



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

Leyes de escala: tamaño, forma y vida

Autor: Guzmán Peña Alonso

Tutores: Ana Cobos Huerga, Luis Fernando Hevia de los Mozos y

José Carlos Cobos Hernández

Este trabajo se lo dedico a mis padres,
por todo su apoyo,
al abuelo Cuco y a la abuela Nines,
por haber estado siempre ahí,
y a Ana Cobos y Fernando Hevia,
por hacerme ver la Física de otra manera.



Universidad de Valladolid

Departamento de Física Aplicada

Prof. Dr. D. José Carlos Cobos
Catedrático de Universidad
Facultad de Ciencias. Universidad de Valladolid
C/ Paseo de Belén, 7. 47071 – Valladolid
Tfno. Despacho: 983.42.31.37
e-mail: josecarlos.cobos@uva.es

D. JOSÉ CARLOS COBOS HERNÁNDEZ, Catedrático de Universidad del Área de Física Aplicada de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que la presente memoria, titulada “*Leyes de escala: tamaño, forma y vida*”, ha sido realizada bajo su dirección y la de **D^a Ana Cobos Huerga** y **D. Luis Fernando Hevia de los Mozos**, por **D. Guzmán Peña Alonso**, en el Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valladolid, y constituye su **Memoria del Trabajo Fin de Grado**.

Y para que así conste, firma el presente certificado en Valladolid, a 16 de julio de 2019.

Firmado: José Carlos Cobos Hernández

Tabla de contenido

Resumen.....	9
Abstract	10
Capítulo 1 Prefacio	11
Capítulo 2 Leyes de escala: tamaño, forma y vida.....	15
Capítulo 3 Génesis: Galileo Galilei y dos Ciencias Nuevas	21
Capítulo 4 El Principio de Semejanza Geométrica	25
4.1. Fuerza relativa	26
4.2. División celular.....	26
Capítulo 5 El origen estadístico de la alometría	29
5.1. Fluctuaciones en los parámetros alométricos.....	30
5.1.1. Coeficiente alométrico	31
5.1.2. Exponente alométrico.....	32
5.1.3. Covariación de los parámetros alométricos	34
5.2. Evolución de las probabilidades.....	34
Capítulo 6 Invariancia de escala	37
Capítulo 7 Ejemplos.....	39
7.1. ¿Puede un pájaro de gran masa volar?	39
7.2. ¿Cómo dependen de las dimensiones de un animal terrestre la energía por unidad de masa y la longitud recorrida en moverse?.....	41
7.3. ¿Por qué la muñeca Barbie no llegó a ser Miss Universo?.....	42
7.4. Leyes de escala en ratas.....	44
7.5. Ritmo cardíaco y longevidad	45
7.6. Leyes de escala en árboles.....	46
7.7. Leyes de escala en ciudades	48
Capítulo 8 Conclusiones.....	51
Bibliografía	53

Resumen

En el mundo observamos una gran variedad de tamaños y formas: desde el patagotitán, que pesa $69 \cdot 10^3$ kg y mide 36 m de largo y 14 m de alto, o la gran ballena azul, que pesa $2 \cdot 10^5$ kg y mide 30 m de largo, hasta el micoplasma, cuya masa es del orden de $2 \cdot 10^{-16}$ kg.

Para comparar los fenómenos que ocurren a diferentes escalas, utilizamos el **análisis dimensional** y las **leyes de escala**. Las leyes de escala son, matemáticamente hablando, leyes de potencias que interrelacionan dos variables que describen un proceso natural. En Biología se las conoce con el nombre **leyes alométricas** y, obviamente, se caracterizan principalmente por medio del exponente (alométrico). Dichas leyes nos hablan del diferente crecimiento relativo de las dos variables de interés, en contraposición con las **leyes isométricas**, que serían aquellas en las que el exponente vale 1 y una variable crece proporcionalmente respecto a la otra.

No existen leyes de escala generales y, para llegar a una, primero hay que establecer una hipótesis biológica que intente describir el proceso subyacente. En algunos casos se puede utilizar el **Principio de Semejanza**, establecido por Arquímedes para figuras geoméricamente semejantes (isometría), apoyándonos en alguna hipótesis biológica. Pero este principio presenta ciertas limitaciones, y Galileo se dio cuenta de ellas 2000 años después.

En este trabajo veremos lo importante que es entender por qué los fenómenos físicos que ocurren a una cierta escala no pueden ser extrapolados a otras por una simple regla de tres, y que por eso son importantes las leyes de escala y las, así llamadas, propiedades emergentes, que aparecen cuando ni siquiera se cumplen las leyes de escala.

Palabras clave: tamaño, forma, análisis dimensional, Principio de Semejanza de Arquímedes, hipótesis biológica, Galileo, alometría, Ley de Kleiber, propiedades emergentes.

Abstract

In the world we observe a great variety of sizes and shapes: from the patagotitán, which weights $69 \cdot 10^3$ kg and is 36 m long and 14 m tall, or the great blue whale, weighting $2 \cdot 10^5$ kg with a length of 30 m, to the mycoplasma, which weights $2 \cdot 10^{-16}$ kg.

To compare phenomena at different scales, we use **dimensional analysis** and **scaling laws**. Scaling laws are, mathematically speaking, power laws that relate two variables describing a natural process. In Biology, they are called **allometric laws**, and, obviously, they are mainly characterized by the (allometric) exponent. Such laws speak about different relative growth of the two variables of interest, in contrast to **isometric laws**, meaning those for which the exponent is 1 and one variable increases proportionally to the other.

No general scale laws exist and, to arrive to one, a biological hypothesis must be established in order to describe the underlying process. In some cases, we can use the **Similarity Principle**, set by Archimedes for geometrically similar figures (isometry), supported by a biological hypothesis. But this principle presents some limitations, and Galileo realized that 2000 years later.

In this work, we will see the importance of understanding why the physical phenomena that occur at a certain scale cannot be extrapolated to other scales using a simple rule of three, and that is why scaling laws and the so-called emergent properties, which appear when not even scaling laws hold, are important

Keywords: size, shape, dimensional analysis, Archimedes's Similarity Principle, biological hypothesis, Galileo, allometry, Kleiber's law, emergent properties.

Capítulo 1

Prefacio

Cuando queremos describir el mundo real, debemos tener especial cuidado con el hecho de que las leyes naturales NO SON, en general, INVARIANTES bajo transformaciones de escala (Abellán, 2013; Anderson, 1972; Galilei, 1976; Nuñez *et al.*, 2010; Peterson, 2002; Wilson, 1979), de forma que hemos de ir de lo macroscópico a lo microscópico, en contra de lo que habitualmente se enseña en Física (Jaynes, 1979).

Una de las consecuencias de que la realidad NO sea invariante bajo cambios de escala, es la aparición de un conjunto de niveles jerárquicos, claramente diferenciados, cada uno de los cuales NO puede deducirse trivialmente a partir del NIVEL INFERIOR, dando lugar a la aparición de las así llamadas **propiedades emergentes** (Laughlin, 2007; Henriques, 2003).

Así pues, la descripción reduccionista de la realidad Física, que se utiliza implícitamente en la mayoría de las teorías en uso actualmente, en el que cada nivel jerárquico se explica gracias comportamiento de las entidades elementales de otro nivel inferior, es intrínsecamente incapaz de dar cuenta de los fenómenos reales (Anderson, 1972). De forma que, para describir un sistema, ya sea social, político, o biológico (de hecho, la vida es una propiedad emergente), necesariamente hay que utilizar una descripción jerárquica del mundo.

Ya Aristóteles, en su *Metafísica*, indicó que “*el todo es más que la suma de las partes*”, que retomó Hegel en su conocida sentencia “*la cantidad se transforma en cualidad*”, de forma que podemos decir que, en algunos sistemas, aparecen propiedades colectivas no deducibles de las individualidades que los componen.

Fue Reiser (1958) el primero que jerarquizó los diferentes niveles de complejidad del mundo, como aparece en la Figura 1.1.

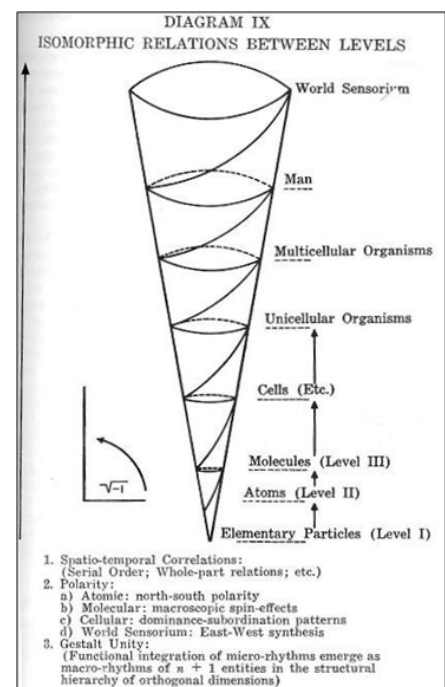


Figura 1.1

Lo que permitió a Jorge Wagensberg, unos años después, hacer su reconocida “*Breve historia de la materia*” (Wagensberg, 1998) que presentamos en la Figura 1.2.



JORGE WAGENSBERG es director del Museo de la Ciencia de la Fundación "la Caixa" de Barcelona

Breve historia de la materia

Jorge Wagensberg

Una partícula fundamental, como un electrón, no tiene partes constituyentes que puedan deambular libres por el espacio. Raramente sobrepasan el yoctogramo, es decir, la cuatrimillonésima parte de un gramo. Sea el suyo entonces el nivel uno de la materia. Él, el electrón, sí puede ser libre. O no. Porque es bien posible que se asocie con otras partículas para formar otra individualidad, un átomo, como el del hidrógeno, que no supera los mil yoctogramos y representa el nivel dos de la materia, el cual puede, a su vez, divagar libre por el cosmos. O no. Porque un átomo bien puede combinarse con otros para crear otra entidad, la molécula, el nivel tres de la materia.

Una molécula puede ser muy ligera, como la del agua, o alcanzar el picogramo, la billonésima parte de un gramo, como un DNA. Ambas pueden circular más o menos libres y mansas por el océano. O no. Porque pueden verse involucradas en un complejo con otras moléculas y dar lugar a otra individualidad, la célula. Suele llegar al microgramo e ilustra el celebrado nivel cuatro de la materia. Puede nadar a su aire en busca de luz o alimento. O no. Porque puede negociar con otras como ella y constituir

una entidad del nivel cinco, el organismo, que puede vagar por ahí, tirando de una masa de entre el microgramo y decenas de toneladas, como un gusano o un cetáceo. O no. Porque también puede reunirse con otros organismos de su mismo nivel para dar lugar a otra individualidad, la sociedad familiar de una sola madre, el nivel seis de la materia. Así es como las hormigas dan sentido a la colonia. Puede que todo quede ahí. O no. Porque algunas familias pueden agruparse en una sociedad multifamiliar, como una manada de ñus. Estas entidades son ya propias del nivel siete de la materia y raramente se organizan para crear algo que merezca ser registrado como del nivel ocho. Es muy raro, pero ocurre. Es la sociedad de sociedades multifamiliares con soberanía sobre sí misma, como la polis griega, como un estado, una individualidad, que puede llegar al millón de toneladas... Y ya no hay más. Ni más de ocho ni menos de uno. Desde hace más de 10.000 millones de años hasta hace 3.800 sólo existieron los tres primeros niveles. Es la materia inerte. Una ínfima parte de ésta se inició entonces en el empeño de intercambiar materia, energía e información con un resultado notable: mantener un grado

mínimo de independencia respecto del entorno. Esta materia viva, limitada, durante los 3.000 millones de años siguientes, al nivel cuatro. Hace quizá 1.000 millones de años que aparecieron las primeras individualidades del nivel cinco, pero el incremento del grado de independencia necesario para el próximo gran salto no se consigue hasta hace unos 100 millones de años, cuando ciertos individuos, cinco logran algo sobresaliente: tomar decisiones, buscar un plan B cuando el previsto plan A fracasa. Es la materia inteligente. Y no es hasta bien avanzado el nivel siete y el amanecer del ocho cuando, hace menos de 100.000 años, una minúscula parte de la materia inteligente accede al conocimiento. Es la materia civilizada una materia capaz de volverse hacia su historia para preguntar por la materia inerte, por la materia viva, por la materia inteligente, por sí misma y por su sentido en el devenir del universo.

Y ahora un *Gedanken Experiment*. Rebobinemos mentalmente la edad, el tiempo y dejemos que la historia universal de la materia se desenrosque de nuevo. Puede que, como machaca Stephen Jay Gould, el progreso sea un concepto irrelevante. O no.

Figura 1.2: "Breve historia de la materia", de Jorge Wagensberg (1998).

Lo cual también permitió a Henriques (2003), elaborar el árbol del conocimiento (jerárquico), que aparece en la Figura 1.3, especialmente ilustrativo para los propósitos de esta memoria.

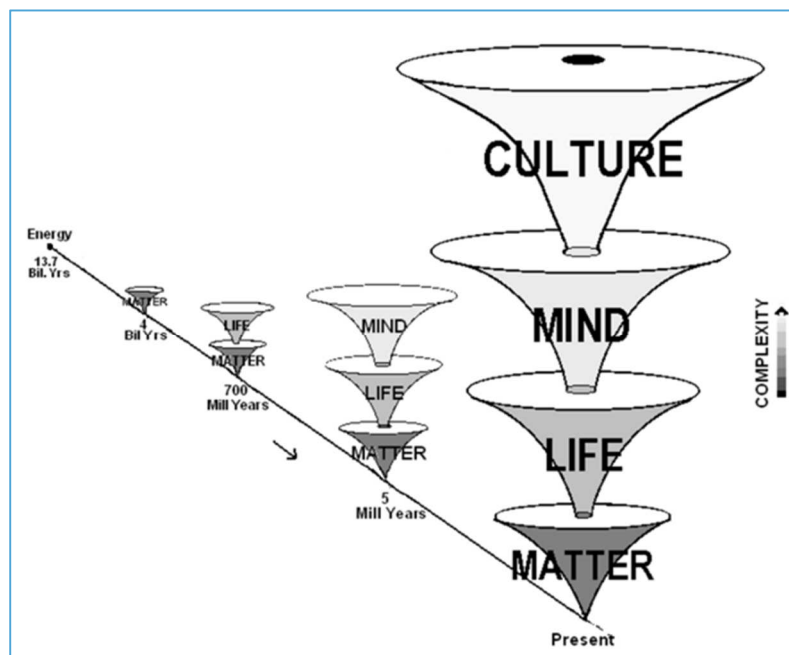


Figura 1.3: El árbol del conocimiento de Gregg Henriques (2001).

Por poner un ejemplo, en una colonia de hormigas, se podría decir que cada una sigue un comportamiento arbitrario, pero el comportamiento de cada hormiga converge hacia un comportamiento colectivo destinado a un cierto fin. Ese comportamiento colectivo no es deducible a partir del nivel anterior, el de hormiga individual aislada.

También el agua, el líquido elemento, fundamental en los organismos vivos, presenta una serie de propiedades emergentes. En particular, el efecto colectivo asociado al enlace puente de hidrógeno intermolecular, la así llamada “asociación” del agua (y otros compuestos de interés biológico como el amoníaco), es una de ellas. Lo que explique que cada año se publiquen innumerables artículos que pretenden explicar la estructura y propiedades del agua líquida, y ninguno llegue a conseguirlo de manera satisfactoria. El hecho de que el hielo flote sobre el agua líquida es un fenómeno (tan habitual) especialmente informativo al respecto.

Las propiedades emergentes aparecen, siempre, en sistemas complejos y son muy importantes en el estudio de la biología. En este trabajo se hablará de sistemas biológicos, los cuales son complejos.

Esas propiedades o fenómenos emergentes no pueden ser justificadas, de manera inmediata, en términos microscópicos, dando lugar a la aparición de una de las ideas más interesantes e importantes desarrolladas en la Física en la segunda mitad del siglo XX: la **emergencia**, e implica que siempre tendremos ciertas limitaciones a la hora de intentar describir teóricamente los sistemas reales haciendo uso de las entidades de niveles inferiores.

Frente a los que creen que, en la Ciencia, las cosas son solo aparentemente complejas y solo hay que encontrar el “truco” para simplificarlas (como hizo Galileo al pasar de un sistema de referencia geocéntrico a otro heliocéntrico), hoy conocemos que **hay sistemas intrínsecamente complejos**, no reducibles a la descripción simple habitual [el clima, con su necesidad de “conocer el aleteo de un mariposa en China hace 10000 años” para predecir si dentro de 15 días lloverá, según E. N. Lorenz, o las bifurcaciones dinámicas en la teoría de las catástrofes del francés René Thom , etc.].

Capítulo 2

Leyes de escala: tamaño, forma y vida

El mundo se caracteriza por una gran diversidad de fenómenos maravillosos e impresionantes. Los científicos tratan de buscar regularidades en este aparente “caos” en el que vivimos.

Siguiendo el método científico¹ observacional, podemos concluir, por ejemplo, que una pulga puede aguantar hasta 200 veces su peso y el ser humano, obviamente, no. Este hecho, que consideramos evidente, tiene una importante repercusión, pues nos lleva a tener que aceptar, de manera natural, las **leyes de escala** (Jou, 2009); que, cuando no se cumplen, dan lugar a **propiedades emergentes** (Laughlin, 2007).

En el mundo observamos una gran variedad de tamaños y formas. En los seres vivos abarcan 21 órdenes de magnitud en lo que respecta al peso. Desde la gran ballena azul, que pesa $2 \cdot 10^5$ kg siendo el animal más grande vivo actualmente, hasta el micoplasma, del orden de $2 \cdot 10^{-16}$ kg.

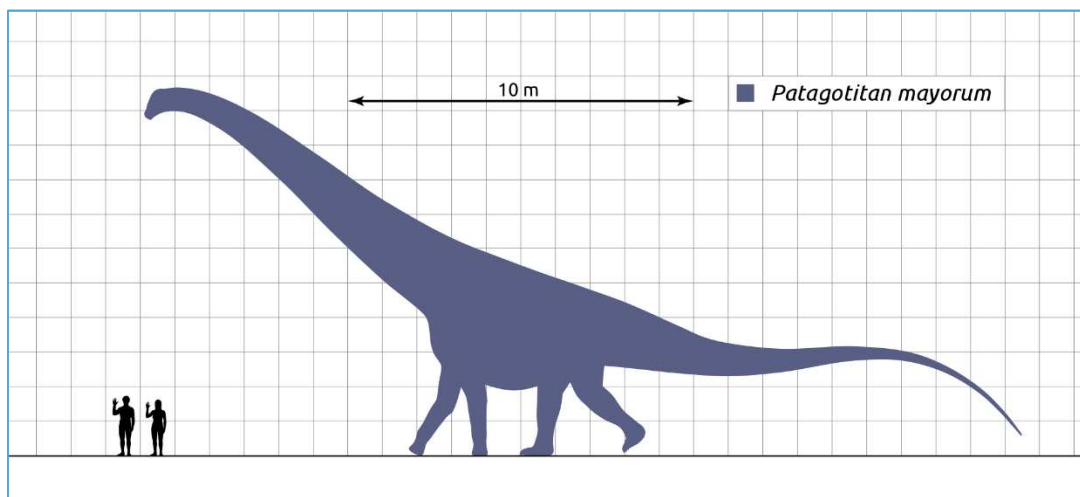


Figura 2.1: Comparación del tamaño de un hombre adulto promedio y un ejemplar de *Patagotitan mayorum*, exhumado por investigadores en la Patagonia argentina, y dado a conocer en mayo de 2014. Cada cuadrado representa 1 metro de lado (Patagotitan mayorum, 2014).

¹ El **método científico** se basa en la observación de fenómenos naturales para luego postular una serie de hipótesis, y después llevar a cabo una comprobación experimental. Por contra, si partimos de unas conclusiones y buscamos explícitamente unos datos que las corroboren estaremos cayendo en la **pseudociencia**.

En la naturaleza, y en particular en los seres vivos, **el tamaño sí importa**, y ya Galileo se dio cuenta de ello (Galilei, 1976). El tamaño de las cosas, y el de los seres vivos, no puede aumentar arbitrariamente.

Las **leyes de escala** nos permiten comprender **cómo dependen las propiedades y funciones de los seres vivos de su tamaño**. Y es que, a mayor tamaño, mayor complejidad. El tamaño está relacionado con la **función** de los seres vivos, y también la **forma** es importante, pues no podemos ni imaginar a un elefante, del tamaño de una ardilla, escalando por el tronco de un árbol. La forma de los animales responde a su función. Por ejemplo, los animales terrestres tienen, por lo general, formas cilíndricas para facilitar su locomoción. Por lo tanto, **la forma responde a factores del tipo funcional**.

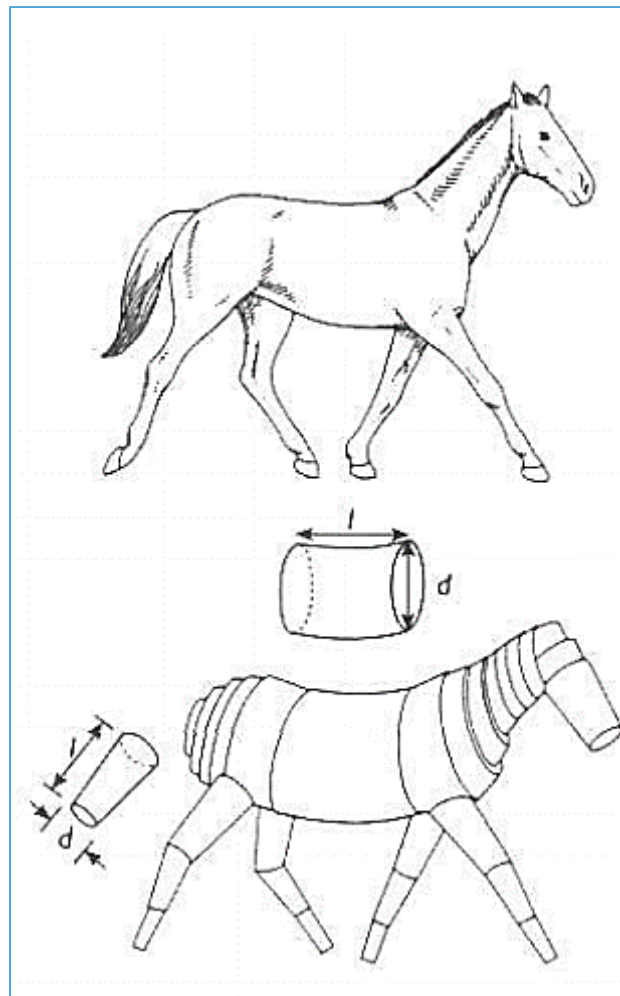


Figura 2.2: Los animales terrestres, como los caballos, tienen formas cilíndricas para facilitar su locomoción (Pittau, 2017).

Para poder comparar fenómenos físicos de organismos de diferentes tamaños, tenemos que realizar, primero, una **hipótesis biológica** que permita establecer una relación razonable entre dos elementos o variables. Hay que tener en cuenta además que no se pueden comparar dos cosas completamente dispares.

También es importante el **análisis dimensional** (Jou, 2009). Para un sistema existen una serie de parámetros que lo describen completamente.

Para determinar las constantes características independientes de un sistema y su relación con los demás parámetros, recurrimos al análisis dimensional. Elegimos unas **magnitudes básicas**, y el resto pueden expresarse en función de ellas. La elección de la **base de magnitudes básicas**, (por ejemplo, unas de ellas podrían ser [longitud, masa, tiempo], las utilizadas en mecánica), se elige en función de los instrumentos de medida a nuestra disposición. El análisis dimensional nos permite comprobar, de forma rápida y sencilla, si una ecuación dada es correcta o no.

	Sistema $[M][L][T][\theta]$
Longitud, l	$[L]$
Masa, m	$[M]$
Tiempo, t	$[T]$
Área, A	$[L^2]$
Frecuencia, f	$\left[\frac{1}{T}\right]$
Velocidad, v	$\left[\frac{L}{T}\right]$
Aceleración, a	$\left[\frac{L}{T^2}\right]$
Fuerza, F	$\left[\frac{ML}{T^2}\right]$
Presión, p ,	$\left[\frac{M}{LT^2}\right]$
Energía, E , trabajo, W , o calor, Q	$\left[\frac{ML^2}{T^2}\right]$
Densidad, ρ	$\left[\frac{M}{L^3}\right]$

Figura 2.3: Estas son algunas de las magnitudes más importantes utilizadas en Física (Jou, 2009).

Las **leyes de escala** son importantes en diversas ramas de la Ciencia. En **Biología** son frecuentes las llamadas **leyes alométricas**, que describen relaciones entre características anatómicas, fisiológicas o de comportamientos y tamaños y formas. El término alometría fue acuñado por Julian Huxley y Georges Teissier en 1936). Suelen hablar del crecimiento diferente (con el tamaño, por ejemplo) de dos variables que están relacionadas.

Estas interrelaciones se expresan **matemáticamente** por **leyes de potencias**, de la forma:

$$X = \alpha Y^\beta \quad (2.1)$$

en donde α es el **coeficiente alométrico** y β el **exponente alométrico**.

En la literatura nos las encontramos representadas habitualmente de manera lineal, utilizando para ello la escala logaritmo(log)–logaritmo(log), en la forma:

$$\ln X = \ln \alpha + \beta \ln Y \quad (2.2)$$

Y es que, aunque los sistemas vivos se encuentran entre los sistemas más complejos de la naturaleza, muchas de sus leyes son alométricas y muy simples, expresadas en función del tamaño del ser vivo o de su masa.

Comencemos exponiendo tres ejemplos de leyes de escala, dos de los cuales son muy sencillos y bien conocidos en la Física (pero reescritos y reinterpretados de otra manera), y un tercero referido a sistemas vivos:

1. La relación entre el **periodo** de un **péndulo simple** T y su **longitud** L se suele escribir cómo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.3)$$

donde g es la intensidad del campo gravitatorio terrestre. Pues bien, lo podemos reescribir cómo (Gil, 2012):

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} L^{1/2} = \alpha L^{0.5} \quad (2.4)$$

y así quedaría escrita como una *ley de escala* que muestra el *diferente “crecimiento” de la longitud del péndulo con respecto del periodo*. Podemos hablar de un “crecimiento” alométrico.

2. La **tercera ley de Kepler**, o la relación entre el **periodo** T de los planetas y su **distancia al Sol**, d , se suele escribir como:

$$T^2 = kd^3 \quad (2.5)$$

en donde k es una constante de proporcionalidad. La podemos reescribir de la siguiente forma (Gil, 2012), con $k^{1/2} = k'$:

$$T = k'd^{3/2} \quad (2.6)$$

que muestra el *diferente “crecimiento” de la distancia de los planetas al Sol con respecto al periodo*. De nuevo, podemos hablar de un “crecimiento” alométrico.

3. Una de las leyes de escala más representativas y conocidas en la literatura que será importante durante el desarrollo del trabajo es la **Ley de Kleiber**, también conocida como la Ley de escalamiento 3/4 (por el exponente alométrico que lleva), establecida en el año 1932, que relaciona el **metabolismo basal** B con la **masa** M .

Para deducirla, podríamos comenzar planteando la hipótesis biológica siguiente: que el metabolismo B es proporcional a la masa M . De esta manera tendríamos (ley isométrica) que:

$$B \sim M \quad (2.7)$$

Así por ejemplo, en un animal con el doble de masa deberíamos observar el doble de consumo, pero esto no se cumple en los mamíferos.

Hagamos, entonces, otra suposición. Como el calor se disipa a través del área superficial, es lógico suponer que el ritmo metabólico podría depender de esta. Así tenemos que:

$$B \sim \text{Área} \quad (2.8)$$

Como el área es proporcional a una longitud característica al cuadrado, $\text{área} \sim \text{longitud}^2$ y la masa es proporcional al volumen, que a su vez es proporcional al cubo de una longitud característica: $M \sim (\text{longitud})^3$, o bien $\text{longitud} \sim M^{1/3}$.

Así que el área se puede escribir en función de la masa cómo:

$$\text{Área} \sim M^{2/3} \quad (2.9)$$

De donde concluimos que:

$$B \sim M^{2/3} \quad (2.10)$$

Esto concuerda mejor con los resultados experimentales. Pero la realidad es otra y, deducir la Ley de Kleiber, no es tan sencillo.

Recurrimos ahora al **modelo de semejanza elástica**, que nos dice que la forma no se mantiene al variar el tamaño². Se da la siguiente relación:

$$d \sim L^{3/2} \quad (2.11)$$

que constituye una relación alométrica **per se**.

Las variables d y L podrían ser por ejemplo diámetros (d) y longitudes (L) del húmero de antílopes, o el diámetro del tronco de un árbol (d) y su longitud (L)³.

Esto nos indica que, en los animales, al aumentar su tamaño, la anchura de las extremidades y del tronco crece más rápido que la longitud de sus extremidades y altura.

La relación $d \sim L^{3/2}$ optimiza la **resistencia a la rotura** y a la **deformación**, y de ahí el aspecto **funcional**.

Por ejemplo, para formas cilíndricas (podemos considerar que las partes del cuerpo de muchos animales terrestres están formadas por cilindros) tenemos que:

$$M \sim d^2 L = d^{2+2/3} = d^{8/3} \quad (2.12)$$

en donde d es la anchura del cilindro que forma el cuerpo del animal, y L el largo de dicho cilindro. Y la masa es proporcional al volumen, claro.

Pues bien, **aceptando la hipótesis biológica** de que la dependencia del ritmo metabólico B es proporcional a la sección transversal tenemos que:

$$B \sim d^2 \sim (M^{3/8})^2 = M^{3/4} \quad (2.13)$$

que es justo la que concuerda con los resultados experimentales.

Así que, la ley de Kleiber correcta es:

$$B = CM^{3/4} \quad (2.14)$$

Hemos visto ya que: (i) **los fenómenos no son extrapolables de una escala a otra por una simple regla de tres**, y (ii) **que la importancia de las leyes de escala reside en el exponente alométrico**.

Estas dos últimas ideas son las claves de toda la alometría.

La Ley de Kleiber se cumple para una gran variedad de especies cubriendo un rango de masas de hasta 22 órdenes de magnitud, desde bacterias hasta ballenas azules.

² Que la forma no se mantiene al variar el tamaño es una de las claves de la alometría.

³ De hecho, una de las cosas que estudió Galileo (Galilei, 1976) fue el diferente crecimiento del diámetro del tronco de un árbol con respecto de su longitud.

No obstante, en muchos organismos, como insectos o aves la Ley falla y se requiere un exponente entre 2/3 o 1.

Esta ley se puede generalizar (sin entrar en cómo) de la siguiente forma:

$$B = aM + bM^{2/3} \quad (2.15)$$

en donde el *término isométrico* (crecimientos proporcionales): $B = aM$, es el gasto energético mínimo por célula y el *término alométrico* (crecimientos diferentes): $B = bM^{2/3}$, es la disipación calórica pasiva.

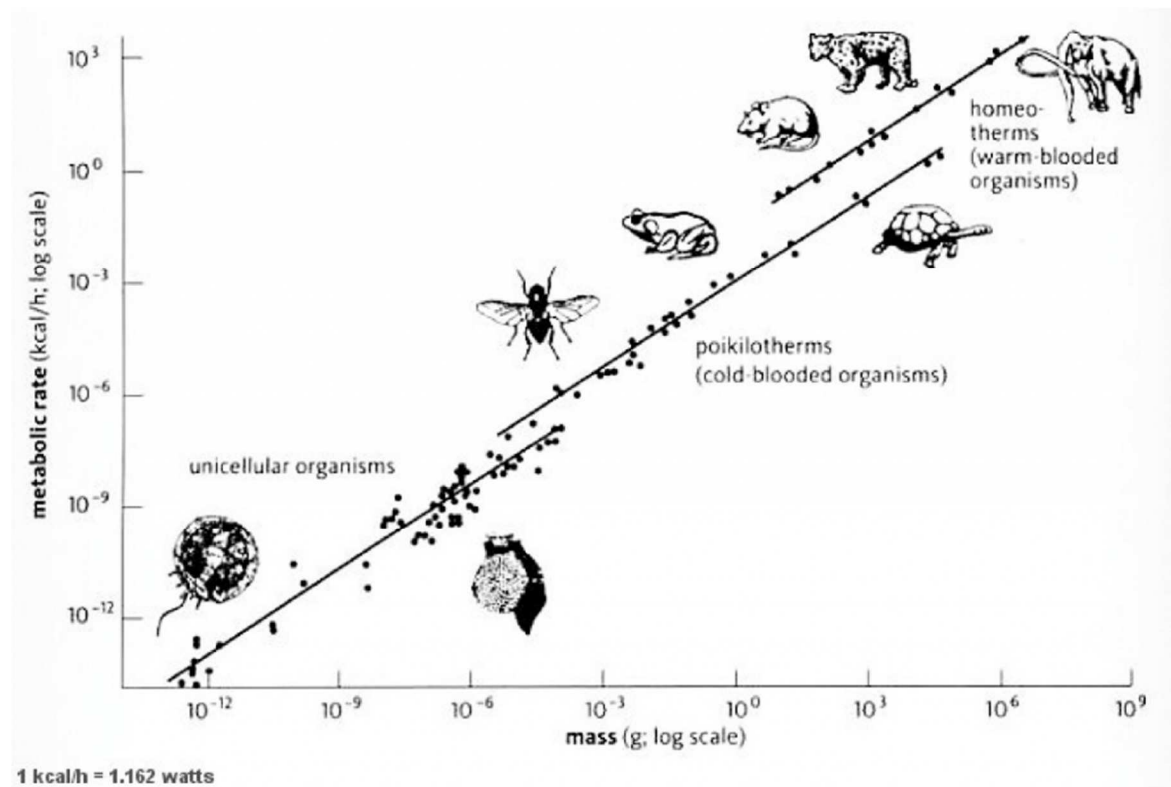


Figura 2.4: Representación lineal, escala logaritmo-logaritmo de la Ley de Kleiber.

Podemos ver como organismos de muy diferentes tamaños y formas se ajustan a una relación lineal, cubriendo un gran número de magnitudes en masa (Gil y Rodríguez, 2001; Gil, 2012).

Capítulo 3

Génesis: Galileo Galilei y dos Ciencias Nuevas

Arquímedes estableció el Principio de Semejanza, que dice que la superficie es proporcional al cuadrado de la dimensión lineal, y el volumen es proporcional al cubo de la misma. De esa manera podríamos comparar objetos de la misma forma pero diferente tamaño y extrapolar propiedades sin importar su tamaño (**ley isométrica**).

Sin embargo esto último tiene sus limitaciones, y **Galileo** (Galilei, 1976) habla de ellas dos mil años después (Jou, 2009).

Galileo escribió “*Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*”, cuyo título original era “*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*”, un diálogo en cuatro días. En el tercer y cuarto día expone su solución al problema de lanzamientos de proyectiles, el cual se puede considerar el nacimiento de la Física moderna, tal y como hoy en día la conocemos. Pero esta es solo la segunda de sus “dos nuevas ciencias”...

¿Cuál es la primera? (Peterson, 2002)

“Dos nuevas Ciencias” comienza en el Arsenal de Venecia, la base naval de la República de Venecia, con una discusión sobre los efectos de construir a mayor o menor escala diferentes proyectos, como construcciones navales.

Galileo incluye en esta discusión a dos amigos cercanos, Giovanni Francesco Sagredo y Filippo Salviati, y a un filósofo Aristotélico, Simplicio.

En el **Segundo Día** del diálogo realiza un profundo análisis sobre **la fuerza de los materiales a diferentes escalas**, dando mucha importancia a este asunto.

Ciencias y creencias estaban entremezcladas por aquellos tiempos, así que Galileo realizó además un estudio sobre la forma, localización y tamaño del “*Inferno de Dante*”.

Las observaciones que hace Galileo sobre las diferentes escalas son elegantes e ingeniosas, incluso sin disponer de las herramientas matemáticas que poseemos hoy en día, como son los métodos del Grupo de Renormalización (Wilson, 1979). Y a pesar de no disponer de estos métodos, sus análisis son los mismos. Por ejemplo dice:

“*La superficie de un sólido pequeño es comparativamente mayor con respecto de la de un sólido grande*”.

Esta última frase se refiere a que la superficie crece con el cuadrado, y el volumen con el cubo, con lo que cuanto más pequeño es el objeto mayor es la superficie del objeto en comparación. También habla de la fuerza de los materiales, fijándose en que si tenemos un barco pequeño, y construimos otro más grande a escala, el grande podría hundirse bajo su propio peso. Esto último puede ser explicado con la idea de que la resistencia de un material está relacionada con la superficie, y la masa con el volumen, creciendo el volumen más rápido que la superficie. Usando el mismo argumento, también explica por qué los huesos, cuanto más grandes son, más frágiles se hacen.

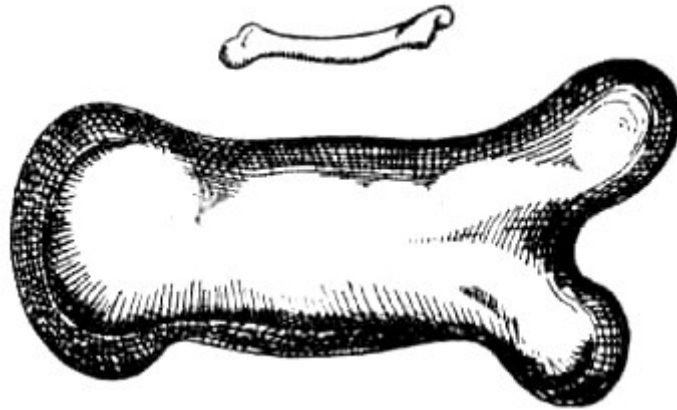


Figura 3.1: Galileo se dio cuenta de que cuanto mayor es el tamaño de un hueso, más frágil se hace (Galilei, 1976).

Por contra, Sagredo pensaba que las propiedades de un cierto cuerpo geométrico no deberían cambiar a diferentes escalas, pero “Dos nuevas Ciencias” discuten esa idea sobre la invariancia a diferentes escalas y las observaciones que hace Galileo en diferentes ámbitos son irrefutables. También habla sobre las diferentes fuerzas transversales que puede soportar una viga de madera.

En un marco geométrico adecuado las Leyes de escala se convierten en una nueva ciencia. Además, al segundo día de la discusión, hace hincapié en que quiere una teoría que pueda ser aplicada a cualquier material sólido, y no solo a los fibrosos, como la madera.

Galileo puede ser considerado uno de los primeros científicos según la imagen que tenemos hoy en día de ellos. Su vida fue muy interesante. Se formó en la Universidad de Pisa a los 17 años y estudió por su cuenta las matemáticas Euclidianas y las de Arquímedes. Comenzando su carrera escribió un libro sobre el equilibrio de los cuerpos, el cual le dio considerable reputación académica. Ya aceptado en los altos círculos de Florencia, le fue propuesto realizar el cálculo de las dimensiones y situación del Infierno propuesto por Dante en “La Divina Comedia”. Supuso que la Tierra era el centro del Universo y que bajo la superficie terrestre estaban los nueve niveles del Infierno de Dante (Alighieri, 2017). En la Academia de Florencia dio dos conferencias sobre esto y mediante argumentos matemáticos, dictó que el Infierno debía tener forma de cono con la punta en el centro de la Tierra, y que estaría cubierto por una cúpula situada en la superficie terrestre.

Dicha cúpula abarcaría unos 5000 kilómetros y tendría al menos 600 kilómetros de espesor, y con esas condiciones, se hundiría bajo su propio peso. Galileo argumentó que no se hundiría comparando con la cúpula de Brunelleschi de la capital de Florencia, que sí que soporta su propio peso. Pero se equivocaba, pues al haber aumentado de escala en un factor 100.000, el

Inferno sí se hundiría bajo su propio peso. Y efectivamente, pese a haber formulado él mismo la teoría de escalamiento, cometió ese error.

Galileo guardó para sí mismo su teoría de escala alrededor de 50 años y finalmente la publicó al final de su vida (Abellán, 2013).



Figura 3.2: Los diferentes niveles del Inferno de Dante. El Inferno tenía forma de cúpula, y se preguntaban si podría sostenerse por sí mismo (pintura de Sandro Botticelli, ca. 1480–1495).

Capítulo 4

El Principio de Semejanza Geométrica

Es un Principio reduccionista establecido por Arquímedes que nos habla de las relaciones geométricas que guardan diferentes objetos. Es un principio aplicable a figuras semejantes. Veremos cómo varían la longitud, el área y el volumen, ya que muchas propiedades están relacionadas con estas magnitudes. Trabajaremos con un cubo, por poner el ejemplo más sencillo.

Sea un cubo inicial de lado L , área $A = L^2$ y volumen $V = L^3$, y otro cubo final más grande de longitud L' , área $A' = (L')^2$ y volumen $V' = (L')^3$, siendo $L' = 2L$. Vamos a tratar de relacionarlos. Definamos un factor de escala k como $k = L' / L$. Entonces tenemos:

1. Que la longitud aumenta como $\frac{L'}{L} = k$, igual a 2 en este caso concreto.
2. Que el área aumenta como $\frac{A'}{A} = k^2$, igual a 4 en este caso concreto.
3. Que el volumen aumenta como $\frac{V'}{V} = k^3$, igual a 8 en este caso concreto.

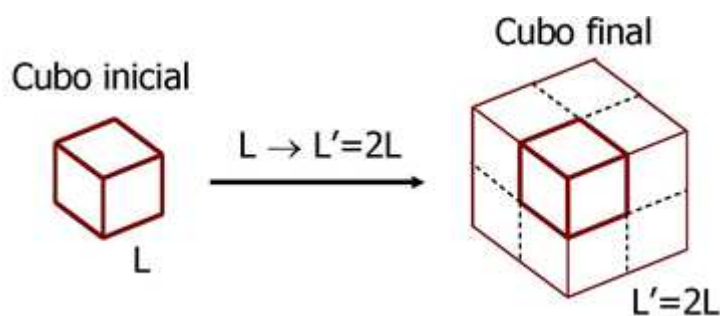


Figura 4.1: Siguiendo el Principio de Semejanza van variando la longitud, superficie y volumen del cubo (Pittau, 2017).

Veamos dos ejemplos.

4.1. Fuerza relativa

Definimos la fuerza relativa como

$$\text{Fuerza relativa} = \frac{\text{peso que puede levantar}}{\text{su propio peso}} \quad (4.1)$$

Supongamos una hormiga normal de longitud d y una gigante de longitud d' de la misma forma.

La única diferencia que existe entre ellas es su tamaño. La relación entre sus longitudes (d y d'), áreas (a y a') y volúmenes (V y V') aplicando el factor de escala son:

$$\frac{d'}{d} = k \quad (4.2)$$

$$\frac{a'}{a} = k^2 \quad (4.3)$$

$$\frac{V'}{V} = k^3 \quad (4.4)$$

y entonces la relación entre sus pesos es:

$$\frac{p'}{p} = \frac{\rho g V'}{\rho g V} = \frac{V'}{V} = k^3 \quad (4.5)$$

$$p' = k^3 p \quad (4.6)$$

Ahora hay que realizar una **hipótesis biológica**. Suponemos que la fuerza que posee un animal depende del área de la sección trasversal de sus músculos. Así que cambiará con el **tamaño** igual que un área.

Siendo F_r y F_r' las fuerzas relativas entonces:

$$F_r' = \frac{k^2 p}{k^3 p'} \quad (4.7)$$

y obtenemos que

$$F_r' = \frac{1}{k} F_r \quad (4.8)$$

De la ecuación (4.8) podemos concluir que si el factor de escala es $k > 1$, entonces cuanto más grande sea la hormiga menor será su fuerza relativa.

4.2. División celular

Podemos preguntarnos por qué se dividen las células cuando alcanzan un cierto tamaño.

Definimos para ello el **factor de viabilidad** (de nuevo, hipótesis biológica) como la razón entre la cantidad máxima de oxígeno que una célula puede obtener y la que necesita para sobrevivir. Este factor ha de ser mayor que uno para que la célula sobreviva.



Figura 4.2: La hormiga normal y la hormiga gigante tienen la misma forma y solo se diferencian en su tamaño (Pittau, 2017).

Definamos ahora el factor de escala de la célula mayor, más vieja con respecto a la más pequeña, siendo R' el radio de la célula vieja supuesta esférica y R el radio de la célula joven también supuesta esférica:

$$k = \frac{R'}{R} \quad (4.9)$$

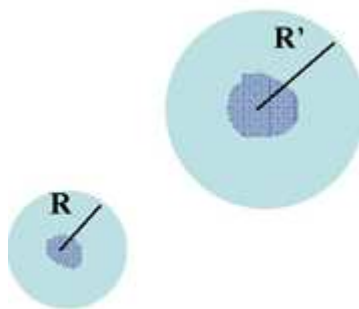


Figura 4.3: Las dos células tienen la misma forma y solo se diferencian en su tamaño (Pittau, 2017).

La cantidad de oxígeno que una célula necesita para sobrevivir es proporcional a su volumen. Por lo tanto, la célula vieja necesitará para vivir k^3 veces más oxígeno que la joven.

$$(\text{necesidad})' = k^3 \text{necesidad} \quad (4.10)$$

Todo el oxígeno que consume la célula tiene que pasar a través de la pared celular, así que la máxima cantidad de oxígeno que puede consumir la célula es proporcional al área de su pared celular.

Entonces, siendo C y C' las cantidades máximas de oxígeno por minuto que puede obtener cada célula:

$$C' = k^2 C \quad (4.11)$$

Ahora aplicamos el factor de viabilidad a la célula vieja:

$$F' = \frac{C'}{(\text{necesidad})'} \quad (4.12)$$

Y despejando de las ecuaciones anteriores tenemos que:

$$F' = \frac{1}{k} F \quad (4.13)$$

Cuando la célula es joven su factor de viabilidad es mayor que la unidad. Cuando la célula va creciendo su factor de viabilidad se va aproximando a la unidad.

Para evitar su asfixia la célula ha de detener su crecimiento o dividirse.

Cuando la célula grande se divide, lo hace en dos células más pequeñas ambas con factores de viabilidad mayores.

Hemos visto dos ejemplos en los cuales estableciendo primero una **hipótesis biológica** para después utilizar el **Principio de Semejanza de Arquímedes**, el cual es reduccionista, llegamos a resultados plausibles. Los dos resultados son, en definitiva, reglas de tres con un factor de escala k . Pero como ya se ha dicho anteriormente **en general el reduccionismo es falso**, y no podemos extrapolar, de forma general, resultados de una escala a otra mediante reglas de tres. En definitiva, solo podemos utilizar este Principio en situaciones muy concretas.

Capítulo 5

El origen estadístico de la alometría

Las leyes alométricas fueron descubiertas por primera vez por Cuvier, en 1812. Descubrió que la masa del cerebro crece más despacio que la masa total del cuerpo, estudiando desde las pequeñas especies hasta las más grandes según la taxonomía, que clasifica a los seres vivos de manera jerárquica y sistemática (West y West, 2011).

En el año 1892 Snell habla de las “allometry relations”, y cuatro décadas después Sir Julian Huxley propone que dos partes de un mismo organismo tienen diferentes tasas de crecimiento, pero proporcionales entre sí.

En este apartado haremos un estudio en paralelo. Por un lado iremos desarrollando la teoría estadística que hay detrás de las leyes de escala a la vez que hablaremos de la ya mencionada Ley de Kleiber, que regula las tasas metabólicas en los seres vivos.

Dadas las variables Y , que mide el tamaño de una red viva con velocidad de crecimiento θ y X , una subred con tasa de crecimiento ϵ se conjetura la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{\epsilon X} \frac{dX}{dt} = \frac{1}{\theta Y} \frac{dY}{dt} \quad (5.1)$$

que puede ser integrada directamente para obtener la **ley de crecimiento alométrica independiente del tiempo** que envuelve a la red principal Y y a la subred X :

$$X = \alpha Y^\beta \quad (5.2)$$

siendo el coeficiente α y el exponente $\beta = \frac{\epsilon}{\theta}$ parámetros a determinar.

Hay tres métodos diferentes para derivar las relaciones alométricas teóricamente. Son los siguientes:

1. **Primer método:** se basa en utilizar argumentos reduccionistas. Se usa un mecanismo fractal de transporte nutritivo. Es por ejemplo, la ya mencionada Ley de Kleiber. Este método fue propuesto por West. Los argumentos reduccionistas se los debemos a Sarrus y Rameaux que en 1839 proponen determinar el parámetro β a partir de una hipótesis biológica.

Otros autores, más adelante, razonan que el calor generado por un animal de sangre caliente es proporcional a su volumen, y que el calor perdido es aproximadamente proporcional a su superficie, calculando así un coeficiente $\beta = 2/3$.

-
2. **Segundo método:** es puramente fenomenológico e involucra la estadística. Se trata de recoger datos empíricos y buscar ciertas leyes en ellos mediante el análisis estadístico.

Warton apunta a que los métodos para trabajar con los datos en alometría son variados, y que efectivamente, encontrar el método más adecuado es tarea ardua.

Sir Julian propone realizar una regresión lineal (como bien estamos acostumbrados a hacer en Física) del tipo $\ln X = \ln \alpha + \beta \ln Y$ y con ella buscar el coeficiente alométrico α y el exponente β . Parece ser que la regresión por ajuste de mínimos cuadrados es la idea más plausible.

3. **Tercer método:** este último método rara vez es visto en la literatura sobre alometría. Consiste en cálculos probabilísticos.

5.1. Fluctuaciones en los parámetros alométricos

Lecturas bibliográficas nos llevan a que la ecuación (5.2) no es la que concuerda con los datos, pues solo a veces la realidad está sujeta a medidas individuales de X e Y .

Los datos consisten principalmente en promedios sobre colecciones de medidas sobre especímenes individuales y son denotados por $\langle X \rangle$ e $\langle Y \rangle$.

Los datos para una única especie suelen tener pequeñas variaciones y la relación alométrica teórica describe bien la relación intraespecífica (entre organismos de la misma especie).

Por otro lado, los datos entre diferentes especies vienen bien definidos por una ley alométrica empírica.

Para conciliar las dos descripciones, la teórica y la empírica acerca de las relaciones alométricas, consideramos un promedio en los datos $\langle X \rangle = \alpha \langle Y \rangle^\beta$, teniendo en cuenta además que $\langle Y \rangle^\beta \neq \langle Y \rangle^\beta$ si $\beta \neq 1$.

Partiendo de la ecuación (5.2), y con el fin de derivar la relación alométrica empírica introducimos $X = \langle X \rangle + \delta X$ e $Y = \langle Y \rangle + \delta Y$ en la ecuación.

Con un poco de álgebra el coeficiente alométrico puede ser expresado como $a = \alpha + \delta a$ en donde δa representa la fluctuación con respecto del valor empírico.

La ecuación (5.2) queda así reescrita como $\langle X \rangle = (\alpha + \delta a) \langle Y \rangle^\beta$ en donde al aproximar $\delta a / \alpha \ll 1$ finalmente llegamos a la siguiente relación alométrica:

$$\langle X \rangle = \alpha \langle Y \rangle^\beta \tag{5.3}$$

que es exactamente igual que la relación alométrica teórica, con la discrepancia de que hemos reemplazado las variables por sus valores medios.

Es evidente que para derivar la relación alométrica a partir de una teórica la función de densidad de probabilidad de las fluctuaciones de los coeficientes alométricos ha de ser muy estrecha. Las interespecies pueden no cumplir dicha condición.

La ecuación (5.3) solo puede ser relacionada con la ecuación (5.2) en el caso de que $\delta a \ll 1$, es decir, en el caso de que las fluctuaciones de la distribución sean muy pequeñas.

5.1.1. Coeficiente alométrico

Heusner estudió la ya citada relación entre interespecies que relaciona la tasa de metabolismo basal (BMR) $X = B$ y la tasa total de metabolismo (TMB) $Y = M$. Lo escribimos de la siguiente manera:

$$\langle B \rangle = a \langle M \rangle^b \quad (5.4)$$

Él conjetura que el “misterio” de la alometría, por llamarlo de algún modo, reside en el coeficiente a .

Meakin, otro autor, afirma también que efectivamente es detrás de ese coeficiente donde está toda la Física de la alometría.

Volviendo a asumir, de nuevo, que $\delta a / a \ll 1$, y tratando al coeficiente alométrico entre especies como una variable aleatoria tenemos que:

$$a' = \frac{a}{\alpha} = \frac{\langle B \rangle}{\alpha \langle M \rangle^\beta} \quad (5.5)$$

manteniendo $b = \beta$ fijo.

Por consiguiente, hay un valor del coeficiente alométrico para cada par $(\langle B \rangle, \langle M \rangle)$.

Se han considerado los datos relativos a 391 especies para las tasas metabólicas totales y basales. Esto fue examinado tanto por Heusner como por Dodds et al.

Sin más que linealizar la expresión (5.4) tenemos que:

$$\ln \langle B \rangle = \ln \alpha + \beta \ln \langle M \rangle \quad (5.6)$$

Se trata pues, de una línea recta que trata de minimizar el error cuadrático medio en un papel cuadrículado de escala doble logarítmica.

Y de nuevo, volviendo al ejemplo con el que venimos trabajando, la Ley de Kleiber, tenemos que $\beta = 0.71$, es decir, $2/3 < \beta < 3/4$ con el coeficiente $\alpha = 0,02$.

Savage et al. obtuvieron el mismo valor de β que Heusner y Dodds et al. usando 626 especies.

La forma funcional del histograma dado en la Figura 5.2 viene expresado por la siguiente función densidad de probabilidad:

$$a'P(a') = \frac{\mu}{2} \begin{cases} a'^{\mu}, & a' \leq 1 \\ \frac{1}{a'^{\mu}}, & a' \geq 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

con las condiciones de que el histograma esté normalizado como $N(\ln a')$ en el intervalo $(0, \infty)$ usando que $N(\ln a')d \ln a' = P(a')da'$, y empíricamente tenemos el valor de $\mu = 2,79$.

El tamaño de una fluctuación típica puede ser estimada usando la desviación estándar calculada a través de la ecuación (5.5) y resulta ser 0.017 con lo que $\delta a \sim 0(1)$.

La ecuación (5.5) es una ley de potencia de densidad de probabilidad inversa, describiendo un rasgo entre múltiples especies, siendo en este caso el metabolismo basal.

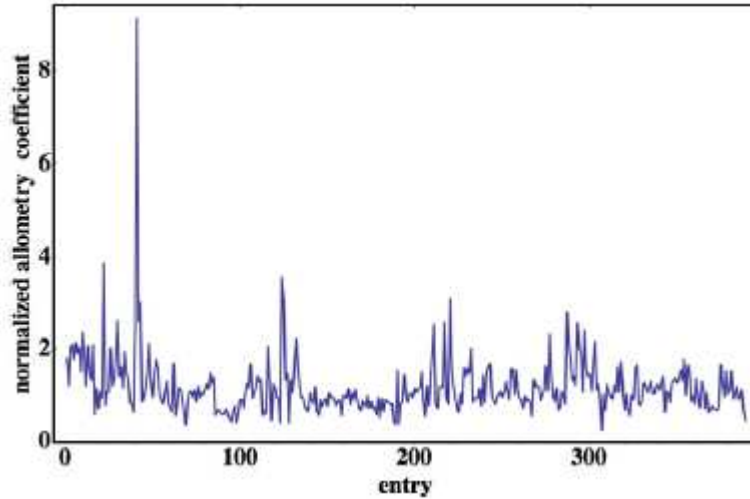


Figura 5.1: La naturaleza aleatoria del coeficiente $a' = a / \alpha$ con $\beta = 0,71$ para 391 especies de mamíferos tabuladas por Huesner.

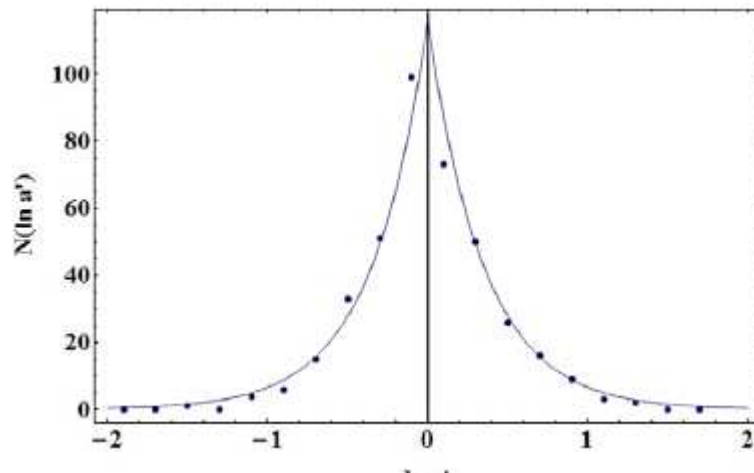


Figura 5.2: Histograma de las desviaciones de las predicciones para la relación alométrica $a' = a / \alpha$ usando los datos de la figura anterior y haciendo una partición en 20 celdas iguales en escala logarítmica. El coeficiente de correlación resulta ser $r^2 = 0.98$.

Argumentos reduccionistas deben ser tenidos en cuenta para las fluctuaciones. La relación alométrica para interespecies dada por la relación (5.3) no puede ser derivada de la relación alométrica cuando la condición para dicha derivación es violada.

Notar además que la misma distribución para el coeficiente alométrico con $\mu = 3.89$ fue obtenido usando el metabolismo basal para 533 especies de pájaros listadas por McNab.

5.1.2. Exponente alométrico

Otro enfoque fenomenológico consiste en razonar matemáticamente que el coeficiente alométrico es constante y que la variación aleatoria se debe a la naturaleza variable del exponente alométrico. La idea es plausible.

Las fluctuaciones en el exponente alométrico se obtienen de la ecuación (5.4) en términos de la derivación de un valor fijo. Resulta ser:

$$\delta b = \frac{\ln(B / \alpha)}{\ln M} - \beta \quad (5.8)$$

El histograma concuerda con la función densidad de probabilidad de Laplace con el valor empírico $\gamma = 12.85$.

$$\psi(b) = \frac{\gamma}{2} \exp[-\gamma|b - \beta|] \quad (5.9)$$

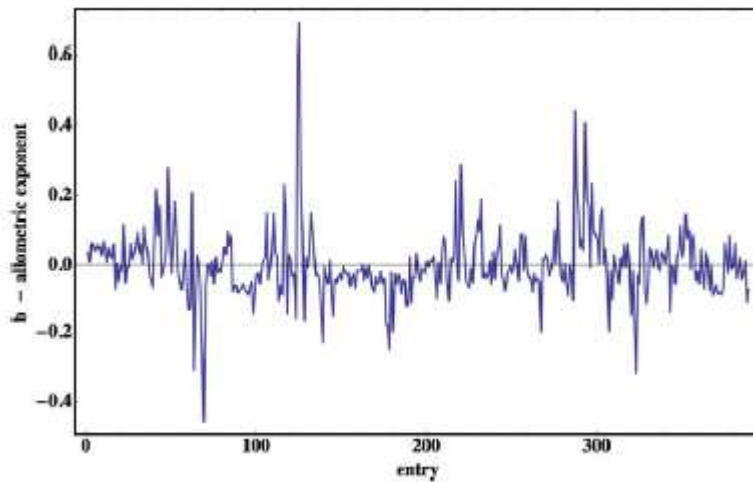


Figura 5.3: Naturaleza aleatoria del exponente con $\alpha = 0.02$ para 391 especies de mamíferos tabulado por Huesner. Cada entrada se calcula con un par $(\langle B \rangle, \langle M \rangle)$ usando la ecuación (5.5).

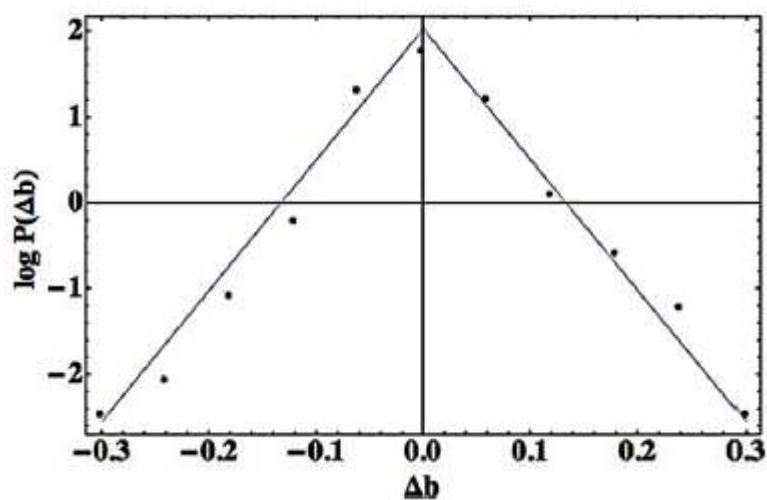


Figura 5.4: Histograma de las desviaciones de las predicciones para la relación alométrica usando los datos de la Figura anterior. Se usa escala logarítmica y una partición en 20 celdas iguales. Se obtiene un coeficiente de correlación de $r^2 = 0.97$.

5.1.3. Covariación de los parámetros alométricos

Hasta ahora hemos obtenido dos distribuciones diferentes para los mismos datos. En la primera las fluctuaciones estaban asociadas al coeficiente alométrico y en la segunda al exponente alométrico.

Según apuntó Glazier las especies dentro de un taxón (grupo de organismos emparentados) presentan varios ritmos metabólicos y no solo el estimado por una regresión lineal.

Abandonamos ahora la asunción de que el coeficiente alométrico y el exponente alométrico son independientes el uno del otro, y que la probabilidad de una fluctuación dada es la misma independientemente de la representación. Tenemos que:

$$P(a)da = \psi(b)db \quad (5.10)$$

Para calcular un jacobiano diferente de cero de la transformación entre los dos parámetros alométricos, estos tienen que estar relacionados de manera funcional.

Aquí asumimos que $b = \beta - c \ln a$. Insertando el exponente alométrico de la ecuación (5.9) en la ecuación (5.10) y usando el jacobiano $|db/da| = c/a$ (y simplificando) obtenemos:

$$P(a) = \frac{\gamma c}{2} \begin{cases} a^{\gamma c - 1}, & a \leq \alpha \\ \frac{1}{a^{\gamma c + 1}}, & a \geq \alpha \end{cases} \quad (5.11)$$

Comparando (5.11) con (5.7) podemos identificar $\mu = \gamma c$ obteniendo la función densidad de probabilidad para el coeficiente alométrico $P(a')da' = P(a)da$. Usando los valores empíricos $\mu = 2,79$ y $\gamma = 12,85$ obtenemos $c = 0,217$ y en consecuencia la transformación empírica puede ser escrita como:

$$b = 0.71 - 0.50 \cdot \log_{10} a \quad (5.12)$$

5.2. Evolución de las probabilidades

El resultado estadístico de que las fluctuaciones de las relaciones alométricas de las interespecies pueden ser largas debilitan los argumentos reduccionistas.

Para resolver esta contradicción, y trabajando de manera más general se suelen usar cálculos probabilísticos.

Consideremos la dinámica de una red compleja que es heterogénea en la variable aleatoria y cuyas fluctuaciones contienen información del sistema a lo largo del tiempo.

Usaremos el derivado fraccional dado por Riemann-Liouville de orden ν O_t^ν y un potencial de Reisz en el espacio de fases de la variable zeta de orden η O_z^η . Formalmente representamos la ecuación de difusión fraccional (FDE, fractional diffusion equation) como:

$$G(O_t^\nu, O_z^\eta)P(z, t) = 0 \quad (5.13)$$

en donde G es una función lineal de los operadores.

En vez de examinar el cálculo fraccional y aplicarlo a la FDE, examinaremos otras propiedades.

La transformada de Fourier de una función analítica $f(z)$ es $\tilde{f}(k)$ y la transformada de Laplace de una función analítica $g(t)$ es $\hat{g}(u)$.

La FDE puede ser expresada en el espacio de Fourier-Laplace como

$$G^*(u, k)P^*(k, u) = 0 \quad (5.14)$$

en donde el asterisco denota la transformada de Fourier-Laplace.

La transformada de Fourier-Laplace de la función densidad de probabilidad se puede escribir como

$$P^*(k, u) = \frac{u^{v-1}}{u^v + K_\eta |k|^\eta} \quad (5.15)$$

siendo K_η una constante. La función densidad de probabilidad que resuelve la FDE viene dada por la transformada de Laplace-Fourier inversa de la ecuación (5.2.2) y resulta ser:

$$P(z, t) = \frac{1}{t^{\mu_z}} F_z \left(\frac{z}{t^{\mu_z}} \right) \quad (5.16)$$

con $\mu_z = v / \eta$. En este caso $F_z(q)$ es una función analítica con la variable $q = z / t^{\mu_z}$, t el tiempo y μ_z un parámetro de escala indexado a la variable alométrica de interés.

La distribución de escala en (5.15) indica que el fenómeno es del tipo estocástico fractal.

Es razonable asumir que el conjunto de redes principales y la distribución del conjunto de redes secundarias fuertemente acopladas a la red principal o anfitriona, por así llamarla, están fuertemente relacionadas.

Para el fenómeno considerado aquí el conjunto de distribuciones vienen dados para procesos fractales con diferentes dimensiones fractales.

Asumimos aquí que X e Y vienen descritos por la ecuación (5.15) con los cambios apropiados en los índices.

El valor medio para la variable espacial es:

$$\langle Z \rangle = \bar{Z} t^{\mu_z} \quad (5.17)$$

con la constante

$$\bar{Z} = \int q F_z(q) dq \quad (5.18)$$

y obtenemos valores independientes del tiempo para $\langle X \rangle$ e $\langle Y \rangle$.

Tomando las derivadas en el tiempo de estos valores y eliminando el tiempo de las dos ecuaciones llegamos a una ecuación que nos da el crecimiento diferencial de los valores medios:

$$\frac{1}{\mu_x \langle X \rangle} \frac{d \langle X \rangle}{dt} = \frac{1}{\mu_y \langle Y \rangle} \frac{d \langle Y \rangle}{dt} \quad (5.19)$$

Esta última ecuación integra directamente a la relación alométrica empírica (5.4).

Los parámetros alométricos van a resultar ser $b = \mu_x / \mu_y$ y $a = \bar{X} / \bar{Y}^b$.

Y aquí, en definitiva, lo que se ha hecho ha sido, en analogía a que los radios de crecimiento son constantes, determinar que el radio de los índices de las funciones de densidad de probabilidad nos da un crecimiento relativo de las dos medias.

Capítulo 6

Invariancia de escala

La invariancia de escala es una propiedad de objetos o leyes en los que no hay cambios si la escala de tamaño es multiplicada por un factor común.

Las **propiedades emergentes** son la consecuencia de que las Leyes de la Naturaleza no son invariantes bajo transformaciones de escala, de modo que no pueden ser justificadas en términos microscópicos. Recordemos que cuando las **leyes de escala** no se cumplen dan lugar a las propiedades emergentes. No existen pues **leyes de escala** generales.

Sea una ley de potencias de la forma:

$$f(x) = Cx^{-a} \tag{6.1}$$

La podemos expresar en escala logaritmo como:

$$\log f(x) = \log C - a \log x \tag{6.2}$$

Entonces la invariancia de escala se escribe como:

$$f(\lambda x) = C(\lambda x)^{-a} = \lambda^{-a} Cx^{-a} = \lambda^{-a} f(x) \sim f(x) \tag{6.3}$$

Capítulo 7

Ejemplos

Los aspectos tratados hasta ahora tienen aplicaciones muy diversas e interesantes en ámbitos muy variados. En este capítulo veremos varios ejemplos. En algunos de ellos se contempla lo importante que es el **análisis dimensional**.

Los ejemplos van desde explicar por qué un pájaro de gran masa no puede volar hasta analizar el comportamiento de las ciudades durante su crecimiento.

Este es un capítulo muy importante del trabajo, pues veremos que las **leyes de escala** aparecen de forma natural, y que son de gran utilidad.

7.1. ¿Puede un pájaro de gran masa volar?

Es difícil imaginarse a un pájaro de mucho peso volando, pero, ¿cómo podemos expresar esto en un lenguaje físico? Para ello utilizaremos las leyes de escala.

Para comprobar, que efectivamente, un gran pájaro con mucha masa no puede volar demostraremos las siguientes dos relaciones (las cuales son alométricas):

$$\text{velocidad de vuelo} = \text{velocidad necesaria para volar} \sim M^{1/6} \quad (7.1)$$

$$\text{velocidad metabólica} = \text{velocidad que soporta} \sim M^{-1/4} \quad (7.2)$$

y con ellas veremos por qué un pájaro de masa considerablemente mayor que uno más pequeño no puede volar.

Comenzamos comparando el levantamiento con el peso:

Para volar, el peso necesita estar compensado con el levantamiento. En la demostración volveremos a usar el Principio reduccionista que usamos para intentar demostrar la Ley de Kleiber de esa manera:

$$\text{Área} \sim M^{2/3} \quad (7.3)$$

Y como el levantamiento ha de ser proporcional al área, y por lo tanto a $M^{2/3}$ vemos que:

$$\text{levantamiento} \sim M^{2/3} \cdot v^2 = \text{peso} \sim M \quad (7.4)$$

Sin más que despejar ahora de $M^{2/3} \cdot v^2 \sim M$ tenemos finalmente que:

$$v \sim M^{1/6} \tag{7.5}$$

lo que muestra que la velocidad necesaria para poder alzar el vuelo es mayor cuanto mayor lo es la masa.

El cuerpo debe someter además la velocidad de arrastre.

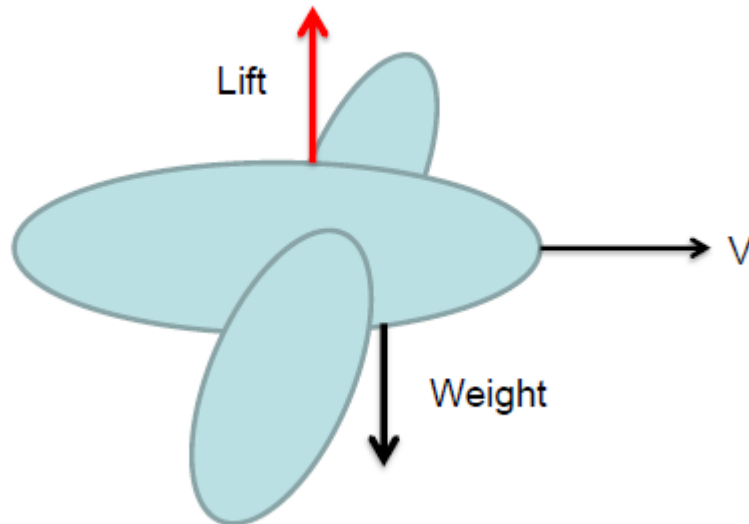


Figura 7.1: Las fuerzas levantamiento y peso deben compensarse, hipótesis biológica.



Figura 7.2: La velocidad que lleva el pájaro y la de arrastre deben compensarse, hipótesis biológica.

Tenemos pues, usando además la “archiconocida” Ley de Kleiber:

$$\text{Potencia} = \text{arrastre} \cdot \text{velocidad} = \text{potencia metabólica} \cdot M^{3/4} \quad (7.6)$$

Y cuando el pájaro está en vuelo:

$$\text{arrastre} \sim \text{levantamiento} \sim M \quad (7.7)$$

Y sin más que despejar de $Mv \sim M^{3/4}$ finalmente tenemos que:

$$v \sim M^{-1/4} \quad (7.8)$$

que era la otra fórmula que queríamos demostrar. De esta última extraemos que la velocidad que puede soportar es menor cuanto mayor es la masa.

7.2. ¿Cómo dependen de las dimensiones de un animal terrestre la energía por unidad de masa y la longitud recorrida en moverse?

Sea L una longitud característica del animal, sabemos que la masa es proporcional al volumen, es decir, a L^3 (Jou, 2009).

En una primera aproximación, podemos suponer que las patas se mueven como un péndulo simple cuando el animal corre. Tenemos pues que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (7.9)$$

en donde g es la aceleración de la gravedad. De la ecuación del péndulo simple obtenemos que el periodo es proporcional a $L^{1/2}$. Entonces la velocidad es:

$$v = \frac{L}{T} \sim \frac{L}{L^{1/2}} = L^{1/2} \quad (7.10)$$

El movimiento viene limitado por el ritmo al que se adquiere energía. En este caso el combustible del animal es el oxígeno y su entrada al organismo es a través de los pulmones, proporcional a su área L^2 , suponiendo que el ritmo de respiración no depende prácticamente del tamaño (hipótesis biológica).

La energía por unidad de masa y unidad de longitud recorrida es $C = \frac{E}{md}$, que lo podemos evaluar como:

$$C = \frac{P}{vm} \quad (7.11)$$

siendo P la potencia debida al consumo de oxígeno, proporcional a L^2 , es decir:

$$C = \frac{P}{mv} \sim \frac{L^2}{L^{1/2}L^3} = L^{-3/2} \quad (7.12)$$

o bien $C \sim M^{-0.5}$, que concuerda con el exponente alométrico correcto que es de 0,4. En el año 1972. Schmidt y Nielsen publican ese resultado en la revista Science. El resultado obtenido

utilizando el análisis dimensional no está nada mal teniendo en cuenta los sencillos argumentos utilizados.

7.3. ¿Por qué la muñeca Barbie no llegó a ser Miss Universo?

Una universidad de México llevó a cabo un estudio de análisis dimensional con la muñeca comercial Barbie para comparar las proporciones a escala 1:6, con los valores promedio de la mujer mexicana para así ver las proporciones y el IMC (Índice de Masa Corporal) que tendría la muñeca a escala humana (De la Vega Cobos *et al.*, 2010).

También estudiaron la pérdida de calor que tendría en referencia a la mujer mexicana promedio basándose en la relación área-volumen.

Los principales resultados son que la mujer obtenida a escala perdería calor un 40\% más rápido que una mujer promedio mexicana y que su IMC de 11.6 ubicaría a la mujer en el infrapeso.

Tomaron medidas de la muñeca usadas en la antropometría y luego fueron escaladas para obtener las medidas que tendría una mujer real en proporción. Las medidas lineales se multiplicaron por 6, las de áreas por 6^2 y las de volúmenes por 6^3 .

Se utilizó el valor promedio de la densidad del cuerpo humano, unos 0,950 kg/L (similar a la densidad del agua) y se calculó la masa que tendría la mujer escalada. Con ello se calculó el IMC como $IMC = masa / altura^2$.

Se comparó el área superficial de una mujer promedio mexicana de 1.62 m de altura y 58 kg de masa. Así se pudo estimar cuánto más rápido pierde calor la mujer escalada con respecto a la mujer promedio mexicana.

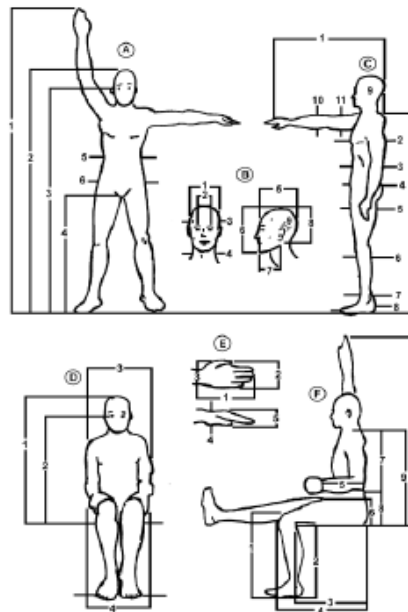


Figura 7.3: Llevaron a cabo un estudio antropométrico del tamaño y proporciones de la muñeca Barbie.

Para obtener el centro de masa se dividió a la muñeca en tres partes: cabeza, tronco y parte baja.

Además, mientras que la mujer promedio mexicana tendría un IMC del valor de 22.1 la muñeca tendría el de 11.6, lo cual deja en evidencia lo irreal de sus medidas.

Por otro lado perdería calor un 40 % más rápido que la mujer real.

La cabeza también sería desproporcionada, pues supondría el 69 % del tamaño del tronco.

El tamaño del pie sería de unos 18 cm, también pequeño.

Este es un ejemplo de la utilidad de las leyes de escala, además antropométrico.

PARTE DEL CUERPO	Medidas de muñeca (cm)	Medidas Mujer a escala
Altura (m) (A2)	0.291	1.75
Ancho hombro-hombro	4.81	29
Ancho brazo-brazo (D3)	6.11	37
Ancho cadera (A6)	4.93	30
Altura piernas (A4)	14.6	88
Altura cabeza (B6)	4.46	27
Largo Fémur	7.7	46
Largo Cuello	1.6	10
largo pie	3.02	18
Altura piso mano arriba (A1)	32.9	197
Perímetro cuello	4	24
Perímetro Busto	14.5	87
Perímetro cintura	8.2	49
Perímetro cadera	12.9	77
Perímetro muslo	7.3	44
Volumen cabeza Promedio (Litros)	0.023	5.0
Volumen cuerpo (Litros)	0.15	32.40
volumen total (Litros)	0.173	37.37
MASA de la mujer a escala		35.50
Índice de masa corporal de mujer a escala		11.6
Área superficial mujer a escala (m ²)		1.3794
Área superficial mujer promedio México (m ²)		1.6096
Volumen promedio de la mujer mexicana		61.05
Relación Área sup/ volumen mujer a escala (m ² /m ³)		0.03691
Relación Área sup/ volumen mujer promedio México (m ² /m ³)		0.0264
Coficiente (Área sup/vol)mujer a escala / (Área sup/vol)mujer prom. mex.		1.4002
Volumen parte baja del cuerpo (cadera y piernas) en L.	0.07	15.12
volumen parte superior del cuerpo (cadera, tronco y cabeza) en l.	0.08	17.28
volumen de la cabeza en L	0.023	4.97
MASA de la parte inferior de la mujer a escala (kg)		14.364
MASA de la parte superior de la mujer a escala (kg)		16.416
masa de la cabeza de la mujer a escala en kg		4.7196
Calculo del centro de masa		102.30cm

Figura 7.4: Se comparan las medidas que tendría la muñeca con las que tendría la mujer a escala.

7.4. Leyes de escala en ratas

Se estudiaron ratas de laboratorio tipo BDIX. Se midieron dos longitudes: la de su cola y la del cuerpo, medida desde el origen de la cola hasta la punta de la nariz del animal, encontrándose que el largo de la cola es proporcional a la longitud del cuerpo.

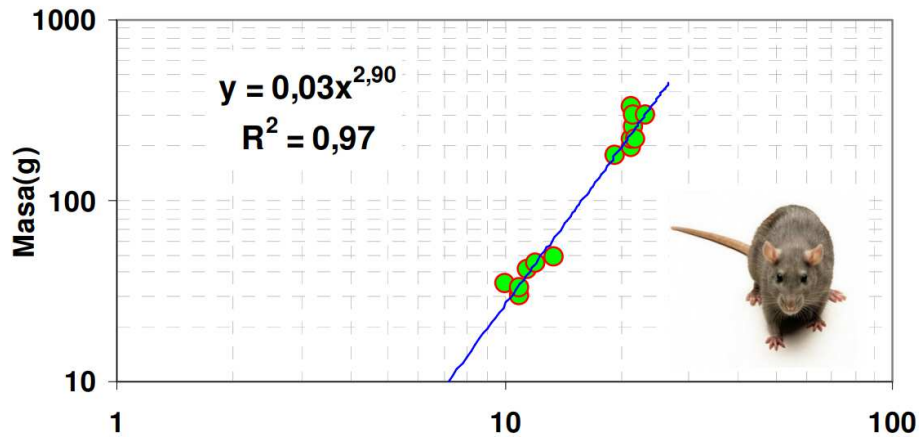


Figura 7.5: Ley de potencia ya linealizada y representada en escala logaritmo-logaritmo. Se ve que las longitudes de las ratas en relación a sus masas siguen una ley de escala.

La relación entre la masa y el tamaño sigue una ley alométrica con un exponente próximo a tres, lo que indica una proporcionalidad tridimensional, lo cual ocurre en muchos animales.

Este tipo de relación también se observa en objetos con simetrías tridimensionales como pueden ser la relación entre la masa de las tuercas hexagonales de distintos tamaños en función de su diámetro externo o el tamaño de los frutos de una misma variedad.

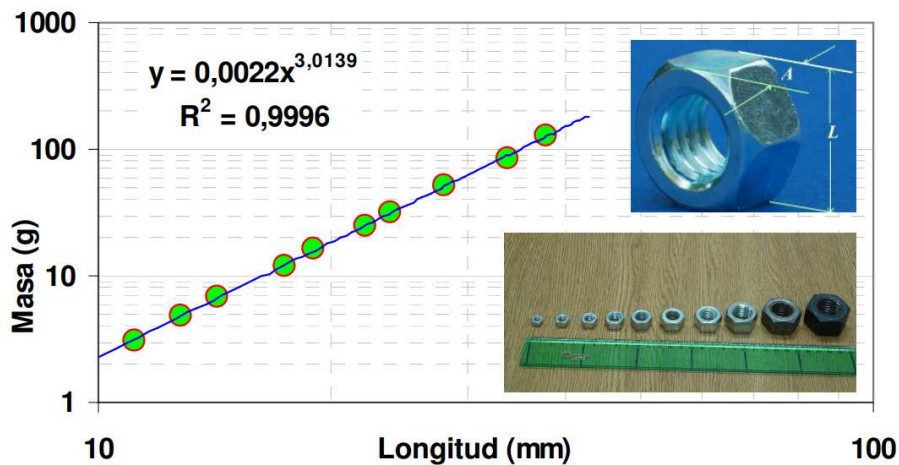


Figura 7.6: Ley de potencia ya linealizada y representada en escala logaritmo-logaritmo. Se ve que la longitud de las tuercas en relación a sus masas sigue una ley de escala.

7.5. Ritmo cardíaco y longevidad

Estudiaremos ahora el ritmo cardíaco y la longevidad en vertebrados para ver cuántos latidos tienen diferentes seres vivos a lo largo de su vida.

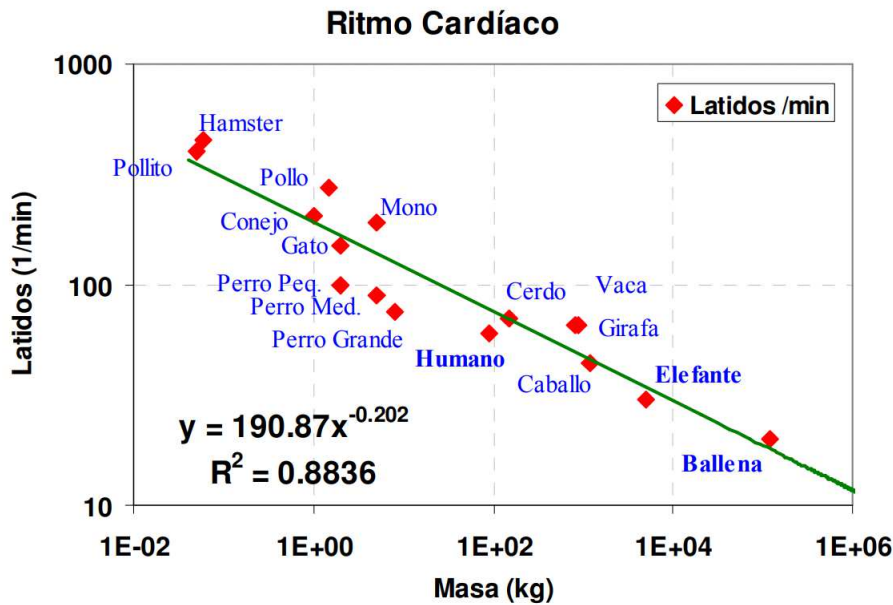


Figura 7.7: Tendencia lineal decreciente del ritmo cardíaco en vertebrados de seis órdenes de magnitud respecto a la masa corporal.

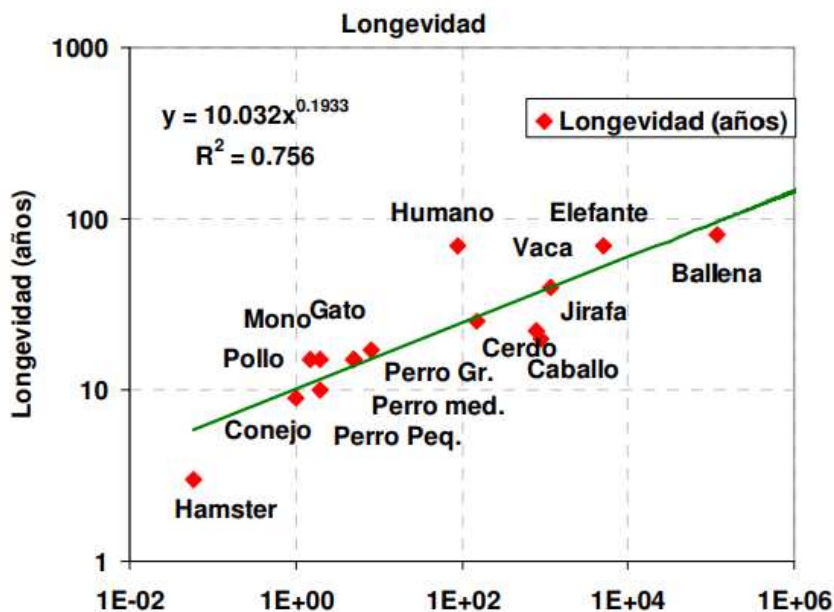


Figura 7.8: Tendencia lineal creciente de la longevidad o esperanza de vida en vertebrados de seis órdenes de magnitud con respecto a la masa corporal.

Al multiplicar el ritmo cardíaco por la esperanza de vida se obtienen los latidos a lo largo de su vida para los diferentes vertebrados. Se observa que el número de latidos es el mismo para todas las especies.

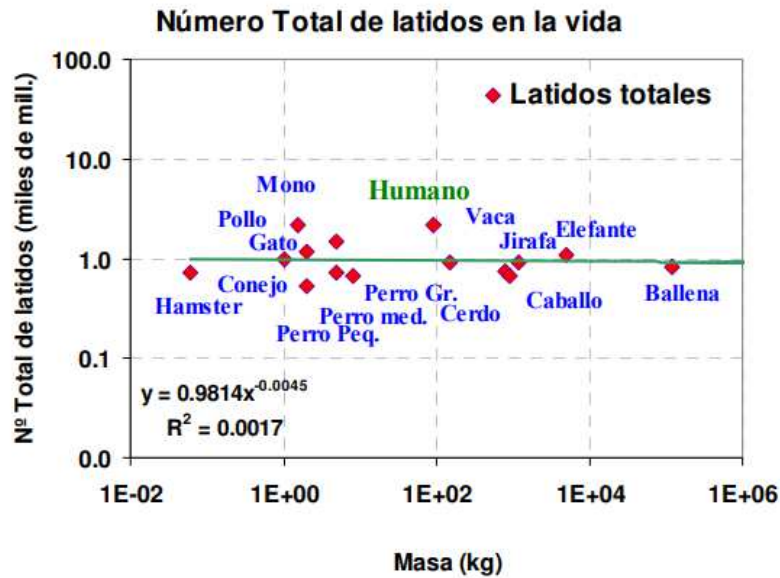


Figura 7.9: Constancia de los latidos cardíacos para la variedad de vertebrados mostrados.

7.6. Leyes de escala en árboles

Se puede estudiar la dependencia del diámetro medio \bar{D} de las ramas de un árbol en función del orden de bifurcación N . El diámetro del tronco principal es \bar{D}_1 y corresponde a un orden de bifurcación $N = 1$.

Ascendemos por el árbol hasta la primera bifurcación, donde se miden los diámetros de las ramas y se obtiene \bar{D}_2 que se corresponde con la bifurcación $N = 2$, y así sucesivamente.

Se puede observar una relación lineal entre el diámetro y el nivel de ramificación del árbol, $1/N$.

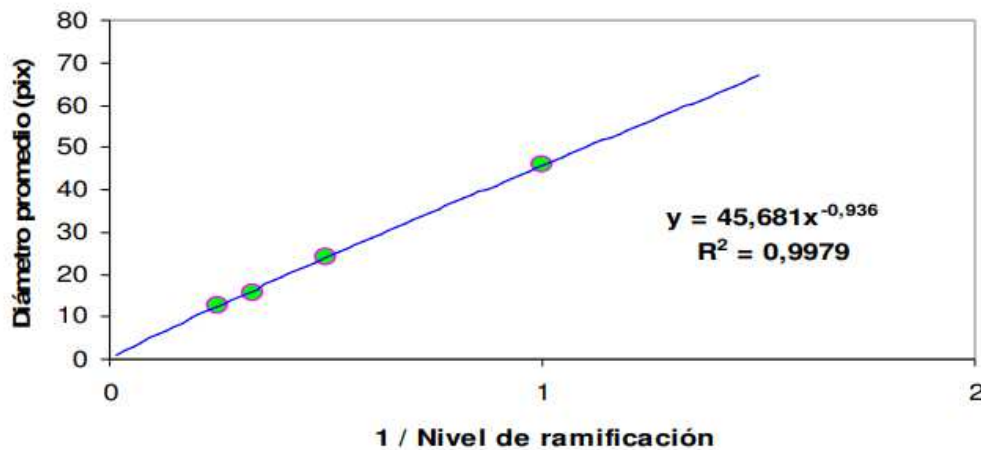


Figura 7.10: Relación lineal entre $1/N$, nivel de ramificación, y el diámetro \bar{D}

Leonardo Da Vinci observó que la suma de las áreas siguientes es igual a la del tronco inicial.

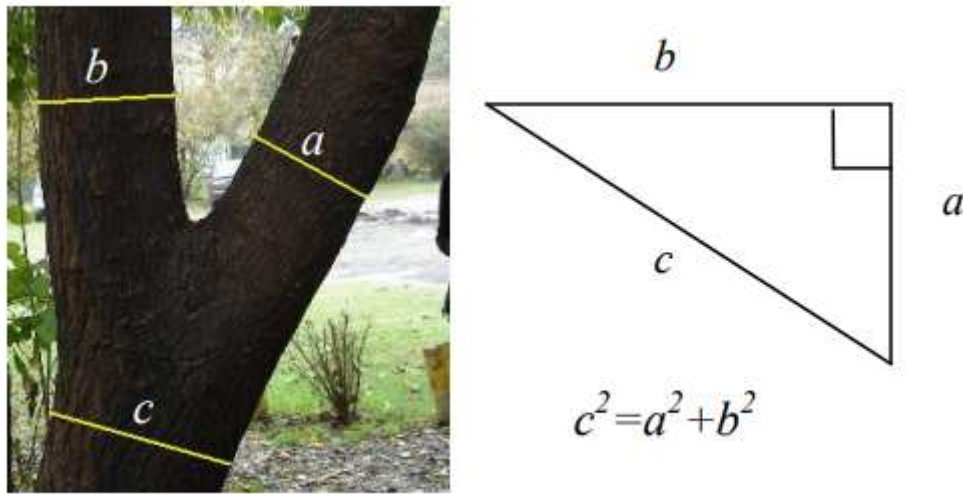


Figura 7.11: Diámetros trazados sobre el tronco de un árbol. Al cociente entre el diámetro y π lo llamamos diámetro medio. Guardan una relación pitagórica.

Quitando el factor π lo podemos escribir como:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (7.13)$$

que no es más que una relación pitagórica entre los diámetros de una rama antes y después de una ramificación.

Para ver en qué medida se cumple esto podemos usar el Teorema del Coseno:

$$\cos \phi = \frac{(-c^2 + a^2 + b^2)}{2ab} \quad (7.14)$$

En donde ϕ es el ángulo entre a y b , opuesto a c . Graficando para cada bifurcación del árbol podemos ver en qué medida se cumple para un árbol real.

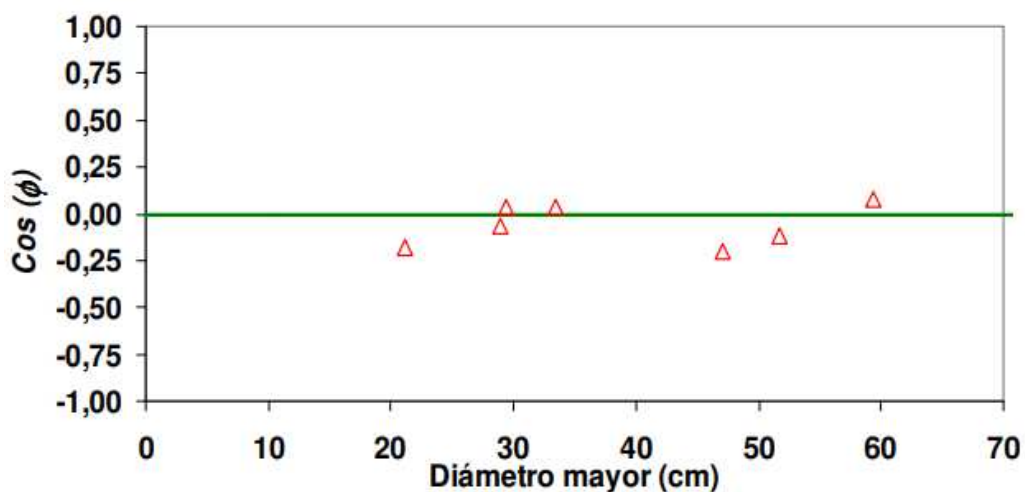


Figura 7.12: Desviaciones respecto a la relación pitagórica propuesta.

7.7. Leyes de escala en ciudades

Se espera que dos tercios de la población humana vivan en ciudades en el año 2050. La escala y el ritmo de la urbanización suponen un reto a la hora de gestionar recursos dentro de una ciudad, como son el transporte y la infraestructura (Moro, 2016).

Para entender la dinámica y organización de las ciudades necesitamos modelos predictivos y cuantitativos. Se ha encontrado que a pesar de diferencias culturales, económicas o políticas las ciudades crecen por las leyes de escala. Los indicadores de una ciudad crecen con la población de la forma:

$$Y = aP^b \quad (7.15)$$

es decir, una ley de escala en donde Y es el indicador y P es la población. Para cada indicador tenemos un crecimiento diferente. Por ejemplo, para el PIB (Producto Interior Bruto) $b > 1$, ya que crece más rápido que la población. A medida que la población crece se crea más PIB por persona.

Otros indicadores crecen con $b < 1$, y son los relacionados con las infraestructuras (tendidos eléctricos, kilómetros de carreteras, número de hospitales...). Al doblar la población crecen menos del 100 %, lo que nos permite ahorrar en infraestructura.

En España el presupuesto de los ayuntamientos crece de manera lineal con la población, es decir, con $b = 1$.

Así pues, tenemos tres situaciones:

1. Si $b > 1$ el gasto por habitante crece con la población.
2. Si $b = 1$ el gasto por habitante es el mismo para cualquier población.
3. Si $b < 1$ el gasto por habitante decrece con la población.

Que las leyes de escala se cumplan tan fielmente nos permiten hacer predicciones sobre el impacto que tendrá el crecimiento urbano en los presupuestos de una ciudad.

Y además, cabe destacar que un cambio en el comportamiento de los individuos que constituyen una ciudad tendría un cambio en el exponente alométrico b .

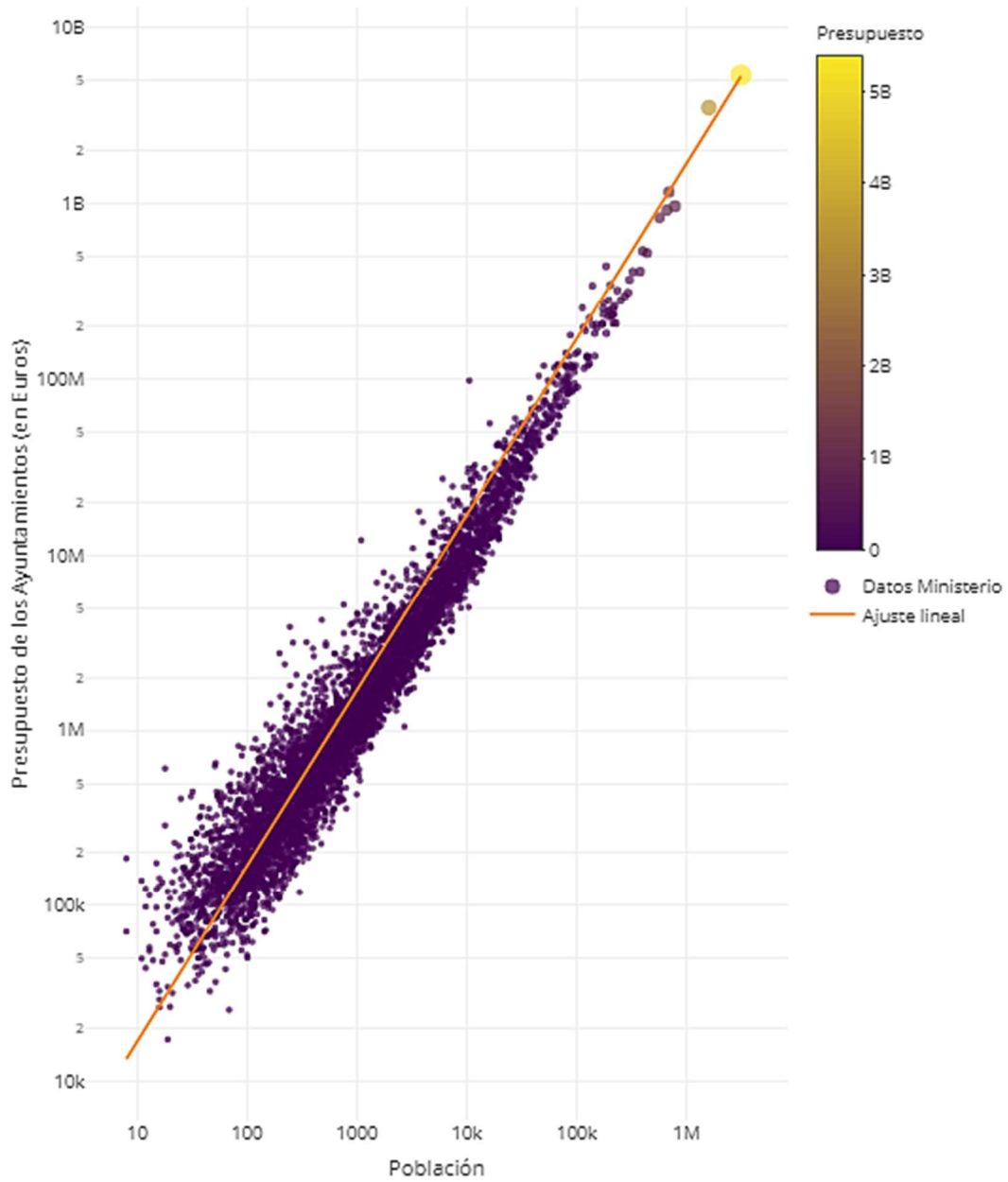


Figura 7.13: El presupuesto de los ayuntamientos en España crece de manera lineal con la población. En naranja vemos la regresión lineal.

Leyes de escala en las partidas del presupuesto

Partida del Presupuesto	Exponente b (Ajuste)	Efecto del incremento de la población sobre el gasto por habitante en esta partida
Transporte	1.63	Crece
Parques	1.36	Crece
Limpieza	1.23	Crece
Seguridad	1.22	Crece
Deuda	1.11	Crece
Deporte	1.04	Indiferente
Total	1.03	Indiferente
Ensenanza	1.01	Indiferente
Cultura	0.99	Indiferente
Alumbrado	0.91	Decrece
Infraestructuras	0.67	Decrece
Fiestas	0.67	Decrece

Figura 7.14: Vemos el valor del exponente alométrico para los presupuestos en diferentes aspectos.

Capítulo 8

Conclusiones

El estudio que comenzó **Galileo** en su libro “*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali.*”, y que hoy en día constituye **dos Ciencias**: una, la **Mecánica Clásica**, bien conocida por todos; y otra Ciencia, mucho más desconocida, pero toda una ciencia, la **Alometría**, ha tenido profundas implicaciones a la hora de entender cómo se comporta la naturaleza y los fenómenos que ocurren en ella.

En este trabajo hemos aprendido que muchas de las leyes de la naturaleza son leyes de potencias alométricas, lo cual nos explica que haya un ritmo de crecimiento diferente entre magnitudes que observamos y que están relacionadas funcionalmente entre sí. **Al cambiar el tamaño de los seres vivos y, en particular, al cambiar de escala, lo hacen sus funciones y su forma.**

También hemos sido conscientes de que los fenómenos de la naturaleza no son extrapolables de una escala a otra por simples reglas de tres; y que, en las leyes de escala alométricas, la importancia reside en que dos magnitudes estén relacionadas a través de un exponente, el exponente alométrico (distinto de uno). Por contra, si el exponente es igual a uno, las Leyes son isométricas.

Además, cuando las Leyes de Escala no se cumplen, dan lugar a propiedades emergentes.

Bibliografía

Abellán, G. (2013) *El infierno de Dante, Galileo y la teoría de escalamiento*. Blog “La Belle Physique”, wordpress.com.

<https://labellephysique.wordpress.com/2013/08/21/dante-galileo-teoria-escalamiento/>

Alighieri, D. (2017) *Divina Comedia*. Plutón Ediciones X, Barcelona, Séptima Edición.

Anderson, P.W. (1972) *More is different*. Science N.S. **177**[4047] pp. 373-396.

De la Vega Cobos, C.A., Chávez Rojo, M.A., Zapata Chávez, E. (2010) *¿Por qué no llegó la muñeca Barbie a Miss Universo*. Lat. Am. J. Phys. Educ. **4**(1) pp. 973-975. Disponible en:

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3700410>

Clauset, A., Shalizi, C.R. y Newman, M. (2009) *Power-Law Distributions in Empirical Data*. SIAM Review **51**(4) pp. 661-703.

<http://www.jstor.org/stable/25662336>

Crowell, B. (2019) *Light and Matter*. Book of Creative Commons, disponible en:

<http://www.lightandmatter.com/>

Jaynes E.T. (1979) *Where Do We Stand on Maximum Entropy?* pp. 15-118 del libro: *The Maximum Entropy Formalism*, Editado por D. Levine and M. Tribus. The M.I.T. Press.

Jou, D., Llebot, J.E. y Pérez, C. (2009) *Física para las Ciencias de la Vida*, McGraw Hill, Madrid, 2^a Edición.

Galilei, G. (1976) *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Biblioteca de la Literatura y el Pensamiento Universal, n^o **10**, Editora Nacional, Madrid.

Gil, S. y Rodríguez, C. (2001) *Física re-Creativa*, Prentice-Hall, Buenos Aires. Disponible en:

http://www.fisicarecreativa.com/libro/indice_exp.htm

Gil, S. (2012) *Experimentos de física de bajo costo, usando TIC*, capítulo 3. Disponible en:

<https://www.fisicarecreativa.com/>

https://www.fisicarecreativa.com/exp_fisica/cap3_Analisis_grafico_act_v1.pdf

Henriques, G. (2003) *The Tree of Knowledge system and the theoretical unification of Psychology*. Review of General Psychology **7**(2) pp. 150-182. Véase:

https://www.wikiwand.com/en/Gregg_Henriques

Henriques, G. (2011) *From Racing Horses to Seeing the Elephant*. Disponible en:

<https://psychweb.chbs.jmu.edu/TokSystem/downloads.htm>

-
- Laughlin R.B. (2007) *Un universo diferente: La reinención de la física en la edad de la emergencia*. Buenos Aires: Katz Editores.
- Moro, E. (2016) *Las leyes de escala en nuestras ciudades*. Blog de Piperlab (expertos en Data Science). Véase:
<https://piperlab.es/2016/10/20/las-leyes-escala-nuestras-ciudades/>
- Núñez, P., Calderón, S.E. y Gil, S. (2010) *Búsqueda de orden y armonía en la naturaleza, descubriendo leyes de escala en el aula*. Lat. Am. J. Phys. Educ. **4**(1) pp. 118-125. Disponible en:
http://www.lajpe.org/jan10/19_Pablo_Nunez.pdf
- Patagotitan mayorum (2014). Disponible en:
https://es.wikipedia.org/wiki/Patagotitan_mayorum
- Peterson, M.A. (2002) *Galileo's Discovery of scaling laws*. Am. J. Phys. **70**(6) pp. 575-580.
- Pittau, R. (2017) Apuntes de la asignatura “*Física de los procesos biológicos*”, Tema 1: Introducción. Universidad de Granada, curso 2017-2018. Disponible en:
<http://www.ugr.es/~pittau/FISBIO/>
- Reiser, O.L. (1958) *The integration of human knowledge*. Porter Sargent, First Edition, Boston.
- Ruelle, D. (1993) *Azar y caos*. Alianza universal, núm. **752**.
- Solé, R.V. y Manrubia, S.C. (2001) *Orden y caos en sistemas complejos*. Ediciones UPC, núm. 93 y 94, Barcelona.
- Wagensberg, J. (1998) *Breve historia de la materia*. Mundo Científico **196**, p. 92.
- West, D. y West, B.J. (2011) *Statistical origin of allometry*. Europhysics Letters(EPL)**94**, 38005.
<https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/94/38005>
- Wilson, K.G. (1979) *Problemas físicos con muchas escalas de longitud*. Investigación y Ciencia **37** (octubre) pp. 72-93.