MÁSTER EN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

COMPLEMENTOS EXÓTICOS ATRACTIVOS EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL BACHILLERATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DE CASTILLA Y LEÓN

AUTOR: LUIS DEL CAMPO GUTIÉRREZ
TUTOR: FERNANDO Mª GÓMEZ CUBILLO

Universidad de Valladolid

MÁSTER EN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

COMPLEMENTOS EXÓTICOS ATRACTIVOS EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL BACHILLERATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DE CASTILLA Y LEÓN

Vº Bº TUTOR

AUTOR: LUIS DEL CAMPO GUTIÉRREZ
TUTOR: FERNANDO Mª GÓMEZ CUBILLO

0.- ÍNDICE

1.- JUSTIFICACIÓN

La motivación de este trabajo fin de master nace de la propia creencia del autor en el acercamiento de las matemáticas al alumnado para romper esa barrera que de alguna manera existe entre ellos y la matemática como ente abstracto y ciencia de reglas fijas sin demasiada relación con otros saberes y situaciones cotidianas.

Este acercamiento a los alumnos se pretende hacer a través de lo que se ha titulado como complementos exóticos atractivos, elementos poco comunes, peculiares que atraigan por lo sorprendente de su propuesta, muchos de ellos desconocidos para el público general y que pueden incrementar el interés por las fórmulas, definiciones, teoremas y problemas clásicos en la educación secundaria. Este trabajo intenta, de alguna manera, conferir cuerpo a la asignatura de matemáticas en la enseñanza secundaria complementándola en este sentido.

La parte visual de un objeto matemático, los contraejemplos, la curiosidad, el descubrimiento de algo novedoso pueden motivar a los alumnos y, por qué no, también al docente y así guiar al alumno en su implicación, investigación y trabajo matemáticos, *"El éxito en matemáticas se puede relacionar con la riqueza y la flexibilidad de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos" (Azcárate y Camacho, 2003).*

Un enfoque clásico de la motivación tiene que ver con las metas hacia las que se orienta la actividad del alumno, en este sentido, *Tapia (1992)*, establece como una de las metas: *"A) Metas relacionadas con la tarea...a) Experimentar que se ha aprendido algo o que se va consiguiendo mejorar y consolidar destrezas previas, esto es, el deseo de incrementar la propia competencia. Se supone que cuando el sujeto aprende algo -nuevos conocimientos, nuevas destrezas -, se produce una respuesta emocional de carácter gratificante ligada a la percepción de competencia. b) Experimentarse absorbido por la naturaleza de la tarea, superando el aburrimiento y la ansiedad, por lo que aquella tiene de novedoso y revelador sobre algún aspecto de la realidad o sobre uno mismo...".*

Las matemáticas en la educación secundaria en España es un ámbito demasiado ambicioso para abordar desde el punto de vista de este trabajo fin de master por lo que se ha encontrado necesario acotar dicho ámbito. La elección del autor se ha centrado en el bachillerato de Ciencias y Tecnología en Castilla y León, por tres motivos fundamentales, el primero es que los complementos exóticos más interesantes requieren ciertos conocimientos o ideas asentadas en las mentes de los alumnos, el segundo tiene que ver con la creencia en la Geometría y su aplicabilidad en la vida cotidiana y el tercero tiene una base normativa en el Decreto 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

Este Decreto presenta un objetivo novedoso con respecto al Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan las enseñanzas mínimas. El objetivo referido parece fundamental en el aprendizaje del alumno:

"8. Desarrollar métodos que contribuyan a adquirir hábitos de trabajo, curiosidad, creatividad, interés y confianza en sí mismos."

Ambos Decretos presentan las matemáticas, en la introducción y en los objetivos, con un enfoque hacia situaciones cotidianas, de la vida real y con conexiones con otras ciencias o saberes:

*"Aunque se desarrollen con independencia de la **realidad física**, tienen su origen en ella y son de suma utilidad para representarla. Nacen de la necesidad de resolver problemas prácticos y se sustentan por su capacidad para tratar, explicar, predecir y modelar **situaciones reales** y dar rigor a los conocimientos científicos. Su estructura se halla en continua evolución, tanto por la incorporación de nuevos conocimientos como por su constante **interrelación con otras áreas**, especialmente en el ámbito de **la ciencia y la técnica**"*

*"1. Comprender y aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de **otras ciencias**, así como en la resolución razonada de problemas procedentes de **actividades cotidianas y diferentes ámbitos del saber**."*

*"4. Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e **íntimamente relacionado** con el de **otras áreas del saber**."*

Otra idea en la que insisten los dos Decretos, también en la introducción y en los objetivos del currículo, es la novedad, la exploración, la investigación y la creatividad en matemáticas:

*"A menudo, los aspectos conceptuales no son más que medios para la práctica de estrategias, para incitar a la **exploración**, la formulación de **conjeturas**, el **intercambio de ideas** y la **renovación** de los conceptos ya adquiridos."*

"*...generan **hábitos de investigación** y proporcionan técnicas útiles para enfrentarse a **situaciones nuevas**."*

*"La resolución de problemas debe servir para que el alumnado desarrolle una visión amplia y científica de la realidad, para **estimular la creatividad** y la valoración de las ideas ajenas,"*

*"3. Utilizar las estrategias características de la **investigación científica** y las destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación, aplicación de la inducción y deducción, formulación y **aceptación o rechazo de las conjeturas**, comprobación de los resultados obtenidos) para **realizar investigaciones** y en general **explorar situaciones y fenómenos nuevos**."*

*"7. Mostrar actitudes asociadas al **trabajo científico** y a la **investigación matemática**, tales como la **visión crítica**, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el interés por el trabajo cooperativo y los distintos tipos de razonamiento, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la **apertura a nuevas ideas**."*

Una vez decidido el ámbito o alcance del trabajo fin de master, la finalidad perseguida ha sido aportar elementos atractivos en todas las áreas de los contenidos de los dos cursos de bachillerato, de manera que constituyan un completo apoyo o complemento para el profesor de Matemáticas I y II del bachillerato de Ciencias y Tecnología.

El propio currículo de bachillerato de Ciencias y Tecnología recoge los contenidos a impartir y su importancia:

"Los contenidos de Matemáticas, como materia de modalidad en el bachillerato de Ciencias y Tecnología, giran sobre ***dos ejes fundamentales: la geometría y el análisis****. Estos cuentan con el necesario* ***apoyo instrumental de la aritmética, el álgebra*** *y las estrategias propias de la resolución de problemas. En Matemáticas I, los contenidos relacionados con las propiedades generales de* ***los números*** *y su relación con las operaciones, más que en un momento determinado deben ser trabajados en función de las necesidades que surjan en cada momento concreto. A su vez, estos contenidos* ***se complementan con*** *nuevas herramientas para el estudio de* ***la estadística y la probabilidad****, culminando así todos los campos introducidos en la educación secundaria obligatoria, independientemente de que se curse la materia de Matemáticas II. La introducción de* ***matrices e integrales*** *en Matemáticas II aportará* ***nuevas y potentes herramientas*** *para la resolución de problemas geométricos y funcionales."*

A continuación se ha querido destacar qué partes de los contenidos del currículo de bachillerato de Ciencias y Tecnología se han abordado:

MATEMÁTICAS I

1. Aritmética y álgebra:
– ***Números reales****. Valor absoluto. Desigualdades.*
Distancias entre la recta real*. Intervalos y entornos.*
– Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones.
– ***Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas****.*

2. Geometría:
– Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.
– Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector.
– Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.
– ***Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas****.*

3. Análisis:
– Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
– Dominio, recorrido y extremos de una función.
– Operaciones y composición de funciones.
– Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y ***continuidad****.*
– Aproximación al ***concepto de derivada****. Extremos relativos en un intervalo.*
– ***Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales****.*

4. Estadística y Probabilidad:
– Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas. Regresión lineal.
*– **Estudio de la probabilidad** compuesta, condicionada, total y a posteriori.*
– Distribuciones binomial y normal como herramienta para asignar probabilidades a sucesos.

MATEMÁTICAS II

1. Álgebra lineal:
– Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos.
*– **Operaciones con matrices. Aplicación de las operaciones y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales**.*
– Determinantes. Propiedades elementales de los determinantes. Rango de una matriz.
– Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

2. Geometría:
*– **Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.***
*– Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. **Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de** ángulos, distancias, **áreas y volúmenes**.*

3. Análisis:
– Concepto de límite de una función. Cálculo de límites.
*– **Continuidad de una función**. Tipos de discontinuidad.*
– Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto.
*– **Función derivada**. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización.*
*– **Introducción al concepto de integral definida** a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.*

Los complementos exóticos atractivos propuestos se detallan en el siguiente cuadro, en el que se aprecia el peso de la Geometría y el Análisis del bachillerato de Ciencias y Tecnología y por tanto, en esa misma relación, se han desarrollado más complementos en estas dos áreas.

<table>
<tr><th colspan="4">BACHILLERATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA</th></tr>
<tr><th colspan="2">1º BACHILLERATO C. Y T.</th><th colspan="2">2º BACHILLERATO C. Y T.</th></tr>
<tr><td>1. ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA</td><td>CIRCULOS DE FORD</td><td>CÓDIGOS DE HAMMING</td><td>1. ÁLGEBRA LINEAL</td></tr>
<tr><td>2. GEOMETRÍA</td><td>SUPERHUEVO</td><td>ALFOMBRA DE SIERPINSKI / ESPONJA DE MENGER</td><td>2. GEOMETRÍA</td></tr>
<tr><td>3. ANÁLISIS</td><td colspan="2">FUNCIÓN DE WEIERSTRASS</td><td rowspan="2">3. ANÁLISIS</td></tr>
<tr><td>4. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD</td><td>INFINITOS MONOS</td><td>TROMPETA DE TORRICELLI</td></tr>
</table>

El objetivo general del trabajo fin de master es desarrollar un tema, en este caso los complementos exóticos atractivos, mediante la utilización de los conocimientos adquiridos a lo largo del curso. Asignaturas que han aportado para la realización de este trabajo de forma general han sido “Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad”, “Procesos y Contextos Educativos” y “Diseño Curricular en Matemáticas”.

En esta línea, se han estructurado cada uno de los complementos en cuatro partes que reflejan pinceladas de asignaturas tales como “Ideas y conceptos matemáticos a través de la historia”, “Complementos de Matemáticas”, “Didáctica de la Matemática” y “Metodología y Evaluación en Matemáticas”. Las cuatro partes de cada complemento son:

- BREVE RESEÑA HISTÓRICA
  Autor/es del elemento atractivo, año de aparición del elemento,...
  La pretensión de este apartado es de situación del complemento en el tiempo y de conocimiento de algunos de los matemáticos más relevantes de la historia de las matemáticas. *“El análisis histórico cumple varias funciones: en primer lugar pone de manifiesto que las nociones matemáticas no se han desarrollado de manera aislada,*

sino conectadas unas con otras, en segundo lugar, muestra el contexto de problemas en los que han aparecido los conceptos, y en tercer lugar, nos hace comprender que el desarrollo no ha sido lineal, sino con avances, retrocesos e indecisiones, nos da cuenta, en definitiva, de las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia de la matemática" (Sierra, González y López, 2002).

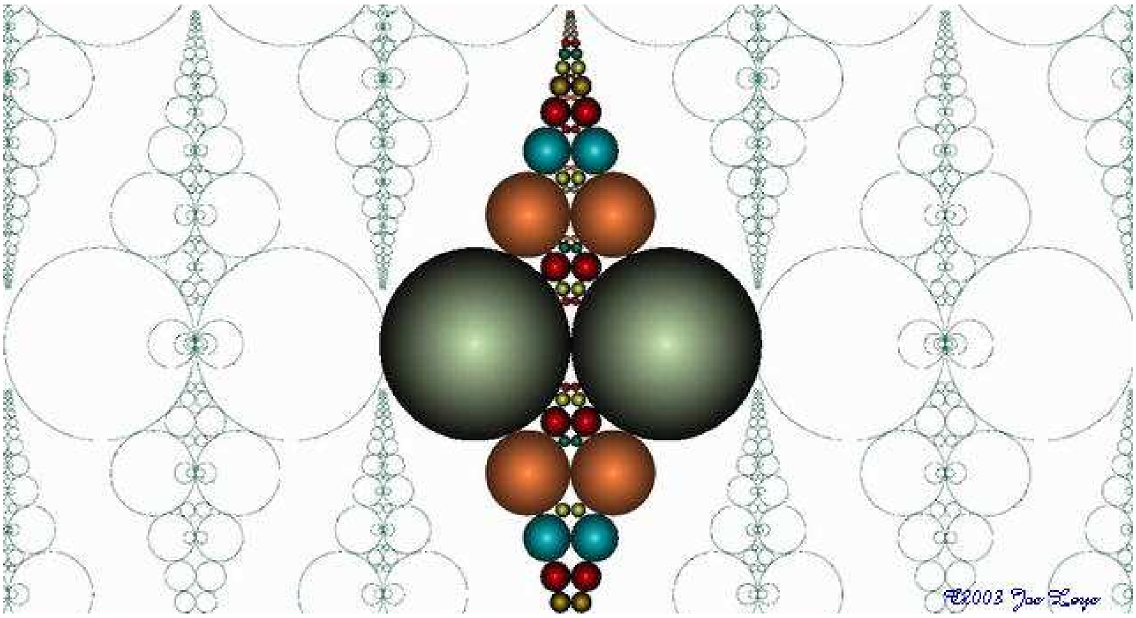
- TEORÍA MATEMÁTICA
  Base teórica de la matemática de bachillerato a la que hace referencia el complemento exótico.

- EL COMPLEMENTO EXÓTICO
  Descripción del elemento atractivo, relación con otras ciencias y saberes,...

- PROPUESTA DE ACTIVIDAD
  Tareas que se pueden proponer en el aula en relación al complemento exótico y/o a la teoría matemática en la que se sustenta.

2.- DESARROLLO

2.1.- LOS CÍRCULOS DE FORD



BREVE RESEÑA HISTÓRICA

Los círculos de Ford fueron descritos por el matemático estadounidense Lester Randolph Ford en 1938, en un artículo en *American Mathematical Monthly*.

TEORÍA MATEMÁTICA

Este complemento se puede enmarcar en la unidad didáctica de los números reales, concretamente al exponer el conjunto de los números racionales.

Este conjunto de los números racionales, denotado por la letra Q, está formado por:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z; b \neq 0 \right\}$$

Los números racionales se pueden expresar como números decimales, en unos casos exactos y en otros casos periódicos. De igual forma los números decimales, tanto exactos como periódicos, pueden expresarse como números racionales.

Por tanto podremos decir que

$$Q = \left\{ \begin{matrix} decimales \\ exactos \end{matrix} \right\} \cup \left\{ \begin{matrix} decimales \\ periódicos \end{matrix} \right\}$$

Los números de la forma $\frac{a}{b}$ así definidos se denominan también fracciones. El conjunto de fracciones equivalentes representa un mismo número racional. La fracción irreducible con denominador positivo es el representante canónico del conjunto de fracciones equivalentes.

EL COMPLEMENTO EXÓTICO

Un círculo de Ford es un círculo centrado en $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2} \right)$ y con radio $\frac{1}{2b^2}$, donde $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible, es decir, a y b son números enteros primos entre sí.

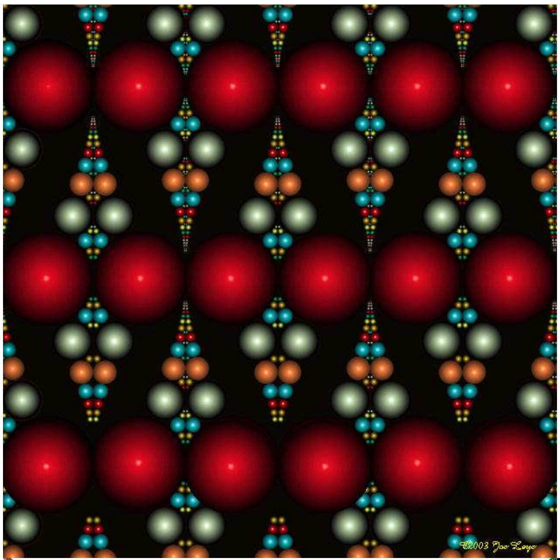
El círculo de Ford asociado a la fracción a/b se denota como $C[a/b]$.

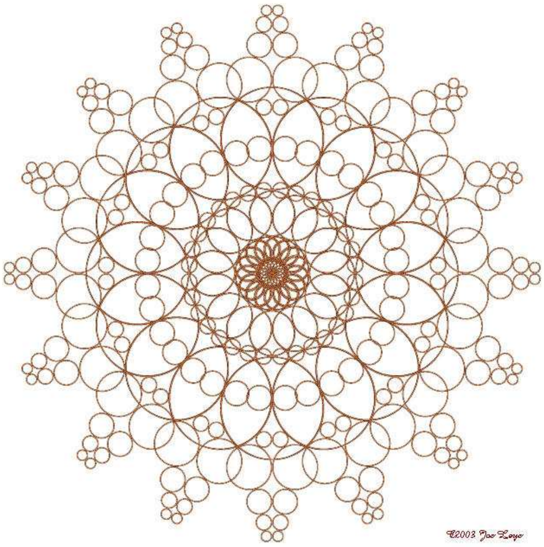
Algunas de sus propiedades son fácilmente apreciables al representar gráficamente estos círculos:

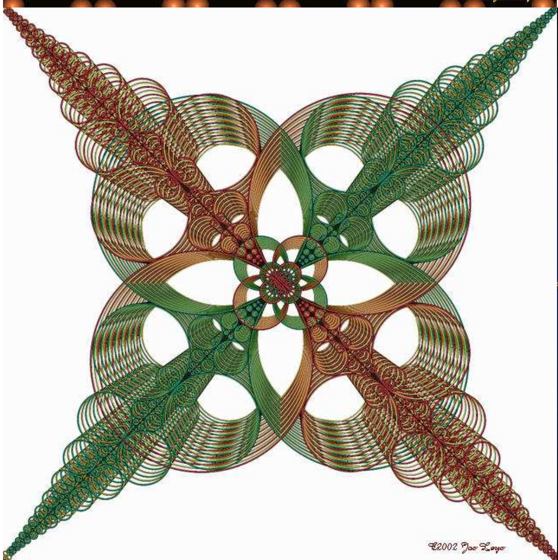
- Son tangentes en el punto $\left(\frac{a}{b}, 0 \right)$ a la recta real, al eje OX.
- Si tenemos dos círculos tangentes entre sí $C[a/b]$ y $C[c/d]$ con $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$, entonces existe otro círculo tangente a ellos dos y a la recta real que será $C\left[\frac{a+c}{b+d} \right]$

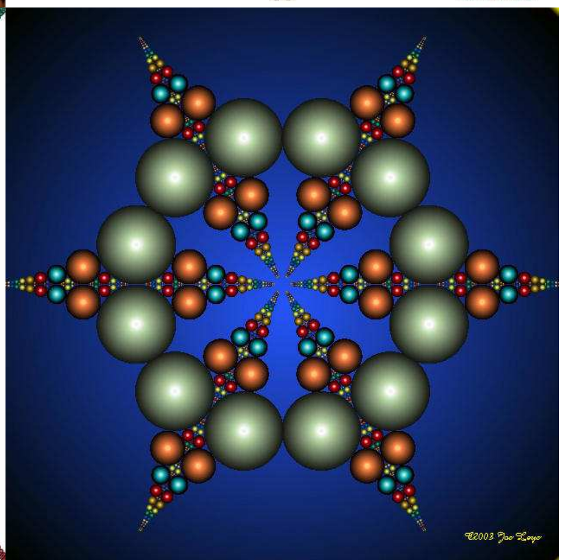
Representación gráfica de los círculos de Ford en el entorno $[0,1]$

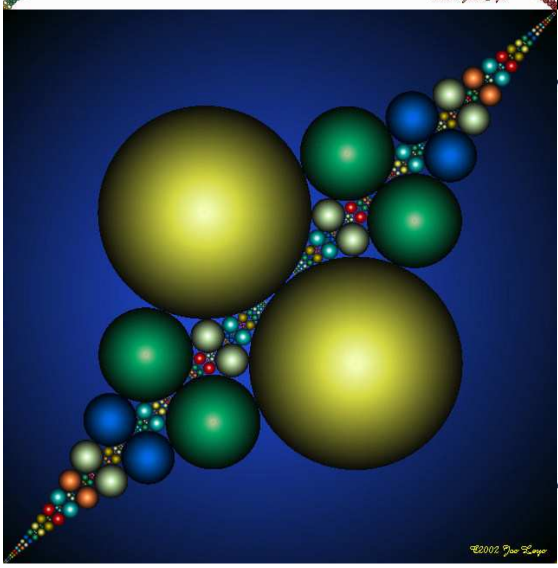
Los círculos de Ford han inspirado también al mundo del arte. Jos Leys ha creado algunas formas bonitas, a partir de círculos de Ford, que se muestran a continuación y al comienzo de este complemento.

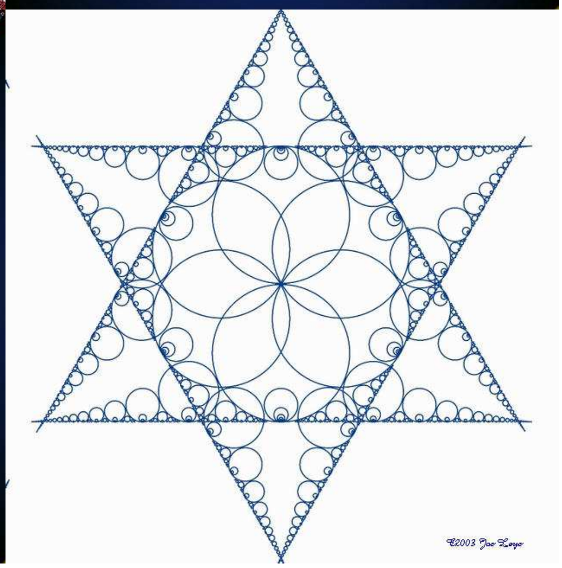












PROPUESTA DE ACTIVIDAD

1.- ¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?:

a) Dos círculos de Ford son tangentes entre sí.

b) Dos círculos de Ford son tangentes entre sí y a la recta real.

c) Dos círculos de Ford son tangentes entre sí o son disjuntos.

2.- Nombra al menos tres círculos de Ford tangentes al círculo $C[3/4]$.

3.- Dado un círculo de Ford cualquiera, ¿Cuántos círculos de Ford tangentes a este círculo dado existen?

4.- Plasmar en papel en clase de Dibujo (previo acuerdo con el profesor correspondiente) círculos de Ford conociendo la construcción de circunferencias tangentes a una recta y a otra/s circunferencia/s dada/s.

2.2.- EL SUPERHUEVO

BREVE RESEÑA HISTÓRICA

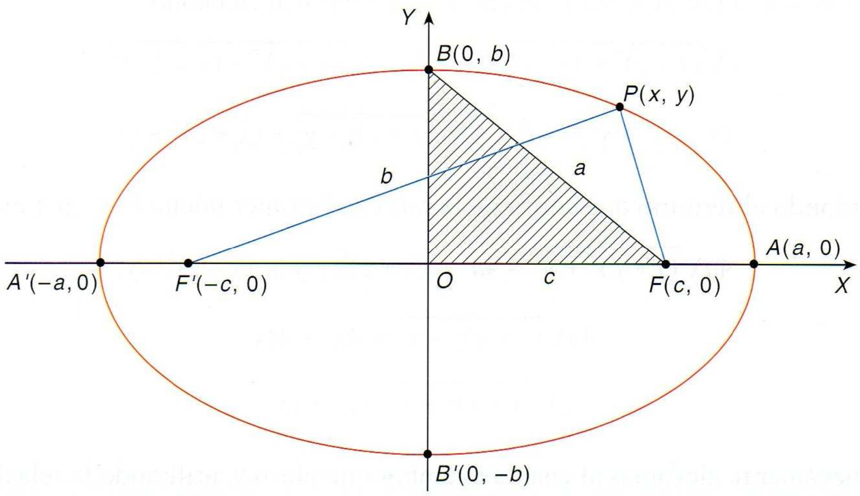
Hacia el año 1965 Piet Hein, científico, matemático, diseñador e inventor popularizó el superhuevo o superelipsoide, objeto éste apreciado en el arte por su belleza y en la física por su estabilidad sobre cualquiera de sus extremos.

El superhuevo fue fabricado en varios materiales y llegó a ser muy popular como juguete y objeto novedoso en los años 60. Hoy en día, aparece en candeleros, diferente mobiliario, cubito de hielo, esculturas,...

TEORÍA MATEMÁTICA

La unidad didáctica en la que se encuadra el Superhuevo como complemento es la unidad de cónicas, en concreto la elipse.

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F', llamados focos, es una cantidad constante.



La suma de distancias a los focos es constante para cualquier punto de la elipse.

$$PF + PF' = constante$$

Por tanto, tomando como punto el vértice A, tendremos que

$$AF + AF' = constante = 2a$$

Por tanto, para cualquier punto P de la elipse, la suma de distancias a los focos es 2a:

$$PF + PF' = 2a$$

Tomando el punto P en el vértice B, se obtiene:

$$BF + BF' = 2a \Rightarrow 2BF = 2a \Rightarrow BF = a$$

Como el triángulo OFB es rectángulo se verifica que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que es la expresión de relación entre los elementos principales de la elipse.

La ecuación reducida de la elipse es la ecuación cuyo centro es el origen de coordenadas y sus ejes son los ejes de coordenadas.

Acabamos de establecer que

$$PF + PF' = 2a$$

A partir de la expresión de la distancia entre dos puntos, se tiene que

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Pasando una raíz al segundo miembro y elevando al cuadrado

$$(\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2})^2$$
$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

Si aislamos el término de la raíz en el primer miembro y operamos

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2$$
$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$
$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Volviendo a elevar al cuadrado los dos miembros y utilizando la relación mostrada anteriormente $a^2 = b^2 + c^2$, se obtiene

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Si dividimos ambos miembros por a^2b^2, podemos obtener la ecuación reducida de la elipse de eje mayor OX:

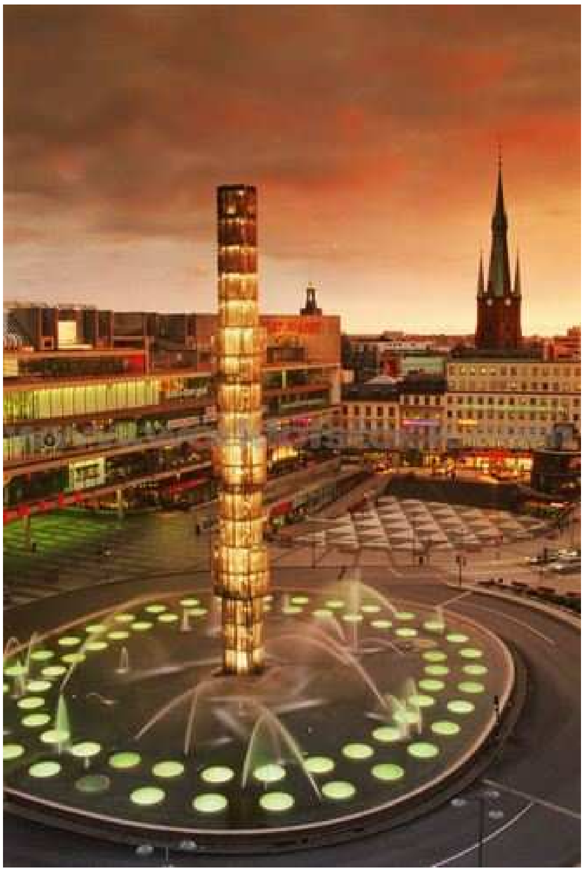
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EL COMPLEMENTO EXÓTICO

Hein propuso una superelipse que aportaba una solución para una rotonda en el cruce de dos vías en Estocolmo. La necesidad de obtener una curva que optimizara el interior y una ortogonalidad que diera servicio al tráfico dio como fruto una elipse digamos “inflada” de exponentes 2,5:

$$\frac{x^{2,5}}{a^{2,5}} + \frac{y^{2,5}}{b^{2,5}} = 1, \text{ con } a/b = 6/5$$

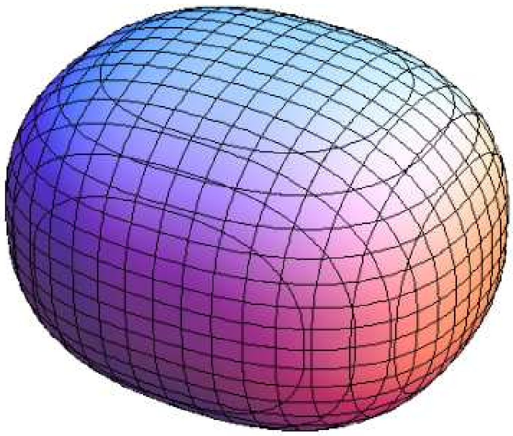
El resultado fue muy satisfactorio en todos los requisitos previos establecidos.



El superhuevo en su forma tridimensional más generalizada se obtiene a partir de la superelipse:

$\frac{x^{2,5}}{a^{2,5}}+\frac{y^{2,5}}{b^{2,5}}=1$, esta vez con $a/b=4/3$

Y girando esta curva alrededor del eje x.

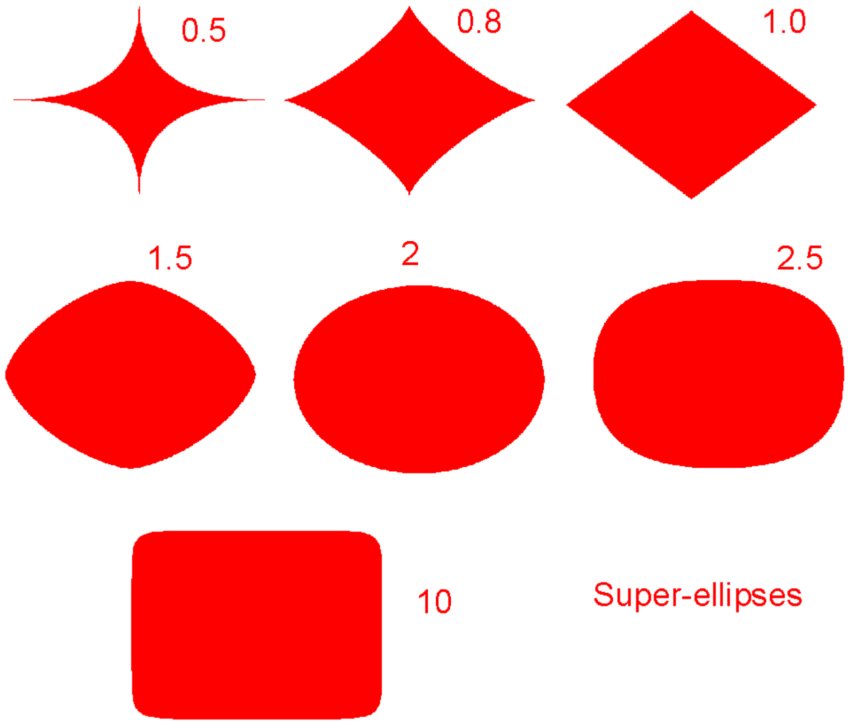


PROPUESTA DE ACTIVIDAD

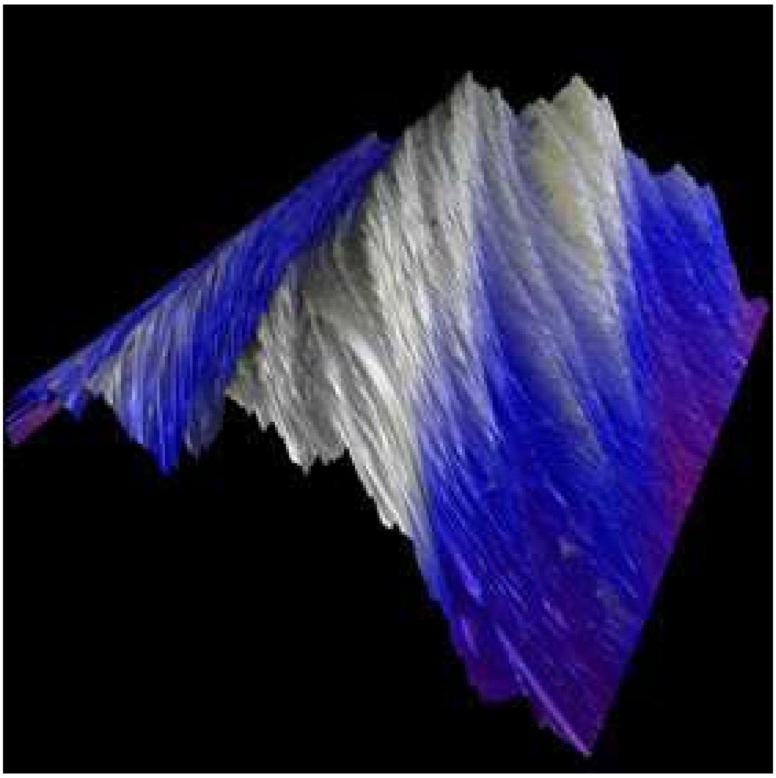
1.- ¿Qué ocurre si a la elipse le aumentamos los exponentes a 3, a 4 o incluso a 10?

2.- ¿Y si disminuimos a 1,5, a 1 o a 0,5?

3.- Dibuja estas figuras de forma aproximada.



2.3.- LA FUNCIÓN DE WEIERSTRASS



BREVE RESEÑA HISTÓRICA

Karl Wilhem Theodor Weierstrass, alemán, matemático y profesor de secundaria, descubrió la función de su propio nombre en 1861 y sorprendió al mundo matemático al mostrarla en 1872. El conocido y reconocido como padre del análisis moderno llegó a formular algunos de los teoremas más simples y fundamentales del análisis de funciones como son el teorema de Bolzano-Weierstrass y el teorema de Weierstrass.

Algunos de sus discípulos más destacados fueron Bolzano, Cantor, Lie y Kovalevskaya.

TEORÍA MATEMÁTICA

Este complemento se sostiene sobre las unidades didácticas de análisis matemático que incluyen continuidad y derivabilidad.

De forma no formal la idea de continuidad se intuye a partir de la idea gráfica de representar una función en un papel con un solo trazo sin levantar el lápiz del mismo.

Ahora, de forma formal, decimos que una función es continua en un punto $x = x_0$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:

- Existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0.
- La función está definida en x_0.
- Ambos valores coinciden:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si tenemos dos funciones, f y g, continuas en x_0, se verifican una serie de propiedades:

- La función resultante de su suma, $f + g$, es también continua en x_0.
- De igual forma, $f - g$, es continua en x_0.
- $\forall t \in R$, la función resultante $t \cdot f$ es continua en x_0.
- Para el producto de funciones, $f \cdot g$ es continua en x_0.
- Si se cumple que $g(x_0) \neq 0$, la función resultante f/g será continua en x_0.

La derivada de una función f en un punto x_0, denotada como $f'(x_0)$, es el límite cuando h tiende a 0, del cociente incremental entre $f(x_0 + h) - f(x_0)$ y h:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En cuanto a la derivabilidad, decimos que una función f es derivable en un punto x_0 cuando la función tiene derivada en ese punto.

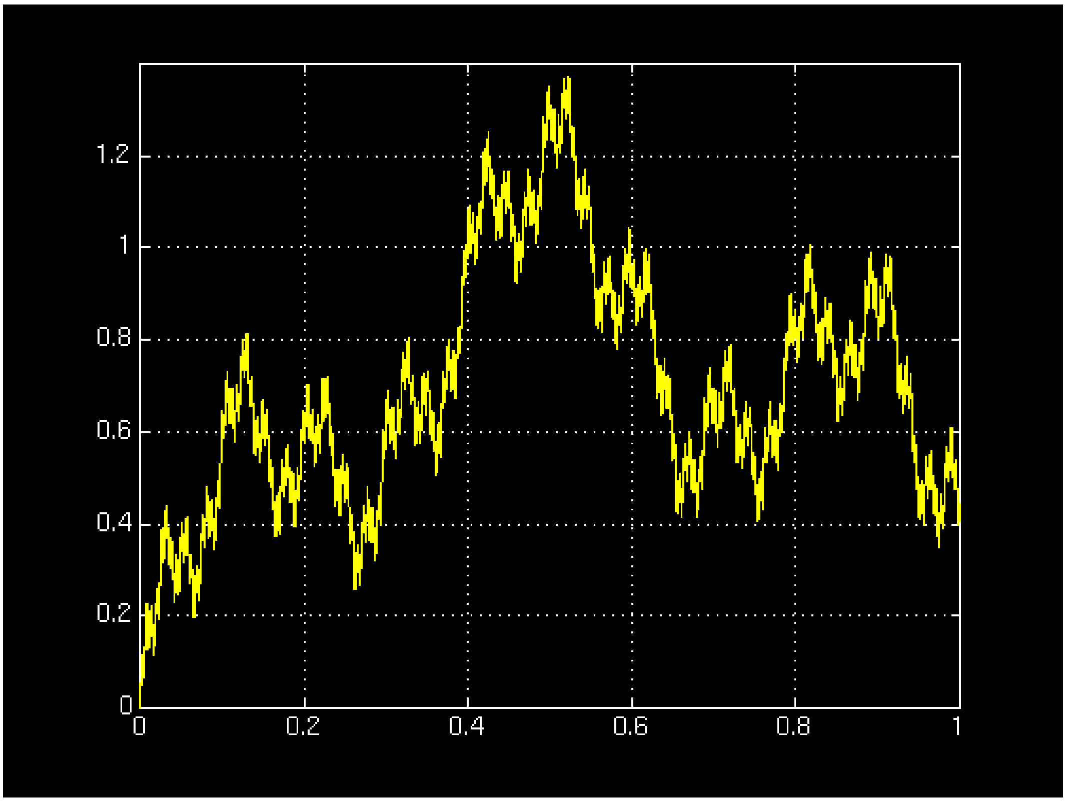
EL COMPLEMENTO EXÓTICO

La función de Weierstrass es continua en todos sus puntos pero no es diferenciable en ninguno de sus puntos. Está función está definida por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

con $0 < a < 1$, b es un número entero impar y positivo, y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$

Esta función se construye, por tanto, con infinitas funciones trigonométricas formando una densa oscilación de carácter infinito para un entorno finito.

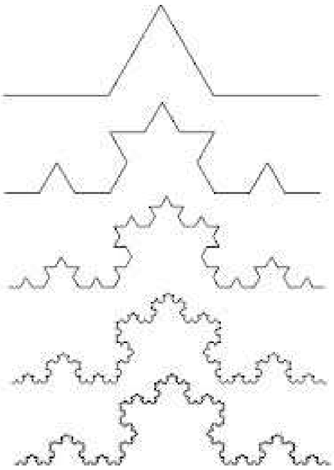


La conexión con las formas fractales es evidente. Un fractal muy conocido es la curva de Koch, una curva igualmente continua en todos sus puntos y no derivable en ninguno de ellos. Ambas gráficas, así como otras con la misma singularidad que fueron apareciendo con posterioridad, a medida que agrandamos su representación gráfica, nos muestran más y más detalle.

Las formas fractales han conseguido representarse de forma muy bella como aportación de las matemáticas al arte.

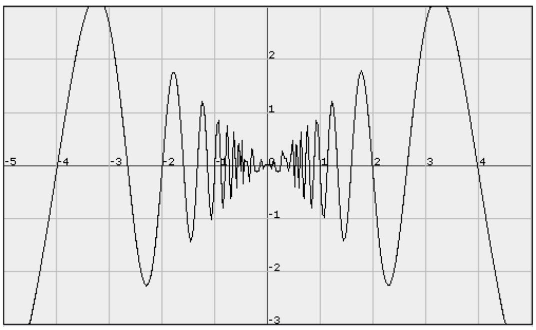
PROPUESTA DE ACTIVIDAD

1.- Construir la curva fractal de Koch paso a paso generando cada vez un nivel mayor de detalle



2.- Partiendo de la función $f(x) = |x|$, ¿Es continua en todo su dominio? ¿y derivable en todos sus puntos?

3.- Sabemos que la función $f(x) = x \cdot sen(1/x)$ no es derivable en el punto $x = 0$, por tanto, ¿Podemos decir que es continua en todo R ?



La función de resonancia es una función en cierta forma similar a la función anterior:

$$x(t) = Atsen(w_0 t)$$

A medida que pasa el tiempo t, la curva se hace más y más grande. Este tipo de oscilaciones, en su versión extrema puede llegar a colapsar la estructura de un puente como ocurrió con el puente de Tacoma.

Por este motivo son desaconsejados los desfiles militares o de otro tipo sobre puentes, pues llevan un ritmo constante que podrían provocar daños en la estructura de estas construcciones.

2.4.- EL TEOREMA DE LOS INFINITOS MONOS

BREVE RESEÑA HISTÓRICA

El nombrado teorema de los infinitos monos fue planteado por Émile Borel, físico y matemático francés, en el año 1913.

Émile pretendía ilustrar la magnitud de un acontecimiento extraordinariamente improbable en su libro “Mécanique Statistique et Irréversibilité”.

TEORÍA MATEMÁTICA

Este teorema complementa la unidad didáctica de Probabilidad.

Comenzaremos con unas definiciones básicas en probabilidad:

- Espacio muestral (denotado con la letra E): Conjunto formado por todos los resultados de un experimento o fenómeno aleatorio.

- Suceso de un experimento o fenómeno aleatorio (denotado con las letras $A, B, C, \ldots$): Cada uno de los subconjuntos del espacio muestral E

- Suceso seguro: el formado por todos los resultados posibles del experimento y, por tanto, es coincidente con el espacio muestral E.

- Suceso imposible: el que nunca es verificado y se representa con el conjunto vacío $\varnothing$.

Sea E el espacio muestral de un experimento o fenómeno aleatorio y S el espacio de sucesos aleatorios asociado a este espacio muestral, se llama probabilidad a la aplicación P definida entre S y R, siendo R el conjunto de los números reales:

$$\begin{aligned} P : S &\to R \ [0,1] \\ A &\to P(A) \end{aligned}$$

La aplicación P definida verifica los siguientes axiomas:

1) La probabilidad del suceso seguro o espacio muestral E es 1.

$$P(E) = 1$$

2) Sea A un suceso cualquiera, su probabilidad es un número no negativo.

$$P(A) \geq 0$$

3) Si A y B son dos sucesos incompatibles, es decir $A \cap B = \varnothing$, la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades de cada suceso.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Pasamos ahora a enunciar una serie de propiedades útiles para el cálculo de probabilidades de sucesos.

- Si tenemos un suceso A, el suceso contrario denotado con $\overline{A}$ se puede conocer a partir de A:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

- Para el suceso imposible $\varnothing$, su probabilidad es 0:

$$P(\varnothing) = 0$$

- Si tenemos A y B dos sucesos compatibles, es decir $A \cap B \neq \varnothing$, la probabilidad del suceso unión es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

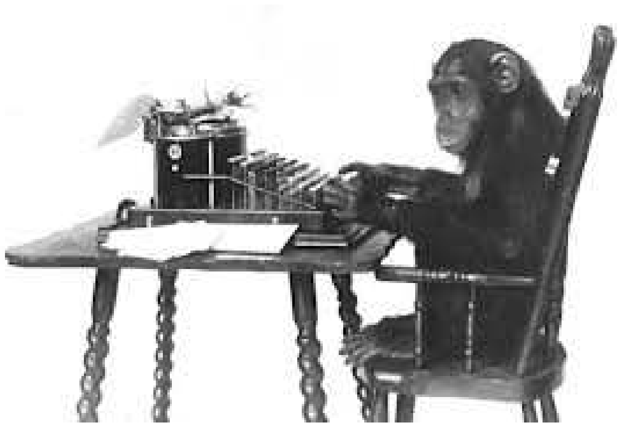
- Regla de Laplace: La probabilidad de un suceso A formado por h sucesos equiprobables es el cociente entre el número de resultados favorables y el número de resultados posibles n:

$$P(A) = \frac{h}{n}$$

EL COMPLEMENTO EXÓTICO

El teorema de los infinitos monos originariamente dice que si se pusieran un millón de monos a mecanografiar teclas al azar durante 10 horas seguidas al día, podrían escribir cualquier libro de la Biblioteca Nacional Francesa.

Tiempo más tarde, y ya popularizado el teorema por la curiosidad que despertaba, se volvió a formular de esta manera: "Si infinitos monos, en un intervalo infinito de tiempo, mecanografiasen teclas al azar, acabarían escribiendo cualquier obra de William Shakespeare."



PROPUESTA DE ACTIVIDAD

1.- Si partimos de un teclado con 28 letras, por ejemplo, minúsculas, 10 números, 10 símbolos y la barra espaciadora, y queremos que un mono escriba la frase siguiente: "la vida es bella" ¿Cual sería el número de combinaciones posibles que el mono pudiera teclear?

2.- Volviendo al caso anterior, ¿Cuál sería la probabilidad de que el mono acertara a escribir dicha frase?

3.- Suponiendo que el mono pulse una tecla por segundo, ¿Cuantos años debería estar escribiendo el mono para prácticamente estar seguros de que haya redactado al menos una vez la frase correcta?

2.5.- LOS CÓDIGOS DE HAMMING

BREVE RESEÑA HISTÓRICA

Richard Wesley Hamming, matemático estadounidense y premio Turing 1968, presentó a la comunidad matemática en 1950 los códigos de detección y corrección de errores, dando al nacimiento de la Teoría de Códigos.

La Teoría de códigos tiene importantes aplicaciones en los sistemas de información y comunicación.

TEORÍA MATEMÁTICA

Dentro de la unidad didáctica de matrices, más concretamente en las operaciones de matrices, podemos encuadrar este complemento.

Una matriz A se define como un conjunto de elementos dispuestos en m filas y n columnas:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Operaciones básicas con matrices:

- Suma:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

- Producto por un número:

Sea λ un número real,

$$\lambda\cdot A=\lambda\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \cdots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \cdots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \cdots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Producto de matrices:

Para multiplicar matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}=$$

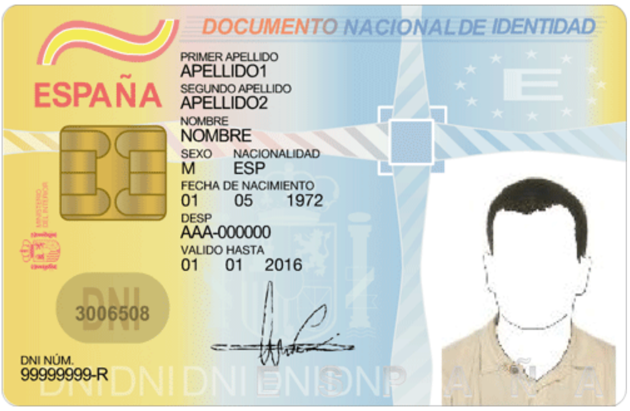
$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{n1} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{n2} & \cdots & a_{11}\cdot b_{1p}+a_{12}\cdot b_{2p}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{np} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+\cdots+a_{2n}\cdot b_{n1} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+\cdots+a_{2n}\cdot b_{n2} & \cdots & a_{21}\cdot b_{1p}+a_{22}\cdot b_{2p}+\cdots+a_{2n}\cdot b_{np} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\cdot b_{11}+a_{m2}\cdot b_{21}+\cdots+a_{mn}\cdot b_{n1} & a_{m1}\cdot b_{12}+a_{m2}\cdot b_{22}+\cdots+a_{mn}\cdot b_{n2} & \cdots & a_{m1}\cdot b_{1p}+a_{m2}\cdot b_{2p}+\cdots+a_{mn}\cdot b_{np} \end{pmatrix}$$

EL COMPLEMENTO EXÓTICO

Un código puede definirse como el conjunto de signos que envía un emisor para que un receptor comprenda un mensaje. Cuando se produce ruido en el canal de comunicación, el código permite la corrección de errores.

Vamos a suponer que un emisor envía un mensaje en código binario, es decir, por el canal de comunicación pasan "ceros" y "unos". Cuando se produce ruido, un "uno" enviado puede llegar al receptor como un "cero". En este caso podemos enviar un mensaje más largo a propósito para que el receptor pueda detectar el error y así tener la seguridad de recoger el mensaje completo.

Esto se realiza habitualmente en la actualidad añadiendo lo que se llaman signos de control. Un buen ejemplo de ello es el DNI español que utilizamos todos los días. La letra del DNI se asigna como combinación de los ocho números, es un signo de control que permite detectar un error en el mensaje al introducirlo en, por ejemplo, un programa informático de una administración pública.



Tomás Domínguez (2003) establece un buen ejemplo de código lineal:

"Suponemos que estamos mandando una 'palabra' digital de tres letras $u_1u_2u_3$ *donde* $u_i = 0$ *o* 1. *Tomamos una matriz de dimensión n×3 formada por 0's y 1's. Por ejemplo, para n = 3, consideramos*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alargamos el código poniendo

$$(u_1u_2u_3) \to \begin{pmatrix} I_{3x3} \\ A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

en base 2, donde $x_i = u_i$ *para* $i = 1,2,3$. *Así se obtiene la siguiente correspondencia entre los códigos que queremos enviar y los códigos alargados con tres cifras de control*

000 $\to$ *000000,*
100 $\to$ *100011,*
010 $\to$ *010101,*
001 $\to$ *001110,*
110 $\to$ *110110,*
101 $\to$ *101101,*
011 $\to$ *011011,*
111 $\to$ *111000.*

Vemos que los números de control pueden coincidir, pero lo hacen para palabras que se diferencian en los tres dígitos. De esta forma, si suponemos que sólo se produce un error (o dos), la secuencia de control lo advertirá. Pero también es importante que en caso de error el receptor sea capaz de regenerar la palabra enviada. En efecto, la distancia mínima entre dos palabras de este código (esto es, la distancia de Hamming = número de cifras diferentes entre dos palabras) es 3. De esta manera, si hay un error, sólo una de las palabras correctas es posible. Los dos problemas —detección de errores y reconstrucción de la palabra correcta— son la clave de esta teoría."- Se refiere a la Teoría de códigos - *"Elegir la matriz (de comprobación de la paridad) más apropiada en este caso o diseñar otros tipos de códigos es un problema de gran interés y dificultad. "*

Supongamos que el emisor envía el código 100, pero por un error en la comunicación del último dígito, el receptor recibe 101. Este confundirá el mensaje. Pero si utilizamos el código con las tres cifras de control, el mensaje enviado sería 100011, sin embargo el mensaje recibido por el error mencionado anteriormente sería 101011, que difiere en solo un dígito, El receptor ya no confundiría el mensaje puesto que el código alargado de 101 es 101101 que difiere en dos dígitos. Además tampoco habría otra combinación con solamente un dígito distinto. Un programa podría corregir al mínimo error posible y el receptor recibiría el mensaje correctamente.

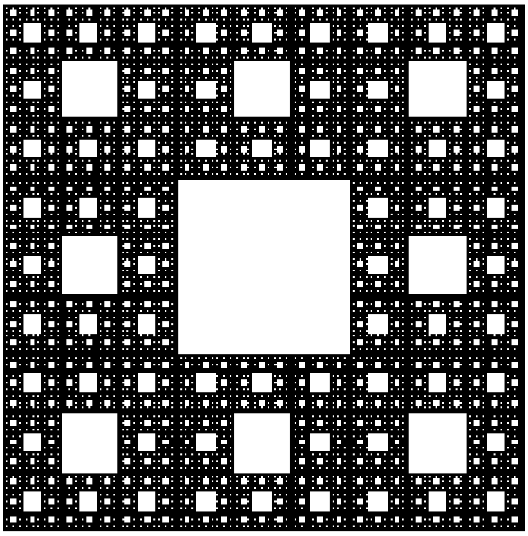
PROPUESTA DE ACTIVIDAD

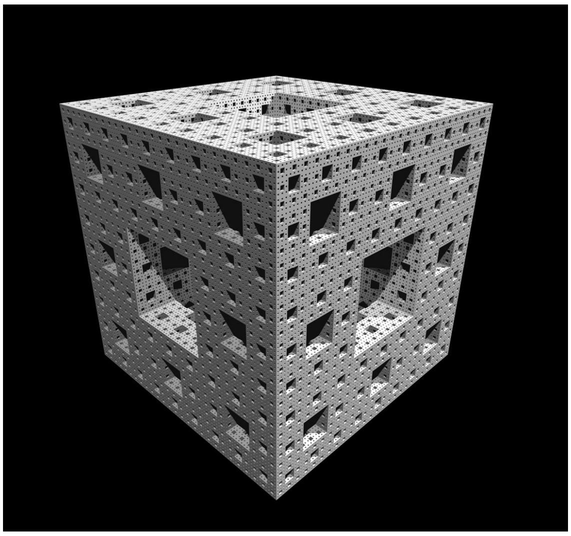
1.- A partir del siguiente código lineal en sistema binario $(u_1 u_2)$ y matriz de control $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuántos dígitos de control tiene este código?

2.- Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, calcula los códigos alargados de 00, 01, 10 y 11.

3.- Para el caso del DNI con la letra de control, ¿cuántas filas y columnas tendrá su matriz de control?

2.6.- LA ALFOMBRA DE SIERPINSKI Y LA ESPONJA DE MENGER





BREVE RESEÑA HISTÓRICA

W. Sierpinski

K. Menger

Waclaw Sierpinski, matemático polaco, dedicó buena parte de su vida al estudio de la geometría fractal. Su fama se debe a la figura conocida como alfombra de Sierpinski.

El matemático austriaco Karl Menger, por su parte, describió la esponja de su mismo nombre en 1926. Las caras de este objeto son precisamente alfombras de Sierpinski.

TEORÍA MATEMÁTICA

Estos complementos pueden encajar en la unidad didáctica de Áreas y Volúmenes desde el punto de vista de la Geometría.

Si tenemos un paralelogramo definido por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el área que describen será el módulo de su producto vectorial.

$$Área_{\,paralelogramo} = \left|\vec{u} x \vec{v}\right|$$

En el caso de que tengamos un triángulo conocidos sus tres vértices, $A, B, C,$ el área definida por dos de sus lados, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ va a ser:

$$Área_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}\right|$$

Si partimos de un paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, su volumen es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

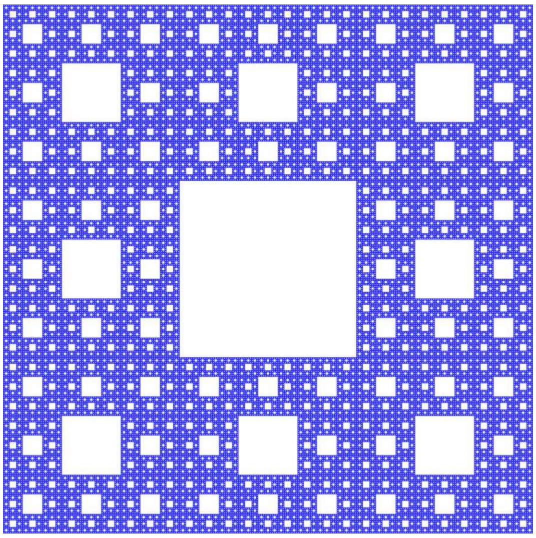
$$Volumen_{\,paralelepípedo} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$$

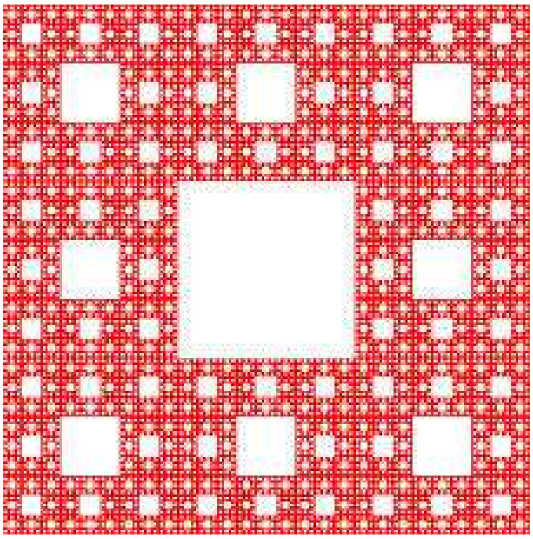
Para un tetraedro determinado por tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, el volumen engendrado es:

$$Volumen_{\,paralelepípedo} = \frac{1}{6} \cdot \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$$

EL COMPLEMENTO EXÓTICO

LA ALFOMBRA DE SIERPINSKI



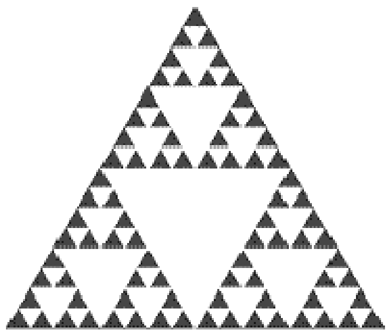


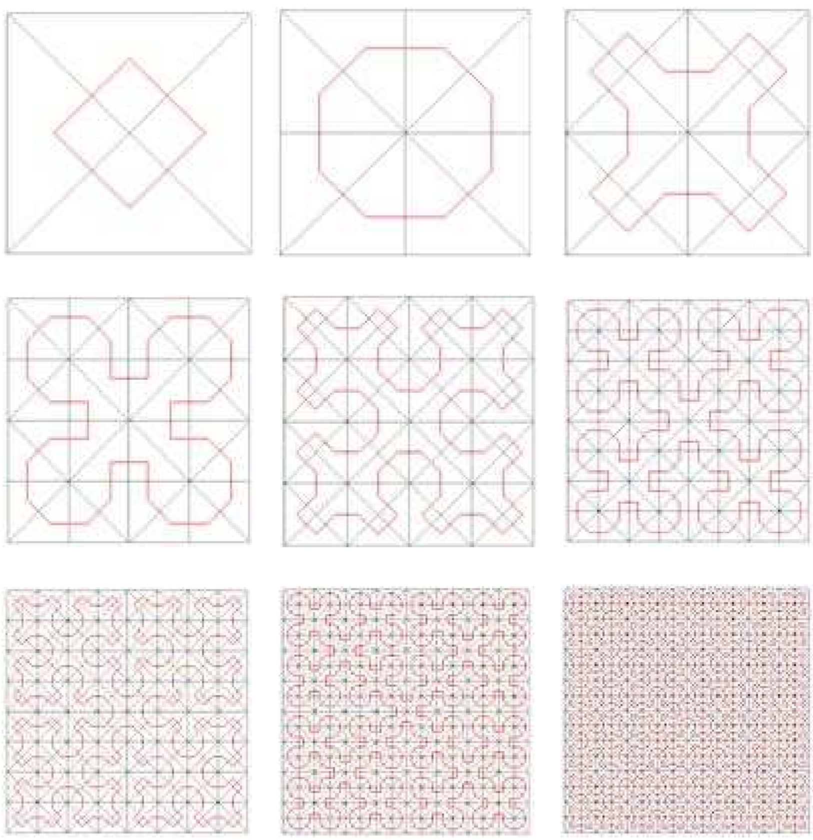
La alfombra de Sierpinski es una figura plana (que no quiere decir que tenga dimensión 2, de hecho es de dimensión 1,58...) formada a partir de un cuadrado que mediante iteraciones sucesivas se divide en 3×3=9 cuadrados quitando el del medio. A continuación, se repetiría la misma operación en los 8 restantes y así sucesivamente en un número infinito de iteraciones.

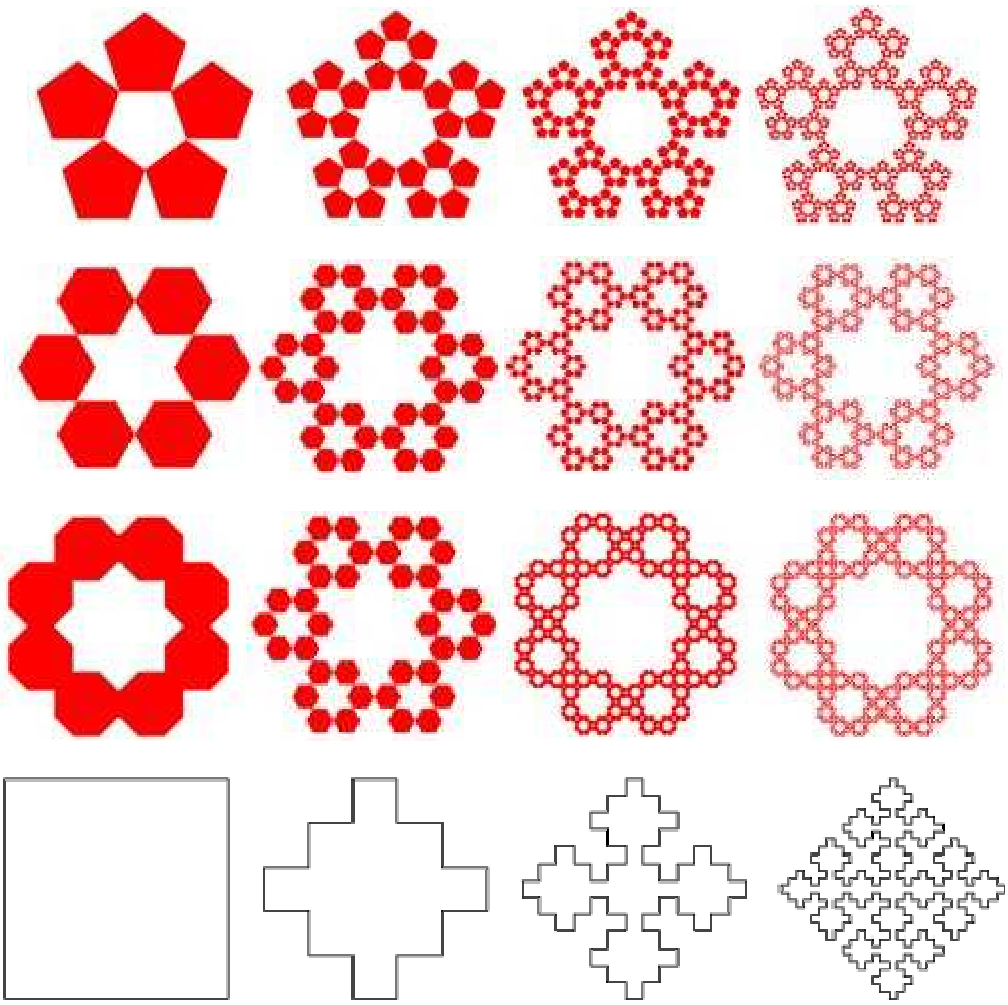
Las propiedades que le confieren un carácter exótico son de tipo geométrico. El área a cada iteración se vuelve cada vez más pequeña de forma que en el límite ¡llega a ser nula! Y no solo queda ahí si no que con la misma velocidad su perímetro se vuelve cada vez más grande para, en el límite ¡llegar a ser infinito!

Si partimos de una alfombra de lado $1u$, podemos ver fácilmente que el área en su primera iteración es $\frac{8}{9}u^2$, en la segunda iteración $\left(\frac{8}{9}\right)^2 u^2$, en la tercera $\left(\frac{8}{9}\right)^3 u^2$,..., en la i-ésima iteración será $\left(\frac{8}{9}\right)^i u^2$, por tanto, cuando tiende a infinito el número de iteraciones, su área tiende a 0, puesto que para potencias iguales, el numerador es más pequeño que el denominador.

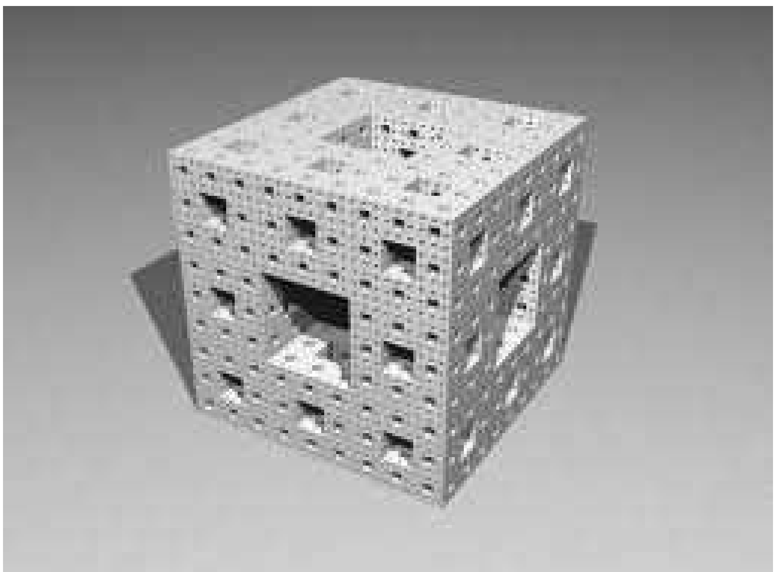
Sierpinski trabajó con otras figuras fractales como el triángulo de Sierpinski y otras curvas, entre otras, el pentágono, hexágono y octógono de Sierpinski.





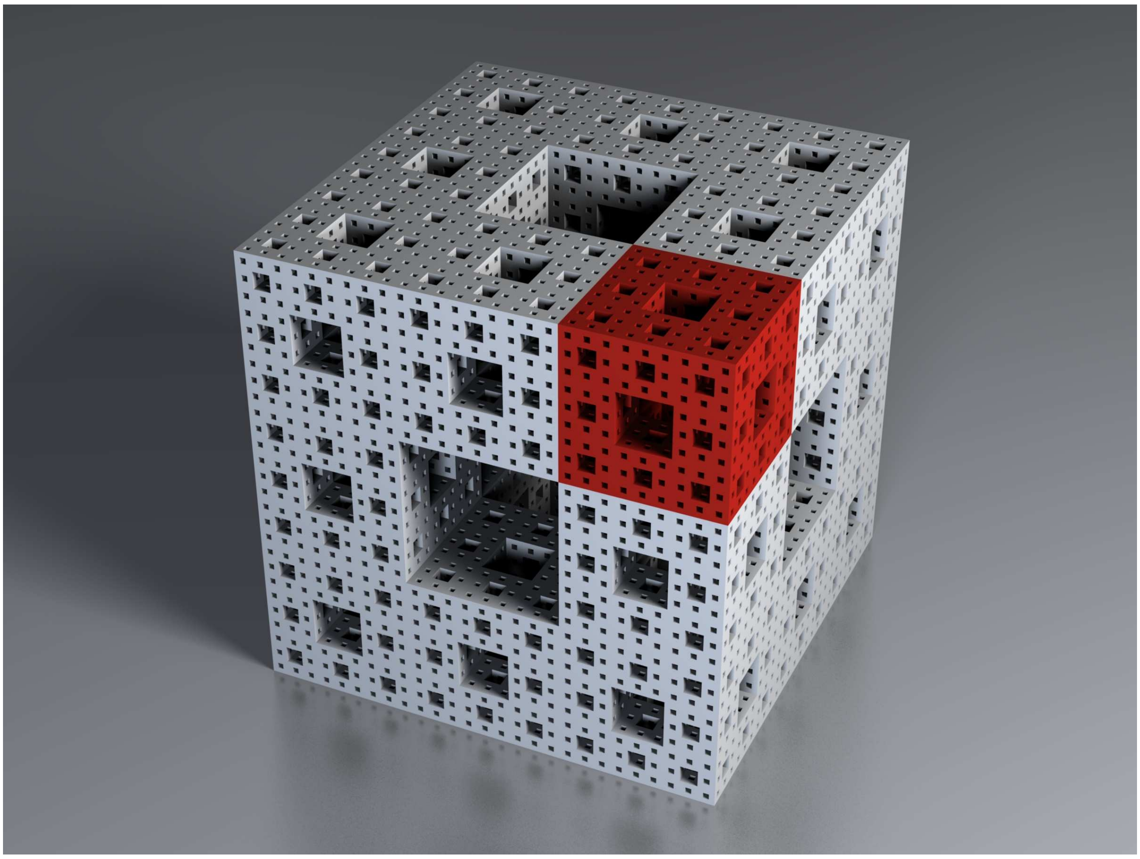


LA ESPONJA DE MENGER



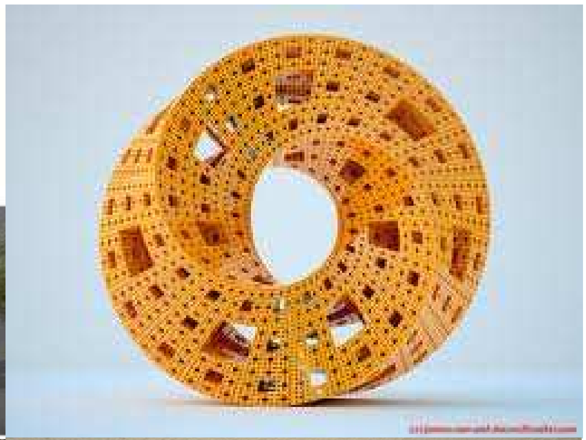
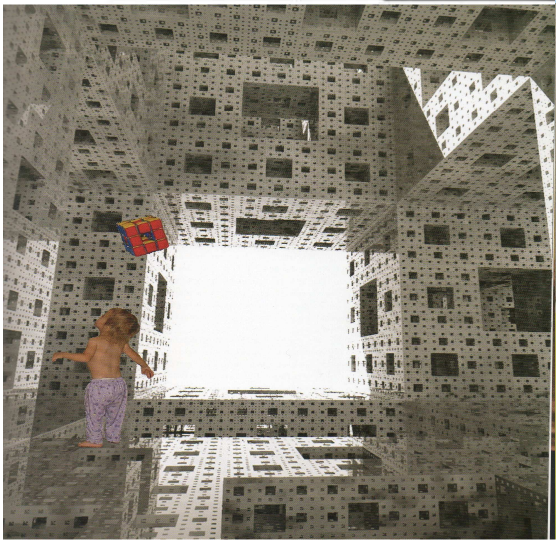
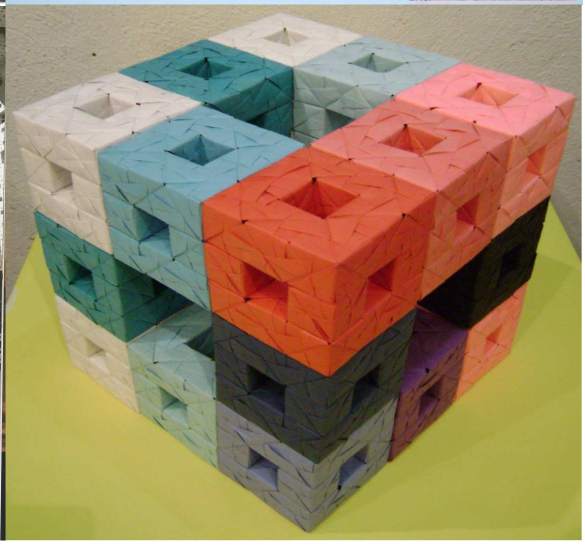
La esponja de Menger es un objeto fractal de dimensión 2,72..., cuya construcción iterativa comienza tomando un cubo y dividiéndolo en 3x3x3=27 cubos. Después quitando el cubo central, y los de los centros de cada cara. A continuación, en una segunda iteración repetimos el proceso con cada uno de los 27-7 = 20 cubos restantes y así haríamos sucesivamente con infinitas iteraciones.

La esponja de Menger presenta también unas propiedades geométricas asombrosas. Su área crece a medida que las iteraciones nos presentan cada vez mayor número de caras por lo que en el límite ¡tiende a infinito! A su vez su volumen se acerca a 0 a medida que nos acercamos al infinito.



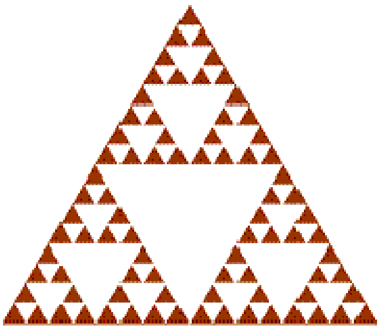
De igual forma que veíamos como el área de la alfombra de Sierpinski tendía a 0, partimos ahora de una esponja de lado $1\,u$, el volumen en la primera iteración es $\frac{20}{27}u^3$, en la segunda iteración $\left(\frac{20}{27}\right)^2 u^3$, en la tercera $\left(\frac{20}{27}\right)^3 u^3$,..., en la i-ésima iteración es $\left(\frac{20}{27}\right)^i u^3$, por tanto, cuando el número de iteraciones tiende a infinito, su volumen tiende a 0, ya su numerador es menor que el denominador.

La expectación creada por este objeto ha inspirado y sigue inspirando a otras ciencias y saberes como la física, la arquitectura, la escultura, la fotografía,...

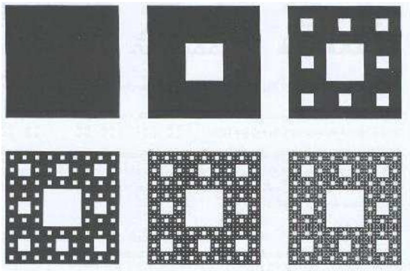
PROPUESTA DE ACTIVIDAD

1.- Calcular el área del triángulo de Sierpinski de lado 2 u^2 en su tercera iteración.



2.- A partir del triángulo de la actividad anterior, calcular vectorialmente el área para la primera iteración.

3.- A partir de la propuesta en Internet de la profesora Elena E. Álvarez Saiz para el triángulo de Sierpinski, realizar con Geogebra su construcción hasta la quinta iteración.

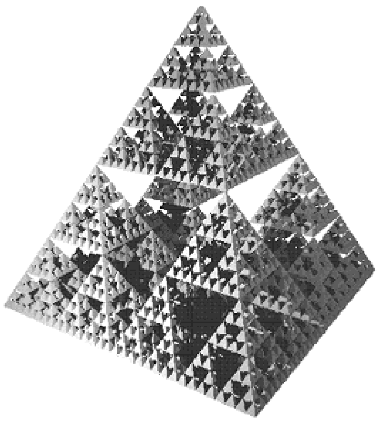


4.- Conociendo que tanto el área de la alfombra de Sierpinski, como el volumen de la esponja de Menger tienden a ser nulos, afirmar cual de las dos propiedades geométricas tiende a 0 con mayor rapidez y justificar la respuesta.

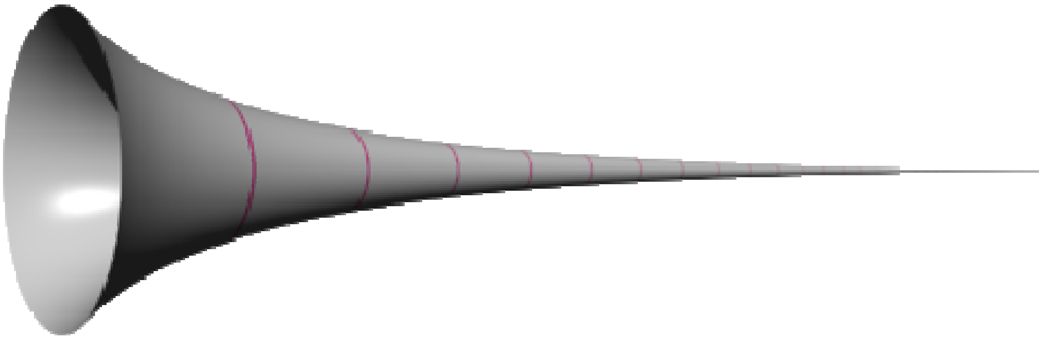
5.- Investiga en Internet sobre la relación entre los triángulos de Pascal y de Sierpinski

6.- Realizar con papel en tres dimensiones, o más bien en 2,72... dimensiones, una esponja de Menger de nivel 2 inspirada en la esponja de nivel 3 realizada por el IES Carlos Bousoño de Majadahonda (Madrid).

7.- Indica cómo calcularías vectorialmente el volumen de un tetraedro de Sierpinski en su segunda iteración.



2.7.- LA TROMPETA DE TORRICELLI



BREVE RESEÑA HISTÓRICA

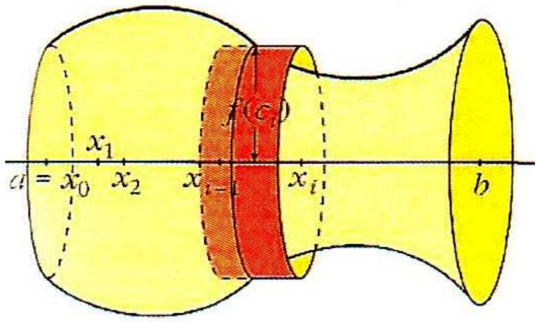
Evangelista Torricelli, físico y matemático de origen italiano, descubrió este objeto matemático con aspecto de trompeta en 1641. Además de conocerse como trompeta de Torricelli, se nombra cuerno de Gabriel.

Torricelli trabajó conjuntamente con Galileo en la astronomía telescópica y es ampliamente recordado por la invención del barómetro.

TEORÍA MATEMÁTICA

Este complemento se encuadra en la unidad didáctica de Integral definida, concretamente en su última parte, cuando se da el salto del cálculo del área de una superficie plana al cálculo del volumen de un cuerpo de revolución.

Partiendo de un trozo de curva $y = f(x)$, con $x \in [a,b]$, podemos hacer que gire alrededor del eje X de forma que engendre un cuerpo de revolución.



Si tomamos una rodaja entre x_{i-1} y x_i su volumen será el área de la rodaja por su altura, es decir,

$$\pi \cdot f(c_i)^2 (x_i - x_{i-1})$$

Por lo tanto, el volumen de este cuerpo de forma aproximada será la suma de todas las rodajas entre a y b

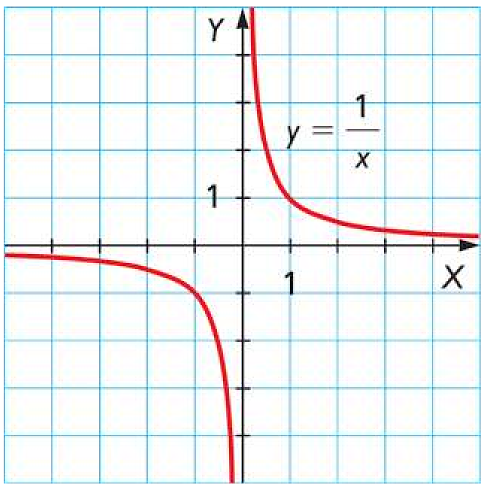
$$\sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f(c_i)^2 (x_i - x_{i-1})$$

Si pasamos al límite podemos obtener el valor exacto mediante la integral

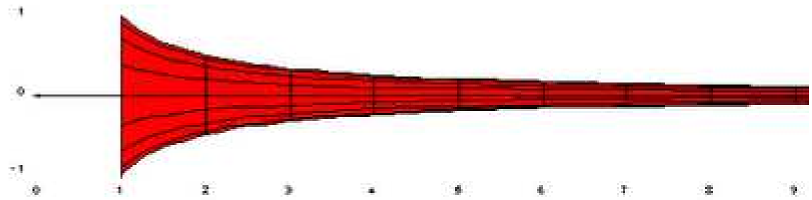
$$\int_a^b \pi \cdot f(x)^2\, dx = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\, dx$$

EL COMPLEMENTO EXÓTICO

Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$,



Tomamos ahora solamente la función en el intervalo $[1,\infty)$ y la hacemos girar alrededor del eje de abscisas obteniendo la conocida Trompeta de Torricelli de longitud infinita.



La particularidad de este objeto estriba en una paradoja: el área de la trompeta al ser de longitud infinita resulta ser también infinita, por tanto, es intuitivo pensar que su volumen es también infinito ¡pero no! es finito y se puede demostrar calculándolo.

Según la teoría expuesta para el cálculo del volumen de un cuerpo de revolución, el volumen de este cuerpo se puede calcular de la siguiente forma

$$\int_1^\infty \pi \cdot (1/x)^2\,dx = \pi \cdot \int_1^\infty (1/x)^2\,dx$$

PROPUESTA DE ACTIVIDAD

1.- Calcular el volumen de la trompeta de Torricelli

2.- ¿Podrías pintar la superficie interior de la trompeta? ¿Por qué?

3.- Puesto que su volumen es finito, ¿Qué ocurriría si rellenáramos la trompeta vertiendo una cantidad suficiente de botes de pintura? ¿Habríamos pintado su superficie interior?

2.8.- *SOLUCIONARIO*

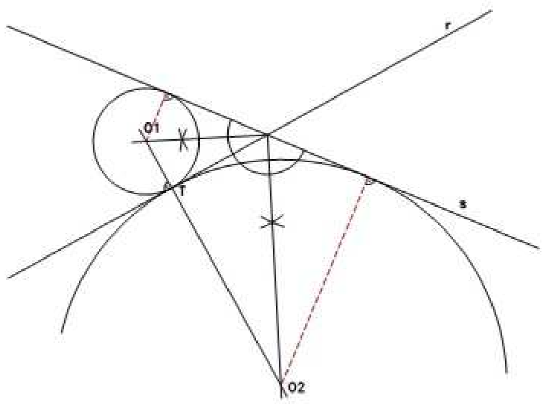
LOS CÍRCULOS DE FORD

1.- c) Dos círculos de Ford son tangentes entre sí o son disjuntos.

2.- $C[5/7]$, $C[4/5]$, $C[2/3]$, $C[7/9]$, $C[1/1]$,...

3.- Infinitos

4.- (A realizar bajo la supervisión del profesor de dibujo).



EL SUPERHUEVO

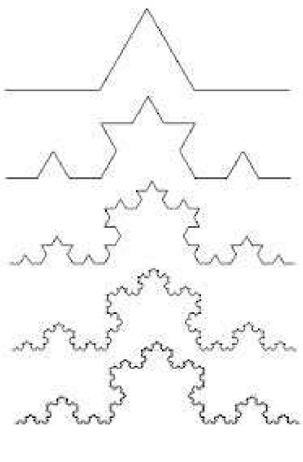
1.- La elipse se inflaría cada vez más a medida que aumentan los exponentes, asemejándose cada vez más a un rectángulo con las esquinas redondeadas.

2.- A 1,5 la elipse se empieza a desinflar, a 1 se vuelve un rombo y a 0,5 alcanza forma estrellada.

3.- (A realizar sobre papel en el aula).

LA FUNCIÓN DE WEIERSTRASS

1.- (A realizar en el aula)



2.- Sí, es continua $\forall x \in R$; No es derivable en $x = 0$.

3.- No, de hecho esta función es continua $\forall x \in R - \{0\}$.

EL TEOREMA DE LOS INFINITOS MONOS

1.- $28 + 10 + 10 + 1 = 49$ teclas

L+a+_+v+i+d+a+_+e+s+_+b+e+l+l+a $= 16$ letras y espacios

$49^{16} = 1{,}104 \cdot 10^{27}$ combinaciones posibles

2.- $A =$ acertar a escribir la frase

$$P(A) = \frac{1}{1{,}104 \cdot 10^{27}} = 9{,}054 \cdot 10^{-28}$$

3.- $$\frac{1{,}104 \cdot 10^{27} \cdot 16s}{\frac{60s}{\min} \cdot 60\frac{\min}{h} \cdot 24\frac{h}{día} \cdot 365\frac{días}{año}} = 5{,}603 \cdot 10^{21}\, años$$

LOS CÓDIGOS DE HAMMING

1.- Tiene tres dígitos de control: x_3 , x_4 y x_5

$$\begin{pmatrix} I_{2x2} \\ A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 + u_2 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

2.- 00 -> 00000
01 -> 01110
10 -> 10101
11 -> 11011

3.-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ a_{91}u_1 + a_{92}u_2 + a_{93}u_3 + a_{94}u_4 + a_{95}u_5 + a_{96}u_6 + a_{97}u_7 + a_{98}u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

La matriz de control A tendrá 1 fila y 8 columnas.

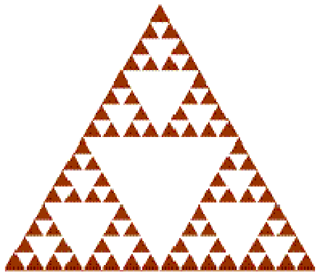
$$A = \begin{pmatrix} a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} \end{pmatrix}$$

LA ALFOMBRA DE SIERPINSKI Y LA ESPONJA DE MENGER

1.- Tomando base x altura / 2, y teniendo en cuenta que a cada iteración el área se reduce hasta $\frac{3}{4}$:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 u^2 = 0{,}73071\, u^2$$

2.- $C(1, \sqrt{3}, 0)$



$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$

$$\overline{AB} = (2,0,0) \text{ y } \overline{AC} = (1,\sqrt{3},0)$$
$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (0,0,2\sqrt{3})$$

A cada iteración el área se reduce hasta $\frac{3}{4}$:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right| \cdot \frac{3}{4} u^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} u^2 = 1{,}29904 \; u^2$$

3.-

Acciones	Pasos a realizar
Abrir Geogebra	Hacer doble clic sobre el icono 
Modificar el aspecto de la vista gráfica	Elegir Menú Edita. Desmarcar opción ejes Elegir Menú Edita. Desmarcar opción cuadrícula.
Definir un triángulo de lado el segmento AB	Teclear en el campo entrada: A=(-3,0) Teclear en el campo entrada: B=(0,3) Teclear en el campo entrada: T=Polígono[A,B,3]
Generamos los triángulos correspondientes a la etapa 1	Elegimos la herramienta Punto Medio:  • Marcamos los puntos A y B. Se obtiene D. • Marcamos los puntos A y C. Se obtiene E. • Marcamos los puntos B y C. Se obtiene F. Nota: También se puede obtener el punto medio de otros dos, P y Q, tecleando en la ventana entrada PuntoMedio[P,Q]. Creamos el triángulo t1 cuyos vértices son los tres puntos obtenidos:

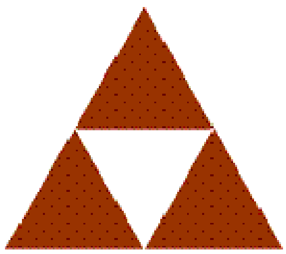
<table>
<tr><td></td><td>

- Seleccionamos la herramienta triángulo
- Hacemos clic en los puntos D, E, F, D.

Rellenamos el triángulo generado de blanco. Para ello, le seleccionamos y en sus propiedades elegimos como color blanco y en la pestaña Estilo la opción Sombreado con valor 100.

</td></tr>
<tr><td>Modificamos el dibujo para que no se visualice nada más que los puntos y los cuadrados.</td><td>

Elegir del menú Edita la opción Propiedades y desmarcar la opción Muestra Objeto y Muestra Rótulo de aquellos objetos que se desee.



</td></tr>
<tr><td>Para visualizar mejor los segmentos de la etapa anterior se pueden desplazar los puntos A1, ... , A8 horizontalmente una longitud L+1.</td><td>Basta hacer clic sobre los puntos A1, ..., A8 que se encuentran en el listado de objetos dependientes y redefinirles sumándoles (0,2/3*L)</td></tr>
<tr><td>Crear una herramienta que sea Sierpinski1 para repetir el proceso sobre cualquier cuadrado.</td><td>

Elegir del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas Nueva.

En la pestaña Objetos de Salida incluir D,E,F,r1.

En la pestaña Objetos de Entrada incluir A y B.

En la pestaña Nombre e Icono elegir Sierpinski1.

Pulsar sobre el botón Concluido.

</td></tr>
</table>

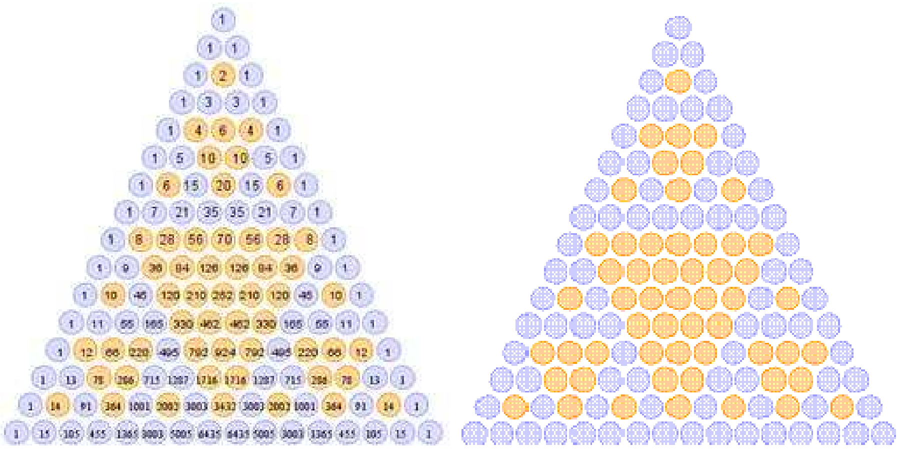
4.- El volumen de la esponja de Menger tiende a 0 más rápidamente que el área de la alfombra de Sierpinski. Eso es debido a que el volumen de la esponja se reduce en $7/27$, mientras que el área de la alfombra se reduce en $1/9 = 3/27$.

5.-

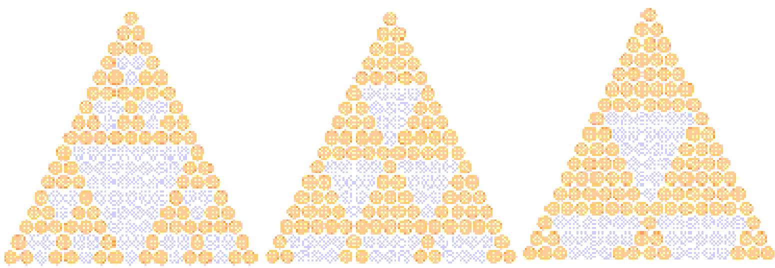
Relación con el triángulo de Pascal

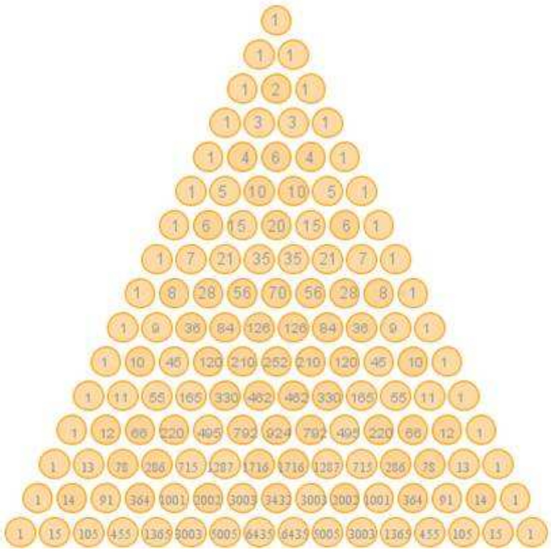
Observación: Una propiedad muy llamativa del triángulo de Sierpinski es su conexión con el triángulo de Pascal. El triángulo de Pascal define de arriba abajo los coeficientes de cada uno de los términos del desarrollo de un binomio elevado a la potencia correspondiente a la profundidad del triángulo.

Ahora, superponiendo un triángulo de Sierpinski sobre el de Pascal (siendo los dos de igual tamaño) se puede comprobar que los triángulos coloreados de azul se corresponden con los números impares y los naranjas con los pares.



Pregunta: ¿Qué pasaría si se pinta de blanco cuando el número al que corresponde la celda es múltiplo de un número concreto (3, 5, 7) o se pinta de negro cuando no es múltiplo? ¿Qué pasaría si pintamos los números primos del triángulo de Pascal?





6.- (A realizar bajo la dirección del profesor de matemáticas durante una evaluación entera con la mayor parte de tiempo fuera de clase y con la implicación de todos los alumnos)

7.-

$$Volumen_{\,tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot \left| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right| \cdot \left(\frac{a^3}{2} \right)^2$$ siendo a el lado del tetraedro

LA TROMPETA DE TORRICELLI

1.- El volumen de la trompeta de Torricelli será:

$$V = \pi \cdot \int_1^\infty (1/x)^2\, dx = \pi \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \pi \left(1 - \frac{1}{\infty} \right) = \pi$$

2.- (Se trata de provocar un pequeño debate en el aula, la respuesta más probable entre los alumnos es: no, porque la trompeta de Torricelli es infinita)

3.- (Seguimos alimentando el debate. Habríamos pintado la superficie interior, pero claro, hay que tener en cuenta las limitaciones físicas puesto que las partículas de pintura no son infinitamente pequeñas)

3.- CONCLUSIONES

Estos ocho complementos exóticos deben acercar al alumno a las matemáticas de bachillerato de Ciencia y Tecnología. El autor tiene el deseo y el convencimiento de haber aportado un apoyo al docente que le permita tender una mano al alumnado para que este construya su propio conocimiento matemático gracias a la motivación y emoción que estos complementos le puedan transmitir, *“el esquema conceptual es algo no siempre verbal que asociamos mentalmente al nombre del concepto; puede ser una representación visual del concepto pero incluye también las experiencias y las sensaciones vividas en relación al mismo” (Azcárate y Camacho, 2003).*

Se trata de conseguir que el alumno desarrolle sus capacidades, procesos lógicos y en definitiva su intelecto para afrontar su siguiente evolución educativa y/o futuro profesional.

Con los ocho elementos atractivos que se proponen, el autor ha abarcado las siete áreas del currículo de bachillerato de Ciencias y Tecnología, a saber, Aritmética y álgebra, Geometría, Análisis y Estadística y probabilidad de 1º de bachillerato y Álgebra lineal, Geometría y Análisis de 2º de bachillerato.

Una vez analizados los complementos exóticos, ha sido grato haber encontrado en estos ocho elementos relaciones muy claras entre ellos a pesar de su disparidad de orígenes y áreas matemáticas. Uno de los conceptos que se repiten en los complementos realizados es la idea de infinito. Hasta seis de los ocho complementos presentados incluyen este concepto tan intrigante y atractivo: los círculos de Ford, la alfombra de Sierpinski, la esponja de Menger, la función de Weierstrass, el teorema de los infinitos monos y la trompeta de Torricelli.

Otro nexo de unión entre varios de los complementos exóticos han sido los fractales (que no dejan de estar relacionados directamente con la idea de infinito), presentes en cuatro de los ocho elementos: los círculos de Ford, la alfombra de Sierpinski, la esponja de Menger y la función de Weierstrass.

Este trabajo fin de master tiene una clara vocación de continuidad que se detalla en el apartado de líneas futuras.

4.- LÍNEAS FUTURAS

Las posibilidades que abre el presente trabajo fin de master son interesantes y variadas:

- Enfoque puramente motivacional del alumno y/o profesor en cuanto a los complementos exóticos
- Complementos atractivos para bachillerato de Ciencias Sociales, otros cursos de la ESO, Atención a la Diversidad, Enseñanza de Adultos,...
- Desarrollo de los elementos atractivos en el ámbito de otras Comunidades Autónomas.
- Investigación en el aula para valorar de forma significativa la influencia de estos complementos en el rendimiento académico.
- Focalizar en un determinado área de las matemáticas como pueda ser la Geometría por sus grandes posibilidades o el Análisis por su mayor complejidad en cuanto a conceptos nuevos e ideas menos intuitivas para el alumno.
- Complementar con elementos atractivos cada una de las unidades didácticas de un mismo curso de la ESO o el Bachillerato.
- Desarrollo de complementos exóticos atractivos en torno a un tema concreto como puedan ser el infinito o los fractales.

5.- REFERENCIAS

BIBLIOGRÁFICAS Y PÁGINAS WEB

General

Real Decreto 1467/2007 del BOE de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan las enseñanzas mínimas

Decreto 42/2008 del BOCYL de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León

Carlos González García y otros, Matemáticas, 1 bachillerato, 2011, EDITEX

Miguel Antonio y otros, Matemáticas I, 1 bachillerato, 2010, Santillana

José Colera y otros, Matemáticas II, 2003, ANAYA

José Colera y otros, Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, 2001, ANAYA

J. A. Tapia, Motivar en la Adolescencia: Teoría, Evaluación e Intervención, 1992, Universidad Autónoma de Madrid

María Teresa González y Modesto Sierra, El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático, 2002

Carmen Azcárate Giménez y Matías Camacho Machín, Sobre la investigación de didáctica del análisis matemático, 2003, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Clifford A. Pickover, El libro de las matemáticas, 2011, Librero

Martin Erickson, Beautiful Mathematics, 2011, MAA

Temas relevantes de la matemática actual: el reto de la Enseñanza Secundaria: Actas del Curso para Profesores de Enseñanza Secundaria, 2000, Ministerio de Educación

Los círculos de Ford

Claudi Alsina y Carme Burgués, Los misterios de la fracción prohibida, Nov. 2007, Revista SUMA

http://matesmates.wordpress.com/2013/02/

http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2001/numeros/tarea6.html

El superhuevo

http://matesmates.wordpress.com/2012/10/15/rotondas-y-superlipses/

http://www.aulamatematica.com/cubosoma/PietHein.htm

http://blog.ciencianueva.com/2013/07/piet-hein-el-superhuevo-y-los-juegos-para-adultos/

La función de Weierstrass

Guillermo Grabinsky, La función continua y no diferenciable de Weierstrass, 1997, SMM

Rafael Villa Caro y otros, PRISMA Un paseo entre las matemáticas y la realidad, 2010, Universidad de Sevilla

http://gaussianos.com/la-funcion-de-weierstrass/

http://blog.educastur.es/mentesinquietas/2010/04/06/karl-weierstrass-redactor-carlos-estrada-garcia/

http://www.mat.ub.edu/~cerda/WCastellano_beamer.pdf

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/ficheros/teoria/analisis/06_FUNCIONES_CONTINUAS.pdf

http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-2-4-weierstrass.pdf

http://memorandummatematico.wordpress.com/2012/06/29/una-funcion-continua-en-todo-punto-y-no-diferenciable-en-alguno/

http://fermat.usach.cl/~dinamicos/Fractales.minimonograph.pdf

El teorema de los infinitos monos

http://nerff-elmejorblogdelmundo.blogspot.com.es/2010/10/el-teorema-de-los-infinitos-monos.html

http://joselueng1.blogspot.com.es/2010/12/teorema-de-los-infinitos-monos.html

http://infinitemonkeyproject.wordpress.com/2007/08/10/el-teorema-de-los-infinitos-monos/

Los códigos de Hamming

Matrices de Hadamard, Tomás Domínguez, 2003, Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla

http://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/codigos/index.html http://www.tugurium.com/gti/termino.asp?Tr=Hamming, Richard Wesley&Tp=P&Or=0

La alfombra de Sierpinski y la esponja de Menger

http://topologia.wordpress.com/2009/03/14/esponja-de-menger/

http://sabia.tic.udc.es/gc/Contenidos%20adicionales/trabajos/Imagenyvideo/fractales/sierpinski.htm

http://www.dma.fi.upm.es/java/geometriafractal/clasicos-I/alfombra.html

http://www.abc.es/20100611/ciencia/esponja-menger-201006110947.html

http://www.microsiervos.com/archivo/ciencia/esponja-menger-post-it.html

Trompeta de Torricelli

http://laaventuradelaciencia.blogspot.com.es/2011/10/la-trompeta-de-torricelli.html

http://www.matematicas.cl/paradoja-el-cuerno-de-gabriel-o-la-trompeta-de-torricelli/

FOTOGRÁFICAS Y PÁGINAS WEB

General

Carlos González García y otros, Matemáticas, 1 bachillerato, 2011, EDITEX

José Colera y otros, Matemáticas II, 2003, ANAYA

Clifford A. Pickover, El libro de las matemáticas, 2011, Librero

Los círculos de Ford

http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=272

http://matesmates.wordpress.com/2013/02/

El superhuevo

http://matesmates.wordpress.com/2012/10/15/rotondas-y-superlipses/

http://www.aulamatematica.com/cubosoma/PietHein.htm http://blog.ciencianueva.com/2013/07/piet-hein-el-superhuevo-y-los-juegos-para-adultos/

http://sliceforms.wordpress.com/2010/11/20/

http://noprincipioeraoovo.blogspot.fr/2009/01/super-egg.html

La función de Weierstrass

www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

analisisbursatil2010.blogspot.com

ladmis.blogspot.com

nylander.wordpress.com

failuremag.com

El teorema de los Infinitos monos

http://nerff-elmejorblogdelmundo.blogspot.com.es/2010/10/el-teorema-de-los-infinitos-monos.html

http://joselueng1.blogspot.com.es/2010/12/teorema-de-los-infinitos-monos.html

http://infinitemonkeyproject.wordpress.com/2007/08/10/el-teorema-de-los-infinitos-monos/

Los códigos de Hamming

http://firmaelectronica.gob.es/FIRMA/groups/dfd_contenido/documents/dfd-imagen/dni.png

http://www.tugurium.com/gti/termino.asp?Tr=Hamming, Richard Wesley&Tp=P&Or=0

http://www.garuyo.com/trend/codigo-morse-que-es

La alfombra de Sierpinski y la esponja de Menger

http://sabia.tic.udc.es/gc/Contenidos%20adicionales/trabajos/Imagenyvideo/fractales/sierpinski.htm

http://www.good-arq.blogspot.com.es/

http://www.iescarlosbousono.com/2011/05/la-espanja-de-nivel-3-esta-en-marcha/

http://www.nndb.com/people/106/000030016/

La trompeta de Torricelli

http://laaventuradelaciencia.blogspot.com.es/2011/10/la-trompeta-de-torricelli.html

http://www.matematicas.cl/paradoja-el-cuerno-de-gabriel-o-la-trompeta-de-torricelli/

EL AUTOR, A FECHA 29 DE JULIO DE 2013,

LUIS DEL CAMPO GUTIÉRREZ