$, denotamos por h_E su función indicatriz generalizada y consideramos también $h_E^+ := \max\{h_E, 0\}$.

Teorema 4.17. Sean $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho > 0$ y V un elemento de $\in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$. Considerando la notación dada en (2.12), tenemos que:

(1) Para todo $\rho > 0$ tenemos que

$$h_E^+(\theta) = \Phi_\rho(e^{i\theta}), \qquad \theta \in [-\pi, \pi].$$

(2) Si $\rho > 1$, entonces $h_E(\theta) = h_E^+(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

(3) Si $\rho \leq 1/2$, entonces $h_E(\theta) = \cos(\rho\theta)$, para todo $|\theta| \leq \pi$.

(4) Si $1/2 < \rho \leq 1$ y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/\Delta(-k) \neq 0$, entonces $h_E(\theta) = h_E^+(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Demostración. (1) Supongamos en primer lugar que $\rho > 1/2$ y sea $\theta \in [-\pi, \pi]$. Si $\pi/(2\rho) < |\theta| \leq \pi$, sabemos que $\Phi_\rho(e^{i\theta}) = 0$. Por otra parte, por (4.19) sabemos que dado $\varepsilon > 0$ con $\pi/(2\rho) + \varepsilon < |\theta|$, existe $R > 0$ suficientemente grande de modo que si $r > R$,

$$E_\rho(re^{i\theta}, V) = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Observamos que para r suficientemente grande, y una constante $M > 0$ adecuada,

$$\frac{\ln|E_\rho(re^{i\theta}, V)|}{r^{\rho(r)}} \leq \frac{\ln(M/r)}{r^{\rho(r)}} \leq 0,$$

y por lo tanto,

$$h_E(\theta) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|E_\rho(re^{i\theta}, V)|}{r^{\rho(r)}} \leq 0.$$

En consecuencia, $h_E^+(\theta) = 0 = \Phi_\rho(e^{i\theta})$. En el caso en que $|\theta| \leq \pi/(2\rho)$, a partir de (3.11) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \left| \frac{O\left(\frac{1}{r}\right)}{V'(re^{i\theta})e^{V(re^{i\theta})}} \right| &= \lim_{r\to\infty} \frac{\left|O\left(\frac{1}{r}\right)\right|}{\frac{r|V'(re^{i\theta})|}{V(r)} \frac{V(r)}{r} e^{\mathrm{Re}(V(re^{i\theta}))}} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{|O(1)|}{\frac{r|V'(re^{i\theta})|}{V(r)} V(r) e^{\mathrm{Re}(V(re^{i\theta}))}} = 0.
\end{aligned}$$

y también

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\left|V'(re^{i\theta})\right|}{r^{\rho(r)}} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\left|\frac{rV'(re^{i\theta})}{V(r)} r^{\rho(r)-1}\right|}{r^{\rho(r)}}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left(\frac{\ln\left|\frac{rV'(re^{i\theta})}{V(r)}\right|}{r^{\rho(r)}} + \frac{(\rho(r)-1)\ln r}{r^{\rho(r)}} \right) = 0 + 0 = 0.$$

Usando de nuevo (4.19) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
h_E(\theta) &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|E_\rho(re^{i\theta},V)|}{r^{\rho(r)}} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\left|V'(re^{i\theta})e^{V(re^{i\theta})} + O\left(\frac{1}{r}\right)\right|}{r^{\rho(r)}} \\
&= \limsup_{r\to\infty} \left(\frac{\ln\left|V'(re^{i\theta})e^{V(re^{i\theta})}\right|}{r^{\rho(r)}} + \frac{\ln\left|\frac{V'(re^{i\theta})e^{V(re^{i\theta})}+O(1/r)}{V'(re^{i\theta})e^{V(re^{i\theta})}}\right|}{r^{\rho(r)}} \right) \\
&= \limsup_{r\to\infty} \left(\frac{\ln\left|V'(re^{i\theta})\right|}{r^{\rho(r)}} + \frac{\operatorname{Re}(V(re^{i\theta}))}{V(r)} + \frac{\ln\left|1+\frac{O(1/r)}{V'(re^{i\theta})e^{V(re^{i\theta})}}\right|}{r^{\rho(r)}} \right) \\
&= 0 + \cos(\rho\theta) + 0 = \cos(\rho\theta) = \Phi_\rho(e^{i\theta}).
\end{aligned}
$$

Como $|\theta| \le \pi/(2\rho)$, $\cos\rho\theta \ge 0$ y por lo tanto $h_E^+(\theta) = h_E(\theta) = \Phi_\rho(e^{i\theta})$ para todo $\theta \in [-\pi,\pi]$. Cuando $\rho \le 1/2$ la demostración es análoga, usando la igualdad (4.25) en lugar de emplear (4.19).

(2) Como $\rho > 1$ tenemos que $\gamma_\rho = \pi/(2\rho)$, por (1) sabemos que $h_E(\theta) \le 0$ cuando $\gamma_\rho \le |\theta| \le \pi$ y que $h_E(\theta) = h_E^+(\theta) = \Phi_\rho(e^{i\theta}) > 0$ cuando $|\theta| < \gamma_\rho$.

Por otra parte, como h_E es una función 2π-periódica (Teorema 2.33), la longitud de las componentes conexas de $\{\theta \in \mathbb{R} : h_E(\theta) \le 0\}$ es $l = 2\pi(1-1/(2\rho))$, y como $\rho > 1$ se tiene que $l > \pi > \pi/\rho$. En consecuencia, de nuevo por el Teorema 2.33 tenemos que $h_E(\theta) = 0$ para todo $\pi/(2\rho) \le |\theta| \le \pi$, lo que nos permite concluir que $h_E(\theta) = h_E^+(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

(3) Si $\rho \le 1/2$ tenemos que $\gamma_\rho = \pi$ y en consecuencia, por (1),

$$h_E^+(\theta) = \Phi_\rho(e^{i\theta}) = \cos(\rho\theta) \ge 0,$$

cuando $|\theta| \le \pi$, y $h_E(\theta) = \cos(\rho\theta)$.

(4) Cuando $|\theta| \le \pi/(2\rho)$, por (1) sabemos que $h_E^+(\theta) = \Phi_\rho(e^{i\theta}) = \cos\rho\theta \ge 0$ y por lo tanto, $h_E^+(\theta) = h_E(\theta)$. Si $\pi/(2\rho) < |\theta| \le \pi$, sea l el inferior de los $k \in \mathbb{N}$ verificando $1/\Delta(-k) \ne 0$. Tomamos $n = l+1$, y aplicando

(4.22) vemos que

$$h_E(\theta) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|E_\rho(re^{i\theta},V)|}{r^{\rho(r)}} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\left|\frac{-1}{\Delta(-l)(re^{i\theta})^{l+1}} + O\left(\frac{1}{r^{l+2}}\right)\right|}{r^{\rho(r)}}$$

$$= \limsup_{r\to\infty}\left(\frac{\ln\left|-1/(\Delta(-l)(re^{i\theta})^{l+1})\right|}{r^{\rho(r)}} + \frac{\ln\left|1-\Delta(-l)(re^{i\theta})^{l+1}O\left(1/r^{l+2}\right)\right|}{r^{\rho(r)}}\right)$$

$$= \limsup_{r\to\infty}\left(\frac{\ln|1/\Delta(-l)|}{r^{\rho(r)}} + \frac{-(l+1)\ln r}{r^{\rho(r)}} + \frac{\ln\left|1+\Delta(-l)e^{i\theta(l+1)}O\left(1/r\right)\right|}{r^{\rho(r)}}\right)$$

$$= 0+0+0 = h_E^+(\theta).$$

Por lo tanto, $h_E^+(\theta) = h_E(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

★

5. Transformadas de Borel y Laplace generalizadas

Los operadores integrales de Borel y Laplace clásicos se usan en varios campos de las matemáticas, y por ello, se pueden encontrar definidos y estudiados en muchos textos como en libro de P. Henrici [12]. En este capítulo vamos a usar el trabajo realizado en los anteriores para definir las transformadas de Borel y Laplace generalizadas para cada función V de $\mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, que denominaremos V-transformadas. En la primera sección de este capítulo, vamos a ver que la V-transformada de Borel es un isomorfismo entre las funciones cuyo crecimiento está limitado por $V(r)$, y las funciones holomorfas en un entorno de ∞ que se anulan en dicho punto (Proposición 5.5). Por otro lado, en el Teorema 5.9 de esta misma sección, se dará una representación integral de la V-transformada cuando nos restringimos a una subclase de funciones. Finalmente, en la Sección 5.2 vamos a construir la generalización del Teorema I de la introducción para funciones enteras de un orden aproximado dado con función indicatriz no negativa.

5.1. Transformada de Borel generalizada y representación integral

Definición 5.1. Supongamos $\rho > 0$, $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$. Sea $\mathfrak{M}_\rho(V)$ la clase de funciones enteras f tales que existen $M(f), m(f) > 0$ de modo que

$$|f(z)| \leq M(f) \exp(m(f)V(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.1}$$

Observación 5.2. La clase $\mathfrak{M}_\rho(V)$ que acabamos de definir en globa a todas aquellas funciones cuyo tipo σ_f, para el orden aproximado $\ln V(r)/\ln r$, es o minimal o normal.

Definición 5.3. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho(r) \to \rho > 0$ cuando $r \to \infty$, sea $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ y tomamos $f \in \mathfrak{M}_\rho(V)$. Si escribimos

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Delta(k+1)} z^k,$$

la *V-transformada de Borel* de f se define por

$$F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{w^{k+1}}.$$

Notación 5.4. Denotamos por $H_0(\infty)$ la clase de funciones holomorfas en un entorno de ∞ que se anulan en ∞, es decir, son aquellas funciones $F(w)$ tales que la función $G(\omega) = F(1/\omega)$ es holomorfa en un entorno de $\omega = 0$ y tales que verifican que $G(0) = 0$.

El siguiente resultado es análogo al conocido como *teorema de Borel.*

Proposición 5.5. Sea $\rho(r)$ un orden aporximado con $\rho > 0$ y sea $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, entonces el operador

$$\nu : \mathfrak{M}_\rho(V) \to H_0(\infty), \quad \nu(f) = F,$$

es un isomorfismo.

Demostración. En primer lugar vamos a mostrar que f satisface (5.1) para $m := m(f)$ si, y sólo si, la serie F converge para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > m^{1/\rho}$.

Tenemos que f satisface (5.1) para m si, y sólo si, $m \geq \sigma_f$, es decir, si, y sólo si, por el Teorema 1.31, se verifica que

$$\limsup_{k\to\infty} U(k) \sqrt[k]{\frac{|a_k|}{\Delta(k+1)}} \leq (me\rho)^{1/\rho}, \tag{5.2}$$

donde $U(t) = r$ es la inversa de $V(r) = t$. Por otra parte, F converge para todo $|w| > m^{1/\rho}$ si, y sólo si, aplicando la fórmula del radio de convergencia, se tiene que

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq m^{1/\rho}. \tag{5.3}$$

Utilizamos ahora la equivalencia (4.17) para $\mu = 0$, probada en la demostración del Teorema 4.9, que nos permite afirmar que cuando $\lambda \to \infty$,

$$\sqrt[\lambda]{\Delta(\lambda+1)} \sim U(\lambda)(e\rho)^{-1/\rho}.$$

Aplicando esta equivalencia vemos que (5.2) y (5.3) son equivalentes, con lo que nos permite comprobar la correspondiente equivalencia entre f y F. Esta última equivalencia nos permite afirmar que ν está bien definida y que es biyectiva. La linealidad de ν se deduce de manera directa de la definición. ★

Nuestro siguiente objetivo es dar una representación integral de las V-transformadas de Borel. Esta representación no se puede dar con una única expresión para todas las fuciones de $\mathfrak{M}_\rho(V)$ y, en consecuencia, para describirla es necesario considerar las subclases, relacionadas con el crecimiento en cada semirrecta que parte del origen, definidas a continuación.

Notación 5.6. Sea P_ρ^+ la clase de funciones finitas, 2π-periódicas, no negativas y trigonométricamente ρ-convexas. Dada $h \in P_\rho^+$ consideramos la clase $P_\rho(V, h)$ de funciones enteras f tales que para todo $\varepsilon > 0$ existe $A = A(\varepsilon, f) > 0$ verificando

$$|f(re^{i\theta})| \leq A \exp((h(\theta) + \varepsilon)V(r)), \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C},$$

donde $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ con $\rho(r)$ un orden aproximado.

Observación 5.7. Recordamos que si $h \in P_\rho^+$, considerando la función Φ_ρ descrita en (2.12), sabemos, por el Teorema 2.55, que el conjunto

$$X_h = \{z \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(ze^{i\theta}) \leq h(\theta),\, \theta \in \mathbb{R}\}, \tag{5.4}$$

es el único conjunto compacto ρ-convexo que tiene a h como su función de ρ-soporte.

Observación 5.8. Si $h \in P_\rho^+$ y si $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ con $\rho(r)$ un orden aproximado,

como las constantes positivas pertenecen a P_ρ^+ y como las funciones de P_ρ^+ están acotadas, se verifica que

$$\mathfrak{M}_\rho(V) = \bigcup_{h \in P_\rho^+} P_\rho(V, h).$$

Esta igualdad permite restringirnos a estudiar la representación integral de las V-transformadas de Borel de funciones enteras pertenecientes a $P_\rho(V, h)$.

Teorema 5.9. Sean $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho > 0$, $h \in P_\rho^+$ y $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, donde $\gamma \geq \gamma_\rho$. Para todos $\theta \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ denotamos por $D_\rho(\theta, b) = \{w \in \mathbb{C} : \Phi_\rho(we^{i\theta}) > b\}$. Si $f \in P_\rho(V, h)$, entonces para todo $\theta \in \mathbb{R}$ la función

$$F_\theta(w) = \rho \int_0^{\infty(\arg z = \theta)} \exp(-V(wz)) f(z) dz$$

es holomorfa en $D_\rho(\theta, h(\theta))$. Además el conjunto de funciones $\{F_\theta(w)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ determina la prolongación analítica de la V-transformada de Borel F de f al complementario del conjunto compacto ρ-convexo X_h.

Demostración. En primer lugar, vemos que el integrando está bien definido, puesto que si $\arg z = \theta$ y $w \in D_\rho(\theta, h(\theta))$ tenemos que $\Phi_\rho(zw) > h(\theta) \geq 0$, lo que, por la definición de Φ_ρ, es sólo posible si $|\arg(zw)| < \gamma_\rho$, es decir, si $zw \in L(\gamma_\rho) \subseteq L(\gamma)$. En consecuencia, $V(zw)$ está bien definida y el integrando también.

En segundo lugar, para probar la holomorfía de F_θ, tomamos K compacto de $D_\rho(\theta, h(\theta))$. Dados $w = re^{i\varphi} \in K$ y $z = te^{i\theta}$ y dado $\varepsilon > 0$, tenemos por (3.14), tomando $W = t$ y $Z = we^{i\theta}$, que existe $t_\varepsilon > 0$ tal que para todo $t > t_\varepsilon$ se tiene que

$$\mathrm{Re}(V(tre^{i(\varphi+\theta)})) > \mathrm{Re}(V(t) r^\rho [e^{i\rho(\varphi+\theta)} - \varepsilon]) = V(t) r^\rho [\cos(\rho(\varphi + \theta)) - \varepsilon].$$

La compacidad de K nos permite tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de forma que $[h(\theta) - \Phi(we^{i\theta}) + 2\varepsilon] \leq -c < 0$. En consecuencia, usando que $f \in P_\rho(V, h)$, concluimos que F_θ converge uniformemente en K, y por tanto, define una función holomorfa en $D_\rho(\theta, h)$.

Por otra parte, dados $w \in D_\rho(\theta, h)$, $z = te^{i\theta}$ y utilizando el desarrollo en serie de f y la convergencia de la integral tenemos que

$$\begin{aligned} F_\theta(w) &= \rho \int_0^{\infty(\arg z = \theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \exp(-V(wz))}{\Delta(k+1)} z^k dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\Delta(k+1)} \int_0^{\infty(\arg z=\theta)} \exp(-V(wz)) z^k dz \right). \end{aligned}$$

Observamos ahora que si $\arg w = -\theta$ y $|w|^\rho > h(\theta)$ se tiene que $w \in D_\rho(\theta, h)$, y en consecuencia, tomando w de este modo se tiene que

$$F_\theta(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\Delta(k+1)} \int_0^{\infty} \exp(-V(t)) \frac{t^k}{w^k} \frac{dt}{w} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{w^{k+1}} = F(w).$$

Por lo tanto, $F_\theta(w) \equiv F(w)$ para todo w con $\arg w = -\theta$ y $|w|^\rho > h(\theta)$ y podemos afirmar que F_θ es una prolongación analítica de F en $D_\rho(\theta, h)$. Por otro lado, teniendo en cuenta que X_h es un conjunto estrellado (por ser ρ-convexo) y compacto, que su complementario

$$\mathbb{C} \backslash X_h = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} D_\rho(\theta, h(\theta)) \tag{5.5}$$

es un dominio simplemente conexo de la esfera de Riemann y, basta aplicar el *Teorema de Monodromía* para concluir que F admite una prolongación analítica en $\mathbb{C} \backslash X_h$. ★

5.2. Teorema de Polya-Martineau-Ehrenpreis generalizado

De forma análoga al caso clásico es posible dar una fórmula integral de inversión que relaciona f y su V-transformada de Borel F. En concreto, si $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ y γ satisfacen las condiciones del Teorema 4.3 se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma E_\rho(zw, V) F(w) dw, \tag{5.6}$$

donde Γ es una curva de Jordan positivamente orientada rectificable que rodea las singularidades de F. La demostración de esta fórmula es análoga a la demostración en el caso clásico $V(t) = t$, $\rho = 1$, $E_\rho(w, V) = e^w$. (Ver [2, Cap. 5] y [8, Caps. 24, 25])

Para establecer el análogo al Teorema de Polya-Martineau-Ehrenpreis (Teorema I), vamos a probar previamente el siguiente resultado.

Teorema 5.10. Sea $\rho(r)$ un orden aproximado con $\rho > 0$, supongamos que K es un conjunto compacto ρ-convexo con $h := h_K$ su función de ρ-soporte (ver Definición 2.47), y sean $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$, $f \in \mathfrak{M}_\rho(V)$. Si la V-transformada de Borel de f admite una prolongación analítica al complementario de K, entonces $f \in P_\rho(V, h)$.

Demostración. Sabemos que al ser K un conjunto compacto ρ-convexo, su función de ρ-soporte es una función finita, no negativa, 2π-periódica y trigonométricamente ρ-convexa (ver Teoremas 2.53 y 2.55), y por tanto, para todo $\varepsilon > 0$, la función $h + \varepsilon$ también lo es. En consecuencia el conjunto $K_\varepsilon = X_{h+\varepsilon}$ es un compacto ρ-convexo. Observamos que la familia $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ tiene las siguientes propiedades:

(A) $\cap_{\varepsilon>0} K_\varepsilon = K$,

(B) $K_{\varepsilon_1} \subseteq K_{\varepsilon_2}$ si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$,

(C) $0 \in \mathrm{int}(K_\varepsilon)$.

Esta última propiedad se verifica porque $0 \in K$ y porque Φ_ρ es continua. Observamos también que dado $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon' > 0$ suficientemente pequeños de modo que

$$\varepsilon + \varepsilon' \max\{|w|^\rho : w \in K_\varepsilon\} < \delta. \tag{5.7}$$

Por el Teorema 4.17 sabemos que $h_E^+(\theta) = \Phi_\rho(e^{i\theta})$. Así pues, para todo $\gamma > 0$, existe una constante $A_{\varepsilon'}$ tal que

$$|E_\rho(z, V)| < A_{\varepsilon'} \exp\left(V(|z|)[\Phi_\rho(e^{i \arg z}) + \varepsilon']\right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Por la propiedad (C) sabemos que $0 \notin \partial K_\varepsilon$. Consecuentemente, si $w \in \partial K_\varepsilon$ tenemos que $|w| \in (0, \infty)$ y por la Propiedad 1.28 sabemos que cuando $r \to \infty$ podemos escribir $V(r|w|) = V(r)|w|^\rho(1 + o(1))$ uniformemente en ∂K_ε. Juntando este hecho con la desigualdad anterior, para $z = wre^{i\theta}$ sabemos que

$$|E_\rho(re^{i\theta}w, V)| < A_\gamma \exp\Big(V(r)[\Phi_\rho(we^{i\theta}) + \gamma|w|^\rho](1 + o(1))\Big), \forall r > R, \tag{5.8}$$

para todo $w \in \partial K_\varepsilon$ y para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Como F se prolonga analíticamente al complementario del compacto K podemos tomar como curva Γ en (5.6) la curva que describe ∂K_ε. De esta fórmula de inversión, usando (5.7), deducimos que

$$|f(re^{i\theta})| < C \exp\left(V(r)[h(\theta) + \delta](1 + o(1))\right) \tag{5.9}$$

para r suficientemente grande, lo que nos permite concluir que $f \in P_\rho(V, h)$. ★

Antes de demostrar la generalización del Teorema de Polya-Martineau-Ehrenpreis, vamos a recordar algunos conceptos necesarios para enunciarlo.

Definición 5.11. Sea $H(\mathbb{C})$ el espacio de las funciones enteras, en el que consideramos la topología de la convergencia uniforme en los compactos.

Diremos que $\eta : H(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ es un *funcional analítico* si es una aplicación lineal y continua. Con la misma notación, diremos que un compacto $K \subseteq \mathbb{C}$ *determina* η, si para todo entorno Ω de K existe una constante C_Ω tal que

$$|\eta(\varphi)| \leq C_\Omega \sup\{|\varphi(z)| : z \in \Omega\}, \qquad \varphi \in H(\mathbb{C}).$$

Denotamos por $\mathfrak{L}(\eta)$ la clase de todos los compactos que determinan η. Normalmente consideraremos subclases de elementos de $\mathfrak{L}(\eta)$ que cumplen una cierta propiedad, como por ejemplo la convexidad. Dado un elemento $K \in \mathfrak{L}(\eta)$, o de una subclase, decimos que es un *soporte de* η si es minimal en $\mathfrak{L}(\eta)$, o en la subclase, para la inclusión.

Por último, dada $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho(r))$ y dado un funcional analítico η podemos considerar una función compleja $L_{V,\eta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que denominaremos la *$V$-transformada de Laplace del funcional*, y que viene dada por la siguiente expresión

$$L_{V,\eta}(z) = \eta(E_\rho(zw, V)).$$

Teorema 5.12. Supongamos que $\rho > 0$, $V \in B(\gamma, \rho(r))$, $h \in P_\rho^+$. Supongamos que $f \in \mathfrak{M}_\rho(V)$ es una función entera de orden aproximado $\ln V(r)/\ln r$ y con función indicatriz h_f. Sea $h(\theta) = \text{máx}\{0, h_f(\theta)\}$, y sea K su diagrama conjugado, es decir, el más pequeño de entre todos los conjuntos compactos ρ-convexos Q tales que la V-transformada de Borel de f se extiende analíticamente al complementario de Q. Entonces:

(1) El diagrama indicador de f, X_h (ver (2.17)), coincide con K.

(2) Existe un funcional analítico η tal que para su V-transformada de Laplace tenemos que

$$\eta[E_\rho(zw, V)] = f(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5.10}$$

y X_h es el soporte ρ-convexo de η.

Demostración. (1) Aplicando el Teorema 5.9, sabemos que $K \subseteq X_h$, puesto que $f \in P_\rho(V, h)$. Sea h_K la función de ρ-soporte de K, por el Teorema 2.55 sabemos que $h_K \in P_\rho^+$, y por el Teorema 5.10, sabemos que $f \in P_\rho(V, h_K)$. De este hecho se deduce que $h_f \leq h_K$ y como $h_K \geq 0$ podemos afirmar que $h \leq h_K$ y concluimos que $X_h \subseteq K$, y por tanto, $X_h = K$.

(2) Si $H(\mathbb{C})$ es el conjunto de todas las funciones enteras, consideramos el funcional

$$\eta[G] = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma G(w)F(w)dw,$$

donde Γ es una curva de Jordan positivamente orientada rectificable que rodea las singularidades de F. La fórmula de inversión (5.6) nos permite afirmar que se verifica (5.10).

Por otro lado, consideramos la familia de $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de compactos ρ-convexos descritos en la demostración del Teorema 5.10. Por el Teorema 2.55, y por la igualdad $K = X_h$ que acabamos de probar sabemos que h es la función de ρ-soporte de K (ver Definición 2.47). Este hecho, junto con la continuidad de $\Phi_\rho(ze^{i\theta})$, nos permite afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, $K \subseteq \operatorname{int} K_\varepsilon$, y podemos tomar como en la demotración del teorema anterior $\Gamma = \partial K_\varepsilon$ y deducir a partir de la definición de η que

$$|\eta[G]| \leq A_{K_\varepsilon} \sup\{|G(w)| : w \in K_\varepsilon\}.$$

Esta desigualdad nos permite afirmar que K determina η y consecuentemente, el soporte de η está contenido en K.

Por otra parte, si $L \subseteq K$ es un conjunto compacto ρ-convexo que determina η, denotamos por h_L su función de ρ-soporte. Consideramos una familia de $\{L_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de compactos que recubren L con $\cap_{\varepsilon>0} L_\varepsilon = L$, $L_{\varepsilon_1} \subseteq L_{\varepsilon_2}$ si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ y $L \subseteq \operatorname{int} L_\varepsilon$. Como L que determina η, tomando $G = E_\rho(zw, V)$ para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$|f(z)| = |\eta[E_\rho(zw, V)]| \leq C_\varepsilon \sup\{|E_\rho(zw, V)| : w \in L_\varepsilon\},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Dado $\delta > 0$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon' > 0$ como en el teorema anterior, también podemos considerar la estimación (5.8), y recordando que como E_ρ es holomorfa alcanza su máximo sobre ∂L_ε, tenemos que

$$|f(re^{i\theta})| \leq C_\varepsilon A_{\varepsilon'} \sup_{w \in \partial L_\varepsilon} \{\exp\Big(V(r)[\Phi_\rho(we^{i\theta}) + \varepsilon' |w|^\rho](1 + o(1))\Big)\}$$

para todo $r > R$. De la continuidad de Φ_ρ, como $h_L(\theta) = \sup\{\Phi_\rho(we^{i\theta}) : w \in L\}$, deducimos que $f \in P_\rho(V, h_L)$. Consecuentemente $h \leq h_L$, y tenemos que $X_h \subseteq L \subseteq K = X_h$, es decir, que deducimos que X_h es el soporte ρ-convexo de η.

★

A. Apéndice

La mayoría de los resultado que aquí se recogen son clásicos y se han excluido del cuerpo del texto porque las técnicas empleadas en la prueba de los mismos no guardan relación con el resto de técnicas usadas a lo largo de la memoria.

En primer lugar, vamos a introducir brevemente la notación y algunas propiedades básicas de la integral de Stieltjes. Hemos hecho uso de este concepto a la hora de demostrar varios resultados de la Sección 1.3.

Definición A.1. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$ con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, denotamos por $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces, dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, denotamos por

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i, \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i, \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

y tomando el superior y el inferior de entre todas las posibles particiones $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ denotamos por

$$\int_a^{\bar{b}} f(t) d\alpha(t) = \sup_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha),$$
$$\int_{\overline{a}}^{b} f(t) d\alpha(t) = \inf_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Si ambos valores coinciden decimos que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ y denotamos dicho valor por

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t)$$

y lo denominamos *integral de Stieltjes de f con respecto a α en* $[a, b]$.

Observación A.2. Si la función $\alpha(t)$ es derivable con continuidad se verifica la siguiente igualdad entre la integral de Stieltjes y la integral de Riemann clásica,

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) = \int_a^b f(t) \alpha'(t) dt.$$

Observación A.3. La integral de Stieltjes verifica la mayor parte de las propiedades básicas que tiene la integral de Riemann clásica. Para encotrar más información sobre estos resultados ver [32, p.120-142] y [1, Cap. 7, p.140-p.182]. Destacamos aquí el enunciado que nos da la fórmula de integración por partes que se ha usado en varias demostraciones.

Teorema A.4. *(Integración por partes Stieltjes)* Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Si $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,b]$, entonces $\alpha \in \Re(f)$ en $[a,b]$ y tenemos que

$$\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Recordamos ahora un resultado clásico del cálculo de integrales mediante el uso de residuos que hemos empleado en la demostración del Teorema 1.44 para la construcción de una función holomorfa a partir de un orden aproximado dado en el caso $\rho > 0$ no entero. La prueba de este resultado la podemos encontrar en [29, Cap. 4].

Propiedad A.5. Supongamos que

(1) P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes y λ un número no entero.

(2) $\lambda > -1$ y grado(Q) >grado$(P) + \lambda + 1$.

(3) $Q(x) \neq 0$ para todo $x \geq 0$.

En estas condiciones, si $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ es el conjunto de ceros del polinomio Q se verifica que

$$\int_0^\infty x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2i\pi\lambda}} \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \exp(\lambda \log_0 z), z_j\right)$$

donde $\log_0 z = \ln|z| + i \arg z$ con $\arg z \in [0, 2\pi)$.

Teorema A.6. (Teorema de Phragmén-Lindelöf) {Ver [23, p.214-218; p.270-271]} Sea $\rho > 0$, sea f una función entera de orden ρ, sea G el interior de una región angular de amplitud $\alpha\pi$ radianes con $\alpha < 1/\rho$, con borde Γ. Si $|f(z)| \leq M < \infty$ en Γ, entonces,

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in G.$$

A continuación se presentan dos lemas sobre las funciones convexas y cóncavas, cuya demostración requiere un pequeño cálculo elemental, y que hemos usado para demostrar el Teorema 3.6.

Lema A.7. Sean f_1 y f_2 dos funciones positivas monótonas crecientes y estrictamente convexas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Entonces $f_1(x)f_2(x)$ también es del mismo tipo.

Lema A.8. Sea $f(x)$ una función derivable. Si la derivada $f'(x)$ es continua y monótona decreciente en un intervalo (a, b), entonces f es cóncava. Si, además, $f'(x)$ es monótona estrictamente decreciente, entonces f es estictamente cóncava.

En el Teorema 3.6, también hemos usado este resultado de convexidad cuya prueba podemos encontrar en el libro de A.S.B. Holland [13, Cap. 1].

Teorema A.9. (Teorema de los tres círculos de Hadamard) Sea $f(z)$ una función analítica en $R_1 < |z| < R_2$ y continua en $|z| = R_1$ y $|z| = R_2$, entonces la función $\ln M_f(r)$ es una función convexa del $\ln r$ en (R_1, R_2), es decir, que para cada $R_1 < r_1 < r_2 < r_3 < R_2$ tenemos que

$$\ln M_f(r_2) \leq \ln M_f(r_1)\frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} + \ln M_f(r_3)\frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1}.$$

Referencias

[1] T. M. Apóstol. *Mathematical Analysis.* Second Edition, Addison-Wesley, (1981).

[2] W. Balser. *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations.* Springer, (2000).

[3] W. Balser, M. Yoshino. *Gevrey order of formal power series solutions of inhomogeneous partial differential equations with constant coefficients.* Funkcialaj Ekvac, **53**: 411–434, (2010).

[4] V. Bernstein. *Sulla crecenza delle transcendenti intere d'ordine finito.* Mem.Accad.Ital.Mat., **4**: 339–401, (1933).

[5] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable.* Second Edition, Springer, (1978).

[6] L. Di Vizio, J. P. Ramis, J. Sauloy, C. Zhang. *Équations aux q-différences.* Gaz. Math., **96**: 20–49, (2003).

[7] L. Di Vizio, C. Zhang. *On q-summation and confluence.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **59**(1): 347–392, (2009).

[8] G. Doetsch. *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation.* Springer, (1974).

[9] M. M. Dzhrbashyan. *Integral transforms and representations of functions in the complex form.* Nauka (Moscow), (1966).

[10] L. Ehrenpreis. *Fourier analysis in several complex variables.* Pure Appl. Math. vol.17, Wiley-Interscience Publishers, New York etc., (1970).

[11] A.A. Goldberg and I.V. Ostrovskii. *Value Distribution of Meromorphic Functions.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1991).

[12] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis, Volume II.* Wiley-Interscience Publishers, New York etc., (1977).

[13] A.S.B. Holland. *Introduction to the theory of entire functions.* Academic Press, INC., New York and London, (1973).

[14] G. K. Immink *Exact asymptotics of nonlinear difference equations with levels 1 and* 1^+. Ann. Fac. Sci. Toulouse T. XVII, **2**: 309–356, (2008).

[15] S. Lang. *Complex Analysis.* Fourth Edition, Springer, (1999).

[16] A. Lastra, J. Sanz. *Quasi-analyticity in Carleman ultraholomorphic classes.* Annales Inst. Fourier, **60**: 1629–1648, (2010).

[17] A. Lastra, J. Sanz. *Extension operators in Carleman ultraholomorphic classes.* J. Math. Anal. Appl., **372**(1): 287–305, (2010).

[18] B.Ya. Levin. *Distribution of zeros of entire functions.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1980).

[19] L.S. Maergoiz. *Indicator diagram and generalized Borel-Laplace transforms for entire functions of a given proximate order.* St.Petersburg Math. J., **12**(2):191–232. AMS, Providence, R.I., (2001).

[20] L.S. Maergoiz. *Asymptotic Characteristics of Entire Functions and Their Applications in Mathematics and Biophysics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2003).

[21] S. Malek. *On the summability of formal solutions of linear partial differential equations.* J. Dyn. Control Syst., **11**(3): 389–403, (2005).

[22] S. Malek. *On Gevrey functional solutions of partial differential equations with Fuchsian and irregular singularities.* J. Dyn. Control Syst., **15**(2): 277–305, (2009).

[23] A.I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable, Volume II.* Richard A. Silverman, Prentice-Hall,INC., (1965).

[24] A. Martineau. *Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel.* J. Anal. Math., **11**:1–164, (1963).

[25] S. Michalik. *Summability and fractional linear partial differential equations.* J. Dyn. Control Syst., **16**(4): 557–584, (2010).

[26] S. Michalik. *On the multisummability of divergent solutions of linear partial differential equations with constant coefficients.* J. Differential Equations, **249**(3): 551–570, (2010).

[27] S. Michalik. *Analytic solutions of moment partial differential equations with constant coefficients.* Funkcial. Ekvac., **56**: 19–50, (2013).

[28] S. Michalik. *Summability of formal solutions of linear partial differential equations with divergent initial data.* J. Math. Anal. Appl., **406**: 243–260, (2013).

[29] F.J. Pérez González. *Curso de Análisis Complejo.* Universidad de Granada, (2004). [`http://www.ugr.es/~fjperez/textos/funciones_variable_compleja.pdf`]

[30] G. Pólya. *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.* Math. Z., **29**:549–640, (1929).

[31] G. Pólya and G. Szego. *Problems and Theorems in Analysis II.* Springer, 1976.

[32] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, McGraw-Hill ,INC., New York 1976.

[33] J. Schmets, M. Valdivia. *Extension maps in ultradifferentiable and ultraholomorphic function spaces.* Studia Math., **143**(3): 221–250, (2000).

[34] V. Thilliez. *Division by flat ultradifferentiable functions and sectorial extensions.* Result. Math., **44**: 169–188, 2003.

[35] V. Thilliez. *Smooth solutions of quasianalytic or ultraholomorphic equations.* Monatsh. Math., **160**(4): 443–453, (2010).