Universidad de Valladolid

RECORRIDO POR LAS DIFERENTES VERSIONES DEL TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE KURT GÖDEL

AUTORA: María Pérez Calvo

TUTOR: Juan Barba Escribá

Grado en Filosofía

Facultad de Filosofía y Letras

Universidad de Valladolid

Julio, 2019

Resumen: en el presente trabajo se ofrece un recorrido explicativo por las diferentes versiones del Teorema de Incompletitud presentado por el lógico Kurt Gödel. La primera será la más sencilla, la cual se demuestra a través del teorema propuesto por Tarski. En segundo lugar veremos una demostración de incompletitud para un sistema aritmético básico con suma, multiplicación y exponenciación, para posteriormente demostrar que es posible llevar a cabo la demostración en un sistema equivalente que prescinde de la exponenciación. Mostraremos también la demostración de Gödel para los sistemas que él denominará ω-consistentes y finalizaremos con la demostración de incompletitud que ofrece Rosser a través de una nueva fórmula diferente a la empleada por Gödel.

Palabras clave: Kurt Gödel, Incompletitud, Lógica, Sistema Incompleto, Filosofía, Tarski, Rosser.

Índice

Introducción

El Teorema de Incompletitud, publicado en 1931, propuesto por el lógico, matemático y filósofo austríaco Kurt Gödel (1906 – 1978) ha tenido una relevancia fundamental en la lógica del s. XX. Dada la popularidad del resultado y la existencia de diferentes versiones del teorema es frecuente encontrar referencias imprecisas, inexactas o directamente erróneas. Durante el desarrollo de este trabajo vamos a ir recorriendo las diferentes versiones de este teorema, desde la más sencilla de demostrar, a través del teorema propuesto por el lógico polaco Alfred Tarski (1901 – 1983), hasta la versión ofrecida en 1936 por el lógico estadounidense John Barkley Rosser (1907 – 1989). Además, iremos explicando cada una de las demostraciones paso a paso con la intención de esclarecer los procesos que nos llevan a afirmar la incompletitud de los sistemas aritméticos.

Las diferentes versiones de las que iremos hablando se irán sucediendo desde las más débiles y sencillas de entender, en las que asumimos condiciones más fuertes, hasta versiones más fuertes en las que asumimos condiciones cada vez más débiles, pero que a su vez son más complejas de entender.

En el primer apartado vamos a ofrecer una primera idea de los elementos básicos que necesitamos para posteriormente aplicarlos a los casos concretos que nos lleven hasta las diferentes versiones de la demostración de incompletitud de los sistemas. Además, veremos dos versiones abstractas de los dos primeros teoremas, el propuesto por Tarski y uno que combina las ideas de Tarski con las propuestas por Gödel. En el segundo apartado comenzamos a aplicar estos elementos básicos a un caso concreto, el del lenguaje $\mathscr{L}_E$, un lenguaje de primer orden estándar pensado para la aritmética, lenguaje para el que estableceremos una formulación precisa del Teorema de Tarski.

Los dos siguientes apartados consistirán en la demostración de incompletitud del sistema P.E, es decir, un sistema conformado por la Aritmética de Peano con el añadido de unos esquemas de exponenciación. Para este sistema veremos una formulación concreta del Teorema de Gödel-Tarski. Posteriormente demostramos que la exponenciación es superflua y que la Aritmética de Peano solo con la suma y la multiplicación (sistema al que nos referiremos como P.A.) es equivalente e igualmente válida para esta demostración. Veremos entonces la demostración de la incompletitud de este sistema a través del teorema genuinamente propuesto por Gödel, el Teorema G. En este se empleará la consistencia simple de los sistemas y el concepto de la ω-consistencia de estos introducida por Gödel. Demostraremos la incompletitud de este sistema a partir de la demostración de incompletitud de su subsistema más básico.

Por último, en el sexto apartado, veremos la versión que ofrece Rosser de la demostración de incompletitud empleando una sentencia diferente a la utilizada por Gödel que, pese a ser menos intuitiva, nos ofrece la demostración del Teorema R, de mayor fuerza que el Teorema G. En este caso únicamente se asumirá la consistencia simple de los sistemas, dejando también de lado la ω-consistencia necesaria en la demostración de Gödel. Además, realizaremos una breve comparativa de ambas sentencias. Finaliza el trabajo un apartado con ciertas consideraciones finales que ayudan a la comprensión general de todo lo explicado.

1. Primeras versiones abstractas del teorema

Para empezar vamos a ofrecer una versión abstracta de lo que vamos a ir elaborando posteriormente en el trabajo. Vamos a describir unos elementos básicos con los que luego estructurar los razonamientos de Gödel. Cada uno de los lenguajes $\mathscr{L}$ a los que podemos aplicar el argumento de Gödel contiene al menos los siguientes elementos:

- Expresiones: en primer lugar, un conjunto enumerable $\mathscr{E}$, cuyos elementos se denominan expresiones de $\mathscr{L}$
- Sentencias: de este conjunto de expresiones obtenemos un subconjunto $\mathscr{S}$ formado por las sentencias de $\mathscr{L}$. Dentro de las sentencias vamos a resaltar:
    - Un subconjunto $\mathscr{P}$ de $\mathscr{S}$ formado por las sentencias demostrables de $\mathscr{L}$.
    - Un subconjunto $\mathscr{R}$ de $\mathscr{S}$ formado por las sentencias refutables de $\mathscr{L}$.
- Predicados: un conjunto $\mathscr{H}$ de expresiones integrado por los llamados predicados de $\mathscr{L}$. Informalmente, cada uno de ellos representa o sería el nombre de un conjunto de números naturales.
- Una función que se encarga de asignar a cada expresión E y a cada número natural n una expresión $E(n)$. Lo que nos interesa de esta función es que tiene que cumplir la condición de que para todo predicado H y todo número natural n, la expresión $H(n)$ sea una sentencia.
  ¿Por qué nos interesa? De esta forma vamos a poder tener una sentencia que predica cualquier predicado de cualquier número. Lo explicamos de forma tan general porque cuando lo aritmetizamos tenemos una función binaria con un número que representa una expresión y un número que representa a un número, y para que esto valga siempre, el argumento de expresión tiene que poder ser cualquier número.
- Sentencias verdaderas: en la primera versión, vía Teorema de Tarski, se añade este elemento, el conjunto $\mathscr{T}$ de sentencias compuesto por las sentencias verdaderas de $\mathscr{L}$.

¿Cómo con estos ingredientes podemos construir un argumento? Lo primero que vamos a hacer es introducir una noción de expresabilidad. A partir de este último elemento podemos explicar la noción de expresabilidad en $\mathscr{L}$. Diremos que un predicado *H* es verdadero para un número *n* (equivale a decir que *n* satisface *H*) si *H(n)* es una sentencia verdadera, es decir, $H(n) \in \mathscr{T}$. Decimos que el conjunto de todos los *n* que satisfacen *H* es el conjunto expresado por *H*. Por tanto, para cualquier conjunto *A* de números, *H* expresa *A* syss para cada número *n*: $H(n) \in \mathscr{T} \leftrightarrow n \in A$. Podemos pues establecer la siguiente definición: un conjunto A se denomina expresable en $\mathscr{L}$ si A es expresado por algún predicado de $\mathscr{L}$. Dado que hay una cantidad infinita enumerable de expresiones de $\mathscr{L}$, hay una cantidad finita o infinita enumerable de predicados de $\mathscr{L}$, pero gracias al Teorema de Cantor sabemos que la cantidad de conjuntos de números naturales es no numerable, es decir, infinita, por lo que no todo conjunto de números es expresable en $\mathscr{L}$.

La segunda noción que necesitamos es la de corrección. Esta noción es muy importante para las posteriores demostraciones. Por definición diremos que un sistema $\mathscr{L}$ se denomina correcto si toda sentencia demostrable es verdadera en él, es decir, si $\mathscr{P}$ es un subconjunto de $\mathscr{T}$. La importancia de este concepto radica en que, siendo $\mathscr{L}$ un sistema correcto, nuestro objetivo en la primera demostración de incompletitud consistirá en encontrar en él una sentencia que siendo verdadera no sea demostrable en $\mathscr{L}$.

Para poder llevar a cabo las distintas demostraciones también es necesario introducirnos en la numeración y la diagonalización. Para entender la numeración, tomamos *g* como una función 1 – 1 que asigna a cada expresión *E* un número natural *g(E)* que, a partir de ahora, pasará a denominarse "número Gödel" de la expresión *E*. En el sistema propuesto por Smullyan (1992), que seguiremos aquí, todo número natural es el número Gödel de alguna expresión. Para cada *n*, E_n será la expresión cuyo número Gödel es *n*. ¿Por qué necesitamos la numeración? Queremos que el lenguaje hable del lenguaje, y para ello los números de las expresiones son una especie de nombres.

Sin embargo, una fórmula no puede hablar directamente de sí misma, cuando aplicas un predicado a un número, puedes hablar de ese número, pero una fórmula no puede contener su propio número, por lo que no puede hablar de él. Necesitamos un mecanismo que le permita hacerlo de forma indirecta, por lo que introducimos ahora la diagonalización, un método que permitiría la construcción de fórmulas autorreferentes. El método de diagonalización que vamos a ver no es el que utiliza Gödel, sino que es una sistematización que se realiza posteriormente con el fin de simplificar. Dada una expresión E_n, su diagonalización será la expresión $E_n(n)$. Los casos que nos interesan son aquellos en los que E_n es un predicado, en cuyo caso su diagonalización será un sentencia. En este caso la sentencia será verdadera syss el predicado E_n se satisface por su propio número Gödel *n*. Basándose en esta idea se consigue llegar a una expresión que predique su propia indemostrabilidad.

Para hacer una oración que hable de sí misma, necesitamos diagonalizar y además poder hablar de la diagonalización en el lenguaje. Para cualquier *n*, sea *d(n)* es el número Gödel de $E_n(n)$. De esta manera, para poder calcular el número Gödel de una expresión a partir de otra necesitaremos la conocida como función diagonal del sistema: *d(x)*, la función que aplicada a una expresión nos da el número de su diagonalización. La diagonalización transforma una expresión en otra, es una operación con expresiones, y eso tiene su paralelo en una operación con números, transforma el número de una expresión en el número de otra.

¿Cómo se articula esto para llevarnos a la demostración? Si tenemos un conjunto cualquiera de números naturales *A*, podremos obtener el conjunto *A** formado por todos los números cuya diagonalización está en *A*, es decir, el conjunto de todos los números *n* tal que $d(n) \in A$. De esta forma, por definición de *A**, para cualquier *n*, se da la equivalencia $n \in A^* \leftrightarrow d(n) \in A$. Además, podemos definir también a partir del conjunto de números naturales *A*, el conjunto $\tilde{A}$, llamado complementario de *A*, formado por todos los números naturales que no están en *A*.

Con todo esto vamos a demostrar nuestra versión abstracta del Teorema (GT), Teorema de Gödel-Tarski:

Teorema de Gödel-Tarski (versión abstracta): si el conjunto $\tilde{P}^*$ es expresable en $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}$ es un sistema correcto, entonces hay una sentencia verdadera de $\mathscr{L}$ que no es demostrable en $\mathscr{L}$.

Demostración: Tomamos *H* como un predicado que expresa $\tilde{P}^*$ en $\mathscr{L}$ (tiene que existir, puesto que $\tilde{P}^*$ es expresable por hipótesis), y *h* como el número Gödel de *H*. Tomamos *G* como la diagonalización de *H*, es decir, *G* es la sentencia *H(h)*. Con estos elementos mostraremos que G es verdadera, pero no demostrable en $\mathscr{L}$. Ya que H expresa $\tilde{P}*$ en $\mathscr{L}$, entonces para cualquier número natural n, $H(n)$ es verdadera $\leftrightarrow n \in \tilde{P}*$. Esta equivalencia vale para todo n, por lo que se mantiene para h. Por tanto, si sustituimos n por h llegamos a la siguiente equivalencia: $H(h)$ es verdadera $\leftrightarrow h \in \tilde{P}*$. Partiendo de esto, establecemos que $h \in \tilde{P}* \leftrightarrow d(h) \in \tilde{P} \leftrightarrow d(h) \notin P$. Habíamos dicho que $d(h)$ era el número Gödel de $H(h)$, por tanto, $d(h) \in P \leftrightarrow H(h)$ es demostrable en $\mathscr{L}$, y $d(h) \notin P \leftrightarrow H(h)$ no es demostrable en $\mathscr{L}$. De esta forma tenemos que $H(h)$ es verdadera $\leftrightarrow H(h)$ no es demostrable en $\mathscr{L}$. De una forma esquemática este argumento quedaría de la siguiente manera:

- $H(h)$ es verdadera $\leftrightarrow h \in \tilde{P}*$ (H expresa $\tilde{P}*$)
- $h \in \tilde{P}* \leftrightarrow d(h) \in \tilde{P}$ (por definición de $P*$)
- $d(h) \in \tilde{P} \leftrightarrow d(h) \notin P$ (por definición de $\tilde{P}$)
- $d(h) \notin P \leftrightarrow H(h)$ no es demostrable (por definición de P)

El bicondicional que acabamos de demostrar, $H(h)$ es verdadera $\leftrightarrow H(h)$ no es demostrable, nos deja dos opciones, que H sea verdadera y no demostrable en el sistema, o que H sea falsa y demostrable en el sistema. Puesto que el sistema es correcto, no es posible que H sea falsa y demostrable, por lo que será verdadera y no demostrable en el sistema. Así concluye la demostración del teorema abstracto.

Una sentencia X se considera decidible en $\mathscr{L}$ cuando es o demostrable o refutable en ese sistema; y se considera indecidible en $\mathscr{L}$ en otro caso. En función de la decidibilidad de las sentencias que lo conforman, un sistema $\mathscr{L}$ puede ser completo, cuando cada una de las sentencias es decidible en $\mathscr{L}$; o incompleto, cuando alguna de ellas es indecidible en $\mathscr{L}$. Teniendo en cuenta estos nuevos conceptos, si suponemos que el sistema $\mathscr{L}$ satisface la hipótesis del Teorema (GT), una sentencia G es verdadera pero no demostrable en $\mathscr{L}$, pero ya que G es verdad, tampoco es refutable en $\mathscr{L}$, por lo que decimos que G es una sentencia indecidible en el sistema $\mathscr{L}$.

Ahora vamos a aplicar este teorema abstracto a casos concretos, y para ello necesitamos ver que se cumple la condición básica "$\tilde{P}*$ es expresable". La hipótesis de que $\tilde{P}*$ es un conjunto expresable en $\mathscr{L}$, para los lenguajes en concreto que vamos a estudiar, puede verificarse a través de tres condiciones:

- G_1: para cualquier conjunto A expresable en $\mathscr{L}$, el conjunto A^* es expresable en $\mathscr{L}$.
- G_2: para cualquier conjunto A expresable en $\mathscr{L}$, el conjunto $\tilde{A}$ es expresable en $\mathscr{L}$.
- G_3: el conjunto P es expresable en $\mathscr{L}$.

A partir de G_1 y G_2 podemos implicar que si A es expresable, entonces el conjunto $\tilde{A}^*$ es expresable en $\mathscr{L}$ también. Por tanto, si P es expresable en $\mathscr{L}$, $\tilde{P}^*$ también lo es.

Diremos que E_n es una sentencia Gödel para un conjunto de números A si, o bien E_n es verdad y su número Gödel pertenece a A; o bien E_n es falsa y su número Gödel n cae fuera del dominio de A. En otras palabras, E_n es una sentencia Gödel para A syss se cumple la siguiente condición: $E_n \in \mathscr{T} \leftrightarrow n \in A$, es decir, es una sentencia que afirma que su propio número Gödel pertenece a A.

Vamos a abordar ahora un teorema importante, el Teorema de Tarski, para cuya demostración necesitamos un lema auxiliar a partir del cual también podemos demostrar el Teorema (GT):

Lema (D): para cualquier conjunto A, si A^* es expresable en $\mathscr{L}$, entonces hay una sentencia Gödel para A, una sentencia que dice de sí misma que pertenece a A; además, si $\mathscr{L}$ satisface la condición G_1, entonces para cualquier conjunto A expresable en $\mathscr{L}$, existe una sentencia Gödel para A.

Demostración: tomamos H como un predicado que expresa A^* en $\mathscr{L}$, y h como su número Gödel, siendo así $d(h)$ el número Gödel de $H(h)$. Para cualquier número natural n, $H(n)$ es verdadera $\leftrightarrow n \in A^*$, por tanto, $H(h)$ es verdadera $\leftrightarrow h \in A^*$. Por definición de los conjuntos, $h \in A^* \leftrightarrow d(h) \in A$. Entonces, $H(h)$ es verdadera $\leftrightarrow d(h) \in A$, y ya que $d(h)$ es el número Gödel de $H(h)$, $H(h)$ es una sentencia que dice de sí misma que pertenece a A, es decir, es una sentencia Gödel para A. Aquí concluye la demostración del Lema (D).

A partir del Lema (D) es muy fácil obtener otra demostración muy simple del Teorema (GT), ya que $\tilde{P}^*$ es expresable en $\mathscr{L}$, según el Lema (D), hay una sentencia Gödel G para $\tilde{P}$, una sentencia que es verdadera syss no es demostrable en $\mathscr{L}$.

Otra consecuencia extraíble del Lema (D) y que es de vital importancia para nuestro estudio es nuestra versión abstracta del Teorema de Tarski, Teorema (T), un teorema no análogo al Teorema (GT), puesto que solo habla de lo que es verdadero, no habla de la demostrabilidad o indemostrabilidad.

Teorema de Tarski (versión abstracta): sea T el conjunto de números Gödel de las sentencias verdaderas de $\mathscr{L}$:

- El conjunto $\tilde{T}^*$, el conjunto de números de las expresiones no verdaderas cuyas diagonalizaciones están en $\tilde{T}$, no es expresable en $\mathscr{L}$.
- Si la condición G_1 se cumple, entonces $\tilde{T}$ no es expresable en $\mathscr{L}$.
- Si tanto G_1, como G_2 se cumplen, entonces el conjunto T no es expresable en $\mathscr{L}$, es decir, no podemos expresar en $\mathscr{L}$ todas las sentencias verdaderas.

Demostración: en primer lugar, observamos que no es posible que exista una sentencia Gödel para el conjunto formado por las sentencias falsas y las cosas que no son sentencias, el conjunto $\tilde{T}$. La razón es que esa sentencia sería verdadera syss su número Gödel no fuera el número Gödel de una sentencia verdadera, algo que es absurdo porque sería una sentencia que expresaría la paradoja del mentiroso. Respecto al primer punto, si $\tilde{T}^*$ fuera expresable en $\mathscr{L}$, según el Lema (D), existiría una sentencia Gödel para el conjunto $\tilde{T}$, algo que, como acabamos de ver, es imposible. Por tanto, $\tilde{T}^*$ no es expresable en $\mathscr{L}$. Con el segundo punto, suponiendo que se cumple G_1, si $\tilde{T}$ fuera expresable en $\mathscr{L}$, el conjunto $\tilde{T}^*$ sería expresable en $\mathscr{L}$, violando lo que acabamos de ver. Finalmente, suponiendo que también se cumple G_2, si T fuera expresable en $\mathscr{L}$, $\tilde{T}$ también lo sería, violando lo anterior. Aquí concluye la demostración del teorema.

Para que resulte más sencillo encontrar el significado intuitivo de lo que hemos dicho en este apartado vamos a realizar una esquematización de las ideas principales. Suponemos que tenemos dado un lenguaje para hablar de la aritmética:

- Tenemos un conjunto P que es el conjunto de las expresiones demostrables de S.
- Que P sea expresable significa que tenemos una fórmula $H(x)$ que significa "x es el número de una expresión demostrable" (a partir de ahora resumiremos esta expresión en "x es demostrable"). De esta forma, $H(n)$ significará "n es demostrable".

- P^* es expresable significa que tenemos una fórmula $H(x)$ que significa que la diagonalización de x es demostrable, es decir, que $H(x)$ es demostrable.
- $\tilde{P}$ es expresable significa que tenemos una fórmula $H(x)$ que significa que x no es demostrable.
- $\tilde{P}^*$ es expresable significa que tenemos una fórmula $H(x)$ que significa que la diagonalización de x no es demostrable. Si diagonalizamos esta última fórmula $H(x)$ tendremos $H(k)$ (donde k es el número de $H(x)$), que dirá que la diagonalización de k, es decir, ella misma, no es demostrable, por tanto, $H(k)$ no es demostrable.

El Teorema de Tarski va a emplear el mismo procedimiento, pero en vez de hablar en términos de demostrabilidad, lo hará en términos de verdad aritmética. El resultado final en este caso nos hace capaces de construir la sentencia de la paradoja del mentiroso.

2. Una aplicación más concreta: el lenguaje $\mathscr{L}_E$

Vamos a empezar a dar contenido a lo visto de forma abstracta a través de lenguajes y sistemas aritméticos concretos. Hasta ahora hemos hablado de características generales de los distintos lenguajes a los cuales se aplican estos diferentes argumentos lo hacíamos desde una perspectiva muy general. Ahora vamos a ver el primer ejemplo particular de un lenguaje que encaja con esa descripción abstracta. Vamos a definir lenguaje de primer orden estándar pensado para la aritmética, basado en la suma, la multiplicación y la exponenciación ($\mathscr{L}_E$). Este lenguaje lo formulamos usando únicamente un alfabeto finito formado por los siguientes 12 símbolos: 0 ’ ( ) *f* ’ *v* ∼ ⊃ ∀ = ≤; y un último elemento que utilizamos como separador: #.

- Con estos símbolos construimos los numerales, representados por las expresiones 0, 0’, 0’’, 0’’’... y que utilizaremos como nombres de los números naturales 0, 1, 2, 3… respectivamente.
- La virgulilla tiene la función de representar a la función de sucesor.
- De igual forma que necesitamos los numerales para dar nombre a los números naturales, necesitamos nombres para las operaciones de suma, multiplicación y exponenciación, y para eso utilizaremos las expresiones f', f'' y f''' respectivamente. Estas tres expresiones se abrevian con expresiones más familiares: +, · y **E**.
- Tanto ∼ como ⊃ desempeñan la misma función que en la lógica proposicional, la negación el primero y la implicación material el segundo, de igual forma que ∀ también aparece realizando la labor de cuantificador universal, pero únicamente cuantificará números naturales, no conjuntos ni relaciones.
- El símbolo = también desempeña su labor usual como designador de la relación de identidad, igual que ≤ con la relación “menor o igual que”.
- Por último, v_1, v_2, v_3…las expresiones denominadas variables, se designarán por las expresiones respectivas (v'), (v''), (v''')…

En este lenguaje, una expresión se denomina término si se sigue como consecuencia de las dos siguientes reglas: toda variable y todo numeral es un término; si tenemos dos términos t_1 y t_2, entonces también se consideran términos (t_1 + t_2), ($t_1 \cdot t_2$), (t_1 **E** t_2) y t_1'. Si el término no contiene variables se dice que es un término cerrado o constante. Dados dos términos cualesquiera también obtenemos las dos expresiones $t_1 = t_2$ y $t_1 \leq t_2$, denominadas fórmulas atómicas. El conjunto de todas las fórmulas se obtiene entonces de forma inductiva siguiendo las siguientes reglas: toda fórmula atómica es una fórmula; si F y G son fórmulas, entonces $\sim F$ y ($F \supset G$) son fórmulas, y para toda variable v_i, también es una fórmula la expresión $\forall v_i F$.

Las variables pueden aparecer en las fórmulas de $\mathscr{L}_E$ o bien ligadas, o bien libres. Para cualquier término t, todas las apariciones de v_i en t se denominan apariciones libres. También son apariciones libres todas las apariciones de v_i es cualquier fórmula atómica A. Para cualesquiera fórmulas F y G, las apariciones libres de v_i en ($F \supset G$) son la unión de las apariciones libres en F y en G, mientras que las de $\sim F$ son las mismas que las de F. Lo contrario de las apariciones libres son las apariciones ligadas, y esto es lo que ocurre con todas las apariciones de v_i en $\forall v_i F$. Para cualquier $j \neq i$, las apariciones libres de v_i en $\forall v_i F$ son aquellas que aparecen en F. Cuando hablamos de las sentencias que conforman $\mathscr{L}_E$, nos referimos a cualquier fórmula en la que no hay ninguna variable libre, también llamada fórmula cerrada.

Como se ha dicho más arriba, llamamos numerales a los nombres que utilizamos para designar a los números naturales. Para cualquier número natural n, el numeral que designa n será $\bar{n}$, símbolo que abrevia el 0 seguido de n apariciones del símbolo ' según los 13 símbolos que conforman $\mathscr{L}_E$. Escribimos $F(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ para designar cualquier fórmula en la que $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ sean las únicas variables libres, y para cualesquiera números $k_1, \ldots, k_n$, escribimos $F(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$ para representar el resultado de sustituir cada aparición libre de $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ por $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$ respectivamente. $F(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$ se denominará instancia de $F(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$. Esta última puede denominarse regular siempre que $i_1 = 1, \ldots, i_n = n$, es decir, si para cada i, si v_i es una variable libre de F, entonces para cualquier $j \leq i$, v_j también es una variable libre de F. Si fuese regular, se escribiría de la siguiente forma: $F(v_1, \ldots, v_n)$.

Una vez definidas inductivamente las fórmulas, podemos definir el grado de una fórmula. Con él nos referimos al número de veces que aparecen los conectores lógicos $\sim$ y $\supset$ y el cuantificador $\forall$ en la fórmula. De esta forma podemos decir que las fórmulas atómicas son de grado 0, y que para dos fórmulas cualesquiera F y G de grados respectivos d_1 y d_2, la fórmula $\sim F$ será de grado $d_1 + 1$; la fórmula $(F_1 \supset F_2)$ es de grado $d_1 + d_2 + 1$; y para cualquier variable v_i, la fórmula $\forall v_i F_1$ será de grado $d_1 + 1$. Su papel es muy relevante en tanto que el principio de inducción matemática consiste en mostrar que si una propiedad la cumplen todas las fórmulas atómicas y además, si la cumplen las fórmulas de grado n, también la cumplen las de grado $n + 1$, entonces la cumplen todas las fórmulas.

¿Cómo definimos la verdad de las expresiones de este lenguaje? El concepto de verdad desempeña una función principal en la versión del teorema Gödel-Tarski, no así en otras versiones del teorema que veremos. Definimos inductivamente el conjunto de las sentencias verdaderas mediante las siguientes 4 condiciones:

T_0: en primer lugar, una sentencia atómica $c_1 = c_2$ (donde ambos son términos constantes, es decir, no tienen variables) es verdadera syss ambos términos designan al mismo número natural. Segundo, la sentencia atómica $c_1 \leq c_2$ es verdadera syss el número que designa c_1 es menor o igual que el designado por c_2.

T_1: una sentencia de forma $\sim X$ es verdadera syss X no es verdadera.

T_2: una sentencia condicional $X \supset Y$ es verdadera syss, o bien X no es verdadera, o bien tanto X como Y son verdaderas.

T_3: una sentencia universal $\forall v_i F$ es verdadera syss para todo número n, la sentencia $F(\bar{n})$ es verdadera.

La noción de verdad es aplicable a las fórmulas cerradas, en el caso de las fórmulas abiertas como $F(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ hablamos de corrección. La fórmula se considera correcta si para todos los números $n_1, \ldots, n_k$ la sentencia $F(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_k)$ es verdadera. Diremos de dos sentencias que son equivalentes cuando ambas son verdaderas o ambas son falsas. En el caso de dos fórmulas abiertas $F(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ y $G(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ con las mismas variables, diremos que son equivalentes cuando syss para todos los números $n_1, \ldots, n_k$, las sentencias $F(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_k)$ y $G(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_k)$ son equivalentes.

Para cualquier fórmula $F(v_1)$, donde v_1 es la única variable libre, $F(v_1)$ expresa el conjunto A syss para todos los números n, $F(\bar{n})$ es verdad $\leftrightarrow n \in A$. En el caso de una fórmula regular $F(v_1, \ldots, v_n)$, esta expresa la relación $R(x_1, \ldots, x_n)$ syss para todos los números $k_1, \ldots, k_n$, se cumple la siguiente condición: $F(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$ es verdad $\leftrightarrow R(k_1, \ldots,$

k_n). Como vemos, conjuntos y relaciones se expresan a través de fórmulas. Esto nos lleva a diferenciar entre los conjuntos y relaciones Aritméticas, expresadas por alguna fórmula de $\mathscr{L}_E$, podemos caracterizarlos informalmente como aquellos definibles en lógica de primer orden por +, · y **E**; y los conjuntos y relaciones aritméticas (conviene subrayar que la diferencia se encuentra en el uso de la mayúscula o la minúscula), expresadas por una fórmula de $\mathscr{L}_E$, pero en la que no aparece el símbolo exponencial **E**. Una función $f(x_1, \ldots, x_n)$, con n-tuplas de números naturales a números naturales, será Aritmética si la relación $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ es Aritmética, es decir, syss hay una fórmula $F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ tal que para todos los números $x_1, \ldots, x_n$ e y, la sentencia $F(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y})$ es verdad syss $f(x_1, \ldots, x_n) = y$. En el caso de una propiedad P, de los números naturales, es Aritmética cuando el conjunto de números que tienen esa propiedad P es Aritmética.

Como ya habíamos dicho, queremos que el lenguaje hable sobre las expresiones del lenguaje. Para ello lo que hacemos es asignar números a las expresiones y conseguir reflejar las operaciones que hacemos con expresiones en operaciones aritméticas con números. Lo que hacemos es manipular símbolos, para lo que necesitamos tratar la idea de la yuxtaposición, la operación más básica que hacemos con expresiones, algo que aritméticamente es fácil de llevar a cabo yuxtaponiendo números mediante concatenación.

La concatenación a la Base b emplea un sistema de numeración que sustituye al que emplea Gödel puesto que en él, el paralelo entre lo que hacemos con números y lo que hacemos con símbolos es más sencillo. Para cualquier número $b \geq 2$ vamos a definir una cierta función $x *_b y$ llamada concatenación a la base b. Como introducción intuitiva a este concepto vamos a dar un ejemplo con dos números en base 10, el 19 y el 45. La yuxtaposición de ambos números sería 1945, resultado de $19 \cdot 10^2 + 45$. Para explicarlo de forma general es necesario que empecemos definiendo la base 10: para cualesquiera números m y n, $m *_{10} n = m \cdot 10^{l(n)} + n$, donde $l(n)$ es la longitud de n. En el caso de que la base no fuera 10, sino base b, sería análogo. De esta forma, para cualquier número $b \geq 2$, $m *_b n = \mathrm{m} \cdot b^{l_b(n)} + n$, donde $l_b(n)$ es la longitud de n escrita en notación de base b.

Atendiendo a lo que acabamos de explicitar, para cada $b \geq 2$, la relación $x *_b y = z$ es Aritmética. La demostración consta de los siguientes pasos, partiendo de la premisa de que $b \geq 2$:

1. Tomamos $Pow_b(x)$ como la condición de que x es una potencia de b. Esta condición es Aritmética, porque $Pow_b(x)$ se cumple syss $\exists y(x = b^y)$.
2. La relación $b^{l_b(x)} = y$, entre x e y, es equivalente a la condición de que
$$(x = 0 \land y = b) \lor (x \neq 0 \land s(x, y)),$$
donde $s(x, y)$ es la relación "y es la potencia menor de b mayor que x". Esta condición también es Aritmética porque $s(x, y)$ se cumple syss
$$Pow_b(y) \land x < y \land \forall z((Pow_b(z) \land x < z) \supset y \leq z).$$
3. La relación $x \cdot b^{l_b(y)} + y = z$, que es $x *_b y = z$, es la condición
$$\exists z_1 \exists z_2 (b^{l_b(y)} = z_1 \land x \cdot z_1 = z_2 \land z_2 + y = z)$$
Por tanto, la relación $x *_b y = z$ es Aritmética.

De esta demostración podemos concluir que, para cada $n \geq 2$ (y cualquier $b \geq 2$), la relación $x_1 *_b x_2 *_b \ldots *_b x_n = y$ es Aritmética. De forma inductiva demostramos este corolario: acabamos de demostrar esto mismo para $n = 2$, si suponemos que n es ahora un número igual o mayor que 2 tal que la relación $x_1 *_b \ldots *_b x_n = y$ es Aritmética, entonces $x_1, *_b \ldots *_b x_n *_b x_{n+1} = y$ syss $\exists z(x_1 *_b \ldots *_b x_n = z \land z *_b x_{n+1} = y)$. Por tanto, la relación también es Aritmética.

Las sentencias Aritméticas hablan acerca de números, no acerca de expresiones de $\mathscr{L}_E$. Mediante la asignación de números Gödel a las expresiones, permitimos a las sentencias hablar de manera indirecta acerca de expresiones hablando directamente de los números Gödel de estas. La numeración Gödel que nosotros vamos a emplear en esta explicación es la que emplea Smullyan (1992), que se basa en la idea de la propuesta por Quine (1940), que formuló su lenguaje en un alfabeto de 9 símbolos $S_1, S_2, \ldots, S_9$. De esta forma, para cada expresión compuesta S_{i_n}, asigna el número Gödel que, escrito en notación base 10, corresponde a i_n. En el caso de nuestro $\mathscr{L}_E$ contamos con 13 símbolos, por lo que utilizaremos una notación base 13. La elección de Smullyan de la base 13, una base prima, tiene unas ventajas que veremos más adelante.

- 1 para 0.
- 0 para ’.
- 2 para (.
- 3 para).
- 4 para f.

- 5 para ’.
- 6 para v.
- 7 para ∼.
- 8 para ⊃.
- 9 para ∀.
- η para =.
- ε para ≤.
- δ para #.

Como vemos, utilizamos η, ε y δ como los dígitos 10, 11 y 12 en base 13. Cuando tenemos una cadena de estos símbolos, reemplazamos cada uno por su dígito correspondiente en base 13. Basándonos en esta idea, llamaremos expresión a cualquier cadena formada por estos 13 símbolos, o algunos de ellos, que no empiece por ’ (porque tendríamos el mismo número para ’, para ’’, para ’’’…), excepto que sea únicamente ’. Para cualesquiera expresiones E_x y E_y, la expresión E_xE_y consiste en E_x seguido de E_y. El número Gödel de esta expresión será $x *_{13} y$.

Llegamos a lo que se conoce como el Teorema de Tarski. Tomamos T como el conjunto de números Gödel de las sentencias verdaderas de $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$, un conjunto perfectamente bien definido de números naturales, pero que, como vamos a demostrar, no es Aritmético. Como dijimos antes, llamamos sentencia Gödel para un conjunto de números A, a una sentencia X si, o bien X es verdadera y su número Gödel se encuentra en A; o en cambio, A es falsa y su número Gödel no se encuentra en A. Demostraremos que para cada conjunto Aritmético A encontramos una sentencia Gödel.

Dada una fórmula $F(v_1)$ con v_1 como la única variable libre, esto es, un predicado, la sentencia $F(\bar{n})$, la sentencia que predica el predicado de n, es equivalente a la sentencia $\forall v_1(v_1 = \bar{n} \supset F(v_1))$, que es la que aquí vamos a considerar como la diagonalización de $F(v_1)$, a la que de aquí en adelante vamos a referirnos como $F[\bar{n}]$. A partir de esto va a ser fácil mostrar que el número Gödel de esta sentencia es una función Aritmética del número Gödel de $F(v_1)$ y el número n. Para cualquier expresión E, fórmula o no fórmula, la expresión $\forall v_1(v_1 = \bar{n} \supset E)$, es decir, $E[\bar{n}]$, es una expresión perfectamente bien definida. En el caso de que E sí que fuese una fórmula, entonces su equivalente $E[\bar{n}]$ también lo es, aunque no necesariamente una sentencia. Si E fuese una fórmula con v_1 como la única variable, entonces por supuesto que $E[\bar{n}]$ sería una sentencia. Para cualesquiera números

x e y, por $r(x, y)$ nos referimos al número Gödel de la expresión $E_x[\bar{y}]$, donde E_x es la expresión cuyo número Gödel es x. La función $r(x, y)$ es Aritmética, y recibirá el nombre de función de representación de $\mathscr{L}_E$. $E_x[\bar{y}]$ es la expresión $\forall v_1(v_1 = \bar{y} \supset E_x)$. Si k es el número Gödel de la expresión $\forall v_1(v_1 =$, y aplicamos el resto de los números Gödel de los distintos elementos que conforman la expresión, tendríamos lo siguiente:

$$\underbrace{\forall v1(v1\ =}_{k}\ \underbrace{\bar{y}}_{13^y}\ \underbrace{\supset}_{8}\ \underbrace{E_x}_{x}\ \underbrace{)}_{3}$$

Observamos que el número Gödel de $E_x[\bar{y}]$ es $k * 13^y * 8 * x * 3$, y por tanto, $r(x, y) = k * 13^y * 8 * x * 3$. La relación $r(x, y) = z$ es obviamente Aritmética.

Tomamos ahora $d(x) = r(x, x)$, siendo $d(x)$ la llamada función diagonal, que será obviamente Aritmética, puesto que $r(x, y)$ lo es. Para cualquier número n, $d(n)$ es el número Gödel de $E_n[\bar{n}]$. Para cualquier conjunto de números A, A^* será el conjunto de todos los n tal que $d(n) \in A$. Por tanto, A^* es el conjunto de todos los números x tal que $\exists y(d(x) = y \wedge y \in A)$. Ya que la función diagonal es Aritmética, existe una fórmula $D(v_1, v_2)$ que expresa la relación $d(x) = y$. Ahora supongamos que $F(v_1)$ es una fórmula que expresa el conjunto A, entonces, A^* se expresa por la fórmula $\forall v_2(D(v_1, v_2) \supset F(v_2))$. De esta manera hemos demostrado que, si A es Aritmético, entonces A^* también lo es. Así vemos que en este sistema se cumple la condición G_1.

La clase de conjuntos Aritméticos está cerrada sobre complementación porque si $F(v_1)$ expresa A, entonces su negación expresa el complementario de A, el conjunto $\tilde{A}$. Vemos como también para este sistema se cumple G_2.

En este lenguaje se cumplen G_1 y G_2, por tanto, esto sumado a la versión más abstracta del teorema nos lleva al Teorema de Tarski:

Teorema de Tarski (para el lenguaje $\mathscr{L}_E$): el conjunto T de números Gödel de las sentencias verdaderas de $\mathscr{L}_E$ no es expresable en $\mathscr{L}_E$, es decir, no es Aritmético.

¿Cómo demostramos en concreto el Teorema de Tarski? Se trata de ver cuál es el papel de la fórmula que expresa la diagonalización. Si T es expresable, existe una fórmula $H(y)$ que expresa T, de forma que $H(n)$ es verdadera syss n es verdadero. $\sim H(y)$ expresa el conjunto $\tilde{T}$, entonces $\sim H(n)$ equivale a que n no es verdadero. La fórmula $\forall y(D(x, y) \supset \sim H(y))$ significa que la diagonalización de x no es verdadera. Si diagonalizamos esta fórmula obtenemos la fórmula que será verdadera y no demostrable en el sistema: $\forall x(x = k) \supset (\forall y(D(x, y) \supset \sim H(y)))$.

3. Demostración de incompletitud del sistema P.E.

Ya tenemos demostrado tanto G_1 como G_2, el siguiente paso es definir un concepto de demostrabilidad y demostrar que se cumple G_3. Para ello necesitamos un sistema, que será el Sistema axiomático P.E. Se compone de ciertas fórmulas a las que denominamos axiomas, y dos reglas de inferencia que nos van a permitir demostrar nuevas fórmulas a partir de las fórmulas que ya hemos demostrado. El número de axiomas será infinito, pero cada uno de ellos será de una de las 19 formas reconocidas establecidas, los esquemas axiomáticos. Estos 19 se clasifican en cuatro grupos. En los axiomas, *F*, *G* y *H* se toman como cualesquiera fórmulas, v_i y v_j como cualesquiera variables y *t* como cualquier término:

- Grupo I: los esquemas axiomáticos para la lógica proposicional.
  - L_1: $(F \supset (G \supset F))$
  - L_2: $(F \supset (G \supset H)) \supset ((F \supset G) \supset (F \supset H))$
  - L_3: $((\sim F \supset \sim G) \supset (G \supset F))$
- Grupo II: los esquemas axiomáticos adicionales para la lógica de primer orden con identidad.
  - L_4: $(\forall v_i(F \supset G) \supset (\forall v_i F \supset \forall v_i G))$
  - L_5: $(F \supset \forall v_i F)$, con tal de que v_i no aparezca en *F*.
  - L_6: $\exists v_i(v_i = t)$, con tal de que v_i no aparezca en *t*.
  - L_7: $(v_i = t \supset (X_1 v_i X_2 \supset X_1 t X_2))$, donde X_1 y X_2 son expresiones tales que $X_1 v_i X_2$ es una fórmula atómica.

Estos dos primeros grupos reciben el sobrenombre de axiomas lógicos y junto con las dos reglas de inferencia constituyen una formalización llevada a cabo por Kalish y Montague (1964) de la lógica de primer orden con identidad. Los dos siguientes grupos de axiomas son los llamados axiomas aritméticos.

- Grupo III.
  - N_1: $(v_1' = v_2' \supset v_1 = v_2)$
  - N_2: $\sim \overline{0} = v'_1$
  - N_3: $(v_1 + \overline{0}) = v_1$
  - N_4: $(v_1 + v_2') = (v_1 + v_2)'$

- N_5: $(v_1 \cdot \bar{0}) = \bar{0}$
- N_6: $(v_1 \cdot v_2') = ((v_1 \cdot v_2) + v_1)$
- N_7: $(v_1 \leq \bar{0} \equiv v_1 = \bar{0})$
- N_8: $(v_1 \leq v_2' \equiv (v_1 \leq v_2 \vee v_1 = v_2')$
- N_9: $((v_1 \leq v_2) \vee (v_2 \leq v_1))$
- N_{10}: $(v_1 \mathbf{E}\, \bar{0}) = \bar{0}'$
- N_{11}: $(v_1 \mathbf{E}\, v_2') = ((v_1 \mathbf{E}\, v_2) \cdot v_1)$

- Grupo IV: se forma únicamente por el esquema axiomático correspondiente a la inducción matemática. Por $F[v_1']$ entenderemos cualquiera de las fórmulas $\forall v_i(v_i = v_1' \supset \forall v_1(v_1 = v_i \supset F))$, donde v_i es cualquier variable que no aparezca en F.
  - N_{12}: $(F[\bar{0}] \supset (\forall v_1(F(v_1) \supset F[v_1']) \supset \forall v_1 F(v_1)))$

Las dos reglas de inferencia que constituyen junto a estos 19 esquemas axiomáticos el sistema P.E. son las siguientes:

- *Modus Ponens*: de F y $(F \supset G)$ inferimos G.
- Generalización: de F inferimos $\forall v_i F$.

Dentro del sistema P.E. se considera una demostración como una secuencia finita de fórmulas tal que cada uno de los miembros de la secuencia es, o bien un axioma, o bien es directamente derivable por dos miembros de la secuencia anteriores a través de la regla de *modus ponens* o directamente derivable de un miembro anterior de la secuencia mediante la regla de generalización. Una fórmula F será demostrable si existe una demostración cuyo último elemento sea F, si esto no sucede la fórmula es refutable.

El objetivo ahora es demostrar que el conjunto de números Gödel de las fórmulas demostrables del sistema P.E. es un conjunto Aritmético. Recordamos que para cualquier base $b \geq 2$, la relación $x *_b y = z$ es Aritmética, y para cada $n \geq 2$, la relación $x_1 *_b x_2 *_b \dots *_b x_n = y$ también lo es. Llevamos a cabo una aritmetización de la sintaxis, es decir, mostramos que las propiedades y relaciones sintácticas de las expresiones se corresponden a través de la numeración de Gödel en propiedades y relaciones aritméticas entre los números correspondientes. A partir de aquí vamos a mostrar varios ejemplos de aritmetización.

Vamos a empezar mostrando cómo podemos expresar en el lenguaje algunas relaciones básicas entre números. Diremos que un número x aparece al inicio de un número y en notación base b si la representación en base b de x es un segmento inicial de la representación en base b de y, y esto lo representaremos mediante la expresión xB_by; en cambio, con xE_by nos referimos al caso en el que x aparece al final de y en notación base b, es decir, cuando x es un segmento final de y; por último, decimos que x aparece entre el inicio y el final de y en notación base b si x termina algún número que empieza y, xP_by.

- $xB_by \leftrightarrow x = y \vee (x \neq 0 \wedge (\exists z \leq y)\ (\exists w \leq y)(\mathrm{Pow}_b(w) \wedge (x \cdot w) *_\mathrm{b}\ z = y))$
- $xE_by \leftrightarrow x = y \vee (\exists z \leq y)(z *_\mathrm{b}\ x = y)$
- $xP_by \leftrightarrow (\exists z \leq y)(z\exists_by \wedge x\ B_bz)$

Diremos entonces que, para cualquier $b \geq 2$ y cualquier $n \geq 2$, las relaciones xB_by, xE_by, xP_by y $x_1 *_b \ldots *_b x_nP_by$ son Aritméticas. A partir de ahora, simplificaremos las expresiones eliminando el subíndice b sabiendo que es igual a 13.

El símbolo # lo empleamos para formar secuencias formales de expresiones a partir de los otros 12 símbolos. Para cualquier expresión del tipo $X_1, \ldots, X_n$, la expresión $\#X_1, \#X_2, \ldots, X_n\#$ sirve como la contrapartida formal de la n-tupla $(X_1, \ldots, X_n)$, y su número Gödel se denominará número secuencia. Tomamos K_{11} como el conjunto de números n tal que δ no aparezca en la representación en base 13 de n. De esta forma, todas las expresiones en las que el símbolo # no aparezca, tienen su número Gödel en K_{11}, y se denominarán expresiones significativas. Para cualquier secuencia finita $(a_1, \ldots, a_n)$ de números en K_{11}, asignamos el número $\delta \mathrm{a}_1 \delta \mathrm{a}_2 \delta \ldots\ \delta a_n \delta$, el número secuencia de la secuencia $(a_1, \ldots, a_n)$. Decimos que x es un número secuencia si x es el número secuencia de alguna secuencia finita de elementos de K_{11}. Seq(x) será la propiedad de ser x un número secuencia. $x \in y$ será la relación y es un número secuencia de alguna secuencia de la que x es miembro; y $x \prec_z y$ será la relación z es el número secuencia de una secuencia en la cual x e y son miembros tales que la primera aparición de x en la secuencia es anterior a la primera aparición de y.

Estas tres condiciones (Seq(y), $x \in y$ y $x \prec_z y$) son Aritméticas:

- $\mathrm{Seq}\ x \leftrightarrow \delta Bx \wedge \delta Ex \wedge \delta \neq x \wedge \delta\delta\tilde{P}x \wedge (\forall y \leq x)(\delta 0yPx \supset \delta By)$
- $x \in y \leftrightarrow \mathrm{Seq}\ y \wedge \delta x \delta Py \wedge \delta\tilde{P}x$

- $x \prec_z y \leftrightarrow x \in z \wedge y \in z \wedge (\exists w \leq z)(wBz \wedge x \in w \wedge \sim y \in w)$

Por tanto, abreviaremos de la siguiente manera: escribiremos $(\forall x \in y)$(- - - -) en lugar de $\forall x(x \in y \supset$ (- - - -)); y para sustituir $\exists x, \exists y(x \prec_w z \wedge y \prec_w z \wedge$ (- - - -)) escribiremos $(\exists x, y \prec_w z)$(- - - -).

Ya hemos hablado de términos y fórmulas anteriormente, pero no hemos llegado a dar una definición explícita de qué son cada uno de ellos. En el caso de los términos, para cualesquiera expresiones X, Y y Z, definimos $\mathscr{R}_t(X, Y, Z)$ como la relación de formación de términos syss Z es una de las expresiones $(X + Y)$, $(X \cdot Y)$, $(X\ \mathbf{E}\ Y)$ o X'. Por secuencia de formación de términos entendemos una secuencia finita $X_1, \ldots, X_n$ de expresiones tal que para cada miembro X_i de la secuencia, o X_i es una variable o un numeral, o hay miembros anteriores X_j y X_k ($j < i$, $k < i$) tales que $\mathscr{R}_t(X_j, X_k, X_i)$. En conclusión, podemos definir explícitamente una expresión X como un término syss existe una secuencia de formación de términos de la cual forme parte.

De forma similar ocurre con las fórmulas, la relación de formación de fórmulas $\mathscr{R}_f(X, Y, Z)$ se cumple si Z es una de las expresiones $\sim X$, $(X \supset Y)$ o $\forall v_i X$ (para alguna variable v_i). Diremos que una secuencia $X_1, \ldots, X_n$ es una secuencia de formación de fórmulas si para cada $i \leq n$, o X_i es una fórmula atómica, o existen números $j < i$ y $k < i$ tales que $\mathscr{R}_f(X_j, X_k, X_i)$. Por tanto, una expresión X es una fórmula syss existe una secuencia de formación de fórmulas de la que es miembro.

Para cualquier secuencia $E_{x_1}, E_{x_2}, \ldots, E_{x_n}$ de expresiones donde $x_1, \ldots, x_n$ forman parte de K_{11}, el número Gödel de la secuencia $(E_{x_1}, \ldots, E_{x_n})$ será el número secuencia de la secuencia $(x_1, \ldots, x_n)$, es decir, el número Gödel de la expresión $\#E_{x_1}\# E_{x_2}\# \ldots\# E_{x_n}\#$. Tenemos una lista de conjuntos y relaciones que conducen a la principal, $P_E(x)$, que expresa que E_x es una fórmula demostrable de P.E., y que, como iremos mostrando, es Aritmética. Los únicos cuantificadores universales que vamos a introducir son acotados, es decir, cuantificadores de la forma $(\forall x \leq y)$, donde y es una variable o un numeral. Los números Gödel de las siguientes funciones Aritméticas, representados por cualesquiera números x e y, van a nombrarse de la siguiente forma: el de $(E_x \supset E_y)$ será x imp y; el de $\sim E_x$ será neg(x); el de $(E_x + E_y)$ será x pl y; el de $(E_x \cdot E_y)$ será x tim y; el de $(E_x\ \mathbf{E}\ E_y)$ será x exp y; el de E_x' será $s(x)$; el de $E_x = E_y$ será x id y; y el de $E_x \leq E_y$ será x le y. La lista de condiciones que antes hemos mencionado es la siguiente, en la que además de enumerarlas, demostramos que son Aritméticas:

- Sb(x): E_x es una cadena de subíndices.
  - $(\forall y \leq x)(yPx \supset 5Py)$
- Var(x): E_x es una variable.
  - $(\exists y \leq x)(\mathrm{Sb}(y) \wedge x\ 26y3)$
- Num(x): E_x es un numeral.
  - $Pow_{13}(x)$
- $R_1(x, y, z)$: se cumple la relación $\mathscr{R}_t(E_x\ E_y, E_z)$.
  - $z = x \text{ pl } y \vee z = x \text{ tim } y \vee z = x \exp y \vee z = s(x)$
- Seqt(x): E_x es una secuencia de formación de términos.
  - $\mathrm{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(\mathrm{Var}(y) \vee \mathrm{Num}(y) \vee (\exists z, w\ \text{¿}\mathbf{x}\ y)R_1(z, w, y))$
- tm(x): E_x es un término.
  - $\exists y(\mathrm{Seqt}(y) \wedge x \in y)$
- $\mathrm{f}_0(x)$: E_x es una fórmula atómica.
  - $(\exists y \leq x)\ (\exists y \leq z)(\mathrm{tm}(y) \wedge \mathrm{tm}(z) \wedge (x = y \text{ id } z \vee x = y \text{ le } z))$
- Gen(x, y): $E_y = \forall wE_x$ para alguna variable w.
  - $(\exists z \leq y)(\mathrm{Var}(z) \wedge y = 9zx)$
- $R_2(x, y, z)$: se cumple la relación $\mathscr{R}_f(E_x\ E_y, E_z)$.
  - $z = x \text{ imp } y \vee z = \mathrm{neg}(x) \vee \mathrm{Gen}(x, z)$
- Seqf(x): E_x es una secuencia de formación de fórmulas.
  - $\mathrm{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(\mathrm{f}_0(y) \vee (\exists z, w\ \text{¿}\mathbf{x}\ y)\ R_2(z, w, y))$
- fm(x): E_x es una fórmula.
  - $\exists y(\mathrm{Seqf}(y) \wedge x \in y)$
- $A(x)$: E_x es un axioma de P.E.
  - Para demostrar que es Aritmética tenemos que separarlo en 19 partes, una por cada esquema axiomático:
    - Para cada $n \leq 7$ tomamos $L_n(x)$ como la condición de que E_x es un axioma de esquema L_n.
    - Para cada $n \leq 12$ tomamos $N_n(x)$ como la condición de que E_x es un axioma de esquema N_n.

Considerando primero el Grupo I, en el caso de $L_1(x)$, E_x es un axioma de L_1 syss hay fórmulas E_y y E_z tales que $E_x = (E_y \supset (E_z \supset E_y))$ y, entonces, $L_1(x)$ es la siguiente condición: $(\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(\mathrm{fm}(y) \wedge \mathrm{fm}(z) \wedge x = y \text{ imp } (z \text{ imp } y)$. Con L_2 y L_3 ocurre lo mismo.

Respecto al Grupo II, $L_4(x)$ será el caso que tomaremos como ejemplo. $\varphi(y, z, w)$ será el número Gödel de $\forall E_y((E_z \supset E_w) \supset (\forall E_y E_w))$. $L_4(x)$ se cumple syss hay números y, z y w, todos menores o iguales que x, tales que var(y), fm(z), fm(w) y $x = \varphi(y, z, w)$.

La demostración para el Grupo III es trivial dado que cada uno de los esquemas contiene un único axioma, y entonces, por cada $i \leq 12$. $N_i(x)$ es simplemente la condición $x = g_i$, donde g_i es el número Gödel del axioma N_i.

Por último, el Grupo IV. Para demostrar que N_{12} es una condición Aritmética, primero verificamos que la relación que se da cuando E_x es una fórmula y E_y es una de las fórmulas de tipo $E_x[v_1']$ definidas en el tipo IV, es una relación Aritmética entre x e y. De esto se sigue la obviedad de que N_{12} es Aritmética.

- M.P.(x, y, z): E_z es derivable de E_x y E_y a través de la regla 1 (*modus ponens*).
    - $y = x \text{ imp } z$
- Der(x, y, z): E_z es derivable de E_x y E_y a través de la regla 1 o simplemente derivable de E_x a través de la regla 2 (generalización).
    - $\mathrm{M.P.}(x, y, z) \vee \mathrm{Gen}(x, z)$
- Pf(x): E_x es una demostración en P.E.
    - $\mathrm{Seq}(x) \wedge (\forall y \in x)(A(y) \vee (\exists z, w \prec_x y)\mathrm{Der}(z, w, y))$
- $P_E(x)$: E_x es demostrable en P.E.
    - $\exists y(\mathrm{Pf}(y) \wedge x \in y)$

Acabamos teniendo una fórmula que expresa que algo es demostrable. Formalmente significa que existe una demostración del sistema en la cual aparece la fórmula. En este tipo de sistema, en una demostración todas las fórmulas están demostradas. Una demostración es una lista de fórmulas que cumple ciertas condiciones (eso es lo que tenemos en la fórmula Pf(x)). ¿Por qué se puede esto aritmetizar? Porque todos los conceptos que necesitamos para definir una demostración son aritmetizables, lo que acabamos de demostrar paso a paso. Para definir el concepto de fórmula, necesitamos el concepto de término, etc. Podemos ir aritmetizando conceptos uno detrás de otro, y finalmente todos los que necesitamos para definir lo que es una demostración los tenemos, y obtenemos una fórmula.

Lo que acabamos de hacer es establecer que se cumple G_3, es decir, que existe una fórmula que expresa el conjunto de fórmulas demostrables. Sabiendo que G_1 y G_2 también se cumplen formulamos el siguiente teorema:

Teorema de Gödel-Tarski (para el Sistema P.E.): si el sistema P.E. es correcto, entonces hay una sentencia de $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$ que es verdadera, pero no demostrable.

Demostración: en primer lugar, por el Teorema de Gödel-Tarski (versión abstracta) sabemos que si P.E. es correcto y $\tilde{P}^*$ expresable, entonces hay una sentencia verdadera no demostrable. En segundo lugar, puesto que sabemos que se cumplen G_1, G_2 y G_3, sabemos que $\tilde{P}^*$ es demostrable. Así concluye la demostración del teorema.

El mismo teorema lo podemos establecer de otra manera, utilizando el Teorema de Tarski (para el lenguaje $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$) que hemos establecido en el apartado anterior. Este establecía que el conjunto T (el conjunto de todas las sentencias verdaderas de $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$) no es expresable. Acabamos de ver que el conjunto P sí lo es, lo que significa que T no es lo mismo que P. Si asumimos que el sistema es correcto, tiene entonces que haber una sentencia que siendo verdadera no es demostrable.

Resumiendo, $P_E(y)$ significa que E_y es demostrable en P.E., expresa el conjunto P. De esta forma, $\sim P_E(y)$ expresa $\tilde{P}$. $K(x)$ es la fórmula $\forall y(y = d(x) \supset \sim P_E(y))$, que expresa el conjunto $\tilde{P}^*$. Esta fórmula dice que si y es la diagonalización de x, y no es demostrable, es decir, la diagonalización de x no es demostrable. Diagonalizamos aplicando $K(x)$ a su número k y obtenemos la fórmula $\forall x(x = k \supset \forall y(y = d(x) \supset \sim P_E(y)))$, que es la diagonalización de k y que dice que la diagonalización de k no es demostrable, que equivale a decir que yo no soy demostrable.

4. Demostración de incompletitud del sistema P.A.

Lo que vamos a hacer ahora es demostrar que la exponenciación es definible y, por tanto, superflua. Cuando diferenciábamos entre una fórmula o término Aritmético y uno aritmético, decíamos que estos últimos eran aquellos en los que el símbolo exponencial **E** no aparecía, por lo que una relación o conjunto aritmético será aquel que se exprese mediante una fórmula aritmética. Si al sistema P.E. le eliminamos los esquemas axiomáticos N_{10} y N_{11}, y en el resto de los que quedan entendemos que los términos y fórmulas son aritméticos, obtenemos el sistema axiomático P.A., más conocido como la Aritmética de Peano. La incompletitud de este sistema se sigue fácilmente de la demostración de incompletitud del sistema P.E., una vez que demostramos que la relación $x^y = z$ es aritmética. Vamos a definir una clase de relaciones mucho más restrictiva que la de las relaciones aritméticas e ir comprobando que las relaciones que nos interesan pertenecen a estas clases. Estas son las relaciones recursivamente enumerables, conocidas como Σ_1-relaciones. Definimos también una clase aún más restrictiva, la de las Σ_0-relaciones, las relaciones constructivas aritméticas.

Cualquiera de las fórmulas $c_1 + c_2 = c_3$, $c_1 \cdot c_2 = c_3$, $c_1 = c_2$ o $c_1 \leq c_2$, donde cada c_1, c_2 y c_3 sean o variables, o numerales, será una Σ_0-fórmula. La clase de estas fórmulas se define de forma inductiva: toda Σ_0-fórmula atómica es Σ_0; si F y G son Σ_0, también lo son $\sim F$ y $F \supset G$; para cualquier Σ_0-fórmula F, cualquier variable v_i y cualquier c (numeral o variable distinta de v_i), la expresión $\forall v_i(v_i \leq c \supset F)$ es una Σ_0-fórmula. Todos los cuantificadores de esta clase de fórmulas serán cuantificadores acotados, es decir, $(\forall v_i \leq c)$ y $(\exists v_i \leq c)$. Por Σ_1-fórmula entendemos cualquier fórmula de la forma $\exists v_{n+1}F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$, donde $F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ es una Σ_0-fórmula.

Diremos que un conjunto o una relación es Σ_1 syss es expresable por una Σ_1-fórmula. Por tanto, $R(x_1, \ldots, x_n)$ es una Σ_1-relación syss hay una Σ_0-relación $S(x_1, \ldots, x_n, y)$ tal que para todo $x_1, \ldots, x_n$, la equivalencia $R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists y S(x_1, \ldots, x_n, y)$ se cumple. Las Σ_1-fórmulas comienzan con un cuantificador no acotado.

Definimos inductivamente también otra clase de Σ-fórmulas siguiendo cuatro reglas:

- Toda Σ_0-fórmula es una Σ-fórmula.

- Si F es un Σ-fórmula, entonces para cualquier variable v_i, la expresión $\exists v_i F$ es una Σ-fórmula.
- Si F es una Σ-fórmula, entonces para cualesquiera variables distintas v_i y v_j, las fórmulas $(\exists v_i \leq v_j)F$ y $(\forall v_i \leq v_j)F$ son Σ-fórmulas, y para cualquier numeral n, las fórmulas $(\exists v_i \leq \bar{n})F$ y $(\forall v_i \leq \bar{n})F$ son Σ-fórmulas.
- Para cualesquiera Σ-fórmulas F y G, las fórmulas $F \vee G$ y $F \wedge G$ son Σ-fórmulas. Si F es una Σ_0-fórmula y G es una Σ-fórmula, la fórmula $F \supset G$ es una Σ-fórmula.

Una Σ-fórmula puede contener cuantos cuantificadores existenciales libres sean necesarios, pero todos los cuantificadores universales tienen que estar necesariamente acotados.

Ya hemos visto anteriormente que para cualquier $b \leq 2$, la concatenación a la base b es Aritmética. Pero en el sistema P.A. lo que estamos buscando son relaciones aritméticas, que no requieran el uso de la exponenciación. Para ello utilizamos la idea propuesta por John Myhill (1955), que establece que para cualquier número primo p, podemos definir $Pow_p(x)$ sin recurrir a la exponenciación: x es una potencia de p syss cada divisor propio de x es divisible por p. Aquí podemos observar las ventajas de emplear un sistema en base 13. Según esta idea, podemos fácilmente mostrar que para un número primo p, la relación $x *_p y = z$ es aritmética, en concreto, del tipo Σ_0. La demostración parte de comprobar que las siguientes tres relaciones son del tipo Σ_0:

- x div y
  - $x \text{ div } y \leftrightarrow (\exists z \leq y)(x \cdot z = y)$
- $Pow_p(x)$
  - $Pow_p(x) \leftrightarrow (\forall z \leq x)((z \text{ div } x \wedge z \neq 1) \supset p \text{ div } z)$
- $y = p^{l_p(x)}$
  - $y = p^{l_p(x)} \leftrightarrow (Pow_p(y) \wedge y > x \wedge y > 1) \wedge (\forall z < y) \sim (Pow_p(z) \wedge z > x \wedge z > 1)$

Como conclusión, $x *_p y = z \leftrightarrow x \cdot p^{l_p(y)} + y = z$; $x *_p y = z \leftrightarrow (\exists w_1 \leq z)(\exists w_2 \leq z)(w_1 = p^{l_p(y)} \wedge w_2 = x \cdot w_1 \wedge w_2 + y = z)$ también lo es.

También las siguientes relaciones son Σ_0:

- xB_py, xE_py y xP_py.
  - Recordamos que:
    - $xB_by \leftrightarrow x = y \vee (x \neq 0 \wedge (\exists z \leq y)\ (\exists w \leq y)(\mathrm{Pow}_b(w) \wedge (x \cdot w) *_b z = y))$
    - $xE_by \leftrightarrow x = y \vee (\exists z \leq y)(z *_b x = y)$
    - $xP_by \leftrightarrow (\exists z \leq y)(z \exists_b y \wedge x\ B_b z)$

    Condiciones las tres que son claramente Σ_0.
- Para cada $n \geq 2$, la relación $x_1 *_p, \ldots, *_p x_n = y$.
  - Sabemos que la relación $x_1 *_p x_2 = y$ es Σ_0. Supongamos ahora que $n \geq 2$ es tal que la relación $x_1 *_p, \ldots, *_p x_n = y$ es Σ_0. Entonces la relación $x_1 *_p, \ldots, *_p x_n, *_p x_{n+1} = y$ también es Σ_0 y puede escribirse como $(\exists z \leq y)(x_1 *_p, \ldots, *_p x_n = z \wedge z *_p x_{n+1} = y)$.
- Para cada $n \geq 2$, la relación $x_1 *_p, \ldots, *_p x_nP_py$.
  - La relación $x_1 *_p, \ldots, *_p x_nP_py$ puede escribirse claramente como $(\exists z \leq y)(x_1 *_p, \ldots, *_p x_n = zP_py)$.

Puesto que 13, que es la base que estamos utilizando, es un número primo, si utilizamos para sustituir a p en lo que acabamos de ver, llegamos a la conclusión de que el conjunto P_E es aritmético, y más en concreto, dado que en él no aparece ningún cuantificador universal no acotado, es de tipo Σ. Como consecuencia, el conjunto $\widetilde{P_E}$ también es aritmético. Sin embargo, no resulta tan sencillo afirmar que $\widetilde{P_E}*$ lo sea. Para inferir la aritmeticidad de un conjunto $A*$ a partir de la de un conjunto A es necesario mostrar que la relación $13^x = y$ es aritmética, porque aparece en la fórmula que expresa la función diagonal, que es la clave para demostrar que $A*$ es expresable.

Para demostrar esto usaremos el siguiente teorema:

Teorema E: la relación $x^y = z$ es Σ_1.

Para demostrarlo necesitamos introducir el siguiente lema auxiliar:

Lema K: existe una relación aritmética $K(x, y, z)$ que posee las dos siguientes propiedades: para cualquier secuencia finita $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ de pares ordenados de números naturales, existe un número z tal que para cualesquiera números x e y, la relación $K(x, y, z)$ se cumpla syss (x, y) es una de los pares $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$; y para cualesquiera números x, y y z, si $K(x, y, z)$ se cumple, entonces $x \leq z$ e $y \leq z$.

Intuitivamente, este lema establece que cuando tengo una secuencia de pares, puedo encontrar un número que codifica esa secuencia de pares.

Demostración: recurrimos a las condiciones y afirmaciones que anteriormente hemos visto y demostrado que son de tipo Σ_0. Estas proposiciones se cumplían para cualquier número primo p, por lo que identificaremos los números naturales con sus representaciones en base 13. Recurriremos también a la idea de los marcos, presentada por Quine (1946), que establece que un marco es un número de forma $2t2$ en el que la t es una cadena de unos (111…1). $1(x)$ será la condición de que x es una cadena de unos en notación base 13, condición que es de tipo Σ_0 ($1(x) \leftrightarrow x \neq 0 \wedge (\forall y \leq x)(yPx \supset 1Py)$).

Vamos a tomar θ como la secuencia finita $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$ de pares ordenados de números, y f como el marco que es más largo que cualquier marco que sea parte de cualquiera de los números $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$. Para tal f, el número secuencia de θ será $ffa_1fb_1ff, \ldots, ffa_nfb_nff$. Estamos representando otro tipo de secuencias con otro mecanismo. x será un marco maximal de y si x es un marco, x es parte de y y x es tan largo como cualquier marco que forme parte de y. La relación x mf y es Σ_0, ya que $x \text{ mf } y \leftrightarrow xPy \wedge (\exists z \leq y)(1(z) \wedge x = 2z2 \wedge \sim (\exists w \leq y)(1(w) \wedge 2zw2Py))$.

Con toda la información que tenemos en este momento podemos definir la Σ_0-relación que posteriormente jugará un papel crucial: $K(x, y, z) \overset{=}{_{df}} (\exists w \leq z)(w \text{ mf } z \wedge wwxwywwPz \wedge w\tilde{P}x \wedge w\tilde{P}y)$. Para cualquier secuencia θ de pares ordenados de números, si z es cualquier número secuencia de θ, entonces $K(x, y, z)$ se cumplirá syss el par ordenado (x, y) pertenece a la secuencia θ. Además, por definición de $K(x, y, z)$, para cualesquiera números x, y y z, si se cumple la relación, entonces $x \leq z$ y $y \leq z$. Así queda demostrado el Lema K.

De la demostración del Lema K se sigue fácilmente la demostración del Teorema E. Se cumple $x^y = z$ syss existe un conjunto S de pares ordenados tal que:

- $(y, z) \in S$.
- Para todo par (a, b) en S, o bien $(a, b) = (0, 1)$, o existe algún par (c, d) en S tal que $(a, b) = (c + 1, d \cdot x)$.

Podemos ver esto de la siguiente manera: si $x^y = z$, entonces tomamos S como el conjunto $\{(0, 1), (1, x), (2, x^2), \ldots, (y, x^y)\}$. De forma inversa, suponemos que S es cualquier conjunto de pares ordenados tal que las dos condiciones anteriores se cumplen.

Entonces de la segunda condición se sigue que para cualquier par (a, b) en S, se tiene que cumplir $x^a = b$; y de la primera condición se sigue que $x^y = z$. De esta forma, $x^y = z$ syss existe un número w tal que $K(y, w, z)$ y para cualquier número $a \leq w$ y cualquier $b \leq w$, si $K(a, b, w)$, entonces o bien $a = 0$ y $b = 1$, o hay un número $c \leq a$ y un número $d \leq b$ tales que $K(c, d, w)$ y $a = c + 1$ y $b = d \cdot x$. Por tanto, $x^y = z$ syss se cumple la siguiente condición:

$$\exists w(K(y, z, w) \wedge (\forall a \leq w)\ (\forall b \leq w)(K(a, b, w) \supset ((a = 0 \wedge b = 1) \vee (\exists c \leq a)\ (\exists d \leq b)(K(c, d, w) \wedge a = c + 1 \wedge b = d \cdot x)))).$$

Con esto concluye la demostración del Teorema E.

Del Teorema E se siguen tres corolarios importantes. En primer lugar, que para cualquier conjunto aritmético A, el conjunto A^* es aritmético, y además, si A es Σ, A^* también lo será. Ya que la relación $x^y = z$ es Σ, la relación $13^x = y$ también lo es, y en consecuencia, la función diagonal $d(x)$ también. Por tanto, hay una Σ-fórmula $D(v_1, v_2)$ que expresa la relación $d(x) = y$. Entonces, para cualquier fórmula $A(v_1)$ que exprese un conjunto A, la fórmula $\exists v_2(D(v_1, v_2) \wedge A(v_2))$ expresa el conjunto A^*, y si A es aritmético, A^* lo es también.

El segundo corolario extraído del Teorema E afirma que el conjunto de números Gödel de las sentencias aritméticas verdaderas no es aritmético. Denominamos a este conjunto T_A. Si fuera aritmético, entonces el conjunto $\widetilde{T_A}$ también tendría que serlo, y en consecuencia, $\widetilde{T_A}^*$ también, algo que nos conduciría a contradicción. Por último, el tercer corolario dice que el conjunto P^*_E es Σ y el conjunto $\widetilde{P_E}^*$ es aritmético. Ya hemos demostrado que P_E es Σ, por tanto, según el primer corolario que acabamos de ver, P^*_E es Σ también. El hecho de ser Σ, hace que P_E sea aritmético, por tanto, su complementario es aritmético, y según este primer corolario, $\widetilde{P_E}^*$ también lo es.

Si el conjunto $\widetilde{P_E}^*$ es aritmético, existe una fórmula aritmética $H(v_1)$ que lo expresa. La diagonalización de esta fórmula, $H[\bar{h}]$ es una sentencia Gödel aritmética para $\widetilde{P_E}$, y por tanto no es demostrable en P.E. ni en P.A., aunque sea verdadera. $\sim H[\bar{h}]$ es falsa y tampoco es demostrable en P.A., si es correcto, entonces $H[\bar{h}]$ es una sentencia en el lenguaje $\mathscr{L}_A$ de P.A. que no es ni demostrable ni refutable en el sistema P.A, que como vemos, es incompleto.

Pero podemos demostrar también la incompletitud del sistema P.A. sin recurrir necesariamente a P.E., tomando P_A como el conjunto de números Gödel de las fórmulas demostrables en P.A. y demostrar que este es un conjunto de tipo Σ y, por tanto, un conjunto aritmético. La demostración de la aritmeticidad de este conjunto es igual a la que realizamos para demostrar que P_E era un conjunto aritmético, pero con algunos cambios: tenemos que hacer desaparecer la exponenciación del lenguaje y, por tanto, de los axiomas. Podemos reducir la exponenciación a operaciones que únicamente emplean la suma y la multiplicación y, por tanto, prescindir de ella y de los axiomas en los que interviene. Transformamos las fórmulas que teníamos para que no hagan referencia a esa posibilidad que ya no está.

$R_1(x, y, z)$ se sustituye por E_z es una de las expresiones $(E_x + E_y)$, $(E_x \cdot E_y)$ o E'_x, y en su demostración, $z = x$ pl $y \vee z = x$ tim $y \vee z = x$ exp $y \vee z = s(x)$, eliminamos la parte de $z = x$ exp y. Con este cambio, $\mathrm{tm}(x)$ y $\mathrm{fm}(x)$ serán entonces las condiciones de que E_x es un término o una fórmula de P.A.; En el caso de $A(x)$, eliminamos las cláusulas disyuntivas $N_{10}(x)$ y $N_{11}(x)$, con lo que pasa a ser la condición de que E_x es un axioma de P.A.; por último, las última condición se reformula para que afirme que E_x es demostrable en P.A.

Entonces, el conjunto P_A es Σ, y en consecuencia, los conjuntos $\widetilde{P_A}$ y $\widetilde{P_A}^*$ son aritméticos. Si tomamos ahora una fórmula aritmética $H(v_1)$ que exprese al conjunto $\widetilde{P_A}^*$, su diagonalización $H[\bar{h}]$ expresaría su propia no demostrabilidad en el sistema P.A., y así quedaría demostrada la incompletitud de este sistema.

Tras concluir el apartado demostraremos la siguiente proposición C_1, y para ello demostramos primero lo siguiente:

Proposición C:

- Toda Σ_0-relación también es Σ_1.
- Si $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ es Σ_1 también lo es la relación $\exists y R(x_1, \ldots, x_n, y)$.
- Si $R_1(x_1, \ldots, x_n, y)$ y $R_2(x_1, \ldots, x_n, y)$ son Σ_1, también lo son las relaciones $R_1(x_1, \ldots, x_n, y) \vee R_2(x_1, \ldots, x_n, y)$ y $R_1(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge R_2(x_1, \ldots, x_n, y)$.
- Si $R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ es Σ_1 también lo son las relaciones $(\exists y \leq z)R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ y $(\forall y \leq z)R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$.
- Si R es Σ_0 y S es Σ_1, entonces la relación $R \supset S$ es Σ_1.

Demostración:

- Toda Σ_0-relación también es Σ_1.
  - Supongamos que la relación $R(x_1, \ldots, x_n)$ es Σ_0. Tomemos $F(v_1, \ldots, v_n)$ como una Σ_0-fórmula que la exprese. Entonces, la fórmula $\exists v_{n+1}F(v_1, \ldots, v_n)$ es una Σ_1-fórmula que expresa la misma relación $R(x_1, \ldots, x_n)$, por lo que R es Σ_1.
- Si $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ es Σ_1 también lo es la relación $\exists yR(x_1, \ldots, x_n, y)$.
  - Para cualquier relación $S(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ las dos siguientes condiciones son equivalentes: $\exists y\exists zS(x_1, \ldots, x_n, y, z) \equiv \exists w(\exists y \leq w)(\exists z \leq w)S(x_1, \ldots, x_n, y, z)$. Supongamos ahora que $x_1, \ldots, x_n$ son números tal que la primera de ellas se cumple. Entonces tiene que haber números y y z tales que $S(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ se cumpla. Si tomamos w como el máximo de y y z, entonces $(\exists y \leq w)$ $(\exists z \leq w)S(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ se cumple para tal número w y, en consecuencia, la segunda condición se cumple.

    Supongamos ahora que $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ es Σ_1. Entonces $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ es de forma $\exists zS(x_1, \ldots, x_n, y, z)$, donde S es una Σ_0-relación. Entonces la relación $\exists yR(x_1, \ldots, x_n, y)$ es la misma que la relación $\exists y\exists zS(x_1, \ldots, x_n, y, z)$. Como hemos visto, esta relación es equivalente a la relación $\exists w(\exists y \leq w)$ $(\exists z \leq w)S(x_1, \ldots, x_n, y, z)$, y esto es Σ_1, porque la relación $(\exists y \leq w)$ $(\exists z \leq w)S(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ es una Σ_0-relación entre w y $x_1, \ldots, x_n$.
- Si $R_1(x_1, \ldots, x_n, y)$ y $R_2(x_1, \ldots, x_n, y)$ son Σ_1, también lo son las relaciones $R_1(x_1, \ldots, x_n, y) \vee R_2(x_1, \ldots, x_n, y)$ y $R_1(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge R_2(x_1, \ldots, x_n, y)$.
  - Esta afirmación equivale a aquella que establece que para cualesquiera Σ_0-relaciones $S_1(x_1, \ldots, x_n, y)$ y $S_2(x_1, \ldots, x_n, y)$, las dos relaciones $\exists yS_1(x_1, \ldots, x_n, y) \vee \exists yS_2(x_1, \ldots, x_n, y)$ y $\exists yS_1(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \exists yS_2(x_1, \ldots, x_n, y)$ son Σ_1. $\exists yS_1(x_1, \ldots, x_n, y) \vee \exists yS_2(x_1, \ldots, x_n, y)$ porque equivale a $\exists y(S_1(x_1, \ldots, x_n, y) \vee S_2(x_1, \ldots, x_n, y))$; la segunda porque equivale a $\exists y\exists z(S_1(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge S_2(x_1, \ldots, x_n, z))$, que es Σ_1 según el punto anterior que acabamos de ver.
- Si $R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ es Σ_1 también lo son las relaciones $(\exists y \leq z)R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ y $(\forall y \leq z)R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$.

- Supongamos que $R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ es Σ_1. Sabemos que la relación $y \leq z$ es Σ_0. Por tanto, el conjunto K de todas las n+2-tuplas $(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ tales que $y \leq z$ es Σ_0. En consecuencia, la relación $K(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ es Σ_1 según el primer punto de esta Proposición C. De esto se sigue, gracias al tercer punto, que la relación $K(x_1, \ldots, x_n, y, z) \wedge R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ es Σ_1. El punto dos demuestra que la relación $\exists y(y \leq z \wedge R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ es Σ_1, ya que es la relación $(\exists y \leq z)R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$.

  La demostración para $(\forall y \leq z)R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ es algo diferente. Dado que R es Σ_1, existe una Σ_0-relación $S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)$ tal que para todo $x_1, \ldots, x_n$, y y z, $R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ se cumple syss $\exists wS(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)$. Entonces $(\forall y \leq z)R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ es la condición $(\forall y \leq z)\exists wS(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)$. Ahora supongamos que $x_1, \ldots, x_n$ y z son números tales que $(\forall y \leq z)\exists wS(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)$ se cumple. Entonces para todo y $\leq z$, existe un número w_y tal que $S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w_y)$ se cumple. Si v es el mayor de esos números $w_0, w_1, \ldots, w_z$, entonces $w_0, \ldots, w_z$ serán todos $\leq v$, y para todo $y \leq z$, existe algún w_y, para el que $w \leq v$, tal que $S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)$. Por tanto, para esta v, la condición $(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)$ se cumple, y en consecuencia la condición $\exists v(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)$ también. A la inversa, esta condición implica $(\forall y \leq z)\exists wS(x_1, \ldots, x_n, y, z, w)$, que es la condición $(\forall y \leq z)R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$.

- Si R es Σ_0 y S es Σ_1, entonces la relación $R \supset S$ es Σ_1.
  - Suponemos que R es Σ_0 y S es Σ_1. $\tilde{R}$ sería también Σ_0, y por el punto uno, Σ_1. Según el punto tres, $\tilde{R} \vee S$ es Σ_1, y esta es la relación $R \supset S$.

Queda así demostrada la proposición.

Proposición C_1: toda Σ-relación es Σ_1.

Para cualquier fórmula $F(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})(i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$ y cualquier $n \geq i_k$, $F^{(n)}$ será el conjunto de todas las n-tuplas $(a_1, \ldots, a_n)$ tal que $F(\tilde{a}_{i_1}, \ldots, \tilde{a}_{i_k})$ es una sentencia verdadera. Si F es una fórmula regular $F(v_1, \ldots, v_n)$, entonces, $F^{(n)}$ es la relación expresada por $F(v_1, \ldots, v_n)$. A partir de todo lo visto en la Proposición C, llegamos a la llamada Proposición C_1, que establece que toda Σ-relación es Σ_1. De esta extraemos dos corolarios: el primero que dice que si A es Σ_1, A^* también lo es; y el segundo que establece que los conjuntos P^*_A y R^*_A son Σ_1.

Diremos de un conjunto o una relación que es recursiva si ella misma y su complementaria son ambas Σ_1. Una función $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ es recursiva si la relación correspondiente es recursiva.

Si repasamos todo lo que hemos visto hasta el momento en lo que se hace uso de secuencias contamos cuatro puntos donde recurrimos a ellas: la exponenciación ($x^y = z$), en el que acudimos a una secuencia de y operaciones con el número x que tienen como resultado a z; la formación de términos, en el que recurrimos a una secuencia de operaciones que tienen como resultado un término; la formación de fórmulas, en el que acudimos a una secuencia de operaciones que tienen como resultado una fórmula; y el ser demostrable, en el que recurrimos a una secuencia de fórmulas que es una demostración.

En los tres primeros tipos de secuencias, a partir del tamaño del resultado final de la secuencia, podemos acotar el tamaño de la propia secuencia. Cuando decimos que algo es una fórmula es porque hay una secuencia de formación de una fórmula, y en función de lo larga que sea esa fórmula, podemos acotar el tamaño de su secuencia de formación. De igual forma con las secuencias de formación de términos o con la secuencia de la exponenciación. Esto es lo que no ocurre en una demostración. Viendo la fórmula demostrable no puedo hacer ningún cálculo del tamaño posible de la demostración, no podemos acotar nada.

Intuitivamente esto significa que todos los conceptos que estás manejando hasta llegar al de ser demostrable son conceptos decidibles, el concepto de ser demostrable ya no lo es. Es decir, cuando me dan una expresión, puedo hacer una comprobación para ver si es una fórmula o no. Pero cuando me dan una fórmula y me preguntan si es demostrable en P.A., no tengo ningún procedimiento que me permita contestar en un numero finito de pasos a esa pregunta. Eso hace que en la fórmula $P_E(x)$ en P.E. (o en su equivalente $P_A(x)$ en P.A.), que es $\exists y(\mathrm{Pf}(y) \wedge x \in y)$, es decir, "existe una secuencia de demostración y en la que parece x", no sea posible acotar el cuantificador $\exists y$ y que intuitivamente sea una fórmula Σ_1.

5. Teorema de Gödel y ω-consistencia

La demostración que hemos visto en el apartado anterior descansa sobre la hipótesis de que la Aritmética de Peano es correcta, es decir, que en ella cada una de las sentencias demostrables en P.A. es una sentencia verdadera. La demostración original de la incompletitud de este sistema que propone Gödel implica una asunción más débil que denomina ω-consistencia. Tomamos un sistema axiomático arbitrario S cuyas fórmulas son las de $\mathscr{L}_E$, cuyos axiomas incluyen todos los de los grupos I y II y cuyas reglas de inferencia son la generalización y el *Modus Ponens*. Este sistema es lo que podemos denominar una teoría de primer orden.

- Diremos que S es simplemente consistente si no contiene ninguna sentencia que sea a la vez demostrable y refutable en S.
- Diremos que S es ω-inconsistente si existe una fórmula $F(w)$ con una variable libre w tal que la sentencia $\exists wF(w)$ es demostrable, a pesar de que todas las sentencias $F(\bar{0}), F(\bar{1}), \ldots, F(\bar{n}), \ldots$ son refutables. Según eso, un sistema ω-consistente es un sistema que no es ω-inconsistente.

Un sistema ω-inconsistente nunca puede ser correcto, porque si $\exists wF(w)$ es verdadera, entonces al menos para alguna n la sentencia $F(\bar{n})$ tiene que ser verdadera. Lo que sí puede suceder es que un sistema ω-inconsistente sea simplemente consistente. Si S es simplemente inconsistente, esto significa que toda sentencia es demostrable en él, por tanto, trivialmente tiene que ser ω-inconsistente; Así pues, si S es ω-consistente, entonces es también simplemente consistente.

Se dice que S es recursivamente axiomatizable o, lo que es lo mismo, axiomatizable, si el conjunto P de números Gödel de las sentencias demostrables de S es Σ_1. Estos sistemas también se denominan sistemas formales, sistemas r.e. o Σ_1-sistemas. Dados dos sistemas S y S_1, diremos que S_1 es un subsistema de S o S una extensión de S_1 si todas las fórmulas demostrables de S_1 también son demostrables en S.

Todo sistema correcto es automáticamente ω-consistente, por tanto, es más fuerte asumir que el sistema P.A. es correcto que asumir que es ω-consistente. Ya hemos demostrado la incompletitud de P.A. tomando como premisa que P.A. es un sistema correcto. El objetivo principal de este apartado es la demostración del Teorema G, para lo cual vamos a recurrir a otros teoremas que a su vez necesitan de más teoremas y lemas para su demostración. Como es un proceso complejo, vamos a ofrecer primero un esquema de cómo se organiza:

Teorema G: si la Aritmética de Peano es ω-consistente, entonces es incompleta.

1. **Teorema A**: si *S* es cualquier sistema axiomatizable ω-consistente en el que todas las Σ_0-sentencias verdaderas son demostrables, entonces *S* debe ser incompleto.
   - **Lema 2**: si todas las Σ_0-sentencias verdaderas son demostrables en *S*, entonces todos los Σ_1-conjuntos y relaciones son enumerables en *S*.
   - **Teorema A'**: si *S* es cualquier sistema ω-consistente axiomatizable en el cual todos los Σ_1-conjuntos son enumerables, entonces *S* es incompleto.
     - **Teorema 1**: supongamos que *S* es simplemente consistente y $H(v_1)$ es una fórmula cuya negación representa el conjunto P^* en *S*. De esta forma la sentencia $H(\bar{h})$ no es ni probable ni refutable en *S* donde *h* es el número Gödel de la fórmula $H(v_1)$.
       - **Lema 1**: para cualquier fórmula $H(v_1)$ con número Gödel *h*: $H(\bar{h})$ es demostrable en $S \leftrightarrow h \in P^*$.
     - **Lema ω**: si *S* es ω-consistente, entonces todo conjunto enumerable en *S* es representable en *S*.
     - **Teorema 2**: si P^* es enumerable en *S* y *S* es ω-consistente, entonces *S* es incompleto.
     - **Teorema 3**: suponemos que $A(v_1, v_2)$ enumera P^* en *S*. Tomamos *a* como el número Gödel de la fórmula $\forall v_2 \sim A(v_1, v_2)$ y *G* como la sentencia $\forall v_2 {\sim} A(v_1, v_2)$. De esta forma:
       - Si *S* es simplemente consistente, entonces *G* no es demostrable en *S*.
       - Si *S* es ω-consistente, entonces *S* no es ni demostrable ni refutable.
2. **Teorema B**: todas las Σ_0-sentencias verdaderas son demostrables en P.A.

- **Proposición 1**: las siguientes dos condiciones son conjuntamente suficientes para que S sea Σ_0-completo:
  - C_1: toda Σ_0-sentencia atómica es correctamente decidible en S.
  - C_2: para cualquier Σ_0-fórmula $F(w)$, con w como la única variable libre, y para todo número n, si las sentencias $F(\bar{0})$, …, $F(\bar{n})$ son todas demostrables en S, entonces lo es la sentencia $(\forall w \leq \bar{n})F(w)$.
- **Proposición 2**: las siguientes tres condiciones son conjuntamente suficientes para que S sea Σ_0-completo:
  - D_1: todas las Σ_0-sentencias atómicas verdaderas son demostrables en S.
  - D_2: para cualesquiera números distintos m y n, la sentencia $\bar{m} \neq \bar{n}$ es demostrable en S.
  - D_3: para cualquier variable w y cualquier número n, la fórmula

$$w \leq \bar{n} \supset (w = \bar{0} \vee \ldots \vee w = \bar{n})$$

    es demostrable en S.
- Para demostrar la proposición del Teorema B consideramos subsistemas de P.A. en los cuales ya son demostrables todas las Σ_0-sentencias verdaderas.

Una fórmula $F(v_1, \ldots, v_k)$ representará el conjunto de todas las k-tuplas $(n_1, \ldots, n_k)$ tales que $F(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_k)$ es demostrable en S. Si consideramos ahora S como el sistema P.A., una fórmula $F(v_1)$ expresa el conjunto de todas las n tal que $F(\bar{n})$ es una sentencia verdadera, mientras que $F(v_1)$ representa en P.A. el conjunto de todos los n tal que $F(\bar{n})$ es demostrable en P.A. Asumiendo que P.A. es un sistema correcto, el conjunto representado por $F(v_1)$ es un subconjunto del conjunto expresado por $F(v_1)$.

Consideramos un sistema arbitrario S no necesariamente axiomatizable. P será el conjunto de los números Gödel de las fórmulas demostrables de S. P^* será el conjunto de todos los n tales que $E_n[\bar{n}]$ es demostrable en S. Con esto presente, planteamos el Teorema 1:

Teorema 1: supongamos que S es simplemente consistente y $H(v_1)$ es una fórmula cuya negación representa el conjunto P^* en S. Entonces la sentencia $H(\bar{h})$ no es ni probable ni refutable en S donde h es el número Gödel de la fórmula $H(v_1)$.

Para cualquier fórmula $H(v_1)$ y cualquier número n, la sentencia $H(\bar{n}) \equiv H[\bar{n}]$ es aritméticamente verdadera y además es un teorema de lógica de primer orden con identidad. Por tanto, es realmente demostrable en S. De esta forma, $H(\bar{n})$ es demostrable o refutable en S syss $H[\bar{n}]$ es demostrable o refutable, respectivamente, en S. Para la demostración del Teorema 1 es necesario un lema auxiliar:

Lema 1: para cualquier fórmula $H(v_1)$ con número Gödel h, $H(\bar{h})$ es demostrable en $S \leftrightarrow h \in P^*$.

La demostración del Lema 1 es inmediata.

Demostración del Teorema 1: asumimos la hipótesis que nos plantea. Ya que la negación de $H(v_1)$ representa P^*, entonces para cualquier número n, la sentencia $H(\bar{n})$ es refutable en S syss $n \in P^*$. En particular, $H(\bar{h})$ es refutable en S syss $h \in P^*$. Pero también tenemos el caso, según el Lema 1, de que $H(\bar{h})$ es demostrable en S syss $h \in P^*$. De esta forma, $H(\bar{h})$ es demostrable en S syss $H(\bar{h})$ es refutable en S. Según la asunción de consistencia simple, $H(\bar{h})$ no puede ser a la vez demostrable y refutable en S, por lo que concluimos que no es ninguna de las dos cosas. Así concluye la demostración.

De esto se sigue un corolario que establece que si P^* es representable en S y S es consistente, entonces S es incompleto. La demostración de esta afirmación parte de suponer que S es consistente y $F(v_1)$ es una fórmula que representa P^*, de forma tal que $\sim\sim F(v_1)$ también representa P^*, por lo que la fórmula $\sim F(v_1)$, de ahora en adelante $H(v_1)$, es una fórmula cuya negación representa P^*.

Una fórmula $F(v_1, v_2)$ enumera un conjunto A en S si para todo número n se cumplen las dos siguientes condiciones:

- Si $n \in A$, entonces existe al menos un número m tal que la sentencia $F(\bar{n}, \bar{m})$ es demostrable en S.
- Si $n \notin A$, entonces para todo número m, la sentencia $F(\bar{n}, \bar{m})$ es refutable en S.

Decimos que A es enumerable en S syss existe alguna fórmula $F(v_1, v_2)$ que enumere A en S. Partiendo de estas consideraciones establecemos un nuevo lema:

Lema ω (Lema de la ω-consistencia): si S es ω-consistente, entonces todo conjunto enumerable en S es representable en S.

Demostración: asumiendo esta hipótesis, suponemos que $n \in A$, entonces para algún m, la sentencia $F(\bar{n}, \bar{m})$ es demostrable en S, por tanto, la sentencia $\exists v_2 F(\bar{n}, v_2)$ es demostrable en S. De forma inversa, supongamos que $\exists v_2 F(\bar{n}, v_2)$ es demostrable en S. Si n no forma parte de A, entonces todas las sentencias $F(\bar{n}, \bar{0})$, $F(\bar{n}, \bar{1})$, …, $F(\bar{n}, \bar{m})$, …, serían refutables en S, y S sería un sistema ω-inconsistente, de forma que n tiene que estar en A. Apoyándonos en esto, afirmamos que la fórmula $\exists v_2 F(\bar{n}, v_2)$ representa A en S. Concluimos así la demostración del Lema ω.

Introducimos un nuevo teorema:

Teorema 2: si P^* es enumerable en S y S es ω-consistente, entonces S es incompleto.

Suponiendo que S sea un sistema ω-consistente y que P^* sea enumerable en este sistema, tomamos $A(v_1, v_2)$ como la fórmula que enumera P^* en S. La fórmula $\exists v_2 A(v_1, v_2)$ equivale a $\sim\forall v_2 \sim A(v_1, v_2)$, por lo que $\forall v_2 \sim A(v_1, v_2)$ es la fórmula cuya negación representa P^* en S. Basándonos en lo establecido por el Teorema 1, la sentencia $\forall v_2 \sim A(\bar{a}, v_2)$ es indecidible en S donde a es el número Gödel de la fórmula $\forall v_2 \sim A(v_1, v_2)$. Esta sentencia, $\forall v_2 \sim A(\bar{a}, v_2)$, va a ser G, la sentencia Gödel. Tenemos que demostrar que, si S es ω-consistente, G no es ni demostrable ni refutable en S.

La consistencia simple de S es suficiente para demostrar que G no es demostrable en S. Suponemos que la sentencia $\forall v_2 \sim A(\bar{a}, v_2)$ es demostrable en S. Entonces a forma parte de P^* según el Lema 1. Ya que $A(v_1, v_2)$ enumera el conjunto P^* en S, tiene que haber un número m tal que la sentencia $A(\bar{a}, \bar{m})$ es demostrable en S. Por tanto, la sentencia $\exists v_2 A(\bar{a}, v_2)$ es demostrable en S, pero esta sentencia es $\sim\forall v_2 \sim A(\bar{a}, v_2)$, que es la negación de $\forall v_2 \sim A(\bar{a}, v_2)$, es decir, es $\sim G$. Entonces, si G es demostrable en S, lo es su negación, lo que implica que S es simplemente inconsistente. Concluimos de esta forma que G no es demostrable en S. Por tanto, la ω-consistencia solo es necesaria para demostrar que G no es tampoco refutable.

De esta forma queda demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3: suponiendo que $A(v_1, v_2)$ enumera P^* en S, tomamos a como el número Gödel de la fórmula $\forall v_2 {\sim} A(v_1, v_2)$y G como la sentencia $\forall v_2 {\sim} A(\bar{a}, v_2)$. De esta forma:

- Si S es simplemente consistente, entonces G no es demostrable en S.
- Si S es ω-consistente, entonces S no es ni demostrable ni refutable.

Con todos los teoremas y lemas presentados hasta ahora llegamos a la demostración del Teorema A', del cual se seguirá, junto al Lema 2 que veremos a continuación, el Teorema A.

Teorema A': si S es un sistema axiomatizable ω-consistente en el cual todos los Σ_1-conjuntos son enumerables, entonces S debe ser incompleto.

Demostración: asumimos la hipótesis que plantea este teorema para su demostración. Dado que S es axiomatizable, por definición el conjunto P es Σ_1, de igual manera que lo es el conjunto P^*. Según la hipótesis, el conjunto P^* es enumerable en S, la conclusión se sigue del Teorema 3. Finaliza así la demostración.

El Teorema A es consecuencia del Teorema A', y para demostrarlo lo único que tenemos que hacer es demostrar que si todas las Σ_0-sentencias verdaderas son demostrables en S, entonces todos los Σ_1-conjuntos son enumerables en S. Diremos que la fórmula $F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ enumera la relación $R(x_1, \ldots, x_2)$ en S si para todos los números $k_1, \ldots, k_n$ se cumplen dos condiciones:

- Si $R(k_1, \ldots, k_n)$ se cumple, entonces existe un número k tal que la sentencia $F(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k})$ es demostrable en S.
- Si $R(k_1, \ldots, k_n)$ no se cumple, entonces para todo k, la sentencia $F(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k})$ es refutable en S.

La otra pieza que necesitamos para demostrar el Teorema A es el Lema 2:

Lema 2: si todas las Σ_0-sentencias verdaderas son demostrables en S, entonces todos los Σ_1-conjuntos y relaciones son enumerables en S.

Demostración: asumimos la hipótesis. Hecho esto tomamos $R(x_1, \ldots, x_n)$ como la Σ_1-relación (o conjunto en el caso de que $n = 1$). Entonces hay una Σ_0-relación $S(x_1, \ldots, x_n, y)$ tal que para todo $x_1, \ldots, x_n$,

$$R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists y S(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Tomamos $F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ como una Σ_0-fórmula que expresa la relación $S(x_1, \ldots, x_n, y)$. Demostramos que $F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ enumera la relación $R(x_1, \ldots, x_n)$ en S. Suponiendo que $R(x_1, \ldots, x_n)$ se cumple, entonces para algún número k, $S(k_1, \ldots, k_n, k)$ se cumple. Por tanto, $F(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k})$ es una Σ_0-sentencia verdadera, y por hipótesis, demostrable en S. Supongamos ahora que $R(x_1, \ldots, x_n)$ no se cumple, entonces para todo número k, $S(k_1, \ldots, k_n, k)$ es falso. Por tanto, para todo k, la sentencia $F(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k})$ es falsa, y $\sim F(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k})$ es una Σ_0-sentencia verdadera demostrable en S, lo que implica que $F(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k})$ es refutable para todo k. De estos dos casos se sigue que la fórmula $F(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ enumera la relación $R(x_1, \ldots, x_n)$ en S. Hasta aquí la demostración del Lema 2.

Con esto y la demostración del Teorema A' damos por demostrado el Teorema A.

Para la demostración del Teorema B necesitamos dominar algunos conceptos como el de sistema Σ_0-completo. Diremos que un sistema S es Σ_0-completo si todas las Σ_0-sentencias son demostrables en S. Ahora vamos a demostrar la Σ_0-completitud de P.A. y de varios subsistemas de este.

Una Σ_0-sentencia es correctamente decidible en S si es o verdadera y demostrable en S, o falsa y refutable en S.

Proposición 1: las siguientes dos condiciones son conjuntamente suficientes para decir que S es Σ_0-completo:

- C_1: toda Σ_0-sentencia atómica es correctamente decidible en S.
- C_2: para cualquier Σ_0-fórmula $F(w)$, con w como la única variable libre, y para todo número n, si las sentencias $F(\bar{0}), \ldots, F(\bar{n})$ son todas demostrables en S, entonces lo es la sentencia $(\forall w \leq \bar{n})F(w)$.

Demostración: suponiendo que tanto C_1 como C_2 se cumplen, demostramos inductivamente que todas las Σ_0-sentencias son correctamente decidibles en S.

- Por C_1, todas las Σ_0-sentencias de grado 0 son correctamente decidibles en S.

- Es obvio por lógica proposicional que para cualesquiera sentencias X e Y, si ambas son correctamente decidibles en S, entonces $\sim X$ y $X \supset Y$ son correctamente decidibles en S.
- Cualquier Σ_0-sentencia S, que no es ni atómica ni tiene la forma $\sim X$ o $X \supset Y$, debe tener la forma $(\forall w \leq \bar{n})F(w)$, donde $F(w)$ es una Σ_0-fórmula de menor grado que S y contiene w como única variable libre. Consideramos entonces una Σ_0-sentencia $(\forall w \leq \bar{n})F(w)$ tal que todas las Σ_0-sentencias de menor grado sean correctamente decidibles en S. Tenemos que demostrar que $(\forall w \leq \bar{n})F(w)$ es también correctamente decidible en S.
  - Supongamos que la sentencia es verdadera. Entonces cada una de las sentencias $F(\bar{0})$, …, $F(\bar{n})$ es verdadera. Cada una de ellas es demostrable en S, ya que son de menor grado que $(\forall w \leq \bar{n})F(w)$. Entonces, según la condición C_2, la sentencia $(\forall w \leq \bar{n})F(w)$ es demostrable en S.
  - Supongamos que la sentencia es falsa. Entonces para al menos algún $m \leq n$, la sentencia $F(\bar{m})$ es falsa y, por tanto, refutable en S. Dado que $\bar{m} \leq \bar{n}$ es una Σ_0-sentencia verdadera, es demostrable en S según C_1. Ya que $\bar{m} \leq \bar{n}$ y $\sim F(\bar{m})$ son ambas probables, $\bar{m} \leq \bar{n} \supset F(\bar{m})$ es refutable en S. Pero $(\forall w \leq \bar{n})F(w) \supset (\bar{m} \leq \bar{n} \supset F(\bar{m}))$ es demostrable, por lo que $(\forall w \leq \bar{n})F(w)$ es refutable en S.

Así se completa la demostración.

Proposición 2: las tres siguientes condiciones son suficientes para afirmar la Σ_0-completitud de S:

- D_1: todas las Σ_0-sentencias atómicas verdaderas son demostrables en S.
- D_2: para cualesquiera números distintos m y n, la sentencia $\bar{m} \neq \bar{n}$ es demostrable en S.
- D_3: para cualquier variable w y cualquier número n, la fórmula

$$w \leq \bar{n} \supset (w = \bar{0} \vee \ldots \vee w = \bar{n})$$

  es demostrable en S.

Estas tres condiciones juntas implican la condición C_1 que acabamos de ver, y la última de ellas implica la condición C_2.

Demostración:

- Suponiendo que las 3 se cumplen, vamos a demostrar que C_1 debe entonces cumplirse también. Según D_1 todas las Σ_0-sentencias atómicas verdaderas son demostrables en S. Tenemos que demostrar que todas las Σ_0-sentencias atómicas falsas son refutables en S.
    - Si la sentencia falsa tiene la forma $\overline{m} = \overline{n}$ será refutable en S por D_2.
    - Si la sentencia falsa tiene la forma $\overline{m} \leq \overline{n}$, entonces todas las sentencias $\overline{m} = \overline{0} \vee \ldots \vee \overline{m} = \overline{n}$ son refutables. De esto se sigue según D_3 que $\overline{m} \leq \overline{n}$ es refutable.
    - Si la sentencia falsa tiene la forma $\overline{m} + \overline{n} = \overline{k}$. Ya que la sentencia es falsa, $m + n = p$ para algún número $p \neq k$. Entonces $\overline{m} + \overline{n} = \overline{p}$ es demostrable en S por D_1 y $\overline{p} \neq \overline{k}$ es demostrable en S por D_2. Por tanto, la fórmula $\overline{m} + \overline{n} \neq \overline{k}$ es demostrable en S. Por tanto, la sentencia falsa $\overline{m} + \overline{n} = \overline{k}$ es refutable en S.
- Demostramos también que la condición C_2 es derivable de D_3. Aceptamos D_3. Suponemos que $F(w)$ es una Σ_0-fórmula con w como única variable libre, y n es un número tal que cada una de las n sentencias $F(\overline{0}), \ldots, F(\overline{n})$ son todas demostrables en S. Por tanto, las fórmulas abiertas

  $$w = \overline{0} \supset F(w), \ldots, w = \overline{n} \supset F(w)$$

  son todas demostrables en S. Por tanto, por lógica proposicional, la fórmula

  $$w = 0 \vee \ldots \vee w = \overline{n} \supset F(w)$$

  es demostrable en S, de lo que se sigue que la fórmula $w = \overline{n} \supset F(w)$ lo es. Por tanto, según la regla de generalización, la sentencia $\forall w(w \leq \overline{n} \supset F(w))$ es demostrable en S, y esta sentencia es la sentencia $(\forall w \leq \overline{n})F(w)$.

Aquí finaliza la demostración de la Proposición 2.

Vamos ahora a ofrecer algunos ejemplos de subsistemas Σ_0-completos de la Aritmética de Peano. Son cuatro subsistemas de P.A. que van de más fuerte a más débil, siendo este último el sistema (R_0), el sistema mínimo que necesitamos para demostrar el teorema. Tenemos que demostrar que (R_0) es Σ_0-completo y también que (R_0) es un subsistema de todos los demás que, consecuentemente, son Σ_0-completos, al igual que P.A., que los incluye a todos.

El primero de ellos es el sistema (Q), resultado de eliminar el esquema axiomático N_{12}, el esquema de inducción, al sistema P.A. Trivialmente (Q) $\subseteq$ P.A. Quedaría compuesto de los siguientes elementos:

- N_1: $v_1' = v_2' \supset v_1 = v_2$
- N_2: $\sim v_1' = \bar{0}$
- N_3: $v_1 + \bar{0} = v_1$
- N_4: $v_1 + v_2' = (v_1 + v_2)'$
- N_5: $v_1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$
- N_6: $v_1 \cdot v_2' = (v_1 \cdot v_2) + v_1$
- N_7: $v_1 \leq \bar{0} \equiv v_1 = \bar{0}$
- N_8: $v_1 \leq v_2' \equiv (v_1 \leq v_2 \vee v_1 = v_2')$
- N_9: $v_1 \leq v_2 \vee v_2 \leq v_1$

En segundo lugar consideramos el sistema (Q_0), formado por los esquemas axiomáticos desde el N_1 al N_8, por tanto, trivialmente (Q_0) $\subseteq$ (Q).

Los otros dos sistemas a considerar son (R) y (R_0). El sistema (R), debido a Raphael Robinson (1950). Este sistema tiene infinitos axiomas no lógicos que se recogen bajo los cinco siguientes esquemas axiomáticos:

- Ω_1: todas las sentencias $\bar{m} + \bar{n} = \bar{k}$, donde $m + n = k$.
- Ω_2: todas las sentencias $\bar{m} \cdot \bar{n} = \bar{k}$, donde m x $n = k$.
- Ω_3: todas las sentencias $\bar{m} \neq \bar{n}$, donde m y n son números distintos.
- Ω_4: todas las fórmulas $v_1 \leq \bar{n} \equiv (v_1 = \bar{0} \vee \ldots \vee v_1 = \bar{n})$.
- Ω_5: todas las fórmulas $v_1 \leq \bar{n} \vee \bar{n} \leq v_1$.

Si eliminamos el esquema axiomático Ω_5 obtenemos el sistema (R_0), obviamente (R_0) $\subseteq$ (R), del cual vamos a demostrar su Σ_0-completitud y que es un subsistema del sistema (Q_0). Demostramos su Σ_0-completitud demostrando que cumple las condiciones D_1, D_2 y D_3 de la Proposición 2. Para empezar, observamos que para cualquier número n, la sentencia $\bar{n} = \bar{n}$ es un teorema de lógica de primer orden con identidad. Por tanto, es demostrable en (R_0). Suponemos $m \leq n$. Dado que $\bar{m} = \bar{m}$ es demostrable, también lo es

$$\bar{m} = \bar{0} \vee \ldots \vee \bar{m} = \bar{m} \vee \ldots \vee \bar{m} = \bar{n}$$

De lo anterior más Ω_4 se seguiría que la sentencia $\bar{m} \leq \bar{n}$ es demostrable. Por tanto, todas las Σ_0-sentencias verdaderas con forma $\bar{m} \leq \bar{n}$ son demostrables en (R_0). Según Ω_1 y Ω_2 todas las Σ_0-sentencias atómicas verdaderas son demostrables en (R_0). De esta forma, el sistema (R_0) satisface la condición D_1. También satisface la condición D_2 según Ω_3. Para demostrar que satisface D_3, para cada n, la fórmula

$$v_1 \leq \bar{n} \supset (v_1 = \bar{0} \vee \ldots \vee v_1 = \bar{n})$$

es demostrable en (R_0), por lo que también lo es la fórmula

$$\forall v_1(v_1 \leq \bar{n} \supset (v_1 = \bar{0} \vee \ldots \vee v_1 = \bar{n})).$$

Por tanto, para cualquier variable w, la fórmula $w \leq \bar{n} \supset (w = \bar{0} \vee \ldots \vee w = \bar{n})$ es demostrable en (R_0). Así pues, de acuerdo con la Proposición 2, (R_0) es $\Sigma_0$completo.

Demostramos a continuación que el sistema (R_0) es un subsistema de (Q_0). Aunque los axiomas de inducción de N_{12} no son axiomas de (Q_0), podemos utilizar la inducción matemática en nuestro metalenguaje para demostrar varias cosas acerca de este subsistema.

- Según N_4 sabemos que si $\bar{n} + \bar{m} = \bar{q}$ es demostrable en (Q_0), entonces también lo es $\bar{n} + \overline{m+1} = \overline{q+1}$. Según N_3 también es demostrable $\bar{n} + \bar{0} = \bar{n}$, por lo que podemos demostrar
$$\bar{n} + \bar{1} = \overline{n+1}, \bar{n} + \bar{2} = \overline{n+2}, \ldots, \bar{n} + \bar{m} = \overline{n+m}$$
De esta forma, todas las sentencias Ω_1 son demostrables en (Q_0).
- Según N_6, sabemos que si $\bar{n} \cdot \bar{m} = \bar{q}$ es demostrable, entonces también lo son
$$\bar{n} \cdot \overline{m+1} = \bar{q} + \bar{n}$$
y
$$\bar{n} \cdot \overline{m+1} = \overline{q+n}$$
Por tanto, si $\bar{n} \cdot \bar{m} = \overline{n \times m}$ es demostrable, $\bar{n} \cdot \overline{m+1} = \overline{n \times (m+1)}$ también lo es. Según N_5 queda demostrado en este sistema $\bar{n} \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Con todo esto también se demuestra
$$\bar{n} \cdot \bar{1} = \overline{n \times 1}, \bar{n} \cdot \bar{2} = \overline{n \times 2}, \ldots, \bar{n} \cdot \bar{m} = \overline{n \times m}$$
De esta forma, todas las sentencias Ω_2 son demostrables en (Q_0).

- Para el esquema axiomático Ω_3 tenemos que demostrar que para cualquier número *m* y cualquier número positivo *n*, la sentencia $\overline{m} \neq \overline{n+m}$ es demostrable en (Q_0). En primer lugar, para cualesquiera números *m* y *n*, la sentencia
$$\overline{m+1} = \overline{n+1} \supset \overline{m} = \overline{n}$$
es demostrable en el sistema según N_1. Por tanto,
$$\overline{m} \neq \overline{n} \supset \overline{m+1} \neq \overline{n+1}$$
es demostrable. De esta forma, si $\overline{m} \neq \overline{n}$ es demostrable, también lo es
$$\overline{m+1} \neq \overline{n+1}.$$
Para cualquier número positivo *n*, la sentencia $\overline{0} \neq \overline{n}$ es demostrable según N_2. Por tanto, podemos demostrar
$$\overline{1} \neq \overline{n+1},\ \overline{2} \neq \overline{n+2},\ \ldots,\ \overline{m} \neq \overline{n+m}.$$
- Para el esquema axiomático Ω_4, demostramos por inducción de *n* que
$$v_1 \leq \overline{n} \equiv (v_1 = \overline{0} \vee \ldots \vee v_1 = \overline{n})$$
es demostrable en (Q_0).
Según N_7, $v_1 \leq \overline{0} \equiv v_1 = \overline{0}$ es demostrable. Supongamos que *n* es tal que
$$v_1 \leq \overline{n} \equiv (v_1 = \overline{0} \vee \ldots \vee v_1 = \overline{n})$$
es demostrable. Entonces, ya que
$$v_1 \leq \overline{n+1} \equiv (v_1 \leq \overline{n} \vee v_1 = \overline{n+1})$$
es demostrable según N_8, se sigue por lógica proposicional que
$$v_1 \leq \overline{n+1} \equiv (v_1 \leq \overline{0} \vee \ldots \vee \overline{n} \vee v_1 = \overline{n+1})$$
es demostrable. Así se completa la inducción.

Como hemos visto, la ω-consistencia juega un papel fundamental en la demostración de incompletitud llevada a cabo por Gödel. Una versión más intuitiva e informal de la demostración mostrará más claramente el papel de la ω-consistencia en la demostración. La fórmula *G*, que dice que “no existe una demostración de *G*”, sería la negación de una sentencia Σ_1: $\sim \exists x$(*x* es una demostración de *G*).

- Si $S \vdash G$ (léase, *G* es demostrable en *S*), entonces $S \vdash \sim \exists x$(*x* es una demostración de *G*). Pero $S \vdash G$ significa que existe una demostración de *G*, con número *j*, y una Σ_0-sentencia “*j* es una demostración de *G*”, que será Σ_0 verdadera y por tanto, demostrable. De ella se deducirá fácilmente la afirmación existencial $\exists x$(*x* es una demostración de *G*), que contradice a la fórmula *G*, por hipótesis también demostrable. Por tanto, si el sistema es simplemente consistente, *G* no es demostrable.

- Por tanto, $S \nvdash G$, y así, son demostrables las Σ_0-sentencias "0 no es una demostración de *G*", "1 no es una demostración de *G*", etc., puesto que son Σ_0 y verdaderas. Pero si $S \vdash \sim G$, es decir, $S \vdash \sim\sim \exists x$(*x* es una demostración de *G*), entonces, eliminando la doble negación, tenemos que $S \vdash \exists x$(*x* es una demostración de *G*). Si esto sucede, el sistema es ω-inconsistente, puesto que demostraríamos una afirmación existencial junto con la negación de todos sus casos particulares. Por tanto, si *S* es ω-consistente, *G* tampoco es refutable.

No es difícil demostrar que (R) es un subsistema de (Q). Para ello basta demostrar que las fórmulas de Ω_5 se obtienen a partir de N_9 instanciando la variable v_2.

6. El Teorema de Incompletitud según Rosser

La demostración de incompletitud del sistema P.A. de Gödel se basa en la asunción de que el sistema P.A. es ω-consistente. Rosser (1936), en la última versión del teorema que vamos a tratar, demuestra la incompletitud de este sistema partiendo de la asunción de su consistencia simple. Para ello no utiliza la sentencia *G*, sino que construye otra sentencia que la sustituye en la demostración. Otra diferencia entre ambas sentencias, además de que una requiera que el sistema P.A. sea ω-consistente y la otra que sea simplemente consistente, es que la fórmula de Gödel se basa en una fórmula que expresa el conjunto $\tilde{P}*$, mientras que la de Rosser se basaba en una fórmula que expresa el conjunto $P*$. Además, la demostración de Gödel se puede llevar a cabo para el subsistema más débil de P.A., el sistema (R_0), mientras que la demostración de Rosser requiere como mínimo el sistema (R). Pese a esto, este subsistema sigue siendo menos que P.A., puesto que seguimos prescindiendo de la inducción.

Para presentar el primer teorema conviene definir el siguiente concepto: un sistema *S* es una extensión de Ω_4 y Ω_5 si todas las fórmulas de Ω_4 y Ω_5 son demostrables en *S*. Como recordatorio, estos dos esquemas axiomáticos se conformaban de las siguientes fórmulas:

- Ω_4: todas las fórmulas $v_1 \leq \bar{n} \equiv (v_1 = \bar{0} \vee \ldots \vee v_1 = \bar{n})$.
- Ω_5: todas las fórmulas $v_1 \leq \bar{n} \vee \bar{n} \leq v_1$.

El objetivo de este apartado va a ser demostrar el siguiente teorema:

Teorema R: toda extensión axiomatizable simplemente consistente de Ω_4 y Ω_5 en la cual todos los Σ_1-conjuntos son enumerables debe ser incompleta.

De este teorema se siguen tres corolarios: en primer lugar, que toda extensión axiomatizable simplemente consistente de Ω_4 y Ω_5 en la cual todas las Σ_0-sentencias verdaderas son demostrables debe ser incompleta; segundo, toda extensión axiomatizable simplemente consistente del sistema (R) es incompleta; por último, si el sistema P.A. es simplemente consistente, es incompleto.

Para llegar al Teorema R necesitaremos unos resultados previos:

Teorema 1: si $H(v_1)$ es una fórmula que representa en S un superconjunto de R^* disjunto de P^*, entonces la sentencia $H(\bar{h})$ es indecidible en S, donde h es el número Gödel de $H(v_1)$.

Demostración: A es el conjunto representado por $H(v_1)$. Suponemos que $R^* \subseteq A$ y que P^* es disjunto de A. Ya que $H(v_1)$ representa A, entonces $H(\bar{h})$ es demostrable en S syss $h \in A$. $H(\bar{h})$ es demostrable en S syss $h \in P^*$. De esta manera, $h \in P^*$ syss $h \in A$. Pero P^*, por hipótesis, es disjunto de A, por lo que $h \notin A$. Ya que $h \notin P^*$, entonces $H(\bar{h})$ no es demostrable en S. Como $h \notin A$, entonces $h \notin R^*$, de forma que $H(\bar{h})$ no es refutable en S, así que es indecidible en S. Así concluye la demostración.

El Teorema 1 sugiere la siguiente noción de separabilidad. Diremos que una fórmula $F(v_1)$ separa un conjunto A de un conjunto B en S si para todo $n \in A$, $F(\bar{n})$ es demostrable en S y para todo $n \in B$, $F(\bar{n})$ es refutable en S.

Lema 1: si $F(v_1)$ separa A de B en S y S es consistente, entonces $F(v_1)$ representa algún superconjunto de A que es disjunto de B.

Demostración: asumimos la hipótesis. A' será el conjunto representado por $F(v_1)$ en S. Ya que para todo $n \in A$ la sentencia $F(\bar{n})$ es demostrable, entonces $A \subseteq A'$. Si algún número n estuviera tanto en A' como en B, entonces $F(\bar{n})$ sería a la vez demostrable y refutable en S. Por tanto, si S es simplemente consistente, entonces A' es disjunto de B. De esta forma queda demostrado el Lema 1.

Del Teorema 1 y el Lema 1 surge un segundo teorema:

Teorema 2: si $H(v_1)$ separa R^* de P^* en S y S es simplemente consistente, entonces $H(\bar{h})$ es indecidible en S, donde h es el número Gödel de $H(v_1)$.

Decimos que A es separable de B en S si existe una fórmula $F(v_1)$ que separe A de B en S. Siguiendo el Teorema 2, para demostrar que P.A. es incompleto asumiendo únicamente su simple consistencia, es suficiente con demostrar que R^* es separable de P^* en P.A. Llamamos a S sistema Rosser para conjuntos si para cualesquiera Σ_1-conjuntos A y B, el conjunto $A - B$ es separable de $B - A$ en S; y para cada $n > 1$, llamamos a S un sistema Rosser para relaciones n-arias si para dos Σ_1-relaciones cualesquiera

$$R_1(x_1, \ldots, x_n) \text{ y } R_2(x_1, \ldots, x_n)$$

que son enumerables en S, sus diferencias $R_1 - R_2$ y $R_2 - R_1$ son separables en S.

Lema S (Lema de Separación): si todas las fórmulas de Ω_4 y Ω_5 son demostrables en *S*, entonces para cada dos relaciones cualesquiera $R_1(x_1, \ldots, x_n)$ y $R_2(x_1, \ldots, x_n)$ enumerables en *S*, sus diferencias $R_1 - R_2$ y $R_2 - R_1$ son separables en *S*.

Demostración: supongamos que todas las fórmulas de Ω_4 y Ω_5 son demostrables en *S*. Vamos a demostrar que para dos conjuntos cualesquiera *A* y *B* enumerables en *S*, el conjunto $B - A$ es separable de $A - B$ en *S*. $A(x, y)$ y $B(x, y)$ son fórmulas que enumeran respectivamente *A* y *B* en *S*. Demostramos que la fórmula

$$\forall y(A(x, y) \supset (\exists z \leq y)B(x, z))$$

separa $B - A$ de $A - B$ en *S*.

- Suponemos $n \in B - A$. De esta forma, $n \in B$, y para algún número *k*, la sentencia $B(\bar{n}, \bar{k})$ es demostrable en *S*. También, $n \notin A$, y por eso para todo $m \leq k$, la sentencia $A(\bar{n}, \bar{m})$ es refutable. Además, según Ω_4, la sentencia $(\forall y \leq \bar{k}) \sim A(\bar{n}, y)$ es demostrable. Por tanto, la fórmula abierta $y \leq \bar{k} \supset \sim A(\bar{n}, y)$ es demostrable y, en consecuencia, $A(\bar{n}, y) \supset \sim (y \leq \bar{k})$ es demostrable. De Ω_5 se sigue que $A(\bar{n}, y) \supset \bar{k} \leq y$ es demostrable, y ya que $B(\bar{n}, \bar{k})$ es demostrable, $A(\bar{n}, y) \supset (\bar{k} \leq y \wedge B(\bar{n}, \bar{k}))$ es demostrable. Así, por lógica de primer orden, la fórmula
$$A(\bar{n}, y) \supset (\exists z \leq y)B(\bar{n}, z)$$
es demostrable, de forma que también lo es la sentencia
$$\forall y(A(\bar{n}, y) \supset (\exists z \leq y)B(\bar{n}, z)).$$
- Suponemos $n \in A - B$. Entonces para algún *k*, $A(\bar{n}, \bar{k})$ es demostrable y para todo $m \leq k$, $B(\bar{n}, \bar{m})$ es refutable y, de esta forma, según Ω_4, la sentencia $(\forall z \leq k) \sim B(\bar{n}, z)$ es demostrable. Se sigue que la sentencia
$$A(\bar{n}, \bar{k}) \wedge (\forall z \leq \bar{k}) \sim B(\bar{n}, z)$$
es demostrable, de forma que también lo es la sentencia
$$\sim (A(\bar{n}, \bar{k}) \supset \sim (\forall z \leq \bar{k}) \sim B(\bar{n}, z))$$
y esta es la sentencia $\sim (A(\bar{n}, \bar{k}) \supset (\exists z \leq \bar{k}) \sim B(\bar{n}, z))$. Ya que la sentencia $A(\bar{n}, \bar{k}) \supset (\exists z \leq \bar{k}) \sim B(\bar{n}, z)$ es refutable, equivale a la sentencia $\forall y(A(\bar{n}, \bar{k}) \supset (\exists z \leq \bar{k}) \sim B(\bar{n}, z))$.

Así finaliza la demostración.

Teorema 3: cualquier extensión de Ω_4 y Ω_5 en la que todas las Σ_0-sentencias verdaderas sean demostrables es un sistema Rosser.

De este teorema extraemos el siguiente corolario: los sistemas (R), (Q) y P.A. son sistemas Rosser.

A partir del Lema S y el Teorema 2 se sigue un nuevo teorema:

Teorema 4: *S* será cualquier sistema simplemente consistente en el que los conjuntos P^* y R^* sean ambos enumerables y en el que todas las fórmulas de Ω_4 y Ω_5 son demostrables. Por tanto, *S* es incompleto.

Demostración: suponemos que $A(x, y)$ es una fórmula que enumera P^* en *S*, y $B(x, y)$ es una fórmula que enumera R^* en *S*. Según el Lema S, la fórmula

$$\forall y(A(x, y) \supset (\exists z \leq y)B(x, z))$$

separa R^* de P^* en *S*. Entonces, según el Teorema 2, si *h* es el número Gödel de esta fórmula, la sentencia

$$\forall y(A(\bar{h}, y) \supset (\exists z \leq y)B(\bar{h}, z))$$

es indecidible en *S*. Así queda demostrado el Teorema 4.

Podemos ahora fácilmente demostrar el Teorema R. Suponemos que *S* obedece a la hipótesis del Teorema R. Suponemos que *S* es una extensión de Ω_4 y Ω_5, $A(x, y)$ es una fórmula que enumera P^* en *S*, y $B(x, y)$ es una fórmula que enumera R^* en *S*. Según el Lema S, la fórmula

$$\forall y(A(x, y) \supset (\exists z \leq y)B(x, z))$$

separa $R^* - P^*$ de $P^* - R^*$. Asumiendo que *S* es consistente, los conjuntos R^* y P^* son disjuntos, por lo que $R^* - P^* = R^*$ y $P^* - R^* = P^*$, y por tanto, la fórmula que acabamos de ver los separa. Tomamos *h* como el número Gödel de esta fórmula. Según el Teorema 2, la sentencia

$$\forall y(A(\bar{h}, y) \supset (\exists z \leq y)B(\bar{h}, z))$$

es indecidible en *S*. Finaliza aquí la demostración del Teorema R.

Esta última sentencia es la sentencia indecidible de Rosser que sustituye en la demostración de incompletitud a la sentencia *G* propuesta por Gödel. Podemos comparar ambas sentencias y establecer algunas diferencias dentro del sistema P.A. Dado que este sistema es axiomatizable, el conjunto P^* es Σ_1 y, en consecuencia, existe una Σ_0-fórmula $A(x, y)$ que expresa una Σ_0-relación cuyo dominio es P^*. De esta forma, para cualquier número n, $n \in P^*$ syss existe algún número m tal que $A(\bar{n}, \bar{m})$ es una sentencia verdadera. Además, $n \in P^*$ syss $E_n(\bar{n})$ es demostrable. m será testigo de que $E_n(\bar{n})$ es demostrable syss la sentencia $A(\bar{n}, \bar{m})$ es demostrable.

La sentencia Gödel, $\forall y{\sim}A(\bar{a}, y)$, expresa la proposición de que para todo y, y no es un testigo de que $E_a(\bar{a})$ es demostrable, pero $E_a(\bar{a})$ es la sentencia $\forall y{\sim}A(\bar{a}, y)$. Podríamos traducirla de forma intuitiva como “Yo no soy demostrable”. Asumiendo la ω-consistencia del sistema, esta sentencia es indecidible.

La sentencia Rosser, $\forall y(A(\bar{h}, y) \supset (\exists z \leq y)B(\bar{h}, z))$, podría traducirse de forma intuitiva como “Si hay una demostración de mí con un cierto número, entonces hay un número más pequeño correspondiente a una refutación de mí”. Esta es la versión más fuerte del teorema, puesto que, entre todas las versiones, es la que se basa en la asunción más débil, la consistencia simple del sistema. Prescinde de la ω-consistencia necesaria para la demostración de Gödel. Pero a su vez es la más olvidada, puesto que cuenta con la desventaja de que esta fórmula, en comparación con la sentencia G, es poco intuitiva.

Comentarios finales

Si consideramos las demostraciones cuidadosamente, observamos que la incompletitud está a un nivel muy básico. Cualquier Σ_0-sentencia podemos comprobar si es verdadera o falsa en un número finito de pasos (puesto que todos los cuantificadores están acotados). Por tanto, que el sistema demuestre todas las verdades Σ_0 no es pedir mucho: significa simplemente que demuestra afirmaciones cuya verdad se puede comprobar haciendo un número finito de operaciones aritméticas. En este sentido, son las afirmaciones aritméticas más simples.

Siguiendo a Tarski diremos que P.A. (o cualquier otro sistema) es ω-incompleto si existe una fórmula $F(w)$ con una única variable libre w tal que todas las sentencias $F(\bar{0})$, $F(\bar{1})$, …, $F(\bar{n})$, … son demostrables en P.A., pese a que la sentencia universal $\forall wF(w)$ no es demostrable en P.A.

Hemos demostrado que la sentencia Gödel $\forall v_2{\sim}A(\bar{a}, v_2)$ no es demostrable en P.A. Sin embargo, todas las sentencias ${\sim}A(\bar{a}, \bar{0})$, ${\sim}A(\bar{a}, \bar{1})$, …, ${\sim}A(\bar{a}, \bar{n})$, … son demostrables, puesto que son Σ_0 y verdaderas. Este argumento es válido para cualquier sistema axiomatizable consistente en el cual todas las Σ_0-sentencias verdaderas sean demostrables. Así establecemos un último teorema:

Teorema C (El Teorema de la ω-incompletitud): si S es cualquier sistema axiomatizable simplemente consistente en el que todas las Σ_0-sentencias verdaderas son demostrables, entonces S es ω-incompleto.

El sistema demuestra todas las Σ_0-sentencias verdaderas, de forma que, como hemos visto, también demuestra todas las Σ_1-sentencias verdaderas. La incompletitud consiste siempre en la indemostrabilidad de una fórmula universal que dice que todos los números cumplen una Σ_0-propiedad tal que podemos demostrar uno por uno que todos los números lo hacen, pero no podemos demostrarlo a la vez, es decir, mediante una sentencia con un cuantificador universal. En esto es realmente en lo que consiste la incompletitud de la aritmética.

Otra idea que vale la pena comentar es ¿qué significa que un sistema sea axiomatizable? Las demostraciones de incompletitud que hemos visto funcionan para cualquier sistema que sea axiomatizable. Si repasamos el trabajo que nos ha llevado a afirmar que podemos expresar el concepto de demostrabilidad, observamos que hasta llegar al concepto de ser una demostración todo es decidible, lo único que no lo es, es “ser demostrable”, donde aparece el único cuantificador existencial no acotado. Necesitamos una fórmula sigma cero que exprese ser una demostración, y esto significa que tiene que haber un método para que cuando me den una lista de fórmulas pueda comprobar en un numero finito de pasos si es o no una demostración, es decir, ser una demostración tiene que ser decidible. Esto quiere decir:

1. Los axiomas tienen que ser identificables: tenemos que poder saber si una fórmula dada es un axioma o no lo es.
2. Tiene que ser posible determinar de forma finita si una fórmula es o no resultado de aplicar una regla. De hecho, lo interesante es que la ω-incompletitud está ligada con esto. Si le añadimos al sistema una “regla” infinitaria del tipo: “a partir de las infinitas afirmaciones ‘0 cumple *P*’, ‘1 cumple *P*’, etc., inferir ‘Para todo *x*, *x* cumple *P*’”. Tendríamos un sistema completo, pero sería un sistema infinitario, habría deducciones infinitamente largas, que ya no tendrían número, no podría reconocerse si son correctas o no porque tienen infinitos pasos, y, en última instancia, el concepto de demostración ya no sería aritmetizable.

Que sea axiomatizable significa que cualquier fórmula demostrable lo es en un número finito de pasos, y que el que algo sea una demostración puede también determinarse en un número finito de pasos.

Por último, hablaremos de la relevancia en función de su fuerza de las diferente versiones del teorema que hemos considerado en el trabajo. Hemos dicho que la fuerza de los teoremas se va incrementando desde el primero que hemos visto, el Teorema de Tarski, hasta el más fuerte, el Teorema de Rosser. Sin embargo, la versión que nos ofrece el Teorema de Gödel-Tarski realmente es suficiente en tanto que lo que pide es que el sistema sea correcto. ¿Realmente tenemos algún tipo de interés en los sistemas incorrectos si nuestro objetivo es buscar una axiomatización de la aritmética? En las versiones más fuertes del teorema encontramos la imposibilidad de lograr una teoría completa aunque cometa errores, con tal de que pueda demostrar las verdades Σ_0 (manteniendo un mínimo de exigencia de corrección, puesto que si fuese completamente incorrecta ya no tendría nada de aritmética).

Si nos ceñimos a pensar en la Aritmética de Peano sí que encontramos más interés en las versiones más fuertes del teorema. Las asunciones que se hacen en cada uno de los teoremas son cada vez más débiles, lo que hace que cada uno de los teoremas sea más fuerte que el anterior: si P.A. es un sistema correcto, entonces es incompleto (Teorema de Gödel-Tarski); si P.A. es un sistema ω-consistente, entonces es incompleto (Teorema de Gödel); si P.A. es un sistema simplemente consistente, entonces es incompleto (Teorema de Rosser). Son dos cosas muy diferentes que todo el mundo crea (sin duda, justificadamente) que la Aritmética de Peano es correcta (y por tanto ω-consistente y simplemente consistente) y que podamos demostrarlo, algo no trivial, como también mostró Gödel en su segundo teorema. Si no damos por garantizada la corrección de P.A. entonces la distinta fuerza de los teoremas cobra todo su sentido en la medida en que cada uno de ellos presupone menos sobre el sistema.

Bibliografía

Berto, F. (2009). There's something about Gödel: the complete guide to the incompleteness theorem. Chichester, Malden, Oxford: Wiley-Blackwell.

Gödel, K. (1931). Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los "Principia Mathematica" y sistemas afines, I. *Revista Teorema*, *8*. (1980).

Kalish, D., Montague, R. (1964). On Tarski's Formalization of predicate logic with identity. *Arch. f. Math. Logik und Grundl*, *7,* 81–101.

Myhill, J. (1955). Creative sets. *Zeitschrift für mathematischer Logik und Grundlagen der Mathematik*,*1*, 97–108.

Quine, W. (1940). Mathematical Logic. Nueva York: Norton & Co.

Rosser, J. (1936). Extensions of some theorems of Gödel and Church. *J. of Symbolic Logic*, *1*, 87–91.

Smith, P. (2013). An Introduction to Gödel's Theorem (Second Edition). Cambridge, Nueva York: Cambridge University Press.

Smullyan, R. (1992). Gödel Incompleteness Theorems. Nueva York, Oxford: Oxford University Press.