UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales y de la Matemática

Análisis del estudio de la geometría del triángulo en la educación secundaria.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Adriano Citoler Serrat
Tutor: José Cano Torres

Valladolid, Mayo-Junio de 2020

Índice de contenido

1.- Introducción y Antecedentes.

En el presente TFM se va a estudiar la geometría del triángulo en la educación secundaria. El acercamiento y análisis del problema se va a realizar desde varios puntos de vista.

1. Desde un punto de vista histórico, se contemplará como se abordó el acercamiento a la geometría y a las matemáticas desde la Prehistoria, pasando por todas las épocas hasta la actualidad.
2. Euclides que vivió en Alejandría durante el reinado de Ptolomeo I, realizó el primer acercamiento a la geometría desde un punto de vista riguroso en su obra Los Elementos. Es posible que no fuese quien realizase por primera vez todas las demostraciones recogidas en su obra, pero por lo que sí tiene crédito es por ser la primera persona que realizó una recopilación, organización y exposición del material. Material que fue y ha llegado hasta nuestros días como la piedra angular en torno a la que gira la construcción de la geometría.

   Posteriormente muchos matemáticos, o grupos de matemáticos, han construido la geometría euclídea de una forma más rigurosa, haremos un repaso también sobre los diferentes tipos construcciones axiomáticas de la geometría.
3. Asimismo, se hará un repaso por las teorías de acercamiento al proceso de educación-aprendizaje que se han formulado a lo largo de la historia.

   Primeramente desde un punto de vista psicológico en el que hay dos ramas diferenciadas.

   La mecanicista, o conductista, que dice que el organismo es pasivo, el aprendizaje viene condicionado por el ambiente, las leyes del aprendizaje se pueden aplicar a todas las especies, toda conducta se puede reducir a una serie de asociaciones simples. En definitiva, el sujeto es pasivo y no es tenido en cuenta para la adquisición del aprendizaje.

   Y la Organicista, o cognitivismo, hay interacción entre las variables ambientales y personales, hay un procesamiento de la información entre el estímulo y la respuesta, lo interesante es el proceso no tanto la conducta. Básicamente pone al alumno en el centro del aprendizaje.

   Y posteriormente, desde un punto de vista didáctico, mencionando los principales métodos didácticos utilizados en la actualidad y por otro lado, diferentes clasificaciones para clasificar los objetos de la educación en función de su nivel de dificultad. Taxonomía de Bloom, niveles de demanda según Stein & Smith
4. Se tiene en cuenta los antecedentes de los trabajos realizados previamente en esta área del conocimiento y con intención de llegar un poco más lejos en esta área del conocimiento. En particular el TFM *Fundamentos de la geometría desde un punto de vista axiomático* de Elena Domínguez Campillo.
5. Por último, se va a realizar un análisis de una colección de libros de secundaria, en particular, de la editorial Marea Verde. Con dos ideas, el análisis de la presentación de la teoría por un lado y de los

problemas presentados en esa colección de libros.

El análisis se realizará teniendo en cuenta las teorías didácticas y psicológicas presentadas y la fidelidad a los sistemas axiomáticos de la geometría y los niveles de dificultad de la didáctica. Se intentará ilustrar como se está enseñando la geometría a los alumnos de secundaria y bachiller y plantear algunos ejercicios o actividades que aporten su granito de arena para intentar mejorar la calidad de los contenidos.

2.- Marco teórico y Objetivos.

El marco teórico que engloba los fundamentos de este trabajo es multidisciplinar y aquí voy a presentar los distintos aspectos que se tienen que tener en cuenta para abordar el problema objeto de este trabajo.

En el libro *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro de Edgar Morín (2000)* se desgranan siete saberes fundamentales que la educación del futuro debería tratar, en cualquier sociedad y sean cuales sean sus antecedentes culturales.

1. Las cegueras del conocimiento: el error y la ilusión.
2. Los principios de un conocimiento pertinente.
3. Enseñar la condición humana.
4. Enseñar la identidad terrenal.
5. Enfrentar las incertidumbres.
6. Enseñar la comprensión.
7. La ética del género humano.

El texto de Edgar Morín nos da un marco filosófico sobre el futuro, los problemas y las dificultades de la condición humana y nos da un marco global válido para cualquier sociedad y cualquier cultura del mundo para afrontar la educación en el futuro.

Un texto más concreto son *Los cuatro pilares de la educación de Jacques Delors (1994)*, que se estructura en cuatro líneas de educación básicas.

1. Aprender a conocer. A conocer el mundo en su simplicidad y en su complejidad, desarrollando estrategias para aprender a aprender. Sus teorías, sus realidades...
2. Aprender a hacer. Tiene un enfoque más profesional, aunque no sólo profesional, aprender a resolver problemas, a desarrollar pensamiento para afrontar la vida tanto profesional como individualmente.
3. Aprender a vivir juntos, aprender a vivir con los demás. A entender al otro, sea de tu cultura o de otra diferente, siempre desde el respeto y la comprensión.
4. Aprender a ser. Comprender la identidad individual y la colectiva, cuestionarse los paradigmas establecidos y desarrollar un pensamiento propio.

Este texto concreta de una manera precisa y muy didáctica cuales deben ser las aspiraciones del docente con respecto a los alumnos y nos da una guía clara para formar personas saludables y con espíritu crítico, a la vez que solidarias. Presenta un ideal de la clase de formación que se tiene que dar a los alumnos.

Otro texto, que recoge lo indicado por Jacques Delors y lo concreta aún más, de hecho aparece en la ley española, es las *7 competencias básicas indicadas en el artículo 2 de la Orden ECD 65/2015* que son:

1. Comunicación lingüística.
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
3. Competencia digital.

4. Aprender a aprender.
5. Competencias sociales y cívicas.
6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
7. Conciencia y expresiones culturales.

Estas siete competencias básicas, sumarizan y concretan lo expresado por Jacques Delors en su artículo, llegando a una guía más concreta de las competencias deseables que debe adquirir cualquier alumno.

Estos tres artículos, presentan los marcos y los conocimientos/competencias que es deseable que los alumnos aprendan.

Ahora bien, entrando más en concreto, el proceso de Educación-Aprendizaje, se puede enfocar desde dos áreas del conocimiento, el psicológico y el didáctico.

2.1.- Área psicológica.

Ha habido dos principales paradigmas para explicar el aprendizaje desde el ámbito psicológico:

- Conductismo.
- Constructivismo.

El conductismo se basa en los siguientes enfoques,

- Nacemos sin conocimientos y todo lo obtenemos mediante mecanismos asociacionistas.
- No contempla los procesos mentales. Sólo estudia la conducta observable.
- El organismo es pasivo: el aprendizaje viene condicionado por el ambiente (mecanicismo).
- Las leyes del aprendizaje son aplicables a todas las especies
- Toda conducta, por compleja que sea, puede ser reducida a una serie de asociaciones entre elementos simples.

El principal paradigma del conductismo es que cualquier individuo o animal puede aprender cualquier cosa si se le presentan los estímulos básicos. Trata al sujeto del aprendizaje como un sujeto pasivo.

Los referentes del conductismo son el conductismo clásico (Pavlov) aplicado básicamente para animales, el condicionamiento operante (Skinner) que introduce el reforzamiento-penalización de una conducta y por último el aprendizaje vicario (Bandura), que presenta la figura del modelo a seguir.

El paradigma conductista está superado y se prefiere el constructivista, ahora bien, hay ciertos rasgos que permanecen, por ejemplo el uso del refuerzo-castigo, en determinadas ocasiones.

El constructivismo, por el otro lado, plantea un enfoque radicalmente opuesto de la educación. El alumno se convierte en el centro de la enseñanza, no con mostrar los conocimientos, cada alumno los asimila y los construye a su manera. Existen como principales exponentes,

- Piaget, teoría genética del aprendizaje, cuya principal idea es que cuando un nuevo concepto que no encaja en el esquema preexistente, entra a formar parte del conocimiento del alumno, éste, tiene que reestructurar lo que ya conocía para darle a cabida al nuevo concepto, haciendo así un ejercicio que consolida el conocimiento.

- Brunner, aprendizaje por descubrimiento, se desea que el alumno sea una parte activa de su aprendizaje orientándole a descubrir los nuevos conocimientos y haciendo un esfuerzo para integrarlos en los preexistentes.
- Ausubel, aprendizaje significativo, se presentan los nuevos conceptos con una estructura clara y un sentido lógico, los cuales el alumno los integrará en los conocimientos preexistentes.
- Vigotsky, teoría contextual, establece dos niveles, lo que el alumno puede aprender sin ayuda que es su nivel real y lo que puede alcanzar con ayuda, nivel potencial.

Se puede decir, que el alumno debe ser el actor principal en su propia enseñanza (adquisición de conocimientos). Que es tan importante el contenido como los procesos de aprendizaje y evaluación. El papel del alumno es aprender a aprender lo que se reforzará con el paso del tiempo (a más capacidad de aprender, más autonomía y más capacidad de aprender) es una especie de círculo virtuoso. Y por último el papel del docente es el de mediador, en el sentido de que facilita los medios al alumno para aprender.

También cabe reseñar que los alumnos de secundaria están en un momento del desarrollo de la personalidad, físico e intelectual. Se encuentran en un momento de efervescencia con muchos cambios en muchos niveles, a nivel de desarrollo social, autoconocimiento, autoestima, identidad personal, empatía, capacidad de juicio moral... Pero también se produce una maduración física, el paso del niño al adulto, que conlleva no sólo el crecimiento físico sino el desarrollo intelectual, a lo largo de estos años se van desarrollando la capacidad de pensamiento abstracto, de formular hipótesis, desarrollo de la memoria, suposiciones.
El docente tiene que tener todos estos cambios que se están produciendo en los alumnos.

2.2.- Área didáctica.

La didáctica de la matemática se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas así como los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos. La didáctica de la matemática tiene como objeto delimitar y estudiar los fenómenos que se presentan durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático (Rico, Sierra & Castro, 2000).

Por la definición de este trabajo, en esta apartado del estudio se centrará en la idea de crear tareas matemáticas, para ello vamos a incorporar la ideas del artículo Smith, Margaret Schwan, and Stein, Mary Kay. (Febrero 1998) “Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice.” *Mathematics Teaching in the Middle School* 3: 344–50.

¿Cuáles son las características de una clase que hace que los estudiantes vean las matemáticas de una manera diferente y que es lo que aprenden? ¿Son los grupos pequeños? ¿Trabajo orientado a proyectos? ¿Es la naturaleza de las tareas que se les proponen?. Desde este TFM se pretende dar respuesta a la última pregunta. Así según Smith & Stein, hay cuatro niveles de demanda cognitiva,

1. Memorización.
   Implica reproducir fórmulas o hechos..., identificar objetos o definiciones de memoria.
   No son ambiguas. Implica reproducir lo que se ha establecido de una manera clara anteriormente.
2. Procedimientos sin conexiones a conceptos o significados.
   Son algorítmicas, se aprende un procedimiento y se reproduce. Se centran en conseguir respuestas correctas. No requiere explicaciones.
3. Procedimientos con conexiones a conceptos y significados.
   El uso de los procedimientos tiene como objetivo el desarrollo de conocimientos más profundos de conceptos e ideas matemáticos.
   Normalmente se presentan de diferentes maneras, diagramas, tablas, texto, símbolos, al hacer las conexiones entre éstas se desarrolla conocimiento matemático.
   Se pueden usar los procedimientos estudiados, pero requiere un esfuerzo para saber cuál es el apropiado en cada momento.
4. Hacer matemáticas.
   Requiere pensar fuera de los procesos algorítmicos, el camino para la resolución de la tarea no está marcado ni es claro.
   Requiere exploración y entendimiento de los conceptos, procesos o relaciones.
   Requiere el análisis de la tarea para ver si se pueden limitar las posibilidades, además de hacer un análisis crítico de los resultados.

Estas son algunas de las características de los niveles de demanda cognitivos según Smith & Stein.
Hay un comentario significativo de Stein & Lane (1996), sugiere la importancia de comenzar con tareas de alto nivel cognitivo (puntos 3 o 4) si se quiere que los alumnos desarrollen la capacidad de pensar, razonar y solucionar problemas.

3.- Sistemas axiomáticos en la geometría.

Para desarrollar este apartado voy a seguir el libro, Venema, A. (2012). *Foundations of Geometry. Second Edition.* Boston, U.S.A. Pearson.

3.1.- La estructura de un sistema axiomático.

Un sistema axiomático tiene cuatro partes, que vamos a desarrollar a continuación.

Términos indefinidos y términos definidos.

La primera parte de un sistema axiomático son los términos indefinidos, o primitivos. Estas constituyen las palabras técnicas que se usarán en el sistema. Un diccionario, por ejemplo, parece tener todos los términos definidos, pero sin embargo habrá cierta circularidad en las definiciones. Por tanto, se plantean unos términos indefinidos que sean obvios para todos, y partiendo desde ellos se construirá todo el sistema. Así pues, los términos definidos, están construidos solamente desde los términos indefinidos sin hacer ninguna suposición extra.

Axiomas o postulados.

Los axiomas son afirmaciones que se aceptan sin prueba, están en el núcleo del sistema, todo lo demás en el sistema debe deducirse lógicamente desde estos.

Teoremas y pruebas.

Los teoremas y la prueba de estos, son la parte más larga de un sistema axiomático, y siguen una estricta organización lógica. Así pues, el primer teorema tiene que probarse usando sólo los axiomas. Para el segundo teorema se pueden utilizar los axiomas y el primer teorema y así sucesivamente se va construyendo el sistema.

Modelos e interpretaciones.

En un sistema axiomático, los términos indefinidos no tienen un significado definido en si mismos, únicamente lo que está explícitamente indicado en los axiomas.

Por tanto, una interpretación del sistema axiomático es una forma de darle significado a los términos indefinidos. Y una interpretación se llama modelo si los teoremas deducidos son ciertos para esa interpretación. Y ya que los teoremas se han deducido lógicamente de los axiomas únicamente, sabemos que los teoremas serán ciertos en todos los modelos.

Se dice que una afirmación es independiente de los axiomas si es imposible afirmarla o negarla a partir de los axiomas.

Los axiomas se dice que son consistentes si no se puede llegar a ninguna contradicción lógica desde ellos. Una propiedad que se quiere para todos los sistemas axiomáticos.

3.2.- Sistema axiomático de Euclides.

El proceso de introducir lógica dentro de la geometría comenzó con Tales de Mileto, alrededor del 600 a.C. y se culminó con el trabajo de Euclides de Alejandría sobre el 300 d.C. La "geometría euclídea" probablemente no se originó con él mismo, pero su contribución fue organizar y presentar los resultados de la geometría griega de una manera lógica y coherente. Y publicó sus resultados en una serie de 13 libros conocidos como "Los Elementos", que es la obra con más ediciones después de "La Biblia".

Resulta casi imposible cuantificar la importancia de "Los Elementos de Euclides" para el desarrollo de las matemáticas y de la cultura humana en general. Se convirtieron en el modelo para el desarrollo de las teorías científicas. Asombra la claridad con la que los expuso y en base a la pura lógica dedujo una gran variedad de conclusiones.

Sin afán de mostrarlo completamente, voy a enunciar algunas partes del Sistema Axiomático de Euclides.

Axiomas o postulados.

- Postulado 1. Se puede trazar una línea recta de cualquier punto a cualquier punto.
- Postulado 2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una linea recta.
- Postulado 3. Se puede trazar un circunferencia con cualquier centro y radio cualquiera.
- Postulado 4. Todos los ángulos rectos son iguales.
- Postulado 5. (postulado de las paralelas) si una línea recta corta a otras dos lineas rectas, y hace que los ángulos interiores en el mismo lado menos que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortan en el lado en el que están los ángulos que son menos de dos ángulos rectos.

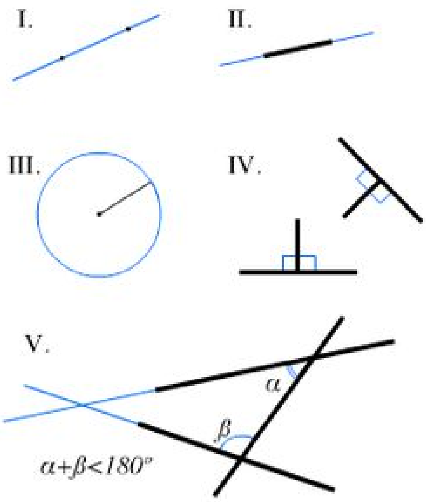


Ilustración 1: Prueba gráfica de los 5 postulados de Euclides. wikipedia.org

<u>Nociones comunes.</u>

- NC1. Cosas que son iguales a la misma cosa también son iguales entre sí.
- NC2. Si a cosas iguales añadimos la misma cosa, los totales también son iguales.
- NC3. Si a cosas iguales les sustraemos lo mismo, lo que queda también es igual.
- NC4. Cosas que coinciden con otra son iguales entre sí.
- NC5. El todo es más grande que la parte.

Con todo esto establecido (postulados, nociones comunes y definiciones) Euclides desarrolla todo su cuerpo de proposiciones y teoremas, establecidos con una demostración lógica que constituye lo que conocemos como “Geometría Euclidiana”.

3.3.- Otros sistemas axiomáticos para la geometría euclidiana.

Los dos mil años de esfuerzo para entender el lugar del quinto postulado de Euclides en los fundamentos de la geometría resultaron en más que el descubrimiento de que el V postulado es independiente de los otros. También se obtuvo un punto de vista de lo que un sistema axiomático debe contener.
El moderno tratamiento de la geometría, se formuló con un mayor número de axiomas que los que utilizó Euclides. Sigue sin haber pleno acuerdo en como los axiomas de la geometría plana se deben formular.
Hoy en día se sabe que el sistema axiomático de Euclides no contiene todas las suposiciones necesarias, hay acuerdo en que faltan tres tipos básicos de información en el modelo de Euclides.
La primera, hace falta una suposición que garantice que las lineas y círculos son continuos y que no tienen agujeros, es la asunción de completitud.
Proposición 1. Dado un segmento construir un triángulo equilátero.
Con centro A y radio AB se construye la circunferencia c y con centro B y radio AB se construye la circunferencia d. Ya que A es el centro de c entonces AC y AB son iguales y por similar razón BA y BC son también iguales y por tanto AB, AC y BC son iguales. Por tanto el triángulo ABC es equilátero.
Con la salvedad que se ha enunciado arriba, de los axiomas enunciados por Euclides no se deduce que c y d se

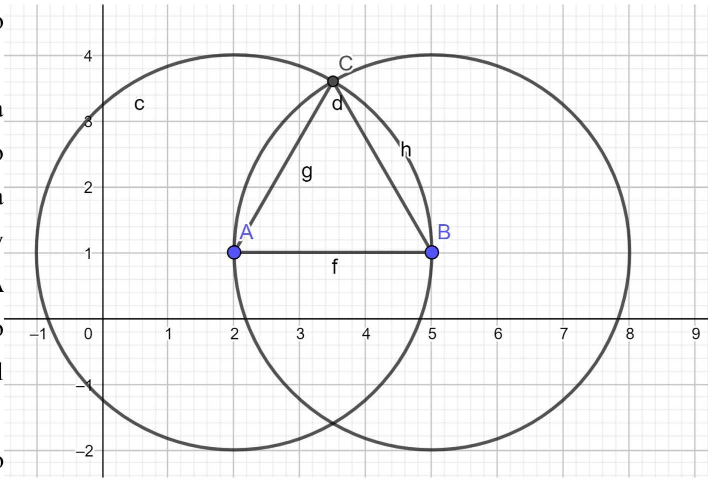


Ilustración 2: Proposición 1. Elementos de Euclides. geogebra.org.

corten en C.

La segunda, hace falta una asunción que nos permita mover triángulos en el plano.
La tercera, se necesita una asunción que gobierne cuando un rayo está entre otros dos rayos o un punto está entre otros dos puntos.

Hay dos maneras de salvar estas dificultades para conseguir un conjunto completo de axiomas.
La primera es fijar los axiomas que resuelvan estas dificultades en términos puramente geométricos, dos matemáticos han desarrollado un sistema axiomático de esta manera y son David Hilbert (1899) y Oswald Veblen (1904).
La segunda manera de organizar los fundamentos de la geometría se debe a George David Birkhoff en los años 1930, la idea es basar los axiomas de la geometría en el conocimiento previo de los números reales. De esta manera, todas las propiedades de los números reales se pueden usar para la construcción del sistema axiomático de la geometría, (el orden, la completitud...). La geometría construida de esta manera con los números reales, se llama geometría métrica porque los números reales se usan para medir ciertas cantidades geométricas.

3.3.1.- Sistema axiomático de David Hilbert.

El sistema de David Hilbert, es más extenso que el planteado por Euclides, como se deduce de lo anterior.

Términos Indefinidos.

- Punto.
- Línea.
- Plano.
- Estar sobre (incidencia).
- Entre.
- Congruencia (relación de equivalencia).

Axiomas
Axiomas de incidencia (8 en total)

- AI-1. Para cada dos puntos distintos A, B existe una línea l que contiene los puntos A, B.
- AI-2. Para cada dos puntos distintos A, B existe una única línea que contiene a los puntos A, B.
- AI-3. Existen al menos dos puntos en una línea. Existen al menos tres puntos que no están sobre una

línea.

- AI-8. Existen al menos cuatro puntos los cuales no están sobre un plano.

Axiomas de orden (4 en total)

- AII-1. Si un punto B está entre un punto A y un punto C, entonces A, B y C son tres puntos distintos de una línea y B también está entre C y A.

Axiomas de congruencia (5 en total)

- AIII-5 (ó Lado-Ángulo-Lado(LAL)). Si para dos triángulos ΔABC y ΔA'B'C', las congruencias

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \text{ y } \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \text{ y } \angle BAC \cong \angle B'A'C' \Rightarrow \angle ABC \cong \angle A'B'C'$$

Axioma de las paralelas (1 en total)

- AIV-1.Sea l cualquier línea y A un punto que no está sobre l. Entonces hay una única línea en el plano, determinada por l y A, que pasa por A y no intersecta a l

Axiomas de continuidad (2 en total)

- AV-1. (Axioma de medida o Axioma de Arquímedes). Si AB y CD son cualesquiera segmentos, entonces existe un número n tal que n segmentos CD construidos contiguamente desde A, a lo largo del rayo desde A a través de B, sobrepasarán el punto B.

Esta es una relación no completa de los axiomas de Hilbert, son 20 en total, con este sistema axiomático, Hilbert construyó la geometría euclidiana.

3.3.2.- Sistema axiomático de George David Birkhoff.

Los axiomas de Birkhoff se publicaron en *Annals of Mathematics* en 1932.
El uso del sistema de los números reales consigue reducir drásticamente el número de axiomas necesarios.

Términos indefinidos.

- Punto.
- Linea.
- Distancia.
- Ángulo.

Axiomas.

- Postulado de la medida de la linea. Los puntos A, B, … de cualquier línea l se pueden poner en correspondencia (1,1) con los números reales x de tal manera que

$$|x_B - x_A| = d(A, B) \ \forall \ A, B$$

- Postulado del punto y la línea. Dados dos puntos P y Q distintos existe una única recta l que los contiene a ambos.
- Postulado de la medida de ángulo. Las medias líneas (o rayos) l, m,... desde cualquier punto O se pueden poner en correspondencia (1,1) con los números reales **a (mod 2π)** tal que si A es distinto de O y B es distinto de O y son puntos en l y m respectivamente, la diferencia a_m-a_l (mod 2π) es el ángulo AOB. Además, si el punto B en m varía continuamente en una linea r que no contiene al vértice O, el número a_m también varía continuamente.

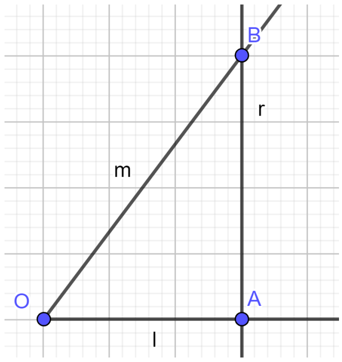


Ilustración 3: Postulado de la medida de ángulo. geogebra.org.

- Postulado de similaridad. Si en dos triángulos ΔABC, ΔA'B'C', y para alguna constante k>0,

$$d(A',B') = k \cdot d(A,B) \ y \ d(A',C') = k \cdot d(A,C) \ y \ \angle B'A'C' =_{-}^{+} \angle BAC \Rightarrow d(B',C') = k \cdot d(B,C) \ y \ \angle C'B'A' =_{-}^{+} \angle CBA; \ y \ \angle A'C'B' =_{-}^{+} \angle ACB$$

El postulado de similaridad de Birkhoff implica el postulado 5 (o de las paralelas de Euclides) y también el axioma AIII-5 (o LAL) de Hilbert.

3.3.3.- Sistema axiomático SMSG (The School Mathematics Study Group).

Los sistemas axiomáticos clásicos (o más rigurosos) tienen la dificultad de que hay que hacer muchas demostraciones las cuales muchas de ellas son obvias para poder comenzar con la demostración de otros resultados que no son tan obvios.

Con esta idea se creo SMSG, dar un número de axiomas, que aunque sea superior al necesario, hay axiomas redundantes (que se pueden demostrar a partir de otros) y una segunda idea es que fuese asequible su comprensión por parte de los alumnos de secundaria.

Se partió de los sistemas axiomáticos de Birkhoff y MacLane para su enunciado. Tiene componentes que son puramente geométricos y también tiene componentes que están basados en la geometría métrica (o en las propiedades de los números reales).

Así, al igual que los otros sistemas axiomáticos, parte de,

Términos indefinidos.

- Punto.
- Linea.
- Plano.
- Estar sobre.
- Distancia.
- Medida de ángulo.
- Área.
- Volumen.

Axiomas o Postulados.

Se mencionarán algunos a modo de ejemplo, hay un total de 22.

- P1. (El postulado de incidencia). Dados dos puntos diferentes, hay una única línea que los contiene a ambos. Que aparece exactamente el mismo postulado en otros sistemas axiomáticos.
- P2. (El postulado de la distancia). Para cada par de puntos corresponde un único número positivo.
- P9. (El postulado de la separación del plano). Dada una línea y un plano que la contenga, los puntos del plano que no están sobre la línea forman dos conjuntos tal que,
  - Cada conjunto es convexo.
  - Si P está en un conjunto y Q en el otro, entonces el segmento **PQ**, intersecta la línea.
- P15. (El postulado LAL). Dada una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y el mismo). Si dos lados y el ángulo incluido son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia es una congruencia.
- P16. (El postulado de las paralelas). A través de un punto externo hay como mucho una línea paralela a una línea dada.
- P17. (El postulado del área). A cada región poligonal le corresponde un único número.
- P22 (El principio de Cavalieri). Dados dos sólidos y un plano. Si cada plano paralelo que intersecta los sólidos y es paralelo al plano dado y las dos intersecciones tienen la misma área, entonces los dos sólidos tienen el mismo volumen.

4.- Análisis textos Marea Verde.

En este apartado vamos a proceder a la recopilación de información, estudio y análisis de los texto seleccionados, en este caso de la editorial Marea Verde.

Los libros que se van a analizar corresponden a los libros de Matemáticas de 1º y 2º de ESO y los libros orientados a las ciencias aplicadas de 3º y 4º de ESO y Matemáticas I y Matemáticas II de Bachillerato.

Los libros se descargaron de la página web de la plataforma el día 5 de Mayo de 2020 adjunto el enlace http://www.apuntesmareaverde.org.es

Se va presentar una descripción de contenidos de los Bloques de Geometría correspondientes en cada libro, prestando atención a la introducción de los conceptos, en particular, como se introduce el triángulo, los problemas propuestos y como todos los aspectos anteriores se relacionan con los sistemas axiomáticos que fundamentan la geometría.

Se realizarán comentarios que se subrayan en *cursiva*, para una mayor claridad.

4.1.- 1º ESO. Matemáticas 1º de ESO.

En este libro el bloque de geometría consta de los siguientes temas:

- Sistemas de medida.
- Figuras planas. Polígono, círculo y circunferencia.
- Longitudes y áreas.

4.1.1.- Capítulo 7. Sistemas de medida.

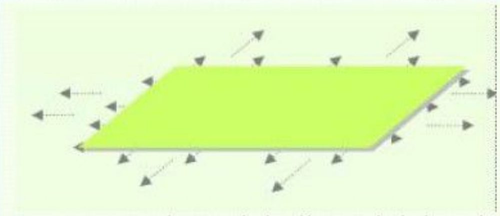
Hace una introducción al Sistema Internacional de unidades de medida, repasando otras unidades de medida también. Longitudes, superficies, volúmenes, masa, temperatura,...

En este capítulo está implícita la idea de conmensurabilidad y completitud de los números reales, es decir, que a partir de una unidad fijada que represente una cierta propiedad o dimensión, cualquier cantidad sobre esa propiedad se puede expresar como una cantidad multiplicada por la unidad tomada como patrón. Yendo más lejos, es una proporción de la misma. Con este concepto se introducen implícitamente las ideas de conmensurabilidad y completitud que se reflejan en los sistemas axiomáticos.

4.1.2.- Capítulo 8. Figuras planas.

Definiciones de puntos, rectas, semirrectas y segmentos, bastante ajustadas a las definiciones de los sistemas axiomáticos, como se ve en el extracto del libro de la siguiente figura. Sigue con definiciones de rectas paralelas, secantes y coincidentes.

El elemento más sencillo del plano es el **punto**. El signo de puntuación que tiene este mismo nombre sirve para dibujarlo o también un pequeño círculo si queremos destacarlo. Es muy útil nombrarlo y para ello se utilizan letras mayúsculas A, B, C, …



Imagina que cada uno de los límites de la hoja de tu cuaderno, de la pizarra o de cada una de las paredes de la habitación en la que estás, se prolonga indefinidamente sin cambiar su inclinación o posición. Los objetos resultantes serían ejemplos de planos.

Para representarlos y estudiar bien sus elementos, nos quedaremos solo con una parte de cada uno. Por ejemplo, en los casos anteriormente citados, con la misma hoja, la pizarra o la pared tal como las vemos.

Al igual que el punto, **la recta** es un objeto elemental del plano. Constituye una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección. Las rectas se nombran con letras minúsculas *r, s, t,…*

Una **semirrecta** es cada una de las partes en las que queda dividida una recta por un punto que pertenece a ella. El punto se denomina origen. Las semirrectas se nombran con letras minúsculas o referenciando su origen: semirrecta de origen O, semirrecta *p*, …

Un **segmento** es la porción de recta comprendida entre dos puntos de la misma. Los puntos se llaman extremos. Los segmentos se nombran mediante sus extremos, por ejemplo: segmento $\overline{AB}$ o segmento de extremos A, B.

Ilustración 4: Latasa, M. (2020). Matemáticas 1º ESO. apuntesmareaverde.org.es

Definición de ángulo como, se llama ángulo *a la región del plano delimitado por dos semirrectas con origen común. Las semirrectas que lo limitan se llaman lados y el origen vértice*.

Nombra los diferentes tipos de ángulos, agudo, obtuso, recto. Ángulos según su posición, consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice.

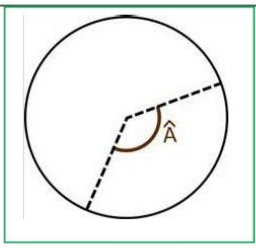
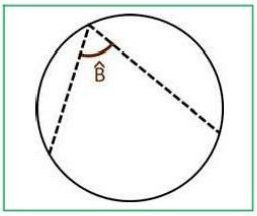
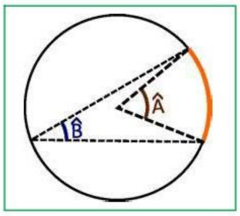
Medida de ángulos en el sistema sexagesimal. Operaciones con ellos.

Ángulos complementarios y suplementarios.

Indicando que los primeros suman 90º y los segundos 180º. En este caso está implícito el V Axioma de Euclides (o de las paralelas en el resto de sistemas axiomáticos), aunque es un resultado que desde nuestro mundo físico, el que estamos acostumbrados a experimentar, resulta evidente.

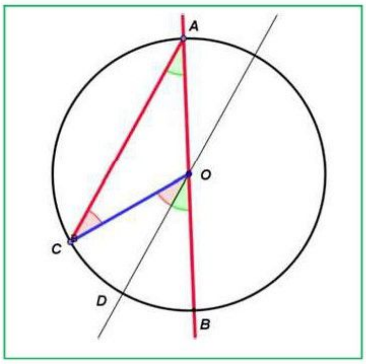
Se habla también de ángulos de la circunferencia, el central y el inscrito, presentando la siguiente demostración gráfica, que tiene profundidad y a la vez es muy visual y comprensible por los alumnos.

En una circunferencia tienen especial importancia los **ángulos centrales** (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los **ángulos inscritos** (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

		
Ángulo central	**Ángulo inscrito**	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

Demostración:



Trazamos un ángulo inscrito en la circunferencia *CAB* que tenga un lado que pase por el centro *O* de la circunferencia. Trazamos su central *COB*. El triángulo *OAC* es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por *O* una recta paralela a *AC*. El ángulo *CAO* es igual al ángulo *DOB* pues tienen sus lados paralelos. El ángulo *ACO* es igual al ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo *CAO* por ser el triángulo isósceles. Por tanto, el central mide el doble que el ángulo inscrito.

Ilustración 5: Latasa, M. (2020). Matemáticas 1º ESO. apuntesmareaverde.org.es

Definiciones mediatriz, bisectriz, y otros elementos del triángulo.

Se han ido planteando problemas y se han resuelto ejercicios encaminados a la familiarización con los nuevos conceptos, con cuestiones como identifica, calcula,... Y finalmente hay un apartado con geogebra en el que se proponen y resuelven ejercicios del mismo tipo.

<u>*Polígonos.*</u>

Polígonos y lineas poligonales definidas a partir de la definición de segmento, de una forma rigurosa. Elementos de los polígonos, lados, vértices, ángulos y diagonales. Clasificación de polígonos, o bien, cóncavos o convexos, o por su número de lados, triángulos, cuadriláteros,... Y finalmente, polígonos regulares.

<u>Círculo y circunferencia.</u>

Circunferencia *es una línea cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un punto interior a la misma llamado centro* y Círculo, *la porción de plano delimitada por una circunferencia*.

Elementos de una circunferencia, centro, radio, diámetro, cuerda y arco. Y elementos del círculo, segmento circular, arco circular y corona circular. Semicírculo como un sector circular particular.

Posiciones entre recta y circunferencia, tangente, secante o exterior. Y por último, algunas propiedades de la circunferencia, como que por ejemplo la recta tangente a la misma es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

Triángulos.

Se presentan como un polígono de tres lados, que se ha definido antes, y se clasifican por tres lados iguales, dos lados iguales o ningún lado igual y por los ángulos. También se dan varias propiedades fundamentales de un triángulo.

- La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.
- En un triángulo cualquier lado es siempre menos que la suma de los otros dos y menor que su diferencia. (así se garantiza que es un polígono y no una linea poligonal)

Y se presentan rectas y puntos notables del triángulo, medianas, bisectrices, alturas y mediatrices.

Y se sumarizan las cuatro rectas notables con sus centros en la ilustración que se acompaña.

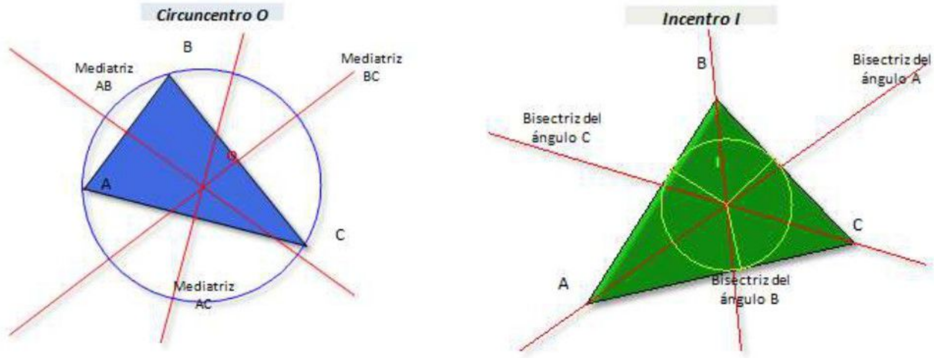
Igualdad de triángulos, en este apartado se presentan los criterios de igualdad de triángulos. Siendo rigurosos, debería hablarse de congruencia de triángulos, aunque se sacrifica la rigurosidad por un lenguaje más cercano y comprensible hacia los alumnos.

Y se realiza la construcción gráfica del triángulo en tres casos. En el caso que tengan los tres lados iguales, dos lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ellos y tienen un lado igual adyacente a dos ángulos también iguales.

Se habla de igualdad de triángulos y se dan los tres criterios para comprobar que un triángulo es igual a otro. Tres lados iguales LLL, dos lados y el ángulo entre ellos LAL o dos ángulos y su lado ALA. Estos tres criterios son equivalentes y se pueden demostrar uno a partir del otro.

De hecho Euclides demuestra LAL en la proposición IV del libro I. Mientras que es un axioma en los demás sistemas axiomáticos.

Ejemplo:



Se llama **altura** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

Las tres alturas de un triángulo se cortan en el **ortocentro.**

Se llama **mediana** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. El punto de corte de las medianas se llama **baricentro**.

Ejemplo:

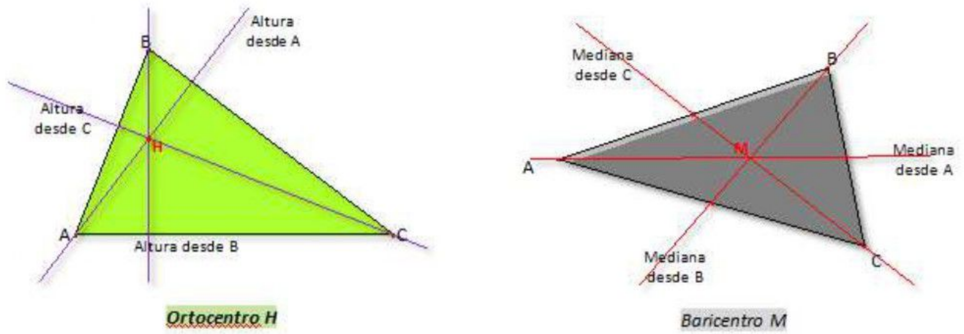


Ilustración 6: Latasa, M. (2020). Matemáticas 1º ESO. apuntesapuntesmareaverde.org.es

<u>Cuadriláteros.</u>

Se presenta como un polígono de cuatro lados, ya que se ha definido en apartados anteriores. Y los clasifica entre cóncavos y convexos, para a continuación hacer la clasificación de los cuadriláteros convexos.

Indica que hay cuadriláteros paralelogramos, con ángulos y lados iguales dos a dos, (cuadrado, rectángulo, rombo y romboide) y no paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Se indican algunas propiedades de los cuadriláteros, entre otras, que la suma de sus ángulos es de 360º y se hace una demostración gráfica dividiendo el cuadrilátero por una de sus diagonales, obteniendo dos triángulos que cada uno suma 180º y por tanto queda demostrada la propiedad.

Al final del capítulo, en el apartado Revista y Curiosidades, habla de diferentes tipos de presencia de los polígonos en los diseños de construcción, de mapas,... también habla de mosaicos como todo recubrimiento del plano con piezas que no pueden dejar huecos ni superponerse, define el mosaico regular que está formado por polígonos regulares todos iguales indicando que sólo hay tres posibilidades e invita al alumno a encontrarlas.

Y se hace la siguiente mención a Euclides, que corresponden con definiciones del sistema axiomático de la geometría de Euclides.

Los problemas planteados, al igual que en el capítulo anterior están orientados a afianzar y relacionar los conceptos introducidos, identifica y clasifica las siguientes figuras y problemas de hallar la incógnita que falta cuando se han dado las demás como datos.

EUCLIDES, UN GRAN GEÓMETRA

En el siglo III a. C. Euclides enseñaba Matemáticas en la escuela de Alejandría. Su obra principal fueron Los Elementos, que han sido durante siglos la base de la geometría.
Las aportaciones más interesantes de Euclides fueron definiciones y postulados como éstos:

"Un punto es aquello que no tiene partes"
"Una línea es una longitud sin anchura"
"Las extremidades de una línea son puntos"

Ilustración 7: Latasa, M. (2020). Matemáticas 1º ESO. apuntesmareaverde.org.es

4.1.3.- Capítulo 9. Longitudes y Áreas.

<u>Perímetros y Áreas de polígonos.</u>

No se plantea siquiera hablar de unicidad de área, se da por supuesto. Esta es una propiedad de la superficies poligonales que se deducen en la geometría euclidiana. En los postulados de SMSG, se enuncia en el número 17 que para cada región poligonal le corresponde un único número positivo.

Define perímetro de una figura plana como la suma de las longitudes de sus lados y área de una figura plana como lo que mide la región limitada por los lados de la figura.

Se pasan a definir las áreas del cuadrado y del paralelogramo como l^2 y b*h respectivamente, el área del triángulo y el área del trapecio, rombo y romboide con las fórmulas conocidas sin demostración geométrica. Sin embargo, cuando se introduce el área del polígono regular indica que todos los polígonos regulares se pueden dividir en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono de donde se deduce la fórmula a partir del área del triángulo (semiperímetro*apotema). Para calcular el área de los polígonos irregulares igualmente por triangulación.

Y por último algunas ideas sobre cálculo de perímetros de polígonos.

Perímetros y áreas de figuras circulares.

Empieza definiendo π, como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. De donde el perímetro es inmediato, está implícito, y también dice que π es un número irracional. Y también se da la fórmula para el cálculo de la longitud de un arco de circunferencia como la parte proporcional entre el ángulo α que abarca el ángulo y 360º, es decir, α/360º. Un problema de este bloque con contenido histórico y gusto por las matemáticas, *Antiguamente se definía el metro como la diezmilllonesima parte del meridiano que pasa por París, según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?*.

A continuación se pasa a definir el área del círculo, y se indica que el área del círculo se puede imaginar como el área de polígonos regulares inscritos en la circunferencia de radio r, con cada vez más lados. Y así, semiperímetro * apotema.

$$\frac{2\pi r}{2} r \Rightarrow \pi r^2$$

Con lo que tenemos una demostración intuitiva del área del círculo. Que supone una aproximación al calculo infinitesimal para los alumnos.

Y a partir de aquí se hallan las fórmulas para la corona circular, como sustracción entre dos círculos concéntricos y del sector circular como la parte proporcional del ángulo con respecto a 360º como se ha hecho antes con la longitud del arco.

Y por último, se plantea este problema de la medida de el radio de la tierra y esta nota histórica sobre los primeros hallazgos de π.

En este apartado los problemas son del tipo calcula utilizando las fórmulas que hemos deducido y definido.

Medida del radio de la Tierra.

Eratóstenes de Cirene estimó, de forma muy precisa para su época, el radio de la Tierra. Para ello debió medir con cuidado longitudes (entre la ciudad de *Syena* cerca de *Assuan* y *Alejandría*), ángulos (del Sol en el solsticio de verano). Como ese ángulo era 1/50 de la circunferencia determinó que el radio de la Tierra era 50 veces la distancia calculada.

El número π (PI)

Es un número sorprendente con infinitas cifras decimales no periódicas.
Su rastro más antiguo se encuentra en el Papiro de Ahmes donde se le da un valor de 3.16.
Arquímedes lo valoró como 22/7 que es 3.1429.
Actualmente, con ayuda del ordenador, se calculan más y más de sus cifras decimales. En 2009 se hallaron más de dos billones y medio de decimales

Ilustración 8: Latasa, M. (2020). Matemáticas 1º ESO. apuntesmareaverde.org.es

4.2.- 2º ESO. Matemáticas 2º de ESO.

En este curso el bloque de geometría consta de los siguientes capítulos, en los que se afianza y expande lo ya impartido en el curso anterior.

- Sistemas de medida.
- Longitudes y áreas. Semejanza.
- Cuerpos geométricos. Volúmenes.

4.2.1.- Capítulo 5. Sistemas de medida.

Se habla de la necesidad de un sistema de medidas standard para todo el mundo. Hay ejemplos múltiples en la historia de lo dificultoso que resultaban los intercambios comerciales y la comunicación cuando había múltiples sistemas de medidas para todo, peso, dinero, longitudes,...

Define el término magnitud como una característica de un cuerpo, sustancia o fenómeno físico que se puede medir y expresar cuantitativamente, es decir, mediante un número.

También indica que si queremos poder entendernos con la gente cuando hablamos de las magnitudes todos necesitamos hablar de lo mismo, es decir, tenemos que adoptar la misma unidad de medida para cada una de las magnitudes fundamentales y se introducen el kilogramo, el metro y el segundo como algunas de las unidades de medida del Sistema Internacional.

Se introducen las longitudes, superficies y volúmenes, se enseña como se opera con esas magnitudes, como se pueden hacer cambios de unidades, por ejemplo, de centímetros a metros, de litro a m³...

Se hace algo parecido con las unidades de masa, el kilogramo.

Se habla de el sistema sexagesimal, como se opera en este sistema, indicando que el tiempo no se rige por el sistema decimal sino por el sexagesimal.

Y por último, se habla de unidades monetarias y las transformaciones de unas a otras utilizando una proporción.

> La primera *definición* de **kilogramo** se decidió durante la Revolución Francesa y especificaba que era la masa de un dm³ (un litro) de agua destilada al nivel del mar y 3.98 grados centígrados.
>
> Hoy se define como la masa que tiene el prototipo internacional, compuesto de una aleación de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

Ilustración 9: Suberbiola, P.L.(2020) Matemáticas 2º ESO. apuntesmareaverde.org.es

En este capítulo con los cambios de medidas y los diferentes sistemas de medidas se introducen igualmente y de manera implícita las ideas de conmensurabilidad (dado un patrón, todo se puede medir con él) y completitud de medidas es una propiedad de los números reales. En este punto se puede introducir a los alumnos las diferentes formas de construir la geometría, puramente con conceptos geométricos o desde la geometría métrica como hizo G.D. Birkhoff.

4.2.2.- Capítulo 6. Longitudes y Áreas. Semejanza.

Teorema de Pitágoras.

Se introduce el Teorema de Pitágoras y se plantea la demostración geométrica de la suma de los cuadrados de los lados a modo puzzle, es una demostración muy gráfica y visualizable por parte de los alumnos.

Semejanza.

Dice que dos figuras son semejantes si sus longitudes son proporcionales y sus ángulos iguales. Y lo particulariza para el caso de los triángulos como se ve en la siguiente figura. Se dan varios criterios de semejanza para triángulos que son:

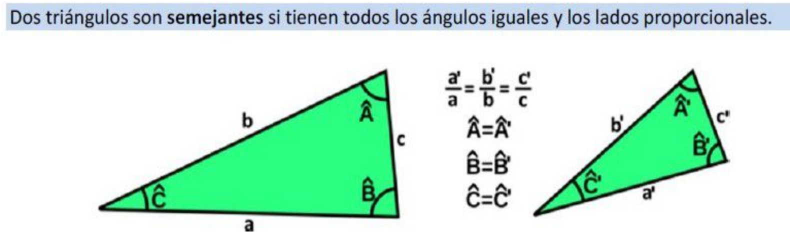


Ilustración 10: Suberbiola, P.L.(2020) Matemáticas 2º ESO. apuntesmareaverde.org.es

- tienen dos ángulos iguales.
- tienen los tres lados proporcionales
- y el tercero, tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

Los criterios de semejanza de triángulos tienen que nacer necesariamente de los criterios de igualdad de los triángulos, los cuales se enunciaron en el curso anterior. Para extender el concepto de igualdad de triángulos a semejanza de triángulos una herramienta perfecta es el Teorema de Tales, que se enuncia a continuación.

Hay un apartado de triángulos en posición de Tales y se pasa a enunciar el Teorema de Tales. Que se refleja en el gráfico siguiente.

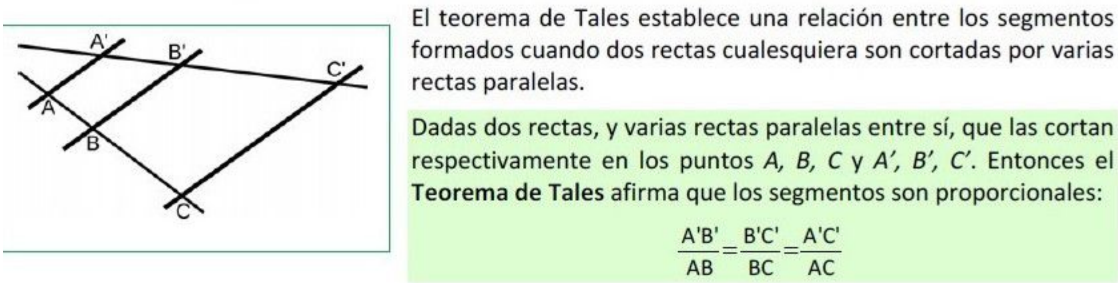


Ilustración 11: Suberbiola, P.L.(2020) Matemáticas 2º ESO. apuntesmareaverde.org.es

Se pasa a introducir las razones de semejanza entre longitudes superficies y volúmenes. Se hace con un cuadrado de lado l y lado 2l y con un cubo de lado l y lado 2l.

Desde los dibujos y algebraicamente se deduce que están en proporción k, k^2 y k^3, para longitudes, áreas y *volúmenes, respectivamente.*

Se pasa a hablar de mapas y escalas y su relación con la semejanza que se acaba de explicar y de como transformar una medida en un plano o una fotografía si sabemos la escala con la que se hicieron.

Se repasa todo lo explicado en el curso anterior sobre áreas de cuadriláteros, triángulos, polígonos regulares e irregulares, y también sobre perímetros de circunferencias, arcos y áreas de círculos, sectores de círculos, coronas de círculos. Se plantea una pequeña actividad utilizando geogebra para averiguar el valor de π, comparando el perímetro de una circunferencia con su diámetro.

El tema termina con algunas referencias históricas al Teorema de Pitágoras. En particular, se remarca ésta, hablando de la cuerda de los 13 nudos que es una introducción a las ternas pitagóricas así como a una situación práctica de uso de las matemáticas y también que el resultado del Teorema de Pitágoras ya era conocido antes de que el autor del que lleva su nombre hubiese nacido, debiéndose a los pitagóricos su demostración y formalización.

No se dice explícitamente, pero la forma de construir la semejanza de los triángulos se ajusta a los sistemas axiomáticos. Congruencia de triángulos y proporcionalidad. Y se construye desde los sistemas axiomáticos geométricos puros o desde la geometría métrica introducida por Birkhoff.

Los problemas vuelven a ser de cálculo, utilizando las formas introducidas en el tema así como de identificar para afianzar conceptos y de aplicaciones de polígonos y figuras planas, mosaicos, frisos,...

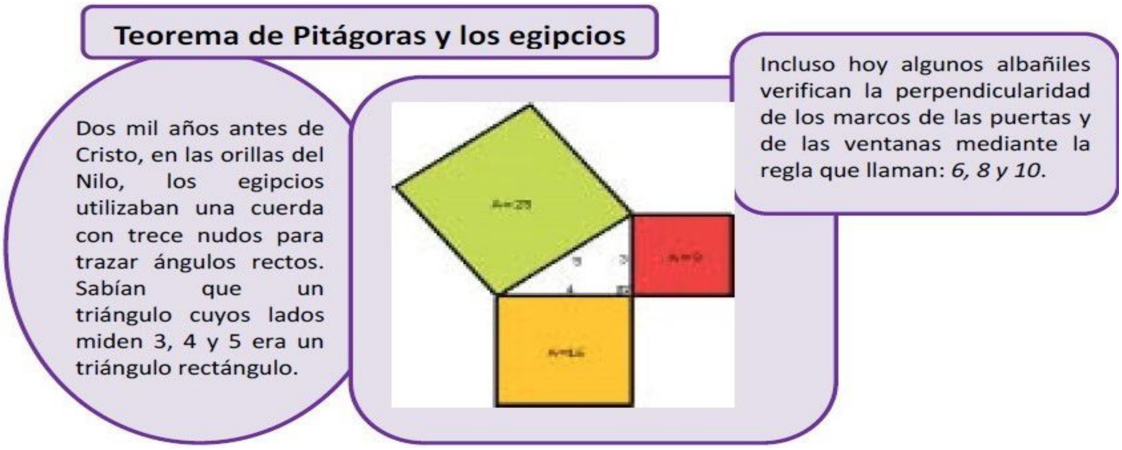


Ilustración 12: Suberbiola, P.L.(2020) Matemáticas 2º ESO. apuntesmareaverde.org.es

4.2.3.- Capítulo 7. Cuerpos geométricos. Volúmenes.

<u>El espacio.</u>

Hace una introducción de la idea de espacio. Tiene tres dimensiones, ancho, largo y alto. Se acerca a distintos objetos cotidianos que tienen formas geométricas, envases de conservas, de leche, una rosquilla... y algunos otros ejemplos.

Para pasar a los conceptos de punto, recta y plano de una forma intuitiva, observando tu habitación. Para luego hablar de las posiciones relativas entre planos, paralelos o secantes y la posición relativa entre rectas en el espacio, paralelas, se cortan o se cruzan. Ambos temas de una manera intuitiva.

Hay otro apartado de representación de cuerpos geométricos del espacio en el plano, un buen ejemplo son los planos de construcción de múltiples objetos o edificios que usan en la vida cotidiana, piezas industriales, catedrales o edificios (planta, alzado y perfil).

Poliedros.

Se define el poliedro regular como aquel que todas sus caras son polígonos regulares y en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Se presentan los únicos 5 poliedros regulares y se plantea su construcción con papel a partir de una figura plegable.

Se habla de prismas, su clasificación, que muchos de los rascacielos tienen forma de prisma de base cuadrada. Se buscan formas prismáticas en la naturaleza, etc.

Pirámides con un discurso parecido, troncos de pirámides.

Superficies de poliedros.

También se introducen los cilindros y los conos de forma análoga a los prismas y las pirámides. Y se habla de la esfera relacionándola con el globo terráqueo.

Y se dan las fórmulas de áreas y volúmenes de cilindros, conos y esferas.

Los problemas son de cálculo, asimilación y comprensión de los conceptos explicados. Por ejemplo, ¿por qué no existe un poliedro regular cuyas caras sean hexágonos regulares.

4.3.- 3º ESO. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

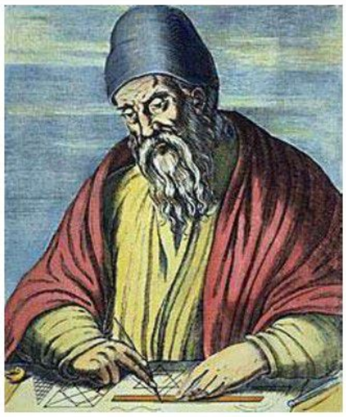
En el bloque de geometría de 3º ESO volvemos a tener 3 capítulos

- Revisión de geometría en el plano.
- Movimientos en el plano y en el espacio.
- Revisión de geometría en el espacio. Globo terráqueo.

4.3.1.- Capítulo 7. Geometría del plano.

El capítulo comienza enunciando los 5 axiomas de Euclides y se le sitúa como el referente histórico que fue capaz de realizar por primera vez una construcción de la geometría plana, por medio de la lógica, el rigor, y el razonamiento.

Tales, Pitágoras y muy posteriormente Euclides son matemáticos griegos a los que debemos el estudio de la Geometría deductiva. Anteriormente egipcios y babilonios utilizaron la Geometría para resolver problemas concretos, como volver a poner lindes a las tierras después de las inundaciones del Nilo. Pero en Grecia se utilizó el razonamiento lógico para deducir las propiedades. Euclides intentó recoger el conocimiento que existía y escribió *Los Elementos* que consta de 13 libros o capítulos, de los que los seis primeros tratan de Geometría Plana, y el último de Geometría en el espacio. En este libro define conceptos, tan difíciles de definir como punto o recta, y enuncia los cinco axiomas (de Euclides) de los que parte como verdades no demostrables, y a partir de ellos demuestra el resto de las propiedades o teoremas. Estos axiomas son:



Euclides

1. Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada.
3. Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dada una recta y un punto, se puede trazar una única recta paralela a la recta por dicho punto.

En este capítulo vamos a recordar cuestiones que ya conoces de Geometría en el plano, profundizando en algunas de ellas, como en los criterios de semejanza de los triángulos. De este modo vas a ser capaz de resolver un buen número de problemas.

Ilustración 13: Suberbiola, P.L. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

El bloque de geometría del plano comienza con esta viñeta hablando un poco de la historia de la geometría en el plano. Y la concluye con el enunciado de los 5 axiomas de Euclides, en los que basó la construcción de la “geometría euclidiana”.

<u>Lugares geométricos.</u>

El apartado comienza definiendo algunos lugares geométricos.

La circunferencia, es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un mismo punto (centro) es un valor determinado (el radio).

La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan a los extremos del mismo.

Dado un ángulo delimitado por dos rectas, la bisectriz del ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las mismas.

Rectas notables y puntos del triángulo, se hace un repaso a lo visto en el curso anterior. Mediatrices, circuncentro; bisectrices, incentro; alturas, ortocentro; medianas, baricentro. Define las circunferencias circunscrita e inscrita. Y enuncia la existencia de la recta de Euler, *en cualquier triángulo el circuncentro, el ortocentro y el baricentro, están sobre una misma línea a la que se denomina recta de Euler. Esta recta* *contiene otros puntos notables. El incentro está en dicha recta sólo si el triángulo es isósceles.*

Finalmente en este apartado, se plantea una actividad mediante el uso de geogebra para la construcción de todas las rectas y puntos notables de un triángulo general hasta hallar finalmente la recta de Euler.

Semejanza.

Se plantea a modo de repaso, de la misma manera que se planteó en el curso de 2º de ESO. Ver el apartado del curso anterior.

La semejanza se construye desde la igualdad de triángulos o congruencia, y con el Teorema de Tales se establece la proporcionalidad entre los lados de los triángulo y de allí la semejanza.

Ángulos, longitudes y áreas.

Se enuncia el Teorema de Pitágoras, y se da una de las conocidas demostraciones geométricas del mismo.

*Se pasa a enunciar el resultado de que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180º y se extiende a que la suma de los ángulos de cualquier polígono de n lados es (n-2)*180º y se presenta la siguiente demostración geométrica, para el caso particular de un pentágono, pero que es fácilmente generalizable para cualquier otro polígono, como se puede ver intuitivamente. Esto es únicamente cierto para geometría euclidiana, y también suponer que la suma de los ángulos de un triángulo sea 180º es equivalente que aceptar el postulado de las paralelas de Euclides.*

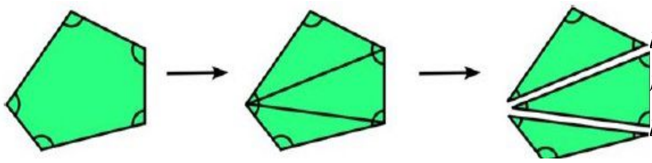


Ilustración 14: Suberbiola, P.L. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

Y por último plantea una tabla resumen con la áreas y perímetros de varios polígonos ya conocidos (triángulo, cuadrado, rectángulo, polígono regular de n lados, rombo, trapecio,...)

Se habla de los ángulos de la circunferencia, ángulos central e inscrito y se introduce y demuestra la propiedad, *ángulo central=2*ángulo inscrito*, con la misma demostración que se planteó en el curso anterior. Longitudes y áreas de figuras circulares que también se presentan como en el curso anterior. Se comienza definiendo π, como el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro y se plantea el cuadro resumen que se ve en la siguiente figura.

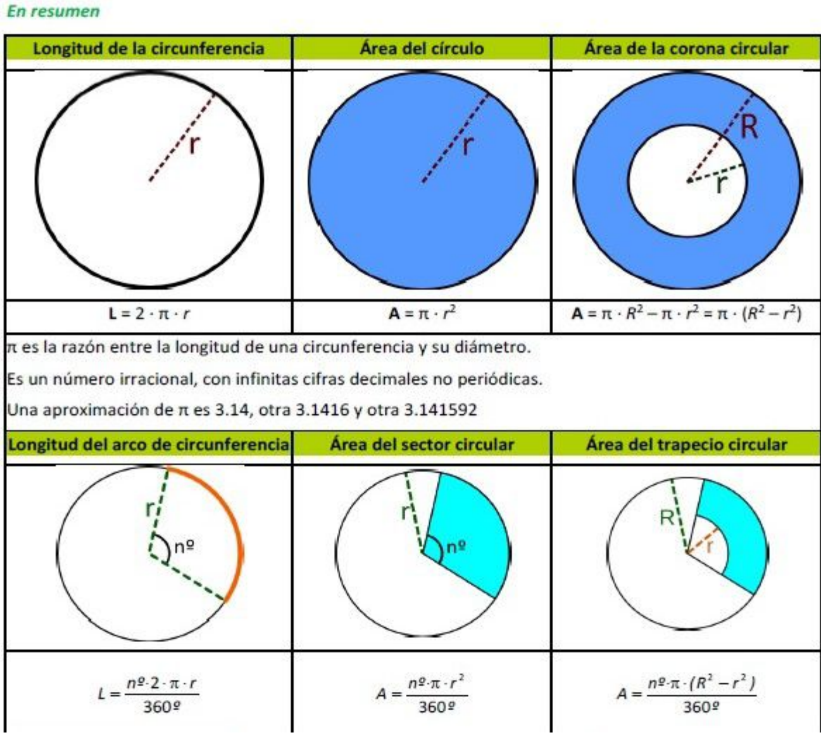


Ilustración 15: Suberbiola, P.L. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

Se plantean problemas de cálculo de la magnitud desconocida dadas otras magnitudes utilizando las fórmulas introducidas, también hay problemas de asimilación de los conceptos introducidos y también de razonar y relacionar, como por ejemplo, el siguiente:

Tales observó que el circuncentro de cualquier triángulo rectángulo siempre estaba en el punto medio de la hipotenusa, observa la figura y razona la afirmación.

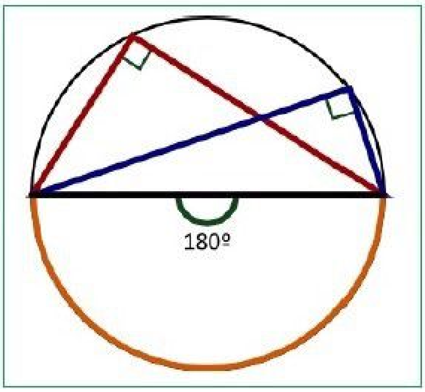


Ilustración 16: Suberbiola, P.L. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

En este capítulo se han repasado conceptos ya introducidos en cursos anteriores y en particular el de semejanza, como ya se dijo en los comentarios sobre la semejanza del curso anterior se puede construir puramente desde la geometría o desde la geometría métrica (la estructura de los números reales).

4.3.2.- Capítulo 8. Movimientos en el plano y en el espacio.

Transformaciones geométricas.

Introduce las transformaciones geométricas con un ejemplo. Imagina que estás mirando un mapa con el móvil, puedes moverte a través de él, girarlo. Siendo el mapa básicamente siempre el mismo. Estas manipulaciones son las transformaciones geométricas, ya que mantienen las propiedades geométricas más básicas: longitudes, áreas y ángulos.

Isometrías.

Viene del griego Iso=igual, metrías=medidas, por tanto, igual medida. Así que en el ejemplo del móvil con el mapa, siempre que no se haga zoom, se estará realizando una isometría. Y así de una forma intuitiva y familiar se acerca a los alumnos a este concepto.

Y define isometría de la siguiente manera: Las isometrías, (movimientos o congruencias), son transformaciones que conservan ángulo y distancias (aunque no tienen porque conservar la orientación de los ángulos). Las isometrías en el plano son las traslaciones, los giros y las simetrías.

Isometrías directas, giros y traslaciones. Isometrías inversa, las simetrías, en las que se conservan distancias y ángulos pero no se pueden superponer, por ejemplo, las manos.

Y las semejanzas, cuando se amplia o reduce una imagen, siguiendo con el ejemplo del móvil, en las que se conservan los ángulos y la proporcionalidad entre las distancias, pero no las distancias.

También se indica que las transformaciones geométricas introducidas se pueden componer, dando lugar a una composición de transformaciones geométricas.

Traslaciones.

Se introduce el concepto de vector. Mediante un ejemplo para llegar a dar sus características. Se plantea un ejemplo cotidiano para ir de un lugar que está en O a un destino que está en A.

Módulo. Y se define como, para un vector u,$u = (x, y) \to |u| = \sqrt{x^2 + y^2}$de acuerdo al Teorema de Pitágoras.

Dirección, que es la recta que contiene al segmento.

Sentido, que va desde el origen O al extremo A.

Y por tanto, todos los vectores, que tengan el mismo módulo, dirección y sentido, son equipolentes. Indicando que todos los vectores que son equipolentes son un vector libre y cada uno de sus vectores fijos, un representante.

Se dan algunas propiedades de los vectores, suma, producto por escalar y se introducen algunos problemas para operar con ellos.

Y ahora se pasa a la definición de traslación que consiste en trasladar los puntos de la figura inicial mediante el vector libre u, que los transformará como en el ejemplo inicial, y se plantea esta prueba de que la traslación es una isometría directa, de vector de traslación AB, ya que los paralelogramos tienen los ángulos iguales y los lados iguales, por tanto conservando, ángulos y distancias.

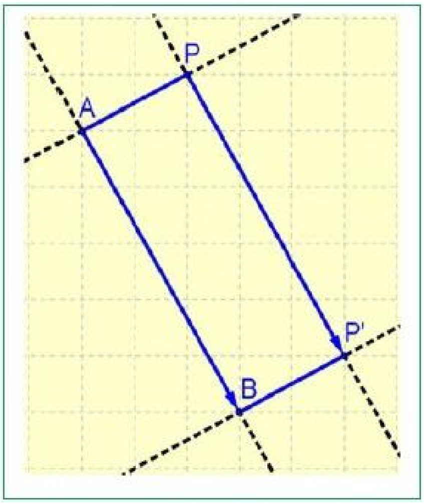


Ilustración 17: Salvador, A. Molero, M. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3ºB ESO. mareaverde.org.es

Se enuncia la composición de traslaciones como una segunda traslación, a realizar después de la primera y la traslación inversa, como si la traslación original es v=(a,b), entonces la inversa será w=-v=(-a,-b).

Y por último, las traslaciones en el espacio que son del todo análogas a las traslaciones en el plano salvo que el vector de traslación, v=(a, b, c), en el caso del espacio tiene tres coordenadas.

<u>Giros o rotaciones.</u>

Se plantea con el ejemplo de la manecilla de los minutos del reloj analógico. Y se indica que para definir un giro, necesitamos un centro de giro O, y un ángulo α y el sentido de giro de ese ángulo.

Los giros son isometrías ya que mantienen las distancias y los ángulos y el sentido de los ángulos, por lo que son transformaciones directas.

Se habla de composición de giros con el mismo centro, es también un giro.

Y también de centro de simetría, si un punto O es centro de simetría, entonces todo punto de la figura se transforma en otro punto de la figura. Se muestran ejemplos de mosaicos de La Alhambra.

Y también extiende el giro al espacio y el centro de simetría al espacio.

<u>Simetrías.</u>

Simetría axial, que se plantea con el ejemplo de una mariposa. Se ve que conserva longitudes y magnitudes de los ángulos, pero no la orientación de estos últimos. Siendo por tanto una transformación inversa.

Puntos invariantes que son los que pertenecen al eje de simetría. Se puede ver que las rectas perpendiculares al eje de simetría se transforman en ellas mismas.

Composición de simetrías. Dos simetrías de ejes paralelos es una traslación y dos simetrías de ejes secantes es un giro. Se ejemplifican en la siguiente ilustración.

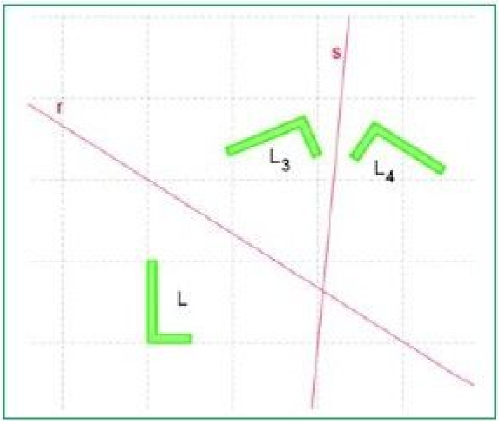


Ilustración 18: Salvador, A. Molero, M. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3ºB ESO. mareaverde.org.es

Mientras que cuando trasladamos estas mismas ideas al espacio tenemos el plano de simetría que se ejemplifica en muchos objetos cotidianos, sillas, mesas, etc.

Se plantean como resueltos, que además ayudan a interiorizar los conceptos introducidos, multitud de ejercicios de isometrías utilizando geogebra.

Se extienden los conceptos introducidos al espacio a modo de comentarios, y se plantea un resumen de propiedades y características de las isometrías, en particular, los puntos invariantes.

Mosaicos, frisos y rosetones.

Es un apartado que es una aplicación práctica de los conceptos introducidos. Se utilizan las isometrías para hacer esas construcciones explicando en cada momento cuales son las isometrías necesarias para llegar a la construcción de las mismas. Una muestra de la aplicación de las matemáticas que sirve para enseñar a los alumnos otro punto de vista y que las matemáticas sirven para ordenar estructuras y además de una forma visual y manipulativa. Y que los modelos y patrones que se pueden crear con las matemáticas están en todas las realidades de la vida cotidiana y del ser humano.


CURIOSIDADES. REVISTA

Mosaicos de la Alhambra

Como sabes los árabes de España eran grandes matemáticos y en los mosaicos de la Alhambra demuestran, además de su sentido artístico, sus conocimientos de Matemáticas. Se ha demostrado que, partiendo de un motivo mínimo, y aplicándole giros, simetrías, traslaciones… sólo hay 17 formas distintas de completar el plano haciendo un mosaico. Es sorprendente que esas 17 formas ya se encuentren en los mosaicos de la Alhambra.

Ilustración 19: Salvador, A. Molero, M. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3ºB ESO. mareaverde.org.es

4.3.3.- Capítulo 9. Geometría en el espacio. Globo terráqueo.

<u>Perpendicularidad y paralelismo en el espacio.</u>

Se introduce toda la casuística de posiciones relativas en el espacio. Punto-recta, punto-plano, recta-plano, plano-plano y recta-recta.

Para plantear que todo plano divide al espacio en dos semiespacios.

Y define la perpendicularidad en el espacio, plano-plano, plano-recta y recta-recta.

Poliedros.

Una región cerrada del espacio limitada por polígonos. Con sus elementos, caras, vértices, aristas, ángulos diedros, ángulos poliedros, diagonales y plano diagonal.

Teorema de Euler para poliedros convexos, un poliedro es convexo si el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro está dentro del mismo.

Y se enuncia el Teorema de Euler haciendo algunas comprobaciones, C+V=A+2.

Se introducen los poliedros regulares con la definición que se dio en el curso anterior, y se prueba que sólo hay cinco porque el uso del siguiente polígono, el hexágono, daría un ángulo poliedro de 360º y eso no es posible.

Y se introduce la definición de poliedro dual, el que se obtiene al unir los centros de las caras del poliedro actual y unirlas entre sí. Estableciendo relaciones de dualidad entre todos los poliedros. En las matemáticas siempre se puede ir un poco más lejos.

Prismas, paralelepípedos y pirámides y troncos de pirámide, dando una clasificación y algunas de sus propiedades.

Teorema de Pitágoras en el espacio. $D^2=a^2+b^2+c^2$, con una demostración gráfica y algebraica.

Área lateral y total de un poliedro.

Se deducen las fórmulas en base a conocimientos previos de las áreas de los poliedros, regulares, prismas, pirámides, troncos de pirámides.

Cuerpos de revolución.

Cilindros, conos, troncos de cono y esferas. Se obtienen al hacer girar una línea alrededor de una recta fija denominada eje.

Se dan las fórmulas de las áreas y superficies de todas ellas, de las tres primeras acudiendo a conocimientos previos y haciendo la extensión desde figuras planas a figuras en tres dimensiones.

Para la esfera se plantea la fórmula de Arquímedes sin demostrarse. Se dice que la superficie de la esfera es igual que la del cilindro que la inscribe de la que se indica en el dibujo. Por tanto, $2\pi R*2R=4\pi R^2$. Se puede concluir como corolario que el área de la esfera equivale a cuatro círculos máximos.

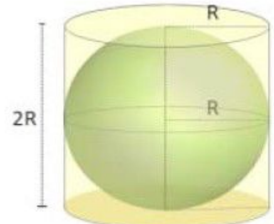


Ilustración 20: Latasa, M. Ramos, F. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

Volumen de un cuerpo geométrico.

Se enuncia el principio de Cavalieri: *Si dos cuerpos tienen la misma altura y al cortalos por planos paralelos a sus bases, se obtienen secciones del mismo área, entonces los volúmenes de los dos cuerpos son iguales.*

Se enuncia de manera parecida al Postulado 22 de SMSG, aunque se añade que los planos sean paralelos a sus bases, esta condición última no es necesaria. El principio de Cavalieri es otro acercamiento al cálculo infinitesimal. Se puede calcular un volumen por la suma de infinitas "tajadas" obtenidas como el principio de Cavalieri indica.

La interconexión de diferentes áreas de las matemáticas es un muy buen ejercicio para los alumnos.

Con este enunciado se pueden extender los resultados de prismas rectos a prismas oblicuos. Lo mismo sucede para pirámides y para conos, quedando los troncos de estás figuras como la sustracción del cono o pirámide superior (el que falta) al cono o pirámide total.

Volumen de la esfera se hace también con el método de Arquímedes como se ve en la ilustración anterior, indicando que el volumen que falta para llenar el cilindro es justamente el de un cono de la misma base y altura que el cilindro. Llegando tras operar a la fórmula del volumen de esfera, $V=4/3\pi R^3$.

Se indica que esa demostración no es rigurosa, y se muestra un dibujo que el volumen de la esfera sería la suma de infinitas pirámides que recubriesen su superficie con vértice en el centro. Y sumando las infinitas pirámides conseguiríamos el volumen de la esfera.

<u>Globo terráqueo.</u>

Es un apartado descriptivo sobre la tierra, husos horarios, paralelos, meridianos.

Es sin nombrarla la introducción de otro tipo de geometría, una geometría no euclídea, ya que no se cumple el V postulado. (la suma de los ángulos de un triángulo es más de 180º).

Y para finalizar el capítulo, en el apartado curiosidades hay muchas y muy interesantes, se va a señalar esta, porque relaciona las matemáticas entre sí, e introduce otra área matemática, los grafos.

Se plantean problemas de cálculo utilizando las fórmulas que se han obtenido, y también de asimilación y relación de los conceptos introducidos en este tema.

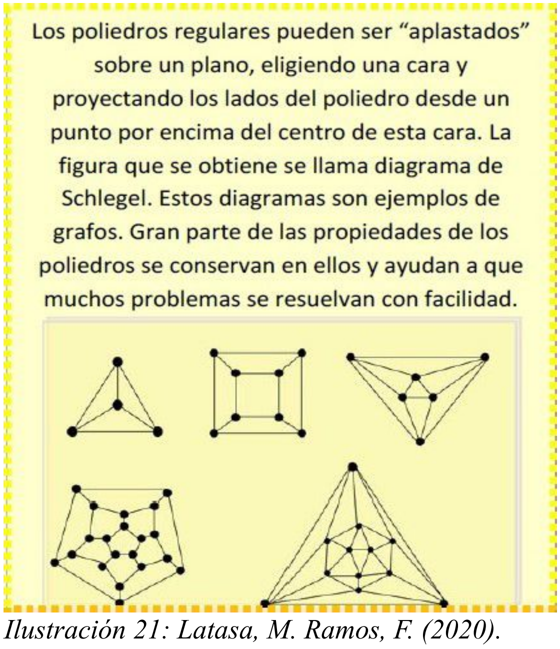


Ilustración 21: Latasa, M. Ramos, F. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

4.4.- 4º ESO. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

El bloque de geometría de 4º de ESO tiene tres capítulos

- Semejanza.
- Trigonometría.
- Geometría.

4.4.1.- Capítulo 7. Semejanza.

El capítulo comienza en su introducción con la presentación del problema clásico de la duplicación del cubo.

Figuras semejantes. Razón de semejanza. Escala.

Dos polígonos son semejantes si conservan sus ángulos y sus lados son semejantes. Asimismo, también se dice que dos figuras son semejantes si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. A ese coeficiente de proporcionalidad se le llama razón de semejanza.

Esa razón se puede expresar algebraicamente mediante números, con cocientes y multiplicaciones. Sin embargo, cuando se habla geométricamente se habla de proporcionalidad en cuanto a longitudes.

Se vuelve a hacer el repaso de lo ya introducido en los cursos anteriores de la semejanza entre longitudes, superficies y volúmenes. Con las demostraciones de cuadrados de lado l y 2l y cubos de lado l y 2l, obteniendo las razones de semejanza entre ellas como k, k^2 y k^3.

Se plantea el problema de construir la torre Eiffel a escala con 1 kg de material si en realidad pesa 8.000.000 Kg y mide 320 metros, ¿cuál será la altura del modelo a escala?.

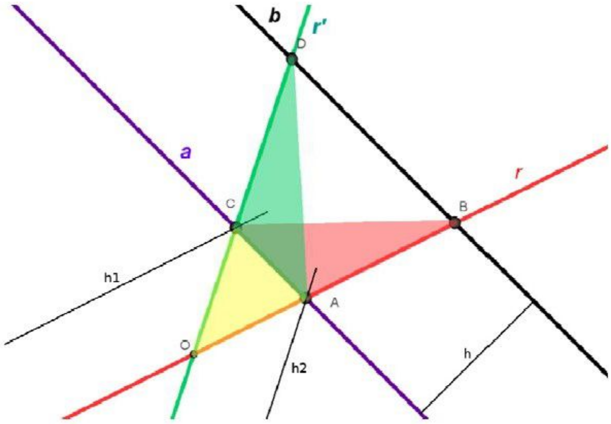
Teorema de Tales.

Se enuncia a modo de repaso el Teorema de Tales.

En la demostración se asume que el área de una superficie poligonal, un triángulo en este caso, es siempre la misma y además que las áreas se pueden sumar. Ambos conceptos ya se habían dado por supuestos anteriormente. De hecho para SMSG (The School Mathematics Study Group) están dados como axiomas.

Con esto se consigue que no sea necesario demostrar dos resultados que son bastante obvios en la geometría euclidiana y a cambio se realiza la demostración del Teorema de Tales. Un muy buen ejemplo de hacer matemáticas.

Para la demostración se utilizan los triángulos *ABC*, *ADC* y *OCA,* que se muestran en la figura.



Vamos a dar varios pasos para demostrar el teorema de Tales.

- El área del triángulo *ABC* es la misma que el área del triángulo *ADC* pues tienen la misma base, (*AC),* y la misma altura (*h*), la distancia entre las rectas paralelas ***a*** y ***b***:

  Área (*ABC*) = *Área* (*ADC*) = *CA* · *h*/2 = S

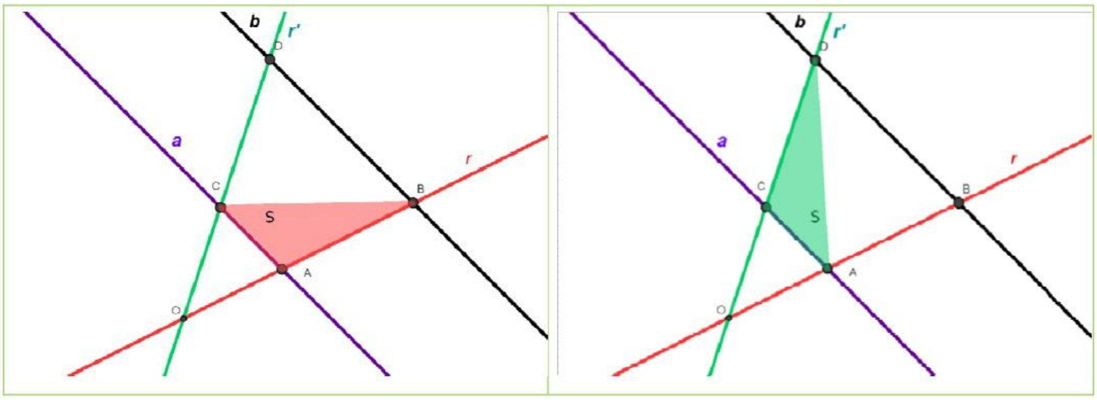
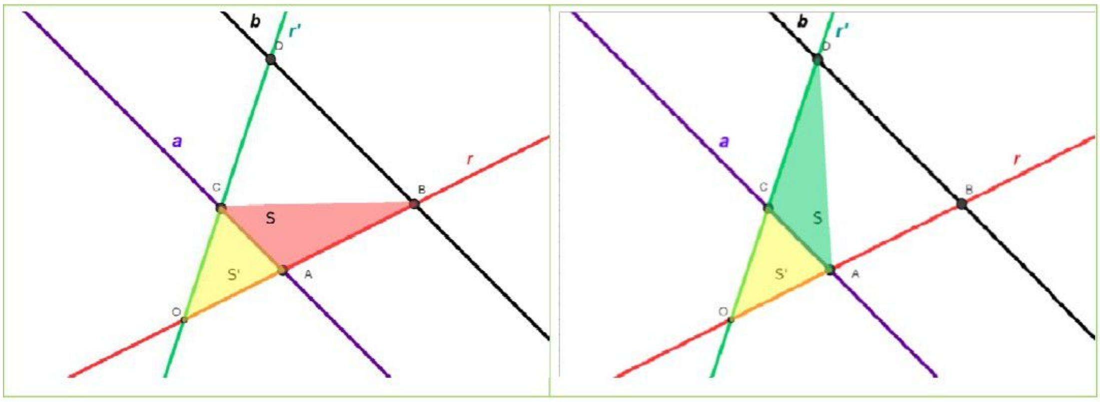


Ilustración 22: Muñoz, J. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas academicas 4ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

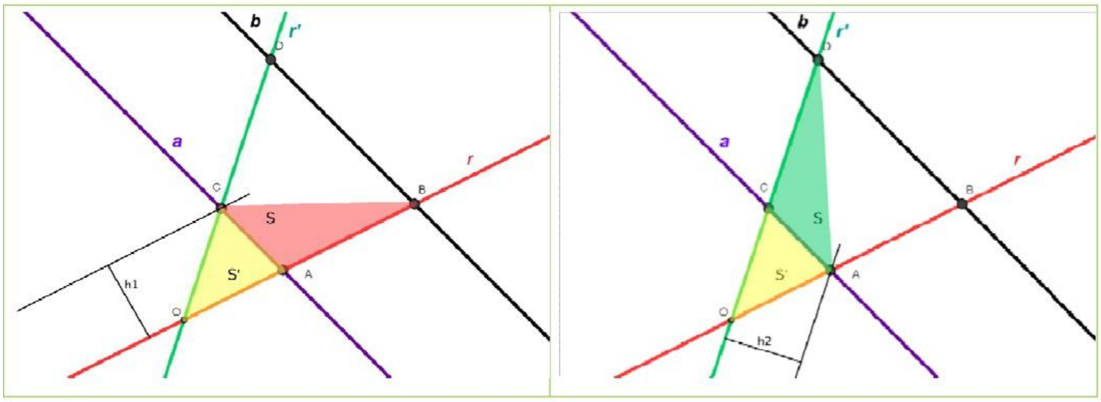
- El área del triángulo *OCB* es la misma que el área del triángulo *OAD* pues hemos sumado a las áreas de los triángulos anteriores, el área del triángulo *OAC*:

$$\text{Área } (OCB) = \text{Área } (OAD) = S + S'$$



- Calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *OBC*. Para calcular las áreas, tomamos las bases que están sobre la recta ***r***, entonces la altura de ambos triángulos es la misma pues tienen el vértice *C* común, por lo que el cociente entre sus áreas es igual al cociente entre sus bases.
- Del mismo modo calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *OAD* tomando ahora las bases sobre la recta ***r'*** y la altura, que es la misma, la del vértice común *A*:

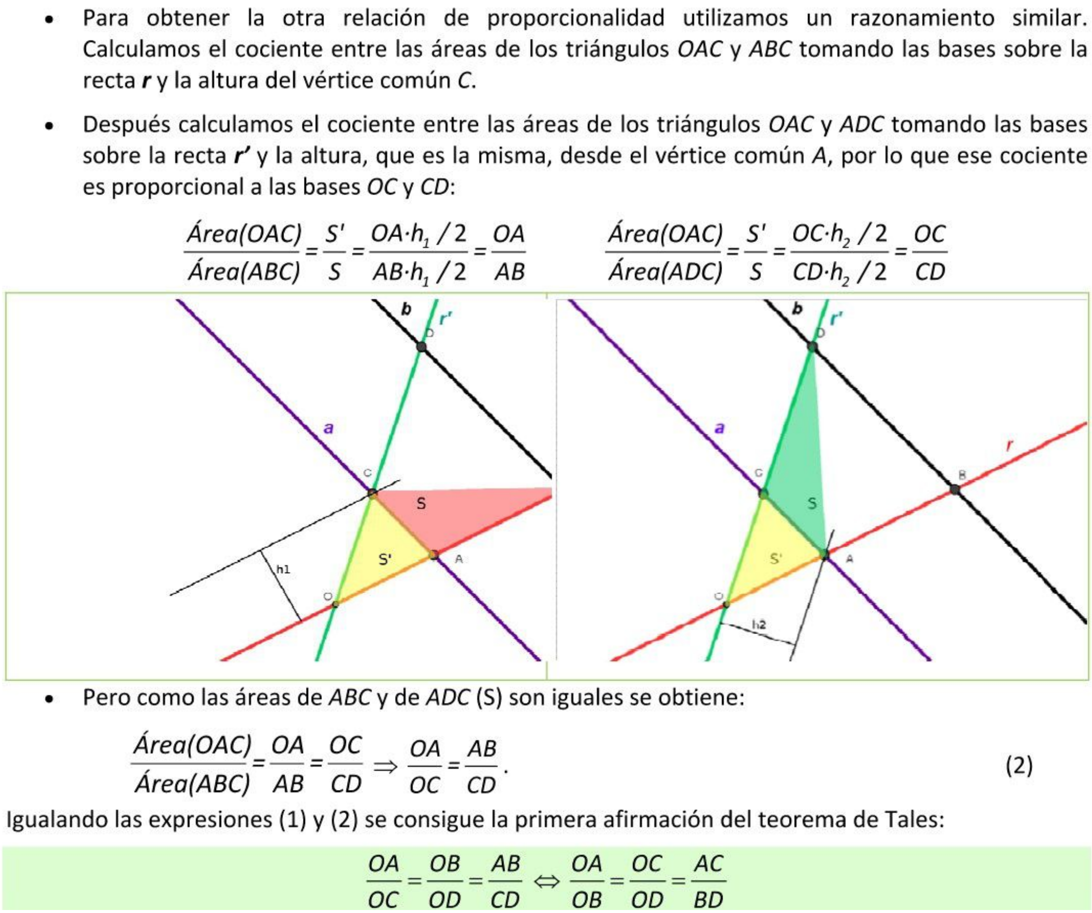
$$\frac{Área(OAC)}{Área(OBC)} = \frac{S'}{S+S'} = \frac{OA \cdot h_1 / 2}{OB \cdot h_1 / 2} = \frac{OA}{OB} \qquad \frac{Área(OAC)}{Área(OAD)} = \frac{S'}{S+S'} = \frac{OC \cdot h_2 / 2}{OD \cdot h_2 / 2} = \frac{OC}{OD}$$



- Ya hemos demostrado que *Área* (*OBC*) = *Área* (*OAD*) = S, sustituyendo:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(OBC)} = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}. \qquad (1)$$

Ilustración 23: Muñoz, J. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas academicas 4ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es



- Para obtener la otra relación de proporcionalidad utilizamos un razonamiento similar. Calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *ABC* tomando las bases sobre la recta ***r*** y la altura del vértice común *C*.
- Después calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *ADC* tomando las bases sobre la recta ***r'*** y la altura, que es la misma, desde el vértice común *A*, por lo que ese cociente es proporcional a las bases *OC* y *CD*:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(ABC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OA\cdot h_1/2}{AB\cdot h_1/2}=\frac{OA}{AB} \qquad \frac{Área(OAC)}{Área(ADC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OC\cdot h_2/2}{CD\cdot h_2/2}=\frac{OC}{CD}$$

- Pero como las áreas de *ABC* y de *ADC* (S) son iguales se obtiene:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(ABC)}=\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD} \Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}. \qquad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) se consigue la primera afirmación del teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Ilustración 24: Muñoz, J. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas academicas 4ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

Se enuncia el recíproco del Teorema de Tales, que dice que si se cumplen las proporciones indicadas en el Teorema de Tales, entonces las rectas que cortan son paralelas, pero no se demuestra.

Se dan varias aplicaciones del Teorema de Tales, la división de un segmento en n partes iguales, con el procedimiento conocido.

Y también indica que con el Teorema de Tales se va a poder conocer mucho más de la semejanza de triángulos, porque a partir de este momento se puede trasladar o girar uno de ellos para ponerlo en posición de Tales con el primero.

<u>Semejanza de triángulos.</u>

Se repiten los criterios de semejanza para triángulos de los cursos anteriores.

- Dos ángulos iguales.
- Los tres lados proporcionales.

- Dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

Los criterios de semejanza se repiten como en el curso anterior.

Teorema de la altura y el cateto.

Dos demostraciones que dan una idea de la potencia de la semejanza de triángulos del Teorema de Tales que se acaba de demostrar.

Que se demuestran por semejanza en el triángulo rectángulo. En la ilustración siguiente, los triángulos ΔBAC, ΔBHA y ΔAHC son semejantes, por tanto,

$$\frac{BH}{HA} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow \frac{e}{h} = \frac{h}{d} \Rightarrow h^2 = ed$$

que es el Teorema de la altura, y el siguiente que corresponde con el Teorema del cateto.

$$\frac{BH}{BA} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{e}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = ae$$

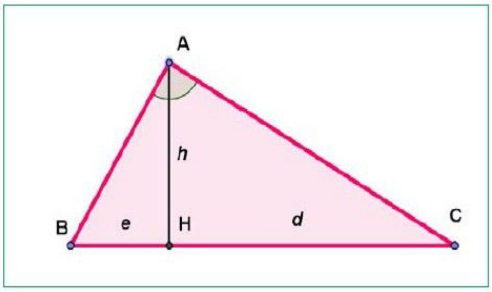


Ilustración 25: Muñoz, J. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas academicas 4ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

Se plantea el siguiente problema sobre el pentágono de la figura. Por un lado, prueba que los triángulos ABF y BDA son semejantes y calcula la relación de proporcionalidad entre ellos.

Una forma de introducir a los alumnos en las proporciones históricas, como el número áureo, ϕ. Que permite hablar de otros temas e interrelacionar las matemáticas con otros campos del saber humano.

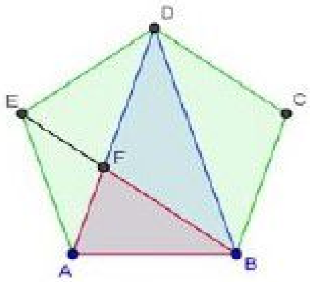


Ilustración 26: Muñoz, J. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas academicas 4ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

4.4.2.- Capítulo 8. Trigonometría.

Se introduce el tema, con una reseña histórica sobre una tablilla de Babilonia en la que aparece la primera referencia histórica conocida a la trigonometría que etimológicamente significa medición de ángulos.

Sistemas de medida de ángulos.

Dos sistemas de medida, el sistema sexagesimal que ya se conoce y el S.I. en el que la unidad básica de medida es el radián: es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Por tanto un ángulo completo tiene 2π rad.

Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Se definen las razones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo cualquiera con la expresiones conocidas y se expresan algunas relaciones fundamentales de de la trigonometría con su demostración.

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = tan\alpha$$

Las demostraciones son inmediatas a partir de las definiciones de las razones trigonométricas y además son muy enriquecedoras para los alumnos para establecer conexiones entre las diferentes áreas de las matemáticas.

Razones de 30º, 45º y 60º.

Se resuelven a partir de los triángulos correspondientes aplicando el Teorema de Pitágoras se llega a todas ellas de una manera deducida y comprensible.

Resolución de triángulos rectángulos.

Es un caso particular de la semejanza de triángulos ya introducida. Y es importante por la frecuencia con la que aparecen los triángulos rectángulos en los problemas reales.

Que se define como hallar las amplitudes de los tres ángulos y las longitudes de los tres lados. Se parte desde distintos casos iniciales.

- Se conoce un ángulo B y la hipotenusa. Por tanto también conocemos el ángulo recto, y el tercer ángulo y con las razones trigonométricas de cualquiera de los ángulos agudos obtenemos las longitudes de los otros dos lados.
- Se conoce un ángulo B y un cateto. Muy parecido al anterior.
- Se conocen los tres lados. Con las razones trigonométricas se puede hallar cualquiera de los ángulos agudos, cuando el otro es recto y el tercero se obtiene de la suma hasta 180º.

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Se introducen los conceptos de circunferencia goniométrica (circunferencia de radio 1) y de cuadrantes según los divide el plano cartesiano.

Y hace la relación entre la funciones trigonométricas seno y coseno de cada uno de los cuadrantes con las del primer cuadrante, se va a plasmar la del cuarto cuadrante para ilustrar el proceso.

En la ilustración se tienen dos triángulos AOP' y AOP, y además se trata de una circunferencia goniométrica (de radio 1). Además, β es el ángulo AOP y α AOP'. Así tenemos, *sen*α = *AP'* = -*AP* = -*sen*β, y también *cos*α = *OA* = *OA* = *cos*β. Quedando establecidas la relación entre las razones trigonométricas del primer y cuarto cuadrante, ya que con seno y coseno relacionados se pueden extraer todas las demás y sus relaciones.

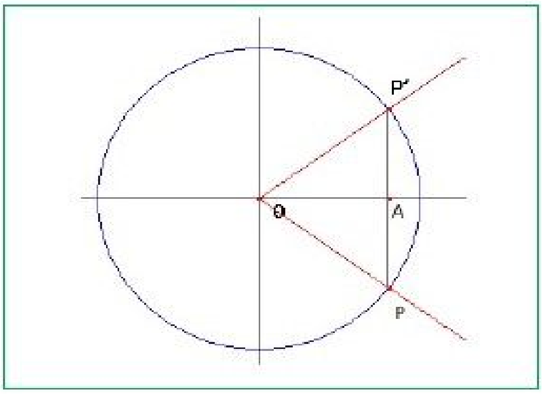


Ilustración 27: Muñoz, J. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas academicas 4ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

<u>Resolución de triángulos cualesquiera.</u>

En este apartado se enuncian el teorema de los senos y el de los cosenos, demostrando el primero, y dejando el segundo para el año que viene.

Teorema de los senos.

Se resuelve estableciendo semejanzas entre triángulos. Dado un triángulo cualquiera, se trazan dos alturas y se plantean las relaciones que son necesarias, relacionando por semejanza los triángulos rectángulos que aparecen en ambos casos y llegamos a la conocida fórmula.

$$\frac{a}{sen\widehat{A}} = \frac{b}{sen\widehat{B}} = \frac{c}{sen\widehat{C}}$$

Teorema de los cosenos.

Que se enuncia, con la fórmula conocida, se indica que es una generalización del Teorema de Pitágoras, cuando se elige a como la hipotenusa y el ángulo entre los lados b y c es de 90º, lo que se puede comprobar fácilmente.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\widehat{A}$$

Con estos dos Teoremas, los alumnos tienen dos herramientas más para poder resolver triángulos (calcular las longitudes de sus lados y la amplitud de sus ángulos). De hecho son las herramientas más potentes para la resolución de triángulos en el plano.

Se plantean muchos problemas relacionados con la vida cotidiana en las que se le da uso a ambos teoremas. *Como vienen acostumbrando los hay de cálculo y de asimilación e identificación de los nuevos conceptos introducidos. Esta nota del apartado la revista, abre la puerta a pensar de otra manera y en el caso de la geometría a pensar, que hay más geometrías y que hay que perseguir la verdad hasta las últimas* *consecuencias. Obteniendo en este caso resultados que son curiosos, como se indica en la Ilustración.*

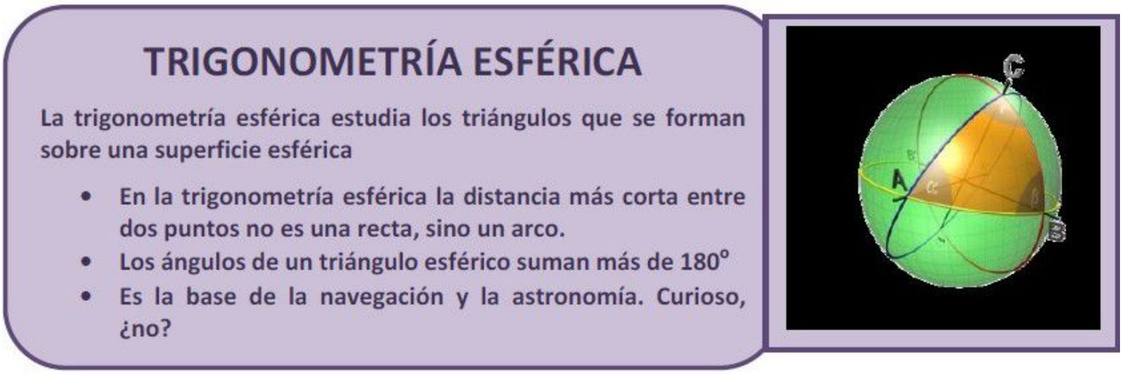


Ilustración 28: Muñoz, J. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas academicas 4ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

4.4.3.- Capítulo 9. Geometría.

La geometría es una de las ramas más antiguas de las matemáticas y que etimológicamente significa 'medir la tierra', a la que consideramos plana porque es muy grande, aunque en realidad es esférica. Mucha de la información que recibimos se puede interpretar desde un punto de vista geométrico.

Teorema de Pitágoras y Teorema de Tales.

Este apartado se plantea como un resumen de ambos teoremas, ya conocidos, además del Teorema de Pitágoras en el espacio.

Recopilación de ambos Teoremas, además de la expresión para el espacio del Teorema de Pitágoras, que es la distancia euclidiana entre dos puntos en el espacio.

Y por otro lado, con la semejanza entre un cubo y otro se obtienen las relaciones que también se cumple para el resto de figuras en el espacio. Las relaciones de semejanza (κ, κ^2, κ^3) entre figuras del espacio. Cuando la relación es κ para las dimensiones es κ^2 y κ^3 para las superficies y los volúmenes.

Longitudes, Áreas y Volúmenes.

También está planteado como un repaso. Principio de Cavalieri, enunciado igual que en el curso anterior. Y de ahí todas las fórmulas, ya conocidas, que se vuelven a deducir, primero de superficies de prisma, cilindro, pirámide y tronco de pirámide, cono y tronco de cono, y luego los volúmenes. Y por último abordando la esfera, menciona es un cuerpo no desarrollable, y plantea las fórmulas del curso pasado demostradas por Arquímedes, tanto para superficie como para volumen, éstas, sin demostración.

Hay un apartado dedicado a los poliedros regulares, de los que se calcula su área. Se omite el cálculo de los volúmenes.

Iniciación a la geometría analítica.

Puntos y vectores.

En el plano cartesiano, ya introducido, un punto A es un par ordenado de números reales (x,y), siendo x la primer coordenada o abscisa e y la segunda coordenada u ordenada. Y vector con origen en D (d_1,d_2) y extremo en E(e_1,e_2), tiene las siguiente componentes, y se denota de la manera expresada en la fórmula siguiente.

$$\overrightarrow{DE} = (e_1 - d_1, e_2 - d_2)$$

Se acompaña de una representación de puntos y vectores en el plano cartesiano que ayudan a visualizar los conceptos. No obstante, ya se ha tratado el tema de isometrías en el que se introducían los vectores.

Y la generalización al espacio de estos conceptos es añadir una coordenada extra.

Distancia entre dos puntos.

De la forma ya introducida, ya sea para puntos en el plano o en el espacio, mediante la fórmula que se deduce del Teorema de Pitágoras para la distancia.

$$D = \sqrt{(e_1 - d_1)^2 + (e_2 - d_2)^2}$$

Extendiéndose también al espacio, añadiendo la diferencia al cuadrado en la tercera coordenada. *Como se ha introducido con el Teorema de Pitágoras en el espacio.*

Ecuaciones y rectas y planos.

Ecuaciones de la recta en el plano.

Se presentan varias expresiones de la recta en el plano, las ecuaciones, explícita, implícita, vectorial y paramétrica.

Y se inicia la operativa con estas expresiones para calcular rectas paralelas y perpendiculares.

Explícita, y=mx+n

Implícita, ax+bx+c=0

Vectorial, **OX=OA**+t**v**, con t el parámetro que para cada valor, con t en **R**, va generando los distintos puntos de la recta.

De ésta última, se obtiene la ecuación paramétrica.

$$\{x = a_1 + tv_1 \quad y = a_2 + tv_2$$

En la ecuación paramétrica tenemos las componentes del vector acompañando al parámetro t, de donde se puede deducir que dos rectas son paralelas si sus vectores directores son proporcionales, es decir, **v**=k**w**, con k algún **R**, y son perpendiculares si **vw**=0 ($v_1w_1+v_2w_2=0$) si el producto escalar de sus vectores directores es nulo.

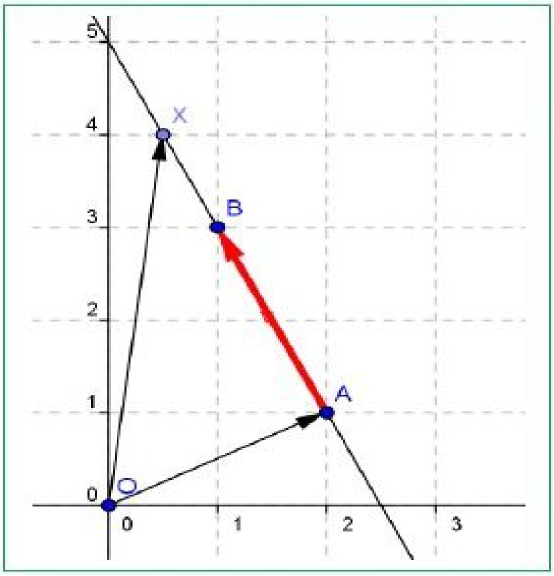


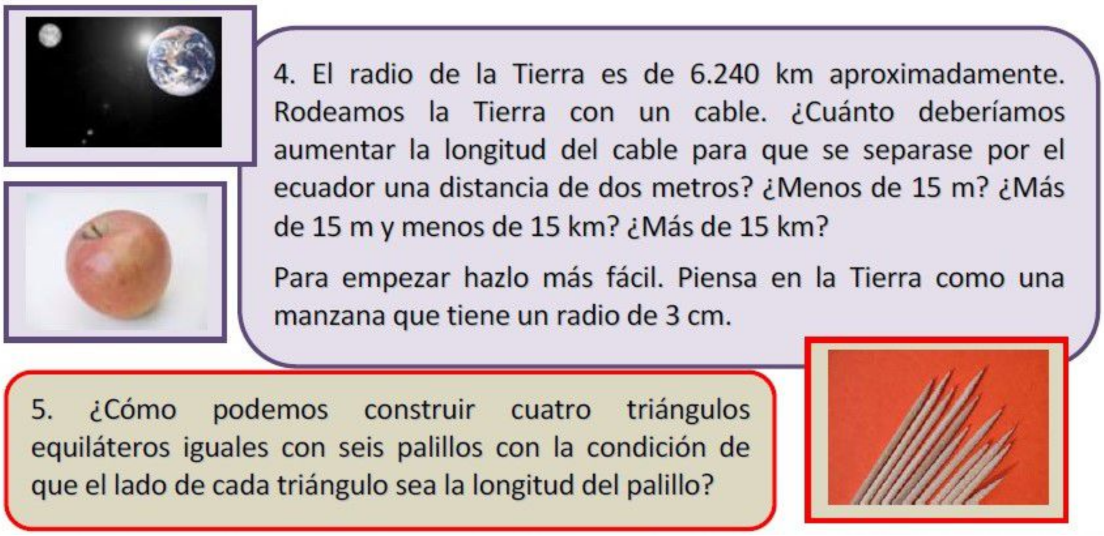
Ilustración 29: Muñoz, J. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas academicas 4ºB ESO. appuntesmareaverde.org.es

Y con un proceso más o menos laborioso se llegan a conclusiones análogas para las otras formas de expresión de las rectas.

Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.

Mientras que para las ecuaciones en parámetricas y vectorial, llegamos a expresiones análogas para la recta, en el resto de ecuaciones las cosas cambian un poco, ya que en el espacio, ax+by+cz+d=0, ecuación en la que ha aparecido la tercera dimensión z, ahora es una ecuación de un plano y una recta en implícitas tiene dos ecuaciones, lo que es lógico, ya que la intersección de dos planos es una recta, y por tanto la recta, debe cumplir ambas ecuaciones simultáneamente, siendo las siguientes las ecuaciones de la recta en el espacio, ax+by+cz+d=0 y a'x+b'y+c'z+d'=0.

De los problemas planteados se enuncian los dos siguientes. El primero pone de manifiesto que nuestra intuición nos puede engañar y que tenemos en las matemáticas una herramienta fantástica que nos ayuda a racionalizar las experiencias y por tanto a emitir juicios fundados en base a un análisis y el segundo ayuda a pensar, hace aprender a aprender, haciendo uso de todos los recursos disponibles.



4. El radio de la Tierra es de 6.240 km aproximadamente. Rodeamos la Tierra con un cable. ¿Cuánto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15 m? ¿Más de 15 m y menos de 15 km? ¿Más de 15 km?

Para empezar hazlo más fácil. Piensa en la Tierra como una manzana que tiene un radio de 3 cm.

5. ¿Cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

Ilustración 30: Muñoz, J. (2020). Matemáticas orientadas a las enseñanzas academicas 4ºB ESO. apuntesmareaverde.org.es

4.5.- 1º Bachillerato. Matemáticas I (o Bachillerato de ciencias).

En este curso el bloque de geometría está dividido en dos capítulos:

- Capítulo 4. Trigonometría.
- Capítulo 5. Geometría Analítica.

4.5.1.- Capítulo 4. Trigonometría.

La trigonometría ya era conocida en el pasado, todo lo que se va explicar en este capítulo ya era conocido en el siglo II a.C. Sin embargo en Grecia se resolvieron mediante geometría métrica, no con las fórmulas analíticas que se van a enseñar en este capítulo.

Problemas como el de la duplicación del cubo, que es imposible resolver con regla y compás es bastante sencillo con el uso de ecuaciones.

La trigonometría se utilizaba para múltiples usos y por eso es estudiada desde la antigüedad y por todas las culturas. Es básica para la astronomía, la agrimensura y la navegación, tres actividades que fueron básicas para el desarrollo y la conservación de las civilizaciones del pasado. Poder medir los campos, navegar y la astronomía que se estudió porque era básico conocer el devenir de las estaciones y así conocer los momentos adecuados para la siembra, la crecida del Nilo...

Razones trigonométricas.

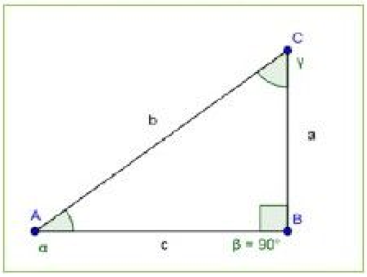
El apartado comienza con las medidas de ángulos, haciendo repaso a las formas de medir los ángulos. El sistema sexagesimal utilizado históricamente y el radián del S.I. por su interés para el resto de las disciplinas de las matemáticas.

Se pasan a presentar, de manera parecida al curso anterior, las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

$$sen(\alpha) = \frac{cateto.opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{b}$$

$$cos(\alpha) = \frac{cateto.contiguo}{hipotenusa} = \frac{c}{b}$$

$$tg(\alpha) = \frac{cateto.opuesto}{cateto.contiguo} = \frac{a}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$



A partir del triángulo de la figura y se expresan en función de los lados del triángulo.

Con las relaciones de ese triángulo, y aplicando el Teorema de Pitágoras, también se puede deducir la siguiente ecuación.

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} \Rightarrow (\frac{a}{b})^2 + (\frac{c}{b})^2 = 1 \Rightarrow sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

Valgan las siguientes como ejemplo del proceso deductivo que se lleva a cabo.

$$sen60 = \frac{h}{L} = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos60 = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2} \qquad tg60 = \frac{h}{\frac{L}{2}} = \frac{2h}{L} = \frac{2\sqrt{3}L}{2L} = \sqrt{3}$$

De forma análoga se obtienen las razones trigonométricas de 30º y para las de 45º se utiliza un triángulo rectángulo isósceles.

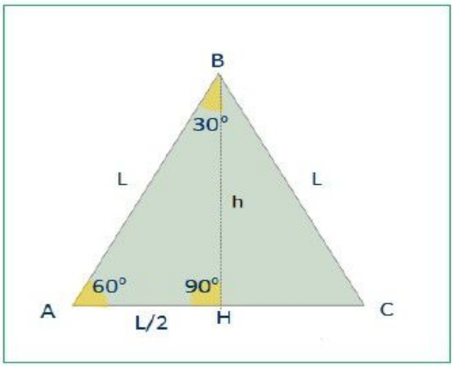


Ilustración 31: García, A. Lorente, J.L. (2020). Matemáticas I. Bachillerato de Ciencias. apuntesmareaverde.org.es

Se deducen y se describen las razones trigonométricas de los ángulos complementarios y también las relaciones entre razones trigonométricas de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano, como ya se introdujo en el curso pasado.

Razones trigonométricas de la suma de ángulos.

Para demostrar estas relaciones se parte del esquema de la figura. De donde tenemos,

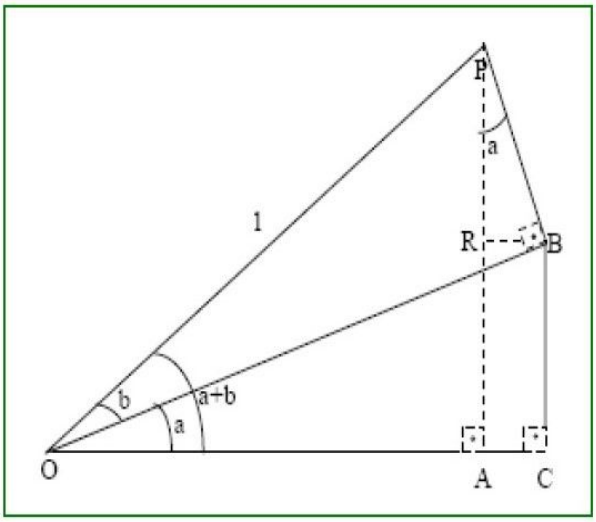


Ilustración 32: García, A. Lorente, J.L. (2020). Matemáticas I. Bachillerato de Ciencias. apuntesmareaverde.org.es

$$sen(a) = \frac{CB}{OB} \rightarrow CB = OBsen(a) \qquad sen(a) = \frac{RB}{PB} \rightarrow RB = PBsen(a)$$

$$cos(a) = \frac{RP}{PB} \rightarrow RP = PBcos(a)$$

$$cos(a) = \frac{OC}{OB} \rightarrow OC = OBcos(a)$$

$$sen(b) = \frac{PB}{1} \rightarrow PB = sen(b)$$

$$cos(b) = \frac{OB}{1} \rightarrow OB = cos(b)$$

$$sen(a+b) = CB+RP = OBsen(a)+PBcos(a) = cos(b)sen(a)+sen(b)cos(a)$$
$$cos(a+b) = OC-RB = OBcos(a)-PBsen(a) = cos(a)cos(b)-sen(a)sen(b)$$

Y estableciendo las relaciones anteriores se deducen las fórmulas de la suma de ángulos para el seno y el coseno. El proceso que se ha seguido para la demostración de las fórmulas anteriores es otro ejemplo de hacer matemáticas un proceso en el que no se sabe que algoritmos aplicar, que hay que llegar a un esquema. Es un ejercicio en el que se interrelacionan disciplinas matemáticas y se ve esta ciencia como algo en la que todo es deducible y que no hay que creerse nada, sino que todo tiene que poderse demostrar y entender por parte del alumno.

Y dividiendo las dos expresiones anteriores se obtiene la siguiente expresión,

$$tg(a+b) = \frac{\frac{sen(a+b)}{cos(a)cos(b)}}{\frac{cos(a+b)}{cos(a)cos(b)}} = \frac{tg(a)+t(b)}{1-tg(a)tg(b)}$$

Esta demostración introduce una idea, que a menudo sucede cuando se está operando con ecuaciones, que es la de multiplicar una ecuación por 1, introduciendo términos que nos van a ayudar para llegar a la expresión que deseamos encontrar cuando operamos con una ecuación.

Se indica que las demostraciones se han realizado únicamente para ángulos del primer cuadrante, que también son válidas para el resto de ángulos, pertenezcan al cuadrante que pertenezcan, pero que las otras demostraciones son independientes de éstas, y que también se tienen que llevar a cabo para ser rigurosos matemáticamente.

Se introducen las razones trigonométricas de la resta de ángulos, del ángulo doble, del ángulo mitad, como casos particulares de las expresiones anteriores de los casos para la suma de ángulos. También se introducen ecuaciones de transformaciones de sumas de razones trigonométricas en productos. Son ejercicios muy buenos para la familiarización del alumno con la operativa algebraica al mismo tiempo para confirmar que las matemáticas son siempre deducibles.

Ecuaciones y sistemas trigonométricos.

Se recuerda la diferencia entre identidad (una ecuación que siempre se cumple) y una ecuación que sólo se cumple para algún o algunos valores de la variable.

Este capítulo recoge conceptos e ideas ya conocidas de los sistemas de ecuaciones lineales, e introduce los propios de la trigonometría. Es reseñable, la no unicidad de soluciones. Muy a menudo los sistemas de ecuaciones con funciones trigonométricas no tienen una única solución, esta idea ayuda a pensar y a estar alerta cuando se ha llegado a una solución, ya que los alumnos deben plantearse la pregunta, ¿es esta es la única solución?. U otra idea, muy típica de los sistemas algebraicos, como es el cambio de variable que también aumenta la capacidad de razonar y la relación entre conceptos.

Resolución general de triángulos.

En este apartado se resumen conceptos conocidos de cursos anteriores, ampliándolos y consolidándolos.

Un triángulo tiene 6 incógnitas y salvo algunos casos, se podrá resolver si conocemos tres incógnitas.

Teorema del coseno.

Se parte del esquema de la siguiente figura y se utiliza la trigonometría y el Teorema de Pitágoras para la demostración del mismo.

La demostración se puede hacer para un triángulo obtusángulo o un triángulo acutángulo y que en el caso del triángulo acutángulo, que es el que se va a demostrar hay dos casos, que la base de la altura CD, esté en el segmento c o fuera de él. Cada uno de los casos tiene que demostrarse para ser riguroso matemáticamente, aunque sólo se va a demostrar uno, pero el resultado es válido para todos los casos.

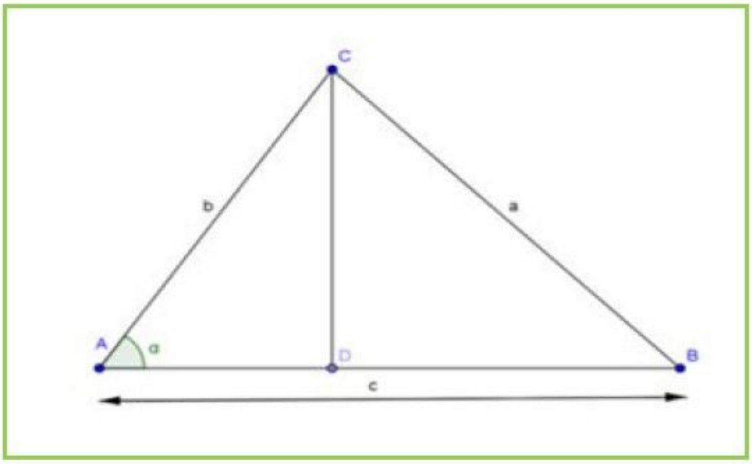


Ilustración 33: García, A. Lorente, J.L. (2020). Matemáticas I. Bachillerato de Ciencias. apuntesmareaverde.org.es

$$sen\alpha = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC sen\alpha \Rightarrow CD = bsen\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC sen\alpha \Rightarrow AD = bcos\alpha$$

$$DB = AB - AD = c - bcos\alpha$$

Con esos resultados preliminares y aplicando el Teorema de Pitágoras para el triangulo DBC, se tiene el siguiente razonamiento, de donde se obtiene el resultado del Teorema del coseno.

$$a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2 = (bsen\alpha)^2 + (c - bcos\alpha)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 sen^2\alpha + c^2 + b^2 cos^2\alpha - 2bc * cos\alpha \Rightarrow a^2 = b^2(sen^2\alpha + cos^2\alpha) + c^2 - 2bc * cos\alpha \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * cos\alpha$$

Lo que es un magnífico ejercicio de conexión y afirmación de conceptos y de conocimiento de la geometría.

Teorema del seno.

Se demuestra llegando a la fórmula ya conocida y demostrada en el curso anterior.

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

Resolución de triángulos.

Con los dos teoremas anteriores y otro resultado se dan las herramientas para resolver los triángulos,

- Teorema del coseno.
- Teorema del seno.
- Suma de los ángulos de un triángulo es de 180º. (equivalente al postulado de las paralelas)

Se plantea la casuística de la resolución de los triángulos en función de los datos que se extraigan de la lectura del problema.

En los problemas y ejercicios de este capítulo se plantea la demostración del teorema del coseno en el caso que la base de la altura que se toma para la demostración del mismo esté fuera de la base del triángulo, tiene similitudes con la demostración hecha, y constituye un buen ejercicio de hacer matemáticas.

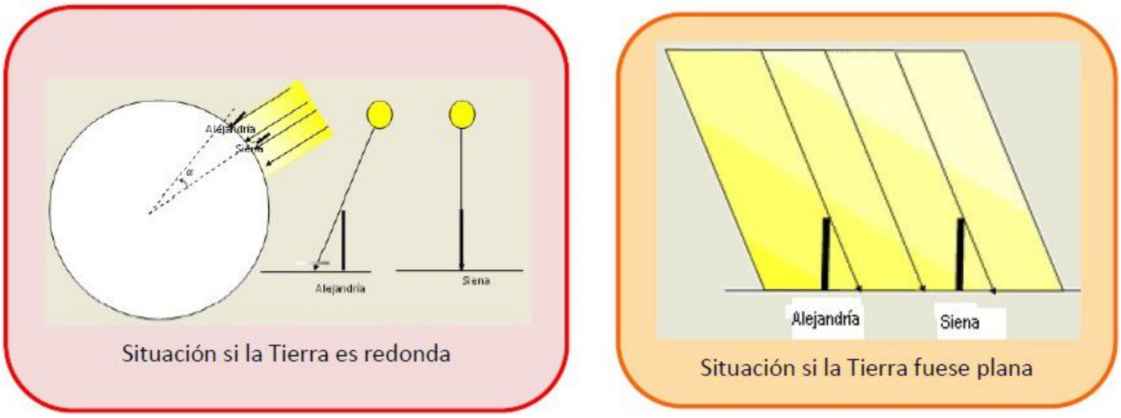


Ilustración 34: García, A. Lorente, J.L. (2020). Matemáticas I. Bachillerato de Ciencias. apuntesmareaverde.org.es

Se explica con detalle la experiencia de Eratóstenes de Alejandría y como realizó la primera medida de la circunferencia de la Tierra.

Y en un problema resuelto se detallan los cálculo, la historia de Eratóstenes y como hizo exactamente el cálculo de la circunferencia de la Tierra.

Se deja planteada como actividad de grupo la realización del experimento de Eratóstenes en tu centro, poniéndose en contacto con otro centro que realizará la misma medida que es; medir el ángulo que forma el sol en el mediodía solar.

El enunciado tiene información para hacer la corrección del momento en el que se toma la medida dependiendo de la longitud de la tierra. Una actividad que involucra diferentes áreas de conocimiento, diferentes asignaturas, pone en contacto centros y es un ejemplo de la potencia de las matemáticas.

4.5.2.- Capítulo 5. Geometría.

En este capítulo se va a exponer la geometría del plano desde el punto de vista analítico. El sistema de coordenadas del plano que lo inventó Descartes y de ahí su nombre Plano Cartesiano, se cuenta que se le ocurrió mientras estaba tumbado en la cama y observaba en el techo el movimiento de una mosca. Pensó que si le asignaba una posición respecto de un origen, podría describir su trayectoria sin necesidad de dibujarla. Una idea genial que dio origen a la Geometría Analítica.

<u>Vectores.</u>

El plano cartesiano.

La descripción del plano cartesiano se sumariza en el siguiente gráfico. Denominándose cada punto por la expresión P=(x,y), así cada punto es un par de números reales. Utilizando las letras mayúsculas para representarlos.

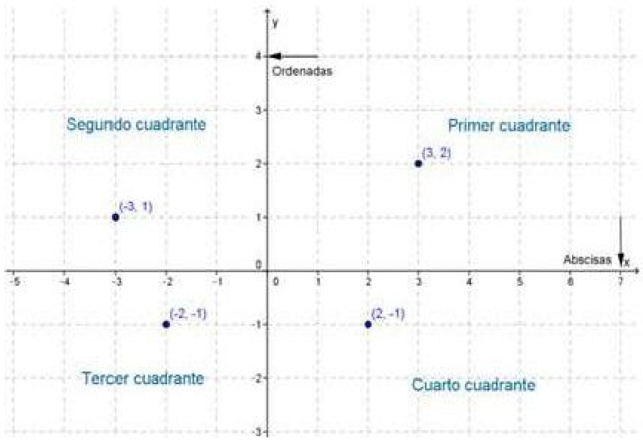


Ilustración 35: García, A. (2020). Matemáticas I. Bachillerato de Ciencias. apuntesmareaverde.org.es

Vectores.

Un vector representa un movimiento, y también se representa con dos números **v**=(a,b) y representa un desplazamiento de a unidades en la dirección del eje OX y b unidades en la dirección del eje OY.

El módulo de un vector **v**, está dado en la siguiente ecuación,

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)\ es\ \ \|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Que es la distancia que se recorre al aplicar el vector o el tamaño del vector.

Magnitudes escalares y vectoriales.

La Física tuvo mucho que ver en el nacimiento de las magnitudes vectoriales. Ya que cuando se aplica una fuerza siempre surge la pregunta (¿hacia dónde?), mientras que cuando medimos la temperatura es suficiente con dar el valor numérico. De ahí surgen los conceptos:

Magnitud vectorial, son aquellas, que por definición, se escriben con un vector.

Magnitud escalar, son aquellas, que por definición, se escriben con un número.

Un vector tiene tres características módulo, que se ha definido; dirección, es la pendiente de la recta sobre la que se mueve el vector y sentido, si se avanza en un sentido o en el contrario.

Operaciones con puntos y vectores.

Se indican en los dos gráficos siguientes, con las definiciones en el primero,

Dados dos puntos $P = (p_1,\ p_2)$ y $Q = (q_1,\ q_2)$ se define el vector $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{(q_1-p_1,\ q_2-p_1)}$.

Dado un punto $P = (p_1,\ p_2)$ y un vector $\vec{v}=\overrightarrow{(v_1, v_2)}$, su suma es el **punto** $(p_1+v_1,\ p_2+v_2)$.

Dados dos vectores $\vec{v}=\overrightarrow{(v_1, v_2)}$ y $\vec{w}=\overrightarrow{(w_1, w_2)}$, su suma es el **vector** $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{(v_1+w_1,\ v_2+w_2)}$.

Dado un vector $\vec{v}=\overrightarrow{(v_1, v_2)}$ y un escalar k, su producto es el **vector** $k\vec{v}=\overrightarrow{(kv_1,\ kv_2)}$

Ilustración 36: García, A. (2020). Matemáticas I. Bachillerato de Ciencias. apuntesmareaverde.org.es

y la representación gráfica de las mismas en el segundo.

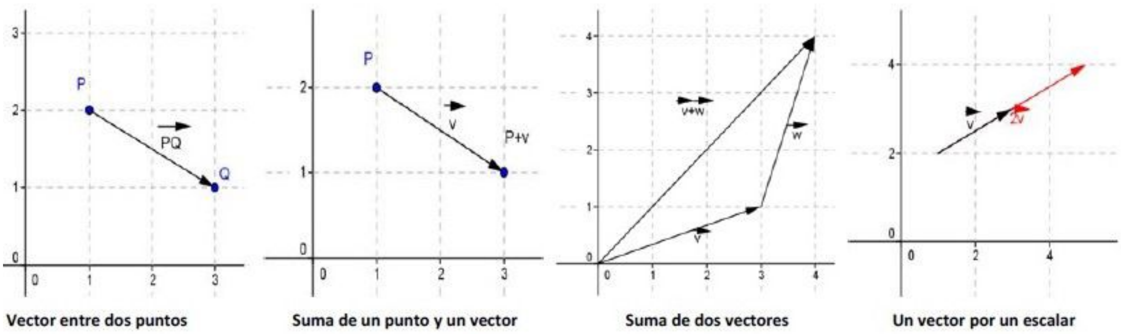


Ilustración 37: García, A. (2020). Matemáticas I. Bachillerato de Ciencias. apuntesmareaverde.org.es

Dos vectores son paralelos si tienen la misma pendiente, es decir, si tenemos, la siguiente condición y la primera coordenada no nula.

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)\ y\ \overrightarrow{w} = (w_1, w_2)\ son\ paralelos\ si\ y\ solo\ si\ m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1}$$

El producto escalar. Cálculo de distancias y ángulos.

El producto escalar se define de la siguiente manera y su resultado es un escalar.

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)\ y\ \overrightarrow{w} = (w_1, w_2)\ \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Propiedades del producto escalar.

Conmutativa. **vw=wv**

Distributiva respecto a la suma. **u(v+w)=uv+uw**

Asociativa respecto a escalares. **v**(k**w**)=(k**v**)**w**=k(**vw**)

Y la cuarta, $\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,cos\alpha$

Se demuestran las tres primeras, dejando la cuarta sin demostrar.

Se proponen varios ejercicios de asimilación de las definiciones y las propiedades propuestas. Y la resolución de un triángulo dado por sus puntos en coordenadas, en efecto, se pueden calcular los lados como las distancias entre puntos y los ángulos con la Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Y una prueba alternativa de paralelismo de vectores, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz de la que se saca la conclusión, ya conocida, que dos vectores son paralelos si forman ángulos de 0º o 180º que corresponden a los valores del coseno del ángulo que forman de 1 y -1, respectivamente.

Bases ortogonales y ortonormales.

Vectores perpendiculares

Un caso especial son los vectores perpendiculares y haciendo uso de las propiedades que ya conocen los alumnos, que sólo es cierto para los ángulos de 90º y 270º, por lo que se puede decir que dos vectores son perpendiculares si y solo si su producto escalar es nulo.

$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|} = 0$$

Bases ortogonales.

Surge la pregunta, ¿dado un vector, cuántos vectores son perpendiculares a él?, en el plano la respuesta es que sólo hay uno (y los vectores paralelos a él).

Entonces una base ortogonal en el plano la forman dos vectores no nulos y perpendiculares entre sí. Además cualquier vector se puede calcular sumando múltiplos de los dos, se dice que es combinación lineal de ambos. (**w**, es combinación lineal de **u** y **v**, si **w**=a**u**+b**v**, con a, b números reales).

Bases ortonormales.

Es una base ortogonal donde los vectores **u** y **v** tienen módulo unidad.

Base canónica.

Es la formada por **u**=(1,0) y **v**=(0,1) donde cada **w**=a**u**+b**v**, y (a,b) son las coordenadas de w respecto de la base formada por **u** y **v**.

Rectas y lugares métricos.

Se introduce el concepto de lugar geométrico como, los puntos del plano que cumplen una o varias condiciones geométricas y cumplen ecuaciones algebraicas. Algunos ejemplos, esfera, parábola, cúbicas, rectas...

Rectas. Definición y ecuaciones.

Se define desde el punto de vista de la geometría analítica, como los puntos del plano que se pueden alcanzar sumando a un punto los múltiplos de un vector. Que es el que se llama vector director.

Se enuncia y calcula la expresión de una recta en varias de las formas que se puede expresar, paramétrica, contínua, punto-pendiente, implícita y explícita. Se desarrollan y obtienen cada una de ellas.

Al final del apartado, y a modo de resumen, se hace una lista de como identificar, puntos, vectores directores, pendientes,... para cada una de las formas de expresar una recta.

Posiciones relativas de rectas.

Ya conocido de otros cursos y que ahora se resuelve con la ayuda de las ecuaciones de las rectas. Con dos métodos con vectores directores, o resolviendo el sistema de ecuaciones, cuando las rectas están expresadas implícitamente.

Problemas métricos.

El alumno ya conoce la resolución de los siguientes problemas:

- Distancias entre dos puntos.
- Ángulo entre rectas.
- Calcular ángulos en triángulos.
- Calcular ecuaciones de rectas.
- Posiciones relativas de rectas.

Distancia de un punto a una recta. Se define de la siguiente manera, si P es un punto exterior a una recta r, la distancia entre ambos, se define como,

$$d(P,r) = min\left\{d(P,Q), Q \in r\right\}$$

Con los conocimientos que ya se tienen el cálculo es deducible, y un método es, hacer una recta s perpendicular a r pasando por P, la intersección entre r y s es Q y d(P,Q) será d(P,r).

Punto simétrico respecto a una recta, se obtiene después de haber calculado la distancia mínima a una recta, y por tanto Q.

Y también se definen traslaciones y la bisectriz de un ángulo y mediatriz de un segmento, desde el punto de vista de la geometría analítica.

<u>Cónicas.</u>

En este apartado se hace un recorrido por las cónicas y la demostración de sus fórmulas analíticas partiendo de las definiciones de las mismas.

Circunferencias y elipses.

Circunferencia,

el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia r de un punto $P(p_1,p_2)$, ajustado al axioma 3 de Euclides.

$$d\left[(x,y),(p_1,p_2)\right]=r \Rightarrow \sqrt{(x-p_1)^2+(y-p_2)^2}=r \Leftrightarrow (x-p_1)^2+(y-p_2)^2=r^2$$

Que es la ecuación analítica de una circunferencia de radio r y centro $P(p_1,p_2)$.

Como reconocer una circunferencia a partir de $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, se omite el termino en xy intencionadamente, más adelante en un apéndice se explica que consecuencias tiene y se da un ejemplo.

Para el caso de la circunferencia se deduce que la condición es A=B.

Elipse,

Dados dos puntos F_1 y F_2 llamados **focos**, una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos P cuya suma de distancias a los focos es constante. En símbolos:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

Ilustración 38: García, A. (2020). Matemáticas I. Bachillerato de Ciencias. apuntesmareaverde.org.es

Partiendo de esa definición y con una elipse centrada en el origen y alineada con los ejes coordenados se llega a la conocida expresión de la ecuación analítica de la elipse. Siguiendo la siguiente argumentación,

- Los focos están en (-c,0) y (c,0), y se toma la hipótesis que el centro de la elipse están en el (0,0).
- (a,0) está en la elipse, efectivamente. d[(a,0),(c,0)]+d[(a,0),(-c,0)]=2a
- Veamos si (0,b) está en la elipse, se construye el triángulo rectángulo (0,b), (0,0) y (c,0) haciendo que la diagonal sea a. Entonces tenemos que (0,b) están en la elipse ya que la suma de la distancia a ambos focos es 2a, pero debe satisfacer la siguiente condición,

$$a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

Por tanto, satisfaciendo esa condición (a,0) y (0,b) pertenecen a la elipse.

- Ahora hace falta probarlo para el resto de puntos.

Se plantea la ecuación de cualquier punto de la elipse en base a la definición.

$d(P,F_1)+d(P,F_1)=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+c^2+2cx+y^2=4a^2+x^2+c^2-2cx+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow 4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow (cx-a^2)^2=\left[-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2 \Leftrightarrow c^2x^2+a^4-2cxa^2=a^2(x^2+c^2-2xc+y^2) \Leftrightarrow x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \Leftrightarrow -b^2x^2-a^2y^2=-b^2a^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Donde tras hacer las operaciones anteriores se llega a la conocida fórmula de la ecuación de la elipse, centrada en el origen y con semiejes a y b y posición de los focos que cumplen la relación expresada anteriormente.

Se define excentricidad de la elipse, como sigue,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Se puede comprobar que e siempre está entre 0 y 1, si b>a, la elipse está orientada en el otro eje cartesiano y se intercambian los valores entre b y a para calcular la excentricidad. Y si e=0, ambos ejes son iguales y tenemos la circunferencia. Mientras e=1, no puede alcanzarse con esta definición.

A partir de la ecuación general, $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, se prueba con un ejemplo que esa es la ecuación de una elipse cuando A y B tienen el mismo signo. El procedimiento es el de completar cuadrados en x e y y se llega a una expresión más general que la demostrada que tiene la siguiente forma,

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Con (x_0,y_0) el centro de la elipse y a y b los semiejes.

Hipérbolas,

Dados dos puntos F_1 y F_2 llamados **focos**, una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos P cuya diferencia de distancias a los focos, en valor absoluto, es constante. En símbolos:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Ilustración 39: García, A. (2020). Matemáticas I. Bachillerato de Ciencias. apuntesmareaverde.org.es

Partiendo de esa definición de hipérbola y procediendo de manera similar al caso de la elipse se obtienen la ecuaciones de la hipérbola, en este caso la relación que tienen que cumplir a, b y c, vienen dadas por la siguiente expresión,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Siendo la expresión de una hipérbola paralela a los ejes cartesianos,

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Con (x_0,y_0) el centro de la hipérbola, siendo a el semieje real y b el semieje imaginario.

Siendo la excentricidad,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

En este caso la excentricidad e>1, y no puede ser de otra manera sin cambiar la definición de la curva.

Y además,

$$y = \frac{b}{a}x \text{ , } y = \frac{-b}{a}x$$

son las asíntotas de la hipérbola.

A partir de la ecuación general, $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, se prueba con un ejemplo que esa es la ecuación de una hipérbola cuando A y B tienen distinto signo.

Parábolas,

Dado un punto F llamado **foco,** y una recta r llamada directriz, una **parábola** es el lugar geométrico de los puntos P que tienen la misma distancia al foco que a la directriz. En símbolos:

$$d(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}) = d(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{r})$$

Ilustración 40: García, A. (2020). Matemáticas I. Bachillerato de Ciencias. apuntesmareaverde.org.es

Haciendo la construcción geométrica de ayuda y ajustándose a la definición de lugar geométrico para parábola,

$$y = \alpha x^2, con\ p = \frac{1}{2\alpha}$$

Siendo p, la distancia entre el foco y la directriz.

A partir de la ecuación general, $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, se comprueba que es la ecuación de una parábola cuando A ó B son iguales a cero, sólo uno de los dos, si son los dos, es la ecuación de una recta.

Cónicas generales.

A partir de la ecuación general, $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E+Fxy=0$. Se comprueba a través de programas informáticos de representación gráfica mediante algunos ejemplos, que la aparición del término cruzado significa que las cónicas presentan un giro respecto a los ejes de coordenadas cartesianos, sin variar el significado del resto del análisis que se ha realizado sobre cada una de las familias de cónicas (elipse, hipérbola y parábola).

Este es un apartado muy importante, tanto históricamente, las cónicas son de las primeras curvas estudiadas por el hombre, sino en sí mismas por las múltiples aplicaciones de las mismas.

4.6.- 2º Bachillerato. Matemáticas II (ó Bachillerato de ciencias).

En este curso el bloque de geometría está dividido en tres capítulos:

- Geometría en el espacio-Vectores.
- Rectas y planos en el espacio.

- Geometría métrica en el espacio.

4.6.1.- Capítulo 4. Geometría en el espacio-vectores.

En este capítulo se estudiarán los vectores en el espacio de dimensión tres, que tienen muchas aplicaciones tanto en el campo de la física como en el de las matemáticas. Se extenderá en producto vectorial a dimensión tres, con el que se calculan ángulos y proyecciones y se definirá el producto vectorial para calcular superficies y el producto mixto para calcular volúmenes.

Geometría en el plano.

Se conocen los conceptos ya presentados en cursos anteriores de,

- Punto. Es adimensional, no tiene ancho, largo ni profundidad. Y se representa por un par ordenado A(x,y)
- Vector. Se da por un par de componentes ordenados (v_1,v_2) y el vector es caracterizado por su módulo, dirección y sentido.
- Recta. Figura del plano que sólo tiene longitud, ni ancho ni profundidad. Y se define por medio de un punto P y un vector **v**. Algebraicamente se puede representar por diferentes tipos de ecuaciones, (vectorial, paramétrica, contínua, implícita,...)

Vectores en el espacio.

Se dan las características definitorias de un vector (módulo, dirección y sentido) de manera análoga a como se hicieron en el curso anterior.

En el conjunto de los vectores libres, se puede definir una relación de equivalencia, diciendo que pertenecen a la misma clase los vectores fijos de igual módulo, dirección y sentido. Y todos los vectores fijos de igual módulo, dirección y sentido forman un mismo vector libre.

Análogamente se definen las operaciones con vectores a como se hizo en 2 dimensiones, en el caso del espacio afín euclídeo.

Suma de vectores. Con la prueba gráfica de la construcción del paralelogramo.

Opuesto de un vector.

Resta de vectores.

Producto de un vector por una constante. $\kappa \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\kappa V}$

Combinación lineal de vectores.

Base de un sistema de vectores. Definida de la siguiente manera,

Se dice que el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ forman una **base** del espacio de dimensión n, y se denota por $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ cuando verifican:

- Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son linealmente independientes.
- Cualquier otro vector del espacio $\vec{v}$ se puede escribir como **combinación lineal** de ellos, es decir, $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Re$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$.

Ilustración 41: González, L. Valdés A. (2020). Matemáticas II. apuntesmareaverde.org.es

Una conclusión inmediata de la anterior definición es que en el espacio de dimensión tres todas las bases tienen 3 vectores. Y cada vector libre **v** se puede expresar de la siguiente manera, u otra forma de decirlo, cada vector libre **v**, tiene tres componentes.

$$Sea\ B = \left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right\}\ \ una\ base \Rightarrow \overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \lambda_3\overrightarrow{u_3}$$

Sistema de referencia.

Y de la anterior surge esta siguiente definición. En el espacio de dimensión tres un sistema de referencia es un par, formado por un punto fijo O y una base B y se denota R=[O,[**u**,**v**,**w**]].

Avanzando un poco más el sistema de referencia canónico está formado por el punto O=(0,0,0) el origen de coordenadas y cuya base es B=[**i**,**j**,**k**], siendo **i**,**j**,**k** vectores perpendiculares entre sí y de módulo 1.

Las operaciones entre vectores o vectores y puntos, se extienden de manera natural cuando se opera con las componentes de éstos en un sistema de referencia.

Estudio de la dependencia e independencia lineal de vectores mediante sus componentes.

Se parte de la siguiente definición,

Dados n vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, se dice que son **linealmente independientes** cuando ningún vector del conjunto puede expresarse como combinación lineal del resto.

Análogamente, se dice que n vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son **linealmente dependientes** cuando cualquiera de ellos puede expresarse como combinación lineal del resto.

Ilustración 42: González, L. Valdés A. (2020). Matemáticas II. apuntesmareaverde.org.es

Y se enuncia la siguiente proposición,

Los n vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un conjunto son **linealmente independientes** cuando al resolver el sistema homogéneo $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ sólo es posible la solución trivial:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Ilustración 43: González, L. Valdés A. (2020). Matemáticas II. apuntesmareaverde.org.es

De los conocimientos adquiridos en el álgebra matricial, tanto en el curso objeto de este libro como en anteriores, para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales se extraen las siguientes conclusiones.

- $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$,....,$\mathbf{v_n}$, son linealmente independientes cuando la matriz que forman sus componentes tiene rango n.
- $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$,....,$\mathbf{v_n}$, son linealmente dependientes cuando la matriz que forman sus componentes tiene rango estrictamente menor que n.

Aplicaciones de los vectores.

Se plantean y se prueban propiedades,

- Punto medio de un segmento.
- Condición para puntos alineados.

Producto escalar.

El ángulo que forman dos vectores libres es el menor de los ángulos que forman dos de sus representantes de origen común. Y se define como el número real que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del

$$\vec{u}\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,cos\alpha$$

ángulo que forman.

Interpretación geométrica, el producto escalar de dos vectores no nulos es igual al producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre el primero.

Propiedades, muchas ya demostradas, pero ahora generalizadas al espacio de tres dimensiones.

Conmutativa, asociativa con el producto de un número real, distributiva respecto a la suma, producto escalar de dos vectores es 0 si y solo si estos son perpendiculares, el producto de un vector por si mismo siempre es positivo e igual a su módulo al cuadrado.

Expresión analítica del producto escalar, la expresión ya conocida generalizada al espacio tridimensional.

$$\vec{u}\,\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Se comprueba que se cumple para la base canónica.

Se dan las expresiones para el cálculo de ángulos entre vectores y las expresiones de los cosenos directores de un vector.

Producto vectorial.

Se define de la siguiente manera,

Dados dos vectores del espacio de dimensión tres: $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto vectorial** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se denota por $\vec{u}\times\vec{v}$ o $\vec{u}\wedge\vec{v}$, a otro **vector** con las siguientes características:

- **Módulo**: $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \text{sen}\ \alpha$, siendo α el menor ángulo que determinan los dos vectores.
- **Dirección**: es la perpendicular de cualquier plano generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- **Sentido**: es el de avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (regla de *Maxwell*).

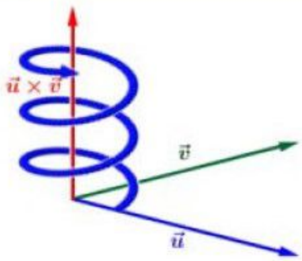


Ilustración 44: González, L. Valdés A. (2020). Matemáticas II. apuntesmareaverde.org.es

Interpretación geométrica.

El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo que tiene por lado los vectores **u** y **v**.

La demostración se sigue desde la siguiente ilustración,

Tenemos que, $Area\ paralelogramo = |\vec{u}|\,h$

$$sen\alpha = \frac{h}{|\vec{v}|} \Rightarrow h = |\vec{v}|\,sen\alpha\ Area\ paralelogramo = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,sen\alpha = |\vec{u}\,x\,\vec{v}|$$

Y por tanto,

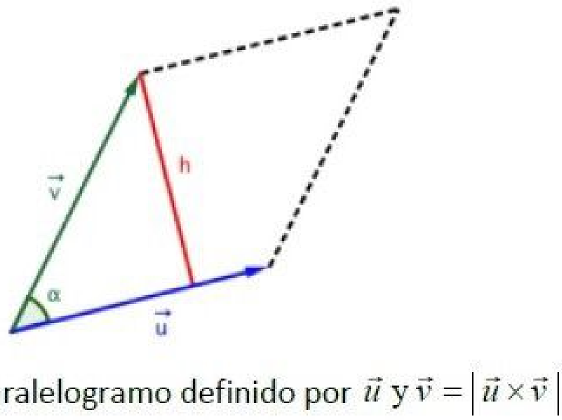


Ilustración 45: González, L. Valdés A. (2020). Matemáticas II. apuntesmareaverde.org.es

Propiedades del producto vectorial.

Se enuncian y demuestran las siguientes propiedades.

1. El producto vectorial de un vector por si mismo es cero.
2. Propiedad anticonmutativa. Es decir, **u**x**v**=-**v**x**u**
3. Producto por un número real. λ(**u**x**v**)=(λ**u**)x**v**=**u**x(λ**v**)
4. Propiedad distributiva respecto de la suma. **u**x(**v**+**w**)=**u**x**v**+**u**x**w**
5. El producto vectorial de dos vectores no nulos es cero si y solo si los vectores son paralelos.
6. No se cumple la propiedad asociativa. $\vec{u}x(\vec{v}x\vec{w}) \neq (\vec{u}x\vec{v})x\vec{w}$

Expresión analítica del producto vectorial.

Que es una demostración de especial interés, tenemos,

$$R \equiv \left\{0; \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}\right\} \qquad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ y } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Un sistema de referencia canónico en el espacio y dos vectores expresados en ese sistema de referencia.

El producto vectorial se expresa en la siguiente ecuación y aplicando la distribución respecto a la suma y el producto por un número real, se obtiene lo siguiente,

$$(\vec{u}x\vec{v}) = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})x(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) = u_1\vec{i}x(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) + u_2\vec{j}x(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) + u_3\vec{k}x(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) = u_1v_1(\vec{i}x\vec{i}) + u_1v_2(\vec{i}x\vec{j}) + u_1v_3(\vec{i}x\vec{k}) + u_2v_1(\vec{j}x\vec{i}) + u_2v_2(\vec{j}x\vec{j}) + u_2v_3(\vec{j}x\vec{k}) + u_3v_1(\vec{k}x\vec{i}) + u_3v_2(\vec{k}x\vec{j}) + +u_3v_3(\vec{k}x\vec{k})$$

Haciendo las operaciones y teniendo en cuenta que **i**, **j**, **k** son una base canónica,

$$(\vec{u} x \vec{v}) = \vec{i}(u_2v_3 - u_3v_2) + \vec{j}(u_3v_1 - u_1v_3) + \vec{k}(u_1v_2 - u_2v_1) = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Se llega a la anterior conclusión.

Aplicaciones del producto vectorial.

Dados dos vectores **u** y **v**. El cálculo del área del paralelogramo que tiene como lados esos vectores o del triángulo, son inmediatas tras las demostraciones que se han hecho.

Base de vectores ortogonales que será, por ejemplo,

$$\{\vec{u}, \vec{u} x \vec{v}, \vec{u} x(\vec{u} x \vec{v})\}$$

<u>Producto mixto de vectores.</u>

Dados **u**, **v** y **w**, se llama producto mixto de vectores, **u**, **v** y **w** y se denota [**u**,**v**,**w**] al número que se obtiene al calcular el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} x \vec{w})$$

Tiene el significado geométrico del volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores si son no nulos y no coplanarios.

Se enuncian varias propiedades del producto mixto.

1. El producto mixto no varía si se permutan circularmente sus factores.
2. El producto mixto cambia de signo si se permutan dos factores.
3. Multiplicación por valores reales.
4. Propiedad distributiva respecto a la suma.
5. El producto mixto de tres vectores es nulo si y solo si son linealmente independientes.

Expresión analítica del producto mixto.

Se puede probar y se demuestra que,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Aplicaciones del producto mixto.

Se puede utilizar para el cálculo de volúmenes de paralelogramos y tetraedros.

En el apartado curiosidades-revista, se lee este artículo lo que sigue, que por su interés y relación con el tema que estamos estudiando se reproduce a continuación. Con este artículo se abre la puerta a presentar a los alumnos las geometrías no euclidianas. Y también a un acercamiento a las teorías axiomáticas dentro de la geometría. La educación secundaria no tiene como objeto el desarrollo y comprensión y el papel que

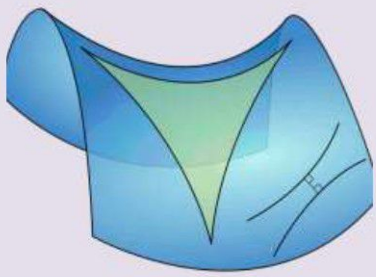
Otras Geometrías

Euclides (325 aC – 265 aC), en Los Elementos, partió de cinco postulados para construir la Geometría. Si alguno de esos postulados no se cumple, entonces tenemos lo que se denomina las **Geometrías No Euclídeas**.

El quinto postulado dice: "Dada una recta y un punto exterior a ella, hay **una única recta** que es paralela a la recta dada y que pasa por el punto".

Cuando a principios del siglo XIX se intentó demostrar el postulado por reducción al absurdo se encontró, con sorpresa, que no se llegaba a una contradicción, que se podían construir geometrías que podían no verificarlo.

De modo independiente, distintos matemáticos (Gauss, Lobachevsky, Bolyai…), en ese intento de demostrar el quinto postulado llegaron a la **Geometría Hiperbólica**.

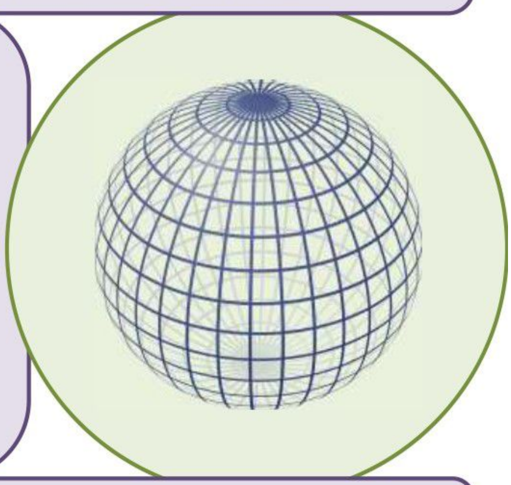


La Geometría Hiperbólica es tan consistente como la Geometría Euclídea, y "su" quinto postulado es: "*Dada una recta y un punto exterior a ella,* **existen al menos dos rectas paralelas** *a la dada que contienen al punto*". En la geometría hiperbólica la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que 180°. Puedes pensar en una geometría hiperbólica si te sitúas sobre una trompeta.

Si reescribimos el quinto postulado como: "*Dada una recta y un punto exterior a ella,* **no existe ninguna recta paralela** *a la dada que contenga al punto*", se obtiene la **Geometría Elíptica**.

Imagina que estás en una esfera. Tendrás que redefinir qué entiendes como "rectas". Si una recta es el camino más corto posible que une dos puntos, tendrás lo que se conoce como **líneas geodésicas** (los meridianos de un globo terráqueo). Entonces, por una de esas *nuevas* rectas y un punto exterior, **todas** las rectas que traces cortan a la primera.

Si lo piensas, cada vez que miras un globo terráqueo estás viendo algo de Geometría Elíptica.



Actualmente las Geometrías No Euclídeas proporcionan otras formas de entender el mundo, siendo utilizadas, por ejemplo, en Teoría de la Relatividad, o en el estudio de fenómenos ópticos y propagación de ondas.

Ilustración 46: González, L. Valdés A. (2020). Matemáticas II. apuntesmareaverde.org.es *desempeñan los sistemas axiomáticos en la geometría, pero si se pueden introducir y dar ideas a los alumnos.*

4.6.2.- Capítulo 5. Rectas y planos en el espacio.

<u>La recta en el espacio.</u>

Dados un sistema de referencia, un punto P_0 de la recta y un vector director de la recta.

$$R \equiv \left\{0; \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}\right\}$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in r \text{ y } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ vector director de } r$$

Se plantean las ecuaciones de la recta en el espacio que es una extensión de lo ya hecho para el plano,

- Ecuación vectorial de la recta.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

- Ecuaciones paramétricas de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{array}\right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

- Ecuaciones continuas de la recta.

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

- Ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta.

Con las ecuaciones continuas de la recta, igualándolas dos a dos, se llega a la siguiente expresión que no es única para la recta,

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'z + C' = 0 \end{array}\right\}$$

Hay varias actividades, para asimilar los conceptos introducidos, en particular, hallar las ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos en todas las formas de la recta introducidas.

<u>Ecuaciones del plano en el espacio.</u>

Dados un sistema de referencia, un punto P_0 del plano y u y v dos vectores directores.

$$R \equiv \left\{0; \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}\right\}$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi \text{ y } \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ y } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ vectores directores de } \pi$$

Se plantean las siguientes expresiones para las ecuaciones del plano,

- Ecuación vectorial del plano.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \ con\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Ecuaciones paramétricas del plano.

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\} \ con\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Ecuación general o implícita del plano.

Para hallarla, se plantea de la siguiente manera y se aprovecha lo que los alumnos ya saben sobre determinantes.

Partiendo de la ecuación vectorial, tenemos,

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP} - (-\overrightarrow{P_0O}) = \overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_0P} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$$

Tenemos tres vectores y uno de ellos es linealmente dependiente de los otros dos, por tanto el rango de la matriz formada por los tres vectores será dos y el determinante nulo. Expresado en coordenadas,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Y desarrollándolo,

$$x \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ con\ A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

*Con esta demostración se prueba también lo siguiente, ya que el producto vectorial entre **u** y **v** es el siguiente,*

$$\overrightarrow{u} x \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \ con\ \overrightarrow{w} = (A, B, C)$$

*El vector **w** es ortogonal al plano. Es una demostración interesante para los alumnos, interrelación, conexión, hacer matemáticas.*

<u>Posiciones relativas.</u>

Se estudian posiciones relativas de planos entre sí. Dos planos, tres planos, haces de planos (con una recta común, perpendiculares a una recta).

Posiciones relativas de recta y plano.

Posiciones relativas de dos rectas.

4.6.3.- Capítulo 6. Geometría métrica en el espacio.

Ángulos en el espacio.

Ángulo (agudo) entre dos rectas es el determinado por los vectores directores de ambas, por tanto,

$$cos\alpha = \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}$$

Ángulo (agudo) entre recta r y plano π, será el complementario del que forman el vector director de r y el vector normal a π.

Ángulo (agudo) entre dos planos será el que forman los vectores normales a ambos planos.

Paralelismo, perpendicularidad y posiciones relativas.

Hay múltiples casos, se extiende lo ya explicado en el anterior tema.

Proyecciones ortogonales.

Proyección ortogonal de un punto sobre una recta.

La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r será otro punto Q perteneciente a la recta, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al vector director de la recta.

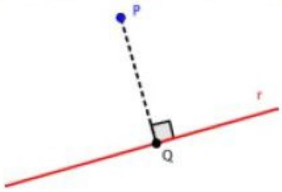


Ilustración 47: González, L. Valdés, A. (2020). Matematicas II. apuntesmareaverde.org.es

Se plantean dos métodos, hallar el plano perpendicular a la recta que contiene a P, y junto con la recta r, queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, donde la solución es Q.

Y como segundo método, si B es un punto de r y **v** vector director de r

$$r \equiv \frac{x - b_1}{v_1} = \frac{y - b_2}{v_2} = \frac{z - b_3}{v_3}$$
$$Q \in r \therefore Q = (b_1 + t \cdot v_1, b_2 + t \cdot v_2, b_3 + t \cdot v_3)$$

Y finalmente, tenemos que, **PQ** y **v** son perpendiculares por lo que su producto escalar es 0.

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Tenemos una ecuación con una incógnita en t, de donde se halla Q.

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano.

Se halla la recta perpendicular al plano y que contenga al punto P y en la intersección de la recta y el plano se encuentra Q.

Proyección ortogonal de una recta sobre un plano.

La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano π, es otra recta s, tal que, r y s están contenidas en π' y π y π' son ortogonales.

Hay varias formas de hallar s, la proyección de r sobre π, que se describen como ejemplos.

<u>Puntos simétricos.</u>

Punto simétrico respecto a otro punto.

El simétrico de P respecto a Q, es otro punto P', tal que Q es el punto medio del segmento PP'.

$$Q = (q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{p_1 - p_1'}{2}, \frac{p_2 - p_2'}{2}, \frac{p_3 - p_3'}{2}\right)$$

Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, donde se halla P'.

Punto simétrico respecto a una recta.

Hay hallar la proyección ortogonal respecto a una recta y posteriormente el simétrico respecto a otro punto.

Punto simétrico respecto a un plano.

Se halla la proyección ortogonal del punto respecto al plano y posteriormente el simétrico respecto a la proyección ortogonal.

<u>Distancias en el espacio.</u>

Distancia entre dos puntos.

La distancia entre dos puntos A y B en el espacio es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{matrix} A(a_1, a_2, a_3) \\ B(b_1, b_2, b_3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

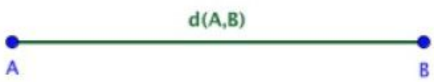


Ilustración 48: González, L. Valdés, A. (2020). Matematicas II. apuntesmareaverde.org.es

Se define como en la ilustración anterior.

Distancia entre punto y recta.

Se puede hallar la proyección ortogonal del punto sobre la recta y con ambos puntos se calcula la distancia. O bien, este segundo método, aprovechando los conocimientos adquiridos,

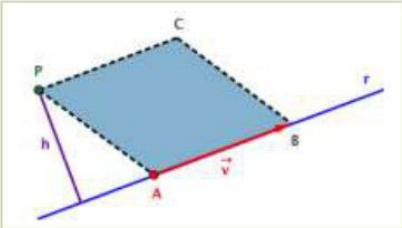


Ilustración 49: González, L. Valdés, A. (2020). Matematicas II. apuntesmareaverde.org.es

Conocida la recta r en forma vectorial y el punto P, tenemos,

$$Area\ paralelogramo = \left|\vec{v}\right| \cdot h = \overrightarrow{PA} \times \vec{v} \Rightarrow h = \frac{\overrightarrow{PA} \times \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$$

Que es un método que ayuda a los alumnos a profundizar y consolidar sus conocimientos.

Se ilustran y se demuestran igualmente otro tipo de ejercicios de distancias entre los diferentes elementos del espacio que se han estudiado.

5.- Conclusiones.

La idea de este trabajo es la de responder a dos preguntas,

1. ¿Qué propuestas curriculares para la enseñanza de la geometría en secundaria se plantean en los libros de texto españoles?
2. ¿En qué medida el planteamiento que los libros de texto hacen está alineado con el desarrollo de altos niveles de alfabetización matemática?

Y con tres objetivos,

1. A nivel personal, aprender sobre este tópico para mejorar mi capacidad docente en esta área y por extensión en otras.
2. A nivel práctico, preparar una propuesta didáctica que mejore las deficiencias que se puedan encontrar.
3. A nivel intelectual, identificar como se integra la geometría axiomática en el actual curriculum de secundaria.

Se ha realizado un análisis de contenido del curriculum del bloque geometría en la educación secundaria. Y para ello se han utilizado los textos de Matemáticas de la editorial Marea Verde (www.apuntesmareaverde.org.es) se ha hecho un resumen con algunos comentarios, el trabajo realizado está en el apartado 4.

La primera pregunta planteada queda respondida en el resumen realizado en el apartado cuatro, para la segunda pregunta vamos a recoger las siguientes evidencias que se desgranan del trabajo del análisis realizado sobre los textos objeto de este trabajo.

- Apartado 4.1.1.- Se hace una introducción implícita de las ideas de conmensurabilidad y completitud que se recogen en los sistemas axiomáticos.
- Apartado 4.1.2.- Definiciones de algunos términos de acuerdo a los sistemas axiomáticos.

  Suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º, con lo que implícitamente se está asumiendo el postulado de las paralelas de las geometrías euclidianas, esta suposición se hace en todos los textos analizados.

  Formula y demostración de que, en una circunferencia, el ángulo central es el doble del inscrito. Una muestra de “hacer matemáticas”.

  Se da una reseña sobre Euclides de Alejandría. Alguna idea histórica.
- Apartado 4.1.3.- Área del círculo desde el área de un polígono regular cuando sus lados tienden a infinito y la apotema al radio. Hacer matemáticas, relacionar disciplinas e introducir ideas sobre el cálculo infinitesimal.

Referencia histórica a Eratóstenes de Cirene y el cálculo del diámetro de La Tierra. Y al número π y la aproximación de Arquímedes.

- Apartado 4.2.2.- Introducción del concepto de semejanza de triángulos de una forma similar al postulado de similaridad de Birkhoff.
  Se hace una referencia histórica a los egipcios, que ya conocían el Teorema de Pitágoras y la cuerda de los trece nudos y las ternas pitagóricas.
- Apartado 4.3.1.- Se hace una reseña histórica de Euclides y a su formalización de la geometría. Se enuncian los 5 axiomas de su sistema axiomático.
- Apartado 4.3.3.- Enunciado del principio de Cavalieri (Axioma 22 SMSG). Es también una introducción al calculo infinitesimal.
  Relación de los grafos con los poliedros regulares, al apoyarlos en un plano sobre una de sus caras y proyectar sus vértices y aristas. Interconexión entre disciplinas matemáticas.
- Apartado 4.4.1.- Relaciones de semejanza entre longitudes, áreas y volúmenes, demostrado para un cubo. Ejemplo de hacer matemáticas.
  Demostración del Teorema de Tales. Asumiendo dos postulados de SMSG, el postulado del área y el postulado de la suma de áreas, dos ideas que implícitamente ya estaban asumidas. Introduciendo a los alumnos la demostración que a su vez es un gran ejercicio matemático.
  Relaciones de proporcionalidad entre los triángulos que se forman en un pentágono regular.
- Apartado 4.4.2.- Demostraciones de varias identidades trigonométricas y del teorema de los senos. Hacer matemáticas y relacionar con otros bloques de las matemáticas.
  Trigonometría esférica. Relacionado con la Tierra, que se menciona en los contenidos del BOCYL. Y también se dice que la suma de los ángulos de un triángulo suman más de 180º, enunciando una geometría no euclídea.
- Apartado 4.4.3.- Problemas de hacer matemáticas.
- Apartado 4.5.1.- Demostraciones de identidades trigonométricas, en particular, sen(a+b), cos(a+b) tg(a+b).
  Demostración del Teorema del coseno.
  Reseña histórica a Eratóstenes de Cirene. Explicando como realizó su experiencia de la medición del diámetro de la Tierra. Se plantea como actividad la replica del experimento de la medición del diámetro de la Tierra con la colaboración de otro instituto de España.
- Apartado 4.5.2.- Vectores interrelacionan la Física y las Matemáticas.
  Demostraciones de las ecuaciones de las cónicas.
- Apartado 4.6.1.- Demostraciones de propiedades vectoriales. El producto vectorial y el producto mixto. Relación con otros bloques de las matemáticas.
  Mención explícita a las geometrías elíptica e hiperbólica, en las que no se cumple el postulado de las

paralelas. Y su importancia actual para la ciencia y la tecnología. Navegación y estructura del universo.

Todos los libros analizados contienen más reseñas o referencias históricas así como una gran abundancia de problemas de acuerdo a los niveles definidos por Stein & Smith "Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice." *Mathematics Teaching in the Middle School* 3: 344–50.
Hay problemas, actividades y demostraciones de todos los niveles de Stein & Smith, sin embargo, son menos abundantes los de nivel 4 (o "hacer matemáticas"). Las propuestas didácticas que se van a plantear a continuación se hacen con la idea de reforzar las tareas de hacer matemáticas que son las más dificiles de diseñar y las que más aportan a los alumnos.

En lo concerniente a la fidelidad a los sistemas axiomáticos de la geometría.
Está fuera de los contenidos curriculares de la secundaria la profundización en tales conocimientos sobre la geometría. No obstante, en los libros analizados hay múltiples referencias a Euclides, a sus definiciones, a sus Axiomas, y también a otras geometrías no euclidianas y a multitud de conceptos que se recogen en los sistemas axiomáticos.
No se puede hacer una formación profunda de los alumnos en la geometría axiomática, pero sí se les puede introducir en él, con términos, ideas y conceptos que les ayudarán en su futura comprensión de la geometría.

6.- Propuestas Didácticas.

Las propuestas didácticas se realizan dentro de los contenidos mínimos regulados por la Ley. En concreto, para la ESO están recogidos en la Orden EDU/362/2015 de 8 de Mayo. Y para el Bachillerato en la Orden EDU/363/2015 de 8 Mayo. En el bloque de geometría, estos contenidos mínimos son los siguientes:

1º ESO. Matemáticas.

- Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad.
- Ángulos y sus relaciones. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades.
- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Clasificación de triángulos. Rectas y puntos notables del triángulo. Uso de medios informáticos para analizarlos y construirlos.
- Clasificación de cuadriláteros. Propiedades y relaciones.
- Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares.
- Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
- Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.

2º ESO. Matemáticas.

- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Cálculo de áreas y perímetros.
- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
- Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.
- Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
- Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes en el mundo físico.

3º ESO. Matemáticas (enseñanzas académicas)

- Geometría del plano. Lugar geométrico. Mediatriz, bisectriz, circunferencia. Otros lugares geométricos que den lugar a rectas, segmentos y arcos de circunferencia.
- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas.
- Aplicación a la resolución de problemas.
- Movimientos del Plano: Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Elementos dobles o invariantes. Reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y la naturaleza.
- Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Geometría del espacio. Poliedros. Planos de simetría en los poliedros. Fórmula de Euler para los poliedros simples. Poliedros regulares, poliedros duales. Cilindro, cono, tronco de cono y esfera. Intersecciones de planos y esferas.
- Cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.
- Contextualización en la realidad. El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.

4º ESO. Matemáticas (enseñanzas académicas).

- Radian. Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes. Relaciones métricas en los triángulos.
- Razones trigonométricas de ángulos agudos y de ángulos cualesquiera. Relaciones entre ellas. Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, opuestos y que se diferencian en uno y dos rectos. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos aplicando trigonometría elemental.
- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
- Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
- Iniciación a la geometría analítica en el plano: coordenadas. Vectores.
- Definiciones geométricas y analíticas de las operaciones: suma de vectores y producto de número por vector. Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua y general o implícita. Paralelismo, perpendicularidad: condiciones de las coordenadas de los vectores.
- Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

1º Bachillerato. Matemáticas I.

- Medida de un ángulo en radianes.
- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Razones trigonométricas de los ángulos suma, diferencia de otros dos, doble y mitad. Fórmulas de transformaciones trigonométricas. Razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios y opuestos, y reducción al primer cuadrante.
- Resolución de ecuaciones trigonométricas.
- Teoremas del seno y del coseno. Resolución de triángulos. Resolución de problemas geométricos diversos.
- Vectores libres en el plano. Operaciones con vectores.
- Producto escalar. Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores.
- Bases ortogonales y ortonormales.
- Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Paralelismo y perpendicularidad. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.
- Lugares geométricos del plano.
- Cónicas. Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Ecuación y elementos.

2º Bachillerato. Matemáticas II.

- Vectores en el espacio tridimensional. Dependencia e independencia lineal. Base del espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.
- Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.
- Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos).
- Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).

Se van a plantear las siguientes propuestas didácticas, como se ha comentado en el apartado de Conclusiones se van a dirigir hacia el nivel cognitivo de “hacer matemáticas”.

Cálculo de π con polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia. (1º Bachillerato)

Enunciado. Calcula π por medio de polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia emulando el método que utilizó Arquímedes.

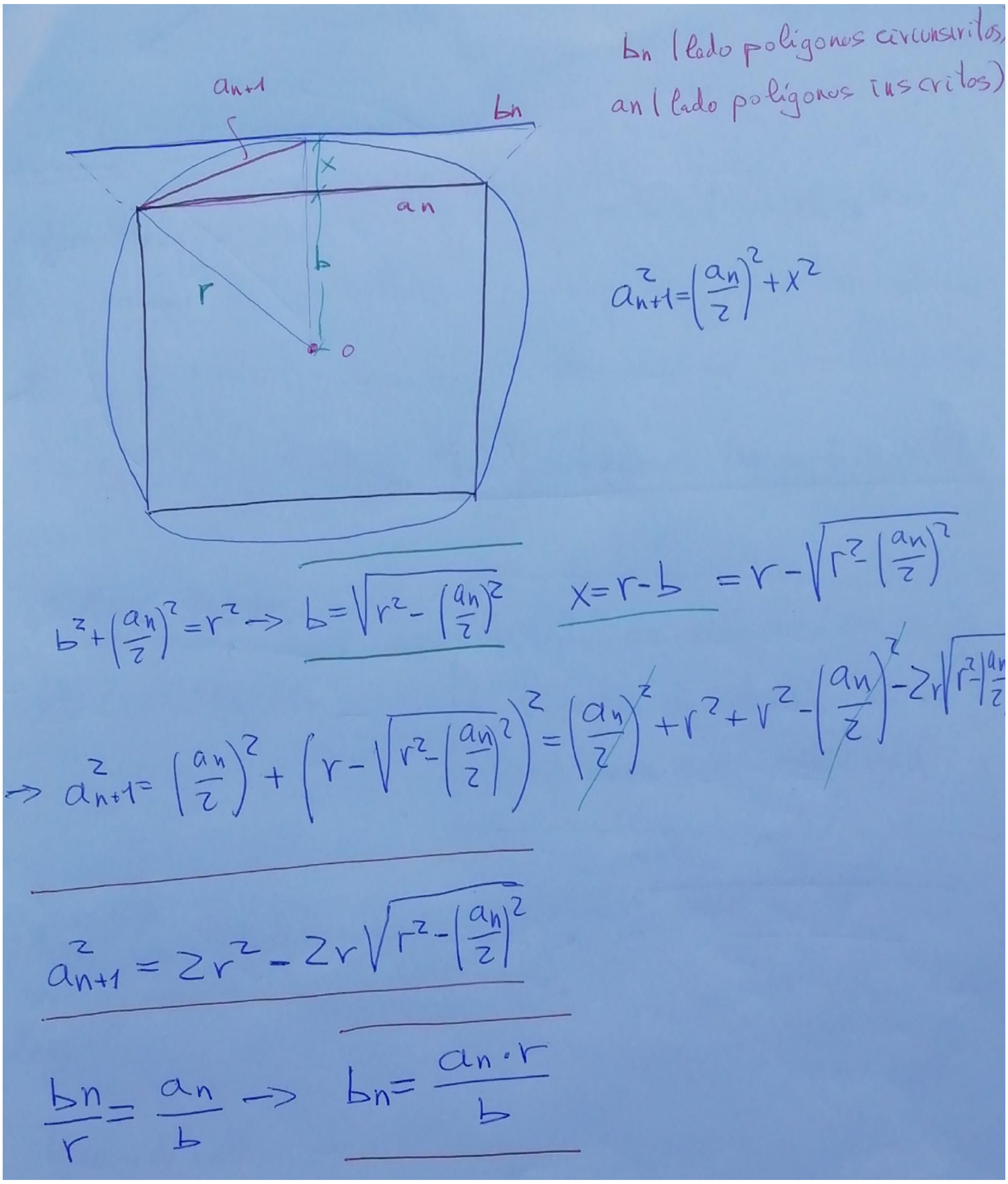


Ilustración 50: Deducción de los términos de la sucesión

Solución.

Se va a deducir la serie que forman los lados de los polígonos regulares tanto inscritos como circunscritos y con un programa de cálculo se hará el cálculo para un número de lados tendiendo a infinito.

Se ha deducido el término a_{n+1} (lado n+1 del polígono inscrito) en función a_n para los polígonos inscritos para el caso de un cuadrado, esta deducción es válida para cualquier otro polígono regular. Por otra parte, se da que para cada polígono n-simo, los lados del polígono inscrito y circunscrito son semejantes, y de ahí se deduce b_n (lado polígono n-simo de la sucesión de polígonos circunscritos). Y ya sólo queda pasar a los cálculos realizados con Open Office. Se ha hecho con una sucesión de polígonos de lado $6*2^n$. Ya que el lado del hexágono regular se puede calcular sin usar la trigonometría y para una circunferencia de radio 0.5, así el perímetro tiende a π.

$$a_{n+1} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}$$

Polígonos de $M*2^n$ lados

M=	6
r=	0,5

	Lado inscrito	**Perímetros inscritos**	**Error (en ppm) INSCRITOS**	**Lados polígono**	**Lado circunscrito**	**Perímetro circunscrito**	**Error (en ppm) CIRCUNSCRITOS**
a_0=	0,500000	3,000000000	-45070,34145	6	0,577350	3,464101615	102657,79084
a_1=	0,258819	3,105828541	-11384,07053	12	0,267949	3,215390309	23490,52335
a_2=	0,130526	3,132628613	-2853,34265	24	0,131652	3,159659942	5750,99655
a_3=	0,065403	3,139350203	-713,79418	48	0,065543	3,146086215	1430,34506
a_4=	0,032719	3,141031951	-178,47721	96	0,032737	3,142714600	357,12652
a_5=	0,016362	3,141452472	-44,62110	192	0,016364	3,141873050	89,25294
a_6=	0,008181	3,141557608	-11,15539	384	0,008181	3,141662747	22,31144
a_7=	0,004091	3,141583892	-2,78885	768	0,004091	3,141610177	5,57775
a_8=	0,002045	3,141590463	-0,69721	1536	0,002045	3,141597034	1,39443
a_9=	0,001023	3,141592106	-0,17429	3072	0,001023	3,141593749	0,34862
a_{10}=	0,000511	3,141592517	-0,04361	6144	0,000511	3,141592927	0,08712
a_{11}=	0,000256	3,141592619	-0,01112	12288	0,000256	3,141592721	0,02156

Ilustración 51: Cálculo de la aproximación a π

Calcula el área de Valladolid. (2ºESO)

Enunciado. Se adjunta el plano de Valladolid, extraído de https://www.google.com/maps, y calcula el área encerrada por la VA-30, VA-20 y el río Pisuerga. Da una medida del error cometido.

Solución. El mapa contiene una escala, por lo que se puede medir en él. Se quiere que el alumno aproxime el área solicitada por polígono y sumándolos todos ellos calcule el área.

Para calcular el error se puede hacer una aproximación al área por defecto y otra por exceso y el error se puede calcular de la siguiente manera.

$$Error(\%) = \frac{A_{exceso} - A_{defecto}}{\frac{A_{exceso}+A_{defecto}}{2}} \cdot 100$$

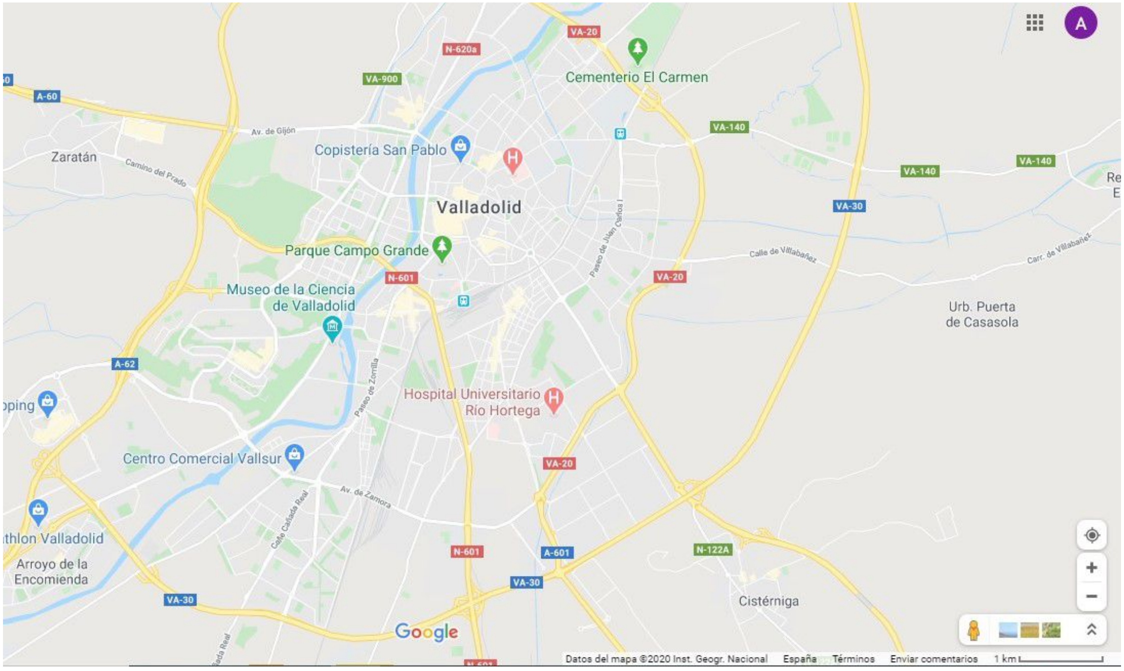


Ilustración 52: Mapa de Vallodolid. google.com/maps

Investiga sobre la geometría esférica. (2º Bachillerato)

Hay geometrías no euclidianas, ¿sabes que tienen similares teoremas a los de la geometría euclídea? ¿cómo se construye un triángulo en geometría esférica?. Mira el siguiente vídeo de la Universidad Politécnica de Valencia, https://www.youtube.com/watch?v=3fzCYl6GJUs , y familiarizate con algunos conceptos.

Enunciado.

Calcula la menor distancia, a través de la superficie terrestre entre dos puntos cualquiera de la misma, por ejemplo, entre Madrid y Sydney. Puedes ayudarte de una hoja de cálculo para resolver el caso general.

Solución.

Es un problema que da pie a comentar muchos conceptos e ideas sobre la geometría esférica y esta debe ser la parte más enriquecedora al presentar la solución del mismo.

Para resolverlo hace falta tener la latitud y longitud de ambos puntos, en este caso Madrid (40ºN, 3ºO) y Sydney (33ºS, 151ºE) y construir un triángulo esférico del que tengamos datos, siendo lo más sencillo utilizar uno de los polos de la Tierra, en este caso el polo norte.

En la siguiente ilustración hay representado un triángulo esférico, siendo las leyes de los cosenos y los senos para la geometría esférica las siguientes,

$$cos(c) = cos(a) \cdot cos(b) + sen(a) \cdot sen(b) \cdot cos(C)$$

$$\frac{sen(a)}{sen(A)} = \frac{sen(b)}{sen(B)} = \frac{sen(c)}{sen(C)}$$

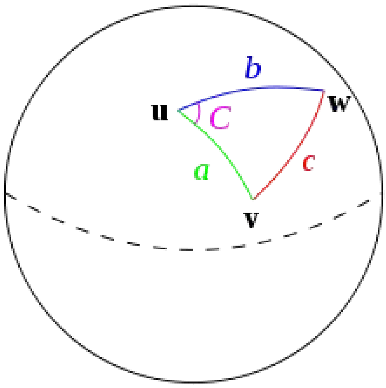


Ilustración 53: es.qwe.wiki/wiki

La solución para Madrid y Sydney, se expresa en la siguiente hoja de cálculo.

	Latitud	*Longitud*
Madrid	40	-3
Sydney	-33	151
	cos c	arccos c
	-0,93	158,05
	Distancia	
	17561,37	**Kms.**

El número de oro (ϕ).

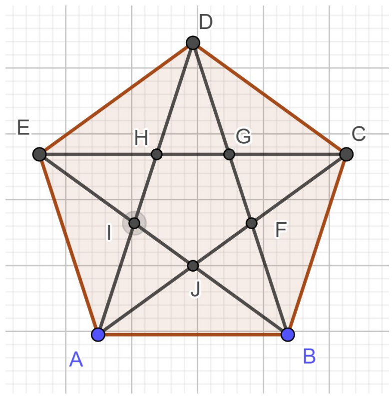
La proporción áurea ϕ, aparece naturalmente en muchos y diversos lugares del conocimiento y de la vida. Siempre ha representado el canon de la proporción ideal y la belleza, pero es más que eso.

La proporción áurea se da cuando se cumple la relación entre a y b siguiente.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow a^2 = b \cdot a + b^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$$

De esta ecuación se obtienen dos soluciones, ϕ el número áureo, que es la solución positiva de esa ecuación. El número áureo aparece también en la figura del pentágono.



En el pentágono regular se dan las siguientes relaciones, que son todas la proporción áurea.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BF} = \frac{BF}{JF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Otra propiedad de la proporción áurea es su relación con la serie de Fibonacci, en la construcción de la espiral áurea van apareciendo los términos de la serie de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,....)

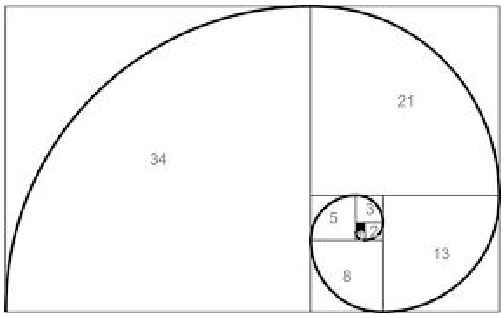


Ilustración 54: Construcción de la espiral áurea y serie de Fibonacci. aboutespanol.com

Para F_n la serie de Fibonacci. Tenemos que los cocientes de los términos de la sucesión de Fibonacci tienden al número áureo a (ϕ)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Hay muchas, muchísimas propiedades, pero a modo de resumen, entre el número áureo, la serie de Fibonacci y el número 5 se crean una cantidad de relaciones que son muy abundantes y recurrentes en la naturaleza.

En las tortas de un girasol, o en la cabeza de una margarita, en las piñas, la cantidad de espirales levógiras o dextrógiras son números de la serie de Fibonacci. O el número de escamas en las piñas de un pino, su aparición...

Ilustración 55: Reyes, E. (2020). Matemáticas en la naturaleza. Filotaxis. UVa.

La ordenación del número de hojas en los tallos de las plantas también sigue series de Fibonacci. Los cuasi-cristales tienen ordenaciones pentagonales y por tanto también están relacionados con la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea.

El número 5 (ya observado por Leonardo Da Vinci), la serie de Fibonacci y la proporción áurea aparecen con mucha frecuencia en la naturaleza.

7.- Bibliografía.

- Venema, A. (2012). *Foundations of Geometry. Second Edition.* Boston, U.S.A. Pearson.
- Smith, Margaret Schwan, and Stein, Mary Kay. (Febrero 1998) "Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice." *Mathematics Teaching in the Middle School* 3: 344–50.
- Domínguez, E. (2017). *Fundamentos de la geometría desde un punto de vista axiomático.* Universidad de Valladolid.
- Morín, E. (2000). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro.*
- Delors, J. (1994). *"Los cuatro pilares de la educación",* en La Educación encierra un tesoro. México: El Correo de la UNESCO, pp. 91-103.
- Orden ECD/65/2015*, de 21 de enero,* BOE.
- ORDEN EDU/362/2015, *de 4 de mayo*, BOCYL
- ORDEN EDU/363/2015, *de 4 de mayo*, BOCYL
- Wikipedia. wikipedia.org
- Geogebra. geogebra.org
- Apuntes marea verde. apuntesmareaverde.org.es
- Google. google.com/maps
- https://www.youtube.com/watch?v=3fzCYl6GJUs Universitat Politècnica de València.