Universidad de Valladolid

Polinomios y resolución de ecuaciones en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Trabajo fin de Máster.

Autor: Elisa Niévares García.

Tutor: Jorge Mozo Fernández.

2012-2013

Índice

Introducción.

El presente trabajo trata sobre polinomios y resolución de ecuaciones, y de qué trato se les da a estos temas en ESO y Bachillerato.

He elegido este tema porque creo que el estudio de los polinomios y la resolución de ecuaciones es uno de los temas más importantes que se tratan en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, puesto que se repite en todos los niveles, y también uno de los que mayores dificultades presenta para los alumnos, que en la mayoría de los casos aprenden a hacer las cosas de manera mecánica sin saber lo que están haciendo. Quizás esto se deba al elevado nivel de abstracción que esta materia exige, o a la falta de motivación de los alumnos hoy en día. Por ello me parece imprescindible profundizar en el tema de los polinomios y la resolución de ecuaciones, saber cómo se ha tratado a lo largo de la historia y cómo se trata en el currículo actual, pensando posibles maneras de mejorarlo.

Esta memoria, aparte de esta introducción, de la bibliografía y las conclusiones finales, se estructura en tres puntos:

- Polinomios y resolución de ecuaciones. En este apartado se reflejan todos los conceptos que se dan en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, a un nivel superior del que se alcanza en estos cursos.
- Historia de los polinomios y resolución de ecuaciones. Cómo ha ido evolucionando el álgebra a lo largo de la historia.
- Tratamiento de estos temas en todos los niveles de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. He realizado unas tablas en las que se ve qué conceptos se explican en cada uno de los niveles educativos, y después se habla de cada uno de esos niveles por separado. Primero se presenta el currículo oficial de cada curso, y después se analizan uno o dos libros de texto de cada nivel, añadiendo los ejemplos con los que se completan las explicaciones.

El trabajo termina con unas conclusiones y unas reflexiones sobre qué falla en el sistema educativo actual, porqué a los alumnos les cuestan tanto los temas de álgebra, y con algunas propuestas de cómo podría mejorarse, propuestas que no han podido ser llevadas al aula para su experimentación. Me hubiera gustado poder llevar al aula alguna de las ideas que tenía para la metodología de estos temas, pero no coincidieron en mi estancia de prácticas en el instituto así que no ha sido posible.

Polinomios y resolución de ecuaciones.

En el mundo hay una amplia variedad de idiomas, como el castellano, el inglés o el francés, pero también hay lenguajes propios de los oficios, como por ejemplo el lenguaje musical. En álgebra se usa el lenguaje algebraico. Este lenguaje algebraico permite, mediante el uso de letras, la generalización y la expresión de propiedades y relaciones. Hoy en día este lenguaje está muy extendido, y la mayoría de las actividades científicas, tecnológicas o económicas lo utilizan.

Polinomios.

Definición: Una *expresión algebraica* en una o más variables es una combinación cualquiera de estas variables y de números, mediante una cantidad finita de operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación o radicación. Dicho de otra manera, es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan variables o incógnitas.

Las expresiones algebraicas nos permiten traducir al lenguaje algebraico expresiones del lenguaje habitual. Hay distintos tipos de expresiones algebraicas, dependiendo del número de sumandos tenemos *monomios* (1 sumando), *binomios* (2 sumandos), *trinomios* (3 sumandos), y más generalmente *polinomios* (varios sumandos).

Definiciones: Un *monomio* es una expresión algebraica formada por el producto de una o varias letras elevadas a un número natural. Al número natural se le llama *coeficiente*, y al conjunto de las letras se le llama *parte literal*. El *grado de una letra* es el exponente al que está elevada. El *grado de un monomio* es la suma de los grados de las letras que lo forman. Decimos que dos monomios son *semejantes* cuando tienen la misma parte literal. Dos monomios son *opuestos* cuando son semejantes y sus coeficientes son números opuestos. Si en un monomio se sustituye cada variable por un número y se efectúan las operaciones correspondientes, se obtiene lo que se conoce como *valor numérico* del monomio para dichos valores de las variables.

Definición: Un *polinomio* sobre un cuerpo K (normalmente será $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es una expresión algebraica finita de sumas, diferencias y productos de x con valores numéricos constantes, es decir, es del tipo:

$$\mathrm{P}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Si en un polinomio hay monomios semejantes, conviene operar, simplificar la expresión, para obtener así el polinomio en su forma reducida.

Definiciones: Los elementos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de un polinomio reciben el nombre de *coeficientes*. El elemento a_0 se llama *término independiente*, y el elemento a_n, tal que $a_m = 0\ \forall m > n$ recibe el nombre de *coeficiente principal*. Llamaremos *grado* de un polinomio al número n, siempre que a_n sea el coeficiente principal del mismo, y lo denotaremos $gr(P(x))$. El *valor numérico* de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la x por a.

Operaciones con polinomios.

Suma

Dados dos monomios $P(x) = ax^n$, $Q(x) = bx^m$, definimos su suma como:

- $P(x) + Q(x) = (a + b)x^n$ si $n = m$.
- $P(x) + Q(x) = ax^n + bx^m$ si $n \neq m$.

Dados dos polinomios $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, suponemos $n \leq m$, definimos su suma como:

$$P(x) + Q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \ldots + b_mx^m.$$

Es decir, se suman los monomios semejantes y se dejan indicados el resto de las operaciones.

La suma de polinomios verifica las propiedades conmutativa y asociativa, también tenemos la existencia de *elemento neutro*, al que llamaremos 0, y de *elemento opuesto*, al que llamaremos –P(x).

Proposición: Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, entonces se verifica la propiedad: $gr(P(x) + Q(x)) \leq máx(gr(P(x)), gr(Q(x)))$.

Resta

Se define la resta de polinomios como la suma del primero con el opuesto del segundo.

Multiplicación

Multiplicación de dos monomios: Dados dos monomios $P(x) = ax^n$, $Q(x) = bx^m$, definimos su producto como:

$$P(x) \cdot Q(x) = abx^{n+m}$$

Proposición: El producto de dos monomios es siempre otro monomio.

Multiplicación de un monomio por un polinomio: Dados un monomio $P(x) = ax^n$ y un polinomio Q(x)= $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, se define su producto como:

$$P(x) \cdot Q(x) = ab_0x^n + ab_1x^{n+1} + \cdots + ab_mx^{n+m}$$

Es decir, multiplicamos el monomio por cada término del polinomio y sumamos los resultados.

Multiplicación de dos polinomios: Dados polinomios P(x)= $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, Q(x)= $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, suponemos $n \leq m$, definimos su multiplicación como:

$$P(x) \cdot Q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + (\sum_{i=0}^{p} a_ib_{p-i})x^p$$

Esto es, se multiplica cada uno de los monomios de uno de ellos por todos los monomios del otro, y después se suman todos los polinomios que se han obtenido de esta manera.

Proposición: El producto de polinomios verifica las propiedades conmutativa y asociativa, y la existencia de elemento neutro, al que llamaremos 1.

Proposición: Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, entonces se verifica la propiedad: $gr(P(x)\cdot\ Q(x)) = gr(P(x)) + gr(Q(x))$.

Proposición: Se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$a(b+c) = ab + ac$$

En ocasiones resulta útil lo que se conoce como sacar factor común en una expresión, esto es, aplicar la propiedad distributiva en sentido inverso:

$$ab + ac = a(b+c)$$

Podemos demostrar que el conjunto de polinomios, al que denotaremos $K[x]$, tiene estructura de anillo conmutativo con elemento unidad. $K[x]$ recibe el nombre de anillo *de polinomios en una indeterminada*.

División Euclídea

Dados dos monomios $P(x) = ax^n$, $Q(x) = bx^m\ , b \neq 0$, definimos su cociente como:

$$P(x){:}\, Q(x) = \frac{a}{b}x^{n-m}$$

Al dividir dos monomios podemos obtener distintos resultados:

- Si $m = n$ obtenemos un número.
- Si $m < n$ obtenemos otro monomio.
- Si $m > n$ obtenemos lo que luego definiremos como fracción algebraica.

Proposición: Dados dos polinomios $P(x), Q(x) \neq 0$, existen dos polinomios únicos $C(x)$ y $R(x)$ con $gr(R(x)) < gr(Q(x))$ tales que:

$$P(x) = C(x)\cdot Q(x) + R(x)$$

Demostración:

Existencia: Razonaremos por inducción sobre el grado de $P(x)$:

- Si $gr(P(x)) = 0$, entonces P es una constante.
    - Si $gr(Q(x)) = 0$, entonces $R = 0$ y C = $\frac{P}{Q}$.
    - Si $gr(Q(x)) > 0$, entonces $C = 0, R = P$.
- Si $gr(P(x)) > 0$, P(x)= $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$:
    - Si $gr(Q(x)) > gr(P(x))$, entonces $C = 0, R = Q$.
    - Si $gr(Q(x)) \leq gr(P(x))$, y Q(x)= $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ con $m \leq n$ y b_m≠0, tomaremos $C_1 = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$, y $P_1(x) = P - C_1Q$, que es un polinomio de grado menor que n. La hipótesis de inducción nos asegura que existen polinomios C' y R, con $gr(R) < gr(Q)$, y tales que:
    $$P - C_1Q = C'Q + R$$

La expresión buscada es $P=(C_1+C')Q+R$.

Unicidad: Supongamos que tenemos dos descomposiciones en las condiciones del enunciado, es decir, tenemos $P=C_1Q+R_1=C_2Q+R_2$, entonces:

$$(C_1-C_2)Q=R_2-R_1$$

Como $gr(R_2-R_1)<gr(Q)$, la única posibilidad es $C_1-C_2=0$.

Además se verifica que $gr(C(x))=gr(P(x))-gr(Q(x))$.

Definición: Decimos que a es una *raíz* del polinomio $P(x)$ si el valor numérico del polinomio para $x=a$ es 0, esto es, $P(a)=0$.

Lema: a es una raíz de $P(x)$ si y sólo si $x-a$ divide a $P(x)$.

Demostración: Si hacemos la división euclídea tal y como la hemos explicado obtenemos: $P(x)=Q(x)(x-a)+r$, si evaluamos esta expresión en $x=a$ obtenemos $P(a)=r$, y $P(a)=0$ si y sólo si r=0, y esto ocurre si y sólo si $(x-a)$ es un factor de P(x).

De este lema deducimos que un polinomio tiene a lo sumo n raíces, contadas cada una con su multiplicidad.

Definición: Diremos que a es una *raíz de P(x) de multiplicidad m* si existe Q(x) con $P(x)=(x-a)^mQ(x)$, y a no es raíz de Q(x).

Lema: a es una raíz de P(x) de multiplicidad m si y sólo si:

$$P(a)=P'(a)=\cdots=P^{(m-1)}(a)=0\,,P^{(m)}(a)\neq 0$$

Demostración: Si $P(x)=(x-a)^mQ(x)$ con Q(a)≠0, si derivamos obtenemos:

$$P'(x)=m(x-a)^{m-1}Q(x)+(x-a)^mQ'(x)=(x-a)^{m-1}\big(mQ(x)+(x-a)Q'(x)\big)=$$
$$=(x-a)^{m-1}Q_1(x)$$

Como $Q_1(a)=mQ(a)\neq 0$, entonces a es raíz de P'(x) de multiplicidad m-1. Por recurrencia se obtiene el lema.

Recíprocamente basta con escribir el polinomio en potencias de (x-a).

Algoritmo de Horner: Se usa para evaluar un polinomio P(x) en un punto a. Este método realiza n productos y n sumas. Se basa en que podemos escribir el polinomio P(x) como:

$$P(x)=a_0+x(a_1+x(a_2+\cdots+x(a_{n-1}+xa_n))).$$

Este algoritmo se explica en algunos niveles de Educación Secundaria, aunque se da de un modo un poco diferente, lo que se conoce como regla de Ruffini.

Regla de Ruffini: la regla de Ruffini facilita la división de un polinomio por un monomio del tipo $x-r$. Permite asimismo localizar las raíces de un polinomio y factorizarlo en binomios de la forma $x - a$ si es coherente, lo que será de gran ayuda a la hora de resolver ecuaciones. El algoritmo es el siguiente:

Partimos de un polinomio P(x) = $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, y lo queremos dividir entre el binomio $Q(x) = x - r$, es decir, buscamos un cociente R(x) = $b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}$ y un resto s. Seguimos los siguientes pasos:

- Se trazan dos líneas a modo de ejes y se escriben los coeficientes de P(x), ordenados y sin omitir los términos nulos. Se escribe la raíz r al lado izquierdo y el primer coeficiente en el renglón inferior a_n:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ r & & & & & \\ \hline & a_n & & & & \\ & = b_{n-1} & & & & \end{array}$$

- Se multiplica a_n por r y se escribe debajo de a_{n-1}:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ r & & b_{n-1}\, r & & & \\ \hline & a_n & & & & \\ & = b_{n-1} & & & & \end{array}$$

- Se suman los dos valores obtenidos en la misma columna:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ r & & b_{n-1}\, r & & & \\ \hline & a_n & a_{n-1} + b_{n-1}\, r & & & \\ & = b_{n-1} & = b_{n-2} & & & \end{array}$$

- Se repite este proceso hasta llegar al término independiente:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ r & & b_{n-1}\, r & \dots & b_1\, r & b_0\, r \\ \hline & a_n & a_{n-1} + b_{n-1}\, r & \dots & a_1 + b_1\, r & a_0 + b_0\, r \\ & = b_{n-1} & = b_{n-2} & \dots & = b_0 & = s \end{array}$$

Los valores b obtenidos son los coeficientes del polinomio resultante R(x), que tiene grado uno menos que P(x). El resto es s.

Teorema del resto: El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x = a$ coincide con el resto de la división $P(x) : (x - a)$.

Demostración: Se deduce de una de las propiedades de la división:

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

En este caso $Q(x) = x - a$, entonces $R(x)$ tiene grado menos que 1, esto es, el resto es una constante r, podemos escribir la fórmula anterior de la siguiente manera:

$$P(x) = C(x) \cdot (x - a) + r$$

Si evaluamos en $x = a$ obtenemos $P(a) = r$.

Fracciones algebraicas.

Sea $K[x]$ el conjunto de los polinomios, vamos a construir un cuerpo $K(x)$ que contendrá al anillo $K[x]$ y que estará formado por las fracciones de elementos de $K[x]$. Tal cuerpo se llama *cuerpo de las fracciones algebraicas*.

Sea $A = K[x] \times (K[x] - \{0\})$, esto es, el conjunto formado por todos los pares ordenadas de elementos de $K[x]$, donde el segundo elemento no puede ser nulo. Intuitivamente cada una de estas parejas representa una fracción de elementos de $K[x]$. Vamos a introducir en este conjunto una relación $\sim$ que resultará ser de equivalencia:

Definición: Sean (x, y) y (x', y') elementos de A.

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow xy' = yx'$$

Proposición: La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en A.

Demostración:

- Reflexividad. Como $xy = yx$, se tiene $(x, y) \sim (x, y)$.
- Simetría. Suponemos $(x, y) \sim (x', y')$, entonces $xy' = yx'$, luego $x'y = y'x$, osea $(x', y') \sim (x, y)$.
- Transitividad. Supongamos que $(x, y) \sim (x', y')$ y $(x', y') \sim (x'', y'')$, entonces se cumple $xy' = yx'$ y $x'y'' = y'x''$, multiplicando estas expresiones término a término obtenemos $xy'x'y'' = yx'y'x''$, o lo que es lo mismo $x'y'xy'' = x'y'yx''$, si cancelamos en ambos miembros $x'y'$ obtenemos $xy'' = yx''$, lo que es equivalente a $(x, y) \sim (x'', y'')$.

Acabamos de ver que $\sim$ divide a A en una colección de clases disjuntas, las clases de equivalencia de $\sim$.

Notación: Sea $K(x) = {}^{A}/_{\sim}$, esto es, el conjunto formado por todas las clases de equivalencia de $\sim$.

Vamos a explicar todo esto de una manera menos abstracta, de manera que pueda ser llevado a un aula de secundaria:

Definiciones: Una *fracción algebraica* es una expresión literal que representa el cociente inexacto de dos monomios o polinomios. Cuando el numerador es múltiplo del denominador diremos que la fracción es *impropia*.

El *valor numérico* de una fracción, para determinados valores de sus letras, es el número que resulta de sustituir las letras por sus valores respectivos y realizar las operaciones indicadas.

Diremos que dos fracciones algebraicas son *equivalentes* si toman los mismos valores numéricos para todos los valores atribuidos a sus letras que no anulan el denominador. O dicho de otra manera, si el producto del denominador de la primera por el denominador de la segunda es igual al producto del numerador de la segunda por el denominador de la primera. Así, si m, n, p y q representan polinomios algebraicos:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$$

Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por uno o más factores comunes a ambos, obteniendo así una fracción equivalente.

Para reducir varias fracciones a común denominador, se sustituye cada fracción por otra equivalente, de modo que todas tengan el mismo denominador. Este será múltiplo de todos los denominadores.

Operaciones con fracciones algebraicas:

Suma y resta: Para sumar y restar procedemos de forma similar que con fracciones de números enteros, reduciendo primero a común denominador, luego se suman o se restan sus numeradores y se divide entre el denominador común. Esto es, dadas dos fracciones algebraicas $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$, donde m, n, p y q representan polinomios, se define su suma como:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

Y se define la resta como la suma de la primera fracción con la opuesta de la segunda.

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{m}{n} + \left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{mq - np}{nq}$$

Proposición: Las fracciones algebraicas forman un grupo abeliano para la operación suma.

Demostración: Si a, b, c, d, m y n son polinomios, se cumplen las siguientes propiedades para la suma de fracciones algebraicas:

- Conmutativa:
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad , \quad \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{cb + da}{db}$$
Como la multiplicación y la suma de polinomios son conmutativas, las dos sumas son iguales.
- Asociativa:
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{m}{n} = \frac{ad + cb}{bd} + \frac{m}{n} = \frac{(ad + cb)n + mbd}{bdn} = \frac{adn + cbn + mdb}{bdn}$$
$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} + \frac{cn + md}{dn} = \frac{adn + (cn + md)b}{bdn} = \frac{adn + cbn + mdb}{bdn}$$
- Existencia de elemento neutro. El 0 es la fracción algebraica neutra para la suma:
$$\frac{m}{n} + 0 = \frac{m}{n} + \frac{0}{n} = \frac{m + 0}{n} = \frac{m}{n}$$
- Elemento simétrico. La fracción algebraica simétrica de $\frac{a}{b}$ para la suma es $-\frac{a}{b}$:
$$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a + (-a)}{b} = \frac{0}{b} = 0$$

Producto: Para multiplicar fracciones algebraicas procedemos igual que con fracciones de números enteros, multiplicando los numeradores y los denominadores, aunque antes de multiplicar si se puede debemos simplificar. Esto es, dadas dos fracciones algebraicas $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$, donde m, n, p y q representan polinomios, se define su producto como:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

Proposición: Las fracciones algebraicas forman un grupo abeliano para la operación producto.

Demostración: Si a, b, c, d, m y n son polinomios, se cumplen las siguientes propiedades para la multiplicación de fracciones algebraicas:

- Conmutativa:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad , \quad \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{ca}{db}$$
Como la multiplicación de polinomios es conmutativa, los dos productos son iguales.
- Asociativa: Como el producto de polinomios es asociativo, también lo será el producto de fracciones algebraicas.
- Existencia de elemento neutro. El 1, conocida como fracción unidad, es la fracción algebraica neutra para el producto:
$$\frac{m}{n} \cdot 1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m}{n}$$
- Elemento simétrico. Si $\frac{a}{b}$ es una fracción algebraica tal que $b \neq 0$, entonces su fracción algebraica simétrica respecto del producto es $\frac{b}{a}$:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$$

Proposición: Entre las operaciones suma y producto se da la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} + \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q}$$

Proposición: Si F es el conjunto de las fracciones algebraicas, entonces (F,+,·) tiene estructura de cuerpo.

Demostración: Ya está deducido, pues hemos visto:

- (F,+) es un grupo abeliano.
- (F,·) es un grupo abeliano.
- · es distributivo respecto a +.

Cociente: Para dividir fracciones algebraicas procedemos igual que con fracciones de números enteros, haciendo el producto cruzado de numeradores y denominadores, esto es, se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda, y se simplifica si se puede. Esto es, definimos el cociente de fracciones algebraicas como el producto de la primera por la inversa de la segunda.

Identidades.

Definición: Una *identidad* es una igualdad algebraica que es cierta para valores cualesquiera de las letras que intervienen.

Identidades notables: Se conocen con ese nombre las tres igualdades siguientes:

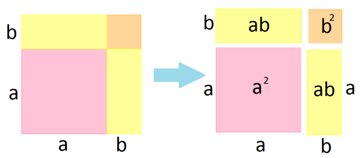
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

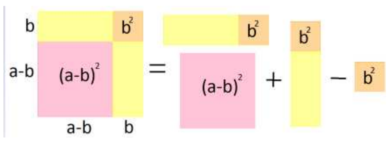
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

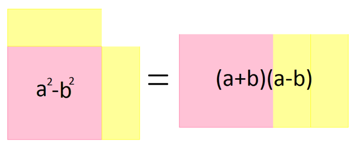
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Justificación gráfica:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ $\qquad$ $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$







$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + b^2 + 2ab$$

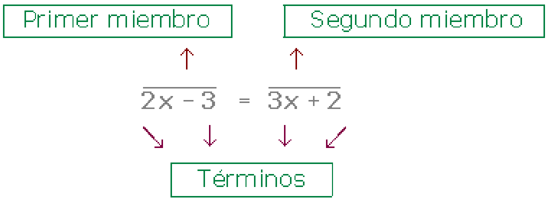
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - b^2$$

Estas identidades servirán para transformar una expresión algebraica en otra más sencilla de manejar. Como transforman sumas en productos, las usaremos para descomponer factorialmente.

Resolución de ecuaciones.

Definición: Llamamos *ecuación algebraica* de grado n a toda expresión de la forma P(x)=0, donde P(x) es un polinomio de grado n con coeficientes reales. Llamamos *miembros* de una ecuación a las expresiones que aparecen a cada lado del signo de igualdad, y llamamos *términos* a los sumandos que forman los miembros.



Las *incógnitas* de la ecuación son las letras cuyos valores buscamos. Aquellos valores, ya sean reales o complejos, que al sustituirlos en x convierten la ecuación algebraica en una igualdad son llamadas *raíces* o *ceros* de la ecuación. El proceso de cálculo de las raíces recibe el nombre de *resolución de la ecuación*.

Definición: Decimos que dos ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen la misma solución.

Ecuaciones de primer grado.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita: Las ecuaciones de primer grado con una incógnita son muy sencillas de resolver, basta con ir transformándolas mediante sucesivos pasos en otras equivalentes más sencillas, para transformar una ecuación en otra equivalente se usan dos recursos: reducir y transponer, a continuación se muestra cómo hacerlo en distintos casos:

- $x + a = b$. Restando a en ambos miembros obtenemos la solución, $x = b - a$.
- $x - a = b$. Sumando a en ambos miembros obtenemos la solución, $x = b + a$.
- $ax = b$. Dividiendo por a en ambos miembro obtenemos la solución, $x = \frac{b}{a}$.
- $\frac{x}{a} = b$. Multiplicando por a en ambos miembros obtenemos la solución, $x = ba$.

Pero no todas las expresiones algebraicas constan de tan solo una variable, podemos encontrarnos expresiones algebraicas de dos, tres, cuatro y tantas incógnitas como precisemos, y estas expresiones algebraicas pueden formar parte de una ecuación.

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas: Estas ecuaciones son de la forma $ax + by = c$. Una *solución* de una ecuación de este tipo es todo par de valores (m, n) que hacen cierta la igualdad.

Proposición: Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Para obtener estas soluciones se despeja una de las incógnitas y se le da valores a la otra. Si las soluciones se interpretan como puntos en el plano, entonces la ecuación se representa mediante una recta y sus soluciones son los puntos de esta.

En general para resolver una ecuación de primer grado debemos seguir estos pasos:

- Quitar paréntesis.
- Quitar denominadores.

- Pasar los términos en x a un miembro y las constantes al otro.
- Simplificar ambos miembros.
- Despejar la x.
- Comprobar la solución.

Ecuaciones de segundo grado.

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita son una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, si b y c son números distintos de cero se dice que la ecuación es *completa, si* $b = 0$ ó $c = 0$ se dice que la ecuación es *incompleta*.

El cálculo de las raíces de un polinomio de segundo grado $x^2 + bx + c$ es muy sencillo, se empieza por completar cuadrados:

$$\left(x^2 + bx + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{b^2}{4} - c$$

$$(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$$

Supondremos que K=$\mathbb{R}$, se pueden dar los siguientes casos:

- $\frac{b^2}{4} - c > 0$. En este caso tendremos dos raíces distintas: $x_i = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$.
- $\frac{b^2}{4} - c = 0$. Hay una única raíz de multiplicidad 2, $x = -\frac{b}{2}$.
- $\frac{b^2}{4} - c < 0$. No hay ninguna raíz real, pero hay dos raíces complejas conjugadas: $x_i = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$.

De aquí podemos extraer un método para resolver ecuaciones de segundo grado:

- Si $a, b, c \neq 0$, entonces las soluciones son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- Si $b = 0,\ c \neq 0$, entonces las soluciones son $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.
- Si $c = 0,\ b \neq 0$, podemos escribir la ecuación como $x(ax + b) = 0$, lo que nos da dos soluciones, $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$.
- Si $b = 0, c = 0$, entonces la única solución es $x = 0$.

Definición: Llamamos *discriminante* de una ecuación de segundo grado a:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dependiendo del signo del discriminante la ecuación toma dos, una o ninguna solución real:

- $\Delta > 0$, entonces hay 2 soluciones.
- $\Delta = 0$, entonces hay 1 solución.
- $\Delta < 0$, entonces no hay soluciones reales.

Ecuaciones de tercer grado.

Consideramos un polinomio de grado 3 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Haciendo el cambio de variable $y = x - \frac{a}{3}$ conseguimos eliminar el término en x^2 del polinomio, tendremos pues que ocuparnos solo de polinomios del tipo $x^3 + bx + c = 0$.

Con el cambio de variable x=u+v obtendremos:

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + bu + bv + c = 0$$

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + b) + c = 0$$

Si obligamos a que $uv = -\frac{b}{3}$, entonces $u^3v^3 = -\frac{b^3}{27}$, y tendremos entonces:

$u^3 + v^3 + c = 0$, y por tanto u^3 y v^3 serán soluciones de $x^2 + cx - \frac{b^3}{27} = 0$, si despejamos x obtenemos:

$$x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}$$

Podemos escribir pues las ecuaciones de la cúbica como:

$$\sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$$

Sabemos que esta ecuación tiene 3 soluciones, y aunque en un principio puede parecer que esta ecuación tiene 9 soluciones distintas, la relación $uv = -\frac{b}{3}$ hace que la segunda raíz cúbica de la expresión queda determinada por la primera.

Ecuaciones de cuarto grado.

Definición: una ecuación es *bicuadrada* es aquella de cuarto grado sin términos de grado impar, es decir, si se puede expresar de la forma:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$, con $a,\ b,\ c$ números reales y $a \neq 0$.

Este tipo de ecuaciones se resuelven fácilmente mediante el cambio de variable $y = x^2$, por tanto $y^2 = x^4$, después basta con resolver la ecuación como una de segundo grado en y. Para cada valor positivo de y habrá dos valores de x: $x = \pm\sqrt{y}$.

Para el caso general consideramos un polinomio de grado 4 con todos los términos, $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Como en el caso anterior, haciendo un cambio de variable conseguimos eliminar el término en x^3 del polinomio, tendremos pues que ocuparnos solo de polinomios del tipo $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, como en el caso de los polinomios de segundo grado completamos cuadrados, y obtenemos:

$$(x^2 + \frac{p}{2})^2 + qx + r - \frac{p^2}{4} = 0$$

$$(x^2+\frac{p}{2}+u)^2=(x^2+\frac{p}{2})^2+2u\left(x^2+\frac{p}{2}\right)+u^2=-r+\frac{p^2}{4}-qx+2ux^2+pu+u^2$$

Buscamos un cuadrado perfecto, como $(\sqrt{2u}x-\frac{q}{2\sqrt{2u}})^2=2ux^2-qx+\frac{q^2}{8u}$, debe ser: $\frac{q^2}{8u}=-r+\frac{p^2}{4}+pu+u^2$, esto es, $8u^3+8pu^2+u(2p^2-8r)-q^2=0$, que es una ecuación de grado 3, que ya sabemos cómo resolver, una vez resuelta nos queda una ecuación de grado 2:

$$x^2+\frac{p}{2}+u=\pm(\sqrt{2u}x-\frac{q}{2\sqrt{2u}})$$

En el caso u=0 tendríamos q=0, y la ecuación original sería bicuadrática.

Fórmulas de Cardano-Vieta: Existe una relación entre las soluciones de un polinomio y sus coeficientes. Si $P(x)=a(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=a(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, tenemos:

$$a_{n-1}=-(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$a_{n-2}=\sum_{i<j}x_ix_j$$

$$\cdots$$

$$a_{n-k}=(-1)^k\textstyle\sum_{i_1<\cdots<i_k}x_{i_1}\cdots x_{i_k}$$

$$\cdots$$

$$a_0=(-1)^nx_1\cdots x_n$$

Teorema fundamental del álgebra: Todo polinomio complejo de grado mayor o igual que 1 tiene alguna raíz compleja.

Este teorema tiene muchas demostraciones diferentes, el primero que intentó demostrarlo fue D'Alembert en 1746, pero esta demostración asumía como cierto otro teorema que no había sido demostrado todavía. Muchos han sido los matemáticos que a lo largo de la historia han intentado demostrar este teorema como Euler, Lagrange o Laplace. La más sencilla se apoya en el teorema de Liouville, pero la que vamos a detallar es otra, que aunque puede parecer más elaborada, en el fondo es más sencilla, pues no se requiere ningún conocimiento de variable compleja para comprenderla.

Demostración: Partimos del polinomio P(z) = $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$, y suponemos $a_n\neq 0$. Vamos a ver que $|P(z)|$ alcanza un mínimo en $\mathbb{C}$.

Sea $R>0$ tal que si $|z|>R$, $|P(z)|>|a_0|$. En el disco cerrado de cerrado $\overline{D}(0;R)$, $|P(z)|$ alcanza un mínimo en un punto z_0, que necesariamente verifica:

$$|P(z_0)|\leq|P(0)|=|a_0|$$

Tomando el polinomio $Q(z) = P(z + z_0)$, podemos suponer que ese mínimo se alcanza en 0. Supongamos que Q no tiene ninguna raíz compleja. En particular $Q(0) \neq 0$. Escribamos:

$$Q(z) = c_0 + cz^j + z^{j+1}R(z)$$

Con $c_0 \neq 0$. Sea $z_1 \in\mathbb{C}$ tal que $z_1^j = -\frac{c_0}{c}$, $z_1 \neq 0$. Sea $\mathcal{E} > 0$ arbitrario. Tenemos:

$$Q(\mathcal{E}z_1) \leq c_0 + c\mathcal{E}^j z_1^j + \mathcal{E}^{j+1}z_1^{j+1}R(\mathcal{E}z_1) = c_0\left(1 - \mathcal{E}^j\right) + \mathcal{E}^{j+1}z_1^{j+1}R(\mathcal{E}z_1)$$

Si $\mathcal{E} > 1$, tenemos:

$$|Q(\mathcal{E}z_1)| = |c_0| \cdot \left(1 - \mathcal{E}^j\right) + \mathcal{E}^{j+1}\left|z_1^{j+1}\right|R(\mathcal{E}z_1) = |c_0| + \mathcal{E}^j(\mathcal{E}\left|z_1^{j+1}\right|M - c_0)$$

Donde M es una cota de $R(\mathcal{E}z_1)$ en $\mathcal{E}\epsilon[0,1]$.

Si $\mathcal{E}$ es un valor suficientemente pequeño, $|Q(\mathcal{E}z_1)| < |c_0|$, lo cual es una contradicción, así que debe ser $c_0 = 0$.

Otros tipos de ecuaciones.

Ecuaciones con fracciones algebraicas: para resolver ecuaciones que contienen fracciones algebraicas eliminamos los denominadores, al igual que con los numéricos, multiplicando por su mínimo común múltiplo y, después, resolvemos la ecuación resultante. En el proceso de multiplicar por expresiones polinómicas, en ocasiones aparecen soluciones falsas, por ello siempre que lo hagamos deberemos comprobar todas las soluciones obtenidas.

Ecuaciones con radicales: las ecuaciones con radicales son aquellas ecuaciones en las que aparece la variable bajo el signo de la raíz cuadrada. Para resolverlas, se aíslan las raíces, una a una en uno de los miembros y se eleva la ecuación al cuadrado. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones falsas que habrá que rechazar, por ello en este tipo de ecuaciones es fundamental comprobar todas las soluciones.

Ecuaciones exponenciales: son aquellas en las que la incógnita está en el exponente. Hay varios métodos para resolver este tipo de ecuaciones, y no todos funcionan en todos los tipos de ecuaciones, esos métodos son los siguientes:

- Aislar en un miembro las expresiones con la x en el exponente, e intentar expresar el segundo miembro como una potencia en la misma base que el primero. Después se igualan los exponentes.
- Tomar logaritmos en ambos miembros.
- Realizar un cambio de variable.

Ecuaciones logarítmicas: son aquellas en las que la incógnita está en una expresión afectada por un logaritmo. Este tipo de ecuaciones se resuelven teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos. Es conveniente comprobar las soluciones sobre la ecuación inicial, teniendo siempre en cuenta que solo existe el logaritmo de números positivos.

Inecuaciones.

Definición: una *inecuación* es una desigualdad que se compone de dos expresiones algebraicas separadas por uno de estos signos: $<, >, \leq, \geq$. Su solución está formada por todos aquellos valores que hacen que la desigualdad numérica sea cierta.

Inecuaciones de primer grado con una incógnita: una inecuación de primer grado con una incógnita se resuelve como si fuera una ecuación, y se determina el intervalo solución mediante tanteo, teniendo en cuenta la desigualdad. Sus soluciones son todos los puntos de un intervalo infinito.

Inecuaciones de segundo grado con una incógnita: una inecuación de segundo grado con una incógnita se resuelve como si fuera una ecuación, y se determinan los intervalos solución mediante tanteo. Las soluciones de estas inecuaciones dependen de la posición de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ respecto al eje X y de que el signo sea $<, >, \leq$ o $\geq$.

Inecuaciones con dos incógnitas: para resolver inecuaciones con dos incógnitas, primero consideramos la inecuación como una ecuación, y representamos en el plano la recta que expresa. Como esta recta divide al plano en dos partes, tomamos un punto de cada una y determinamos la región del plano que es la solución de la inecuación. Las soluciones de estas inecuaciones se expresan en forma de regiones del plano que están delimitadas por una recta.

Sistemas de ecuaciones.

Definición: Un *sistema lineal de ecuaciones* es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales con una o varias incógnitas, que conforman el problema consistente en encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen dichas ecuaciones.

La forma general de un sistema de m ecuaciones algebraicas y n incógnitas es la siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las incógnitas y los números a_{ij}ϵK son los coeficientes del sistema sobre el cuerpo K.

Definición: Decimos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciónes.

Para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas existen varios procedimientos, vamos a describirlos paso a paso:

Método de sustitución. Consiste en despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituirlo en la otra. Este método es especialmente útil cuando una de las incógnitas tiene coeficiente 1 o -1 en alguna de las ecuaciones.

- Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
- Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve esta ecuación.
- El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
- Los dos valores obtenidos de este modo constituyen la solución del sistema.

Método de igualación. Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones resultantes.

- Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- Se igualan las expresiones, lo cual da lugar a una ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve esta ecuación.
- El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
- Los dos valores obtenidos de este modo constituyen la solución del sistema.

Método de reducción. Consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas, pero con distinto signo, para después sumar miembro a miembro las dos ecuaciones para obtener una ecuación con una sola incógnita. Este método es especialmente útil cuando una incógnita tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones o cuando sus coeficientes son uno múltiplo del otro.

- Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.
- Las sumamos, de modo que desaparece una de las incógnitas.
- Se resuelve la ecuación resultante.
- El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
- Los dos valores obtenidos de este modo constituyen la solución del sistema.

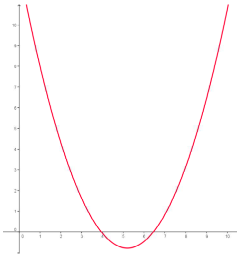
Dominando estos procedimientos y las técnicas para resolver ecuaciones que se han detallado anteriormente se puede afrontar con solvencia una amplísima gama de sistemas de ecuaciones.

Normalmente un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas tiene una única solución, sin embargo esto no ocurre siempre. Atendiendo a su número de soluciones los sistemas pueden clasificarse en:

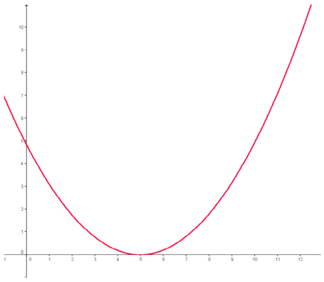
- Compatible: cuando el sistema tiene alguna solución.
    - Si la solución es única el sistema es *compatible determinado*.
    - Si hay más de una solución el sistema es *compatible indeterminado*.
- *Incompatible*: cuando el sistema no tiene solución.

Interpretación geométrica de ecuaciones de grado 2:

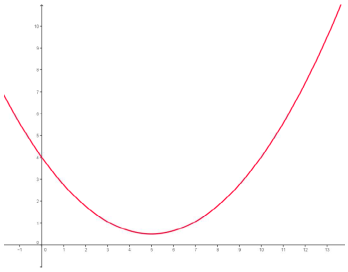
$\Delta > 0$



$\Delta = 0$

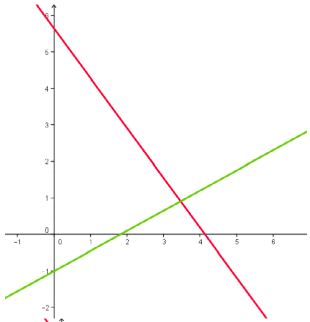


$\Delta < 0$

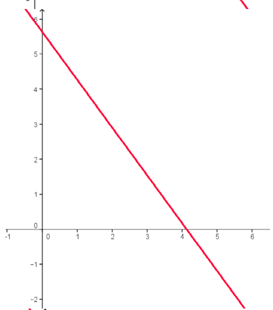


Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas:

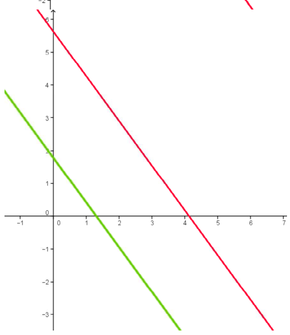
Compatible determinado: son dos rectas que se cortan.



Compatible indeterminado: son dos rectas coincidentes.

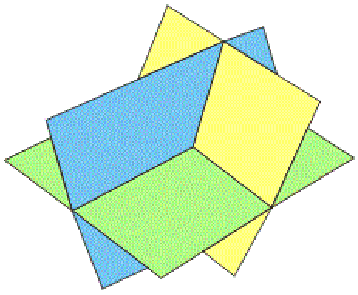


Incompatible: son dos rectas paralelas.

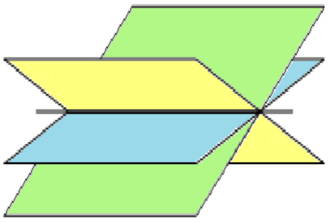


Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

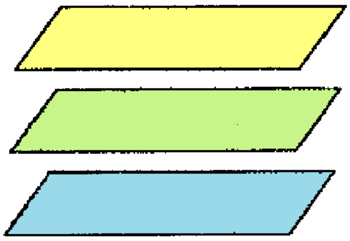
Compatible determinado: los tres planos se cortan en un punto.



Compatible indeterminado: los tres planos se cortan en una recta. Es lo que se conoce como haz de planos.



Incompatible: los tres planos son paralelos.



Método de Gauss: se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en encontrar, mediante las transformaciones adecuadas, otro sistema con la misma solución que el de partida, en el que cada una de las ecuaciones tiene una incógnita menos que la anterior, esto es, transformar el sistema en uno escalonado. Para conseguir un sistema de este tipo se pueden realizar las siguientes transformaciones:

- Sumar o restar a ambos miembros de una ecuación una misma expresión.
- Cambiar el orden de dos ecuaciones.
- Multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número.
- Cambiar una ecuación por la suma de esa ecuación más otra ecuación.

Al finalizar este proceso llegamos a uno de estos tres casos:

Hay tantas ecuaciones válidas como incógnitas. Paso a paso vamos obteniendo un valor numérico para cada incógnita, es por tanto un sistema compatible determinado.

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & - & - & - & \vdots & - \\ 0 & \blacksquare & - & - & \vdots & - \\ 0 & 0 & \blacksquare & - & \vdots & - \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \vdots & - \end{pmatrix}$$

Hay menos ecuaciones válidas que incógnitas. Las incógnitas que están de más se pasan al segundo miembro, con lo que el valor de las demás se dará en función de ellas. El sistema es compatible indeterminado. Su solución general vendrá dada por tantos parámetros como incógnitas hayamos

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & - & - & - & \vdots & - \\ 0 & \blacksquare & - & - & \vdots & - \\ 0 & 0 & \blacksquare & - & \vdots & - \end{pmatrix}$$

pasado al segundo miembro.

La ecuación señalada no se puede cumplir nunca. El sistema es incompatible.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} - & - & - & - & - & \vdots & - \\ - & - & - & - & - & \vdots & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & \vdots & \blacksquare \end{array}\right)$$

Discutir un sistema de ecuaciones dependiente de uno o más parámetros es identificar para qué valores de los parámetros el sistema es compatible, distinguiendo los casos en que es determinado o indeterminado. El método de Gauss es muy útil para discutir sistemas de ecuaciones con un parámetro.

Definición: un *sistema de ecuaciones no lineales* es un conjunto de dos o más ecuaciones donde alguna de ellas no es lineal. Ejemplos de sistemas de ecuaciones no lineales son aquellos que contienen ecuaciones de grado mayor que 1, ecuaciones con fracciones algebraicas o con radicales.

Definición: llamamos *sistema de inecuaciones* a un conjunto de inecuaciones del que se quiere calcular la solución común. Para hallar dicha solución se resuelve por separado cada una de las inecuaciones y luego se eligen las soluciones comunes. Las soluciones de un sistema de inecuaciones lineales pueden formar un intervalo, finito o infinito, o pueden no existir.

Teorema de Rouché: La condición necesaria y suficiente para que tenga solución el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Es que el rango de la matriz de coeficientes, A, coincida con el rango de la matriz ampliada A'.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

Es decir, el sistema tiene solución ⇔ $ran(A) = ran(A')$.

Demostración:

→: Podemos escribir el sistema como una relación lineal entre los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \dots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Se ve claro que si el sistema tiene solución, existen unos números, $x_1, x_2, \dots, x_n$, que permiten poner la columna de los términos independientes como combinación lineal de las columnas de la matriz A. Por tanto, al añadir la columna (c_i) a la matriz A, esta no aumenta su rango. Es decir, si el sistema tiene solución entonces $ran(A) = ran(A')$.

←: El argumento recíproco es similar: si $ran(A) = ran(A')$, es porque la columna (c_i) es combinación lineal de las restantes y, por tanto, existen unos números $x_1, x_2, \dots, x_n$, que multiplicados por los vectores $(a_{i1}), (a_{i2}), \dots, (a_{in})$, dan como resultado el vector (c_i). De modo que esos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ son la solución del sistema.

Corolario: Si el sistema es incompatible, entonces $ran(A') = ran(A) + 1$.

Demostración: Si el sistema es incompatible, sabemos que $ran(A) \neq ran(A')$. Puesto que A' tiene una columna más que A, su rango debe de ser una unidad mayor.

Definición: Diremos que un sistema es *de Cramer*, si $n = m$ y además el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

Regla de Cramer: Si $Ax = b$ es un sistema de ecuaciones. A es la matriz de coeficientes del sistema $x = (x_1, \dots, x_n)$ es el vector columna de las incógnitas y b es el vector columna de los términos independientes. Entonces la solución al sistema se presenta así:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Donde A_j es la matriz resultante de reemplazar la j-ésima columna de A por el vector columna b. Nótese que para que el sistema sea compatible determinado, el determinante de la matriz A debe ser no nulo.

Demostración: Sea el siguiente sistema de Cramer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Escrito de forma matricial sería:

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Luego:

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}}{|A|}$$

$$\cdots$$

$$x_n = \frac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn}}{|A|}$$

Los numeradores de estos cocientes son los determinantes:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Esto es:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

La regla de Cramer sirve para obtener la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas a partir del cálculo de unos determinantes. Sin embargo para sistemas de ecuaciones lineales de más de tres ecuaciones resulta excesivamente costosa.

Resolución de problemas con ecuaciones: Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, puede ser útil seguir estos pasos:

- Identificar los datos conocidos y lo que deseamos conocer. Dar nombre a la incógnita.
- Relacionar mediante una ecuación lo conocido con lo desconocido.
- Resolver la ecuación.
- Interpretar la solución, ajustándola al enunciado.

Historia de los polinomios y la resolución de ecuaciones.

El hecho de que la matemática hoy sea una ciencia en sí misma no debe hacernos olvidar que el pensamiento matemático se ha desarrollado a lo largo de la historia, debido a las necesidades de otras ciencias para explicar los diferentes fenómenos del medio en que nos movemos. Por tanto es importante que los alumnos conozcan la historia de las matemáticas, aunque no sea de forma muy extensa, pues es una manera de que vean su utilidad, de humanizar las matemáticas, de contextualizarlas, de este modo los alumnos pueden ver que las matemáticas no son una invención de nuestra época, si no que han estado presentes en todas las culturas, pues los problemas algebraicos están presentes en todas las antiguas civilizaciones, casi siempre ligados a situaciones cotidianas: repartos, herencias, partición de terrenos, calculo de superficies, etc. También pueden ver que las matemáticas no solo son importantes por su utilidad, a lo largo de la historia han estado siempre muy asociadas al arte y la belleza.

El estudio de las vidas y obras de los grandes matemáticos de la historia puede ser un estímulo, sobre todo para aquellos alumnos que son buenos estudiantes, pero tienen problemas con las matemáticas, pues de esta manera pueden asociar las grandes ideas matemáticas con sus descubridores, este estudio puede hacer que aumenten su deseo por seguir aprendiendo matemáticas.

El comienzo del pensamiento matemático.

Al terminar la última glaciación, los cazadores nómadas de la Edad de Piedra se fueron asentando en los valles fértiles de los grandes ríos: Nilo, Éufrates, Tigris…, y se dedicaron a la agricultura.

Pronto les surgieron problemas que tuvieron que resolver para poder sobrevivir, pues desde la antigüedad encontramos problemas concretos que podemos resolver con ecuaciones de primer y segundo grado: contar los días, las estaciones, saber cuándo tenían que plantar las semillas, pagar tributos, repartir herencias, calcular superficies de terrenos, etc. Este cúmulo de situaciones hizo preciso que se diera nombre a los números y que se contara más allá de las nociones de “uno” y “muchos”.

Al contar, no solo se descubren las relaciones entre los números, como, por ejemplo, que dos y cuatro son seis, sino que también se van estableciendo gradualmente ciertas leyes generales. De este modo los números aparecen, no como entidades separadas e independientes, sino relacionados unos con otros. Y este es el objetivo esencial de la aritmética; de hecho, aritmética significa “arte de calcular”.

Álgebra primitiva o retórica.

En este tipo de álgebra todo se describe con lenguaje ordinario

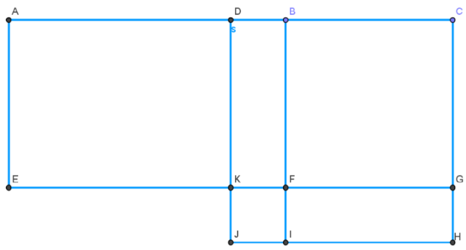
Los babilonios.

El álgebra tal y como lo conocemos hoy en día, con los signos y símbolos que utilizamos actualmente, es bastante moderna, empieza a usarse en el siglo XVI y tiene su completo desarrollo en el XVII, pero si en vez de tener en cuenta los simbolismos usados tenemos en cuenta la resolución de cierto tipo de problemas, entonces el álgebra se remonta a los babilonios y los egipcios, años 2000-1600 a.C, cuando el álgebra y la aritmética eran prácticamente la misma cosa.

En las tablas babilónicas aparecen problemas numéricos expuestos sin ninguna notación simbólica, y la solución se presentaba como una lista de reglas a seguir, y no se daba nunca justificación alguna. Solían usar un lenguaje geométrico, la incógnita x es llamada “el lado”, y a la potencia x^2 la llamaban el cuadrado. Cuando tenían dos incógnitas las llamaban largo y ancho.

Otra prueba de que ya en tiempos del rey Hammurabi (2000 a.C.) los babilonios resolvían ecuaciones de segundo grado. Ellos resolvían problemas como este: Cuál es la longitud de dos segmentos AB y BC, si sabemos que su suma es s y conocemos el área p del rectángulo que forman.

La suposición falsa de que el valor buscado es la mitad de s lleva a la solución:



$AC = s.$

$Área(ABFE) = p.$

$AB = AD + BD = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}.$

$BC = AD - BD = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}.$

Los egipcios.

Hacia el cuarto milenio a.C. nació una gran civilización a orillas del río Nilo: los Egipcios. Gracias a ellos los primitivos textos pictográficos evolucionaron, para dar lugar a una ordenación lineal de símbolos más sencillos, lo que se conoce como sistema de notación jeroglífica.

Se encontró en Egipto un papiro escrito sobre el año 1850 a.C., redactado en escritura hierática, llamado papiro de Ahmés, el cual contiene 87 problemas matemáticos y pone de manifiesto que en esta época ya se resolvían sistemas de ecuaciones. Los problemas son sobre aritmética básica, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica.

Los egipcios llamaron a la incógnita “hau” que significa “montón”, y este es el nombre más antiguo que se conoce para referirse a la incógnita.

Un ejemplo de problema de ecuación lineal de los que están representados en el papiro de Ahmés es el problema 31:

Dice: los 2/3 de una cantidad, su 1/2, su 1/7, y la cantidad, su totalidad asciende a 37. Esto nosotros podemos escribirlo en el lenguaje algebraico habitual como:

$$x\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + 1\right) = 37$$

Ahmés resuelve este problema mediante complicadas operaciones de división, para nosotros hoy en día es mucho más sencillo.

Los antiguos griegos.

En la época de la Grecia clásica, existía un gran predominio de la geometría. Debido a esto y, probablemente, al sistema de numeración utilizado, era difícil que se profundizara en la abstracción propia del álgebra.

Los griegos empezaron a usar el álgebra para expresar ecuaciones y teoremas. Matemáticos destacados de esta época fueron por ejemplo Pitágoras y Euclides, de los que hablaremos más individualmente después. Otra figura central fue la de Platón, el cual se ocupó de crear un entorno académico donde se potenciaron de forma extraordinaria los estudios geométricos. La matemática griega no se mantuvo uniforme a un nivel alto, sino que el glorioso periodo del siglo III a.C. fue seguido por una época de decadencia que quizá mejoró un poco con Ptolomeo, pero que no se recuperó hasta la llamada "Edad de Plata" de la matemática griega, en torno al siglo que va del año 250 al año 350 aproximadamente. A comienzos de este periodo, conocido también como la Edad Alejandrina Tardía, entre los matemáticos griegos, se encontraba el más importante de ellos, Diofanto de Alejandría, del que proviene el primer tratado de álgebra que conocemos.

Euclides.

A Euclides se le conoce como el padre de la geometría, aunque también trabajó en el terreno del álgebra. Fue el sintetizador de todos los conocimientos precedentes, su obra "Los Elementos" se convirtió en canónica y paradigmática, y como tal ha marcado una pauta durante 22 siglos. Los Elementos es un compendio, en lenguaje geométrico, de todos los conocimientos de la matemática elemental, es decir, por una parte la geometría sintética plana y espacial, y por otra parte, una aritmética y un álgebra, ambas con una indumentaria geométrica. Así pues Los Elementos de Euclides son una exposición en orden lógico de los fundamentos de la matemática elemental; y por su valor didáctico y su carácter de síntesis, ha sido utilizado como manual escolar hasta no hace mucho tiempo. La obra de Euclides está formada por trece libros, de los cuales los libros II y V son casi completamente algebraicos; pero a diferencia de nuestra álgebra actual, que es simbólica, el álgebra de Los Elementos es un álgebra geométrica.

Los árabes.

Los árabes empezaron a trabajar en las matemáticas en el siglo VII d.C. en los orígenes de la religión islámica. Podemos distinguir dos etapas en este desarrollo: una parte de herencia griega y oriental durante los siglos VII y VIII. Este desarrollo tuvo lugar gracias al califa Al-Mamun, quien ordenó traducir todas las obras griegas existentes al árabe, y fundó la "Casa de la Sabiduría" en Bagdad, dónde se pudo empezar a investigar en el terreno del álgebra. A partir del siglo IX la cosa cambia, empiezan a crear su propia cultura matemática.

El primer matemático importante de la "Casa de la Sabiduría" de Bagdad fue Al-Jwuarizmi, al que le debemos la palabra "álgebra" que proviene del libro "Al-jarab wa'l muqabalah", con tal nombre designaron los europeos de siglos posteriores a la ciencia que aprendieron en dicho libro. De -Jwuarizmi hablaremos más adelante con detenimiento. Pero él no fue el único algebrista árabe importante, el algebrista Omar Khayyam desarrolló la geometría algebraica y encontró la solución geométrica de la ecuación cúbica. Otro matemático persa, Sharaf Al-Din al-Tusi, encontró la solución numérica y algebraica a diversos casos de ecuaciones cúbicas.

Al-Jwuarizmi.

De todos los matemáticos árabes Al-Jwuarizmi es sin duda el más conocido, su nombre ha dado lugar a la palabra algoritmo. La gran obra de Al-Jwuarizmi es su tratado de aritmética, el original de esta obra se ha perdido, pero lo conocemos a través de cuatro fuentes: en la Universidad de Cambridge hay una copia del siglo XIII de una traducción latina cuyo autor de desconoce, se piensa que no es una traducción fiel, pues tiene errores y añadidos, las otras fuentes son tres libros que se inspiran en el de Al-Jwuarizmi: el Liber algorismi de practica arismetrice de Juan de Sevilla, Liber ysagorarum alchorismi in artem astronomicam a magstro A. compositus, cuyo autor se desconoce, y una obra sobre la aritmética hindú de an-Naswi.

Álgebra sincopada.

Diofanto de Alejandría.

Con Diofanto se abre un nuevo capítulo para el álgebra, fue el primero en usar el álgebra sincopada, utilizando una serie de abreviaturas que aliviaban los procesos, por ejemplo:

$7x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ lo escribía: ss7 c2 x5 M s4 u6

s significa cuadrado, c cubo, x incógnita, M menos y u número.

Poco se sabe con seguridad sobre la vida de Diofanto, se cree que vivió durante el siglo III d.C., solamente se sabe que nació en Alejandría y la edad a la que murió, gracias a su epitafio, redactado en forma de problema, que dice:

“Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”

Para saber a qué edad murió basta con despejar la x en la ecuación:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Según esto Diofanto falleció a la edad de 84 años.

Su gran obra “Arithmetica” comprende, según lo que él mismo escribió en la introducción 13 libros, de los cuales desde el siglo XVI se conocen solo 6, que provienen de un manuscrito griego descubierto en el año 1464, que a su vez es copia de un manuscrito más antiguo. A día de hoy todavía no se sabe dónde están los 7 libros que faltan. Lo más novedoso de la obra de Diofanto es que propone problemas en lugar de enunciar problemas y proposiciones, lo que fue muy novedoso y original en la matemática griega. Resolvió problemas con lo que ahora llamamos ecuaciones algebraicas, aplicando un simbolismo semejante al actual de los polinomios con una indeterminada.

Renacimiento.

Durante el renacimiento el álgebra sincopada mejoró debido a la incorporación de nuevos símbolos: operaciones, coeficientes, potencias, etc.

Álgebra simbólica.

Viète.

Consiste en una simbolización completa, los matemáticos renacentistas se sentían continuadores de los griegos, de modo que el matemático francés François Viète, a finales del siglo XVI, mejoró lo que ya había, de hecho su lenguaje algebraico fue predecesor del actual, por lo que hay quien considera a Viète como el fundador del álgebra moderna. La propuesta de Viète fue utilizar el álgebra para resolver problemas geométricos, a la inversa de lo que se venía haciendo hasta ahora. Viète que era muy rico empezó a publicar por su cuenta la exposición de su teoría matemática, a la que llamó "logística especiosa" o arte del cálculo sobre símbolos. Entre los problemas que Viète aborda, hay que destacar la resolución completa de las ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx = c$ y tercer grado $x^3 + ax = b, a > 0, b > 0$. Propuso los cambios de variable $y = \frac{a}{3x} - x$ y $y = x^3$, que convertían esta ecuación en una de segundo grado.

Descartes.

Descartes en el siglo XVII, acabó de perfeccionar el lenguaje simbólico que comenzó Viète. Actualmente escribimos el álgebra tal y como lo hacía él, a excepción del signo = que él lo escribía como algo parecido a ꝏ, parece que este signo proviene de una deformación de æ, iniciales de aequalis, que significa igual.

La falta de operatividad del álgebra durante muchos siglos obligó a los matemáticos a agudizar su ingenio para obtener y demostrar relaciones algebraicas. Algunos se valieron para ello de figuras geométricas, dando lugar al álgebra geométrica.

Tratamiento en ESO y Bachillerato.

Las matemáticas en el contexto de la Educación Secundaria Obligatoria tienen que desempeñar una doble función: la formativa de capacidades intelectuales y la instrumental.

En el aspecto formativo, la finalidad fundamental de las matemáticas es el desarrollo de la facultad de razonamiento y abstracción. Una solida formación en matemáticas contribuye a reflexionar sobre los distintos aspectos de una situación, a afirmar el espíritu de análisis y a reforzar el poder de síntesis. De esta forma los adolescentes adquieren una estructura de pensamiento que les permite distinguir, de forma lógica y razonada, lo esencial de lo accesorio, las consecuencias de las causas, los medios de los objetivos, etc.

En el aspecto funcional el objetivo de las matemáticas ha sido siempre proporcionar un instrumento eficaz para desenvolverse en la vida cotidiana. Actualmente, en nuestra sociedad la información se presenta cada vez con mayor frecuencia en términos matemáticos, por lo que es necesario en multitud de ocasiones tomar decisiones en los mismos términos. Es por ello que se hace necesaria una formación matemática que facilite la correcta comprensión de la información, potencie el sentido crítico constructivo y facilite la toma de decisiones.

Las destrezas algebraicas se desarrollan con un aumento progresivo en el uso y manejo de símbolos y expresiones desde el primer año de secundaria obligatoria al último, poniendo especial atención en la lectura, la simbolización y el planteamiento que se realiza a partir del enunciado de cada problema. Para la organización de los contenidos de álgebra se ha tenido en cuenta que su estudio resulta, con demasiada frecuencia, difícil a muchos alumnos. La construcción del conocimiento algebraico ha de partir de la representación y transformación de cantidades. La simbolización y la traducción entre lenguajes son fundamentales en todos los cursos.

Los contenidos del currículo se configuran de forma espiral, de manera que en cada curso coexistan nuevos contenidos tratados a modo de introducción, con otros que afiancen y completen los de cursos anteriores, con ampliación del campo de trabajo, del nivel de información y precisión, y a la vez enriquecidos con nuevas relaciones.

Vamos a ver qué conceptos del tema de polinomios se dan en cada nivel educativo:

	1º	2º	3º	4º-A	4º-B	MACSI	MatI	MACSII	MatII
Utilidad álgebra	X	X							
Expresión algebraica	X	X	X						
Valor numérico exp. Alg.	X	X	X	X		X			
Monomios	X	X	X	X					
Coeficiente	X	X	X	X					
Parte literal	X	X	X	X					
Grado monomio	X	X	X	X					
Monomios semejantes	X	X	X	X					
Suma y resta monomios	X	X	X	X					
Producto monomios	X	X	X	X					
Mltplcn monomio polinomio	X	X	X	X					
Extracción factor común	X	X	X	X					
División de monomios	X	X		X	X				
Polinomios		X	X	X		X			
Términos		X	X	X		X			
Grado polinomios		X	X	X		X			
Suma y resta polinomios		X	X	X		X			
Producto polinomio número		X							
Producto polinomios		X	X	X		X			
División polinomios				X	X	X			
Regla de Ruffini					X	X			
Teorema del resto					X	X			
Potencia de un polinomio						X	X		
Binomio de Newton						X	X		
Factorización polinomios				X	X	X	X		
Raíces de un polinomio					X	X	X		
Divisibilidad polinomios					X				
Productos notables		X	X	X					
Fracciones algebraicas	X	X	X		X	X	X		
Simplificación frac. Alg.		X	X		X	X	X		
Fracciones equivalentes					X				
Reducción común denomin.			X		X	X	X		
Suma y resta fraccion Alg.			X		X	X	X		
Producto fracciones algebr.			X		X	X	X		
Cociente fracciones algebr.			X		X	X	X		
Resolución problemas	X	X	X	X	X	X	X		

Vamos a ver qué conceptos del tema de resolución de ecuaciones se dan en cada nivel educativo:

	1º	2º	3º	4º-A	4º-B	MACSI	MatI	MACSII	MatII
Utilidad ecuaciones	X	X	X						
Ecuación	X	X	X	X					
Identidad			X						
Incógnita	X	X	X	X					
Soluciones	X	X	X	X					
Miembros	X	X							
Términos	X	X							
Grado ecuación	X	X							
Ecuaciones equivalentes	X	X	X						X
Transformacioes equiv.			X						X
Resolver ecuación	X	X	X	X					
Ecuaciones grado 1	X	X	X	X				X	X
Ecuaciones denominadores	X	X	X	X	X	X	X		
Ecuaciones con radicales			X	X	X	X	X		
Ecuaciones exponenciales			X				X		
Ecuaciones logarítmicas							X		
Ecuaciones factorizadas			X	X	X	X	X		
Ecuación grado 2		X	X	X	X	X	X		
Discriminante			X			X	X		
Ecuación gr 2 incompleta		X	X	X	X	X	X		
Ecuación grado 2 completa		X	X	X	X	X	X		
Ecuaciones bicuadradas					X	X	X		
Ecuac grado 1, 2 incógnitas		X	X	X					
Representación gráfica		X	X	X					
Inecuaciones grado 1				X	X	X	X		
Repre. grafica inecuaciones					X				
Inecuación grado 2, 1 incóg						X	X		
Inecuaciones 2 incógnitas						X			
Sistemas de ecuaciones		X	X	X	X	X	X	X	X
Interpretación gráfica									X
Sistemas equivalentes			X						X
Sistemas no lineales				X	X	X			
Sustituc. Igualac. Reducc.		X	X	X	X	X			
CompDet, compIndet, inco.				X		X	X	X	X
Sistemas escalonados						X	X	X	X
Método de Gauss						X	X	X	X
Discusión de sistemas								X	X
Expresión matricial sistema								X	X
Teorema de Rouché								X	X
Regla de Cramer								X	X
Sistemas homogéneos								X	X
Sistemas con parámetros								X	X
Sistemas de inecuaciones				X	X	X			
Resolución problemas	X	X	X	X	X	X	X	X	X

1ºESO.

El currículo oficial dado en el BOE en el Real Decreto 1631 de 5 de Enero de 2007 y el BOCyL en el Decreto 52/2007 por el que se establece el currículo de la ESO en Castilla y León dice que los contenidos de estos temas para el curso de 1ºESO deben ser:

- Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa.
- Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.
- Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.
- Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones en la vida cotidiana.

Pasaremos ahora a ver cómo se tratan estos conceptos en los libros de texto.

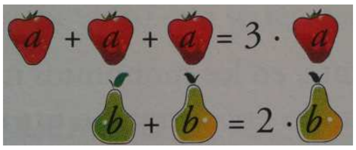
En el primer curso de ESO no se le suele dedicar a estos temas más de dos semanas, pues de los 13 temas que contiene el currículo de 1ºESO solamente uno está dedicado al álgebra.

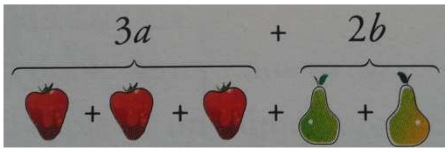
Todos los conceptos que se van a impartir en este tema son nuevos para los alumnos, y además exigen un grado de abstracción al que los alumnos no están acostumbrados, por esta razón se introducen los conceptos poco a poco, y siempre acompañados de múltiples ejemplos. Tanto en este tema como en todos los demás es importante, sobre todo este primer año de instituto, enseñar a los alumnos hábitos de trabajo, deben entender lo importante que es atender a las explicaciones del profesor en clase, trabajar en los ejercicios que se propongan, realizar los cálculos mentalmente, aprender a usar la calculadora para comprobar que los cálculos que se han hecho estén bien, tener el cuaderno siempre al día y lo más ordenado posible.

Siempre se deberían empezar los temas con una pequeña introducción histórica, para que los alumnos vean la importancia de las diferentes culturas, y es importante que se conecten los nuevos conocimientos que se van a exponer con los que los alumnos ya tienen.

Lo primero que se intenta con los alumnos es que vean la utilidad del lenguaje algebraico. Se empieza por dar unas “claves” para codificar números, para expresar un número que nos es desconocido, cómo puede ser usado el álgebra para hacer generalizaciones o para expresar propiedades y como se codifican enunciados.

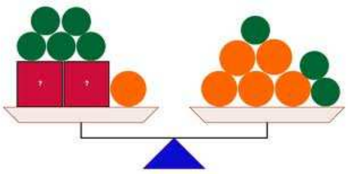
Después de esa introducción se explica el concepto de expresión algebraica, por ejemplo para referirnos al doble de un número a escribimos $2a$, se explica qué entendemos por valor numérico de una expresión algebraica. Se introducen las expresiones algebraicas más básicas: los monomios como $-5x$, y se da una pequeña introducción a las fracciones algebraicas. Se explican los diferentes elementos que tiene un monomio: coeficiente, parte literal y grado. Una vez que han sido introducidos los monomios se les explica a los alumnos que se puede operar con ellos, y se les enseñan los distintos tipos de operaciones: suma, resta, producto y cociente, para que los alumnos entiendan bien la suma y la resta se les ponen ejemplos de cosas de la vida cotidiana que no pueden sumarse juntas, al igual que dos monomios no semejantes:





Se explican la multiplicación poco a poco, primero vemos multiplicación de monomios $(2a) \cdot (3b) = 6ab$, después multiplicación de un monomio por una suma: $2 \cdot (a + 3b)$ y se enseña cómo sacar factor común. Después se da la división de monomios, $(2x) : (6x)$ y se diferencian los distintos resultados que se pueden obtener al hacer el cociente de dos monomios. También se les enseña a los alumnos como reducir una expresión algebraica sencilla.

Algo importante en este nivel es que los alumnos aprendan a resolver problemas sencillos usando ecuaciones, y una vez que ya se sabe operar con monomios ya están preparados para ello. Se les explica a los alumnos el concepto de ecuación, y sus elementos: miembros, términos, incógnitas y soluciones. Para que los alumnos entiendan el concepto de ecuación se les dice que son como balanzas equilibradas.



Se enseña a los alumnos el tipo de ecuación más sencilla: ecuaciones de primer grado con una incógnita, y se les explica el concepto de ecuación equivalente. Se enseña a los alumnos a resolver ecuaciones sencillas usando únicamente el sentido común, de esta manera se pone de manifiesto la importancia de usar la lógica ante cualquier situación tanto académica como de la vida real. Se va explicando cómo resolver ecuaciones de distintos tipos paso a paso, primero las del tipo $x + a = b$, después $x - a = b$, $a \cdot x = b$ y por último $^{x}/_{a} = b$. Hay que intentar siempre contextualizar los problemas con elementos de la vida cotidiana, para que los alumnos vean la aplicabilidad en su vida diaria de lo que se les está explicando.

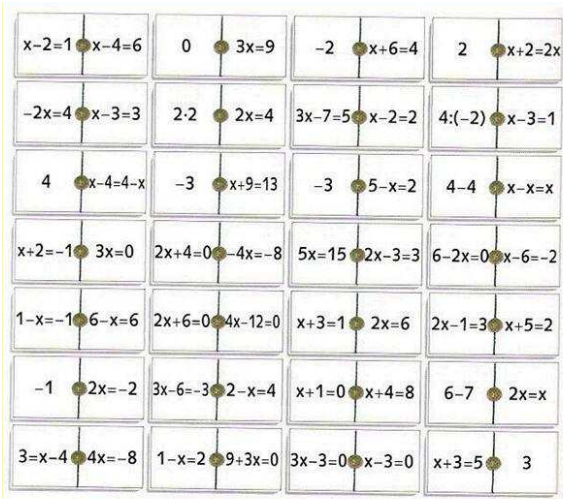
Por último se explican las técnicas básicas para la resolución de ecuaciones de primer grado sencillas: reducción y transposición. Hay que insistir mucho en este nivel en la importancia de leer el enunciado tantas veces como sea necesario hasta que tengan claro qué es lo que se les pregunta.

Puede resultar interesante dar a los alumnos algunas pautas para la resolución de problemas, que les servirá tanto para este curso como para todos los siguientes:

- Leer el enunciado por partes y tantas veces como sea necesario.
- Apuntar y ordenar todos los datos que se dan.
- Identificar la incógnita.

- Traducir el enunciado dado al lenguaje algebraico.
- Resolver paso a paso la ecuación.
- Dar la solución a la ecuación, en las unidades en las que se precise (euros, años, metros, etc.).
- Observar si la solución obtenida es razonable.

Se puede usar en este nivel algún juego que ayude a fijar los conocimientos, existen multitud de actividades sobre este tema, como por ejemplo un dominó de ecuaciones como el de la imagen siguiente, que se puede fabricar en clase:



2ºESO.

El currículo oficial dado en el BOE en el Real Decreto 1631 de 5 de Enero de 2007 y el BOCyL en el Decreto 52/2007 por el que se establece el currículo de la ESO en Castilla y León dice que los contenidos de estos temas para el curso de 2ºESO deben ser:

- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y expresar relaciones.
- Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.
- Binomios de primer grado: suma, resta y producto por un número.
- Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Resolución de ecuaciones de primer grado.
- Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Interpretación de las soluciones.

Pasaremos ahora a ver cómo se tratan estos conceptos en los libros de texto.

En 2ºESO se le suele dedicar un mes y medio a estos temas. Dos semanas para polinomios y un mes para resolución de ecuaciones. En este nivel es importante introducir los contenidos gradualmente, de manera que hasta que un concepto no esté suficientemente asimilado no debe de explicarse el siguiente, conviene resolver numerosos ejercicios de cada tipo para ayudar a su comprensión. También hay que fijar hábitos de trabajo: atender al profesor, trabajar en clase, hacer los ejercicios que se indican, tener el cuaderno al día y bien presentado. Puede resultar interesante proyectar algún vídeo relacionado con el tema, como por ejemplo el vídeo “ecuaciones y fórmulas” de la colección Ojo matemático.

Polinomios.

Se comienza el tema con un repaso del lenguaje algebraico, les recuerda a los alumnos para qué sirve el álgebra y la utilidad de utilizar letras en lugar de números para por ejemplo expresar las propiedades de las operaciones aritméticas, para generalizar la evolución de series numéricas, para expresar la relación entre variables relativas a distintas magnitudes, para manejar números de valor indeterminado y sus operaciones, para expresar relaciones que facilitan la resolución de problemas, etc. También se traducen enunciados del lenguaje natural al lenguaje algebraico y se interpretan expresiones dadas en lenguaje algebraico.

Después se da la definición de expresión algebraica, y se identifican y estudian de los distintos tipos de expresiones algebraicas, utilización de la nomenclatura relativa a ellas. Se comienza por la más sencilla de ellas, el monomio, y se aprende a distinguir sus elementos: coeficiente y parte literal, se hace con ejemplos muy sencillos como $3a$. También se dice a qué llamamos grado, valor numérico y monomios semejantes muy sencillos, como $3a$ y $-2a$. Después se pasa a las operaciones con monomios, se comienza con la suma, y después se explican la multiplicación y la división. Es importante insistir en que cuando sumamos dos monomios semejantes solo se suman los coeficientes, y que cuando multiplicamos dos monomios se multiplican tanto los coeficientes como la parte literal. Se hacen ejemplos sencillos de cada una de las operaciones:

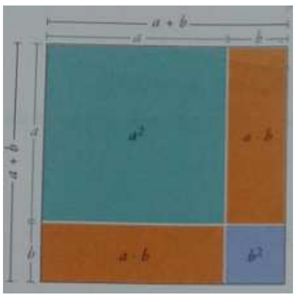
Suma	Producto	División
$5a + 2a = 7a$	$(3a) \cdot (2a) = 6a^2$	$(2a^2b) : (3a^2b) = 2/3$

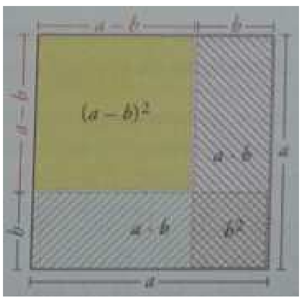
Después se explica qué es un binomio, un trinomio y un polinomio, los alumnos deben ver que la etimología de estas palabras está ya en su significado, y deben conocer los elementos de los polinomios, su nomenclatura, grado y valor numérico.

$$\left.\begin{array}{l} x + y \rightarrow \text{binomio} \\ x^2 - 3x + 1 \rightarrow \text{trinomio} \\ 5x^4 - 3x^3 + 2x - 1 \end{array}\right\} \text{Polinomios}$$

Hay que repasar los conocimientos sobre la propiedad distributiva antes de comenzar con las operaciones con polinomios, pues si no están perfectamente asimilados no podremos avanzar en el conocimiento del álgebra. Las operaciones con polinomios que se ven en este nivel son: opuesto de un polinomio, como ejemplo se pone que el opuesto de $A = 7x^3 - 5x + 8$ es $A = -7x^3 + 5x - 8$, suma y resta $A = 2x^3 - 3x^2 + 6$, $B = x^2 - 5x + 4$, se calcula $A + B$ y $A - B$, el producto de polinomios se hace paso a paso, primero el producto de un polinomio por un número $(x^3 - 4x^2 + 5x - 1) \cdot 2$, después el producto de un polinomio por un monomio $(x^3 - 4x^2 + 5x - 1) \cdot (-3x)$ y finalmente el producto de dos polinomios $(x^3 - 4x^2 + 5x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 2)$. Extracción de factor común, simplificación de expresiones algebraicas con paréntesis y operaciones combinadas.

Productos notables: los alumnos deben adquirir una automatización de las fórmulas relativas a los productos notables, saber sacar factor común, y usar los productos notables en la descomposición factorial y en la simplificación de fracciones algebraicas. Se dan las tres fórmulas, cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia y suma por diferencia, se dan ejemplos de las tres pero solo las dos primeras se justifican gráficamente:





Los alumnos tienen una buena edad para descubrir el aprendizaje entre iguales: trabajar en pequeño grupo las operaciones con expresiones algebraicas, con el recurso de los conocimientos previos, antes de abordar su aprendizaje reglado. Trabajar en pequeño grupo la simplificación de fracciones algebraicas con el auxilio de los productos notables y la extracción de factor común.

Se les puede proponer a los alumnos que busquen en la prensa de la semana alguna expresión numérica que incluya los términos "más" o "menos", por ejemplo, "cinco veces más que", o una expresión numérica que incluya "entre los dos", o un número referido como "hace … años", y que traduzcan todas esas expresiones a expresiones algebraicas.

Resolución de ecuaciones.

Se comienza esta parte recordando el concepto de ecuación, también se dice para qué sirven las ecuaciones y que entendemos por resolver una ecuación, y se dedican algunos ejercicios a repasar lo que ya se sabe, pues hay que asegurar los mecanismos básicos para la resolución de ecuaciones mediante la práctica reiterada, así como enseñar a los alumnos a reducir expresiones algebraicas como medio para facilitar la resolución de ecuaciones, ya que así se simplifican mucho las cosas. Después se describen los elementos de una ecuación: términos, miembros, incógnitas, soluciones, grado y ecuaciones equivalentes.

Después se recuerda cómo resolver ecuaciones inmediatas mediante la transposición de términos en una ecuación en los casos $x + a = b$, $x - a = b$, $a \cdot x = b$ y $\frac{x}{a} = b$. Se muestra un ejemplo de cada tipo.

Después de numerosos ejemplos de ecuaciones sencillas se introduce un tipo de ecuación algo más complicada, las ecuaciones con denominadores $\frac{5x}{6} - 1 = \frac{x}{3} - \frac{3}{4}$, se explica qué se debe hacer para eliminar los denominadores.

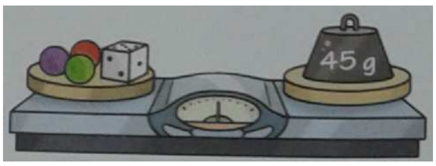
Después se dan unas pautas para resolver las ecuaciones vistas hasta el momento:

- Quitar paréntesis.
- Quitar denominadores.
- Despejar la incógnita.

Después se practica la resolución de problemas algebraicos mediante ecuaciones. Son problemas sencillos, que se traducen y se resuelven sin problema, como por ejemplo: "Al sumar la tercera parte de un número con su mitad, se obtiene 20, ¿de qué número se trata?".

En este curso se introduce el concepto de ecuación de segundo grado, se dice cómo identificarlas, se habla de que una ecuación de segundo grado normalmente tiene dos soluciones, y se explica cómo resolver la ecuación en los casos $x^2 = k$, $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$. Se da a continuación la formula general para resolver una ecuación de segundo grado, se indica que esa fórmula puede deducirse mediante algunos cálculos, pero no se dan, reducción de ecuaciones de segundo grado a la forma general.

Para hablar de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se pone como ejemplo:



Tenemos una balanza en equilibrio, y desconocemos el peso de la pelota (x) y del dado (y), podemos escribir esto como $3x + y = 45$, con este ejemplo se deduce que una ecuación lineal de este tipo tiene infinitas soluciones, se explica cómo se puede representar gráficamente la solución mediante la construcción de la tabla de valores correspondiente a las soluciones de la ecuación lineal, obteniendo así la recta asociada a la ecuación lineal.

Se explica el concepto de sistema de ecuaciones lineales, y se pone un ejemplo sencillo:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

Se explica cómo resolver este sistema, y se dice que la solución del sistema coincide con el punto de corte de las rectas que representan esas ecuaciones. Se ve que puede haber sistemas con infinitas soluciones o sistemas indeterminados y sistemas incompatibles o sin solución.

Para finalizar el tema se dan métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales: el método gráfico que ya se ha explicado, y se explican tres métodos nuevos, el método de sustitución, el de reducción y el de igualación. Se resuelve como ejemplo el mismo sistema con los tres métodos:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Se ven finalmente aplicaciones de todo esto, en la resolución de problemas con la ayuda de los sistemas de ecuaciones, son problemas de este tipo: “Pepa tiene 5 años más que su hermano Enrique, y entre los dos suman 21, ¿cuál es la edad de cada uno?”. Aunque estos problemas pueden resolverse usando una sola incógnita, la idea es que los alumnos se vayan acostumbrando al uso de dos.

3ºESO.

El currículo oficial dado en el BOE en el Real Decreto 1631 de 5 de Enero de 2007 y el BOCyL en el Decreto 52/2007 por el que se establece el currículo de la ESO en Castilla y León dice que los contenidos de estos temas para el curso de 3ºESO deben ser:

- Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.
- Polinomios. Valor numérico. Operaciones elementales con polinomios. Identidades notables. Ceros de un polinomio.
- Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado. Soluciones exactas y aproximaciones decimales. Propiedades de las raíces.
- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación crítica de las soluciones.

Pasaremos ahora a ver cómo se tratan estos conceptos en los libros de texto.

En este nivel se le dedican dos semanas al tema de polinomios, y mes y medio para la resolución de ecuaciones. Comienza un nuevo ciclo para los alumnos, conviene repasar y asentar los contenidos y los procedimientos de álgebra que se dieron en el primer ciclo. Es importante fomentar el cálculo mental, para ello se les pueden proponer a los alumnos ejercicios sencillos de cosas que controlen, incluso se les pueden mandar cosas que hayan visto en cursos anteriores, se les pueden proponer a los alumnos por ejemplo ejercicios de este tipo:

Polinomios:

- Simplifica: $\frac{x^2y^3z^2}{x^7yz^4}$
- Suma los polinomios p(x) y q(x):

  p(x)=$x^6+3x^5-x^4+x-1$; q(x)=$7x^6+x^4-2x+1$
- Multiplica los polinomios r(x) y s(x):

  r(x)=$3x^5-x^3-2x^2+1$; s(x)=$4x^2$

Ecuaciones de primer y Segundo grado:

Resuelve las siguientes Ecuaciones:

- 16x=8
- 4x-2=3x-3
- $\frac{x}{2}+3x-6=\frac{5}{2}$
- x^2-16=0
- x^2-2x-3=0

Sistemas de Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

Resolver los sistemas:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=10 \\ x+3y=18 \end{cases}$$

Resuelve el siguiente problema: La edad de mi madre dentro de 2 años será el doble que la de mi hermano, que ahora tiene 20 años.

(x+2)=2(y+2) y=20.

También hay que acostumbrar a los alumnos a trabajar con la calculadora, pues en su vida cotidiana la van a tener siempre a mano, y conviene que sepan usarla lo más correctamente posible.

Polinomios.

Se comienza el tema con una introducción al lenguaje algebraico, hay que trabajar la relación de las expresiones algebraicas con situaciones concretas, y viceversa, y dedicarle el tiempo suficiente hasta que los alumnos asimilen esa doble relación. También se estudian los distintos tipos de expresiones algebraicas: monomios, polinomios, fracciones algebraicas, ecuaciones e identidades. Se practica traduciendo expresiones sencillas del tipo “El triple de un número menos cuatro unidades” al lenguaje algebraico.

Se da la definición de monomio y el vocabulario que acompaña a este término: coeficiente, grado y valor numérico, se explica que los números son monomios de grado cero, se da el concepto de monomios semejantes y se dice como hay que realizar las operaciones con monomios: suma, resta y producto. Se ponen varios ejemplos de cada una:

Suma	Resta	Producto
$7x^5+11x^5=18x^5$	$3abx^2-8abx^2=-5abx^2$	$(3x^2ab)\cdot(5xac)=15x^3a^2bc$

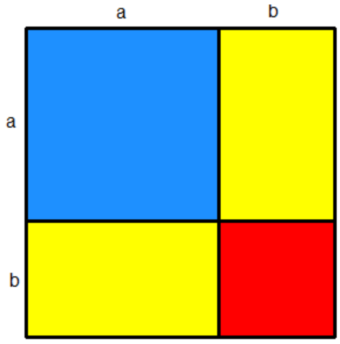
Se da después la definición de polinomio, así como de los términos asociados a este concepto (término, grado, valor numérico y raíz), se explica después cómo se suman y restan polinomios y se explica sumando y restando los polinomios:

$$A=6x^2-4x+1\ ,\ B=x^3+2x^2-11$$

Después se dice cómo se hace el producto de un monomio por un polinomio $(3x^2)\cdot(x^3-2x^2-1)$, producto de polinomios $(5x^3-2x^2-1)\cdot(6x-3)$, sacar factor común $3xy+6x^2z+9xyz$ y aplicaciones.

Se da la definición de fracción algebraica, y para ayudar a comprenderlas se explica su similitud con las fracciones numéricas, se explica cómo simplificarlas mediante el ejemplo $\frac{3x(x+1)^2}{6x^2(x+1)}$ y cómo reducir fracciones algebraicas sencillas a común denominador, con las fracciones $\frac{3}{x}$ y $\frac{5}{x-2}$, se explica después cómo se suman y se restan este tipo de fracciones $\frac{3}{x}+\frac{5}{x-2}$, cómo se multiplican $\frac{2x}{x-3}\cdot\frac{5x+1}{x^2}$ y como se dividen en casos sencillos $\frac{3}{x}:\frac{5}{x+2}$.

Se explica, mediante el ejemplo $2x+5x=7x$, qué es una identidad, como igualdad algebraica cierta para valores cualesquiera de las letras que intervienen, también se explica la distinción entre identidades y ecuaciones, identificación de unas y otras, se exponen a continuación las tres identidades notables más básicas: cuadrado de una suma $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, cuadrado de una diferencia $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ y suma por diferencia $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$, del cuadrado de una diferencia y de la suma por diferencia no se da ninguna justificación, si se da una justificación gráfica de la fórmula del cuadrado de una suma:



Se hacen ejemplos en los que se usan las igualdades notables, viendo así la utilidad de las identidades para transformar expresiones algebraicas en otras más sencillas, más cómodas de manejar, para descomponer factorialmente, transformando sumas en productos, creando así «identidades ventajosas».

Resolución de ecuaciones.

Hay que introducir los conceptos de forma pausada y siguiendo una secuencia de actividades para su mejor asimilación.

Comienza el tema con el concepto de ecuación, qué es una solución de una ecuación, qué tipos de ecuaciones hay (polinómicas, con radicales, con la x en el denominador y con la x en el exponente) y cómo comprobar si un número es o no solución de una ecuación. Antes de empezar con los métodos algorítmicos de resolución, se propone hacerlo por tanteo con alguna ecuación sencilla, como $x^x=3125$. Es importante hacer hincapié en el distinto tratamiento del signo = en aritmética y en álgebra, de forma que los alumnos asimilen las transformaciones que nos permiten pasar de una ecuación a otra equivalente.

Como los alumnos ya conocen técnicas de resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, hay que determinar el nivel exacto de competencia, para poder partir a partir de ese punto. Los contenidos de la unidad son los siguientes:

Se da la definición de ecuación de primer grado, y se da la fórmula para resolverlas, pero no se justifica de dónde sale, se habla de un tipo de ecuaciones anómalas, que aparentemente son de primer grado, pero no lo son, porque o no tienen solución o tienen infinitas. Después se da la definición de ecuaciones equivalentes, y se dice cuáles son las transformaciones que conservan la equivalencia con reglas prácticas más fáciles de memorizar:

Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la igualdad.	$\Rightarrow$	Lo que está sumando en un miembro pasa restando al otro miembro, y viceversa.
Multiplicar o dividir los dos miembros por el mismo número distinto de cero.	$\Rightarrow$	Lo que está multiplicando a todo lo demás de un miembro pasa dividiendo al otro, y viceversa.

Aunque en el curso anterior ya se explican técnicas de resolución de ecuaciones de primer grado, en este curso se repite, subiendo un poco el nivel de los ejemplos. Se dan unos pasos para que sirvan de pautas a la hora de resolver ecuaciones de este tipo:

- Quitar denominadores.
- Quitar paréntesis.
- Pasar los términos en x a un miembro y los números al otro.
- Simplificar cada miembro.
- Despejar la x.
- Comprobar la solución.

Después se pasa a estudiar ecuaciones de segundo grado, se dice de qué tipo son y se da la fórmula para resolverlas, que aunque no se dice de donde sale si que se habla de que hay un proceso para deducirla. Después se habla del discriminante, y de la relación que tiene con el número de soluciones de la ecuación, se practica con un ejemplo de cada tipo:

Dos soluciones	Una solución	Sin solución
$x^2 - 6x + 5 = 0$	$4x^2 + 4x + 1 = 0$	$3x^2 + 2x + 7 = 0$

Se habla después de ecuaciones de segundo grado incompletas, se dice qué fórmula hay que usar en esos casos y se explica de dónde sale dicha fórmula, y se hace algún ejemplo sencillo de ecuación incompleta, como $2x^2 - 98 = 0$, a continuación se dan unas pautas para resolver ecuaciones de segundo grado, y se hace un ejemplo un poco más complicado, como $\frac{x^2+3}{6} + \frac{x^2-7}{4} = \frac{(x+4)^2}{2} - \frac{1-9x}{12}$. Hay que intentar que los alumnos asimilen las reglas para resolver ecuaciones de segundo grado, pero evitando el aprendizaje no razonado de automatismos, pues conduce a errores frecuentes.

Se dice después qué es una ecuación lineal con dos incógnitas y cómo son sus soluciones. Se debe trabajar y afianzar el sistema de representación de puntos en el plano cartesiano, pues su dominio es fundamental para luego representar gráficamente las ecuaciones lineales con dos incógnitas, cosa que ya empieza a hacerse en este curso, por tanto hay que trabajar la representación gráfica y la obtención de soluciones. Se representa como ejemplo alguna ecuación sencilla, como $2x - 3y = 3$.

Se explica qué se entiende por resolver un sistema, se ve gráficamente qué es resolver un sistema y se dan métodos de resolución de sistemas, se afianza todo el conocimiento mediante ejemplos como este:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 15 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Se ve cómo pueden representarse mediante rectas las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas, se da el concepto de sistemas equivalentes, se ve que aunque un sistema de este tipo normalmente tiene una única solución no siempre es así se ve que puede haber sistemas sin solución o sistemas con infinitas soluciones, esto se ve mediante la relación que existe entre un par de rectas y un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Sistema sin solución	Sistema con infinitas soluciones
$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$

Hay que afianzar, con abundante práctica, el conocimiento sobre los distintos métodos para resolver sistemas de ecuaciones, sustitución, igualación y reducción, de manera que los estudiantes lleguen a decidir por sí mismos cuál es el más apropiado en cada caso (se les dan unas pautas para saber cuándo es más ventajoso el uso de uno o de otro), y deben aprender la utilización de las técnicas de resolución de ecuaciones en la preparación de sistemas con complicaciones algebraicas. Los alumnos tienen que asimilar estos métodos evitando el aprendizaje no razonado de automatismos, pues puede conducir a errores.

En la resolución de problemas mediante ecuaciones hay que insistir en la importancia de leer varias veces el enunciado de los problemas, y hay que enseñar a usar la lógica antes de pasar a resolverlos, para que los alumnos aprendan a resolver un tipo de problemas determinado es conveniente resolver en clase algunos problemas del mismo tipo. Hay que intentar siempre que se pueda contextualizar los problemas, para que los alumnos los vean como algo real de la vida cotidiana. Se les presentan a los alumnos ejemplos como estos: “En un triángulo rectángulo un cateto mide 2cm menos que la hipotenusa y 14cm más que el otro cateto. Calcular la longitud de los tres lados”. “Dos estaciones A y B distan 255km. Un tren sale de A hacia B a una velocidad constante de 60km/h. Simultáneamente sale de B hacia A otro tren a 110km/h. Calcular el tiempo que tardan en cruzarse y la distancia que ha recorrido cada uno hasta ese instante”. Puede resultar útil fijar una metodología de resolución de problemas:

- Leer el enunciado por partes y tantas veces como sea necesario.
- Apuntar y ordenar todos los datos que se dan.
- Identificar la incógnita.
- Traducir el enunciado dado al lenguaje algebraico.
- Resolver paso a paso la ecuación.
- Dar la solución a la ecuación, en las unidades en las que se pida.

Es importante también fijar hábitos de trabajo, atender a las explicaciones del profesor, trabajar en clase, hacer los ejercicios que se indiquen, realizar los cálculos mentalmente, mediante operaciones aritméticas o con la calculadora, tener el cuaderno al día y bien presentado.

Como material puede resultar interesante el lote de álgebra-funciones de materiales didácticos que tiene Proyecto Sur de Ediciones:

Contiene:
Un cuadrado mágico algebraico.
Una "pista de álgebra", dos juego para cuatro personas, viene uno por cada cara.
Un dominó de áreas.
Un cuadrado binomio.
Tres juegos de cartas de funciones diferentes.
Un dominó de funciones.

4ºESO.

La asignatura de matemáticas en 4ºESO, según las condiciones que establece la Consejería competente en latería de educación se organizara en dos opciones A y B, de las que el alumno cursará una a su elección, la opción A tiene carácter terminal, y la opción B carácter propedéutico. Cada una de estas opciones tiene un currículo diferente, pero la principal diferencia entre ambas opciones no está tanto en el enunciado de los contenidos como en la forma de enfocar la asignatura.

4ºESOA.

Los contenidos de matemáticas A se orientan hacia un desarrollo más práctico y operacional de los conocimientos básicos de la materia, ofreciendo así a los alumnos que cursen esta opción la posibilidad de resolver problemas relativos tanto a la actividad cotidiana como a otros ámbitos del conocimiento.

El currículo oficial dado en el BOE en el Real Decreto 1631 de 5 de Enero de 2007 y el BOCyL en el Decreto 52/2007 por el que se establece el currículo de la ESO en Castilla y León dice que los contenidos de estos temas para el curso de 4ºESO opción A deben ser:

- Valor numérico de polinomios y otras expresiones algebraicas.
- Suma, resta y producto de polinomios.
- Identidades notables: estudio particular de las expresiones $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ y $(a+b)(a-b)$. Factorización de polinomios.
- Resolución algebraica y gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Ecuación de segundo grado en una incógnita.
- Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.

Pasaremos ahora a ver cómo se tratan estos conceptos en los libros de texto.

En este curso se le suele dedicar a estos temas siete semanas. Dos semanas para el tema de los polinomios y cinco para la resolución de ecuaciones. Hay que procurar que los alumnos vean la utilidad del álgebra, mostrándoles ejemplos de su utilidad en la vida real.

Polinomios.

Se comienza el tema recordando qué es un monomio y un binomio, así como el vocabulario asociado a estos términos, hay que insistir en que las letras se llaman variables o indeterminadas porque representan cualquier número. Todo se acompaña de numerosos ejemplos, para explicar el concepto de monomios semejantes se pone el ejemplo de $2x,\ -5x,\ \frac{3}{4}x,\ x$, para explicar qué es el valor numérico de un polinomio se usa el siguiente ejemplo:

el valor numérico de $3xy$ para $x=2,\ y=-5$ es $3\cdot 2\cdot(-5)=-30$

Hay que repasar las operaciones básicas con monomios: suma, resta, producto: $(2x)(3x^2) = 6x^3$, cociente: $\frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x$ y simplificación, que deben estar perfectamente asimiladas antes de pasar a operar con polinomios. Los polinomios deben ser reducidos antes de operar con ellos, por ejemplo:

$$5x^2 + 4x^4 - 2x^2 - 3x^4 + 1 = x^4 + 3x^2 + 1$$

Hay que presentar los polinomios y el vocabulario asociado partiendo de ejemplos conocidos, como por ejemplo el perímetro de un rectángulo o la superficie de un ortoedro. En este curso se ven los conceptos de valor numérico de un polinomio, suma y resta: sumar y restar los polinomios: $P(x) = 3x^2 + 5x - 2$ y $Q(x) = x^3 + 4x^2 - 5$, multiplicación de polinomios: $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ y $Q(x) = 3x^2$, división de un polinomio por $ax + b$, expresión del resultado:

$$P(x) = Q(x)(ax + b) + R(x)$$

Como ejemplo se efectúa la división $P(x) = 2x^4 - 7x^2 - 11x + 13$ entre $Q(x) = 2x + 3$.

Es importante insistir en la importancia del orden y de la limpieza a la hora de operar con polinomios; por ejemplo: la colocación de un monomio debajo de otro semejante o, en el caso de la división, colocar los monomios semejantes uno debajo de otro antes de restar. Los alumnos deben ver la similitud que hay entre las operaciones con polinomios y las operaciones con números.

Factorización de polinomios: sacar factor común: $6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x$, identidades notables y su utilización para la factorización de polinomios, como por ejemplo $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$, la división exacta como instrumento para la factorización, como por ejemplo $(2x^3 - 7x^2 - 11\mathrm{x} + 6) : (2x + 3)$. Es importante, al calcular la potencia de un binomio, insistir en que obtenemos el mismo resultado realizando la operación directamente o utilizando las identidades notables.

En este punto conviene empezar a preparar a los alumnos para la resolución de ecuaciones, sistemas e inecuaciones: para las expresiones de primer grado se les puede pedir que simplifiquen algo como $3(5\mathrm{x} - 7) + 2(\mathrm{x} - 1) - 5\mathrm{x} + 3$, que multipliquen alguna expresión por un número o que hagan alguna operación sencilla, para las expresiones de segundo grado se les puede pedir algo parecido, pero con polinomios de grado 2, expresiones no polinómicas, por ejemplo: sean $\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + 7}$ y $\mathrm{B} = 2\mathrm{x} - 2$, desarrollar $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$ y simplificar. Hay que conocer bien a los alumnos, para poder seleccionar aquellos problemas que resulten más adecuados, resolviendo numerosos ejercicios con polinomios para asegurar su asimilación.

Se puede proponer como breve lectura “Los polinomios y las funciones, ¿un capricho de matemáticos ociosos?”, “Breve historia del álgebra” y “Biografía de Galileo”, y se pueden preparar algunas cuestiones sobre estos breves textos. Estas lecturas pueden descargarse de la página web:

http://maralboran.org/web_ma/Anaya/Anaya07/3ESO_PROFESOR/datos/05/04/04.pdf

Resolución de ecuaciones.

Hay que asegurar los mecanismos básicos para la resolución de ecuaciones (manejo de expresiones algebraicas, factorización…) mediante la práctica reiterada, y recordar la diferencia entre identidad y ecuación, también está bien iniciar la resolución de algunas ecuaciones por tanteo, para que los alumnos reflexionen sobre el significado de resolver ecuaciones antes de entrar en los procesos de mecanización, esto ha de hacerse con ecuaciones sencillas, como por ejemplo $x^3 = 3125$.

Ecuación de primer grado: resolución diestra de ecuaciones de primer grado. Hay que hacer ejemplos en clase, con ecuaciones sencillas, como por ejemplo: “La suma de un número con su tercera parte es 48, ¿de qué número se trata?” Conviene fijar un método para resolver paso a paso cualquier ecuación:

- Eliminar paréntesis. Prestando especial atención si hay un signo negativo antes de alguno.
- Quitar denominadores.
- Pasar los términos con incógnita a un miembro.
- Reducir términos.
- Despejar la incógnita.
- Comprobar la solución.

Ecuación de segundo grado: resolución diestra de ecuaciones de segundo grado, completas e incompletas. Se explica cómo resolverlas en todos los casos posibles, pero ni se demuestran ni se deducen las fórmulas, simplemente se dan las fórmulas para que el alumno las memorice, y se acompaña de ejemplos: $x^2 + x - 2 = 0$, $3x^2 - 48 = 0$, $2x^2 - x = 0$. También se explica qué se debe hacer si tenemos una ecuación de segundo grado un poco más compleja, como por ejemplo: $(x+5)^2 - 2(x+1)(x-3)$. Se hacen numerosos ejercicios y problemas de ecuaciones de segundo grado.

Otros tipos de ecuaciones: resolución de ecuaciones factorizadas, con radicales y con la x en el denominador. Se explica cómo se debe enfrentar uno a ellas, y se acompaña de varios ejemplos de cada tipo: $x(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$, $\sqrt{x^2+7} + 2 = 2x$, $\frac{200}{x} + 5 = \frac{200}{x-2}$.

Resolución de problemas mediante ecuaciones: conviene fijar unas pautas para resolverlos:

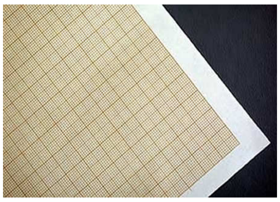
- Leer el enunciado.
- Identificar los datos conocidos y asignar la incógnita al desconocido.
- Relacionar los elementos mediante una ecuación.
- Resolver la ecuación.
- Interpretar y comprobar la solución, sobre todo aquellas soluciones obtenidas al resolver una ecuación con la x en el denominador o con raíces.

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones: se comienza esta parte con la definición de inecuación, se explica cómo identificar las soluciones de una inecuación de primer grado y se explica cómo se resuelven, acompañado de ejercicios resueltos como este: $2x + 1 < 7$ se explica qué es la semirrecta solución y su interpretación gráfica, después se explica cómo resolver de sistemas de inecuaciones de primer grado, y se acompaña de múltiples ejemplos como:

$$\begin{cases} 2x + 1 < 7 \\ 7 - 5x \leq 12 \end{cases}$$

Hay que mostrar el desarrollo de las ecuaciones e inecuaciones mediante la formulación de problemas resueltos. Como por ejemplo este problema, el cuál precisa de un sistema de inecuaciones para su resolución: "¿Cuánto vale un chocolate con churros en el bar de la esquina? Ayer fuimos 6 personas y nos costó más de 20€. Hoy hemos ido 8 personas y ha costado menos de 30€".

Para la representación gráfica de ecuaciones e inecuaciones puede resultar interesante usar papel milimetrado:



Hay que insistir en la importancia del orden y la claridad a la hora de resolver ecuaciones.

Ecuación lineal con dos incógnitas: se explica cómo es, y se dice que toda ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, después se intenta justificar esta afirmación mediante la representación gráfica de las soluciones de una ecuación particular, la $x + 2y = 4$, se estudia la representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas e identificación de los puntos de la recta como solución de la inecuación. Hay que demostrar claramente que en una ecuación de primer grado con dos incógnitas se pueden encontrar tantas soluciones como se quieran, y que todas ellas responden a un formato común que se expresa en la forma $ax + by = c$.

Conviene hacer ver a los alumnos claramente que, mientras que una ecuación lineal tiene infinitas soluciones, el sistema lineal formado por dos ecuaciones con dos incógnitas tiene normalmente una, los alumnos tienen que distinguir los distintos tipos de sistemas: compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles. Se muestra un ejemplo de cada tipo:

Incompatible:	Compatible determinado:	Compatible indeterminado:
$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

Interpretación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y de sus soluciones. Se recuerdan los tres métodos de resolución algebraica de sistemas lineales, sustitución, igualación y reducción, conviene insistir en la importancia de elegir el método más apropiado de resolución en cada caso. Se muestra un mismo sistema de ecuaciones resuelto con los tres métodos:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$

De este modo los alumnos ven que cualquiera de los métodos es válido para resolver todos los sistemas. Hay que aconsejar a los alumnos que comprueben la solución obtenida en el sistema inicial, con el fin de comprobar si cometieron errores en las operaciones algebraicas.

Después se pasa a estudiar un tipo de sistemas de ecuaciones en el que haya que operar antes de comenzar a resolverlo, como este:

$$\begin{cases} \dfrac{2(x - y + 4)}{3} - \dfrac{2x + y}{2} = \dfrac{5}{6} \\ -2(x - y + 1) + \dfrac{x + y}{3} = -3 \end{cases}$$

También se enseña en este curso la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, pero siempre en casos sencillos y de fácil resolución. Se explican algunas técnicas que pueden ser usadas en estos casos y se ponen ejemplos como:

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones. Conviene poner ejemplos de la vida cotidiana. Vienen varios ejemplos de problemas de este tipo, como por ejemplo: “Un inversor dispone de 100000€. Invierte parte en un banco que le paga el 4% anual y el resto en unas acciones que le producen un 5% al final del año. En total gana 4700€, ¿Qué cantidad ha destinado a cada operación?”.

Es importante, tanto en este nivel como en todos los demás fijar hábitos de trabajo en los alumnos, que atiendan a las explicaciones del profesor, que trabajen en clase, que hagan los ejercicios que se les indique, que respeten la jerarquía de las operaciones y que tengan el cuaderno al día y bien presentado. Hay que persuadirles sobre los beneficios de repetir los problemas o ejercicios resueltos en clase, con el fin de consolidar el aprendizaje mediante la práctica permanente.

4ºESOB.

Esta opción B, aún sin obviar los aspectos descritos en la opción A, incide más en los aspectos formativos, tendiendo a un grado mayor de precisión en el lenguaje simbólico, en el rigor del razonamiento y en las representaciones formales.

El currículo oficial dado en el BOE en el Real Decreto 1631 de 5 de Enero de 2007 y el BOCyL en el Decreto 52/2007 por el que se establece el currículo de la ESO en Castilla y León dice que los contenidos de estos temas para el curso de 4ºESO opción B deben ser:

- Polinomios. Operaciones con polinomios. Raíces de un polinomio. Factorización de polinomios. Utilización de las identidades notables y la regla de Ruffini en la descomposición factorial de un polinomio.
- Resolución algebraica de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Ecuaciones reducibles a cuadráticas.
- Resolución algebraica y gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos y simplificación de fracciones.
- Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.
- Inecuaciones y sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Interpretación gráfica.
- Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.

Pasaremos ahora a ver cómo se tratan estos conceptos en los libros de texto.

En este curso se le suele dedicar a estos temas entre siete semanas y dos meses. Aproximadamente un mes para el tema de los polinomios y tres semanas para la resolución de ecuaciones. Algunos de los conceptos son nuevos para los alumnos, y otros son conocidos.

Polinomios.

Se suele iniciar el tema recordando qué es un monomio y un binomio, así como el vocabulario asociado a esos términos, después se recuerda lo que es un polinomio. Conviene repasar las operaciones con monomios antes de pasar a las de los polinomios, sobre todo la división de monomios $\frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b}x^{m-n}$. También hay que repasar cómo se suman y se multiplican los polinomios. Los contenidos de este curso son: suma, resta, multiplicación y división (entera y exacta), se dan técnicas para la división de polinomios y se practican con ejemplos: $P(x) = 6x^4 + 8x^2 + 7x + 40$ entre $Q(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Después se explica la utilización de la regla de Ruffini para dividir un polinomio por $x - a$. Se dividen el polinomio $P(x) = 7x^4 - 11x^3 - 94x + 7$ entre $P(x) = x - 3$ primero de la manera habitual y después usando la regla de Ruffini, y se compara cuál es más fácil. Luego se ve la aplicación de esta regla y para obtener el valor de un polinomio cuando x vale a, y el teorema del resto, que aunque tienen una demostración muy sencilla, esta no se incluye en los libros de texto. Se practica este teorema con ejemplos como este: $P(x) = 11x^5 - 170x^3 + 2x - 148$.

Después se explica la factorización de polinomios, se habla de qué son las raíces de un polinomio, y qué podemos hacer para factorizarlo, se practica con ejemplos concretos como $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$.

Se para a hablar después de la divisibilidad de polinomios, qué significa que un polinomio sea divisor o múltiplo de otro, y cuándo decimos que un polinomio es irreducible.

Pasamos a continuación a las fracciones algebraicas, se da la definición de fracción algebraica $\frac{2x+4}{x^2-5x+3}$, se dice como simplificarlas $\frac{2x^3-17x+3}{3x^2+5x-12}$ y qué son fracciones equivalentes como $\frac{x+4}{x^2+x-12}$ y $\frac{2x+5}{2x^2-x-15}$, también se dice cómo obtener fracciones equivalentes a otras dadas con el mismo denominador por reducción a común denominador, y las operaciones suma, resta, multiplicación y división de fracciones algebraicas.

Es importante, tanto en este nivel como en todos los demás fijar hábitos de estudio en los alumnos, que atiendan a las explicaciones del profesor, que trabajen en clase, que hagan los ejercicios de los libros, que respeten la jerarquía de las operaciones, que tengan el cuaderno al día y bien presentado, que se acostumbren a usar correctamente la calculadora. También hay que fomentar todo lo que se pueda la capacidad de reflexión y de abstracción para conseguir que sean ellos mismos los que deduzcan las cosas. Siempre hay que indicarles la utilidad del álgebra, intentando mostrar aplicaciones a la vida cotidiana.

Resolución de ecuaciones.

El tema de resolución de ecuaciones empieza con las ecuaciones de segundo grado, completas e incompletas. Se dice cómo resolverlas en cada caso, pero no se demuestra ninguna de las fórmulas. Se practica la resolución $5x^2 - 45 = 0$. Se introducen después otros tipos de ecuaciones y se explica cómo resolverlas: ecuaciones bicuadradas $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, ecuaciones con la x en el denominador $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} = \frac{3}{10}$, ecuaciones con radicales $\sqrt{x^2+7} + 2 = 2x$ y ecuaciones factorizadas o que se pueden factorizar $(x-2)\cdot(x^2-36)\cdot(x^2+5x) = 0$.

Pasamos después a sistemas de ecuaciones lineales. Se recuerda cómo resolver un sistema de ecuaciones mediante los métodos de igualación, reducción y sustitución, y se resuelve el mismo sistema mediante los tres métodos como ejemplo.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$

También se da algún ejemplo de sistema no lineal.

Se hace después una introducción de situaciones en las que puede ser necesario resolver una inecuación, se explica lo que es y cómo se soluciona, se practica con casos muy sencillos $2x + 4 > 0$, también se explica cómo resolverlas gráficamente y algebraicamente. Se pasa finalmente a sistemas de inecuaciones, se explica cómo resolver sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita y la representación de las soluciones por medio de intervalos.

$$\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ -2x + 7 \geq \frac{x}{2} - 3 \end{cases}$$

Para terminar se practica la resolución de problemas por procedimientos algebraicos.

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I.

El currículo oficial dado en el BOCyL en el Decreto 42/2008 por el que se establece el currículo de Bachillerato en Castilla y León dice que los contenidos de estos temas para el curso de Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I deben ser:

- Ecuaciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. Aplicaciones.
- Estudio y resolución gráfica y algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sistemas con tres incógnitas: método de Gauss.
- Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Interpretación y resolución gráfica.
- Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolución de problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, amortizaciones, capitalizaciones y número índice. Parámetros económicos y sociales.

Pasaremos ahora a ver cómo se tratan estos conceptos en los libros de texto.

En este curso se le suele dedicar quince días al tema de polinomios y resolución de ecuaciones.

En este nivel más que explicaciones teóricas de conceptos relacionados con las ecuaciones, que los alumnos ya conocen, lo que precisan es ejercitarse en el uso de estas técnicas. Por eso los alumnos deben tomar el protagonismo en su aprendizaje, realizando el mayor número de ejercicios posible, pues las dificultades que con tanta frecuencia tienen los alumnos para traducir al lenguaje algebraico en parte son debidas a la falta de práctica.

Polinomios.

En este nivel los alumnos poseen una razonable soltura en la operatoria algebraica. No obstante, puede resultarles útil a muchos de ellos hacer una revisión sistemática de las operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación y división. También conviene repasar la nomenclatura adecuada y la forma de exponer los resultados. Es especialmente importante el saber expresar el resultado de una división $P(x): Q(x)$ de cociente $C(x)$ y resto $R(x)$ tanto así: $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$, como así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Aunque los alumnos conocen la regla de Ruffini del año pasado, casi seguro que la mayoría de ellos necesita insistir en ella, sobre todo en sus aplicaciones:

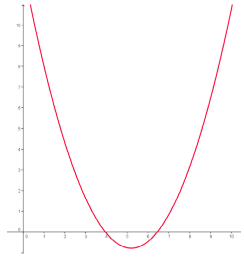
- Cálculo del valor numérico de un polinomio para $x = a$.
- Factorización de polinomios.

Además de tener claros los conceptos, es fundamental que los alumnos adquieran destreza en la descomposición factorial de polinomios así como en las operaciones con fracciones algebraicas. El paralelismo entre la divisibilidad en el campo de los polinomios y en el de los números enteros, y entre las fracciones algebraicas y las numéricas, además de ser conceptualmente importante, aporta un recurso didáctico muy válido, pues el conocimiento que los alumnos tienen sobre estos aspectos numéricos sirve como organizador del aprendizaje de los correspondientes conceptos y procedimientos algebraicos.

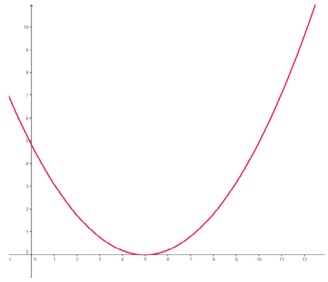
Resolución de ecuaciones.

Se comienza el tema recordando cómo se resuelven ecuaciones de segundo grado, ya sean completas o incompletas, y se ve que el número de soluciones de una ecuación de segundo grado depende del signo del discriminante, se ve gráficamente con la parábola de la función.

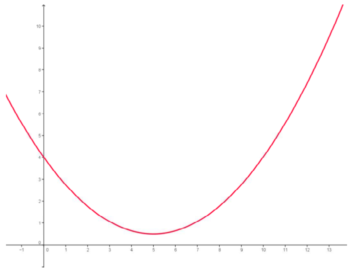
$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



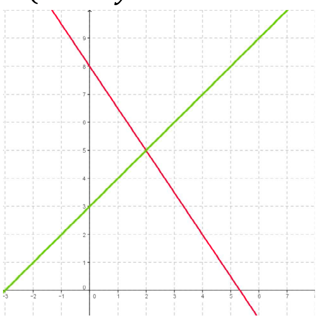
$\Delta < 0$



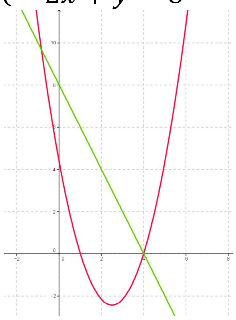
También se estudian en este curso las ecuaciones bicuadradas $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, que se relacionan fácilmente con las ecuaciones de segundo grado. Se recuerda cómo se resuelven ecuaciones con radicales $\sqrt{2x-3} + 1 = x$, ecuaciones polinómicas de grado mayor que dos y ecuaciones exponenciales.

Se ve una interpretación gráfica de sistemas de ecuaciones: rectas en el plano que pueden cortarse en un punto, ser coincidentes o paralelas. También deben saber qué son sistemas equivalentes, y que transformaciones mantienen la equivalencia. Se hacen ejemplos:

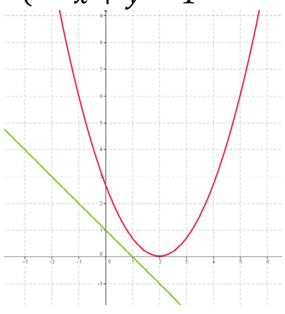
$$\begin{cases} 3x + 2y - 16 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$



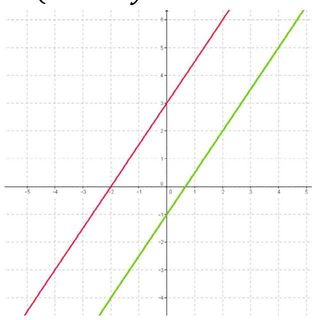
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ 3x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$



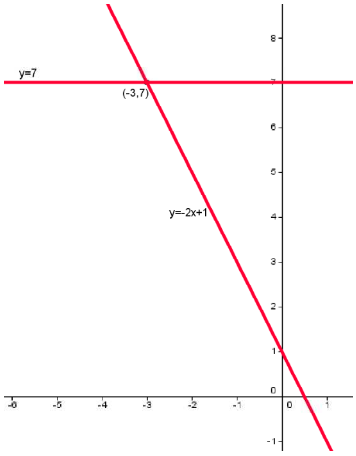
Se practica la resolución de sistemas de ecuaciones de cualquier tipo que puedan desembocar en ecuaciones de las nombradas en los puntos anteriores.

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \sqrt{x+y} + y = x \end{cases}$$

El método de Gauss ha sido introducido recientemente en los programas de este curso, para que sirva de introducción, y se trata con más detalle en la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.

Se practican primero inecuaciones con una incógnita, se practica la resolución algebraica y gráfica de ecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita y resolución gráfica de ecuaciones.

$$-2x + 1 < 7$$



Después se practica la resolución de inecuaciones con dos incógnitas, se presta una atención especial a la resolución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

Los alumnos a este nivel tienen que saber traducir al lenguaje algebraico y resolver problemas como este: “La nota media de matemáticas en la clase de 1ºA es 5.4 y la de 1ºB es 6.4. ¿Cuántos estudiantes hay en cada grupo si en total son 50, con una media de 5.88?”.

Los alumnos deben usar el lenguaje algebraico para expresar relaciones de todo tipo, así como por su facilidad para representar y resolver problemas. Los alumnos deben aprender a valorar la potencia y abstracción del simbolismo matemático que supone el álgebra, así como la capacidad de los métodos algebraicos para representar situaciones complejas y resolver problemas, y la importancia de los polinomios en situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

Matemáticas I.

El currículo oficial dado en el BOCyL en el Decreto 42/2008 por el que se establece el currículo de Bachillerato en Castilla y León dice que los contenidos de estos temas para el curso de Matemáticas I deben ser:

- Resolución algebraica e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones.
- Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Sistemas de inecuaciones.
- Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas.

Pasaremos ahora a ver cómo se tratan estos conceptos en los libros de texto.

Es el primer curso de Bachillerato en la rama científica, los alumnos que acceden a este curso han terminado la ESO, así que hay que tener en cuenta los conocimientos previos que tienen. Los alumnos que escogen esta materia suelen tener intención de hacer algún tipo de carrera superior científica o ingeniería. Si bien es cierto que la mayoría de los conceptos que se dan en este curso se han dado ya en los cursos anteriores, a la mayoría de los alumnos no les viene nada mal dar un repaso, pues les sigue costando mucho trabajo plantear las ecuaciones de un problema de enunciado, y dado que todos aquellos alumnos que van a cursar algún tipo de estudios superiores de ciencias tienen que hacer esta materia, se cree necesario volver a repetir estos conceptos.

Polinomios.

Los contenidos que se explican en este nivel son: factorización de polinomios, factorizar un polinomio a través de la identificación de sus raíces enteras, fracciones algebraicas, operar con ellas, simplificarlas, manejar las técnicas algebraicas básicas. La factorización de polinomios se explica como un recurso para resolver ecuaciones, por ejemplo:

Para resolver $\mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} = 0$, primero sacamos x como factor común:

$\mathrm{x}(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2) = 0$, de donde obtenemos que o $x = 0$ ó $\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2 = 0$, ecuación que sabemos resolver, y que tiene por solución $x = 1, x = 2$, hemos obtenido así las tres soluciones de la ecuación inicial: $x = 1,\ x = 2,\ x = 0$.

Se debe intentar que los alumnos puedan traducir al lenguaje algebraico problemas dados mediante enunciado, que adquieran el hábito de contrastar el resultado final de un problema con el enunciado para determinar lo razonable o no del resultado obtenido, que se acostumbren a presentar las cosas ordenadamente y que reflejen siempre claramente del proceso seguido y los resultados en problemas algebraicos, que aprecien la utilidad y la potencia que posee el simbolismo matemático y que valoren el lenguaje algebraico para expresar relaciones de todo tipo.

Resolución de ecuaciones.

Ecuaciones de segundo grado: se recuerda el concepto de ecuación de segundo grado y la fórmula general que se usa para hallar sus soluciones, se dan sin más, sin demostración ni justificación de ningún tipo. Se da el concepto de ecuación incompleta, y se explican maneras sencillas de sacar las soluciones en estos casos. A continuación se explica el concepto de ecuación bicuadrada y se indica qué pasos hay que seguir para resolverlas, se completa esta explicación con algunos ejemplos como:

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. Hacemos el cambio de variable $x^2 = y$ y obtenemos:

$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = 1 \text{ ó } 9$$

Si $y = 1$ entonces $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$. Si $y = 9$ entonces $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Hemos obtenido así las cuatro soluciones de la ecuación. -1, 1, -3 y 3.

A continuación se explica el concepto de ecuación con radicales, se explica cómo resolver este tipo de ecuaciones, y se completa la explicación con ejemplos, como:

$\sqrt{2x - 3} + 1 = x$. Pasamos el 1 al segundo miembro:

$\sqrt{2x - 3} = x - 1$. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$2x - 3 = x^2 - 2x + 1$, luego $x^2 - 4x + 4 = 0$ será la ecuación que tendremos que resolver, al hacerlo obtenemos la solución $x = 2$. Como hemos elevado al cuadrado puede que hayamos añadido soluciones, así que habrá que comprobarlo.

$\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + 1 = \sqrt{1} + 1 = 2$, luego la solución es válida.

Después se explica cómo se resuelven ecuaciones con la x en el denominador, y también se completa con algún ejemplo, como:

$$\frac{6}{x} + \frac{x + 1}{x - 2} = 6$$

Lo siguiente que se explica son las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, se explica qué son y cómo se resuelven, y se acompañan de ejemplos como:

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{27} \qquad\qquad logx + log50 = 3$$

A continuación se pasa a hablar de sistemas de ecuaciones, este es un tema que ya se ha visto en cursos anteriores, así que simplemente debe de servir como recordatorio, se acompaña con ejemplos, resolviendo cada uno de ellos con un método deferente de los que se conocen:

Sustitución:

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \sqrt{x + y} + y = x \end{cases}$$

Reducción:

$$\begin{cases} 2logx + logy = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}$$

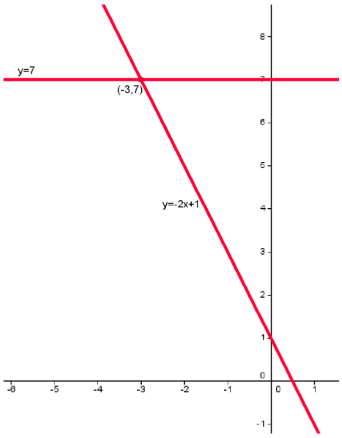
Igualación:

$$\begin{cases} e = \dfrac{1}{4.8} t^2 \\ e = 20(t - 18) \end{cases}$$

El método de Gauss ha sido introducido recientemente en este curso, antes se explicaba únicamente en la asignatura Matemáticas II, se da una pequeña introducción a este método, pero se estudia con más profundidad en el curso siguiente, por lo que en este curso solo se tendrán que resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Por último se explican las inecuaciones con una incógnita, se dice qué es una inecuación y como se resuelven, también se enseña cómo resolver sistemas de inecuaciones de primer grado. Se acompaña todo con ejemplos, como:

$$-2x + 1 < 7$$



A este nivel lo importante no son las explicaciones teóricas de los conceptos, puesto que ya los conocen en su totalidad, lo importante es que los alumnos los practiquen hasta que puedan manejarlos con soltura, pues los problemas que suelen tener los alumnos de este curso en estos temas se deben mayormente a la falta de práctica, por este motivo los libros de texto de Matemáticas I están llenos de problemas y ejercicios resueltos. Esto permite también adaptarse mejor al ritmo de aprendizaje de cada alumno individualmente.

Estos temas deberían servir para que los alumnos aprendan a desenvolverse en el mundo que les rodea. Por ejemplo, deberían de ser capaces de plantear ecuaciones para resolver problemas de consumo.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.

El currículo oficial dado en el BOCyL en el Decreto 42/2008 por el que se establece el currículo de Bachillerato en Castilla y León dice que los contenidos de estos temas para el curso de Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II deben ser:

- Sistemas de ecuaciones lineales. Estudio e interpretación gráfica.
- Interpretación del significado de las operaciones con matrices en la resolución de problemas extraídos de las ciencias sociales.
- Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Interpretación y resolución gráfica.

Pasaremos ahora a ver cómo se tratan estos conceptos en los libros de texto.

Resolución de ecuaciones.

En este curso no se trata el tema de los polinomios, pues es ya suficientemente conocido por los alumnos, el tema comienza con sistemas de ecuaciones lineales: comienza recordando qué es una ecuación lineal, como $2x - 3 = 0$, también se recuerda cuándo dos ecuaciones son equivalentes, como las dos ecuaciones $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ y $5x + 4y = 20$. Después se recuerda qué es un sistema de ecuaciones lineales, y cuándo decimos que dos sistemas son equivalentes, como por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ x + 3y = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + y = 13 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

A continuación se da una lista de transformaciones que mantienen la equivalencia, esto es, transformaciones que mantienen las soluciones del sistema:

- Multiplicar o dividir los dos miembros de una de las ecuaciones por un número distinto de cero.
- Añadir una ecuación que sea combinación lineal de las demás o, al contrario, suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las otras.
- Sustituir una ecuación por el resultado de sumarle otra multiplicada por un número.

Después se dice cuándo un sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Compatible determinado	Incompatible
$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$

Después se hace una interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones con dos o tres incógnitas según sea compatible o incompatible, determinado o indeterminado. Veamos como lo explica para sistemas con tres incógnitas:

- Si el sistema es compatible determinado entonces los tres planos se cortan en un punto.
- Si el sistema es incompatible es que uno de los planos no corta a la intersección de los otros dos.

- Si el sistema es compatible indeterminado es que los tres planos se cortan en una recta.

Los alumnos deben adquirir buenas nociones sobre los significados de sistema de ecuaciones, solución, compatible, incompatible, etc, y sobre todo, qué significa que una ecuación sea incompatible con otras, o que una ecuación no diga nada nuevo dentro de un sistema. Todo esto debe ser reforzado con la representación gráfica, pues verlo gráficamente puede ayudar a los alumnos a aclarar en su mente porqué se obtiene lo que se obtiene.

Lo siguiente que se introduce es el concepto de sistema escalonado, primero se pone de manifiesto lo realmente fácil que es resolver este tipo de sistemas, y se presentan las diferentes apariencias que pueden tener estos sistemas, se practica cómo transformar un sistema en otro equivalente escalonado con ejemplos sencillos como:

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 3x - 7y = 7 \end{cases}$$

Después de explicar cómo escalonar un sistema se le da nombre a ese método, el método de Gauss, y se dan las pautas para "hacer ceros", se explica cómo saber si estamos ante un sistema compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible por el método de Gauss. Los alumnos que llegan a este nivel ya saben resolver ecuaciones y sistemas mediante los métodos de sustitución, reducción e igualación, aquí no se pretende que el alumno olvide estos métodos que ya conoce para aprender los nuevos, sino que debe verlos como una ayuda o una mejora, por eso se suele presentar el método de Gauss como una generalización del método de reducción. Es conveniente fijar este nuevo método con numerosos ejemplos, como:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$$

Lo siguiente que se explica es cómo resolver un sistema de ecuaciones dependiendo de un parámetro, se explica qué es lo que un alumno debe hacer para discutir un sistema de ecuaciones, y cómo podemos aplicar el método de Gauss a la discusión de sistemas dependientes de un parámetro, como por ejemplo.

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ kx + (k-1)y + z = k \\ x + y + z = k + 1 \end{cases}$$

Es importante que el alumno sepa distinguir bien si un sistema es incompatible o compatible, y dentro de los compatibles si es determinado o indeterminado, para ello resulta muy útil la referencia geométrica, aunque ellos no conozcan la geometría analítica del espacio pueden perfectamente representar planos, rectas, y conocen las posiciones relativas de ambos.

Después se pasa a la resolución de problemas mediante ecuaciones, los alumnos deben aprender a traducir a un sistema de ecuaciones un problema dado mediante un enunciado, resolverlo e interpretar la solución, deben coger hábito de analizar las soluciones de los sistemas de ecuaciones y de contrastar el resultado final de un problema con lo propuesto en este, para determinar lo razonable o no del resultado obtenido. Los alumnos deben adquirir la tendencia a entender el significado de los resultados obtenidos y los procesos seguidos en los ejercicios resueltos, mostar interés y respeto por las estrategias, modos de hacer y soluciones a los problemas distintos a los propios. Con este apartado se consigue que se fijen todos los conceptos aprendidos anteriormente.

Aunque los determinantes y sus aplicaciones no son un tema del programa de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II muchas son las editoriales, como por ejemplo ANAYA y SANTILLANA, que incluyen este tema en sus libros de texto, pues una vez que los alumnos han estudiado matrices y determinantes se les pueden enseñar herramientas más potentes para la resolución de problemas: el teorema de Rouché y la regla de Cramer.

Se da el teorema de Rouché, antes de enunciarlo se indica para qué sirve y en qué situaciones utilizarlo, para la discusión de sistemas de ecuaciones de, a lo sumo, tres incógnitas. Después se enuncia formalmente el teorema y aparece una demostración del mismo. Para fijarlo mejor se muestra cómo aplicarlo con algunos ejemplos, como:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y \qquad\quad = 5 \\ \qquad 3y + z = 1 \end{cases}$$

Se presenta a continuación la regla de Cramer, se explica que sirve para obtener la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, y se enuncia para el caso particular de sistemas $3x3$. Se hace algún ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ x + y \qquad\quad = 6 \\ x + 6y + 2z = 5 \end{cases}$$

Se explica también como se puede aplicar la regla de Cramer a la resolución de otro tipo de sistemas, pues puede usarse para cualquier sistema compatible. Se ve con el ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z + t = 27 \\ \ \ x + \qquad z \qquad = 2 \\ 2x + 4y \qquad - 2t = 24 \end{cases}$$

Después de esto se da el concepto de sistema homogéneo, se dice que siempre tienen solución trivial y se dice qué tiene que suceder para que tenga otras soluciones, se hace el ejemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Por último en este curso se dice cómo se puede discutir un sistema mediante determinantes, y cómo se aplican del teorema de Rouché y de la regla de Cramer a la discusión y resolución de sistemas dependientes de un parámetro.

Diferencias entre el texto de ANAYA y el de SANTILLANA.

Las diferencias entre ambos textos son mínimas, pues los contenidos son prácticamente los mismos, las diferencias que he encontrado son las siguientes:

- El texto de SANTILLANA incluye un recuerdo de los métodos de sustitución, reducción e igualación.
- En el texto de ANAYA se recuerda el concepto de ecuaciones equivalentes y sistemas equivalentes, así como las transformaciones válidas en un sistema de ecuaciones.
- El texto de ANAYA incluye la interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.
- El texto de ANAYA divide estos conceptos en dos temas, el de SANTILLANA lo concentra todo en uno.
- El teorema de Rouché viene demostrado en el texto de ANAYA, no así en el de SANTILLANA.

El resto de cosas son prácticamente iguales en ambos textos, siendo incluso los ejemplos que aparecen del mismo tipo en ambos.

Matemáticas II.

El currículo oficial dado en el BOCyL en el Decreto 42/2008 por el que se establece el currículo de Bachillerato en Castilla y León dice que los contenidos de estos temas para el curso de Matemáticas II deben ser:

- Sistemas de ecuaciones lineales. Operaciones elementales y reducción Gaussiana. Discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.
- Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales.
- Utilización de determinantes en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Pasaremos ahora a ver cómo se tratan estos conceptos en los libros de texto. En este curso no se vuelve a estudiar el tema de polinomios, puesto que se supone de sobra conocido por los alumnos.

Resolución de ecuaciones.

Se comienza el tema recordando qué es una ecuación lineal como $2x-3=0$, y ecuaciones equivalentes como $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ y $5x+4y=20$. En este nivel los alumnos deben adquirir buenas intuiciones sobre los significados de los conceptos de sistema de ecuaciones, solución, compatible, incompatible, y sobre todo de qué significa que una ecuación sea incompatible con otras, o bien que una ecuación no diga nada nuevo a lo que dicen otras. Todo ello se refuerza con la representación gráfica de rectas en el plano. También debe conocer los conceptos de sistemas equivalentes, así como las transformaciones que mantienen la equivalencia. Ejemplos sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} 2x-5y=16 \\ x+3y=-3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x+y=13 \\ x+y=1 \end{cases}$$

El alumno de este nivel, antes de comenzar a estudiar sistemas escalonados y el método de Gauss, ya sabe resolver ecuaciones y sistemas. Los métodos que espontáneamente utiliza son los que conoce desde 2ºESO: sustitución, reducción e igualación, y con ellos puede resolver sistemas de varias ecuaciones y varias incógnitas. Es conveniente que el alumno considere perfectamente válidos todos los métodos que conoce, y vea los nuevos como una mejora natural de ellos, por eso se suele presentar el método de Gauss como una generalización del método de reducción, que permite llegar a un sistema de ecuaciones escalonado. Los alumnos empiezan practicando con ejemplos sencillos como este y luego van subiendo poco a poco el nivel:

$$\begin{cases} x-3y=4 \\ 3x-7y=7 \end{cases}$$

Es importante que el alumno distinga los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones: incompatibles, compatibles indeterminados y compatibles determinados, y que sepa reconocer cómo es cada uno de los que se le presentan. Para ello resulta muy útil la referencia geométrica, rectas para las ecuaciones con dos incógnitas y planos para las de tres, porque aunque los alumnos cuando dan este tema normalmente no han dado todavía geometría analítica del espacio (la mayoría de las editoriales mete este tema el primero), esto no supone ninguna traba para la interpretación geométrica de una ecuación lineal con tres incógnitas como un plano, y también conocen las posiciones relativas entre los elementos del espacio. Después aprenden qué es discutir un sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro, y cómo pueden usar el método de Gauss en esta discusión, resuelven ejercicios como este:

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ kx + (k-1)y + z = k \\ x + y + z = k + 1 \end{cases}$$

En la resolución de problemas los alumnos deben enfrentarse a problemas de este tipo: "Una compañía tiene tres camiones (P,Q y R) en los que caben exactamente un cierto número de contenedores de tres tipos (A, B y C), de acuerdo con la siguiente tabla:

	A	B	C
P	5	3	4
Q	2	5	5
R	4	3	6

Si se han de transportar 45 contenedores del tipo A, 44 del tipo B y 58 del tipo C, ¿cuántos viajes ha de hacer cada camión si todos los viajes los hacen totalmente llenos?".

Después se explica el teorema de Rouché, con demostración incluida, y como aplicarlo a la discusión de sistemas de ecuaciones como esta:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y = 5 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$$

La sencillez de la expresión del desarrollo de los determinantes de orden dos permite que podamos hacer que los propios alumnos obtengan la regla de Cramer para sistemas 2×2, la expresión final hace sencilla la extensión de la regla a sistemas 3×3. El alumno debe saber aplicar la regla de Cramer a la resolución de sistemas determinados y también a los indeterminados. Se hacen ejemplos:

$$\begin{cases} x + y - 4z - 3t = -18 \\ x + 2y + z + 5t = 9 \\ 2x + 2y - 3z + 2t = -8 \\ 6x + 3y + z - 2t = 11 \end{cases}$$

La regla de Cramer se demuestra para sistemas 4×4, en esta demostración se ven los pasos a seguir sin necesidad de usar la complicada notación que requiere la demostración para el caso general $n \times n$. Una vez que los alumnos manejen la regla de Cramer pueden elegir entre este método y el de Gauss para la resolución de sistemas, y se les enseña a los alumnos cuándo es más ventajoso cada uno de ellos:

- Para resolver sistemas de ecuaciones con coeficientes numéricos, con frecuencia es preferible el método de Gauss.

- Para discutir sistemas de ecuaciones dependientes de uno o más parámetros, casi siempre es preferible recurrir a los determinantes, tanto más cuantas más veces aparezca el parámetro o los parámetros.

Se explica después cómo resolver sistemas homogéneos como este:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se explica después uno de los ejercicios tipo de este curso, la discusión de sistemas. Se explica cómo aplicar el teorema de Rouché y la regla de Cramer a la discusión y resolución de sistemas dependientes de uno o más parámetros como este:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Los alumnos deben adquirir el hábito de analizar las soluciones de los sistemas de ecuaciones, y el de contrastar el resultado final de un problema con lo propuesto en este, para determinar lo razonable o no del resultado obtenido. Tienen que entender el significado de los resultados obtenidos y los procesos seguidos para llegar a esa solución. Los alumnos deben respetar las estrategias, los modos de hacer y las diferentes soluciones a los problemas. Es importante que presenten los ejercicios de manera clara y ordenada, pudiendo apreciar así la claridad que ofrece el lenguaje matemático.

Conclusiones y propuestas de mejora.

Una vez que tenemos muy claro qué se conceptos se dan en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de los temas de polinomios y resolución de ecuaciones y cómo se tratan actualmente, podemos empezar a plantearnos qué es lo que falla y cómo podemos mejorarlo.

Aunque todos los temas de todos los libros de texto tienen como introducción una pequeña reseña histórica, mi experiencia tanto como alumna, como profesora de clases particulares y como profesora de prácticas en un instituto me dice que ésta parte de los temas siempre suele ser ignorada. La mayoría de los profesores piensan que dedicarle tiempo a eso es tirarlo a la basura, pero yo creo que lejos de desaprovecharse puede ser muy enriquecedor para los alumnos, pues puede servirles tanto de motivación como para unir los conocimientos nuevos con los que ya poseen, potenciando así el aprendizaje significativo. Además no hace falta dedicar mucho tiempo en clase a estos temas, se les puede pedir a los alumnos que ellos mismos averigüen cosas por su cuenta para luego comentarlas en clase, fomentando así la autonomía del alumno y el aprendizaje por descubrimiento.

Otro de los problemas que le veo a la enseñanza de estos temas en la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato es que se repiten un año tras otro los mismos conceptos, avanzando a pasos minúsculos en la introducción de los nuevos. Esto se debe a que como los conceptos no quedan suficientemente asimilados por parte de los alumnos se ve necesaria su repetición en años posteriores. En mi opinión, se podrían trabajar más a fondo los conceptos cuando se introducen, de manera que su repetición año tras año no fuese tan necesaria. El mayor problema de los alumnos hoy en día es la motivación, se aburren con las clases magistrales y dejan de escuchar, entonces da igual que introduzcas un concepto una vez o veinte, porque no van a entenderlo. Si se cambiase la metodología a una que a ellos les resultase más atractiva, estarían más atentos, aprenderían más, y no sería necesaria la repetición año tras año de las mismas cosas, pudiéndose así ampliar el currículo, añadiendo por ejemplo la resolución de ecuaciones de grado tres, que no es tan diferente de la de grado dos que sí que se imparte en estos cursos.

Últimamente se está investigando mucho sobre qué metodologías son más apropiadas para fomentar el aprendizaje de los alumnos. Yo creo que una metodología muy interesante es la de los juegos, existen infinidad de juegos matemáticos adaptados a todos los niveles que pueden ser llevados a las aulas de secundaria. Quizás este tipo de metodología sea más apropiada para alumnos de Educación Secundaria Obligatoria que para los alumnos de Bachillerato, pero a estos últimos también se les puede aplicar, aunque quizás en menor medida. Al final de estas conclusiones se detallan algunos que pueden desarrollarse en el nivel de 3ºESO.

También creo que es necesario exponer numerosos ejemplos a los alumnos, pues es una buena manera de fijar los conceptos, pero creo que los que aparecen en los libros de texto, que en la realidad son los que los alumnos realizan, son muy repetitivos, y no fomentan para nada la reflexión por parte del alumno. Hay que intentar evitar que los alumnos aprendan a realizar mecánicamente los ejercicios, una buena solución para esto podría ser contextualizar los problemas, de modo que no parezcan todos una copia de los ejemplos en la que solo cambian los datos, consiguiendo de este modo que los alumnos tengan que pensar un poco más.

Este trabajo se podría ampliar llevando un pequeño experimento a las aulas de secundaria: explicarles estos temas a dos clases de alumnos del mismo nivel, en una de ellas se seguiría con la metodología habitual, en la otra se usaría una metodología diferente, introduciendo juegos para practicar los conceptos, al finalizar el tema se les haría a las dos clases el mismo examen y se analizarían los resultados obtenidos. También se podrían realizar entrevistas a profesores, tanto de institutos públicos como de colegios privados, para averiguar qué metodología siguen ellos para enfocar estos temas, y si creen que es el más apropiado para los alumnos.

Por ejemplo, para que los alumnos de 3ºESO practiquen las ecuaciones se pueden realizar las siguientes experiencias, podrían hacerse todas, o solo aquellas que se consideren más apropiadas para esos alumnos en concreto:

1.Se les puede pedir a los que traduzcan al lenguaje algebraico el epitafio de Diofanto, y que resuelvan la ecuación para averiguar cuántos años vivió. Puede aprovecharse también este ejercicio para hacer una introducción histórica sobre Diofanto.

“Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”

2.La representación gráfica de los sistemas de ecuaciones viene en todos los libros de texto, pero mi experiencia me dice que rara vez se practica en el aula, y creo que puede ayudar a los alumnos a comprender lo que se hace. Una actividad interesante puede ser darles a los alumnos cuatro rectas:

$$r_1: x - y = 6$$
$$r_2: x - y = -8$$
$$r_3: 3x + y = 10$$
$$r_4: 2x - 2y = 12$$

Los alumnos deberán representar las 4 rectas y analizar el gráfico obtenido.

3.El profesor les va dando a los alumnos las siguientes instrucciones:

- Pensad un número.
- Sumadle 15.
- Multiplicad por 3 el resultado.
- A lo que salga restadle 9.
- Divididlo entre 3.
- Retadle 8.
- ¿Qué número os sale?

Con el número que les salga el profesor podrá adivinar qué número habían pensado, luego se le explicará a los alumnos que se ha averiguado gracias a las matemáticas, pues se ha construido la ecuación:

$$\frac{(x+15)\cdot 3-9}{3}-8=y$$

Donde x es el número que han pensado e y es el resultado final, despejando la x:

$$x=y-4$$

Otra opción es dejar que los alumnos averigüen por su cuenta porqué el profesor ha adivinado tan rápidamente el número que habían pensado.

4.Otra actividad que se les puede proponer a los alumnos de este nivel es jugar con balanzas, se llevan algunas pesas cuyo valor se conoce y otras cuyo valor tendrán que averiguar, y que jueguen con distintas pesas hasta conseguir equilibrarla. Esta actividad tiene que estar muy preparada, para que la balanza se equilibre con algunas pesas concretas.

5.La resolución de problemas es una metodología que siempre funciona. Se les pueden proponer a los alumnos problemas contextualizados para que los resuelvan, y también se les puede dar una ecuación y pedirles que la contextualicen ellos, así se darán cuenta de qué significa resolver una ecuación, y no se limitarán a resolver mecánicamente los ejercicios. También se les puede pedir que calculen la solución a alguna ecuación por tanteo.

Estas experiencias son solo algunas de las muchas que pueden realizarse con los alumnos, tanto de 3ºESO como de cualquier otro nivel, solo hay que echarle imaginación, claro que también requiere un mayor esfuerzo por parte del profesor.

Bibliografía.

A. Dahan-Dalmedico y J. Peiffer, "Une histoire des mathématiques", éditions du Seuil, 1986.

Agustín Anfossi y Flores Meyer, "Álgebra", editorial Progreso, 1930.

Ana Cecilia Lorente Morata, "Historia del álgebra y de sus textos".

Decreto 42/2008 por el que se establece el currículo de Bachillerato en Castilla y León.

Decreto 52/2007 por el que se establece el currículo de la ESO en Castilla y León.

Grupo Azarquiel, "Ideas y actividades para enseñar álgebra", editorial Síntesis, 1991.

Irene Zapico, "Enseñar matemáticas con su historia", Universidad de Buenos Aires.

Jesús Garrido Arjona "Ecuaciones lineales. Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas", curso DMDI.

Jorge Mozo Fernández, "Resolución de ecuaciones algebraicas", Universidad de Valladolid.

Libros de todos los niveles de la editorial ANAYA.

Libros de 2ºESO y 3ºESO de la editorial EDELVIVES.

Libros de 1º y 2º de Bachillerato de las Ciencias Sociales de la editorial SANTILLANA.

María Teresa González Montesinos, "Polinomios y fracciones algebraicas", Universidad de Cádiz.

Programaciones educativas de todos los niveles, editorial ANAYA.

Real Decreto 1631 a 5 de Enero de 2007, del BOE.

Ricardo Moreno Castillo, "Al-Jwarizmi, el algebrista de Bagdad", editorial Nivola 2010.