



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Aritmética, Álgebra y Geometría Tropical

Autor: Ángel Gumiel Correa

Tutor: Antonio Campillo López

Índice general

| | |
|---------------------------------------|-----------|
| 1. Aritmética tropical. | 7 |
| 1.1. El semianillo tropical | 7 |
| 1.2. Programación dinámica | 12 |
| 2. Geometría tropical. | 17 |
| 2.1. Curvas planas | 17 |
| 2.2. Implicación | 26 |
| 2.3. Enumeración de curvas | 31 |
| 3. Álgebra tropical | 37 |
| 3.1. Cuerpos y valoraciones | 37 |
| 3.2. Bases de Gröbner | 42 |
| Bibliografía | 49 |

Introducción.

Este trabajo tiene como objeto introducir las nociones y propiedades básicas de geometría tropical, en especial la de tropicalización, así como presentar aplicaciones prácticas y algunas demostraciones de resultados. Se apoya en el libro *“Introduction to tropical geometry”*[1], en particular en los primeros capítulos de motivación para el campo que en la actualidad es muy amplio y tiene gran cantidad de aplicaciones prácticas y teóricas. El trabajo pretende mostrar al lector una selección de técnicas y resultados, que permitan posteriormente interesarse por otros más especializados y avanzados.

La geometría tropical es un área emergente de las matemáticas, que se originó en 2002. Se basa en el trabajo de Bergman en análisis complejo sobre conjuntos logarítmicos. En concreto, las variedades tropicales se originaron como límites de imágenes de aplicaciones logarítmicas (tales imágenes se denominan amebas). El término tropical viene de la informática, y no se debe a razones científicas sino al trabajo de una escuela brasileña de computación cuando se inició su estudio.

La aritmética tropical consiste en los números reales junto a infinito con la suma y producto dadas respectivamente por el mínimo y ‘suma’ usuales. Con estas operaciones se define el semianillo tropical, que juega un papel similar al de un cuerpo en la geometría ordinaria. Las operaciones clásicas de mínimo y suma son apropiadas (más que la suma y el producto usuales) para expresar aritméticamente muchos algoritmos cuyo objeto sea la optimización, en concreto los algoritmos de programación dinámica. En particular, el cálculo matricial y el cálculo polinómico son posibles en geometría tropical. En el primer capítulo se describen el cálculo aritmético tropical y tres aplicaciones significativas a la optimización: la distancia mínima entre puntos de un grafo cuyas aristas tienen asignadas distancias, la solución del problema de programación lineal entera, y la solución del problema de asignación de ocupaciones.

En el segundo capítulo, se trata el problema de la tropicalización de variedades algebraicas. Los ceros de los polinomios definen una variedad algebraica, pero los polinomios tienen también una función tropical asociada que

se denomina su tropicalización. Los puntos de la variedad tropical asociada no son los ceros de la función polinómica tropicalizada sino los puntos en los que ésta (que es lineal a trozos) no es diferenciable. Las variedades tropicales se estudian habitualmente a través de sus gráficas y su combinatoria. Se estudia la geometría de las curvas planas tropicales, cuyos resultados son centrales y clásicos en geometría tropical. En particular se enuncian el teorema de Bézout tropical y los números de Gromov-Witten tanto en geometría clásica como tropical, cuyos valores coinciden y cuyo cálculo tropical es factible. También se describe cómo, usando geometría tropical, se puede obtener la ecuación implícita de una curva algebraica plana unirracional a partir de una de sus parametrizaciones polinómicas.

El tercer capítulo, estudia el concepto de valoración y el papel de los cuerpos provistos de una valoración en álgebra conmutativa. Se demuestra, en particular, que el cuerpo de las series de Puiseux (en un sentido amplio) es algebraicamente cerrado. La relación clásica entre la geometría algebraica y el álgebra conmutativa permite estudiar las variedades por medio de ideales de polinomios. El análogo de esta relación en geometría tropical, estudia las variedades tropicales a través de ideales de polinomios con coeficientes en un cuerpo provisto de una valoración, el particular del cuerpo de series de Puiseux. Las bases de Gröbner en este escenario valuado, de las que se prueba su existencia, son las que dan lugar a las ecuaciones de la variedad tropicalizadas. Además, se muestran aplicaciones a la geometría algebraica clásica como la posibilidad de nuevos métodos de cálculo de funciones de Hilbert de ideales homogéneos.

Capítulo 1

Aritmética tropical.

En este capítulo estudiamos las nociones básicas de aritmética tropical y algunas aplicaciones dirigidas a la optimización.

1.1. El semianillo tropical.

Nuestro objeto de estudio es el *semianillo tropical* $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$. Éste es el conjunto de los números reales \mathbb{R} junto con el punto del infinito, ∞ , equipado con las operaciones suma y producto tropicales, definidas del siguiente modo:

$$x \oplus y := \min(x, y), \quad x \odot y := x + y.$$

donde para todo $x \in \mathbb{R}$

$$x \oplus \infty = x, \quad x \odot \infty = \infty.$$

Del mismo modo que en la aritmética habitual, el producto \odot tiene precedencia cuando ambas operaciones aparecen juntas en la misma expresión.

Muchos de los axiomas de la aritmética habitual siguen siendo válidos en la aritmética tropical. Por ejemplo, tanto la suma como el producto tropicales son conmutativos.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \min(x, y) = \min(y, x) = y \oplus x. \\ x \odot y &= x + y = y + x = y \odot x. \end{aligned}$$

También tenemos que ambas operaciones son asociativas, y que el producto es distributivo respecto de la suma.

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus z &= x \oplus (y \oplus z), & (x \odot y) \odot z &= x \odot (y \odot z). \\ x \odot (y \oplus z) &= x + \min(y, z) = \min(x + y, x + z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z). \end{aligned}$$

Ambas operaciones tienen un elemento neutro. ∞ es el elemento neutro de la suma, y 0 lo es del producto

$$x \oplus \infty = x, \quad x \odot 0 = x.$$

Una de las ventajas de la aritmética tropical es lo sencillo que es operar. Veamos esto con una tabla de sumar y otra de multiplicar.

| \oplus | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | \odot | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

Una característica fundamental de la aritmética tropical es la carencia de resta. No existe ningún número real x que podamos definir como "8 menos 2", dado que la ecuación $2 \oplus x = 8$ no tiene solución. La división tropical se define como la resta clásica, con lo cual la división tropical resulta sencilla incluso para números grandes. Tenemos entonces que $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ satisface todas las condiciones de un anillo a excepción de la existencia de elemento inverso para la suma. Tales estructuras se conocen como semianillos, de ahí el nombre de semianillo tropical.

Es importante recordar que "0" es el elemento neutro para el producto. De este modo, el *triángulo de Pascal* tiene este aspecto:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 0 \\
 & & & & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Las filas del triángulo de Pascal se corresponden con los coeficientes que aparecen en el *teorema del binomio*. Por ejemplo, la cuarta fila del triángulo representa la igualdad:

$$(x \oplus y)^4 = 0 \odot x^4 \oplus 0 \odot x^3 y^1 \oplus 0 \odot x^2 y^2 \oplus 0 \odot x^1 y^3 \oplus 0 \odot y^4.$$

Por supuesto, podemos quitar los ceros en la identidad:

$$(x \oplus y)^4 = x^4 \oplus x^3y^1 \oplus x^2y^2 \oplus x^1y^3 \oplus y^4.$$

Nótese que la siguiente igualdad se cumple en la aritmética clásica para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

$$n \cdot \min\{x, y\} = \min\{nx, (n-1)x + y, \dots, x + (n-1)y, ny\} = \min\{nx, ny\}.$$

Por tanto, de las dos igualdades anteriores deducimos que la siguiente igualdad se cumple para toda potencia en la geometría tropical.

$$(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n.$$

Las operaciones de sumar y multiplicar vectores y matrices tienen sentido en el semianillo tropical. Por ejemplo, el producto escalar tropical en \mathbb{R}^3 de un vector fila con un vector columna es el siguiente:

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) \odot (v_1, v_2, v_3)^T &= u_1 \odot v_1 \oplus u_2 \odot v_2 \oplus u_3 \odot v_3 \\ &= \min\{u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3\}. \end{aligned}$$

Mientras que el producto de un vector columna y un vector fila es:

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3)^T \odot (v_1, v_2, v_3) &= \\ = \begin{pmatrix} u_1 \odot v_1 & u_1 \odot v_2 & u_1 \odot v_3 \\ u_2 \odot v_1 & u_2 \odot v_2 & u_2 \odot v_3 \\ u_3 \odot v_1 & u_3 \odot v_2 & u_3 \odot v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 & u_1 + v_2 & u_1 + v_3 \\ u_2 + v_1 & u_2 + v_2 & u_2 + v_3 \\ u_3 + v_1 & u_3 + v_2 & u_3 + v_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cualquier matriz que se pueda expresar mediante producto tropical de dos vectores tiene *rango tropical uno*.

Sean x_1, x_2, \dots, x_n variables que representan elementos en el semianillo tropical $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$. Un *monomio* es cualquier producto de estas variables, donde la repetición está permitida. Habitualmente escribiremos los monomios con la notación usual, y por conmutatividad podemos reordenar las variables:

$$x_2 \odot x_1 \odot x_4 \odot x_3 \odot x_4 \odot x_2 \odot x_1 \odot x_2 = x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^2.$$

Un monomio representa una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Cuando evaluamos dicha función en aritmética clásica, lo que obtenemos es una función lineal.

$$x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4.$$

Observación. Toda función lineal con coeficientes enteros surge de este modo, luego los monomios tropicales son las funciones lineales con coeficientes enteros.

Un *polinomio tropical* es una combinación lineal finita de monomios tropicales.

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= a_1 \odot x_1^{i_{11}} x_2^{i_{12}} \cdots x_n^{i_{1n}} \oplus a_2 \odot x_1^{i_{21}} x_2^{i_{22}} \cdots x_n^{i_{2n}} \oplus \cdots \oplus a_m \odot x_1^{i_{m1}} x_2^{i_{m2}} \cdots x_n^{i_{mn}}. \end{aligned}$$

En esta expresión los coeficientes a_i son números reales y los exponentes i_{jk} son enteros. Todo polinomio tropical da lugar a una función $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que se denota por $\text{trop}(f)$. Cuando evaluamos el polinomio en aritmética clásica, obtenemos el mínimo de una colección finita de funciones lineales:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \min\{a_1 + i_{11}x_1 + i_{12}x_2 + \cdots + i_{1n}x_n, \\ &\quad a_2 + i_{21}x_1 + i_{22}x_2 + \cdots + i_{2n}x_n, \\ &\quad \cdots, \\ &\quad a_m + i_{m1}x_1 + i_{m2}x_2 + \cdots + i_{mn}x_n\}. \end{aligned}$$

Dicha función $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cumple tres propiedades importantes:

- p es continua.
- p es lineal a trozos, con un número finito de trozos.
- p es cóncava, es decir, $p\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(p(x) + p(y))$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Es fácil ver que las dos primeras se cumplen, pues p es el mínimo de un conjunto finito de funciones lineales continuas. Para probar la tercera, tomemos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Llamemos i al índice del monomio en el cual $p(x+y)$ alcanza el mínimo (o al índice de uno cualquiera de ellos en el caso de que el mínimo se alcance en más de uno). Llamemos j y k a los índices de los monomios donde $p(x)$ y $p(y)$ alcanzan el mínimo respectivamente. Entonces tenemos que $p\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{a_i}{2} \odot \frac{x^i}{2} + \frac{a_i}{2} \odot \frac{y^i}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(a_j \odot x^j + a_k \odot y^k) = \frac{1}{2}(p(x) + p(y))$.

Toda función que cumpla estas tres propiedades puede ser representada como el mínimo de un conjunto finito de funciones lineales, con lo cual podemos concluir:

Proposición 1.1.1 *Los polinomios tropicales en n variables x_1, x_2, \dots, x_n son precisamente las funciones cóncavas lineales a trozos en \mathbb{R}^n con coeficientes enteros.*

Como ejemplo de polinomio tropical, consideremos el polinomio cuártico general en una variable x :

$$p(x) = a \odot x^4 \oplus b \odot x^3 \oplus c \odot x^2 \oplus d \odot x \oplus e.$$

Para representar esta función, dibujamos cinco líneas en el plano (x, y) : $y = 4x + a$, $3x + b$, $2x + c$, $x + d$ y la línea horizontal $y = e$. El valor de $p(x)$ es el menor valor y tal que el punto (x, y) se encuentre en una de las cinco líneas. El grafo de la función es la envolvente inferior de dichas líneas.

Siguiendo estos pasos obtendremos una gráfica similar a esta, donde las cinco líneas están representadas en azul, y en negro tenemos su envolvente inferior.

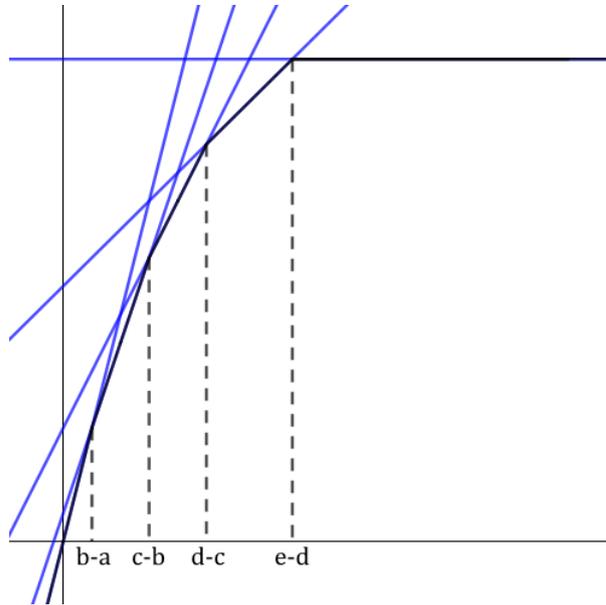


Figura 1.1: Grafo de un polinomio cuártico tropical.

Las cinco líneas contribuyen si se cumple que

$$b - a \leq c - b \leq d - c \leq e - d.$$

Estos cuatro valores de x son los puntos donde $p(x)$ no es lineal, y el polinomio tiene la siguiente factorización en factores lineales:

$$p(x) = a \odot (x \oplus (b - a)) \odot (x \oplus (c - b)) \odot (x \oplus (d - c)) \odot (x \oplus (e - d)).$$

Proposición 1.1.2 *Todo polinomio tropical puede expresarse de forma única como producto tropical de funciones tropicales lineales, es decir, el Teorema Fundamental del Álgebra se cumple en el semianillo tropical.*

Debemos resaltar en este enunciado la palabra “función”. Distintos polinomios tropicales pueden representar la misma función $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Lo que afirmamos es que todo polinomio puede reemplazarse por uno equivalente que representa la misma función, y que puede ser factorizado en factores lineales. Por ejemplo, el polinomio $p(x) = x^3 \oplus 37 \odot x^2 \oplus 12 \odot x \oplus 3$ factoriza como:

$$x^3 \oplus 37 \odot x^2 \oplus 12 \odot x \oplus 3 = x^3 \oplus 3 = (x \oplus 1)^3.$$

La factorización única de polinomios solo se cumple en una variable. Un ejemplo sencillo de polinomio en dos variables con dos factorizaciones en irreducibles es el siguiente:

$$\begin{aligned} (x \oplus 0) \odot (y \oplus 0) \odot (x \odot y \oplus 0) &= \\ = (x \odot y \oplus x \oplus 0) \odot (x \odot y \oplus y \oplus 0). \end{aligned}$$

1.2. Programación dinámica

Para ver por qué la aritmética tropical puede ser útil en computación, consideremos el problema de encontrar caminos más cortos en un grafo dirigido ponderado. Fijemos un grafo G con n nodos, que llamamos $1, 2, \dots, n$. Cada arista dirigida (i, j) en G tiene asociada una distancia d_{ij} , que es un número real no negativo. Si (i, j) no es una arista en G entonces $d_{ij} = +\infty$.

Representamos el grafo dirigido ponderado G mediante su matriz de distancias $D_G = (d_{ij})$, donde los d_{ij} son los anteriormente definidos para $i \neq j$, y $d_{ij} = 0$ para $i = j$. La matriz D_G no es necesariamente simétrica, puede suceder que $d_{ij} \neq d_{ji}$ para algún j, i . En el caso de que G sea un grafo no dirigido, representamos G como un grafo dirigido con dos aristas dirigidas (i, j) y (j, i) para cada arista no dirigida $\{i, j\}$. En este caso la matriz D_G sí sería simétrica, y podemos pensar en $d_{ij} = d_{ji}$ como la distancia entre los nodos i y j .

Consideremos la matriz $n \times n$ con datos en $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ que se obtiene al multiplicar tropicalmente D_G por si misma $n - 1$ veces:

$$D_G^{\odot n-1} = D_G \odot D_G \odot \dots \odot D_G.$$

Proposición 1.2.1 *Sea G un grafo dirigido ponderado con n nodos con matriz de distancias D_G . El elemento de la matriz $D_G^{\odot n-1}$ en la fila i y columna j equivale a la longitud del camino más corto del nodo i al nodo j en G .*

Demostración. Llamemos $d_{ij}^{(r)}$ a la mínima longitud de cualquier camino del nodo i al nodo j que use a lo sumo r aristas en G . Tenemos que $d_{ij}^{(1)} = d_{ij}$

para cualesquiera dos nodos i, j . Dado que asumimos que los d_{ij} son no negativos, el camino mas corto del nodo i al nodo j pasará por cada nodo como máximo una vez. En particular, cualquier camino más corto en el grafo G usa a lo sumo $n - 1$ aristas dirigidas. Luego la longitud del camino mas corto de i a j será $d_{ij}^{(n-1)}$.

Para $r \geq 2$ tenemos una fórmula recursiva para la longitud del camino más corto:

$$d_{ij}^{(r)} = \min\{d_{ik}^{(r-1)} + d_{kj} : k = 1, 2, \dots, n\}$$

Usando aritmética tropical, podemos reescribir tal formula como:

$$d_{ij}^{(r)} = \bigoplus_{k=1}^n d_{ik}^{(r-1)} \odot d_{kj} = (d_{i2}^{(r-1)}, d_{i2}^{(r-1)}, \dots, d_{in}^{(r-1)}) \odot (d_{1j}, d_{2j}, \dots, d_{nj})^T$$

De aquí, mediante inducción sobre r , obtenemos que $d_{ij}^{(r)}$ coincide con la entrada en la fila i y columna j de la matriz $D_G^{\odot r}$. Ciertamente, el lado derecho de la igualdad se corresponde con el producto de la fila i de $D_G^{\odot r-1}$ y la columna j de D_G , que es la entrada (i, j) de la matriz $D_G^{\odot r}$. En particular, $d_{ij}^{(n-1)}$ coincide con la entrada en la fila i y columna j de $D_G^{\odot n-1}$, lo cual prueba el resultado. Veamos un ejemplo de esto último.

Ejemplo 1.2.1 Sea G el grafo dirigido ponderado con $n = 4$ nodos con matriz de distancias

$$D_G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las primera y segunda potencias tropicales son

$$D_G^{\odot 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad D_G^{\odot 3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los elementos de $D_G^{\odot 3}$ son las longitudes de los caminos más cortos en G .

Otro ejemplo de cómo la aritmética tropical se puede aplicar a la resolución de algoritmos en matemática discreta está enmarcado dentro de la programación lineal entera. El problema de la programación lineal entera puede ser enunciado como sigue. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $d \times n$ de enteros no negativos, sea $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector fila y sea

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$ un vector columna. El objetivo es encontrar un vector columna $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{N}^n$ que sea solución del siguiente problema:

$$\text{Minimizar } \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \text{ sujeto a } \mathbf{u} \in \mathbb{N}^n \text{ y } A\mathbf{u} = \mathbf{b}. \quad (1.1)$$

Asumamos que todas las columnas de la matriz A suman el mismo número α y que $b_1 + b_2 + \dots + b_n = m\alpha$. Esto es conveniente pues garantiza que todas las soluciones factibles $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$ satisfagan que $u_1 + u_2 + \dots + u_n = m$.

Veamos cómo podemos resolver el problema de programación lineal entera usando aritmética tropical. Sean x_1, x_2, \dots, x_n variables y consideremos la expresión:

$$w_1 \odot x_1^{a_{11}} \odot x_2^{a_{21}} \odot \dots \odot x_d^{a_{d1}} \oplus \dots \oplus w_n \odot x_1^{a_{1n}} \odot x_2^{a_{2n}} \odot \dots \odot x_d^{a_{dn}}.$$

Proposición 1.2.2 *El valor óptimo del problema (1.1) es el coeficiente del monomio $x_1^{b_1}, x_2^{b_2}, \dots, x_n^{b_n}$ en la m -ésima potencia del polinomio anterior.*

Ejemplo 1.2.2. Sean $d = 2$, $n = 5$, y consideremos el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} \quad y \quad w = (2, 7, 1, 8, 3).$$

En este caso tenemos $\alpha = 6$ y $m = 3$. La matriz A y el vector w se codifican mediante un polinomio tropical como el de la proposición del siguiente modo:

$$p(x_1, x_2) = 2x_1^3x_2^3 \oplus 7x_1^1x_2^5 \oplus 1x_1^4x_2^2 \oplus 8x_1^1x_2^5 \oplus 3x_1^6.$$

La tercera potencia de dicho polinomio, evaluada tropicalmente, es igual a

$$\begin{aligned} p \odot p \odot p &= 9x_1^{18} \oplus 7x_1^{16}x_2^2 \oplus 8x_1^{15}x_2^3 \oplus 5x_1^{14}x_2^4 \oplus 6x_1^{13}x_2^5 \oplus 3x_1^{12}x_2^6 \oplus 4x_1^{11}x_2^7 \\ &\oplus 5x_1^{10}x_2^8 \oplus 6x_1^9x_2^9 \oplus 9x_1^8x_2^{10} \oplus 11x_1^7x_2^{11} \oplus 15x_1^6x_2^{12} \oplus 16x_1^5x_2^{13} \oplus 21x_1^4x_2^{15}. \end{aligned}$$

El coeficiente de $x_1^{11}x_2^7$ en $p \odot p \odot p$ es 4, luego 4 será el valor óptimo de nuestro problema. Una solución óptima de dicho problema es $u = (1, 0, 2, 0, 0)^T$.

Nuestro último ejemplo concierne la noción del determinante de una matriz $X = (x_{ij})$ $n \times n$. Dado que no existe resta en la geometría tropical, el determinante tropical es lo mismo que el permanente tropical, es decir, la suma de todos los productos diagonales obtenidos tomando las $n!$ permutaciones π de $\{1, 2, \dots, n\}$:

$$\text{tropdet}(X) := \bigoplus_{\pi \in S_n} x_{1\pi(1)} \odot x_{2\pi(2)} \odot \dots \odot x_{n\pi(n)} \quad (1.2)$$

donde S_n es el *grupo simétrico* de permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$. Evaluar el permanente tropical significa resolver el *problema de asignación* de optimización combinatoria. Imaginemos una empresa que tiene n trabajadores y n puestos de trabajo y cada puesto debe ser asignado a uno de los trabajadores. Llamemos x_{ij} al coste de asignarle el puesto i al trabajador j . El mínimo coste óptimo total es:

$$\min_{\pi \in S_n} \{x_{1\pi(1)} + x_{2\pi(2)} + \dots + x_{n\pi(n)}\}$$

Este número es precisamente el determinante tropical de la matriz $Q = (x_{ij})$. Es decir, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2.3 *Evaluar el determinante tropical resuelve el problema de asignación.*

En el problema de asignación buscamos la mínima de $n!$ cantidades. Esto parece requerir un número exponencial de operaciones. Sin embargo, existe un conocido algoritmo en tiempo polinómico para resolver este problema. Fue desarrollado por Harold Kuhn en 1955, quien lo llamó *Método húngaro de Asignación*[2]. El número total de operaciones es $\mathcal{O}(n^3)$.

En aritmética clásica, la evaluación de determinantes y la evaluación de permanentes pertenecen a distintas clases de complejidad. El determinante de una matriz $n \times n$ puede calcularse en $\mathcal{O}(n^3)$ pasos mediante eliminación Gaussiana, mientras que calcular el permanente de una matriz $n \times n$ es un problema considerablemente más difícil.

Los tres ejemplos presentados en esta sección son algoritmos relevantes de la programación dinámica. La programación dinámica es una aproximación a la optimización que simplifica un problema complicado dividiéndolo en subproblemas más simples de manera recurrente. Como hemos podido ver, varios algoritmos relevantes de la programación dinámica admiten una formulación en términos de la aritmética tropical.

Capítulo 2

Geometría tropical.

En este capítulo presentamos la noción de variedad tropical, en particular el caso de las curvas planas, y algunas aplicaciones de la geometría tropical, tales como la búsqueda de ecuaciones implícitas o el cálculo de los invariantes de Gromov-Witten.

2.1. Curvas planas

Una función polinómica tropical $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por el mínimo de un conjunto finito de funciones lineales. Definimos la *hipersuperficie* $V(p)$ como el conjunto de todos los puntos $w \in \mathbb{R}^n$ donde el mínimo se alcanza en al menos dos de estas funciones. Equivalentemente, un punto $w \in \mathbb{R}^n$ está en $V(p)$ si y solo si p no es diferenciable en w . Por ejemplo, tomemos $n = 1$ y sea p el polinomio cúbico

$$p(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d$$

Si suponemos que $b - 1 \leq c - b \leq d - c$, entonces tenemos que

$$V(p) = \{b - a, c - b, d - c\}$$

Luego la hipersuperficie $V(p)$ es el conjunto de las “raíces” del polinomio $p(x)$.

Como ejemplo de polinomio tropical en varias variables podemos considerar la función determinante $p = \text{tropdet}$ definida por (1.2). Su hipersuperficie $V(p)$ consiste en todas las matrices $n \times n$ que son tropicalmente singulares. Decimos que una matriz es tropicalmente singular cuando la solución óptima del problema de asignación descrito en la sección anterior no es única. Es decir, de entre las $n!$ maneras de repartir n trabajos entre n trabajadores, existen al menos dos repartos que minimizan el coste total.

En esta sección estudiaremos la geometría de un polinomio en dos variables:

$$p(x, y) = \bigoplus_{(i,j)} c_{ij} \odot x^i \odot y^j.$$

La hipersuperficie tropical correspondiente $V(p)$ es una *curva tropical plana*. La siguiente proposición resume las propiedades de dicha curva.

Proposición 2.1.1 *La curva $V(p)$ es un grafo finito representado en el plano \mathbb{R}^2 . Tiene aristas tanto acotadas como no acotadas, las pendientes de las aristas son racionales, y el grafo satisface una condición de equilibrio alrededor de cada nodo.*

Observación. Este resultado es consecuencia del Teorema de Estructura para variedades tropicales. Equilibrio se refiere a la siguiente condición geométrica. Consideremos cualquier nodo (x, y) del grafo y supongamos que es el origen $(0, 0)$. Entonces las aristas adyacentes a este nodo están contenidas en rectas con pendientes racionales. En cada uno de los rayos que emanan del origen consideramos el primer vector no nulo de que una el origen con un punto reticular de dicha semirrecta. Se entiende por punto reticular un punto cuyas coordenadas son números enteros. Llamamos a dicho vector *vector reticular primitivo*. El *equilibrio* en (x, y) significa que una suma ponderada de estos vectores es cero, donde los pesos (que definiremos más adelante) son fijos para cada arista. Nuestro primer ejemplo es una recta en el plano. Ésta viene definida por un polinomio:

$$p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

La curva tropical $V(p)$ consiste en todos los puntos (x, y) donde la función

$$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \min(a + x, b + y, c).$$

no es lineal. Consiste en tres semirrectas con origen en el punto $(x, y) = (c - a, c - b)$ y en direcciones norte, este y suroeste.

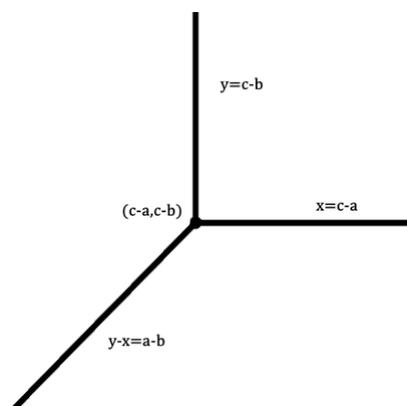


Figura 2.1: Recta definida por el polinomio $p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$.

Consideremos ahora un polinomio tropical general p en las variables x e y , consideremos cualquier término $\gamma \odot x^i \odot y^j$ en p . En la aritmética clásica esto representa la función lineal $(x, y) \mapsto (\gamma + ix + jy)$. La función polinómica tropical $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por el mínimo de dichas funciones lineales. El grafo de p es cóncavo y lineal a trozos. La curva tropical $V(p)$ es el conjunto de todos los puntos de \mathbb{R}^2 en los cuales el grafo no es diferenciable.

Como ejemplo consideremos el polinomio cuadrático general

$$p(x, y) = a \odot x^2 \oplus b \odot xy \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot y \oplus e \oplus f \odot x.$$

Supongamos que los coeficientes $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ satisfacen las siguientes desigualdades:

$$2b < a + c, 2d < a + f, 2e < c + f.$$

Entonces el grafo de $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la envolvente inferior de seis planos en \mathbb{R}^3 . En la siguiente figura podemos observar el grafo de la función $p(x, y)$. En azul tenemos las intersecciones de los planos cuya envolvente inferior da forma el grafo, que son los puntos donde la función no es lineal, y en cada una de las caras de la “pirámide” tenemos la ecuación del plano. Bajo la pirámide tenemos la curva tropical cuadrática $V(p) \subset \mathbb{R}^2$.

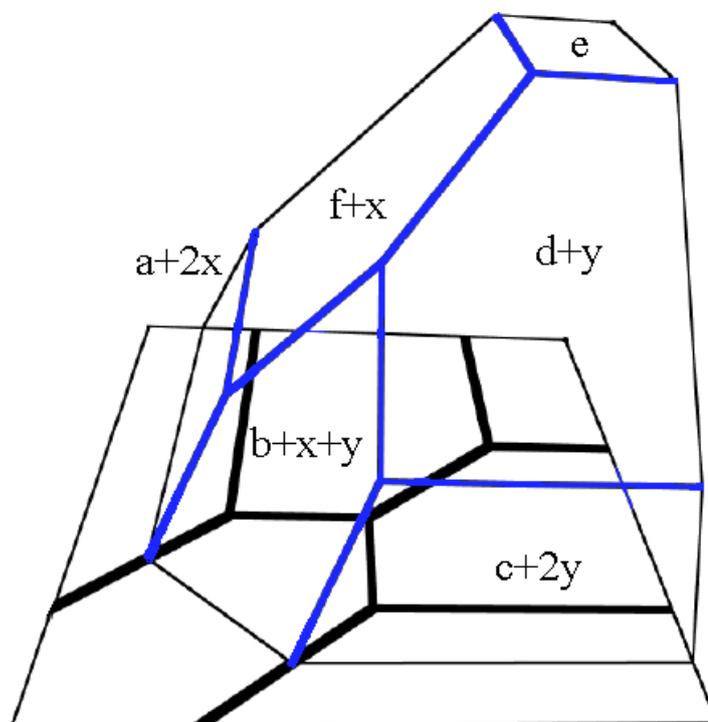


Figura 2.2: Gráfica de una curva tropical definida por un polinomio cuadrático.

Dado $p(x, y)$ un polinomio en dos variables, ya sea con la aritmética usual o la clásica, definimos su *polígono de Newton*, $\text{Newt}(p)$ como la envolvente convexa en \mathbb{R}^2 de los puntos (i, j) tales que $x^i y^j$ aparece en el desarrollo de $p(x, y)$.

Si p es un polinomio tropical entonces su curva $V(p)$ es un grafo representado en el plano dual al grafo de una subdivisión de su polígono de Newton $\text{Newt}(p)$. Dicha subdivisión viene dictada por los coeficientes de p . Si se trata de una subdivisión en triángulos, decimos que es una *triangulación*, y decimos que es una *triangulación unimodal* si cada celda es un triángulo de área $1/2$.

Las rectas no acotadas de la curva tropical $V(p)$ son perpendiculares a las aristas del polígono de Newton del polinomio p . Dado $p(x, y)$ un polinomio en dos variables, ya sea con la aritmética usual o la clásica, definimos su polígono de Newton como la envolvente convexa en \mathbb{R}^2 de los puntos (i, j) tales que $x^i y^j$ aparece en el desarrollo de $p(x, y)$.

Por ejemplo, si p es el polinomio cuadrático anterior, entonces $\text{Newt}(p)$ es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, 0)$. En la siguiente figura vemos

el polígono de Newton $\text{Newt}(p)$ y la curva $V(p)$, y podemos observar que la curva $V(p)$ es dual a una subdivisión de dicho triángulo.

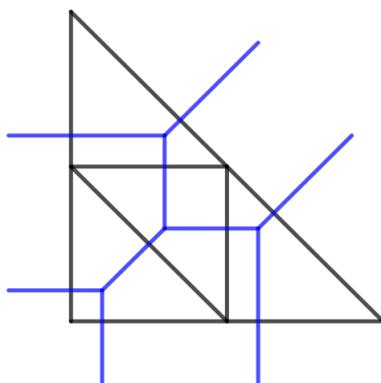


Figura 2.3: Una subdivisión del polígono de Newton de un polinomio cuadrático y su correspondiente curva tropical.

Veamos algún ejemplo más de esta dualidad, como el de un polinomio bicuadrático, es decir, un polinomio de la forma

$$p(x, y) = a \odot x^2 y^2 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot xy \oplus e \odot x \oplus f \odot y \oplus g.$$

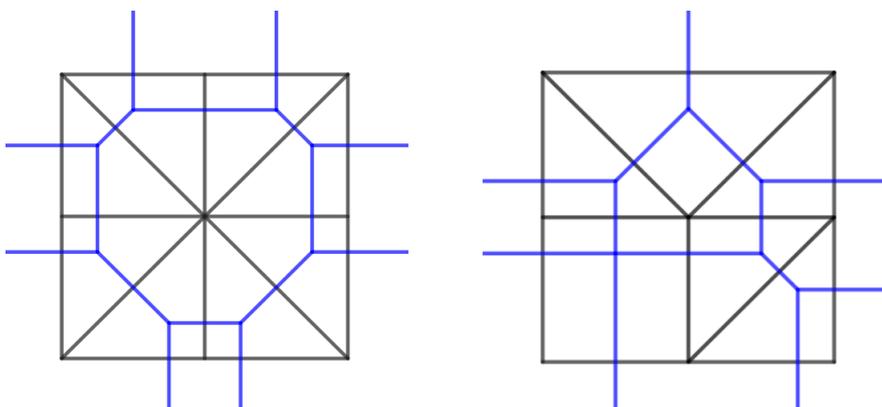


Figura 2.4: Dos curvas bicuadráticas y sus correspondientes subdivisiones del polígono de Newton.

Por último, veamos el caso de un polinomio cúbico. Merece la pena resaltar que existe más de una curva tropical dual a cada polinomio de Newton.

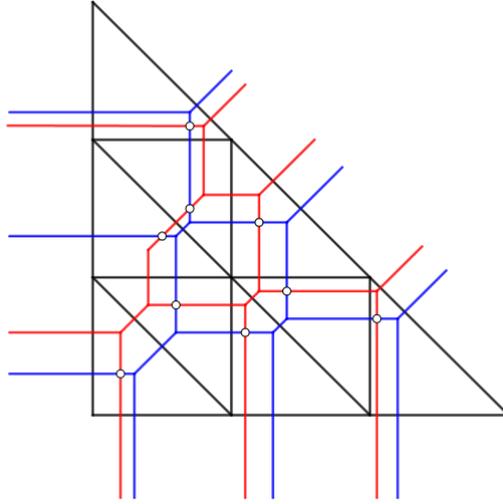


Figura 2.5: Una subdivisión del polígono de Newton de un polinomio cúbico, con dos curvas distintas duales a ella.

Si consideramos las curvas tropicales en el plano podemos observar que se intersecan del mismo modo que las curvas algebraicas. En particular tenemos que:

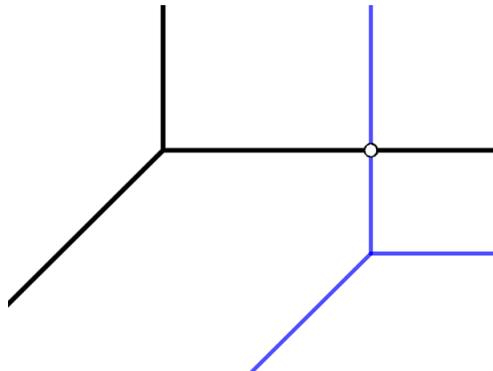


Figura 2.6: Dos rectas se cortan en un punto.

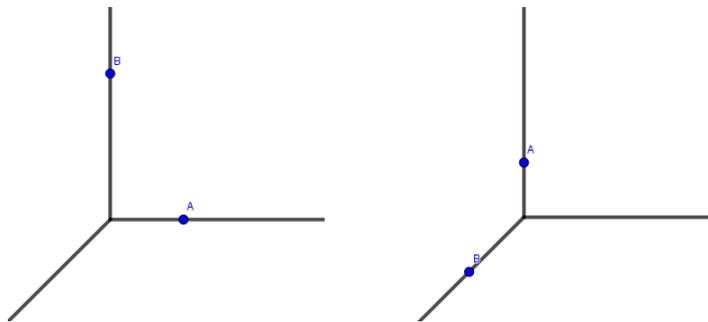


Figura 2.7: Dos puntos definen una única recta que pase por ambos.

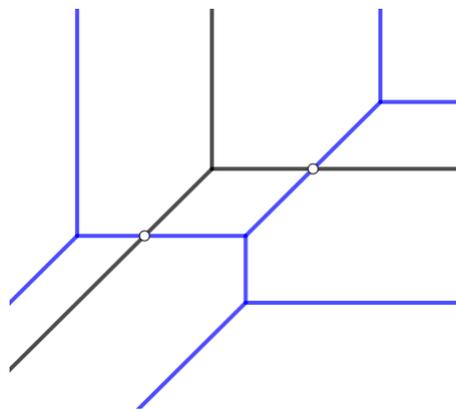


Figura 2.8: Una recta y una cuádrica se cortan en dos puntos.

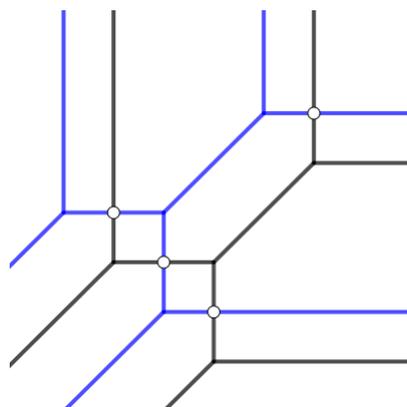


Figura 2.9: Dos cuádricas se cortan en cuatro puntos.

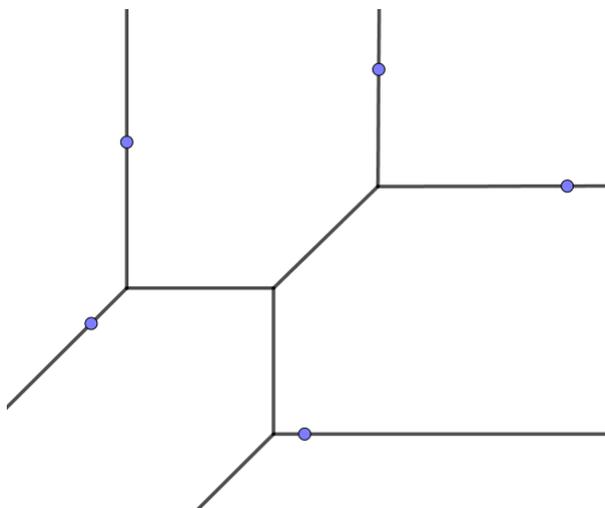


Figura 2.10: Cinco puntos en posición general definen una única cuádrica que pase por ellos.

Un resultado clásico de la geometría algebraica, el *Teorema de Bézout*, se cumple también en geometría algebraica tropical. Para enunciar este teorema, necesitamos definir los pesos que mencionamos tras la proposición 2.1.1. Dado cualquier punto (x, y) en el interior relativo de una arista, consideramos los monomios $\gamma \odot x^i \odot y^j$ en los cuales se alcanza el mínimo. La suma de dichos monomios es un polinomio en una variable. Entonces el peso que asignamos a dicha arista es igual al número de raíces no nulas de dicho polinomio. Llamamos a estos pesos *multiplicidad de la arista*. Además de estas multiplicidades, también asignamos un entero positivo a cualesquiera dos rectas con pendientes racionales distintas en \mathbb{R}^2 . Si sus vectores de dirección primitivos son $(u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2$ y $(v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ respectivamente, entonces llamamos *multiplicidad de intersección* de las dos rectas en su único punto común al entero positivo $|u_1v_2 - u_2v_1|$.

Centrémonos ahora en curvas tropicales cuyos polígonos de Newton son los triángulos con vértices $(0,0)$, $(0,d)$ y $(d,0)$. Nos referiremos a dichas curvas como *curvas de grado d* . Una curva de grado d tiene d semirectas, posiblemente contando multiplicidades, perpendiculares a cada una de las tres aristas de su polígono de Newton. Supongamos que C y D son dos curvas tropicales en \mathbb{R}^2 que se intersecan transversalmente, es decir, cada punto común yace en el interior relativo de una única arista en C y también en D . La *multiplicidad* de dicho punto es el producto de las multiplicidades de las aristas multiplicado por la multiplicidad de intersección $|u_1v_2 - u_2v_1|$.

Teorema 2.1.1 (de Bézout) *Consideremos dos curvas tropicales C y D de grado c y d respectivamente en \mathbb{R}^2 . Si ambas curvas intersecan transversalmente, entonces el número de puntos de intersección, contados con las multiplicidades que acabamos de definir, es igual a cd .*

Del mismo modo que en la geometría clásica, es posible eliminar la condición “intersecan transversalmente” del enunciado del Teorema de Bézout. De hecho, esta situación es incluso mejor en geometría tropical debido a la siguiente propiedad. Los puntos de intersección dependen de manera continua de los coeficientes en los dos polinomios tropicales. Esta continuidad está bien definida en todo el espacio de coeficientes, incluso en los puntos en los cuales los polinomios son especiales.

Expliquemos esto para la intersección de dos curvas C y D de grados c y d en \mathbb{R}^2 . Supongamos que la intersección no es transversal. Tomemos cualesquiera dos curvas cercanas C_ϵ y D_ϵ , es decir, obtenidas al perturbar ligeramente los coeficientes de los polinomios que las definen, tales que C_ϵ y D_ϵ intersequen transversalmente en un número finito de puntos. Entonces, de acuerdo al teorema anterior, la intersección $C_\epsilon \cap D_\epsilon$ es un conjunto con cd puntos.

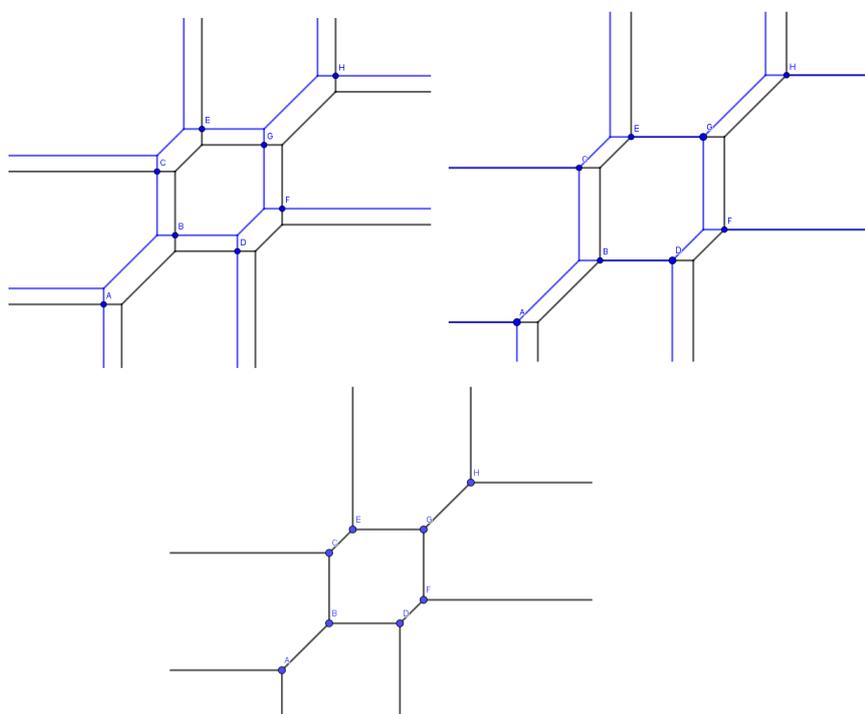


Figura 2.11: Intersección estable de una curva bicuadrática consigo misma.

Teorema 2.1.2 (Principio de intersección estable) *El límite del conjunto de puntos $C_\epsilon \cap D_\epsilon$ es independiente de la elección de perturbaciones. Es un conjunto bien definido de cd puntos contenidos en la intersección $C \cap D$.*

Tomamos el límite cuando ϵ tiende a 0. Las multiplicidades se suman cuando dos puntos se juntan. El límite es un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^2 con multiplicidades, tales que la suma de las multiplicidades es cd . Llamamos a este límite *intersección estable* de las curvas C y D , y lo denotamos como

$$C \cap_{st} D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (C_\epsilon \cap D_\epsilon).$$

Entonces podemos fortalecer el enunciado del Teorema de Bézout del siguiente modo.

Corolario 2.1.1 *Cualesquiera dos curvas de grados c y d en \mathbb{R}^2 , sin importar como de especiales puedan ser, se intersecan establemente en un conjunto bien definido de cd puntos.*

2.2. Implicitación

En la práctica, una variedad algebraica suele venir representada o bien como la imagen de una aplicación racional o como el conjunto de ceros de algunos polinomios en varias variables. La segunda representación existe para todas las variedades algebraicas, mientras que la primera requiere que la variedad sea uniracional, lo cual es una propiedad muy especial en la geometría algebraica. Sin embargo, la primera es frecuente en numerosas aplicaciones, cuando surgen a partir de conjuntos de datos.

La transición entre ambas representaciones es un problema básico en el álgebra computacional. La *implicitación* es el problema de pasar de la primera representación a la segunda, es decir, dada una aplicación racional Φ , buscamos determinar el ideal primo de polinomios que se anulan en la imagen de Φ .

En esta sección examinamos un caso sencillo pero relevante. Consideramos una curva plana en \mathbb{C}^2 dada por una parametrización racional:

$$\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2, t \mapsto (\phi_1(t), \phi_2(t)).$$

Para hacer que la aplicación Φ esté bien definida, asumimos que los polos de ϕ_1 y ϕ_2 han sido eliminados del dominio \mathbb{C} . El problema de implicitación consiste en calcular el único (salvo escala) polinomio irreducible $f(x, y)$ que se anula en la curva $\text{Imagen}(\Phi) = \{(\phi_1(t), \phi_2(t)) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{C}\}$.

Ejemplo 2.2.1 Consideremos la curva plana definida paramétricamente por

$$\Phi(t) = \left(\frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{t^2 - 1}, \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2} \right).$$

La ecuación implícita de esta curva es

$$f(x, y) = x^3y^2 - x^2y^3 - 5x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2 - 33xy + 16y^2 + 72y + 81.$$

Este polinomio irreducible se anula en todos los puntos $(x, y) = \Phi(t), t \in \mathbb{C}$.

Hay dos métodos habituales usados en álgebra computacional para resolver este problema: las bases de Gröbner y las resultantes. Dichos métodos vienen explicados en el libro escrito por Cox, Little y O'Shea [3]. Para problemas en dimensiones altas, estos métodos a menudo no se comportan bien o no dan suficiente información geométrica. Aquí es donde aparece la idea de utilizar la geometría tropical en problemas de implicitación. Expliquemos la idea básica tras el proceso para curvas racionales planas.

Supongamos que tenemos una parametrización Φ , y deseamos calcular su ecuación implícita $f(x, y)$. La geometría tropical nos permite calcular el polígono de Newton $\text{Newt}(f)$ directamente desde la parametrización Φ , sin conocer $f(x, y)$. Una vez conocemos el polígono de Newton $\text{Newt}(f)$, podemos obtener el polinomio $f(x, y)$ mediante un cálculo de álgebra lineal. Veamos cómo funciona dicho cálculo.

Supongamos que no conocemos el polinomio $f(x, y)$ en el ejemplo y que nos es imposible calcularlo mediante bases de Gröbner o resultantes. Supongamos también que tenemos su polígono de Newton.

$$\text{Newt}(f) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.1)$$

Este pentágono contiene otros cuatro puntos reticulares adicionales que no son vértices, luego $\text{Newt}(f)$ contiene 9 puntos reticulares. Esto revela que

$$f(x, y) = c_1x^3y^2 + c_2x^2y^3 + c_3x^2y^2 + c_4x^2y + c_5xy^2 + c_6xy + c_7y^2 + c_8y + c_9$$

donde los coeficientes c_1, c_2, \dots, c_9 son parámetros desconocidos. Llegados a este punto podemos establecer un sistema lineal de ecuaciones del siguiente modo. Para cualquier número complejo τ , la ecuación $f(\phi_1(\tau), \phi_2(\tau)) = 0$ se cumple. Esta ecuación es una ecuación lineal para las nueve incógnitas c_i . Con ocho ecuaciones similares podemos, en general, determinar los coeficientes de forma única (salvo escala). Por ejemplo, si tomamos $\tau = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, entonces obtenemos ocho ecuaciones lineales que determinan que el vector $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9)^T$ pertenece al núcleo de la siguiente matriz racional 8×9 .

Escribimos $u_0 = -u_1 - u_2 - \cdots - u_m$ y $v_0 = -v_1 - v_2 - \cdots - v_m$, y consideramos los siguientes $m + 1$ vectores en el plano:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}$$

Consideremos las semirrectas definidas respectivamente por estos $m + 1$ vectores. Cada semirrecta tiene una multiplicidad natural, definida como la suma de las longitudes reticulares de todos los vectores $(u_i, v_i)^T$ contenidos en la semirrecta. Dado que la suma de todos los vectores es 0, dicha configuración de semirrectas satisface la condición de equilibrio, luego es una curva tropical en el plano \mathbb{R}^2 .

El siguiente resultado solamente es cierto si tomamos la hipótesis de que Φ sea inyectiva.

Teorema 2.2.1 *La curva tropical $V(\text{trop}(f))$ definida por el polinomio desconocido f coincide con la curva tropical determinada por los vectores*

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}$$

Podemos obtener el polígono de Newton $\text{Newt}(f)$ a partir de la curva tropical $V(f)$ como sigue. El primer paso consiste en rotar nuestros vectores 90 grados:

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ -u_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ -u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ -u_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_m \\ -u_m \end{pmatrix}$$

Dado que la suma de estos vectores es 0, existe un polígono convexo P cuyas aristas son trasladados de dichos vectores. Construimos P ordenando los vectores crecientemente de acuerdo al ángulo que forman con el eje X positivo, y a continuación simplemente concatenándolos. El polígono P es único salvo translación. Entonces existe un único trasladado P^+ del polígono P contenido en el primer cuadrante $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ y con intersección vacía con ambos ejes coordenados. Estas últimas condiciones son necesarias (y suficientes) para que un polígono reticular (es decir, cuyos vértices están situados en puntos reticulares) sea el polígono de Newton de un polinomio irreducible en $\mathbb{C}[x, y]$.

Corolario 2.2.1 *El polígono P^+ equivale, es decir, es igual salvo translación, al polígono de Newton $\text{Newt}(f)$ del polinomio irreducible que es ecuación implícita de la curva parametrizada por Φ .*

Esto resuelve el problema de implicitación tropical para curvas planas en \mathbb{C} . Veamos como se aplica esto a nuestro ejemplo:

Ejemplo 2.2.2 Consideremos la aplicación Φ definida anteriormente por:

$$\Phi(t) = \left(\frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{t^2 - 1}, \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2} \right).$$

Φ factoriza del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= (t-1)^{-1}t^1(t+1)^{-1}(t+2)^2. \\ \phi_2(t) &= (t-1)^2t^{-2}(t+1)^1(t+2)^0. \end{aligned}$$

Por tanto, nuestra configuración de vectores será:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si los rotamos y ordenamos crecientemente de acuerdo a su ángulo en forma polar obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

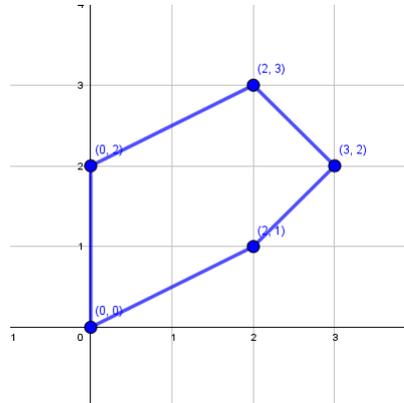


Figura 2.12: Polígono de Newton de la curva definida paramétricamente por Φ .

El polígono P^+ obtenido a partir de estas rectas tiene como vértices los puntos $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, es decir, es el pentágono considerado en (2.1), a partir del cual será posible calcular f mediante álgebra lineal.

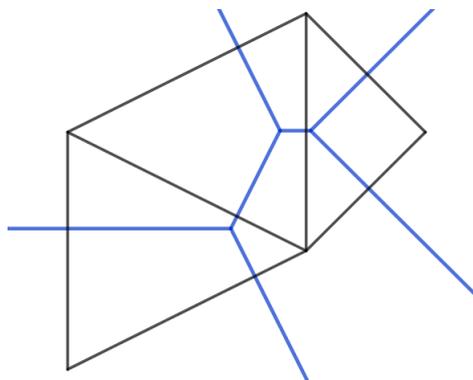


Figura 2.13: La curva definida por Φ y su correspondiente subdivisión del polígono de Newton.

La técnica de implícitación tropical puede ser usada, en principio, para calcular la tropicalización de cualquier variedad algebraica presentada mediante una parametrización, aunque los detalles son más complicados que el caso simple aquí presentado.

2.3. Enumeración de curvas

El avance que trajo los métodos tropicales a la atención de los geómetras fueron los trabajos de Mikhalkin [4] sobre los invariantes de Gromov-Witten en el plano. Dichos invariantes cuentan el número de curvas algebraicas complejas de determinado grado y género que pasan por determinado número de puntos. Mikhalkin probó que, para calcular estos invariantes, las curvas complejas pueden ser sustituidas por curvas tropicales, y luego desarrolló una fórmula combinatoria para contarlas en el caso tropical. Como caso trivial, ya hemos visto anteriormente que hay una única recta tropical (curva de grado 1) que pase por dos puntos dado en el \mathbb{R}^2 . El objetivo de esta sección es presentar las ideas básicas y el resultado principal en el caso general.

Empezamos repasando algunos datos clásicos sobre curvas en el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Si C es una curva regular de grado d en \mathbb{P}^2 , entonces su género aritmético es el número de asas de la superficie de Riemann de C definida en el plano proyectivo. Dicho género es

$$g(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Lo que es más, ese mismo número cuenta los puntos reticulares en el interior del polígono de Newton de la curva general de grado d . Aquí tomamos como

polígono de Newton del polinomio que define la curva en una carta afín. Dicho polígono es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(d,0)$ y $(0,d)$. Podemos expresar esto como

$$g(C) = \#(\text{int}(\text{Newt}(C) \cap \mathbb{Z}^2)).$$

El conjunto de todas las curvas de grado d forma un espacio proyectivo de dimensión

$$\binom{d+2}{2} - 1 = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) + 3d - 1.$$

Dependiendo de los $\binom{d+2}{2}$ coeficientes del polinomio homogéneo que define la curva C , ésta puede adquirir una o más singularidades. El tipo más sencillo de singularidad es un *nodo*. Cada vez que una curva adquiere un nodo, el género se reduce en uno. Por tanto para una curva singular C_{sing} con ν nodos y ninguna otra singularidad, el género es

$$g(C_{sing}) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \nu.$$

Los otros puntos singulares de C que no sean nodos, si existen, contribuyen al valor de ν con una cantidad ≥ 1 concreta que la geometría local de la curva asigna a dicho punto.

Estamos interesados en el siguiente problema de geometría enumerativa: *¿Cuál es el número $N_{g,d}$ de curvas irreducibles de género g y grado d que pasan por $g + 3d - 1$ puntos genéricos en el plano proyectivo complejo \mathbb{P}^2 ?*

Ésta pregunta tiene sentido dado que el espacio de curvas de grado d y género g tiene una dimensión esperada de $g + 3d - 1$, basándonos en las dos ecuaciones anteriores, y cada uno de los puntos supone una condición extra en la curva. Esperamos que el número $N_{g,d}$ de curvas que satisfagan todas las condiciones sea finito. La teoría de Gromov-Witten nos ofrece las herramientas para probar que es finito. Llamamos a los números $N_{g,d}$ invariantes de *Gromov-Witten* del plano \mathbb{P}^2 . Veamos algunos de estos números de manera explícita.

Ejemplo 2.3.1. Los más sencillos de los invariantes de Gromov-Witten son $N_{0,1} = 1$, y $N_{0,2} = 1$. Esto se puede expresar diciendo que una única recta que pasa por dos puntos, y una única cónica a través de cinco puntos genéricos. También tenemos $N_{1,3}$, que expresa que una única cúbica pasa a través de 9 puntos. Tengamos en cuenta que para $d = 1, 2$ el género vale 0 y para $d = 3$ el género vale 1, es decir, las rectas y las cónicas no singulares tienen género 0 y las cúbicas no singulares tienen género 1.

Ejemplo 2.3.2. El primer número no trivial es $N_{0,3} = 12$. Veámoslo en más detalle. Dicho número concierne a curvas definidas por polinomios cúbicos de la forma

$$f = c_0x^3 + c_1x^2y + c_2x^2z + c_3xy^2 + c_4xyz + c_5xz^2 + c_6y^3 + c_7y^2z + c_8yz^2 + c_9z^3.$$

Para unos coeficientes generales c_0, \dots, c_9 la curva $f = 0$ es diferenciable con género $g = 1$. La curva se vuelve racional, es decir, el género pasa a ser $g = 0$, precisamente cuando la curva tiene un punto singular. Esto ocurre si y solo si el *discriminante* de f se anula. El discriminante $\Delta(f)$ es un polinomio homogéneo de grado 12 en las diez incógnitas c_0, \dots, c_9 . Es una suma de 2040 monomios:

$$\Delta(f) = 19683c_0^4c_6^4c_9^4 - 26244c_0^4c_6^3c_7c_8c_9^3 + \dots - c_2^2c_3c_4^4c_5^3c_6^2.$$

El estudio de los discriminantes y resultantes es el tema del libro escrito por Gel'fand, Kapranov y Zelevinski, [5] que contiene varias formulas para calcularlos. Veamos una formula simple para calcular nuestro discriminante. La Hessiana H de las cuádricas $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ es un polinomio de grado 3. Formamos la matriz 6×6 $M(f)$ cuyos datos son los coeficientes de las seis cuádricas $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}$. Entonces tenemos que $\Delta(f) = \det(M(f))$.

Ahora supongamos que la cúbica $f = 0$ debe pasar por 8 puntos dados en \mathbb{P}^2 . Esto se traduce en 8 ecuaciones lineales en las incógnitas c_0, c_1, \dots, c_9 . Si combinamos nuestras 8 ecuaciones lineales con la ecuación de grado 12 $\Delta(f) = 0$, obtenemos un sistema de ecuaciones con doce soluciones en \mathbb{P}^9 . Estas soluciones son los vectores de coeficientes de las $N_{0,3} = 12$ cúbicas racionales que buscamos.

Ejemplo 2.3.3. Las curvas cuárticas en el plano \mathbb{P}^2 pueden tener género 0,1,2 ó 3. Los números de Gromov-Witten para estos casos se conocen y son:

$$N_{0,4} = 620, N_{1,4} = 225, N_{2,4} = 27, N_{3,4} = 1.$$

En este caso 27 es el grado del discriminante de una cuártica homogénea en tres variables. $N_{0,4} = 620$ significa que hay 620 cuárticas racionales que pasan por 11 puntos en posición general del plano.

Teorema 2.3.1 (de Mikhalkin) *Los números de Gromov-Witten pueden determinarse tropicalmente.*[4]

Veamos qué significa exactamente este teorema. Consideremos las curvas tropicales de grado d en \mathbb{R}^2 . Cada una dichas curvas C es el grafo plano dual

a una subdivisión regular del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, d)$ y $(d, 0)$. Decimos que la curva C es *no singular* si la subdivisión consiste en d^2 triángulos, cada uno con área $1/2$. De manera equivalente, la curva tropical C es *no singular* si tiene d^2 vértices. Estos vértices son necesariamente trivalentes.

Decimos que una curva tropical C es *simple* si cada vértice es o bien trivalente o bien es localmente la intersección de dos segmentos. Equivalentemente, C es simple si la correspondiente subdivisión consta únicamente de triángulos y paralelogramos. Las curvas tropicales no singulares son simples; el recíproco no es cierto. En este caso los triángulos pueden tener un área mayor. Sea $t(C)$ el número de vértices trivalentes y sea $r(C)$ el número de aristas no acotadas de C .

Definimos el *género* de una curva tropical simple C mediante la fórmula

$$g(C) = \frac{1}{2}t(C) - \frac{1}{2}r(C) + 1.$$

Esta definición tiene sentido para curvas tropicales no singulares. Si C es no singular, entonces $t(C) = d^2$ y $r(C) = 3d$, y con lo cual obtenemos la fórmula del género de una curva compleja no singular clásica.

$$g(C) = \frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}3d + 1 = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Finalmente, es posible definir la *contribución* de una curva simple C en términos de los triángulos de la subdivisión correspondiente, obviando las singularidades correspondientes a vértices de valencia cuatro.

Veamos un enunciado más preciso del teorema anterior.

Teorema 2.3.2 (Principio de correspondencia de Mikhalkin) *El número de curvas tropicales simples de grado d y género g que pasan por $g + 3d - 1$ puntos genéricos en \mathbb{R}^2 , contando cada curva con su contribución, es igual al número de Gromov-Witten $N_{g,d}$ del plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.*

La prueba dada por Mikhalkin [4] utiliza métodos de geometría compleja, aunque más tarde Gathmann y Markwig [6][7] desarrollaron una prueba algebraica. El principio de correspondencia de Mikhalkin llevó al desarrollo de los espacios de módulos tropicales y la teoría de intersección tropical en dichos espacios.

Para acabar veamos un ejemplo más de lo que se puede hacer con las curvas tropicales en la geometría enumerativa. Para los invariantes de Gromov-Witten $N_{0,d}$ para curvas racionales, es decir, con género $g = 0$, se ha podido probar que se satisface la siguiente recurrencia:

$$N_{0,d} = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1, d_2 > 0}} \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right) N_{0,d_1} N_{0,d_2}.$$

Usando ahora el principio de correspondencia de Mikhalkin, también Gathmann y Markwig [8] presentaron una prueba de esta fórmula mediante métodos tropicales. Lo que hicieron fue probar que el número de curvas tropicales simples de grado d y género 0 que pasan por $3d - 1$ puntos satisface la ecuación dada.

Ejemplo. A lo largo de esta sección hemos visto los valores de cuatro primeros números de Gromov-Witten de género cero.

$$N_{0,1} = 1, N_{0,2} = 3, N_{0,3} = 12, N_{0,4} = 620$$

Con estos valores, y utilizando la recursión que acabamos de enunciar, resulta sencillo calcular los siguientes, tarea complicada de otro modo.

$$N_{0,5} = \sum_{\substack{d_1+d_2=5 \\ d_1, d_2 > 0}} \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right) N_{0,d_1} N_{0,d_2} = 88664.$$

$$N_{0,6} = \sum_{\substack{d_1+d_2=6 \\ d_1, d_2 > 0}} \left(d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right) N_{0,d_1} N_{0,d_2} = 26825616.$$

Capítulo 3

Álgebra tropical

En este capítulo definimos el concepto de valoración sobre un cuerpo, y la utilizamos para definir un análogo tropical a los ideales y bases de Gröbner habituales.

3.1. Cuerpos y valoraciones

Sea K un cuerpo. Denotamos por K^* a los elementos no nulos de K . Una valoración en K es una función $\text{val} : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que satisface las tres condiciones siguientes:

- (1) $\text{val}(a) = \infty$ si y solo si $a = 0$.
- (2) $\text{val}(ab) = \text{val}(a) + \text{val}(b)$.
- (3) $\text{val}(a + b) \geq \min\{\text{val}(a), \text{val}(b)\}$ para todos $a, b \in K$.

A menudo identificamos una valoración K con su restricción $K^* \rightarrow \mathbb{R}$. La imagen de val es un subgrupo aditivo Γ_{val} de los números reales \mathbb{R} , llamado *grupo de valores* de (K, val) . Todo cuerpo K tiene una valoración trivial, definida por $\text{val}(a) = 0$ para todo $a \in K$. Dada una valoración val no trivial en K , podemos asumir que el grupo de valores Γ_{val} contiene el 1. Esto no es una restricción seria, dado que $(\lambda \cdot \text{val}) : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es también una valoración para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, y tiene la misma utilidad que la valoración val .

Lema 3.1.1 *Si $\text{val}(a) \neq \text{val}(b)$ entonces $\text{val}(a + b) = \min(\text{val}(a), \text{val}(b))$.*

Demostración. Podemos suponer que $\text{val}(b) > \text{val}(a)$. Dado que $1^2 = 1$, tenemos que $\text{val}(1) = 0$, y del mismo modo, dado que $(-1)^2 = 1$, tenemos que $\text{val}(-1) = 0$. Esto implica que $\text{val}(b) = \text{val}(-b)$ para todo $b \in K$. El tercer axioma implica que

$$\text{val}(a) \geq \min(\text{val}(a+b), \text{val}(-b)) = \min(\text{val}(a+b), \text{val}(b))$$

y por tanto $\text{val}(a) \geq \text{val}(a+b)$. Por otro lado tenemos

$$\text{val}(a+b) \geq \min(\text{val}(a), \text{val}(b)) = \text{val}(a)$$

y tenemos que $\text{val}(a+b) = \text{val}(a)$. Consideremos el conjunto de todos los elementos del cuerpo con valoración no negativa:

$$R = \{c \in K : \text{val}(c) \geq 0\}.$$

El conjunto R es un anillo local. Esto significa que R tiene un único ideal maximal:

$$m_K = \{c \in K : \text{val}(c) > 0\}.$$

El anillo cociente $\mathbb{k} = R/m_K$ es un cuerpo, conocido como cuerpo residual de (K, val) .

Ejemplo 3.1.1. Una de las motivaciones originales para el estudio de las valoraciones es la *valoración p -ádica* en el cuerpo $K = \mathbb{Q}$ de los racionales. Aquí p es un número primo, y la valoración $\text{val}: \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por $\text{val}_p(q) = k$ para $q = p^k a/b$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y p no divide ni a ni b . Por ejemplo,

$$\text{val}_2(4/7) = 2, \text{val}_3(17/27) = -3.$$

El anillo local R es la localización del anillo de los enteros \mathbb{Z} en el primo p . Sus elementos son los números racionales a/b donde p no divide a b . El ideal maximal m_K consiste en los racionales a/b donde p divide a pero no b . El cuerpo residual \mathbb{k} es el cuerpo finito con p elementos, denotado $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$.

Ejemplo 3.1.2. Sea K el cuerpo de las series de Puiseux con coeficientes complejos. Los elementos de este cuerpo son series formales de potencias

$$c(t) = c_1 t^{a_1} + c_2 t^{a_2} + c_3 t^{a_3} + \dots$$

donde los c_i son números complejos no nulos para todo i , y $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ son números racionales con un denominador común. Utilizamos la notación

$\mathbb{C}\{\{t\}\}$ para el cuerpo de las series de Puiseux sobre \mathbb{C} . Podemos escribir esto como la unión

$$\mathbb{C}\{\{t\}\} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{C}((t^{1/n}))$$

donde $\mathbb{C}((t^{1/n}))$ es el cuerpo de las series de Laurent en la variable formal $t^{1/n}$.

Este cuerpo tiene una valoración natural $\text{val}: \mathbb{C}\{\{t\}\}^* \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada elemento $c(t) \in \mathbb{C}\{\{t\}\}^*$ el menor exponente a_1 que aparece en la expansión en serie de $c(t)$. El cuerpo de las funciones racionales $\mathbb{C}(t)$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ dado que cada función racional $c(t)$ en una variable t tiene una expansión única como serie de Laurent en t . La valoración de una función racional $c(t)$ es un entero positivo si $c(t)$ tiene un cero en $t = 0$. Es un entero negativo si $c(t)$ tiene un polo en $t = 0$. Por tanto, $\text{val}(c(t))$ indica el orden del cero o el polo.

Veamos tres ejemplos para ilustrar la valoración en $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ y la inclusión de $\overline{\mathbb{C}(t)}$ en $\mathbb{C}\{\{t\}\}$.

$$c(t) = \frac{4t^2 - 7t^3 + 9t^5}{6 + 11t^4} = \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^5 + \dots \text{ tiene } \text{val}(c(t)) = 2.$$

$$c(t) = \frac{14t + 3t^2}{7t^4 + 3t^7 + 8t^8} = 2t^{-3} + \frac{3}{7}t^{-2} + \dots \text{ tiene } \text{val}(c(t)) = -3.$$

$$\pi = 3, 14159265358979 \dots \text{ tiene } \text{val}(\pi) = 0.$$

El siguiente teorema afirma que el cuerpo de las series de Puiseux es algebraicamente cerrado, de modo que tenemos una inclusión de $\overline{\mathbb{C}(t)}$ en $\mathbb{C}\{\{t\}\}$. Como ejemplo, consideremos las dos raíces de la ecuación $x^2 - x + t = 0$. Las raíces son

$$x_1(t) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4t}}{2} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} t^k \quad \text{con } \text{val}(x_1(t)) = 0.$$

$$x_2(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} t^k \quad \text{con } \text{val}(x_2(t)) = 1.$$

De manera similar, todo polinomio en una única variable con coeficientes en $\mathbb{C}(t)$ tiene sus raíces en $\mathbb{C}\{\{t\}\}$.

Observación. En este ejemplo podemos sustituir \mathbb{C} por cualquier otro cuerpo \mathbb{k} y construir el cuerpo $\mathbb{k}\{\{t\}\}$ de las series de Puiseux sobre \mathbb{k} . Si \mathbb{k} es algebraicamente cerrado de característica 0, también lo será $\mathbb{k}\{\{t\}\}$. Sin

embargo, si el cuerpo \mathbb{k} es algebraicamente cerrado de característica $p > 0$, entonces el cuerpo de las series de Puiseux $\mathbb{k}\{\{t\}\}$ no será algebraicamente cerrado. Más concretamente, el polinomio $x^p - x - t^{-1}$ no tiene raíces en $\mathbb{k}\{\{t\}\}$.

Teorema 3.1.1 *Dado \mathbb{k} un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0, el cuerpo $K = \mathbb{k}\{\{t\}\}$ de las series de Puiseux es también algebraicamente cerrado.*

Demostración. Tenemos que ver que, dado un polinomio $F = \sum_{i=0}^n c_i x^i \in K[x]$, existe $y \in K$ con $F(y) = \sum_{i=0}^n c_i y^i = 0$. Para ello describiremos un algoritmo que construye y añadiendo sucesivamente potencias cada vez mayores de t . Podemos asumir que F tiene las siguientes propiedades:

- (1) $\text{val}(c_i) \geq 0$ para todo i .
- (2) Existe j con $\text{val}(c_j) = 0$.
- (3) $c_0 \neq 0$.
- (4) $\text{val}(c_0) > 0$.

Para justificar (1) y (2), notemos que si $\alpha = \min\{\text{val}(c_i) : 0 \leq i \leq n\}$, entonces multiplicar F por $t^{-\alpha}$ no cambia la existencia de una raíz. Para (3), basta observar que si $c_0 = 0$, entonces $y = 0$ es una raíz y no tenemos que buscar más.

Para justificar (4), supongamos que F satisface los tres primeros supuestos pero $\text{val}(c_0) = 0$. Si $\text{val}(c_n) > 0$, entonces podemos construir $G(x) = x^n F(1/x) = \sum_{i=0}^n c_{n-i} x^i$, que tiene la forma que buscamos, y si $G(y') = 0$ para $y' \in K^*$, entonces $F(1/y') = 0$. Si $\text{val}(c_0) = \text{val}(c_n) = 0$, entonces consideramos $f = \overline{F} \in \mathbb{k}[x]$, es decir, la imagen de F módulo m_K . Esto no es una constante, dado que $\text{val}(c_n) = 0$. Dado que \mathbb{k} es algebraicamente cerrado, el polinomio f tiene una raíz $\lambda \in \mathbb{k}$. Entonces

$$\tilde{F}(x) = F(x + \lambda) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n c_j \binom{j}{i} \lambda^{j-i} \right)$$

tiene término constante $\tilde{F}(0) = F(\lambda)$ con valoración positiva, y \tilde{F} satisface las tres primeras propiedades. Si y' es una raíz de \tilde{F} , entonces $y' + \lambda$ es una raíz de F .

Llamemos $F_0 = F$. Construiremos la secuencia de polinomios $F_l = \sum_{i=0}^n c_i^l x^i$. Podemos asumir que cada uno de los F_l satisface las 4 propiedades anteriores

siguiendo el mismo razonamiento. Definimos el *diagrama de Newton* como la envolvente convexa en \mathbb{R}^2 del conjunto

$$\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \text{existe } k \text{ con } k \leq i, \text{val}(c_k^l) \leq j\}.$$

Este conjunto es una noción distinta, pero similar, al polígono de Newton definido anteriormente. De hecho, el diagrama de Newton es la suma de Minkowski del polígono de Newton y el cuadrante $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$.

El diagrama de Newton tiene una arista con pendiente negativa que conecta el vértice $(0, \text{val}(c_0^l))$ con un vértice $(k_l, \text{val}(c_{k_l}^l))$. Salvo el signo, dicha pendiente es

$$w_l = \frac{\text{val}(c_0^l) - \text{val}(c_{k_l}^l)}{k_l}$$

Sea f_l la imagen en $\mathbb{k}[x]$ del polinomio $t^{-\text{val}(c_0^l)} F_l(t^{w_l x}) \in K[x]$. Notemos que f_l tiene grado k_l y un término constante no nulo. Dado que \mathbb{k} es algebraicamente cerrado, podemos hallar una raíz λ_l de f_l . Sea r_{l+1} su multiplicidad.

Entonces $f_l(x) = (x - \lambda_l)^{r_{l+1}} g_l(x)$, donde $g_l(\lambda_l) \neq 0$. Definimos

$$F_{l+1}(x) = \sum_{j=0}^n c_j^{l+1} x^j := t^{-\text{val}(c_0^l)} F_l(t^{w_l}(x + \lambda_l)).$$

Los coeficientes c_j^{l+1} del nuevo polinomio $F_{l+1}(x)$ vienen dados por la fórmula

$$c_j^{l+1} = \sum_{i=j}^n c_i^l t^{i w_l - \text{val}(c_0^l)} \binom{i}{j} \lambda_l^{i-j}. \quad (3.1)$$

La imagen de esta serie en el cuerpo residual \mathbb{k} es

$$\overline{c_j^{l+1}} = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j f_l}{\partial x^j}(\lambda_l).$$

Para $0 \leq j < r_{l+1}$ esto es cero, dado que λ_l es una raíz de f_l de multiplicidad r_{l+1} . Para $j = r_{l+1}$ esto es no nulo. Entonces tenemos que $\text{val}(c_j^{l+1}) > 0$ para $0 \leq l < r_{l+1}$, y $\text{val}(c_j^{l+1}) = 0$ para $j = r_{l+1}$. Notemos que aquí utilizamos el hecho de que la característica de \mathbb{k} es cero.

Si $c_0^{l+1} = 0$, entonces $x = 0$ es una raíz de F_{l+1} , luego $\lambda_l t^{w_l}$ es una raíz de F_l . Mediante sucesivas sustituciones obtenemos que $\sum_{j=0}^l \lambda_j t^{w_0 + \dots + w_j}$ es una raíz de $F_0 = F$, y tendríamos lo que buscamos. Por tanto podemos asumir que $c_0^{l+1} \neq 0$ para cada l , luego F_{l+1} satisface las condiciones de (1) a (4) presentadas anteriormente. Esto asegura que podemos continuar nuestra construcción.

La observación anterior sobre $\text{val}(c_j^{l+1})$ implica que $k_{l+1} \leq r_{l+1} \leq k_l$. Dado que n es finito, el valor de k_l solo puede reducirse un número finito de veces. Por tanto, existen $k \in \{1, \dots, n\}$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $k_l = k$ para todo $l \geq m$. Esto significa que $r_l = k$ para todo $l > m$, de modo que $f_l = \mu_l(x - \lambda_l)^k$ para todo $l > m$, y algún $\mu_l \in \mathbb{k}$.

Sea N_l tal que $c_j^l \in \mathbb{k}((t^{1/N_l}))$ para $0 \leq j \leq n$. Por (3.1) podemos tomar N_{l+1} como el mínimo común múltiplo de N_l y el denominador de w_l . Queremos ver que $N_l + 1 = N_{l+1}$ para $l > m$. Ciertamente, tenemos que $w_l = \text{val}(c_0^l)/k$, luego basta ver que $\text{val}(c_0^l) \in \frac{k}{N_l}\mathbb{Z}$ para $l > m$. Dado que f_l es una potencia pura, tenemos que $\text{val}(c_j^l) = (k - j)\text{val}(c_{k-1}^l)$ para $0 \leq j \leq k$, y por tanto $\text{val}(c_{k-1}^l) = 1/k\text{val}(c_0^l)$ pertenece a $\frac{1}{N_l}\mathbb{Z}$. Ésto asegura que $y_l = \sum_{j=0}^l \lambda_j t^{w_0 + \dots + w_j}$ pertenece a $\mathbb{k}((t^{1/N_l}))$.

Hemos encontrado un N tal que $y_l \in \mathbb{k}((t^{1/N}))$ para todo l , luego el límite

$$y = \lim_{j \rightarrow \infty} y_j = \sum_{j \geq 0} \lambda_j t^{w_0 + \dots + w_j}$$

está contenido en $\mathbb{k}((t^{1/N}))$.

Falta mostrar que y es una raíz de F . Para ver ésto, consideremos $z_i = \sum_{j \geq i} \lambda_j t^{w_i + \dots + w_j}$, y notemos que $y = y_{l-1} + t^{w_0 + \dots + w_{l-1}}$. Tenemos que

$$F_l(z_l) = t^{\text{val}(c_0^l)} F_{l+1}(z_{l+1}).$$

Dado que $z_0 = y$, tenemos que

$$\text{val}(F(y)) = \sum_{j=0}^l \text{val}(c_0^j) + \text{val}(F_{l+1}(z_{l+1})) \geq \sum_{j=0}^l \text{val}(c_0^j) \quad \forall l > 0.$$

Puesto que $\text{val}(c_0^j) \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$, tenemos que $\text{val}(F(y)) = \infty$, luego $F(y) = 0$ como queríamos.

Observación. Cuando la característica de \mathbb{k} es 0, el cuerpo de las series de Puiseux $\mathbb{k}\{\{t\}\}$ es la clausura algebraica del cuerpo de las series de Laurent $\mathbb{k}((t))$.

3.2. Bases de Gröbner

En esta sección introduciremos las bases de Gröbner sobre un cuerpo K dotado de una valoración. En lo que sigue, el cuerpo K no necesita ser algebraicamente cerrado, pero asumimos que val escinde, es decir, existe un

homomorfismo de grupos abelianos $\phi : \Gamma_{\text{val}} \rightarrow K^*$, $w \mapsto t^w$. Así, t^w representa la imagen de w , y se tiene, por tanto, $t^{w+w} = t^w + t^w$ y t denota t^1 . Esta hipótesis es necesaria para definir bases de Gröbner.

Si $a \in K$ satisface $\text{val}(a) \geq 0$, de modo que $a \in R$, denotamos por \bar{a} la imagen de a en el cuerpo residual \mathbb{k} . La escisión ϕ garantiza que para cada elemento $a \in K^*$ tenemos un elemento no nulo $t^{-\text{val}(a)}a \in \mathbb{k}$. La función resultante es $K^* \rightarrow \mathbb{k}^*$ es un homomorfismo de grupos multiplicativos. Para un polinomio f con coeficientes en R , denotamos por \bar{f} al polinomio obtenido cambiando cada coeficiente a por \bar{a} .

Nuestro primer objetivo es definir bases de Gröbner para un ideal homogéneo en el anillo de polinomios $S = K[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Empecemos con un único polinomio $f = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}}$ en S . Fijemos un *vector peso* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$. La tropicalización de f es la función lineal a trozos $\text{trop}(f) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \min\{\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1} \text{ y } c_{\mathbf{u}} \neq 0\}.$$

$\text{trop}(f)$ es el polinomio tropical inducido por el polinomio clásico f . Sea $W = \text{trop}(f)(\mathbf{w})$. La *forma inicial* de f respecto a \mathbf{w} se define como

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W}} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})}} x^{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

Cuando $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n) \in \Gamma_{\text{val}}^{n+1}$, la forma inicial puede expresarse como

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \overline{t^{-W} \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}} c_{\mathbf{u}} t^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}} x^{\mathbf{u}}} = \overline{t^{-\text{trop}(f)(\mathbf{w})} f(t^{w_0} x_0, \dots, t^{w_n} x_n)}.$$

Ejemplo 3.2.1. Sea $f = (t + t^2)x_0 + 2t^2x_1 + 3t^4x_2 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}[x_0, x_1, x_2]$. Si $\mathbf{w} = (4, 2, 0)$, entonces $W = \min\{1+4, 2+2, 4+0\} = 4$, y $\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = 2x_1 + 3x_2$.

Si I es un ideal homogéneo en $\mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$, entonces su *ideal inicial* con respecto a \mathbf{w} se define como

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle \text{in}_{\mathbf{w}}(f) : f \in I \rangle \subset \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n].$$

La notación afirma que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ es el ideal en $\mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$ generado por los $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ cuando $f \in I$. Un conjunto $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_n\} \subset I$ es una *base de Gröbner* para I respecto de \mathbf{w} si $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle \text{in}_{\mathbf{w}}(g_1), \dots, \text{in}_{\mathbf{w}}(g_n) \rangle$

Proposición 3.2.1 *Sea $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo. Fijemos $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ es homogéneo, y podemos elegir una base de Gröbner homogénea para I . Además, si $f \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$, entonces $g = \text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ para algún $f \in I$.*

Demostración. Para ver que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ es homogéneo, consideremos $f = \sum_{i \geq 0} f_i \in S$ con cada f_i homogéneo de grado i . La forma inicial $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ es la suma de las formas iniciales de los f_i que cumplen $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \text{trop}(f_i)(\mathbf{w})$. Dado que cada componente homogéneo f_i pertenece a I , el ideal principal $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ está generado por elementos $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ con f homogéneo. La forma inicial de un polinomio homogéneo es homogénea, luego esto significa que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ es homogéneo. Dado que el anillo de polinomios es noetheriano, $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ está generado por un número finito de formas iniciales $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$, luego los polinomios f correspondientes forman una base de Gröbner homogénea para I . Para probar la última afirmación del enunciado, sea $g = \sum a_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}} \text{in}_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}}) \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$, con $a_{\mathbf{u}} \in \mathbb{k}^*$ y $f_{\mathbf{u}} \in I$ para todo \mathbf{u} . Entonces $g = \sum a_{\mathbf{u}} \text{in}_{\mathbf{w}}(x^{\mathbf{u}} f_{\mathbf{u}})$. Para cada $a_{\mathbf{u}}$ elegimos un $c_{\mathbf{u}} \in R$ con $\text{val}(c_{\mathbf{u}}) = 0$ y $\bar{c}_{\mathbf{u}} = a_{\mathbf{u}}$, y tomamos $W_{\mathbf{u}} = \text{trop}(f_{\mathbf{u}})(\mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$. Sea $f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} t^{-W_{\mathbf{u}}} x^{\mathbf{u}}$. Entonces por construcción $\text{trop}(f)(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$, y $\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\mathbf{u}} a_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}} \text{in}_{\mathbf{w}}(f) = g$.

Ejemplo 3.2.2. Sea $K = \mathbb{Q}$ con la valoración 2-ádica, luego $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Tomamos $n = 3$ y consideramos la recta en \mathbb{P}_K^3 definida por el ideal

$$I = \langle x_0 + 2x_1 - 3x_2, 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \rangle$$

Si $\mathbf{w} = (0, 0, 0, 0)$, entonces los dos generadores son una base de Gröbner y $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle x_0 + x_2, x_1 + x_3 \rangle$. Ésto es un ideal en el anillo de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $\mathbf{w} = (1, 0, 0, 1)$, entonces $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle x_1, x_2 \rangle$, y de nuevo podemos tomar los generadores como base de Gröbner. Cabe destacar que las bases de Gröbner no son únicas, por ejemplo, en este último caso $\langle x_2 + 7x_0 - 2x_1, x_1 - 10x_2 + x_3 \rangle$ es también una base de Gröbner.

Observación. Nuestra definición de bases de Gröbner está restringida a ideales polinómicos I homogéneos. Con esta restricción, cada base de Gröbner \mathcal{G} genera el ideal I . [9] Esta misma definición de bases de Gröbner tiene sentido para ideales polinómicos no homogéneos, aunque en general éstos no estarán generados por sus bases de Gröbner. Por ejemplo, $\mathcal{G} = \langle x - x^2 \rangle$ es una base de Gröbner para el ideal $I = \langle x \rangle$ en el anillo $K[x]$ para $w = 1$, pero \mathcal{G} no genera I .

El siguiente paso es iterar esta construcción, tomando formas iniciales de formas iniciales. En el iteración externa, aplicamos el operador $\text{in}_{\mathbf{v}}$ a un polinomio f con coeficientes en \mathbb{k} , tomando en \mathbb{k} la valoración trivial. Lo mismo hacemos en el lema 3.2.2 y el corolario 3.2.2 pero con ideales I en lugar de polinomios f .

Lema 3.2.1 *Sea $f \in K[x_0, \dots, x_n]$ y $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Existe $\epsilon > 0$ tal que para*

todo ϵ' con $0 < \epsilon' < \epsilon$ tenemos

$$\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f)) = \text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(f).$$

Demostración. Sea $f = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}}$. Entonces

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}: \\ \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W}} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - W} x^{\mathbf{u}}},$$

donde $W = \text{trop}(f)(\mathbf{w})$. Sea $W' = \min(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} : \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W)$. Entonces

$$\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f)) = \sum_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = W'} \overline{c_{\mathbf{u}} t^{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - W} x^{\mathbf{u}}}$$

Para todo $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tenemos que

$$\text{trop}(f)(\mathbf{w} + \epsilon\mathbf{v}) = \min(\text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \epsilon\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = W + \epsilon W'$$

y por tanto

$$\{\mathbf{u} : \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + (\mathbf{w} + \epsilon'\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = W + \epsilon W'\} = \{\mathbf{u} : \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = W, \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = W'\}.$$

Esto implica que $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(f) = \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{u}}(f))$ para todo ϵ' con $0 < \epsilon' < \epsilon$.

Más adelante veremos que esta igualdad se mantiene si sustituimos el polinomio f por cualquier ideal homogéneo I . El siguiente lema prueba una de las contenciones.

Lema 3.2.2 *Sea I un ideal homogéneo en $K[x_0, \dots, x_n]$, y sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces existen $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\epsilon > 0$ tales que $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$ y $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$ son ideales monomiales, y tenemos la contención $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \subseteq \text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$.*

Demostración . Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$, denotamos por $M_{\mathbf{v}}$ al ideal generado por todos los monomios en $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$, y por $M_{\mathbf{v}}^{\epsilon}$ al ideal generado por todos los monomios en $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$ para algún $\epsilon > 0$. Escogemos $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $M_{\mathbf{v}}$ maximal, de modo que no exista $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $M_{\mathbf{v}} \subsetneq M_{\mathbf{v}'}$. Ésto es posible dado que el anillo de los polinomios es Noetheriano. Si $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$ no es un ideal monomial, entonces existe $f \in I$ tal que ninguno de los términos de $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f))$ pertenece a $M_{\mathbf{v}}$. Elegimos $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ de modo que $\text{in}_{\mathbf{v}'}(\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f)))$ sea un monomio. Por el lema 3.2.1 existe $\epsilon' > 0$ para el cual $\text{in}_{\mathbf{v}+\epsilon'\mathbf{v}'}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f))$ es este monomio. Aplicando el lema 3.2.1 a $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ tenemos que para ϵ' suficientemente pequeño, el ideal $\text{in}_{\mathbf{v}+\epsilon'\mathbf{v}'}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$ contiene cada

generador $x^{\mathbf{u}}$ de $M_{\mathbf{v}}$, dado que $x^{\mathbf{u}} = \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f))$ para algún $f \in I$. Esto contradice la elección de \mathbf{v} , luego concluimos que $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) = M_{\mathbf{v}}$ para esta elección de \mathbf{v} .

Sea $M_{\mathbf{v}} = \langle x^{\mathbf{u}_1}, \dots, x^{\mathbf{u}_s} \rangle$, y escojamos f_1, \dots, f_s con $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f_i)) = x^{\mathbf{u}_i}$. Aplicando el lema 3.2.1, existe $\epsilon > 0$ con $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(f_i) = x^{\mathbf{u}_i}$ para todo i . Para dicho ϵ tenemos que $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \subseteq \text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$. Podemos asumir que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ha sido elegido de modo que $M_{\mathbf{v}}^{\epsilon}$ sea lo más grande posible, es decir, no existe \mathbf{v}' tal que $M_{\mathbf{v}} = M_{\mathbf{v}'}$ y $M_{\mathbf{v}}^{\epsilon} \subsetneq M_{\mathbf{v}'}^{\epsilon}$. De nuevo, si $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(f) \in M_{\mathbf{v}}^{\epsilon}$ no es monomial, entonces existe $f \in I$ tal que ningún término de $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(f)$ pertenece a $M_{\mathbf{v}}^{\epsilon}$. Razonando de manera similar al caso anterior, escogemos \mathbf{v}' de modo que $M_{\mathbf{v}}^{\epsilon} \subsetneq M_{\mathbf{v}+\epsilon'+\mathbf{v}'}^{\epsilon}$ para un ϵ' lo bastante pequeño. Además, para ϵ' lo bastante pequeño tenemos que $M_{\mathbf{v}} = M_{\mathbf{v}+\epsilon'+\mathbf{v}'}$. De esta contradicción obtenemos que $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$ es un ideal monomial. Entonces tenemos la inclusión $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \subseteq \text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$.

En lo que sigue denotaremos por $S_K = K[x_0, \dots, x_n]$ y $S_{\mathbb{k}} = \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$ a los anillos de polinomios que contienen un ideal homogéneo dado I y a sus varios ideales iniciales $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$. Mediremos el tamaño de estos ideales mediante sus *funciones de Hilbert*. Dichas funciones son funciones numéricas $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $d \mapsto \dim(S_K/I)_d$. Para un d lo suficientemente grande, las funciones de Hilbert concuerdan con un polinomio (llamado *polinomio de Hilbert*) cuyo grado es uno menos que la dimensión de Krull del cociente del anillo polinómico modulo dicho ideal. Las bases de Gröbner se utilizan para calcular invariantes de I que se pueden encontrar en las funciones de Hilbert, tales como la dimensión, puesto que la función de Hilbert de un ideal y la de su ideal inicial coinciden en grado y en género, como veremos a continuación. Apliquemos esto a nuestra teoría de bases de Gröbner.

Proposición 3.2.2 *Sea $I \subseteq S_K$ un ideal homogéneo, y sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$ está generado sobre \mathbb{k} por sus monomios. Entonces los monomios $x^{\mathbf{u}}$ de grado d que no están en $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ forman una K -base para $(S_K/I)_d$.*

Demostración. Sea \mathcal{B}_d el conjunto de monomios de grado d no contenidos en $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$. Veamos primero que la imagen de \mathcal{B}_d en $(S_K/I)_d$ es linealmente independiente sobre K . Esto implicaría que $\dim_{\mathbb{k}} \text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d \geq \dim_K I_d$ dado que $|\mathcal{B}_d| = \binom{n+d}{n} - \dim_{\mathbb{k}} \text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$. De ser dicho conjunto linealmente dependiente existiría $f = \sum c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}} \in I_d$, con $x^{\mathbf{u}} \notin \text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ para cada $c_{\mathbf{u}} \neq 0$. Tenemos entonces que $\text{in}_{\mathbf{w}}(f) \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$, y por tanto cada término de $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ está en $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$, lo cual contradice la construcción de f .

Nos falta ver que el conjunto de los monomios $x^{\mathbf{u}}$ de grado d que no están en $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ generan $(S_K/I)_d$. Para cada monomio $x^{\mathbf{u}} \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$, elegimos $f_{\mathbf{u}} \in$

I_d con $\text{in}_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}}) = x^{\mathbf{u}}$. Dicha elección es posible gracias a la proposición 3.2.1. Notemos que el conjunto $\{f_{\mathbf{u}} : x^{\mathbf{u}} \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d\}$ es linealmente independiente en S_K . De no serlo, existirían $a_{\mathbf{u}} \in K$ no todos nulos con $\sum a_{\mathbf{u}} f_{\mathbf{u}} = 0$. Escribimos $f_{\mathbf{u}} = x^{\mathbf{u}} + \sum c_{\mathbf{u}\mathbf{v}} x^{\mathbf{v}}$. Sea \mathbf{u}' que minimiza $\text{val}(a_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{n+1}$ con $x^{\mathbf{u}} \in \text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$. Entonces $a_{\mathbf{u}'} + \sum_{\mathbf{u} \neq \mathbf{u}'} a_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}\mathbf{u}'} = 0$, luego existe $\mathbf{u}'' \neq \mathbf{u}'$ con $\text{val}(a_{\mathbf{u}''}) + \text{val}(c_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}) \leq \text{val}(a_{\mathbf{u}'})$. Entonces $\text{val}(a_{\mathbf{u}''}) + \text{val}(c_{\mathbf{u}''\mathbf{u}'}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}' \leq \text{val}(a_{\mathbf{u}'}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}' \leq \text{val}(a_{\mathbf{u}''}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}''$, lo cual contradice que $\text{in}_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}''}) = x^{\mathbf{u}''}$. Esto muestra que $\dim_K I_d \geq \dim_{\mathbb{k}} \text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d$. Entonces tenemos que $\dim_K(S_K/I)_d = \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/\text{in}_{\mathbf{w}}(I))_d$, y \mathcal{B}_d es una K -base para $(S_K/I)_d$.

Corolario 3.2.1 *Para cualquier $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ y cualquier ideal homogéneo I en S_K , la función de Hilbert de I coincide con la de su ideal inicial $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) \subset S_{\mathbb{k}}$, es decir,*

$$\dim_K(S_K/I)_d = \dim(S_{\mathbb{k}}/\text{in}_{\mathbf{w}}(I))_d \quad \forall d \geq 0$$

Esto implica que las dimensiones de Krull de los anillos S_K/I y $S_{\mathbb{k}}/\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ coinciden.

Demostración. Aplicando el lema 3.2.2 tenemos que existen $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\epsilon > 0$ con $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \subseteq \text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)$, siendo ambos ideales monomiales. Sea $x^{\mathbf{u}} \in \text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)_d \setminus \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))_d$. Por la proposición 3.2.2, los monomios no presentes en $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)_d$ generan $(S/I)_d$. Entonces existe un polinomio $f_{\mathbf{u}} = x^{\mathbf{u}} - f'_{\mathbf{u}} \in I_d$ donde ninguno de los monomios de $f'_{\mathbf{u}}$ pertenecen a $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)_d$. Entonces $\text{in}_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}})$ contiene únicamente monomios que no pertenecen a $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$, luego $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f_{\mathbf{u}})) \notin \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))_d$. De esta contradicción concluimos que $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I)_d = \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))_d$. Aplicando la proposición 3.2.2 a $\text{in}_{\mathbf{w}}(I)$ obtenemos

$$\dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/\text{in}_{\mathbf{w}}(I)_d) = \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)))_d.$$

Aplicándolo a I , obtenemos $\dim_K(S_K/I)_d = \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon\mathbf{v}}(I))_d$. Luego tenemos que, para cualquier $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\dim_K(S_K/I)_d = \dim_{\mathbb{k}}(S_{\mathbb{k}}/\text{in}_{\mathbf{w}}(I))_d$ para todos los grado d .

Corolario 3.2.2 *Sea I un ideal homogéneo en $K[x_0, \dots, x_n]$. Para cualesquiera $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) = \text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(I) \quad \forall 0 < \epsilon' < \epsilon.$$

Demostración. Sea $\{g_1, \dots, g_s\} \subset \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$ un generador de $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$, donde cada elemento g_i es de la forma $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f_i))$ con $f_i \in I$. Por el lema 3.2.1, existe $\epsilon > 0$ tal que $g_i = \text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(f_i)) = \text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(f_i)$ para $i = 1, \dots, s$ y para $0 < \epsilon' < \epsilon_i$. Esto implica que $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \subseteq \text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(I)$. Por el corolario 3.2.1, los dos ideales $\text{in}_{\mathbf{v}}(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$ y $\text{in}_{\mathbf{w}+\epsilon'\mathbf{v}}(I)$ tienen la misma función de Hilbert que I , luego la contención no puede ser estricta.

Ejemplo 3.2.3. La función de Hilbert del ideal en el ejemplo 3.2.2 es

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, x_3]/I)_d = \dim_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[x_0, x_1, x_2, x_3]/\text{in}_{\mathbf{w}}(I))_d = d + 1$$

En este caso $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es el cuerpo de dos elementos. El polinomio de Hilbert $d + 1$ nos muestra que las variedades proyectivas $V(I)$ y $V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I))$ tienen ambas dimensión 1 y grado 1. Ambas son líneas rectas en $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$ y en $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^3$ respectivamente.

Bibliografía

- [1] Diane Maclagan, Bernd Sturmfels *Introduction to tropical geometry* Providence: American mathematical Society, cop. 2015.
- [2] Harold W. Kuhn, *The Hungarian method for the assignment problem*, Naval Res. Logist. Quart. 2 (1955), 83-97.
- [3] David Cox, John Little, and Donald O’Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, third ed., Undergraduate Text in Mathematics, Springer, New York, 2007, an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.
- [4] Grigory Mikhalkin *Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2* , J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 2, 313-377.
- [5] Israel M. Gel’fand, Mikhael M. Kapranov, and Andrei V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Birkhäuser, Boston, 2008.
- [6] Andreas Gathmann and Hannah Markwing *The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry*, Math. Ann. 338 (2007), no. 4, 845-868
- [7] Andreas Gathmann and Hannah Markwing *The numbers of tropical plane curves through points in general position*, J. Reine Angew. Math. 602 (2007), 155-177.
- [8] Andreas Gathmann and Hannah Markwing *Kontsevich’s formula and the WDVV equations in tropical geometry*, Adv. Math. 217 (2008), no. 2, 537-560.
- [9] Andrew J. Chan and Diane Maclagan, *Gröbner bases over fields with valuations*, arXiv:1303.00729, 2012.
- [10] Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin, Eugenio I. Shustin *Tropical Algebraic Geometry* Springer Science & Business Media, (2009).