Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Semigrupos numéricos y sus lagunas.

Autor: Sergio Martínez Durán

Tutor: Philippe Gimenez

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar los semigrupos numéricos, que son una clase especial de semigrupos, y su conjunto de lagunas. Un semigrupo numérico es un subconjunto de $\mathbb{N}_0$ (el conjunto de los enteros positivos con el 0) cerrado por suma y de complemento finito. El complemento de un semigrupo numérico es su conjunto de lagunas. La noción de semigrupo está relacionada con el problema de determinar los enteros positivos que pueden ser expresados como $x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_rn_r$ para un conjunto dado $\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ de enteros positivos y para enteros no negativos arbitrarios $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Este problema fue investigado por grandes matemáticos como Frobenius o Sylvester a finales del siglo XIX. A mediados del siglo XX este problema resurgió por sus aplicaciones en Geometría Algebraica. Las curvas monomiales afines, que vienen definidas con una parametrización asociada a un semigrupo numérico, forman una familia importante de variedades algebraicas y proporcionan una fuente inagotable de ejemplos donde muchos de los problemas álgebro-geométricos pueden tener una solución aritmética o combinatoria. También tiene conexiones concretas para resolver problemas en campos a priori tan alejados como la música. El problema concreto que nos interesará en este trabajo es el de contar el número de semigrupos numéricos con un número de lagunas dado.

En esta memoria hay tres capítulos. En el primero voy a introducir nociones básicas para entender el concepto de semigrupo numérico, dando en particular distintas caracterizaciones e introduciendo diferentes características importantes de estos semigrupos como su multiplicidad, su número de Frobenius, su conductor, su género (número de lagunas) y su profundidad. Explicaremos de manera detallada como construir el árbol de los semigrupos numéricos, una interesante herramienta para contar semigrupos numéricos. Presentaremos distintas versiones de esta noción. También en este capítulo presentaremos uno de los principales objetivos que es mostrar algunas de las numerosas conjeturas que hay en este ámbito, en especial la que formuló María Bras-Amorós en 2008 y que es la motivación central de este trabajo. Esta conjetura nos presenta la sucesión que cuenta el número de semigrupos de cada género g, denotada $(n_g)_{g\geq 0}$, y nos dice que satisface que $n_{g+2} \geq n_{g+1} + n_g$ para todo $g \geq 0$. Incluso la propiedad más débil $n_{g+1} \geq n_g$ sigue siendo una conjetura. Además introduciremos una partición del conjunto de lagunas y las nociones de extensión y filtración que ayudarán más adelante a contar los semigrupos numéricos. Los libros que he tomado como referencia en este capítulo han sido [1] y [7]. También he utilizado el artículo [5] donde se introducen los conjuntos de lagunas y sus propiedades.

En el segundo capítulo, daremos una cota superior y una cota inferior de n_g, esta última más cercana a la conjetura de María Bras-Amorós. Veremos que n_g posee una cota inferior relacionada con la sucesión de Fibonacci, más concretamente que es mayor que $2a_g$ siendo a_i el i-ésimo término de la sucesión de Fibonacci y que tiene como cota superior $1 + 3 \cdot 2^{g-3}$. Es decir, demostraremos que $2a_g \leqslant n_g \leqslant 1+3\cdot 2^{g-3}$ para todo $g \geq 0$. Para llegar a este resultado construiremos un subárbol y un superárbol del árbol de semigrupos numéricos introducido en el capítulo anterior. En este capítulo también introduciremos una división de los semigrupos numéricos en ordinarios y no ordinarios y destacaremos su importancia en el conteo de semigrupos numéricos.

En el tercer y último capítulo, se tratarán resultados de Eliahou y Fromentin obtenidos recientemente en [5] entorno a la conjetura de María Bras-Amorós. Veremos primero que si nos fijamos únicamente en los semigrupos de profundidad menor o igual que 2, entonces la conjetura se cumple. Es más, en este caso se da la igualdad por lo que podemos afirmar que el número de semigrupos de género g y profundidad menor igual que 2 es exactamente igual al término $g + 1$ de la sucesión de Fibonacci. Fijándonos a continuación sólo en los semigrupos de profundidad menor o igual que 3, demostraremos que la conjetura también se cumple. Este caso es importante ya que, al tratarse de una condición más débil que la anterior, el número de semigrupos que abarca es mayor. Además, veremos que casi todos los semigrupos numéricos tienen profundidad menor o igual que 3 por lo que el avance en la resolución de la conjetura presentado aquí es significativo. También se demostrará que para los semigrupos de profundidad menor o igual que 3, el g-ésimo término de la succesión que cuenta los semigrupos de género dado no sólo está acotado inferiormente por la suma de los dos términos anteriores (conjetura de María Bras-Amorós), sino que también está acotado superiormente por la suma de los tres términos anteriores. Deduciremos con la ayuda de las cotas anteriores, una nueva cota inferior y otra superior para los mismos. La cota inferior es una restricción mayor a la cota deducida en el capítulo 2, acotando los semigrupos de profundidad menor o igual que 3 inferiormente por $2a_g$ y superiormente por el término $g + 1$-ésimo de la sucesión de Tribonacci. En la demostración de estos resultados, utilizaremos las nociones de filtración y extensión así como la partición del conjunto de lagunas introducidas en el primer capítulo.

Capítulo 1

Introducción a los semigrupos numéricos

En este capítulo comenzaremos dando unos conceptos previos relacionados con semigrupos numéricos para entender bien el concepto. Daremos las propiedades básicas de los mismos e introduciremos la noción de conjunto de lagunas. Explicaremos algunas conjeturas relacionadas con estos términos entre la que se encuentra la conjetura de María Bras-Amorós. Introduciremos también los árboles de semigrupos numéricos que necesitaremos en el capítulo 2. Veremos que existe una partición siempre para los conjuntos de lagunas y daremos una importante notación para el capítulo 3.

1.1. Conceptos básicos

1.1.1. Semigrupos numéricos y sus lagunas

Vamos a comenzar dando unas definiciones previas:

Notación 1.1.1. Denotaremos a los números naturales $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (incluyendo el 0), y al conjunto de los números naturales sin incluir el 0 como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Definición 1.1.2. Un semigrupo es un par $(M, *)$ que es cerrado para la operación $*$ y para la misma operación verifica la propiedad asociativa.

Definición 1.1.3. Un monoide $(M, *)$ es un semigrupo que además posee elemento neutro. Un subconjunto H de M sera un submonoide si es cerrado para la operación $*$ y además el elemento neutro de M está en H.

Un ejemplo sencillo de monoide sería el de los números naturales con la operación suma $(\mathbb{N}_0, +)$, que además posee la propiedad conmutativa y no tiene unidades distintas de 0.

Definición 1.1.4. Sea $X \subset \mathbb{N}_0$. El subgrupo de $\mathbb{Z}$ generado por X denotado por $\sigma(X)$ será:

$$\sigma(X) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i : k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Z}, a_i \in X\} \subset \mathbb{Z}.$$

Definición 1.1.5. Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}_0$. Denotamos como $\langle X \rangle$ al submonoide de $\mathbb{N}_0$ generado por X que será:

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i : s \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{N}_0, a_i \in X \right\} \subset \mathbb{N}_0.$$

Ahora pasaremos a definir lo que es un semigrupo numérico:

Definición 1.1.6. Un submonoide S de $(\mathbb{N}_0, +)$ será un semigrupo numérico si $1 \in \sigma(S)$.

También podemos caracterizar los semigrupos numéricos como aquellos submonoides de $(\mathbb{N}_0, +)$ que sean cofinitos en $\mathbb{N}_0$. De hecho, esta es la forma más común de definirlos.

Proposición 1.1.7. *Sea S un submonoide de $(\mathbb{N}_0, +)$. Entonces S es un semigrupo numérico sí y sólo sí $\mathbb{N}_0 \setminus S$ es finito.*

Demostración. $\Rightarrow$) Como $1 \in \sigma(S)$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$ y $a_1, \ldots, a_k \in S$ tales que $1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad (reordenando los índices de forma conveniente), que $\lambda_1, \ldots, \lambda_t < 0$ y $\lambda_{t+1}, \ldots, \lambda_k \geq 0$. Definimos ahora $s = \sum_{i=1}^{t} -\lambda_i a_i$, como $-\lambda_i$ es positivo para $i \in 1, \ldots, t$ y S es cerrado para la operación suma deducimos que $s \in S$. Además $1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i a_i + \sum_{i=t+1}^{k} \lambda_i a_i = -s + \sum_{i=t+1}^{k} \lambda_i a_i$, de donde $s + 1 = \sum_{i=t+1}^{k} \lambda_i a_i$ y razonando igual que para s, deducimos que $s + 1 \in S$.

Veamos ahora que, para todo $n \geq (s-1)(s+1)$, tenemos que $n \in S$. Sea entonces un $n \geq (s-1)(s+1)$. Si utilizamos el algoritmo de la división para n y s, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $n = qs + r$ con $s > r \geq 0$. De como hemos tomado n, deducimos que $n = qs + r \geq (s-1)(s+1) = s(s-1) + (s-1)$. Como $r < s$ y $r \in \mathbb{Z}$ tenemos que $r \leq s-1$ y de la desigualdad anterior obtenemos que $q \geq s-1$ con lo que q es un entero positivo. De todo esto deducimos que $n = qs + r = r(s+1) + s(q-r)$ sumando y restando rs. Y como $s, (s+1) \in S$ y S es cerrado para la suma tenemos que $n \in S$. Por tanto $\mathbb{N}_0 \setminus S$ es finito.

$\Leftarrow$) Como $\mathbb{N}_0 \setminus S$ es finito tiene que existir un $s \in S$ tal que $(s+1) \in S$. Si definimos ahora $a_1 = s$, $a_2 = (s+1)$, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$ entonces $1 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i a_i \in \sigma(S)$ y S es un semigrupo numérico. □

Veremos ahora otra caracterización importante de los semigrupos numéricos. Para ello definimos la siguiente noción introducida recientemente en [5].

Definición 1.1.8. Un conjunto de lagunas (usualmente llamados "gapsets") es un conjunto finito $G \subset \mathbb{N}$ que cumple la siguiente propiedad:

$$\forall z \in G, \text{ si } z = x + y \text{ con } x, y \in \mathbb{N}, \text{ entonces o } x \in G, \text{ o } y \in G.$$

Proposición 1.1.9. *Sea $S \subset \mathbb{N}_0$. Entonces S es un semigrupo numérico sí y sólo sí $\mathbb{N}_0 \setminus S$ es un conjunto de lagunas (y lo llamaremos conjunto de lagunas asociado a S, o simplemente conjunto de lagunas de S).*

Llamaremos lagunas de S a los elementos de $\mathbb{N}_0 \setminus S$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea S un semigrupo numérico. Como $0 \in S$ tenemos que $G = \mathbb{N}_0 \setminus S$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$ y es finito por la Proposición 1.1.7. Sea ahora $z = x + y \in G$, con $x, y \in \mathbb{N}$. Si $x \notin G$ e $y \notin G$ entonces $x, y \in S$ y como S es cerrado para la suma tenemos que $z \in S$ lo que es absurdo. De donde $x \in G$ o $y \in G$ y por tanto G es un conjunto de lagunas.

$\Leftarrow$) Sean G un conjunto de lagunas y $S = \mathbb{N}_0 \setminus G$. Por la definición de conjunto de lagunas, G es un conjunto finito de $\mathbb{N}$, de donde deducimos que S es cofinito en $\mathbb{N}_0$. Tenemos que ver ahora que es submonoide de $(\mathbb{N}_0, +)$. $0 \in S$ porque G está contenido en los naturales sin incluir el 0. Veamos ahora que es cerrado para la suma. Sean $x, y \in S$. Si $x + y \notin S$ tenemos que $x + y \in G$ y por la definición de conjunto de lagunas sabemos que $x \in G$ o $y \in G$, lo que es absurdo. De donde $x + y \in S$. Luego S es un submonoide de $(\mathbb{N}_0, +)$ y como $\mathbb{N}_0 \setminus S = G$ es finito, por la Proposición 1.1.7, S es un semigrupo numérico. □

Corolario 1.1.10. *Sea $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{N}_0$. Entonces $S = \langle A \rangle$, el submonoide de $\mathbb{N}_0$ generado por A, es un semigrupo numérico sí y sólo sí $\mathrm{mcd}(a_1, \ldots, a_k) = 1$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que S es un semigrupo numérico. Vamos a denotar $d = \text{mcd}(a_1, \ldots, a_k)$. Si $s \in A$, por definición $d|s$. Como $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico, $\mathbb{N}_0 \setminus \langle A \rangle$ es finito y por lo tanto debe existir un entero z tal que $z \in S$ y $z + 1 \in S$. Entonces, $d|z$ y $d|z + 1$ lo que obliga a d a ser igual a 1.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\text{mcd}(a_1, \ldots, a_k) = 1$. Por la identidad de Bezout sabemos que existen $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ y por tanto $1 \in \sigma(\langle A \rangle)$. □

Además siempre que tengamos un submonoide de $\mathbb{N}_0$ podemos generar un semigrupo numérico a partir de un isomorfismo.

Proposición 1.1.11. *Sea S un submonoide de $\mathbb{N}_0$. Entonces, S es isomorfo a un semigrupo numérico.*

Demostración. Voy a denominar d al máximo común divisor de los elementos de S, es decir, $d = \text{mcd}(S)$ que coincide con el generador del grupo generado por S en $\mathbb{Z}$ dado que cualquier $s \in S$ se puede escribir como $s = da$ para algún $a \in \mathbb{N}_0$. Defino ahora $\left\{\frac{s}{d} | s \in S\right\}$ y lo denoto como S' que es un semigrupo numérico debido a que $\text{mcd}(S') = 1$ y por el Corolario 1.1.10. Y además la aplicación $\phi : S \to S'$ definida por $\phi(s) = \frac{s}{d}$ es un isomorfismo. □

Ejemplo 1.1.12. Un ejemplo sería el dinero que podemos retirar de un cajero en el que solo nos permite sacar billetes de 20 € y 50 €. Si definimos ahora $d = \text{mcd}(20, 50) = 10$ y usamos la aplicación definida en la prueba anterior $\phi : S \to S'$ para $\phi(s) = \frac{s}{10}$ entonces obtenemos el semigrupo numérico S' generado por 2 y 5, es decir, $S' = \langle 2, 5 \rangle = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$. El conjunto de lagunas asociado de S' será $G = \{1, 3\}$. Nunca podrás obtener dinero que no sea múltiplo de 10 € en este cajero pero podrás obtener todos los múltiplos de 10 excepto el propio 10 y 30.

Definición 1.1.13. Sea G el conjunto de lagunas de un semigrupo numérico S. Denotaremos $g = |G|$ al cardinal de G y lo llamaremos género de S.

Definición 1.1.14. Sea S un semigrupo numérico. Llamaremos multiplicidad de S al menor elemento de S distinto de 0. Se denotara con $m(S)$ y, si no hay confusión posible, lo denotaré simplemente por m.

Definición 1.1.15. Sea S un semigrupo numérico y $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset S$. Diremos que los elementos de A son generadores de S si $S = \langle A \rangle = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. Además diremos que son generadores minimales cuando no pueden ser obtenidos como la suma de dos elementos de S estríctamente más pequeños.

Proposición 1.1.16. *Todo semigrupo numérico es finitamente generado.*

Demostración. Sea A un sistema de generadores para S. Siempre existe alguno pues el propio S es un sistema de generadores trivial para sí mismo. La multiplicidad m debe estar en A ya que por definición no puede existir otro elemento más pequeño y por tanto no puede ser generado por otros. En otras palabras, m tiene que formar parte de todo sistema de generadores de S. Para cualesquiera a, b dos elementos de A escogidos de la forma que $a < b$ y $a \equiv b \mod m$. Se tiene que $b = km + a$ para algún entero positivo k. De esta forma, podemos eliminar b del sistema de generadores pues puede generarse por a y m. Empleando esta idea de manera recursiva podemos llegar a un sistema de generadores en el que no haya dos elementos congruentes módulo m. Por lo tanto el cardinal de este sistema de generadores no puede ser superior a m y será finito. □

1.1.2. Número de Frobenius y profundidad

Definición 1.1.17. Sea S un semigrupo numérico. Llamaremos número de Frobenius de S a $f = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, es decir a la mayor de sus lagunas. Al entero $c = f + 1$ le llamaremos conductor de S.

Este nombre surgió a raíz de que Frobenius propuso el problema de la moneda (también llamado problema de Frobenius) que consiste en averiguar cual es la mayor cantidad de dinero que no puede obtenerse utilizando solo monedas de denominaciones específicas (es decir, cual es el número de Frobenius del semigrupo numérico generado por las unidades de las monedas que podemos usar). Este problema tiene solución sí y sólo sí el máximo común divisor del conjunto de denominaciones de la moneda es igual que 1 (o lo que es lo mismo, que estos generadores formen un semigrupo numérico por el Corolario 1.1.10). Podemos notar que el Ejemplo 1.1.12 es un caso particular de este problema en el que de primeras no tenía solución.

Otra versión del mismo problema se materializa con cajas de “chicken nuggets”si nos preguntamos cual es la mayor cantidad de “chicken nuggets” a la cual que no podemos llegar con cajas de “chicken nuggets”de un determinado tamaño.

Nota 1.1.18. Nótese que $f = c - 1 \notin S$, pero $c + \mathbb{N}_0 \subset S$ por definición.

El único caso en el que f no pertenece a $\mathbb{N}_0$ es cuando $S = \mathbb{N}_0$. Por definición el número de Frobenius de $\mathbb{N}_0$ es $f = \max(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0) = -1$.

A finales del siglo XIX, se proporcionó una fórmula para calcular el número de Frobenius para un semigrupo numérico formado por dos elementos.

Proposición 1.1.19. *Sea $S = \langle a, b\rangle$ un semigrupo numérico generado por dos elementos. Entonces el número de Frobenius de este semigrupo es $f = ab - (a + b)$.*

Demostración. Sea $S = \langle a, b\rangle$ un semigrupo numérico generado por dos elementos. Por el Corolario 1.1.10 tenemos $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$ y por la Identidad de Bezout existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = aq + rb$. Entonces sea $f \in \mathbb{Z}$ cualquiera y multiplicando la igualdad anterior por f podemos reescribir la igualdad anterior. Es decir, existen $q', r' \in \mathbb{Z}$ tales que $f = aq' + r'b$. Nótese que f puede representarse de diferentes maneras pero la representación se vuelve única si imponemos que $0 \leq q' < b$. En este caso f es representable si $r' \geq 0$ y no representable si $r' < 0$. De donde podemos deducir que el mayor número no representable es $q' = b - 1$ y $r' = -1$. Es decir, el mayor número que no podemos generar mediante sumas de a y b es $f = (b-1)a+(-1)b = ab-a-b$ y por tanto el número de Frobenius. □

Nota 1.1.20. El origen de este famoso resultado es incierto pero normalmente se atribuye a Sylvester debido a su trabajo publicado en *Educational Times*, **41** (1884), 21 y *Americal Journal of Mathematics*, **5** (1882), 141-152. Aunque en estos artículos no aparece la Proposición, aparece un Teorema más fuerte en el que se puede entender que Sylvester conocía este resultado.

Para calcular f cuando hay 3 generadores el problema se vuelve más complicado. Curtis demostró que para este caso no existe una fórmula polinomial como para 2 generadores en *Mathematica Scandinavica*, **67** (1990) 190-192. En consecuencia, tampoco existirá una fórmula en caso de que haya más de 3 generadores.

Aunque no exista una fórmula, podemos observar en [6] que existen diferentes algoritmos para el caso de 3 generadores como los algoritmos de Rødseth y Davison o el método de Killingbergtrø. Además también existen otros algoritmos para el caso general (3 o más generadores) como pueden ser el algoritmo de Greengberg o el de Wilf o el método de Kannan.

En muchos casos cuándo el conjunto de lagunas de un semigrupo numérico es grande es difícil de calcular el número de Frobenius y el género del semigrupo numérico, y para facilitarlo en muchas ocasiones se usa un determinado sistema de generadores que se conoce como base estándar para el semigrupo numérico y que está asociado a otra noción importante para los semigrupos numéricos que es la de conjunto de Apéry.

Definición 1.1.21. Sea S un semigrupo numérico y $n \in S \setminus \{0\}$. Se define el conjunto de Apéry de S con respecto a n como $\{s \in S : s - n \notin S\}$ y se denota como $\mathrm{Ap}(S, n)$.

Se denomina base estándar de S a $\{m\} \cup (\text{Ap}(S, m))\backslash\{0\})$ siendo m la multiplicidad del semigrupo numérico S.

Entenderemos más tarde con la Proposición 1.1.23 porque este conjunto se llama base estándar.

Estos conjuntos fueron introducidos por Roger Apéry en *Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques* (1946), donde mostró varias propiedades de estos conjuntos entre los que se incluye el siguiente lema.

Lema 1.1.22. *Sea S un semigrupo numérico y $n \in S \setminus \{0\}$. Para cada $i \in \{1, \dots n\}$ definimos $w(i)$ como el menor elemento de S de forma que $w(i) \equiv i \mod n$. Entonces,*

$$\text{Ap}(S, n) = \{0, w(1), \dots, w(n-1)\}.$$

Demostración. $\subset$) Sean $a, b \in \text{Ap}(S, n)$. Si $a \equiv b \mod n$ llegamos a que tendrían que ser el mismo número y con esto cubrimos todas las posibles congruencias módulo n ya que $n \in S$.

$\supset$) Sea $i \in \{1, \dots n-1\}$. $w(i)$ pertenece a S por como lo hemos definido. Para que $w(i) \in \text{Ap}(S, n)$ falta ver que $w(i) - n \notin S$, pero desde que $w(i) \equiv i \mod n$ se ve que $w(i) - n \equiv i \mod n$ y dada la minimalidad de $w(i)$ concluimos. □

Gracias a este lema podemos ver que en muchos casos también facilita ver si un número pertenece o no al semigrupo numérico.

El uso de las bases estándares tiene muchas ventajas, entre ellas está el hecho de la unicidad como veremos en la siguiente Proposición.

Proposición 1.1.23. *Sea S un semigrupo numérico y $n \in S \setminus \{0\}$. Para cada $s \in S$ existe un único par $(k, w) \in \mathbb{N}_0 \times \text{Ap}(S, n)$ tal que $s = kn + w$.*

Demostración. Para ver la existencia, distinguimos 2 casos. Si $s \in \text{Ap}(S, n)$, basta tomar $k = 0$ y $w = s$. Si $s \notin \text{Ap}(S, n)$, por definición de conjunto de Apéry tenemos que $s_1 = s - n \in S$, si seguimos con esta notación recursivamente comenzando en s_1 de la siguiente forma $s_t = s_{t-1} - n = s - tn$, de esta manera se genera una secuencia decreciente de números no negativos que tiene que terminar y por tanto existirá un $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $s_k = s - kn \in \text{Ap}(S, n)$.

Ahora para demostrar la unicidad supongamos que $s = k_1 n + w_1 = k_2 n + w_2$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ y $w_1, w_2 \in \text{Ap}(S, n)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k_1 \neq k_2$ e igualando obtenemos que $(k_1 - k_2)n = w_1 - w_2$ y por lo tanto $w_1 \equiv w_2 \mod n$ lo que contradice que dos elementos de $\text{Ap}(S, n)$ estén en la misma clase de congruencia módulo n, esto nos lleva a que $w_1 = w_2$, por tanto $k_1 = k_2$ y el par $(k, w) \in \mathbb{N}_0 \times \text{Ap}(S, n)$ es único. □

Para ver la relación directa entre los conjuntos de Apéry con el género y el número de Frobenius vamos a necesitar la siguiente Proposición.

Proposición 1.1.24. *Sea S un semigrupo numérico de género g y número de Frobenius f y sea $n \in S \setminus \{0\}$. Se verifican las dos siguientes igualdades conocidas como fórmulas de Selmer:*

1). $f = \max(\mathrm{Ap}(S, n)) - n$.

2). $g = \frac{1}{n}\left(\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w\right) - \frac{n-1}{2}$.

Demostración. 1) Por la definición de los elementos del conjunto de Apéry se tiene que $\max(\mathrm{Ap}(S, n)) - n \notin S$. Para ver que es el número de Frobenius falta ver que es el $\max(\mathbb{Z} \setminus S)$. Sea $x \in \mathbb{N}_0$ tal que $x > \max(\mathrm{Ap}(S, n)) - n$. Entonces $x+n > \max(\mathrm{Ap}(S, n))$. Denotamos como w al elemento de $\mathrm{Ap}(S, n)$ congruente con $x + n$ módulo n. Puesto que $x + n > w$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x+n = w+kn$. Luego $x = kn-n+w$ y como consecuencia $x = n(k-1)+w \in S$ pues n y w pertenecen a S por definición.

2) Por el Lema 1.1.22, todo $w \in \mathrm{Ap}(S, n)$ se puede escribir como $w = k_i n + i$ con $k_i \in \mathbb{N}_0$, para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. De donde, tenemos $\mathrm{Ap}(S, n) = \{0, k_1 n + 1, \ldots, k_{n-1} n + n - 1\}$.
Escogemos ahora un $x \in \mathbb{N}_0$ de forma que $x \equiv i \mod n$. Por definición, tenemos que, $x \in S$ sí y sólo sí $w(i) \leq x$. De hecho, si $x = q_i n + i$ entonces $x - w(i) = (q_i - k_i)\, n$. Por lo tanto, $w(i) \leq x$ sí y sólo sí $k_i \leq q_i$ sí y sólo sí $x = (q_i - k_i)\, n + w(i) \in S$. Lo que nos lleva a que $x \notin S$ sí y sólo sí $x = q_i n + i$ con $q_i < k_i$ y como consecuencia:

$$g = \sum_{i=1}^{n-1} k_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(k_i n + i)\right) - \frac{n-1}{2} = \frac{1}{n}\left(\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w\right) - \frac{n-1}{2}.$$

□

Vamos a ver ahora un ejemplo de un semigrupo numérico en el que veamos como se aplican estas fórmulas:

Ejemplo 1.1.25. Sea S el semigrupo numérico generado por $\langle 5, 9, 21\rangle = \{0, 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 23, \ldots\}$ (He utilizado la notación $\ldots$ para indicar que a partir de ahí ya son todos los números naturales mayores). El conjunto de lagunas de este semigrupo será

$$G = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 22\}$$

dónde podemos observar que el género es $g = 13$ y el número de Frobenius es $f = 22$. Veamos que se verifican las fórmulas de Selmer.

Vamos a calcular el conjunto de Apéry, con lo que vamos ha hacer uso del Lema 1.1.22. Llamaremos m a la multiplicidad que en este caso será 5. Entonces $\mathrm{Ap}(S,m) = \{0, w(1), w(2), w(3), w(4)\}$ será la base estándar de S, con $w(i) \equiv i \mod 5$ para $i = 1, 2, 3, 4$ para el $w(i) \in S$ más pequeño, y así obtenemos $\mathrm{Ap}(S,m) = \{0, 21, 27, 18, 9\}$.

Luego el número de Frobenius es $f = \max(\mathrm{Ap}(S,m)) - m = 27 - 5 = 22$ y el género $g = \frac{1}{m}\left(\sum_{w\in \mathrm{Ap}(S,m)} w\right) - \frac{m-1}{2} = \frac{21+27+18+9}{5} - \frac{5-1}{2} = 13$.

Nótese que se ha escogido m la multiplicidad para ver también la base estándar pero para el cálculo del género y el número de Frobenius también podríamos aplicar las fórmulas de Selmer para otro elemento $n \in S \setminus \{0\}$ que no sea la multiplicidad, por ejemplo $n = 14$.

En este caso $\mathrm{Ap}(S, 14) = \{0, w(1), \ldots, w(14)\}$ con $w(i) \equiv i \mod 14$ para $i = 1, \ldots, 14$ y así obtenemos

$$\mathrm{Ap}(S, 14) = \{0, 15, 30, 31, 18, 5, 20, 21, 36, 9, 10, 25, 26, 27\}.$$

Luego el número de Frobenius es $f = \max(\mathrm{Ap}(S, 14)) - 14 = 36 - 14 = 22$ y el género

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{14}\left(\sum_{w\in \mathrm{Ape}(S,14)} w\right) - \frac{14-1}{2} \\ &= \frac{15+30+31+18+5+20+21+36+9+10+25+26+27}{14} - 6{,}5 \\ &= 13. \end{aligned}$$

Definición 1.1.26. Sea S un semigrupo numérico y sean c y m el conductor y la multiplicidad de S respectivamente. Llamaremos profundidad de S a $q = \lceil \frac{c}{m} \rceil$.

El único caso en el que $q = 0$ es en el caso que hemos descrito anteriormente, cuando $S = \mathbb{N}_0$. En este caso, tenemos que $f = -1$, $c = 0$, $m = 1$ y $q = 0$. En el resto de casos, $c \geq m$ y $q \neq 0$.

Por otra parte, $q = 1$ sí y sólo sí $c = m$ y esto solo pasa cuando $S = \{0\} \cup [m, \infty]$. Y por la definición de número de Frobenius tenemos que $f = m - 1$ y $c = m$.

Por tanto el primer caso interesante en el que no se conocen todos los elementos del semigrupo es $q = 2$. En las secciones 3.1 y 3.2 de esta memoria, nos centraremos en los caso $q = 2$ y $q = 3$ respectivamente.

1.2. La conjetura de María Bras-Amorós

Definición 1.2.1. Definimos n_g como el número de semigrupos numéricos con género g.

Con esta definición estamos en condiciones de presentar la conjetura que propuso María Bras-Amorós en el artículo [2].

Conjetura 1.2.2. $n_g \geq n_{g-1} + n_{g-2}$ *para todo* $g \geq 2$.

Nótese que la desigualdad más débil $n_g \geq n_{g-1}$ también está aún sin demostrar.

María Bras-Amorós tuvo la idea de la conjetura en 2006 cuando hizo la computación de la secuencia $(n_g)_{g\geq 0}$ para $g = 0$ hasta $g = 50$. Además de esta conjetura, que es en la que nos vamos a centrar, formuló otras conjeturas sobre el crecimiento de n_g que siguen todavía abiertas.

- $\lim_{g\to\infty} (n_{g-1} + n_{g-2}) / n_g = 1$,
- $\lim_{g\to\infty} n_g/n_{g-1} = (1 + \sqrt{5})/2$ (el número de oro).

Para intentar resolver la Conjetura 1.2.2, una buena estrategia es organizar bien los semigrupos numéricos para poder contarlos fácilmente. Una manera de organizarlos es como veremos en la siguiente sección mediente el árbol de semigrupos numéricos.

Ahora definiremos los n_g que además satisfacen que $c \leq 3m$ ya que en el capítulo 3 demostraremos que para ellos se cumple la Conjetura 1.2.2, y además ofreceremos una cota superior.

Notación 1.2.3. Sea S un semigrupo numérico y sea $G = \mathbb{N}_0 \backslash S$ su conjunto de lagunas. Llamaremos también multiplicidad, número de Frobenius, conductor y profundidad de G a los respectivos de S.

Definición 1.2.4. Definimos n'_g como el número de semigrupos numéricos con género g que cumplen además que $c \leq 3m$, siendo c el conductor y m la multiplicidad del conjunto de lagunas.

Los semigrupos numéricos con esta condición son importantes para acercarnos a la Conjetura 1.2.2 porque abarcan casi todos los semigrupos. Esto lo observaremos a lo largo de la memoria. Además Zhai mostró en [8] que $\lim_{g\to\infty} n'_g/n_g = 1$ que previamente había sido conjeturado por Yusef Zhao en [9], esto nos indica que la densidad de $n'_g \neq n_g$ tiende hacia 0.

1.3. El árbol de los semigrupos numéricos

El conjunto de todos los semigrupos pueden ser organizados en un árbol. Este árbol lo organizaremos por niveles dependiendo del género del semigrupo, de manera que en cada nivel están los semigrupos del género g correspondiente al nivel g. Si descendemos de nivel iremos a los semigrupos de género $g+1$ y si ascendemos llegaremos a los semigrupos de género $g-1$ (porque en este árbol los descendientes poseen un elemento más en el conjunto de lagunas). Entonces la raíz es el único semigrupo de género 0 que sabemos que es $\mathbb{N}_0 = \langle 1 \rangle$ y denotaremos por S_0. Vamos a explicar como construir el árbol de manera descendente primero pero lo normal es construirlo de manera ascendente.

Si quitamos a este conjunto su único generador minimal obtenemos el semigrupo numérico $S_1 = \{0\} \cup \{i \in \mathbb{N}_0 : i \geq 2\} = \langle 2, 3 \rangle$ que es el único semigrupo numérico de género 1 y este formara el nivel 1 del árbol.

S_1 tiene como generadores minimales el 2 y el 3, si le quitamos el 2 obtenemos el semigrupo numérico $S_{2,1} = \{0\} \cup \{i \in \mathbb{N}_0 : i \geq 3\} = \langle 3, 4, 5 \rangle$, mientras que si quitamos el 3 obtenemos el semigrupo numérico $S_{2,2} = \{0, 2\} \cup \{i \in \mathbb{N}_0 : i \geq 4\} = \langle 2, 5 \rangle$. Y además estos dos conjuntos serán todos los semigrupos de género 2 y por tanto estos dos semigrupos formarán el nivel 2 del árbol. Si seguimos así de forma recursiva podríamos generar el árbol. Aunque hay que tener en cuenta que no siempre quitando un generador vamos a obtener un semigrupo numérico nuevo, porque podemos llegar al mismo semigrupo de varias maneras así que no es inyectiva, por ejemplo si seguimos como antes y a $S_{2,2}$ le quitamos el generador 2 obtenemos el semigrupo $\{0\} \cup \{i \in \mathbb{N}_0 : i \geq 4\} = \langle 4, 5, 6, 7 \rangle$ que sería el mismo semigrupo que si quitamos a $S_{2,1}$ el generador 3. Obtendremos un nuevo semigrupo numérico siempre que el generador sea mayor que el número de Frobenius del semigrupo. Por lo tanto, el número de descendientes de cada semigrupo numérico será el número de generadores minimales mayores que su número de Frobenius. Por ejemplo, en $S_{2,1}$ el número de Frobenius es 2, y como los 3 generadores minimales son mayores que 2 tenemos 3 descendientes. Mientras que en $S_{2,2}$ el número de Frobenius es 4 y solo el 5 es mayor, y por tanto tendremos un único descendiente.

Lema 1.3.1. *Sea S un semigrupo numérico diferente de $\mathbb{N}_0$, sea f su número de Frobenius y g su género. Entonces $S \cup \{f\}$ también será un número de Frobenius de género $g-1$.*

Demostración. Como S es semigrupo numérico, sabemos que $\mathbb{N}_0 \setminus S$ es finito y por tanto $\mathbb{N}_0 \setminus (S \cup \{f\})$ también será finito. También tenemos que $0 \in S \subset S \cup \{f\}$, solo queda ver que es cerrado para la suma.

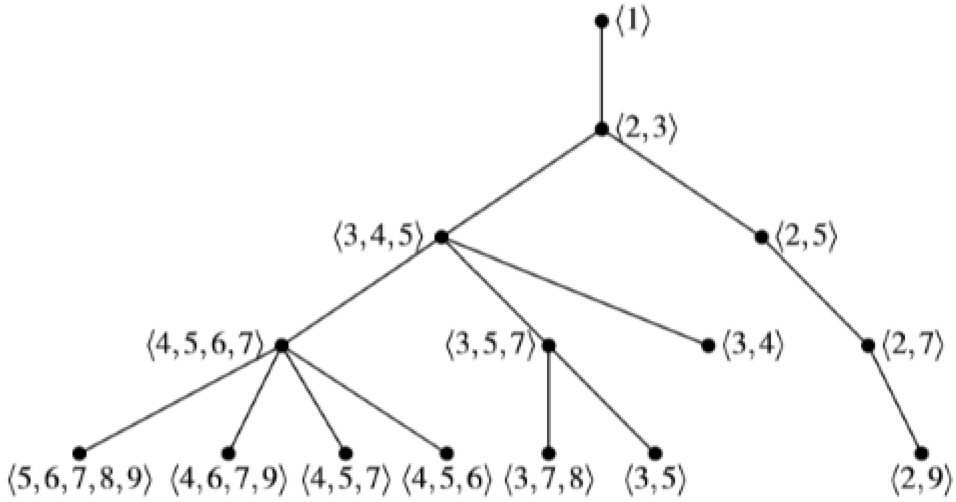
Sean $a, b \in S \cup \{f\}$:

1) Si $a = f$ o $b = f$, vamos a suponer sin pérdida de generalidad que $a = f$ tenemos que $a + b \geq f$ y por tanto $a + b \in S \cup \{f\}$.

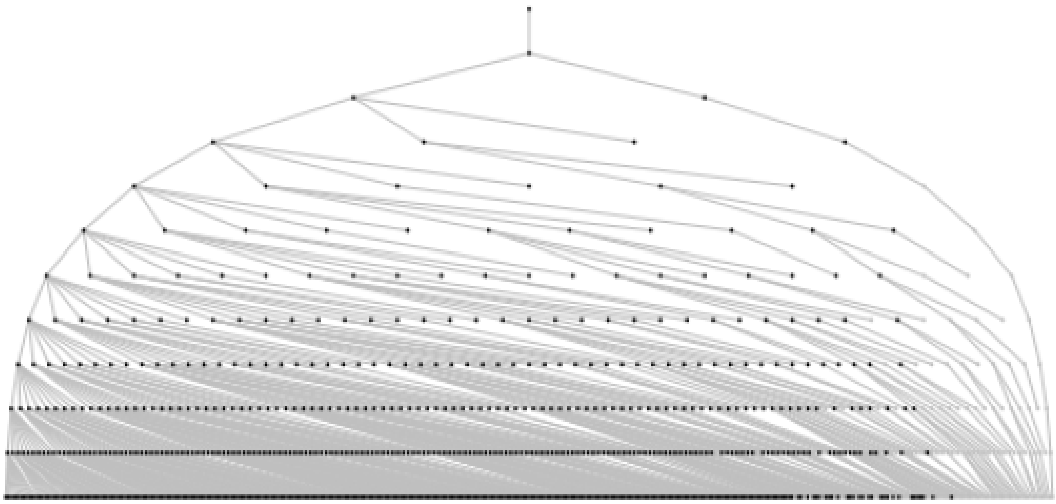
2) Si $a, b \in S$, y como S es semigrupo numérico tenemos que $a + b \in S \subset S \cup \{f\}$.

El género de este nuevo semigrupo será $g-1$ dado que $G = \mathbb{N}_0 \setminus S$ contiene a f, mientras que $G' = \mathbb{N}_0 \setminus (S \cup \{f\})$ y por tanto tendrá exactamente un elemento menos. $\square$

Gracias a este lema podemos construir el árbol de manera ascendente. Si tenemos un semigrupo numérico y le añadimos su número de Frobenius llegamos a otro semigrupo numérico con género una unidad menor. Luego para ascender únicamente tenemos que añadir su número de Frobenius. El árbol de los semigrupos numéricos (que dibujaremos boca abajo) con los niveles del 0 al 4 quedaría de la siguiente manera:



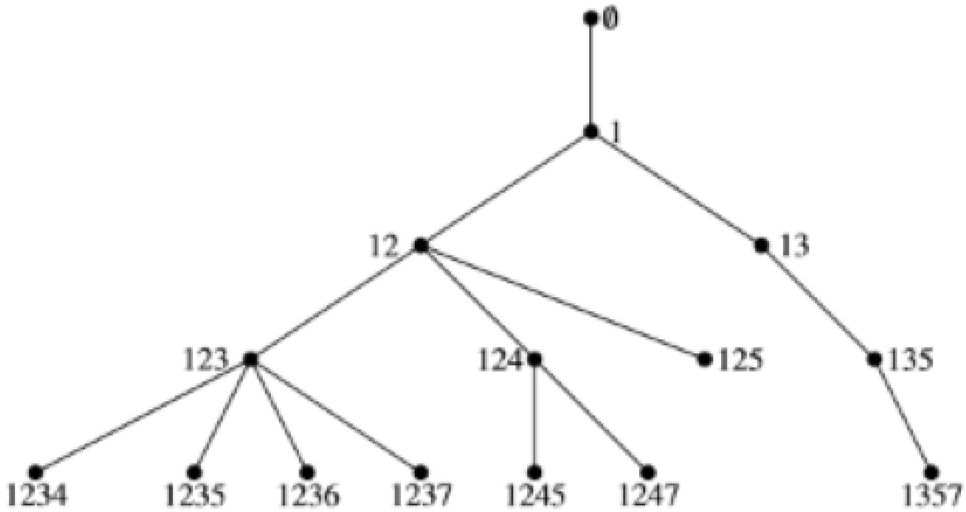
Vamos a ver ahora en el siguiente árbol los primeros 12 niveles del árbol, pero diferenciando en este caso los semigrupos con profundidad $q \leq 3$ (que se representan con un punto negro) y los semigrupos con profundiad $q \geq 4$ (que se representan con un punto gris). Como vemos en el árbol y ya habíamos comentado previamente los semigrupos que no cumplen esta condición son una minoría.



En la última línea tenemos que hay 343 semigrupos ($n_g = 343$), de los cuales 287 tienen profundidad ≤ 3 (es decir, $n'_g = 287$). Podemos observar que como habíamos avisado los semigrupos numéricos con profundidad mayor que 3, es decir, los semigrupos numéricos que cumplen $n_g \neq n'_g$ son una minoría.

Veamos ahora otra manera de ver el mismo árbol, fijándonos ahora en el conjunto de lagunas. En particular, por el Lema 1.3.1, si G es un conjunto de lagunas no vacío, entonces $G \setminus \{\text{máx}\, G\}$ es todavía un conjunto de lagunas. En este caso, vamos a ver cada punto del árbol con los elementos de los conjunto de lagunas, en lugar de con los generadores de los semigrupos numéricos. En este caso la raíz va a ser el conjunto vacío, ya que son las lagunas de la raíz del primer árbol que era $\mathbb{N}_0$.

Recordemos que antes para descender añadíamos el número de Frobenius del semigrupo (y no podíamos predecir quién iban a ser los generadores del nuevo semigrupo). Pero como ahora estamos organizando el árbol para los conjuntos de lagunas correspondientes a estos árboles añadir un elemento al semigrupo es eliminarlo de su conjunto de lagunas correspondiente. Entonces para ascender en árbol de conjunto de lagunas solo tenemos que eliminar el número de Frobenius, es decir, quitar el elemento más grande en cada caso. Y quedaría de la siguiente manera:



Este árbol se puede construir también de forma descendente aunque es más difícil ya que requiere saber como son los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son conjuntos de lagunas acorde con la Definición 1.1.8. Por ejemplo, $\{1,3,4\}$ no es un conjunto de lagunas ya que $4 = 2 + 2$ y por eso no aparece en el árbol anterior. Sea G un conjunto de lagunas de género g, multiplicidad m y conductor c. Un conjunto de lagunas que descienda de éste sería de género $g + 1$, así vamos a tomar un elemento $a \notin G$ tal que $a > \max G$ y vamos a denotar $G' = G \cup \{a\}$. Por como lo hemos definido, $a \geq c$ y para que G' siga siendo un conjunto de lagunas $a \leq m + c - 1$; si $a \geq m + c$, tenemos que $a = m+(a-m)$ y desde que $c \leq a-m$ tenemos que $a-m \notin G$ por definición de conductor de un conjunto de lagunas y por definición de multiplicidad de un conjunto de lagunas $m \notin G$ y claramente $a \neq m$ y $a \neq a - m$ donde concluimos que G' en este caso no es un conjunto de lagunas. Entonces para nuestra construcción $c \leq a \leq m + c - 1$.

1.4. Partición canónica de un conjunto de lagunas

Vamos a ver ahora que todo conjunto de lagunas tiene una partición a la que denominaremos canónica y definiremos los conceptos de m-extensión y m-filtración que utilizaremos en el Capítulo 3. Para ello necesitaremos unos lemas y una notación previa.

Lema 1.4.1. *Todo segmento inicial de un conjunto de lagunas es un conjunto de lagunas.*

Demostración. Sea G un conjunto de lagunas y sea $k \in \mathbb{N}$. Veamos que $G' = [1, k] \cap G$ es un conjunto de lagunas. Tanto G como $[1, k]$ son conjuntos finitos en $\mathbb{N}$, luego G' también lo es. Sea ahora $z = x + y \in G'$, con $x, y \in \mathbb{N}$. Sabemos que z también debe pertenecer a G y como es un conjunto de lagunas sabemos que o $x \in G$ o $y \in G$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in G$, como $x \leq z$ y $z \leq k$ deducimos que $x \in [1, k]$ y por tanto $x \in G'$. Y G' es un conjunto de lagunas. □

Lema 1.4.2. *Sea G un conjunto de lagunas de multiplicidad m. Entonces:*

$$[1, m-1] \subset G \quad y \quad G \cap m\mathbb{N} = \emptyset.$$

Demostración. De la definición de multiplicidad tenemos que m es el número más pequeño diferente de 0 que pertenece en S, por lo tanto tenemos que los números estrictamente menores no pueden pertenecer al conjunto. Por lo tanto deben estar en $G = \mathbb{N}_0 \setminus S$ y como resultado obtenemos $[1, m-1] \subset G$.

Como S es cerrado para la suma y $m \in S$ tenemos que $m\mathbb{N} \subset S$ y en consecuencia $G \cap m\mathbb{N} = \emptyset$. □

Notación 1.4.3. Sea G un conjunto de lagunas de multiplicidad m. Denotaremos $G_0 = [1, m-1]$ y más generalmente $G_i = G \cap [im + 1, (i + 1)m - 1]$ para todo $i \geq 0$.

Ahora estamos en condiciones de presentar la partición canónica de un conjunto de lagunas.

Proposición 1.4.4. *Sea G un conjunto de lagunas de multiplicidad m y profundidad q y sea G_i definido en la nota anterior. Entonces*

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{q-1}$$

y $G_{q-1} \neq \emptyset$. Llamaremos a esta partición de G la partición canónica de G. Además $G_{i+1} \subset m + G_i$ para todo $i \geq 0$.

Demostración. Del Lema 1.4.2 tenemos que $G \cap m\mathbb{N} = \emptyset$. Por lo tanto G será unión disjunta de G_i para $i \geq 0$.

Si $i \geq q$, tenemos que si $a \in [im + 1, (i + 1)m - 1]$, entonces $a \geq im + 1 > im \geq qm = m\lceil \frac{c}{m} \rceil \geq c > f$ siendo c el conductor y f el número de Frobenius de G. Sabemos que todo número mayor que f pertenece a S luego no pertenece a G, y entonces $G_i = G \cap [im + 1, (i + 1)m - 1] = \emptyset$. Es decir, si $i \geq q$ tenemos que $G_i = \emptyset$.

De lo anterior se deduce fácilmente que $G = G_0 \cup G_1 \cup ... \cup G_{q-1}$ y tenemos que demostrar que $G_{q-1} \neq \emptyset$. Para ello vamos a ver que el número de Frobenius f pertenece G_{q-1}. Por definición sabemos que $f \in G$, veamos que $f \in [(q-1)m+1, qm-1]$. Antes ya vimos que $qm > f$ y por tanto $qm - 1 \geq f$. Solo nos queda ver que $f \geq (q-1)m+1$. Por la definición de parte entera superior de un número, sabemos que $\lceil \frac{c}{m} \rceil \geq \frac{c}{m} > \lceil \frac{c}{m} \rceil - 1$, ahora multiplicando por m obtenemos $(q-1)m < c \leq qm$. De esta primera desigualdad y por estar trabajando con números enteros, deducimos que $c \geq (q-1)m+1$ y del hecho de que $f = c-1$ tenemos que $f \geq (q-1)m$. Usando ahora de nuevo que $G \cap m\mathbb{N} = \emptyset$ y que $f \in G$ concluimos que $f > (q-1)m$.

Nos falta ver que $G_{i+1} \subset m + G_i$ para todo $i \geq 0$. Sea $x \in G_{i+1} = [(i+1)m+1, (i+2)m-1] \cap G$. Tenemos que $x - m \in [im+1, (i+1)m-1]$, falta solo ver que $x - m \in G$. Por definición de conjunto de lagunas si $x = m + (x-m) \in G$ entonces $x - m \in G$ o $m \in G$, como m no puede pertenecer a G por la propia definición de multiplicidad, $x - m$ debe pertenecer a G y por tanto $x - m \in G_i$. □

Nota 1.4.5. Sea G un conjunto de lagunas. De la partición canónica podemos deducir la multiplicidad, el género y la profundidad de G de la siguiente manera:

- $m = max(G_0) + 1$,
- $g = \sum_{i=0}^{q-1} |G_i|$,
- $q =$ número de G_i no vacíos.

Definición 1.4.6. Sea $m \in \mathbb{N}$. Definimos una m-extensión como un conjunto finito $A \subset \mathbb{N}$ que admite la partición $A = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_t$ para algún $t \geq 0$, donde $A_0 = [1, m-1]$ y $A_{i+1} \subset m + A_i$, $\forall i \geq 0$.

Nota 1.4.7. En particular, podemos ver gracias a la Proposición 1.4.4 que todo conjunto de lagunas de multiplicidad m es una m-extensión. Sin embargo, no toda m-extensión es un conjunto de lagunas.

Ejemplo 1.4.8. Veamos un caso de una m-extensión que no es un conjunto de lagunas. Sea $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 11, 14\} \subset \mathbb{N}$. No es un conjunto de lagunas pues $14 = 7 + 7 \in A$, pero $7 \notin A$. Sin embargo, si es una 3-extensión ya que admite la partición $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ con $A_0 = [1, 2]$, $A_1 = [4, 5]$, $A_2 = \{8\}$, $A_3 = \{11\}$ y $A_4 = \{14\}$. En la que podemos observar que $A_4 \subset A_3 + 3 \subset A_2 + 2 \cdot 3 \subset A_1 + 3 \cdot 3 \subset A_0 + 4 \cdot 3$ con lo que efectivamente A es una 3-extensión que no es un conjunto de lagunas.

Definición 1.4.9. Sea $m \in \mathbb{N}$. Definimos una m-filtración como una secuencia finita $F = (F_0, F_1, ..., F_t)$ de subconjuntos no crecientes de $\mathbb{N}$ tales que $F_0 = [1, m-1] \supset F_1 \supset \ldots \supset F_t$.

Vamos a ver ahora que existe una biyección entre las m-extensiones y las m-filtraciones para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.4.10. *Sea $A = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_t$ una m-extensión. Definimos ahora $F_i = -im + A_i$ para cada $i = 1, \ldots, t$. Entonces $F = (F_0, F_1, ..., F_t)$ es una m-filtración. Diremos que es la m-filtración asociada a A.*

Reciprocamente, sea $F = (F_0, F_1, ..., F_t)$ una m-filtración. Definimos ahora $A_i = im + F_i$ para cada $i = 1, \ldots, t$ y $A = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_t$. Entonces A es una m-extensión. Diremos que es la m-extensión asociada a F.

Demostración. Sea $A = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_t$ una m-extensión. Definiendo $F_i = -im + A_i$ para cada $i = 1, \ldots, t$, veamos que F_i es una m-filtración. De la definición de m-extensión todos los A_i son subconjuntos de $\mathbb{N}$ y por tanto también lo serán los F_i. La secuencia que generan los F_i tiene que ser finita porque lo es t de la definición de m-extensión. Además $F_0 = -0m + A_0 = [1, m-1]$. Falta ver que es decreciente, como $F_i = -im + A_i$ entonces $A_i = im + F_i$ y $A_{i+1} = (i+1)m + F_{i+1}$. Sabemos, de nuevo por la definición de m-extensión, que $A_{i+1} \subset A_i + m$ y si substituimos $(i+1)m + F_{i+1} \subset im + F_i + m$ y despejamos podemos concluir que $F = (F_0, F_1, ..., F_t)$ es una secuencia finita decreciente con $F_0 = [1, m-1]$, y por lo tanto una m-filtración.

Sea ahora $F = (F_0, F_1, ..., F_t)$ una m-filtración. Definiendo $A_i = im + F_i$ para cada $i = 1, \ldots, t$, veamos que $A = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_t$ es una m-extensión. De la definición de m-filtración todos los F_i son subconjuntos de $\mathbb{N}$, de donde también lo serán los A_i. Al ser F una secuencia finita se tiene $t \in \mathbb{N}$. Además $A_0 = 0m + F_0 = [1, m-1]$. Falta ver que $A_{i+1} \subset A_i + m$, como $A_i = im + F_i$ entonces $F_i = -im + A_i$ y $F_{i+1} = -(i+1)m + A_{i+1}$. Sabemos, de nuevo por la definición de m-filtración que $F_{i+1} \subset F_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$. Si substituimos $-(i+1)m + A_{i+1} \subset -im + A_i$ y despejando obtenemos la desigualdad buscada. Luego $A = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_t \subset \mathbb{N}$ para algún $t \geq 0$ con $A_{i+1} \subset A_i + m$ para todo $i \geq 0$ y por tanto una m-extensión. $\square$

Definición 1.4.11. Sea $A = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_t$ una m-extensión. Vamos a denotar por $F = \varphi(A)$ a su m-filtración asociada. Si A es un conjunto de lagunas, llamaremos a F una filtración de conjunto de lagunas.

Sea $F = (F_0, F_1, ..., F_t)$ una m-filtración. Vamos a denotar por $A = \tau(F)$ a su m-extensión asociada.

Nota 1.4.12. Por la Proposición 1.4.10 se ve que las aplicaciones τ y φ son inversas una de la otra.

Nota 1.4.13. En la Nota 1.4.7 decíamos que todo conjunto de lagunas G de multiplicidad m es una m-extensión, de donde $F = \varphi(G)$ estará bien definido.

Notación 1.4.14. Sea G un conjunto de lagunas y sea F su filtración de conjunto de lagunas asociada. Entonces denotaremos como género, multiplicidad, número de Frobenius, conductor y profundidad de F al respectivo de G.

Vamos a dar ahora un ejemplo de un semigrupo numérico y su conjunto de lagunas asociado en el que vamos a ver su partición canónica y su filtración de conjunto de lagunas asociada.

Ejemplo 1.4.15. Sea S el siguiente subconjunto de $\mathbb{N}_0$, $S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, \ldots\}$ que es un semigrupo numérico. Su conjunto de lagunas asociado es $G = \mathbb{N}_0 \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13\}$. La multiplicidad es el elemento más pequeño diferente de 0 que en este caso es $m = 5$. Y el número de Frobenius que es el número más grande que no esta en S, en este caso el número más grande de G que es $f = 13$ y por tanto el conductor es $c = f + 1 = 14$ y la profundidad $q = \lceil \frac{c}{m} \rceil = \lceil \frac{14}{5} \rceil = 3$. Veamos ahora la partición canónica de G:

$G = G_0 \cup \ldots \cup G_{q-1} = G_0 \cup G_1 \cup G_2$,
$G_0 = [1, m] = [1, 4]$,
$G_1 = [m + 1, 2m - 1] \cap G = \{6, 8\}$,
$G_2 = [2m + 1, 3m - 1] \cap G = \{11, 13\}$,
$F_0 = G_0 - m * 0 = G_0 = [1, 4]$,
$F_1 = G_1 - m * 1 = G_1 - 5 = \{1, 3\}$,
$F_2 = G_2 - m * 2 = G_2 - 10 = \{1, 3\}$.

De donde la filtración de conjunto de lagunas asociada a S es $F = ([1, 4], \{1, 3\}, \{1, 3\})$ y se suele representar como $(1234), (13)^2$. (Esta última notación es escribir los elementos de F entre paréntesis y en el caso de que hubiera n elementos repetidos $(a_1 \ldots a_k)$ se denotaría como una potencia $(a_1 \ldots a_k)^n$)

Vamos a dar ahora una importante notación para organizar los conjuntos de lagunas y las filtraciones de conjunto de lagunas que nos permitirá contar los semigrupos en el Capítulo 3.

Notación 1.4.16. Vamos a denotar ahora por

- Γ al conjunto de todos los conjuntos de lagunas,
- $\Gamma(g)$ al conjunto de todos los conjuntos de lagunas de género g y

- $\Gamma(g, q \leq b)$ al conjunto de todos los conjuntos de lagunas de género g y profundidad menor o igual que b.

De manera análoga, vamos a denotar por

- $\mathscr{F}$ al conjunto de todas las filtraciones de conjuntos de lagunas,
- $\mathscr{F}(g)$ al conjunto de todas las filtraciones de conjuntos de lagunas con género g y
- $\mathscr{F}((g, q \leq b))$ al conjunto de todas las filtraciones de conjuntos de lagunas con género g y profundidad menor o igual que b.

Podemos observar que $\Gamma(g, q \leq b)$ es un subconjunto de $\Gamma(g)$ y $\mathscr{F}((g, q \leq b))$ es un subconjunto de $\mathscr{F}$.

Nota 1.4.17. Nótese que las aplicaciones τ y φ proporcionan biyecciones entre $\mathscr{F}(g)$ y $\Gamma(g)$ para todo $g \geq 0$ y de aquí obtenemos que $n_g = \mid \Gamma(g) \mid = \mid \mathscr{F}(g) \mid$, $\forall g \geq 0$.

El caso b=3 es de especial importancia porque su cardinal es justamente n'_g que hemos introducido en la Definición 1.2.4,

$$n'_g = \mid \Gamma(g, q \leq 3) \mid = \mid \mathscr{F}(g, q \leq 3) \mid, \ \forall g \geq 0.$$

Demostraremos en el Capítulo 3 que si sustituimos n_g por n'_g en la Conjetura 1.2.2 entonces se cumple.

Capítulo 2

Primeros acercamientos a la conjetura

Notación 2.0.1. A partir de ahora denotaremos a_i como el i-ésimo número de la sucesión de Fibonacci:

$$(a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \text{y } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n > 1).$$

En este capítulo vamos a ver una cota superior y otra inferior de n_g que hasta el momento son las más cercanas a la Conjetura 1.2.2. Ambas cotas fueron deducidas por la propia creadora de la conjetura María Bras-Amorós.

Primero demostró que n_g posee una cota inferior relacionada con la sucesión de Fibonacci, más concretamente que es mayor que $2a_g$. Podemos observar que la conjetura nos indica $(n_g)_{g\geq 0}$ tiene un comportamiento asintóticamente equivalente con la sucesión de Fibonacci, de ahí la importancia de esta cota inferior que parece ir en la dirección correcta para probar la conjetura. Un año más tarde consiguió demostrar que estaba acotado superiormente por $1 + 3 \cdot 2^{g-3}$. El método usado está basado en el árbol de los semigrupos numéricos y el número de descendientes de los descendientes dependiendo del número de descendientes de los nodos(que si recordamos como construimos el árbol eran los semigrupos numéricos).

Para el tratamiento de este capítulo he seguido, a modo de guión, el artículo [3] en el que María Bras-Amorós trata de aproximarse a su conjetura.

2.1. Algunos resultados de combinatoria

Comenzaremos definiendo dos sucesiones de conjuntos que nos van a ayudar a la demostración del problema.

El primer conjunto lo vamos a denotar como A_g y lo definiremos recursivamente como $A_2 = \{1, 3\}$ y

$$A_g = \{g+1\} \cup \left(\bigcup_{m \in A_{g-1}} \{0, 1, \dots, m-1\} \right) \setminus \{g-2\}$$

para $g > 2$. Es decir, los primeros términos de la sucesión serán los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_2 &= \{1, 3\}, \\ A_3 &= \{0, 0, 2, 4\}, \\ A_4 &= \{0, 0, 1, 1, 3, 5\} \\ A_5 &= \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 4, 6\}, \\ A_6 &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 7\}, \\ A_7 &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 8\}. \end{aligned}$$

El segundo conjunto lo denotaremos como B_g y lo definiremos recursivamente como $B_2 = \{1, 3\}$ y

$$B_g = \{0, g+1\} \cup \left(\bigcup_{m \in B_{g-1}} \{1, 2, \dots, m\} \right) \setminus \{g, g-2\}$$

para $g > 2$. Y los primeros términos de esta sucesión serán los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} B_2 &= \{1, 3\}, \\ B_3 &= \{0, 1, 2, 4\}, \\ B_4 &= \{0, 1, 1, 1, 2, 3, 5\} \\ B_5 &= \{0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 6\}, \\ B_6 &= \{0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 7\}, \\ B_7 &= \{0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \\ &\quad 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 8\}. \end{aligned}$$

Estas sucesiones nos resultan muy interesantes porque como demostraremos en los siguientes lemas debido principalmente a que el cardinal de cada A_g es precisamente la cota inferior que buscamos al principio del tema y el cardinal de B_g es la cota superior.

Lema 2.1.1. *Los conjuntos A_g para $g \geq 2$ se pueden ver también como*

$$A_g = \left(\overbrace{\{0, 0, \ldots, 0\}}^{2a_{g-2}} \cup \overbrace{\{1, 1, \ldots, 1\}}^{2a_{g-3}} \cup \overbrace{\{2, 2, \ldots, 2\}}^{2a_{g-4}} \cup \cdots \right.$$
$$\left. \cup \overbrace{\{g-4, g-4\}}^{2a_2} \cup \overbrace{\{g-3, g-3\}}^{2a_1} \right) \cup \{g-1, g+1\} \qquad (2.1)$$

y además $|A_g| = 2a_g$.

Demostración. Vamos a ver los dos resultados por inducción. Son consecuencia del hecho que para $i \geq 2$, tenemos $a_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_j$. Este resultado también lo probaremos mediante una inducción. En primer lugar la igualdad es cierta para $i = 2$, pues $a_2 = 1 + \sum_{j=1}^{0} a_j = 1$. Sea ahora un $i \geq 2$ para el que se cumple la hipótesis $a_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_j$. Veamos que también es cierta para $i+1$. Sabemos que la sucesión de Fibonacci cumple $a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$ y, por nuestra hipótesis de inducción $a_{i+1} = 1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_j + a_{i-1} = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j$ y concluimos.

Para $g = 2$ tenemos que $A_2 = \{2-1, 2+1\} = \{1, 3\}$ y $|A_2| = 2 = 2a_2$. Suponemos cierta la hipótesis de inducción para un $g \geq 2$, es decir, se cumple (2.1). Veamos que se cumple para $g+1$, tenemos

$$A_{g+1} = \{g+2\} \cup \left(\bigcup_{m \in A_g} \{0, 1, \ldots, m-1\} \right) \setminus \{g-1\}$$

y por la hipótesis de inducción tenemos que

$$\bigcup_{m\in A_g}\{0,1,\ldots,m-1\} =$$

$$\Bigg(\overbrace{\{0,0,\ldots,0\}}^{2a_{g-3}}\cup\{\overbrace{0,0,\ldots,0}^{2a_{g-4}},\overbrace{1,1,\ldots,1}^{2a_{g-4}}\}\cup$$

$$\{\overbrace{0,0,\ldots,0}^{2a_{g-5}},\overbrace{1,1,\ldots,1}^{2a_{g-4}}\overbrace{2,2,\ldots,2}^{2a_{g-5}}\}\cup\cdots\cup$$

$$\{\overbrace{0,0,}^{2a_2}\overbrace{1,1,}^{2a_2}\overbrace{2,2}^{2a_2},\ldots,\overbrace{g-5,g-5}^{2a_2}\}\cup\{\overbrace{0,0,}^{2a_1}\overbrace{1,1,}^{2a_1}\overbrace{2,2}^{2a_1},\ldots,\overbrace{g-4,g-4}^{2a_1}\}\Bigg)\cup$$

$$\{0,1,\ldots,g-1\}\cup\{0,1,\ldots,g+1\}$$

Reordenando de manera conveniente y por $a_i = 1+\sum_{j=1}^{i-2} a_j$ obtenemos

$$\bigcup_{m\in A_g}\{0,1,\ldots,m-1\} = \Bigg(\overbrace{\{0,0,\ldots,0\}}^{2a_{g-1}}\cup\overbrace{\{1,1,\ldots,1\}}^{2a_{g-2}}$$

$$\cup\overbrace{\{2,2,\ldots,2\}}^{2a_{g-3}}\cup\cdots\cup\overbrace{\{g-3,g-3\}}^{2a_2}\cup\overbrace{\{g-2,g-2\}}^{2a_1}\Bigg)\cup\{g-1,g\}.$$

De aquí deducimos que

$$A_{g+1} = \{g+2\}\cup$$

$$\Bigg(\overbrace{\{0,0,\ldots,0\}}^{2a_{g-1}}\cup\overbrace{\{1,1,\ldots,1\}}^{2a_{g-2}}\cup\overbrace{\{2,2,\ldots,2\}}^{2a_{g-3}}\cup\cdots\cup\overbrace{\{g-3,g-3\}}^{2a_2}$$

$$\cup\overbrace{\{g-2,g-2\}}^{2a_1}\cup\{g-1,g\}\Bigg)\setminus\{g-1\}$$

y concluimos.

Podemos deducir de (2.1) (que ya hemos demostrado) que $\mid A_g \mid = 2a_{g-2} + 2a_{g-3} + \ldots + 2a_1 + 2 = 2\left(1+\sum_{j=1}^{g-2} a_j\right)$ y de la prueba realizada en primer párrafo concluimos. $\square$

Lema 2.1.2. *Los conjuntos B_g para $g \geq 2$ se pueden ver también como*

$$B_g = \{0\} \cup \left(\overbrace{\{1, 1, \ldots, 1\}}^{3\cdot 2^{g-4}} \cup \overbrace{\{2, 2, \ldots, 2\}}^{3\cdot 2^{g-5}} \cup \cdots \cup \overbrace{\{g-3, g-3, g-3\}}^{3\cdot 2^{0}} \right)$$
$$\cup \{g-2, g-1, g+1\}$$

y además $|B_g| = 1 + 3 \cdot 2^{g-3}$.

Demostración. Ambos resultados se pueden deducir por inducción. Son consecuencia del hecho que para $i \geq 0$, tenemos $2^i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j$. Este resultado también debemos probarlo mediante una inducción. En primer lugar la igualdad es cierta para $i = 0$, pues $2^0 = 1 + \sum_{j=0}^{0} 2^j = 1$. Sea ahora un $i \geq 0$ para el que se cumple la hipótesis $2^i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j$, veamos que también sera cierta para $i+1$. Sabemos que $2^{i+1} = 2^i \cdot 2$ y, por nuestra hipótesis de inducción a $2^{i+1} = (1 + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j) \cdot 2 = 2 + \sum_{j=0}^{i-1} 2^{j+1} = 2 + \sum_{j=1}^{i} 2^j = 1 + \sum_{j=0}^{i} 2^j$ y concluimos.

Para $g = 3$ tenemos que $B_3 = \{1, 3\} = \{2-1, 2+1\}$. Utilizando $2^i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j$ se puede demostrar de manera análoga a la prueba del Lema 2.1.1. □

2.2. Semigrupos numéricos ordinarios y no ordinarios

Vamos a diferenciar ahora 2 tipos de semigrupos numéricos: los ordinarios y los no ordinarios que tendrán especial utilidad a la hora de ver sus respectivos descendientes dentro del árbol estudiado en el primer capítulo y por tanto a la hora de contar el número de semigrupos numéricos. Como veremos más adelante los semigrupos numéricos ordinarios están controlados, es decir, sabemos con certeza como van a ser sus descendientes, mientras que en el caso de los no ordinarios no.

Definición 2.2.1. Sea S un semigrupo numérico. Diremos que S es ordinario si es de la forma $\{0\} \cup \{i \in \mathbb{N}_0 : i \geqslant n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.2.2. *Sea S un semigrupo numérico no ordinario. Suponemos que los generadores mayores que el número de Frobenius son $\{\lambda_{i_1} < \lambda_{i_2} < \ldots < \lambda_{i_k}\}$. Entonces el número generadores mayores que el número de Frobenius del semigrupo numérico $S \setminus \{\lambda_{i_j}\}$ es al menos $k - j$ y como mucho $k - j + 1$.*

Demostración. Sabemos que el número de Frobenius de $S \setminus \{\lambda_{i_j}\}$ es λ_{i_j} porque es mayor que el número de Frobenius de S por definición y obviamente no está en el conjunto. Además todos los generadores de $S \setminus \{\lambda_{i_j}\}$ que son generadores minimales en S también lo tienen que ser en $S \setminus \{\lambda_{i_j}\}$.

Los elementos de $S \setminus \{\lambda_{i_j}\}$ que no son generadores minimales en S y se convierten en generadores de $S \setminus \{\lambda_{i_j}\}$ deben de ser de la forma $\lambda_{i_j} + \lambda_r$ para algún $\lambda_r \in S$. Denotamos m a la multiplicidad de S. Si $\lambda_r > m$ entonces $\lambda_{ij} + \lambda_r - m > \lambda_{ij}$ y por lo tanto $\lambda_{i_j} + \lambda_r = m + \lambda_s$ para algún $\lambda_s \in S \setminus \{\lambda_{ij}\}$. Así que el único elemento que no es generador minimal en S que puede serlo en $S \setminus \{\lambda_{i_j}\}$ es $m + \lambda_{i_j}$. □

Recordando como habíamos creado el árbol de semigrupos numéricos en el primer capítulo, si un semigrupo tiene k generadores minimales mayores que el número de Frobenius entonces tendrá k descendientes y gracias al lema que acabamos de demostrar deducimos que cada uno de estos descendientes tendrá al menos $0, 1, \ldots, k-1$ y como mucho $1, 2, \ldots, k$ respectivamente.

Vamos a ver ahora como se comportan los descendientes de los semigrupos numéricos ordinarios. Estos descendientes tienen especial importancia porque están controlados. Es decir, su utilidad radica en que si estamos trabajando en el árbol de los semigrupos numéricos y observamos un semigrupo numérico ordinario sabemos como van a ser sus descendientes. Y por tanto podremos contar de una manera mucho más sencilla.

Lema 2.2.3. *Sea S un semigrupo numérico ordinario de la forma $\{0, m+1, m+2, \ldots\}$. Entonces:*

- *Su conjunto de generadores minimales es $\{m+1, m+2, \ldots, 2m+1\}$.*
- *El semigrupo numérico $S \setminus \{m+1\}$ tiene $m+2$ generadores minimales mayores al número de Frobenius.*
- *El semigrupo numérico $S \setminus \{m+2\}$ tiene m generadores minimales mayores al número de Frobenius.*
- *El semigrupo numérico $S \setminus \{m+r\}$, con $r > 2$, tiene $m - r + 1$ generadores minimales mayores al número de Frobenius.*

Demostración. El primer punto se ve directamente de la definición de semigrupo numérico ordinario, su primer generador es claramente $m+1$ y a partir de $2m+2$ pueden ser generados con los anteriores.

En el segundo punto el número de Frobenius será $m+1$ y los nuevos generadores serán $\{m+2, m+3, \ldots, 2m+3\}$ y por tanto $m+2$ generadores mayores que $m+1$.

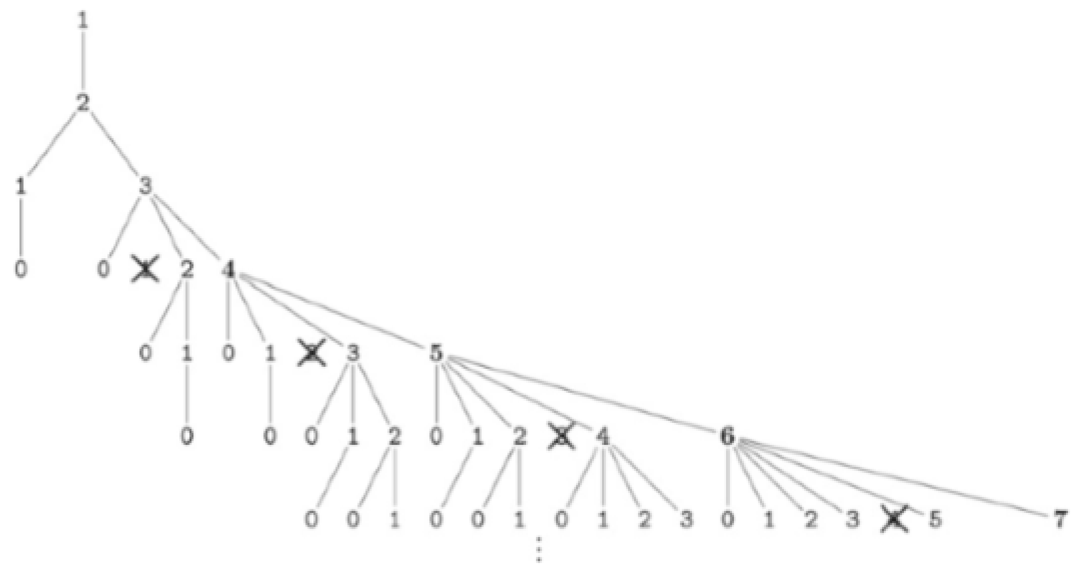
En el tercer punto el número de Frobenius será $m+2$ y los nuevos generadores serán $\{m+1, m+3, \ldots, 2m+1, 2m+3\}$ y por tanto m generadores mayores que $m+2$.

En el último punto el número de Frobenius será $m+r$. Los generadores de S serán también generadores de $S \backslash \{m+r\}$ y por tanto $m+r+1, \ldots, 2m+1$ son los generadores de S mayores al número de Frobenius. Solo tenemos que ver que no hay más generadores minimales, si existiera algún generador más tendría que ser de la forma $m+r+s$ para algún $s \in S\backslash\{m+r\}$. Entonces s debe ser diferente de 0 ni otro generador y por lo tanto $m+r+s-(m+1) > m+r$, entonces debe existir $s' \in S\backslash\{m+r\}$ tal que $m+r+s = m+1+s'$ y por tanto no es un generador minimal de $S\backslash\{m+r\}$. □

Y con esto estamos en condiciones de demostrar el Teorema principal del capítulo en el que veremos las dos cotas enunciadas anteriormente.

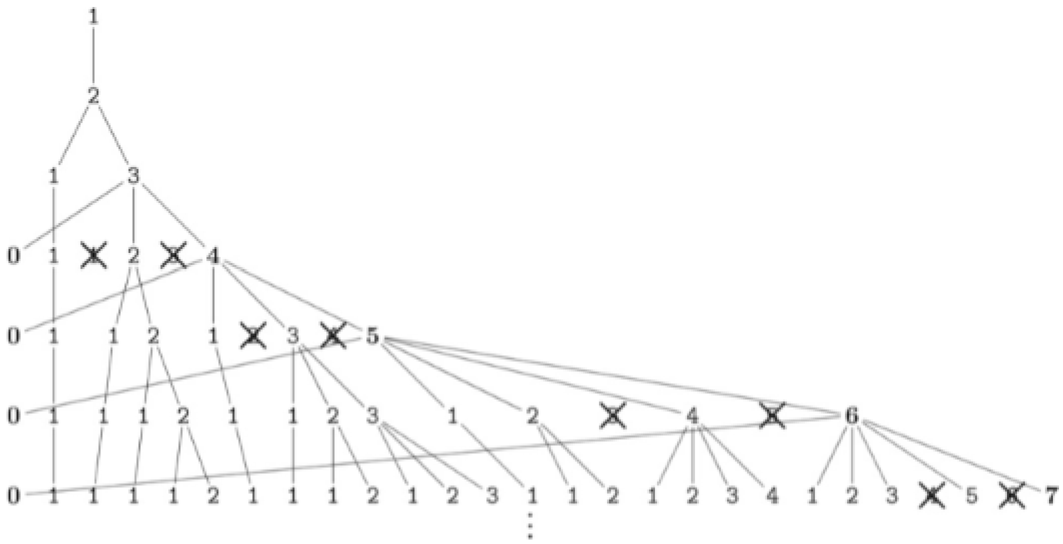
Teorema 2.2.4. *El número de semigrupos de género g satisface $n_g \geq 2a_g$ para todo $g \geq 2$ y $n_g \leq 1 + 3 \cdot 2^{g-3}$ para todo $g \geq 3$.*

Demostración. Para la primera prueba vamos a crear un nuevo árbol definido por una raíz a la que definimos como 1 y que posee un solo descendiente que denotamos con 2. En cada nodo el número de descendientes es igual al número que hay en el nodo y definimos recursivamente denotando g como el nivel y k el número que está en el nodo. De manera que los descendientes de un nodo k son $0, 1, \ldots k-1$ excepto cuando $k = g+1$, cuyos descendientes serán $0, \ldots, k-3, k-1, k+1$. Así generamos el siguiente árbol.



Entonces en este árbol, vamos a recoger en un conjunto los nodos de cada nivel. Así podemos observar que en el nivel 0 obtenemos $\{1\}$, en el nivel 1 obtenemos $\{2\}$ y si el nivel $g \geq 2$ obtenemos A_g. Además gracias a los Lemas 2.2.2 y 2.2.3 podemos concluir que está contenido en el árbol de los semigrupos numéricos y por tanto es un subárbol del mismo. Por tanto podemos deducir que n_g (que recordemos que es el número de semigrupos numéricos de género g y por tanto el número de elementos del nivel g del árbol de semigrupos) es mayor que $\mid A_g \mid$. Y gracias al Lema 2.1.1 deducimos que $n_g \geq 2a_g$ para $g \geq 2$.

Ahora para la segunda prueba crearemos un nuevo árbol definido de nuevo por una raíz a la que definimos como 1 y que posee un único descendiente que definimos como 2 y recursivamente definimos denotando g como el nivel y k el número que está en el nodo. De manera que los descendientes de un nodo k son $0, 1, \ldots k$ excepto cuando $k = g + 1$, cuyos descendientes serán $0, \ldots, k-3, k-1, k+1$. Así generamos el siguiente árbol.



Entonces en este árbol, si recogemos de nuevo en un conjunto los nodos de cada nivel. Podremos observar que en el nivel 0 obtenemos $\{1\}$, en el nivel 1 obtenemos $\{2\}$ y si el nivel $g \geq 2$ tenemos B_g. De nuevo, gracias a los Lemas 2.2.2 y 2.2.3 podemos concluir que el árbol de los semigrupos numéricos está contenido en este árbol, y por este motivo lo denotaremos superárbol. Por tanto podemos deducir que n_g es menor que $\mid B_g \mid$. Y gracias al Lema 2.1.2 se tiene que $n_g \leq 1 + 3 \cdot 2^{g-3}$ para todo $g \geq 3$. $\square$

Capítulo 3

Aportación de Eliahou-Fromentin a la conjetura

En este capítulo vamos a estudiar los casos en que la profundidad es $q \leq 2$ y $q \leq 3$ para los que veremos que se cumple la Conjetura 1.2.2. Este segundo caso abarca prácticamente todos los n_g por lo que es un paso muy importante para aproximarnos a la prueba de la conjetura. En este capítulo he utilizado como guía resultados recientes de Eliahou y Fromentin que se encuentran en el artículo [5].

3.1. Profundidad menor o igual que 2

Vamos a ver primero el caso $q \leq 2$ en el que Zhao estableció que el número de semigrupos de género $g \geq 0$ y con $q \leq 2$ es el mismo número que el término $g+1$ de la sucesión de Fibonacci. Es decir, si recordamos la notación introducida en el capítulo 1, $\mid \Gamma(g, q \leq 2) \mid = a_{g+1}$. Para verlo vamos a precisar de un Lema y una Proposción previa.

Lema 3.1.1. *Sea $m \in \mathbb{N}$. Toda m-filtración $F = (F_0, F_1)$ es una filtración de conjunto de lagunas de multiplicidad m y profundidad $q \leq 2$. Contrariamente toda filtración de conjunto de lagunas de multiplicidad m y profundidad $q \leq 2$ es una m-filtración (F_0, F_1).*

Demostración. Sea $F = (F_0, F_1)$ una m-filtración. Veamos que $A = \tau(F)$ es un conjunto de lagunas. A es una m-extensión, luego $A = A_0 \cup A_1$ con $A_0 = F_0 = [1, m-1]$ y $A_1 = F_1 + m$. Sea ahora $z \in A$. Podemos suponer que $z = x + y$ con $x, y \in \mathbb{N}$ y $x \leq y$. Si $z \in A_0$ entonces x e y deben pertenecer también a A_0. Si $z \in A_1$ y sabiendo, por ser F una m-filtración, que $F_1 \subset F_0 = [1, m-1]$ tenemos que $z \leq 2m-1$ y por como hemos definido x e y $x \leq m-1$, luego $x \in A_0$. Por lo tanto A será un conjunto de lagunas.

Una filtración de conjunto de lagunas de multiplicidad m y profundidad $q \leq 2$ por definición es una m-filtración $(F_0, \ldots, F_{q-1})$ y en este caso (F_0, F_1). $\square$

Proposición 3.1.2. *Para todo* $g \geq 2$ *tenemos*
$| \mathscr{F}(g, q \leq 2) |=| \mathscr{F}(g-1, q \leq 2) | + | \mathscr{F}(g-2, q \leq 2) |$.

Demostración. Sea $F \in \mathscr{F}(g, q \leq 2)$ con multiplicidad m. Entonces por el Lema 3.1.1 $F = (F_0, F_1)$, donde $F_0 = [1, m-1]$ y $F_0 \subset F_1$. Además por la Nota 1.4.5 tenemos que $g =| F_0 | + | F_0 |$. Se distinguen los siguientes casos según el género.

1) Si $g = 0$, tenemos que el conjunto de lagunas asociado es $G = \emptyset$, de donde $G_0 = F_0 = \emptyset$ y $G_1 = F_1 = \emptyset$. Luego $| \mathscr{F}(0, q \leq 2) |= 1$.

2) Si $g = 1$, tenemos que el conjunto de lagunas asociado es $G = \{1\}$. Como la multiplicidad es 2, tenemos que $G_0 = \{1\} = F_0$ y que $G_1 = G \cap [2+1, 4-1] = \emptyset = F_1$. Luego $| \mathscr{F}(1, q \leq 2) |= 1$.

3) Si $g = 2$, tenemos 2 posibles conjuntos de lagunas asociados que pueden ser $G = \{1, 2\}$ o $G' = \{1, 3\}$. En el primer caso como la multiplicidad es 3 tenemos que $G_0 = F_0 = [1, 2]$ y $G_1 = [4, 5] \cap G = \emptyset$, luego $F_1 = \emptyset$. En el segundo caso como la multiplicidad es 2 tenemos que $G'_0 = F'_0 = \{1\}$ y $G'_1 = \{3\} \cap G' = \{3\}$ y $F'_1 = G'_1 - 2 = \{1\}$. Luego $| F |=| F_0 |= 2$ y $| F' |=| F'_0 | + | F'_1 |= 2$. Como estas dos son las únicas opciones que hay, y por los dos casos anteriores se cumple la igualdad que queremos para $g = 2$.

4) Asumimos ahora que $g \geq 3$. Como $g =| F_0 | + | F_1 |$ deducimos $| F_0 |\geq 2$ y como $F_0 = [1, m-1]$ tenemos $m \geq 3$. Vamos a volver a distinguir en casos:

- Si $\max F_1 \leq m-2$, y denotamos ahora $F'_0 = F_0 \setminus \{m-1\} = [1, m-2]$ y $F'_1 = F_1$. F' es una $m-1$-filtración porque claramente es una secuencia finita de conjuntos de $\mathbb{N}$ y $F'_1 \subset F'_0$. Y por el Lema 3.1.1 tenemos que $F' = (F'_0, F'_1)$ es una m-filtración de conjunto de lagunas que será de género $g-1$ porque se le ha quitado un elemento. Luego $F' \in \mathscr{F}(g-1, q \leq 2)$.
- Si $\max F_1 = m-1$, denotamos ahora $F''_i = F_i \setminus \{m-1\}$ para $i = 1, 2$. De nuevo por el Lema 3.1.1 se tiene que $F'' \in \mathscr{F}(g-2, q \leq 2)$.

Como las aplicaciones $F \mapsto F'$ y $F \mapsto F''$ son inyectivas y sus respectivos dominios cubren el conjunto de $\mathscr{F}(g, q \leq 2)$. De aquí sigue que

$$| \mathscr{F}(g, q \leq 2) |=| \mathscr{F}(g-1, q \leq 2) | + | \mathscr{F}(g-2, q \leq 2) | .$$

Inversamente, sea $F = (F_0, F_1)$ una m-filtración de conjunto de lagunas de profundidad $q = 2$ y género g. Y, denotamos $\widehat{F_0} = F_0 \cup \{m\}$, $\widehat{F_1} = F_1 \cup \{m\}$, $\widehat{F} = (\widehat{F_0}, F_1)$ y $\widehat{\widehat{F}} = (\widehat{F_0}, \widehat{F_1})$. Entonces, por el Lema 3.1.1 tanto $\widehat{F}$ como $\widehat{\widehat{F}}$ son filtraciones de conjuntos de lagunas. Además, tenemos que el género de $\widehat{F}$ es $g+1$ y el género de $\widehat{\widehat{F}}$ es $g+2$. Finalmente, las aplicaciones $F \mapsto F'$ y $F \mapsto F''$ son inyectivas y tienen imagenes disjuntas en $\mathscr{F}(q \leq 2)$, desde que las filtraciones de conjuntos de lagunas de $\widehat{\widehat{F}}$ son caracterizadas por la propiedad de que tanto F_0 como F_1 tienen el mismo elemento maximal m mientras que en $\widehat{F}$ tenemos que $m = \max F_0 > \max F_1 = m-1$. Por lo tanto,

$$\mid \mathscr{F}(g, q \leq 2) \mid = \mid \mathscr{F}(g-1, q \leq 2) \mid + \mid \mathscr{F}(g-2, q \leq 2) \mid .$$

$\square$

Con esto llegamos al resultado más importante de esta sección en la que apreciamos que n_g bajo la condición de profundidad menor o igual que 2 no solo cumple la cota inferior marcada por la Conjetura 1.2.2, sino que se da la igualdad.

Corolario 3.1.3. *Para todo $g \geq 0$ tenemos que* $\mid \mathscr{F}(g, q \leq 2) \mid = a_{g+1}$.

Demostración. Sabemos que $n_0 = a_1 = 1$ que sucede cuando $S = \mathbb{N}_0$ y $G = \emptyset$ y la profundidad es $0 \leq 2$. Y $n_1 = a_2 = 1$ se da cuando $S = \langle 2, 3 \rangle = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ y $G = \{1\}$ y la profundidad es $1 \leq 2$. De donde deducimos que se cumple para los dos primeros términos y el resto sale de la Proposición 3.1.2. $\square$

3.2. Profundidad menor o igual que 3

Con esto hemos concluido con el caso de profundidad $q \leq 2$. Pasemos ahora al caso $q \leq 3$. No solo veremos que con esta condición cumple la Conjetura 1.2.2 sino que también ofreceremos una cota superior para estos números. Y como ya hemos comentado anteriormente, la importancia de este caso radica en que al abarcar casi todos los n_g nos acerca a la prueba de dicha conjetura.

3.2.1. Cota inferior (la conjetura)

Además, gracias a la cota presentada en esta sección daremos más adelante una restricción de la cota inferior dada en el capítulo 2. Más precisamente, $n_g \geq n'_g \geq 2a_g$.

Para conseguir demostrar las cotas mencionadas anteriormente, vamos a comenzar definiendo 2 aplicaciones de $\mathscr{F}(q \leq 3)$ en $\mathscr{F}(q \leq 3)$.

Notación 3.2.1. Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $F = (F_0, F_1, F_2)$ una m-filtración de longitud 3. Denotamos:

$$\alpha_1(F) = (F_0 \cup \{m\}, F_1, F_2),$$

$$\alpha_2(F) = (F_0 \cup \{m\}, F_1 \cup \{m\}, F_2).$$

Como F es una m-filtración sabemos que $F_0 = [1, m-1] \supseteq F_1 \supseteq F_2$. Luego $[1, m] \supseteq F_1 \supseteq F_2$ y por tanto $\alpha_1(F)$ será una $(m+1)$-filtración. Por otra parte, $[1, m] \supseteq F_1 \cup \{m\} \supseteq F_2$ y por tanto $\alpha_2(F)$ será también una $(m+1)$-filtración.

Proposición 3.2.2. *Sea $F = (F_0, F_1, F_2)$ una filtración de conjunto de lagunas y de género g. Entonces $\alpha_1(F), \alpha_2(F)$ son filtraciones de conjunto de lagunas de género $g+1$ y $g+2$ respectivamente.*

Demostración. Sea m la multiplicidad de F. Denotamos $G = \tau(F) = G_0 \cup G_1 \cup G_2$ a su correspondiente conjunto de lagunas asociado que por la Proposición 1.4.10 será $G_0 = F_0 = [1, m-1]$, $G_1 = m + F_1$ y $G_2 = 2m + F_2$. Y por como definimos la partición canónica tenemos que $G_1 \subset [m+1, 2m-1]$ y $G_2 \subset [2m+1, 3m-1]$.

Vamos a definir $H = H_0 \cup H_1 \cup H_2$ como la m-extensión correspondiente a $\alpha_1(F)$, esto es $H = \tau(\alpha_1(F))$. Y de nuevo por la Proposición 1.4.10 obtenemos:

$$H_0 = F_0 \cup \{m\} = [1, m],$$

$$H_1 = F_1 + (m+1),$$

$$H_2 = F_2 + 2(m+1).$$

Con todo esto podemos deducir que $H_1 = 1 + G_1$ y $H_2 = 1 + G_2$. Por consiguiente:

$$H_1 \subset [m+2, 2m],$$

$$H_2 \subset [2m+3, 3m+1].$$

Además como el género de G es g tenemos que el género de H es $g+1$ ya que $m \in H$. Ahora falta ver que H es un conjunto de lagunas. Escogemos un elemento $z \in H$ con $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $x + y = z$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $x \leq y$ y queremos ver que x o y están en H y así demostrar que es un conjunto de lagunas.

- Si $z \in H_0$ entonces $x, y \in H_0 =\subset H$ y concluimos.

• Si $z \in H_1$ y sabiendo que $H_1 \subset [m+2, 2m]$, tenemos $z \leq 2m$ y de $x \leq y$ se deduce que $x \leq m$ y por tanto $x \in H_0 \subset H$ y concluimos.

• Finalmente, si $z \in H_2$ entonces como $H_2 \subset [2m+3, 3m+1]$ tenemos que $z \leq 3m+1$. Si $x \leq m$ se tendría que $x \in H_0$ y concluimos. Así que suponemos que $x \geq m+1$ y entonces $y \leq 2m$ porque en caso contrario tendríamos $z > 3m+1$. Vamos a denotar ahora $z' = z-2 = (x-1)+(y-1)$ y desde que $H_2 = 1+G_2$ se tiene que $z' \in G_2 \subset G$. Del hecho de que G es un conjunto de lagunas tenemos que $x-1 \in G$ o $y-1 \in G$. Más precisamente, dado que $m \leq x-1 \leq y-1 \leq 2m-1$ tenemos $x-1 \in G_1$ o $y-1 \in G_1$ y, por lo tanto, $x \in H_1$ o $y \in H_1$. Concluimos que H es un conjunto de lagunas.

Denotamos ahora H' como la $(m+1)$-extensión correspondiente a la filtración $\alpha_2(F)$, esto es, $H' = \tau(\alpha_2(F))$. Entonces tenemos que $H' = H \cup \{2m+1\}$ y desde que $2m+1 \notin H$ tenemos que H' posee un elemento más y por tanto el género de H' será $g+2$.

Nos falta ver que H' es un conjunto de lagunas. Escogemos ahora un entero $z \in H'$, con $z = x+y$ y suponemos sin pérdida de generalidad que $1 \leq x \leq y$. Si $z \in H$, y como H es un conjunto de lagunas tenemos que $x \in H$ o $y \in H$. Nos queda ver el caso que $z = 2m+1$, pero entonces $x \leq m$ y entonces $x \in H_0 \subset H'$. Por lo tanto tenemos que H' es un conjunto de lagunas.

Así podemos concluir que $\alpha_1(F)$ y $\alpha_2(F)$ son filtraciones de conjunto de lagunas de género $g+1$ y $g+2$ respectivamente. Además ambos son de profundidad $q \leq 3$ y multiplicidad $m+1$, ya que los dos contienen a $[1, m]$, pero no a $m+1$. □

De estos resultados se deduce que α_1, α_2 son dos aplicaciones bien definidas e inyectivas $\alpha_1, \alpha_2 : \mathscr{F}(q \leq 3) \longrightarrow \mathscr{F}(q \leq 3)$.

Proposición 3.2.3. *Las imágenes de las aplicaciones vistas anteriormente tienen intersección vacía. Es decir,* $Im(\alpha_1) \cap Im(\alpha_2)$.

Demostración. Sea $F = (F_0, F_1, F_2) \in \mathscr{F}(q \leq 3)$. De las definiciones de α_1 y α_2, y de la definición de aplicación podemos deducir que si $F \in \alpha_1$ entonces $\max F_0 > \max F_1 > \max F_2$, mientras que si $F \in \alpha_2$ entonces $\max F_0 = \max F_1 > \max F_2$. Por lo que F no puede pertenecer a ambos conjuntos. □

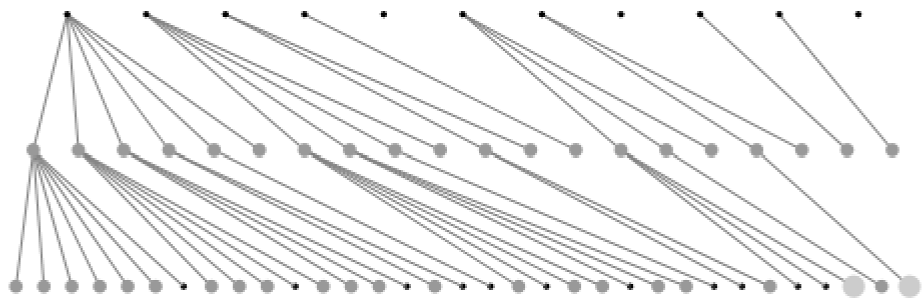
Con esto estamos en condiciones de ver que la conjetura se cumple para el caso de que la profundidad sea menor o igual que 3.

Corolario 3.2.4. *Para todo* $g \geq 2$, *tenemos* $n'_g \leq n'_{g-1} + n'_{g-2}$.

Demostración. Para $g \geq 2$, por la Proposición 3.2.2 sabemos que si $F \in \mathscr{F}(g-1, q \leq 3)$ entonces $\alpha_1(F) \in \mathscr{F}(g, q \leq 3)$ y si $F \in \mathscr{F}(g-2, q \leq 3)$ entonces $\alpha_2(F) \in \mathscr{F}(g, q \leq 3)$. Además por la Proposición 3.2.3 sabemos que las imágenes de estas aplicaciones son disjuntas. Por lo que el conjunto $\mathscr{F}(g, q \leq 3)$ contiene copias disjuntas de $\mathscr{F}(g-1, q \leq 3)$ y $\mathscr{F}(g-2, q \leq 3)$. De donde se da la siguiente desigualdad $\mid \mathscr{F}(g, q \leq 3) \mid \leq \mid \mathscr{F}(g-1, q \leq 3) \mid + \mid \mathscr{F}(g-2, q \leq 3) \mid$. □

En el primer capítulo explicamos como construir los árboles de los semigrupos numéricos, y como vimos en el capítulo 2 se pueden crear subárboles imponiendo condiciones, como por ejemplo que la profundidad $q \leq 3$. Recordemos que el árbol tenía como vértices los semigrupos y en cada nivel había n_g vértices. En este subárbol tendremos entonces como vértices los semigrupos que además tengan profundidad $q \leq 3$ y teniendo cada nivel n'_g vértices.

Vamos a representar los niveles 5, 6 y 7 de este subárbol que se verán respectivamente como un punto negro pequeño, como un punto gris y como copias disjuntas del nivel 5 y 6 y dos vértices a mayores representados por puntos grises grandes de este subárbol. Hay respectivamente $n'_5 = 11$, $n'_6 = 20$ y $n'_7 = 33$ vértices. Podemos observar que para estos 3 niveles se cumple el Corolario 3.2.4.



Nota 3.2.5. Nótese que con lo que hemos visto y siguiendo la notación podemos tener una refinamiento de la Conjetura 1.2.2. Puede ser expresado como $\mid \mathscr{F}(g, q \leq n) \mid \leq \mid \mathscr{F}(g-1, q \leq n) \mid + \mid \mathscr{F}(g-2, q \leq n) \mid$ para todo $g \geq 2$ y para cualquier $n \geq 2$.

La Proposición 3.1.2 muestra la igualdad en esta cota para $n = 2$ y el Corolario 3.2.4 nos muestra que se cumple la desigualdad para $n = 3$.

3.2.2. Cota superior

De esta manera tenemos una cota inferior para n'_g, vamos a establecer ahora la siguiente cota superior $n'_g \leq n'_{g-1} + n'_{g-2} + n'_{g-3}$. Más adelante veremos la relación de esta cota con la sucesión de Tribonacci.

Proposición 3.2.6. *Sea $F = (F_0, F_1, F_2) \in \mathscr{F}(g, q \leq 3)$ con $g \geq 2$. Entonces*

$$F \in Im(\alpha_1) \Leftrightarrow \max F_0 > \max F_1,$$

$$F \in Im(\alpha_2) \Leftrightarrow \max F_0 = \max F_1 > \max F_2.$$

Demostración. $\Rightarrow$) En ambos casos ya lo vimos en la Proposición 3.2.3.

$\Leftarrow$) El único caso que la multiplicidad es $m = 1$ es el caso en el que el semigrupo numérico es $\mathbb{N}_0$ y entonces el género es 0. Como $g \geq 2$ descartamos este caso y denotamos $m \geq 2$ la multiplicidad de F. Por definición de m-filtración tenemos:

$$[1, m-1] = F_0 \supset F_1 \supset F_2$$

Y, por consiguiente, $\max F_0 = m-1$. Ahora tenemos dos casos que considerar:

- $\max F_1 < m - 1$
- $\max F_2 < \max F_1 = m - 1$

En ambos casos $\max F_2 \leq m-2$. Queremos ver que $F \in Im(\alpha_1)$ en el primer caso y $F \in Im(\alpha_2)$ en el segundo.

Denotamos por G al conjunto de lagunas asociado a F, es decir, $G = \tau(F) = G_0 \cup G_1 \cup G_2$, donde, por definición $G_i = im + F_i$ para $i = 0, 1, 2$. Definimos ahora los siguientes subconjuntos en $\mathbb{N}$:

$$F'_0 = F_0 \setminus \{m-1\} = [1, m-2], \quad F'_1 = F_1 \setminus \{m-1\}, \quad F'_2 = F_2$$

y de $[1, m-1] = F_0 \supset F_1 \supset F_2$ tenemos que $[1, m-2] = F'_0 \supset F'_1 \supset F'_2$, por lo tanto deducimos que $F' = (F'_0, F'_1, F'_2)$ es una $(m-1)$-filtración. Nótese que en el primer caso $F'_1 = F_1$.

Denotamos por G' a la correspondiente $(m-1)$-extensión asociada (no tiene porque ser conjunto de lagunas). Es decir, $G' = \tau(F') = G'_0 \cup G'_1 \cup G'_2$ donde por definición $G'_i = i(m-1) + F'_i$ para $i = 0, 1, 2$. En el primer caso el género sería uno menos que el de G porque $\max G_0 = m - 1 \notin G'_0$ y por la hipótesis concluimos que el género sería $g - 1$. En el segundo caso el género es $g - 2$ porque $\max G_0 = m - 1 \notin G'_0$. Y del hecho de que $m - 1 \in F_1$ pero no pertenece a F'_1 concluimos. Ahora vamos a ver que en ambos casos G' es un conjunto de lagunas.

Para empezar, del Lema 3.1.1 deducimos que $G'_0 \cup G'_1$ es un conjunto de lagunas de profundidad a lo sumo 2. Sea ahora un entero $z \in G'_2$ de manera que $z = x + y$ con $x, y \in \mathbb{N}$ suponiendo que $1 \leq x \leq y$. Veamos que x o y pertenecen a G'.

• Si $x \leq m - 2$ entonces $x \in G'_0 \subset G$ y concluimos.

• Asumimos ahora que $x \geq m - 1$, sabemos que $z \in G'_2 = 2(m-1) + F'_2$, es decir, $z = 2(m-1) + t$ para algún $t \in F'_2 = F_2$ y como $\max F_2 \leq m - 2$ en ambos casos deducimos que $z \leq 3m - 4$, que sumado a que $m - 1 \leq x \leq y$ y $z = x + y$ tenemos que $y \leq 2m - 3$. Reescribiendo ahora la igualdad $(x+1) + (y+1) = z + 2 = 2m + t$. Y dado que $t \in F_2$ y por la definición llegamos a $2m + t \in G_2$. Como G es un conjunto de lagunas y de lo anterior, tenemos que $x + 1$ o $y + 1$ pertenece a G. Más precisamente deducimos de la siguiente desigualdad $m \leq x + 1 \leq y + 1 \leq 2m - 2$ y de $\max G_0 = m - 1$,$\min G_2 \geq 2m + 1$ que $x + 1$ o $y + 1$ pertenece a G_1. Por lo tanto x o y pertenece a $G_1 - 1 = (m + F_1) - 1 = (m-1) + F_1$.

◦ En el primer caso, como $m-1 \notin F_1$ tenemos que $F_1 = F'_1$. Entonces x o y pertenece a $G_1 - 1 = (m + F_1) - 1 = (m-1) + F_1 = (m-1) + F'_1 = G'_1 \subset G'$ y concluimos que G' es un conjunto de lagunas y F' es una filtración de conjunto de lagunas de género $g - 1$ y $F = \alpha_1(F')$ por construcción. Por lo tanto $F \in Im(\alpha_1)$.

◦ En el segundo caso, como $m - 1 \in F_1$ tenemos que $F'_1 = F_1 \setminus \{m-1\}$. De la desigualdad $x \leq y \leq 2m - 3 = (m-1) + (m-2)$, se sigue que x o y pertenece de hecho a $(m-1) + F_1 \setminus \{m-1\} = (m-1) + F'_1 = G'_1$. De donde x o y debe pertenecer a G' como queríamos. Concluimos ahora que G' es un conjunto de lagunas y F' es una filtración de conjunto de lagunas de género $g - 2$ y $F = \alpha_2(F')$ por construcción. Por lo tanto $F \in Im(\alpha_2)$. □

Proposición 3.2.7. *Sea $F = (F_0, F_1, F_2)$ una filtración de conjunto de lagunas de multiplicidad $m + 1 \geq 2$ y profundidad 3. Como F es una $(m+1)$-filtración se tiene que $F_0 = [1, m] \supset F_1 \supset F_2 \neq \emptyset$. Denotemos como $m_i = \max F_i$ y $F'_i = F_i \setminus \{m_i\}$ para $i = 0, 1, 2$. Entonces $F' = (F'_0, F'_1, F'_2)$ será una filtración de conjunto de lagunas.*

Demostración. Tenemos $m = m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq 1$. Denotamos $G = \tau(F)$ y $G' = \tau(F')$. Entonces $G = G_0 \cup G_1 \cup G_2$ y $G' = G'_0 \cup G'_1 \cup G'_2$ donde

$$G_i = i(m+1) + F_i$$

$$G'_i = im + F'_i$$

para $i = 0, 1, 2$ en cada construcción. Como F es una filtración de conjunto de lagunas G es un conjunto de lagunas, y vamos a ver que G' también lo es.

Si $F'_2 = \emptyset$ el resultado es cierto debido a que $F' = (F'_0, F'_1)$ es de longitud a lo sumo 2 y por el Lema 3.1.1 concluimos.

Suponemos entonces que $F'_2 \neq \emptyset$ y escogemos un $z \in G'_2$. Entonces $z = 2m + b$ para algún $b \in F'_2$, con $b < m_2 \leq m$ por construcción. Suponemos también que $z = x + y$ para $x, y \in \mathbb{N}$ y suponemos sin pérdida de generalidad que $1 \leq x \leq y$. Es suficiente ver que x o y pertenece a G'.

• Si $x \leq m - 1$, concluimos porque hemos razonado en demostraciones anteriores $x \in G'_0 = F'_0 = [1, m-1]$.

• Suponemos que $x \geq m$. Debido a $x + y = z = 2m + b \leq 3m - 1$, obtenemos que $y \leq 2m - 1$. Y además de la anterior igualdad deducimos que $z + 2 = 2(m+1) + b \in G_2$ por definición. Y como G es un conjunto de lagunas y $z+2 = (x+1)+(y+1)$ tenemos que $x+1 \in G$ o $y+1 \in G$. Más precisamente, como $\max G_0 = m$ y $\min G_2 \geq 2m + 3$ y $m + 1 \leq x + 1 \leq y + 1 \leq 2m$ deducido de las anteriores desigualdades mencionadas tenemos que $x+1 \in G_1$ o $y + 1 \in G_1$. De $G_i = i(m+1) + F_i$ vemos que $x - m \in F_1$ o $y - m \in F_1$. Vamos a suponer que $x - m \notin F'_1$ e $y - m \notin F'_1$, y como $F'_i = F_i \setminus \{m_i\}$ tenemos que $m_1 = x - m$ o $m_1 = y - m$. Por la suposición de $y \geq x$ vemos que $y - m \geq m_1$, pero entonces $2m + b = z = x + y \geq x + m_1 + m$, es decir, que $m + b \geq x + m_1$, lo que implica que $x \leq m + (b - m_1) < m$. Además, como $b \in F'_2$ tenemos que $b < m_2 \leq m_1$, y hemos llegado a un absurdo en la suposición que $x \geq m$. Por lo tanto, la hipótesis de que $x - m \notin F'_1$ y $y \notin F'_1$ también es absurda. Con lo que $x \in G'_1$ o $y \in G'_1$. De dónde G' será un conjunto de lagunas y por tanto F' una filtración de conjunto de lagunas. □

Nótese que este resultado no se mantiene en general para $q \geq 4$. Vamos a ver un caso en el que no se cumple.

Ejemplo 3.2.8. Sea la filtración

$$\begin{aligned} F &= (F_0, \dots, F_7) \\ &= (\{1,2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3\}, \{1,3\}, \{1,3\}, \{1,3\}, \{1\}) \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo, $F = (123)^2, (13)^4, (1)$. Sabemos que esta filtración es una filtración de conjunto de lagunas gracias a [5, Thm. 8.3]. Denotaremos por G al conjunto de lagunas asociado a F. Es decir, $G = \tau(F) = G_0 \cup \ldots \cup G_6$ siendo $G_i = F_i + im$ para $i = 0, \dots, 6$. Y por tanto $G = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25\}$ será el conjunto de lagunas del semigrupo numérico S generado por $\langle 4, 10, 27, 29 \rangle$. Es decir, la multiplicidad es $m = 4$ y el número de Frobenius $f = \max(\mathbb{Z} \setminus S) = \max G = 25$. Por lo tanto la profundidad es $q = \lceil \frac{c}{m} \rceil = \lceil \frac{26}{4} \rceil = 7 \geq 4$.

Si suprimimos ahora el máximo de cada F_i como en la Proposición 3.2.7, es decir, $F_i' = F_i \setminus \{\text{máx}\, F_i\}$ obtenemos la filtración $F_i' = (12)^2, (1)^4$ y veamos que el correspondiente conjunto asociado no es un conjunto de lagunas. Sea $G_i' = F_i' + im$ para cada $i = 0, \ldots, 5$. Tenemos $G' = \tau(F') = G_0' \cup \ldots \cup G_5' = \{1, 2, 3, 4, 7, 10, 13, 16\}$ que no es un conjunto de lagunas porque $8+8 = 16 \in G'$ pero $8 \notin G'$.

Corolario 3.2.9. *Sea $F = (F_0, F_1, F_2)$ una filtración de conjunto de lagunas de multiplicidad $m+1 \geq 2$ y profundidad 3 tal que $\text{máx}\, F_0 = \text{máx}\, F_1 = \text{máx}\, F_2 = m$. Denotando ahora $F_i' = F_i \setminus \{m\}$. Entonces $F' = (F_0', F_1', F_2')$ será una filtración de conjunto de lagunas.*

Demostración. Es un caso particular de la Proposición 3.2.7 en la que $m = m_i = \text{máx}\, F_i$ para $i = 0, 1, 2$ siendo m una unidad más baja que la multiplicidad. □

Estamos en condiciones de probar que se verifica la cota superior para n_g'.

Teorema 3.2.10. *Para todo $g \geq 3$ se cumple $n_g' \leq n_{g-1}' + n_{g-2}' + n_{g-3}'$.*

Demostración. Los 5 primeros términos de la secuencia de n_g' son 1,2,4,6 y 11, luego la desigualdad se mantiene para $g = 3, 4, 5$. Suponemos entonces que $g \geq 6$ y llamamos X al conjunto $\mathscr{F}(g, q \leq 3)$. Consideramos la partición $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, donde para $F = (F_0, F_1, F_2) \in X$ tenemos:

$$\bullet F \in X_1 \Longleftrightarrow \text{máx}\, F_0 > \text{máx}\, F_1,$$

$$\bullet F \in X_2 \Longleftrightarrow \text{máx}\, F_0 = \text{máx}\, F_1 > \text{máx}\, F_2,$$

$$\bullet F \in X_3 \Longleftrightarrow \text{máx}\, F_0 = \text{máx}\, F_1 = \text{máx}\, F_2.$$

De la Proposición 3.2.6 tenemos que $F \in X_1$ sí y sólo sí $F \in Im(\alpha_1)$, y $F \in X_2$ sí y sólo sí $F \in Im(\alpha_2)$. Por las Proposiciones 3.2.2 y 3.2.3 tenemos $\mid X_1 \mid = n_{g-1}'$ y $\mid X_2 \mid = n_{g-2}'$ y por el Corolario 3.2.9 deducimos que X_3 puede ser incrustado en $\mathscr{F}(g-3, q \leq 3)$, eliminando el máximo común de F_0, F_1 y F_2. Así obtenemos $|X \setminus (X_1 \cup X_2)| \leq |\mathscr{F}(g-3, q \leq 3)| = n_{g-3}'$ y concluimos. □

Podemos resumir la Conjetura 1.2.2 y la cota superior para n_g' en el siguiente corolario, siendo así el resultado más importante del capítulo.

Corolario 3.2.11. *Para todo $g \geq 3$ se cumple $n_{g-1}' + n_{g-2}' \leq n_g' \leq n_{g-1}' + n_{g-2}' + n_{g-3}'$.*

Demostración. La cota inferior se ha demostrado en la Proposición 3.2.4 y la cota superior en el Teorema 3.2.10. □

Vamos a añadir ahora una última cota superior relacionada con la sucesión de Tribonacci y una cota inferior relacionada con la sucesión de Fibonacci.

Notación 3.2.12. Denotaremos t_i como el i-ésimo número de la sucesión de Tribonacci (secuencia de Fibonacci de orden 3):

$$(t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 1 \text{ y } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \text{ para } n > 2).$$

Corolario 3.2.13. *Para todo* $g \geq 3$ *se cumple* $2a_g \leq n'_g \leq t_{g+1}$.

Demostración. Vamos a realizar una primera inducción para ver la que se cumple la cota inferior. La igualdad es cierta para $g = 3$, pues $n'_3 = 4 = 2a_3$. Supongamos que la hipótesis de inducción es válida hasta un cierto $g+1 \geq 3$. Entonces tenemos por Proposición 3.2.4 $n'_g \geq n'_{g-1} + n'_{g-2}$ y por nuestra hipótesis de inducción obtenemos que $n'_g \geq 2a_{g+1}+2a_g = 2a_{g+2}$ y concluimos.

Para la prueba de la cota superior vamos a realizar una segunda inducción. En primer lugar observamos que la cota es cierta para $g = 1, 2, 3$, y además se da la igualdad. Pues $(n'_1, n'_2, n'_3) = (1, 2, 4) = (t_2, t_3, t_4)$. Supongamos que la cota superior es válida hasta $g + 2$. Entonces tenemos por Teorema 3.2.10 $n'_{g+3} \leq n'_g + n'_{g+1} + n'_{g+2}$ y por nuestra hipótesis de inducción obtenemos que $n'_{g+3} \leq t_{g+1} + t_{g+2} + t_{g+3} = t_{g+4}$ y concluimos. □

Nota 3.2.14. Nótese que $2a_g \leq n'_g$ es una cota más fuerte que $2a_g \leq n_g$ demostrada en 2.2.4.

Bibliografía

[1] A.Assi, P.A.García-Sánchez *Numerical Semigroups and Applications*, RSME Springer Series **1**, Springer (2016).

[2] M. Bras-Amorós, *Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus*, Semigroup Forum **76** (2008), 379–384.

[3] M. Bras-Amorós, *Bounds on the number of numerical semigroups of a given genus*, Journal of Pure and Applied Algebra **213** (2009), 997–1001.

[4] M. Bras-Amorós, *Semigrupos numéricos*, Conferencia impartida en el ATENEO del imUVa (2019).

[5] S. Eliahou, J. Fromentin, *Gapsets and numerical semigroups*, arXiv:1811.10295v1 (2018).

[6] J.L. Ramírez Alfonsín, *The Diophantine Frobenius Problem*, Oxford lecture series in mathematics and its aplications **30**, Oxford University Press, Oxford (2005).

[7] J.C. Rosales, P.A. García-Sánchez, *Numerical semigroups*, Developments in Mathematics **20**, Springer, New York (2009).

[8] A. Zhai, *Fibonacci-like growth of numerical semigroups of a given genus*, Semigroup Forum **86** (2013), 634–662.

[9] Y. Zhao, *Constructing numerical semigroups of a given genus*, Semigroup Forum **80** (2010), 242–254