Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas.

Construcción del cuerpo de los números reales

Autor: Francisco Marcos

Tutor: Félix Galindo Soto

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar algunas construcciones del cuerpo de los números reales. Durante todo el proceso educativo de formación en Matemáticas, comenzando por los estudios primarios y hasta los estudios universitarios del Grado en Matemáticas, estamos trabajando con números.

Los conjuntos numéricos se introducen de forma sucesiva, comenzando por el conjunto de los números naturales y terminando con los complejos. Se enseñan en primer lugar los números naturales. En este conjunto se aprende a contar y sumar. Después se enseña a restar con la idea de quitar o perder, pero sin llegar a los números negativos. Con los números naturales se aprende a multiplicar y también la división entera. También se estudian las potencias y las raíces exactas. Posteriormente se introducen las fracciones como forma de representar la división de dos números naturales. Con las fracciones se definen las operaciones anteriormente mencionadas. Hasta aquí tenemos los racionales positivos.

En primero de la ESO, se definen los números decimales finitos considerando las cifras decimales, que se separan con una coma de las cifras enteras, de las décimas, centésimas, milésimas... Con estos decimales se puede sumar y multiplicar de forma similar a la manera en que se hacía con los naturales, con el cuidado de colocar bien la coma. Surge una pregunta, ¿qué ocurre si se consideran infintos decimales? Lo que sucede es que es difícil dar una definición manejable de la suma y el producto. El algoritmo de la división entera relaciona las fracciones con los números decimales periódicos. Así se puede operar con estos números utilizando las fracciones. Pero esto no sirve para los decimales no periódicos, cuya existencia se asume. Para trabajar con estos últimos, se utilizan las aproximaciones decimales, es decir, se consideran solo unas cuantas cifras decimales.

Los números negativos se añaden con el signo menos y la regla de los signos. La primera vez que se define el conjunto de los números reales es en tercero de la ESO. Este se introduce como la unión de los números racionales y los números irracionales; donde los números irracionales son los números con decimales no periódicos. Esta definición es la que se mantiene en el resto de la enseñanza secundaria.

Cada conjunto se introduce para resolver ciertos problemas. Así los números naturales resuelven el problema de contar. La propiedades más relevantes de este conjunto son: la propiedad del buen orden y el principio de inducción. Después se introducen los números enteros para afrontar el problema de la resta, dotando al conjunto de estructura de anillo, y los números racionales para afrontar el problema de la división, dotando al conjunto de estructura de cuerpo.

El conjunto de los racionales tiene el problema de no ser completo. Si tomamos un cuadrado de lado 1, obtenemos por el teorema de Pitágoras que la diagonal mide $\sqrt{2}$. Es sencillo demostrar que $\sqrt{2}$ no es racional. Esto nos lleva a que hay longitudes que aparecen de manera natural en la geometría y que no se pueden expresar con números racionales. Otras carencias de los números racionales son la existencia de conjuntos acotados de números racionales que no alcanzan su extremo o la existencia de sucesiones de Cauchy, donde la diferencia entre dos términos de la sucesión se hace tan pequeña como queramos a partir de cierto término, que no convergen. Los números reales permiten resolver estos problemas.

Los antencedentes de la distinción entre números racionales y números irracionales son muy antiguos. Esta distinción se daba ya en la escuela griega de los pitagóricos, en el siglo V a.C. Estos ya demuestran que números que aparecen en la geometría, como $\sqrt{2}$, son irracionales.

La necesidad de establecer una formulación rigurosa de los números reales surge del nacimiento del cálculo diferencial e integral, en el siglo XVII. Los conceptos fundamentales del cálculo, como por ejemplo los de función o límite, no estaban perfectamente clarificados y aludían con frecuencia a la intuición.

En el siglo XIX, varios matemáticos, como Augustin Louis Cauchy o Bernard Bolzano, realizaron intentos de establecer un tratamiento riguroso de los números reales. Sin embargo ambos necesitaban asumir la convergencia de las sucesiones de Cauchy. Posiblemente, la primera construcción rigurosa de los números reales, a partir de los números racionales, se debe a Richard Dedekind. Trabajó en dicha construcción en conferencias en 1858, sin embargo, no publicó sus ideas hasta 1872 cuando vio que Georg Cantor y Eduard Heine iban a publicar sus versiones. El método de Dedekind se basa en lo que llamó cortaduras, por otro lado el método de Cantor se basa en las sucesiones de Cauchy. Heine, utilizó la misma idea que Cantor, pero además puntualizó que, si su construcción tomaba como base los números reales, el resultado volvería a ser el de los números reales.

El objetivo de este trabajo es presentar distintas formas de dar el paso de los números racionales a los números reales, sin asumir a priori la existencia de los números irracionales. Para ello expondremos la definición del conjunto de los números reales que utilizamos en el Grado en Matemáticas. Esta definición se hará mediante axiomas. Cuando se da una definición mediante axiomas, surgen dos problemas a resolver: le existencia y la unicidad.

En primer lugar, veremos las distintas formas de expresar algunas propiedades del conjunto de los números reales, en especial la completitud. También mostraremos el modo en que se pueden introducir el resto de conjuntos numéricos dentro de este y abordaremos la unicidad del mismo.

Una vez clarificadas las propiedades del conjunto de los números reales, procederemos a construirlo de tres formas distintas, resolviendo el problema de la existencia. Estas formas son: las cortaduras de Dedekind, las sucesiones de Cauchy, que usó Cantor, y una construción basada en la idea de los números decimales. Las dos primeras se corresponden con construcciones históricas mencionadas anteriormente. La construcción decimal, que parte de los números enteros, está mas relacionada con la forma de introducir los números reales en Secundaria. Haremos especial hincapíe en las dificultades que presenta esta construcción a la hora de establecer las operaciones.

Capítulo 1

Definición axiomática.

En este primer capítulo trataremos de analizar la respuesta de la siguiente pregunta: ¿qué son los números reales? Es habitual encontrar que la respuesta a esta pregunta sea que el conjunto de los números reales es el único cuerpo totalmente ordenado y completo. Esta es la llamada definición axiomática de los números reales.

En este capítulo presentaremos las propiedades que caracterizan a un cuerpo totalmente ordenado y completo, haciendo especial hincapíe en la completitud. Esto se hará mediante una definición axiomática, como se hace en referencias como [15], [7] o [17]. Además veremos como se pueden introducir los números racionales dentro de un cuerpo totalmente ordenado.

Cuando se define un conjunto mediante un sistema de axiomas surgen dos preguntas de manera inmediata. La primera, ¿existe algún conjunto que verifique los axiomas? Si la respuesta es no, estaríamos trabajando con el conjunto vacío. La existencia de un conjunto que satisfaga los axiomas la abordaremos en el segundo capítulo, donde presentaremos diferentes construcciones de los números reales. La segunda pregunta, ¿los axiomas presentados determinan el objeto matemático de forma única? La unicidad debe entenderse de la siguiente manera. Si construimos un conjunto A que satisfaga los axiomas y, de manera independiente, un conjunto B que también los satisfaga, existe una biyección que conserva las propiedades. Esto lo abordaremos al final del capítulo.

1.1. Cuerpo de los números reales

Comenzaremos con la definición de cuerpo totalmente ordenado y completo. Esto lo haremos en tres pasos: primero recordaremos lo que es un cuerpo, después introduciremos las propiedades del orden y, por último, definiremos la completitud.

Veamos la definición de cuerpo:

Definición 1.1. *Sea $\mathbb{K}$ un conjunto no vacío, dotado de dos operaciones, "+" y "·", denominadas suma y producto, respectivamente. Diremos que $\mathbb{K}$ es un* cuerpo *si se cumplen los siguientes axiomas:*

- *El par $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano, es decir, tiene las siguientes propiedades:*

(S1) *Propiedad asociativa: para todos $x, y, z \in \mathbb{K}$ se verifica que $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

(S2) *Propiedad conmutativa: para todos $x, y \in \mathbb{K}$ se verifica que $x + y = y + x$.*

(S3) *Elemento neutro: existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado por 0, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$.*

(S4) *Elemento opuesto: para todo $x \in \mathbb{K}$ existe un elemento $-x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = 0$.*

- *El par ($\mathbb{K}\backslash\{0\},\cdot$) es un grupo abeliano, es decir, tiene las siguientes propiedades:*

(P1) *Propiedad asociativa: para todos $x, y, z \in \mathbb{K}$ se verifica que $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$.*

(P2) *Propiedad conmutativa: para todos $x, y \in \mathbb{K}$ se verifica que $x \cdot y = y \cdot x$.*

(P3) *Elemento neutro: existe un elemento en $\mathbb{K}$, denotado por 1, tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$.*

(P4) *Elemento inverso: para todo $x \in \mathbb{K}$, con $x \neq 0$, existe un elemento $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $x \cdot (x^{-1}) = 1$.*

- *El producto es distributivo respecto de la suma:*

(D) *Propiedad distributiva: para todos $x, y, z \in \mathbb{K}$ se verifica que*

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Ahora procederemos a definir lo que es un cuerpo totalmente ordenado. Esto es dotar a un cuerpo de una relación de orden total y que sea compatible con la estructura algebraica.

Definición 1.2. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, dotado de una relación de orden. Diremos que es un* cuerpo totalmente ordenado *si cumple los siguientes axiomas:*

(O1) *El orden es total: si $x, y \in \mathbb{K}$ entonces $x \leq y$ o $y \leq x$.*

(O2) *Si $x, y, z \in \mathbb{K}$ y $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$.*

(O3) *Si $x, y, z \in \mathbb{K}$, $x \leq y$ y $0 \leq z$, entonces $x \cdot z \leq y \cdot z$.*

Otra alternativa para definir el orden es mediante el llamado conjunto de los elementos positivos. Esta opción es la que se usa, por ejemplo, en la referencia [15]. En particular, será el método que utilizaremos en la construcción de los números reales mediante sucesiones de Cauchy.

Teorema 1.3. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo.*

(I). *Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo totalmente ordenado, entonces el conjunto $P = \{x \in \mathbb{K} : x > 0\}$ verifica las siguientes propiedades:*

(a) Los conjuntos P, $\{0\}$ y $-P = \{x \in \mathbb{K} : -x \in P\}$ constituyen una partición de $\mathbb{K}$.

(b) Si $x, y \in P$, entonces $x + y$ y xy están en P.

***(II)**. Recíprocamente, supongamos que existe un conjunto $P \subset \mathbb{K}$ tal que se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) Los conjuntos P, $\{0\}$ y $-P = \{x \in \mathbb{K} : -x \in P\}$ constituyen una partición de $\mathbb{K}$.

(b) Si $x, y \in P$, entonces $x + y$ y xy están en P.

Entonces existe una relación de orden $\leq$ que dota al cuerpo $\mathbb{K}$ de estructura de cuerpo totalmente ordenado y tal que $P = \{x \in \mathbb{K} : x > 0\}$.

A los elementos de P se les llamará elementos positivos.

Demostración. En primer lugar, supongamos que $\mathbb{K}$ es un cuerpo totalmente ordenado. Consideremos P como el conjunto de los elementos mayores que 0. Por (O2) si $x > 0$, entonces $-x < 0$. Por tanto, $-P$ es el conjunto de los elementos menores que 0. En virtud de (O1), P, $\{0\}$ y $-P$ constituyen una partición de $\mathbb{K}$.

Falta comprobar la segunda propiedad. Sean $x, y > 0$. Supongamos que $x + y \leq 0$, entonces, en virtud de (O2), sumando $-x$, obtenemos que $y \leq -x < 0$ lo que es absurdo, luego $x + y \in P$. Análogamente, si suponemos que $xy \leq 0$, entonces, en virtud de (O3), multiplicando por $x^{-1} > 0$, obtenemos que $y \leq 0$, lo que es absurdo. Por tanto, $xy \in P$.

Veamos la implicación contraria. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y P un subconjunto que cumple las propiedades (a) y (b). Definimos la relación $\leq$ de la siguiente forma

$$x \leq y \text{ si, y solo si, } y - x = 0 \text{ o } y - x \in P.$$

En primer lugar tenemos que comprobar que $\leq$ es una relación de orden:

- Propiedad reflexiva: si $x \in \mathbb{K}$, entonces $x - x = 0$ y, por tanto, $x \leq x$.
- Propiedad antisimétrica: sean $x, y \in \mathbb{K}$ tales que $x \leq y$ y $y \leq x$. Si $y - x \in P$, entonces $x - y \in -P$ lo que es absurdo ya que $y \leq x$. Por tanto, $y - x = 0$ y $x = y$.
- Propiedad transitiva: si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $y - x + z - y = z - x$. Si $y - x = 0$, entonces $z - x = z - y$, por tanto $x \leq z$. Si $z - y = 0$ ocurre algo similar. En otro caso, $y - x \in P$ y $z - y \in P$, lo que implica que $z - x \in P$ por la segunda propiedad del teorema.

Ahora tenemos que comprobar que se cumplen los tres axiomas del orden.

(O1) Sean $x, y \in \mathbb{K}$. Si $x \not\leq y$, entonces $y - x \neq 0$ e $y - x \notin P$. Puesto que se verifica la propiedad (b) resulta que $y - x \in -P$. Por tanto, $x - y \in P$ y tenemos que $y \leq x$.

(O2) Sean $x, y, z \in \mathbb{K}$, con $x \leq y$. Entonces $(y + z) - (x + z) = y - x$, por tanto, $x + z \leq y + z$.

(O3) Sean $x, y, z \in \mathbb{K}$, con $x \leq y$ y $0 \leq z$. Entonces $yz - xz = (y - x)z$. Si $x = y$ o $z = 0$, entonces $yz - xz = 0$. En otro caso, en virtud de la propiedad (b), $yz - xz \in P$. Por tanto, $xz \leq yz$.

Por último observemos que de la definición de la relación de orden y de la propiedad (b) se deduce que $x \in P$ si, y solo si, $x > 0$. $\square$

Observemos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo totalmente ordenado, por tanto, la novedad que aporta el cuerpo de los números reales es la propiedad de la completitud.

Definición 1.4. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo totalmente ordenado. Diremos que es* completo *si cumple el* axioma de completitud:

(C) Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{K}$ y acotado superiormente tiene extremo superior.

Existen muchas formas equivalentes de introducir el axioma de completitud, veremos unas cuantas en la siguiente sección. La que hemos presentado en la definición 1.4 es la que se utiliza, por ejemplo, en [14] y será la que emplearemos en la construcción de los números reales mediante cortaduras y en la construcción de los números reales por números decimales.

Ahora estamos en condiciones de definir el conjunto de los números reales.

Definición 1.5. *Llamaremos* conjunto de los números reales*, y lo denotaremos por $\mathbb{R}$, a todo cuerpo totalmente ordenado y completo.*

Ya ha quedado definido el conjunto de los números reales. El hecho de poner "todo" no quiere decir que este conjunto no vaya a ser único, sino que, si $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}'$ son dos cuerpos totalmente ordenados y completos, entonces existe una única biyección entre ambos que conserva la estructura algebraica y el orden.

1.2. Resultados equivalentes al axioma de completitud

El objetivo de esta sección es ver resultados equivalentes al axioma de completitud. Esto será útil para simplificar la demostración de la completitud en las diferentes construcciones.

En esta sección $\mathbb{K}$ será un cuerpo totalmente ordenado. Consideraremos construidos los conjuntos de los números naturales, los números enteros y los números racionales. La construcción de estos conjuntos se ha realizado en el Grado en Matemáticas en las asignaturas de Matemáticas básicas, Topología y Estructuras algebraicas.

Para ver algunas propiedades vamos a necesitar multiplicar elementos de $\mathbb{K}$ por números naturales o, equivalentemente, sumar un elemento n veces. El siguiente teorema, que puede encontrarse en [10], nos indicará como podemos hacerlo. Además, a lo largo de todo el Grado se hace constante referencia a los procesos recursivos, sin precisar en qué consisten. Esto lo formalizamos en el teorema siguiente.

Teorema 1.6. ***(Recursión).*** *Si a es un elemento de un conjunto X, y si f es una función que va de X en X, entonces existe una única función, $u : \mathbb{N} \to X$ tal que $u(1) = a$ y $u(n+1) = f(u(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Recordemos que una función de $\mathbb{N}$ en X es un cierto tipo de subconjunto de $\mathbb{N} \times X$; vamos a construir u como un conjunto de pares ordenados. Consideremos la clase $\mathcal{C}$ de todos los subconjuntos A de $\mathbb{N}\times X$ para los cuales $(1, a) \in A$ y $(n+1, f(x)) \in A$ siempre que $(n, x) \in A$.

Como $\mathbb{N} \times X$ tiene estas propiedades, la clase $\mathcal{C}$ es no vacía. Llamaremos u a la intersección de todos los conjuntos de la clase $\mathcal{C}$. Es fácil ver que $u \in \mathcal{C}$, pero tenemos que probar que es una función. Es decir, que para cada número natural n existe un único elemento $x \in X$ tal que $(n, x) \in u$.

La prueba es inductiva. Sea S el conjunto de todos los números naturales, n, que verifican que $(n, x) \in u$ para un único $x \in X$. Debemos probar que $1 \in S$ y, si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$.

Supongamos que $1 \notin S$. Ya sabemos que $(1, a) \in u$, por tanto, $(1, b) \in u$ para algún $b \neq a$. En este caso consideramos el conjunto $u \setminus \{(1, b)\}$. Observemos que este conjunto contiene todavía a $(1, a)$ y, si contiene a (n, x), entonces contiene a $(n+1, f(x))$, ya que el elemento $(n+1, f(x))$ no ha sido descartado. Por tanto, $u \setminus \{(0, b)\} \in \mathcal{C}$. Esto contradice que u es la intersección de los elementos de $\mathcal{C}$ y podemos concluir, por reducción al absurdo, que $1 \in S$.

Supongamos ahora que $n \in S$. Esto implica que existe un único elemento $x \in X$ tal que $(n, x) \in u$. Como $(n, x) \in u$, entonces $(n+1, f(x)) \in u$. Si $n+1 \notin S$, entonces existe $y \neq f(x)$ tal que $(n + 1, y) \in u$. Consideremos en este caso el conjunto $u \setminus \{(n + 1, y)\}$. Es claro que $(1, a)$ está en este conjunto. Si $(m, t) \in u \setminus \{(n + 1, y)\}$, entonces también está $(m + 1, f(t)) \in u \setminus \{(n + 1, y)\}$. En efecto, si $m = n$, entonces t tiene que ser x y $(m+1, f(t)) \neq (n+1, y)$; si $m \neq n$, entonces $m+1 \neq n+1$. Por tanto, $u\setminus\{(n+1, y)\} \in \mathcal{C}$. Esto es absurdo y podemos concluir que $n + 1 \in S$. En consecuencia, $S = \mathbb{N}$.

Veamos la unicidad. Sea $v : \mathbb{N} \to X$ tal que $v(1) = a$ y $v(n+1) = f(v(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usaremos el principio de inducción. Tenemos que $v(1) = a = u(1)$. Supongamos que $v(n) = u(n)$. Entonces, $v(n + 1) = f(v(n)) = u(n + 1)$. Por inducción, $v(n) = u(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $v = u$.

□

Proposición 1.7. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo totalmente ordenado. Para cada $a \in \mathbb{K}$ existe una única aplicación $\phi_a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que*

$$\phi_a(1) = a \qquad y \qquad \phi_a(n + 1) = \phi_a(n) + a \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Además, si $a > 0$ entonces $\phi_a(n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{K}$ y $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por $f(x) = x+a$. Por el teorema 1.6, existe una única aplicación $\phi_a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ tal que

$$\phi_a(1) = a \qquad \text{y} \qquad \phi_a(n + 1) = \phi_a(n) + a \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

En particular si $a > 0$, $\phi_a(1) = a > 0$. Supongamos que $\phi_a(n) > 0$. Entonces,

$$\phi_a(n+1) = \phi_a(n) + a > 0.$$

Por inducción, $\phi_a(n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

En particular, esto nos permite identificar n con $n \cdot 1 = \phi_1(n)$ y considerar $\mathbb{N}$ como un subconjunto de $\mathbb{K}$, conservando las operaciones suma y producto y la relación de orden. Esto último se puede ver usando el principio de inducción de una forma similar a la que emplearemos en el teorema 1.26.

El siguiente teorema muestra que todo cuerpo ordenado contiene el cuerpo de los números racionales (véase [12]).

Teorema 1.8. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo totalmente ordenado. Existe una única aplicación $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ tal que*

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y), \qquad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \qquad y \qquad \phi(x) < \phi(y) \qquad si \quad x < y.$$

Demostración. Como $1 > 0$, tenemos que $n \cdot 1 > 0$. En particular, existe $(n \cdot 1)^{-1}$. Supongamos que $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ cumple las propiedades enunciadas. Se tiene que

$$\phi(0) = \phi(0) + \phi(0),$$

por lo que $\phi(0) = 0$. Del mismo modo usando el producto, obtenemos que

$$\phi(1) = \phi(1)\phi(1),$$

por lo que $\phi(1) = 1$ o $\phi(1) = 0$. Como $1 > 0$, tenemos que $\phi(1) > \phi(0) = 0$. En consecuencia, $\phi(1) = 1$.

Veamos que $\phi(n) = n \cdot 1$. Ya sabemos que $\phi(1) = 1$. Supongamos que $\phi(n) = n \cdot 1$. Entonces

$$\phi(n+1) = \phi(n) + \phi(1) = n \cdot 1 + 1 = (n+1) \cdot 1.$$

Por inducción, $\phi(n) = n \cdot 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si m es un entero negativo, entonces

$$0 = \phi(0) = \phi(m + (-m)) = \phi(m) + \phi(-m).$$

Por lo que $\phi(m) = -\phi(-m)$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$1 = \phi(1) = \phi(\frac{1}{n}n) = \phi(\frac{1}{n})\phi(n).$$

Por lo que $\phi(\frac{1}{n}) = (n \cdot 1)^{-1}$. Por último, si $q = \frac{m}{n}$, entonces $\phi(\frac{m}{n}) = (m \cdot 1)(n \cdot 1)^{-1}$. Por lo que si existe, es única.

Veamos la existencia. La aplicación ϕ se define de la siguiente forma:

Si $\frac{m}{n}$ es un número racional positivo,

$$\phi(\frac{m}{n}) = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1},$$

donde $\frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = (m \cdot 1)(n \cdot 1)^{-1}$, para los negativos,

$$\phi(-\frac{m}{n}) = -\frac{m \cdot 1}{n \cdot 1}$$

y, por último, $\phi(0) = 0$.

La comprobación de que esta aplicación cumple las propiedades enunciadas y que no depende de los representantes racionales elegidos es elemental, pero larga, por lo que no la realizaremos aquí. $\square$

Identificando $\mathbb{Q}$ con $\phi(\mathbb{Q})$, podemos ver a $\mathbb{Q}$ como un subconjunto de $\mathbb{K}$

Ahora veremos diversas propiedades que nos servirán para establecer resultados que son equivalentes al axioma de completitud. Comenzaremos con la propiedad de cuerpo arquimediano.

Definición 1.9. *Un cuerpo totalmente ordenado* $\mathbb{K}$ *es* arquimediano *si cumple la* propiedad arquimediana*, esto es, para cada* $x, y \in \mathbb{K}$*,* $x > 0$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $nx > y$*.*

El cuerpo de los números racionales es arquimediano. Sin embargo, existen cuerpos totalmente ordenados que no son arquimedianos. En [12] se puede encontrar un ejemplo.

También necesitaremos definir las nociones de convergencia y de intervalo en un cuerpo totalmente ordenado. Comenzaremos por el valor absoluto.

Definición 1.10. *Sea* $x \in \mathbb{K}$*. Definimos el* valor absoluto *de* x*, que denotaremos por* $|x|$*, como*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0; \\ -x & si\ x < 0. \end{cases}$$

El valor absoluto así definido presenta propiedades similares al definido en la recta real. Las demostraciones son idénticas y no se desarrollarán aquí.

Definición 1.11. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de elementos de* $\mathbb{K}$*. Diremos que es* convergente *si existe* $l \in \mathbb{K}$ *tal que, para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de modo que* $|a_n - l| < \epsilon$ *si* $n \geq n_0$*. En este caso diremos que* l *es el* límite de la sucesión*.*

Definición 1.12. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de elementos de* $\mathbb{K}$*. Diremos que es una* sucesión de Cauchy *si, para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de modo que* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *si* $n, m \geq n_0$*.*

La convergencia de las sucesiones de Cauchy, junto con la propiedad arquimediana, es una de las formas de introducir la completitud en un cuerpo totalmente ordenado. En un espacio métrico, también se puede introducir la completitud en términos de la convergencia de estas sucesiones.

Ahora definiremos lo que es un intervalo cerrado y acotado en un cuerpo totalmente ordenado

Definición 1.13. *Sea $I \subset \mathbb{K}$. Diremos que I es un* intervalo cerrado y acotado *si existen $a, b \in \mathbb{K}$, $a < b$, tales que*

$$I = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}.$$

En este caso denotaremos al intervalo I por $[a, b]$ y su longitud será $b - a$.

Solo nos interesan estos intervalos para poder definir la propiedad de los intervalos encajados.

Definición 1.14. *Se dice que un cuerpo totalmente ordenado, $\mathbb{K}$, verifica la* propiedad de los intervalos encajados *si para cada sucesión, $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, de intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{K}$ tal que $I_{n+1} \subset I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y la longitud de los intervalos tiende a cero cuando n tiende a infinito, se verifica que existe un único $x \in \mathbb{K}$ que pertenece a cada uno de los intervalos I_n, es decir, $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$.*

Esta propiedad, junto con la propiedad arquimediana, será otra de las formas de introducir la completitud en un cuerpo totalmente ordenado.

Otra forma de introducir la completitud está relacionada con la continuidad de las funciones.

Definición 1.15. *Una función $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es continua en $x \in \mathbb{K}$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ si $x - \delta < a < x + \delta$.*

Diremos que f es continua en $A \subset \mathbb{K}$ si lo es en cada $x \in A$.

Definición 1.16. *Se dice que un cuerpo totalmente ordenado, $\mathbb{K}$, verifica el* teorema de Bolzano *si para cualquier función $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in \mathbb{K}$ con $a < c < b$ tal que $f(c) = 0$.*

La siguiente propiedad está relacionada con las cortaduras que utilizará Dedekind en su construcción de los números reales y que en el segundo capítulo desarrollaremos.

Definición 1.17. *Un cuerpo totalmente ordenado, $\mathbb{K}$, verifica la* propiedad de Dedekind *si para cada par de conjuntos no vacíos A y B que verifiquen que $A \cup B = \mathbb{K}$ y que, si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $a < b$; se tiene que existe un único $x \in \mathbb{K}$ tal que, si $u < x$, entonces $u \in A$ y, si $u > x$, entonces $u \in B$.*

Lo que viene a decir esta propiedad es que, si tenemos dos conjuntos que recubren el espacio y en los que los elementos de uno son menores que los del otro, entonces hay un único punto en el "medio".

Ya tenemos las herramientas necesarias para formular el siguiente teorema. Este teorema va a proponer distintos resultados que son equivalentes al axioma de completitud. Para desarrollar este teorema hemos utilizado como referencias [3], [2] y [15].

Teorema 1.18. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo totalmente ordenado. Son equivalentes:*

(a) Se verifica el axioma de completitud en $\mathbb{K}$.

(b) Toda sucesión de elementos de $\mathbb{K}$ creciente y acotada es convergente.

(c) Toda sucesión de Cauchy es convergente y $\mathbb{K}$ es arquimediano.

(d) El conjunto $\mathbb{K}$ es arquimediano y posee la propiedad de los intervalos encajados.

(e) Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{K}$ y acotado inferiormente tiene extremo inferior.

(f) Se verifica el teorema de Bolzano en $\mathbb{K}$.

(g) Se verifica la propiedad de Dedekind en $\mathbb{K}$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente y acotada de elementos de $\mathbb{K}$. Consideramos el conjunto

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

El conjunto A es no vacío y acotado superiormente. Por el axioma de completitud, tiene un extremo superior, que denotaremos por l. Veamos que $\{a_n\}$ converge hacia l.

Sea $\epsilon > 0$. Entonces $l - \epsilon < l$ y, por la definición de superior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l - \epsilon < a_{n_0} \leq l$. Como $\{a_n\}$ es creciente la desigualdad anterior se cumple para todo $n \geq n_0$. Esto implica que $|l - a_n| < \epsilon$ si $n \geq n_0$. Así pues, $\{a_n\}$ converge hacia l.

(b)$\Rightarrow$(c)

Veamos que $\mathbb{K}$ es arquimediano. Razonemos por reducción al absurdo. Sea $x > 0$. Supongamos que existe $a > 0$ tal que para todo n natural se tiene que $na \leq x$ (negación de la propiedad arquimediana). Si $\{a_n\}$ es la sucesión dada por $a_n = na$, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión creciente, por (O3), y acotada (por x). Por (b) sabemos que $\{a_n\}$ es convergente, sea l su límite. Aplicando la definición de convergencia con $\epsilon = a$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $0 \leq l - na < a$, de donde se obtiene que $l < (n_0 + 1)a$, lo que es absurdo. Por tanto, $\mathbb{K}$ es arquimediano.

Veamos que toda sucesión de Cauchy es convergente. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{K}$. Como $\{a_n\}$ es de Cauchy, entonces está acotada. En efecto, sea $\epsilon > 0$. Entonces existe n_0 tal que $a_n < a_{n_0} + \epsilon$ si $n \geq n_0$. Si tomamos

$$m = \text{máx}(\max_{n<n_0} a_n, a_{n_0} + \epsilon),$$

tenemos una cota superior de $\{a_n\}$. De forma análoga se prueba que está acotada inferiormente.

Si podemos extraer una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ que sea monótona, entonces por (b) (si es decreciente basta ver que $\{-a_{n_k}\}$ es creciente) converge, sea l su límite.

Veamos que $\{a_n\}$ converge hacia l. Sea $\epsilon > 0$. Como $\{a_n\}$ es de Cauchy, existe n_0 natural tal que para todos $m, n \geq n_0$ se tiene que $|a_n - a_m| < \epsilon$, en particular para $n = n_k$ con $k \geq n_0$. Se tiene que

$$|l - a_m| = |l - a_{n_k} + a_{n_k} - a_m| \leq |l - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_m| < 2\epsilon$$

si $m \geq n_0$. En conclusión, $\{a_n\}$ converge hacia l.

Falta ver que se puede extraer dicha subsucesión. Para ello consideramos el conjunto

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m > n, a_n \leq a_m\}.$$

Si E es infinito la subsucesión $\{a_{n_k}\}_{n_k\in E}$, donde los n_k se eligen de forma estrictamente creciente, es creciente. Si E no es infinito, entonces existe m tal que para todo $k\geq m$ existe $n_k>k$ tal que $a_{n_k}<a_k$. Entonces la sucesión de naturales dada recursivamente por $n_0=m$, n_1 es un natural $n_1>n_0$ tal que $a_{n_1}<a_{n_0}$ y así n_k es un natural $n_k>n_{k-1}$ tal que $a_{n_k}<a_{n_{k-1}}$. Esta sucesión define una subsucesión que es decreciente.

La implicación está terminada.

(c)$\Rightarrow$(d)

Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos, $I_n=[a_n,b_n]$, tales que para todo n natural, $I_{n+1}\subset I_n$ y $\{b_n-a_n\}$ converge hacia 0. Como cada intervalo está contenido en el anterior, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente. Entonces si $m\geq n$, se tiene

$$0\leq a_m-a_n\leq b_m-a_n\leq b_n-a_n$$

que converge hacia 0, por tanto la sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy y, por (c), es convergente. Sea l su límite, entonces $\{b_n\}$ también converge hacia l porque $\{b_n-a_n\}$ converge hacia 0 y la intersección de todos los intervalos se reduce a un punto $\{l\}$.

(a)$\Leftrightarrow$(e)

Ilustraremos la implicación hacia la derecha, la otra implicación es similar. Sea A un subconjunto de $\mathbb{K}$ acotado inferiormente. Entonces el conjunto

$$-A=\{a\in\mathbb{K}:-a\in A\}$$

está acotado superiormente. Por el axioma de completitud $-A$ admite un extremo superior, m. Podemos concluir que $-m$ es el extremo inferior de A.

(d)$\Rightarrow$(f)

Sea $f:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ continua en $[a,b]$ tal que $f(a)f(b)<0$. Supongamos que $f(a)<0$ y $f(b)>0$. En el caso contrario se razona de forma similar. Tomemos $a_0=a$ y $b_0=b$. Consideramos

$$r=\frac{a_0+b_0}{2}.$$

Existen tres posibilidades:

- Si $f(r)=0$, hemos terminado.
- Si $f(r)>0$, tomamos $a_1=a_0$ y $b_1=r$.
- Si $f(r)<0$, tomamos $a_1=r$ y $b_1=b_0$.

Salvo que hayamos terminado, obtenemos que $f(a_1)<0<f(b_1)$ y $b_1-a_1=\frac{b_0-a_0}{2}$.

Repitiendo el proceso obtenemos c tal que $f(c)=0$ o una sucesión de intervalos $I_n=[a_n,b_n]$ tales que $f(a_n)<0<f(b_n)$ y $b_n-a_n=\frac{b_0-a_0}{2^n}$. La propiedad arquimediana garantiza que $\{\frac{b_0-a_0}{2^n}\}$ converge hacia 0. Por el teorema del encaje de intervalos, existe un único c que está en todos los I_n.

Veamos que $f(c)=0$. Supongamos que $f(c)>0$. Sean $\epsilon=f(c)$ y $\delta>0$. Entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $c-\delta<a_n<c$ y tenemos que $f(c)-f(a_n)>\epsilon$, ya que $f(a_n)<0$. Por tanto, f no es continua en c, lo que es absurdo. En consecuencia $f(c)\leq 0$. Si $f(c)<0$, se razona de forma similar. En conclusión tenemos que $f(c) = 0$ y se verifica el teorema de Bolzano.

(f)$\Rightarrow$(g)

Lo demostraremos por el contrarrecíproco. Supongamos que en $\mathbb{K}$ no se verifica la propiedad de Dedekind. Entonces existen conjuntos no vacíos A y B tales que $A \cup B = \mathbb{K}$, si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $a < b$, y que contradicen la propiedad de Dedekind. Consideremos la función $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por $f(x) = -1$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \in B$.

Veamos que f es continua en $\mathbb{K}$. Sea $x \in \mathbb{K}$. Si $x \in A$ entonces, como no se verifica la propiedad de Dedekind, existe $y > x$ tal que $y \in A$. Sea $\delta = y - x$. Si a es tal que $x - \delta < a < x + \delta = y$, entonces $a \in A$ y $|f(x) - f(a)| = 0$, por lo que f es continua en x. Si $x \in B$ entonces, como no se verifica la propiedad de Dedekind, existe $y < x$ tal que $y \in B$. Sea $\delta = x - y$. Si b es tal que $y = x - \delta < b < x + \delta$, entonces $b \in B$ y $|f(x) - f(b)| = 0$, por lo que f es continua en x.

Si consideramos $a \in A$ y $b \in B$, entonces f es continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) = -1 < 0$. Sin embargo, no existe c tal que $f(c) = 0$, por lo que no se verifica el teorema de Bolzano.

(g)$\Rightarrow$(a)

Sea C un subconjunto de $\mathbb{K}$ no vacío y acotado superiormente. Consideremos el conjunto B de todas las cotas superiores de C y $A = \mathbb{K} \setminus B$. Tenemos que A y B son no vacíos y que $A \cup B = \mathbb{K}$. Sea $a \in A$. Entonces como a no es cota superior de C existe $c \in C$ tal que $a < c$. Si $b \in B$, entonces $b \geq c$ ya que es cota superior de C y por tanto $b > a$. Por la propiedad de Dedekind, existe un único $x \in \mathbb{K}$ tal que, si $u < x$, entonces $u \in A$ y, si $u > x$, entonces $u \in B$.

Veamos que x es el extremo superior de C. Supongamos que x no es cota superior de C. Entonces existe $c \in C$ tal que $x < c$. Sea $y = \frac{x+c}{2}$. Como $x < y$, entonces $y \in B$. Como $y < c$, tenemos que y no es cota superior de C, por tanto $y \notin B$. Por reducción al absurdo, x es cota superior de C. Falta ver que es la mínima cota superior. En efecto, si $u < x$, entonces $u \in A$ y no es cota superior de C. Por tanto c admite un extremo superior y se verifica el axioma de completitud en $\mathbb{K}$. □

En el Grado en Matemáticas, en la asignatura de Cálculo infinitesimal, se realizan todas las implicaciones en la recta real, salvo aquellas que afectan a la propiedad de Dedekind. En dicha asignatura no se demuestra la equivalencia de los resultados sino que, escogiendo el axioma de completitud como lo hemos definido aquí, se demuestran las otras propiedades. Primero la propiedad arquimediana, luego la convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas, después la convergencia de las sucesiones de Cauchy, a continuación la propiedad de los intervalos encajados y, por último, el teorema de Bolzano.

De las referencias empleadas en el trabajo, [8] y [14] utilizarán la opción del extremo superior, [12] empleará la convergencia de las sucesiones de Cauchy y [15] utilizará la propiedad de Dedekind, de la cual deducirá el axioma de completitud.

1.3. Conjuntos numéricos dentro de un cuerpo totalmente ordenado y completo

En la sección anterior, como consecuencia del teorema de recurrencia, observamos que el conjunto de los números naturales podía verse como un subconjunto de cualquier cuerpo totalmente ordenado. Pero si partimos de la existencia de un cuerpo totalmente ordenado y completo, sin suponer a priori la existencia de los números naturales, veremos que es posible definir y estudiar las propiedades de $\mathbb{N}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}$. También podría hacerse en un cuerpo totalmente ordenado, pero en ese caso no podemos garantizar la propiedad arquimediana. La referencia que utilizaremos para esta sección será [15]. "La presentación de los números naturales que presentaremos en esta sección puede resultar un poco extraña en el sentido de que son los más familiares para todos. Sin embargo, habiendo descrito los números reales axiomáticamente, es necesario para nosotros definir y estudiar las propiedades de $\mathbb{N}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}$". También se puede encontrar esta idea en [1].

Recordemos que el conjunto de los números naturales se caracteriza por ser un conjunto naturalmente ordenado. Esto es:

Definición 1.19. *Sea $(X, \leq)$ un par donde X es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación de orden total. Diremos que $(X, \leq)$ es un* conjunto naturalmente ordenado *si cumple los siguientes axiomas:*

(N1) Existe un único $p \in X$ tal que $p \leq x$ para cada $x \in X$.

(N2) Si $x \in X$, entonces existe un único $x^+ \in X$ tal que $x < x^+$ y, si $x < y$, entonces $x^+ \leq y$.

(N3) Si S es un subconjunto de x que verifica $p \in S$ y $x^+ \in S$ para cada $x \in S$, entonces $S = X$.

En los conjuntos naturalmente ordenados, si $x \neq p$ existe un único elemento, que denotaremos por x^-, tal que $(x^-)^+ = x$. A este elemento lo llamaremos *elemento anterior de x*.

Los conjuntos naturalmente ordenados son únicos salvo isomorfismo. Lo veremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.20. *Sean X y X' dos conjuntos naturalmente ordenados. Entonces existe una única biyección $\phi : X \to X'$ tal que $\phi(x) < \phi(y)$ si $x < y$.*

Demostración. Definimos la aplicación $\phi : X \to X'$, de la siguiente forma:

- $\phi(p) = p'$.
- Si $x \in X$, $\phi(x^+) = \phi(x)^+$.

La propiedad (N3), aplicada al conjunto $S = \{x \in X : \phi(x) \text{ existe } \}$, nos garantiza que ϕ está definida en todo X. En particular, se tiene que $\phi(x) = p'$ si, y solo si, $x = p$.

También utilizaremos (N3) para ver la sobreyectividad. Por la definición, p' está en la imagen de ϕ. Supongamos que $x' \in \phi(X)$. Sea x tal que $\phi(x) = x'$. Entonces, $\phi(x^+) = x'^+$, por lo que $x'^+ \in \phi(X)$. Por (N3), $\phi(X) = X'$ y ϕ es sobreyectiva.

Veamos que se conserva el orden. Sean $A = \{x \in X : \text{si } x < y, \text{ entonces } \phi(x) < \phi(y)\}$. Tenemos que $p \in A$ ya que si $y > p$, $\phi(y) \neq p'$ y, en consecuencia $\phi(y) > p'$. Supongamos que $x \in A$. Si $y > x^+$, entonces $y^- > x$. Por tanto,

$$\phi(x^+) = \phi(x)^+ > \phi(y^-)^+ = \phi(y).$$

En consecuencia, $x^+ \in A$. Por (N3), $A = X$ y se conserva el orden.

De aquí podemos deducimos la inyectividad de ϕ, ya que si dos números son distintos, entonces uno es estrictamente mayor que el otro.

Falta ver que es única. Sea $\phi' : X \to X'$ una biyección que cumple la propiedad enunciada. Sea $S = \{x \in X : \phi(x) = \phi'(x)\}$. Se tiene que $p \in S$ ya que $\phi(x) = p' = \phi'(x)$. Si $x \in S$, entonces $\phi'(x^+) = \phi'(x)^+ = \phi(x)^+ = \phi(x^+)$, por lo que $x^+ \in S$. Por (N3), $S = X$ y $\phi' = \phi$. □

Una propiedad de un conjunto naturalmente ordenado es la propiedad del buen orden que enunciaremos a continuación.

Teorema 1.21. ***Propiedad de buen orden***. *Sea X naturalmente ordenado. Si A es un subconjunto no vacío de X, entonces tiene primer elemento.*

Demostración. Supongamos que A no tiene primer elemento. Consideremos el conjunto $S = \{x \in X : x < a \text{ para todo } a \in A\}$. Si $p \notin S$, entonces sería el primer elemento de A, luego $p \in S$. Supongamos que $x \in S$. Entonces, si $x^+ \notin S$, tenemos que x^+ sería el primer elemento de A, ya que todos los elementos de A son mayores que x y no existe ningún elemento de X entre x y x^+. Esto implica que $x^+ \in S$. Por tanto, por (N3), $S = X$ y A es vacío, lo cual es absurdo. En consecuencia, A tiene primer elemento. □

Ahora procederemos a mostrar que existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ que sea naturalmente ordenado. Para ello utilizaremos la siguiente definición.

Definición 1.22. *Diremos que un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un* conjunto inductivo *si cumple las siguientes propiedades:*

(I) *Contiene al elemento neutro para el producto* 1.

(II) *Si $x \in I$, entonces $x + 1 \in I$.*

Obsérvese que $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo. Por tanto, la familia de conjuntos inductivos, que denotaremos por $\mathcal{I}$, es no vacía. El conjunto de los números naturales será el menor de los conjuntos inductivos. Esto se expresa de la siguiente manera.

Definición 1.23. *Llamaremos* conjunto de los números naturales*, y lo denotaremos por $\mathbb{N}$, a la intesección de todos los conjuntos inductivos.*

$$\mathbb{N} = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I.$$

Observemos que si I es un conjunto inductivo, entonces $\mathbb{N} \subseteq I$. Observemos también que $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, ya que $1 \in I$ para todo conjunto inductivo y si $x \in \mathbb{N}$, entonces $x \in I$ para todo I conjunto inductivo, luego $x + 1 \in I$ para todo I conjunto inductivo y, por tanto, $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Ahora procederemos a comprobar las propiedades de este conjunto.

Proposición 1.24. ***Principio de inducción finita.*** *Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $1 \in S$ y si $x \in S$, entonces $x + 1 \in S$. Entonces $S = \mathbb{N}$.*

Demostración. El conjunto S es inductivo por hipótesis, por tanto $\mathbb{N} \subset S$. Como S es un subconjunto de $\mathbb{N}$, se tiene que $S = \mathbb{N}$. □

Teorema 1.25. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple:*

(I) $1 \leq n$.

(II) Si $n > 1$, entonces $n - 1 \in \mathbb{N}$.

(III) Si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ y $x + n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in \mathbb{N}$.

(IV) Si $m \in \mathbb{N}$ y $m > n$, entonces $m - n \in \mathbb{N}$.

(V) Si $a \in \mathbb{R}$ y $n - 1 < a < n$, entonces $a \notin \mathbb{N}$.

Demostración. (I) El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ es un conjunto inductivo. Por tanto, $\mathbb{N}$ es un subconjunto de A. En consecuencia, 1 es cota inferior de $\mathbb{N}$.

(II) Consideremos el conjunto $S = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n - 1 \in \mathbb{N}\}$. Basta con ver que $S = \mathbb{N}$. Lo haremos por inducción finita. Claramente $1 \in S$ y $S \subset \mathbb{N}$. Si $n \in S$, $(n + 1) - 1 = n \in S \subset \mathbb{N}$ y, por tanto, $n + 1 \in S$. Por inducción, $S = \mathbb{N}$.

(III) Consideremos el conjunto

$$T = \{n \in \mathbb{N} : \text{si } x \in \mathbb{R},\ x > 0 \text{ y } x + n \in \mathbb{N}, \text{ entonces } x \in \mathbb{N}\}.$$

Tenemos que ver que $T = \mathbb{N}$. La definición de T implica que $T \subseteq \mathbb{N}$. Para ver la otra contención, utilizaremos la inducción. En primer lugar, se tiene que $1 \in T$, ya que, si $x > 0$, $x+1 > 1$ y, si $x+1 \in \mathbb{N}$, por el apartado anterior, $(x+1)-1 = x \in \mathbb{N}$. Sean $n \in T$ y $x > 0$ tales que $x + n + 1 \in \mathbb{N}$. Como $n \in T$, entonces $x + 1 \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que $x \in \mathbb{N}$ y $n + 1 \in T$. Por tanto, por inducción, $T = \mathbb{N}$.

(IV) Si $x = m - n > 0$, entonces $x + n = m \in \mathbb{N}$ y, en virtud del apartado anterior, $x \in \mathbb{N}$.

(V) Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $n-1 < a < n$. Supongamos que $a \in \mathbb{N}$, entonces $a+1 \in \mathbb{N}$. Ahora bien, por un lado, como $a < n$, se tiene que $a + 1 - n < 1$. Por otro lado, el hecho de que $n - 1 < a$ implica que $a + 1 > n$. Por el apartado anterior, $a + 1 - n \in \mathbb{N}$, lo que es absurdo ya 1 es el menor elemento de $\mathbb{N}$, como se ve en el primer apartado. □

Con este teorema que acabamos de demostrar, ya tenemos que $\mathbb{N}$ es un conjunto naturalmente ordenado. El primer apartado indica que 1 es el primer elemento, la propiedad del elemento sucesor se deduce de la definición de conjunto inductivo y del último apartado del teorema y la tercera propiedad es el principio de inducción finita.

Veamos que el conjunto $\mathbb{N}$ es cerrado para las operaciones de suma y producto.

Teorema 1.26. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces $m + n \in \mathbb{N}$ y $mn \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Fijamos $m \in \mathbb{N}$ y sean

$$S = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{y} \qquad T = \{n \in \mathbb{N} : mn \in \mathbb{N}\}.$$

Tenemos que probar que S y T coinciden con $\mathbb{N}$. Claramente $1 \in S$ y $1 \in T$. Si $n \in S$, entonces $m + (n + 1) = (m + n) + 1 \in \mathbb{N}$, por tanto $n + 1 \in S$. Esto implica que $S = \mathbb{N}$, por tanto, $\mathbb{N}$ es cerrado para la suma.

Si $n \in T$, entonces $m(n + 1) = mn + m \in \mathbb{N}$, por consiguiente, $n + 1 \in T$. En consecuencia, $T = \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es cerrado para el producto. $\square$

Ahora que ya tenemos los números naturales dentro de $\mathbb{R}$, podemos describir los números enteros y, a partir de estos, los números racionales.

Definición 1.27. *Diremos que un número $a \in \mathbb{R}$ es entero si $a = 0$, $a \in \mathbb{N}$ o $-a \in \mathbb{N}$. Denotaremos al conjunto de los números enteros por $\mathbb{Z}$.*

Definición 1.28. *Diremos que un número $q \in \mathbb{R}$ es racional si se puede escribir de la forma $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$. Denotaremos al conjunto de los números racionales por $\mathbb{Q}$.*

Un número racional admite infinitas representaciones equivalentes con la forma $\frac{a}{b}$. Diremos que una representación es irreducible cuando a y b son primos entre si. La forma irreducible de un número racional es única.

Es sencillo comprobar que estos conjuntos son cerrados para la suma y el producto de $\mathbb{R}$. Veamos que se verifica la propiedad arquimediana.

Proposición 1.29. ***Propiedad arquimediana.*** *Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$. En particular, $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Demostración. Supongamos que el teorema es falso para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Entonces el conjunto $A = \{na : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente por b. Al ser $\mathbb{R}$ completo, el conjunto A admite un extremo superior, $s \in \mathbb{R}$. Podemos elegir $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > s - a$. Por tanto, $(n + 1)a > s$, lo que va en contra de que s es extremo superior de A. En consecuencia, se cumple la propiedad.

Para ver que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente basta con elegir $a = 1$. $\square$

Para concluir la sección solo nos falta ver que el conjunto $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Esto jugará un papel importante en la demostración de la unicidad de los números reales. Para demostrar la densidad de $\mathbb{Q}$ vamos a utilizar la parte entera de x, siendo $x \in \mathbb{R}$, que definiremos a continuación.

Lema 1.30. *Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$n \leq x < n + 1.$$

A este número entero lo llamaremos parte entera de x *y lo denotaremos por* $\lfloor x \rfloor$*.*

Demostración. Comenzaremos por la unicidad. Si m y n son partes enteras de x con $m > n$, entonces $n < m \leq x < n+1$, lo que implica que $0 < m-n < 1$ y esto contradice el hecho de que $m - n$ es entero.

Veamos la existencia. Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces su parte entera es x. Si $x \notin \mathbb{Z}$, consideramos a el menor elemento de $\mathbb{N}$ que es mayor que $|x|$. Este existe en virtud del teorema 1.21 y la propiedad arquimediana. En el caso de que $x \geq 0$, tomamos $n = a - 1$. El hecho que $n < a$ implica que $n \leq x$ y además $x < a = n + 1$, por lo que n es la parte entera de x. Si $x < 0$, entonces tomamos $n = -a$. Tenemos que $|x| = -x < a$, por lo que $-a < x$. Por otro lado $a - 1 < -x$ ya que $x \notin \mathbb{Z}$, por lo que $x < -a + 1$ y n es la parte entera de x. □

Ya podemos demostrar la densidad.

Lema 1.31. *El conjunto $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$. Por la propiedad arquimediana, existe $b \in \mathbb{N}_\mathbb{R}$ tal que $1 < (y-x)b$. Por lo que $\frac{1}{b} < y-x$. Sea $a = \lfloor bx \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}_\mathbb{R}$. Entonces $a-1 \leq bx < a$ y, por tanto,

$$x < \frac{a}{b} \leq x + \frac{1}{b} < y.$$

En conclusión tenemos un elemento de $\mathbb{Q}$ entre x e y arbitrarios, por tanto $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. □

Estos dos lemas se demuestran de forma similar en el grado. No obstante las demostraciones precisan de la propiedad arquimediana, por lo que no habrían sido posibles si eliminamos la condición de la completitud al principio de la sección.

Si llamamos $\mathbb{Q}_\mathbb{R}$ al conjunto de los números racionales introducido en esta sección y suponemos que hemos introducido previamente el conjunto de los números racionales de la forma habitual, que llamaremos $\mathbb{Q}$, el teorema 1.19 permite asegurar que $\phi(\mathbb{N})$ y el conjunto de los números naturales introducido en esta sección son iguales. Podemos concluir que la aplicación del teorema 1.8 relaciona los elementos de $\mathbb{Q}$ con los de $\mathbb{Q}_\mathbb{R}$.

1.4. Unicidad

Esta sección será la última del primer capítulo y estará dedicada a demostrar la unicidad del conjunto de los números reales. Esto quiere decir que si tenemos dos cuerpos totalmente ordenados y completos, entonces existe una aplicación que va a relacionar los elementos de ambos cuerpos conservando las operaciones y el orden.

Teorema 1.32. *Sean $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}'$ dos cuerpos totamente ordenados y completos. Entonces existe una única biyección $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ tal que:*

(a) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ y $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.

(b) Si $x < y$, entonces $\phi(x) < \phi(y)$.

Demostración. El teorema 1.8 nos garantiza que existe una única biyección entre los números racionales de $\mathbb{R}$ y los números racionales de $\mathbb{R}'$ que conserva las operaciones y el orden. Denotaremos a esa biyección por ϕ_Q. Si q es un elemento racional de $\mathbb{R}$, denotaremos por q' a $\phi_Q(q)$.

El objetivo es ampliar esta biyección a todo el conjunto $\mathbb{R}$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Por densidad, existe una sucesión $\{q_n\}$ de elementos racionales de $\mathbb{R}$ que converge hacia α en $\mathbb{R}$. Consideramos la sucesión $\{\phi_Q(q_n)\}$ de elementos racionales de $\mathbb{R}'$. La sucesión $\{q_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, como ϕ_Q es una biyección que conserva operaciones y orden, $\{q'_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}'$. Para ver esto, si tenemos $\epsilon \in \mathbb{R}'$, $\epsilon > 0$, por densidad, existe $\delta' \in \mathbb{R}'$ racional, con $0' < \delta' < \epsilon$. Consideramos $\delta = \phi_Q^{-1}(\delta')$ y obtenemos que, si $-\delta < q_n - q_m < \delta$, entonces $-\delta' < q'_n - q'_m < \delta'$ porque se conserva el orden. El hecho de que $\mathbb{R}'$ es completo implica que $\{q'_n\}$ converge hacia un elemento que definiremos por $\phi(\alpha)$.

El elemento $\phi(\alpha)$ no depende de la sucesión elegida. En efecto, si tenemos $\{p_n\}$ que converge hacia α, entonces $\{q_n - p_n\}$ converge hacia 0. Esto implica que, como ϕ_Q es una biyección que conserva operaciones y orden, $\{q'_n - p'_n\}$ converge hacia $0'$. Entonces $\{\phi_Q(p_n)\}$ y $\{\phi_Q(q_n)\}$ tienen el mismo límite, $\phi(\alpha)$. Entonces la aplicación $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ está bien definida. Observemos que en particular se tiene que, si q es un elemento racional de $\mathbb{R}$, entonces $\phi(q) = q'$.

De las propiedades de los límites resulta inmediato que ϕ es un morfismo algebraico. Si $\{q_n\}$ converge hacia α_1 y $\{p_n\}$ converge hacia α_2, entonces

$$\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \lim_{n\to\infty} \phi_Q(q_n) + \phi_Q(p_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_Q(q_n) + \lim_{n\to\infty} \phi_Q(p_n) = \phi(\alpha_1) + \phi(\alpha_2)$$

$$\phi(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \lim_{n\to\infty} \phi_Q(q_n) \cdot \phi_Q(p_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_Q(q_n) \cdot \lim_{n\to\infty} \phi_Q(p_n) = \phi(\alpha_1) \cdot \phi(\alpha_2).$$

Veamos que ϕ conserva el orden. Sean $\alpha < \beta$ en $\mathbb{R}$. Tomamos sucesiones $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ convergentes hacia α y β respectivamente. Por densidad, existen $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha < r < s < \beta$. Por la convergencia de las sucesiones existe n_0 natural tal que $p_n < r < s < q_n$, si $n \geq n_0$. De aquí obtenemos que en $\mathbb{R}'$ se cumple que

$$\phi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} p'_n \leq \phi(r) < \phi(s) \leq \lim_{n\to\infty} q'_n = \phi(\beta).$$

En particular se tiene que si $\alpha \neq \beta$, entonces $\phi(\alpha) \neq \phi(\beta)$, es decir, ϕ es inyectiva.

Solo falta ver que ϕ es sobreyectiva. Sea $\beta \in \mathbb{R}'$ y sea $\{q'_n\}$ una sucesión de elementos racionales de $\mathbb{K}'$ que converge hacia β. Entonces, $\{\phi_Q^{-1}(q'_n)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ ya que $\{q'_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}'$ (esto se hace de la misma forma que cuando definimos ϕ pero en el otro sentido). En consecuencia $\{\phi^{-1}(q'_n)\}$ convergente, ya que $\mathbb{R}$ es completo. Si $\{\phi^{-1}(q'_n)\}$ converge hacia α, entonces

$$\phi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \phi(\phi^{-1}(q'_n)) = \lim_{n\to\infty} q'_n = \beta.$$

Por tanto ϕ es sobreyectiva.

Falta ver la unicidad. Sea $\phi' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ otra biyección que cumple las propiedades enunciadas. La unicidad probada en el teorema 1.8 nos garantiza que si $q \in \mathbb{R}$ es racional, entonces $\phi'(q) = q'$. Supongamos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\phi'(\alpha) < \phi(\alpha)$. Por densidad, existe $q' \in \mathbb{R}'$ racional, con

$$\phi'(\alpha) < \phi'(q) = q' = \phi(q) < \phi(\alpha),$$

lo que nos llevaría a que $\alpha < q < \alpha$. Por reducción al absurdo, $\phi'(\alpha) \geq \phi(\alpha)$. Si $\phi'(\alpha) > \phi(\alpha)$, se razona de forma similar. En consecuencia, $\phi'(\alpha) = \phi(\alpha)$ y hemos terminado. $\square$

La unicidad no implica que los elementos de cualquier cuerpo totalmente ordenado y completo sean los mismos. Las cortaduras de Dedekind, las sucesiones de Cauchy y los números decimales son cosas distintas. Pero, por medio de la biyección que hemos construido, podemos tratarlos como si fuesen lo mismo, ya que están relacionados todos los elementos de los conjuntos. Esto era necesario ya que, de no ser así, las propiedades de los números reales dependerían de la forma en que han sido construidos.

Capítulo 2

Construcciones.

En este capítulo, trataremos la consistencia de los axiomas. Es decir, construiremos conjuntos que verifican los axiomas de cuerpo totalmente ordenado y completo. De este modo, garantizamos que el conjunto de los números reales existe.

A partir del cuerpo de los números racionales se construye un cuerpo totalmente ordenado y completo. Aquí lo haremos de tres formas distintas: las cortaduras de Dedekind, la contrucción de Cantor mediante sucesiones de Cauchy y la construcción mediante los números decimales. Esta última se realiza a partir de los números enteros.

Las referencias históricas de las construcciones de Dedekind y Cantor pueden consultarse en [9] y [1], las de la construcción decimal, en [6]

2.1. Cortaduras de Dedekind

Esta construcción fue publicada por Richard Dedekind en 1872. A finales del siglo XIX muchos matemáticos se encontraban descontentos con los fundamentos que se habían dado hasta entonces para el cálculo y para la aritmética de los números reales. Dedekind expuso en su trabajo "Continuidad y números irracionales" una teoría de los números reales. Con esta teoría pretendía encontrar definiciones que le permitieran demostrar los teoremas básicos sobre la existencia de límites. Para conseguirlo necesitaba definir un sistema que tuviera un cierto tipo de propiedades de completitud o continuidad.

Su sistema consiste en lo que llamó cortaduras. La idea principal consiste en lo siguiente: cada punto corta la recta racional en dos partes A_1 y A_2, de tal forma que todos los puntos de A_1 son menores que los puntos de A_2. Dedekind denominará al par (A_1, A_2) cortadura. La esencia de la continuidad reside en el siguiente principio: si tenemos una cortadura, entonces existe un único punto de la recta que la determina. En la recta racional esto no pasa porque tiene agujeros como $\sqrt{2}$. El objetivo será establecer las propiedades de cuerpo ordenado y completo en el conjunto de todas las cortaduras de la recta racional.

En esta ocasión trabajaremos como en [14] definiendo el corte a partir de la cortadura inferior. Aunque en [4] se puede encontrar la construcción considerando las cortaduras como pares.

Definición 2.1. *Sea α un subconjunto de $\mathbb{Q}$. Diremos que α es una* cortadura *si cumple las siguientes propiedades:*

(I) α es un conjunto no vacío y propio.

(II) Si $p \in \alpha$ y $q < p$, entonces $q \in \alpha$.

(III) Si $p \in \alpha$, entonces existe $r > p$ tal que $r \in \alpha$.

Observación 2.2. *La propiedad (II) implica dos hechos:*

- *Si $p \in \alpha$ y $q \notin \alpha$, entonces $q > p$.*
- *Si $r \notin \alpha$ y $s > r$, entonces $s \notin \alpha$.*

Denotaremos por $\mathbb{R}$ al conjunto de todas las cortaduras. El objetivo ahora será describir la relación de orden y las operaciones de suma y producto para poder relacionar este conjunto con el conjunto de los números reales.

En primer lugar veremos como introducir el conjunto de los números racionales dentro del conjunto de cortaduras. Para ello utilizaremos la siguiente definición:

Definición 2.3. *Para cada número racional r, definimos el conjunto*

$$r^* = \{s \in \mathbb{Q} \mid s < r\}.$$

A estos conjuntos las llamaremos cortaduras racionales*.*

Es fundamental ver que, efectivamente, estos conjuntos son cortaduras.

Proposición 2.4. *Para cada r racional, r^* es una cortadura.*

Demostración. Sea $r \in \mathbb{Q}$. Veamos que r^* cumple las propiedades de cortadura.

(I) $r - 1 \in r^*$ y $r \notin r^*$, luego r^* es no vacío y propio.

(II) Si $p \in r^*$ y $q \in \mathbb{Q}$, $q < p$, entonces $q < p < r$, luego $q \in r^*$.

(III) Si $p \in r^*$ y $q = \frac{p+r}{2}$; entonces $q \in \mathbb{Q}$ y $p < q < r$, luego $q \in r^*$.

□

Una vez inyectados los números racionales dentro de $\mathbb{R}$, vamos a establecer la relación de orden. El orden utilizado será el orden de inclusión $\subseteq$ (utilizaremos $\subset$ para la inclusión estricta). Aunque el orden de inclusión no es total para los subconjuntos de $\mathbb{Q}$, veremos que en el conjunto de las cortaduras, $\mathbb{R}$, si constituye un orden total.

Proposición 2.5. *La relación de orden es total en $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ cumple (O1)).*

Demostración. Sean α y β cortaduras. Supongamos que $\alpha \not\subseteq \beta$, entonces existe $p \in \alpha$ tal que $p \notin \beta$. Para cada $q \in \beta$, por la observación 2.2 tenemos que $q < p$, lo que implica que $q \in \alpha$. Entonces $\beta \subseteq \alpha$. □

Una vez establecido el orden, procederemos a describir las operaciones en $\mathbb{R}$. Comenzaremos por la suma. La idea más intuitiva para definir la suma de dos cortaduras, pensando en la recta y lo que es una cortadura, sugiere que si tenemos un elemento de cada cortadura, entonces su suma debería estar en la cortadura suma. Así vamos a definir la suma:

Definición 2.6. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Definimos la suma de α y β, que denotaremos por $\alpha + \beta$, como*

$$\alpha + \beta = \{p + q \mid p \in \alpha, q \in \beta\}.$$

Es imprescindible comprobar que este conjunto está dentro de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.7. *El conjunto $\alpha + \beta$ es una cortadura.*

Demostración. Veamos que cumple las propiedades de cortadura.

(I) Sean $p \in \alpha$ y $q \in \beta$. Entonces $p + q \in \alpha + \beta$, luego $\alpha + \beta$ es no vacío. Sean $p' \notin \alpha$ y $q' \notin \beta$; para todo $p \in \alpha$, $q \in \beta$, se tiene que $p < p'$ y $q < q'$. Por tanto, tenemos que $p + q < p' + q'$, luego $p' + q' \notin \alpha + \beta$.

(II) Sean $s \in \alpha + \beta$ y $r < s$. Tenemos que $s = p + q$ con $p \in \alpha$ y $q \in \beta$. Luego $r < p + q$, lo que implica que $r - q < p$, luego $r - q \in \alpha$. Entonces, $r = (r - q) + q$ está en $\alpha + \beta$.

(III) Si $s \in \alpha + \beta$, entonces $s = p + q$ con $p \in \alpha$ y $q \in \beta$. Como α es una cortadura, existe $p' \in \alpha$ tal que $p < p'$. Sea $r = p' + q$; tenemos que $r \in \alpha + \beta$ y $r = p' + q > p + q = s$.

□

Ahora vamos a comprobar que esta operación cumple todas las propiedades que requiere una suma.

Proposición 2.8. *($\mathbb{R}$,+) es un grupo abeliano.*

Demostración. (S1) Sea $p \in (\alpha + \beta) + \gamma$. Entonces $p = (q + r) + s = q + (r + s)$ con $q \in \alpha$, $r \in \beta$ y $s \in \gamma$. Lo que implica que $p \in \alpha + (\beta + \gamma)$. La contención contraria es similar, entonces queda $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ y la suma es asociativa.

(S2) Sea $p \in \alpha + \beta$. Entonces $p = q + r = r + q$ con $q \in \alpha$ y $r \in \beta$, por tanto $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ y la suma es conmutativa.

(S3) Veamos que 0^* es el elemento neutro para la suma. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $p \in \alpha + 0^*$, $p = q + r$ con $q \in \alpha$ y $r < 0$, entonces $p = q + r < q$ y, en consecuencia, $p \in \alpha$. Por tanto, $\alpha + 0^* \subseteq \alpha$.

Para la otra contención, si $p \in \alpha$, entonces existe $r > p$ tal que $r \in \alpha$. Es claro que $p - r < 0$, por tanto, $p = r + (p - r)$ está en $\alpha + 0^*$.

(S4) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos

$$-\alpha = \{p \in \mathbb{Q} \mid -p - r \notin \alpha \text{ para algún } r > 0\}.$$

De esta definición y la observación 2.2 se deduce que si $p \in -\alpha$, entonces $-p \notin \alpha$.

La razón de esta definición es, más allá de porque va a cumplir las propiedades, tiene un significado en la recta. Si pensamos en las cortaduras como las plantea inicialmente Dedekind, el opuesto o simétrico de (A_1, A_2) para la suma sería el par de conjuntos simétricos respecto del 0, es decir $(-A_2, -A_1)$. Así, al trabajar con las cortaduras inferiores obtenemos que el opuesto correspondería al simétrico de la cortadura superior. Esto es lo que expresa la definición.

Veamos $-\alpha$ es el elemento opuesto de α.

- El conjunto $-\alpha$ es una cortadura:
  - (I) Sean $p \notin \alpha$ y $q \in \mathbb{Q}$, con $q < -p$. Entonces $-q - (-p - q) = p \notin \alpha$, luego $q \in -\alpha$, por tanto, $-\alpha$ es no vacío.
    Si $p \in \alpha$, entonces $-p \notin -\alpha$ ya que $-(-p) - r = p - r \in \alpha$ para todo $r > 0$; luego $-\alpha$ no es el conjunto total.
  - (II) Sean $p \in -\alpha$ y $q < p$; esto implica que $-q > -p$, luego $-q - r > -p - r$ para todo r, por lo que si $-p - r \notin \alpha$, entonces $-q - r \notin \alpha$. De donde se obtiene que $q \in -\alpha$.
  - (III) Sea $p \in -\alpha$. Entonces existe $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$. Llamamos $s = p + r/2$. Tenemos que $-s - r/2 = -p - r \notin \alpha$, luego $s \in -\alpha$ y $s > p$.
- Tenemos que $\alpha + (-\alpha) = 0^*$.
  Sea $p \in \alpha + (-\alpha)$, $p = r + s$ con $r \in \alpha$ y $s \in -\alpha$. Entonces $-s \notin \alpha$, luego $r < -s$ y $p = r + s < -s + s = 0$, por tanto $\alpha + (-\alpha) \subseteq 0^*$.
  Ahora sea $v < 0$ y consideremos $w = -v/2 > 0$. Sean $r \in \alpha$ y $s \notin \alpha$. Por la propiedad arquimediana en los racionales, existen $n_r, n_s \in \mathbb{Z}$ tales que $n_r w < r$ y $n_s w > s$. Por tanto, el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid nw \in \alpha\}$ es no vacío, ya que $n_r \in A$, y está acotado superiormente, porque cualquier $m \geq n_s$ no está en A. Sea n el máximo de A. Entonces, $nw \in \alpha$ y $(n+1)w \notin \alpha$. Sea $p = -(n+2)w$. Entonces, $p \in -\alpha$, ya que $-p - w = (n+1)w \notin \alpha$. Por tanto,

  $$v = -2w = nw - nw - 2w = nw + p$$

  y v está en $\alpha + (-\alpha)$.

□

Una vez visto que la suma cumple las propiedades de grupo abeliano, vamos a comprobar que es compatible con la relación de orden.

Proposición 2.9. *En $\mathbb{R}$ se cumple (O2), es decir, si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, con $\alpha \subseteq \beta$, entonces $\alpha + \gamma \subseteq \beta + \gamma$.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\alpha \subseteq \beta$. Sea $p \in \alpha + \gamma$, entonces $p = q + r$ con $q \in \alpha$ y $r \in \gamma$. Esto implica que $q \in \beta$, luego $p \in \beta + \gamma$ y tenemos que $\alpha + \gamma \subseteq \beta + \gamma$. $\square$

Para definir el producto podemos pensar en la misma idea que utilizamos en la suma. Es decir, si tenemos un elemento de cada cortadura, entonces el producto de estos estará en la cortadura producto. Sin embargo podemos elegir números racionales negativos, arbitrariamente pequeños dentro de cada cortadura, de forma que su producto se hace arbitrariamente grande. En consecuencia, es conveniente definirlo primero en un subconjunto de $\mathbb{R}$ que llamaremos conjunto de cortaduras positivas.

Definición 2.10. *Diremos que α es una cortadura es* positiva *si $0^* \subset \alpha$. Denotaremos por $\mathbb{R}^+$ al conjunto de todas las cortaduras positivas.*

Esto se corresponde con la idea de positivo, ser mayor que el cero. No obstante, veremos en el siguiente lema otras propiedades más útiles para trabajar con estas cortaduras.

Lema 2.11. *Sea α una cortadura. Entonces son equivalentes:*

(a) α es cortadura positiva.

(b) $0 \in \alpha$.

(c) Existe $p \in \alpha$ tal que $p > 0$.

Demostración. Si $0 \in \alpha$, por la tercera propiedad de las cortaduras, existe $p > 0$ tal que $p \in \alpha$. Por tanto, (b) implica (c).

Si $0^* \subset \alpha$, puesto que la contención es estricta, existe $p \geq 0$ tal que $p \in \alpha$. Luego $0 \in \alpha$ y (a) implica (b).

Por otro lado si existe $p > 0$ con $p \in \alpha$, entonces, si $q < 0$, tenemos que $q < p$ y $q \in \alpha$. Por tanto, $0^* \subset \alpha$ y (c) implica (a). $\square$

Geométricamente, las cortaduras positivas son todas aquellas que se pueden considerar como cortaduras de la semirrecta racional positiva. La tercera propiedad del lema 2.11 garantiza que las cortaduras positivas contienen algún número racional positivo. Si nos fijamos solo en los elementos positivos de estas cortaduras, podemos definir el producto de la misma forma en la que definimos la suma, es decir, los elementos positivos de la cortadura producto son los productos de los elementos positivos de las cortaduras que estamos multiplicando. Esto lo expresamos en la siguiente definición.

Definición 2.12. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Definimos su* producto*, que denotaremos por $\alpha \cdot \beta$, como*

$$\alpha \cdot \beta = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq rs \text{ con } r \in \alpha,\ s \in \beta \text{ y } r, s > 0\}.$$

La razón por la que introducimos los números menores que un producto de números positivos es para mantener los números negativos y el cero dentro de la cortadura producto. Veamos que el producto de cortaduras positivas es nuevamente una cortadura positiva.

Proposición 2.13. *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *entonces* $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^+$*.*

Demostración. Veamos que $\alpha \cdot \beta$ es una cortadura positiva.

(I) Sean $r \in \alpha$, $s \in \beta$ positivos; entonces $0 < rs$ y 0 está en $\alpha \cdot \beta$, luego no es vacío (esto demuestra también que si $\alpha \cdot \beta$ es cortadura es positiva).

Sean $p \notin \alpha$ y $q \notin \beta$, entonces $p > r$ y $q > s$ para cualquier r, s positivos en α y β respectivamente. Por tanto, $pq > rs$ para todos $r \in \alpha$, $s \in \beta$, $r, s > 0$ y, en consecuencia, $pq \notin \alpha \cdot \beta$.

(II) Sea $p \in \alpha \cdot \beta$ y $q < p$; entonces existen $r \in \alpha$ y $s \in \beta$ positivos tales que $p \leq rs$. Pero tenemos que $q < p \leq rs$, luego $q \in \alpha \cdot \beta$.

(III) Sea $p \in \alpha \cdot \beta$. Entonces existen $r \in \alpha$ y $s \in \beta$ positivos tales que $p \leq rs$. Esto implica que existen $r' \in \alpha$ y $s' \in \beta$ con $r < r'$ y $s < s'$. Entonces $q = r's' > rs \geq p$ y está en $\alpha \cdot \beta$.

□

En la siguiente proposición comprobaremos que la operación producto así definida cumple las propiedades de grupo abeliano. Además veremos la propiedad distributiva en el conjunto $\mathbb{R}^+$, teniendo en cuenta que la suma es cerrada en dicho conjunto. Para ver que es cerrada basta con saber que, si 0 está en ambas cortaduras, entonces está en la suma.

Proposición 2.14. *(*$\mathbb{R}^+, \cdot$*) es un grupo abeliano, y además se cumple la propiedad distributiva respecto de la suma.*

Demostración. Hay que ver que se cumplen las propiedades de grupo abeliano y la propiedad distributiva.

(P1) Se deduce de la propiedad asociativa para el producto en los racionales de una forma similar a la que se ha mostrado en la asociatividad para la suma de cortaduras.

(P2) También se deduce directamente de la conmutatividad en el producto de racionales.

(P3) Veamos que $1^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < 1\}$ es elemento neutro para el producto.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$; si $p \in \alpha \cdot 1^*$, entonces existen r, s positivos con $r \in \alpha$ y $s < 1$ tales que $p \leq rs$, entonces $p < r$ y está en α, luego $\alpha \cdot 1^* \subseteq \alpha$.

Sea ahora $p \in \alpha$ positivo (si fuera negativo o 0 claramente estaría en la cortadura producto por la definición 2.13). Existe $r \in \alpha$ con $r > p$ y tenemos que $0 < \frac{p}{r} < 1$ y $p = r \cdot \frac{p}{r}$ luego $p \in \alpha \cdot 1^*$. Nos queda $\alpha = \alpha \cdot 1^*$.

(P4) Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Definimos el conjunto

$$\frac{1}{\alpha} = \{p > 0 \mid \text{existe } r > 0 \text{ tal que } \frac{1}{p} - r \notin \alpha\} \cup 0^* \cup \{0\}.$$

Al igual que con el opuesto para la suma, podemos pensar en el significado de esta definición para el inverso. Si tenemos una cortadura de la semirrecta racional positiva con la idea inicial de Dedekind, (A_1, A_2), su inverso sería el par

$$(A_2^{-1} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}, A_1^{-1}),$$

donde $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A, a > 0\}$. Esto es lo que hemos expresado en la definición del inverso. Veamos que $\frac{1}{\alpha}$ es el inverso para el producto de α.

- Primero comprobaremos que $\frac{1}{\alpha}$ es una cortadura positiva.
  (I) Por la definición, $0 \in \frac{1}{\alpha}$. Por tanto, $\frac{1}{\alpha}$ es no vacío y, si es cortadura, es positiva.
  Si $p > 0$ es un elemento de α, entonces $\frac{1}{p} \notin \frac{1}{\alpha}$ ya que para todo $r > 0$, $(\frac{1}{p})^{-1} - r = p - r \in \alpha$. Por tanto, $\frac{1}{\alpha}$ es propio.
  (II) Sean $p \in \frac{1}{\alpha}$ positivo y $q < p$ tal que $0 < q$ (si $q \leq 0$ está en $\frac{1}{\alpha}$ por definición). Existe $r > 0$ tal que $\frac{1}{p} - r \notin \alpha$, entonces
  $$\tfrac{1}{q} - r > \tfrac{1}{p} - r$$
  y, por tanto, $\frac{1}{q} - r \notin \alpha$ y $q \in \frac{1}{\alpha}$.
  (III) Sea $p \in \frac{1}{\alpha}$. Veamos que existe $s \in \frac{1}{\alpha}$, $s > p$.
  Si $p < 0$ ya hemos probado que $0 \in \frac{1}{\alpha}$.
  Si $p = 0$, para cualquier $q \notin \alpha$ positivo resulta que $\frac{1}{q+1} \in \frac{1}{\alpha}$ y $\frac{1}{q+1} > 0$.
  Si $p > 0$, entonces existe $r > 0$ tal que $\frac{1}{p} - r \notin \alpha$. Sea
  $$s = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{r}{2}} > \frac{1}{\frac{1}{p}} = p.$$
  Como $\frac{1}{s} - \frac{r}{2} = \frac{1}{p} - r \notin \alpha$, se tiene que $s \in \frac{1}{\alpha}$.
- Falta ver que $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1^*$.
  Sea $p \in \alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$. Existen q, r, s positivos tales que $q \in \alpha$, $\frac{1}{s} - r \notin \alpha$ y $p \leq q \cdot s$. Entonces $q < \frac{1}{s} - r$, lo que implica que $p < (\frac{1}{s} - r) \cdot s = 1 - r \cdot s < 1$, luego $p \in 1^*$.
  Ahora sea $p < 1$ positivo, por la propiedad arquimediana, existe $m > 0$ natural tal que $m \cdot (1 - p) > p$. Por la propiedad arquimediana, existe M natural tal que
  $$\frac{(1-p) \cdot m}{M} \in \alpha.$$
  Consideremos $w = \frac{1-p}{M} > 0$ y el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid nw \in \alpha\}$. El conjunto A es no vacío, ya que $m \in A$, y, por la propiedad arquimediana y la definición de cortadura, está acotado. Sea n el máximo del conjunto A. Tenemos que $n \cdot w \in \alpha$ y $(n + 1) \cdot w \notin \alpha$. Sea $r = n \cdot w \in \alpha$ y sea $s = \frac{p}{n \cdot w}$, si vemos que $s \in \frac{1}{\alpha}$ hemos terminado. Para ello basta ver que $\frac{1}{s} > (n + 1) \cdot w$. En efecto, si

restamos queda

$$\frac{n\cdot(1-p)}{M\cdot p}-\frac{(n+1)\cdot(1-p)}{M}=\frac{(1-p)}{M\cdot p}\cdot(n-n\cdot p-p)$$
$$=\frac{(1-p)}{M\cdot p}\cdot(n\cdot(1-p)-p)>0,$$

ya que $n\cdot(1-p)-p\geq m\cdot(1-p)-p>0$. Por tanto, $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1^*$.

(D) Sean α, β, $\gamma\in\mathbb{R}^+$.

Sea $p\in\gamma\cdot(\alpha+\beta)$, entonces existen $q\in\gamma$, $r\in\alpha$ y $s\in\beta$ positivos tales que $p\leq q\cdot(r+s)=q\cdot r+q\cdot s$, luego $p\in\gamma\cdot\alpha+\gamma\cdot\beta$.

Ahora sea $p\in\gamma\cdot\alpha+\gamma\cdot\beta$, existen q, $q'\in\gamma$, $r\in\alpha$ y $s\in\beta$ positivos tales que $p\leq q\cdot r+q'\cdot s$, por tanto, $p\leq \text{máx}(q,q')\cdot(r+s)$ y hemos terminado.

□

Ahora tenemos que ampliar el producto a todo el conjunto de cortaduras $\mathbb{R}$. Para hacer esto utilizaremos el método que se usa en Primaria. Tras aprender a multiplicar con los números positivos, se enseña la regla de los signos para multiplicar con números negativos. Primero veamos a qué llamaremos cortadura negativa. La definición es análoga a la empleada en las cortaduras positivas, con la diferencia de que las negativas son las cortaduras menores que 0^*.

Definición 2.15. *Diremos que α es una cortadura es* negativa *si $\alpha\subset 0^*$. Denotaremos por $\mathbb{R}^-$ al conjunto de todas las cortaduras negativas.*

Lema 2.16. *Una cortadura α es negativa si, y solo si, $-\alpha$ es positiva.*

Demostración. Sea $\alpha\subset 0^*$. Entonces existe $p<0$ tal que $p\notin\alpha$. Esto implica que $q=\frac{p}{2}\notin\alpha$ y $p<q<0$. Por tanto, $-q\in-\alpha$ ya que $q-(q-p)=p\notin\alpha$.

Por otro lado, si $-\alpha$ es positiva, existe $p>0$ con $p\in-\alpha$. Por tanto, $-p\notin\alpha$ y α es negativa. □

Este lema nos permite ampliar el producto a todo el conjunto $\mathbb{R}$.

Definición 2.17. *El producto queda definido de la siguiente forma en todo $\mathbb{R}$:*

- $0^*\cdot\alpha=\alpha\cdot 0^*=0^*$ *para todo* $\alpha\in\mathbb{R}$.
- *Si* α, $\beta\in\mathbb{R}^-$, $\alpha\cdot\beta=(-\alpha)\cdot(-\beta)$.
- *Si* $\alpha\in\mathbb{R}^+$, $\beta\in\mathbb{R}^-$, $\alpha\cdot\beta=-(\alpha\cdot(-\beta))$.
- *Si* $\alpha\in\mathbb{R}^-$, $\beta\in\mathbb{R}^+$, $\alpha\cdot\beta=-((-\alpha)\cdot\beta)$.

Procederemos a comprobar que con este producto obtenemos un cuerpo totalmente ordenado.

Proposición 2.18. *La terna* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un cuerpo totalmente ordenado.*

Demostración. Ya está probado que $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano y que la relación de orden es total y se conserva con la suma. Falta probar los axiomas que implican al producto.

Las propiedades asociativa y conmutativa se deducen directamente de la definición sabiendo que se cumplen en $\mathbb{R}^+$, por ejemplo si $\alpha \in \mathbb{R}^-, \beta \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$\alpha \cdot \beta = -((-\alpha) \cdot \beta) = -(\beta \cdot (-\alpha)) = \beta \cdot \alpha.$$

Existe un elemento neutro que es 1^*. Ya se ha visto para cortaduras positivas y 0^*. Si $\alpha \in \mathbb{R}^-$,

$$\alpha \cdot 1^* = -((-\alpha) \cdot 1^*) = -(-\alpha) = \alpha.$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}^-$ tenemos que su inverso es $-(\frac{1}{-\alpha}) \in \mathbb{R}^-$. En efecto,

$$\alpha \cdot (-(\frac{1}{-\alpha})) = (-\alpha) \cdot (\frac{1}{-\alpha}) = 1^*.$$

Para la propiedad distributiva hay varios casos. Cojamos, por ejemplo, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+$ y $\beta \in \mathbb{R}^-$, con $\beta + \gamma \in \mathbb{R}^+$. Entonces $\gamma = (\gamma + \beta) + (-\beta)$ y tenemos que

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\gamma + \beta) + \alpha \cdot (-\beta) = \alpha \cdot (\gamma + \beta) - (\alpha \cdot \beta),$$

de donde se deduce que $\alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\gamma + \beta)$ y se cumple la propiedad distributiva. El resto de casos se tratarían de forma similar.

Queda ver que este producto es compatible con la relación de orden.

Sean α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \subseteq \beta$ y $0^* \subseteq \gamma$, entonces $0^* \subseteq \beta - \alpha$ y

$$\gamma \cdot \beta - \gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot (\beta - \alpha) \supseteq 0^*,$$

luego $\gamma \cdot \alpha \subseteq \gamma \cdot \beta$. □

Para completar la construcción solo falta comprobar la propiedad de la que carecen los números racionales, es decir, la completitud.

Proposición 2.19. $\mathbb{R}$ *es un cuerpo ordenado completo.*

Demostración. Solo falta ver la completitud.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, es decir, tal que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha \in A, \alpha \subseteq \beta$. Sea $\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$.
Veamos que γ es una cortadura.

(I) Como $A \neq \emptyset$, entonces $\gamma \supseteq \alpha \neq \emptyset$ para $\alpha \in A$, luego $\gamma \neq \emptyset$.

Sea $p \in \gamma$. Entonces $p \in \alpha$ para algún $\alpha \in A$ y por tanto $p \in \beta$. Entonces $\gamma \subseteq \beta \neq \mathbb{Q}$, lo que implica que γ es propio.

(II) Sean $p \in \gamma$ y $q < p$. Entonces $p \in \alpha$ para algún $\alpha \in A$, lo que implica que, como α es cortadura, $q \in \alpha \subseteq \gamma$.

(III) Sea $p \in \gamma$. Entonces $p \in \alpha$ para algún $\alpha \in A$, por tanto, existe $r \in \alpha \subseteq \gamma$ tal que $p < r$.

Es claro que γ contiene a cualquier elemento de A, luego es cota superior de A.

Ahora, sea δ una cota superior de A. Como δ es cota superior para cualquier $\alpha \in A$, $\gamma = \bigcup\limits_{\alpha \in A} A \subseteq \delta$. En consecuencia, tenemos que γ es la mínima cota superior de A. $\square$

A continuación mostraremos que la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$ se mantiene para las cortaduras racionales.

Proposición 2.20. *Si r y s son números racionales, entonces se verifica:*

(a) $r^* + s^* = (r+s)^*$.

(b) $r^* \cdot s^* = (r \cdot s)^*$.

(c) Si $r \leq s$, entonces $r^* \subseteq s^*$.

Demostración.

(a) Sea $p \in r^* + s^*$, entonces $p = r' + s'$ con $r' < r$ y $s' < s$. Por tanto, $p = r' + s' < r + s$ y está en $(r+s)^*$.

Ahora sea $p < r + s$ y sean

$$t = \frac{r+s-p}{2} > 0, \qquad r' = r - t < r \qquad \text{y} \qquad s' = s - t < s.$$

Entonces

$$r' + s' = r + s - 2t = r + s - (r + s - p) = p,$$

por tanto, $p \in r^* + s^*$ y queda demostrada la igualdad.

(b) Veamos que $(-r)^* = -r^*$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. En efecto,

$$-r^* = (0-r)^* = (0 + (-r))^* = 0^* + (-r)^* = (-r)^*.$$

Por tanto, basta comprobar la propiedad para el caso en que r y s sean positivos.

Sea $p \in r^* \cdot s^*$. Entonces existen $r' < r$ y $s' < s$ positivos tales que $p \leq r' \cdot s' < r \cdot s$, por tanto $p \in (r \cdot s)^*$.

Ahora sea $p < r \cdot s$ positivo, hay que ver que está en $r^* \cdot s^*$. Tenemos que $\dfrac{p}{s} < r$, sea $r' = \dfrac{\frac{p}{s} + r}{2}$, entonces $0 < r' < r$ y $\dfrac{p}{r'} < s$. De igual manera sea $s' = \dfrac{\frac{p}{r'} + s}{2}$. Entonces $0 < \frac{p}{r'} < s' < s$, de donde $p < r' \cdot s'$. Por tanto, $p \in r^* \cdot s^*$ y hemos terminado.

(c) Si $r \leq s$ y $q < r$, entonces $q < s$, por lo que $q \in s^*$.

$\square$

Esta proposición nos indica que la aplicación que lleva a cada número racional, r, en su correspondiente cortadura racional, r^*, es un isomorfismo que conserva el orden, es decir, es la aplicación del teorema 1.8. Así podemos concluir que las cortaduras racionales forman un subcuerpo de $\mathbb{R}$ que se identifica con el cuerpo de los números racionales.

2.2. Sucesiones de Cauchy

En esta sección procederemos a realizar una construcción basada en sucesiones de Cauchy de números racionales. Esta construcción se debe al matemático Georg Cantor (1845-1918). En 1872, Cantor quería desarrollar una teoría satisfactoria de los números reales para poder manejar con precisión conjuntos de números infinitos. Consideraba criticables los planteamientos anteriores por suponer la existencia de los irracionales como límites de sucesiones de números racionales. En consecuencia, se propuso desarrollar una teoría de los números irracionales que no supusiese su existencia previa. En este contexto utilizó las sucesiones de Cauchy de números racionales para construir el conjunto de los números reales.

En esta sección utilizaremos como referencia principal [12], pero puede encontrarse también en [5].

En la definición 1.12 recordamos lo que es una sucesión de Cauchy en un cuerpo totalmente ordenado. La idea de esta construcción es definir los números reales como sucesiones de Cauchy de números racionales. Para ello, en primer lugar, estableceremos las operaciones de suma y producto de estas sucesiones. La forma de definir estas operaciones será la más intuitiva, donde el término n-ésimo de la sucesión suma es la suma de los elementos n-ésimos y el de la sucesión producto es el producto.

Definición 2.21. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de Cauchy de números racionales. Definimos su* suma*, que denotaremos por $\{a_n\} + \{b_n\}$, y su* producto*, que denotaremos por $\{a_n\} \cdot \{b_n\}$, como*

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \qquad y \qquad \{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}.$$

Ahora tenemos que ver que estas operaciones están bien definidas, es decir, que no se salen del conjunto de las sucesiones de Cauchy de números racionales.

Proposición 2.22. *La suma y el producto de dos sucesiones de Cauchy de números racionales son sucesiones de Cauchy de números racionales.*

Demostración. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de Cauchy de números racionales. Es claro que la sucesión suma y la sucesión producto tambien son sucesiones de números racionales, por tanto, solo tenemos que ver que son de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$ racional. Entonces existen n_0 y n_1 naturales, tales que $|a_n - a_m| < \epsilon$ para todos m, $n \geq n_0$ y $|b_n - b_m| < \epsilon$ para todos m, $n \geq n_1$. Sea $n_2 = \text{máx}(n_0, n_1)$. Entonces

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

si $n,m \geq n_2$. Luego la suma es de Cauchy.

Sabemos que toda sucesión de Cauchy está acotada. Sea $k \in \mathbb{Q}$, $k > 0$, una cota común de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Entonces

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a_m b_m| &= |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| \\ &\leq |a_n||b_n - b_m| + |b_m||a_n - a_m| < k\epsilon + k\epsilon = 2k\epsilon \end{aligned}$$

si $n,m \geq n_2$. Por tanto, el producto también es de Cauchy. □

Este conjunto de sucesiones con las operaciones definidas posee una estructura de anillo como se demuestra en el siguiente teorema:

Teorema 2.23. *El conjunto de las sucesiones de Cauchy de números racionales con la suma y producto definidos tiene estructura de anillo conmutativo y unitario.*

Demostración. Las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva se deducen directamente de las definiciones de suma y producto y de que estas propiedades se cumplen en $\mathbb{Q}$. El elemento neutro para la suma es la sucesión constante igual a 0 y el opuesto de una sucesión es aquella en la que cada término es el opuesto para la suma en los racionales del término de la sucesión original, que nuevamente es de Cauchy. El elemento neutro para el producto es la sucesión constante igual a 1. □

Sin embargo, no alcanza estructura de cuerpo, ya que no se cumple la propiedad del inverso para el producto. Es decir, existen sucesiones de Cauchy de números racionales y distintas de la sucesión constante igual a cero, que no tienen inverso para el producto.

Por ejemplo, la sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_n = \frac{1}{n}$. Fijándonos en la definición y en el elemento neutro para el producto, el inverso de $\{a_n\}$ debería ser la sucesión $\{b_n\}$ dada por $b_n = n$, que no es de Cauchy.

Teniendo esto en cuenta, surge la necesidad de considerar iguales a cero a las sucesiones como $\{a_n\}$ que convergen hacia cero. Así definiremos las sucesiones nulas.

Definición 2.24. *Diremos que una sucesión de Cauchy de números racionales es* nula *si tiene límite* 0.

Denotaremos por $\mathcal{A}$ al anillo de las sucesiones de Cauchy de números racionales y por $\mathcal{Y}$ al conjunto de la sucesiones nulas. Se puede observar que ninguna sucesión de $\mathcal{Y}$ tiene inverso para el producto. Sin embargo, no son las únicas, ya que cualquier sucesión en la que haya un cero no puede tener inverso. Para afrontar estos problemas trabajaremos en un espacio cociente.

Procedamos a construir el anillo cociente. Para ello, tenemos que ver que $\mathcal{Y}$ es un ideal maximal de $\mathcal{A}$.

Lema 2.25. *El conjunto $\mathcal{Y}$ es un ideal maximal de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Ver que $\mathcal{Y}$ es in ideal es inmediato del hecho de que la suma de sucesiones que convergen hacia cero, tiene también límite cero y el producto de una sucesión acotada por una que converge hacia cero, también converge hacia cero. Por tanto, $\mathcal{Y}$ es cerrado para la suma y es cerrado para el producto con cualquier elemento de $\mathcal{A}$. En conclusión $\mathcal{Y}$ es un ideal de $\mathcal{A}$.

Para ver que es maximal, tenemos que comprobar que si $\{a_n\}$ no está en $\mathcal{Y}$, entonces la sucesión constante igual a 1 está en el ideal generado por $\{a_n\}$ e $\mathcal{Y}$. Como $\{a_n\}$ no está en $\mathcal{Y}$, si $\delta > 0$ racional, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| > \delta$, si $n \geq n_0$. Consideremos la sucesión $\{b_n\}$ dada por $b_n = 0$, si $n < n_0$, y $b_n = \frac{1}{a_n}$, si $n \geq n_0$, y la sucesión $\{c_n\} \in \mathcal{Y}$ dada por $c_n = 1$, si $n < n_0$, y $c_n = 0$, si $n \geq n_0$. Se tiene que $\{1\} = \{c_n\} + \{a_n\} \cdot \{b_n\}$.

Falta ver que $\{b_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$ racional. Entonces,

$$|b_n - b_m| = \frac{|a_m - a_n|}{|a_n a_m|} \leq \frac{|a_m - a_n|}{\delta^2} < \frac{\epsilon}{\delta^2},$$

si n y m son suficientemente grandes. En consecuencia, $\{b_n\}$ es una sucesión de Cauchy y $\mathcal{Y}$ es maximal. $\square$

Al ser $\mathcal{Y}$ un ideal maximal el anillo cociente, $\mathcal{A}/\mathcal{Y}$, es un cuerpo. Este resultado, que se estudia en la asignatura de Matemáticas básicas, puede encontrarse, por ejemplo, en [11].

Definición 2.26. *Definimos* $\mathbb{R}$ *como el anillo cociente* $\mathcal{A}/\mathcal{Y}$.

Utilizaremos la notación $\{\widetilde{a_n}\}$ para referirnos a los elementos de $\mathbb{R}$, siendo $\{a_n\} \in \mathcal{A}$ uno de sus representantes. En $\mathbb{R}$, $\{\widetilde{a_n}\} = \{\widetilde{b_n}\}$ si, y solo si, $\{a_n\} - \{b_n\} \in \mathcal{Y}$, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Recordemos que las operaciones de este anillo son

$$\{\widetilde{a_n}\} + \{\widetilde{b_n}\} = \{\widetilde{a_n + b_n}\} \qquad \text{y} \qquad \{\widetilde{a_n}\} \cdot \{\widetilde{b_n}\} = \{\widetilde{a_n \cdot b_n}\}.$$

Ya sabemos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo, ahora tenemos que ver que es totalmente ordenado. Para ello vamos a utilizar el teorema 1.3. En primer lugar tenemos que definir los elementos positivos.

Definición 2.27. *Un elemento de* $\mathbb{R}$*,* $\{\widetilde{a_n}\}$*, es* positivo *(resp.* negativo*) si existen* $\delta > 0$ *(resp* $\delta < 0$*) y* n_0 *natural, tales que* $a_n > \delta$ *(resp.* $a_n < \delta$*) para todo* $n \geq n_0$.

Veamos que esta definición no depende del representante elegido. Si $\{a_n\}$ y $\{a'_n\}$ son dos representantes de $\{\widetilde{a_n}\}$ tales que existe $\delta > 0$ de forma que $a_n > \delta$ para n suficientemente grande, entonces $a'_n > a_n - \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2}$ para n suficientemente grande. Para los negativos se trata de la misma forma.

Denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de los elementos positivos y por $\mathcal{N}$ al conjunto de los elementos negativos.

Con estos conjuntos definidos, tenemos que comprobar que se verifican las condiciones del teorema 1.3.

Proposición 2.28. *Los conjuntos* $\{\widetilde{0}\}$, $\mathcal{P}$ *y* $\mathcal{N}$ *constituyen una partición de* $\mathbb{R}$, *es decir,*

$$\mathbb{R} = \{\widetilde{0}\} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{N}, \qquad \{\widetilde{0}\} \cap \mathcal{P} = \{\widetilde{0}\} \cap \mathcal{N} = \mathcal{N} \cap \mathcal{P} = \emptyset.$$

Además, $\{\widetilde{a_n}\} \in \mathcal{P}$ *si, y solo si,* $-\{\widetilde{a_n}\} \in \mathcal{N}$.

Demostración. Por las definiciones de los conjuntos, $\{\widetilde{0}\}$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{N}$ son disjuntos.

Sea $\{\widetilde{a_n}\} \in \mathbb{R}$ que no sea positivo ni negativo. Sea $\epsilon > 0$ racional, existe n_0 natural tal que $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ para todos $m,n \geq n_0$. Como $\{\widetilde{a_n}\} \notin \mathcal{P}$, existe $m_1 \geq n_0$ tal que $a_{m_1} < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces,

$$a_n = (a_n - a_{m_1}) + a_{m_1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

De igual modo, como $\{\widetilde{a_n}\} \notin \mathcal{N}$, existe $m_2 \geq n_0$ tal que $a_{m_2} > -\frac{\epsilon}{2}$, entonces,

$$a_n = a_n - a_{m_2} + a_{m_2} > -\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = -\epsilon.$$

Por tanto, $|a_n| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, luego $\{\widetilde{a_n}\} = \{\widetilde{0}\}$.

Si $\{\widetilde{a_n}\} \in \mathcal{P}$ entonces existe $\delta > 0$ y n_0 natural, tales que $a_n > \delta$ para todo $n \geq n_0$. Entonces, $-a_n < -\delta$ para todo $n \geq n_0$ y $-\{\widetilde{a_n}\} \in \mathcal{N}$. La implicación hacia el otro lado es similar. $\square$

Como se verifica esta proposición y $\mathbb{R}$ es un cuerpo, el teorema 1.3 ya nos garantiza que $\mathbb{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado. No obstante, recordaremos en la siguiente definición cual es la relación de orden que el conjunto $\mathcal{P}$ induce en $\mathbb{R}$.

Definición 2.29. *Sean* $\{\widetilde{a_n}\}, \{\widetilde{b_n}\} \in \mathbb{R}$. *Diremos que* $\{\widetilde{a_n}\} \leq \{\widetilde{b_n}\}$ *si* $\{\widetilde{b_n}\} - \{\widetilde{a_n}\}$ *es positivo o nulo, es decir, si la sucesión* $\{b_n - a_n\}$ *converge hacia cero o existen* $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta > 0$, *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tales que* $b_n - a_n > \delta$ *para todo* $n \geq n_0$.

En este momento solo falta comprobar la completitud. Como indicamos en el primer capítulo, en esta construcción utilizaremos la convergencia de las sucesiones de Cauchy de elementos de $\mathbb{R}$, junto con el hecho de que este conjunto es arquimediano (teorema 1.18). Para la noción de convergencia, utilizaremos las definiciones 1.10, 1.11 y 1.12, que están expresadas para cualquier cuerpo totalmente ordenado. Comenzaremos probando que $\mathbb{R}$ es arquimediano. Para esto primero tenemos que introducir el conjunto de los números racionales dentro de $\mathbb{R}$.

Definición 2.30. *A cada* $r \in \mathbb{Q}$ *le asociamos la clase de la sucesión constante igual a* r, $\{\widetilde{r}\} \in \mathbb{R}$.

A las clases de sucesiones asociadas a números racionales las llamaremos clases de sucesiones racionales. Para simplificar la notación utilizaremos $\widehat{r}$ para referirnos a $\{\widetilde{r}\}$.

Se deduce de la definición de suma y producto que esta asociación conserva las operaciones y el orden. Es decir, al igual que ocurría con las cortaduras racionales de la construcción anterior (proposición 2.20), la aplicación que lleva a cada $r \in \mathbb{Q}$ en $\widehat{r} \in \mathbb{R}$ es un isomorfismo que conserva el orden, esta aplicación es la misma que la el teorema 1.8. Por tanto, el conjunto de las clases de sucesiones racionales constituye un subcuerpo de $\mathbb{R}$ isomorfo a $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.31. *El cuerpo $\mathbb{R}$ es arquimediano.*

Demostración. Sean $\{\widetilde{a_n}\}, \{\widetilde{b_n}\} \in \mathbb{R}$ con $\{\widetilde{b_n}\} > \widehat{0}$. Como $\{\widetilde{b_n}\}$ es positiva, existe $\delta > 0$ tal que $b_n \geq \delta$ si $n \geq n_b$, para cierto $n_b \in \mathbb{N}$. Puesto que $\{a_n\}$ es acotada, existe un racional $r > 0$ tal que $|a_n| < r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero $\mathbb{Q}$ es arquimediano, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $r < m\delta$, en consecuencia,

$$mb_n - a_n \geq m\delta - r, \text{ si } n \geq n_b,$$

donde $m\delta - r > 0$.

Por consiguiente, $\widehat{m}\{\widetilde{b_n}\} > \{\widetilde{a_n}\}$. Por tanto, en $\mathbb{R}$ se verifica la propiedad arquimediana. □

Solo falta comprobar que toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{R}$ es convergente. Para ello presentaremos unos lemas que serán útiles en la demostración.

Lema 2.32. *Sea $\epsilon \in \mathbb{R}$ con $\epsilon > \widehat{0}$. Entonces existe $\delta \in \mathbb{Q}$ tal que $\widehat{0} < \widehat{\delta} < \epsilon$.*

Demostración. Sean $\epsilon \in \mathbb{R}$ con $\epsilon > \widehat{0}$ y $\{a_n\}$ un representante suyo. Entonces existen $\delta > 0$ racional y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $a_n > 2\delta$ si $n \geq n_0$. En consecuencia, $\widehat{0} < \widehat{\delta} < \epsilon$ y hemos terminado. □

Lema 2.33. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}$ un representante de α. Entonces $\{\widehat{a_n}\}$ converge hacia α.*

Demostración. Dado $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > \widehat{0}$, existe $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta > 0$ tal que $\widehat{\delta} < \epsilon$. Como $\{a_n\}$ es de Cauchy, existe n_0 natural tal que $|a_n - a_m| < \frac{\delta}{2}$ para todos $n, m \geq n_0$. En consecuencia, $|\widehat{a_n} - \alpha| < \widehat{\delta} < \epsilon$ si $n \geq n_0$. Por tanto, $\{\widehat{a_n}\}$ converge hacia α. □

Lema 2.34. *Sean $\alpha, \epsilon \in \mathbb{R}$ con $\epsilon > \widehat{0}$. Entonces existe un número racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que $|\alpha - \widehat{q}| < \epsilon$.*

Demostración. Sea $\{a_n\}$ un representante de α y sea $\alpha_m = \widehat{a_m}$ la sucesión del lema anterior. Entonces existe n_0 natural tal que $|\alpha_m - \alpha| < \epsilon$ si $m \geq n_0$. Luego tomando $q = a_{n_0}$ tenemos lo que buscamos y hemos terminado. □

Los lemas 2.32 y 2.34 nos indican que el conjunto de los elementos racionales de $\mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$.

El siguiente y último lema nos permitirá pasar la propiedad de Cauchy de sucesiones de números racionales a sucesiones de elementos racionales de $\mathbb{R}$ y viceversa.

Lema 2.35. *Una sucesión de números racionales, $\{q_n\}$, es de Cauchy si, y solo si, la sucesión $\{\widehat{q_n}\}$ de elementos racionaes de $\mathbb{R}$ es de Cauchy.*

Demostración. Como ya se mencionó previamente, si p y q son números racionales, entonces $p < q$ si, y solo si $\widehat{p} < \widehat{q}$. De aquí se deduce que $|p| < q$ si, y solo si $|\widehat{p}| < \widehat{q}$.

$\Rightarrow)$

Sea $\{q_n\}$ una sucesión de Cauchy de números racionales. Sea $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > \widehat{0}$. Por el Lema 2.32, existe $\delta \in \mathbb{Q}$, con $\delta > 0$ tal que $\widehat{\delta} < \epsilon$. Como $\{q_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|q_n - q_m| < \delta$, si $n, m \geq n_0$. Por tanto, $|\widehat{q_n} - \widehat{q_m}| < \widehat{\delta} < \epsilon$ y $\{\widehat{q_n}\}$ es una sucesión de Cauchy.

$\Leftarrow$)

Sea $\{\widehat{q_n}\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{R}$. Sea $\epsilon > 0$ un número racional. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\widehat{q_n} - \widehat{q_m}| < \widehat{\epsilon}$ si $n, m \geq n_0$. En consecuencia, $|q_n - q_m| < \epsilon$ si $n, m \geq n_0$ y $\{q_n\}$ es de Cauchy. $\square$

Ya podemos proceder a demostrar que $\mathbb{R}$ es completo. Como ya hemos dicho utilizaremos la convergencia de las sucesiones de Cauchy de elementos de $\mathbb{R}$ (teorema 1.18, apartado (c)).

Teorema 2.36. *El cuerpo totalmente ordenado $\mathbb{R}$ es completo.*

Demostración. Ya hemos probado que $\mathbb{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado y arquimediano. Veamos que toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{R}$ es convergente.

Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{R}$. Por el lema 2.34, existe una sucesión de números racionales, $\{q_n\}$, tal que

$$|\alpha_n - \widehat{q_n}| < \frac{\widehat{1}}{n},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > \widehat{0}$. Entonces, como $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe n_0 natural tal que

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \epsilon$$

si $n, m \geq n_0$. Además, en virtud de la propiedad arquimediana, se puede elegir de forma que se cumpla que

$$\widehat{\frac{1}{n_0}} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por tanto,

$$|\widehat{q_n} - \widehat{q_m}| \leq |\widehat{q_n} - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - \widehat{q_m}| < \epsilon,$$

si $n, m \geq n_0$. En consecuencia, la sucesión $\{\widehat{q_n}\}$ es de Cauchy y, por el lema 2.35, la sucesión $\{q_n\}$ es de Cauchy. Por el lema 2.33, la sucesión $\{\widehat{q_n}\}$ converge hacia $\alpha = \{\widetilde{q_n}\} \in \mathbb{R}$, es decir, existe $n_1 \geq n_0$ tal que

$$|\widehat{q_n} - \alpha| < \frac{2\epsilon}{3}$$

si $n \geq n_1$. Entonces,

$$|\alpha_n - \alpha| \leq |\alpha_n - \widehat{q_n}| + |\widehat{q_n} - \alpha| < \epsilon$$

si $n \geq n_1$. Por consiguiente, α es el límite de $\{\alpha_n\}$ y podemos concluir que $\mathbb{R}$ es completo. $\square$

De este modo hemos comprobado que $\mathbb{R}$ cumple todas las propiedades de los números reales. Así, hemos completado la construcción de este conjunto mediante las sucesiones de Cauchy.

En la asignatura Introducción a los espacios de funciones, se realiza la compleción de un espacio normado E a un espacio normado y completo $\widehat{E}$, (por ejemplo, véase [16]). Dicha compleción se efectúa también mediante sucesiones de Cauchy de elementos de E, trabajando con el espacio cociente. Además se demuestra que el espacio E es denso en $\widehat{E}$. Sin embargo, aquí también nos fijamos en la estructura de cuerpo totalmente ordenado y utilizamos la propiedad arquimediana, y un espacio normado arbitrario no tiene esta estructura.

2.3. Construcción decimal

En esta sección trataremos la idea de la construcción de los números reales como números decimales, que puede encontrarse en [8], que usaremos como referencia principal, aunque utilizaremos [6] como bibliografía complementaria. Esta construcción parte directamente de los números enteros. Dice en [8] "si Dios ha creado los números enteros, el hombre ha hecho el resto". Los métodos que se usan se pueden encontrar en el trabajo del matemático Simon Stevin, quien desarrolló los fundamentos de la aritmética decimal y números reales en su trabajo "De Thiende" ("El arte de las décimas"), publicado en 1685.

Esta construcción refleja la idea de ver un número real como un número decimal infinito, que es la noción que se introduce en el instituto. Los números decimales se definen en primero de la ESO [13] como la composición de la parte entera y la parte decimal. La parte entera está formada por las cifras que se sitúan a la izquierda de la coma y la parte decimal por las cifras que se sitúan a la derecha. Cada cifra tiene un valor diez veces mayor que la cifra que se sitúa inmediatamente a su derecha. Las cifras decimales son infinitas, pudiendo ser cero a partir de una.

Aquí emplearemos la siguiente definición.

Definición 2.37. *Llamaremos* número decimal *a toda sucesión ilimitada de cifras de la forma*

$$a = \alpha_{-1}\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$$

donde $\alpha_{-1} = \pm 1$ *define el signo de* a*;* $0 \leq \alpha_0 \in \mathbb{Z}$ *y* α_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, son las cifras decimales de* a *que toman valores enteros entre* 0 *y* 9*.*

Por ejemplo, el número decimal $13,4836...$ vendría expresado de la siguiente forma:

$$\alpha_{-1} = 1,\ \alpha_0 = 13,\ \alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = 8,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_4 = 6,...$$

O el número π de la manera siguiente:

$$\alpha_{-1} = 1,\ \alpha_0 = 3,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = 5,...$$

En [8] se introduce el signo dentro de α_0 en lo que llama "enteros con signo" que, aparentemente, no son otra cosa que lo que nosotros llamamos números enteros. Entonces, si $\alpha_0 \geq 0$, el número decimal se corresponde con el número real $\alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{10^k}$, sin embargo, si $\alpha_0 < 0$, el número decimal se corresponde con el número real $\alpha_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{10^k}$, lo que dificulta un tratamiento homogéneo.

En [6], el signo se introduce fuera de α_0 como hemos hecho aquí. La razón por la que lo hemos definido así es que esto nos permite establecer el truncado de un número decimal como haremos a continuación y que es la forma habitual de trabajar con un número decimal negativo: -1,12 se suele interpretar como $-(1 + 1/10 + 2/100)$, no como $-1 + 1/10 + 2/100$. Uno de los inconvenientes es que a priori diferencia el cero con signo positivo y el cero con signo negativo. Otro es que la parte entera de un número negativo (con $\alpha_{-1} = -1$) no nulo será $\alpha_{-1}\alpha_0 - 1$, en lugar de $\alpha_{-1}\alpha_0$.

En esta sección utilizaremos las letras latinas a, b, c... para denotar a los números decimales y sus respectivas letras griegas α, β, γ... para denotar sus cifras.

Definición 2.38. *Para cada $p \in \mathbb{N}_0$ definimos el* entero truncado por la cifra decimal p *al número*

$$\widehat{a_p} = \alpha_{-1} \sum_{i=0}^{p} 10^{p-i} \alpha_i.$$

El hecho de que los truncados de los números decimales sean únicos para cada número decimal (salvo los casos del cero) y que verifiquen la ecuación de recurrencia

$$\widehat{a_{p+1}} = 10\,\widehat{a_p} + \alpha_{-1}\alpha_{p+1} \quad \text{para cada } p \in \mathbb{N}_0,$$

nos permite realizar la siguiente observación.

Observación 2.39. *Podemos definir un número decimal a partir de una sucesión $\{z_p\}_{p=0}^{\infty}$ de números enteros si esta sucesión se corresponde con los truncados de un número decimal. Esta sucesión tiene que cumplir que para todo $p \geq 0$, existe un único entero α_{p+1}, con $0 \leq \alpha_{p+1} \leq 9$, tal que $z_{p+1} = 10z_p + \alpha_{-1}\alpha_{p+1}$, donde α_{-1} es:*

- *$\alpha_{-1} = 1$ si $z_p \geq 0$ para todo p.*
- *$\alpha_{-1} = -1$ si $z_p \leq 0$ para todo p.*

De esta forma obtenemos el número decimal dado por los α_p definidos por recurrencia y $\alpha_0 = |z_0|$.

Si $z_p = 0$ para todo p obtenemos el número decimal con todas las cifras igual a cero.

Por ejemplo, la sucesión de números enteros $0; 4; 41; 411; 4111; ...$ nos proporcionaría el número decimal $0,4111...$.

Uno de los problemas que presenta esta construcción es la equivalencia que existe entre los números en los que las cifras son 9 a partir de una y en los que las cifras son 0 a partir de una. Por ejemplo, el número decimal $0,99999...$ con infinitos nueves debería ser el mismo que el número decimal $1,00000...$ con infinitos ceros. También deberían ser equivalentes el cero con signo positivo y el cero con signo negativo.

Esto lo expresamos de una manera formal en la siguiente definición.

Definición 2.40. *Dos números decimales a y b son* equivalentes *y se escribe $a \sim b$ si*

$$|\widehat{a_p} - \widehat{b_p}| \leq 1$$

para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

Lo que viene a decir esta definición es que dos números decimales son equivalentes si sus truncados se distancian en una unidad como mucho. La siguiente proposición nos indica que, en efecto, la definición 2.40 se corresponde con la idea que expresamos previamente a dicha definición.

Proposición 2.41. *Se tiene que $a \sim b$ si y solo si se da uno de los siguientes casos:*

- $a = b$.
- *Todas las cifras de a y b son 0 (aunque a y b pueden tener distinto signo).*
- *Los números a y b tienen el mismo signo y existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que:*
    - *Si $n < p$, $\alpha_n = \beta_n$.*
    - *Si $n = p$, $|\alpha_n - \beta_n| = 1$.*
    - *Si $n > p$ y $\alpha_p > \beta_p$, entonces $\alpha_n = 0$ y $\beta_n = 9$ y al revés si $\alpha_p < \beta_p$*

Demostración. $\Leftarrow$)

Para los dos primeros casos es evidente que se cumple la relación. En el tercer caso, basta ver que si $n < p$, entonces

$$|\widehat{a_n} - \widehat{b_n}| = 0,$$

y si $n = p$, entonces

$$|\widehat{a_n} - \widehat{b_n}| = 1.$$

Supongamos que $\alpha_{-1} = \beta_{-1} = 1$ y $\alpha_p > \beta_p$, lo que implica que $\widehat{a_p} - \widehat{b_p} = 1$. Supongamos que $\widehat{a_n} - \widehat{b_n} = 1$ para un $n \geq p$, entonces

$$\widehat{a_{n+1}} - \widehat{b_{n+1}} = 10\widehat{a_n} - 10\widehat{b_n} - \beta_{n+1} = 10(\widehat{a_n} - \widehat{b_n}) - 9 = 10 - 9 = 1.$$

Por tanto, por inducción, se tiene que $a \sim b$. Se razonaría de forma similar en el caso de que $\alpha_p < \beta_p$ y para el caso en que $\alpha_{-1} = \beta_{-1} = -1$.

$\Rightarrow$)

Supongamos que $a \sim b$ y $\alpha_{-1} = 1$ y $\beta_{-1} = -1$, y no son 0 todas la cifras de a, por tanto, existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $\alpha_p \neq 0$. Entonces

$$|\widehat{a_{p+1}} - \widehat{b_{p+1}}| = 10\widehat{a_p} - 10\widehat{b_p} + \alpha_{p+1} + \beta_{p+1} \geq 10\widehat{a_p} + 0 \geq 10.$$

Lo cual es absurdo ya que $a \sim b$. Si existe una cifra distinta de 0 en b se razona de forma similar. Esto implica que si a y b tienen distinto signo, entonces $a \sim b$ si y solo si todas sus cifras son 0.

Supongamos que $a \sim b$, $\alpha_{-1} = \beta_{-1} = 1$ y $a \neq b$. Sea p el menor natural tal que $\alpha_p \neq \beta_p$. Entonces se tiene que

$$1 \geq |\widehat{a_p} - \widehat{b_p}| = |\alpha_p - \beta_p| \geq 1.$$

Supongamos que $\widehat{a_p} = \widehat{b_p} + 1$. Entonces

$$\widehat{a_{p+1}} - \widehat{b_{p+1}} = 10\widehat{a_p} - 10\widehat{b_p} + \alpha_{p+1} - \beta_{p+1} = 10 + \alpha_{p+1} - \beta_{p+1} \geq 10 - |\alpha_{p+1} - \beta_{p+1}| \geq 1.$$

Esto es menor o igual que uno solamente en el caso en que $\alpha_{p+1} = 0$ y $\beta_{p+1} = 9$. Por recurrencia obtenemos el caso tercero.

Si se tiene que $\widehat{a_p} = \widehat{b_p} - 1$. Entonces

$$|\widehat{a_{p+1}} - \widehat{b_{p+1}}| = |10\widehat{a_p} - 10\widehat{b_p} + \alpha_{p+1} - \beta_{p+1}| = |-10 + \alpha_{p+1} - \beta_{p+1}|.$$

En este caso se obtiene $\alpha_{p+1} = 9$ y $\beta_{p+1} = 0$.

Si $\alpha_{-1} = \beta_{-1} = -1$ se razona de forma similar. □

El siguiente lema va a resultar muy útil para simplificar las demostraciones a lo largo de toda la construcción.

Lema 2.42. *Sea $m \in \mathbb{N}$. Sean a y b números decimales tales que*

$$\widehat{b_k} - \widehat{a_k} \geq m \text{ para algún } k \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces,

$$\widehat{b_{k+1}} - \widehat{a_{k+1}} \geq 10m - 9.$$

En particular, si $m \geq 10^p + 1$, $p \in \mathbb{N}_0$, entonces

$$\widehat{b_{k+1}} - \widehat{a_{k+1}} \geq 10^{p+1} + 1.$$

Demostración. Veamos el caso en que a y b tienen signo distinto. Entonces $\alpha_{-1} = -1$ y $\beta_{-1} = 1$. Se obtiene que

$$\begin{aligned}\widehat{b_{k+1}} - \widehat{a_{k+1}} &= 10(\widehat{b_k} - \widehat{a_k}) + \beta_{-1}\beta_{k+1} - \alpha_{-1}\alpha_{k+1} \\ &= 10(\widehat{b_k} - \widehat{a_k}) + \beta_{k+1} + \alpha_{k+1} \geq 10m.\end{aligned}$$

Queda el caso en que tengan el mismo signo. Entonces

$$\begin{aligned}\widehat{b_{k+1}} - \widehat{a_{k+1}} &= 10(\widehat{b_k} - \widehat{a_k}) + \beta_{-1}\beta_{k+1} - \alpha_{-1}\alpha_{k+1} \\ &= 10(\widehat{b_k} - \widehat{a_k}) + \alpha_{-1}\beta_{k+1} - \alpha_{-1}\alpha_{k+1} \\ &= 10(\widehat{b_k} - \widehat{a_k}) + \alpha_{-1}(\beta_{k+1} - \alpha_{k+1}) \geq 10m - 9.\end{aligned}$$

En particular, si $m \geq 10^p + 1$, entonces

$$\widehat{b_{k+1}} - \widehat{a_{k+1}} \geq 10m - 9 \geq 10(10^p + 1) - 9 = 10^{p+1} + 1.$$

□

Observación 2.43. *El lema 2.42 se aplicará en algunas ocasiones usando el contrarrecíproco. Es decir, si*

$$\widehat{b_{k+1}} - \widehat{a_{k+1}} \leq 10^p \textit{ para algún } k \in \mathbb{N}_0 \textit{ y } p \geq 1,$$

entonces,

$$\widehat{b_k} - \widehat{a_k} \leq 10^{p-1}.$$

Observación 2.44. *Una consecuencia del lema 2.42 es que si existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $\widehat{a_p} < \widehat{b_p}$, entonces $\widehat{a_{p+1}} < \widehat{b_{p+1}}$. Esto nos permite concluir que, en el caso de que exista dicho p, no existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $\widehat{a_k} > \widehat{b_k}$ porque el orden se mantiene entre un truncado y el siguiente.*

Otra consecuencia de este lema es que, si los truncados por la cifra p de dos números decimales se diferencian en más de una unidad, entonces las diferencias de los truncados por la cifra n cuando n tiende a infinito, serán arbitrariamente grandes. Esto nos va a permitir introducir otra forma de expresar la relación de la definición 2.40.

Proposición 2.45. *Sean a y b números decimales. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se cumple*

$$|\widehat{a_p} - \widehat{b_p}| \leq k \textit{ para todo } p \in \mathbb{N}_0,$$

entonces $a \sim b$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\widehat{a_p} - \widehat{b_p}| \leq k \text{ para todo } p \in \mathbb{N}_0.$$

Supongamos que $a \not\sim b$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|\widehat{a_p} - \widehat{b_p}| \geq 2.$$

Por el lema 2.42, tenemos que, si $n \in \mathbb{N}$,

$$|\widehat{a_{p+n}} - \widehat{b_{p+n}}| \geq 10^n + 1.$$

Tomando n tal que $10^n > k$, obtenemos que no se cumple la propiedad requerida. Por tanto, por reducción al absurdo, $a \sim b$. □

Ahora será sencillo comprobar que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

Proposición 2.46. *La relación de la definición 2.40 es una relación de equivalencia en el conjunto de los números decimales.*

Demostración. Las propiedades reflexiva y simétrica son directas de la definición.

Para la propiedad transitiva sean a, b y c tales que $a \sim b$ y $b \sim c$. Esto implica que para todo $p \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$|\widehat{a_p} - \widehat{c_p}| = |\widehat{a_p} - \widehat{b_p} + \widehat{b_p} - \widehat{c_p}| \leq |\widehat{a_p} - \widehat{b_p}| + |\widehat{b_p} - \widehat{c_p}| \leq 2. \tag{2.1}$$

Por la proposición 2.45, $a \sim c$.

□

Se trabajará en el conjunto cociente por esta relación de equivalencia. A este conjunto lo denotaremos por $\mathbb{R}$.

Observemos que cada número real admite a lo sumo dos representantes decimales. Los casos en los que admite dos son los vistos en la proposición 2.41. Es decir, el caso en que todas las cifras sean cero con los signos distintos y el caso en que tenga una terminación de nueves y otra de ceros.

Definición 2.47. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Llamaremos* representante canónico *de a al siguiente número decimal:*

- *El único representante si sólo tiene un representante.*
- *El representante positivo si todas las cifras de los representantes son* 0.
- *El representante con terminación en* 0 *en otro caso.*

Llamaremos truncado de a por la cifra p *al truncado de su representante canónico por la cifra p y lo denotaremos por $\widehat{a_p}$.*

La razón por la que escogemos un representante canónico es para trabajar sistemáticamente con uno. Las razones por las que escogemos la terminación en ceros son, en primer lugar, para introducir visualmente mejor los números enteros dentro de $\mathbb{R}$ y, en segundo lugar, porque posiblemente faciliten las demostraciones.

Los números enteros se introducen dentro de $\mathbb{R}$ como aquellos números cuyas cifras decimales son todas 0. Por ejemplo, $10,0000...$ Utilizaremos la notación $z, 0000...$ o simplemente z para referirnos al conjunto de los números enteros de $\mathbb{R}$. El contexto mostrará si vemos z como un número de $\mathbb{R}$ o un número entero.

Ahora vamos a describir la estructura de $\mathbb{R}$. Comenzaremos viendo la relación de orden.

Definición 2.48. *Se define en $\mathbb{R}$ la relación $a \leq^* b$ si y solo si $\widehat{a_p} \leq \widehat{b_p}$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$.*

Sea K un conjunto totalmente ordenado con una relación de equivalencia, $\sim$. Si $x, y, z \in K$, con $x \sim y$ y $x \leq z \leq y$, implica que $x \sim z \sim y$, entonces el conjunto cociente es un conjunto ordenado con el orden inducido.

Nótese que esta relación está definida con los representantes canónicos, pero se podría haber definido de la misma forma en el conjunto de los números decimales. La clave para que se obtenga una relación de orden en el cociente, $\mathbb{R}$, es que si tenemos dos representantes del mismo número, no existe ningún número decimal que esté entre ambos.

Proposición 2.49. *La relación $\leq^*$ es una relación de orden total en $\mathbb{R}$.*

Demostración. La propiedad reflexiva se deduce de la definición.

La transitividad es consecuencia directa del orden de los números enteros.

Para la propiedad antisimétrica sean a y b tales que $a \leq^* b$ y $b \leq^* a$. Entonces $\widehat{a_p} \leq \widehat{b_p}$ y $\widehat{b_p} \leq \widehat{a_p}$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Lo que implica que $\widehat{a_p} = \widehat{b_p}$ para todo p y, por tanto, se cumple $a = b$.

Falta ver que es total. Sean a y b con $a \neq b$.

Si el signo de ambos es distinto, entonces es mayor el que tiene signo positivo por el orden de los enteros.

Si tienen ambos signo positivo, entonces existe k tal que $\widehat{a_n} = \widehat{b_n}$ si $n < k$ y $\widehat{a_k} \neq \widehat{b_k}$. Si $\widehat{a_k} < \widehat{b_k}$, supongamos que para $j \geq k$ se tiene que $\widehat{a_j} < \widehat{b_j}$. Por la observación 2.44, $\widehat{a_{j+1}} < \widehat{b_{j+1}}$. Por inducción, $\widehat{a_p} < \widehat{b_p}$ si $p \geq k$. Por tanto, para todo $p \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $\widehat{a_p} \leq \widehat{b_p}$ y, en consecuencia, $a \leq^* b$. Se razonaría igual en caso de que $\widehat{a_k} > \widehat{b_k}$.

Si tienen ambos signo negativo. Se razona de forma similar.

□

Aquí hemos utilizado la notación $\leq^*$ para diferenciar del orden de los enteros. En adelante utilizaremos la notación $\leq$ indistintamente para el orden de los reales y el de los enteros, se diferenciará por el contexto.

Observemos que si nos restringimos a los números reales que tienen signo positivo esto es un orden lexicográfico sobre las cifras. A la hora de comparar no será necesario comparar todos los truncados, sino que bastará con fijarse en la primera cifra distinta. Por ejemplo, $2,1234... < 2,4321...$ ya que ambos tienen signo positivo, la primera cifra es igual y en la segunda $1 < 4$. Si ambos tuviesen signo negativo, el orden se invierte y $-2,1234... > -2,4321...$

El siguiente lema nos proporciona una útil herramienta para comparar utilizando esta idea.

Lema 2.50. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $a < b$ si, y solo si, existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $\widehat{a_p} < \widehat{b_p}$.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. En particular se tiene que $\widehat{a_p} \leq \widehat{b_p}$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$. Si $\widehat{a_p} = \widehat{b_p}$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$, entonces $a = b$, lo cual es absurdo. Por tanto existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $\widehat{a_p} < \widehat{b_p}$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si existe $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $\widehat{a_j} < \widehat{b_j}$, por la observación 2.44, se tiene que, para todo $p \in \mathbb{N}_0$, $\widehat{a_p} \leq \widehat{b_p}$. Por tanto, $a \leq b$. Como los representantes canónicos de a y b no coinciden, entonces $a \neq b$. En conclusión, $a < b$. □

En esta construcción lo más complicado será definir las operaciones. Para ello vamos a necesitar nociones de convergencia. Por ello, primero demostraremos el axioma de completitud. Además esta propiedad la utilizaremos posteriormente para demostrar la existencia del elemento inverso para el producto.

Proposición 2.51. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente admite extremo superior.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío y acotado superiormente. Entonces existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq m$ para todo $a \in A$. Consideremos la sucesión de enteros $\{z_p\}_{p=0}^{\infty}$ dada por

$$z_p = \max_{a \in A} \widehat{a_p}.$$

Esto existe siempre ya que $\widehat{a_p} \leq \widehat{m_p}$ para cualquier $a \in A$ y para cualquier $p \in \mathbb{N}_0$.

Veamos que $\{z_p\}_{p=0}^{\infty}$ cumple las condiciones de la observación 2.39. El signo de z_p es constante, ya que si existe $a \in A$ con $a \geq 0$, entonces $z_p \geq 0$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$ y si no, entonces $z_p \leq 0$.

Sea $p \geq 1$ y sea $b \in A$ tal que

$$\max_{a \in A} \widehat{a_p} = \widehat{b_p}.$$

Si tenemos $c \in A$ tal que $\widehat{c_{p-1}} > \widehat{b_{p-1}}$, entonces, por la observación 2.44, $\widehat{c_p} > \widehat{b_p}$, lo cual es absurdo. Por tanto, $z_{p-1} = \widehat{b_{p-1}}$. En consecuencia, $z_k = 10z_{k-1} + \beta_{-1}\beta_k$ para todo $k \leq p$. Como p era arbitrario, $\{z_p\}$ define un número decimal, cuya clase llamaremos d. Observemos que no podemos garantizar que z_p sea el truncado del representante canónico de d, pero sí se tiene que $\widehat{d_p} - 1 \leq z_p \leq \widehat{d_p} + 1$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

Tenemos que ver que d es el extremo superior de A. En primer lugar, d es cota superior ya que, si $a \in A$ es mayor que d, existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\widehat{a_p} > \widehat{d_p} + 1 \geq z_p,$$

lo cual es absurdo.

Veamos que es la mínima cota superior. Sea $e < d$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\widehat{e_p} < \widehat{d_p} - 1 \leq z_p = \widehat{a_p},$$

para algún $a \in A$. Por tanto, e no es cota superior de A. $\square$

En este momento vamos a definir criterios de convergencia. Estos criterios no se formulan de la misma manera en [8]. Sin embargo, los hemos adaptado para trabajar más cómodamente con nuestra definición de truncado. Aunque lo habitual, en un cuerpo totalmente ordenado, es definir la convergencia utilizando la resta, aquí necesitaremos la convergencia para definir la suma. Para definir la convergencia utilizaremos diferencias entre truncados.

Definición 2.52. *Diremos que una sucesión $\{a^{(n)}\}$ de números reales converge hacia $a \in \mathbb{R}$ si para cada $p \in \mathbb{N}_0$ se tiene que existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p}| \leq 1,$$

para todo $n \geq n_p$. En este caso diremos que a es el límte de la sucesión *y lo escribiremos*

$$\lim_{n \to \infty} a^{(n)} = a.$$

Observemos que el límite, si existe, es único. Si tenemos que $\{a^{(n)}\}$ tiene límites a y b, entonces para todo $p \in \mathbb{N}_0$ y n suficientemente grande se tiene que

$$|\widehat{a_p} - \widehat{b_p}| \leq |\widehat{a_p} - \widehat{a_p^{(n)}}| + |\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{b_p}| \leq 2.$$

Por tanto, la proposición 2.45 nos garantiza que $a = b$.

La idea de esta noción de convergencia es acotar la diferencia de los truncados de los términos de la sucesión y el límite por 1. Cuando las operaciones estén definidas podremos comprobar que lo que en realidad estamos diciendo en esta definición es que $|a^{(n)}-a| \leq 10^{-p}$, con $p \in \mathbb{N}_0$, cuando n es suficientemente grande. Donde 10^{-p} representa el número de signo positivo cuyas cifras son todas 0 salvo la cifra p-ésima que es 1.

Del mismo modo que en la proposición 2.45 podemos demostrar que se puede sustituir el 1 de la definición de convergencia por cualquier k natural.

Proposición 2.53. *Sean $\{a^{(n)}\}$ una sucesión de números reales y $a \in \mathbb{R}$. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ existe $n_p \in \mathbb{N}$ de modo que*

$$|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p}| \leq k, \text{ para todo } n \geq n_p,$$

entonces $\{a^{(n)}\}$ converge hacia a.

Demostración. Sean $\{a^{(n)}\}$ una sucesión de números reales y $a \in \mathbb{R}$ tales que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p}| \leq k \text{ si } n \geq n_p$$

con $k \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $\{a^{(n)}\}$ no converge hacia a, entonces existe $p \in \mathbb{N}_0$ y existe $m \geq n_{p+k}$ tal que

$$|\widehat{a_p^{(m)}} - \widehat{a_p}| \geq 2.$$

Por el lema 2.42,

$$|\widehat{a_{p+k}^{(m)}} - \widehat{a_{p+k}}| \geq 10^k + 1 > k,$$

lo cual lleva a un absurdo. Por tanto, $\{a^{(n)}\}$ converge hacia a. □

En el siguiente teorema veremos otra forma equivalente de expresar la convergencia de una sucesión. Esta forma tiene la intención de imitar la condición de Cauchy. En la práctica, utilizaremos este teorema para demostrar la convergencia de las sucesiones cuando no sabemos cuál es exactamente el límite. Aunque en [8] se omite la demostración de este resultado afirmando que "es fácil y no hace intervenir más que las propiedades elementales de la adición algebraica de los enteros", la demostración presentada no puede considerarse sencilla.

Teorema 2.54. *Una sucesión de números reales $\{a^{(n)}\}$ es convergente si, y solo si, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $p \in \mathbb{N}_0$, existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p^{(m)}}| \leq k,$$

para todos $m, n \geq n_p$.

Demostración. Sea $\{a^{(n)}\}$ una sucesión de números reales convergente. Por tanto, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que para cada p natural existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p}| \leq 1,$$

para todo $n \geq n_p$. Entonces si $n, m \geq n_p$,

$$|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p^{(m)}}| = |\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p} + \widehat{a_p} - \widehat{a_p^{(m)}}| \leq |\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p}| + |\widehat{a_p} - \widehat{a_p^{(m)}}| \leq 2. \tag{2.2}$$

Por tanto, se cumple la propiedad del teorema.

Sea ahora $\{a^{(n)}\}$ una sucesión que cumple la propiedad del teorema. Buscamos a que sea su límite. Podemos considerar que $k = 1$, ya que si $k \leq 10^j$, por la observación 2.43 se tiene que $|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p^{(m)}}| \leq 1$ si $n, m \geq n_{p+j}$. Esto implica que para cada $p \in \mathbb{N}$, el valor de $|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p^{(m)}}| \leq 1$ es 1 o 0 para n, m suficientemente grandes.

Primero veamos que, si la sucesión no tiene límite 0, existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $\{\alpha_{-1}^{(n)}\}$ es constante para $n \geq t_0$. Sea $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $|\widehat{a_p^{(n)}}| \geq 2$ para algún $n \geq n_p$. Este existe ya que la sucesión no puede tener límite 0. Entonces, si existe $m \geq n_p$ tal que $\alpha_{-1}^{(m)} \neq \alpha_{-1}^{(n)}$, se obtiene que $|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p^{(m)}}| \geq |\widehat{a_p^{(n)}}| \geq 2$, lo que es absurdo.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $\{\alpha_{-1}^{(n)}\}$ es constante. Le daremos a α_{-1} ese valor.

Consideremos la siguiente propiedad **P**: un número $t \in \mathbb{N}_0$ cumple **P** si y solo si existe $n'_t > n_t$ tal que

$$|\widehat{a_t^{(n)}} - \widehat{a_t^{(m)}}| = 0, \quad \text{es decir,} \quad \widehat{a_t^{(n)}} = \widehat{a_t^{(m)}}$$

para todos $m, n \geq n'_t$.

Veamos que si t no cumple **P**, entonces tampoco la cumple $t+1$. Si $t+1$ cumple **P**, existe $n'_{t+1} \geq n_{t+1}$ tal que

$$\widehat{a_{t+1}^{(n)}} - \widehat{a_{t+1}^{(m)}} = 0$$

si n, m son mayores que n'_{t+1}. Como t no cumple **P**, existen $n, m > n'_{t+1}$ tales que

$$\widehat{a_t^{(n)}} - \widehat{a_t^{(m)}} = 1.$$

Esto implica que

$$\widehat{a_{t+1}^{(n)}} - \widehat{a_{t+1}^{(m)}} = 10 + \alpha_{-1}(\alpha_{t+1}^{(n)} - \alpha_{t+1}^{(m)}) \geq 1,$$

lo que es absurdo. Por consiguiente, $t+1$ no cumple **P**.

Existen dos opciones:

- Se cumple **P** para todo $t \in \mathbb{N}_0$. Esto implica que para cada $p \in \mathbb{N}$ existe $n'_p > n_p$ tal que
$$|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p^{(m)}}| = 0$$
para todos $m, n \geq n'_p$. Además podemos suponer que $n'_{p+1} \geq n'_p$ para todo p. Entonces consideramos la sucesión de enteros $\{z_p\}$ dada por
$$z_p = \widehat{a_p^{(n'_p)}}.$$
Tenemos que
$$\begin{aligned} z_{p+1} = \widehat{a_{p+1}^{(n'_{p+1})}} &= 10\widehat{a_p^{(n'_{p+1})}} + \alpha_{-1}^{(n'_{p+1})}\alpha_{p+1}^{(n'_{p+1})} \\ &= 10\widehat{a_p^{(n'_p)}} + \alpha_{-1}\alpha_{p+1}^{(n'_{p+1})} = 10z_p + \alpha_{-1}\alpha_{p+1}^{(n'_{p+1})}. \end{aligned}$$
Por la observación 2.39, esta sucesión define un número decimal, cuya clase llamaremos a. La relación que hay entre a y z_p es $\widehat{a_p} - 1 \leq z_p \leq \widehat{a_p} + 1$. Se obtiene que
$$|\widehat{a_p} - \widehat{a_p^{(n)}}| = |\widehat{a_p} - z_p| \leq 1, \text{ si } n \geq n'_p.$$
Por tanto, a es el límite de la sucesión $\{a^{(n)}\}$.
- Existe un número natural que no cumple **P**. Sea t el mínimo. Consideramos la sucesión de números enteros $\{z_p\}$ dada por:
  - Si $p < t$, entonces $z_p = \widehat{a_p^{(n'_p)}}$.
  - Si $p \geq t$, entonces $z_p = \max_{n \geq n_p} \widehat{a_p^{(n)}}$. Observemos que este máximo existe ya que $\widehat{a_p^{(n)}}$ solo puede tomar dos valores y p no cumple **P**. Los valores son $\widehat{a_p^{(n_p)}}$ y o bien $\widehat{a_p^{(n_p)}} + 1$, o bien $\widehat{a_p^{(n_p)}} - 1$. Si tomase ambos valores se incumpliría la propiedad del teorema.

  Veamos que esta sucesión define un número decimal.

  Si $p < t$ se razona como en el caso anterior.

  Si $p = t$, fijamos un $m_t \geq n'_{t-1}$ donde se alcance el máximo (esto se puede hacer ya que hay infinitos porque no se cumple **P**) y procedemos como en el caso anterior:
$$\begin{aligned} z_t = \max_{n \geq n_t} \widehat{a_t^{(n)}} = \widehat{a_t^{(m_t)}} &= 10\widehat{a_{t-1}^{(m_t)}} + \alpha_{-1}^{(m_t)}\alpha_t^{(m_t)} \\ &= 10\widehat{a_{t-1}^{(m_t)}} + \alpha_{-1}\alpha_t^{(m_t)} = 10\widehat{a_{t-1}^{(n'_{t-1})}} + \alpha_{-1}\alpha_t^{(m_t)} \\ &= 10z_{t-1} + \alpha_{-1}\alpha_t^{(m_t)}. \end{aligned}$$

Si $p > t$, fijamos un $m_p \geq \text{máx}(n_{p-1}, n_p)$ donde se alcance el máximo, es decir, $z_p = \widehat{a_p^{(m_p)}}$. Esto implica que

$$\max_{n \geq n_{p-1}} \widehat{a_{p-1}^{(n)}} = \widehat{a_{p-1}^{(m_p)}},$$

ya que si se alcanzase en $q \geq \text{máx}(n_{p-1}, n_p)$, y no en m_p, por la observación 2.44, $\widehat{a_p^{(m_p)}} < \widehat{a_p^{(q)}}$, lo que es absurdo.

Entonces,

$$\begin{aligned} z_p = \max_{n \geq n_p} \widehat{a_p^{(n)}} &= \widehat{a_p^{(m_p)}} = 10\widehat{a_{p-1}^{(m_p)}} + \alpha_{-1}^{(m_p)}\alpha_p^{(m_p)} \\ &= 10 \max_{n \geq n_{p-1}} \widehat{a_{p-1}^{(n)}} + \alpha_{-1}\alpha_p^{(m_p)} = 10z_{p-1} + \alpha_{-1}\alpha_p^{(m_p)}. \end{aligned}$$

Por la observación 2.39, la sucesión $\{z_p\}$ define un número decimal cuya clase llamaremos a. Entonces para cada $p \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|\widehat{a_p^{(n)}} - \widehat{a_p}| \leq |\widehat{a_p^{(n)}} - z_p| + |z_p - \widehat{a_p}| \leq 2,$$

para todo $n \geq n_p$. Por tanto, la sucesión $\{a^{(n)}\}$ converge hacia a.

$\square$

Para ilustrar la última parte de la demostración pondremos un ejemplo de cada caso. Para el primer caso, la sucesión

$$2,00000..., \ 2,10000..., \ 2,13000..., \ 2,13200..., \ 2,13210...$$

Para el segundo caso,

$$2,00000..., \ 1,90000..., \ 2,00000..., \ 1,99900..., \ 2,00000...$$

Una vez definida la noción de convergencia vamos a establecer las operaciones. Para ello vamos a utilizar lo siguiente:

Definición 2.55. *Sean $z \in \mathbb{Z}$ y $p \in \mathbb{N}_0$. Llamaremos* número real limitado de z con p cifras decimales *y lo denotaremos por $T(z;p)$ al número real tal que $\widehat{T_p(z;p)} = z$ y $\widehat{T_{p+t}(z;p)} = z10^t$.*

Esta definición nos transforma un número entero en un número real. La aplicación $T(z,p)$ lo que hace en la práctica es colocarle una coma al número entero z. Por ejemplo, $T(12345;3) = 12,34500...$ Si nos fijamos, las cifras de $T(z;p)$ son cero a partir de $p+1$, es decir, solo nos importan las p primeras cifras de $T(z;p)$, de ahí el nombre de limitado. En el fondo la idea de esto es definir "truncados" que sean números reales.

Si tenemos $a \in \mathbb{R}$, el número $T(\widehat{a_p};p)$ coincide con a en las p primeras cifras decimales. Es sencillo ver que si se tiene la sucesión $\{A^{(n)}\}$ dada por $A^{(n)} = T(\widehat{a_n};n)$, entonces $\{A^{(n)}\}$ converge hacia a. Basta ver que

$$\widehat{A_p^{(n)}} = \widehat{a_p}, \text{ si } n \geq p.$$

En Primaria se aprende a sumar y multiplicar números con una cantidad finita de decimales. La idea aquí será usar eso mismo. Primero tomamos los truncados por la cifra decimal p. Después realizamos la operación, suma o multiplicación, con los truncados, que son números enteros. Utilizamos la aplicación $T(z;p)$ si estamos sumando, o $T(z;2p)$ si estamos multiplicando, para colocar la coma. Por último, hacemos tender p hacia infinito y tomamos el límte, que probaremos que existe.

Otra idea para establecer las operaciones sería la de realizarlas cifra a cifra, pero surge el problema de que nos salimos del rango de 0 a 9. Se podrían usar las llevadas, es decir, si nos salimos del rango, restamos 10 y sumamos 1 a la cifra anterior. Pero esto hace que tengamos que utilizar la convergencia.

Definición 2.56. *Sean a y b números reales. Definimos su* suma $a+b$ *como el límite de la sucesión $\{S^{(n)}\}$, definida por $S^{(n)} = T(z_n, n)$, donde $z_n = \widehat{a_n} + \widehat{b_n}$.*

Por ejemplo, para $e = 2,7182...$ y $\pi = 3,1415...$ nos quedaría la sucesión

$$S^{(0)} = 5,0000..., S^{(1)} = 5,8000..., S^{(2)} = 5,8500..., S^{(3)} = 5,8590..., S^{(4)} = 5,8597...$$

En las próximas demostraciones utilizaremos la siguiente definición.

Definición 2.57. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $p, \in \mathbb{N}_0$ y $m \geq 1$. Llamaremos* resto de m cifras desde p del número a *y lo denotaremos por $a_{p,m}$ al siguiente número entero*

$$a_{p,m} = \sum_{k=1}^{m} 10^{m-k} \alpha_{-1} \alpha_{p+k}.$$

Se puede observar que $\widehat{a_{p+m}} = 10^m \widehat{a_p} + a_{p,m}$ y $|a_{p,m}| < 10^m$.

Veamos que la sucesión de la suma converge para cualquier pareja de números reales.

Proposición 2.58. *Si a y b son números reales, la suma $a+b$ está bien definida.*

Demostración. Sean a y b números reales y sea $\{S^{(n)}\}$ la sucesión suma. Sean p, k naturales, entonces

$$\widehat{S_{p+k}^{(p+k)}} = \widehat{a_{p+k}} + \widehat{b_{p+k}} = 10^k(\widehat{a_p} + \widehat{b_p}) + a_{p,k} + b_{p,k} = 10^k \widehat{S_p^{(p)}} + a_{p,k} + b_{p,k}.$$

Por otro lado,

$$\widehat{S_{p+k}^{(p+k)}} = 10^k \widehat{S_p^{(p+k)}} + S_{p,k}^{(p+k)}.$$

Esto implica que

$$10^k |\widehat{S_p^{(p)}} - \widehat{S_p^{(p+k)}}| = |S_{p,k}^{(p+k)} - a_{p,k} - b_{p,k}| \leq |S_{p,k}^{(p+k)}| + |a_{p,k}| + |b_{p,k}| \leq 10^k \cdot 3. \quad (2.3)$$

Por tanto,

$$|\widehat{S_p^{(n)}} - \widehat{S_p^{(m)}}| \leq |\widehat{S_p^{(n)}} - \widehat{S_p^{(p)}}| + |\widehat{S_p^{(p)}} - \widehat{S_p^{(m)}}| \leq 6,$$

si $n, m \geq p$. Por el teorema 2.54, la sucesión $\{S^{(n)}\}$ es convergente.

□

Una vez visto que la suma está bien definida, vamos a comprobar que se cumplen las propiedades de grupo conmutativo. Para ello usaremos este lema.

Lema 2.59. *Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c = a + b$, entonces $|\widehat{c_p} - (\widehat{a_p} + \widehat{b_p})| \leq 4$, para todo $p \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Sea $\{S^{(n)}\}$ la sucesión de la suma de a y b. Como $\{S^{(n)}\}$ converge hacia c, tenemos que

$$|\widehat{S_p^{(p+k)}} - \widehat{c_p}| \leq 1,$$

si k es suficientemente grande. Por otro lado, de (2.3) obtenemos que

$$|\widehat{S_p^{(p+k)}} - \widehat{a_p} - \widehat{b_p}| = |\widehat{S_p^{(p+k)}} - \widehat{S_p^{(p)}}| \leq 3.$$

Por tanto, utilizando la desigualdad triangular, obtenemos que $|\widehat{c_p} - \widehat{a_p} - \widehat{b_p}| \leq 4$ y hemos terminado. □

El lema nos permite acotar la diferencia entre los truncados de la suma y la suma de los truncados de los sumandos.

Proposición 2.60. *El conjunto* $(\mathbb{R},+)$ *es un grupo conmutativo.*

Demostración. Veamos que cumple los axiomas:

(S1) Sean a, b y c números reales. Sean $d = a+b$, $e = b+c$, $f = (a+b)+c$ y $g = a+(b+c)$ y $p \in \mathbb{N}_0$. Por el lema 2.59 tenemos que

$$|\widehat{f_p} - \widehat{a_p} - \widehat{b_p} - \widehat{c_p}| \leq |\widehat{f_p} - \widehat{d_p} - \widehat{c_p}| + |\widehat{d_p} - \widehat{a_p} - \widehat{b_p}| \leq 8$$

Del mismo modo acotamos,

$$|\widehat{g_p} - \widehat{a_p} - \widehat{b_p} - \widehat{c_p}| \leq 8$$

Por la desigualdad triangular, $|\widehat{f_p} - \widehat{g_p}| \leq 16$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$. Por la proposición 2.45 obtenemos que $f = g$ y la suma es asociativa.

(S2) La propiedad conmutativa es trivial ya que se tiene para la suma de enteros y la sucesión de la suma sería exactamente la misma.

(S3) Es claro que 0 es el elemento neutro para la suma.

(S4) Si a es un número real, entonces si $-a$ es el número que coincide con a en todas sus cifras pero que cambia el signo, entonces la sucesión de la suma $a + (-a)$ es constante igual a 0 y $-a$ es el opuesto de a.

□

En [8] definen la suma de n sumandos. Nosotros hemos preferido definirla para dos sumandos ya que se trata de una operación binaria.

Ahora vamos a definir el producto. La idea es la misma que la de la suma, pero, si recordamos, en el producto de decimales finitos, el número de decimales se suma.

Definición 2.61. *Sean a y b números reales, se define su* producto $a \cdot b$ *como el límite de la sucesión $\{P^{(n)}\}$, definida por $P^{(n)} = T(z_n, 2n)$ donde $z_n = \widehat{a_n} \cdot \widehat{b_n}$.*

Por ejemplo, los primeros términos de la sucesión del producto $e \cdot \pi$ son:

$$P^{(0)} = 6,00000..., \; P^{(1)} = 8,37000..., \; P^{(2)} = 8,50940..., \; P^{(3)} = 8,5372380...$$

Veamos que la sucesión del producto converge para cualquier pareja de números reales.

Proposición 2.62. *Si a y b son números reales, el producto $a \cdot b$ esta bien definido.*

Demostración. Sean a y b números reales y $\{P^{(n)}\}$ la sucesión asociada a su producto. Veamos que $\{P^{(n)}\}$ es convergente. Sea k natural tal que $\alpha_0 < 10^k$ y $\beta_0 < 10^k$. Esto implica que $|\widehat{a_p}| \leq 10^{k+p}$ y $|\widehat{b_p}| \leq 10^{k+p}$ para cualquier $p \in \mathbb{N}_0$.

Para cualquier $p, m \in \mathbb{N}_0$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
|\widehat{P^{(p+m)}_{2(p+m)}} - \widehat{P^{(p)}_{2(p+m)}}| &= |\widehat{a_{p+m}}\widehat{b_{p+m}} - 10^{2m}\widehat{a_p}\widehat{b_p}| \\
&= |10^{2m}\widehat{a_p}\widehat{b_p} + 10^m\widehat{a_p}b_{p,m} + 10^m\widehat{b_p}a_{p,m} + a_{p,m}b_{p,m} - 10^{2m}\widehat{a_p}\widehat{b_p}| \\
&\leq |10^m\widehat{a_p}b_{p,m}| + |10^m\widehat{b_p}a_{p,m}| + |a_{p,m}b_{p,m}| \\
&\leq 10^{k+p+2m} + 10^{k+p+2m} + 10^{2m} \leq 10^{k+p+2m+1}.
\end{aligned}$$

Por tanto, aplicando la observación 2.43 obtenemos que

$$|\widehat{P^{(p+m)}_p} - \widehat{P^{(p)}_p}| \leq 10^{k+1}. \tag{2.4}$$

En consecuencia,

$$|\widehat{P^{(n)}_p} - \widehat{P^{(m)}_p}| \leq |\widehat{P^{(n)}_p} - \widehat{P^{(p)}_p}| + |\widehat{P^{(p)}_p} - \widehat{P^{(m)}_p}| \leq 10^{k+2},$$

si $n, m \geq p$. Por el teorema 2.54, la sucesión $\{P^{(n)}\}$ converge.

□

Al igual que hicimos con la suma, en el siguiente lema vamos a acotar la diferencia de los truncados del producto y los productos de los truncados de los factores.

Lema 2.63. *Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c = a \cdot b$ y tales que $\text{máx}(\alpha_0, \beta_0) \leq 10^k$, entonces $|\widehat{c_{2p}} - \widehat{a_p}\widehat{b_p}| \leq 10^{p+k+2}$, para todo $p \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Sea $\{P^{(n)}\}$ la sucesión del producto de a y b. Sea k natural tal que $\text{máx}(\alpha_0, \beta_0) \leq 10^k$. Para cada $p \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|\widehat{P_{4p}^{(2p)}} - \widehat{P_{4p}^{(p)}}| &= |\widehat{a_{2p}}\widehat{b_{2p}} - 10^{2p}\widehat{a_p}\widehat{b_p}| \\
&= |10^{2p}\widehat{a_p}\widehat{b_p} + 10^p\widehat{a_p}b_{p,p} + 10^p\widehat{b_p}a_{p,p} + a_{p,p}b_{p,p} - 10^{2p}\widehat{a_p}\widehat{b_p}| \\
&\leq |10^p\widehat{a_p}b_{p,p}| + |10^p\widehat{b_p}a_{p,p}| + |a_{p,p}b_{p,p}| \\
&\leq 10^{k+3p} + 10^{k+3p} + 10^{2p} \leq 10^{k+3p+1}.
\end{aligned}$$

Aplicando la observación 2.43 obtenemos que

$$|\widehat{P_{2p}^{(2p)}} - \widehat{a_p}\widehat{b_p}| = |\widehat{P_{2p}^{(2p)}} - \widehat{P_{2p}^{(p)}}| \leq 10^{p+k+1}.$$

Como c es el límite de $\{P^{(n)}\}$, tenemos que

$$|\widehat{c_{2p}} - \widehat{P_{2p}^{(m)}}| \leq 1 \text{ si } m \text{ es suficientemente grande.}$$

De (2.4) obtenemos que

$$|\widehat{P_{2p}^{(m)}} - \widehat{P_{2p}^{(2p)}}| \leq 10^{k+1}, \text{ si } m \geq 2p.$$

Por tanto, utilizando la desigualdad triangular obtenemos que

$$\begin{aligned}
|\widehat{c_{2p}} - \widehat{a_p}\widehat{b_p}| &\leq |\widehat{c_{2p}} - \widehat{P_{2p}^{(m)}}| + |\widehat{P_{2p}^{(m)}} - \widehat{P_{2p}^{(2p)}}| + |\widehat{P_{2p}^{(2p)}} - \widehat{a_p}\widehat{b_p}| \\
&\leq 1 + 10^{k+1} + 10^{p+k+1} \leq 10^{p+k+2},
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

El siguiente lema demuestra la regla de los signos.

Lema 2.64. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $(-a) \cdot b = -a \cdot b = a \cdot (-b)$.*

Demostración. Sea $\{P^{(n)}\}$ la sucesión que define el producto de $a \cdot b$ y $\{M^{(n)}\}$ la sucesión de $(-a) \cdot b$ (que es también la de $a \cdot (-b)$). Por la definición, obtenemos que $P^{(n)} = -M^{(n)}$, por tanto, sus límites son opuestos y hemos terminado. □

Ahora probaremos que el producto es asociativo y conmutativo y la existencia del elemento neutro. La existencia del elemento inverso se dejará para el final, ya que necesitaremos la propiedad distributiva y los axiomas del orden.

Proposición 2.65. *El producto cumple los axiomas (P1), (P2) y (P3) de la definición 1.1.*

Demostración. (P1) El lema 2.64 nos permite probar la asociatividad únicamente para los elementos positivos. Sean a, b y c números reales positivos. Sean $d = a \cdot b$, $e = b \cdot c$, $f = (a \cdot b) \cdot c$ y $g = a \cdot (b \cdot c)$. Sea $p \in \mathbb{N}_0$. Sea k un natural tal que 10^k es cota de la primera cifra de a, b, c, d y e. En primer lugar, se tiene que

$$\begin{aligned} |\widehat{a_p}\widehat{b_p}\widehat{c_{2p}} - \widehat{a_{2p}}\widehat{b_p}\widehat{c_p}| &= |\widehat{b_p}(\widehat{a_p}\widehat{c_{2p}} - \widehat{a_{2p}}\widehat{c_p})| \\ &= |\widehat{b_p}(10^p\widehat{a_p}\widehat{c_p} + \widehat{a_p}c_{p,p} - 10^p\widehat{a_p}\widehat{c_p} - \widehat{c_p}a_{p,p})| \\ &\leq |\widehat{b_p}\widehat{a_p}c_{p,p}| + |\widehat{b_p}\widehat{c_p}a_{p,p}| < 10^{3p+2k+1}. \end{aligned}$$

Por el lema 2.63,

$$\begin{aligned} \widehat{f_{4p}} &\leq \widehat{d_{2p}}\widehat{c_{2p}} + 10^{2p+k+2} \leq (\widehat{a_p}\widehat{b_p} + 10^{p+k+2})\widehat{c_{2p}} + 10^{2p+k+2} \\ &\leq \widehat{a_p}\widehat{b_p}\widehat{c_{2p}} + 10^{p+k+2}10^{2p+k} + 10^{2p+k+2} \leq \widehat{a_p}\widehat{b_p}\widehat{c_{2p}} + 10^{3p+2k+3}. \end{aligned}$$

De igual modo obtenemos la cota inferior

$$\widehat{f_{4p}} \geq \widehat{a_p}\widehat{b_p}\widehat{c_{2p}} - 10^{3p+2k+3}.$$

Utilizando el mismo lema, acotamos $\widehat{g_{4p}}$:

$$\widehat{a_{2p}}\widehat{b_p}\widehat{c_p} - 10^{3p+2k+3} \leq \widehat{g_{4p}} \leq \widehat{a_{2p}}\widehat{b_p}\widehat{c_p} + 10^{3p+2k+3}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} |\widehat{f_{4p}} - \widehat{g_{4p}}| &\leq |\widehat{a_p}\widehat{b_p}\widehat{c_{2p}} - \widehat{a_{2p}}\widehat{b_p}\widehat{c_p}| + 2 \cdot 10^{3p+2k+3} \\ &\leq 10^{3p+2k+1} + 2 \cdot 10^{3p+2k+3} \leq 10^{3p+2k+4}. \end{aligned}$$

Utilizando la observación 2.43, $|\widehat{f_p} - \widehat{g_p}| \leq 10^{2k+4}$. Por la proposición 2.45, $f = g$. En conclusión, el producto es asociativo.

(P2) La conmutatividad del producto se deduce directamente de la conmutatividad del producto de enteros.

(P3) Se tiene que 1 es el elemento neutro para el producto. Si a es un número real, entonces la sucesión $\{P^{(n)}\}$, que define el producto $1 \cdot a$, cumple que

$$\widehat{P_{2p}^{(p)}} = 10^p\widehat{a_p}.$$

Por tanto, si $m \geq p$ tenemos que

$$\widehat{P_p^{(m)}} = \widehat{a_p}.$$

En consecuencia, $1 \cdot a = a$.

□

En [8], al igual que ocurría con la suma, definen el producto de n factores.

Para demostrar la propiedad distributiva vamos a emplear un método similar al desarrollado en la demostración de la propiedad asociativa.

Proposición 2.66. *En $\mathbb{R}$ se verifica la propiedad distributiva.*

Demostración. El lema 2.64 nos permite probar la propiedad distributiva únicamente para los elementos positivos.

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ positivos. Sean $d = b + c$, $e = a \cdot b$, $f = a \cdot c$, $g = a \cdot (b + c)$ y $h = ab + ac$. Sea $p \in \mathbb{N}_0$. Sea k un natural tal que 10^k es cota de la primera cifra de a, b, c y d. Entonces, por los lemas 2.59 y 2.63,

$$\begin{aligned}\widehat{g_{2p}} &\leq \widehat{a_p}\widehat{d_p} + 10^{p+k+2} \leq \widehat{a_p}(\widehat{b_p} + \widehat{c_p} + 4) + 10^{p+k+2} \\ &\leq \widehat{a_p}\widehat{b_p} + \widehat{a_p}\widehat{c_p} + 10^{p+k+1} + 10^{p+k+2} \leq \widehat{a_p}\widehat{b_p} + \widehat{a_p}\widehat{c_p} + 10^{p+k+3}.\end{aligned}$$

De igual modo se obtiene la cota inferior

$$\widehat{g_{2p}} \geq \widehat{a_p}\widehat{b_p} + \widehat{a_p}\widehat{c_p} - 10^{p+k+3}.$$

Ahora acotaremos $\widehat{h_{2p}}$ utilizando nuevamente los lemas 2.59 y 2.63,

$$\begin{aligned}\widehat{h_{2p}} &\leq \widehat{e_{2p}} + \widehat{f_{2p}} + 4 \\ &\leq \widehat{a_p}\widehat{b_p} + 10^{p+k+2} + \widehat{a_p}\widehat{c_p} + 10^{p+k+2} + 4 \\ &\leq \widehat{a_p}\widehat{b_p} + \widehat{a_p}\widehat{c_p} + 10^{p+k+3}.\end{aligned}$$

De igual forma nos queda

$$\widehat{h_{2p}} \geq \widehat{a_p}\widehat{b_p} + \widehat{a_p}\widehat{c_p} - 10^{p+k+3}.$$

Entonces obtenemos que

$$|\widehat{g_{2p}} - \widehat{h_{2p}}| \leq 2 \cdot 10^{p+k+3} \leq 10^{p+k+4}.$$

Por la observación 2.43, $|\widehat{g_p} - \widehat{h_p}| \leq 10^{k+4}$. Por tanto, por la proposición 2.45, $g = h$, es decir, $a(b + c) = ab + ac$.

□

Lo próximo será mostrar que la relación de orden es compatible con la estructura algebraica. Para ello tenemos que demostrar la monotonía del límite.

Proposición 2.67. *Sean $\{a^{(n)}\}$ y $\{b^{(n)}\}$ sucesiones convergentes de números reales tales que existe n_0 tal que $a^{(n)} \leq b^{(n)}$ si $n \geq n_0$. Entonces se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} a^{(n)} \leq \lim_{n\to\infty} b^{(n)}.$$

Demostración. Sean $\{a^{(n)}\}$ y $\{b^{(n)}\}$ sucesiones convergentes de números reales y n_0 tal que $a^{(n)} \leq b^{(n)}$ si $n \geq n_0$. Supongamos que

$$a = \lim_{n\to\infty} a^{(n)} > \lim_{n\to\infty} b^{(n)} = b.$$

Entonces existe p tal que $\widehat{a_p} - \widehat{b_p} \geq 2$, ya que $a \neq b$, por tanto, $\widehat{a_{p+1}} - \widehat{b_{p+1}} \geq 11$. Ahora bien, si n es suficientemente grande,

$$\widehat{a_{p+1}^{(n)}} \geq \widehat{a_{p+1}} - 1 \geq \widehat{b_{p+1}} + 10 \geq \widehat{b_{p+1}^{(n)}} + 9.$$

Lo que es absurdo ya que $a^{(n)} \leq b^{(n)}$.

□

Proposición 2.68. *Se cumplen los axiomas (O2) y (O3) de la definición 1.2 en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$. Sean $\{S^{(n)}\}$ la sucesión de $a + c$, $\{T^{(n)}\}$ la sucesión de $b+c$, $\{P^{(n)}\}$ la sucesión de $a \cdot c$ y $\{M^{(n)}\}$ la sucesión de $b \cdot c$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^{(n)} > T^{(n)}$, se tiene que

$$\widehat{S_j^{(n)}} > \widehat{T_j^{(n)}},$$

para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Por la observación 2.44, podemos considerar que $j \geq n$. Entonces

$$10^{j-n}(\widehat{a_n} + \widehat{c_n}) = \widehat{S_j^{(n)}} > \widehat{T_j^{(n)}} = 10^{j-n}(\widehat{b_n} + \widehat{c_n}),$$

lo que es absurdo. Por tanto, $S^{(n)} \leq T^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por la proposición 2.67, $a + c \leq b + c$.

Supongamos $c \geq 0$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P^{(n)} > M^{(n)}$, se tiene que

$$\widehat{P_j^{(n)}} > \widehat{M_j^{(n)}},$$

para algún $j \in \mathbb{N}_0$. Por la observación 2.44, podemos considerar que $j \geq 2n$.. Entonces

$$10^{j-2n}\widehat{a_n} \cdot \widehat{c_n} = \widehat{P_{2n}^{(n)}} > \widehat{M_{2n}^{(n)}} = 10^{j-2n}\widehat{b_n} \cdot \widehat{c_n},$$

lo que es absurdo. Por tanto, $P^{(n)} \leq M^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por la proposición 2.67, $a \cdot c \leq b \cdot c$. □

Ya solo falta comprobar que existe un elemento inverso para el producto para todo elemento distinto del cero. Para ello vamos a emplear las potencias de 10.

Definición 2.69. *Si* $p \in \mathbb{N}$, *denotaremos por* 10^{-p} *al elemento* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha_{-1} = 1 = \alpha_p$ *y* $\alpha_k = 0$ *si* $k \neq p, -1$.

Ahora demostraremos una serie de lemas previos a la existencia del inverso.

Lema 2.70. *Si* $p \in \mathbb{N}$, *entonces* $10^p \cdot 10^{-p} = 1$.

Demostración. La sucesión de ese producto $\{P^{(n)}\}$ viene dada por $P^{(k)} = 0$ si $k < p$ y $P^{(k)} = 1$ si $k \geq p$. Por tanto, su límite es 1. $\square$

Observemos que esto ya demuestra la existencia de inverso para las potencias de 10.

Lema 2.71. *Si $a \in \mathbb{R}$ es positivo, entonces existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $10^{-k} < a$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $\widehat{a_p} \geq 1$. En consecuencia, $\widehat{a_{p+1}} = 10\widehat{a_p} + \alpha_{p+1} \geq 10$. Tomemos $k = p+1$ y sea $b = 10^{-(p+1)}$. Entonces $\widehat{a_{p+1}} - \widehat{b_{p+1}} \geq 9$ y $\widehat{a_{p+1}} > \widehat{b_{p+1}}$. Por el lema 2.50, $a > 10^{-k}$. $\square$

Lo que hemos probado aquí es un resultado similar a la propiedad arquimediana.

Lema 2.72. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces la sucesión $\{10^{-n}a\}$ converge hacia 0.*

Demostración. Sean $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $\alpha_0 < 10^k$ y $\{X^{(n)}\} = \{10^{-n}a\}$. Sea $p \in \mathbb{N}_0$. LLamaremos $b^{(n)} = 10^{-n}$. Si $n > p$, entonces $\widehat{b_p^{(n)}} = 0$, por lo que $\widehat{a_p}\widehat{b_p^{(n)}} = 0$. Por el lema 2.63, si $n > p$

$$|\widehat{X_{2p}^{(n)}}| = |\widehat{X_{2p}^{(n)}} - \widehat{a_p}\widehat{b_p^{(n)}}| \leq 10^{p+k+2}.$$

Aplicando la observación 2.43, $|\widehat{X_p^{(n)}}| \leq 10^{k+2}$, si $n > p$. Por tanto, $\{X^{(n)}\}$ converge hacia 0. $\square$

Este último lema es el equivalente a decir que una sucesión que converge hacia 0 por otra acotada converge hacia 0.

Ya tenemos las condiciones preparadas para demostrar la existencia del inverso.

Proposición 2.73. *Si a es un número real no nulo, entonces tiene inverso para el producto.*

Demostración. Si $a > 0$, veamos que

$$\frac{1}{a} = \sup_{x;0\leq ax\leq 1} x$$

es el inverso de a

Lo primero es comprobar que el conjunto $X = \{x : 0 \leq ax \leq 1\}$ tiene extremo superior. Tenemos que $0 \in X$, por lo que X es no vacío. Al ser $a > 0$, por el lema 2.71, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $10^{-k} < a$. Entonces tenemos que $10^k a > 10^k 10^{-k} = 1$ por el lema 2.70. Luego 10^k es cota superior de X, ya que si $t > 10^k$, $ta > 10^k a > 1$ y $t \notin X$. Por la proposición 2.51, X tiene extremo superior.

Comprobemos que $\frac{1}{a} > 0$. Basta con ver que existe $x \in X$ con $x > 0$. En efecto, si elegimos k tal que $a < 10^k$, entonces $10^{-k} \in X$.

Veamos que $\frac{1}{a} \cdot a = 1$. De la definición de extremo superior, se obtiene que para todo $m \in \mathbb{N}_0$

$$(\tfrac{1}{a} - 10^{-m}) \cdot a < x \cdot a \leq 1, \text{ con } x \in X \text{ y } (\tfrac{1}{a} + 10^{-m}) \cdot a > 1,$$

de donde obtenemos que

$$-10^{-m}a \leq \frac{1}{a} \cdot a - 1 \leq 10^{-m}a.$$

Por tanto, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ya que, por el lema 2.72, $\{10^{-m}a\}$ converge hacia 0 cuando m tiende a infinito.

Si $a < 0$, se define $\frac{1}{a} = -\frac{1}{-a}$. Por tanto,

$$a \cdot \frac{1}{a} = -a \cdot (-\frac{1}{a}) = -a \cdot \frac{1}{-a} = 1.$$

En conclusión, a tiene inverso. $\square$

Con esto hemos concluido la última construcción de los números reales. En esta construcción los números racionales son aquellos para los que se repiten una serie de cifras de forma periódica. Por ejemplo, $12,343434...$ o $1,2000...$ En particular, son racionales todos aquellos que tienen dos representaciones decimales.

Los elementos de $\mathbb{R}$ son sucesiones de números enteros entre 0 y 9. Pero si tenemos $a \in \mathbb{R}$, también podemos verlo como el límite de la sucesión $\{a^{(n)}\}$ dada por $a^{(n)} = T(\widehat{a_p}, p)$. En realidad $\{a^{(n)}\}$ es una sucesión de Cauchy de números racionales, por lo que esta construcción está relacionada con la que hizo Cantor.

La principal dificultad de esta construcción se hallan en las operaciones.

En la construcción por sucesiones de Cauchy, las operaciones se realizan término a término. Sin embargo, en la construcción decimal no se puede hacer cifra a cifra porque surge el problema de las "llevadas". Por ello utilizamos la convergencia en la definición de la suma. Lo mismo ocurre con el producto.

El problema que surge si no estableciésemos la relación de equivalencia en los números decimales se halla en la unicidad del límite. Aunque la sucesión de la suma estaría bien definida para cualquiera de las representaciones de un número real. Pero si nos fijamos, utilizando la convergencia de los números reales, si a y a' son dos representantes del mismo número real, la sucesión de $a + (-a')$ converge hacia 0. Es decir, dos números decimales son equivalentes cuando su resta es cero.

Bibliografía

[1] Bloch E. D. "The Real Numbers and Real Analysis", *Springer,* 2011.

[2] Boualem H. & Brouzet R. "Le planète $\mathbb{R}$", *Dunod,* 2002.

[3] Bosch Giral C. "El Teorema de Bolzano o un Teorema que no debe pasar inadvertido", Educación matemática vol. 3 diciembre 1993.

[4] Chapman Pugh C. "Real Mathematical Analysis", *Springer,* 2015.

[5] Fernández Viña J. A. "Análisis matemático I, cálculo infinitesimal", *Tecnos,* 1976.

[6] Field M. "Essential Real Analysis", *Springer,* 2017.

[7] Galindo F.; Sanz J. & Tristán L. A., "Guía práctica de cálculo infinitesimal en una variable real", *Thomson,* 2003.

[8] Garnir H. G. "Teoría de funciones", *Marcombo,* 1966.

[9] Grattan-Guinness I. "Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica", *Alianza,* 1980.

[10] Halmos P. R. "Naive set theory", *Springer-Verlag,* 1974.

[11] Hungerford T. W. "Algebra", *Springer,* 1974.

[12] Ortega J. M. "Introducción al análisis matemático", *Labor,* 1993.

[13] Redal E. J., "Matemáticas 1 ESO", *Santillana,* 2010.

[14] Rudin W. "Principios de análisis matemático", *McGraw-Hill,* 1991.

[15] Stromberg K. R. "Introduction to clasical real analysis", *Wadsworth,* 1981.

[16] Wawrzyńczyk A. "Curso de Análisis I y 150 problemas resueltos".

[17] Zorich V. A. "Mathematical Analysis I", *Springer,* 2015.