UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Facultad de Educación y Trabajo Social

Curso 2019-2020

MÁSTER EN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

Especialidad Matemáticas

"Propuesta didáctica basada en el uso del software GeoGebra para trabajar Geometría analítica en 4º de ESO."

Autor: Sergio Martínez Durán

Tutor: Dr. Matías Arce Sánchez

Valladolid, 2020

RESUMEN

El presente Trabajo Fin de Máster (TFM) pretende visibilizar el uso de programas de geometría dinámica, en concreto GeoGebra, considerándolo como una herramienta apropiada y eficaz para llevar a cabo una unidad didáctica de geometría analítica en el cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria.

El estudio se inicia con la contribución de las asignaturas del máster a la realización del trabajo, seguido de la justificación temática y objetivos, para introducir la importancia de la herramienta y su relación con el pensamiento matemático.

Posteriormente se detalla un marco curricular que analiza el contenido a tratar en la unidad didáctica y se explica la evolución del uso de las nuevas tecnologías en el aula.

Una vez realizado el análisis teórico y revisión bibliográfica, se desarrolla la parte aplicada de este trabajo, detallando la unidad didáctica y sus limitaciones.

Por último, se realiza un análisis DAFO de la misma, en el que se comentan las debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades y se concluye con una presentación las reflexiones finales acerca del presente trabajo del autor.

ABSTRACT

The present Master's Final Paper (TFM) aims to make visible the use of dynamic geometry programs, specifically GeoGebra, considering it as an appropriate and effective tool to carry out a didactic unit of analytical geometry in the fourth year of Obligatory Secondary Education.

The study begins with the contribution of the subjects of the master's degree to the work, followed by the thematic justification and objectives, to introduce the importance of the tool and its relationship with mathematical thought.

Subsequently, a curricular framework is detailed that analyses the content to be dealt with in the teaching unit and explains the evolution of the use of new technologies in the classroom.

Once the theoretical analysis and bibliographic review are done, the applied part of this work is developed, detailing the didactic unit and its limitations.

Finally, a SWOT analysis of the unit is carried out, in which weaknesses, threats, strengths and opportunities are commented on and a presentation of the author's final reflections on the present work is made.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

1. Introducción

A lo largo del presente año, en el que he cursado el Máster de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación profesional y Enseñanza de Idiomas he tomado conciencia de la importancia que tiene la innovación en la asignatura de matemáticas. La materia de matemáticas requiere de una especial abstracción y capacidad cognitiva del alumnado, por lo que este estudio ambiciona fomentar la innovación con el empleo de una herramienta informática para favorecer la comprensión de conceptos y su implementación gráfica.

Teniendo en cuenta el desarrollo de la sociedad actual, gracias las nuevas tecnologías, se ha decidido enfocar este Trabajo fin de Máster en mejorar el aprendizaje del alumnado con la ayuda del software GeoGebra, siendo este, un programa informático, diseñado y planteado para la enseñanza de las matemáticas.

La primera parte del documento consiste en aportar una justificación de la elección de la temática y en plantear los objetivos generales, personales y prácticos del trabajo. Además, se quiere mostrar la importancia que tienen las nuevas tecnologías en educación secundaria y argumentar que GeoGebra es realmente una buena opción para alcanzar el aprendizaje de las matemáticas. Posteriormente, se mencionan y comentan algunos artículos científicos desarrollados por varios autores, que se utilizan como base para entender las ventajas e inconvenientes, así como, las utilidades que presentan las nuevas tecnologías en el aula, en concreto, el programa GeoGebra.

Después se procede a incluir las virtudes del software en un contexto particular, confeccionando una propuesta didáctica que incluye la presentación del tema y del contenido de geometría analítica siguiendo la legislación actual en Castilla y León. Se añade también la temporalización y las actividades. El programa tendrá importancia tanto en las explicaciones como en las tareas para casa pedidas a los estudiantes.

Se muestra el análisis de la hipotética implementación, estudiando las debilidades, fortalezas, oportunidades y amenazas de la misma. Por último, se detallan las conclusiones y la reflexión personal sobre la propuesta didáctica expuesta y sobre el uso de GeoGebra, relacionándolo con los posibles cambios en el ámbito de la educación, a los que podría contribuir.

2. Justificación

Para apoyar la justificación del trabajo se recurre a las recomendaciones del Boletín Oficial del Estado y a las orientaciones de la Unión Europea, que evidencian la necesidad de aprender por competencias. Esta forma de aprender consiste en adquirir las competencias clave como condición indispensable para lograr que los individuos alcancen un pleno desarrollo personal, social y profesional que se ajuste a las demandas de un mundo globalizado y haga posible el desarrollo económico, vinculado al conocimiento.

La idea de lograr un aprendizaje por competencias es la fuente de inspiración del currículum español, en el que se detallan los contenidos, estándares de aprendizaje evaluables y criterios de evaluación, recogidos en la Orden ECD/65/2015 de 21 de enero, basados en el aprendizaje de destrezas enfocadas a las necesidades de la vida.

A continuación, se adjunta la definición de competencia entendida como:

> «La capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada que suponen una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz» por DeSeCo (definición y selección de competencias) en 2003.

Las competencias, por tanto, se conceptualizan como un "saber hacer" que se aplica a una diversidad de contextos académicos, sociales y profesionales. Para que la transferencia a distintos contextos sea posible resulta indispensable una comprensión del conocimiento presente en las competencias y la vinculación de este con las habilidades prácticas o destrezas que las integran.

Dado que el aprendizaje basado en competencias se caracteriza por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral, el proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe abordarse desde todas las áreas de conocimiento y por parte de las diversas instancias que conforman la comunidad educativa, tanto en los ámbitos formales como en los no formales e informales. Su dinamismo se refleja en que las competencias no se adquieren en un determinado momento y permanecen inalterables, sino que implican un proceso de desarrollo mediante el cual los individuos van adquiriendo mayores niveles de desempeño en el uso de las mismas.

Además, este aprendizaje implica una formación integral de las personas que, al finalizar la etapa académica, deben ser capaces de transferir aquellos conocimientos adquiridos a las nuevas instancias que aparezcan en la opción de vida que elijan. Así, podrán reorganizar su pensamiento y adquirir nuevos conocimientos, mejorar sus actuaciones y descubrir nuevas formas de acción y nuevas habilidades que les permitan ejecutar eficientemente las tareas, favoreciendo un aprendizaje a lo largo de toda la vida.

Una vez señalada la importancia de estas competencias me quiero centrar en dos de las siete competencias clave que son la competencia digital y la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

La primera de ellas, la competencia digital, implica el uso creativo, crítico y seguro de las tecnologías de la información y la comunicación para alcanzar los objetivos relacionados con el trabajo, la empleabilidad, el aprendizaje, el uso del tiempo libre, la inclusión y participación en la sociedad. La persona ha de ser capaz de hacer un uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles con el fin de resolver los problemas reales de un modo eficiente, así como evaluar y seleccionar nuevas fuentes de información e innovaciones tecnológicas, a medida que van apareciendo, en función de su utilidad para acometer tareas u objetivos específicos.

La segunda, la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, entraña la utilización de conceptos, procedimientos y herramientas para aplicarlos en la resolución de problemas, el conocimiento científico del mundo que nos rodea y el reconocimiento del papel que las matemáticas desempeñan en la vida cotidiana.

En concreto, el uso de GeoGebra contribuye a ambas competencias porque sirve para alcanzar el aprendizaje de las matemáticas y por los avances que poseen las herramientas tecnológicas empleadas para el tratamiento de información por el hecho de ser un software informático.

También el uso de GeoGebra o de otras nuevas tecnologías, introduce nuevas metodologías y "salidas de la rutina", que pueden ayudar al alumnado a generar un interés y una cierta motivación por estos nuevos conceptos y contenidos. El propósito de empelar metodologías innovadoras tiene como objetivo la obtención de una mejor respuesta de los estudiantes y, por tanto, mejores resultados.

Además de trabajar dos competencias clave, la motivación de este trabajo también nace con la idea de mejorar el aprendizaje de los alumnos aportando diferentes representaciones e imágenes de un mismo concepto. Normalmente se suele incidir mucho en la representación algebraica de los conceptos, pero no tanto en la representación geométrica del mismo concepto, lo que puede llevar a un aprendizaje imperfecto. Por este motivo se propone la utilización del software GeoGebra puede ser una herramienta eficaz.

2.1. Competencias del Título

El TFM es parte de la formación del Máster de Profesor de Enseñanza Secundaria mediante el cual el alumno debe realizar un trabajo de síntesis, análisis o investigación en educación. Más concretamente, en este trabajo se muestra la adquisición de las competencias del título y de la especialidad de matemáticas que se establecen en Ley Orgánica 2/2006 de Educación y en la Resolución de 17 de diciembre de 2007.

Las competencias generales más utilizadas a lo largo del presente documento son las siguientes:

- *G.1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos.* Para el desarrollo del presente trabajo ha sido necesario conocer los contenidos curriculares, más precisamente, los contenidos curriculares referidos a la geometría analítica y a las nuevas tecnologías. Se puede apreciar tanto en el marco curricular como en el desarrollo de la unidad didáctica.

- *G.4. Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.* Toda la unidad didáctica está enfocada a mejorar el aprendizaje adaptándose a la diversidad de los estudiantes.

Las Competencias Específicas del módulo genérico más empleadas a lo largo del TFM son:

- *E.G.1. Conocer las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones:* Conocer el contexto en el que se incluye a los estudiantes es fundamental a la hora de desarrollar la unidad didáctica.
- *E.G.6. Conocer la evolución histórica del sistema educativo en nuestro país:* Es importante conocer el contexto histórico y actual del mismo para poder predecir si las nuevas herramientas como el GeoGebra son realmente útiles.

Las Competencias Específicas del módulo específico más empleadas a lo largo del TFM son:

- *E.E.7. Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo:* Las actividades y prácticas que planteo en la unidad didáctica están basadas en el currículo de la legislación actual.
- *E.E.10. Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza aprendizaje:* Se incorpora a lo largo de las sesiones para explicar los diferentes conceptos y para que los propios alumnos vayan asimilando los contenidos gracias al uso continuo de GeoGebra.

2.2. Contribución del Máster

A lo largo de todo el trabajo se pretenden recoger los contenidos aprendidos en las diferentes materias del máster, relacionando los diferentes conocimientos entre sí, de modo que ayuden al desarrollo de una unidad didáctica que en el caso del presente documento se trata de geometría analítica en el curso de 4º ESO.

Las asignaturas que más importancia han tenido para el desarrollo de este TFM han sido:

- *Prácticas externas:* Las prácticas realizadas en el centro de educación secundaria IES Parquesol han servido para desarrollar el contexto de mi unidad didáctica, para conocer de manera más cercana la realidad en el aula y mejorar así las estrategias de aprendizaje a seguir en una unidad didáctica.
- *Diseño curricular en matemáticas:* En esta asignatura se desarrolla cómo realizar una programación didáctica y se han aplicado estos conocimientos para la realización y organización de la unidad didáctica.
- *Iniciación a la investigación docente en matemáticas:* Se ha hecho uso de los conocimientos adquiridos en esta asignatura para la búsqueda de artículos dentro del marco teórico.
- *Procesos y contextos educativos:* En esta asignatura se muestra la legislación vigente en materia de educación, lo que ha ayudado a la realización del TFM, y, más concretamente, ha permitido realizar el marco curricular.
- *Innovación docente en matemáticas:* Esta asignatura ha servido de ayuda con el programa GeoGebra, que es una herramienta clave en este trabajo. En esta materia se introduce el software y se muestran algunas aplicaciones para incluir en el aula.

3. Objetivos

En este apartado se detallan los objetivos personales, prácticos e intelectuales que se pretenden alcanzar:

- **Objetivos personales**:

Atender las dificultades de aprendizaje a las que se enfrentan habitualmente los estudiantes de secundaria en el temario de Geometría Analítica mediante el uso de un software interactivo.

Suministrar una aproximación visual a los contenidos, procurando no solo una buena comprensión de estos, sino también aumentar los niveles de motivación hacia el aprendizaje de los mismos.

- **Objetivos prácticos**:

Diseñar una propuesta de trabajo de la Geometría Analítica en secundaria que permita mantener altos niveles de motivación en el alumnado.

Contribuir a desarrollar la comprensión de los conceptos mediante la representación visual o geométrica.

Contribuir a desarrollar la capacidad de los estudiantes de secundaria de realizar conjeturas, plantear hipótesis y contrastarlas a través del uso de software visual interactivo para trabajar en Geometría.

- **Objetivos intelectuales**:

Reflexionar sobre el posible el impacto, tanto cognitivo como motivacional, del uso de GeoGebra para el aprendizaje de la Geometría Analítica en alumnado de secundaria.

4. Fundamentación teórica del proyecto

4.1. GeoGebra

La educación en el área de matemáticas requiere de una transformación en algunos aspectos como son la exploración del desarrollo psicológico de los estudiantes, el fomento de las nuevas tecnologías en el aula o la necesidad de realizar cambios en la forma de evaluar.

En concreto, se quiere incidir en la inclusión de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y, más concretamente, en el uso del software GeoGebra en el aula, en una etapa educativa específica de secundaria.

Para ubicarnos en este trabajo es necesario conocer la definición de GeoGebra, que se detalla continuación, entendiendo el programa como:

"Un software libre, de matemática para la educación en todos los niveles, disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraica general y simbólica, estadísticas de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas." Esta definición ha sido recogida de la propia web de GeoGebra.

Hay que tener en cuenta la posible imparcialidad de esta definición, debido a que ha sido creada por sus propios autores, manifestada a través del destaque de sus virtudes y disimulo de fallos. Aún con esto, se ha decidido mencionar porque es una definición bastante aproximada del software, además es muy similar a la aportada por el creador del propio software, Markus Hohenwarter, quien comenzó con el proyecto en el año 2001, siendo este parte de su tesis.

Seguidamente, se muestra una imagen del programa GeoGebra y se procede a su descripción de forma resumida. (Ministerio de Educación | Instituto de Tecnologías Educativas, s.f.)

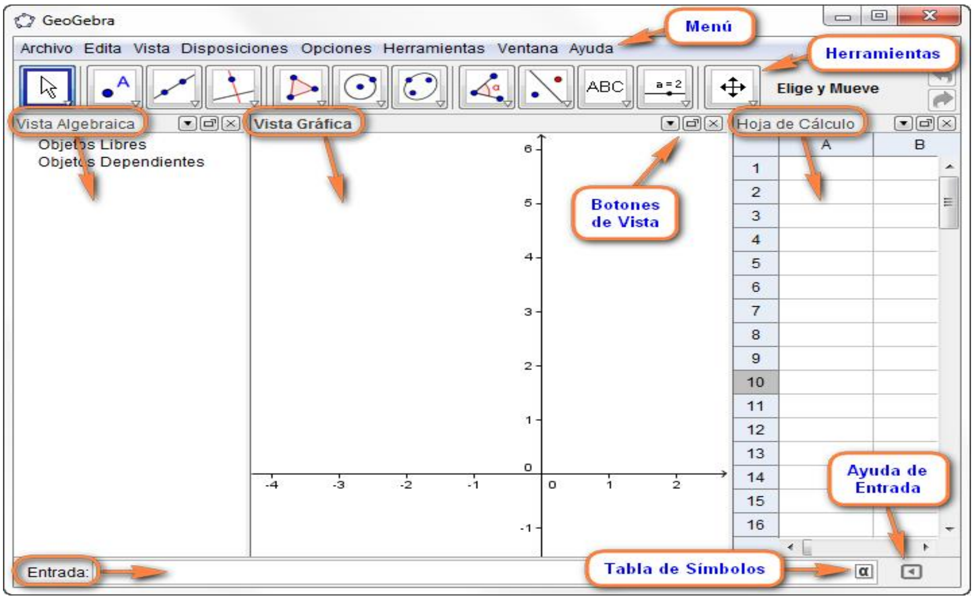

Figura 1. Ilustración de la interfaz de GeoGebra

Fuente:
https://geogebra.es/cvg/manual/interfaz/index.html#:~:text=La%20interfaz%20de%20GeoGebra,de%20C%C3%A1lculo%20a%20la%20derech

La pantalla principal de GeoGebra se divide en varias zonas que son: los menús, las herramientas, la vista algebraica, la vista gráfica (en 2D y en 3D), vista de cálculo simbólico (CAS) y la hoja de cálculo. También se presentan opciones básicas de selección de vistas o de cambio del idioma, junto con opciones de deshacer y rehacer, tablas de símbolos y una ayuda de usuario. Igualmente, el programa ofrece una forma de comunicación a través de la barra de entrada, en la que se pueden introducir comandos, operaciones de directo ingreso, textos, etc.

La parte central del programa reside en las tres vistas principales, algebraica, gráfica y hoja de cálculo, permite la visualización de tres diferentes representaciones de un objeto. Además, responden de una forma dinámica y acorde a cualquier cambio en el valor del objeto, sin tener en cuenta cómo se ha creado.

A continuación, se citan las herramientas y comandos de la interfaz que han resultado de mayor utilidad para la realización de este trabajo:

- La vista gráfica (en 2D) y algebraica: Estas dos vistas se emplean de manera continua en actividades y sesiones de la unidad didáctica. Se suelen emplear de manera conjunta para dar las representaciones de algebra y geometría y comprender mejor la relación entre ambas.
- Las herramientas: Se emplea a lo largo de la mayoría de sesiones para definir los diferentes elementos de manera sencilla.
  A lo largo de todas las sesiones se necesitan para definir puntos, vectores, rectas, segmentos y ángulos.

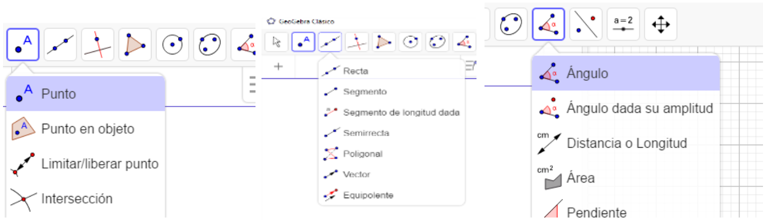

Figura 2. Diferentes herramientas interfaz de GeoGebra

Para explicar los contenidos de rectas perpendiculares y paralelas en el aula también se emplean herramientas presentadas en la figura 2.

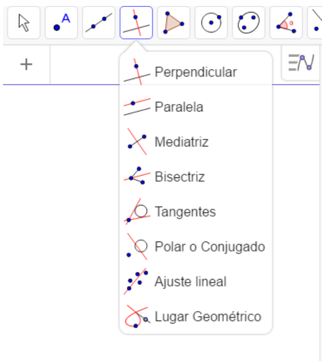

Figura 3. Herramientas del interfaz de GeoGebra de rectas paralelas y perpendiculares

También se emplearán las herramientas de deslizadores, textos e imágenes en las explicaciones a lo largo de las sesiones como se concretará en la unidad didáctica para explicar el contenido de manera dinámica.

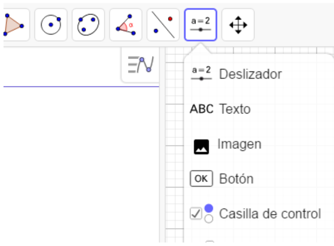

Figura 4. Herramientas del interfaz de GeoGebra de deslizadores, textos e imágenes.

4.2. Ventajas del uso de GeoGebra

En el apartado 2 del trabajo titulado justificación se comentó que la herramienta GeoGebra poseía múltiples ventajas y porque es verdaderamente una buena elección para desarrollar el proceso enseñanza-aprendizaje de una manera dinámica dentro del aula de matemáticas. Estas ventajas se van a detallar a continuación y han sido recogidas de Liste (2008), Del Pino (2013) y Huayata Catari (2015):

- Es un recurso versátil y de gran potencial para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a cualquier nivel, desde primaria hasta bachillerato.
- Es fácil de usar. Además, existen numerosas formaciones, algunas de ellas gratuitas, impulsadas por colectivos de profesores y universidades. Dentro de estas, ofrece una wiki en donde compartir las propias realizaciones con los demás.
- La capacidad que tiene para relacionar álgebra y geometría ya que ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas.
- Con respecto a las funciones, ecuaciones y el sistema de coordenadas, el programa cuenta con una gran cantidad de funciones muy útiles, como, por

ejemplo, el trazado de tangentes, 27 áreas inferiores, gráfica de ecuaciones, de manera similar a los graficadores, etc.

- Unos elementos de gran potencial son los deslizadores, estos permiten controlar las animaciones con facilidad, con esto se puede rotar un triángulo, trasladar un punto.
- La ventana algebraica, es un sitio en donde se puede encontrar valores que son característicos de los objetos construidos. Los objetos pueden ser libres o dependientes, que son aquellos que parcialmente o totalmente dependen de otros y auxiliares.
- Es un software gratuito, libre y de código abierto. No les cuesta dinero a los centros educativos y pueden modificar elementos para tener funcionalidades que no se presentan en la versión estándar.
- Es multiplataforma. Funciona tanto si emplean una versión de Linux propio de la Comunidad Autónoma como distintas versiones de Microsoft Windows.
- GeoGebra permite el estudio de construcciones con regla y compás, geometría analítica (en dos y tres dimensiones) y vectores. Es indudable que el núcleo principal de GeoGebra está diseñado para estos cometidos.
- Ofrece la posibilidad de utilizarse tanto online como instalado en el ordenador.

En definitiva, es un software que ofrece al docente la posibilidad de elaborar materiales mucho más adaptados a los requerimientos del aula y del alumnado, ajustándose así a las necesidades requeridas en cada momento.

Más concretamente, para la geometría analítica (es la parte del contenido en la que nos vamos a centrar en este trabajo) la ventaja principal en la utilización del GeoGebra es que el estudiantado va a poder ver con máximo detalle cada concepto y explicación de manera visual, donde podrán estudiar diferentes opciones para un mismo ejemplo de forma rápida.

4.3. Relación de GeoGebra con el pensamiento matemático

Basándonos en Duval (1999) y en Duval (2006), la actividad matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación”, pero los estudiantes también deben ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos.

Los contextos de representación, a menudo, se interpretan como representaciones externas y más alejadas de la comprensión matemática. Esto se debe, en parte, a la ambigüedad del significado de representación y su relación real con el conocimiento matemático (los objetos matemáticos no siempre existen en el mundo físico, sino en el mundo de las ideas).

Se destaca la importancia de usar diferentes representaciones para un mismo objeto, es decir, saber distinguir las características intrínsecas del objeto matemático de aquellas que dependen exclusivamente de la representación. Estas diferentes representaciones son fundamentales para lograr una correcta comprensión del objeto matemático. Un ejemplo sería en el ámbito de las fracciones una fracción presentada en su forma numérica $\frac{3}{2}$ y una representación del mismo como una imagen en la que se presenten dos botellas de agua, una totalmente llena y otra solo llena hasta la mitad. Otro ejemplo, más relacionado directamente con el presente trabajo, sería la representación algebraica del objeto de la recta y su correspondiente representación gráfica sobre los ejes cartesianos.

En este aspecto, el software de GeoGebra es muy útil para relacionar los campos de álgebra y geometría representando de manera geométrica los contenidos vistos en clase representados de manera algebraica. De manera que, cada concepto matemático necesita para su total comprensión, el empleo de más de un sistema de representación para entender las distintas significaciones del concepto.

Los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de los mismos implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran. Se entiende como registro de representación semiótica a un sistema de signos que tiene como función principal la de la comunicación. En el caso de las matemáticas, estas representaciones cumplen además que en todo procesamiento matemático existe una transformación de representaciones semióticas.

La actividad matemática requiere que, aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), sólo elijan uno según el propósito de la actividad. En otras palabras, la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto.

Estas son las dos caras de la actividad matemática, que no se pueden considerar separadamente la una de la otra, sobre todo para comprender los problemas de aprendizaje, y que proporcionan la idea clave para analizar los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático. Es obvio que se deben distinguir dos clases de transformaciones de representaciones semióticas:

- La conversión: las que cambian de un sistema de representación a otro. Un ejemplo podría ser representar gráficamente una recta dada su ecuación algebraica.
- El tratamiento: las que se producen dentro de un mismo sistema de representación Un ejemplo podría ser resolver una ecuación dentro del registro algebraico.

Hay que tener presente que estas dos transformaciones pueden estar entrelazadas en el mismo proceso matemático de resolución. Un ejemplo de esto podría ser un problema en el que primero se debería realizar una conversión cambiando el sistema semiótico lingüístico en el enunciado a uno algebraico que resultaría por ejemplo una ecuación. Para la resolver esta ecuación se deben realizar tratamientos para llegar a la solución requerida.

Hablando más concretamente del software GeoGebra y basándonos en Iranzo& Fortuny (2009), que a su vez se basaban en Rabardel (2001). Estos autores pretendían responder a principalmente tres cuestiones, expuestas a continuación:

- ¿Qué relación existe entre las matemáticas de lápiz y papel y el trabajo con GeoGebra?
- ¿Cómo puede afectar el uso de GeoGebra a las estrategias más tradicionales de resolución y comprensión de conceptos?
- ¿Qué aporta realmente el uso de GeoGebra a los alumnos?

Estos autores ofrecen una distinción entre instrumento y artefacto, con relación al empleo de GeoGebra. Seguidamente, se explican tales diferencias siguiendo las nociones aportadas por los autores mencionados.

El instrumento es la conjunción entre artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para construirlo. Debido a que el software restringe la manera de actuar, el estudiante debe movilizar de manera consciente durante el proceso de transformación de un artefacto en un instrumento (a lo que se denomina génesis instrumental), estructuras de control sobre el conocimiento geométrico implicado (el artefacto se transforma en instrumento para el usuario). Los estudiantes desarrollan esquemas mentales en los que sus propios conceptos geométricos y las técnicas empleadas están interrelacionadas. El proceso de génesis instrumental tiene dos direcciones:

– Instrumentación: es el proceso mediante el cual el artefacto influye en el alumno. Las posibilidades y restricciones del software (GeoGebra) influyen en las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes, así como en las correspondientes concepciones emergentes. En la instrumentación se encuentra el desarrollo de esquemas mentales que proporcionan un medio predecible e iterable de integración de artefacto y acción.

– Instrumentalización: el conocimiento del alumno y su forma de trabajar guía la forma en que utiliza el artefacto. El proceso de instrumentalización depende del estudiante y es un proceso que lleva a una internalización del uso del artefacto (un artefacto no varía, pero puede ser instrumentalizado de distintas formas). Este proceso puede dar lugar a un enriquecimiento del artefacto.

El artefacto se transforma en instrumento durante el proceso bidireccional de génesis instrumental. El estudiante construye esquemas mentales, asimilando esquemas ya existentes o produciendo nuevos esquemas para llevar a cabo la tarea propuesta.

Por otro lado, se dividen los grados de instrumentación adquiridos por los estudiantes en bajo, medio y alto de la siguiente manera:

- Bajo: uso de pocos comandos para construcciones geométricas elementales. Dificultades técnicas para aplicar comandos (sintaxis, orden).
- Medio: uso del artefacto de acuerdo con un objetivo (por ejemplo, uso del arrastre de test para validar una figura).
- Alto: transformación de comandos en acciones geométricas.

También podemos dividir los grados de instrumentalización adquiridos por el estudiante de la siguiente manera:

- Bajo: los estudiantes se basan principalmente en propiedades de medida y no consideran propiedades geométricas.
- Medio: coordinan el uso de la ventana algebraica y geométrica. Aparición de inferencias figurales.
- Alto: coordinan el uso de la ventana geométrica y algebraica y utilizan conocimiento geométrico. Internalización de los comandos (modo desplazar, uso de macros, etc.).

Además, los autores mencionados hacen un estudio de la herramienta del software GeoGebra para alumnos de primero de bachillerato, por lo que sus aportaciones han servido para conocer las posibles dificultades que pueden presentar los estudiantes, debido a que el contexto en el que se desarrolla el presente trabajo es de características similares. En este estudio se propone el uso de GeoGebra a un grupo de 4ºESO, un curso más bajo de las investigaciones precedentes.

El contexto donde se propone la aplicación de dicha propuesta se caracteriza por ser un curso bastante aventajado que en ocasiones han demostrado dominio de contenido de primero de bachillerato.

A colación de esta característica, se cita una parte de la conclusión del artículo: "en general, los alumnos han tenido pocas dificultades con relación al uso del software y algunos obstáculos son obstáculos cognitivos ya existentes trasladados al software". Gracias a esta conclusión se entiende que los alumnos han encontrado pocas dificultades a nivel de software y que las mayores dificultades se debían a otros aspectos.

Trasladando estas afirmaciones del contexto presentado en el artículo al contexto particular en el que se desarrolla la unidad didáctica del presente trabajo, en el que nos encontramos con un grupo reducido con alumnos aventajados, circunstancia que se comentará más en profundidad en el contexto de la unidad didáctica, no deberían tener los obstáculos cognitivos que presentaban los estudiantes en Iranzo & Fortuny (2009). Además, basándonos en el estudio antes mencionado en el que los alumnos adquirieron un mejor aprendizaje, pienso que aprovechando las características de GeoGebra y del contexto particular que se presente se puede lograr un desarrollo más profundo del contenido entendiendo diferentes representaciones de un mismo concepto promoviendo un pensamiento más geométrico, así como facilitar un soporte visual, algebraico y conceptual y aportarles una herramienta de comprobación y de comprensión para el futuro.

Para finalizar la explicación de los vínculos existentes entre el desarrollo del pensamiento matemático y el uso de GeoGebra, se recurre a la tesis de Almeida (2002), en la que menciona la existencia de unos objetivos generales, los cuales todo ciudadano debería lograr tras su formación, entre lo que se encuentran una educación geométrica con percepción histórica e interdisciplinar, además de poder modelar a partir de la aplicación de los conocimientos geométricos.

5. Marco curricular

En este apartado, voy a analizar el currículo de geometría en la educación secundaria obligatoria. Es decir, voy a examinar los aprendizajes fundamentales que los estudiantes de educación obligatoria deben alcanzar. Para ello, voy a mostrar sus elementos y su evolución a lo largo de los cursos. Se centrará principalmente en la parte de geometría analítica del curso de 4ºESO de las matemáticas de enseñanzas académicas que será abordado en el apartado siguiente (propuesta de unidad didáctica). Se hablará tanto del currículo general estatal como de la concreción autonómica de este currículo en Castilla y León.

5.1. Análisis de los aprendizajes fundamentales del BOE

He recogido los datos curriculares de todos los cursos de la ESO del bloque de geometría y parte del bloque 1 de contenidos comunes que aluden a las nuevas tecnologías del BOE. Estos datos los he recogido en tablas que se encuentran en el anexo I.

5.1.1. Contenidos de Geometría

Voy a dividir el contenido de geometría en diferentes partes:

Elementos básicos de la geometría en el plano: primero y segundo de la ESO se enfoca principalmente en estos aspectos, con los principales objetivos de reconocer y describir elementos y propiedades (ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema y simetrías) de las principales figuras planas (principalmente triángulos y cuadriláteros) además de saber incluir los mismos en contextos reales. También en estos primeros cursos se incluye el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos. En tercer curso se vuelven a presentar los mismos contenidos como repaso. Por último, en 4º curso no se hace referencia específica a estos contenidos, pero se necesitan para poder desarrollar contenidos en mayor profundidad.

Cuerpos geométricos: En los dos primeros cursos de la ESO están incluidos en los contenidos el análisis de los diferentes cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) así como elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones y simetrías). También se pide saber reconocer estos elementos en un contexto real y calcular superficies, longitudes y volúmenes en el mundo físico. En tercero de la ESO no se amplían estos contenidos, por lo que únicamente se repasan los mismos. En cuarto curso solo se mencionan cuerpos geométricos para la resolución de problemas en la vida real aplicando los contenidos de los cursos anteriores.

Figuras semejantes: En 1º y 2º de la ESO se comienza a dar los criterios de semejanza. También se explican la razón de semejanza y escala y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. En tercero de la ESO se produce un avance en los contenidos con la introducción del teorema de Tales y la aplicación de este a problemas y contextos reales. Además, se incluye la ampliación o reducción de las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. En cuarto de la ESO no hay contenido curricular que se refiera a figuras semejantes.

Transformaciones: En primero y segundo curso no existen contenidos de transformaciones de figuras en el plano. En tercero de la ESO se incluyen transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

Coordenadas geográficas: Un contenido únicamente presente en el curso de tercero de la ESO en el que se pide interpretar el sentido de las coordenadas geográficas (coordenadas geográficas y husos horarios) y su aplicación en la localización de puntos (longitud y latitud).

Trigonometría: Hasta el último curso de la ESO no se incluyen estos contenidos en el currículo. En el último curso se incluyen las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. También en este curso se explica la unidad de medida de los ángulos, tanto en grados como en sistema internacional (radián).

Geometría analítica plana: De nuevo este contenido se da únicamente en el curso de 4ºESO, se incluyen conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas. Estos conceptos básicos serían las coordenadas, los vectores, las ecuaciones de la recta y las condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

Herramientas tecnológicas: En los cursos de primero y segundo de la ESO se incluyen estas herramientas para resolver problemas de perímetros, áreas y ángulos expresando los procedimientos matemáticos adecuados. En el tercer curso de la ESO se emplean para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas. En cuarto de la ESO se produce un importante avance en este aspecto con la inclusión de aplicaciones informáticas de geometría dinámica (como el propio GeoGebra) que faciliten la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

5.1.2. Contenidos de nuevas tecnologías (TICs)

Los contenidos relacionados con las TICs en matemáticas en ESO expuestos en el BOE son similares durante los cursos académicos de secundaria y buscan principalmente facilitar la comprensión del temario. En especial, pretenden que el alumno sea capaz de recoger y organizar datos de forma estructurada, hacer representaciones gráficas de datos de distintos tipos, diseñar simulaciones sobre situaciones matemáticas, elaborar informes de los procesos llevados a cabo, realizar cálculos de tipo numérico, elaborar predicciones y comunicar las ideas matemáticas.

5.2. Análisis de los aprendizajes fundamentales del BOCyL

He recogido los datos curriculares de todos los cursos de la ESO del bloque de geometría y parte del bloque 1 de contenidos comunes que aluden a las nuevas tecnologías del BOCyL. Estos datos los he recogido en tablas que se encuentran en el anexo II.

La evolución a lo largo de los cursos de la ESO de los contenidos del BOCyL es similar a la recogida en el BOE como se puede apreciar en las tablas de los anexos I y II. Esto es debido a que el currículo del BOCyL es una concreción del estatal del BOE, por lo que el currículo se traslada del BOE al BOCyL. Por esta razón no voy a detallar tanto este apartado como en el anterior y me voy a centrar aquellos aspectos que el currículo autonómico añade con respecto al estatal (o los posibles cambios de uno a otro) en los aspectos de geometría y TICs. Además, me voy a enfocar en la parte de geometría analítica de cuarto de la ESO dado que son los contenidos que más adelante se recogen en la unidad didáctica.

5.2.1. Contenidos de Geometría

La principal diferencia entre los contenidos de geometría en los cursos de primero y segundo de ESO expuestos en el BOE y en el BOCyL, es la exposición de estos, de manera que, en el BOE se agrupan para ambos cursos, mientras que en el BOCyL se separan. Este detalle esencial dificulta en exceso la comparativa.

Analizando de forma pormenorizada el BOE se aprecia que dentro del bloque de contenidos expuesto para primero y segundo, la mitad aproximadamente pertenece a cada uno de los cursos académicos. También cabe mencionar, que la diferencia entre los contenidos expuestos en ambos documentos es prácticamente nula.

La diferencia entre los contenidos de geometría de la asignatura de matemáticas del tercer curso de secundaria detallados en el BOE, respecto a los del BOCyL, radica principalmente en que este último, se añaden el estudio de lugares geométricos que dan lugar a rectas, segmentos y arcos de circunferencia, el reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y naturaleza, el estudio de poliedros, la fórmula de Euler, el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, las escalas y los elementos dobles o invariantes. Por otro lado, es importante mencionar que en el currículum del BOE se incluye el uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Al enfrentar los contenidos a impartir en el curso de cuarto de ESO de matemáticas en relación con el bloque de geometría, se obtiene que, en el BOE se incluye a mayores el estudio de las relaciones métricas en los triángulos. En cambio, en el BOCyL se incluyen otros aspectos adicionales como son el estudio de los radianes, de las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos o los triángulos rectángulos y oblicuángulos aplicando trigonometría elemental.

En cuanto a los contenidos de Geometría analítica pienso que se deberían incluir, al menos, un curso antes para poder comprender mejor los conocimientos y tener tiempo de asimilación de los mismos. Estos contenidos son los mismos que en el BOE, por eso no se vuelven a incluir.

5.2.2. Contenidos de nuevas tecnologías (TICs)

La diferencia de contenidos relacionados con las TICs expuestos en el BOCyL respecto al BOE, es casi inexistente. La principal diferencia es que en el BOCyL se dividen expresamente los contenidos de primero y segundo de ESO y en el BOE estaban unidos. Además, el BOCyL detalla que los alumnos deben saber recoger y organizar los datos mediante tablas y crear representaciones gráficas de los datos de diferentes tipos, especificando que las representaciones de los datos estadísticos pueden ser gráficas de funciones, diagramas de sectores, barras.

6. Propuesta de unidad didáctica

A continuación, se detalla una propuesta didáctica sobre geometría analítica en el curso de cuarto de educación secundaria obligatoria. Se pretende mejorar el aprendizaje haciendo uso de GeoGebra en un aula concreta de secundaria.

6.1. Presentación

La finalidad de la presente unidad didáctica es que los educandos dominen las nociones teóricas y prácticas de la geometría analítica. En especial, busca favorecer el aprendizaje del alumnado de estas nociones básicas de geometría analítica, empezando por los vectores en el plano.

En relación con la propuesta didáctica diseñada, se impartirán diez sesiones de 50 minutos, en las que se quiere explicar definiciones geométricas y analíticas de las operaciones como son suma de vectores y producto de un escalar por un vector, también definir las ecuaciones de la recta en sus diferentes representaciones (vectorial, paramétricas, continua y general o implícita) y las condiciones necesarias para poder calcular rectas perpendiculares y paralelas a otra dada. Todo ello aprendiendo, aplicando y ayudados por la herramienta de geometría dinámica GeoGebra.

Las posibles dificultades que podrían encontrar los estudiantes en el contenido son debidas a inferencias o asociaciones incorrectas, generados por la aplicación de reglas y propiedades justificadas en esquemas similares, o por inferirse que son válidas en contextos parecidos o relacionados y también debidos a dificultades para obtener información espacial, atribuidos a deficiencias en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales, que llevan a interpretaciones incorrectas de información o hechos matemáticos.

Aunque el presente trabajo aborda principalmente la utilización del software GeoGebra en el aula es necesario evitar limitarse a la explicación del funcionamiento de este, ya que no estaríamos cumpliendo con los objetivos en cuanto a contenidos. Más importante que saber utilizar el programa correctamente, es que el alumnado interiorice diversos conceptos de la unidad en cuestión mediante dicha aplicación.

6.2. Contexto de la UD

El curso académico donde se debía haber realizado la unidad didáctica es 4º de la ESO impartiendo la asignatura de Matemáticas, con una clase formada por cinco estudiantes, de la sección bilingüe de francés. El centro educativo donde se han desarrollado las prácticas es el instituto público IES Parquesol, situado en la comunidad autónoma de Castilla y León, en su capital Valladolid y concretamente en el barrio de Parquesol. Es un centro educativo conocido y muy solicitado por las familias del barrio. El alumnado del instituto está integrado en familias mayoritariamente de clase media, cuyo nivel de preocupación por los estudios es alto en la mayor parte de los casos.

El nivel de estudios de los tutores o padres es medio, de tal modo, que algunos padres sí disponen de carreras universitarias, mientras que otros no disponen de tanta formación; pero ambos dan un valor alto a la educación. Respecto al nivel económico de las familias, por lo general, no escatiman medios destinados a los estudios.

Los padres y tutores de los alumnos se preocupan porque éstos reciban una educación de calidad y consideran que los estudios son las vías para alcanzar el progreso.

Las características de este grupo reducido de alumnos son su buena predisposición, su alta capacidad intelectual y su actitud participativa. Respecto a la problemática de estos alumnos, decir que es casi inexistente, ya que son alumnos aventajados. Los únicos inconvenientes que se han encontrado en las clases son las conversaciones entre los estudiantes y en algunos momentos puntuales la falta de silencio. En cuanto a los conocimientos previos de los alumnos, los alumnos también habían sido alumnos de la parte de bilingüe el curso anterior y llevaban una buena base.

Podemos denotar que las características del entorno son atípicas, nos encontramos con un entorno bastante privilegiado. Los estudiantes se encuentran en un ambiente ideal en el que los propios compañeros dentro del centro y los padres fuera del instituto incitan a estudiar a los alumnos y alumnas. Pero debo decir, que en el segundo trimestre en el que yo me presenté habían perdido un poco la motivación por las matemáticas y solo querían estudiar lo que era estrictamente necesario para el examen. La idea de incluir GeoGebra en este grupo es que adquieran un mejor conocimiento del contenido y entiendan no solo cómo resolver los ejercicios sino sus diferentes representaciones. Otra de las ventajas importantes es que es un grupo muy reducido y se puede personalizar mucho el aprendizaje, en caso de que cualquier alumno tenga problemas o vaya avanzado se puede visualizar convenientemente y acelerar o decrecer el ritmo atendiendo de manera continua a las diferentes características y tipologías de los alumnos.

6.3. Objetivos

A continuación, se detallan los objetivos didácticos relacionados con la geometría analítica de la asignatura de Matemáticas, en la modalidad de enseñanzas académicas de 4º de ESO:

- Analizar y consolidar el concepto de coordenadas de un punto, así como desarrollar el concepto de sistema de referencia.
- Saber establecer correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.
- Calcular el punto medio de un segmento y la distancia entre dos puntos dados y entender su significado geométrico.
- Calcular el módulo de un vector y entender su significado geométrico.
- Saber reconocer las diferentes expresiones de ecuación de una recta.
- Saber calcular rectas paralelas y perpendiculares a una dada de utilizando un estudio analítico de las condiciones de paralelismo y perpendicularidad y entender su significado geométrico.

- Utilizar el recurso tecnológico de GeoGebra para crear diferentes representaciones geométricas y observar sus propiedades y características y ayudar a entender conceptos.

6.4. Contenidos

En este apartado se citan los contenidos curriculares que se pretende que el alumnado asimile para lograr el aprendizaje de la geometría analítica.

Seguidamente se adjunta un fragmento de la Orden EDU 362/2015 BOCYL, del 8 de mayo de 2015, por el que se establece la concreción autonómica del BOE en Castilla y León del currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria, sobre la asignatura de Matemáticas de 4º de ESO, en la que se aprecia el contenido a transmitir sobre geometría analítica, bloque temático en el que se sitúa el contenido a impartir y donde se detallan de izquierda a derecha por columnas los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje.

- Definiciones geométricas y analíticas de las operaciones: suma de vectores y producto de número por vector.
- Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua y general o implícita.
- Posiciones relativas de las rectas (secantes, paralelas o coincidentes)
- Paralelismo, perpendicularidad: condiciones de las coordenadas de los vectores.
- Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.
- Reconocimiento de la importancia de la resolución de problemas en situaciones geométricas.
- Expresión verbal y escrita en Matemáticas

- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

- Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para facilitar la comprensión de propiedades geométricas

- Transformación de expresiones algebraicas con una indeterminada. Polinomios con una indeterminada: suma, resta y multiplicación. Igualdades notables.

6.5. Competencias

Primeramente, se citan las competencias clave del Currículo Español detalladas en la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, en la que se describe las destrezas a desarrollar en primaria, en educación secundaria obligatoria y en bachillerato.

A efectos de esta orden, las competencias clave del currículo son las siguientes:

a) Comunicación lingüística.
b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
c) Competencia digital.
d) Aprender a aprender.
e) Competencias sociales y cívicas.
f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
g) Conciencia y expresiones culturales.

En segundo lugar, se explican las competencias específicas que se fomentan con esta propuesta:

-Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología: implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto. En una sociedad donde el impacto de las matemáticas, las ciencias y las tecnologías es determinante, la consecución del bienestar social exige conductas estrechamente vinculadas al razonamiento crítico. Se pretende que los alumnos tomen conciencia de las matemáticas y de su uso cotidiano. Esta competencia se trabaja mediante la comprensión y realización de problemas, al igual que a través del lenguaje matemático.

-Comunicación lingüística: es el resultado de la acción comunicativa dentro de prácticas sociales determinadas, en las cuales el individuo actúa con otros interlocutores y a través de textos en múltiples modalidades, formatos y soportes. Se trabaja mediante la exposición que se pedirá a los alumnos en ciertas sesiones explicando lo aprendido. Los ejercicios se deben entregar con un lenguaje matemático adecuado y con una correcta redacción. Por otro lado, esta competencia también se trabaja con el empleo de un vocabulario específico y con la lectura comprensiva de los enunciados.

-Competencias sociales y cívicas: esta competencia consiste en entender el modo en que las personas pueden procurarse un estado de salud física y mental óptimo, tanto para ellas mismas como para sus familias y para su entorno social próximo, y saber cómo un estilo de vida saludable puede contribuir a ello. Se fomenta gracias a las actividades de trabajo grupales ya que habrá en alguna sesión ciertas actividades de este tipo, en las que los alumnos tienen que exponer sus ideas, argumentarlas y llegar a un consenso con los compañeros. En este tipo de actividades se trabaja el respeto a los demás y la convivencia.

-Competencia digital: implica el uso creativo, crítico y seguro de las tecnologías de la información y la comunicación para alcanzar los objetivos relacionados con el trabajo, la empleabilidad, el aprendizaje, el uso del tiempo libre, la inclusión y participación en la sociedad. Esta competencia se desarrolla de manera continua a lo largo de toda la unidad didáctica propuesta gracias al uso continuo del software GeoGebra. De esta manera aprenderán un recurso tecnológico mejorando su lenguaje específico usando y procesando la información de manera crítica y sistemática. Además, se generará una motivación por el aprendizaje y una mejora en el uso de las nuevas tecnologías. Por último, aprenderán a valorar y conocer las fortalezas y debilidades de los medios tecnológicos.

-Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor: esta competencia se refiere a la posibilidad de escoger con criterio propio y sacar adelante las iniciativas. De este modo, el alumno se va haciendo responsable de sus actos y decisiones. Esta competencia se podría incluir gracias a la resolución de problemas presentados durante la unidad didáctica.

-Competencias para aprender a aprender: aprender a aprender supone iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuarlo de manera autónoma. Esto se desarrollará durante toda la unidad didáctica, además la idea de introducir GeoGebra es como una herramienta de comprobación para ellos que puedan utilizar más adelante en el futuro.

-Conciencia y expresiones culturales: apreciar, comprender y valorar críticamente diferentes manifestaciones culturales y artísticas como fuente de disfrute y enriquecimiento personal, así como considerarlas parte del patrimonio cultural. En los problemas y parte de las explicaciones se incluirán apartados y enunciados relacionados con otras culturas y con el arte.

6.6. Metodología

El planteamiento metodológico que se sigue en esta propuesta se realiza con las siguientes estrategias:

-Clase magistral: consiste en transmitir conocimientos y activar procesos cognitivos en el estudiante. El profesor explica los conceptos más importantes, pone ejemplos prácticos en cada uno de los casos para que el alumno asimile estos conceptos de forma profunda, poniendo ejemplos cotidianos. Se empleará al comenzar contenido nuevo para transmitir los conocimientos. Se empleará GeoGebra para dinamizar alguna explicación gracias al ordenador portátil.

-Resolución de ejercicios y problemas: trata de ejercitar, ensayar y poner en práctica los conocimientos previos. El docente da a los alumnos pautas que deben de seguir en la resolución de problemas, realiza ejercicios tipo en la pizarra o mediante

GeoGebra y corrige los problemas que manda. Dado nuestro caso particular de grupo reducido se puede corregir los ejercicios de manera personalizada e individual.

-Aprendizaje basado en problemas: consiste en desarrollar aprendizajes activos a través de la resolución de problemas más complejos. Se realiza una actividad de manera grupal con problemas más complejos de los vistos en días previos. Se pretenden incluir ciertos elementos que pueden resultar interesante para poder llegar a captar la atención del alumnado y fomentar el trabajo en grupo.

Durante la etapa de observación y, previa consulta a la tutora de prácticas, he decidido que las metodologías que mayor rendimiento sacan los alumnos son las anteriormente mencionadas. Si en algún momento se entiende que otra metodología puede ser más efectiva (siempre con el uso de GeoGebra ya que es el objetivo de este trabajo) el docente debe estar abierto a los cambios necesarios.

6.7. Temporalización

En estas semanas de intervención se plantean 10 sesiones de 50 minutos, destinadas al aprendizaje de la parte del contenido de Geometría destinada a la geometría analítica. A continuación, se definen brevemente las sesiones:

6.7.1. Sesión I: Introducción. Definición de vector y sus características.

Dividimos la sesión en:

- Evaluación inicial (30 minutos): Se realizará un cuestionario inicial para conocer el nivel que tiene el alumnado antes de comenzar el contenido para ajustar mejor tanto las clases como las actividades. También se les realizarán preguntas de conocimientos de tecnologías, así como si conocían GeoGebra o algún programa similar. Este primer cuestionario se encuentra dentro de las actividades como evaluación inicial. Para conocer también los conocimientos se consultó a su profesora del curso anterior que nos indicó que les enseñó las coordenadas de los puntos en el plano, lo que es un vector y sus elementos (módulo, dirección y sentido). No pude llegar a realizar dicho cuestionario debido al Covid 19, pero dado el nivel presentado por los estudiantes en otras unidades y por los comentarios de la docente del curso anterior puedo deducir que sería bastante bueno. En cuanto al nivel de nuevas tecnologías puedo intuir que tienen un manejo normal a esa edad de los ordenadores, pero que no conocen GeoGebra debido a la pregunta que les realicé al conocerlos.

- Clase magistral (20 minutos): Se impartirá una presentación del contenido de la unidad didáctica. Se presenta una breve introducción del contenido de geometría analítica, así como a la interfaz y funcionamiento básico del software GeoGebra. Se pretendía explicar lo que era un vector y sus elementos y explicarles cómo representar dichos vectores en la aplicación GeoGebra de su teléfono móvil. Para la explicación en GeoGebra por parte del docente se hará uso de un ordenador portátil, que, al ser únicamente cinco estudiantes, no debería haber problema para una correcta visualización y proyección de GeoGebra. Puede parecer mucho temario en poco tiempo, pero es debido a que el curso anterior se profundizó en estos aspectos y es un repaso. Para finalizar se les pediría que realizarán un par de actividades cortas para casa de vectores tanto a mano como en GeoGebra para que fueran entendiendo, practicando y profundizando en un concepto ya conocido. De esta manera, tendrán que experimentar, jugar y aprender por ellos mismos el funcionamiento de la aplicación GeoGebra.

6.7.2. Sesión II: Operaciones con vectores. Distancia entre dos puntos.

Dividimos la sesión en:

- Resolución de la tarea para casa (10 minutos): Comienzo solicitando a los estudiantes la resolución de los ejercicios pedidos el día anterior (es fácil comprobar esta resolución debido a que son únicamente cinco alumnos) y pediría a dos de ellos que resolvieran dichos ejercicios en la pizarra. Les pediría explicar los ejercicios tanto de manera escrita como con GeoGebra, sobre todo para la parte de resolución escrita se deben apoyar en la pizarra. La explicación con GeoGebra sería verbal, pero podrían mostrar lo que han hecho con el móvil o con el portátil presente en el aula y con la ayuda del profesor. De esta manera, los estudiantes desarrollarían su expresión oral y podría entender más los posibles fallos o problemas de comprensión de los conceptos de los estudiantes tanto de manera conceptual como de GeoGebra y ayudar a corregir dichos fallos y en caso de generalización de algún fallo cambiar el enfoque, las actividades o lo que sea conveniente. No he previsto ningún fallo en particular.

- Clase magistral (20 minutos): En esta sesión se explicará la distancia entre dos puntos enlazando con la explicación de módulo dada el día anterior. Seguidamente comenzaríamos con la explicación algebraica y geométrica de operaciones con vectores. Es decir, se explicará de manera teórica que la suma de dos vectores libres, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es el vector que se obtiene sumando sus componentes $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ y producto de un vector libre por un escalar es $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$ para cualquier k real y sus propiedades. Se explicarán estos conceptos en relativa profundidad para que se comprendan los ejemplos mencionados posteriormente.

  Para la explicación geométrica de la misma nos apoyaríamos en GeoGebra. Para ello se presentarían varios ejemplos programados en el portátil ya que la clase no dispone de proyector, pero debido al número reducido de estudiantes pienso que no habría problema en mostrar los ejemplos en una pantalla más pequeña como sería el portátil. La idea de estos ejemplos es que fueran ejemplos interactivos de manera que se pudieran observar diferentes opciones de un mismo ejemplo.

  Estos ejemplos serían:

  -Para la suma y resta de vectores se definirán dos puntos B y C que se pueden ir moviendo de manera dinámica por los diferentes cuadrantes para ver la suma (azul) y resta (verde) de los vectores $\overrightarrow{OA}\ y\ \overrightarrow{OB}$. La idea es que los alumnos identifiquen el patrón que relaciona el vector suma y el vector resta con los vectores iniciales de una forma visual e intuitiva. Les pediría que ellos mismos fueran dinamizando los puntos A, B y C que generan los vectores y fueran apreciando los diferentes cambios en el vector suma y en el vector resta.

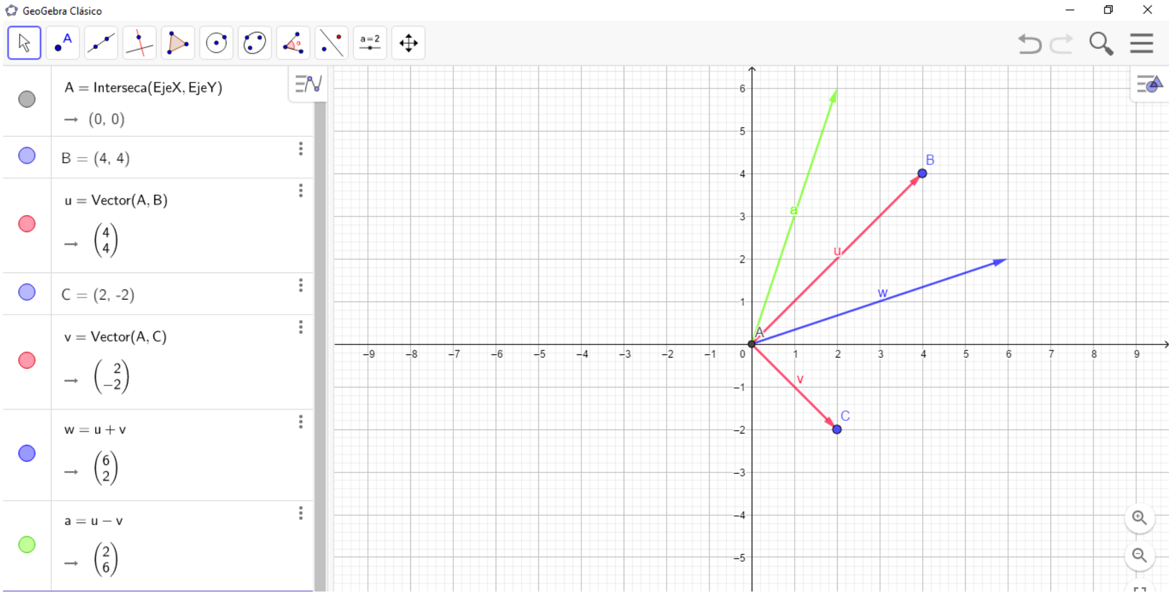

Figura 5. Ilustración en GeoGebra de suma y resta de vectores

Si se dieran mayores dificultades se pondrían ejemplos más específicos para la resta y la suma. Especifico los casos por si fuera necesario, pero al ser una clase con pocas dificultades y que ya lo habían visto el curso anterior pienso que no tendría que ser necesario estar más tiempo con esto. En caso de que surgieran dudas se tendrían preparados los siguientes ejemplos de dos formas diferentes para comprender mejor el significado geométrico.

Suma:

Método de la cabeza con cola:

Este es el método que más veces vamos a emplear en las siguientes sesiones, pero se explicará también la regla del paralelogramo para que conozcan todas las opciones.

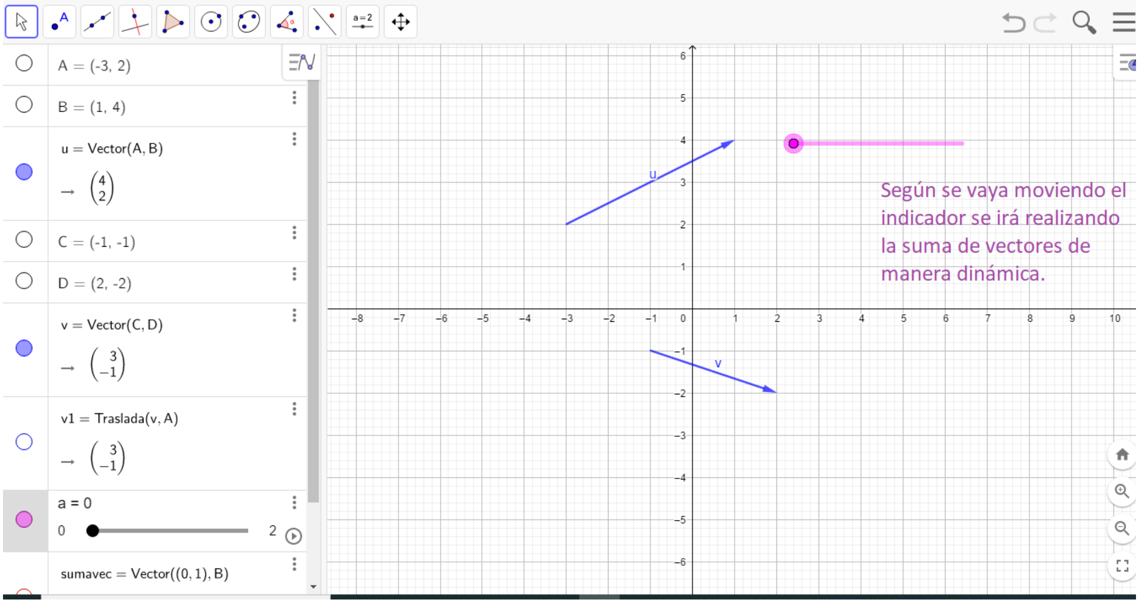

Figura 6. Ilustración de GeoGebra de método de la cabeza con cola (1)

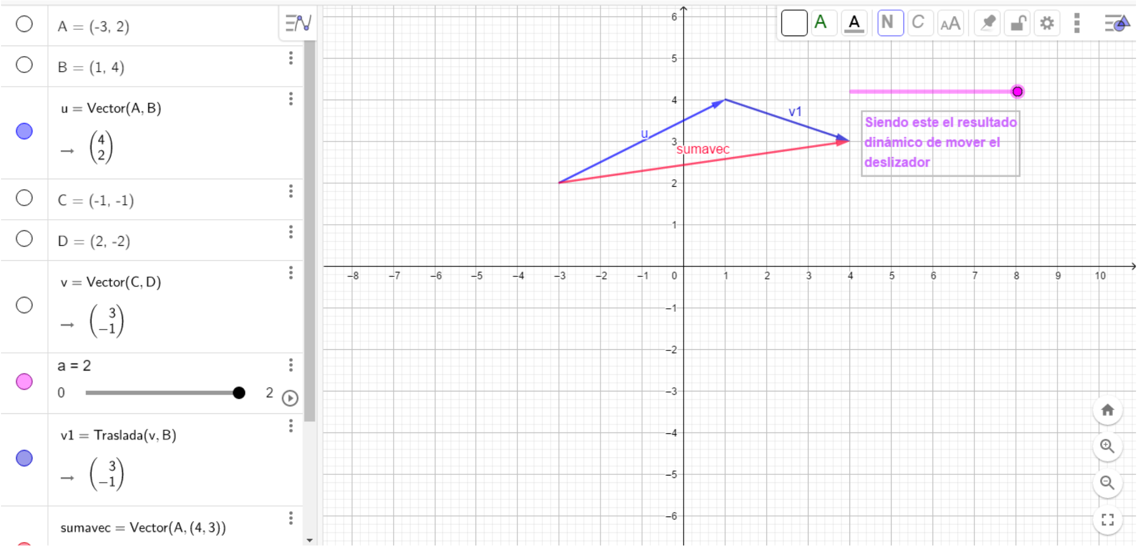

Figura 7. Ilustración de GeoGebra de método de la cabeza con cola (2)

Regla del paralelogramo:

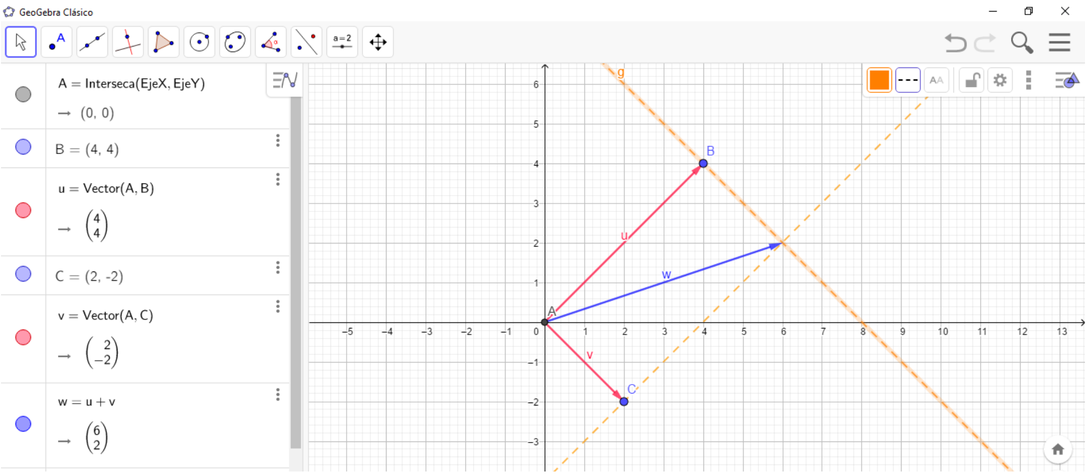

Figura 8. Ilustración de GeoGebra de suma con regla del paralelogramo

Resta:

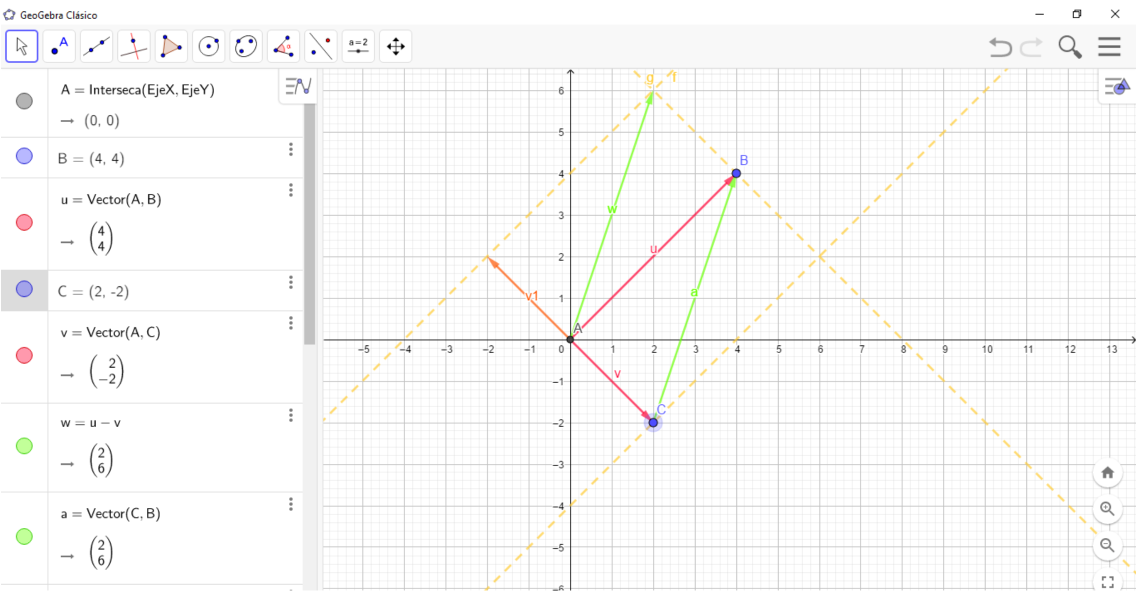

Figura 9. Ilustración de GeoGebra de resta con regla del paralelogramo

En todo caso de manera dinámica y dejando a los alumnos interactuar con los vectores para comprobar los resultados.

En cuanto al caso del producto de vector por un escalar:

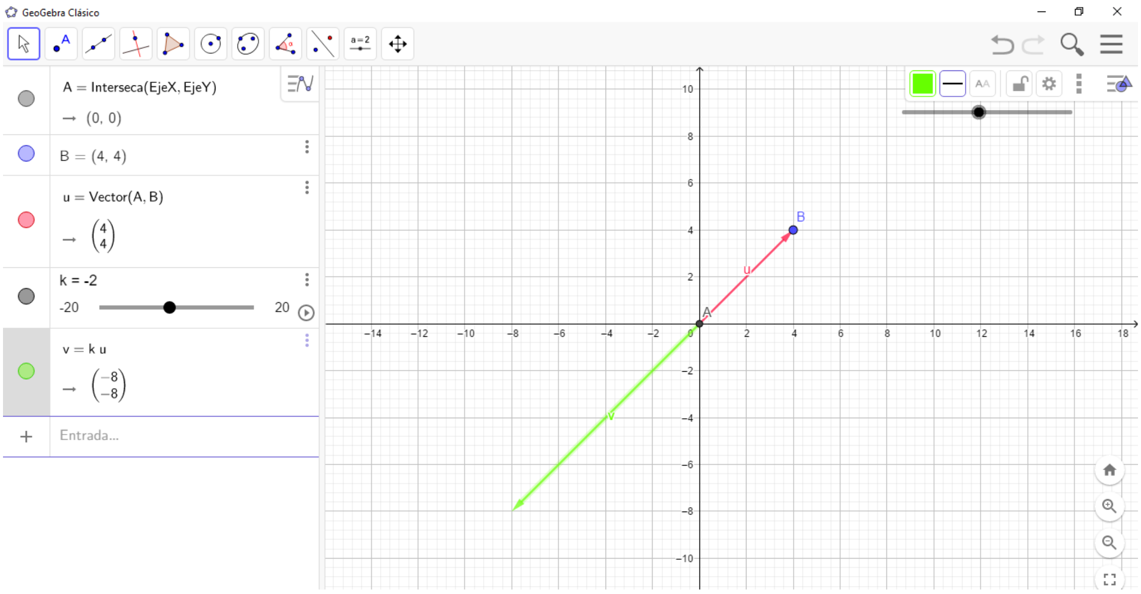

Figura 10. Ilustración de GeoGebra de un producto por un escalar

De manera interactiva se puede cambiar el escalar y el vector. Es fácil e intuitivo apreciar los cambios sucedidos al vector verde en relación con el rojo según se va moviendo el deslizador.

- Práctica (20 minutos): Para finalizar la sesión se pedirá la realización de ejercicios relacionados con la teoría con la supervisión de los dos docentes. Al final de la clase se pedirán ejercicios relacionados para casa.

6.7.3. Sesión III: Combinación lineal de vectores. Punto medio de un segmento.

Dividimos la sesión en:

- Resolución de la tarea para casa (10 minutos): Comienzo pidiendo a los estudiantes la resolución de los ejercicios pedidos el día anterior y pediría a dos de ellos que resolvieran dichos ejercicios en la pizarra. Como el día anterior les pediría explicar los ejercicios tanto de manera escrita como con GeoGebra, sobre todo para la parte de resolución escrita se deben apoyar en la pizarra.

- Clase magistral (20 minutos): Se comenzará explicando la combinación lineal de vectores aprovechando y repasando la operación con vectores dada el anterior día. También se explicará de manera algebraica, sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores y k_1, k_2 dos escalares reales cualesquiera. Una combinación lineal de ambos vectores sería $k_1 \cdot \vec{u} + k_2 \cdot \vec{v} = (k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot v_1, k_1 \cdot u_2 + k_2 \cdot v_2)$. Luego se procederá, como en la clase anterior, con ejemplos algebraicos y geométricos. Esta vez, si los alumnos han comprendido los efectos de la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector dados en la sesión anterior, se pedirá a los propios alumnos que traten de interpretar, explicar e indagar qué relación existe entre el vector verde con los vectores iniciales (tanto con la regla del paralelogramo como con el método de la cabeza de cola).

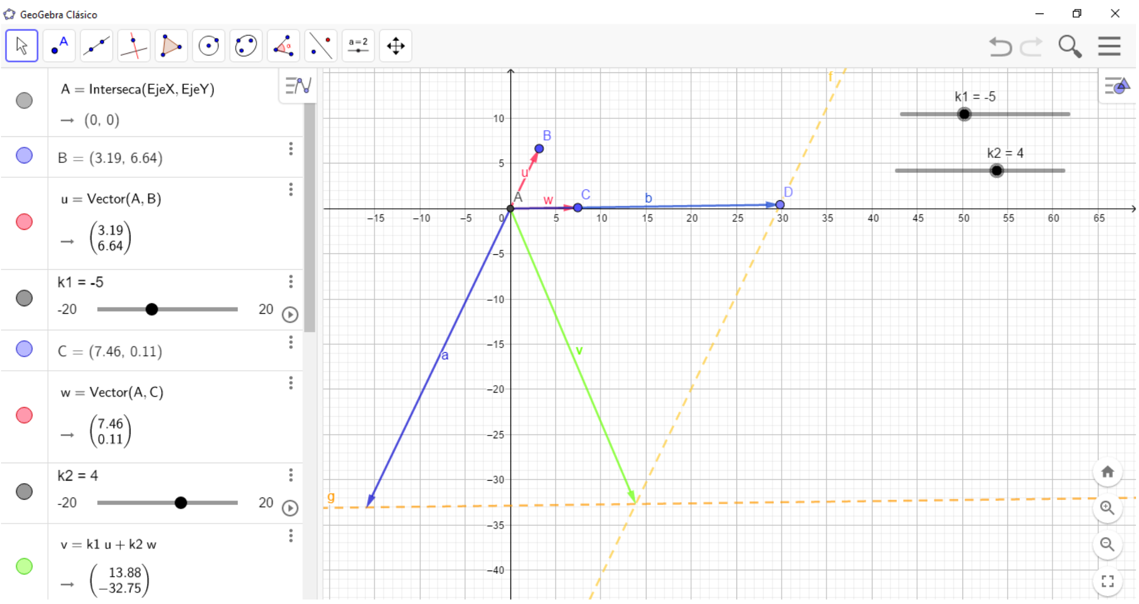

Figura 11. Ilustración de GeoGebra de combinación lineal con regla del paralelogramo

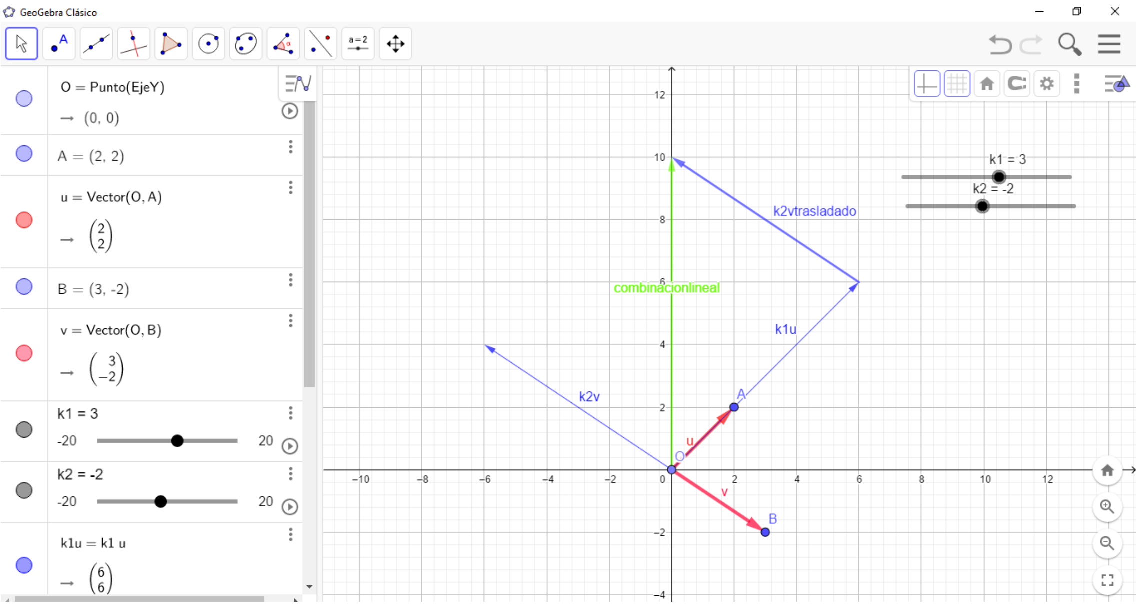

Figura 12. Ilustración de GeoGebra de combinación lineal con método de cabeza con cola

Se podrán manipular los vectores y los escalares de manera dinámica para ayudar a comprender la representación geométrica y así dar una mejor interpretación de los contenidos algebraicos anteriormente explicados. El estudiante podrá mover los vectores iniciales y los escalares para entender cómo funcionan los vectores en cada cuadrante y cómo influye el tamaño de los vectores iniciales y el escalar grande, pequeño o negativo en el resultado final del vector verde. De este modo, podrá asimilar y entender la relación entre los vectores iniciales, el escalar y el vector verde final, y adquirir una mejor comprensión del concepto de combinación lineal de vectores.

Se procederá a continuar con el contenido, se explicará el punto medio de un segmento. Se comenzará explicando la fórmula de manera algebraica: Sean los puntos $A\ (a_1, a_2)\ y\ B\ (b_1, b_2)$ y el segmento de extremos $A\ y\ B$, $\overline{AB}$, el punto medio de este segmento será $M\ ({}^{a_1+b_1}/_{2}, {}^{a_2+b_2}/_{2})$. Pero la idea sería explicar el concepto razonando mediante una pequeña demostración geométrica con ayuda del GeoGebra:

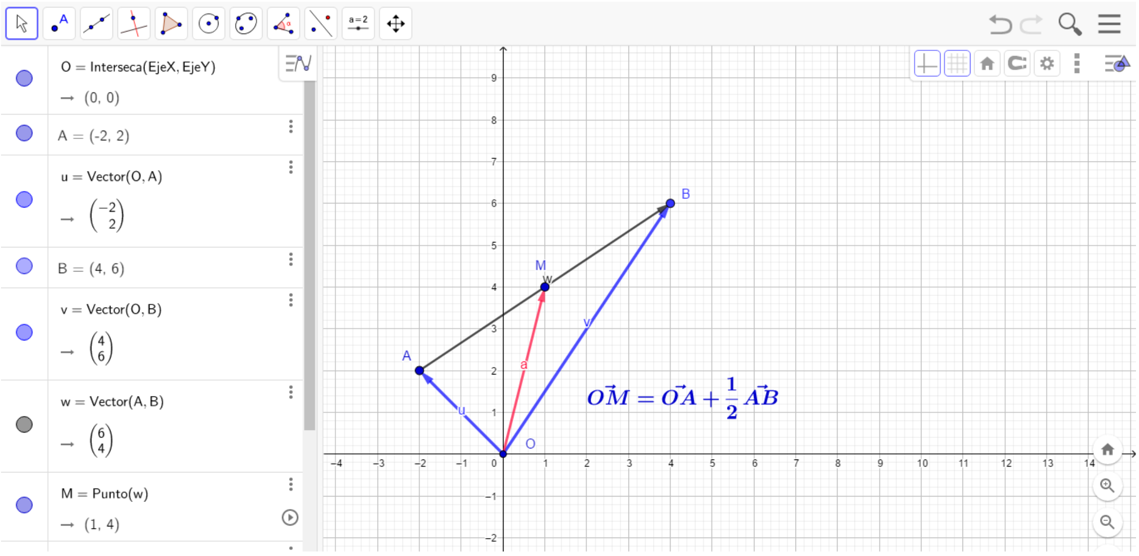

Figura 13. Ilustración de GeoGebra de punto medio

De esta manera, con ayuda del concepto geométrico de sumas de vectores vistas el día anterior podrían entender el concepto de punto medio perfectamente y ayudar a fijar la representación geométrica del concepto de suma de vectores. De esta manera entenderán mejor el concepto y no solo actuarán de manera mecánica aplicando la representación algebraica del mismo concepto, lo que ayudará a que no se les olvide. En caso de que haya algún alumno avanzado, se podría pedir como ejercicio que dedujeran la fórmula para dividir el segmento en n partes iguales.

- Práctica (20 minutos): Al final de la clase se pedirá la realización de ejercicios relacionados con la teoría con la supervisión de los dos docentes. Se pedirán ejercicios relacionados con lo visto en clase para casa tanto de manera escrita como con GeoGebra.

6.7.4. Sesión IV: Aula de ordenadores con GeoGebra. Repaso de las sesiones anteriores.

En la cuarta sesión estará previsto el día para acceder al aula de ordenadores y por lo tanto será una sesión más enfocada al software GeoGebra, pero sin dejar de lado los contenidos de geometría analítica. Dividimos la sesión en:

- Resolución de la tarea para casa (10 minutos): Como el aula de ordenadores también dispone de pizarra se procederá como en días previos de manera que se pediría a los alumnos y alumnas explicar los ejercicios tanto de manera escrita como con GeoGebra, sobre todo para la parte de resolución escrita se deben apoyar en la pizarra.
- Clase magistral (15 minutos): Se dará un breve repaso a lo visto los últimos días, sobre todo incidiendo en las posibles dudas preguntadas por ellos o vistas por los docentes mediante la observación en clase o en la resolución de los ejercicios por los estudiantes. Después se dará una pequeña introducción del GeoGebra en el ordenador explicando las semejanzas con lo que ya conocen del móvil y viendo algunos detalles nuevos del interfaz que posee el software GeoGebra. También se les explicarán ciertos detalles de los condicionales dentro del programa, por si algún alumno va más avanzado, ya que puede ayudar en la práctica. Se realizarán ejercicios en el ordenador conectado al proyector para apoyar la explicación y mostrar mejor las propiedades y cómo interactuar con GeoGebra. Algunos de estos ejercicios quedarán recogidos en las actividades correspondientes a la sesión.
- Práctica (25 minutos): Al final de la clase se pedirá la realización de ejercicios relacionados con los días anteriores para comprobar dónde ha podido haber más complicaciones con la supervisión de los dos docentes, aprovechando la ayuda de la herramienta GeoGebra y observando también las posibles dificultades que puedan darse con el software. Por último, se pedirá una práctica de GeoGebra relacionada con lo visto en clase para casa. En caso de que algún alumno no disponga de ordenador o no disponga de la disponibilidad de tener GeoGebra en

casa se intentará realizar esta práctica en clase y resolver las dudas y ejercicios para casa (esto se podrá programar de antemano gracias al cuestionario inicial).

6.7.5. Sesión V: Producto escalar. Ángulo entre dos vectores.

Dividimos la sesión en:

- Consulta de dudas (5-10 minutos): Se pidió una práctica con GeoGebra el día anterior, por lo que no habrá que resolver ejercicios. Sin embargo, se ayudará a resolver cualquier duda que haya podido surgir con la parte conceptual o con el propio software.
- Clase magistral (20-25 minutos): Podemos prever que los alumnos no pregunten demasiadas dudas debido a su gran capacidad y su buena predisposición. Por lo que se puede predecir que este día se disponga de más tiempo para desarrollar la parte teórica.

  Se comenzará la explicación con el producto escalar, para desarrollar el concepto nos ayudaremos de la representación geométrica. Daremos primero la interpretación geométrica, y más adelante, daremos la expresión algebraica más sencilla del mismo resultado. Para la representación geométrica nos ayudaremos como en apartados anteriores del dinamismo que nos ofrece el software GeoGebra.

  Empezaremos dando dos vectores cualesquiera definidos por dos puntos y con el mismo origen (después generalizaremos mediante una traslación). Continuaremos trazando una perpendicular a un vector por el extremo no común del otro vector y definiremos el punto de intersección entre el vector y la perpendicular (en nuestro caso, el punto C).

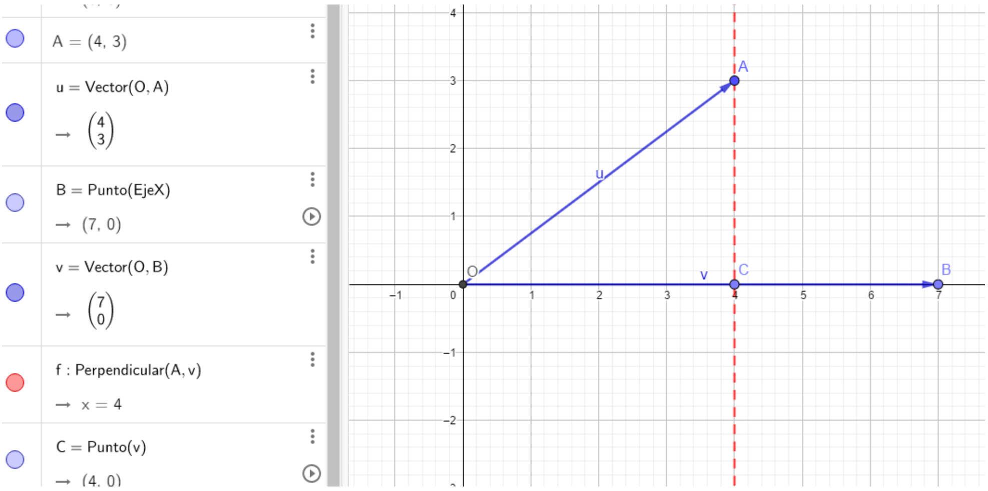

Figura 14. Ilustración de GeoGebra de interpretación de producto escalar

Podemos observar que ahora podemos definir un triángulo definido por los puntos $A, B\ y\ C$. La definición geométrica del producto escalar de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Si pasamos a nuestro caso, tenemos que el producto escalar es el producto del módulo de $\vec{u} = \overline{OA}$ por la proyección de $\vec{u}$ sobre la dirección del vector $\vec{v}$, que coincide con $\overline{OC}$. Aprovechando esta representación geométrica del producto escalar se procederá a explicar el ángulo entre dos vectores de manera geométrica.

Con el triángulo antes definido por los puntos $A, B\ y\ C$. Se puede ver que el ángulo generado por los vectores u y v es el mismo que el generado por los lados $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$. Para facilitar la escritura denominaremos a este ángulo α. Y aplicando las razones trigonométricas (que ya conocen los alumnos y alumnas) se obtiene que el coseno de α es ${}^{\overline{OC}}/_{\overline{OA}}$.

De donde, se puede deducir uniendo formulas, que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Se incidirá en casos particulares importantes como que dos vectores son ortogonales (ángulo de 90 grados) si su producto escalar es cero. Esto es fácilmente visible con la interpretación geométrica y la fórmula antes vista.

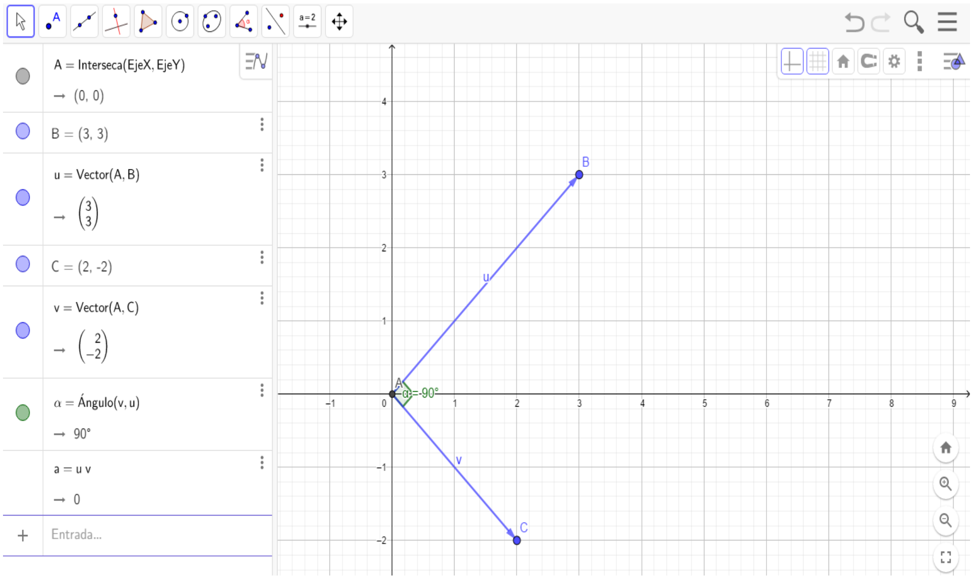

Figura 15. Ilustración de GeoGebra producto escalar ortogonal

Una vez que hayan entendido el razonamiento geométrico se procederá a explicar el concepto de producto escalar de manera más algebraica.

Definimos de manera algebraica producto escalar como: sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores, el producto escalar de estos vectores vendrá dado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

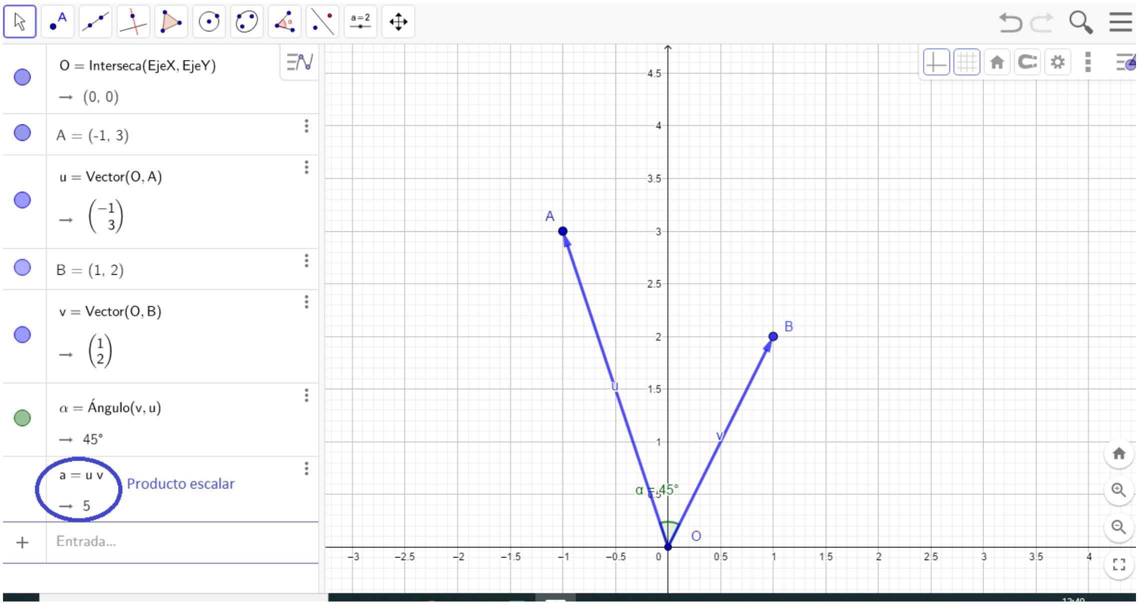

Figura 16. Ilustración de GeoGebra de producto escalar

- Práctica (20 minutos): Al final de la clase se pedirá la realización de ejercicios relacionados con la teoría con la supervisión de los dos docentes. Se pedirán ejercicios relacionados con lo visto en clase para casa tanto de manera escrita como con GeoGebra.

6.7.6. Sesión VI: Diferentes representaciones de ecuación de la recta.

Dividimos la sesión en:

- Resolución de la tarea para casa (10 minutos): Comienzo pidiendo a los estudiantes la resolución de los ejercicios pedidos el día anterior y pediría a dos de ellos que resolvieran dichos ejercicios en la pizarra. Como el día anterior les pediría explicar los ejercicios tanto de manera escrita como con GeoGebra, sobre todo para la parte de resolución escrita se deben apoyar en la pizarra.

- Clase magistral (20 minutos): Se comenzará explicando la ecuación vectorial de la recta. Primero se dará una explicación con la representación geométrica del concepto, y, a partir de la misma deducir la representación algebraica del mismo concepto para lograr un mejor aprendizaje.

Luego se comenzará dando una recta deducida por un punto y un vector. Se tratará de expresar la idea intuitiva del concepto de vector director y nos apoyaremos en GeoGebra para ver algún ejemplo.

Preguntaríamos a los alumnos cuál sería la recta que pasa por el punto P y tiene como vector director $\vec{u}$ en la siguiente situación.

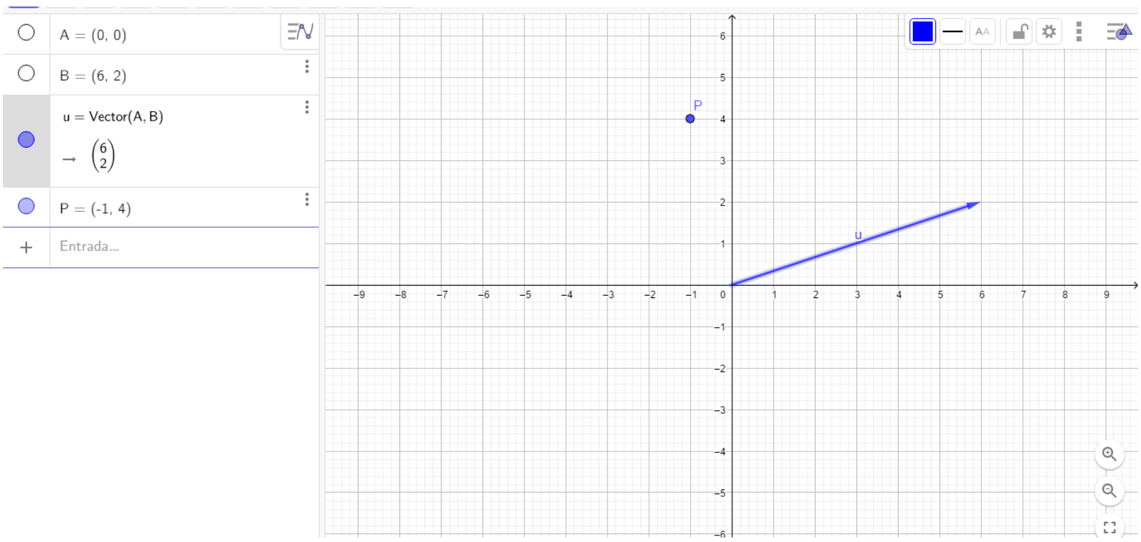

Figura 17. Ilustración de GeoGebra de recta conocido un punto y un vector director (1)

Y de manera visual e intuitiva entiendo que llegarían a:

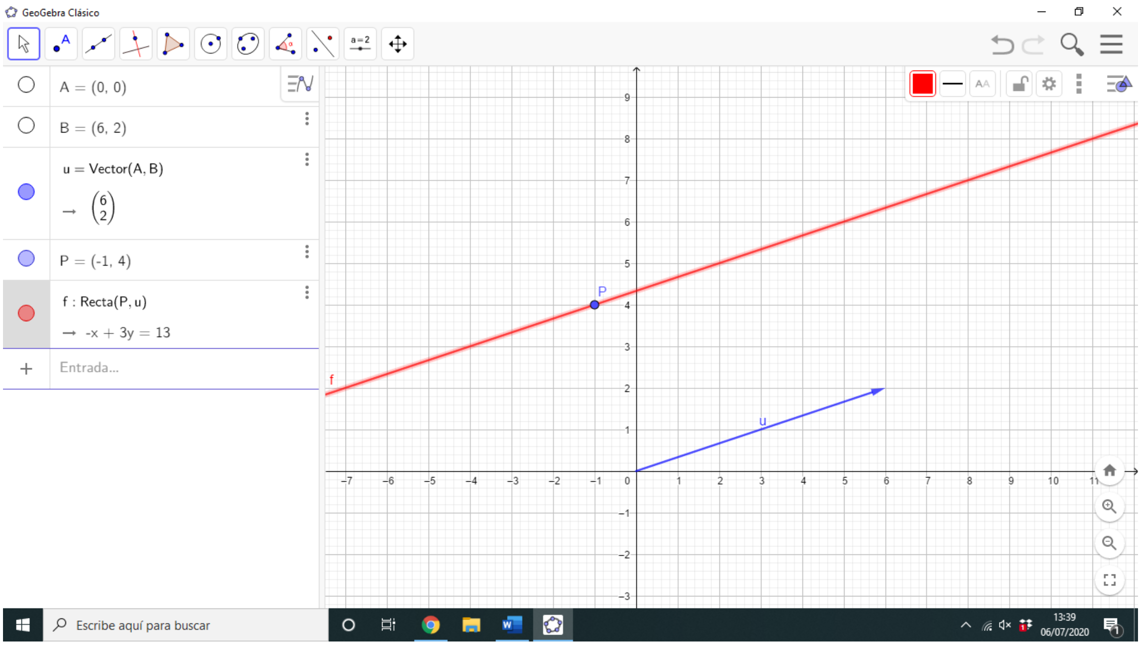

Figura 18. Ilustración de GeoGebra de recta conocido un punto y un vector director (2)

A continuación, se dará una breve prueba de manera geométrica para llegar a entender la representación algebraica del mismo concepto.

Para esta prueba nos apoyaremos en el siguiente ejemplo en el que se pretende explicar paso a paso y repasando conceptos de las anteriores sesiones:

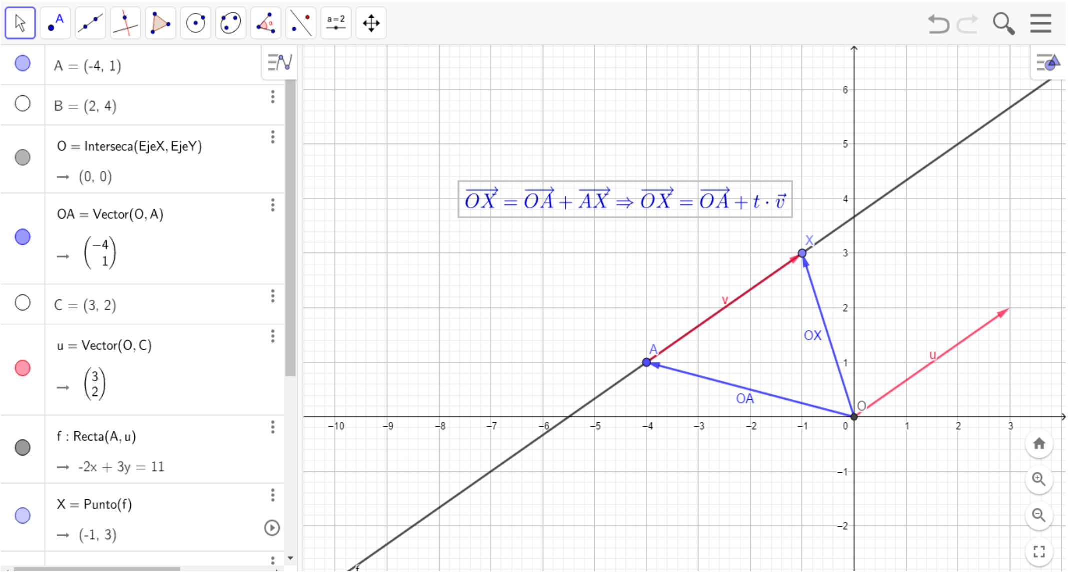

Figura 19. Ilustración de GeoGebra de prueba geométrica de una recta conocido un punto y un vector director

Después, se dará la definición formal de lo anteriormente visto con GeoGebra. Conociendo un punto cualquiera $A\ (a_1, a_2)$ y un vector $v\ (v_1, v_2)$, la ecuación sería $(x, y) = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{v}$

A continuación, se proseguiría utilizando el orden algebraico natural de las ecuaciones para la explicación. Es decir, en primer lugar, la ecuación paramétrica, siguiendo por la ecuación continua y finalmente la ecuación implícita y la ecuación explícita.

- Práctica (20 minutos): Al final de la clase se pedirá la realización de ejercicios relacionados con la teoría con la supervisión de los dos docentes. Se pedirán ejercicios relacionados con lo visto en clase para casa tanto de manera escrita como con GeoGebra.

6.7.7. Sesión VII: Posición relativa de dos rectas

Dividimos la sesión en:

- Resolución de la tarea para casa (10 minutos): Se pediría a los alumnos y alumnas explicar los ejercicios tanto de manera escrita como con GeoGebra, sobre todo para la parte de resolución escrita se deben apoyar en la pizarra. También se resolverán dudas relacionadas con GeoGebra.

- Clase magistral (20 minutos): Prosiguiendo con la idea de las rectas vista en el día previo, y, aprovechando que en el tema anterior vieron la resolución de sistemas de ecuaciones, se explicará las posiciones relativas entre dos rectas. Se pretende relacionar las posiciones relativas con el número de soluciones de un sistema de ecuaciones. Es decir, si el sistema tenía una única solución las rectas serán secantes, si el sistema tenía infinitas soluciones las rectas serán coincidentes y si el sistema no tenía soluciones estas rectas serán paralelas.

  Se explicará primero que una ecuación de dos incógnitas en el plano es una recta. Para así facilitar la comprensión de cuándo un sistema de dos ecuaciones (dos rectas) tiene una, ninguna o infinitas soluciones. Además, cuándo es una única solución, es decir, el punto de corte de ambas rectas por lo que verifica ambas ecuaciones. La “x” y la” y” correspondiente son las coordenadas del punto en el plano.

Sistema compatible determinado | *Sistema compatible indeterminado* | *Sistema incompatible*

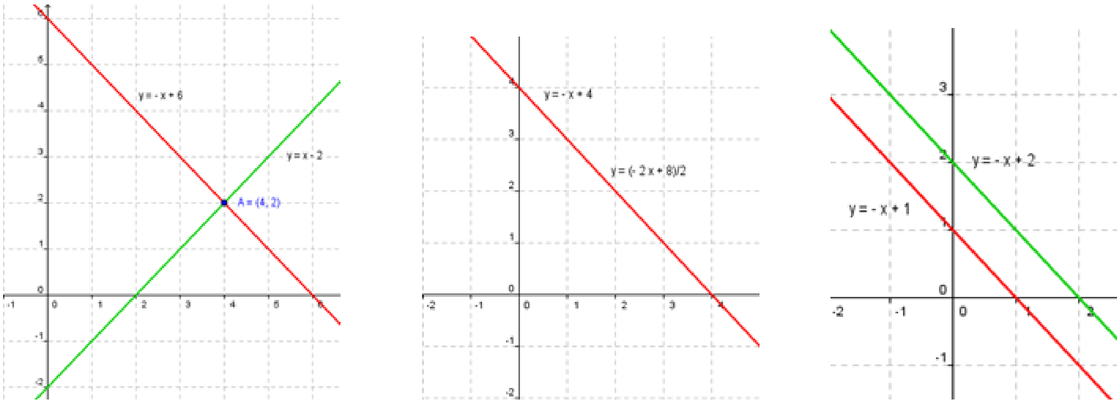

Figura 20. Ilustraciones de GeoGebra de diferentes posiciones relativas de las rectas

Gracias a la comprensión anterior podemos hablar de sistemas equivalentes. Es decir, dos sistemas con la misma solución.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 32 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

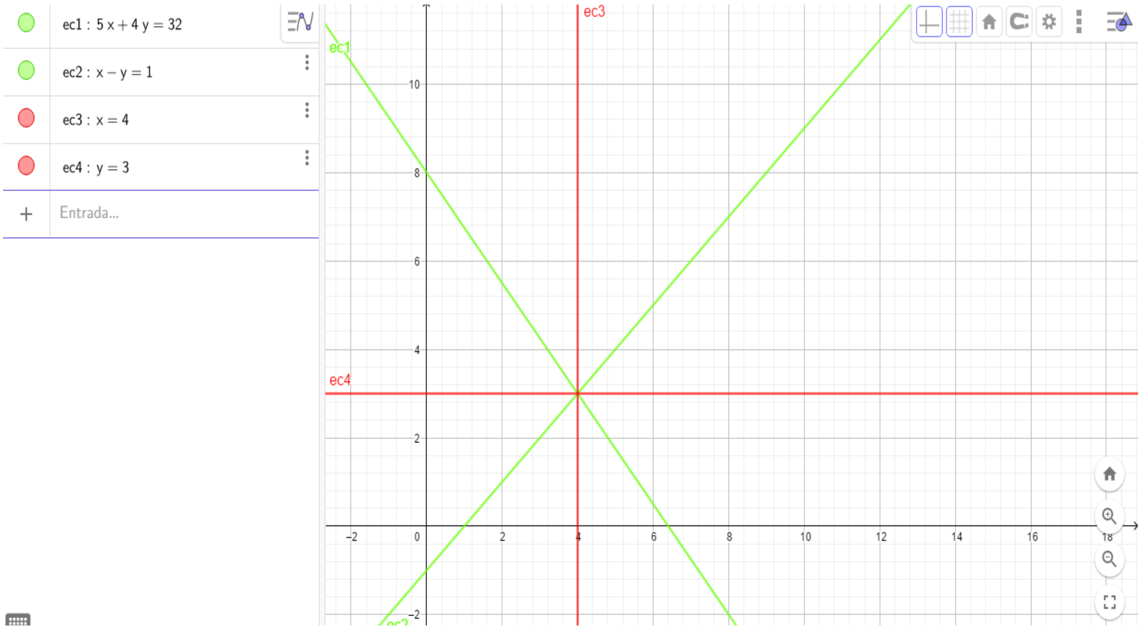

Figura 21. Ilustración de GeoGebra de sistemas equivalentes

Posteriormente se dará una representación geométrica a los criterios de equivalencia vistos en la unidad previa que realizaban los alumnos para resolver por de método de reducción.

1. Si un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números distintos de cero resulta otro sistema equivalente al primero.

2. Si sumamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema el resultado es otro sistema equivalente (es un caso particular de 1).

3. Si en un sistema de ecuaciones lineales una ecuación es proporcional a otra o es combinación lineal de otras, se puede suprimir y el sistema obtenido es equivalente al sistema inicial.

4. Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente. (este es el más obvio pues son las dos mismas rectas)

Un ejemplo geométrico (visual):

$$\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \quad (2) = (1) + 3(2) \quad \begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 15x = 9 \end{cases}$$

Nota: se puede hacer más fácil dividiendo por 3 en (1)

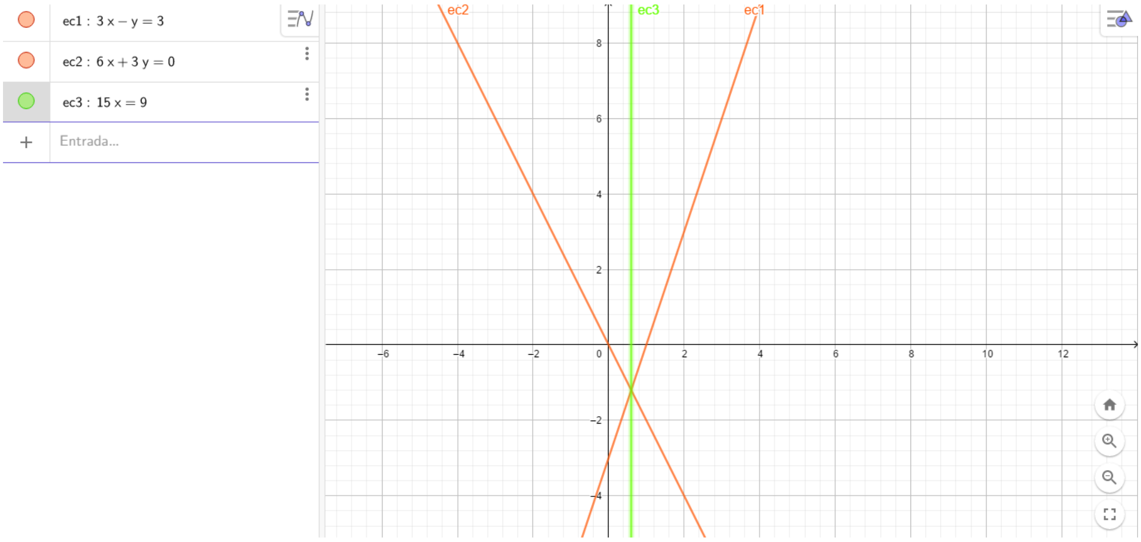

Figura 22. Ilustración con GeoGebra de sistemas equivalentes

De esta manera los alumnos comprenderían porqué los sistemas son equivalentes y porqué se obtiene la misma solución y entenderían la interpretación geométrica de resolver un sistema por el método de reducción.

- Práctica (20 minutos): Al final de la clase se pedirá la realización de ejercicios relacionados con la teoría con la supervisión de los dos docentes. Se pedirán ejercicios relacionados con lo visto en clase para casa tanto de manera escrita como con GeoGebra.

6.7.8. Sesión VIII: Práctica con GeoGebra en el aula de ordenadores. Paralelismo y perpendicularidad en rectas.

Será la segunda y última sesión en el aula de ordenadores. Como en la sesión previa de ordenadores se dará un repaso general de lo dado anteriormente y se profundizará en el aprendizaje de la herramienta software GeoGebra. Pero en esta sesión como ya se tiene un conocimiento más o menos avanzado de GeoGebra no será necesario enfocarse tanto en cómo emplear GeoGebra y se podrá añadir el último concepto nuevo de la unidad didáctica. Como es el último día previo al examen, el temario añadido será breve. Dividimos la sesión en:

- Resolución de la tarea para casa (10 minutos): Como en días previos, se pediría a los alumnos y alumnas explicar los ejercicios tanto de manera escrita como con GeoGebra, sobre todo para la parte de resolución escrita se deben apoyar en la pizarra. También se resolverán dudas relacionadas con GeoGebra.

- Clase magistral (20 minutos): Se explicarán ciertos aspectos del interfaz de GeoGebra, sobre todo se incidirá donde más fallos tengan los alumnos en las prácticas anteriores, o dudas razonables que puedan tener sobre los condicionales. Después se explicará los conceptos de recta paralela y perpendicular por un punto a otra recta dada. Se explicarán estos conceptos mediante representación algebraica y geométrica. Se comenzará dando la idea, es decir, dos rectas son paralelas si tienen la misma dirección, y por tanto el mismo vector director. Con las lecciones anteriores pueden generar la recta de manera algebraica y deducir la idea geométrica. Para escribir la ecuación de una recta paralela a otra por un punto, bastará tomar este punto y el vector director de esta otra. Para explicar cuándo son perpendiculares, de nuevo se dará la idea. Dos rectas son perpendiculares si lo son sus vectores directores. Por tanto, con las lecciones vistas anteriormente si su producto escalar se anula.

  Por último, a explicar cómo realizar estos conceptos con GeoGebra, y de esta manera apoyar la explicación previa incidiendo en la representación geométrica.

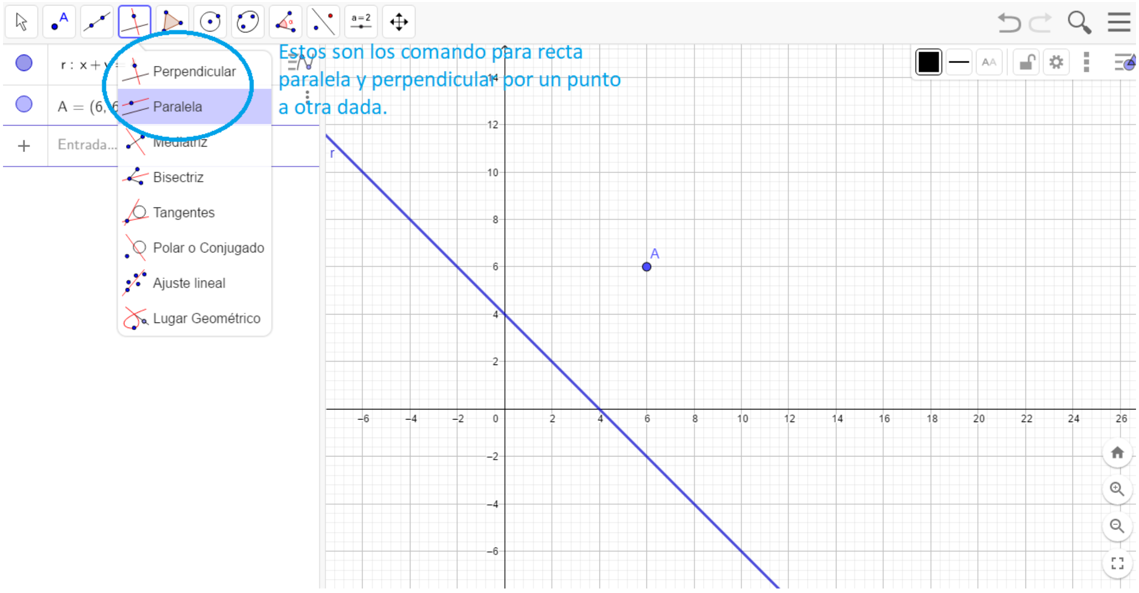

Figura 23. Ilustración de GeoGebra de comandos de recta paralela y perpendicular a otra dada por un punto

De esta manera la recta perpendicular (verde) y la recta paralela (rojo) quedarían así:

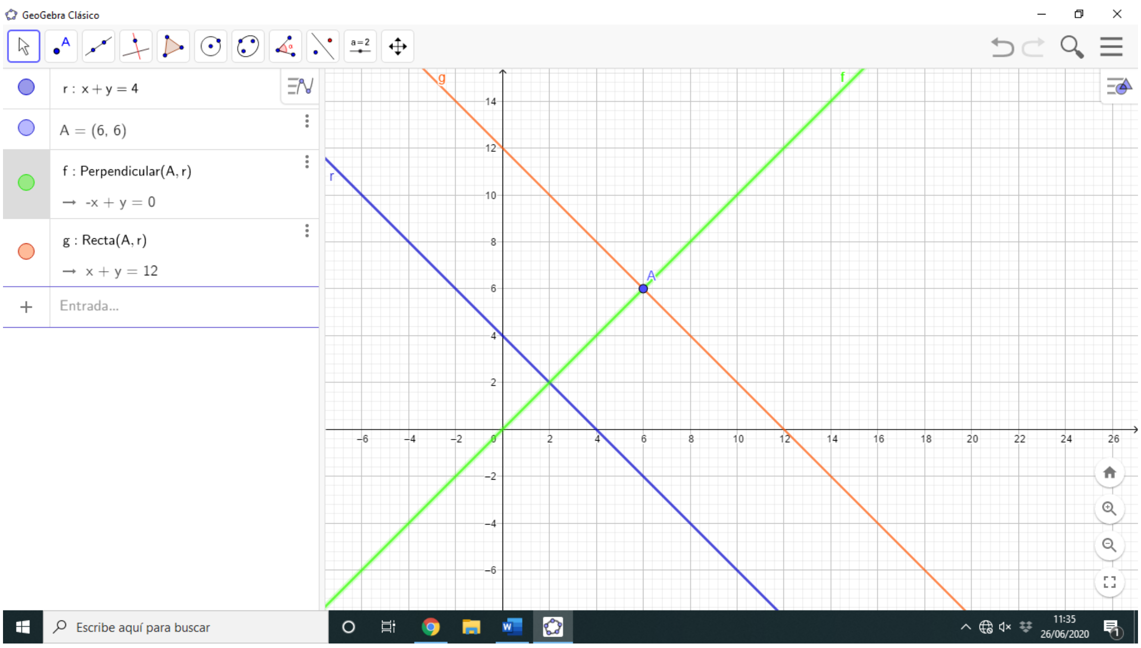

Figura 24. Ilustración de GeoGebra de recta perpendicular y paralela a una dada

Con esto finalizaríamos los contenidos incluidos en la unidad didáctica. Aunque en las prácticas de GeoGebra se incluirán algunos conceptos nuevos. Estos se darán de manera guiada por lo que confío en que no haya problema.

- Práctica y consulta de dudas (20 minutos): Al ser el último día antes del examen, se resolverán tanto posibles dudas acerca del examen del día siguiente como posibles dudas acerca de la práctica pedida.

6.7.9. Sesión IX: Prueba de control

En esta penúltima sesión se procedería a realizar un examen de la unidad didáctica para evaluar los contenidos adquiridos. Este examen invertirá la sesión entera, es decir, 50 minutos. Será una prueba de control en el que se intentará evaluar los conocimientos adquiridos. No he incluido el GeoGebra en esta prueba de control porque se trata de evaluar los conocimientos que se han promovido gracias a GeoGebra. Además, se evaluará de manera específica con las prácticas y las tareas para casa.

Además de como método de evaluación, la idea es conocer en comparación con el método tradicional en qué aspectos ha mejorado y ha empeorado el aprendizaje con respecto a otros años, y llegar a conclusiones adecuadas después de la implementación realizada. Para la comparativa se pidieron los datos de los resultados de los estudiantes dos años previos en el mismo curso (sección bilingüe de 4º ESO) a la docente. Aunque es cierto que la comparativa sería con diferentes estudiantes, sería en un contexto muy parecido.

Esta prueba de evaluación, se podrá encontrar dentro de las actividades, en las actividades de la sesión ocho.

6.7.10. Sesión X: Aprendizaje basado en problemas.

En esta última sesión, después del examen, se plantearía una metodología de aprendizaje basado en problemas. He querido plantear esta sesión el día posterior a la prueba de evaluación porque me parece que el día previo no estarían pendientes de la sesión y porque dominarán mejor los conceptos ya que han tenido la evaluación y ya han preparado los conceptos para la prueba. También me gustaría plantear un cuestionario final para conocer la opinión de los alumnos sobre GeoGebra y de la metodología de los contenidos en general. Tanto los problemas empleados en la metodología como el cuestionario se encontrarán en las actividades de la sesión diez. La sesión se dividirá en:

- Actividad de problemas (40 minutos): Escogiendo problemas parecidos a los realizados durante el resto de clases, aunque con una complejidad mayor y relacionados con la vida real. Para la resolución de los mismos, los estudiantes disponen de la aplicación de GeoGebra descargada en su teléfono móvil. La idea era dividir a la clase en dos grupos (de tres y de dos personas). Y plantear un juego. En dicho juego les entregaré una ficha a cada uno de los grupos con 3 problemas. Tendrán 15 minutos para realizar los que puedan como grupo. Después, el equipo con más participantes retará al otro con un problema, el otro equipo podrá aceptarlo o no. Si no lo acepta deberán realizar el problema ellos. Si el equipo que ha decidido hacerlo lo resuelve correctamente obtendrá un punto, en caso contrario, lo ganará el equipo contrario

  He decidido plantear esta actividad después del examen para que realicen dicha actividad sin la presión de tener el examen cerca ya que necesitas de todos los conocimientos adquiridos durante la unidad. De esta manera, como los estudiantes, en general, no suelen estudiar día a día y estudian cuando están cerca del examen, dominaran mejor la materia para realizar la actividad.
- Cuestionario (10 minutos): Al final de la última sesión con toda la metodología implementada (sesiones de GeoGebra, evaluación, clases y actividad de problemas) se les pedirá a los alumnos de manera voluntaria rellenar el cuestionario para conocer sus opiniones. Todo esto será muy útil para llegar a las conclusiones y a conocer una manera más conveniente de mejorar para una próxima vez.

6.8. Atención a la diversidad

En el caso de que un alumno encuentre mayores dificultades se le prestará atención individual mientras el resto de la clase va repasando ejercicios o avanzando deberes. Si algún alumno se encuentra aventajado se le intentarán buscar actividades que fomenten su capacidad e interés por la asignatura, así como mejorar su aprendizaje. La clase con la que nos encontramos es una clase en la que los cinco miembros tienden a ir por encima de la media por lo que se han preparado actividades para profundizar en el contenido. Algunas de estas actividades, se presentan en el apartado siguiente de actividades de aprendizaje como actividades de ampliación. El hecho de que nos encontremos en una clase reducida nos ayuda a conocer mejor a los alumnos y encontrar antes cualquier tipo de desajuste y atenderle de manera correcta y eficiente.

6.9. Actividades de aprendizaje

En este apartado se citan solo algunos de los ejercicios explicados o realizados tanto en clase como pedidos para casa para dar una representación del modelo de ejercicios en cada sesión. También se incluyen las pruebas de evaluación y las prácticas pedidas con la herramienta software GeoGebra.

6.9.1. Actividades sesión I

Evaluación inicial:

Nombre:

1. **En el siguiente plano cartesiano:**
   a) **Indica el eje de abscisas, el eje de ordenadas y el origen de coordenadas.**
   b) **Representa los puntos** $\boldsymbol{A(-3,2), B(3,2), C(-1,0), D(-2,-5), E(2,-7)}$**.**

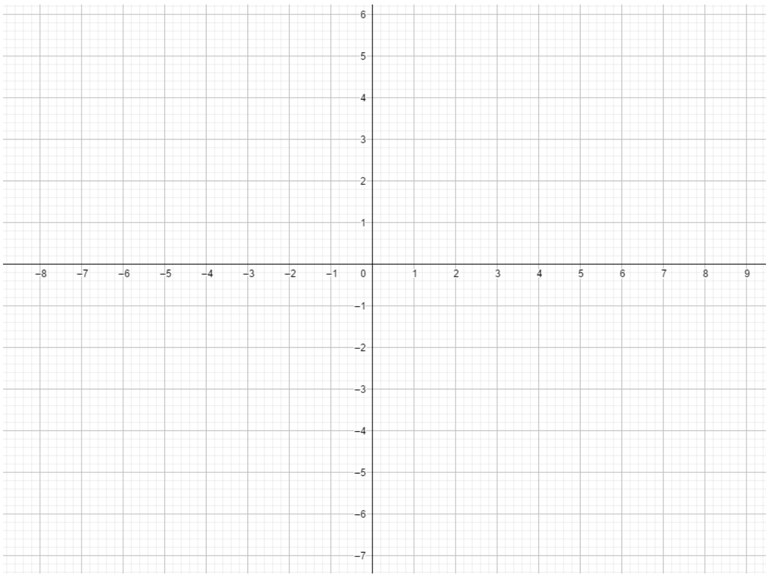

Figura 25. Ejes cartesianos (1)

2. En los siguientes puntos representados en el plano cartesiano:

a) Indica en qué cuadrante se localizan los puntos mencionados

b) Indica las coordenadas que corresponden a los puntos.

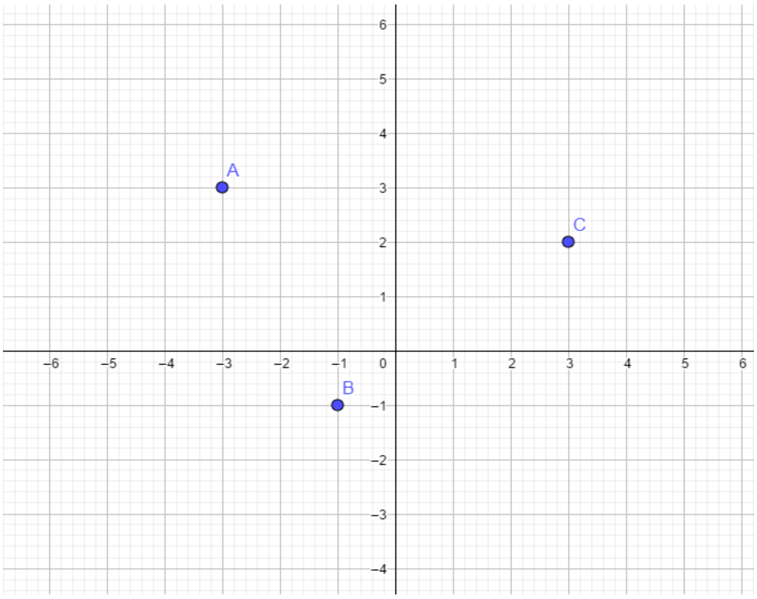

Figura 26. Ejes cartesianos con tres puntos

3. **Dados los puntos A (2, 3) y B (0, 3), calcula y representa las componentes y módulo:**

   a) **Del vector $\overrightarrow{OB}$.**

   b) **Del vector $\overrightarrow{OA}$**

   c) **Del vector $\overrightarrow{AB}$**

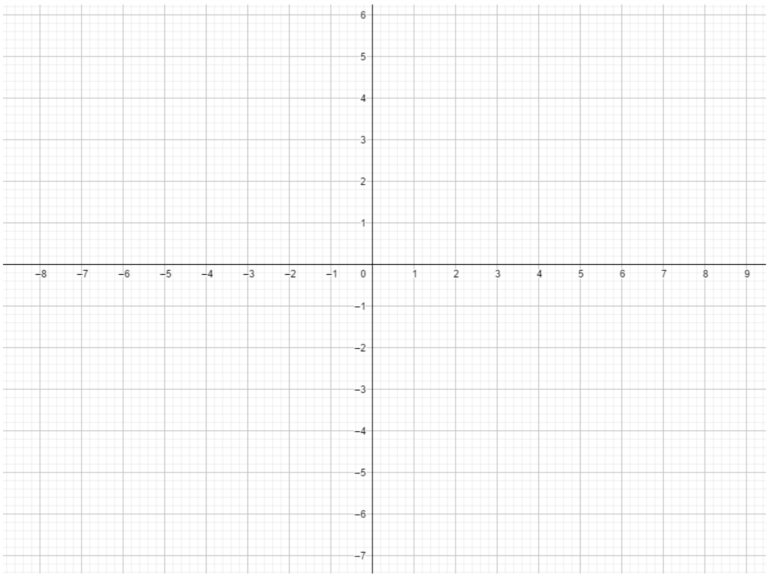

Figura 27. Ejes cartesianos (2)

Cuestionario sobre nuevas tecnologías

1. **¿Has utilizado alguna vez el ordenador? En caso afirmativo, ¿Cada cuánto lo utilizas?**

2. **¿Dispones de ordenador en casa? ¿Y de conexión a internet?**

3. **¿Qué programas del ordenador has manejado?**

4. **¿Utilizas el ordenador para jugar o también lo has utilizado para trabajar o para ayudarte con problemas de clase? En caso de utilizarlo para problemas de clase ¿Qué has utilizado?**

5. **¿Conoces algún programa de ordenador que incluya algún aspecto matemático? En caso afirmativo, ¿cuál? (indicar si has oído hablar del programa o si lo has manejado)**

Actividades:

El primer día, para ver la comprensión y profundización de los contenidos explicados, pediría ejercicios del tipo:

Dados los puntos A (-1, -3) y B (2, -4), calcula las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo. Este ejercicio se deberá realizar tanto de manera tradicional en el cuaderno como de manera virtual en GeoGebra.

Solución mediante el software GeoGebra:

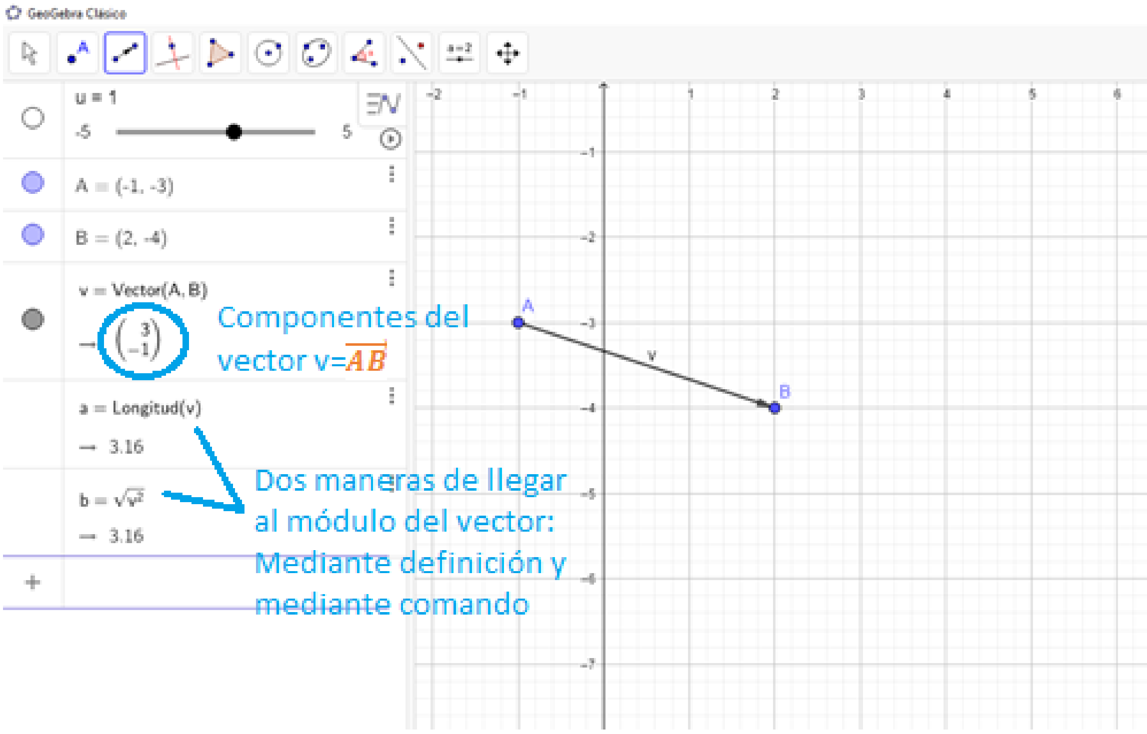

Figura 28. Ilustración de GeoGebra de módulo de un vector

Como nota para este ejercicio con GeoGebra, se podría haber realizado el módulo replicando el cálculo aludiendo a los elementos de la matriz/vector, no a la matriz/vector completa.

Solución en papel:

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \big(2 - (-1), -4 - (-3)\big) = (3, -1)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = 3.16$ u (siendo u la unidad de medida al no especificarse dicha unidad)

Con los mismos puntos dados en el ejercicio anterior, ¿qué tienen en común y en qué se diferencian el vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$?

Podemos notar que los extremos son los mismos pero el punto de origen y el extremo se encuentran intercambiados. Por lo que el módulo y la dirección serán las mismas, mientras que el sentido es inverso.

6.9.2. Actividades sesión II

Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-4, -3)$ y $\vec{w} = (2, 1)$. Calcular de manera algebraica (manual) y mediante el software GeoGebra:

a) $\vec{u} - \vec{v}$

b) $3\vec{w} - 2\vec{u}$

c) $2\vec{u} - ((-2)\vec{w} + 4\vec{u})$

La solución que buscábamos de los alumnos con GeoGebra sería a) en rojo, b) en morado y c) en verde.

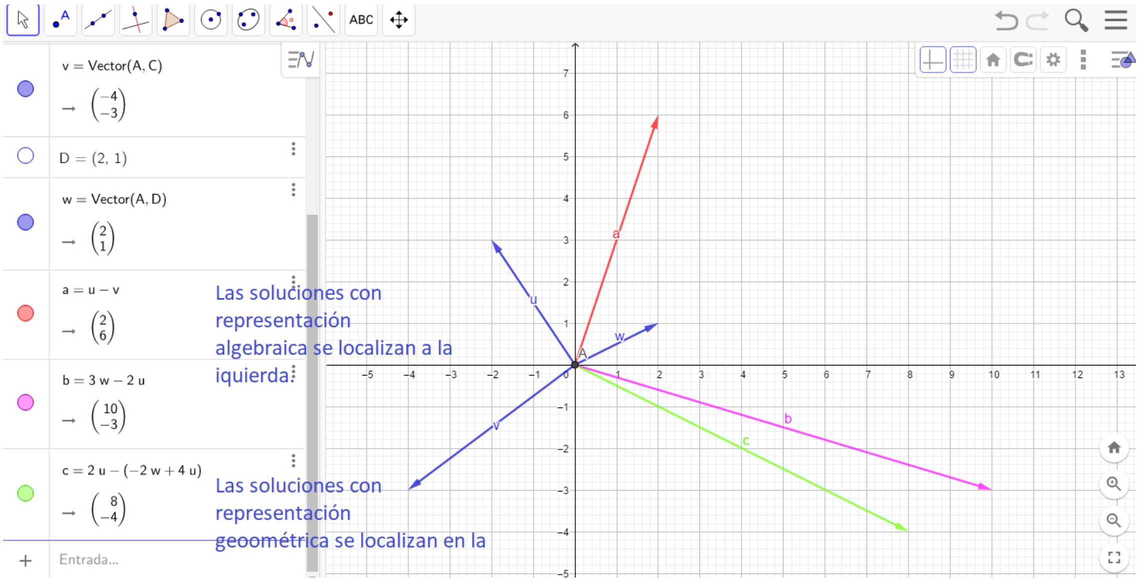

Figura 29. Solución con GeoGebra suma y resta de vectores

En la excursión del instituto que realizasteis en la que salisteis de Valladolid y llegasteis a Burgos. Si la localización en coordenadas, cuya escala está en kilómetros, de estas ciudades es la siguiente:

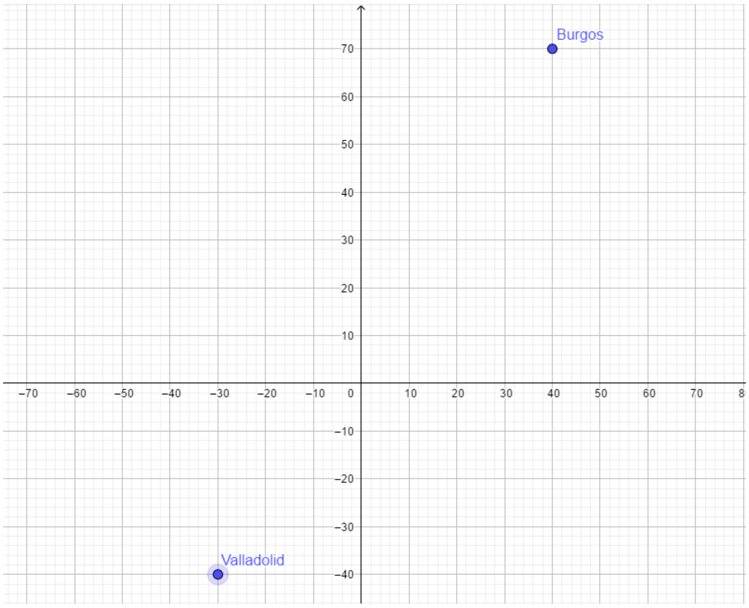

Figura 30. Ejes cartesianos con las coordenadas de Burgos y Valladolid

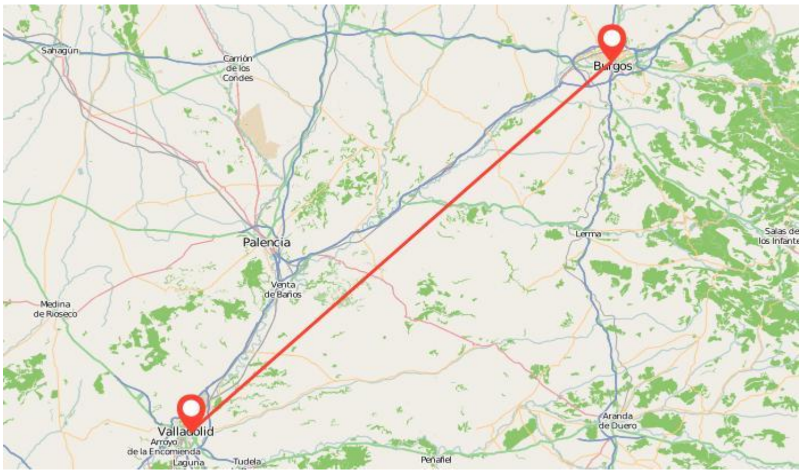

Figura 31. Mapa real de la distancia entre Burgos y Valladolid

Fuente: https://www.google.com/maps/

Halla en tu cuaderno la distancia entre Valladolid y Burgos y comprueba el resultado con GeoGebra.

Solución

La distancia entre dos puntos es realizar el módulo del vector entre ambos puntos:

$$\left|\overrightarrow{ValladolidBurgos}\right| =$$
$$\sqrt{(burgos_1 - valladolid_1)^2 + (burgos_2 - valldolid_2)^2} = \sqrt{70^2 + 110^2} =$$
$$130.38\ km$$

La comprobación con GeoGebra sería:

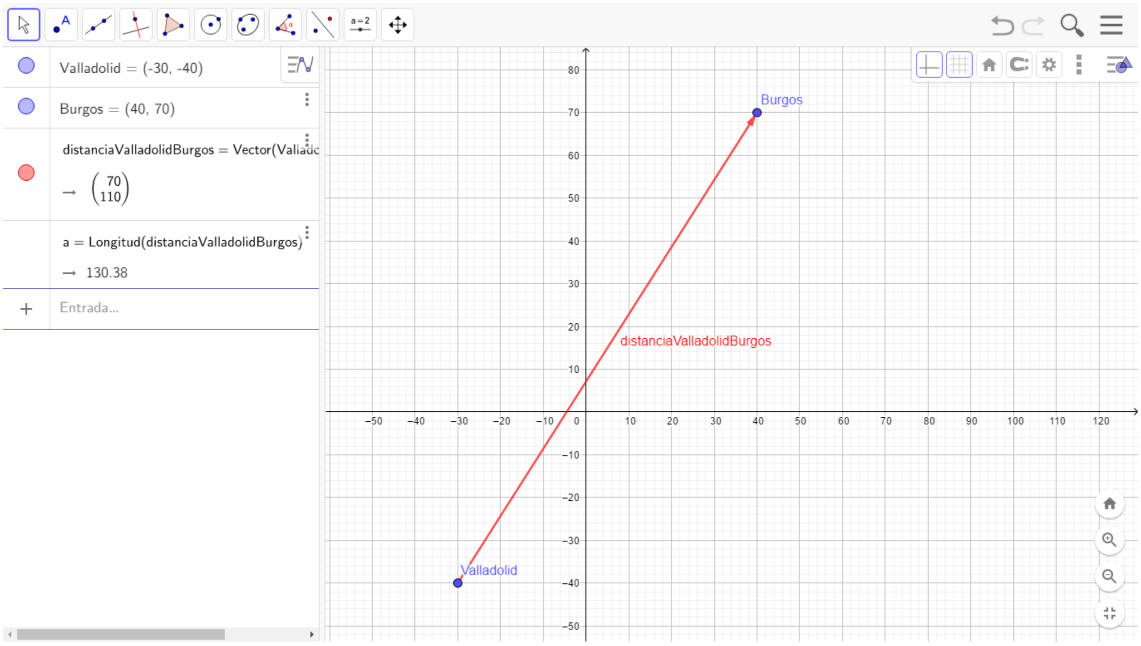

Figura 32. Solución GeoGebra distancia Valladolid y Burgos

Es decir, la solución sería 130,38 kilómetros distan entre Valladolid y Burgos.

6.9.3. Actividades sesión III

Los vectores $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (-4, -3)$, que tienen distinta dirección. Expresa el vector $\vec{w} = (-8, 3)$ como combinación lineal de ellos. Comprueba la solución con GeoGebra.

Solución algebraica: Buscamos dos números t y s, que cumplan $t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} = \vec{w}$, es decir, $t \cdot (-2,3) + s \cdot (-4,-3) = (-8,3)$. Separamos las componentes y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -2t - 4s = -8 \\ 3t - 3s = 3 \end{cases}$$ y resolviendo llegamos a t $= 2 \quad y \quad$ s $= 1$

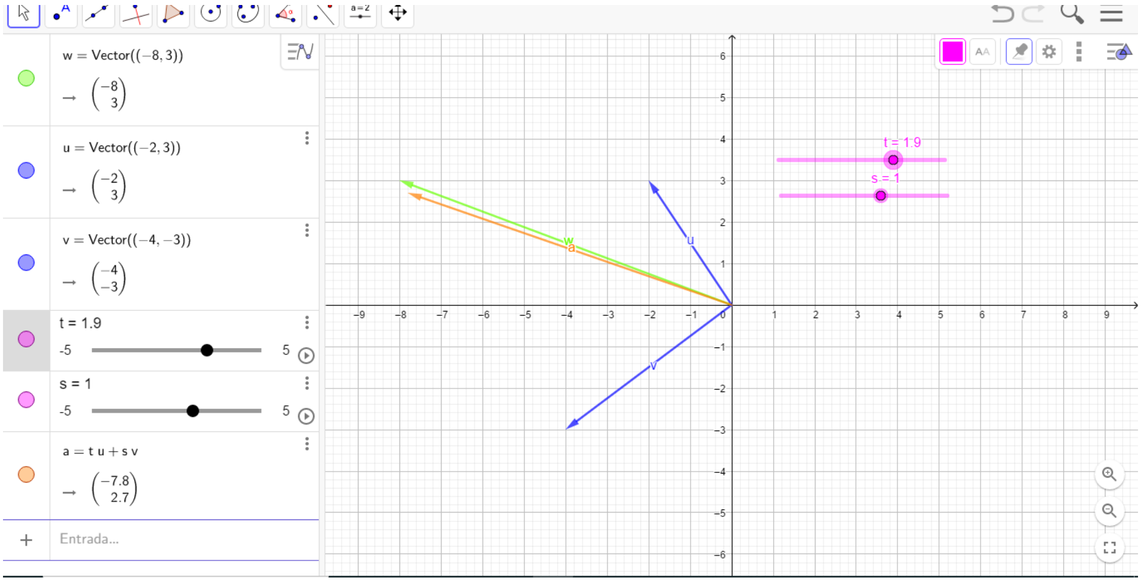

Figura 33. Ilustración con GeoGebra de solución de ejercicio combinación lineal

He realizado la comprobación con deslizadores para que se pueda visualizar como afectan los cambios de valores en t y s en la solución. En el caso que muestra la Figura 29 se deja el valor $t = 1.9$ en lugar de 2 para que se pueda apreciar la diferencia entre los vectores naranja y verde.

Calcula el punto medio del segmento de extremos $\boldsymbol{A}\,(-2,5)$ y $\boldsymbol{B}(2,-2)$ y del segmento de extremos $\boldsymbol{C}\,(-4,-2)$ y $\boldsymbol{D}(4,5)$. ¿Qué sucede con ambos resultados? ¿Podrías explicar por qué?

Solución

El punto medio del segmento de extremos A y B sería:

$$M_1\left({}^{a_1+b_1}/_{2},{}^{a_2+b_2}/_{2}\right) = (0,{}^{3}/_{2}).$$

El punto medio del segmento de extremos C y D sería:

$$M_2\left({}^{c_1+d_1}/_2, {}^{c_2+d_2}/_2\right) = (0, {}^3/_2).$$

Ambos puntos medios son iguales, esto es posible porque los puntos están colocados formando un rombo.

Comprobación GeoGebra.

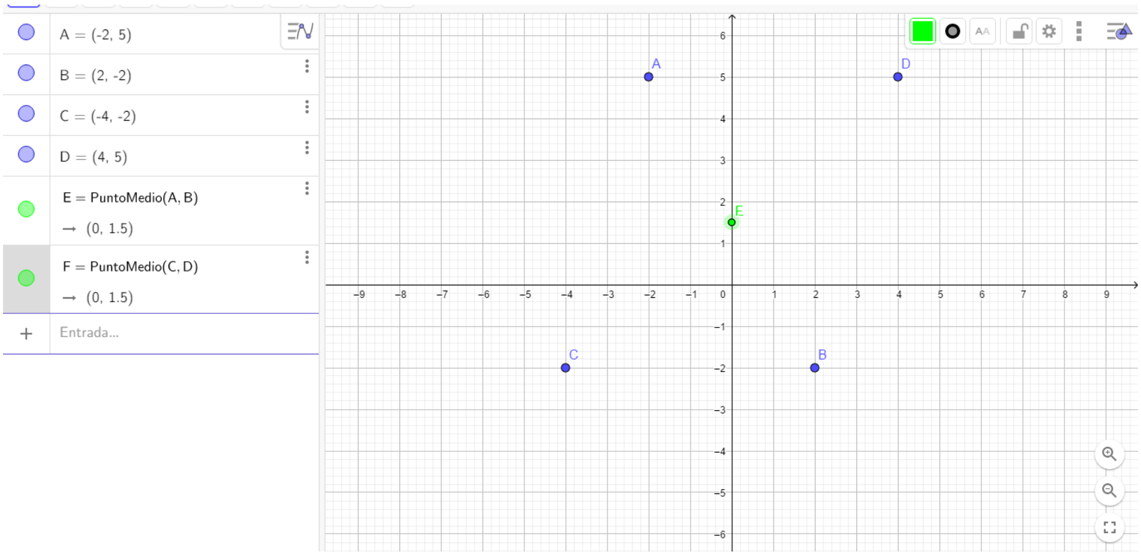

Figura 34. Ilustración con GeoGebra de punto medio de dos segmentos

6.9.4. Actividades sesión IV

Práctica con GeoGebra:

Ajedrez

Breve leyenda:

La principal leyenda sobre el origen del ajedrez habla de un rey de la India llamado Belkib. Buscando acabar con su aburrimiento, ofreció una recompensa a cambio de alguna distracción. Se dice que fue el sabio Sissa quien le propuso el ajedrez, un juego que comprendía una pequeña guerra sobre un tablero de madera. El rey, entusiasmado, le ofreció lo que quisiera como recompensa. A cambio Sissa le pidió un grano de trigo sobre el primer recuadro del tablero de ajedrez, dos sobre el segundo y así sucesivamente, doblando cada vez la cantidad.

Al rey le pareció una cantidad modesta y accedió, pero cuando empezaron los cálculos se descubrió que en la última casilla habría que depositar más de nueve billones de granos de trigo.

Busca e investiga sobre los movimientos de cada figura de este entretenido juego cuyo origen no está del todo claro. Después proporciona en GeoGebra los vectores de cada movimiento de cada figura si cada una partiera de la posición 4-D, suponiendo que los peones avanzan hacia arriba y que no existen piezas enemigas. Debes mostrar todos los movimientos posibles de cada figura (puedes hacerlo mediante un único vector con deslizadores o con un vector por cada movimiento).

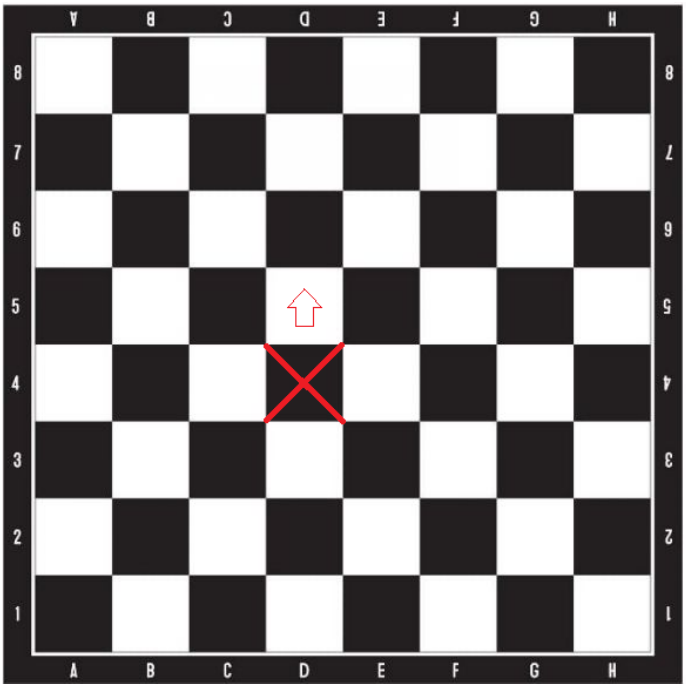

Figura 35. Tablero de ajedrez (1)

Fuente: https://elksport.com/tablero-ajedrez-plastico

NOTA: Supón que la posición de 4-D es el origen en nuestra representación en GeoGebra y cada casilla es una posición en plano cartesiano. Por ejemplo, la casilla 5-D sería el punto (0,1) y la casilla 2-G sería (3,-2).

Solución:

Peón: Los peones tienen menos opciones de movimiento que el resto de las piezas. En la primera jugada, pueden avanzar dos casillas. En todos los demás casos, solo pueden avanzar un paso hacia adelante. Luego en nuestro caso únicamente puede moverse un paso hacia adelante (si hubiera fichas rivales habría que estudiar el vector diagonal, pero no es el caso).

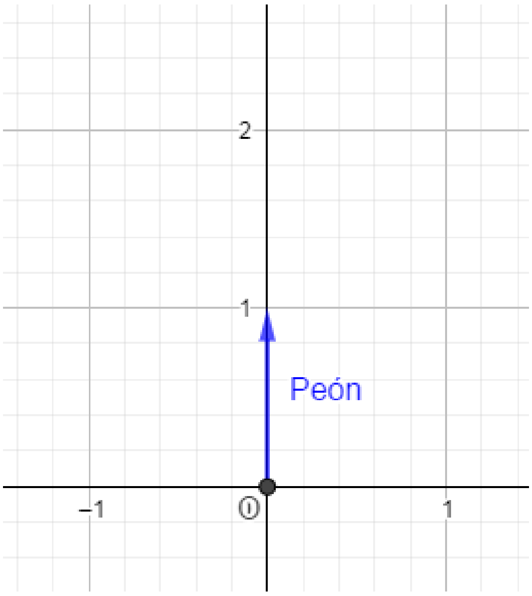

Figura 36. Ilustración de GeoGebra de movimiento de Peón

El caballo: El caballo se mueve en forma de L, dando solo 3 pasos. Esto significa que esta pieza se mueve primero dos casillas a la izquierda, derecha, atrás o adelante, y luego una casilla en la dirección contraria a la anterior mencionada.

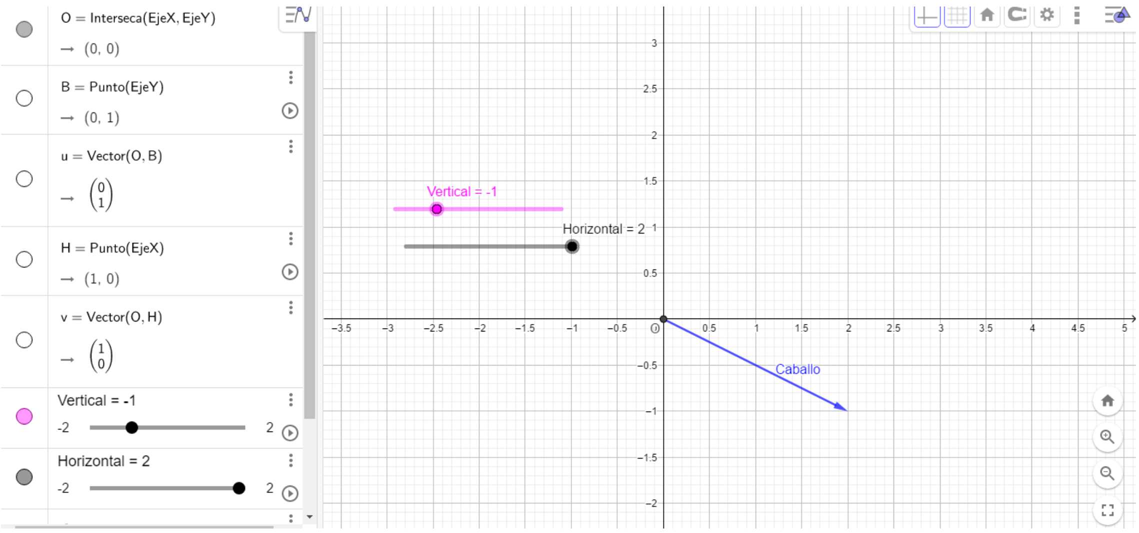

Figura 37. Ilustración con GeoGebra del movimiento del caballo

Existe una condición no visible en los deslizadores en la que la suma de los valores absolutos de ambos debe ser 3, sino no se mostrará el vector. Esta construcción puede ser muy complicada para los alumnos, pero lo que muestro en las imágenes es solo una posibilidad, posiblemente difícil para los estudiantes. La idea es que sean creativos con las soluciones, pero si contestan con todos los vectores posibles como más adelante se pondrá de ejemplo con el rey sería también una solución válida.

EL alfil: Mientras no haya otras piezas en su camino, los alfiles pueden moverse en cualquier dirección en forma diagonal. Además, pueden capturar cualquier otra pieza que esté en una casilla a la cual se pueda mover.

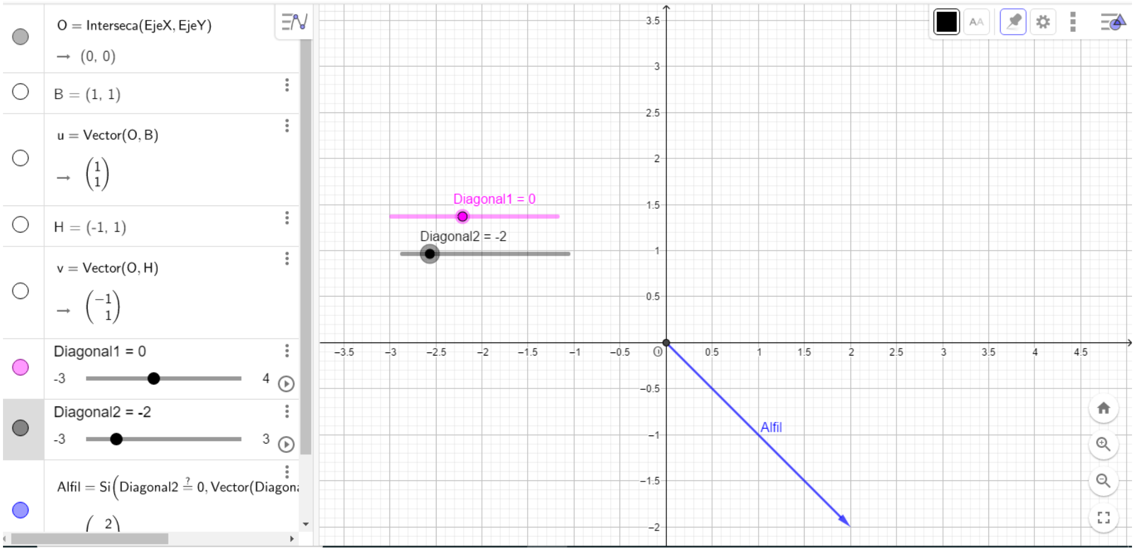

Figura 38. Ilustración con GeoGebra del movimiento del alfil

La torre: Las torres se mueven para adelante, atrás, izquierda o derecha, hasta donde quieras mientras no se encuentre con el final del tablero o una pieza enemiga. Pero solo en una dirección por vez.

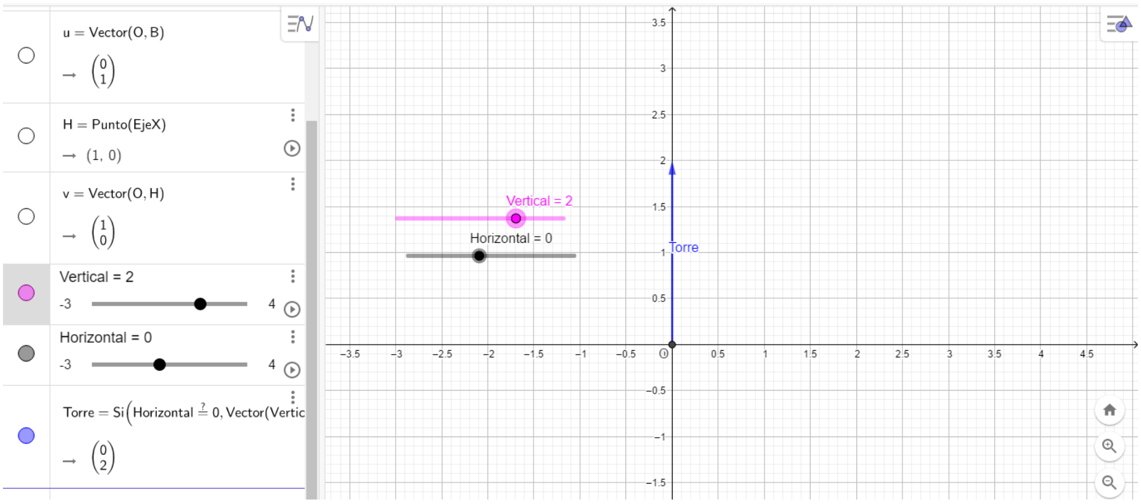

Figura 39. Ilustración con GeoGebra del movimiento de la torre

La dama: La Dama puede moverse en cualquier dirección y tantas casillas como quiera. La única cosa que no puede hacer es saltar sobre otras piezas. La dama puede capturar cualquier otra pieza del oponente que se cruce por su camino. También es muy útil para distintas ideas tácticas y de ataque.

Para representar el movimiento de la dama, he tratado el movimiento como combinación lineal de los vectores $\vec{u}\,(1{,}0)\; y\; \vec{v}(0{,}1)$. De manera que se puede apreciar el movimiento de manera más dinámica.

Figura 40. Ilustración con GeoGebra del movimiento de la dama

Hay que tener cuidado porque para hacerlo de manera correcta hay que incluir un condicional indicando que el vector solo se representa si el valor absoluto de Vertical y Horizontal son iguales o si uno de ellos es 0.

El Rey: posee un rango de movimiento limitado. Puede moverse a solo una casilla, pero en cualquier dirección (solo si no queda amenazado (en jaque) en dicha casilla, aunque al no haber fichas rivales no hay que tener en cuenta esta circunstancia). Podría haber realizado el movimiento del rey como en el caso anterior de la dama como una combinación lineal de los mismos vectores, pero con los deslizadores desde -1 hasta 1. Sería una solución más elegante y que demuestra dominar mejor el concepto de combinación lineal. He decidido incluir otra solución diferente que represente todos los movimientos a la vez para no hacer demasiado monótonas las respuestas.

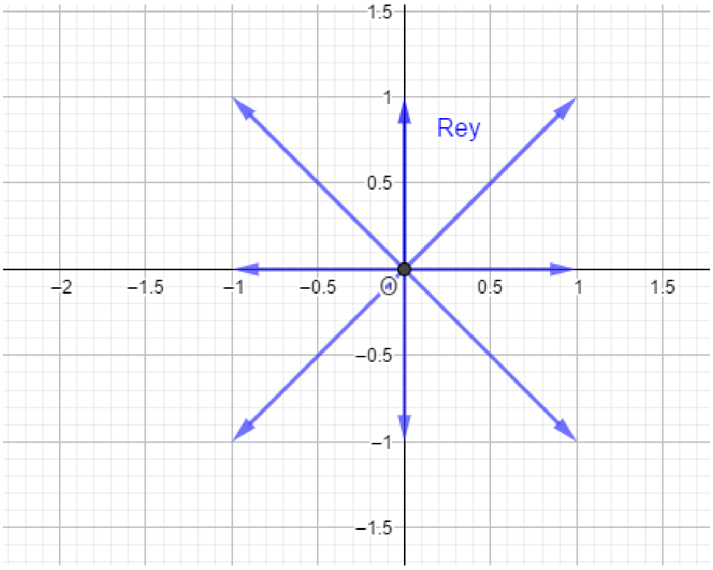

Figura 41. Ilustración con GeoGebra del movimiento del rey

Al no tener un amplio conocimiento sobre el juego, he recurrido a internet (Lemos, 2017) para conocer estos movimientos. Supongo que no todos los estudiantes conocerán los movimientos, pero es fácil encontrar la respuesta con los medios adecuados, es una manera de fomentar el trabajo de investigación y búsqueda de información en internet.

6.9.5. Actividades sesión V

Sea t un número real, calcula el valor que debería poseer para que los vectores $\vec{u} = (t, 2), \vec{v} = (6, -3)$ sean ortogonales. Se debe realizar este ejercicio de manera manual y mediante el programa de GeoGebra. Para el programa GeoGebra puedes utilizar un dinamizador y ver el resultado “a ojo”. Después comprueba el resultado con el ángulo entre dos vectores.

Solución

De manera algebraica, hay que realizar el producto escalar de ambos vectores sabiendo que son ortogonales si este se anula.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6t - 6$, luego para que sean ortogonales t debe ser 1.

Se pide realizar este ejercicio en GeoGebra para que se produzca una visualización de que este vector es ortogonal si t = 1 y no con otro valor. Para comprender mejor el concepto de producto escalar.

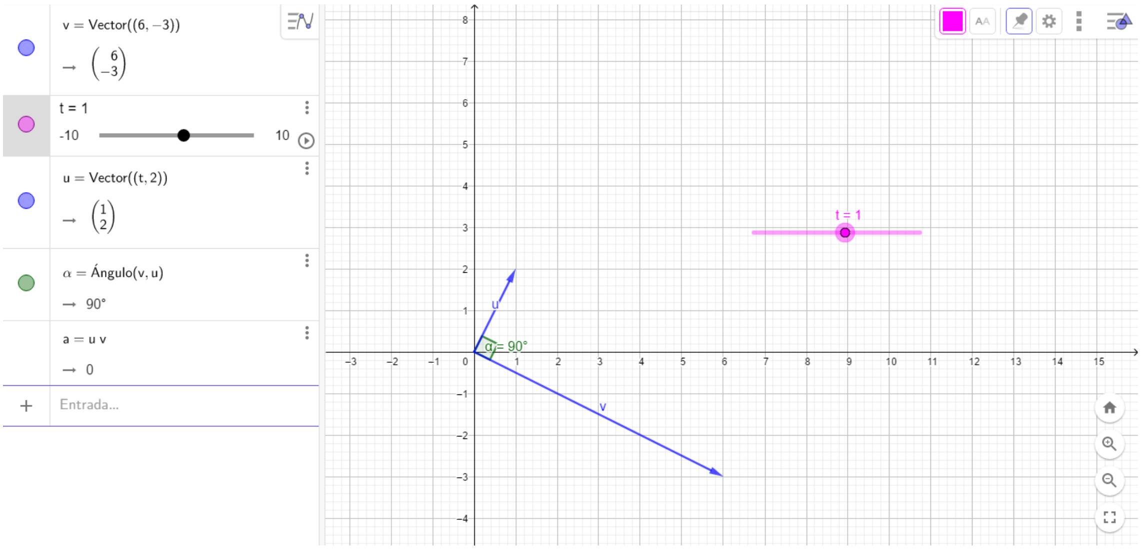

Figura 42. Solución con GeoGebra de buscar el vector ortogonal

Utilizar el dinamizador aquí sirve para entender cómo va variando el ángulo y el producto escalar según va cambiando el valor de *t*.

Todos conocéis el centro cultural Miguel Delibes situado a 500 metros del IES Parquesol. Pero, ¿conocéis los ángulos que el arquitecto Ricardo Bofill creo en su obra? En este ejercicio vais a calcular uno de los ángulos del techo que generan los vectores pintados de verde siguientes.

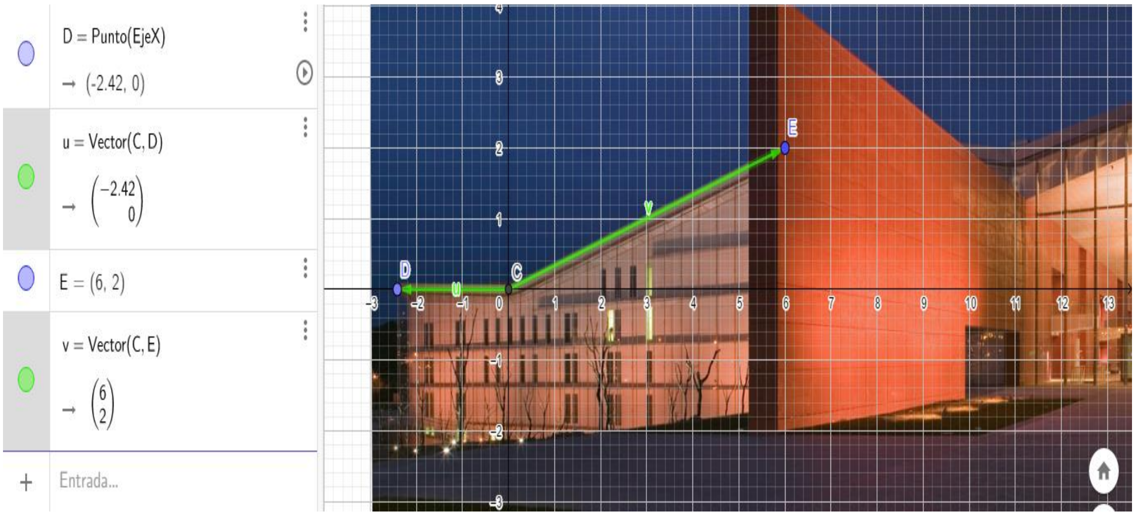

Figura 43. Ángulos edificio centro cultural Miguel Delibes

Fuente: https://www.figueras.com/es/actualidad/entrevistas/153427_ricardo-bofill-ricardo-bofill-arquitectura-centro-cultural-miguel-delibes-val.html

Para resolver este ejercicio basta con aplicar la fórmula conocida que expresa el ángulo de dos vectores:

$$\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{(-2.42,0)\cdot(6,2)}{\sqrt{(-2.42)^2}\sqrt{6^2+2^2}}$$

De donde se deduce resolviendo esta ecuación que el ángulo es 161.57º, o lo que es lo mismo, 0.898π radianes.

6.9.6. Actividades sesión VI

Halla todas las formas conocidas de la recta que pase por los puntos $\boldsymbol{A\ (-5,-2)\ y\ B(3,2)}$ tanto en tu cuaderno como con GeoGebra.

Solución

Podemos tomar como vector director de la recta el vector $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (8,4)$. Para la ecuación vectorial se necesita un punto y el vector director: $f \equiv A + t\cdot\vec{d} = (x,y)$. Es decir, $f \equiv (-5,-2) + t\cdot\overrightarrow{(8,4)}$. Siendo t un valor real.

Otro vector proporcional que puede ser más sencillo es uno proporcional a $\vec{d}$ como el nuevo vector director $\vec{u} = (2{,}1)$. Luego, una ecuación vectorial más sencilla sería:

$$f \equiv (-5,-2) + t \cdot \overrightarrow{(2{,}1)}$$

De la ecuación vectorial llegamos a $(x,y) = (-5+2t, -2+t)$. Si expresamos la anterior expresión como un sistema obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$f \equiv \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \qquad \text{para } t \text{ un valor real.}$$

Para obtener ahora la ecuación continua despejamos e igualamos t en la ecuación paramétrica. Es decir, $t = \frac{x+5}{2} = y + 2$ y obtenemos la ecuación continua:

$$f \equiv \frac{x+5}{2} = y + 2.$$

Para llegar a la ecuación implícita eliminamos primero los denominadores, y a continuación, pasamos todos los miembros de la ecuación al primer miembro dejando el segundo miembro a 0. Esto es:

$$f \equiv x - 2y + 1 = 0.$$

Para llegar ahora a la ecuación explícita basta despejar la variable “y” de la ecuación implícita. Esto es:

$$f \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Solución GeoGebra

No se espera que los alumnos y alumnas lleguen a la ecuación vectorial, pero se presenta para mostrársela en clase.

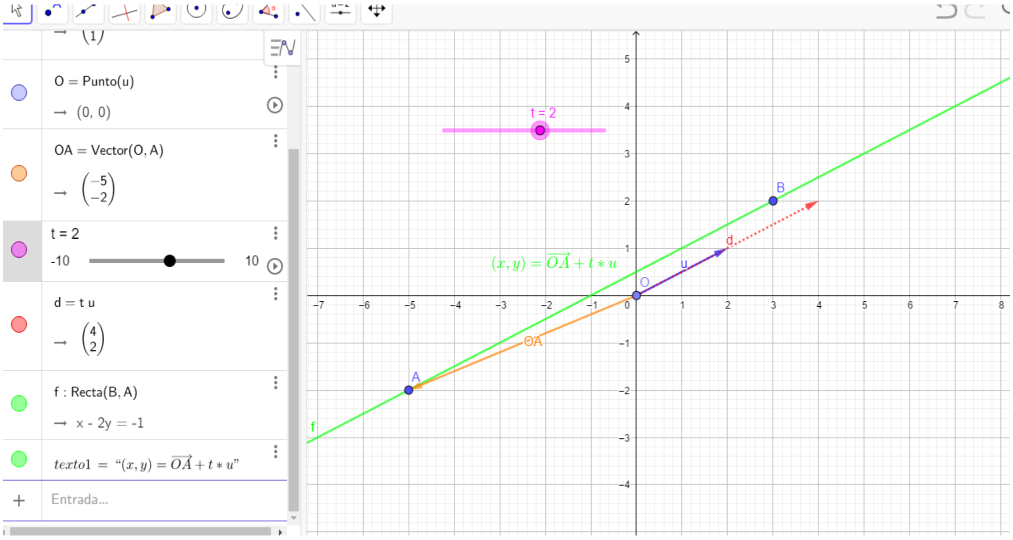

Figura 44. Solución con GeoGebra ecuación de la recta vectorial

Solución explícita y comando para solución paramétrica e implícita.

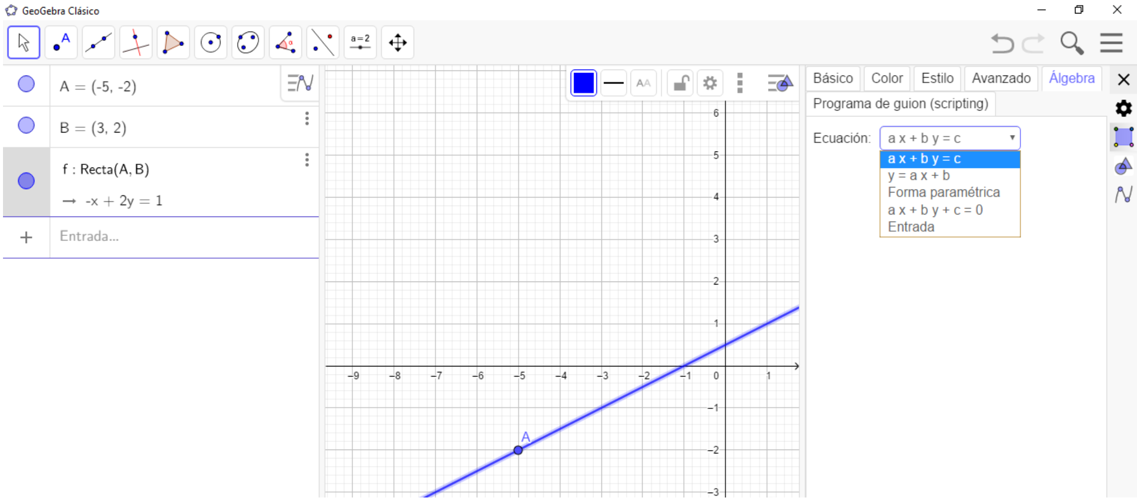

Figura 45. Solución con GeoGebra ecuación de la recta implícita, explicita y paramétrica

6.9.7. Actividades sesión VII

Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción y comprueba en cada paso que los sistemas son equivalentes con GeoGebra.

$\boldsymbol{a)}\ \begin{cases} \boldsymbol{-x - 2y = -3} \\ \boldsymbol{-4x + 10y = -3} \end{cases}$ $\boldsymbol{b)}\ \begin{cases} \boldsymbol{6(x-3) + {}^{3}\!/_{5}\, y = 0} \\ \boldsymbol{10x + y = 30} \end{cases}$

Solución apartado a):

Resolviendo por el método de reducción tal y como aprendieron los estudiantes en la anterior unidad.

$$\begin{cases} -x - 2y = -3 \\ -4x + 10y = -3 \end{cases} \quad (2) = -4(1) + (2) \quad \begin{cases} -x - 2y = -3 \\ 18y = 9 \end{cases}$$

Por último, resolver la ecuación de una incógnita y despejar la incógnita "y" en la ecuación de arriba y llegamos a:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = {}^{1}\!/_{2} \end{cases}$$

Y la solución será el punto (2, ${}^{1}\!/_{2}$).

En cuanto a la solución con GeoGebra, voy a incluir el primer sistema en azul, el segundo en verde y el último en rojo.

También podrán notar otra de las condiciones de equivalencia, que multiplicar o dividir a ambos lados de una ecuación no cambia la recta original.

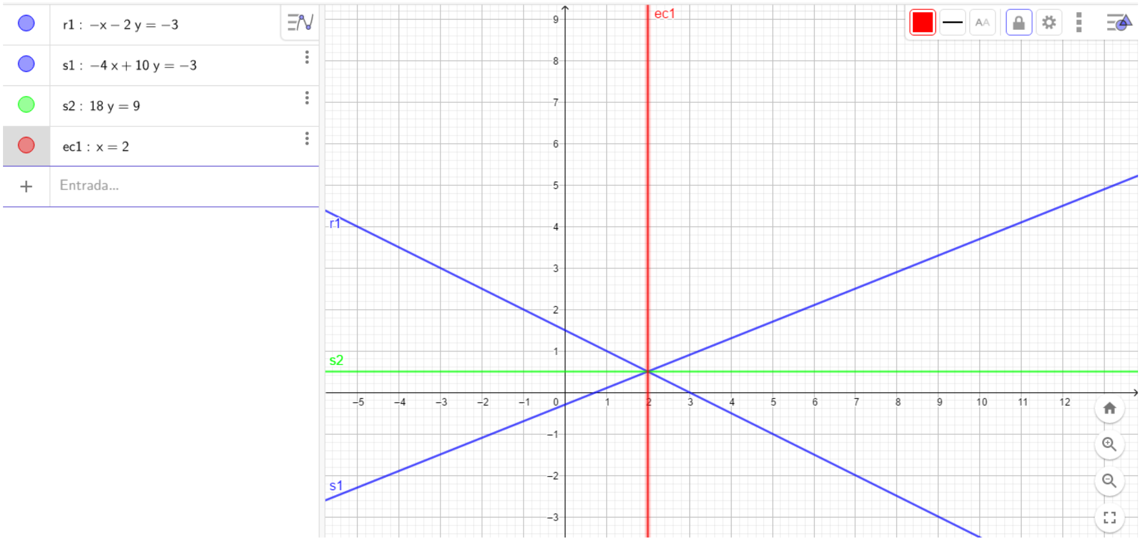

Figura 46. Ilustración con GeoGebra de solución de sistema de ecuaciones

Apartado b) es similar al anterior.

Estudia las posiciones relativas de las siguientes rectas, puedes comprobar la solución con GeoGebra:

$$\boldsymbol{a)\ r_1 \equiv \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \qquad y \qquad s_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{b)\ r_2 \equiv \begin{cases} x = +\frac{1}{2}t \\ y = 3 - \frac{1}{3}t \end{cases} \qquad y \qquad s_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2}}$$

Solución apartado a)

Si llamamos t_1 a la incógnita de r_1 y t_2 a la incógnita de s_1. Podemos igualar las variables “x” e “y” de ambas rectas obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -3 + t_1 = 1 + t_2 \\ 1 - 2t_1 = -t_2 \end{cases}$$

Solucionando este sistema obtenemos $t_1 = -3 \quad y \quad t_2 = -7$. Por lo que la solución será $(x, y) = (-6,\ 7)$.

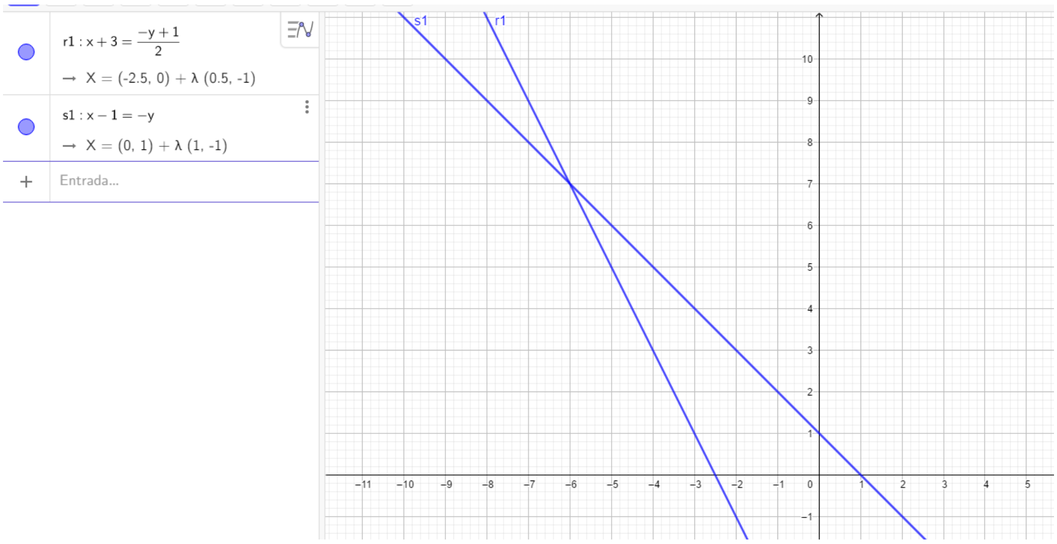

Figura 47. Ilustración con GeoGebra de solución posición relativa de dos rectas

Solución apartado b)

Se puede comprobar que los vectores directores de $r_2\ (\frac{1}{2}, \frac{-1}{3})$ y $s_2\ (-2{,}3)$ son proporcionales y, por tanto, las rectas serán paralelas.

La solución esperable es que los alumnos entiendan esto y sean capaz de verlo, si no es así, podrían resolver el sistema y ver que no tiene solución y, por tanto, son paralelas.

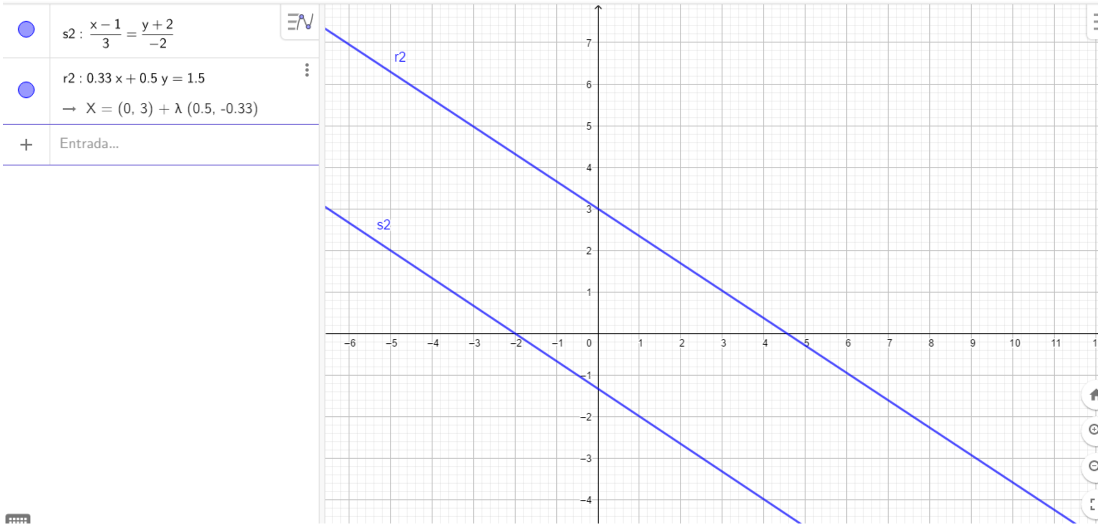

Figura 48. Ilustración con GeoGebra de solución de posiciones relativas (paralelas)

6.9.8. Actividades sesión VIII

Práctica GeoGebra

Para esta práctica he tomado como referencia el artículo de Santana (2010) en el que plantea ejercicios de cálculo de áreas con triángulos isósceles mediante geometría analítica con el fin de reforzar gráficamente los conceptos de geometría analítica y desarrollar la capacidad de abstracción en la resolución de problemas métricos.

Hay una leyenda que dice que el Tangram fue creado accidentalmente por un sirviente de un emperador chino cuando llevaba una cerámica muy cara y fina de forma cuadrada, se tropezó y al caer la cerámica se rompió en 7 pedazos. Desesperado el sirviente trato de reconstruir la cerámica al intento de unir los pedazos se dio cuenta que podía también formar muchas otras figuras.

El Tangram es un antiguo juego chino llamado “Chi Chiao Pan” que significa tabla de sabiduría o denominado juego de siete elementos. Está formado por siete piezas o “tans” que salen de formar un cuadrado: 5 triángulos de diferentes tamaños, 1 cuadrado y un paralelogramo. A demás de la estructuración del cuadrado se pueden representar distintas figuras utilizando las mismas 7 piezas, hoy en día existe más de 10000 formas y figuras que se pueden construir con el tangram (Material didáctico para MPCL, s.f.).

Figura 49. Ilustración de un Tangram

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Tangram

Deduce información sobre los ángulos de las piezas visualizando o manipulando las mismas para conocer las relaciones entre ellas para resolver los ejercicios.

1. **Si los puntos $A\ (-3,-1)$ y $B\ (2,2)$ son los extremos de uno de los lados pequeños de uno de los triángulos pequeño de un tangram. El otro lado pequeño tendrá como vértice el punto A. Calcula el área de dicho triángulo y la posición del vértice restante. ¿Con estos datos podrías calcular el área del resto de piezas del tangram?**

Solución

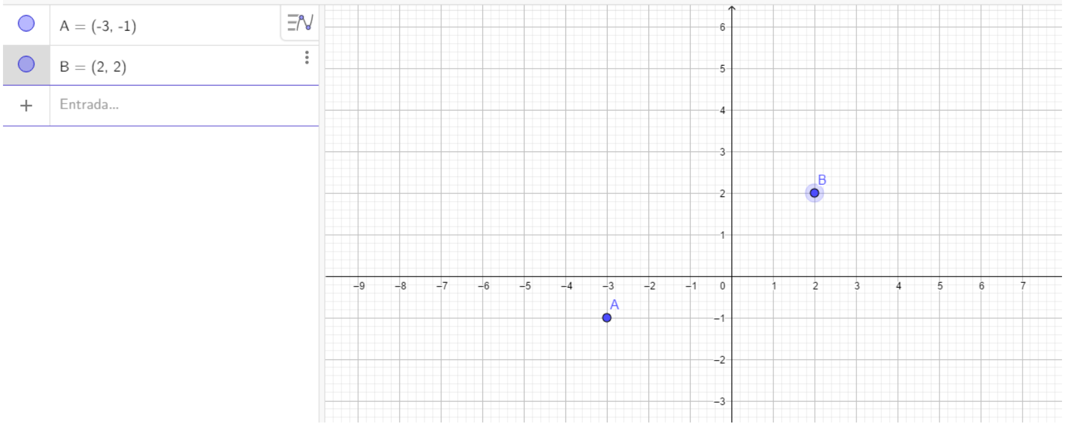

Figura 50. Ilustración con GeoGebra de condiciones iniciales del problema del triángulo pequeño del tangram

Ahora crearemos el segmento que tiene con extremos estos puntos. Además, como sabemos que es un triángulo rectángulo isósceles podemos resolver el problema de dos maneras:

a) Podemos calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, calcular la recta perpendicular a este segmento. Ya conocemos el área, conocemos el valor de la base y la altura (al ser isósceles será la misma). Después generar un vector con el mismo módulo y con origen en A y extremo en el vértice que nos quedaba por conocer.

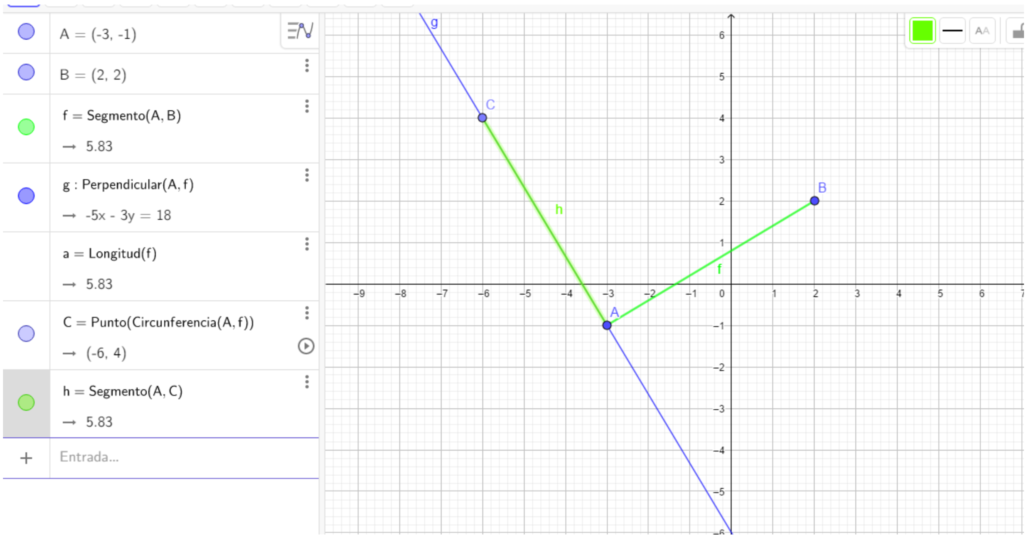

Figura 51. Ilustración con GeoGebra de solución a) del problema del triángulo pequeño del tangram

b) Para calcular el área procedemos de la misma manera que en el apartado previo. Para determinar el vértice restante ahora crearemos la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pase por el punto A y crear la recta que forme un ángulo 45º entre el segmento $\overline{AB}$ y que pase por B.

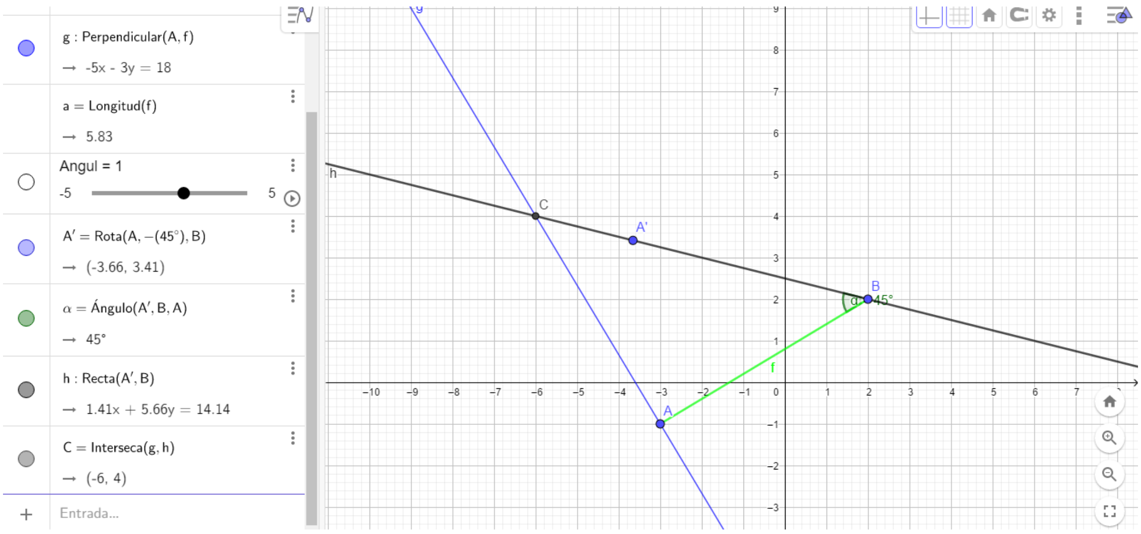

Figura 52. Ilustración con GeoGebra de solución b) del problema del triángulo pequeño del tangram

En ambos casos el triángulo generado será el siguiente y el área como hemos mencionado antes será la base por altura entre dos. Es decir, $\frac{5.83^2}{2} = 17\ u^2$. Este dato, también podemos calcularlo mediante el programa de GeoGebra:

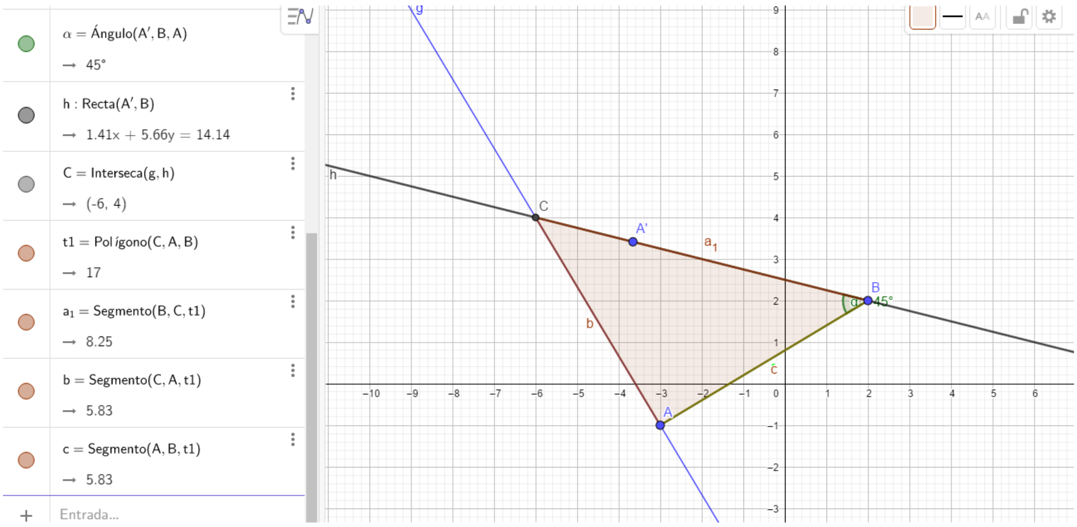

Figura 53. Ilustración de GeoGebra de área triángulo pequeño tangram

Basta con investigar un poco o deducir por ellos mismos las relaciones entre las piezas del tangram (por ejemplo, manipulando un tangram para ver cuántos triángulos pequeños se necesitan para cada pieza) para conocer que se precisan de dos triángulos pequeños para generar el área del cuadrado, del paralelogramo y del triángulo mediano (luego área de 34 u^2) y se necesitarán de 4 triángulos pequeños para generar cada triángulo grande y por tanto tendrán cada uno de área 68 u^2.

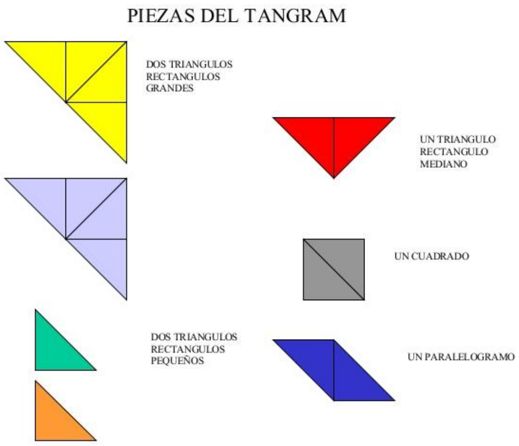

Figura 54. Piezas de tangram comparadas con el triángulo más pequeño

Fuente: https://es.slideshare.net/saramelmontenegroperedo/actividades-coneltangram12135703654897029

2. **En otro tangram de tamaño diferente al anterior conoces el vértice $A\ (-2,-4)$, y la longitud del segmento $\overline{AC} = 7\sqrt{2}$. También sabes que la recta en la que se localiza $\overrightarrow{AC}$ es paralela a $r \equiv\ -x + 8y = 1$. Calcula los vértices restantes y el área del paralelogramo.**

   Solución

   Para llegar a la solución comenzamos trazando la recta paralela a *r* por el punto *A*. Después con el módulo dado en el enunciado hallamos el punto *C*. A continuación, conociendo los ángulos del paralelogramo y mediante las rectas paralelas correspondientes tal y como se muestra en la ilustración de GeoGebra generamos el resto del paralelogramo.

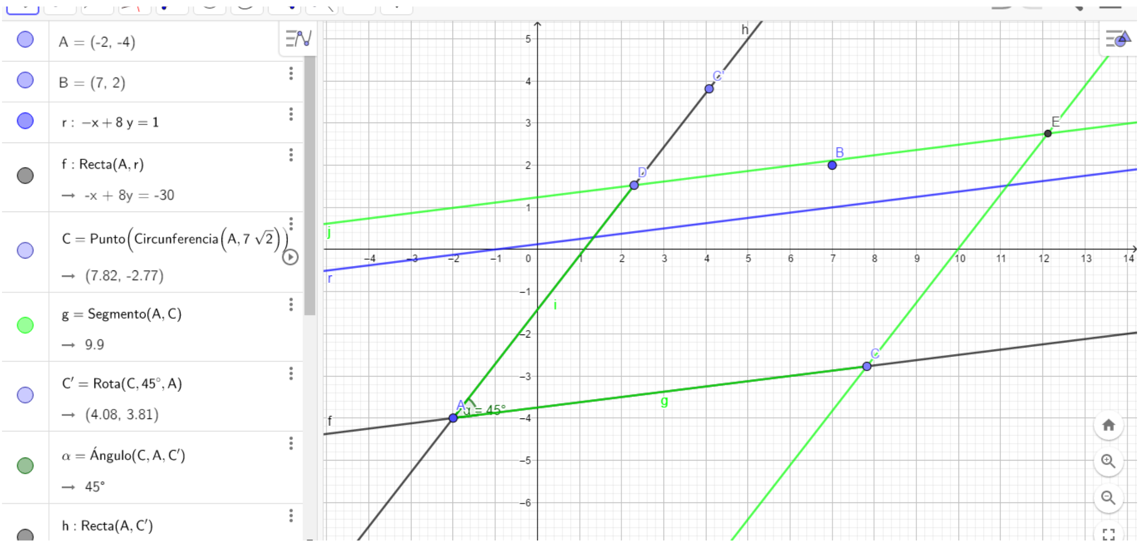

Figura 55. Ilustración con GeoGebra de la solución del ejercicio del tangram del paralelogramo

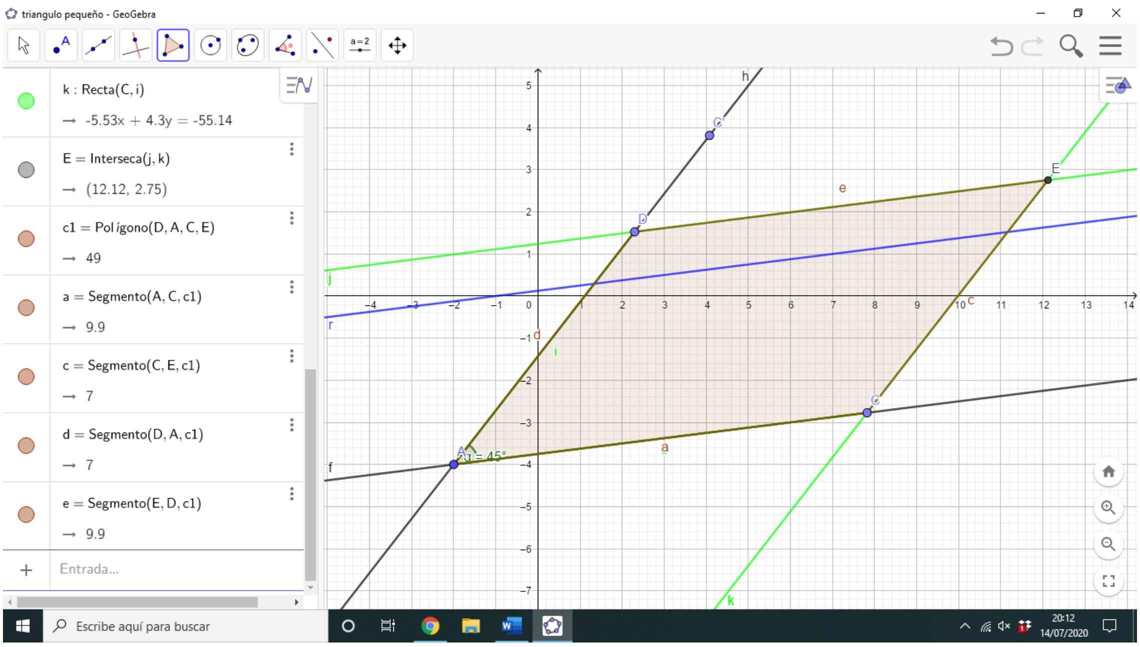

Figura 56. Ilustración de GeoGebra del paralelogramo del tangram

6.9.9. Actividades sesión IX

Prueba de control

1. **(1 punto) Dados los puntos A (1, -5) y B (0, -4), representa gráficamente el vector $\overrightarrow{AB}$, calcula sus componentes y su módulo.**

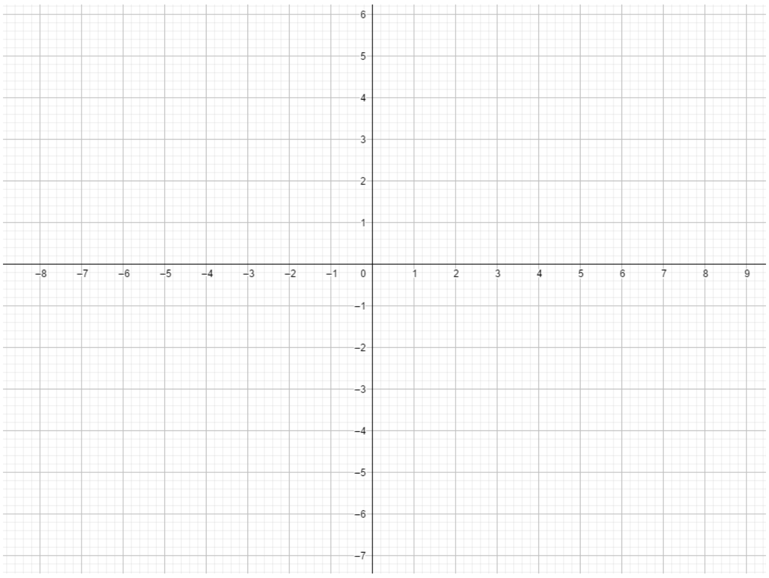

Figura 57. Ejes cartesianos (3)

2. **(2 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = ({}^{-2}/_{3}, 1), \vec{v} = (-4, 7)\ y\ \vec{w} = (2, 1)$.**
   a) **(1 punto) Calcula $\vec{u} - (8\vec{w} - 5\vec{v})$**
   b) **(1 punto) Expresa el vector $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}\ y\ \vec{w}$**

3. **(1 punto) Localiza el punto medio del segmento extremos $A\ (-3, -1)\ y\ B(4, -2)$.**

4. **(1,5 puntos) Sea k un valor real cualquiera. Determinar k para que el ángulo que forma $\vec{u} = (5, -2)$ y $\vec{v} = (-4, \mathrm{k})$ valga:**

   a) **(0,75 puntos) 90º**
   b) **(0,75 puntos) 45º**

5. **(1,5 puntos) Sean los puntos $A\ (-5, -2)\ y\ B(3, 2)$. Halla:**

   a) **(0,5 puntos) Halla la ecuación vectorial de la recta que pasa por ambos puntos.**
   b) **(0,5 puntos) Halla la ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos.**

c) **(0,25 puntos) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por ambos puntos.**
d) **(0,25 puntos) Halla la ecuación explicita e implícita de la recta que pasa por ambos puntos.**

6. **(1 punto) Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y, en caso de haber un punto de corte, indica cuál.**

$$r \equiv \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 - t \end{cases}$$

7. **(2 puntos) Sea el punto $A\ (1, 3)$ y la recta $r \equiv 2x - y - 1 = 0$. Halla:**

a) **(1 punto) La ecuación de la recta paralela a *r* y que pasa por *A*.**

b) **(1 punto) La ecuación de la recta perpendicular a *r* y que pasa por *A*.**

6.9.10. Actividades sesión X

Actividades para aprendizaje basado en problemas

Para estas los alumnos se pueden ayudar para comprobar los resultados con el programa GeoGebra, pero la resolución debe realizarse de manera escrita.

Tres alumnos de tecnología cogen un trozo de cable totalmente recto situado en el plano de coordenadas. Estos estudiantes quieren el cable para realizar un circuito eléctrico y lo deciden dividir en 3 partes iguales, de manera que lo cortan por los puntos $A\ (2, 6)\ y\ B\ (-1, -1)$. Su profesor les pregunta de dónde han cogido el cable de manera inicial, pero no recuerdan los puntos inicial y final del cable. ¿Podrías calcularlos?

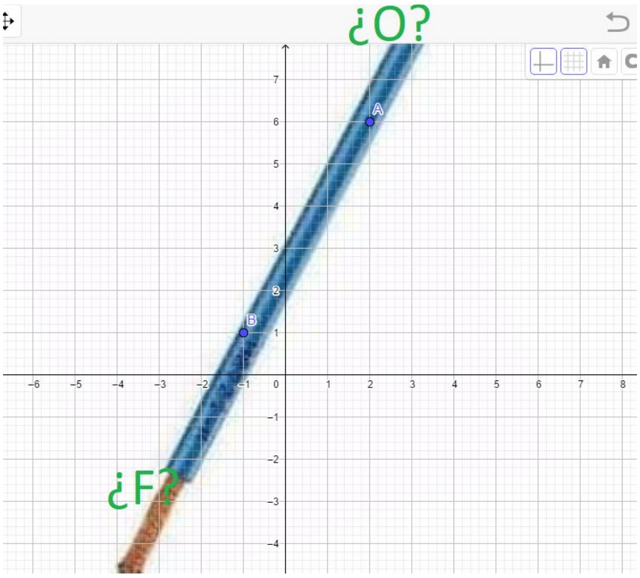

Figura 58. Ilustración ejercicio de cable con GeoGebra

Fuente: https://www.123elec.es/cable-electrico-libre-de-halogenos-por-metro-1-5-h07z1-k-cpr-azul.html?gclid=Cj0KCQjw9b_4BRCMARIsADMUIypB3nGYeSFoamCx7Bh5sZPb-ZskMMFmnx34mfKmYJVEstcK4U8OuooaAh0_EALw_wcB

Solución

Si llamamos $O\ (o_1, o_2)$ el punto de origen del cable y $F\ (f_1, f_2)$ el punto final. Como sabemos que han dividido el cable en 3 partes iguales, la distancia de *A* a *O*, la distancia de *A* a *B* y la distancia de *B* a *F* debe ser la misma. O lo que es lo mismo, el módulo del vector de $\overrightarrow{OA}$ es igual al módulo del vector de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BF}$. Estos vectores, al ser parte de la misma recta, todos son el vector director de la misma y al tener el mismo módulo y dirección, serán exactamente el mismo vector.

Es decir:

$$(2 - o_1, 6 - o_2) = (-1 - 2, -1 - 6) = (f_1 + 1, f_2 + 1)$$

Despejando y resolviendo obtenemos, por un lado

$$\begin{cases} 2 - o_1 = -3 \\ 6 - o_2 = -7 \end{cases}$$

El punto O será $(5, 13)$.

Y, por otro lado,

$$\begin{cases} f_1 + 1 = -3 \\ f_2 + 1 = -7 \end{cases}$$

El punto F será $(-4, -8)$.

En el camino hacia su casa desde el instituto, un estudiante realiza una ruta en línea recta. El estudiante se para a descansar en un parque que se encuentra en el camino. Si el instituto se encuentra en el punto $\boldsymbol{I}$ $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ y el parque en el punto $\boldsymbol{P}$ $(\mathbf{4}, \mathbf{3})$ y sabiendo que la distancia de la casa al instituto es el triple que la distancia del instituto al parque, ¿Dónde se localiza la casa del estudiante?

Figura 59. Ilustración de planteamiento ejercicio del camino

Fuente: https://www.pngegg.com/es/png-zlsjr, http://iesoriberadelcega.centros.educa.jcyl.es/sitio/index.cgi?wid_seccion=32&wid_item=160, https://www.pngwing.com/es/free-png-bhqtq

Solución

Si llamamos C (c_1, c_2) al punto casa del estudiante.

Sabemos que la distancia del instituto a la casa es el triple que la distancia del instituto al parque. Es decir, que el módulo del vector $\overrightarrow{IC}$ es el triple que el módulo del vector $\overrightarrow{IP}$.

$$\left|\overrightarrow{IC}\right| = 3\left|\overrightarrow{IP}\right|$$

$$\sqrt{(c_1-1)^2+(c_2-1)^2} = 3\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}$$

Por otro lado, la recta *r* generada por el estudiante cuándo llega a casa generada por el vector $\overrightarrow{IP}$ y el propio punto *P*, es claro que también pasa por el punto casa.

La ecuación vectorial de la recta antes mencionada:

$$r \equiv (x,y) = P + t \cdot \overrightarrow{IP} \; para \; t \; real$$

$$r \equiv (x,y) = (1,1) + t \cdot (3,2).$$

Pasando a paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+2t \end{cases}$$

Y pasando ahora a la ecuación implícita, despejando e igualando *t* (ecuación continua), y dejando a 0 el segundo término desplazando los miembros al primer término:

$$r \equiv \; -2x+3y-1=0$$

Además, sabemos que el punto *C* pasa por esta recta, es, decir,

$$-2c_1+3c_2-1=0$$

Ahora tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas (c_1 y c_2). Es cierto que una ecuación es de segundo grado, pero este tipo de ecuaciones las vieron en el tema anterior, aunque es cierto que no conocen la interpretación geométrica.

El resultado de resolver este sistema de ecuaciones es el punto $C\ (10, 7)$.

Otra solución más rápida del ejercicio, pero más difícil de notar para los estudiantes.

A partir de la ecuación vectorial de la recta r:

$$r \equiv (x, y) = (1,1) + t \cdot (3,2).$$

Podemos notar que el parque se localiza cuándo $t = 1$, entonces para llegar al parque se tendrá que avanzar el triple, o lo que es lo mismo, triplicar el valor de la *t*. Es decir, el punto *C* quedaría dado por la ecuación

$$C = (1,1) + 3 \cdot (3,2) = (10,7)$$

Unas estudiantes se encuentran dándose un baño en una piscina con forma de triángulo equilátero. Estas alumnas se encuentran en el lado qué más da el sol de la piscina, que se localiza en el tercer cuadrante. Si dos vértices de esta piscina son $\boldsymbol{A\ (-2, 1)}$ y $\boldsymbol{B\ (2, 2)}$. ¿Dónde se sitúa el vértice restante?

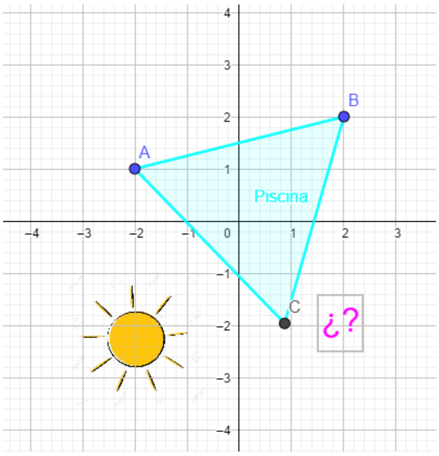

Figura 60. Ilustración planteamiento problema de la piscina

Fuente: https://es.123rf.com/photo_83810299_dibujo-del-icono-del-sol-ilustraci%C3%B3n-vectorial.html

Solución

Si llamamos $C\ (c_1, c_2)$ al tercer vértice de la piscina. La distancia de A a C, la distancia de A a B y la distancia de B a C deben ser iguales debido a que se trata de un triángulo equilátero. Es decir,

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

Con esto podemos deducir un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \end{cases}$$

Saldrán dos soluciones, pero solo con una de ellas sale un triángulo que tenga una parte de sol (tercer cuadrante).

Si hubiera tiempo al final de la clase, me gustaría interpretar geométricamente esta solución. Me gustaría explicarlo aprovechando las nociones de dibujo técnico que conocen los estudiantes de la realización de una mediatriz. Si entienden el significado geométrico del mismo podrán entender que si cogemos la misma distancia del segmento inicial $\overline{AB}$ los arcos de la mediatriz, los cortes (que serían las soluciones del sistema) quedarían a la misma distancia de A y B por definición de mediatriz y además estarían a la distancia $\overline{AB}$ tanto de A como de B por la elección del arco.

Cuestionario final

¿La utilización de GeoGebra te ha motivado a la hora de trabajar y prestar atención en clase?

¿Crees que la utilización de GeoGebra te ha ayudado a asimilar mejor los conceptos?

¿Usar GeoGebra te ayuda a entender mejor la representación geométrica de los conceptos?

¿Te gustaría tratar otros temas de matemáticas con GeoGebra?

¿Te ha gustado usar GeoGebra para aprender?

De manera general ¿Te ha gustado la unidad?

Para la mejora de futuras implementaciones de unidades, ¿Qué aspectos te han gustado más? ¿Mejorarías algún aspecto o te habrías gustado algo en especial?

6.9.11. Actividades de ampliación

1. **Demuestra que los puntos $\boldsymbol{A\ (-3,-2), B(2,-1), C\ (-4,3)\ y\ D(1,4)}$ son los vértices de un cuadrado.**

2. **Sean k_1 y k_2 dos números reales y dados los puntos $A\,(3, k_1)$, $B(-1,2)$, $C\,(3,4)$ y $D(k_2, 5)$. Determina los valores de k_1 y k_2 para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tengan mismo módulo y dirección.**

3. **Tenemos un tablero de ajedrez, si partimos de la casilla 2A y queremos llegar a la casilla 8G. ¿Cuántos movimientos necesitarás con cada pieza para llegar a la casilla final? Realiza el movimiento más corto para llegar con cada figura.**

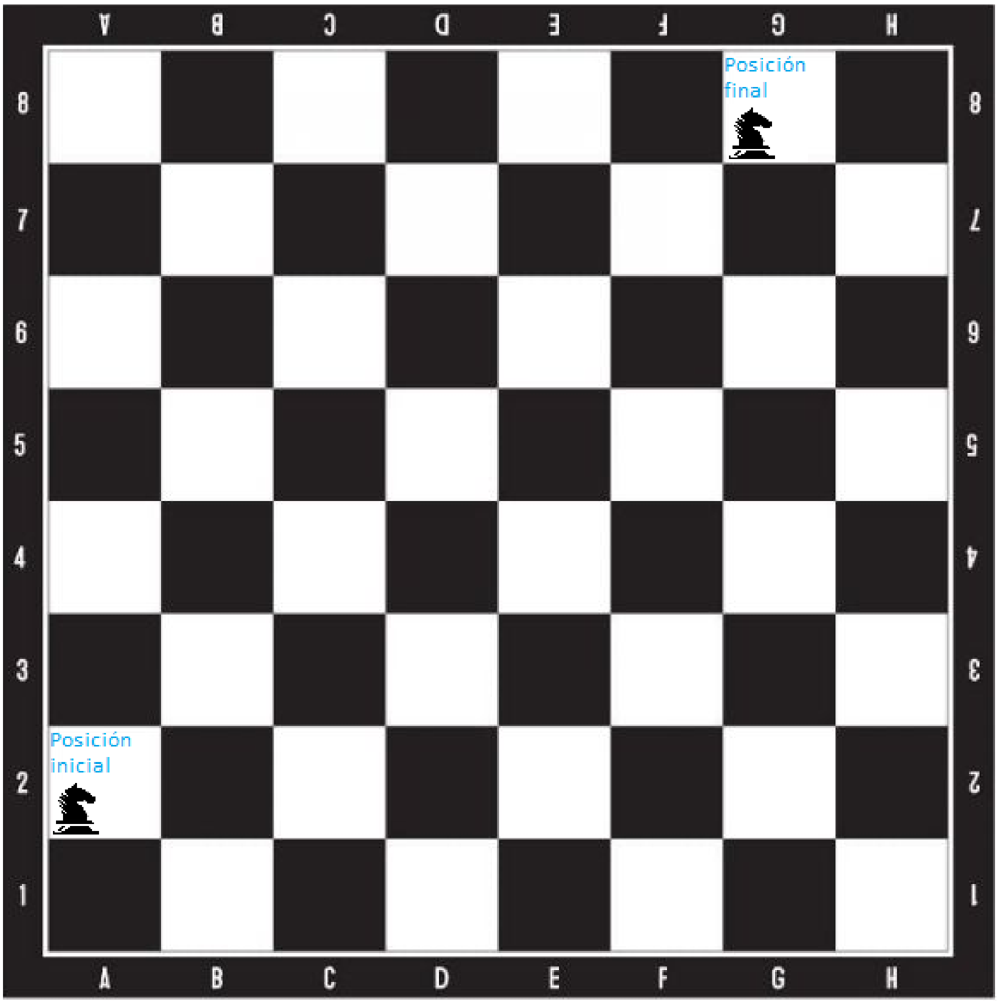

Figura 61. Tablero de ajedrez (2)

Fuente: https://elksport.com/tablero-ajedrez-plastico

https://pixers.es/fotomurales/logo-caballo-de-ajedrez-vector-41918061

4. **Deduce las coordenadas del punto P, que divide al segmento de extremos $A\ (-4,7)\ y\ B(9,-2)$ en dos partes tales que $\overline{AP} = 5\overline{PB}$. ¿Puedes deducir la fórmula para que divida el segmento en n partes?**

5. **Sean los puntos $A\ (-1,4), B(-4,-2),\ y\ C(4,-2)$ los vértices de un triángulo. Calcula el baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro del mismo. (Se pueden ir mandando en ese orden, es decir, si realiza el primero correctamente y tiene tiempo, el siguiente).**

6.10. Material o recurso didáctico

En esta sección se comentan los recursos que se necesitan para aplicar esta propuesta didáctica, divididos en:

RECURSOS PROPIOS DEL ALUMNADO

El alumnado debe disponer de: útiles de escritura, cuaderno de clase, calculadora, libro de la asignatura y teléfono móvil con la aplicación de GeoGebra instalada en el dispositivo.

RECURSOS DEL CENTRO

El centro ofrecerá diversos medios para la realización de las actividades como son: las aulas, el libro del profesor, la pizarra, el aula de ordenadores con conexión a internet para poder acceder al software de GeoGebra de manera online y hojas de actividades.

6.11. Evaluación

Debido a la circunstancia especial del coronavirus no tuve tiempo de evaluar a los alumnos sobre los conocimientos. Partiendo de los objetivos que se plantean, así como de las competencias que se pretenden desarrollar en la presente unidad didáctica se detallan los criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables, criterios de calificación y herramienta de evaluación que nos permiten evaluar los objetivos.

6.11.1. Criterios de evaluación

En este apartado se citan los criterios de evaluación curriculares que se pretende seguir para evaluar que el alumnado haya logrado asimilar en el aprendizaje de la geometría analítica.

Guiándonos por la legislación vigente que queda recogida en Orden EDU 362/2015 BOCYL, del 8 de mayo de 2015, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria, sobre la asignatura de Matemáticas de 4º de ESO, se procede a indicar los criterios de evaluación que se usarán en esta unidad didáctica.

- Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.
- Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
- Utilizar las tecnologías (GeoGebra) de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante

6.11.2. Estándares de aprendizaje evaluables

En este apartado se citan los estándares de aprendizaje que se pretenden seguir para evaluar que el alumnado haya logrado asimilar para lograr el aprendizaje de la geometría analítica.

Basándonos, de nuevo, en la legislación vigente recogida por la Orden EDU 362_2015 BOCYL, del 8 de mayo de 2015, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria, sobre la asignatura de Matemáticas de 4º de ESO, se indica a continuación los estándares de aprendizaje evaluables que se utilizan en esta unidad didáctica.

- Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
- Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.
- Suma, resta y multiplica polinomios, expresando el resultado en forma de polinomio ordenado y aplicándolos a ejemplos de la vida cotidiana.
- Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.
- Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.
- Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.
- Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.
- Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

6.11.3. Criterios de calificación

En este apartado citaré los criterios que pretendo seguir para la evaluación de la unidad didáctica impartida para conocer si los estudiantes han logrado el aprendizaje de la geometría analítica.

- Actitud y participación en clase (25%): Pretendo valorar en este aspecto la participación cuando se realizan preguntas, así como cuando presentan dudas. También se valorará que lleven hechos los deberes y que corrijan los mismos durante la corrección. Además, se valorará la explicación de los problemas en la pizarra.

- Prácticas de GeoGebra (10%): En este apartado se valorarán las dos prácticas pedidas a lo largo de las sesiones. Se valorará la aplicación correcta de GeoGebra y la resolución debida de la parte conceptual de las prácticas.
- Actividad de problemas (15%): Se valorará principalmente la participación en la misma, pero también los razonamientos presentados durante la actividad. (No se valorará como tal el uso de GeoGebra, pero les será de utilidad en la resolución de los problemas, también me serviría de utilidad para conocer la utilidad para los alumnos de GeoGebra como herramienta de ayuda).
- Prueba (50%): El examen que tendrá lugar la última sesión de la unidad didáctica tendrá el mayor peso dentro de la evaluación ya que es donde mejor se demuestran los conocimientos adquiridos.

6.11.4. Herramienta de evaluación

A continuación, se muestra la rúbrica de evaluación para valorar la actitud y participación en clase, las prácticas de GeoGebra y la actividad de problemas que se desarrollan a lo largo de la unidad didáctica.

Tabla 1. Rúbrica de evaluación

	Excelente	**Avanzado**	**Medio**	**Básico**	**Insuficiente**
Participación	Ha participado de manera activa y preguntando las dudas necesarias.	Ha participado de manera activa pero no ha preguntado todas las dudas necesarias.	Ha participado de manera activa pero no siempre y no ha preguntado todas las dudas necesarias	Ha participado de manera breve y no ha preguntado dudas necesarias.	Ni ha participado en clase ni ha preguntado dudas necesarias.
Tareas para casa	Ha realizado todas las tareas pedidas.	Ha realizado más 80% de las tareas pedidas, pero no todas.	Ha realizado entre el 50 y el 80% de las tareas pedidas.	Ha realizado entre el 30% y el 50% de las tareas pedidas.	Ha realizado entre el 0% y el 30% de las tareas pedidas.

Identificación de datos del problema.	Identifica correctamente los datos del problema, organizando los datos y su relación de forma visual y clara	Identifica los datos del problema, los organiza, aunque de una forma poco clara y confusa	Identifica los datos del problema y no los organiza ni establece relación entre ellos	Identifica algunos datos, pero no todos	No identifica los datos de los problemas
Procedimiento utilizado y resultado	Desarrolla el procedimiento detallada y organizadamente, y obtiene el resultado correcto	Desarrolla el procedimiento de forma aceptable pero no bien organizado ni detallado, obteniendo un resultado correcto	Desarrolla el procedimiento de forma aceptable o, pero no está organizado ni detallado, obteniendo el resultado correcto	Desarrolla el procedimiento de forma regular y con ninguna organización, obtiene el resultado correcto	No desarrolla el procedimiento para la resolución del problema y obtiene un resultado incorrecto
Resultado	Identifica y expresa correctamente el resultado obtenido				No se identifica ni expresa correctamente el resultado obtenido
Uso de GeoGebra	Entiende el funcionamiento del programa y resuelve los ejercicios de manera correcta.	Entiende el funcionamiento del programa, pero no resuelve todos los ejercicios de manera correcta.	No entiende del todo el funcionamiento del programa y no resuelve todos los ejercicios de manera correcta.	No entiende gran parte del funcionamiento del programa, y no resuelve muchos de los ejercicios de manera correcta.	No entiende gran parte del funcionamiento del programa, y no resuelve prácticamente ningún ejercicio de manera correcta.

6.12. Evaluación de la actividad docente

En este apartado de la unidad didáctica aportaré la evaluación al docente (en este caso a mí mismo) de la manera de impartir las clases. Para ello me basaré en los resultados y en la opinión de los alumnos en el cuestionario.

Además, si tuviera tiempo me gustaría realizar otro pequeño cuestionario con aspectos que podrían ayudar a mejorar para futuras ocasiones, para ello, se propone que, en la última sesión, los estudiantes respondan por escrito a tres pequeñas cuestiones, que contribuyen a la evaluación y mejora del docente. A continuación, se detallan las preguntas a plantear:

- ¿Te parece que el profesor ha explicado adecuadamente?
- ¿Consideras que ha puesto empeño en sus clases?
- ¿Qué propondrías para mejorar la forma de impartir geometría analítica?

7. Análisis de la Unidad Didáctica presentada

Debido a la crisis por Covid-19 no tuve oportunidad de implementar esta propuesta didáctica en el aula. En una de las primeras clases comenté a los estudiantes que cuando interviniera en el aula iba a realizar unas sesiones de GeoGebra con el ordenador y los alumnos se mostraron entusiasmados con la idea. Además, pregunté en alto que si conocían el programa o alguno similar y su respuesta fue negativa.

Debido a esta situación voy a realizar un análisis de la hipotética implementación y para ello voy a seguir un análisis tipo DAFO (debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades).

7.1. Debilidades

Las principales debilidades hipotéticas que presenta mi propuesta serían las siguientes:

- El libro de texto no permite desarrollar la visión espacial del alumnado, lo que genera mayores dificultades a la hora de preparar el contenido para la representación geométrica.
- He preparado una propuesta didáctica para una clase reducida y aventajada, por lo que hay ciertos contenidos que en otra clase menos excepcional llevaría más tiempo. Es decir, tiene poca transferibilidad.
- La integración de las nuevas tecnologías en el aula, si no se lleva de manera eficiente al aula mediante un estudio correcto de la clase podría ser contraproducente. Si los estudiantes no entienden el programa o lo ven como un enemigo en lugar de como una herramienta de ayuda puede generar lo contrario de lo que se pretende ya que podría generar una desmotivación (Al no haber podido implementar la propuesta, no puedo saber si esto podría haber llegado a suceder).

7.2. Amenazas

La principal amenaza de la implementación que no voy a incluir porque ya la mencioné anteriormente es la falta de implementación debido a una causa externa de fuerza mayor (Covid-19, es decir, que es una implementación hipotética. Dicho esto, las amenazas hipotéticas serían las siguientes:

- El uso de la herramienta software GeoGebra no es contenido obligatorio.
- No todos los centros disponen de medios (aula de ordenadores) para llevar a la práctica la unidad didáctica. En mi caso en particular, solo podría ir al aula de ordenadores un día a la semana.
- Posible falta de medios por parte de los alumnos para desarrollar parte de la propuesta didáctica. En el caso en particular, todos los alumnos tienen smartphone y estaban dispuestos a descargarse la aplicación de GeoGebra y probablemente tuvieran ordenador en sus casas, pero de no ser así habría que cambiar detalles como las prácticas de GeoGebra y las tareas para casa.

7.3. Fortalezas

Las principales fortalezas hipotéticas que presenta mi propuesta serían las siguientes:

- El cambio de metodologías, y más el uso de herramientas como el ordenador, o incluso el teléfono móvil, fomenta el interés y la motivación por la asignatura. Además, al ser ejercicios diferentes, serán menos reacios a realizar las tareas para casa.
- El uso de un recurso dinámico, manipulable y visual como es la herramienta software GeoGebra ayuda a entender la representación geométrica del concepto y, por tanto, generar un mejor aprendizaje.

7.4. Oportunidades

Las principales oportunidades hipotéticas que presenta mi propuesta serían las siguientes:

- Al ser alumnos aventajados, se puede incluir más contenido e intentar avanzar más y aprovechar las nuevas tecnologías para generar un mejor aprendizaje.
- Al ser un grupo reducido, se puede notar cuando un alumno está más avanzado o cuando presentan dificultades. En el segundo caso tratar de resolverlas cuanto antes y en el primero personificar las tareas para que pueda profundizar mejor en los contenidos.
- Los alumnos y alumnas ya me indicaron que disponían de smartphones y que no tenían problema en descargar la aplicación de GeoGebra para trabajar tanto en clase como en casa.

7.5. Síntesis análisis DAFO

En este apartado voy a mostrar un resumen visual de los apartados anteriores mediante la siguiente matriz representada en la Figura 62 como se suele realizar en los análisis DAFO. En dicha matriz, la primera columna corresponde con el análisis interno y la segunda columna con el análisis externo. Además, la primera fila corresponde con los puntos débiles de la implementación y en la segunda fila con los puntos fuertes de la misma.

Figura 62. Matriz análisis DAFO

8. Limitaciones

Por motivos evidentes la mayor limitación fue la crisis debida al Covid-19 que me impidió implementar la propuesta didáctica.

Otra limitación que me surgió fue la disponibilidad del aula de ordenadores a la que solo podía acudir un día de los cuatro que tenía asignados para dar las clases a la semana. Al disponer de las dos últimas semanas acordadas con mi tutora de prácticas para implementar la unidad didáctica sólo podía disponer del ordenador dos días. La solución a esta circunstancia fue que los alumnos se descargarán la aplicación de GeoGebra para sus smartphones a lo cual accedieron tanto los estudiantes como la tutora.

La ausencia de pantalla digital o proyector para explicar los conceptos con GeoGebra también es un problema. La solución buscada fue llevar un portátil y mostrar allí los conceptos que precisaran de GeoGebra, pero esta solución solo es posible debido a que es un grupo reducido.

Por último, comentar una limitación a nivel de investigación. Al ser un grupo excepcional y reducido, este trabajo dispone de una limitación a la hora de transferibilidad del mismo. Es muy difícil que haya grupos de características similares, y, por tanto, dificulta que otros trabajos se puedan beneficiar del mismo.

9. Reflexión y conclusión

Considero que es una propuesta didáctica muy interesante y que puede resultar realmente atrayente para los estudiantes debido a que completa una metodología para trabajar en grupos y sobre todo la inclusión en toda la propuesta de las nuevas tecnologías.

Aunque finalmente debido a causas externas como el Covid-19 y a la anulación de las clases presenciales no he podido implementar la propuesta didáctica que presento, opino de manera rotunda que se debería incluir en el sistema educativo la utilización de las nuevas tecnologías en el aula, y más concretamente el GeoGebra. He realizado esta reflexión debido a la parte de documentación y la lectura de artículos del presente tema en cuestión que he desarrollado y a la consulta que realice a la tutora de prácticas del centro.

Por supuesto, la utilización de estas nuevas tecnologías exige una mayor preparación y, por tanto, se precisa de más tiempo para su elaboración. De no ser así, y no aplicarse de manera correcta los medios tecnológicos disponibles pienso no serán tan eficientes, y pueden llegar a ser contraproducentes. Aún así, si esta unidad didáctica la hubiera podido llevar a la práctica y hubiera tenido éxito pienso que habría llegado a ser muy gratificante y por ello, mi idea si algún día tengo la oportunidad de llegar a impartir la docencia es practicar este tipo de metodologías.

En relación con la consecución de los objetivos planteados en la primera parte del trabajo, se deja constancia de que se han satisfecho, proporcionando una aproximación visual del contenido a través de un software interactivo, que contribuye a la comprensión de conceptos, al establecimiento y contraste de hipótesis, a la atención de las dificultades de aprendizaje y a la motivación del alumnado. Además, se ha un proporcionado un análisis comparativo de los métodos expositivos tradicionales y de resolución de problemas, apoyados en las Tecnologías de la Información y de la Comunicación.

Para concluir, la utilización de medios tecnológicos ayuda a generar motivación y expectación por la asignatura. Y, más en concreto, el GeoGebra es una herramienta potente y visual que relaciona intuitivamente la representación algebraica con la representación geométrica de un concepto matemático. Por lo que este programa bien empleado en secundaria puede ser una herramienta verdaderamente útil.

10. Bibliografía

Almeida, M. (2002). *Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de formación a distancia.* Universidad de Barcelona: Memoria de Tesis doctoral.

Del-Pino, J. (2013). El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. *Probabilidad condicionada: Revista didáctica de la Estadística, 2*, 243-250.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive. *Proceedings of the Annual Meeting of the North, 89*, 1-26.

Duval, R. (2006). La habilidad para cambiar el registro de representación. (M. L. Callejo, Ed.) *La Gaceta de la RSME, 9.1*, 143-168.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). WAYS OF LINKING GEOMETRY AND ALGEBRA. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 126-131.

Huayata Catari, E. W. (2015). *Aplicación del software GeoGebra y su influencia en el aprendizaje de funciones lineales en los estudiantes.* Arequipa, Perú: Tesis doctoral en Universidad Nacional de San Agustín.

Iranzo, N., & Fortuny, J. (2009). LA INFLUENCIA CONJUNTA DEL USO DE GEOGEBRA. *Enseñanza de las ciencias, 27(3)*, 433–446.

Lemos, D. (15 de 11 de 2017). *iChess.es*. Recuperado el 7 de 7 de 2020, de ¿Como se Mueven las Piezas de Ajedrez?: https://www.ichess.es/blog/piezas-de-ajedrez/#:~:text=Esto%20significa%20que%20esta%20pieza,casilla%20en%20la%20direcci%C3%B3n%20contraria.

Liste, R. L. (2008). GEOGEBRA: la eficiencia de la intuición. *La Gaceta de la RSME*(10.1), 223-239.

Material didáctico para MPCL. (s.f.). Obtenido de Importancia del material didácitico en el área de matemáticas: https://sites.google.com/site/materialdidacticoparampcl/home/tangram

Ministerio de Educación | Instituto de Tecnologías Educativas. (s.f.). *GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas*. Recuperado el 16 de 07 de 2020, de La interfaz de GeoGebra: https://geogebra.es/cvg/manual/interfaz/index.html#:~:text=La%20interfaz%20de%20GeoGebra,de%20C%C3%A1lculo%20a%20la%20derecha

Orden EDU 363/2015 de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León [BOCYL] Nº 86. Consejería de Educación. Ciudad, España. 8 de mayo de 2015.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín oficial del estado (BOE). Nº 3. Ministerio de educación, cultura y deporte. Sábado 3 de enero de 2015

Rychen, D. S., & Salganik, L. H. (2003). Key competencies for a successful life and a well-functioning soicety. *OECD Project Definition and Selection Competencies*, 10.

Santana, M. E. (2010). Geometría analítica plana con geogebra. *Didáctica de las Matemáticas*, 131-142.

Anexos

Anexo I. Contenido curricular del BOE

Seguidamente, se exponen los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de geometría y que involucran nuevas tecnologías a lo largo de los cursos de educación secundaria obligatoria recogidos en Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

En los cursos de 3º y 4º de ESO, no he hablado de los contenidos de enseñanzas aplicadas debido a que mi propuesta didáctica se enmarca en las enseñanzas académicas de 4ºESO.

Tabla 2. Contenido curricular Geometría y TICs del BOE

CONTENIDOS CURRICULARES		
Curso académico de 1º y 2º de ESO		
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Geometría		

Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Ángulos y sus relaciones. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades. Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico. Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana. 2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado expresar el procedimiento seguido en la resolución. 3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos. 4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. 5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.).	1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc. 1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos. 1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales. 1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo. 2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas. 2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos. 3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la

	6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.	búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo. 3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales 4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes. 4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza. 5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. 5.2. Construye secciones sencillas de los cuerpos geométricos, a partir de cortes con planos, mentalmente y utilizando los medios tecnológicos adecuados. 5.3. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente. 6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.

TICs		
Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) La recogida ordenada y la organización de datos. b) La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) La elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.

		12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
Curso académico de 3ºde ESO		
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Geometría		

Geometría del plano. Lugar geométrico. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas. Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros. La esfera. Intersecciones de planos y esferas. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas. 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos. 3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. 5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros. 6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. 2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos. 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc. 4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

		4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario. 5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. 5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados. 5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas. 6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.
TICs		

Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos. b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas	11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.

		12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
Curso académico de 4ºde ESO		
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Geometría		

Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad. Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las

		condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.
TICs		
Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a). la recogida ordenada y la organización de datos. b). la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c). facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d). el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e). la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f). comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante,

		con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Anexo II. Contenidos curriculares BOCyL

A continuación, se presentan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de geometría y del uso de las nuevas tecnologías a lo largo de los cursos de educación secundaria obligatoria recogidos en la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

En los cursos de 3º y 4º de ESO, no he hablado de los contenidos de enseñanzas aplicadas debido a que mi propuesta didáctica se enmarca en las enseñanzas académicas de 4ºESO.

Tabla 3. Contenido curricular Geometría y TICs del BOCyL

CONTENIDOS CURRICULARES		
Curso académico de 1º de ESO		
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**

Geometría		
Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Ángulos y sus relaciones. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades. Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Clasificación de triángulos. Rectas y puntos notables del triángulo. Uso de medios informáticos para analizarlos y construirlos. Clasificación de cuadriláteros. Propiedades y relaciones. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.	1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico y abordar problemas de la vida cotidiana. 2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizar el lenguaje matemático adecuado para expresar los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas geométricos. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes y superficies del mundo físico 3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos y aritméticos.	1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc. 1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos. 1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales. 1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo. 2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas. 2.2. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.

		2.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas 3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo. 3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.
Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos mediante tablas. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos (gráficas de funciones, diagramas de sectores, barras…). c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico;	9. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, inicialmente de manera guiada, realizando cálculos básicos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 10. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante	9.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos básicos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 9.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 9.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

d) la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	9.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 10.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación) inicialmente de manera guiada, como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 10.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 10.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico.
Curso académico de 2º de ESO		
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Geometría		

Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Cálculo de áreas y perímetros. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas. Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes en el mundo físico	1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana. 2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizar el lenguaje matemático adecuado para expresar los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas geométricos 3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos. 4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. 5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.).	1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc. 1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos. 1.3. Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales. 1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo. 2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas. 2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular, y las aplica para resolver problemas geométricos. 3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la

	6. Resolver problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico, utilizando propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros.	búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo. 3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales 4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes. 4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza. 5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado. 5.2. Construye secciones sencillas de los cuerpos geométricos, a partir de cortes con planos, mentalmente y utilizando los medios tecnológicos adecuados. 5.3. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente. 6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.

TICs		
Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) La recogida ordenada y la organización de datos. b) La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos (gráficas de funciones, diagramas de sectores, barras, histograma…). c) Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d) El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) La elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, hojas de cálculo, imagen, video, sonido…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión.

		12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.
Curso académico de 3ºde ESO		
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Geometría		
Geometría del plano. Lugar geométrico. Mediatriz, bisectriz, circunferencia. Otros lugares geométricos que den lugar a rectas, segmentos y arcos de circunferencia. Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas. Aplicación a la resolución de problemas. Movimientos del Plano: Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Elementos dobles o invariantes. Reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y la naturaleza. Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas. Geometría del espacio. Poliedros. Planos de simetría en los	1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas, y reconocerlos en la realidad. 2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.	1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos. 1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos. 2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas. 2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y

poliedros. Fórmula de Euler para los poliedros simples. Poliedros regulares, poliedros duales. Cilindro, cono, tronco de cono y esfera. Intersecciones de planos y esferas. Cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Contextualización en la realidad. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.	3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimientos en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. 5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros. 6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. 2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos. 3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc. 4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. 4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario. 5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales. 5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados. 5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas,

		poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas. 6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.
TICs		
Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos mediante tablas. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos (gráficas de funciones, diagramas de sectores, de barras, de caja y bigotes histogramas y polígonos de frecuencias…). c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico;	11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos	11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para

d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos; f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	apropiados para facilitar la interacción.	mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades,
Curso académico de 4ºde ESO		
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Geometría		
Radián. Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Relaciones métricas en los triángulos. Razones trigonométricas de ángulos agudos y de ángulos cualesquiera. Relaciones entre ellas. Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, opuestos y que se diferencian en uno y dos rectos. Resolución de triángulos rectángulos	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales. 2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas en situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.

y oblicuángulos aplicando trigonometría elemental. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes. Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Iniciación a la geometría analítica en el plano: coordenadas. Vectores. Definiciones geométricas y analíticas de las operaciones: suma de vectores y producto de número por vector. Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua y general o implícita. Paralelismo, perpendicularidad: condiciones de las coordenadas de los vectores. Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.	adecuadas y aplicando las unidades de medida. 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas. 3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.
TICs		

Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos (gráficas de funciones, diagramas de distintos tipos…). c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, hojas de cálculo, imagen, video, sonido…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula.

		12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.