



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster de Investigación en Matemáticas

INTEGRACIÓN ALGEBRAICA DE ECUACIONES FUCHSIANAS. LA ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA DE GAUSS.

Autor: Alberto González Sanz

Tutor/es: Jorge Mozo Fernández

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Investigación en Matemáticas

El abajo firmante, Jorge Mozo Fernández, Profesor del Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología,

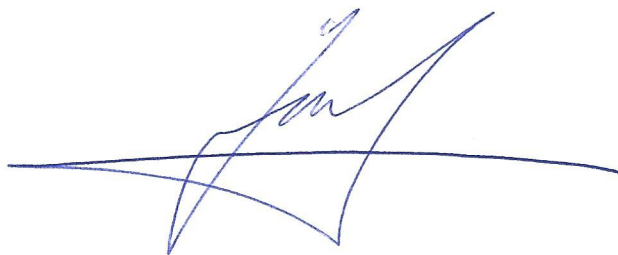
DECLARA:

Que el alumno Alberto González Sanz ha realizado bajo mi dirección el Trabajo Fin de Máster de Título “*Integración algebraica de ecuaciones fuchsianas. La ecuación hipergeométrica de Gauss*”, correspondiente al Máster de Investigación en Matemáticas.

Dicho trabajo consiste en un estudio exhaustivo del resultado de H.A. Schwarz (1873), en el que clasifica para qué valores de los parámetros la ecuación hipergeométrica de Gauss admite soluciones algebraicas, o en términos actuales, cuando su grupo de monodromía es finito. De entre las distintas aproximaciones a este teorema se ha elegido la que pasa por clasificar teselaciones finitas del plano por medio de triángulos geodésicos.

Al considerar que cumple los requisitos establecidos en la Guía de la asignatura AUTORIZA su presentación para la defensa ante la Comisión evaluadora que habrá de juzgarlo.

Valladolid, a 24 de junio de 2019.



Fdo: Jorge Mozo Fernández

Integración Algebraica de Ecuaciones Fuchsianas.
La Ecuación Hipergeométrica de Gauss.

Alberto González Sanz

28 de junio de 2019

Resumen

La memoria del presente Trabajo de Fin de Máster (TFM) tiene como objeto analizar los valores de los parámetros para los cuales las soluciones de la ecuación hipergeométrica de Gauss tienen soluciones algebraicas sobre $\mathbb{C}(z)$. El resultado final, conocido como la Lista de Schwarz, afirma que podemos reducir los casos a una lista de 15 posibles elementos. Es decir, podremos afirmar que una solución de una ecuación hipergeométrica es algebraica si y solo si se puede, tras realizar las transformaciones pertinentes, encontrar en una lista determinada. En numerosos textos se trata este tema, pero pocos realizan una prueba concreta del resultado final, sin embargo, en este trabajo se puede observar una justificación detallada y precisa de los diferentes pasos que nos llevan hasta la demostración concreta del mismo. Para ello el trabajo consta de tres capítulos, los cuales se resumen a continuación:

En el primero se tratan los resultados de la rama del análisis complejo que se van a utilizar en los siguientes, conceptos como prolongación analítica, funciones algebraicas, y alguna pincelada geométrica, vienen desarrollados en este capítulo.

En el segundo se puede encontrar un análisis de las ecuaciones escalares holomorfas de orden arbitrario, intentando evitar, en la medida de lo posible, el tratamiento matricial del mismo. Se darán condiciones de existencia y unicidad en regiones, con una demostración del resultado basada en la aplicación conforme de Riemann. En los dominios más generales se define el concepto de solución de la ecuación, se estudia el grupo de monodromía y su relación con la existencia de soluciones algebraicas. En la parte final del capítulo se trabaja con las ecuaciones cuyas singularidades son más fácilmente tratables, las Fuchsianas.

En el último capítulo, como aplicación de los anteriores, se analiza la ecuación hipergeométrica, que es de tipo Fuchsiana. Se estudian, mediante argumentos principalmente geométricos, los casos en los que las funciones son algebraicas, para finalmente dar una justificación precisa de la Lista de Schwarz.

Palabras clave: Lista de Schwarz, ecuación hipergeométrica, soluciones algebraicas, ecuaciones Fuchsianas.

Abstract

The aim of this Master thesis is to find in which cases the hypergeometric equation has algebraic solutions on $\mathbb{C}(z)$. The main result of the report, known as Schwarz's list says that we can reduce the cases to a list of 15 elements. That is, we can state that a solution of the the hypergeometric equation is algebraic if and only if we can find it, after perhaps some transformations, in a finite list. There are a lot of text treating this topic, but none of them gives a clearly proof of the principal result, however, in this work we can see a detailed enough justification of all the necessary results to arrive at the complete list. This paper is divided in three chapters, which we detail in the sequel:

In the first one, there is an introduction of all the complex analysis concepts required for furthers chapters, as analytic continuation, algebraic functions...

The second one focus on the scalar differential equations of arbitrary order. We give a general existence and uniqueness conditions on the regions, proving the statement through the conformal mapping theorem. Over general domains we define the concept of solution, monodromy and we state the relations between this and the existence of algebraic solutions. The last part of the chapter is focused on the study of the easiest case of singularity, Fuchsian ones.

In the final chapter we use all the previous results to give a treatment of the hypergeometric equations like a particular Fuchsian equation case. Using mainly geometric arguments we find the cases when the hypergeometric equation has algebraic solutions, and we state the Schwarz's List theorem.

Key Words: Schwarz's List, hypergeometric equations, algebraic solutions, Fuchsian equations.

Dedicado a mi familia
y a mi tutor, Jorge Mozo,
por su infinita paciencia.

Lista de Figuras	4
Lista de Tablas	5
Introducción	9
1. Preliminares	13
1.1. Prolongación Analítica	13
1.2. Funciones algebraicas	18
1.3. Geometría de $\overline{\mathbb{C}}$	22
2. Ecuaciones Diferenciales de Orden n	25
2.1. Problema de Cauchy en Regiones	25
2.2. Solución Fundamental	29
2.3. Monodromía	32
2.4. Álgebras de Operadores	37
2.5. Singularidades regulares	43
2.6. Ecuaciones Fuchsianas	53
2.7. Soluciones Algebraicas	55
3. Ecuación Hipergeométrica	63
3.1. Ecuaciones Fuchsianas de orden 2	64
3.2. Resolución de la Ecuación	70
3.3. Monodromía	82
3.4. Soluciones locales	86
3.5. Triángulos de Schwarz	89
3.6. Soluciones algebraicas	105

1.1. Ejemplo de división de conjunto simétrico en parte imaginaria positiva, negativa y nula.	19
3.1. Camino de Pochhammer	73
3.2. Camino de Pochhammer, para la parametrización (3.21).	74
3.3. Camino de Pochhammer modificado	75
3.4. Camino homótopo al de Pochhammer, visto como suma de caminos simples.	75
3.5. Esquema de los lazos generadores del grupo de monodromía.	83
3.6. Construcción de un triángulo de Schwarz con $\delta = \pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$	90
3.7. Triángulo de Schwarz con dos lados rectos que se cortan en 0.	92
3.8. Notación general de un triángulo de Schwarz.	93
3.9. Transformación de Möbius de \mathbb{T} en \mathbb{T}_1 , que aplica A en 0, B en 1 y A' en ∞	95
3.10. Triángulo con dos líneas rectas, con vértices en cero y uno.	97
3.11. Transformación del triángulo realizada por la aplicación τ	98
3.12. Prolongación analítica de w a lo largo de g_0	103
3.13. Representación en proyección estereográfica del caso diédrico con $n = 3$	108
3.14. Representación en proyección estereográfica del caso del tetraedro	109
3.15. Representación en proyección estereográfica del caso del cubo	109
3.16. Representación en proyección estereográfica del caso del icosaedro	110
3.17. Construcción del radio R	111
3.18. Construcción del triángulo sabiendo que se verifica la condición (L).	113
3.19. Construcción de un entorno de un triángulo el cual es recubierto por reflexiones sobre los lados.	114
3.20. Construcción de triángulo que genera el mismo grupo y tiene área menor que la mitad.	116

ÍNDICE DE CUADROS

3.1. Triángulos esféricos elementales	107
3.2. Triángulos euclídeos elementales.	107
3.3. Lista de Schwarz	117

Durante la historia el estudio de las convergencias de las series y sucesiones siempre ha estado en la mente de los matemáticos más influyentes, sobre todo en el ámbito del análisis, desde Euler, Cauchy o Weierstrass entre otros.

Uno de los primeros problemas estudiados, ya desde tiempos de Euclides, fue la suma de la conocida serie geométrica, la cual, para un r fijo distinto de 1, da como resultado:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Es claro en este caso que si $|r| < 1$, tomando el límite para n en infinito, obtenemos que

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1 - r}.$$

El problema se complica en el momento en el que este valor r cambia su valor en cada nuevo término de la suma, esto es justamente lo que ocurre en una sucesión de tipo hipergeométrica:

$$1 + \frac{a \cdot b}{c \cdot 1!} z + \frac{a(a-1)b(b-1)}{c(c-1)2!} z^2 + \dots, \text{ con } a, b, c, z \in \mathbb{C}.$$

Un primer método de estudio para la serie podría ser el tratamiento directo de la misma, hay ciertas conclusiones a las que se llega con aparente facilidad, por ejemplo la convergencia de la misma respecto a los parámetros.

Si ahora suponemos que esta serie define una función holomorfa para z ahí donde converja, podemos continuar el estudio buscando funciones que sean holomorfas en dominios mayores pero que, ahí donde la suma sea finita, coincida con la serie. Este razonamiento será conocido como principio de prolongación analítica y será de suma importancia en el transcurso del texto y motiva el primer capítulo.

Si ahora derivamos la serie hipergeométrica bajo el sumatorio, se puede probar que es solución de una cierta ecuación diferencial de coeficientes meromorfos, la cual se llamará ecuación hipergeométrica. Por lo tanto una interesante vía de estudio de la serie puede ser

analizar las propiedades de las soluciones de la ecuación hipergeométrica, en este texto se tratará como un caso particular de las ecuaciones diferenciales complejas, que ocuparán el segundo capítulo. Mediante este argumento garantizaremos la existencia de funciones que prolongan a la serie hipergeométrica a dominios mayores.

Veremos que, tratándose de dominios simplemente conexos, las soluciones de las ecuaciones holomorfas han de ser holomorfas y tenemos garantizada la existencia de las mismas. En dominios generales, no podemos garantizar este hecho, lo cual nos lleva a definir como soluciones a elementos que no han de ser funciones holomorfas, intentaremos describir la construcción matemática que los contiene.

Trataremos en especial los casos en los cuales las soluciones tienen un crecimiento a lo sumo potencial en todo punto, que en este tipo de ecuaciones diferenciales, tiene especial relación con la forma de la misma. Estas ecuaciones recibirán el nombre de Fuchsianas y ocuparán la parte final del capítulo segundo.

Por último, en este ámbito de ecuaciones Fuchsianas, se darán condiciones que ha de verificar para obtener soluciones que sean algebraicas sobre $\mathbb{C}(z)$, con vistas a aplicar esto al estudio que nos ocupará el tercer capítulo, la ecuación hipergeométrica.

Para concluir el texto, se tratarán las funciones hipergeométricas como solución de la ecuación, y llegaremos al resultado que culmina el trabajo, la Lista de Schwarz, mostrando de forma precisa detallada y fácilmente legible para cualquiera que tenga conocimientos medios en análisis complejo.

En el momento en el que se realiza una investigación en el tema de funciones hipergeométricas algebraicas sobre $\mathbb{C}(z)$, aparecen numerosos artículos con numerosos tipos de técnicas aplicables en el estudio. Casi todos ellos están incompletos, como es el caso de [Be], que aunque sirve como una excelente guía de trabajo, sus razonamientos son demasiado difusos como para realizar un seguimiento literal con el que el lector pueda quedar satisfecho. El camino seguido para llegar al resultado final, la Lista de Schwarz, no puede encontrarse de forma literal y precisa en ninguno de los textos consultados. Aquí, en este trabajo, sin embargo se puede encontrar, de manera prácticamente autocontenida, un procedimiento para abordarlo y finalmente demostrarlo.

En cuanto a las notas históricas que aparecen en el texto, cabe destacar que la mayor parte de las mismas pueden encontrarse en [Bo].

NOTACIÓN Y TERMINOLOGÍA

\mathbb{R}	Recta real.
\mathbb{C}	Plano complejo.
\mathbb{N}	Números naturales, incluyendo 0.
$\overline{\mathbb{C}}$	Plano complejo completado o esfera de Riemann.
$B(a, r)$	Bola abierta de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio r .
$B^*(a, r)$	Bola punteada, $B(a, r) \setminus \{a\}$ abierta de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio r .
$\mathcal{H}(D)$	Conjunto de las funciones holomorfas en D .
$\mathcal{M}(D)$	Conjunto de las funciones meromorfas en D .
$\mathcal{C}(D)$	Conjunto de las funciones continuas en D .
$\mathbb{C}[z]$	Conjunto de los polinomios con coeficientes complejos.
$\mathbb{C}(z)$	Cuerpo de fracciones de los polinomios con coeficientes complejos, o cuerpo de las funciones meromorfas.
$\mathbb{C}(x)[w]$	Conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}(z)$.
$\mathbb{C}(x)(w)$	Cuerpo de fracciones de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}(z)$.
$\mathbb{C}[[z]]$	Conjunto de las series con coeficientes en \mathbb{C} .
$GL(V)$	Grupo de automorfismos sobre un espacio vectorial V .

Antes de introducirnos en materia, dedicaremos una sección a concretar la notación y a abordar algunos temas, que si bien son globalmente conocidos en el ámbito de la variable compleja, no siempre son tratados con precisión.

Para no generar confusión, definiremos estos conceptos cuya notación y terminología mantendremos durante todo el texto.

1.1. Prolongación Analítica

Sea la función $\log(z)$ compleja, definida como la inversa de la exponencial. De ella sabemos que puede tomar diferentes valores en un mismo punto distinto de 0. Este concepto nos lleva de forma natural a definir un espacio donde esta función esté bien definida.

Por otro lado, supongamos que f es una función holomorfa en $B(0, 1)$, entonces admitirá representación en serie de potencias única en torno a 0, de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in B(0, 1).$$

Automáticamente nos preguntamos:

¿Será posible garantizar la existencia de otra función g que extienda a f a un dominio mayor?

Durante el siglo XIX, el sucesor de Dirichlet en la universidad de Gotinga, Bernard Riemann, obtuvo numerosos avances en el ámbito del análisis, de los cuales algunos estudiaban este tipo de funciones. Para ello definió unas superficies, donde las funciones holomorfas multivaluadas están inequívocamente determinadas, las Superficies de Riemann. No entraremos en estas construcciones, pero daremos respuesta, en este texto, a la pregunta formulada anteriormente sobre extensión. Esto nos llevará a dar ciertas definiciones de prolongación de funciones así como aclarar cuándo una función puede extender a otra, este concepto se conocerá como prolongación analítica y lo desarrollaremos en estas líneas.

El mismo Riemann introdujo el concepto de prolongación analítica, para ello consideró el plano complejo \mathbb{C} . En el año 1857 escribió:

"Si consideramos una función w definida en una parte de este plano, entonces, en virtud de una proposición cuya demostración es sencilla, existe una sola manera en la cual puede ser extendida con continuidad mediante la ecuación $\partial w/\partial y = i(\partial w/\partial x)$. Por supuesto esta continuación no puede ser realizada en ciertas direcciones, donde la ecuación en derivadas parciales no puede ser definida, pero sí en bandas de finita anchura."

Ya en la segunda mitad del siglo XIX, en Alemania, una de las contribuciones más importantes de Weierstrass al campo del análisis matemático es justamente en el concepto de prolongación analítica, precisándola más de lo que Riemann había hecho. Weierstrass demostró que la representación en serie de potencias infinita de una función holomorfa $f(z)$, en torno a un punto $P_1 \in \mathbb{C}$, converge en todos los puntos de la bola B_1 , de centro P_1 y mayor radio que no contenga singularidades de $f(z)$. Si, ahora, uno trata de expandir en serie de potencias en torno a un segundo punto P_2 , distinto de P_1 pero en B_1 , esta serie será convergente en la bola B_2 , de centro P_2 y mayor radio que no contenga singularidades de $f(z)$. Esta nueva bola B_2 contiene puntos que no estaban en B_1 ; Por tanto, se ha conseguido extender el área del plano donde la función $f(z)$ es analítica; este procedimiento puede ser generalizado a lo largo de más bolas. La importancia del trabajo de Weierstrass, tendrá alto impacto, principalmente en el ámbito en el que se desarrolla el texto, es decir, en las ecuaciones diferenciales, ya que, en numerosas ocasiones, no podremos encontrar soluciones de otra manera que no sea recurriendo a una serie de potencias infinita.

La influencia de Weierstrass fue ejercida a través de sus alumnos con mucha mayor fuerza de la que él mismo imaginaba en sus propias publicaciones. En el campo de las ecuaciones diferenciales destacará principalmente Lazarus Fuchs (1833-1902). Siguiendo la línea de los matemáticos franceses Briot (1817-1882) y Bouquet (1819-1885), y las recopilaciones de Riemann sobre la ecuación hipergeométrica, Fuchs inició el estudio sistemático de las singularidades regulares de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el dominio complejo. Su fuerte motivación proviene principalmente de los textos de funciones Abelianas que Weierstrass había escrito en 1863. El trabajo de Fuchs fue continuado por G. Frobenius (1849-1917) en Berlín y sirvió como punto de partida para Poincaré (1854-1912).

Una vez situado el contexto histórico, comenzaremos esta sección introductoria dando una serie de definiciones, de ámbito puramente topológico, las cuales desembocarán en el teorema de monodromía.

Definición 1.1

Un camino es una aplicación continua $\gamma : I \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, donde $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. A los valores $a = \gamma(0)$ y $b = \gamma(1)$ les llamaremos extremos del camino y diremos que el camino une a y b .

Llamaremos soporte de un camino γ al subconjunto compacto $\gamma^* = \gamma(I) \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Diremos que el camino es simple si $\gamma(s) = \gamma(t)$ para ciertos s, t , implica que $s \in \{0, 1, t\}$ o $t \in \{0, 1, s\}$.

Diremos que el camino es cerrado o que es un lazo si sus extremos son coincidentes, es decir $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Definición 1.2

Un dominio D es un subconjunto de $\overline{\mathbb{C}}$ abierto y conexo.

Definición 1.3

Sea D un dominio, y γ, τ dos caminos con soporte en D que unen los puntos $a, b \in D$. Diremos que son homótopos u homotópicamente equivalentes en D si existe una aplicación continua $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow D$ verificando:

1. $\Gamma(s, 0) = \gamma(s)$, $s \in [0, 1]$.
2. $\Gamma(s, 1) = \tau(s)$, $s \in [0, 1]$.
3. $\Gamma(0, t) = a$, $\Gamma(1, t) = b$, $t \in [0, 1]$.

A esta aplicación se la llamará homotopía entre γ y τ .

Nótese que la definición depende del conjunto donde estemos trabajando, ya que $\Gamma([0, 1]^2) \subset D$, por lo tanto caminos que son homótopos en un conjunto pueden no serlo en un subconjunto suyo. En la siguiente definición describiremos los conjuntos más sencillos, en los cuales todos los caminos son homótopos entre sí.

Definición 1.4

Sea D un dominio de $\overline{\mathbb{C}}$, diremos que es una región si todo lazo es homótopo a un punto, o equivalentemente, si todos los caminos con mismos extremos son homótopos entre sí.

Nota 1.5

En muchas ocasiones y en numerosos textos a las regiones se las conoce como dominios simplemente conexos.

Existen diversas definiciones equivalentes a región en la esfera de Riemann, para ver una lista completa de estas se recomienda ver [AsN].

Tras estas nociones meramente topológicas, nos introduciremos en lo que propiamente nos concierne, la variable compleja.

Definición 1.6

Sea D una región y f una función meromorfa en D . Llamamos elemento de función meromorfa al par ordenado (D, f) . Si además f es analítica en D entonces diremos que (D, f) es un elemento de función analítica.

En caso de la omisión de la palabra meromorfa asumiremos por convenio que la función f es analítica en D .

Como consecuencia inmediata del principio de identidad en funciones analíticas o meromorfas obtenemos el siguiente resultado.

Lema 1.7

Sean (D, f) y (D, g) dos elementos de función meromorfas tales que $f = g$, en un

conjunto A tal que contiene un punto de acumulación en D . Entonces $(D, f) = (D, g)$.

Demostración: Basta aplicar el principio de identidad a las funciones f y g en el dominio D . ■

Definición 1.8

Sean (D_1, f_1) y (D_2, f_2) dos elementos de función meromorfas tales que $f_1(z) = f_2(z)$, para todo $z \in D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Entonces diremos que (D_2, f_2) es prolongación meromorfa directa de (D_1, f_1) , si además f_2 es analítica en D_2 diremos que (D_2, f_2) es prolongación analítica directa de (D_1, f_1) . En cualquiera de los casos escribiremos $(D_1, f_1) \sim (D_2, f_2)$.

El Lema 1.7 garantiza que la relación \sim es simétrica y reflexiva, pero no tiene porqué ser transitiva. Para probar esto basta considerar una función entera f , el elemento $(B(0, 1), f)$ y $(B(1/2, 1), f)$, así como $(B(1/2, 1), f)$ y $(B(1, 1), f)$, son prolongación analítica directa. Como $B(0, 1) \cap B(1, 1) = \emptyset$ entonces $(f, B(1, 1))$ no puede ser prolongación analítica directa de $(f, B(0, 1))$.

Definición 1.9

Sea (D, f) un elemento de función, $a \in D$ y γ un camino que une los puntos a y $b \in \overline{\mathbb{C}}$. Una prolongación meromorfa de (D, f) a lo largo del camino γ es una secuencia de prolongaciones meromorfas directas $(D, f) \sim (D_1, f_1) \sim \dots \sim (D_m, f_m)$ tales que:

- (i) Cada D_j es una bola abierta en $\overline{\mathbb{C}}$, tal que $a \in D_1 \subset D$.
- (ii) Existe una subdivisión $0 = s_0 < s_1 \dots < s_m = 1$ de $[0, 1]$ tal que $\gamma([s_{j-1}, s_j]) \subset D_j$ para $j = 1, \dots, m$.

Si además, todos los elementos de función $\{(D_j, f_j)\}_{j=0}^m$ son analíticos llamaremos a esto prolongación analítica de (D, f) a lo largo del camino γ .

Al último elemento, (D_m, f_m) , de la secuencia de prolongaciones lo llamaremos una prolongación meromorfa (respectivamente, analítica) final de (D, f) a lo largo del camino γ .

Nota 1.10

En ocasiones se puede realizar un cierto abuso del lenguaje, y cuando tenemos una función f meromorfa en una región D , donde el elemento (D, f) es prolongable meromorfa a lo largo de cierto camino γ , se podrá llegar a decir que f es prolongable a lo largo de γ .

Notación 1.11

Cuando γ es un camino y (D, f) es prolongable a lo largo del mismo, denotaremos como (D_γ, f_γ) a la prolongación meromorfa final. Se podrá observar también a lo largo del texto que si se realiza el abuso del lenguaje descrito en la Nota 1.10, entonces se podrá encontrar la expresión f_γ para referirse a la prolongación final de f a lo largo de γ . Este caso suele encontrarse cuando el camino es un lazo y las regiones de inicio y final son la misma, es decir, $D = D_\gamma$.

Esta definición formaliza la idea de ir recubriendo un camino mediante prolongaciones directas de un elemento de función. El siguiente teorema es comúnmente conocido y su prueba puede encontrarse en cualquier libro clásico de variable compleja como [Co] o [AsN], incluso en [Ba] se da una demostración del mismo.

Teorema 1.12 (Monodromía)

Sean G un dominio de $\overline{\mathbb{C}}$ y D una región de $\overline{\mathbb{C}}$, tales que $D \subset G$ y (D, f) es un elemento de función analítica (respectivamente, meromorfa) que admite prolongación analítica (respectivamente, meromorfa) a lo largo de todo camino con soporte en G . Si γ_1 y γ_2 , tal que

$$a_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \quad \text{y} \quad a_1 = \gamma_1(1) = \gamma_2(1),$$

son dos caminos homótopos contenidos en G . Entonces, para cada (D_1, f_1) y (D_2, f_2) prolongaciones analíticas (respectivamente, meromorfa) finales de (D, f) a lo largo de los caminos γ_1 y γ_2 respectivamente, $f_1(a_1) = f_2(a_2)$.

Como consecuencia directa tenemos una caracterización más de las regiones.

Corolario 1.13

Un dominio G de $\overline{\mathbb{C}}$, es una región si y solo si para toda región $D \subset G$ y todo (D, f) elemento de función analítica (respectivamente, meromorfa) que admite prolongación analítica (respectivamente, meromorfa) a lo largo de todo camino con soporte en G , existe una única función g analítica (respectivamente, meromorfa) en G tal que $g(z) = f(z)$, para todo $z \in D$.

Demostración: Una de las implicaciones es inmediata a partir del Teorema 1.12, la otra aunque sencilla no es tan intuitiva.

Sea $f \in \mathcal{H}(G)$ que no se anula en G , entonces tomamos $D \subset G$ una región. Como D es simplemente conexo, existirá $g \in \mathcal{H}(D)$ tal que

$$f(z) = \exp(g(z)), \quad \forall z \in D.$$

Es sencillo ver que (D, g) es prolongable analíticamente a lo largo de cualquier camino con soporte en G y que cada prolongación es un logaritmo de f en su dominio. Entonces existe una única función $h \in \mathcal{H}(G)$ tal que $h(z) = g(z)$, para todo $z \in D$, por tanto esta función verifica

$$f(z) = \exp(h(z)), \quad \forall z \in G.$$

En consecuencia hemos probado que toda función analítica que no se anula en G admite un logaritmo, esta propiedad caracteriza las regiones¹, y por lo tanto hemos concluido. ■

Gracias a los resultados previos podremos dar las siguientes definiciones de manera consistente.

Definición 1.14

Sean (D, f) , (E, g) dos elementos de función prolongables a lo largo de todo camino contenido en un dominio G .

- Diremos que están relacionados $(D, f) \sim^* (E, g)$ si existe un camino γ contenido en G tal que (E, g) es prolongación analítica final de (D, f) por γ .

¹Se recomienda al lector observar la lista de definiciones equivalentes para regiones dada en [AsN].

- Esta relación es efectivamente una relación de equivalencia, por lo tanto, a la clase de equivalencia de (D, f) en G la denotamos como $[f]_G$ o simplemente f , si no hay lugar a confusión. A estas clases $[f]$ las llamaremos función generalizada o multivaluada generalizada.

Volviendo a insistir en el contexto histórico, otro estudiante de Weierstrass que hizo grandes contribuciones al campo del análisis fue H. A. Schwarz (1848- 1921). Schwarz estaba interesado principalmente en las cuestiones de transformaciones y estaba claramente influenciado por la crítica de Weierstrass al uso que Riemann hacía del principio de Dirichlet.

Weierstrass afirmaba que la prueba dada por Riemann del teorema de la aplicación conforme era inaceptable, Schwarz acto seguido buscó condiciones para las cuales el teorema sería válido. Esta búsqueda le llevó a demostrar el conocido *principio de reflexión*, con el cual consiguió crear numerosas aplicaciones específicas; por ejemplo, podría aplicar una región en un círculo, pero no fue capaz de dar una generalización completa.

Como hemos comentado antes, en la práctica no siempre es posible prolongar analíticamente un elemento de función (D, f) a lo largo de caminos. En las siguientes líneas enunciaremos el principio de reflexión, pero antes de nada, definiremos una serie de conjuntos que serán los utilizados en las hipótesis del resultado.

Definición 1.15

Sea $G \subset \mathbb{C}$ diremos que es simétrico respecto del eje real si para cada $z \in G$ entonces $\bar{z} \in G$. Es decir, G es invariante por la conjugación.

Generalmente, si $G \subset \mathbb{C}$ denotaremos por

$$G^+ = \{z \in G : \Im(z) > 0\}$$

$$G^0 = \{z \in G : \Im(z) = 0\}$$

$$G^- = \{z \in G : \Im(z) < 0\}$$

Con esta notación que hemos descrito procedemos al enunciado del teorema, una prueba del mismo puede encontrarse en [Co].

Teorema 1.16 (Principio de Reflexión)

Sea G un dominio simétrico respecto al eje real y $f \in \mathcal{C}(G^+ \cup G^0) \cap \mathcal{H}(G^+)$ tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in G^0$. Entonces existe una única función $g \in \mathcal{H}(G)$, tal que

$$g|_{G^+ \cup G^0} = f.$$

1.2. Funciones algebraicas

De forma general, cuando tenemos dos cuerpos K y L tal que L/K es una extensión de cuerpos, se dice que $\alpha \in L$ es un elemento algebraico sobre K si existe un polinomio P con coeficientes en K tal que $P(\alpha) = 0$.

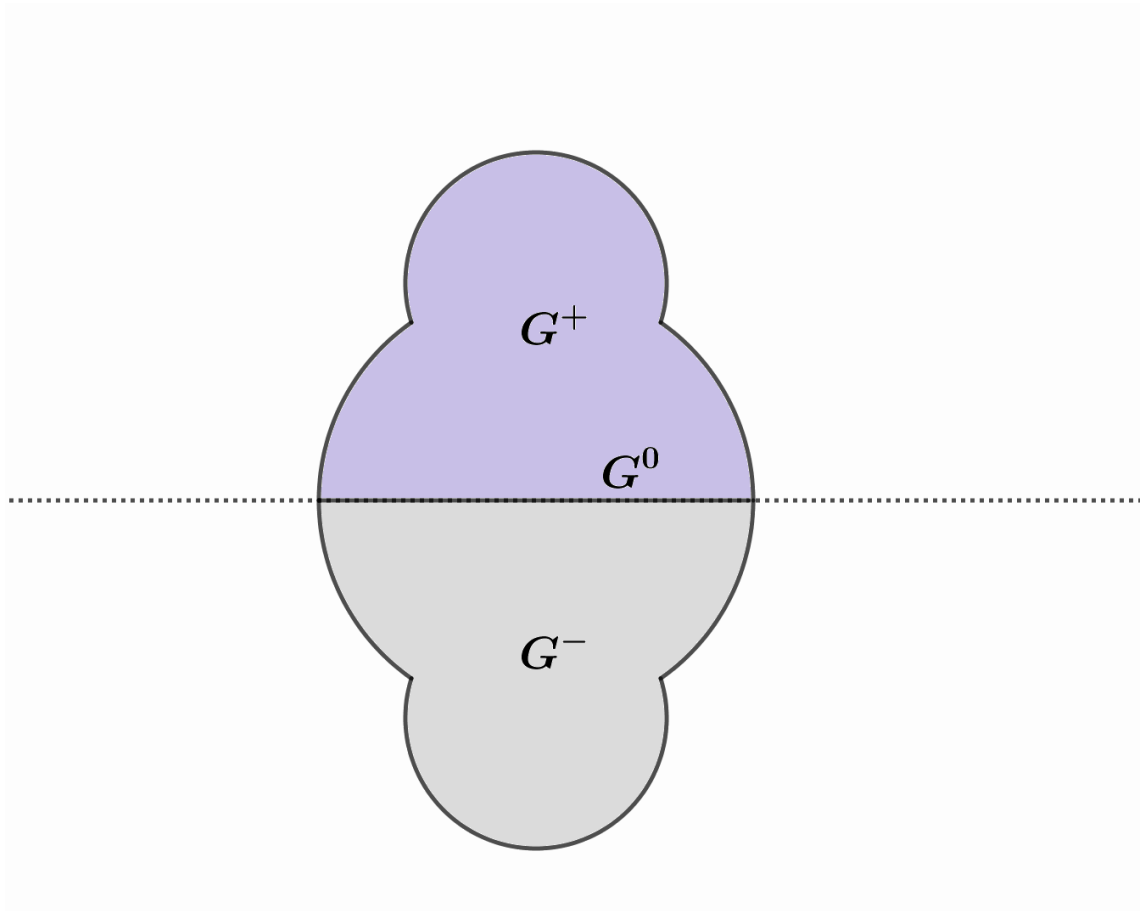


Figura 1.1: Ejemplo de división de conjunto simétrico en parte imaginaria positiva, negativa y nula.

De forma análoga definiremos las funciones algebraicas en el dominio complejo. Sea D una región de \mathbb{C} , consideramos el conjunto $\mathcal{H}(D)$, con la notación clásica se define $\mathcal{H}(D)[w]$ como el conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathcal{H}(D)$, es decir,

$$\mathcal{H}(D)[w] = \{a_n w^n + \dots + a_1 w + a_0 : a_j \in \mathcal{H}(D) \forall j = 0, 1, \dots, n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

De forma análoga podemos definir el conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathcal{M}(D)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}(D)[w] = \{a_n w^n + \dots + a_1 w + a_0 : a_j \in \mathcal{M}(D) \forall j = 0, 1, \dots, n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Resulta sencillo observar que $\mathcal{H}(D) \subset \mathcal{M}(D)$, ya que toda función holomorfa es en particular meromorfa. También es claro que los cocientes de funciones holomorfas son funciones meromorfas, pero podremos afirmar más aún, lo veremos en este resultado.

Lema 1.17

Sea D un dominio de \mathbb{C} , $f \in \mathcal{M}(D)$ si y solo si existen $h, g \in \mathcal{H}(D)$ tales que $f = g/h$.

En consecuencia $\mathcal{M}(D)$ es el cuerpo de fracciones del dominio de integridad $\mathcal{H}(D)$.

Demostración : Consideramos $f \in \mathcal{M}(D)$ y

$$A_f = \{(z, m_z) : z \in D, z \text{ es un polo de } f \text{ de multiplicidad } m_z\}.$$

En virtud del teorema de factorización de Weierstrass² existe $h \in \mathcal{H}(D)$ cuyos ceros, junto con la multiplicidad son justamente el conjunto A_f .

Se verifica que $g = fh \in \mathcal{H}(D)$ y por lo tanto f es cociente de dos funciones de $\mathcal{H}(D)$. ■

Para el caso en el cual $D = \overline{\mathbb{C}}$ es necesario modificar la prueba, pero mediante argumentos más elementales se puede llegar a un resultado equivalente, el cual afirma que $\mathbb{C}(z) = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$.

Teorema 1.18

Una función $f \in \mathbb{C}(z)$ si y solamente si $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$.

Demostración : Si $f \in \mathbb{C}(z)$, entonces $f = p/q$, con $p, q \in \mathbb{C}[z]$, esto implica $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$. Ya que, si denotamos por $Z = \{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\}$, entonces f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus Z$ y en Z tendrá singularidades polares.

Por otro lado, si $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$, entonces, por la compacidad de $\overline{\mathbb{C}}$, el número de polos de f es finito. Denotamos por $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$ a los polos finitos de f , con sus multiplicidades m_1, \dots, m_n . Entonces, por definición de polo, la función

$$g(z) = (z - \beta_1)^{m_1} \dots (z - \beta_n)^{m_n} f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

es entera. Por tanto tendrá desarrollo de Taylor en 0, con radio de convergencia infinito, es decir

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$, entonces tiene a lo sumo un polo en infinito, lo cual equivale a que $f(1/z)$ tiene a lo sumo un polo en 0. Entonces $g(1/z)$ tiene a lo sumo polo en 0, pero sabemos que

$$g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}.$$

Esto implica que $g \in \mathbb{C}[z]$, y por tanto, $f \in \mathbb{C}(z)$. ■

Notación 1.19

Si $p \in \mathbb{C}[z]$ es un polinomio complejo, denotaremos por $\text{gra}(p)$ a su grado.

Definición 1.20

Si $f = p/q \in \mathbb{C}(z)$ es una función racional con p, q coprimos, llamaremos grado u orden de f al valor

$$\text{gra}(f) = \max(\text{gra}(p), \text{gra}(q)). \tag{1.1}$$

²En particular al resultado al cual nos referimos no es el teorema de factorización de Weierstrass, sino una consecuencia del mismo, podemos encontrarlo en [AsN], concretamente el Teorema 6.2.6.

Lema 1.21

Si $f \in \mathbb{C}(z)$ tiene grado $d > 0$ entonces toma cada valor $c \in \overline{\mathbb{C}}$, incluyendo la multiplicidad, exactamente d veces.

Demostración: Sea $f = p/q \in \mathbb{C}(z)$ con grado $d > 0$, supongamos en primer lugar que $c = \infty$. Para cada $z \in \mathbb{C}$, como los polinomios son coprimos, $f(z) = \infty$ si y solo si $q(z) = 0$. Por el teorema fundamental del álgebra, esta ecuación tiene $\text{gra}(q)$ soluciones, incluyendo la multiplicidad. Si $\text{gra}(p) \leq \text{gra}(q)$, estos son los únicos polos posibles de f . Si no f tiene un polo adicional de orden $\text{gra}(p) - \text{gra}(q)$ en ∞ . En cualquier caso, el número de polos (soluciones de $f(z) = \infty$) contando con las multiplicidades, de f es exactamente d . Si $c \in \mathbb{C}$, como $\text{gra}(f) > 0$ se deduce que f no es constante, por lo que la función racional

$$g = \frac{1}{f - c} = \frac{q}{p - cq},$$

tiene ceros justamente en los puntos donde f vale c . Por el argumento anterior existen $\text{gra}(g)$ puntos donde f vale c , contando las multiplicidades. Como p y q son coprimos, también lo serán $p - cq$ y q , por lo tanto

$$\text{gra}(f) = \text{máx}(\text{gra}(p - cq), \text{gra}(q)) = \text{máx}(\text{gra}(p), \text{gra}(q)) = d. \quad \blacksquare$$

Definición 1.22

Sea D una región de \mathbb{C} , una función f es algebraica sobre $\mathcal{M}(D)$ si existe $P \in \mathcal{M}(D)[w]$ polinomio de coeficientes meromorfs en D tal que

$$0 = P(f) = a_n(z)(f)^n + a_{n-1}(z)(f)^{n-1} + \cdots + a_0(z). \quad (1.2)$$

Cuando además los coeficientes de P son holomorfs en D entonces diremos que f es algebraica sobre $\mathcal{H}(D)$.

Lema 1.23

Si D es una región de \mathbb{C} , una función f es algebraica sobre $\mathcal{M}(D)$ si y solo si es algebraica sobre $\mathcal{H}(D)$.

Demostración: Como las funciones holomorfs son en particular meromorfs una de las implicaciones es clara, demostremos la otra.

Sea f algebraica sobre $\mathcal{M}(D)$, en particular existe $P \in \mathcal{M}(D)[w]$ de la forma

$$P(w) = a_n(w)^n + a_{n-1}(w)^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Aplicamos el Teorema 1.17 a cada uno de los coeficientes a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, con lo que serán cociente de dos funciones holomorfs en D . Es decir existen b_k, c_k holomorfs en D tales que

$$a_k = \frac{b_k}{c_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Tomando el polinomio $Q = c_0 c_1 \cdots c_n P$, verificará que $Q(f) = 0$ y sus coeficientes son holomorfs en D . ■

1.3. Geometría de $\overline{\mathbb{C}}$

En la Sección 3.5, nos introduciremos en el estudio de triángulos esféricos, los cuales serán definidos en su debido momento, se puede anticipar que son subconjuntos de $\overline{\mathbb{C}}$. En estas líneas nos centraremos en dar una estructura geométrica a $\overline{\mathbb{C}}$, esta será fundamental para la demostración del Lema 3.79.

Si bien $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ es la compactificación de Alexandroff de \mathbb{C} , en esta sección estudiaremos una posible métrica para este conjunto, la cual generará la misma topología. Para ello si $z, w \in \mathbb{C}$ definimos

$$d(z, w) = \frac{2|z - w|}{(1 + |z|^2)^{1/2}(1 + |w|^2)^{1/2}} \quad (1.3)$$

Si uno de los puntos fuera ∞

$$d(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}. \quad (1.4)$$

Enunciamos el siguiente resultado cuya prueba no realizaremos.

Lema 1.24

Sea $d : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida en $\overline{\mathbb{C}}$ por las fórmulas (1.3) y (1.4). Entonces $(\overline{\mathbb{C}}, d)$ es un espacio métrico el cual genera en \mathbb{C} la misma topología que la inducida por \mathbb{C} .

Estudiaremos un tipo de funciones meromorfas, las cuales son biyectivas en $\overline{\mathbb{C}}$.

Definición 1.25

Una transformación de Möbius es una aplicación $T \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - cb = 1. \quad (1.5)$$

Estas aplicaciones son en particular biyecciones de $\overline{\mathbb{C}}$, un tipo particular de estas son los llamados giros, los cuales caracterizaremos a continuación.

Definición 1.26

Una transformación de Möbius es un giro si

$$T(z) = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (1.6)$$

Estas aplicaciones pueden ser caracterizadas de otra manera:

Lema 1.27

Una transformación de Möbius T es un giro si y solo si es una isometría con respecto a la métrica d . Es decir,

$$d(T(z), T(w)) = d(z, w), \forall z, w \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Demostración: Sea T una transformación de Möbius arbitraria, tomamos $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $T(z), T(w) \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} d(T(z), T(w)) &= \frac{2 \left| \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} \right|}{(1 + \left| \frac{az+b}{cz+d} \right|^2)^{1/2} (1 + \left| \frac{aw+b}{cw+d} \right|^2)^{1/2}} \\ &= \frac{2|(az+b)(cw+d) - (aw+b)(cz+d)|}{(|cz+d|^2 + |az+b|^2)^{1/2} (|cw+d|^2 + |aw+b|^2)^{1/2}} \\ &= \frac{2|z-w|}{(|cz+d|^2 + |az+b|^2)^{1/2} (|cw+d|^2 + |aw+b|^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, para que T sea isometría, se ha de verificar que

$$|cz+d|^2 + |az+b|^2 = 1 + |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{tal que } T(z) \in \mathbb{C}. \quad (1.7)$$

Lo cual es justamente equivalente a que

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 1 \\ |d|^2 + |c|^2 = 1 \\ \overline{a}b + c\overline{d} = 0 \end{cases}$$

Estas condiciones, añadiendo que $ad - cb = 1$, nos llevan a que $d = \overline{a}$, $c = -\overline{b}$, con lo que T es un giro.

En cuanto a la otra implicación, los cálculos anteriores nos sirven y podemos afirmar que, si T es un giro, para todo $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $T(z), T(w) \in \mathbb{C}$, se tiene la isometría buscada. Falta probar el resultado en el punto en el que la imagen es infinita, procedamos:

Si $T(w) = \infty$ entonces necesariamente o bien $w = \overline{a}/\overline{b}$, o $w = \infty$. Si $w = \infty$, entonces $T(z) = \lambda z$, tal que $|\lambda| = 1$, por tanto tendremos:

$$d(T(z), \infty) = \frac{2}{(1 + |\lambda z|^2)^{1/2}} = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}} = d(z, \infty).$$

Luego habríamos concluido. Si $w = \overline{a}/\overline{b}$, entonces $T(z) = \lambda z$, tal que $|\lambda| = 1$, por tanto tendremos:

$$\begin{aligned} d(T(z), \infty) &= \frac{2}{(1 + \left| \frac{az+b}{-\overline{b}z+\overline{a}} \right|^2)^{1/2}} = \frac{2|-\overline{b}z+\overline{a}|}{(-\overline{b}z+\overline{a} + |az+b|^2)^{1/2}} \\ &= \frac{2|w-z|}{|b|(|-\overline{b}z+\overline{a}|^2 + |az+b|^2)^{1/2}} = \frac{2|w-z|}{|b|(1+|z|^2)^{1/2}} \\ &= \frac{2|w-z|}{(1+|w|^2)^{1/2}(1+|z|^2)^{1/2}} = d(z, w). \end{aligned}$$

Con esto se concluye la demostración. ■

Definición 1.28

Un automorfismo en la esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$ es una aplicación meromorfa biyectiva $T : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. Denotaremos el conjunto de automorfismos en $\bar{\mathbb{C}}$ como $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$.

Teorema 1.29

$\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ está formado por las Transformaciones de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc \neq 0. \quad (1.8)$$

Demostración : Por el Lema 1.18, todo elemento T de $\text{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ será cociente de dos polinomios con coeficientes complejos, $T = p/q$. Como es biyectiva, en virtud del Lema 1.21, el grado debe de ser uno y por lo tanto el grado de p es igual al de q igual a 1. ■

Este capítulo está dedicado principalmente al estudio detallado de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes holomorfos. Daremos respuesta a las preguntas de existencia y unicidad de soluciones en diferentes espacios y nos centraremos en un tipo de ecuaciones, las Fuchsianas.

2.1. Problema de Cauchy en Regiones

Comenzaremos presentando el problema de forma general, llamaremos *problema de Cauchy* al problema siguiente:

Problema 2.1 (**PROBLEMA DE CAUCHY**)

Sean $D \subset \mathbb{C}$ un dominio, $z_0 \in D$, $n \in \mathbb{N}$, y $a_k \in \mathcal{H}(D)$, para $k = 1, 2, \dots, n$, si $\alpha_k \in \mathbb{C}$ para $k = 0, 1, \dots, n - 1$, buscamos $y \in \mathcal{H}(D)$ tal que:

$$\begin{cases} y^{(n)}(z) + a_1(z) y^{(n-1)}(z) + \dots + a_n(z) y(z) = 0, & z \in D. \\ y^{(k)}(z_0) = \alpha_k, & k = 0, 1, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Para realizar el estudio del problema comenzaremos analizando el caso más sencillo, cuando el dominio es una bola abierta en torno a 0. En este caso tendremos garantizada la existencia y unicidad de soluciones

Teorema 2.2

Consideramos el Problema 2.1, si $D = B(0, r)$ y $z_0 = 0$, entonces existe una única solución $y \in \mathcal{H}(D)$.

Demostración: Busquemos primero una solución de (2.1) en forma de serie formal. Supongamos que

$$a_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^j z^k. \quad (2.2)$$

Buscamos una solución

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k. \quad (2.3)$$

Introduciendo la serie en la ecuación (2.1) obtenemos que formalmente, haciendo el producto de Cauchy para series, se ha de verificar la relación

$$y_{n+k} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k a_{k-l}^{n-m} y_{l+m} \frac{(l+m) \cdots (l+1)}{(n+k) \cdots (n+1)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

$$y_k = \frac{\alpha_k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.5)$$

Como las series (2.2) son convergentes con radio r , entonces para cada $K > 1/r$ existe c tal que $M_k = \sup_{j=1 \dots n} |a_k^j| \leq cK^k$.

Consideramos $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida del siguiente modo

$$c_0 = \sup\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$$

$$c_k = c \sum_{l=0}^k K^{k-l} c_l.$$

La función $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ coincide con el desarrollo en serie de $c_0(1 - Kz)^{-c/K}$, que es holomorfa en $B(0, 1/K)$. Si denotamos por $\mathbf{y}_k = [y_k, \dots, y_{n+k-1}]^t$, entonces demostramos por inducción que $\|\mathbf{y}_k\|_{\infty} \leq c_k$.

Para ello reformulamos la relación de recurrencia (2.4) en modo matricial. Es decir,

$$\begin{pmatrix} y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+n} \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^k A_{k-l} \begin{pmatrix} y_l \\ \vdots \\ y_{n+l-1} \end{pmatrix},$$

siendo

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0^n \frac{1}{(n+k) \cdots (n+1)} & a_0^{n-1} \frac{(k+1)}{(n+k) \cdots (n+1)} & \cdots & a_0^1 \frac{(k+n-1) \cdots (k+1)}{(n+k) \cdots (n+1)} \end{pmatrix}$$

$$A_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_s^n \frac{1}{(n+k) \cdots (n+1)} & a_s^{n-1} \frac{(k-s+1)}{(n+k) \cdots (n+1)} & \cdots & a_s^1 \frac{(k-s+n-1) \cdots (k-s+1)}{(n+k) \cdots (n+1)} \end{pmatrix}, \quad s > 0.$$

En virtud de la desigualdad triangular y aplicando hipótesis de inducción obtenemos

$$\|\mathbf{y}_{k+1}\|_{\infty} \leq \sum_{l=0}^k \|A_{k-l}\|_{\infty} \|\mathbf{y}_l\|_{\infty} \leq c \sum_{l=0}^k K^{k-l} \|\mathbf{y}_l\|_{\infty} \leq c \sum_{l=0}^k K^{k-l} c_l = c_{k+1}.$$

Por lo tanto $|y_k| \leq c_k$, como $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ es convergente en $B(0, 1/K)$, entonces $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k$ definirá una función holomorfa en $B(0, 1/K)$, para todo $1/K < r$. Por tanto y es una función holomorfa en $B(0, r)$ que cumple las hipótesis del teorema.

En cuanto a la unicidad, si existiera otra solución $w \in \mathcal{H}(B(0, r))$ en particular admitiría desarrollo en forma de serie de potencias en 0, este verificará las relaciones (2.4) y (2.5). Como la representación en serie de potencias de una función holomorfa es única, se deduce que $w = y$. ■

De forma natural, mediante traslaciones, obtenemos como consecuencia directa la existencia y unicidad en bolas abiertas.

Corolario 2.3

Consideramos el Problema 2.1, si $D = B(z_0, r)$, entonces existe una única solución $y \in \mathcal{H}(D)$.

Demostración : Consideramos las funciones $b_i(z) = a_i(z - z_0)$, holomorfas en $B(0, r)$. Sea el problema de Cauchy siguiente:

$$\begin{cases} y^{(n)}(z) + b_1(z) y^{(n-1)}(z) + \dots + b_n(z) y(z) = 0, & z \in B(0, r). \\ y^{(k)}(0) = \alpha_k, & k = 0, 1, \dots, n - 1. \end{cases}$$

En virtud del teorema 2.2, existirá una solución única \tilde{y} , holomorfa en G , tal que $\tilde{y}^{(k)}(0) = \alpha_k$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Entonces $y(z) = \tilde{y}(z + z_0)$ es holomorfa en D y solución del Problema 2.1 en $B(z_0, r)$, por tanto tenemos garantizada la existencia. En cuanto a la unicidad, si existiera otra solución x del Problema 2.1 en $B(z_0, r)$, entonces $\tilde{x}(z) = x(z - z_0)$ sería solución del Problema 2.1 en $B(0, r)$, con lo cual $\tilde{x} = \tilde{y}$ y por tanto $x = y$. ■

Siguiendo con el proceso de extensión del dominio donde tenemos garantizado que el Problema 2.1 tiene solución única, el siguiente paso natural es extender el resultado a una región D . Para ello lo único que necesitaremos es que cada elemento de función $(B(0, r), y)$, donde y es solución del Problema 2.1 en $B(0, r)$, admita prolongación analítica a lo largo de todo camino contenido en D .

Teorema 2.4

Si D es una región entonces el Problema 2.1 en D admite una solución única.

Demostración : Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z_0 = 0$. Como D es abierto y $0 \in D$ entonces existirá $B_0 = B(0, r) \subset D$. En virtud del corolario 2.3 existirá una solución única $y \in \mathcal{H}(B_0)$. Si probamos que el elemento (B_0, y) admite prolongación analítica a lo largo de cualquier camino contenido en D , entonces, aplicando el corolario 1.13, concluimos lo pedido.

Para ello, sea γ un camino de extremos z_0 y b cuyo soporte está contenido en D . Como $\gamma([0, 1])$ es compacto, existirá una sucesión $(B_i)_{i=0}^N$ de bolas $B_i = B(\gamma(t_i), r_i)$ tales que verifican:

- $t_0 = 0, t_N = 1$.
- $\gamma([0, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^N B_i \subset D$.
- $\gamma(0) \in B_1, b = \gamma(1) \in B_{N-1}$ y $\gamma(t_i) \in B_{i+1} \cap B_{i-1}$ para $i = 1, \dots, N - 1$.
- $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset B_i, i = 1, 2, \dots, N$.

El procedimiento de prolongación es el siguiente, en primer lugar (B_0, y) verificará que es solución de (2.1) con $y^{(k)}(0) = \alpha_k, k = 0, 1, \dots, n - 1$. Como $\gamma(t_1) \in B_0$, existirá una única función holomorfa $y_1 \in \mathcal{H}(B_1)$ tal que

$$y_1^{(k)}(\gamma(t_1)) = y^{(k)}(\gamma(t_1)), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

De forma análoga, como $\gamma(t_2) \in B_1$, existirá una única función holomorfa $y_2 \in \mathcal{H}(B_2)$ tal que

$$y_2^{(k)}(\gamma(t_2)) = y_1^{(k)}(\gamma(t_2)), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Recurrentemente creamos $(B_i, y_i)_{i=0}^N$ una sucesión de gérmenes, falta aún mostrar que $(B_0, y) \sim (B_1, y_1) \sim \dots \sim (B_N, y_N)$. Lo probaremos para el primero de los casos, para el resto es análogo. Sea $B(a, \epsilon) \subset B_0 \cap B_1$ entonces existirá una única función holomorfa $x \in \mathcal{H}(B(a, \epsilon))$ tal que

$$x^{(k)}(a) = y^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Tanto y_1 como y son soluciones del Problema 2.1 en $B(a, \epsilon)$, entonces $x(z) = y_1(z) = y(z)$, para todo $z \in B(a, \epsilon)$. En virtud del principio de identidad, se concluye que (B_1, y_1) es prolongación analítica directa de (B_0, y) . ■

Nota 2.5

La demostración dada para el Teorema 2.4 ha sido realizada de la forma habitual que se puede encontrar en las bibliografías¹. Es la forma más conveniente, ya que está intrínseco en la propia demostración que un elemento de función solución del problema de Cauchy puede prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier camino. En las siguientes líneas daremos una demostración alternativa, bastante más sencilla y basada en el teorema de representación conforme de Riemann.

Demostración: Sean D una región, y $z_0 \in D$ el punto donde se establecen las condiciones iniciales del problema. En virtud del teorema de representación conforme de Riemann, existe una aplicación

$$\phi : D \rightarrow B(0, 1),$$

biholomorfa, es decir, holomorfa biyectiva y de inversa también holomorfa, y tal que $\phi(z_0) = 0$. Sea $y \in \mathcal{H}(D)$, si denotamos por $\psi = \phi^{-1}$, entonces $\tilde{y} = y \circ \psi \in \mathcal{H}(B(0, 1))$. Derivando sucesivamente obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= y'(\psi)\psi', \\ \tilde{y}^{(n)} &= \sum_{\substack{k=0, 1, \dots, n \\ k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+2k_2+\dots+nk_n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} y^{(k)}(\psi) \left(\frac{\psi'}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\psi^{(n)}}{n!}\right)^{k_n}. \end{aligned}$$

¹La demostración del Teorema 2.4, realizada mediante el Teorema de Monodromía, se puede encontrar en [Ba].

Supongamos que y es solución del Problema 2.1 en D , entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{y}^{(n)} &= \sum_{\substack{k=0,1,\dots,n-1 \\ k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+2k_2+\dots+nk_n}} \frac{n!}{k_1!\dots k_n!} y^{(k)}(\psi) \left(\frac{\psi'}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\psi^{(n)}}{n!}\right)^{k_n} + y^{(n)}(\psi), \\
&= \sum_{\substack{k=0,1,\dots,n-1 \\ k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+2k_2+\dots+nk_n}} \frac{n!}{k_1!\dots k_n!} y^{(k)}(\psi) \left[\left(\frac{\psi'}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\psi^{(n)}}{n!}\right)^{k_n} - a_{n-k}(\psi) \right], \\
&= \sum_{\substack{k=0,1,\dots,n-1 \\ k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+2k_2+\dots+nk_n}} \frac{n!}{k_1!\dots k_n!} \left\{ \left(\frac{\psi'}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\psi^{(n)}}{n!}\right)^{k_n} - a_{n-k}(\psi) \right\} \times \\
&\quad \times \left[\sum_{\substack{j=0,1,\dots,k \\ j=j_1+\dots+j_n \\ j=j_1+2j_2+\dots+kj_k}} \frac{k!}{j_1!\dots j_n!} \tilde{y}^{(k)} \left(\frac{\phi'(\psi)}{1!}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{\phi^{(k)}(\psi)}{k!}\right)^{j_n} \right].
\end{aligned}$$

En consecuencia se deduce que existirán $\{b_k\}_{k=0}^{n-1} \subset \mathcal{H}(B(0,1))$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ únicos, tales que

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{y}^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{y}^{(k)} b_{n-k} \\
\tilde{y}^{(k)} &= \beta_k, \quad k=0,1,\dots,n-1.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Por tanto \tilde{y} es la única solución del Problema 2.1 en $B(0,1)$ con las ecuaciones relativas a (2.6). Con lo que en caso de existir $y \in \mathcal{H}(D)$, solución del Problema 2.1, $y = \tilde{y} \circ \psi$ y será única.

De forma análoga se deduce la existencia, ya que existirá \tilde{y} solución del Problema 2.1 en $B(0,1)$, con las ecuaciones relativas a (2.6). Un sencillo cálculo muestra que $y = \tilde{y} \circ \psi \in \mathcal{H}(D)$ es solución del Problema 2.1. ■

2.2. Solución Fundamental

Una vez estudiada la existencia de soluciones del Problema de Cauchy en las regiones es natural preguntarse qué le ocurrirá a la solución si variamos los parámetros iniciales. En esta sección daremos respuesta a esta pregunta, veremos que las soluciones tienen una estructura de espacio vectorial de dimensión n y daremos un método para obtener una base.

Pero primero tenemos que explicar lo que conocemos por una solución en este contexto más general.

Definición 2.6

Sea D una región de \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}$ y $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H}(D)$. Diremos que el elemento (D, y) es un elemento solución de la ecuación diferencial de orden n , en D y con coeficientes $\{a_k\}_{k=1}^n$ si

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (\text{ODE}_n)$$

Denotaremos por $\tilde{\mathcal{S}}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ al conjunto de elementos soluciones holomorfas. Si $(D, y) \in \tilde{\mathcal{S}}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ diremos que y es solución holomorfa de la ecuación diferencial de orden n , en D y con coeficientes $\{a_k\}_{k=1}^n$. Denotaremos por $\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n) \subset \mathcal{H}(D)$ al conjunto de soluciones holomorfas.

Se puede observar que ambos conjuntos de soluciones están en biyección, y que la estructura que tenga uno puede extender de forma natural al otro.

Sabemos que si D es una región de \mathbb{C} , entonces $\mathcal{H}(D)$ junto con las operaciones de producto por escalar y suma puntual es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Lema 2.7

$\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}(D)$ con las operaciones de producto por escalar y suma puntual.

Demostración : Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n,a,D} : \mathcal{H}(D) &\rightarrow \mathcal{H}(D) \\ y &\mapsto y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y, \end{aligned} \quad (2.7)$$

la cual es claramente lineal, por serlo la derivada y el producto $f \mapsto a_k f$. Entonces

$$\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n) = \ker(\mathcal{L}_{n,a,D})$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}(D)$. ■

Buscamos ahora una base del espacio de soluciones, para ello sean

$$\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n),$$

consideramos la matriz

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Llamaremos *determinante Wronskiano* o simplemente *Wronskiano* a la función

$$W(y_1, \dots, y_n) = \det(Y). \quad (2.9)$$

El siguiente lema garantiza que $W(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{H}(D)$ y nos da la regla para derivarlo.

Lema 2.8 (Derivación del determinante)

Sea D una región de \mathbb{C} y $f_{k,m} \in \mathcal{H}(D)$, para $m, k = 1, \dots, n$. Entonces la función

$$F = \det \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

es holomorfa en D . Además

$$F' = \det \begin{pmatrix} f'_{1,1} & f'_{1,2} & \cdots & f'_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f'_{2,1} & f'_{2,2} & \cdots & f'_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix} \\ + \cdots + \det \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{n,1} & f'_{n,2} & \cdots & f'_{n,n}(z) \end{pmatrix}.$$

Análogamente sucede por columnas.

El siguiente resultado, conocido como Identidad de Wronski, afirma que $W(y_1, \dots, y_n)$ se anula en un punto si y solo si se anula en todos. Esto es útil para observar la independencia de los elementos de $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ a partir de lo que sucede en un solo punto $z_0 \in D$.

Esta última condición no es difícil de verificar en el caso de un problema de Cauchy, ya que en las propias condiciones iniciales propuestas tenemos la respuesta a la independencia de las soluciones.

Teorema 2.9 (Identidad de Wronski)

Sea D una región de \mathbb{C} y $z_0 \in D$, consideramos

$$\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n).$$

Si $\int a_1 \in \mathcal{H}(D)$ es una primitiva de a_1 , entonces existirá $C \in \mathbb{C}$ tal que el Wronskiano verifica

$$W(y_1, \dots, y_n) = C \exp \left(- \int a_1 \right). \quad (2.11)$$

Como consecuencia, $W(y_1, \dots, y_n)$ o bien es idénticamente nulo en D o bien no se anula nunca. Además si $\int a_1 \in \mathcal{H}(D)$ es tal que se anula en z_0 , entonces $C = W(y_1, \dots, y_n)(z_0)$.

Demostración : Haciendo uso del Lema 2.8 obtenemos que

$$\begin{aligned}
W(y_1, \dots, y_n)' &= \det \begin{pmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \\
&+ \cdots + \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 y_1^{(n-1)} & -a_1 y_2^{(n-1)} & \cdots & -a_1 y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = -a_1 W(y_1, \dots, y_n).
\end{aligned}$$

Si $g = \int a_1$ es una primitiva de a_1 , la función $w = \{W(y_1, \dots, y_n)(z_0) \exp(g(z_0))\} \exp(-g)$ verifica la ecuación diferencial $w' = -a_1 w$, y por tanto el problema de Cauchy con $w(z_0) = W(y_1, \dots, y_n)(z_0)$. En virtud de la unicidad del Teorema 2.4, tenemos que $W(y_1, \dots, y_n) = w$. ■

Corolario 2.10

El subespacio vectorial $\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ tiene dimensión n .

Demostración : Sea $z_0 \in D$, consideramos la aplicación siguiente

$$\begin{aligned}
\tau : \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n) &\rightarrow \mathbb{C}^n \\
y &\mapsto (y(z_0), y'(z_0), \dots, y^{(n-1)}(z_0)).
\end{aligned}$$

Por la linealidad de la derivación y de la evaluación en z_0 se tiene que τ es lineal. Veamos que es un isomorfismo de espacios vectoriales. Es sobreyectiva, ya que si tomamos $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ y consideramos el problema (2.1) en z_0 , con condiciones iniciales

$$(y(z_0), y'(z_0), \dots, y^{(n-1)}(z_0)) = \mathbf{v}.$$

Gracias al Teorema 2.4 tenemos garantizada la existencia de una única $y \in \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ tal que $\tau(y) = \mathbf{v}$.

En cuanto a la inyectividad, basta ver que $\ker(\tau) = \{\mathbf{0}\}$. Para ello, si $y \in \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ tal que $\tau(y) = \mathbf{0}$, de nuevo, mediante la unicidad descrita en el Teorema 2.4, obtenemos $y = 0$. ■

2.3. Monodromía

Nos plantearemos una nueva ecuación, en esta situación trabajaremos con funciones meromorfas en una región y veremos las ocasiones en las cuales podemos encontrar soluciones.

Sea G una región de $\overline{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}$ y $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{M}(G)$. Denotamos por

$$\mathfrak{S}_{\{a_k\}_{k=1}^n} = \{P \in G : \text{Existe } k \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tal que } a_k \text{ tiene un polo en } P\}, \quad (2.12)$$

el conjunto de puntos singulares. Como $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{M}(G)$, entonces podremos garantizar que $\mathfrak{S}_{\{a_k\}_{k=1}^n}$ está formado por puntos aislados y que el conjunto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathfrak{S}_{\{a_k\}_{k=1}^n}$ es un dominio, el cual llamaremos *conjunto de puntos regulares*.

Si tomamos $D \subset \Omega$ una región y consideramos $f \in \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ entonces, con el procedimiento mostrado en la primera demostración del Teorema 2.4, se demuestra el siguiente resultado.

Lema 2.11

Sea $D \subset \Omega$, $f \in \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ y γ un camino contenido en Ω , entonces (D, f) admite prolongación analítica a lo largo de γ . Además si $\{(D_j, f_j)\}_{j=0}^m$ es una de ellas, verificará que $f_j \in \mathcal{S}(D_j, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ para todo $j = 0, 1, \dots, m$.

Demostración: Basta repetir el procedimiento del Teorema 2.4 y aplicar el Teorema de Monodromía 1.12 para garantizar la segunda afirmación. ■

Sean $D \subset \Omega$ una región y un punto $P \in \mathfrak{S}_{\{a_k\}_{k=1}^n}$. Si tomamos γ un lazo con soporte en Ω y prolongamos un elemento solución (D, y) a lo largo de γ , esto nos dará otra solución $y_\gamma \in \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$. Con esta notación enunciamos el siguiente resultado:

Teorema 2.12

1. Para cada γ , un lazo con soporte en Ω , la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma : \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n) &\rightarrow \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n) \\ y &\mapsto y_\gamma \end{aligned}$$

es un automorfismo de espacios vectoriales, $\Phi_\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n))$.

2. Si $z_0 \in D$, $\pi_1(\Omega, z_0)$ es el grupo fundamental de Ω en z_0 , entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : \pi_1(\Omega, z_0) &\rightarrow \text{Aut}(\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)) \\ [\gamma] &\mapsto \Phi_\gamma \end{aligned}$$

está bien definida y es un homomorfismo de grupos.

Demostración: Sean $y, Y \in \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ y $a, b \in \mathbb{C}$, prolongamos analíticamente $ay + bY$ a lo largo de γ y consideramos la prolongación final $\Phi_\gamma(ay + bY) = (ay + bY)_\gamma$. Por otro lado, se prueba por inducción sobre el número de prolongaciones analíticas directas, la función $ay_\gamma + bY_\gamma \in \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ es prolongación de $(D, ay + bY)$ a lo largo de γ . En virtud del Lema 2.11 se tiene que $\Phi_\gamma(ay + bY) = (ay + bY)_\gamma = ay_\gamma + bY_\gamma = a\Phi_\gamma(y) + b\Phi_\gamma(Y)$. Probaremos que si γ, β son lazos con extremo z_0 y soporte en Ω entonces $(y_\gamma)_\beta = y_{\gamma*\beta}$. Para ello, si (D, y_γ) es prolongación analítica final de cierta prolongación analítica a lo largo de γ , $\{(D, y_n)\}_{n=0}^m$. Como $(D, (y_\gamma)_\beta)$ es prolongación analítica final de cierta prolongación a lo largo de β , $\{(D, x_n)\}_{n=0}^k$, entonces $\{(D, y_n)\}_{n=0}^m \cup \{(D, x_n)\}_{n=0}^k$ es una prolongación de (D, y) a lo largo de $\gamma * \beta$. Por tanto, por el Lema 2.11, $(D, (y_\gamma)_\beta) = (D, y_{\gamma*\beta})$. Veamos que Φ es biyectiva, como son espacios de dimensión finita, basta ver que $\ker(\Phi_\gamma) = \{0\}$. Sea $\Phi_\gamma(y) = 0$, consideramos el camino γ^{-1} , que es el camino γ recorrido en sentido opuesto, y $\beta = \gamma * \gamma^{-1}$ que es la concatenación de ambos. β es homótopo a un punto, por

tanto $y_\beta = y$. Si $y_\gamma = 0$ entonces $(y_\gamma)_{\gamma^{-1}} = y_\beta = 0$ con lo que $y = 0$. Por tanto hemos demostrado la primera afirmación.

Para la segunda afirmación, sabemos que si γ, β son lazos con extremo z_0 y soporte en Ω , entonces $(y_\gamma)_\beta = y_{\gamma*\beta}$ $(y_\gamma)_\beta = y_{\gamma*\beta}$. Por tanto solo nos falta probar que no depende del representante en el grupo fundamental, pero esto es justo el Teorema de Monodromía 1.12. ■

Definición 2.13

Sea $z_0 \in D$, con la notación del Teorema 2.12, llamaremos grupo de monodromía de $\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ relativo a z_0 en D al subgrupo $\Psi(\pi_1(\Omega, z_0))$ de $\text{Aut}(\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n))$. Lo denotaremos como $\mathfrak{M}(z_0, D, \{a_k\}_{k=1}^n)$ o simplemente \mathfrak{M} si no da lugar a confusión.

Nota 2.14

Como Ω es un dominio, en particular los grupos fundamentales respecto de diferentes puntos son isomorfos, por tanto lo mismo ocurrirá con el grupo de monodromía.

Definición 2.15

Dado V un \mathbb{C} espacio vectorial, se define el grupo $GL(V)$ como el formado por todos los automorfismos en V .

Definición 2.16

Al grupo de las matrices cuadradas e invertibles de dimensión $n \in \mathbb{N}$ con coeficientes en \mathbb{C} lo denotaremos como $GL(n, \mathbb{C})$.

Nota 2.17

Cuando el espacio V es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} de dimensión $n \in \mathbb{N}$ existe un isomorfismo no canónico entre $GL(n, \mathbb{C})$ y $GL(V)$.

En el grupo $GL(V)$ podemos definir la relación de equivalencia proyectiva, es decir, para cada $F, G \in GL(V)$.

$$F \sim_p G \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \mid F = \lambda G. \quad (2.13)$$

Al grupo de las clases de equivalencia proyectiva lo denotaremos como $PGL(V)$.

Como el grupo de monodromía \mathfrak{M} es un subgrupo del grupo de automorfismos de un espacio vectorial de dimensión n , podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.18

Sea $\mathfrak{M}(z_0, D, \{a_k\}_{k=1}^n)$ el grupo de monodromía de $\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ relativo a z_0 en D , llamaremos grupo de monodromía proyectivo de $\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ relativo a z_0 en D , al grupo de las clases de equivalencia proyectivas. Lo denotaremos como $\mathfrak{M}_P(z_0, D, \{a_k\}_{k=1}^n)$ o \mathfrak{M}_P si no da lugar a confusión.

Ahora analizaremos la monodromía \mathfrak{M} como grupo que actúa sobre el conjunto de soluciones $\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$. Para ello comenzamos definiendo el concepto de acción de grupo sobre un conjunto.

Definición 2.19

Una acción de un grupo G sobre un conjunto A es una aplicación

$$\begin{aligned}\phi : G \times A &\rightarrow A \\ (g, a) &\mapsto \phi((g, a)) = ga,\end{aligned}$$

que verifica:

- (a) Para cada $f, g \in G$ $a \in A$ se tiene que $(fg)a = f(ga)$.
- (b) Para cada $a \in A$ se tiene que $1a = a$.

Diremos también que el grupo G actúa sobre el conjunto A .

Teorema 2.20

La aplicación

$$\begin{aligned}\tau : \mathfrak{M} \times \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n) &\rightarrow \mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n) \\ (\Phi_\gamma, y) &\mapsto \tau((\Phi_\gamma, a)) = \Phi_\gamma y = y_\gamma,\end{aligned}$$

es una acción de \mathfrak{M} sobre $\mathcal{S}(D, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$.

Definición 2.21

Con la notación de la Definición 2.19;

- Llamaremos núcleo de ϕ al conjunto de elementos de G que actúan trivialmente sobre todos los elementos de A .

$$\ker(\phi) = \{g \in G : ga = a, \forall a \in A\}.$$

- Para cada $a \in A$, llamaremos estabilizador de a en G al conjunto de elementos de G que actúan trivialmente sobre a .

$$G_a = \{g \in G : ga = a\}.$$

- Una acción es fiel si su núcleo está formado solo por la identidad.
- Un subconjunto $S \subset A$ es invariante por la acción del grupo G si $gs \in S$ para todo $s \in S$ y $g \in G$.

Si ahora A es un espacio vectorial, no tenemos garantizado que una acción de grupo respete las operaciones del mismo. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.22

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} y consideramos ψ una acción del grupo G sobre V , diremos que es una representación lineal si respeta la suma y el producto por escalar. Es decir, para todo $v, w \in V$, $g \in G$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se verifica:

- $g(\lambda v) = \lambda gv$.
- $g(v + w) = gv + gw$.

Un subespacio vectorial $S \subset V$ es invariante por la acción del grupo G si $gs \in S$ para todo $s \in S$ y $g \in G$. Diremos que el grupo actúa irreducible sobre V si no tiene subespacios propios invariantes.

Lema 2.23

La aplicación

$$\begin{aligned}\Gamma : G &\rightarrow GL(V) \\ g &\mapsto \Gamma(g),\end{aligned}$$

donde $\Gamma(g) : V \rightarrow V$ tal que $\Gamma(g) = \phi((g, s))$, es un homomorfismo de grupos.

Demostración: Sean $g, f \in G$, $s \in V$, entonces $\Gamma(gf)(s) = (gf)s = g(fs) = \Gamma(g)(fs) = \Gamma(g)\Gamma(f)(s)$. Además $\Gamma(1)(s) = 1s = s$. ■

Definición 2.24

Una ecuación (ODEn) se dice que es irreducible si su grupo de monodromía actúa irreducible sobre el espacio vectorial de las soluciones. Análogamente será abeliana si su grupo de monodromía es abeliano.

El siguiente lema lo utilizaremos en el futuro para caracterizar los grupos de monodromía y su relación con la reducibilidad. La demostración que desarrollaremos del mismo se puede encontrar en el texto [Fu].

Lema 2.25

Si G es un grupo abeliano y ψ una representación lineal de G sobre un espacio vectorial V de dimensión finita mayor que 1, entonces es reducible.

Demostración: Para la prueba del resultado necesitamos un lema previo:

Lema 2.26

Si G es un grupo abeliano, ψ una representación lineal irreducible de G sobre un espacio vectorial V , y $\tau : V \rightarrow V$ tal que:

- (a) Es un homomorfismo de espacios vectoriales.
- (b) Conmuta con ψ en el sentido siguiente:

$$\forall g \in G, \psi(g)(\tau(v)) = \tau(\psi(g)v).$$

Entonces o bien $\tau = 0$, o τ es un isomorfismo.

Demostración: De las hipótesis se deduce que tanto $\ker(\tau)$ como $\Im(\tau)$ son subespacios invariantes por la representación. Como es irreducible o bien son el total o el $\{0\}$. ■

Con este resultado, como \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, entonces τ tendrá un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$, esto demuestra el siguiente aserto:

Corolario 2.27

Si G es un grupo abeliano, ψ una representación lineal irreducible de G sobre un espacio vectorial V , y $\tau : V \rightarrow V$ tal que:

- (a) Es un homomorfismo de espacios vectoriales.
- (b) Conmuta con ψ en el sentido siguiente:

$$\forall g \in G, \psi(g)(\tau(v)) = \tau(\psi(g)v).$$

Entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\tau = \lambda I$, donde I es la identidad en V .

En las hipótesis en las que nos encontramos tenemos que, al ser G abeliano, para cada $h \in G$, la aplicación $\psi(h)V \rightarrow V$ verifica las condiciones (a) y (b) del Corolario 2.27. Por lo tanto, para cada $h \in G$ existe $\lambda_h \in \mathbb{C}$ tal que $\psi(h) = \lambda_h I$. Entonces para cada $v \in V$, $\text{span}(v)$ es invariante por la representación, como esta ha de ser irreducible, entonces $V = \text{span}(v)$, luego de dimensión 1. ■

2.4. Álgebras de Operadores

En esta sección daremos un trato diferente a las ecuaciones diferenciales de orden n , las veremos desde el punto de vista de operadores actuando sobre el espacio de soluciones. El objetivo final será la demostración del Teorema de Frobenius, que relaciona la regularidad del problema con la regularidad de las soluciones, por tanto el sentido de la introducción de esta estructura de álgebra es justamente dar una prueba del mismo, en opinión del autor, bastante precisa y elegante. Las ideas, y la mayor parte de las demostraciones que se expondrán a continuación se pueden consultar en [IIYa].

Entrando en materia, consideraremos $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ una región arbitraria, pero fija, y $\mathcal{M}(G)$ el espacio de funciones meromorfas en G . Al conjunto de operadores, aplicaciones lineales $\mathcal{M}(G) \rightarrow \mathcal{M}(G)$, lo denotaremos como $\mathcal{L}(\mathcal{M}(G))$.

Definición 2.28

Diremos que $D \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(G))$ es una derivación si verifica

$$D(fg) = fD(g) + gD(f), \forall f, g \in \mathcal{M}(G)$$

Definición 2.29

Llamaremos derivación estándar al operador

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} : \mathcal{M}(G) &\rightarrow \mathcal{M}(G) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

Definición 2.30

Diremos que un operador $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(G))$ es de orden $n \in \mathbb{N}$ respecto de la derivación

D si existe $P \in \mathcal{M}(G)[z]$ de grado n tal que $L = P(D)$. Al conjunto de operadores de orden $n \in \mathbb{N}$ respecto de la derivación D se le denotará como $\mathcal{D}^n(D)$.

Diremos que un operador L es de orden finito respecto de la derivación D si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L \in \mathcal{D}^n(D)$. Definimos

$$\mathcal{D}(D) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}^n(D),$$

el conjunto de las derivaciones de orden arbitrario respecto a D .

Diremos que un operador $P(D) = L \in \mathcal{D}(D)$ es mónico si el polinomio P es mónico.

De ahora en adelante, excepto si existe la posibilidad de confusión, $D = \frac{d}{dz}$, y cuando digamos un operador de orden n será referido respecto a D .

Como la imagen por un operador $L \in \mathcal{D}(D)$ de una función meromorfa en G es también una función meromorfa, el siguiente resultado nos garantiza que este espacio, junto con la composición y la suma, es álgebra compleja.

Lema 2.31

$\mathcal{D}(D)$, junto con las operaciones composición de operadores y suma es un álgebra no conmutativa. Además si $L, L' \in \mathcal{D}(D)$, entonces

$$\text{orden}(LL') = \text{orden}(L) + \text{orden}(L'). \quad (2.14)$$

Demostración: El hecho de que es un álgebra es inmediato. En cuanto a la fórmula (2.14), se deduce de que

$$\text{orden}(P(D)Q(D)) = \text{orden}(PQ(D)),$$

y el grado del polinomio PQ es justamente la suma de los grados. ■

Lema 2.32

Si $L \in \mathcal{D}^n(D)$ y $Q \in \mathcal{D}^k(D)$, con Q no nulo, entonces existen $R, P \in \mathcal{D}(D)$ tales que

$$L = PQ + R, \text{ orden}(P) = \text{orden}(L) - \text{orden}(Q) \text{ y } \text{orden}(R) < \text{orden}(Q). \quad (2.15)$$

Demostración: Los operadores P, R se pueden ir construyendo con el siguiente algoritmo, el cual es una modificación del algoritmo de división de polinomios de una variable. Supongamos que

$$\begin{aligned} L &= a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n, \\ Q &= b_0 D^k + b_1 D^{k-1} + \dots + b_k. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ahora bien, el operador $L_1 = L - P_0 Q$, donde $P_0 = (a_0/b_0)D^{n-k}$, tiene orden $\leq n - 1$. Repitiendo este procedimiento definiremos $L_2 = L_1 - P_1 Q$, con orden estrictamente menor que L_1 . Con este proceso recurrente, en a lo sumo $n - k$ pasos, llegaremos a un operador R de orden menor que k . En cuanto al operador P , lo definiremos como $P = P_0 + P_1 + \dots$, con esto se prueba el lema. ■

Supongamos que $L \in \mathcal{D}(D)$ es un operador de orden n con respecto a la derivación estándar, definido de la siguiente manera

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n, \quad a_k \in \mathcal{M}(G). \quad (2.17)$$

Definición 2.33

Sean $L \in \mathcal{D}(D)$ y G una región. Diremos que $f \in \mathcal{M}(G)$ es solución global de $Lf = 0$ en G , o también diremos que L se anula en f , si

$$0 = (Lf)(z) = f^{(n)}(z) + a_1(z)f^{(n-1)}(z) + \cdots + a_{n-1}(z)f'(z) + a_n(z)f(z), \quad \forall z \in G. \quad (2.18)$$

Si además $f \in \mathcal{H}(G)$ diremos que es solución global analítica en G .

En general exigir la existencia de soluciones globales en G es una condición demasiado estricta, véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.34

Consideramos $G = B(0, 1)$ y el operador

$$L = D + a, \quad a(z) = -\frac{1}{2z}, \quad \forall z \in G.$$

Las soluciones globales del mismo son de la forma

$$y(z) = Az^{1/2}, \quad A \in \mathbb{C}, \quad \forall z \in G,$$

las cuales no son holomorfas en G .

De forma general no podemos afirmar que existan n soluciones globales en $\mathcal{M}(G)$ para un operador L de orden n , es más podría suceder que no existiesen soluciones globales en G , puesto que las funciones a_k podrían tener polos, como sucede en el Ejemplo 2.34. Entonces conviene extender la noción de solución a un espacio K que contenga a $\mathcal{M}(G)$.

Denotamos como Σ_L al conjunto de polos de las funciones a_k , a este conjunto lo llamaremos *conjunto de singularidades de L* . Como cada a_k tiene un número finito de singularidades se deduce que Σ_L es finito. Denotamos como $\Omega_L = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma_L$ al cual llamaremos *conjunto de puntos regulares estrictos de L* , que es un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$.

Si consideramos una región $U \subset \Omega_L$, si quisiéramos definir f una solución de $Lf = 0$ en Ω , es natural que verifique, en particular que $Lf = 0$ en U . En virtud del Teorema 2.4, se tiene garantizada la existencia y unicidad de las soluciones en U , las cuales son funciones holomorfas en U . Por tanto una condición que tendremos que pedir a las soluciones es que sean funciones holomorfas en las regiones de Ω_L .

Definición 2.35

Sea una región $U \subset \Omega_L$, diremos que $f \in \mathcal{H}(U)$ es solución de $Lf = 0$ en la región U de Ω si

$$0 = f^{(n)}(z) + a_1(z)f^{(n-1)}(z) + \cdots + a_{n-1}(z)f'(z) + a_n(z)f(z), \quad \forall z \in U. \quad (2.19)$$

Al igual que en la definición de Wronskiano realizada en (2.9), para soluciones de ecuaciones diferenciales, daremos una más general que contiene a la primera.

Definición 2.36

Sea G un dominio, y $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{M}(G)$. Llamaremos Wronskiano, o determinante Wronskiano, de f_1, f_2, \dots, f_n al valor

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Nota 2.37

Observamos que la Definición 2.20 de Wronskiano, dada en esta sección, está en sintonía con la dada en la identidad (2.9).

Lema 2.38

Si $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}(G)$ son independientes, entonces el operador Wronskiano,

$$W(f_1, \dots, f_n, \bullet) : \mathcal{M}(G) \rightarrow \mathcal{M}(G) \quad (2.21)$$

$$f \mapsto W(f_1, \dots, f_n, f),$$

es de orden n , se anula en f_1, \dots, f_n y puede ser representado como

$$W(f_1, \dots, f_n, \bullet) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 = W(f_1, \dots, f_n).$$

Demostración: Para observar que es lineal, basta con expandir en la última columna el determinante:

$$W(f_1, \dots, f_n, f) = W(f_1, \dots, f_n) f^{(n)} + \dots + W(f_1', \dots, f_n') f.$$

Como además el Wronskiano se anula si dos elementos coinciden entonces $W(f_1, \dots, f_n, \bullet)$ se anula en f_1, \dots, f_n ■

Lema 2.39

Si $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}(G)$ son tales que

$$W(f_1, \dots, f_n)(z) \neq 0, \quad \forall z \in G.$$

Y $f \in \mathcal{M}(G)$ verifica

$$W(f_1, \dots, f_n, f)(z) = 0, \quad \forall z \in G,$$

entonces f es combinación lineal de f_1, \dots, f_n sobre \mathbb{C} .

En consecuencia, si un conjunto de funciones en $\mathcal{M}(G)$ tiene Wronskiano nulo para todo punto, entonces son dependientes sobre \mathbb{C} .

Demostración: Si f está en el núcleo de $W(f_1, \dots, f_n, \bullet)$, que es un operador diferencial de orden n , aplicando el teorema 2.4, se tiene que f es combinación lineal de f_1, \dots, f_n sobre \mathbb{C} , al menos en una región $U \subset G$. Por el principio de identidad tendremos la igualdad en toda la región G . ■

Definición 2.40

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $U \subset B(z_0, \rho)$ y (U, f) un elemento prolongable a lo largo de cualquier camino contenido en $B^*(z_0, \rho)$. Diremos que f crece moderadamente en z_0 si existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si V es una región $V \subset B(z_0, \delta)$, entonces

$$|(z - z_0)^N \tilde{f}(z)| < \epsilon, \quad z \in V, \quad (2.22)$$

para toda prolongación (V, \tilde{f}) de (U, f) .

Teorema 2.41 (Teorema de Riemann)

Sea $\Sigma \subset G$ finito tal que $\Sigma \subset G$ y $U \subset G \setminus \Sigma$ un dominio $(U, f_1), \dots, (U, f_n)$ son elementos meromorfos prolongables analíticamente a lo largo de todo camino contenido en $G \setminus \Sigma$. Además se verifica:

1. f_1, f_2, \dots, f_n son independientes sobre \mathbb{C} .
2. El subespacio generado por f_1, f_2, \dots, f_n es invariante por prolongaciones meromorfas, para cada camino γ contenido en $G \setminus \Sigma$ existe una matriz $n \times n$, llamada de monodromía, tal que la prolongación de $(f_1(z), \dots, f_n(z))$ es $(f_1(z), \dots, f_n(z))M_\gamma$.
3. Las funciones f_j tienen crecimiento moderado para todo j .

Entonces los ratios del operador (2.21) a_j/a_0 son meromorfos en G . Luego existe un único operador L , mónico y de orden n , tal que si V es una región de $G \setminus \Sigma$, entonces las prolongaciones analíticas de f_1, f_2, \dots, f_n a V son solución de $Lf_k = 0$ en V , $k = 1, 2, \dots, n$. Este operador viene dado por la fórmula

$$L = \frac{W(f_1, \dots, f_n, \bullet)}{W(f_1, \dots, f_n)}, \quad (2.23)$$

y tiene coeficientes meromorfos en G con puntos singulares el conjunto Σ .

Demostración: Siguiendo los pasos de la demostración del Lema 2.38 se observa que cada coeficiente

$$\frac{a_j}{a_0} = \frac{\det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(j-1)} & f_2^{(j-1)} & \cdots & f_n^{(j-1)} \\ f_1^{(j+1)} & f_2^{(j+1)} & \cdots & f_n^{(j+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} \end{pmatrix}}{W(f_1, \dots, f_n)}, \quad (2.24)$$

es una función univaluada. Ya que, al ser invariante por prolongaciones analíticas, al prolongar por γ , $(f_1, \dots, f_n)_\gamma = (f_1, \dots, f_n)M_\gamma$ y lo mismo sucederá con las derivadas, luego podemos despejar del cociente de Wronskianos (2.24), el valor $\det(M_\gamma)$.

Nos falta probar que los ratios $\frac{a_j}{a_0}$ tienen a lo sumo un polo en cada elemento de Σ . Trabajemos para ello localmente en cierto $z_0 \in \Sigma$. Consideramos el vector

$$\mathbf{h}(z) = (h_1(z), \dots, h_n(z)) = (f_1(z), \dots, f_n(z))(z - z_0)^{-A_0}. \quad (2.25)$$

Donde A_0 es una matriz, tal que la matriz de monodromía M_0 correspondiente a un camino simple que rodea a z_0 , verifica $M_0 = \exp(2\pi i A_0)$.

Por las hipótesis del teorema, el vector \mathbf{h} es univaluado en un entorno de z_0 . Como cada entrada del vector (f_1, \dots, f_n) crece moderadamente, entonces \mathbf{h} crece moderadamente en z_0 . Juntando ambas afirmaciones se deduce que \mathbf{h} es holomorfo en z_0 . Derivando sucesivamente en la fórmula $f(z) = \mathbf{h}(z)(z - z_0)^{A_0}$, obtenemos que cualquiera de las derivadas de f_1, \dots, f_n son de crecimiento moderado, y por tanto, a_0, \dots, a_n son de crecimiento moderado en z_0 .

Nos resta por probar que $1/a_0$ es también de crecimiento moderado en z_0 . De nuevo, haciendo uso de argumentos de monodromía, obtenemos:

$$a_0(z) = h_0(z)(z - z_0)^{\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2\pi i} \log(\det(M_0)), \quad (2.26)$$

donde h_0 es univaluada y meromorfa en z_0 . El hecho de que a_0 no sea nula en todo punto garantiza que h_0 tampoco lo sea, y por tanto $a_0(z) = 1/h_0(z)(z - z_0)^{-\alpha_0}$ crece moderadamente en z_0 .

Por tanto, todos los ratios a_j/a_0 son univaluados y de crecimiento moderado en z_0 , con lo que tienen polos de orden finito en z_0 . Como el punto era arbitrario en Σ entonces hemos concluido ■

Definición 2.42

Sean $L, M \in \mathcal{D}(D)$, diremos que M divide a L por la derecha, o que M es un divisor de L por la derecha, si M es no nulo, y el operador R del Lema 2.32 es nulo. Si M no es la identidad ni L , diremos que es divisor propio por la derecha, y que L es reducible por la derecha. En caso de que L no tenga divisores propios por la derecha diremos que es irreducible por la derecha.

La divisibilidad por la derecha puede ser caracterizada fácilmente en términos de los núcleos de los operadores.

Lema 2.43

Sean $L, M \in \mathcal{D}(D)$, entonces M divide a L por la derecha si y solo si para toda región $U \subset \Omega_M \cap \Omega_L$ y toda $f \in \mathcal{M}(U)$, solución de $Mf = 0$ en U , se verifica que es solución de $Lf = 0$ en U .

Demostración: Si M divide a L por la derecha, U es una región de $\Omega_M \cap \Omega_L$, y $f \in \mathcal{M}(U)$, tal que $Mf = 0$. Entonces existe $P \in \mathcal{D}(D)$ tal que $L = PM$, por tanto $Lf = M0 = 0$ en U .

Para la otra implicación sabemos que, en virtud del Lema 2.32, existen $P, R \in \mathcal{D}(D)$ tales que

$$L = PM + R, \quad \text{orden}(P) = \text{orden}(L) - \text{orden}(M) \text{ y } \text{orden}(R) < \text{orden}(M).$$

Como $Lf = PMf + Rf$, entonces $Rf = 0$ en U para toda región $U \subset \Omega_M \cap \Omega_L$ y toda $f \in \mathcal{M}(U)$ tal que $Mf = 0$. Esto, gracias al Teorema de Riemann 2.41, en particular implica

que $\text{orden}(R) \geq \text{orden}(M)$, que unido a la condición $\text{orden}(R) < \text{orden}(M)$, muestra que $R = 0$. ■

El Lema 2.43 hace alusión a la factorización de operadores cuando conocemos su núcleo. Por lo tanto, parece lógico pensar que si conocemos n funciones independientes de un operador de orden n , entonces podemos ir formando una descomposición en operadores de orden 1 cuyos núcleos sean justamente las funciones anteriores. El siguiente resultado muestra de manera explícita una forma de descomponer un operador como producto de derivaciones estándar y multiplicaciones. Para simplificar la notación llamaremos

$$\begin{aligned} w_k &= W(f_1, \dots, f_k), \quad k = 1, \dots, n, \\ w_{-1} &= w_0 = 1, \quad w_{n+1} = n. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Teorema 2.44

Sean $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}(G)$ son soluciones independientes de la ecuación $Lf = 0$ en $\mathcal{M}(G)$, con $L \in \mathcal{D}^n(D)$ un operador mónico. Entonces L es la composición de n derivaciones estándar, $D = \frac{d}{dz}$ y de $n + 1$ multiplicaciones $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathcal{D}^0(D)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} L &= b_n D b_{n-1} D \cdots b_1 D b_0, \\ b_k &= \frac{w_k^2}{w_{k-1} w_{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Demostración: La demostración de este resultado es técnica y queda omitida, para consultar una prueba se recomienda ver [IlYa]. ■

La principal ventaja de la fórmula (2.28) aparece a la hora de tomar el operador inverso. Si denotamos por D^{-1} al inverso de la derivación, por ejemplo tomar una primitiva, definida salvo constantes. Entonces $Lf = g$ es equivalente a resolver

$$f = b_0^{-1} D^{-1} b_1^{-1} D^{-1} \cdots b_{n-1}^{-1} D^{-1} b_n^{-1} g \tag{2.29}$$

Es decir, conocer todas las soluciones de $Lf = 0$ implica conocer todas las soluciones de $Lf = g$, tomando n cuadraturas.

2.5. Singularidades regulares

En esta sección continuamos con la notación anterior, considerando G una región y $\mathcal{D}(D)$ el espacio de derivaciones de orden finito.

Recordamos que si $L \in \mathcal{D}(D)$, habíamos denotado por Ω_L al conjunto de puntos regulares estrictos de L . Si $U \subset \Omega_L$, entonces para cada solución f de $Lf = 0$ en U , la Nota 2.5 nos garantiza que el elemento (U, f) es prolongable analíticamente a lo largo de todo camino con soporte en Ω_L . Por tanto se puede hablar de una solución con crecimiento moderado.

Lema 2.45

Si un elemento, (U, f) prolongable analíticamente a lo largo de todo camino en un dominio G , es de crecimiento moderado en $z_0 \in G$, entonces toda prolongación analítica suya (\tilde{U}, \tilde{f}) es también de crecimiento moderado en $z_0 \in G$.

Demostración: Es consecuencia directa de la Definición 2.40, ya que esta solo depende de las vecindades de z_0 y no del punto de inicio de la prolongación. ■

Definición 2.46

Sea $L \in \mathcal{D}(D)$ diremos que presenta una singularidad regular en $z_0 \in G$ si para toda región $U \subset \Omega_L$ y toda f , solución de $Lf = 0$ en la región U de Ω_L , es de crecimiento moderado en z_0 . Diremos que el operador L es regular si lo es en todo punto de G .

Nota 2.47

Para cada punto $z_0 \in \Omega_L$ es claro que L presentará una singularidad regular, puesto que, según lo estudiado en las secciones previas, existe una base de soluciones holomorfas en torno a z_0 .

Lema 2.48

Sea $L \in \mathcal{D}(D)$ tal que existe una región $U \subset \Omega_L$ tal que para toda $f \in \mathcal{H}(U)$, solución de $Lf = 0$ en la región U de Ω , se tiene que (U, f) es de crecimiento moderado en $z_0 \in G$. Entonces L es regular en z_0 .

Demostración: Basta con aplicar el Lema 2.45 a este caso concreto. ■

Teorema 2.49

Un operador $L \in \mathcal{D}(D)$ que solo tiene singularidades regulares en G es reducible por la derecha si y solamente si el grupo de monodromía de la ecuación $L = 0$ es reducible. Además en caso en el que lo sea, es decir, $L = PQ$ se tendrá que el espacio de soluciones de $Q = 0$ es justamente un espacio invariante de soluciones de $L = 0$.

Demostración: Supongamos que $L = PQ$ y sean f_1, \dots, f_k soluciones $Qf = 0$. Entonces cada f_j es solución de $Lf = 0$ y por tanto el subespacio generado por f_1, \dots, f_k es invariante por la monodromía. Ya que, en particular, la prolongación de cualquier f_j , $j = 1, \dots, k$ vuelve a ser solución de $Qf = 0$, y por tanto es combinación lineal de f_1, \dots, f_k . Recíprocamente, supongamos, sin pérdida de generalidad, que tenemos una base de soluciones f_1, \dots, f_n , tal que el subespacio invariante es el generado por f_1, \dots, f_k , $k < n$. Por el Teorema de Riemann 2.41, existe un operador mónico $Q \in \mathcal{D}^k(D)$ tal que se anula justamente en estas funciones. Por el Lema 2.43, L es divisible por Q y por tanto reducible, con lo que se concluye la demostración. ■

Ahora veremos unos resultados de factorización de operadores dentro del álgebra $\mathcal{D}(D)$. En concreto nos afirma que la composición de operadores regulares nos da otro regular, como la suma de operadores es evidentemente un operador regular, entonces estaremos ante una subálgebra de $\mathcal{D}(D)$.

Lema 2.50

¹ Se verifican las siguientes propiedades:

(I) La composición de dos operadores regulares es regular.

(II) Si tres operadores $L, M, Q \in \mathcal{D}(D)$, verifican $L = MQ$ y L es regular, entonces M y Q también lo son.

Demostración: Para demostrar la afirmación (I), supongamos que $L = MQ$, con M y Q regulares, entonces $Lf = 0$ si y solamente si $Qf = g$ y $Mg = 0$. Como M es regular, entonces g es de crecimiento moderado en todo punto, como la derivación no altera ese carácter y $Qf = g$, en virtud de la fórmula (2.29) se tiene que f ha de ser de crecimiento moderado.

En cuanto a el aserto (II), supongamos que $L = MQ$ es regular y f es solución de $Qf = 0$, entonces $Lf = 0$ y f es de crecimiento moderado en todo punto, por tanto Q es regular. Por otro lado, si g es tal que $Mg = 0$, tomamos f una solución de $Qf = g$, la cual será de crecimiento moderado, ya que $Lf = MQf = Mg = 0$. Ahora bien el hecho de que una solución de una ecuación $L = 0$ tenga crecimiento moderado en todo punto implica que para todo $z_0 \in G$, f es de la forma

$$f(z) = (h_1(z), \dots, h_n(z))(z - z_0)^A (c_1, \dots, c_n)^t.$$

Donde h es meromorfa en z_0 , A es un logaritmo de la matriz de monodromía en z_0 y $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ es un vector constante. Como las derivaciones n -ésimas y productos por funciones meromorfas aplicadas a f no varían su carácter de crecimiento moderado, si aplicamos a f el operador regular Q obtendremos que $g = Qf$ es de crecimiento moderado en z_0 . Como este es un punto arbitrario, entonces Q es regular. ■

Como aplicación inmediata de este resultado, obtenemos el siguiente teorema sobre descomposición de operadores regulares.

Teorema 2.51

Todo operador L de orden n , regular en un punto $z_0 \in G$ admite una descomposición en operadores regulares de orden uno en un entorno U de z_0 . Es decir, existe un entorno U de z_0 y $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{D}^1(U)$ regulares, tales que

$$L = L_1 L_2 \cdots L_n, \text{ en el sentido de } \mathcal{D}(D) \text{ en } U. \quad (2.30)$$

Demostración: En torno a un punto z_0 la monodromía es un subgrupo de \mathbb{Z} , con lo que es cíclico. Un grupo cíclico actuando sobre un espacio vectorial de dimensión n admite un subespacio reducible de dimensión 1. Por el Teorema 2.49 existirá L_0 , cuyo núcleo es justamente este subespacio, de dimensión 1, tal que divide a L . Entonces existirá P_0 , operador diferencial de orden $n - 1$ en U , tal que $L = P_0 L_0$, por el Lema 2.50 se tiene que P_0 y L_0 son regulares. Iterando el procedimiento obtendremos la ecuación (2.30). ■

Introduciremos ahora un cambio de variable en los operadores. Para ello defino un nuevo operador diferencial

$$\delta = zD. \quad (2.31)$$

Lema 2.52

Si $L \in \mathcal{D}^n(D)$ es un operador mónico de orden n , el cual es de la forma

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n, \quad (2.32)$$

con a_k meromorfas en G , para $k = 0, 1, \dots, n$, entonces

$$L = \frac{1}{z^n}(\delta)(\delta - 1) \cdots (\delta - n + 1) + a_1 \frac{1}{z^{n-1}}(\delta)(\delta - 1) \cdots (\delta - n + 2) + \cdots + \frac{1}{z} \delta a_{n-1} + a_n, \quad (2.33)$$

$$z^n L = \delta^n + b_1 \delta^{n-1} + \cdots + b_n, \quad (2.34)$$

con b_k verificando

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z a_1 \\ z^2 a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z^n a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n0} \end{pmatrix}, \quad c_{kl} = \binom{k}{l}. \quad (2.35)$$

Este mismo lema se puede generalizar equivalentemente para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ definiendo $\delta_{z_0} = (z - z_0)D$. Con lo que nos quedaría el siguiente cambio matricial

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z - z_0) a_1 \\ (z - z_0)^2 a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ (z - z_0)^n a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n0} \end{pmatrix}, \quad c_{kl} = \binom{k}{l}. \quad (2.36)$$

Esto da pie a la definición otro tipo de singularidad definida con respecto al nuevo operador δ_{z_0} .

Definición 2.53

Diremos que un operador $L \in \mathcal{D}(D)$ es Fuchsiano en z_0 si las funciones b_k , $k = 1, 2, \dots, n$, definidas como en (2.36) son holomorfas en z_0 .

En virtud de la propia ecuación (2.36) se deduce el siguiente lema:

Lema 2.54

Un operador $L \in \mathcal{D}(D)$, de la forma $L = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$, es Fuchsiano en z_0 si y solo si las funciones a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, tienen un polo de orden a lo sumo k en z_0 .

Hagamos ahora un cambio de variable a sistemas matriciales, para ello consideramos el

vector $\mathbf{y} = [y, \delta(y), \dots, \delta^{n-1}(y)]$, el cual verifica

$$\delta(\mathbf{y}) = B\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ -b_n & \cdots & \cdots & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \quad (2.37)$$

Con este cambio obtenemos que es Fuchsiana en 0 si y solamente si B es holomorfa en 0.

Equivalentemente, si $\mathbf{y} = [y, zy', \dots, z^{n-1}y^{(n-1)}]$, obtenemos el sistema

$$z\mathbf{y}' = A(z)\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & n-2 & 1 \\ -z^n a_n & \cdots & \cdots & -z^2 a_2 & n-1 - za_1 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \quad (2.38)$$

Aquí, al igual que antes, observamos que es Fuchsiana en 0 si y solamente si A es holomorfa en 0.

El tratamiento matricial de singularidades regulares de ecuaciones de este tipo se puede encontrar en [Ba], donde nos afirma que existe una solución fundamental del tipo $z^M S(z)$, con S holomorfa en 0. Esto nos asegura que, toda singularidad Fuchsiana es en particular regular. Otro método para probar esta afirmación es acudir al método de Frobenius, el cual nos da soluciones en una base de logaritmos y potencias, todas ellas de crecimiento moderado.

En el caso matricial, hasta aquí podremos decir, ya que podemos encontrar elementos de crecimiento moderado que verifican ecuaciones que no son de tipo Fuchsiano. Sin embargo en el caso que nos concierne, las ecuaciones lineales de orden arbitrario, podremos afirmar el recíproco.

Teorema 2.55

Un operador $L \in \mathcal{D}(D)$ es Fuchsiano en un punto z_0 si y solamente si es regular en z_0 .

Demostración : Demostremos en primer lugar el resultado si el operador es mónico de orden 1. Supongamos que $Ly = y' + ay$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $z_0 = 0$. Sabemos que toda solución y de $Ly = 0$ se puede escribir como $y(z) = z^\lambda s(z)$, con $s(z)$ holomorfa en una cierta $B^*(0, \epsilon)$. Como además la singularidad es regular, la singularidad de $s(z)$ no será esencial y podremos asegurar que $s(z)$ es holomorfa en 0 y que además no se anula en 0.

Si a tuviera un polo de orden $p > 1$ entonces, para $z \in B(0, \epsilon)$,

$$\begin{aligned} -a(z)z^\lambda s(z) &= y'(z) = \lambda z^{\lambda-1} s(z) + z^\lambda s'(z), \\ -a(z)s(z) &= \lambda \frac{1}{z} s(z) + s'(z), \\ -z^p a(z)s(z) &= y'(z) = \lambda z^{p+1} s(z) + z^p s'(z). \end{aligned}$$

Tomando límites en 0 obtenemos que

$$s(0) \lim_{z \rightarrow 0} z^p a(z) = 0.$$

Por tanto, o bien $s(0) = 0$ o bien a no tiene un polo de orden p . Como la primera opción no es factible, entonces a no tiene un polo de orden p para todo $p > 1$ y como hemos supuesto que es meromorfa en 0, se deduce que a tiene un polo de orden a lo sumo 1 en 0.

Para probar el caso general, supondremos que el operador L es mónico, de orden n y regular. Por el Teorema 2.51, existe una factorización de L en operadores regulares de orden 1, esto es $L = L_n \cdots L_1$. Por lo probado antes tenemos que cada L_k es Fuchsiano, es decir, $L_k = \delta + \tilde{b}_k$, con \tilde{b}_k holomorfa en 0. Por tanto L será de la forma $\delta^n + b_1 \delta^{n-1} + \cdots + b_n$, con cada b_k holomorfo en 0, con lo cual es Fuchsiana. ■

En la mayor parte de la literatura que se puede consultar sobre este tema, la demostración se realiza por inducción, en esta que se propone sin embargo, el razonamiento es de tipo recurrente.

Definición 2.56

Si $L \in \mathcal{D}^n(D)$ es un operador Fuchsiano en 0, si A es la matriz de la ecuación (2.38) definimos

- Polinomio indicial de L en 0 al polinomio

$$I_0(\lambda) = \det(A(0) - \lambda I), \quad (2.39)$$

donde I representa la matriz identidad.

- Exponentes locales de L en 0, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, a los ceros del polinomio indicial en 0.

Si un operador Fuchsiano en 0, $L \in \mathcal{D}(D)$, es de la forma

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n, \quad (2.40)$$

con a_k meromorfas en G , para $k = 0, 1, \dots, n$,

el Lema 2.52 nos garantiza que existen b_k holomorfas en 0, para $k = 0, 1, \dots, n$, verificando

$$z^n L = \delta^n + b_1 \delta^{n-1} + \cdots + b_n. \quad (2.41)$$

Con esta notación enunciamos el siguiente resultado:

Lema 2.57

Si un operador $L \in \mathcal{D}(D)$ es Fuchsiano en 0 y está descrito en función de δ como en (2.42), entonces el polinomio

$$P(w) = w^n + b_1(0)w^{n-1} + \cdots + b_n(0) \quad (2.42)$$

es el polinomio indicial de L en 0.

Demostración: Para demostrarlo basta desarrollar por la última fila el siguiente determinante y evaluar en 0:

$$I_0(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & n-2-\lambda & 1 \\ -z^n a_n & \cdots & \cdots & -z^2 a_2 & n-1-\lambda-z a_1 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Llegamos a que

$$I_0(\lambda) = (\lambda)(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+1) + \lim_{z \rightarrow 0} a_1(z) z (\lambda)(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+2) + \cdots + \lim_{z \rightarrow 0} a_{n-1} z^{n-1} \lambda + \lim_{z \rightarrow 0} a_n z^n,$$

que es justamente lo pedido. ■

Nótese que durante el transcurso de la prueba se ha dado una caracterización del polinomio indicial en términos más operativos;

$$I_0(\lambda) = (\lambda)(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+1) + \lim_{z \rightarrow 0} [a_1(z)z] (\lambda)(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+2) + \cdots \\ + \lim_{z \rightarrow 0} [a_{n-1} z^{n-1}] \lambda + \lim_{z \rightarrow 0} [a_n z^n],$$

Se observa además que los límites descritos tienen sentido por ser L un operador Fuchsiano en 0.

De forma análoga definimos el polinomio indicial en un punto arbitrario $z_0 \in \mathbb{C}$. Si consideramos la representación como sistema de ecuaciones

$$\mathbf{y} = [y, (z-z_0)y', \dots, (z-z_0)^{n-1}y^{(n-1)}]^t,$$

obtendremos un sistema de la forma

$$(z-z_0)\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \text{ en un entorno de } z_0. \quad (2.44)$$

Con

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & n-2 & 1 \\ -(z-z_0)^n a_n & \cdots & \cdots & -(z-z_0)^2 a_2 & n-1-(z-z_0)a_1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Definición 2.58

Si $L \in \mathcal{D}^n(D)$ es un operador Fuchsiano en z_0 , si A es la matriz de la ecuación (2.44) definimos

- Polinomio indicial de L en z_0 al polinomio

$$I_0(\lambda) = \det(A(z_0) - \lambda I), \quad (2.46)$$

donde I representa la matriz identidad.

- Exponentes locales de L en 0 , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, a los ceros del polinomio indicial en 0 .

Cuando queremos analizar el operador en un entorno de ∞ , tenemos que prestar especial atención al significado de los términos Fuchsiana y singular regular en ∞ .

Consideramos el operador $\delta_\infty = -\frac{1}{z}D$, si $L = P(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_n$, entonces $L = P(-z\delta_\infty) = (-z\delta_\infty)^n + a_1(-z\delta_\infty)^{n-1} + \dots + a_n$. Desarrollando las potencias de $z\delta_\infty$ obtenemos:

$$\begin{aligned} (-z\delta_\infty)^0 &= 1 \\ (-z\delta_\infty)^1 &= -z\delta_\infty \\ (z\delta_\infty)^2 &= -z\delta_\infty(-z\delta_\infty) = z(\delta_\infty + \delta_\infty^2) = z^2\delta_\infty(\delta_\infty + 1), \\ &\dots \dots \dots \dots \\ (z\delta_\infty)^n &= (-z)^n(\delta_\infty)(\delta_\infty + 1) \cdots (\delta_\infty + n - 1). \end{aligned}$$

Por otro lado, si tomo la transformación dada por $\mathbf{y} = [y, y'/z, \dots, y^{(n-1)/z^{n-1}}]^t$, entonces se verificará:

$$\frac{1}{z}\mathbf{y}' = A(z)\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & -n+2 & 1 \\ -z^{-n}a_n & \dots & \dots & -z^{-2}a_2 & -n+1 - z^{-1}a_1 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \quad (2.47)$$

Al polinomio característico de A lo llamaremos polinomio *Indicial en ∞* .

Por lo que, al igual que antes, tendremos, si $L = P(D)$, la equivalencia λ es autovalor de A si y solo si $P(-z\delta_\infty) = Q(\delta_\infty)$ verifica que $Q(\lambda) = 0$.

Resumiremos las caracterizaciones más operativas sobre los exponentes locales en este resultado.

Teorema 2.59 (Caracterización de Exponentes Locales)

Sea $L \in \mathcal{D}(D)$ un operador Fuchsiano en $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, entonces:

- Si $z_0 \in \mathbb{C}$, los exponentes locales de L en z_0 serán los ceros del polinomio

$$\begin{aligned} I_0(\lambda) = & (\lambda)(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) + \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)a_1(z)(\lambda)(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 2) + \\ & \dots \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n-1}a_{n-1}(z)\lambda + \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n a_n(z), \end{aligned} \quad (2.48)$$

- Si $z_0 = \infty$ los exponentes locales de L en ∞ serán los ceros del polinomio

$$\begin{aligned} I_\infty(\lambda) = & (\lambda)(\lambda + 1) \cdots (\lambda + n - 1) - \lim_{z \rightarrow \infty} za_1(z)(\lambda)(\lambda + 1) \cdots (\lambda + n - 2) \\ & \pm \dots + (-1)^{n-1} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{n-1}a_{n-1}\lambda + (-1)^n \lim_{z \rightarrow \infty} z^n a_n(z), \end{aligned} \quad (2.49)$$

Nótese que los límites existen por hipótesis.

Demostración: Si $z_0 \in \mathbb{C}$ basta con desarrollar por la última fila el determinante

$$I_0(\lambda) = \det(A(z_0) - \lambda I).$$

En el caso ∞ se realiza el mismo razonamiento pero con la matriz (2.47). ■

Una motivación para introducir de esta manera los exponentes locales es la siguiente:

Supongamos que tenemos $0 \in \Sigma_L$ un punto singular regular, entonces será aislado, luego existirá una bola $B(0, 2r)$ que no interseca el conjunto Σ_L . Si tomamos una solución y en una región $D = B(r, r)$, $r > 0$, la cual, por lo anteriormente mencionado, no contiene singularidad alguna, lo que me garantiza su holomorfia.

Si ahora definimos el siguiente lazo

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto re^{2\pi it} \end{aligned}$$

y prolongamos y a lo largo de γ . Entonces y_γ es otra solución en D , supongamos que el subespacio generado por y fuera un invariante para γ , es decir, $y_\gamma = cy$, $c \in \mathbb{C}$. Consideramos λ un logaritmo de $\frac{c}{2\pi i}$, prolongamos la función s , definida en D de la siguiente forma $s(z) = y(z)z^{-\lambda}$, por el lazo γ , el resultado es:

$$cy(z)z^{-\lambda}e^{-\lambda 2\pi i} = y(z)z^{-\lambda} = y(z), \quad \forall z \in D.$$

Como el conjunto $B^*(0, 2r)$ tiene grupo fundamental isomorfo a \mathbb{Z} , entonces todo lazo es homótopo a un múltiplo entero del generador γ . Al ser $s(z)$ prolongable analíticamente a lo largo de todo camino contenido en $B^*(0, 2r)$ y la prolongación analítica a lo largo de γ actúa de forma trivial sobre s , entonces, aplicando el Lema 2.73, $s \in \mathcal{H}(B^*(0, 2r))$.

En resumen, este razonamiento nos dice que si queremos buscar un subespacio de dimensión 1, invariante, es decir un autovector, entonces tenemos que buscar soluciones de la forma $y(z) = z^\alpha s(z)$, con s analítica en torno a 0.

Supongamos por tanto estar en esta situación:

En virtud del Lema 2.52 tenemos que $y(z) = z^\alpha s(z)$ es solución de

$$0 = z^n Ly = (\delta^n + b_1 \delta^{n-1} + \dots b_n) y, \quad \text{con } b_k \in \mathcal{H}(B^*(0, 2r)).$$

Por lo tanto, para $z \in B(0, r)$

$$0 = \delta^n z^\alpha s(z) + b_1(z) \delta^{n-1} z^\alpha s(z) + \dots b_n(z) z^\alpha s(z).$$

Como además se verifica que

$$\delta^m z^\alpha s(z) = \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \lambda^{m-k} z^\lambda \delta^k s(z),$$

entonces podremos sacar factor común a z^λ en la ecuación y simplificar:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=0}^n b_{n-m} \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \lambda^{m-k} \delta^k s \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{m=k}^n b_{n-m} \binom{n}{k} \lambda^{m-k} \right) \delta^k s \end{aligned}$$

Todos los términos de la suma, excepto el primero, se anulan en 0, por lo tanto:

$$0 = \left(\sum_{m=0}^n b_{n-m} \lambda^m \right) \delta^k s = I_0(\lambda).$$

Con lo cual λ es un exponente local.

Si ahora expandimos $s(z)$ en forma de serie de potencias llegaríamos al conocido método de Frobenius, donde, de forma general, se consigue encontrar una base de soluciones buscándolas entre las de la forma $(z - z_0)^\lambda a(z)$, siendo a meromorfa en z_0 y $I_P(\lambda) = 0$. En el siguiente resultado se expone con claridad lo discutido en estos párrafos previos:

Lema 2.60

Consideramos un operador en una región G , $L \in \mathcal{D}$, tal que tiene una singularidad regular en $P \in \overline{\mathbb{C}}$. Supongamos que $B(P, r) \subset G$ no contiene más puntos singulares de L y $z_0 = P + r/2 \in B(P, r)$. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow B(P, r)$, tal que $\gamma(t) = P + r/2 \exp(2\pi i t)$ y M_γ su matriz de monodromía asociada. Entonces el conjunto de autovalores de M_γ , $\sigma(M_\gamma)$, verifica:

$$\sigma(M_\gamma) = \{\exp(2\pi i \lambda) : I_P(\lambda) = 0\},$$

donde I_P denota el polinomio indicial de L en P .

Demostración : Sea A_P el conjunto de exponentes locales, mostraremos que la aplicación

$$\begin{aligned} \tau : A_P &\rightarrow \sigma(M_\gamma) \\ \lambda &\mapsto \exp(2\pi i \lambda) \end{aligned}$$

está bien definida y es sobreyectiva.

Para ello, sea $\lambda \in A_P$, entonces existe una solución de la forma $(z - P)^\lambda a(z)$, con a meromorfa en $B(P, r)$. Si prolongamos analíticamente a lo largo de γ obtendremos $(z - P)^\lambda a(z) \exp(2\pi i \lambda)$, por lo tanto, $(z - P)^\lambda a(z)$ es un autovector de M_γ asociado al autovalor $\exp(2\pi i \lambda)$, entonces $\tau(\lambda) \in \sigma(M_\gamma)$.

Si por otro lado tengo $\beta \in \sigma(M_\gamma)$, entonces existirá una solución y tal que la prolongación a lo largo de γ es $y_\gamma = \beta y$. Veamos que, fijada una rama adecuada del logaritmo, $b(z) = y(z)(z - P)^{-\frac{\log(\beta)}{2\pi i}}$ es holomorfa en $B(P, r)$. Para ello basta ver que al prolongar a lo largo de γ resulta invariante.

$$b_\gamma(z) = y_\gamma(z)(z - P)^{-\frac{\log(\beta)}{2\pi i}} e^{-\log(\beta)} = \beta y(z)(z - P)^{-\frac{\log(\beta)}{2\pi i}} \frac{1}{\beta} = b(z).$$

Luego existe una solución de la forma $y(z) = b(z)(z - P)^{\frac{\log(\beta)}{2\pi i}}$, con $b(z)$ holomorfa en $B(P, r)$. Por lo tanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\log(\beta)}{2\pi i} + k \in A_P$. ■

Hemos tratado las ecuaciones diferenciales como operadores o como sucesiones, cada caso tiene sus ventajas y su definición es equivalente.

Si G es una región donde $a_k \in \mathcal{H}(G)$, $k = 1, 2, \dots, n$, entonces $y \in \mathcal{S}(G, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ si y solo si el operador $L = D^n + \sum_{k=1}^n a_k D^{n-k}$ verifica $Ly = 0$ en G .

Por otro lado si $\{a_k\}_{k=1}^n$ son meromorfas en G , entonces en todo dominio $U \subset G$ que no contenga singularidades de $\{a_k\}_{k=1}^n$, se verifica que $y \in \mathcal{S}(U, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ si y solo si $Ly = 0$ en U .

Lema 2.61

Si G es una región y $L = D^n + \sum_{k=1}^n a_k D^{n-k} \in \mathcal{D}(D)$ un operador. Entonces y verifica $Ly = 0$ en G si y solo si en toda región $U \subset G$, que no contenga singularidades de $\{a_k\}_{k=1}^n$, $y \in \mathcal{S}(U, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$.

Nota 2.62

En consecuencia diremos que si $L \in \mathcal{D}(D)$ es un operador de orden n con respecto a la derivación estándar, definido de la siguiente manera

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, \quad a_k \in \mathcal{M}(G). \quad (2.50)$$

Entonces L es un operador de orden n asociado a las funciones $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{M}(G)$.

2.6. Ecuaciones Fuchsianas

Como hemos visto anteriormente, los casos más sencillos son aquellos donde la singularidad es regular. En esta sección estudiaremos las ecuaciones donde los coeficientes son racionales, es decir, con el conjunto $G = \overline{\mathbb{C}}$, además supondremos que todas las singularidades son regulares. Este tipo de ecuaciones, por su sencillez aparente y aparición en aplicaciones, merecen un estudio detallado.

Definición 2.63

Un operador $L \in \mathcal{D}^n(D)$ asociado a las funciones $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}(z)$ se dice que es Fuchsiano si para cada $P \in \overline{\mathbb{C}}$ es regular.

A la ecuación funcional definida por

$$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2.51)$$

se denomina ecuación diferencial Fuchsiana de orden n y coeficientes $\{a_k\}_{k=1}^n$.

Lema 2.64

El número de puntos singulares de una ecuación Fuchsiana (2.51) es finito.

Lema 2.65

Un operador $L \in \mathcal{D}^n(D)$, asociado a las funciones $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}(z)$, es Fuchsiano con puntos singulares:

$$\Sigma_L = \{C_1, \dots, C_m, C_{m+1} = \infty\}, \quad C_k \in \mathbb{C}, \quad k \leq m,$$

si y solo si, para cada $i = 1, \dots, n$, se verifica la igualdad:

$$a_i(z) = \frac{p_i(z)}{((z - C_1) \cdots (z - C_m))^i},$$

siendo p_i un polinomio de grado a lo sumo $2(m - 1)$.

Demostración: Supongamos que para cada $i = 1, \dots, n$

$$a_i(z) = \frac{p_i(z)}{((z - C_1) \cdots (z - C_m))^i},$$

entonces se tiene que en cada punto $P \in \overline{\mathbb{C}}$ las funciones a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, tienen un polo de orden a lo sumo k en P . Por tanto son Fuchsianas en todo punto.

Si, por otro lado, a_k es holomorfa en $\Omega_L = \mathbb{C} \setminus \Sigma_L$ y en cada $C_j \in \Sigma_L$ tiene un polo de orden k . En virtud del Teorema 1.18, cada $a_k(z)$ es de la forma $a_k(z) = \frac{P_k(z)}{Q_k(z)}$, $P_k, Q_k \in \mathbb{C}[z]$, Siendo ambos coprimos. Por definición de polo de orden K en C_j , se tiene que $(z - C_j)^k a_k(z)$ es holomorfa en C_j , con lo cual

$$Q_k(z) = S_k(z)((z - C_1) \cdots (z - C_m))^k, \quad S_k \in \mathbb{C}[z].$$

En virtud del Teorema fundamental del álgebra, si S_k no es constante tendrá alguna raíz en \mathbb{C} . Esta no puede ser elemento de Σ_L ya que entonces al ser P_k y Q_k coprimos tendríamos un elemento con un polo de orden $k+1$. Tampoco puede ser un punto estrictamente regular, puesto que tendríamos una singularidad polar en ese punto y entra en contradicción. Por tanto S_k es una constante, y el resultado queda demostrado. $a_i(z) = \frac{p_i(z)}{((z - C_1) \cdots (z - C_m))^i}$, ■

Teorema 2.66 (Relación de Fuchs)

Sea $P \in \overline{\mathbb{C}}$ y $p_1(P), \dots, p_n(P)$ el conjunto de exponentes locales de una ecuación Fuchsiana (2.51) en P . Entonces se verifica

$$\sum_{P \in \overline{\mathbb{C}}} \left(p_1(P) + \cdots + p_n(P) - \binom{n}{2} \right) = -2 \binom{n}{2}. \quad (2.52)$$

Nota 2.67

Como en un punto regular los exponentes locales son $0, 1, \dots, n - 1$, entonces los términos de la suma (2.52) que corresponden a puntos regulares son nulos. Por tanto, al ser el conjunto de singularidades finito, la suma (2.52) es finita y está bien definida.

Demostración: Para la demostración haremos uso del siguiente lema cuya demostración es consecuencia del teorema de los residuos.

Lema 2.68

Si $f \in \mathbb{C}(z)$ y $p_1, \dots, p_m \in \overline{\mathbb{C}}$ son sus puntos singulares, entonces se verifica

$$\sum_{j=1}^m \text{Res}(f, p_j) = 0.$$

Consideramos la función a_1 y calculemos su residuo en un punto P singular. Como P es un polo simple, entonces

$$\operatorname{Res}(a_1, P) = \lim_{z \rightarrow P} (z - P)a_1(z) = I_1^P.$$

Por otra parte, las fórmulas de Cardano nos garantizan que, para P finito

$$p_1 + \cdots + p_m = \binom{n}{2} - \operatorname{Res}(a_1, P).$$

Si $P = \infty$,

$$p_1(\infty) + \cdots + p_m(\infty) = -\binom{n}{2} - \operatorname{Res}(a_1, \infty),$$

esto transforma la ecuación (2.52) en

$$\sum_{P \in \mathbb{C} \cap \mathfrak{S}_{\{a_k\}_{k=1}^n}} (-\operatorname{Res}(a_1, P)) - 2\binom{n}{2} - \operatorname{Res}(a_1, \infty) = -2\binom{n}{2},$$

$$\sum_{P \in \mathbb{C} \cap \mathfrak{S}_{\{a_k\}_{k=1}^n}} (\operatorname{Res}(a_1, P)) + \operatorname{Res}(a_1, \infty) = 0.$$

Lo cual es cierto por el Lema 2.68. ■

Por el Lema 2.64, el número de puntos que son singulares, es un conjunto finito. Por tanto podemos plantearnos el siguiente esquema que nos resume una ecuación Fuchsiana según sus puntos singulares y los exponentes locales en cada uno de ellos.

Definición 2.69

Sea una ecuación Fuchsiana de orden n con puntos singulares $A_1, \dots, A_m \in \overline{\mathbb{C}}$. Si

$$\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1, \dots, \alpha_1^m, \dots, \alpha_n^m$$

son los exponentes locales o ceros del polinomio indicial de la ecuación en los puntos A_1, \dots, A_m respectivamente. Entonces llamaremos esquema de Riemann a la figura

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ \hline \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^m \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^m \end{array} \tag{2.53}$$

Nota 2.70

Nótese que los valores $\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k$ bien podrían ser repetidos.

2.7. Soluciones Algebraicas

Si consideramos G una región y L un operador Fuchsiano en $\mathcal{D}(D)$, entonces como bien se ha discutido antes, las soluciones serán funciones generalizadas. Esto, de forma natural,

nos lleva a preguntarnos, si bien pueden ser consideradas como funciones algebraicas sobre el cuerpo $\mathcal{M}(G)$. Aquí estará muy relacionada la monodromía de L , sobre todo el cardinal del grupo. Demostraremos al final de la sección que, en operadores Fuchsianos, es finito si y solo si todas las soluciones son algebraicas sobre $\mathbb{C}(z)$.

Introduciremos unos conceptos, que aunque no van a ser usados en exceso en este texto, es habitual encontrárselos en algunos de alto nivel.

Definición 2.71

Un cuerpo diferencial (K, ∂) es una cuaterna $(K, +, \cdot, \partial)$, donde $(K, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo, y

$$\begin{aligned} \partial : K &\rightarrow K \\ y &\mapsto \partial y \end{aligned}$$

es una derivación:

- Satisface la regla de Leibnitz

$$\partial(fg) = f\partial(g) + g\partial(f), \quad \forall f, g \in K \tag{2.54}$$

- Es \mathbb{C} -lineal.

Definición 2.72

Al subcuerpo $C_K = \ker(\partial)$, elementos de K tales que su derivación es nula, lo llamaremos cuerpo de constantes de K . Un homomorfismo diferencial es un homomorfismo de cuerpos que conmuta con las derivaciones.

De ahora en adelante $K = \mathcal{M}(G)$, Si L tiene grado n , consideramos la ecuación $Ly = 0$ sobre K , la Sección 2.4 nos garantiza que, para cada región $U \subset \Omega_L$, la existencia de n soluciones independientes $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathcal{H}(U)$. Estas soluciones se consideran dentro del contexto de la Definición 2.35, consideramos la aplicación restricción a U

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \mathcal{M}(U) \\ f &\mapsto f|_U. \end{aligned}$$

Con la cual podemos ver K como subcuerpo de $\mathcal{M}(U)$, por tanto podemos hablar del siguiente grupo diferencial:

$$M = K \langle y_1, \dots, y_n \rangle, \text{ tales que } Ly_k = 0 \text{ en } U. \tag{2.55}$$

Una extensión así definida, verificando ciertas condiciones, de las cuales no entraremos en detalles, es conocida como extensión de Picard–Vessiot².

²Si consideramos un operador L sobre K , diremos que un cuerpo diferencial M definido como en (2.55), es una *extensión de Picard–Vessiot* relativa a la ecuación $Ly = 0$ si

1. El grupo de constantes no varía $C_K = C_M$.
2. $\{y_1, \dots, y_n\}$ es un conjunto linealmente independiente sobre el cuerpo de constantes C_K .

En numerosos textos también se suele nombrar con asiduidad el término grupo de Galois de la extensión³, pero al igual que antes no nos centraremos en ello ya que no es el objeto del trabajo.

Consideramos ahora Ω un dominio de $\overline{\mathbb{C}}$, $D \subset G$ una región y $z_0 \in D$.

Lema 2.73

Sea (D, f) un elemento de función prolongable analíticamente a lo largo de todo camino contenido en Ω . Si para cada lazo γ de extremo z_0 , la prolongación analítica final de (D, f) por γ es (D, f) , $(D, f)_\gamma = (D, f)$, entonces existe una única $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $(D, f) = (D, g)$.

Demostración: La unicidad es clara a a partir del principio de identidad, ya que si hubiera dos $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ verificarían $(D, f) = (D, g) = (D, g_2)$.

Para la existencia, definimos g se la siguiente manera, para cada $z \in \Omega$ existe γ_z un camino contenido en Ω con extremos z_0 y z . Si (D_γ, f_γ) es la prolongación final de (D, f) a lo largo de γ , defino $g(z) = f_\gamma(z)$.

Consideramos el conjunto

$$\Gamma = \{z \in \Omega : \text{Existe un entorno } U_z \text{ de } z \text{ donde } g \text{ es holomorfa}\} \subset \Omega.$$

Si $z \notin \Gamma$, tomo un camino γ de extremos z_0 y z y prolongo analíticamente (D, f) , el resultado será $(D, f)_\gamma$, en virtud del Teorema de Monodromía 1.12, $(D, f)_\gamma = (D_\gamma, g)$, por tanto $z \in \Gamma$. Luego $\Omega = \Gamma$, pero falta aún demostrar que está bien definida como función, para ello basta ver que no depende del camino γ tomado.

Consideramos el conjunto

$$\Gamma = \{z \in \Omega : \text{El valor de } g(z) \text{ no depende de } \gamma_z\} \subset \Omega.$$

Veamos que es abierto, cerrado y no vacío

1. $z_0 \in \Gamma$
2. Si $z \in \Gamma$ y tomamos una región U , entorno de z entonces (U, f_γ) no depende del camino γ . Si tengo $w \in U$ y considero un camino γ_w de extremos z_0 y w , entonces, si β es un camino contenido en U de extremos w, z ,

$$g = f_{\gamma_w * \beta * \beta^{-1}} = (f_{\gamma_w * \beta})_{\beta^{-1}}.$$

En particular $f_{\gamma_w * \beta}$ no depende del camino, por ser $z \in \Gamma$. Como U es una región, entonces $(f_{\gamma_w * \beta})_{\beta^{-1}}$ tampoco depende del camino β y por tanto $U \subset \Gamma$.

3. Si $z \notin \Gamma$ el razonamiento es idéntico al anterior.

Como el conjunto Ω es conexo entonces $\Gamma = \Omega$ ■

Corolario 2.74

Si G es una región y $\Omega = G \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$, consideramos (D, f) un elemento de función prolongable analíticamente a lo largo de todo camino contenido en Ω tal que tiene crecimiento moderado en todo punto de G . Si para cada lazo γ de extremo z_0 , la prolongación analítica final de (D, f) por γ es (D, f) , $(D, f)_\gamma = (D, f)$, entonces existe una única $g \in \mathcal{M}(G)$ tal que $(D, f) = (D, g)$.

³Si M es una extensión diferencial de K relativa a la ecuación $Ly = 0$. Al grupo de automorfismos de M que son la identidad en K lo llamaremos grupo de Galois diferencial de la extensión $K \subset M$, será denotado como $Gal_K(M)$.

Lema 2.75

Sea Ω un dominio y una región $U \subset \Omega$. Si consideramos $\{(U, y_1), \dots, (U, y_n)\}$ prolongables a lo largo de todo camino contenido en Ω . Tales que si γ es un lazo de extremos en U , contenido en Ω , entonces $(U, (y_k)_\gamma)$ es \mathbb{C} -combinación lineal de elementos de $\{(U, y_1), \dots, (U, y_n)\}$. Si $K = \mathcal{M}(G)$ y $M = K \langle (U, y_1), \dots, (U, y_n) \rangle$, entonces la aplicación prolongación analítica

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M \\ y &\mapsto y_\gamma \end{aligned}$$

Está bien definida y pertenece a $\text{Gal}_K(M)$.

Demostración: Está bien definida, ya que si considero un elemento $y \in M \leq \mathcal{M}(U)$, entonces, como M es un subcuerpo del cuerpo de funciones meromorfas tales que admiten prolongación analítica a lo largo de todo camino contenido en Ω , se verifica que (U, y) admite prolongación analítica a lo largo de todo camino contenido en Ω . Si tomo además $y \in K = \mathcal{M}(G)$, en virtud del Teorema de Monodromía 1.12, se tiene que $y_\gamma = y$. ■

Corolario 2.76

El grupo $\text{Gal}_K(M)$ de la ecuación $Ly = 0$ tiene como subgrupo uno isomorfo a el grupo de monodromía de la ecuación $Ly = 0$ en $z_0 \in G$.

Estamos entonces preparados para demostrar el siguiente resultado el cual, en algunos textos como [Zo], se conoce como teorema de Schlesinger⁴.

Teorema 2.77

Si Ω es una región y $L \in \mathcal{D}(D)$ es un operador regular en Ω , entonces las soluciones de $Ly = 0$ son algebraicas sobre $\mathcal{M}(\Omega)$ si y solo si su grupo de monodromía \mathfrak{M} es finito.

Demostración: Consideramos G una región de Ω , una solución en G , $y \in \mathcal{S}(G, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ y $z_0 \in G$. Si denotamos por Ω^* a Ω sin los puntos singulares de L , definimos

$$\Gamma = \{\gamma : \text{Es un lazo de extremo } z_0 \text{ contenido en } \Omega^*\}. \tag{2.56}$$

Sea el conjunto $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, de cardinal finito, y definimos el polinomio P de la siguiente manera:

$$P(w) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (w - y_\gamma). \tag{2.57}$$

Claramente P se anula solamente en $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, veamos que $P \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$.

$$P(w) = \prod_{k=1}^n (w - y_k) = w^n + S_1 w^{n-1} + \dots + S_{n-1} w + S_n,$$

⁴En realidad el teorema de Schlesinger en [Zo], hace referencia a un resultado más potente, el cual dice: Si el operador $L \in \mathcal{D}(D)$ es Fuchsiano, entonces la clausura algebraica de su grupo de monodromía es isomorfa al grupo de Galois de la correspondiente extensión de Picard-Vessiot de $\mathbb{C}(z)$. Este resultado tiene como consecuencia el Teorema 2.77, pero no demostraremos el enunciado general, ya que se necesita profundizar en teoría de Galois diferencial más de lo que es el objeto del texto.

donde, en virtud de las fórmulas de Cardano Vieta, si consideramos una numeración de $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$,

$$S_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} y_{i_1} \cdots y_{i_k}. \quad (2.58)$$

Por tanto, solo nos queda probar que las funciones definidas en (2.58) son elementos de $\mathcal{M}(\Omega)$. Lo importante es darse cuenta de que $S_k = S_k(\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})$ es una función simétrica de las soluciones.

Por ser cada una de $y_k \in \mathcal{S}(G, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$, $k = 1, \dots, n$, admiten prolongación a lo largo de cualquier camino contenido en Ω^* . Por ende S_k , $k = 1, \dots, n$, también admitirá prolongación analítica a lo largo de cualquier camino en Ω que no contenga los puntos singulares de L .

Para ver que $S_k \in \mathcal{M}(\Omega^*)$, basta probar que la prolongación analítica a lo largo de $\beta \in \Gamma$

$$\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \rightarrow \{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \quad (2.59)$$

$$y_\gamma \mapsto (y_\gamma)_\beta \quad (2.60)$$

es una biyección, ya que las S_k son simétricas respecto a $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. La sobreyectividad es inmediato por construcción de $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, en cuanto a la inyectividad, si $(y_\gamma)_\beta = (y_\alpha)_\beta$ entonces como $(y_\gamma)_\beta = y_{\gamma*\beta}$, entonces $y_{\gamma*\beta} = y_{\alpha*\beta}$. Si prolongamos a lo largo de β^{-1} concluimos que $y_\gamma = y_\alpha$.

Hemos probado que S_k verifica las hipótesis del Lema 2.73, por tanto $S_k \in \mathcal{M}(\Omega^*)$. Por otro lado, como el conjunto de singularidades es aislado, en cada uno de ellos S_k tendrá un polo o una singularidad esencial, pero esto último no puede suceder por la condición de regularidad de L . Por tanto $S_k \in \mathcal{M}(\Omega)$ y el polinomio $P \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$, con lo que y es algebraica sobre $\mathcal{M}(\Omega)$.

Para la otra implicación, supongamos que tenemos $y \in \mathcal{S}(G, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ y $z_0 \in G$, algebraica sobre $\mathcal{M}(\Omega)$, sea $P \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ tal que $P(y) = 0$. Consideramos $\gamma \in \Gamma$, definido como en (2.56), e y_γ , la correspondiente prolongación, estudiemos como se prolonga la función $P(f)$, $P(f)_\gamma$, para cada (G, f) prolongable a lo largo de γ .

$$\begin{aligned} P(f) &= f^n + b_1 f^{n-1} + \cdots + b_{n-1} f + b_n, \quad b_k \in \mathcal{M}(\Omega), \\ P(f)_\gamma &= (f^n + b_1 f^{n-1} + \cdots + b_{n-1} f + b_n)_\gamma \\ &= (f^n)_\gamma + (b_1 f^{n-1})_\gamma + \cdots + (b_{n-1} f)_\gamma + (b_n)_\gamma \\ &= (f_\gamma)^n + (b_1)_\gamma (f_\gamma)^{n-1} + \cdots + (b_{n-1})_\gamma f_\gamma + (b_n)_\gamma \\ &= (f_\gamma)^n + b_1 (f_\gamma)^{n-1} + \cdots + b_{n-1} f_\gamma + b_n = P(f_\gamma). \end{aligned}$$

Por tanto, si $y \in \mathcal{S}(G, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ y $P(y) = 0$, entonces para cada $\gamma \in \Gamma$, $P(y_\gamma) = 0$. En consecuencia, el grupo de monodromía no puede actuar de forma infinita sobre y . ■

Definición 2.78

Sea G una región, $z_0 \in G$ y γ un lazo de extremo z_0 . Si (f, G) un elemento de función prolongable analíticamente a lo largo de γ . Diremos que (f, G) reduce en norma por prolongaciones por γ si para todo compacto $K \subset G$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} |f_{\gamma^n}(z)| = 0. \quad (2.61)$$

En contraposición diremos que (f, G) aumenta en norma por prolongaciones por γ si para todo compacto $K \subset G$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} |f_{\gamma^n}(z)| = \infty. \quad (2.62)$$

En caso contrario diremos que es estable en norma por prolongaciones por γ .

Consideramos G una región de Ω , una solución en G , $y \in \mathcal{S}(G, n, \{a_k\}_{k=1}^n)$ y $z_0 \in G$. Si denotamos por Ω^* a Ω sin los puntos singulares de L . Con esta notación enunciamos el siguiente resultado.

Lema 2.79

Si el grupo de monodromía de un operador L es finito, entonces (G, y) es estable en norma por prolongaciones por γ , para todo camino γ contenido en G^* .

Demostración: Razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que aumenta en norma, el razonamiento para reduce en norma es idéntico. Luego existe un camino γ contenido en G^* tal que existe un compacto $K \subset G$ verificando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} |y_{\gamma^n}(z)| = \infty.$$

Como el grupo es finito entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y_{\gamma^n} = y$, con lo que llegamos a contradicción. ■

En un contexto algo diverso, existirán situaciones en las cuales el grupo de monodromía de un cierto operador L actúe de forma trivial en el conjunto de soluciones.

Por tanto consideramos de nuevo Ω una región, $L \in \mathcal{D}^n(D)$ un operador de grado n en Ω , si Σ_L es el conjunto de puntos singulares, entonces para cada $P \in \Sigma_L$, que será un punto aislado, existirá una bola $U = B(P, r)$, tal que $\Sigma_L \cap U = \{P\}$. Si consideramos una región $V \subset B^*(P, r)$, entonces existirá un conjunto de soluciones de $L = 0$ en V , las cuales se denotan por $Y_{V,L}$. Con esta notación se define:

Definición 2.80

Se dice que $P \in \Sigma_L$ es una singularidad evitable para L , si la monodromía actúa de forma trivial en un entorno de P . Es decir, para cada $V \subset B^*(P, r)$, todo lazo γ , con punto inicial en V y soporte contenido en $B^*(P, r)$, y todo $y \in Y_{V,L}$, se tiene que la prolongación analítica a lo largo de γ y_γ , verifica que $y_\gamma = y$.

Nota 2.81

Si el operador L tiene una singularidad evitable en P , se tiene que, para cada $y \in Y_{V,L}$ existe, en virtud del Lema 2.73, una única función $\tilde{y} \in \mathcal{H}(B^*(P, r))$ tal que $\tilde{y}|_V = y$. Por tanto tenemos una base de n soluciones en $B^*(P, r)$. Si además el operador L es regular en P , en consecuencia del Corolario 2.74, se tiene que cada $\tilde{y} \in \mathcal{M}(B(P, r))$ y tendremos una base de n soluciones meromorfas en $B(P, r)$.

Lema 2.82

Un operador de grado n en Ω , $L \in \mathcal{D}^n(D)$, tiene una singularidad evitable en $P \in \Sigma_L$

si y solo si existe $r > 0$ y n funciones independientes, $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathcal{M}(B(P, r))$, verificando $Ly_k = 0$ en $B(P, r)$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

CAPÍTULO 3

ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Llamamos función hipergeométrica a la función compleja, representada para $|z| < 1$ por la serie siguiente:

$$F(a, b, c|z) = 1 + \frac{ab}{1!c}z + \frac{(a)(a+1)(b)(b+1)}{2!(c)(c+1)}z^2 + \dots,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{C}$. Resulta ser una de las funciones especiales más importantes en análisis matemático, y aparece en diversas aplicaciones.

El origen de este tipo de funciones se lo debemos a Wallis (1616-1703), el cual, en su libro '*Arithmetica Infinitorum*', nombra un tipo de sucesiones, las cuales, a diferencia de las geométricas $1, a, a^2, \dots$, formadas multiplicando el término anterior por una razón constante, tienen una razón multiplicativa variable. A este tipo de sucesiones las llamó '*hipergeométricas*'.

Este tipo de series siguieron siendo estudiadas al mismo tiempo por autores como J. Stirling (1692-1770), D. Bernoulli (1700-1782), C. Goldbach (1690-1764) o L. Euler (1707-1783). J. Stirling siempre reconoció el alto valor de las investigaciones de Wallis en el problema de la interpolación del factorial, es más, con un manejo brillante del análisis numérico, llegó a probar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Euler entre sus numerosas contribuciones a este estudio formuló el problema de estudiar la función

$$F(a, b, c|z) = 1 + \frac{ab}{1!c}z + \frac{\Pi(a+1)(b+1)}{2(c+1)}z^2 + \frac{\Pi(a+2)(b+2)}{3(c+2)}z^3 + \dots,$$

donde Π representa el término anterior. Esta es, por supuesto, la función hipergeométrica antes mencionada. Euler demostró que esta serie era la solución de una ecuación diferencial equivalente a:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{dy}{dz} - aby = 0,$$

y si se escribe $y = (1-z)^n u$, entonces u satisface una ecuación equivalente a:

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + (c - (a+b-2c-1)z)\frac{du}{dz} - (c-a)(c-b)u = 0.$$

Esta es una de las llamadas transformaciones de la ecuación hipergeométrica que veremos en este texto.

La evolución del término hipergeométrico, desde la descripción de un tipo particular de sucesiones dada por Wallis, a las series de potencias que son solución de una determinada ecuación diferencial de orden dos dada por Euler, finalmente tomó su forma actual en los textos de Gauss (1777-1855). Introdujo la notación $F(a, b, c, z)$ para referirse a las funciones hipergeométricas, estudió los valores de $|z|$ para los cuales la serie converge o diverge, y también encontró relaciones lineales entre diferentes funciones hipergeométricas. Los resultados obtenidos por Gauss incluyen una larga lista de casos que aparecen en las aplicaciones y son particularmente útiles en la aproximación numérica de funciones. Finalmente realiza una brillante discusión sobre la convergencia del valor $F(a, b, c, 1)$, que demostraba que los argumentos de Gauss a los problemas subyacentes estaban muy por encima de los dados por sus predecesores.

En este capítulo estudiaremos este tipo de funciones, las observaremos principalmente desde el punto de vista de soluciones de un tipo particular de ecuaciones Fuchsianas de orden dos, y daremos las condiciones necesarias para su convergencia y existencia. Veremos también las relaciones entre las diferentes soluciones de la ecuación y aplicaremos esto al problema de prolongación analítica de la función hipergeométrica.

Como estamos hablando de una ecuación Fuchsiana, podremos estudiar su grupo de monodromía y los casos en los que estos grupos son más sencillos, los finitos. Para los parámetros en los que este grupo es finito, tendremos soluciones algebraicas, y por lo tanto habremos encontrado los casos en los que la función hipergeométrica es algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$. Schwarz (1843-1921) encontró una relación entre el cociente de funciones hipergeométricas y aplicaciones conformes en un determinado tipo de triángulos, y donde las prolongaciones analíticas se convertían en reflexiones sobre los lados de los mismos. Estudiando los casos en los cuales los grupos de reflexiones eran finitos, concluyó con una lista de 15 casos en los cuales se puede verificar cuando una función hipergeométrica es algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$. Nosotros analizaremos estos resultados y demostraremos, mediante métodos tanto analíticos, como geométricos, o incluso algebraicos, cada uno de ellos hasta llegar a la lista de Schwarz, y conocer así un criterio de clasificación de las funciones hipergeométricas.

Para el tratamiento de este capítulo hemos seguido, a modo de guión, las notas sobre la ecuación hipergeométrica escritas por Beukers [Be]. Este texto seguido no es demasiado preciso, como bien advierte el autor al inicio del mismo, por ello nos hemos dedicado a profundizar en estas notas, corrigiéndolas y completándolas.

3.1. Ecuaciones Fuchsianas de orden 2

En la práctica el estudio de las ecuaciones Fuchsianas es realmente complicado, nos restringiremos a los casos más simples, cuando el operador es de orden 2. Aún así tenemos que diferenciar la ecuación por el número de puntos singulares con los que cuenta, estudiaremos los casos en los que este conjunto tiene cardinal a lo sumo tres.

Analizaremos los tres casos al unísono, puesto que si tenemos dos o un punto singular solamente, podremos considerarlo como si lo fuera y luego, la propia regularidad del operador, nos lo reflejará tanto en la solución como en la actuación de la monodromía.

Por tanto suponemos que tenemos el operador $L \in \mathcal{D}^2(D)$

$$L = D^2 + pD + q, \quad p, q \in \mathbb{C}(z), \quad D = \frac{d}{dz}. \quad (3.1)$$

Para que sea Fuchsiano debemos además exigir que p para cada punto tenga a lo sumo un polo de orden uno, y que q para cada punto tenga a lo sumo un polo de orden dos.

El siguiente teorema caracteriza las ecuaciones Fuchsianas de orden dos

Teorema 3.1

Un operador de la forma (3.1) es Fuchsiano con puntos singulares

$$\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = \infty\}$$

si y solo si p, q verifican:

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{z - x_k}, \quad a_k \in \mathbb{C}. \\ &= \frac{r_p(z)}{\prod_{k=0}^{m-1} (z - x_k)}, \quad r_p \in \mathbb{C}[z] \text{ de grado } m - 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$q(z) = \frac{r_q(z)}{\prod_{k=0}^{m-1} (z - x_k)^2}, \quad r_q \in \mathbb{C}[z] \text{ de grado } 2(m - 1). \quad (3.3)$$

Demostración: $p \in \mathbb{C}(z)$, por tanto de la forma $p = r/s$, con $r, s \in \mathbb{C}[z]$. Como es Fuchsiana, los ceros de s son simples, por lo tanto $s(z) = s_0 \prod_{k=0}^{m-1} (z - x_k)$. Como en ∞ tenemos a lo sumo un polo simple y el grado de s es m , entonces el grado de r es a lo sumo $m - 1$. Descomponiendo en fracciones simples obtenemos

$$p(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{z - x_k} \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Con esto hemos demostrado (3.2), para demostrar (3.3) el razonamiento es el mismo. ■

Al igual que en el caso general, hablaremos de exponentes locales y del esquema de Riemann tal y como se realizó en 2.6.

En el caso de orden dos, el polinomio indicial, ver Definición 2.58, es de grado dos. Por tanto el esquema de Riemann (2.53) será de la forma:

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & \cdots & x_m \\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^m \\ \alpha_2^0 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_2^m \end{array} . \quad (3.4)$$

Aplicando el Teorema 2.66, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2

La suma de todos los exponentes locales solo depende del número de puntos singulares. Es más, se verifica la relación

$$\sum_{k=0}^m (\alpha_1^k + \alpha_2^k) = m - 1. \quad (3.5)$$

Sea T una transformación de Möbius y $L \in \mathcal{D}^2(D)$ un operador Fuchsiano de orden dos (3.1). Consideramos el operador Pull-Back por T , denotado por T^* y definido tal que, para cada y , $\tilde{y} = T^*y = y \circ T$. Si y es solución de $Ly = 0$, entonces \tilde{y} será solución de $U\tilde{y} = 0$, con

$$U = D^2 + \left(T'T^*(p) - \frac{T''}{T'} \right) D + T^*(q)T^2.$$

Con esto podemos demostrar el siguiente lema:

Lema 3.3

Si T es una transformación de Möbius entonces el operador

$$U = D^2 + \left(T'T^*(p) - \frac{T''}{T'} \right) D + T^*(q)T^2, \quad (3.6)$$

es Fuchsiano si y solo si lo es el operador L definido en (3.1). Además se verifica que U tiene esquema de Riemann

$$\frac{T^{-1}(x_0) \quad T^{-1}(x_1) \quad \cdots \quad T^{-1}(x_m)}{\begin{matrix} \alpha_1^0 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^m \\ \alpha_2^0 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_2^m \end{matrix}}. \quad (3.7)$$

Demostración: Sea \tilde{y} solución de $U\tilde{y} = 0$, si $S = T^{-1}$, entonces $y = S^*\tilde{y}$ es solución de $Ly = 0$. Por tanto como y tiene crecimiento moderado si y solo si lo tiene \tilde{y} se concluye la primera parte del resultado.

En cuanto a la que se refiere al esquema de Riemann, demostraremos para uno de los puntos singulares, supongamos que el polinomio indicial de L en z_0 es $I_{z_0}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda\eta + \zeta$, si se realizan los siguientes límites, suponiendo que $S(x_0) \neq \infty$,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow S(x_0)} ((z - S(x_0))T'(z))^2 q(T(z)) &= \lim_{z \rightarrow x_0} (S(z) - S(x_0))T'(S(z))^2 q(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow x_0} \left(\frac{S(z) - S(x_0)}{S'(z)} \right)^2 q(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow x_0} \left(\frac{S(z) - S(x_0)}{z - x_0} \frac{1}{S'(z)} \right)^2 (z - x_0)^2 q(z) = \eta, \\ \lim_{z \rightarrow S(x_0)} (z - S(x_0)) \left(T'(z)p(T(z)) - \frac{T''(z)}{T'(z)} \right) &= \lim_{z \rightarrow x_0} (S(z) - S(x_0)) \left(T'(S(z))p(z) - \frac{T''(S(z))}{T'(S(z))} \right) \\ &= \zeta - \lim_{z \rightarrow S(x_0)} (z - S(x_0)) \left(\frac{T''(z)}{T'(z)} \right) \\ &= \zeta. \end{aligned}$$

Por tanto el polinomio indicial es el mismo y la primera columna del esquema de Riemann no varía.

En el caso de que consideremos el punto $x_m = \infty$ o si $S(x_0) = \infty$, los cálculos son similares. ■

De ahora en adelante nos centraremos en el caso de tres puntos singulares, supongamos que son $A, B, C \in \overline{\mathbb{C}}$. Tendremos el esquema de Riemann siguiente

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array} . \quad (3.8)$$

Sabemos que existe una única aplicación de Möbius T tal que aplica $0, 1, \infty \mapsto A, B, C$. En virtud del Lema 3.3, si y es solución de $Uy = 0$, con

$$U = D^2 + \left(T'T^*(p) - \frac{T''}{T'} \right) D + T^*(q)T^2,$$

el cual tiene esquema de Riemann

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array} . \quad (3.9)$$

Entonces $y(T^{-1})$ es solución de $Ly = 0$.

Por tanto a la hora de estudiar las soluciones, podremos suponer que el esquema de Riemann es de la forma (3.9).

Pero podremos simplificar aún más el esquema de Riemann, el siguiente resultado nos dará la forma que luego estudiaremos a lo largo de esta sección.

Lema 3.4

Si y es solución de $Ly = 0$, con puntos singulares $0, 1, \infty$, entonces $w(z) = z^\eta y(z)$ es solución de

$$w''(z) + \left(-\eta \frac{2}{z} + p(z) \right) w'(z) + \left(\eta \frac{1}{z^2} + q(z) + \eta^2 \frac{1}{z^2} - \eta p(z) \frac{1}{z} \right) w(z) = 0. \quad (3.10)$$

O de otra forma $Uw = 0$, con U el operador

$$U = D^2 + (-\eta F_{-1} + p) D + (\eta F_{-2} + q(z) + \eta^2 F_{-2} - \eta p F_{-2}). \quad (3.11)$$

Donde $F_k(z) = z^k$.

Además el esquema de Riemann de U es de la forma

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \alpha + \eta & \beta & \gamma - \eta \\ \alpha' + \eta & \beta' & \gamma' - \eta \end{array} .$$

Demostración : Para hallar el polinomio indicial de (3.11) en 0 hallamos los siguientes límites.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} z \left(-\eta \frac{2}{z} + p(z) \right) &= p_{-1} - 2\eta, \\ \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \left(\eta \frac{1}{z^2} + q(z) + \eta^2 \frac{1}{z^2} - \eta p(z) \frac{1}{z} \right) &= q_{-1} + \eta + \eta^2 - p_{-1}\eta.\end{aligned}$$

El polinomio será

$$f(r) = r(r-1) + r(p_{-1} - 2\eta) + q_{-1} + \eta + \eta^2 - p_{-1}\eta.$$

Evaluándolo en $\alpha + \eta$, como $\alpha(\alpha-1) + \alpha p_{-1} + q_{-1} = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}f(\alpha + \eta) &= (\alpha + \eta)((\alpha + \eta) - 1) + (\alpha + \eta)(p_{-1} - 2\eta) + q_{-1} + \eta + \eta^2 - p_{-1}\eta \\ &= \alpha^2 + \eta^2 + 2\alpha\eta - \alpha - \eta + \alpha p_{-1} - 2\alpha\eta + \eta p_{-1} - 2\eta^2 + q_{-1} \\ &\quad + \eta + \eta^2 - p_{-1}\eta \\ &= \alpha^2 - \alpha + \alpha p_{-1} + q_{-1} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto las raíces en cero son $\alpha + \eta$, $\alpha' + \eta$. Para hallar el polinomio indicial de (3.11) en ∞ hallamos los siguientes límites.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \infty} z \left(-\eta \frac{2}{z} + p(z) \right) &= p_{\infty} - 2\eta, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left(\eta \frac{1}{z^2} + q(z) + \eta^2 \frac{1}{z^2} - \eta p(z) \frac{1}{z} \right) &= q_{\infty} + \eta + \eta^2 - p_{\infty}\eta.\end{aligned}$$

El polinomio será

$$f(r) = r(r+1) + r(p_{\infty} - 2\eta) + q_{\infty} + \eta + \eta^2 - p_{\infty}\eta.$$

Evaluándolo en $\gamma + \eta$, como $\gamma(1 + \gamma) - \gamma p_{\infty} + q_{\infty} = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}f(\gamma + \eta) &= (\gamma + \eta)((\gamma + \eta) + 1) - (\gamma + \eta)(p_{\infty} - 2\eta) + q_{\infty} + \eta + \eta^2 - p_{\infty}\eta \\ &= \gamma^2 + \eta^2 + 2\gamma\eta + \gamma + \eta - \gamma p_{\infty} + 2\gamma\eta + \eta p_{\infty} - 2\eta^2 \\ &\quad + q_{\infty} + \eta + \eta^2 - p_{\infty}\eta \\ &= \gamma^2 + \gamma + \gamma p_{\infty} + q_{\infty} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto las raíces en infinito son $\gamma + \eta$, $\gamma' + \eta$.

En último lugar, para analizar el comportamiento en 1, realizamos los cálculos

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left(-\eta \frac{2}{z} + p(z) \right) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)p(z), \\ \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \left(\eta \frac{1}{z^2} + q(z) + \eta^2 \frac{1}{z^2} - \eta p(z) \frac{1}{z} \right) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 q(z).\end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio indicial no varía en 1. ■

Teorema 3.5

Todo operador $L \in \mathcal{D}^2(D)$ Fuchsiano con tres puntos singulares puede ser reducido a uno $U \in \mathcal{D}^2(D)$, con esquema de Riemann de la forma

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \hline 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} . \quad (3.12)$$

En el sentido de que conociendo las soluciones de $Uw = 0$ para ciertos exponentes locales, conoceremos las de $Ly = 0$.

Demostración: Sea L con puntos singulares A, B, C y esquema de Riemann (3.8), si T es la transformación que aplica $0, 1, \infty \mapsto A, B, C$ entonces $\tilde{y} = y \circ T$ es solución de una ecuación con esquema de Riemann (3.9). La función $z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}\tilde{y}(z)$ será solución de una ecuación con esquema de Riemann

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \hline 0 & 0 & \gamma - \alpha - \beta \\ \alpha' + \alpha & \beta' + \beta & \gamma' - \alpha - \beta \end{array} .$$

Tomando $a = \gamma - \alpha - \beta$, $b = \gamma' - \alpha - \beta$ y $c = \alpha' + \alpha$ el esquema es (3.12). Tomando una solución $x(z)$ entonces $z^\alpha(1-z)^\beta x(T^{-1}(z))$ es una solución de $Ly = 0$. ■

Ahora abordaremos el tema de si dado un esquema del tipo (3.12), existe algún $L \in \mathcal{D}^2(D)$ Fuchsiano tal que tenga este esquema, y si así fuera es único.

Definición 3.6

Dados $a, b, c \in \mathbb{C}$ defino el operador hipergeométrico como

$$L_{a,b,c} = D^2 + \frac{(a+b+1)z-c}{z(z-1)}D + \frac{ab}{z(z-1)}. \quad (3.13)$$

En ocasiones, nos referiremos a la ecuación $L_{a,b,c} = 0$ como la ecuación hipergeométrica de parámetros a, b, c .

Teorema 3.7

Dados $a, b, c \in \mathbb{C}$, el único operador que tiene (3.12) como esquema de Riemann es $L_{a,b,c}$.

Demostración: En primer lugar, si suponemos que $L = D^2 + pD + q$, gracias al Teorema 3.1, sabemos que

$$p(z) = \frac{Az+B}{(z-1)z}, \quad (3.14)$$

$$q(z) = \frac{Cz^2 + Dz + E}{(z-1)^2z^2}. \quad (3.15)$$

Un cálculo inmediato muestra que $\lim_{z \rightarrow 0} zp(z) = -B$, $\lim_{z \rightarrow 0} z^2q(z) = E$, luego el polinomio indicial en 0 es $f(r) = r(r-1) - Br + E$. Entonces las raíces, haciendo uso de las fórmulas de Cardano Vieta, verifican $0 + 1 - c = B + 1$, $0(1-c) = E$, es decir, $B = -c$ y $E = 0$.

De forma análoga, analizando el polinomio indicial en 1, se tiene $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)p(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow 0} (z-1)^2 q(z) = C + D$, por lo tanto $A = 1 + a + b$ y $C = -D$.

Por último estudiamos esto mismo en ∞ donde se tiene $\lim_{z \rightarrow \infty} zp(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 q(z) = C$. En consecuencia $A = 1 + a + b$ y $C = ab$.

Con estos valores de los coeficientes tenemos que (3.14) es de la forma:

$$p(z) = \frac{(1+a+b)z - c}{(z-1)z},$$

$$q(z) = \frac{abz^2 - abz}{(z-1)^2 z^2} = \frac{ab}{(z-1)z}.$$

Estos p , q son justamente los de (3.13). ■

3.2. Resolución de la Ecuación

En la sección anterior hemos visto que el estudio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con tres puntos singulares se reduce al estudio del operador (3.13).

Si lo ponemos en función del operador δ_k , $k = 0, 1$ en lugar de D , obtenemos

$$\delta_0 = zD, \quad z^2 L_{a,bc} = \delta_0^2 + \left(\frac{(1+a+b)z - c}{z-1} - 1 \right) \delta_0 + z \frac{ab}{z-1}. \quad (3.16)$$

$$\delta_1 = (z-1)D, \quad (z-1)^2 L_{a,bc} = \delta_1^2 + \left(\frac{(1+a+b)z - c}{z} - 1 \right) \delta_1 + (z-1) \frac{ab}{z}. \quad (3.17)$$

Busquemos una solución formal, en forma de serie, en un entorno de 0.

Para ello suponemos que existe $w \in \mathbb{C}[[z]]$ solución de la misma, es decir,

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n. \quad (3.18)$$

Derivando formalmente en (3.18) obtenemos:

$$w'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n w_n z^{n-1},$$

$$w''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) w_n z^{n-2}.$$

Introduciendo estos valores en (3.13) o en (3.17).

$$\begin{aligned}
0 &= (z)(z-1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)w_n z^{n-2} \\
&+ ((a+b+1)z-c) \sum_{n=1}^{\infty} n w_n z^{n-1} + ab \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} w_n n(n-1)(z^n - z^{n-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} n w_n ((a+b+1)z^n - c z^{n-1}) + \sum_{n=0}^{\infty} w_n ab z^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} w_n n(n-1)z^n - \sum_{n=1}^{\infty} w_{n+1} n(n+1)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n w_n (a+b+1)z^n \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)w_{n+1} c z^n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n ab z^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (w_n n(n-1) - w_{n+1} n(n+1) + n w_n (a+b+1) - (n+1)w_{n+1} c + w_n ab) z^n \\
&+ (w_1(a+b+1+ab) + (2-2cw_2))z + (-w_1 c + abw_0).
\end{aligned}$$

Si suponemos que $w_0 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
-w_1 c + abw_0 &= 0, \\
w_1(a+b+1+ab) - w_2(2+2c) &= 0, \\
w_n(n(n-1) + n(a+b+1) + ab) - w_{n+1}(n(n+1) + (n+1)c) &= 0, \quad n > 1. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Por tanto obtenemos que, para poder continuar en (3.19), $-c \neq n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Esto no debe de extrañarnos, basta observar el método de Frobenius para este tipo de sistemas, este nos dice que existe una solución de la forma $z^\lambda s(z)$, con λ el cero del polinomio indicial con mayor norma y $s(z)$ holomorfa en 0.

Por inducción se prueba el siguiente resultado:

Teorema 3.8

Si $-c \notin \mathbb{N}$, entonces existe una única aplicación, $F(a, b, c|z) \in \mathcal{H}(B(0, 1))$, verificando que

$$L_{a,b,c}F(a, b, c|z) = 0 \text{ para } z \in B(0, 1) \text{ y } F(a, b, c|0) = 1.$$

Además su desarrollo de Taylor en 0 es

$$F(a, b, c|z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n, \quad |z| < 1. \quad (3.20)$$

Donde el símbolo de Pochhammer $(x)_n$ está definido por

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = (x)(x+1) \cdots (x+n-1), \text{ para } n > 0.$$

A la función (3.20) se la conoce como Función Hipergeométrica de Gauss.

Nota 3.9

Si $-c \in \mathbb{N}$, entonces el Teorema 3.8 puede extenderse si se da una de las siguientes opciones:

- $a = c + n$, $n \in \{0, 1, \dots, -c\}$.
- $b = c + n$, $n \in \{0, 1, \dots, -c\}$.

Entonces la función (3.20) es un polinomio de grado a o b respectivamente.

Demostración: En caso de existir una solución holomorfa en 0, esta admitirá un desarrollo formal en 0. La ecuación (3.19), junto con un razonamiento inductivo, nos confirma que ha de ser de la forma (3.20).

Por tanto solo nos falta analizar la convergencia. De forma general, se puede demostrar, que en los problemas de este tipo, una vez encontrada la solución en forma de serie, convergerá en la bola centrada en cero de mayor radio que no contenga singularidades de $L_{a,b,c}$. Pero en este caso no nos hace falta este resultado, basta observar que, si aplicamos el criterio del cociente a

$$w_n(z) = \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^n,$$

se verifica que:

$$\left| \frac{w_{n+1}(z)}{w_n(z)} \right| = \left| \frac{(a-n)(b-n)}{(n+1)(c-n)} \right| |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z|.$$

Luego convergerá absolutamente para $z \in B(0, 1)$, es decir, el radio de convergencia de la serie es 1. ■

Ejemplo 3.10

Daremos unos ejemplos de funciones conocidas que pueden ser vistas como funciones hipergeométricas:

$$\begin{aligned}(1-z)^a &= F(a, 1, 1|z), \\ \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= 2zF(1/2, 1, 3/2|z^2), \\ \arcsin(z) &= zF(1/2, 1/2, 3/2|z^2).\end{aligned}$$

Si bien tenemos que $F(a, b, c|z)$ está bien definida en $B(0, 1)$, como es solución de una ecuación Fuchsiana, admitirá prolongaciones analíticas a lo largo de caminos que no pasen por los puntos singulares $0, 1, \infty$.

Existen varios procedimientos para prolongar analíticamente esta función, uno de ellos es mediante el siguiente lema.

Integrando en el camino de Pochhammer γ , representada en la figura 3.2, la cual tiene índice cero en todo punto. Una parametrización precisa¹ de la misma se puede encontrar

¹La parametrización exacta dada en [He] es

$$\begin{aligned}\gamma &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \left(\cosh\left(\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + ti\right) \right)^2\end{aligned}\tag{3.21}$$

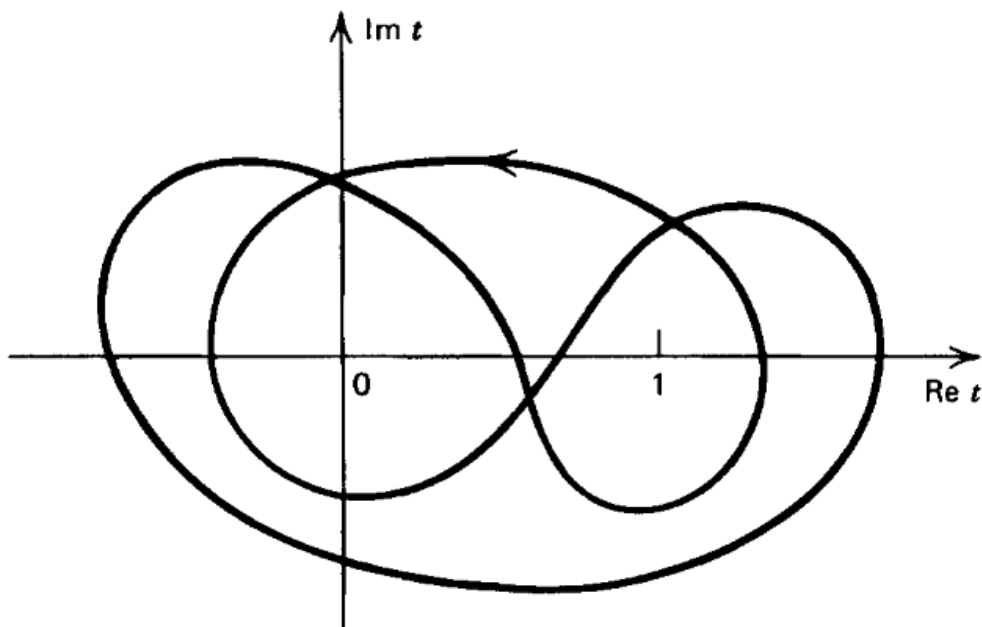


Figura 3.1: Camino de Pochhammer

en [He]. La caracterización de este camino, salvo homotopías, es principalmente el siguiente: Pongamos que el punto de partida es $1/2$, en primer lugar rodeamos 0 en sentido positivo con un lazo simple. Tras esto rodeamos 1 con un lazo simple orientado negativamente. Luego repetimos el procedimiento pero cambiando las orientaciones, es decir, en 0 la orientación será negativa y en 1 positiva.

Este lazo tiene índice² nulo en todo punto, esto significa, que existe un argumento continuo en γ , y por tanto $\log(t)$ puede ser definida como función localmente holomorfa en γ y que, por tanto, la integral (3.22) va a tener un sentido no ambiguo en γ .

Lema 3.11

Si $\Re(c) > \Re(b) > 0$ entonces se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt = \frac{1}{(1-e^{2\pi ib})(1-e^{2\pi i(c-b)})} \int_{\gamma} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}. \quad (3.22)$$

Demostración: La demostración se basa en integrar a lo largo de caminos homótopos a γ ,

En la Figura 3.2 se puede observar una representación gráfica, hecha con Matlab, de la parametrización (3.21).

²Para observar una definición concreta de índice para curvas rectificables, que es nuestro caso, observar [Co], Definition 5.2.

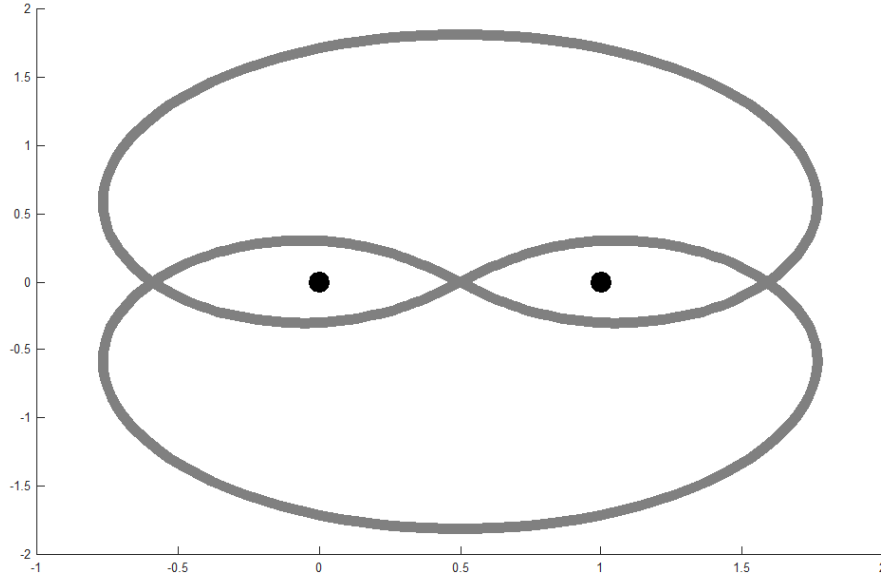


Figura 3.2: Camino de Pochhammer, para la parametrización (3.21).

en los cuales se trabaja de forma más sencilla. Supongamos que estamos en las hipótesis del Lema 3.13, es decir a, b , veamos que las integrales (3.28) coincide con (3.29). En primer lugar con En la Figura 3.2 se observa una primera aproximación de que es lo que queremos realizar. Continuando el proceso llegamos a la Figura 3.3, donde γ queda reducida a

$$\gamma = +\gamma_1^\epsilon - \gamma_2^\epsilon - \gamma_1^\epsilon - \gamma_3^\epsilon + \gamma_1^\epsilon + \gamma_2^\epsilon - \gamma_1^\epsilon + \gamma_3^\epsilon. \quad (3.23)$$

$$\gamma_1^\epsilon : [\epsilon, 1 - \epsilon] \rightarrow \mathbb{C} \quad \gamma_2^\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad \gamma_3^\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto t \quad t \mapsto e^{2\pi i t} + 1 \quad t \mapsto \epsilon e^{2\pi i t}.$$

Si denotamos por $I = \int_\gamma t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt$, obtenemos, a partir de (3.23), que será la suma de varias integrales. Para ello fijamos una rama del logaritmo donde definiremos correctamente la función $t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}$, teniendo en cuenta como varía esta función cuando prolongamos en torno a 0 y 1.

$$I_1^\epsilon = \int_\epsilon^{1-\epsilon} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt,$$

$$I_2^\epsilon = - \int_{\gamma_2^\epsilon} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt$$

$$= - 2\pi i \epsilon^{c-b} \int_0^1 (\epsilon e^{2\pi i t} + 1)^{b-1} e^{(c-b)2\pi i} (1 - z\epsilon e^{2\pi i t} - z)^{-a} dt$$

$$I_3^\epsilon = - e^{(c-b)2\pi i} \int_\epsilon^{1-\epsilon} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt$$

$$= - e^{(c-b)2\pi i} I_1^\epsilon.$$

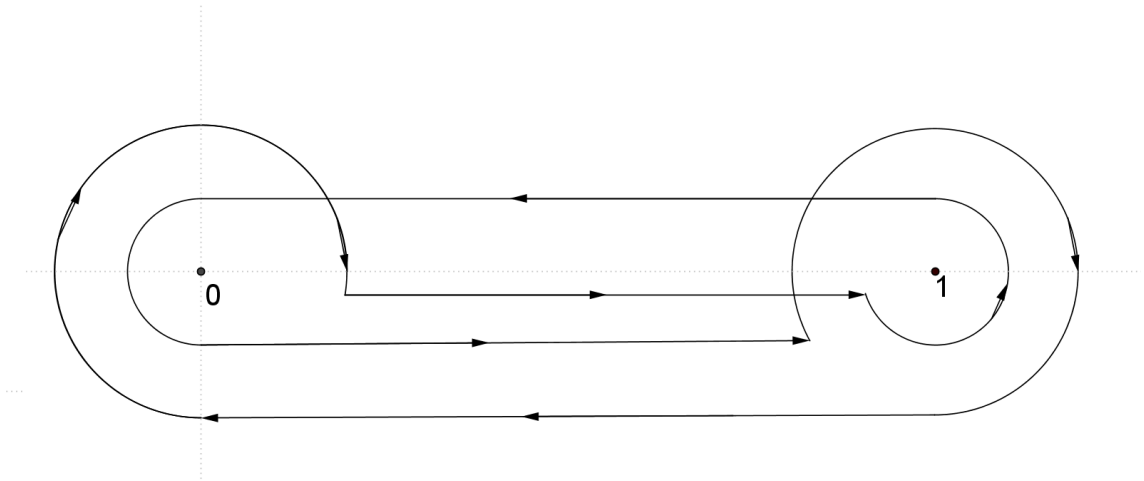


Figura 3.3: Camino de Pochhammer modificado

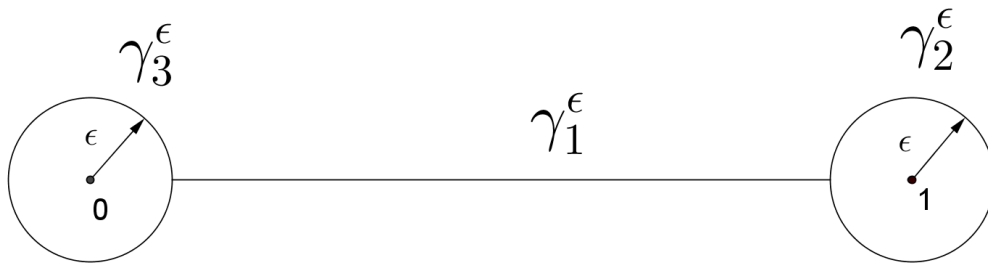


Figura 3.4: Camino homótopo al de Pochhammer, visto como suma de caminos simples.

$$\begin{aligned}
 I_4^\epsilon &= -e^{(c-b)2\pi i} \int_{\gamma_3^\epsilon} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt \\
 &= -e^{(c-b)2\pi i} \epsilon^{b-1} \int_0^1 e^{2\pi i t b} (1 - \epsilon e^{2\pi i t})^{c-b-1} (1 - \epsilon e^{2\pi i t} z)^{-a} dt
 \end{aligned}$$

De la misma forma obtenemos, sin entrar tanto en detalles,

$$\begin{aligned}
 I_5^\epsilon &= e^{c2\pi i} I_1^\epsilon, \\
 I_6^\epsilon &= e^{c2\pi i} I_2^\epsilon, \\
 I_7^\epsilon &= -e^{b2\pi i} I_1^\epsilon, \\
 I_8^\epsilon &= -e^{b2\pi i} I_3^\epsilon.
 \end{aligned}$$

Como además, al ser $\Re(c) > \Re(b) > 0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2^\epsilon = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_3^\epsilon = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_1^\epsilon = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt.$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} I &= (1 - e^{(c-b)2\pi i} + e^{c2\pi i} - e^{b2\pi i}) \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt \\ &= (1 - e^{2\pi i b})(1 - e^{2\pi i(c-b)}) \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt. \end{aligned}$$

Con esto tenemos la igualdad (3.22). ■

Tras este resultado observamos que, si denotamos por

$$B(x, y) = \frac{1}{(1 - e^{2\pi i x})(1 - e^{2\pi i(y)})} \int_\gamma t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (3.24)$$

a la función Beta. Aplicando el Lema 3.11 obtenemos la siguiente igualdad, para $\Re(c) > \Re(b) > 0$,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. \quad (3.25)$$

Con esta caracterización es un resultado clásico que

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (3.26)$$

Como la función Γ es meromorfa entonces por el principio de identidad se tiene que

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{1}{(1 - e^{2\pi i x})(1 - e^{2\pi i(y)})} \int_\gamma t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. \quad (3.27)$$

Con estas consideraciones podemos demostrar el siguiente resultado:

Lema 3.12

Sea γ el camino de Pochhammer, entonces se verifica que para cada valor $c - b, b \notin \mathbb{Z}$

$$F(a, b, c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{1}{(1 - e^{2\pi i b})(1 - e^{2\pi i(c-b)})} \int_\gamma t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt. \quad (3.28)$$

Demostración : En primer lugar observamos que, si denotamos por

$$g(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{1}{(1 - e^{2\pi i b})(1 - e^{2\pi i(c-b)})} \int_\gamma t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt,$$

entonces

$$g(0) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{1}{(1 - e^{2\pi i b})(1 - e^{2\pi i(c-b)})} \int_\gamma t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} dt = 1$$

Una vez conocida una solución en un entorno de 0, estudiamos que ocurre en los otros dos puntos singulares. Uno puede preguntarse si es necesario repetir todos estos cálculos tan tediosos para dar respuesta al análisis en el resto de singularidades. La respuesta es que no, gracias a los resultados de transformaciones dados en la sección previa.

Lema 3.16

Sean $\eta, \beta \in \mathbb{C}$ y T una transformación de Möbius tal que $T(\{0, 1, \infty\}) = \{0, 1, \infty\}$. Entonces $(z - 1)^\eta z^\beta F(a, b, c|z)$ es solución de una ecuación Fuchsiana con esquema de Riemann

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \hline \beta & \eta & a - \eta - \beta \\ 1 - c + \beta & c - a - b + \eta & b - \eta - \beta \end{array} . \quad (3.31)$$

Por otro lado $F(a, b, c|T(z))$ es solución de una ecuación Fuchsiana con esquema de Riemann

$$\begin{array}{ccc} T^{-1}(0) & T^{-1}(1) & T^{-1}(\infty) \\ \hline 0 & 0 & a \\ 1 - c & c - a - b & b \end{array} . \quad (3.32)$$

Con este resultado, buscando transformaciones adecuadas podemos obtener por ejemplo la siguiente solución holomorfa en 1. Tomando $T(z)=1-z$, la función $F(a, b, c|1 - z)$ será solución de una ecuación Fuchsiana con esquema de Riemann

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \hline 0 & 0 & a \\ c - a - b & 1 - c & b \end{array} .$$

O lo que es lo mismo, por la unicidad del esquema en la ecuación hipergeométrica, será solución holomorfa de la ecuación $L_{a,b,a+b+1-c} = 0$ en un entorno de 1. Por lo tanto $F(a, b, c|1 - z) = F(a, b, a + b + 1 - c|z)$.

Kummer mediante este tipo de transformaciones, consiguió dar una lista de todas las posibles soluciones de una ecuación hipergeométrica, las cuales quedan expresadas en el siguiente teorema.

Teorema 3.17 (Soluciones de Kummer)

Si $c, c - a - b, b - a, b, a, c - a, c - b \notin \mathbb{Z}$ entonces las siguientes seis 4-uplas son distintas y todas ellas solución de la ecuación (3.13).

$$\begin{aligned} & F(a, b, c|z) \\ &= (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c|z) \\ &= (1 - z)^{-a} F(a, c - b, c|\frac{z}{z - 1}) \\ &= (1 - z)^{-b} F(c - a, b, c|\frac{z}{z - 1}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
& z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c|z) \\
&= z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-a, 1-b, 2-c|z) \\
&= z^{1-c}(1-z)^{c-a-1}F(a-c+1, 1-b, 2-c|\frac{z}{z-1}) \\
&= z^{1-c}(1-z)^{c-b-1}F(1-a, b-c+1, 2-c|\frac{z}{z-1}).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
& F(a, b, a+b-c+1|1-z) \\
&= z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, a+b-c+1|1-z) \\
&= z^{-a}F(a, a-c+1, a+b-c+1|1-\frac{1}{z}) \\
&= z^{-b}F(b-c+1, b, a+b-c+1|1-\frac{1}{z}).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
& (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c-a-b+1|1-z) \\
&= z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-a, 1-b, c-a-b+1|1-z) \\
&= z^{-a}(1-z)^{c-a-b}F(1-a, c-a, c-a-b+1|1-\frac{1}{z}) \\
&= z^{-b}(1-z)^{c-a-b}F(c-b, 1-b, c-a-b+1|1-\frac{1}{z}).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
& z^{-a}F(a, a-c+1, a-b+1|\frac{1}{z}) \\
&= z^{-a}(1-\frac{1}{z})^{c-a-b}F(1-b, c-b, a-b+1|\frac{1}{z}) \\
&= z^{-a}(1-\frac{1}{z})^{c-b-1}F(a-c+1, 1-b, 2-c|\frac{1}{1-z}) \\
&= z^{-a}(1-\frac{1}{z})^{-a}F(a, c-b, a-b+1|\frac{1}{1-z}).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
& z^{-b}F(b, b-c+1, b-a+1|\frac{1}{z}) \\
&= z^{-b}(1-\frac{1}{z})^{c-a-b}F(1-a, c-a, b-a+1|\frac{1}{z}) \\
&= z^{-b}(1-\frac{1}{z})^{c-b-1}F(b-c+1, 1-a, 2-c|\frac{1}{1-z}) \\
&= z^{-b}(1-\frac{1}{z})^{-b}F(b, c-a, b-a+1|\frac{1}{1-z}).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Estas soluciones se conocen como las 24 soluciones de Kummer.

Demostración : Veamos en primer lugar que se verifican las igualdades de (3.33), para (3.34)-(3.38) el proceso es análogo.

La función $F(c-a, c-b, c|z)$ es la única solución holomorfa en 0 con $F(c-a, c-b, c|0) = 1$

de la ecuación con esquema de Riemann

$$\frac{0 \quad 1 \quad \infty}{0 \quad 0 \quad c-a} .$$

$$1-c \quad b+a-c \quad c-b$$

Entonces la función $(1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c|z)$ es solución de la ecuación con esquema de Riemann

$$\frac{0 \quad 1 \quad \infty}{0 \quad 0 \quad a} .$$

$$1-c \quad c-a-b \quad b$$

Además como $(1-0)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c|0) = 1$ y es holomorfa entonces se tiene la igualdad.

El mismo procedimiento sirve para cada una de las igualdades de (3.33) y por ende para (3.34)-(3.38).

Nos queda probar que las soluciones son diferentes, para ello veamos que $F(a, b, c|z)$ no puede coincidir con ninguna y de forma análoga se haría con el resto.

Si $F(a, b, c|z) = z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c|z)$, entonces z^{1-c} sería holomorfa en 0, y esto solo ocurre cuando $1-c \in \mathbb{N}$, lo cual hemos supuesto falso.

Si $F(a, b, c|z) = F(a, b, a+b-c+1|1-z)$, entonces $F(a, b, c|z)$ se prolongaría analíticamente a lo largo de cualquier camino a una función entera además por ser Fuchsiana, es de crecimiento potencial en ∞ . Por tanto, en virtud del teorema de Liouville, $F(a, b, c|z)$ debe ser un polinomio y por tanto a o b es un entero no positivo.

Si $(1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c|z) = F(a, b, c|z) = (1-z)^{c-a-b}F(a, b, a+b-c+1|1-z)$, entonces $F(a, b, a+b-c+1|1-z) = F(c-a, c-b, c|z)$. Haciendo el razonamiento análogo al anterior se concluye que a o b es un entero no positivo.

Si $(1-z)^{-a}F(a, c-b, c|\frac{z}{z-1}) = F(a, b, c|z) = z^{-a}F(a, a-c+1, a-b+1|\frac{1}{z})$, entonces

$$F(a, c-b, c|\frac{z}{z-1}) = (1-z)^a z^{-a} F(a, a-c+1, a-b+1|\frac{1}{z})$$

es una función holomorfa en ∞ y por tanto en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$, con crecimiento potencial en 1. Esto nos lleva a que la función $F(a, c-b, c|z)$ es entera y por tanto a o $c-b$ es un entero no positivo.

Si $(1-z)^{-b}F(c-a, b, c|\frac{z}{z-1}) = F(a, b, c|z) = z^{-b}F(b, b-c+1, b-a+1|\frac{1}{z})$, entonces, imitando el razonamiento anterior, $c-a$ o b es un entero no positivo. ■

Ahora analizaremos, en el caso en el que $c, c-a-b, b-a, b, a, c-a, c-b \notin \mathbb{Z}$, la relación existente entre las diferentes soluciones de Kummer. La demostración del siguiente resultado está basada en el texto [Poo].

Teorema 3.18

Si $c, c-a-b, b-a, b, a, c-a, c-b \notin \mathbb{Z}$, entonces

$$F(a, b, c|z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)} F(a, b, a+b-c+1|1-z)$$

$$+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c-a-b+1|1-z), \quad (3.39)$$

Demostración: Como $\{F(a, b, a+b-c+1|1-z), (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c-a-b+1|1-z)\}$ es una base del espacio de soluciones en el semiplano superior, existirán $\lambda_{11}, \lambda_{12} \in \mathbb{C}$ únicos tales que

$$F(a, b, c|z) = \lambda_{11}F(a, b, a+b-c+1|1-z) + \lambda_{12}(1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c-a-b+1|1-z).$$

Estos coeficientes los encontraremos evaluando en los puntos 0 y 1, pero para ello conviene distinguir cuatro casos.

- I Si $\Re(c-a-b) > 0$:
Evaluamos en 1

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow 1} F(a, b, c|z) = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \\ \lim_{z \rightarrow 1} F(a, b, a+b-c+1|1-z) = 1, \\ \lim_{z \rightarrow 0} (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c-a-b+1|1-z) = 0. \end{cases}$$

Con esto se deduce que

$$\lambda_{11} = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (3.40)$$

- II Si $\Re(c-a-b) < 0$:
En torno a 1 el comportamiento será

$$\begin{cases} F(a, b, c|z) \sim (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \\ \lim_{z \rightarrow 1} F(a, b, a+b-c+1|1-z) = 1, \\ (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c-a-b+1|1-z) \sim (1-z)^{c-a-b}. \end{cases}$$

Con esto se deduce que:

$$\lambda_{12} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad (3.41)$$

- III Si $\Re(1-c) > 0$:
Evaluamos en 0

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow 1} F(a, b, c|z) = 1, \\ \lim_{z \rightarrow 1} F(a, b, a+b-c+1|1-z) = \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(a-c+1)}, \\ \lim_{z \rightarrow 0} (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c-a-b+1|1-z) = \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)}. \end{cases}$$

Con esto se deduce que

$$1 = \lambda_{11} \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(a-c+1)} + \lambda_{12} \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)}. \quad (3.42)$$

- IV Si $\Re(1-c) < 0$:
Analizamos el comportamiento en torno a 0,

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow 1} F(a, b, c|z) = 1, \\ F(a, b, a+b-c+1|1-z) \sim z^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}, \\ (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c-a-b+1|1-z) \sim z^{1-c} \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \end{cases}$$

Con esto se deduce que

$$0 = \lambda_{11} \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} + \lambda_{12} \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (3.43)$$

Para cualquiera de los casos, de las relaciones (3.40), (3.41), (3.42) y (3.43) se comprueba que

$$\lambda_{11} = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \lambda_{12} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad \blacksquare$$

De forma análoga se puede probar

$$\begin{aligned} z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c|z) &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)}F(a, b, a+b-c+1|1-z) \\ &+ \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c-a-b+1|1-z). \end{aligned} \quad (3.44)$$

De esta manera se pueden ir relacionando las diferentes soluciones descritas en la lista de Kummer, para ver todas ellas se recomienda consultar [ErBa].

3.3. Monodromía

Si bien es cierto que Kummer elaboró una lista de 24 posibles soluciones, una pregunta que nos hacemos es la siguiente:

¿Qué relación existe entre las soluciones de Kummer al prolongar una dada a lo largo de un camino arbitrario, o lo que es lo mismo, cómo actúa la monodromía de la ecuación hipergeométrica sobre ellas?

En esta sección denotaremos de nuevo $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Como bien sabemos, ver Sección 2.3, el grupo de monodromía en z_0 es un subgrupo del grupo fundamental $\pi_1(\Omega, z_0)$, este último es isomorfo al grupo libre generado por dos elementos, los cuales se corresponden a los lazos que rodean los puntos 0 y 1.

Para analizar la monodromía, al igual que para el grupo fundamental, conviene fijar un punto $z_0 \in \Omega$ sobre el que analizar, en nuestro caso, por simplicidad, optaremos por $z_0 = 1/2$.

Con estas consideraciones, definimos los lazos, los cuales se pueden visualizar en la Figura 3.3

$$\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \gamma_0(t) = 1/2 \exp(2\pi it)$$

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \gamma_1(t) = 1 - 1/2 \exp(-2\pi it)$$

Denotaremos por $g_0 = [\gamma_0]$ y $g_1 = [\gamma_1]$ a sus clases de homotopía.

Lema 3.19

Sean la clases de homotopía g_0 , g_1 y $g_\infty = (g_0g_1)^{-1}$, entonces sus matrices de monodromía asociadas M_k , $k = 0, 1, \infty$, tienen como espectro los siguientes conjuntos

$$\{1, \exp(-c2\pi i)\}, \{1, \exp((c-a-b)2\pi i)\}, \{\exp(a2\pi i), \exp(b2\pi i)\}$$

respectivamente.

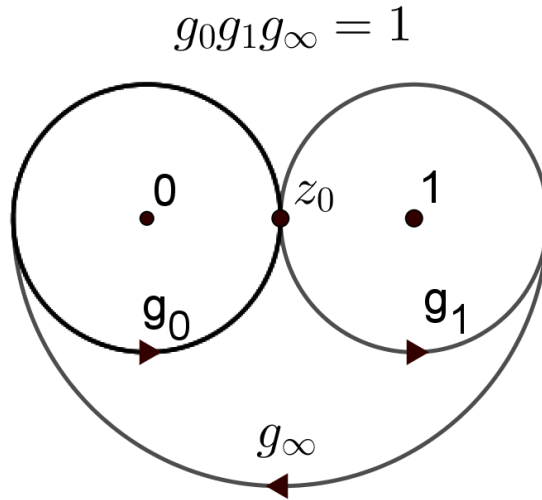


Figura 3.5: Esquema de los lazos generadores del grupo de monodromía.

Demostración : Basta aplicar el Lema 2.60 al operador $L_{a,b,c}$. ■

Demostraremos un lema algebraico que nos dará una caracterización de los grupos de monodromía que actúan reducibles³ sobre el conjunto de soluciones.

Lema 3.20

Sean $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$ tales que AB^{-1} tiene 1 como un autovalor. Entonces A y B tienen un autovalor en común si y solamente si tienen un autovector en común.

Demostración : En primer lugar se tiene que $\text{Ker}(A - B)$ es de dimensión al menos 1, además no tiene dimensión 2, puesto que sino $A = B$ y el resultado sería inmediato.

En consecuencia podemos asumir que $\dim(\text{Ker}(A - B)) = 1$, y por tanto existe $v \in \text{Ker}(A - B)$, $v \neq 0$.

Supongamos que existe w autovector común de A y B , con autovalores λ_A, λ_B respectivamente. Si estos autovalores fueran iguales habríamos terminado, por tanto, supongamos que no lo son.

Entonces $\{v, w\}$ son una base de \mathbb{C}^2 , luego existirán $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $Av = \alpha v + \beta w$. Como además $Av = Bv$, también se verifica que $Bv = \alpha v + \beta w$, entonces, respecto de la base $\{v, w\}$, las matrices A, B , son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \lambda_A \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \lambda_B \end{pmatrix}.$$

Por tanto tienen a α como autovalor común.

Por otro lado, supongamos que tienen un autovalor común λ . Si v fuera autovalor de A , entonces habríamos terminado ya que $Av = Bv$ y esto implica que v es autovalor de B .

³Para una definición precisa de grupo que actúa de forma reducible se recomienda ver las Definiciones 2.24 y 2.22.

Si no lo fuera, consideramos el vector $w = (A - \lambda I)v$, no nulo. Como $(A - \lambda I)$ tiene núcleo no trivial, tenemos que w es autovalor de $(A - \lambda I)$, con lo que w es autovalor de A . Por hipótesis también se verifica que $w = (B - \lambda I)v$ y por tanto w es autovector de B , con lo que será autovector común. ■

Corolario 3.21

El grupo de monodromía de la ecuación (3.13) actúa reducible sobre el conjunto de soluciones si y solamente si al menos uno de los números $a, b, c - a, c - b \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Sea $A = M_\infty$, $B = M_0^{-1}$, entonces $AB^{-1} = M_1^{-1}$ que tiene como autovalor a 1. Aplicando el lema 3.20 se concluye el resultado. ■

Ahora veremos una caracterización de las ecuaciones hipergeométricas con grupo de monodromía abeliano

Lema 3.22

Si el operador $L_{a,b,c}$, (3.13), es abeliano⁴ entonces al menos dos de los valores $a, b, c - a, c - b$ son enteros.

Demostración: En virtud del Lema 2.25, se tiene que el grupo de monodromía será reducible, por tanto alguno de los cuatro valores será entero. Supongamos que lo es el primero de ellos, es decir $a \in \mathbb{Z}$, para el resto de casos el razonamiento es el mismo.

Es suficiente mostrar que, en al menos uno de los puntos singulares $0, 1, \infty$, la diferencia de exponentes locales es entera. Entonces claramente $1 - c \in \mathbb{Z}$ implica $c - a \in \mathbb{Z}$, $c - a - b \in \mathbb{Z}$ implica $c - b \in \mathbb{Z}$ y $b - a \in \mathbb{Z}$ implica $b \in \mathbb{Z}$.

Razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que todas las diferencias de exponentes no son enteras. En particular, cada uno de los autovalores de las matrices de monodromía M_0, M_1, M_∞ son distintos. Por el Lema 2.25 se tiene que existe una base de soluciones que son autovalores del grupo de monodromía. Es decir, existe y, w , tales que $L_{a,b,c}y = L_{a,b,c}w = 0$, son independientes, además $y_{g_k} = \lambda_k y$, $k = 0, 1, \infty$ y $w_{g_k} = \beta_k w$, $k = 0, 1, \infty$.

En particular $y(z)z^{-\lambda_0}(1-z)^{-\lambda_k}$ será una función univaluada en \mathbb{C} , de crecimiento moderado en todo punto, incluyendo ∞ . Por tanto será un polinomio p con la propiedad de que no se anula en 0 ni ∞ .

Razonando igual con w , obtenemos que

$$y(z) = p(z)z^{\lambda_0}(1-z)^{\lambda_1}, \quad w(z) = q(z)z^{\beta_0}(1-z)^{\beta_1}.$$

Con $p, q \in \mathbb{C}[z]$, tales que no se anulan ni en 0 ni ∞ . A partir de aquí se extraen los exponentes locales, los cuales serán λ_0, β_0 en 0 , λ_1, β_1 en 1 y $-\text{grado}(p) - \lambda_0 - \lambda_1, -\text{grado}(q) - \beta_0 - \beta_1$ en ∞ . Como la suma de exponentes locales debe de ser 1, entonces $-\text{grado}(p) - \text{grado}(q) = 1$, con lo que llegamos a una contradicción. ■

⁴En esta sección nos referiremos a un operador reducible como aquel que tenga grupo de monodromía reducible, además el Teorema 2.49 nos garantiza que un operador es reducible cuando es reducible por la derecha, luego no existe ambigüedad en los conceptos. Análogamente nos referiremos a un operador abeliano como aquel que tiene grupo de monodromía abeliano.

Lema 3.23

Sean $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$ con espectro disjunto y tales que AB^{-1} tiene a 1 como autovalor. Si $X^2 + a_1X + a_2$ y $X^2 + b_1X + b_2$ son los polinomios característicos de A y B respectivamente, entonces existe $T \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que

$$A = T \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} T^{-1}, \quad B = T \begin{pmatrix} 0 & -b_2 \\ 1 & -b_1 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Nota 3.24

Con las premisas del Lema 3.23, tenemos que el subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ generado por A, B es conjugado⁵ a el generado por las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -b_2 \\ 1 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

Demostración: En primer lugar, sea $w \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ tal que $w = AB^{-1}w$. El vector $v_1 = B^{-1}w$ verificará $Bv_1 = Av_1$ y por tanto $v_1 \in \ker(A - B)$, como A y B tienen espectro disjunto, v_1 no es autovalor de A ni de B . Luego $v_2 = Av_1$ será independiente de v_1 y el conjunto $\{v_1, v_2\}$ formará una base de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Considerando T la matriz de cambio de base se concluye el resultado. ■

Como consecuencia de este lema de álgebra lineal obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.25

Si la ecuación (3.13) con operador $L_{a,b,c}$ es irreducible, entonces el grupo de monodromía depende solo de los valores a, b, c módulo \mathbb{Z} .

Demostración: Supongamos que es irreducible, entonces $a, b, c - a, c - b \notin \mathbb{Z}$. Sea $A = M_\infty, B = M_0^{-1}$, entonces

$$\sigma(A) = \{\exp(a2\pi i), \exp(b2\pi i)\}, \quad \sigma(B) = \{1, \exp(c2\pi i)\}$$

son disjuntos y AB^{-1} tiene autovalor 1. Por el lema 3.23 existe $T \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que

$$B = T \begin{pmatrix} 0 & -e^{2c\pi i} \\ 1 & 1 + e^{c2\pi i} \end{pmatrix} T^{-1}, \quad A = T \begin{pmatrix} 0 & -e^{(a+b)2\pi i} \\ 1 & e^{a2\pi i} + e^{b2\pi i} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

El grupo de monodromía es isomorfo al generado por

$$\begin{pmatrix} 0 & -e^{(a+b)2\pi i} \\ 1 & e^{a2\pi i} + e^{b2\pi i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -e^{c2\pi i} \\ 1 & 1 + e^{c2\pi i} \end{pmatrix}^{-1},$$

estas matrices solo dependen de los valores a, b, c módulo \mathbb{Z} . ■

⁵Sean $A, B \in GL(n, \mathbb{C})$ se dice que son *conjugadas con matriz de paso* T , si $T \in GL(n, \mathbb{C})$ es tal que $A = TBT^{-1}$. Análogamente diremos que un subgrupo G de $GL(n, \mathbb{C})$ es conjugado a otro H , si existe una matriz T , tal que todo $g \in G$ es conjugado con matriz de paso T a un elemento de H .

Nota 3.26

En la práctica el Corolario 3.25 nos ofrece la posibilidad de, cuando la ecuación hipergeométrica es irreducible, trabajar con valores de $a, b, c \in [0, 1)$.

3.4. Soluciones locales

Cuando hablamos de monodromía en una ecuación Fuchsiana, estamos haciéndolo de un grupo generado por dos elementos. En esta sección estudiaremos los subgrupos del grupo generados por uno solo de los generadores del grupo de monodromía.

Ya hemos hablado en los anteriores capítulos que Frobenius propuso un método para dar soluciones locales en torno a cualquier punto con singularidad a lo sumo regular. Si suponemos que el punto en el que queremos hacer el análisis es 0, el método comienza buscando soluciones de la forma $z^\lambda s(z)$, con s meromorfa en 0 y λ un exponente local.

El problema lo encontramos cuando hay raíces múltiples del polinomio indicial, ya que, en general, no podemos garantizar la existencia de dos soluciones independientes de esta forma. Lo mismo ocurre cuando existen dos raíces del polinomio que distan un entero. En estos casos se pueden encontrar soluciones de la forma $z^\lambda a(z) + \log(z)b(z)$, con a, b meromorfas en 0.

Volviendo a la ecuación hipergeométrica, en la sección anterior hemos encontrado, bajo la suposición de que $-c \notin \mathbb{N}$, una solución $F(a, b, c|z)$ holomorfa en 0.

Con esta misma suposición, buscamos en la lista de Kummer $z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c|z)$ es una solución de $L_{a,b,c} = 0$. Donde si $c-2 \notin \mathbb{N}$, entonces $F(a-c+1, b-c+1, 2-c|z)$ es holomorfa en 0, por lo mismo que lo es $F(a, b, c|z)$.

Supongamos ahora que $c = 1$, entonces $F(a, b, c|z)$ es solución holomorfa en 0, el problema es que $F(a-c+1, b-c+1, 2-c|z) = F(a, b, c|z)$ y por tanto no tendríamos una base de soluciones.

Lo que sí que es conocido es que los autovalores de M_0 serían en este caso solo el 1, por tanto o bien es la identidad o bien es conjugada de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En el primero de los casos la singularidad sería evitable y existirá una base de soluciones holomorfas en 0. En el segundo obtenemos que la matriz $M_0^n \rightarrow \infty$, en el sentido de una norma matricial, cuando $n \rightarrow \infty$.

Supongamos ahora que $c \in \{2, 3, \dots\}$, entonces $F(a, b, c|z)$ es solución holomorfa en 0. En virtud de la Nota 3.9, $F(a-c+1, b-c+1, 2-c|z)$ se puede definir si se da alguna de estas opciones:

- $a - c + 1 = 2 - c + n$, $n \in \{0, 1, \dots, c - 2\}$, es decir, $a \in \{1, 2, \dots, c - 1\}$.
- $b - c + 1 = 2 - c + n$, $n \in \{0, 1, \dots, c - 2\}$, es decir, $b \in \{1, 2, \dots, c - 1\}$.

Este razonamiento se resume en el siguiente resultado. Para el cual mantenemos la notación que hemos venido usando en la sección.

Teorema 3.27

La matriz M_0 es la identidad si y solo si $c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 1$ y se satisface que:

- Si $c \in \{0, -1, -2, \dots\}$, entonces alguna de las siguientes opciones es cierta:
 - $a \in \{c, c + 1, \dots, 0\}$,
 - $b \in \{c, c + 1, \dots, 0\}$.
- Si $c \in \{2, 3, 4, \dots\}$, entonces alguna de las siguientes opciones es cierta:
 - $a \in \{1, 2, \dots, c - 1\}$,
 - $b \in \{1, 2, \dots, c - 1\}$.

Es decir, si alguno de los conjuntos $\{a, a + 1 - c\}$, $\{b, b + 1 - c\}$ está formado por dos números enteros, donde uno de los dos es positivo estricto y el otro es no positivo.

Demostración: Supongamos que M_0 es la identidad, entonces, por el Lema 2.60, se tiene que $c \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, al actuar de forma trivial, existirá una base $\{w, y\}$ de soluciones meromorfas en 0. Estas tendrán desarrollo de Laurent en 0 de la forma:

$$w(z) = z^k \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \quad w_0 \neq 0 \text{ para cierto } k \in \mathbb{Z},$$
$$y(z) = z^m \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n, \quad y_0 \neq 0 \text{ para cierto } m \in \mathbb{Z}.$$

Introduciendo las correspondientes series en (3.13) obtenemos que tanto k como m han de ser exponentes locales en 0, luego $\{k, m\} = \{0, 1 - c\}$.

Si $c = 1$, el Teorema 3.8 nos garantiza la existencia de una única solución salvo producto por una constante, holomorfa en 0, por tanto y, w no pueden formar una base.

Si $c \in \{0, -1, -2, \dots\}$, la Nota 3.9 nos garantiza la existencia de una única solución holomorfa en 0 tal que no se anula en 0, si y solo si se verifica alguna de las condiciones $a \in \{c, c + 1, \dots, 0\}$ o $b \in \{c, c + 1, \dots, 0\}$. Con lo que si no se verificasen $k = m = 1 - c$, si tomamos $w(z)z^{-k}, y(z)z^{-k}$ serán soluciones en 0 de $L_{a-c+1, b-c+1, 2-c} = 0$. Como $2 - c \in \{2, 3, 4, \dots\}$ entonces, en virtud del Teorema 3.8 existirá una única solución, salvo producto por una constante, de $L_{a-c+1, b-c+1, 2-c} = 0$ que es holomorfa en 0. Por tanto y, w no pueden formar una base.

Si $c \in \{1, 2, 3, \dots\}$, el razonamiento es el análogo al caso anterior pero con el operador hipergeométrico $L_{a-c+1, b-c+1, 2-c}$.

Para la otra implicación supondremos, sin pérdida de generalidad, que $c \in \{0, -1, -2, \dots\}$ y $a \in \{c, c + 1, \dots, 0\}$, para el resto de los casos se razona igual. Si esto se verifica en virtud de la Nota 3.9 existe una solución y holomorfa en 0 tal que no se anula en 0. Por otra parte, gracias al Teorema 3.8, $F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c | z)$, es holomorfa en 0 y solución de $L_{a-c+1, b-c+1, 2-c} = 0$ en 0. Luego $z^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c | z)$ es solución de $L_{a, b, c} = 0$ holomorfa en 0 y se anula en 0. Por tanto tenemos una base de soluciones de $L_{a, b, c} = 0$ holomorfas en 0, con lo que la monodromía será trivial en 0. ■

Nota 3.28

Es conocido que toda matriz $M \in GL(2, \mathbb{C})$ cuyo espectro es solo el autovalor 1 es conjugada una de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ o bien es la identidad. En el segundo caso existirá una base de \mathbb{C}^2 , $\{y_1, y_2\}$, en la cual $M^n y_2 = n y_1 + y_2$. Tomando cualquier norma de \mathbb{C}^2 , se obtiene

$$\|M^n y_2\| \geq n \|y_1\| - \|y_2\| \longrightarrow \infty.$$

$n \rightarrow \infty$

Corolario 3.29

Si el operador $L_{a,b,c}$ tiene grupo de monodromía \mathfrak{M} finito y $c \in \mathbb{Z}$, entonces la singularidad en 0 es evitable, su grupo de monodromía es cíclico generado por g_1 y se satisface que alguno de los conjuntos $\{a, a+1-c\}$, $\{b, b+1-c\}$ está formado por dos números enteros, donde uno de los dos es positivo estricto y el otro es no positivo.

Una vez concluido el análisis en 0, si queremos realizar las cuentas en 1, no es necesario repetir todo el proceso. La matriz M_1 tiene autovalores 1, $\exp((c-a-b)2\pi i)$.

Si $y(z)$ es solución de $L_{a,b,c} = 0$ en un entorno de 1, entonces $y(1-z)$ es solución de $L_{a,b,1+b+a-c} = 0$ en un entorno de 0. Este razonamiento prueba de forma inmediata el siguiente resultado:

Teorema 3.30

La matriz M_1 es la identidad si y solo si $c-a-b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y se satisface que alguno de los conjuntos $\{a, c-b\}$, $\{b, c-a\}$ está formado por dos números enteros, donde uno de los dos es positivo estricto y el otro es no positivo.

En cuanto a la matriz M_∞ , recordamos que tiene autovalores $\exp(a2\pi i)$, $\exp(b2\pi i)$, al igual que antes no es necesario repetir el análisis detallado, puesto que podemos transformar el sistema.

Si y es solución de $L_{a,b,c} = 0$ en un entorno de ∞ , entonces $z^{-b}y(\frac{1}{z})$ es solución de $L_{1-c+b,b,1+b-a} = 0$ en un entorno de 0. Este razonamiento prueba de forma inmediata el siguiente resultado:

Teorema 3.31

La matriz M_∞ es la identidad si y solo si $b-a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y se satisface que alguno de los conjuntos $\{a, b\}$, $\{a+1-c, b+1-c\}$ está formado por dos números enteros, donde uno de los dos es positivo estricto y el otro es no positivo.

Con esto tenemos caracterizadas todas las posibles opciones para que alguna de las matrices M_k , $k = 0, 1, \infty$ sea la identidad. Podemos resumir, en el siguiente corolario, las condiciones necesarias y suficientes para que el grupo de monodromía sea finito cuando uno de los polinomios indiciales tiene raíces que distan un entero:

Corolario 3.32

Si el operador $L_{a,b,c}$ tiene grupo de monodromía \mathfrak{M} y además

- $c \in \mathbb{Z}$, si y solo se satisface que $a, b, c \in \mathbb{Q}$ y alguno de los conjuntos $\{a, a+1-$

$c\}$, $\{b, b + 1 - c\}$ está formado por dos números enteros, donde uno de los dos es positivo estricto y el otro es no positivo. En este caso la singularidad en 0 es evitable y su grupo de monodromía es cíclico generado por g_1 .

- $c - a - b \in \mathbb{Z}$, si y solo se satisface que $a, b, c \in \mathbb{Q}$ y alguno de los conjuntos $\{a, c - b\}$, $\{b, c - a\}$ está formado por dos números enteros, donde uno de los dos es positivo estricto y el otro es no positivo. En este caso la singularidad en 1 es evitable y su grupo de monodromía es cíclico generado por g_0 .
- $b - a \in \mathbb{Z}$, si y solo se satisface que $a, b, c \in \mathbb{Q}$ y alguno de los conjuntos $\{a, b\}$, $\{a + 1 - c, b + 1 - c\}$ está formado por dos números enteros, donde uno de los dos es positivo estricto y el otro es no positivo. En este caso la singularidad en ∞ es evitable y su grupo de monodromía es cíclico generado por g_0 .

Nota 3.33

El Corolario 3.32 será de gran interés en la última sección, cuando nos proponamos encontrar las soluciones algebraicas de la ecuación hipergeométrica.

3.5. Triángulos de Schwarz

Una manera original de observar la acción del grupo de monodromía sobre el conjunto de soluciones es haciendo uso del concepto de triángulo curvilíneo o triángulo de Schwarz que definiremos a continuación.

Primero un poco de geometría, la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ puede ser visualizada en \mathbb{R}^3 , se corresponde, vía la proyección estereográfica, con el conjunto

$$\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Donde la antes mencionada, proyección estereográfica es la aplicación:

$$P_r : \mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{x_3 - 1} & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{si } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) \end{cases} \quad (3.45)$$

También podemos considerar la inversa de 3.45, la cual está definida de la siguiente manera:

$$P_r^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$$

$$z \mapsto \begin{cases} \left(\frac{2\Re(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\Im(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right) & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty \end{cases} \quad (3.46)$$

Definición 3.34

Diremos que $C \subset \mathbb{S}^2$ es un círculo de \mathbb{S}^2 si existe un plano Π de \mathbb{R}^3 tal que $C = \Pi \cap \mathbb{S}^2$. Un segmento de círculo es un subconjunto conexo de un círculo. Diremos que el círculo es máximo o geodésico si el plano pasa por el origen, $\mathbf{0} \in \Pi$.

Lema 3.35

Se puede observar que en $\overline{\mathbb{C}}$ los círculos se corresponden exactamente con rectas o circunferencias.

Definición 3.36

Diremos que $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ es un círculo si su contraimagen por la proyección estereográfica $P_r^{-1}(C) \subset \mathbb{S}^2$ es un círculo de \mathbb{S}^2 . Un segmento de círculo es un subconjunto conexo de un círculo. Diremos que el círculo C es máximo o geodésico si $P_r^{-1}(C) \subset \mathbb{S}^2$ lo es en \mathbb{S}^2 .

Definición 3.37

Un triángulo curvilíneo o triángulo de Schwarz \mathbb{T} es un dominio de $\overline{\mathbb{C}}$ cuyo borde es la unión de tres segmentos de círculos, los llamados lados, y tres puntos, estos serán llamados vértices del triángulo. Llamaremos ángulo del triángulo en un vértice al ángulo que forman las tangentes de los dos caminos frontera que intersecan en él.

Lema 3.38

Dados tres puntos A, B, C y tres ángulos $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi)$ entonces existe un único triángulo de Schwarz \mathbb{T} con vértices A, B, C y ángulos α, β, γ en los vértices respectivamente.

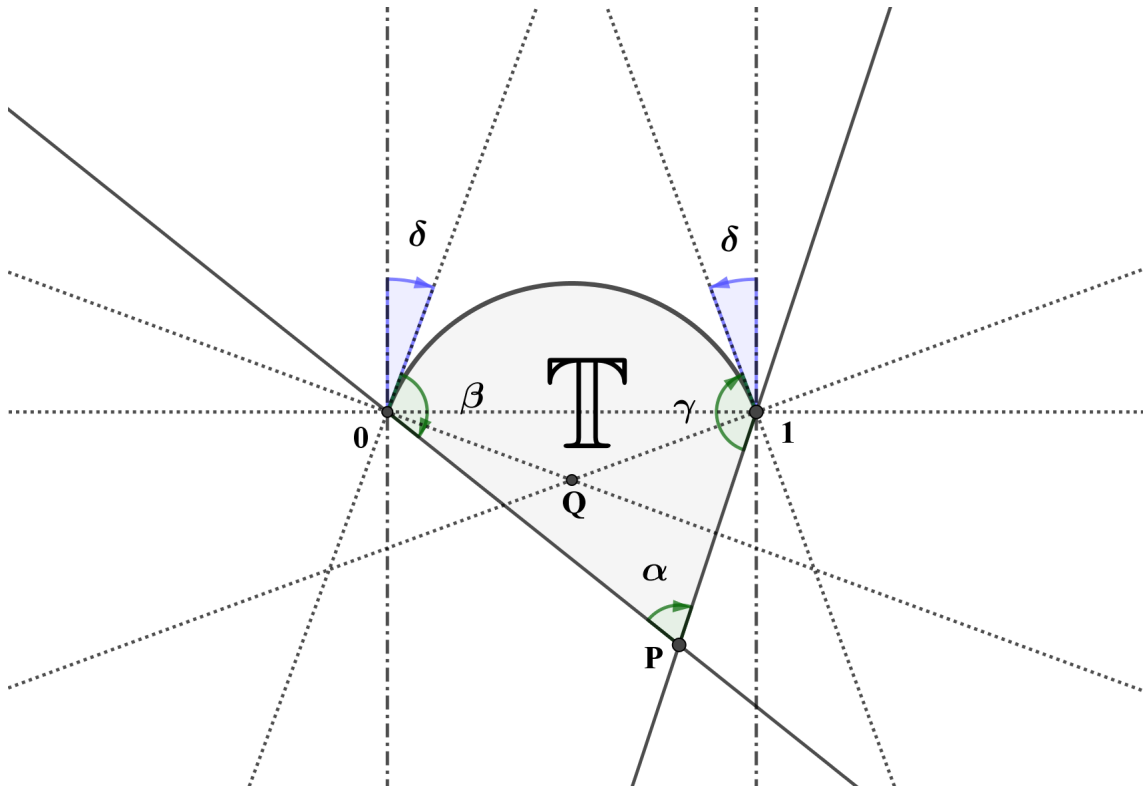


Figura 3.6: Construcción de un triángulo de Schwarz con $\delta = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$.

Demostración: En primer lugar construiremos un triángulo con ángulos α, β, γ y vértices arbitrarios. Para ello supongamos, que $\alpha + \beta + \gamma \leq 2\pi$, y detallemos este caso. Se recomienda

al lector observar la Figura 3.5 durante el transcurso de esta parte de la prueba, para tener así una importante ayuda visual. Consideramos el ángulo $\delta = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \geq 0$, los puntos $0, 1 \in \mathbb{C}$, y definimos las siguientes rectas:

$$s_0 = \left\{ x e^{(\frac{\pi}{2} - \delta - \beta)i} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$s_1 = \left\{ 1 + x e^{(\frac{\pi}{2} + \delta + \gamma)i} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Estas rectas pueden o bien ser paralelas o bien cortarse, denotamos como $P = s_0 \cap s_1$ si se cortan y $P = \infty$ si no lo hicieran.

En segundo lugar definimos las siguientes rectas que pasan por los puntos 1 y 0 respectivamente:

$$r_0 = \left\{ x e^{-\delta i} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$r_1 = \left\{ 1 + x e^{(\pi + \delta)i} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Análogamente, denotamos como $Q = r_0 \cap r_1$ si se cortan y $Q = \infty$ si fueran paralelas, se puede observar que por construcción este punto equidista de 0 y 1. Este hecho nos permite trazar la única circunferencia de centro Q que pasa por 0 y 1, la nombraremos como C . Nótese que si $Q = \infty$, esta circunferencia sería una recta, en este caso el eje real.

Ya para concluir esta parte de la demostración definimos el triángulo \mathbb{T} el formado por los vértices 0, 1, P , y que tiene como lados los correspondientes segmentos de las rectas s_0 , s_1 y el arco de la circunferencia C . Este además tiene como ángulos los valores α, β, γ pedidos.

Si, por otro lado, $\alpha + \beta + \gamma > 2\pi$ trazaríamos el ángulo negativo y no hallaríamos contradicción alguna, simplemente se ha separado este caso para que el lector se pueda hacer una idea visual de la prueba haciendo uso de la Figura 3.5.

Por último, y con esto terminamos la prueba de la existencia, consideramos la única transformada de Möbius T que aplica

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto B \\ 1 &\mapsto C \\ P &\mapsto A \end{aligned}$$

La propiedad de conservación de ángulos de T y el hecho de que transforma círculos en círculos hace que la imagen por T del triángulo previamente construido $T(\mathbb{T})$, sea un triángulo de Schwarz que verifica las hipótesis del teorema.

En el transcurso de la prueba de existencia se deduce que, en la situación de la Figura 3.5, conocer los ángulos que se forman en los vértices 0, B implica que el punto C queda determinado inequívocamente. Por tanto, si tenemos dos triángulos de la forma de la Figura 3.5, tales que los ángulos son iguales y coinciden en otro vértice, entonces son iguales. Sean ahora dos triángulos \mathbb{T}_1 y \mathbb{T}_2 con ángulos iguales y vértices A, B, C . Tomamos las transformaciones de Möbius tal que que aplican

$$\begin{array}{ll} T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} & S : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ A \mapsto 0 & A \mapsto 0 \\ A'_1 \mapsto \infty & A'_2 \mapsto \infty \\ B \mapsto 1 & B \mapsto 1 \end{array}$$

donde A'_1, A'_2 son los puntos correspondientes a el segundo corte, el otro es A , de los círculos $b_1 \cap c_1$ y $b_2 \cap c_2$ respectivamente. Estas transformaciones verifican que los triángulos $T(\mathbb{T}_1)$,

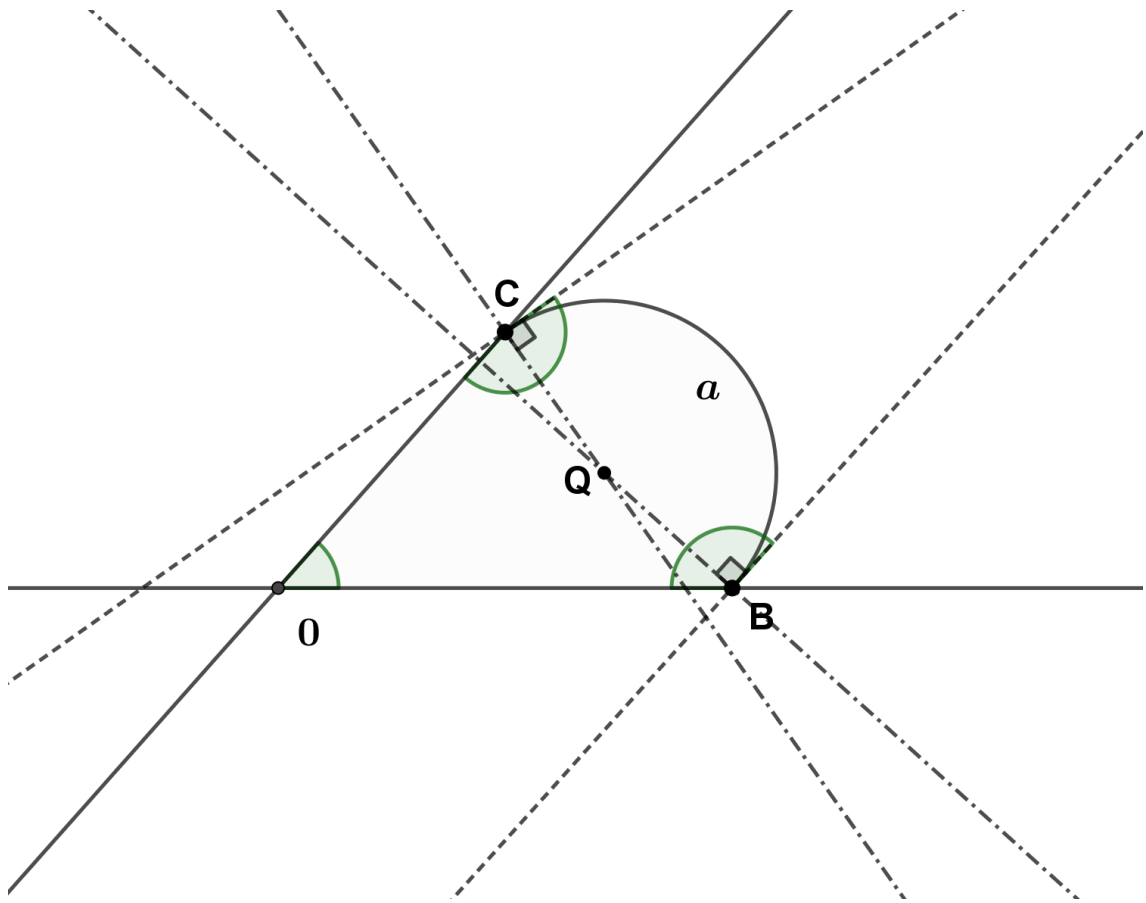


Figura 3.7: Triángulo de Schwarz con dos lados rectos que se cortan en 0.

$S(\mathbb{T}_2)$ son del tipo de la Figura 3.5, tienen los mismos ángulos y dos vértices iguales. Por lo tanto han de ser el mismo y se verificará que $S = T$. Esto demuestra la unicidad. ■

Notación 3.39

Consideraremos \mathbb{T} un triángulo de Schwarz como en la figura 3.5. Es decir, de vértices A, B, C , ángulos $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi \in (0, \pi)$ y segmentos de circunferencias de la esfera de Riemann a, b, c , tales que, al no ser tangentes y cortarse una vez, $b \cap c = \{A\} \cup \{A'\}$, $a \cap c = \{B\} \cup \{B'\}$ y $b \cap a = \{C\} \cup \{C'\}$.

Por construcción estas figuras son dominios simplemente conexos que son distintos de \mathbb{C} . Si denotamos por

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\} \tag{3.47}$$

al semiplano superior, será también un abierto simplemente conexo distinto de \mathbb{C} . En virtud del teorema de representación conforme de Riemann ([Co], pág 160) existirá una única aplicación biholomorfa

$$\phi : \mathbb{H} \rightarrow T, \text{ tal que } \phi(0) = A, \phi(1) = B, \phi(\infty) = C. \tag{3.48}$$

Analicemos ahora el comportamiento de ϕ y la forma que ha de tener.

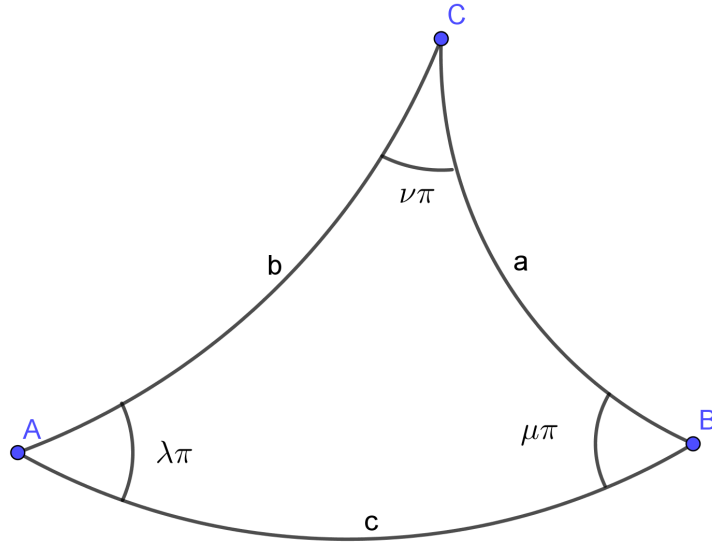


Figura 3.8: Notación general de un triángulo de Schwarz.

Definición 3.40

Sea Ω un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$ y $w \in \mathcal{M}(\Omega)$ no constante. Llamaremos derivada logarítmica de w a la aplicación

$$lw = \frac{w'}{w} \in \mathcal{M}(\Omega). \quad (3.49)$$

Nota 3.41

Si Ω es una región y la función $w \in \mathcal{H}(\Omega)$, tal que no se anula en Ω . Entonces podríamos haber definido la derivada logarítmica como la derivada de un logaritmo de la función.

Definición 3.42

Sea Ω un abierto de \mathbb{C} y $w \in \mathcal{M}(\Omega)$. Llamaremos derivada de Schwarz de w al valor

$$\{w\} = \left(\frac{w''}{w'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{w''}{w'}\right)^2 \in \mathcal{M}(\Omega). \quad (3.50)$$

También, haciendo uso de la derivada logarítmica (3.49), puede expresarse como

$$\{w\} = (lw')' - \frac{1}{2} (lw')^2. \quad (3.51)$$

Cuando se estudia la evaluación de $\{w\}$ en $z \in \Omega$, normalmente se utiliza la notación $\{w, z\}$.

Lema 3.43

La derivada de Schwarz es invariante por transformaciones de Möbius. Es decir, si T es una transformación de Möbius y $w = T \circ u$ entonces $\{w\} = \{u\}$.

Demostración: Veremos, en primer lugar que si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una transformación de Möbius, entonces $\{T\} = 0$. Para ello, derivando sucesivamente, obtenemos:

$$\left(\frac{T''(z)}{T'(z)}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{T''(z)}{T'(z)}\right)^2 = \frac{2c^2}{(cz+d)^2} - \frac{1}{2} \frac{4c^2}{(cz+d)^2} = 0.$$

Una vez probado esto, hacemos la derivada de Schwarz de $w = T \circ u$:

$$\begin{aligned} \{T \circ u\} &= (l(T')(u)u' + l(u'))' - \frac{1}{2} (l(T')(u)u' + l(u'))^2 \\ &= (l(T')(u))' (u')^2 + l(T')(u)u'' + l(u')' - \frac{1}{2} (l(T')(u)u')^2 - \frac{1}{2} (l(u'))^2 - l(T')(u)u'l(u') \\ &= \{T, u\} + \{u\} = \{u\}. \end{aligned}$$

■

Definición 3.44

Sea C un círculo de $\overline{\mathbb{C}}$, diremos que una aplicación $g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es una inversión o reflexión sobre C si $g(z) = T^{-1}(\overline{T(z)})$, con $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una aplicación de Möbius tal que $T(C) = \mathbb{R}$.

En el siguiente teorema probaremos que, para cada círculo, existe una única inversión sobre este.

Lema 3.45

Sea C un círculo de $\overline{\mathbb{C}}$, entonces existe una única inversión g sobre C . Nos referiremos a ella como la inversión o reflexión sobre C .

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que $C = \mathbb{R}$. Si tenemos una transformación de Möbius T tal que $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Entonces, para todo $z \in \mathbb{R}$, se tiene $\overline{T(x)} = T(\overline{x})$, y por tanto, $T^{-1}(\overline{T(x)}) = \overline{x}$. Entonces $\overline{T^{-1}(\overline{T(x)})} = x$, y por lo tanto como $T^{-1}(\overline{T(\cdot)})$ es una aplicación de Möbius, entonces $\overline{T^{-1}(\overline{T(\cdot)})} = Id$.

Supongamos ahora que C es arbitrario, $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dos aplicaciones con las premisas de la definición 3.44 tales que $T(\mathbb{R}) = S(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Entonces $T \circ S^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ y por tanto $\overline{S \circ T^{-1}(\overline{T \circ S^{-1}})} = Id$.

En consecuencia $\overline{T^{-1}(\overline{T \circ S^{-1}(z)})} = S^{-1}(\overline{z})$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y tomando $z = S(w)$, se verifica $\overline{T^{-1}(\overline{T(w)})} = S^{-1}(\overline{S(w)})$, que es justo lo que queremos probar. ■

En caso de tener un segmento de círculo, cuando hablemos de reflexión o inversión sobre este nos referiremos a la inversión sobre el círculo de la esfera que lo contiene.

Del mismo modo cuando hablemos de la inversión o reflexión de un conjunto de puntos del plano completado sobre un círculo C , nos referiremos a la imagen del conjunto por la aplicación g .

Recordamos de la Sección 1.1, si $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ denotamos por

$$\begin{aligned} G^+ &= \{z \in G : \Im(z) > 0\} \\ G^0 &= \{z \in G : \Im(z) = 0\} \\ G^- &= \{z \in G : \Im(z) < 0\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Definimos los siguientes conjuntos, los cuales son simplemente conexos,

$$\begin{aligned} G_1 &= \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \\ G_0 &= \mathbb{C} \setminus [1, \infty), \\ G_\infty &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z \leq 0 \vee z \geq 1\}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Con esta notación enunciamos y demostramos el siguiente resultado:

Teorema 3.46

Si ϕ es la aplicación definida en (3.48), entonces ϕ admite una prolongación analítica única en cada uno de los conjuntos G_k , $k = 1, 0, \infty$.

Demostración : Lo demostraremos, sin pérdida de generalidad, para el conjunto

$$G_\infty = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z \leq 0 \vee z \geq 1\},$$

ya que con el resto el razonamiento es el mismo. Tomamos la transformación de Möbius T

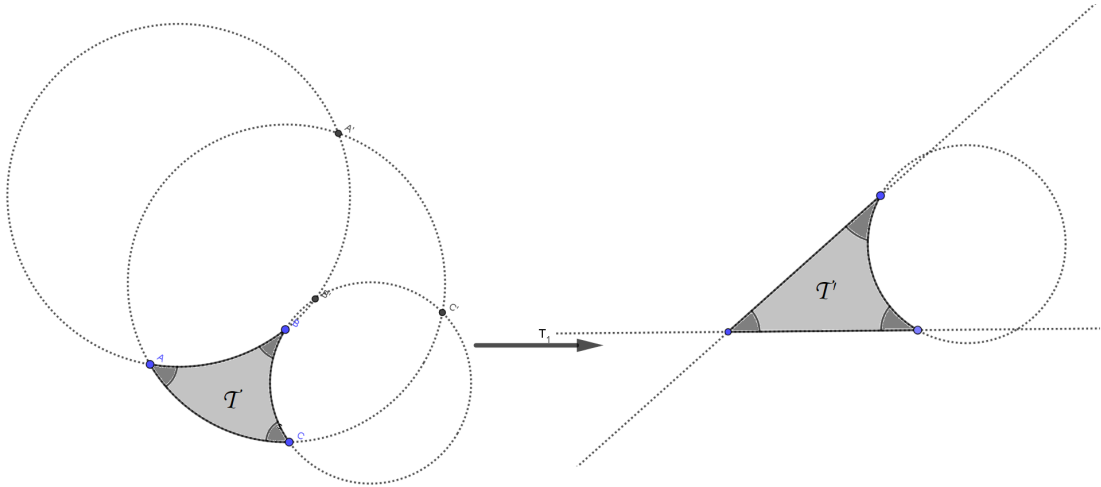


Figura 3.9: Transformación de Möbius de \mathbb{T} en \mathbb{T}_1 , que aplica A en 0, B en 1 y A' en ∞ .

que aplica A en 0, B en 1 y A' en ∞ . Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \psi_\infty : G_\infty^+ &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto T(\phi(z)) \end{aligned} \quad (3.54)$$

verifica las hipótesis del Teorema 1.16 para el conjunto G_∞ . Por tanto existirá una única función $g \in \mathcal{H}(G)$, tal que

$$g|_{G_\infty^+ \cup G_\infty^0} = \psi_\infty.$$

Esta aplicación verifica además que $g(\bar{z}) = \overline{\psi_\infty(z)}$.

Denotamos por $\phi_\infty = T^{-1} \circ g$, la cual verifica, para cada $z \in G_\infty^+$,

$$\phi_\infty(z) = T^{-1}(\psi_\infty(z)) = T^{-1}(T(\phi(z))) = \phi(z).$$

Por lo que es una prolongación analítica de ϕ a G_∞ . En cuanto a la unicidad, esta es clara ya que G_∞ es conexo. ■

Lema 3.47

Sea $w \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\Omega^{-1} = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : 1/z \in \Omega\}$ y $u \in \mathcal{M}(\Omega^{-1})$ tal que $u(z) = w(1/z)$. Entonces se verifica la relación:

$$\{u, z\} = \frac{1}{z^4} \left\{ w, \frac{1}{z} \right\}, \quad \forall z \in \Omega^{-1}.$$

El siguiente resultado será de vital importancia para los teoremas siguientes.

Teorema 3.48

Si ϕ_k es la prolongación analítica ϕ a G_k , $k = 1, 0, \infty$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi_k : \mathbb{T} &\rightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \phi_k(\overline{\phi^{-1}(z)}) \end{aligned} \quad (3.55)$$

es una reflexión sobre el segmento $\phi_k(G_k^0)$. Por tanto $\phi_k|_{G_k^-}$ es una aplicación inyectiva cuya imagen es otro triángulo de Schwarz correspondiente a la reflexión sobre el lado $\phi_k(G_k^0)$.

Demostración : Lo demostraremos para $k = \infty$ ya que para el resto de casos el razonamiento es idéntico. Sea T la transformación de Möbius usada en la demostración del Teorema 3.46, la cual aplica el segmento $\phi_k(G_k^0)$ en un segmento contenido en \mathbb{R} . Por definición, para cada $z \in \mathcal{H}^-$,

$$\phi_\infty(z) = T^{-1}(\overline{\psi_\infty(z)}) = T^{-1}(\overline{T(\phi(z))}).$$

Como $\phi^{-1}(\mathbb{T}) \subset \mathbb{H}$, entonces para cada $z \in \mathcal{T}$

$$\phi_k(\overline{\phi^{-1}(z)}) = T^{-1}(\overline{T(\phi(\phi^{-1}(z)))}) = T^{-1}(\overline{T(z)}).$$

Por lo tanto es la reflexión sobre el lado $\phi_k(G_k^0)$ y hemos concluido. ■

Notación 3.49

A la prolongación de ϕ a los conjuntos G_k , $k = 1, 0, \infty$ la denotaremos como ϕ_k , $k = 1, 0, \infty$, respectivamente.

Si tomamos la función ϕ anteriormente descrita, es inmediato, ya que es un biholomorfismo, que su derivada no se anula nunca. Por lo tanto podremos afirmar que su derivada de Schwarz será una función holomorfa $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ y verificará ciertas propiedades, que se caracterizarán a continuación en el siguiente teorema, cuya demostración sigue la línea de [CaSt].

Teorema 3.50

Sean $\lambda, \mu, \nu \in (0, 1)$ consideramos un triángulo de Schwarz \mathbb{T} de ángulos $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$. Entonces la derivada de Schwarz de cualquier función biholomorfa $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{T}$ verifica

$$F(z) = \{\phi, z\} = \frac{1 - \lambda^2}{2z^2} + \frac{1 - \mu^2}{2(1 - z)^2} + \frac{1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}{2z(1 - z)}. \quad (3.56)$$

Demostración: Sea $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{T}$ biholomorfa, tendremos entonces que $\phi'(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{H}$, en consecuencia $F(z)$ es holomorfa en \mathbb{H} .

En virtud de los razonamientos realizados previamente, ϕ es prolongable analíticamente a lo largo de cualquier camino que no pase por 0 o 1, y por tanto F también. Además estas prolongaciones, en virtud del Teorema 3.48, producirán ciertas reflexiones del triángulo sobre sus lados.

Como los tres triángulos son conformes, en virtud del Lema 3.43, obtenemos tres funciones cuya derivada de Schwarz es la misma F .

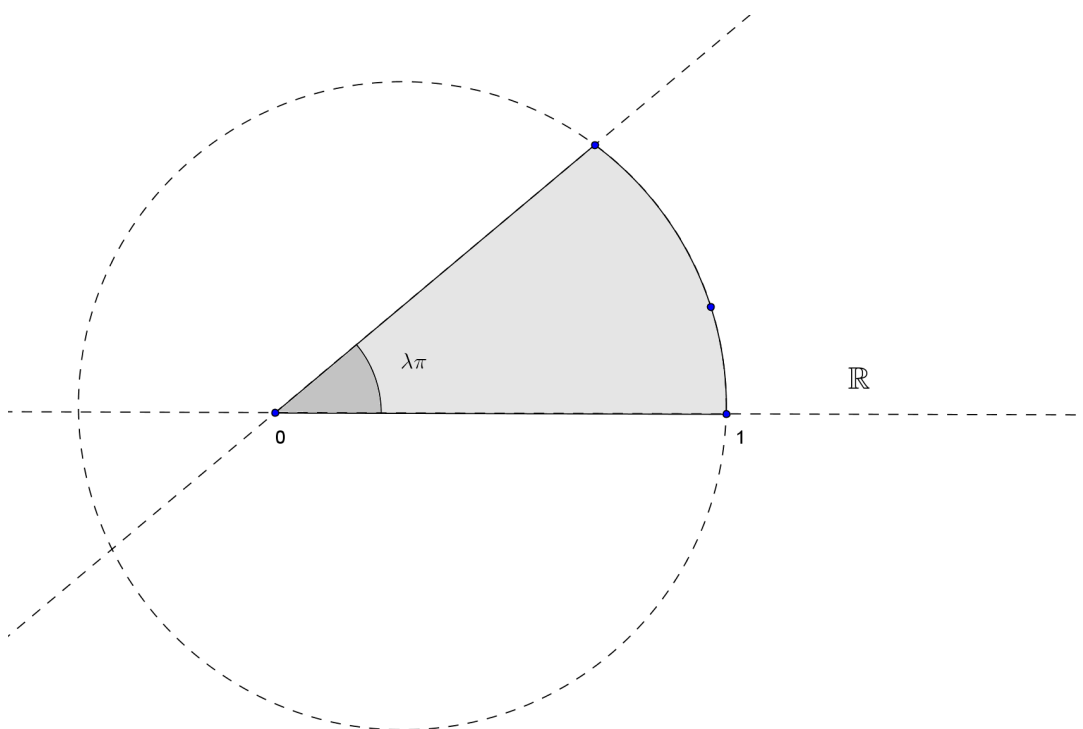


Figura 3.10: Triángulo con dos líneas rectas, con vértices en cero y uno.

En consecuencia F es una función analítica univaluada en $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ y por tanto hablaremos de su desarrollo de Laurent en 0 y 1 de forma única.

Para determinar el desarrollo en 0, supondremos que $\lambda > 0$. Por el Lema 3.43 podremos suponer que tenemos un triángulo como en la Figura 3.5.

Tomamos la aplicación $\tau(z) = z^{1/\lambda}$, que transformará la figura de la manera que se visualiza en la Figura 3.5.

En el segundo objeto de la Figura 3.5 tenemos que en un entorno de 0 la frontera coincide

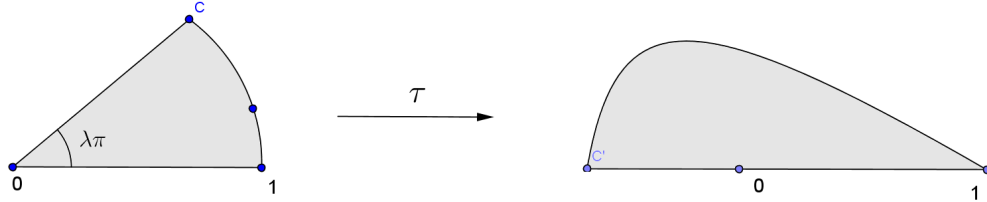


Figura 3.11: Transformación del triángulo realizada por la aplicación τ .

con un segmento del eje real, entonces la derivada no se anula.

$$\phi(z)^{\frac{1}{\lambda}} = \tau \circ \phi(z) = z(A_1 + A_2z + \dots) \quad A_1 \neq 0.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \phi(z) &= z^\lambda (A_1 + A_2z + \dots)^\lambda \quad A_1 \neq 0, \\ \phi'(z) &= z^{\lambda-1} (b_0 + A_1z + \dots) \quad b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Realizando la derivada logarítmica obtenemos

$$\begin{aligned} l\phi'(z) &= \frac{\lambda-1}{z} + c_0 + c_1z + \dots, \\ (l\phi'(z))' &= \frac{1-\lambda}{z^2} + \text{Función holomorfa en } 0, \\ -\frac{1}{2}(l\phi'(z))^2 &= -\frac{(\lambda-1)^2}{2z^2} + c_0 \frac{1-\lambda}{z} + \text{Función holomorfa en } 0. \end{aligned}$$

Y por lo tanto, en un entorno de 0, existen, h_1 una constante y f_1 una función holomorfa en 0 tal que:

$$F(z) = \{\phi, z\} = \frac{1-\lambda^2}{2z^2} + \frac{h_1}{z} + f_1(z). \quad (3.57)$$

Mediante un procedimiento completamente análogo obtenemos el desarrollo en 1. Es decir en un entorno de 1, existen, h_2 una constante y f_2 una función holomorfa en 1 tal que:

$$F(z) = \{\phi, z\} = \frac{1-\mu^2}{2(1-z)^2} + \frac{h_2}{1-z} + f_2(z). \quad (3.58)$$

Finalmente, para hallar el desarrollo en ∞ primero observamos que si tomamos $z = \frac{1}{t}$ y desarrollamos en un entorno de $t = 0$ entonces, por (3.57), obtenemos:

$$F(t) = \{\phi, t\} = \frac{1-\nu^2}{2t^2} + \frac{h_3}{t} + f_3(t). \quad (3.59)$$

En virtud del Lema 3.47 obtenemos que

$$F\left(\frac{1}{t}\right) = t^4 F(t).$$

Si usamos ahora (3.59), llegamos a que en un entorno de $z = \infty$ existirá g_3 , holomorfa en 0 tal que

$$F(z) = \{\phi, z\} = \frac{1 - \nu^2}{2z^2} + \frac{h_3}{z^3} + \frac{1}{z^4} g_3\left(\frac{1}{z}\right). \quad (3.60)$$

Además la expresión

$$F(z) - \frac{1 - \lambda^2}{2z^2} - \frac{h_1}{z} - \frac{1 - \mu^2}{2(1 - z)^2} - \frac{h_2}{1 - z} \quad (3.61)$$

es holomorfa en \mathbb{C} y por (3.60) tiende a 0 cuando z tiende a ∞ . Haciendo uso del teorema de Liouville, será constante igual a 0. Por tanto

$$F(z) = \frac{1 - \lambda^2}{2z^2} + \frac{h_1}{z} + \frac{1 - \mu^2}{2(1 - z)^2} + \frac{h_2}{1 - z}. \quad (3.62)$$

A partir de (3.60) se deduce

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 F(z) = \frac{1 - \nu^2}{2}.$$

Esto, junto con (3.62), nos da las relaciones

$$h_2 = h_1, \quad (3.63)$$

$$\frac{1 - \mu^2}{2} + \frac{1 - \lambda^2}{2} - h_1 = \frac{1 - \nu^2}{2}, \quad (3.64)$$

De donde (3.64) es debido a que

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{z(1 - z)}.$$

Con esto obtenemos el resultado final

$$F(z) = \{\phi, z\} = \frac{1 - \lambda^2}{2z^2} + \frac{1 - \mu^2}{2(1 - z)^2} + \frac{1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}{2z(1 - z)}. \quad \blacksquare$$

Desarrollando la igualdad (3.56) llegamos a que ϕ ha de verificar

$$\frac{\phi'(z)\phi'''(z) - 3\phi''(z)^2}{\phi'(z)^2} = \frac{1 - \lambda^2}{2z^2} + \frac{1 - \mu^2}{2(1 - z)^2} + \frac{1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}{2z(1 - z)}, \quad z \in \mathbb{H}.$$

Con lo que llegamos a la siguiente ecuación diferencial

$$\phi'(z)\phi'''(z) - 3\phi''(z)^2 - \phi'(z)^2 \left(\frac{1 - \lambda^2}{2z^2} + \frac{1 - \mu^2}{2(1 - z)^2} + \frac{1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}{2z(1 - z)} \right) = 0, \quad z \in \mathbb{H}. \quad (3.65)$$

Seguidamente estudiaremos que relación existe entre estas figuras geométricas y la ecuación (3.13), estudiada en este capítulo.

Como ya sabemos, en toda región de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ toda solución y de (3.13) admitirá una prolongación analítica única. Como el semiplano superior \mathbb{H} es una región de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ podemos hablar de una solución de la ecuación (3.13) en \mathbb{H} sin ambigüedad.

Lema 3.51

Sean y_1, y_2 soluciones independientes de la ecuación (3.13) en el semiplano superior \mathbb{H} , entonces la aplicación

$$w : \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto \frac{y_1(z)}{y_2(z)} \quad (3.66)$$

es solución de (3.65).

Demostración : En primer lugar, para facilitar el desarrollo de la prueba denotamos por

$$p = \frac{(a+b+1)z-c}{z(z-1)},$$

$$q = \frac{ab}{z(z-1)}.$$

Tomamos los exponentes locales asociados $\lambda = 1-c$, $\mu = c-a-b$, $\nu = b-a$ y suponemos, como venimos haciendo hasta ahora, que están entre 0 y 1,. Los introducimos en $F(z)$ de la ecuación (3.65), un sencillo cálculo muestra que

$$F(z) = -p' + 2q - \frac{1}{2}p^2.$$

Tomamos el cociente, hacemos la derivada

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_2' y_1}{y_2^2}.$$

Procediendo con la derivada logarítmica

$$lw' = \frac{y_1'' y_2 - y_2'' y_1}{y_1' y_2 - y_2' y_1} - 2 \frac{y_2'}{y_2}$$

$$= \frac{(-py_1' - qy_1)y_2 - (-py_2' - qy_2)y_1}{y_1' y_2 - y_2' y_1} - 2 \frac{y_2'}{y_2}$$

$$= p \frac{-y_1' y_2 + y_2' y_1}{y_1' y_2 - y_2' y_1} - 2 \frac{y_2'}{y_2}$$

$$= -p - 2 \frac{y_2'}{y_2}.$$

Para hacer la derivada de Schwarz realizamos los siguientes cálculos intermedios

$$(lw')' = -p' - 2 \frac{y_2'' y_2 - (y_2')^2}{y_2^2} = -p' - 2 \frac{(-py_2' - qy_2)y_2 - (y_2')^2}{y_2^2}$$

$$= -p' + 2q - 2 \frac{-py_2' y_2 - (y_2')^2}{y_2^2},$$

$$\frac{1}{2}(lw')^2 = \frac{1}{2}p^2 + 2 \frac{y_2'^2}{y_2^2} + 2p \frac{y_2'}{y_2}.$$

Por último, haciendo la derivada de Schwarz de w , obtenemos

$$\{w, z\} = -p'(z) + 2q(z) - \frac{1}{2}p^2(z) = F(z).$$

Entonces w es solución de (3.65). ■

Es mas, el siguiente Teorema nos garantizará el recíproco de 3.51

Teorema 3.52

Sea $w : \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Entonces w es solución de (3.65) si y solo si existen y_1, y_2 soluciones independientes de la ecuación (3.13) en \mathbb{H} , tales que $w(z) = \frac{y_1(z)}{y_2(z)}$.

Demostración : Sea w una solución de (3.65), denotamos por W una solución de $W' = -pW$.

Tomamos $y = \sqrt{\frac{W}{w}}$, veamos que es solución de (3.13).

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \left(\frac{W'}{W} - \frac{w''}{w'} \right) y = -\frac{1}{2} \left(p + \frac{w''}{w'} \right) y \\ y'' &= -\frac{1}{2} \left(p + \frac{w''}{w'} \right) y' - \frac{1}{2} \left(p' + \left(\frac{w''}{w'} \right)' \right) y \\ &= -py' + \frac{1}{4} \left(-p + \frac{w''}{w'} \right) \left(p - \frac{w''}{w'} \right) y - \frac{1}{2} \left(p' + \left(\frac{w''}{w'} \right)' \right) y \\ &= -py' - qy - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{w''}{w'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{w''}{w'} \right)^2 + p' - 2q + \frac{1}{2}p^2 \right) y \\ &= -py' - qy. \end{aligned}$$

Ahora si $Y = yw$, entonces de nuevo Y vuelve a ser otra solución de (3.13), comprobémoslo.

$$\begin{aligned} Y' &= y'w + yw' = (y'Y + W)y^{-1} \\ Y'' &= (y''Y + y'Y' + W')Y^{-1} - Y'y'y^{-1}. \\ &= (py' + gy)Yy^{-1} - pWy^{-1} \\ &= -p(yY + W)y^{-1} - qY = -pY' - qY. \end{aligned}$$

Por lo tanto $w = \frac{Y}{y}$, con y, Y soluciones que serán independientes ya que su cociente es una aplicación biholomorfa y por tanto, al derivar, el Wronskiano no puede anularse. ■

Lema 3.53

Sea $T : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una transformación de Möbius y $w : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ una solución de (3.65). Entonces $T \circ w$ es solución de (3.65). Es más, si $w_1, w_2 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ son soluciones de (3.65), entonces existe una transformación de Möbius T tal que $w_2 = T \circ w_1$.

Demostración : En virtud del Lema 3.43, $T \circ w$ será una solución de la ecuación. Para probar el recíproco necesitamos hacer uso del Teorema 3.52. Como existe una aplicación w que aplica un triángulo con las características buscadas y según ese teorema $w = y/Y$, con y, Y soluciones independientes de (3.13). Entonces otra solución cualquiera w_1 será de la forma y_1/y_2 con y_1, y_2 soluciones independientes de (3.13) y por tanto, existen constantes A, B, C, D tales que $y_1 = Ay + BY$, $y_2 = Cy + DY$. En consecuencia

$$w_1 = \frac{Ay + BY}{Cy + DY} = \frac{Aw + B}{Cw + D},$$

luego es una transformación de Möbius de w . ■

Ahora estamos preparados para demostrar el siguiente teorema, el cual muestra exactamente lo que ha de verificar cualquier aplicación conforme entre \mathbb{H} y \mathbb{T} .

Teorema 3.54

ϕ es solución de la ecuación diferencial (3.65) si y solamente si ϕ es un biholomorfismo con un triángulo con los mismos ángulos que \mathbb{T} .

Demostración: Como ϕ , definida en (3.48) es solución de la ecuación diferencial (3.65) y es una aplicación biholomorfa de \mathbb{H} en \mathbb{T} . Si w solución de la ecuación diferencial (3.65), entonces por el Lema 3.53 se tiene que existe una transformación de Möbius T tal que $w = T \circ \phi$.

La otra implicación es justamente el Teorema 3.50. ■

Utilizando los Teoremas 3.54 y 3.52 podemos deducir que

Corolario 3.55

Sea $w : \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Entonces existe un triángulo de Schwarz \mathbb{T} , tal que w es un biholomorfismo de \mathbb{H} en \mathbb{T} , si y solo si, existen y_1, y_2 soluciones independientes de la ecuación (3.13) en \mathbb{H} , tales que $w(z) = \frac{y_1(z)}{y_2(z)}$. A este triángulo lo llamaremos triángulo asociado a la ecuación.

Corolario 3.56

w es algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$ y los exponentes locales son racionales si y solo si todas las soluciones de (3.13) son algebraicas.

Demostración: Como el cociente de funciones algebraicas es una función algebraica, entonces por definición de w si todas las soluciones de (3.13) son algebraicas entonces w lo será. Además los exponentes locales han de ser racionales para que el grupo de monodromía sea finito.

Por otro lado supongamos que w es algebraica. En la demostración del teorema 3.52 se halla una solución de (3.13) a partir de $y = \sqrt{\frac{W}{w}}$, donde W es solución de $W' = -pW$. Una solución de esta ecuación es $z^{-c}(z-1)^{c-a-b-1}$, algebraica por ser los exponentes locales racionales, entonces y es algebraica. Además en la misma prueba se halla otra solución de (3.13) independiente $Y = yw$, que será algebraica. Por tanto, como toda solución de (3.13) es combinación lineal de y, Y , se tiene lo pedido. ■

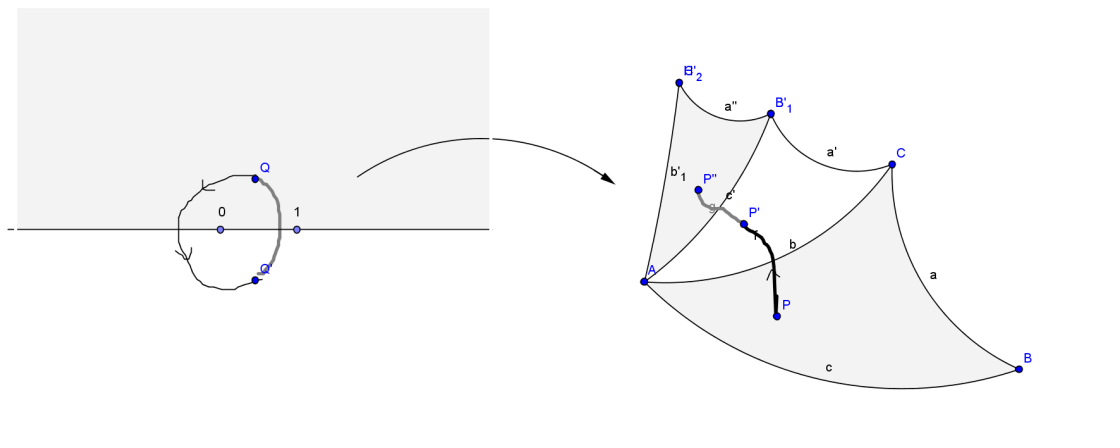
Sabemos del anterior capítulo que el grupo de monodromía está generado por los caminos g_0 y g_1 , definidas en $[0, 1]$, analicemos ahora las prolongaciones de w a lo largo de ellas.

En primer lugar g_0 comienza en \mathbb{H} , luego corta a $(\infty, 0)$ para entrar en \mathbb{H}^- y por último vuelve a \mathbb{H} cortando a $(0, 1)$. Es decir, existen $t_1, t_2 \in (0, 1)$ tales que $g_0(t_1) \in (\infty, 0)$, $g_0(t_2) \in (0, 1)$ y además $g_0([0, t_1]) \subset \mathbb{H}$, $g_0((t_1, t_2)) \subset \mathbb{H}^-$ y $g_0((t_2, 1]) \subset \mathbb{H}$. Tomamos $t_0 \in (t_1, t_2)$, claramente $t_0 \in \mathbb{H}^-$.

Gracias a lo anterior la prolongación de w a lo largo de g_0 puede ser dividida en dos tramos, los cuales pueden ser estudiados, a partir del Teorema 3.48, como reflexiones sobre los diferentes lados del triángulo.

- Prolongación de w a lo largo de $g_0|_{[0, t_0]}$. En este primer tramo $g_0|_{[0, t_0]}$ es un camino que corta a $(\infty, 0)$ por tanto su prolongación equivale a la reflexión sobre el lado c del triángulo. Este nuevo triángulo reflejado lo llamaremos \mathbb{T}_1 , sus vértices serán A, B, C' , sus ángulos serán los mismos que los de \mathbb{T} y sus lados serán a', b', c . Denotamos por w_1 a la prolongación de w por este camino.

Figura 3.12: Prolongación analítica de w a lo largo de g_0



- Prolongación de w_1 a lo largo de $g_0|_{[t_0,1]}$. En este segundo tramo, $g_0|_{[t_0,1]}$ es un camino que corta a $(0,1)$ y estamos reflejando w_1 , que es una aplicación con imagen \mathbb{T}_1 . Por tanto su prolongación equivale a la reflexión sobre el lado b' del triángulo. Al igual que antes llegamos a un triángulo curvilíneo \mathbb{T}_2 que es composición de dos reflexiones sobre \mathbb{T} .

Para el caso del camino g_1 el proceso es muy similar. El conjunto

$$\Gamma = \{f : f \text{ es una aplicación biyectiva de } \mathbb{C} \text{ en } \mathbb{C}\},$$

junto con la composición de funciones, tiene una estructura de grupo.

Definición 3.57

Definimos el grupo de las reflexiones de \mathbb{C} como el subgrupo W de Γ generado por las reflexiones.

$$W = \langle \{f : f \text{ es una reflexión respecto a una circunferencia en } \overline{\mathbb{C}}\} \rangle.$$

Dado un triángulo de Schwarz \mathbb{T} definimos su grupo de reflexiones $W(\mathbb{T})$ como el subgrupo de W generado por las reflexiones sobre los lados del triángulo, denotadas como r, s, t .

$$W(\mathbb{T}) = \langle r, s, t \rangle.$$

Definimos grupo de reflexiones dobles $\widehat{W}(\mathbb{T})$ como el subgrupo

$$\widehat{W}(\mathbb{T}) = \langle (rs), (st) \rangle.$$

Considerando de nuevo w como cociente de dos soluciones independientes de (3.13), $w = y/Y$. Si prolongamos analíticamente a lo largo de un lazo γ obtendremos otra solución del problema (3.65) w_γ que no será sino una transformación de Möbius de w . Podremos

considerar de igual modo su grupo de monodromía \mathfrak{M}_w como el grupo de todas las estas transformaciones con la composición como operación.

Teorema 3.58

Sea w solución de (3.65), para cada camino γ con soporte en $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ consideramos la prolongación analítica w_λ . Entonces existirá una única $T_\lambda \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ tal que $w_\lambda = T_\lambda(w)$.

El conjunto

$$\{T_\lambda : \lambda \text{ es un camino contenido en } \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}\}$$

es un subgrupo de $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$

Nota 3.59

El grupo de monodromía de (3.65) es isomorfo al subgrupo de $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$

$$\mathfrak{M}_{y/Y} = \{T_\lambda : \lambda \text{ es un camino contenido en } \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}\} \quad (3.67)$$

Este apunte motiva a intentar relacionar este grupo con los anteriores nombrados en la sección, el siguiente teorema resuelve estas cuestiones.

Teorema 3.60

Los tres grupos siguientes son isomorfos:

- El grupo \mathfrak{M}_P de monodromía proyectivo de la ecuación hipergeométrica (3.13).
- El grupo $\widehat{W}(\mathbb{T})$ de las reflexiones geométricas dobles del triángulo de Schwarz asociado a la ecuación.
- El grupo $\mathfrak{M}_{y/Y}$ de monodromía de una solución $w = y/Y$ de (3.65) en \mathbb{H} .

Demostración : Sea D una región de \mathbb{C} que no contiene a los puntos singulares de (3.13), e y, Y dos soluciones independientes en D . Con la notación anterior, tomamos un lazo con extremos en $z_0 \in D$, γ , consideramos la prolongación meromorfa de $w = \frac{y}{Y}$ a lo largo de γ , $w_\gamma = \frac{y_\gamma}{Y_\gamma}$. w_γ es solución de la ecuación (3.65) y por tanto, en virtud del lema ??, existirá una única aplicación de Möbius T_γ tal que $w_\gamma = T_\gamma \circ w$. Luego defino la aplicación siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, z_0) &\rightarrow \widehat{W}(\mathbb{T}) \\ [\gamma] &\mapsto T_\gamma \end{aligned} \quad (3.68)$$

En virtud del Teorema de monodromía 1.12 está bien definida. Veamos que respeta la operación, sean α, β dos lazos con extremos en z_0 . T_γ es la única aplicación tal que $w_\gamma = T_\gamma \circ w$, análogo con la concatenación $\alpha * \beta$. Si ahora w_γ lo prolongo por β tendremos

$$T_{\gamma * \beta} \circ w = w_{\gamma * \beta} = T_\gamma \circ w_\beta = T_\gamma \circ T_\beta \circ w.$$

Lo cual concluye que $T_{\gamma * \beta} = T_\gamma \circ T_\beta$, y por tanto respeta la operación de grupo. Analicemos ahora que elementos pertenecen al núcleo de Ψ . Sea $[\lambda] \in \ker(\Psi)$, esto equivale

a que $w_\lambda = w$, es decir $\frac{y_\lambda}{Y_\lambda} = \frac{y}{Y}$. Por tanto

$$\frac{y_\lambda}{y} = \frac{Y_\lambda}{Y},$$

$$a + bw = \frac{ay + bY}{y} = \frac{cy + dY}{Y} = cw^{-1} + d.$$

Luego w será solución de la ecuación polinómica $bw^2 + (a - d)w - c = 0$, la cual tiene a lo sumo dos raíces, luego w es constante en cada componente conexa. Como D es conexo, w sería constante y las soluciones y, Y no serían independientes, por tanto $b = 0, c = 0$ y $a = d$. Esto significa que si x es solución de (3.13) en D entonces $x_\lambda = ax$. Por tanto concluimos haciendo uso del primer teorema de isomorfía. ■

Corolario 3.61

El grupo de monodromía \mathfrak{M} de una ecuación hipergeométrica (3.13) es finito si y solo si lo es su grupo de monodromía proyectivo \mathfrak{M}_P .

Demostración : Como el cardinal de \mathfrak{M}_P es menor o igual que el de \mathfrak{M} entonces basta probar una de las implicaciones.

Si \mathfrak{M}_P es finito entonces w es algebraico y los exponentes locales son racionales. Basta repetir el razonamiento del Teorema 2.77, dándose cuenta que $w = y/Y$ también tendrá un crecimiento potencial y el polinomio que se anula en las funciones w_λ será de coeficientes meromorfos.

Si w es algebraico y los exponentes locales son racionales, entonces, por el corolario 3.56, toda solución de (3.13) será algebraica. Por tanto, en virtud del Teorema 2.77, el grupo de monodromía \mathfrak{M} es finito. ■

3.6. Soluciones algebraicas

En esta sección estudiaremos condiciones suficientes y necesarias para que una ecuación hipergeométrica (3.13) tenga todas sus soluciones algebraicas. Gracias al Teorema 3.60 basta con analizar el grupo formado por las reflexiones dobles del triángulo de Schwarz asociado a la ecuación. Con la Notación 3.39 para un triángulo de Schwarz tenemos tres opciones sobre los ángulos.

Definición 3.62

Sea \mathbb{T} un triángulo de Schwarz, entonces si

1. $\lambda + \mu + \nu < 1$, diremos que el triángulo es Hiperbólico.
2. $\lambda + \mu + \nu = 1$, diremos que el triángulo es Euclídeo.
3. $\lambda + \mu + \nu > 1$, diremos que el triángulo es Esférico.

Definición 3.63

Dos transformaciones T, S de Möbius son conjugadas si existe una transformación de

Möbius U tal que $T = U^{-1} \circ S \circ U$.

Definición 3.64

Una transformación T diremos que es conjugada de un giro de ángulo $\lambda \in \mathbb{R}$ si es conjugada a U_λ , definida como

$$\begin{aligned} U_\lambda : \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto e^{\lambda i} z. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Lema 3.65

Sean dos círculos R, S tal que se cortan en A, B con un ángulo α . Si g_R es la reflexión sobre R y g_S es la reflexión sobre S , entonces la composición de las dos reflexiones $g_R \circ g_S$ es una conjugada de un giro de ángulo 2α con eje de rotación AB .

Demostración: Supongamos que tenemos dos rectas $r = \mathbb{R}$, $s = \{x \exp(\alpha i) : x \in \mathbb{R}\}$, que se cortan en 0 , probemos el resultado para este caso. Haciendo la reflexión sobre r esta será $g(z) = \bar{z}$, se verifica que $g(s) = \{x \exp(-\alpha i) : x \in \mathbb{R}\}$. Ahora la reflexión sobre s será justamente

$$f(z) = \exp(\alpha i) \overline{\exp(-\alpha i) z} = \exp(\alpha i) \exp(\alpha i) \bar{z} = \exp(2\alpha i) \bar{z}.$$

Por tanto la composición de ambas es $f(g(z)) = f(\bar{z}) = \exp(2\alpha i) z$, que es una conjugada de un giro de ángulo 2α .

Si tenemos dos círculos R, S tal que se cortan en A, B distintos, tomamos una transformación de Möbius T tal que $T(B) = \infty$, $T(A) = 0$ y $T(R) = \mathbb{R}$. Ahora estamos en el caso anterior y por tanto $g_{T(S)}(g_{T(R)}) = U_{2\alpha}$. Pero, por definición de reflexión, $g_{T(S)} = T g_S T^{-1}$ y por lo tanto $g_S g_R = T U_{2\alpha} T^{-1}$, con lo que es una conjugada de un giro. ■

Lema 3.66

Si el grupo de reflexiones dobles, $\widehat{W}(\mathbb{T})$, de un triángulo de Schwarz \mathbb{T} es finito, entonces $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Q}$.

Demostración: Supongamos que $\lambda \notin \mathbb{Q}$, entonces, en virtud del Lema 3.65, uno de los dos generadores del grupo será una conjugada de un giro g de ángulo $\lambda\pi$. Como el grupo $\widehat{W}(\mathbb{T})$ hemos supuesto que es finito, entonces existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m(z) = z$. Por otro lado como g es conjugada a $U_{2\pi\lambda}$, entonces $\exp(2\pi i \lambda m) = 1$, y por tanto $\lambda m \in \mathbb{Z}$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Hemos llegado a una contradicción. ■

Definición 3.67

Un triángulo de Schwarz se dice que es elemental si sus ángulos son de la forma $\frac{\pi}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$ no nulo.

Así como el conjunto de triángulos elementales hiperbólicos tienen cardinal infinito, el número de triángulos elementales euclídeos y esféricos es finito. En la Tabla 3.1 y en la Tabla 3.2, en las cuales suponemos siempre, sin pérdida de generalidad, que $\lambda \geq \mu \geq \nu$, se pueden ver todos los posibles triángulos elementales esféricos y euclídeos respectivamente.

	λ	μ	ν	
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_{>0}$	Diédrico.
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Tetraédrico.
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	Cúbico.
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	Icosaédrico.

Cuadro 3.1: Triángulos esféricos elementales

	λ	μ	ν
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Cuadro 3.2: Triángulos euclídeos elementales.

Teorema 3.68

Existen cuatro posibles triángulos elementales y esféricos, los cuales están en la Tabla 3.1, además el grupo de reflexiones dobles de cualquiera de los cuatro posibles triángulos esféricos elementales es finito.

Demostración: En primer lugar, veamos que solo hay cuatro posibles triángulos elementales y esféricos. Se ha de verificar que $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} > 1$, para $n, k, m \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Supongamos que están ordenados $n \leq m \leq k$. Descartemos casos:

- Si $n \geq 3$ entonces $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} \leq 1$.
- Si $n = 2$ y $m \geq 4$ entonces $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} \leq 1$.
- Si $n = 2, m = 3, m \geq 6$ y entonces $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} \leq 1$.

Por tanto $n = 2, m \in \{2, 3\}$ y si $m = 3$ entonces $m \in \{3, 4, 5\}$. Con estas consideraciones es claro que los únicos posibles triángulos elementales y esféricos son los de la lista 3.1.

Analizaremos los cuatro casos por separado, y probaremos que sus grupos de reflexiones son finitos:

1. **Caso diédrico**, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Demostraremos que el grupo de rotaciones es isomorfo al grupo diédrico D_n , el cual es finito. Sabemos que la presentación del grupo diédrico D_n es

$$D_n = \langle r, s : s^2 = r^n = (sr)^2 = 1 \rangle$$

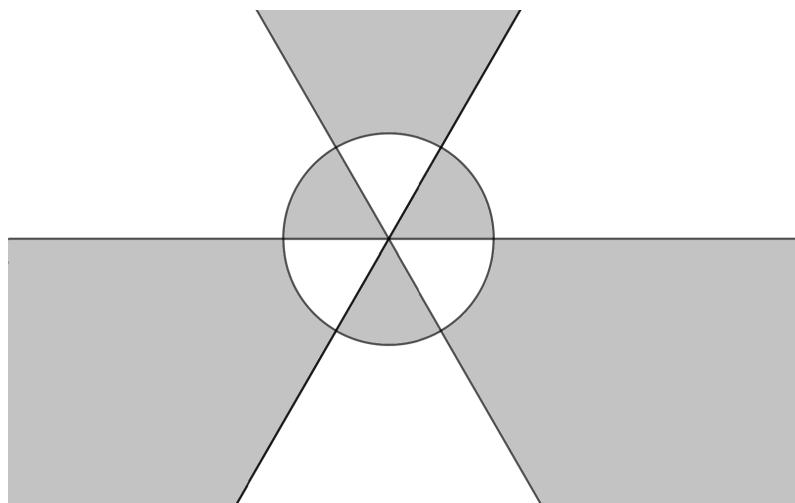


Figura 3.13: Representación en proyección estereográfica del caso diédrico con $n = 3$.

Tomamos r la rotación de ángulo de medida $2\pi/n$, r tiene orden n . Sea s la rotación de ángulo π , de orden dos. Por el teorema 3.60 sabemos que el grupo de rotaciones del triángulo es isomorfo al grupo de monodromía de alguna ecuación (3.13) para ciertos parámetros de la misma, y que además el giro en A es la imagen, por el isomorfismo, de g_0 , el giro en B es la imagen, por el isomorfismo, de g_1 y el giro en C es la imagen, por el isomorfismo, de g_∞ . Por lo tanto se deduce que $g_0^n = 1$, $g_1^2 = 1$, $g_\infty^2 = 1$ y como se verifica que $g_\infty^{-1} = g_0 \circ g_1$, entonces $(g_0 \circ g_1)^2 = 1$. Equivalentemente el grupo será generado por s, r con órdenes n y 2 respectivamente y tales que rs tiene orden 2 , luego será D_n .

Este caso puede además ser visualizado como las reflexiones, sobre las líneas geodésicas creadas por la proyección desde el centro de la esfera, de una pirámide doble, con base la figura regular de n lados.

2. **Caso del tetraedro**, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. El grupo de rotaciones del tetraedro es isomorfo a A_4 , cuya presentación es justamente

$$A_4 = \langle r, s : s^2 = r^3 = (sr)^3 = 1 \rangle.$$

Razonando exactamente como en el caso anterior, con s la rotación de ángulo π y r la rotación de ángulo $2\pi/3$. Y con el mismo argumento de monodromía sabremos que el orden de sr es justamente el $g_0 \circ g_1 = g_\infty^{-1}$ que es el de la rotación sobre el vértice restante, de orden tres en este caso. Luego tendremos el isomorfismo.

Podemos visualizarlo, en este caso, como las reflexiones sobre las líneas geodésicas, creadas por la proyección desde el centro de un tetraedro inscrito en la esfera.

3. **Caso del cubo**, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$. Sabemos que el grupo de rotaciones del cubo es isomorfo a S_4 , cuya presentación es justamente

$$S_4 = \langle r, s : s^2 = r^3 = (sr)^4 = 1 \rangle.$$

Con el mismo argumento de los casos anteriores, con s la rotación de ángulo π y r la rotación de ángulo $2\pi/3$. Razonando con la monodromía, sabremos que el orden de sr es justamente el $g_0 \circ g_1 = g_\infty^{-1}$ que es el de la rotación sobre el vértice restante, de orden 4 en este caso. Luego tendremos el isomorfismo.

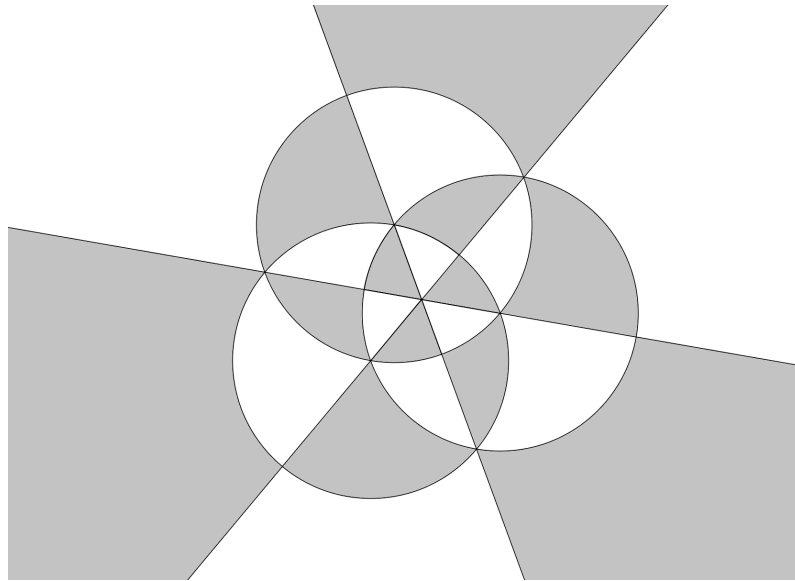


Figura 3.14: Representación en proyección estereográfica del caso del tetraedro

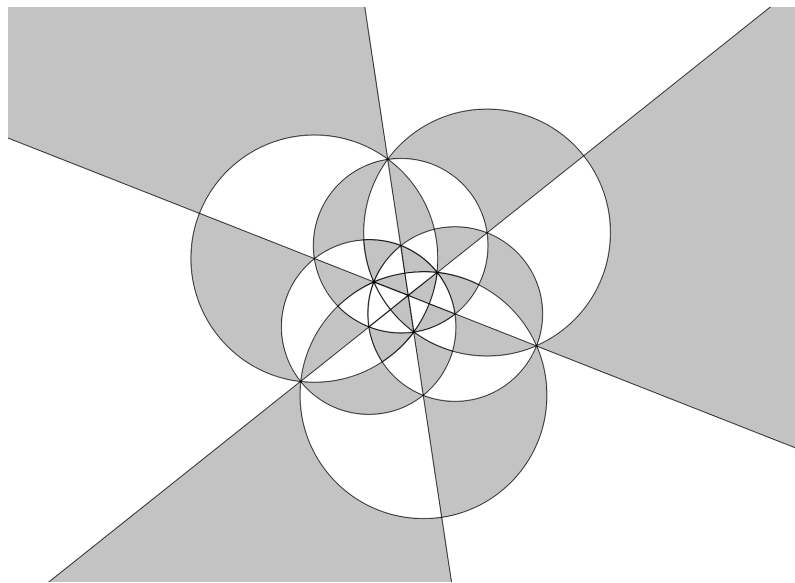


Figura 3.15: Representación en proyección estereográfica del caso del cubo

Podemos visualizarlo, en este caso, como las reflexiones sobre las líneas geodésicas, creadas por la proyección desde el centro de un cubo inscrito en la esfera.

4. **Caso del icosaedro**, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$. Sabemos que el grupo de rotaciones del icosaedro es isomorfo a A_5 , cuya presentación es

$$A_5 = \langle r, s : s^2 = r^3 = (sr)^5 = 1 \rangle.$$

Con el mismo argumento que en los casos anteriores se deduce el isomorfismo. Podemos visualizarlo, en este caso, como las reflexiones sobre las líneas geodésicas,

creadas por la proyección desde el centro de un icosaedro inscrito en la esfera.

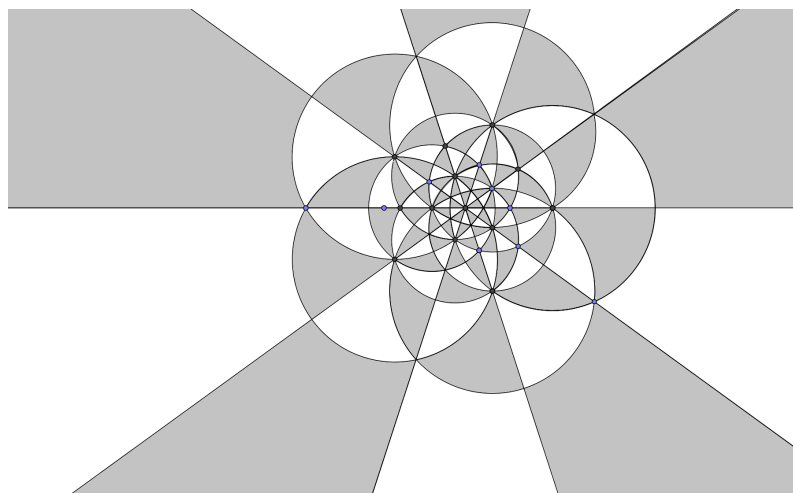


Figura 3.16: Representación en proyección estereográfica del caso del icosaedro

Definición 3.69

Diremos que un triángulo de Schwarz \mathbb{T} es geodésico si sus lados son segmentos de círculo máximo.

Nota 3.70

Recordamos que un círculo en $\bar{\mathbb{C}}$ es máximo si es la contraimagen por la proyección estereográfica de la intersección de un plano que pasa por el origen, y \mathbb{S}^2 , para más detalles consultar la Definición 3.36.

Definición 3.71

Si \mathbb{T} es un triángulo geodésico, llamaremos área geodésica o simplemente área $A_{\mathbb{T}}$, al valor de la superficie encerrada por este triángulo en la esfera de Riemann.

Lema 3.72

Si \mathbb{T} es un triángulo geodésico, entonces se verifica $\lambda + \nu + \mu > 1$. Además el área de un triángulo esférico es justamente su desfase angular, es decir $A_{\mathbb{T}} = \pi(\lambda + \mu + \nu - 1)$.

Demostración: En primer lugar, sabemos que la superficie de una esfera de radio 1 es 4π . Si dos círculos máximos se cortan con un ángulo $\alpha \in (0, 2\pi)$, dividen la esfera en cuatro regiones, cada una de las cuales no corta a otra de ellas, y dos son interiores al ángulo y otras dos son exteriores. Un sencillo cálculo muestra que el área de una de las regiones interiores al ángulo α es justamente 4α . Haciendo esto con cada par de círculos máximos y denotando como $A_{\mathbb{T}}$ al área del triángulo, obtenemos.

$$4\lambda\pi + 4\nu\pi + 4\mu\pi - 4A_{\mathbb{T}} = 4\pi$$

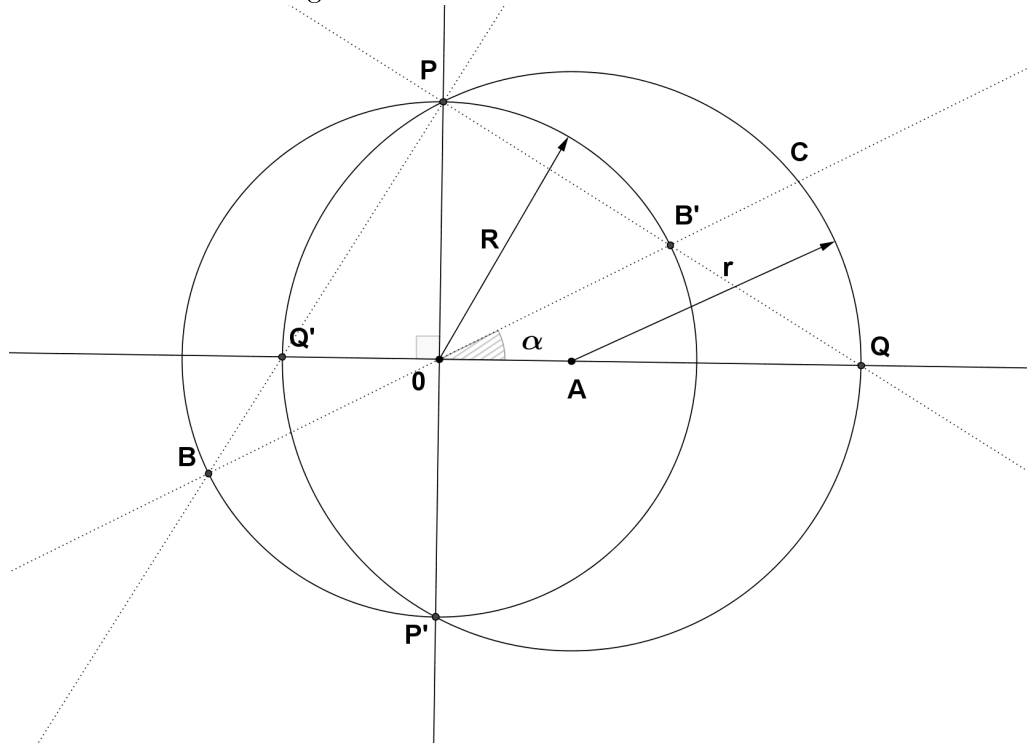
Por lo tanto

$$\pi(\lambda + \nu + \mu - 1) = A_{\mathbb{T}} > 0.$$

Y se deduce lo pedido. ■

Sea $A \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y C la frontera de $B(A, r)$, supongamos además que $0 \in B(A, r)$. Si tomamos la recta $\overline{0A}$ y sea t la recta perpendicular a $\overline{0A}$ en 0 , t cortará a C en dos puntos de igual norma P, P' denotamos por $R = |P|$. $\overline{0A}$ corta a C en dos puntos Q, Q' , las rectas \overline{PQ} y $\overline{P'Q'}$ cortan a la circunferencia de centro 0 y radio R en los puntos B, B' respectivamente. Denotaremos como α el ángulo que forman $\overline{0A}$ y $\overline{0B} = \overline{0B'}$. Para una mejor visualización de esta construcción observar la Figura 3.17.

Figura 3.17: Construcción del radio R



Lema 3.73

Manteniendo la notación anterior, si visualizamos $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3$, como el plano xy , consideramos la esfera $\mathbb{S}(0, R) \subset \mathbb{R}^3$ y la aplicación $P_R : \mathbb{S}(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$, correspondiente con la proyección estereográfica desde el punto $(0, 0, R) \in \mathbb{R}^3$ al plano xy . Entonces $P_R^{-1}(C)$ es un círculo máximo de $\mathbb{S}(0, R)$, el cual es la intersección del plano generado por la recta $\overline{0P} \subset xy$ y que forma un ángulo α con xy , con la esfera $\mathbb{S}(0, R)$.

Relacionemos estos triángulos geodésicos con los de Schwarz de la anterior sección.

Un triángulo de Schwarz, con ángulos $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$, contenido en la esfera, puede ser proyectado en \mathbb{C} como uno en el que dos de los lados son rectos y el punto de corte es el cero. El otro lado será una circunferencia o una recta, en el primer caso tenemos que la circunferencia divide el plano en dos componentes conexas, la acotada y la no acotada. A partir del lema 3.73 se prueba lo siguiente.

Lema 3.74

Sea un triángulo de Schwarz como el descrito anteriormente tal que 0 pertenece a la componente conexa acotada, entonces

$$\lambda + \nu + \mu > 1 \text{ y } \lambda + \nu + \mu < 1 + 2 \min(\lambda, \nu, \mu). \quad (\text{L})$$

Demostración: Supongamos que el punto pertenece a la componente conexa acotada, por lo tanto existirá, según el lema 3.73, un círculo máximo centrado en 0 cuya imagen es la circunferencia que genera el lado del triángulo. Por lo tanto, como las otras líneas son rectas y pasan por 0 , podremos afirmar que existe un triángulo geodésico cuyos ángulos son los del triángulo del anterior. En consecuencia, por el lema 3.72, se verifica la condición $\lambda + \nu + \mu > 1$.

Cuando tres curvas geodésicas no coincidentes se intersecan formando un triángulo, dividen la esfera en 8 componentes conexas. Es decir, forman 8 triángulos geodésicos con ángulos $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$, por tanto, para todos ellos se verificará $\alpha + \beta + \gamma > 1$.

Además, como estos triángulos están generados por las mismas geodésicas, entonces se verifica alguna de las siguientes afirmaciones:

- $(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \lambda, 1 - \nu, \mu)$
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \lambda, \nu, 1 - \mu)$
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda, 1 - \nu, 1 - \mu)$
- $(\alpha, \beta, \gamma) = (\lambda, \nu, \mu)$

Es más, existirán dos y solo dos de estos ocho que verifiquen cada una de estas. Para concluir basta imponer la condición necesaria $\alpha + \beta + \gamma > 1$ en cada caso y obtenemos (L). ■

Teorema 3.75

Sea \mathbb{T} un triángulo de Schwarz. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. 0 pertenece a la componente conexa acotada.
2. Se verifica la condición (L).
3. Existe al menos un triángulo geodésico con los mismos ángulos que \mathbb{T} .

Además si el grupo de reflexiones del triángulo es finito, entonces se verifican las afirmaciones anteriores.

Demostración: Demostraremos cada implicación por separado:

1. implica 2. Es justamente el lema 3.74.

3. si y solo si 1. Se prueba haciendo uso de que si tenemos un triángulo geodésico de forma que dos de sus vértices son $0, \infty$. Consideramos el otro lado c , esta geodésica divide la esfera en dos componentes conexas que no contienen puntos antipodales. Por tanto ∞ y 0 estarán cada uno en una distinta. Entonces la imagen del 0 vía la proyección estereográfica tiene que estar en la componente conexa acotada. La otra implicación es justamente el lema 3.73.

2. implica 1. Para esta implicación se recomienda observar la Figura 3.6. Sea $\beta = (\lambda + \nu + \mu) > 1$, consideramos el punto $0 \in \mathbb{C}$, el eje real como lado c y la recta $\{x \exp \pi \lambda i\}$ como lado b y construimos un cuadrilátero de ángulos λ, ν, μ, β tal que el primero de

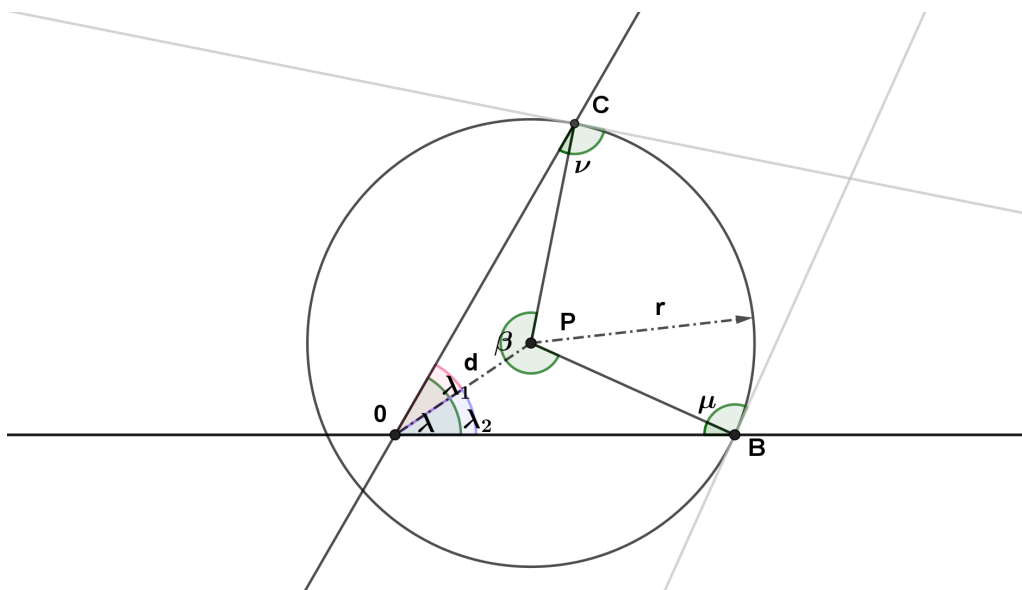


Figura 3.18: Construcción del triángulo sabiendo que se verifica la condición (L).

los vértices sea el 0.

En esta figura tomamos el ángulo menor, supongamos λ . El centro P de la circunferencia estará en la intersección de las dos rectas que forman el ángulo β , denotamos por r al radio de la circunferencia, es decir, la distancia de P a C o B . Del mismo modo la distancia de P al origen 0 la denotaremos como d . El ángulo λ quedará dividido en dos ángulos λ_1 , λ_2 por la recta $0P$, se verificará

$$\frac{d}{\sin(\pi\nu - \pi/2)} = \frac{r}{\sin(\pi\lambda_1)},$$

$$\frac{d}{\sin(\pi\mu - \pi/2)} = \frac{r}{\sin(\pi\lambda_2)}.$$

Ahora bien, alguno de estos λ_i , $i = 1, 2$, verificará que $\lambda_1 > \nu - 1/2$ o $\lambda_2 > \mu - 1/2$, ya que si no fuera así, al hacer la suma $\lambda \leq \nu + \mu - 1$, lo cual contradice la condición (L).

Por lo tanto

$$d = \sin(\pi\nu - \pi/2) \frac{r}{\sin(\pi\lambda_1)} < r,$$

y el punto será interior. ■

Nota 3.76

El hecho de que el grupo de reflexiones dobles sea isomorfo a un grupo de transformaciones de Möbius nos indica que existe una relación entre el Teorema 3.75 con el siguiente resultado, cuya prueba se puede encontrar en [JoSi]:

Todo grupo finito de transformaciones de Möbius es conjugado a un grupo de rotaciones.

Lema 3.77

Si \mathbb{T}_{el} es un triángulo geodésico elemental, entonces para cada $g \in W(\mathbb{T}_{el})$, distinto de

la identidad, se verifica que $g(\mathbb{T}_{el}) \cap \mathbb{T}_{el} = \emptyset$.

Demostración: Al ser simplemente cuatro los casos que nos conciernen, basta con observar los teselados representados en las Figuras 3.6, 4, 2 y 2, para concluir la prueba. ■

Nota 3.78

Existe un resultado análogo al Lema 3.77, pero mucho más general, dice así:

"Si \mathbb{T}_{el} es un triángulo elemental, entonces para cada $g \in W(\mathbb{T}_{el})$, distinto de la identidad, se verifica que $g(\mathbb{T}_{el}) \cap \mathbb{T}_{el} = \emptyset$."

La demostración de este último, aunque usa argumentos no excesivamente profundos, es técnica y laboriosa. Si el lector quiere satisfacer su curiosidad se le recomienda leer [Poi].

Lema 3.79

Si \mathbb{T} es un triángulo geodésico, entonces $\overline{\mathbb{C}} = \bigcup_{g \in W(\mathbb{T})} g(\overline{\mathbb{T}})$.

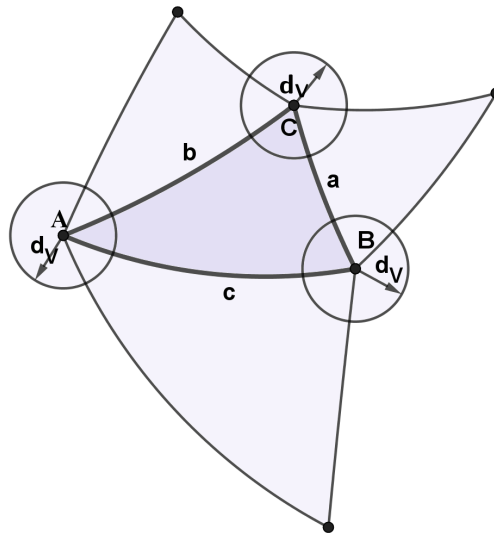


Figura 3.19: Construcción de un entorno de un triángulo el cual es recubierto por reflexiones sobre los lados.

Demostración: Sea $\mathbb{T} \subset \overline{\mathbb{C}}$ un triángulo geodésico de vértices A, B, C . Denotamos por d_A a la distancia esférica de A a su lado opuesto a , de forma análoga definimos las distancias d_B y d_C . Por último, consideramos $d = \inf\{d_A, d_B, d_C\}$, por lo tanto, si V es uno de los vértices y $d(P, V) < d$ entonces, mediante las reflexiones inducidas por los lados confluentes en V , tendremos que $P \in g(\overline{\mathbb{T}})$ para cierto $g \in W(\mathbb{T})$.

Denotamos por $U_V^d = \{p \in \mathbb{C} : d(p, V) < d\}$, sea el conjunto abierto

$$\Theta = U_A^d \cup U_B^d \cup U_C^d \cup g_A(\mathbb{T}) \cup g_B(\mathbb{T}) \cup g_C(\mathbb{T}) \cup \overline{\mathbb{T}},$$

el cual es un entorno de $\overline{\mathbb{T}}$, tal que $\Theta \subset \bigcup_{g \in W(\mathbb{T})} g(\overline{\mathbb{T}})$.

Sea $P \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $P \in \bigcup_{g \in W(\mathbb{T})} g(\overline{\mathbb{T}})$, entonces existe $g \in W(\mathbb{T})$ tal que $P \in g(\overline{\mathbb{T}})$. Por

lo tanto $g(\Theta)$ es un entorno de P tal que $g(\Theta) \subset \bigcup_{W(\mathbb{T})} g(\overline{\mathbb{T}})$, con lo que $\bigcup_{W(\mathbb{T})} g(\overline{\mathbb{T}})$ es abierto.

Por otro lado, si denotamos por $d' = d(\partial V, \overline{\mathbb{T}}) > 0$ y $P \notin \bigcup_{g \in W(\mathbb{T})} g(\overline{\mathbb{T}})$ entonces tendremos que $U_P^{d'} \cap \bigcup_{g \in W(\mathbb{T})} g(\overline{\mathbb{T}}) = \emptyset$. Con lo que $\bigcup_{W(\mathbb{T})} g(\overline{\mathbb{T}})$ es cerrado. Por conexión concluimos que $\bigcup_{W(\mathbb{T})} g(\overline{\mathbb{T}}) = \overline{\mathbb{C}}$. ■

Lema 3.80

El grupo $W(\mathbb{T})$ tiene orden finito si y solo si $\widehat{W}(\mathbb{T})$ tiene orden finito.

Demostración: Como $\widehat{W}(\mathbb{T})$ está formado por las palabras de orden par de $W(\mathbb{T})$ entonces se tiene que el índice $[W(\mathbb{T}) : \widehat{W}(\mathbb{T})] = 2$. En virtud del teorema de Lagrange para grupos, ver [Hu], se tiene lo pedido. ■

Teorema 3.81

El grupo $\widehat{W}(\mathbb{T})$ tiene orden finito si y solo si existe un triángulo geodésico elemental \mathbb{T}_{el} , tal que $W(\mathbb{T}) \simeq W(\mathbb{T}_{el})$. Es más, se verifica que $\overline{\mathbb{T}}$ es unión finita de elementos de la forma $g(\overline{\mathbb{T}_{el}})$, donde $g \in W(\mathbb{T}_{el})$

Demostración: Demostraremos que si el triángulo \mathbb{T} es esférico no elemental, entonces podemos encontrar un triángulo geodésico \mathbb{T}' de área geodésica mitad y $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$ que genera el mismo grupo $W(\mathbb{T}) = W(\mathbb{T}')$.

Sea λ que no es de la forma $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Como el grupo es finito entonces se cumplirá que $\lambda = p/q$, siendo p, q coprimos. Tomamos la única curva geodésica r que pasa por A y forma un ángulo $1/q$ con c . Lo vemos representado en el plano en la figura 3.6.

Entonces el triángulo encerrado entre las geodésicas a, c, b' o bien tiene área menor que la mitad del área de \mathbb{T} , o bien el triángulo a, b, b' la tiene. Elegimos el de menor área \mathbb{T}' y veamos que $W(\mathbb{T}) = W(\mathbb{T}')$.

Supongamos que el de menor área es el de lados a, c, b' entonces la reflexión sobre b, r_b , compuesta con la reflexión sobre $r_b(a)$ es un giro de ángulo $2\pi\lambda$. Este genera el mismo grupo cíclico que la reflexión sobre $b', r_{b'}$, compuesta con la reflexión sobre $r_b(a)$, que es un giro de ángulo $2\pi/q$. Por tanto como la otra reflexión doble es justamente con las dos curvas que no hemos variado entonces $W(\mathbb{T}) = W(\mathbb{T}')$.

Por tanto si el triángulo resultante no fuera elemental repetiría el proceso y encontraría otro triángulo más contenido en el primero y de área a lo sumo $1/4$ de la de \mathbb{T} . Así sucesivamente si ninguno de ellos fuera elemental. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces tomo el triángulo creado $\mathbb{T}^{(n)}$ de área $(1/2^n)A_{\mathbb{T}}$. Gracias al lema 3.65 sabemos que las reflexiones dobles son giros, entonces mantiene el área geodésica invariante. Como $\overline{\mathbb{C}}$ está formado por copias de $\mathbb{T}^{(n)}$, entonces al menos habrá 2^n elementos en $W(\mathbb{T}^{(n)}) = W(\mathbb{T})$. Por tanto el grupo no puede ser finito. ■

Definición 3.82

Diremos que dos ternas de ángulos (α, β, γ) $(\alpha', \beta', \gamma')$ son equivalentes si alguna de las ternas

$$\begin{aligned} & (|\alpha|, |\beta|, |\gamma|) \quad (|\alpha - \pi|, |\beta - \pi|, |\gamma|) \\ & (|\alpha|, |\beta|, |\gamma - \pi|) \quad (|\alpha - \pi|, |\beta|, |\gamma - \pi|), \end{aligned}$$

coincide con $(\alpha', \beta', \gamma')$. Diremos que dos triángulos son equivalentes cuando sus ternas

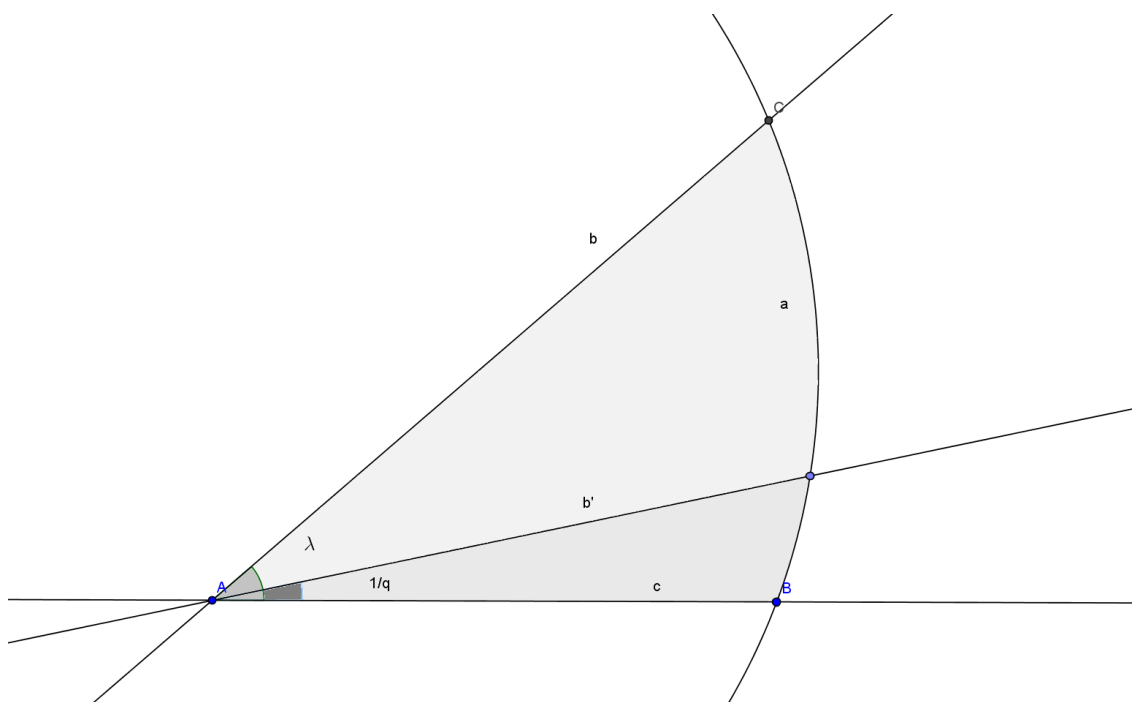


Figura 3.20: Construcción de triángulo que genera el mismo grupo y tiene área menor que la mitad.

de ángulos lo son. A la clase de equivalencia de un triángulo \mathbb{T} la denotaremos $[\mathbb{T}]$.

Nota 3.83

La relación para las ternas de ángulos (α, β, γ) definida en la Definición 3.82 es una relación de equivalencia en el conjunto de ternas.

Teorema 3.84 (LISTA DE SCHWARZ)

El grupo $W(\mathbb{T})$ tiene orden finito si y solo si es un grupo cíclico finito descrito en la Sección 3.4, o al menos una de las siguientes ternas

$$\begin{aligned}
 & (|\lambda|, |\mu|, |\nu|) \quad (|\lambda - 1|, |\mu - 1|, |\nu|) \\
 & (|\lambda|, |\mu - 1|, |\nu - 1|) \quad (|\lambda - 1|, |\mu|, |\nu - 1|), \tag{3.70}
 \end{aligned}$$

está, salvo el orden de los factores, en la lista de Schwarz, Tabla 3.3. Es decir, algún representante de la clase de equivalencia está en la lista de Schwarz.

Demostración : Busquemos los triángulos icosaédricos, para los cúbicos y tetraédricos el proceso es el mismo. Sea \mathbb{T} un triángulo tal que $W(\mathbb{T})$ tiene orden finito, en virtud del teorema 3.81 tendremos que $\overline{\mathbb{T}}$ es unión finita de elementos de la forma $g(\overline{\mathbb{T}}_{el})$, donde $g \in W(\mathbb{T}_{el})$, para un cierto triángulo elemental.

Supongamos que el triángulo \mathbb{T} de ángulos α, β, γ , es unión de triángulos con ángulos de la forma $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$, los cuales llamaremos icosaédricos, y sea \mathcal{T}_3 el conjunto de triángulos de

	λ	μ	ν	Grupo
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n}$	Diédrico.
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Tetraédrico.
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Tetraédrico.
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	Cúbico.
5	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	Cúbico.
6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	Icosaédrico.
7	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Icosaédrico.
8	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	Icosaédrico.
9	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	Icosaédrico.
10	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	Icosaédrico.
11	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	Icosaédrico.
12	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	Icosaédrico.
13	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	Icosaédrico.
14	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	Icosaédrico.
15	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	Icosaédrico.

Cuadro 3.3: Lista de Schwarz

este tipo. Consideramos la siguiente aplicación:

$$\Psi : \mathcal{T} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{(2)} \times \frac{\mathbb{Z}}{(3)} \times \frac{\mathbb{Z}}{(5)}$$

$$\mathbb{T} \mapsto \left(\frac{30(\alpha + \beta + \gamma)}{\pi}, \frac{30(\alpha + \beta + \gamma)}{\pi}, \frac{30(\alpha + \beta + \gamma)}{\pi} \right).$$

En primer lugar está bien definida, ya que si es unión de triángulos entonces todos sus ángulos serán de la forma $\pi a/2$, $\pi b/3$, $\pi c/5$, a , b , $c \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\frac{30\alpha}{\pi}$, $\frac{30\beta}{\pi}$, $\frac{30\gamma}{\pi} \in \mathbb{Z}$ y basta tomar módulos en cada caso.

Por otro lado, el área de un triángulo elemental \mathbb{T}_{el} icosaédrico es

$$A_{\mathbb{T}_{el}} = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1\right) = \frac{\pi}{30}.$$

Entonces los triángulos icosaédricos, al ser unión de estos, verificarán que su área será de la forma $A_{\mathbb{T}} = \frac{k\pi}{30}$, con $k \in \mathbb{N}$. Si tenemos una clase de equivalencia $[\mathbb{T}]$, existirá al menos un elemento de área mínima. Si $\tilde{\mathcal{T}}$ es el conjunto cociente, defino la aplicación

$$\begin{aligned} \tau : \tilde{\mathcal{T}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ [\mathbb{T}] &\mapsto \inf_{\mathbb{T}' \in [\mathbb{T}]} A_{\mathbb{T}'}. \end{aligned}$$

Podemos preguntarnos cuántos valores puede tomar τ y cual es su cota. Sea la clase $[\mathbb{T}]$ y supongamos que el representante, de ángulos α, β, γ , tiene área mínima $\alpha + \beta + \gamma - \pi$. Supongamos que $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, entonces

$$\pi - \alpha + \pi - \beta + \gamma - \pi > \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Se deduce que $\alpha + \beta \leq \pi$ y $\alpha + \beta + \gamma - \pi \leq \gamma$, del mismo modo se deduce que la suma de dos ángulos cuales quiera es $\leq \pi$ y por tanto

$$6\gamma \leq 2(\alpha + \beta + \gamma) \leq 3\pi.$$

Con lo cual $\gamma \leq \frac{1}{2}$ y $\tau([\mathbb{T}]) \leq \frac{1}{2}$.

Esto es válido sea cual sea el triángulo geodésico. Centrándonos en los triángulos icosaédricos como los ángulos son de la forma $\pi a/2, \pi b/3, \pi c/5$ entonces el de menor ángulo ha de ser a lo sumo $2\pi/5$, ya que sino $\alpha, \beta, \gamma \geq 1/2$ y no puede ser el de área mínima. Entonces

$$\tau([\mathbb{T}]) \leq \frac{2\pi}{5}. \quad (3.71)$$

Por tanto, busquemos candidatos y luego comprobemos cuales son realmente los formados por triángulos elementales. Para ello hacemos uso de las aplicaciones Ψ y $\bar{\tau} = \frac{30}{\pi}\tau$. En particular $\bar{\tau}([\mathbb{T}]) \in \{1, 2, \dots, 12\}$, por tanto si $\bar{\tau}([\mathbb{T}]) = k$, entonces $\Psi(\mathbb{T}) = (k, k, k)$. Es decir, debemos imponer que coincida con k en los diferentes $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ y \mathbb{Z}_5 . En la siguiente lista vemos las posibles ternas $\Phi(\mathbb{T})$ para los diferentes valores de k y en cada caso las posibles ternas de ángulos que verifican esto.

k=1 (1, 1, 1)

- $(\pi/2, \pi/3, \pi/5)$ candidato.

k=2 (0, 2, 2)

- $(2\pi/5, \pi/3, \pi/3)$ candidato.
- $(2\pi/3, \pi/5, \pi/5)$ candidato.

k=3 (1, 0, 3)

- $(\pi/2, 2\pi/5, \pi/5)$ candidato.

k=4 (0, 1, 4)

- $(1\pi/3, 2\pi/5, 2\pi/5)$ candidato*.
- $(3\pi/5, 1\pi/3, \pi/5)$ candidato.

k=5 (1, 2, 0)

- $(\pi/2, \pi/3, \pi/3)$ cúbico.
 - $(\pi/2, \pi/2, 2\pi/3)$ diédrico.
- k=6** $(0, 0, 1)$
- $(2\pi/3, \pi/3, \pi/5)$ candidato.
 - $(\pi/2, \pi/2, \pi/5)$ diédrico.
 - $(2\pi/5, 2\pi/5, 2\pi/5)$ candidato.
 - $(4\pi/5, \pi/5, \pi/5)$ candidato.
- k=7** $(1, 1, 2)$
- $(\pi/2, \pi/3, 2\pi/5)$ candidato.
- k=8** $(0, 2, 3)$
- $(3\pi/5, \pi/3, \pi/3)$ candidato*.
 - $(2\pi/3, 2\pi/5, \pi/5) \sim (3\pi/5, 1\pi/3, \pi/5)$ con $k = 4$.
- k=9** $(1, 0, 4)$
- $(3\pi/5, \pi/2, 1\pi/5) \sim (1\pi/2, 2\pi/5, \pi/5)$ con $k = 3$
 - $(\pi/2, 2\pi/5, 2\pi/5)$ candidato*.
- k=10** $(0, 1, 0)$
- $(\pi/2, \pi/2, 1\pi/3)$ diédrico.
 - $(2\pi/3, 1\pi/3, 1\pi/3)$ tetraédrico.
 - $(3\pi/5, 2\pi/5, 1\pi/3)$ candidato.
 - $(4\pi/5, \pi/3, 1\pi/5) \sim (2\pi/3, \pi/5, \pi/5)$ con $k = 3$
- k=11** $(1, 2, 1)$
- $(2\pi/3, \pi/2, 1\pi/5)$ no es esférico.
- k=12** $(0, 0, 2)$
- $(\pi/2, \pi/2, 2\pi/5)$ diédrico.
 - $(2\pi/3, 1\pi/3, 2\pi/5)$ no es esférico.
 - $(3\pi/5, 2\pi/5, 2\pi/5)$ candidato*.
 - $(4\pi/5, 2\pi/5, \pi/5)$ no es esférico.

Analizando la lista, tras las ternas de ángulos podemos encontrar una etiqueta. En aquellos que no ponga candidato o candidato* será la justificación de porqué podemos no considerarlo como triángulo icosaédrico. Los que sean candidato* cumplirán de inicio todas las condiciones para estar en la lista de Schwarz, excepto porque si vamos a la figura 4 comprobamos que no lo podemos encontrar como triángulo formado por la teselación. El resto, los candidatos, se podrán encontrar en la teselación 4 y por tanto serán los elementos de la lista de Schwarz con grupo icosaédrico. ■

Gracias al Teorema 3.84 podemos caracterizar aquellos parámetros $a, b, c \in \mathbb{C}$ para las cuales la ecuación hipergeométrica (3.13) tiene todas sus soluciones algebraicas sobre $\mathbb{C}(z)$.

Definición 3.85

Dado un número $x \in \mathbb{R}$, se llama parte fraccionaria o decimal de x al valor

$$\{x\} = x - [x] \in [0, 1), \tag{3.72}$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x .

Teorema 3.86

Una ecuación hipergeométrica $L_{a,b,c} = 0$ de parámetros $a, b, c \in \mathbb{C}$ tiene todas sus soluciones algebraicas sobre $\mathbb{C}(z)$ si y solo si $a, b, c \in \mathbb{Q}$ y los valores

$$\lambda = \{1 - c\}, \quad \mu = \{c - a - b\}, \quad \nu = \{b - a\}, \quad (3.73)$$

verifican alguna de las siguientes condiciones:

- Si $0 \in \{\lambda, \mu, \nu\}$:
 - Si $0 = \lambda$, entonces alguno de los conjuntos $\{a, a + 1 - c\}, \{b, b + 1 - c\}$ está formado por dos números enteros, donde uno de los dos es positivo estricto y el otro es no positivo.
 - Si $0 = \mu$, entonces alguno de los conjuntos $\{a, c - b\}, \{b, c - a\}$ está formado por dos números enteros, donde uno de los dos es positivo estricto y el otro es no positivo.
 - Si $0 = \nu$, entonces alguno de los conjuntos $\{a, b\}, \{a + 1 - c, b + 1 - c\}$ está formado por dos números enteros, donde uno de los dos es positivo estricto y el otro es no positivo.
- Algún elemento de la clase de equivalencia de (λ, μ, ν) está en la lista de Schwarz, Tabla 3.3.

- [AsN] Robert B Ash, W. Phil Novinger, *Complex Variables*, Dover Publications, 1971.
- [Ba] W. Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer, 2000.
- [Be] F. Beukers, *Notes on differential equations and hypergeometric functions* (informal notes).
- [Bo] Carl B. Boyer, *A History of Mathematics, 2nd ed.*, New York : Wiley, 1991.
- [CaSt] C. Caratheodory, F. Steinhardt, *Theory of Functions of a Complex Variable, 2 Volumes*, Chelsea Publishing Company New York, 1954.
- [Co] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Springer, 1978.
- [ErBa] Erdelyi A., Bateman H., *Higher Transcendental Functions Bateman Manuscript Project, Volume II, 1st edition*, McGraw-Hill Inc., 1953.
- [Fu] W.Fulton, J.Harris, *Representation Theory: A First Course*, Springer Science and Business Media, 1991.
- [He] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis, Vol 2*, John Wiley and Sons Inc, 1977.
- [Hu] J. F. Humphreys, *A Course in Group Theory*, Oxford University Press, 1996.
- [IlyYa] Y.Ilyashenko, S.Yakovenko, *Lectures on Analytic Differential Equations*, American Mathematical Society, United States, 2008.
- [JoSi] G. A. Jones, D. I. Singerman, *Complex Functions an Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press, 1987.
- [Mc] P. J. McCarthy, *Algebraic Extensions of Fields*, Dover Publications INC, 1996.
- [Poi] A. Poirier, *Aspectos geométricos del análisis complejo*, PUCP. Departamento de Ciencias. Sección Matemáticas, 1999.

- [Poo] E. G. C. Poole, *Introduction to the Theory of Linear Differential Equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 42, 1936.
- [ViRa] Vidunas, Raimundas (2009). *Algebraic Transformations of Gauss Hypergeometric Functions*. Funkcialaj Ekvacioj. 52. 10.1619/fesi.52.139.
- [Zo] H. Zoladek, *The Monodromy Group*, Birkhäuser, 2006.