



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Principio del máximo de Pontryaguin

Autor: Eduardo Rojo Revenga

Tutora: Begoña Cano Urdiales

Antes de comenzar, me gustaría agradecer la labor de Begoña Cano como tutora. Su dedicación, junto con las correcciones, pautas y consejos que me ha dado a lo largo del tiempo de realización del trabajo, han sido de inestimable valor para la elaboración del mismo. De igual forma, agradezco a mi familia el ánimo para realizarlo en tan excepcionales circunstancias.

Valladolid, junio de 2020.

Índice de contenidos

1. Introducción	1
2. Principio del máximo de Pontryaguin	3
2.1. Planteamiento del problema	3
2.2. Enunciado del teorema	5
2.3. Idea de la demostración	6
3. Demostración del principio del máximo de Pontryaguin	8
3.1. Teoría de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n	8
3.2. Análisis de perturbaciones	14
3.3. Análisis del hamiltoniano	16
3.4. Demostración del teorema	22
3.5. Otras versiones del principio del máximo	38
4. Aplicaciones del teorema	44
4.1. Ejemplo 1: Estabilización óptima de un paciente con diabetes	45
4.2. Ejemplo 2: Control óptimo del paciente con diabetes antes de una operación	51
5. Conclusiones del trabajo	55
6. Bibliografía	57

Índice de figuras

2.1. Representación del espacio de estados X y el coste x_0	6
3.1. Representación del plano Π donde P es un punto genérico de E	9
3.2. Esquema general de la situación considerada y los dos posibles casos	11
3.3. Sistema de coordenadas elegido con K' , r y s contenidos en Σ	12
3.4. Situación planteada en la demostración de forma esquemática	12
3.5. Ejemplo del caso $\pi < \alpha + \beta \leq 2\pi$, en el que tendríamos una contradicción con la convexidad de K	13
3.6. Posibles perturbaciones en los caminos respecto al del control óptimo	14
3.7. Perturbación de tipo (a)	23
3.8. Perturbación de tipo (b)	23
3.9. Esquema de la situación planteada con P , Q pertenecientes a E	30
3.10. Plano de soporte que pasa por D en el espacio aumentado	32
3.11. Ejemplo de un plano de separación, Π , entre el conjunto convexo K con frontera δK y el semiplano abierto T	41
3.12. Representación del camino óptimo (azul) hasta el punto final D , junto con la superficie Ω y el semiplano abierto T	42
4.1. Evolución temporal del nivel de glucosa en el paciente (verde) y de la cantidad de glucosa aplicada (rojo)	50
4.2. Representación del nivel de glucosa en sangre del paciente (verde) y la cantidad de insulina aplicada (rosa) en cada instante	53

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de la historia, mucha gente dedicada a las matemáticas se ha interesado por el problema de la optimización. A raíz de esto, han ido surgiendo teorías como la del cálculo diferencial, el cálculo variacional o la investigación operativa que han ido encontrando condiciones necesarias para minimizar o maximizar funciones bajo ciertas restricciones que dependen del problema. En este contexto, surge la teoría de control que pretende dominar, mediante una función de control, la transición entre dos estados de un sistema dinámico. Además, se pretende que la transición entre los dos estados se haga de tal forma que se minimice un determinado funcional. En 1956, el matemático ruso Lev Pontryaguin formula el principio del máximo, que da unas condiciones necesarias para que la función de control sea la óptima para cada problema. Su pretensión, entonces, era la de dar solución al problema de combustible óptimo para lanzar un cohete al espacio y la demostración la hizo con técnicas del cálculo de variaciones. Desde entonces, se ha ido avanzando en la teoría de control y refinando las demostraciones de los resultados.

El objetivo de este trabajo es enunciar el principio del máximo y hacer la prueba del mismo. La demostración es larga y requiere de resultados auxiliares, por lo que no es común abordarla en cursos académicos de teoría de control debido al tiempo que requeriría. Aunque el trabajo intenta ser autosuficiente e introducir todos los conceptos y resultados necesarios, para una mejor comprensión es necesario tener bagaje en algunos temas vistos a lo largo del grado de matemáticas, especialmente el cálculo de variaciones para el que he utilizado la bibliografía mencionada en [2] y [5] y, por supuesto, nociones importantes de ecuaciones diferenciales. También es conveniente estar familiarizado con la teoría relativa a conjuntos convexos o algunos resultados de análisis matemático para funciones de variable real. De forma adicional, conocer las técnicas del cálculo variacional ayuda a entender este principio como una generalización de problemas isoperimétricos con restricciones diferenciales para funciones de control no tan regulares como las que se tratan en ese área. En este primer capítulo se pretende poner en contexto el trabajo e indicar lo que se va a encontrar a lo largo del mismo.

En el segundo capítulo, se introduce el problema que se va a tratar y la nomenclatura habitual en teoría de control. Se enuncia el teorema clave del trabajo que se corresponde con la versión del principio del máximo de Pontryaguin en la que se conocen el estado inicial y final del sistema, pero no el tiempo en el que se produce la transición. De igual forma, se da una idea intuitiva y visual de lo que será la demostración del teorema.

En el tercer capítulo se trata la demostración del mismo. Antes de abordarla, se introducen unas secciones preliminares sobre teoría de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n , análisis de perturbaciones respecto de la función de control y un estudio del comportamiento de una función escalar, el hamiltoniano, que ya se definirá más adelante. En la prueba, se supone la existencia de una función de control óptima y se estudian pequeñas variaciones de la misma, además de considerar aproximaciones de primer orden para algunos conjuntos como ya se verá. Para la demostración se han seguido preferentemente los libros de D. Liberzon [4] y E. Pinch [6]. Una vez que se ha demostrado el principio del máximo de Pontryaguin para la situación mencionada, se incluyen al final del capítulo variantes del mismo que también son útiles en la práctica. En particular, se presenta una versión de este principio para cuando el instante en el que se llega al estado final es conocido y, otra versión, para cuando el estado final no está fijado pero sí sabemos que pertenece a una variedad concreta del espacio de estados del sistema.

El cuarto capítulo pretende ilustrar, con ejemplos de situaciones reales, la forma en la que se aplica el principio del máximo en las distintas variantes vistas durante los anteriores capítulos. Se muestran dos ejemplos relacionados con el control de un paciente con diabetes ante dos situaciones distintas que permiten utilizar los resultados vistos en el trabajo. Los modelos que se presentan para la diabetes son sencillos. Si el lector tiene interés, puede encontrar, fuera de la teoría de control, modelos más complejos para el estudio de la diabetes en el trabajo de fin de grado citado en [1]. Con estos ejemplos se pretende completar la formación teórica adquirida durante el trabajo dotando de herramientas que también permitan al lector enfrentarse a problemas típicos de teoría de control. En los libros de D. Leonard y N. Van Long [3] y P. Sethi [7], se pueden encontrar muchos otros ejemplos relacionados con la economía. Se incluyen, por último, las conclusiones y comentarios de este trabajo y la bibliografía más utilizada para su realización.

Capítulo 2

Principio del máximo de Pontryaguin

En este capítulo se plantean las características del problema de control óptimo que motivan el desarrollo de la teoría de control. Una vez establecido el modelo del problema al que nos enfrentamos, se enuncia en los mismos términos el principio del máximo de Pontryaguin, que nos dará las condiciones necesarias que debe cumplir nuestra variable de control del problema para que cumpla con la condición de ser óptimo. Por último, se esquematizará el proceso que se ha seguido en la demostración y que se abordará de forma completa en el siguiente capítulo.

2.1. Planteamiento del problema

Consideramos un sistema cuyo estado se puede modelizar por un vector $\mathbf{x}(t)$ n -dimensional que pertenezca a un espacio euclídeo X llamado *espacio de estados*. Las componentes del vector, conocidas como *variables de estado*, serán precisamente las que caractericen el estado del sistema e irán trazando un camino en el espacio de estados.

La evolución del sistema se puede tratar de dirigir introduciendo una función r -dimensional \mathbf{u} que se conoce como *variable de control* o simplemente *control*. Por intereses y limitaciones prácticas, en la realidad observamos que las componentes de \mathbf{u} pueden ser continuas a trozos y toman unos valores dentro de un intervalo finito, por lo que la imagen de \mathbf{u} se encuentra en una región acotada U del *espacio de control*. Según el problema, esta región, denotada por A , será distinta y el conjunto de controles que verifiquen esta condición se conocerán como *admisibles*.

Los sistemas que vamos a considerar bajo estudio son aquellos que se pueden modelizar mediante un conjunto de n ecuaciones diferenciales ordinarias de la siguiente forma:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad i = 1, \dots, n,$$

que se pueden poner también de forma vectorial y que son conocidas como *ecuaciones de estado*. Asumiremos que las funciones f_i son continuas y continuamente diferenciables con respecto a cada x_1, \dots, x_n y para todo $x \in X$, $u \in A$. Esto nos asegura que existe una única solución continua para $x(t)$ (incluso aunque \mathbf{u} sea continua a trozos) que satisfaga las ecuaciones de estado dada una condición inicial $x(t_0) = \mathbf{x}^0$.

Nos interesa precisamente que el sistema evolucione del estado \mathbf{x}^0 en el instante t_0 al estado \mathbf{x}^1 en otro instante $t = t_1$, a priori desconocido, de tal forma que se minimice el *funcional de coste*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt,$$

donde según cuál sea el problema, tendremos diferentes expresiones para la función $f_0 : X \times A \rightarrow \mathbb{R}$. Esta función es continua y continuamente diferenciable respecto a x_1, \dots, x_n para todo $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{u} \in A$. El control $\mathbf{u}^* \in A$ que lo minimice y cuya existencia no está garantizada en principio, se denominará control óptimo. El teorema que se enuncia en la siguiente sección nos da las condiciones necesarias para que un control sea óptimo en caso de que éste existiera.

Lo enunciaremos y demostraremos para el caso $n = 2$ y $r = 1$, es decir, queremos controlar el sistema

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u),$$

de $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ en el instante fijado $t = t_0$ a $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ en un instante no especificado t_1 , mediante el uso de controles admisibles $u(t)$ continuos a trozos y acotados, de tal forma que se minimice

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, u) dt. \quad (2.1)$$

Veamos ahora lo que enuncia el principio del máximo de Pontryaguin.

2.2. Enunciado del teorema

Teorema 2.1 (Principio del máximo de Pontryaguin) *Sea $u^*(t)$ un control admisible, con su camino correspondiente $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$, que traslada al sistema del estado \mathbf{x}^0 en el instante $t = t_0$ al estado \mathbf{x}^1 en un tiempo no especificado t_1 . Para que \mathbf{u}^* y \mathbf{x}^* sean óptimos, es necesario que existan $\boldsymbol{\psi} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y una función escalar H , de tal forma que $\boldsymbol{\psi} \neq \mathbf{0}$ para todo t en $[t_0, t_1]$ y satisface las ecuaciones de co-estado*

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (2.2)$$

y la función escalar H está definida como

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \psi_0 f_0(\mathbf{x}, u) + \psi_1 f_1(\mathbf{x}, u) + \psi_2 f_2(\mathbf{x}, u). \quad (2.3)$$

Además, deberán cumplir que:

(i) Para cada t con $t_0 \leq t \leq t_1$, H alcanza su máximo con respecto a u en $u = u^*(t)$.

(ii) $\psi_0(t_1) \leq 0$ y $H(\boldsymbol{\psi}^*(t_1), \mathbf{x}^*(t_1), u^*(t_1)) = 0$, siendo $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ la solución de las ecuaciones de co-estado (2.2) para $u = u^*(t)$. Además, se puede probar que $H(\boldsymbol{\psi}^*, \mathbf{x}^*, u^*)$ y ψ_0 son constantes para $t \in [t_0, t_1]$, por lo que $H = 0$ y $\psi_0 \leq 0$ para cada punto de la trayectoria óptima.

Nota 2.2:

- La variable x_0 no ha sido definida previamente. Será la solución correspondiente a la ecuación diferencial

$$\dot{x}_0 = f_0(x_1, x_2, u),$$

que satisface la condición inicial $x_0(t_0) = 0$. Veremos más adelante la interpretación de la variable x_0 . Por otro lado, como la función escalar H no depende de x_0 , es claro por (2.2) que $\dot{\psi}_0(t) = 0$. Además $\psi_0(t) \leq 0$, por lo que será una constante menor o igual que cero. El caso $\psi_0 = 0$ corresponde a un caso degenerado donde la función f_0 no influye en el control óptimo. Si $\psi_0 < 0$, se pueden reescalar las variables de co-estado ψ_0, ψ_1, ψ_2 , para que $\psi_0 = -1$.

- La función escalar H así definida se denomina *hamiltoniano* debido a que todas las componentes correspondientes de $\boldsymbol{\psi}^*$ y \mathbf{x}^* satisfacen las ecuaciones canónicas:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^* = H_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\psi}^*, \mathbf{x}^*, u^*), \\ \dot{\boldsymbol{\psi}}^* = -H_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\psi}^*, \mathbf{x}^*, u^*). \end{cases}$$

2.3. Idea de la demostración

La prueba de este principio será larga y requerirá del apoyo de otros resultados que se enunciarán en el siguiente capítulo. No obstante, resulta interesante conocer previamente los pasos principales y razonamientos geométricos que nos van a guiar durante la demostración.

Viendo la definición que hemos dado a la variable x_0 y observando la del funcional de coste J en (2.1), podemos deducir que en un instante t entre t_0 y t_1 el valor de $x_0(t)$ es precisamente el coste acumulado (dependiendo del problema puede corresponderse con cosas muy distintas como tiempo, espacio recorrido o carburante que ha gastado un automóvil). En un tiempo t_1 , se corresponde con el coste total J que pretendemos minimizar.

En el plano del espacio de fases X podemos representar el estado inicial del que partimos $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ y al que queremos llegar $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$. Para ir de un estado a otro mediante un control, incurrimos en un coste que hemos visto que podemos cuantificar de forma acumulada mediante x_0 . Por tanto, cada coste lleva asociada una curva de \mathbb{R}^3 con coordenadas $(x_0(t), x_1(t), x_2(t))$ en el instante $t \in [t_0, t_1]$. Un ejemplo gráfico de esta curva es la que se presenta de color azul en la figura 2.1. En ella, **A** y **B** representan respectivamente a los puntos \mathbf{x}^0 y \mathbf{x}^1 en el plano $x_0 = 0$.

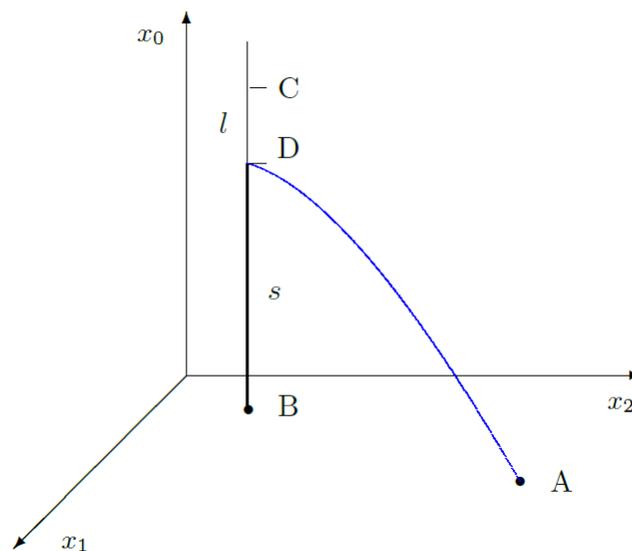


Figura 2.1: Representación del espacio de estados X y el coste x_0

Supongamos que sí existe un control u^* que minimiza el funcional que estamos considerando entre los dos estados con un cierto coste. En el espacio aumentado tridimensional, como el de la figura anterior, ese coste lleva asociada una curva $(x_0^*(t), x_1^*(t), x_2^*(t))$ que supondremos de nuevo que se corresponde con la azul. Esa curva corta a la recta l , paralela al eje de coste y que pasa por B , en el punto D . Esta idea geométrica sirve para hacer el plan de la prueba:

- El hecho de que el control u^* sea el óptimo y minimice J implica que cualquier otro control que se se utilice para resolver el problema tendrá asociada una curva que llegará al estado final cortando a la recta l en puntos por encima de D . Es decir, el punto C en el que corte a l yacerá en la semirrecta superior a partir de D . Esto será clave en la demostración.
- Estudiaremos distintos resultados sobre conjuntos convexos y funciones que nos permitirán deducir, tras unos cálculos, una condición necesaria que debe cumplirse en el instante extremo $t = t_1$.
- Por último, veremos que las ecuaciones de co-estado presentadas en (2.2) son necesarias para poder extender la condición que debe cumplirse en $t = t_1$ a todo punto de un camino óptimo.

Capítulo 3

Demostración del principio del máximo de Pontryaguin

En este capítulo se verán los distintos resultados previos que son necesarios para la demostración del principio en los términos enunciados en el Teorema 2.1. Estos pertenecen fundamentalmente a propiedades que nos interesarán de los conjuntos convexos en el espacio real y propiedades de funciones reales continuas que nos permitirán estudiar el comportamiento del hamiltoniano, H , definido en (2.3). Por último, abordaremos la pieza fundamental de este trabajo, que es la prueba matemática del propio Teorema 2.1.

3.1. Teoría de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n

La razón de ser de este apartado tiene su origen en que si consideramos el control óptimo y lo variamos un poco, ya sea cambiando su valor en un pequeño intervalo de $[t_0, t_1]$ o cambiando el tiempo de transferencia del estado inicial al final por una pequeña cantidad, el sistema no irá al punto D correspondiente de \mathbf{x}^1 en el espacio aumentado sino a otro cercano a él. Podemos denotar por E al conjunto de todos esos posibles puntos y llamarlo conjunto de *puntos finales variados*. Estos puntos, en primera aproximación, tendrán como proyección en el plano (x_1, x_2) vectores de posición de la forma:

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}^*(t_1) + \Delta \mathbf{x}.$$

Veremos más adelante que, para cierto grupo de controles admisibles, este conjunto E es convexo. Además sabemos, según la nomenclatura de la figura 2.1, que ningún punto de la semirrecta s puede pertenecer a E ya que considerábamos la curva azul como el control óptimo. Probaremos en esta sección un resultado que asegura que en esas condiciones existe al menos un plano Π pasando por D que divide al espacio en dos partes, una conteniendo a E y otra a la semirrecta s , tal y como se puede observar en la figura 3.1. Este resultado será clave para la demostración del principio del máximo de Pontryaguin. Antes de ello daremos algunas definiciones básicas.

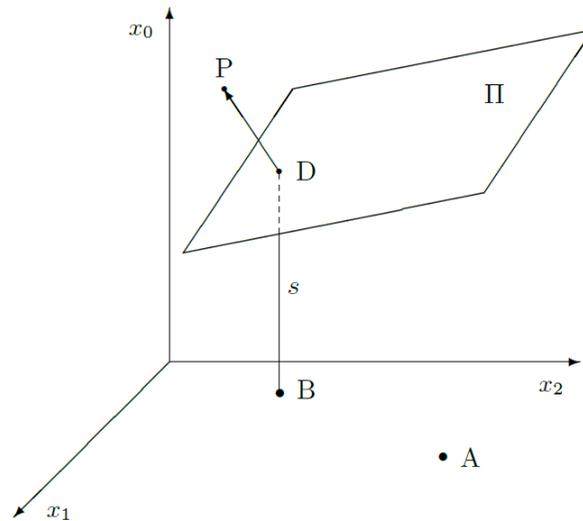


Figura 3.1: Representación del plano Π donde P es un punto genérico de E

Definición 3.1: Sea K un conjunto de \mathbb{R}^n , se dice que K es *convexo* si, para cualesquiera dos puntos P y Q de K , todos los puntos del segmento que une P y Q están contenidos en K .

Definición 3.2: Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ será convexo si y solo si se tiene que, para cualesquiera dos puntos P y Q de K , con vectores de posición \mathbf{p} , \mathbf{q} , ocurre que todos los vectores de la forma

$$\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{q}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

corresponden también a vectores de posición de puntos que pertenecen a K . Los puntos del segmento PQ tales que $0 < \lambda < 1$ se denominan *puntos interiores*.

Definición 3.3: Sea K un conjunto convexo de \mathbb{R}^n . Se dice que $Q \in \mathbb{R}^n$ es un *punto frontera* de K si existen dos puntos P, R distintos a él y tales que todos los puntos interiores del segmento PQ pertenecen a K pero ninguno de los puntos interiores de QR pertenece a K .

Teorema 3.4 *Sea K un conjunto convexo de \mathbb{R}^3 y sea D un punto frontera de K . Supongamos que existe una semirrecta s que comienza en D y tal que ninguno de sus puntos, salvo quizás el propio D , pertenece a K . Entonces, existe un plano Π que contiene a D y que divide a \mathbb{R}^3 en dos partes tales que una contiene completamente a K y la otra completamente a la semirrecta s .*

Este plano, que no tiene por qué ser único, se conoce como plano de soporte de K en el punto frontera D .

Demostración:

Primero lo demostraremos para una dimensión menos. Sea un conjunto convexo K de \mathbb{R}^2 y un punto frontera suyo D . Supongamos que existe una semirrecta s que comienza en D y tal que ninguno de sus puntos pertenece a K (excepto quizás D). Entonces veamos que existe otra recta r que divide \mathbb{R}^2 en dos semiplanos de tal forma que uno contiene a K completamente y el otro a la semirrecta s .

Como D es un punto frontera, podemos elegir un punto B de tal forma que los puntos interiores de DB estén en la semirrecta s ya que ninguno de sus puntos (salvo quizás D) pertenece a K . Consideramos la recta ADB de tal forma que A no pertenece a la semirrecta s .

Tomemos ahora dos puntos P, Q de K . Una primera situación sería que no se puedan elegir de forma que cada uno de ellos esté a un lado de la recta, es decir, todos los puntos de K están solo en uno de los semiplanos en los que divide al plano la recta ADB . En ese caso, siempre se podría encontrar una recta que dividiera al plano en dos partes que cumplen las condiciones del teorema y que, en el peor de los casos, sería la propia recta ADB . El segmento DB estaría en el semiplano que contiene a la semirrecta s mientras que AD sería parte del otro semiplano ya que puede contener algún elemento de K .

La otra situación posible es que pudiéramos elegir P, Q tales que la división del plano por la recta ADB los dejase a distintos lados de la misma tal y como se puede observar en la primera imagen de la figura 3.2. Medimos ahora el ángulo $\theta(P)$ en sentido antihorario que forma DA con DP y el ángulo $\theta(Q)$ en sentido horario que forma DA con DQ . Ambos ángulos deben pertenecer al intervalo $[0, \pi)$. Para todos los puntos P, Q de esta forma, definimos

$$\alpha = \sup(\theta(P)), \quad \beta = \sup(\theta(Q)).$$

Tenemos entonces dos posibles casos: $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$ o bien $\pi < \alpha + \beta \leq 2\pi$.

En el primero de los casos tenemos asegurado que todos los puntos de K van a estar contenidos en la región que contiene a A y que está delimitada por las dos

semirrectas que parten de D y pasan por P y Q . Como el ángulo que forman estas semirrectas es menor que π , tenemos asegurada la existencia de al menos una recta r que divide a \mathbb{R}^2 en dos partes, de tal forma que una contiene de forma completa a K y la otra a s , tal y como se ejemplifica en el esquema del centro de la figura 3.2.

En el segundo de los casos, sabemos que podremos encontrar un par de puntos P, Q tales que los segmentos DP y DQ formen un ángulo mayor de π . Esto nos asegura, por como hemos planteado el problema, que el segmento PQ cortará a la semirrecta s en un punto T distinto a D . Pero esto es absurdo porque ese punto no pertenecería a K por la propia definición de la semirrecta y estaríamos contradiciendo la convexidad de K ya que $P, Q \in K$. Por tanto, el único caso posible es el primero y tenemos asegurada la existencia de la recta.

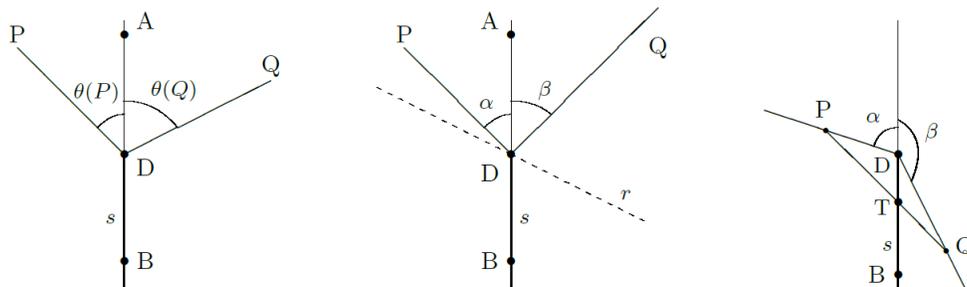


Figura 3.2: Esquema general de la situación considerada y los dos posibles casos

Ahora probaremos el teorema tal y como se ha enunciado para el espacio \mathbb{R}^3 . Consideramos la intersección K' del conjunto K con uno de los planos Σ que contienen a s . Este conjunto K' es convexo en \mathbb{R}^2 , por lo que de lo anterior se deduce que existe una recta r contenida en el plano Σ de tal forma que lo divide en dos partes, una conteniendo a K' y la otra a la semirrecta s .

Utilizaremos ahora el sistema de referencia con origen en D y eje x normal a Σ , eje y coincidiendo con la recta r y el eje z contenido en el plano Σ de tal forma que el sentido positivo del mismo sea el que apunta hacia el semiplano donde está contenido el conjunto K' . Se puede observar un ejemplo de la situación en la figura 3.3 donde $\delta K'$ representa la frontera de K' . De esta elección se deduce que no puede haber puntos del plano $\Sigma : \{x = 0\}$ con $z < 0$ que pertenezcan a K .

Consideramos ahora dos puntos P, Q que pertenezcan a K . Encontramos una primera situación en la que no se podrían elegir de tal forma que ambos estuvieran en las dos zonas distintas en las que divide el plano Σ al espacio. Es decir, todos

los puntos de K tendrían coordenada $x \geq 0$ o bien $x \leq 0$. Para este caso, siempre podríamos encontrar un plano que dividiese al espacio en las dos partes que enuncia el teorema. En el peor de los casos ese plano sería el propio Σ , quedando la semirrecta s contenida en el semiespacio que no contiene a K y la parte del plano Σ con $z \geq 0$ en el otro semiespacio que sí contiene a todo los puntos de K .

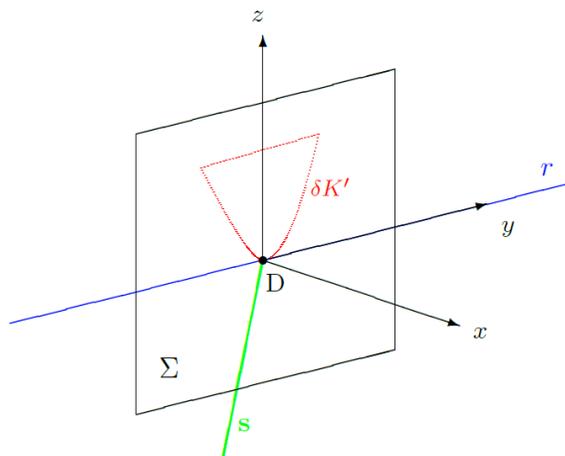


Figura 3.3: Sistema de coordenadas elegido con K' , r y s contenidos en Σ

En la otra situación posible, podemos escoger P, Q de tal forma que uno de ellos pertenece a la región $x \geq 0$ y otro a la región $x \leq 0$ (téngase en cuenta que si alguno de los dos está en el plano $\{x = 0\}$, su coordenada en z será $z \geq 0$). Se consideran los semiplanos Λ_1, Λ_2 que tienen de frontera la recta r y que contienen respectivamente a P y a Q , tal y como se puede observar en la figura 3.4. Definimos los ángulos positivos $\theta(P), \theta(Q)$ que forma el semiplano $\{x = 0, z \geq 0\}$ con Λ_1 y Λ_2 respectivamente. Ocurre que $0 \leq \theta(P), \theta(Q) < \pi$.

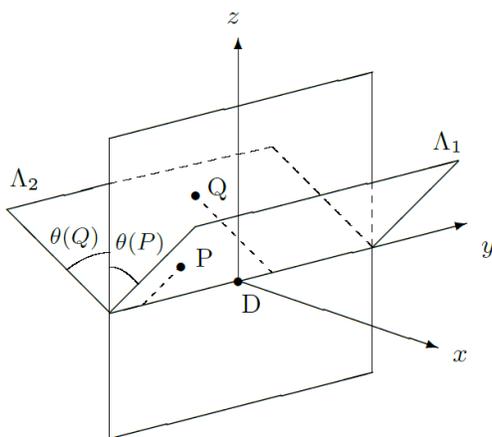


Figura 3.4: Situación planteada en la demostración de forma esquemática

Para todos los puntos P, Q de esta forma, definimos

$$\alpha = \sup(\theta(P)), \quad \beta = \sup(\theta(Q)).$$

Tenemos dos posibles casos: $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$ o bien $\pi < \alpha + \beta \leq 2\pi$. En el caso de que $\pi < \alpha + \beta \leq 2\pi$, podemos elegir dos puntos P, Q tales que $\theta(P) + \theta(Q) > \pi$. Entonces tenemos que el segmento PQ corta al semiplano $\{x = 0, z < 0\}$ en un punto T tal y como se ejemplifica en la figura 3.5. Por la elección que hemos hecho del sistema de referencia, los puntos de este semiplano no pertenecen a K por lo que estaríamos contradiciendo su propia convexidad.

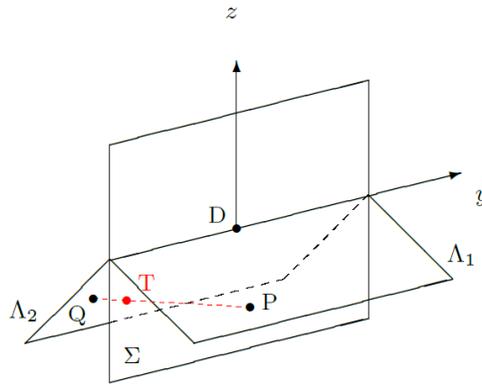


Figura 3.5: Ejemplo del caso $\pi < \alpha + \beta \leq 2\pi$, en el que tendríamos una contradicción con la convexidad de K

Esto indica que siempre estaríamos en el primer caso, $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$. En estas condiciones K estará contenido en la región del espacio delimitada por los dos semiplanos Λ_1 y Λ_2 (con ángulos respectivos α, β) y que contenga al semieje $z > 0$. Como la suma de estos ángulos es menor que π podremos siempre elegir un plano que contenga a nuestro eje y (y consecuentemente a D) tal que divida al espacio en dos partes, una que contenga a K y otra que contenga al semiplano $\{x = 0, z < 0\}$ y, consecuentemente, a la semirrecta s tal y como queríamos probar. ■

Veremos más adelante que la existencia de un hiperplano de soporte para E en el punto frontera D nos asegura una condición que debe cumplir el camino óptimo en el instante final t_1 .

3.2. Análisis de perturbaciones

En la prueba del principio del máximo se demostrará primero que éste se cumple para todo instante $t \in [t_0, t_1]$ para el que $u^*(t)$ sea continuo. Para ello se utilizará el teorema que se propone en esta sección. Es cierto que se estarían excluyendo al número finito de puntos en los que u^* es discontinua, pero es algo que también será resuelto a su debido tiempo durante el trabajo.

Consideraremos los controles que difieren por pequeñas perturbaciones del control óptimo. En el espacio aumentado se apreciarán también pequeñas diferencias respecto del camino óptimo, como se ejemplifica en la figura 3.6. Para cuantificar cómo afectan estas variaciones a medida que avanza el tiempo t trabajamos con las ecuaciones de estado del espacio aumentado

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, u), \quad i = 0, 1, 2. \quad (3.1)$$

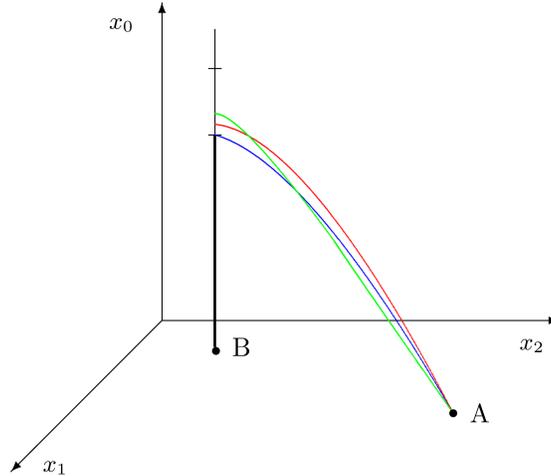


Figura 3.6: Posibles perturbaciones en los caminos respecto al del control óptimo

Supongamos que la perturbación en el control cesa a partir del instante $t = \tau$ de tal forma que para $t > \tau$ el control siga siendo el óptimo $u^*(t)$. No obstante, en el instante $t = \tau$ el punto que representa al estado del sistema en el espacio aumentado no pertenecerá al del camino óptimo sino que será un punto de la forma $\mathbf{x}^*(\tau) + \boldsymbol{\alpha}(\tau)$ siendo las tres coordenadas de $\boldsymbol{\alpha}(\tau)$ pequeñas. Para ver cómo evoluciona esa perturbación para tiempos $t > \tau$ planteamos las ecuaciones (3.1) para esta situación

$$\dot{x}_i(t) + \dot{\alpha}_i(t) = f_i(x_1^*(t) + \alpha_1(t), x_2^*(t) + \alpha_2(t), u^*(t)), \quad i = 0, 1, 2, \quad (3.2)$$

donde el último argumento se debe a que el control en $t > \tau$ será el óptimo $u^*(t)$. Haciendo el desarrollo de Taylor de la función f_i cuando la perturbación es pe-

queña ($\alpha \rightarrow 0$) tenemos que

$$f_i(x_1^* + \alpha_1, x_2^* + \alpha_2, u^*) = f_i(x_1^*, x_2^*, u^*) + \alpha_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, u^*) + \alpha_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, u^*) + O(\alpha^2),$$

donde $O(\alpha^2)$ hace referencia a todos los términos que son productos de potencias de α_1, α_2 tales que la suma de sus exponentes es mayor o igual que dos. En esta ocasión los despreciamos ya que estamos interesados en las perturbaciones de primer orden. Sustituyendo en (3.2) y recordando (3.1), se tiene que la perturbación $\alpha(t)$ verifica las *ecuaciones linealizadas*

$$\dot{\alpha}_i(t) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, u^*) = \sum_{j=0}^2 \alpha_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, u^*), \quad i = 0, 1, 2, \quad (3.3)$$

donde en la última igualdad se ha tenido en cuenta que f_0, f_1, f_2 no dependen de x_0 , por lo que añadir el término correspondiente a $j = 0$ al sumatorio no cambia la igualdad y nos vendrá bien para la notación que usaremos. Podemos escribir de forma matricial el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que determina la evolución de $\alpha(t)$ para $t > \tau$ como

$$\dot{\alpha} = A(t)\alpha, \quad (3.4)$$

siendo $A_{ij} = (\partial f_i / \partial x_j)$ evaluada en el camino óptimo para cada $t > \tau$.

Haciendo memoria de las ecuaciones de co-estado (2.2) y de la definición de H (2.3), tenemos que

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{j=0}^2 \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \psi_j, \quad i = 0, 1, 2.$$

Nos interesan los coeficientes que acompañan a ψ_j cuando estamos en el control óptimo, es decir, cuando las derivadas son evaluadas en el camino óptimo. Con la definición de $A(t)$ y en notación matricial se escribe

$$\dot{\psi} = -A(t)^T \psi. \quad (3.5)$$

Teorema 3.5 *El producto $\psi(t)^T \alpha(t)$ es constante a lo largo de un camino óptimo para $t > \tau$.*

Demostración:

El producto es únicamente función del tiempo t . Calculamos su derivada temporal

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\psi(t)^T \alpha(t)] &= \frac{d}{dt}(\psi(t)^T) \alpha(t) + \psi(t)^T \frac{d}{dt}(\alpha(t)) \\ &= (-A(t)^T \psi(t))^T \alpha(t) + \psi(t)^T A(t) \alpha(t) \\ &= -\psi(t)^T A(t) \alpha(t) + \psi(t)^T A(t) \alpha(t) = 0, \end{aligned}$$

donde se han usado las expresiones (3.4) y (3.5). Vemos que es nula para todo t . ■

3.3. Análisis del hamiltoniano

Para probar que H es constante, como se enuncia en la parte (ii) del teorema 2.1, no se podrá hacer simplemente derivando respecto al tiempo y viendo que es cero en un camino óptimo porque el control $u^*(t)$ puede presentar discontinuidades en $[t_0, t_1]$. En los puntos de discontinuidad no tenemos definidas las derivadas parciales de H y, por tanto, no tiene sentido hablar de dH/dt .

Para ver que el principio del máximo se cumple para los puntos donde $u^*(t)$ es continua, podremos usar los teoremas 3.6 y 3.7 de esta sección. Éstos serán claves para probar que H es constante en los intervalos de t que están entre los puntos de discontinuidad de u^* . Utilizaremos entonces el teorema 3.8 para probar que H es la misma constante en todos esos intervalos.

Teorema 3.6 *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que, dado $t \in [a, b]$ y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(t, \varepsilon) > 0$ de manera que*

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \leq \varepsilon \quad \text{para } t < s \leq t + \delta. \quad (3.6)$$

Entonces, $f(b) \leq f(a)$.

Nótese que estamos considerando el cociente $(f(s) - f(t))/(s - t)$ con $s \neq t$ y no la derivada $f'(t)$. El teorema nos asegura que, para cualquier $t \in [a, b]$, ese cociente será negativo, o si es positivo, será tan cercano a cero como queramos para valores de s en cierto intervalo $(t, t + \delta]$.

Demostración:

Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que no es cierto y existe una función f que verifica (3.6) y tal que $f(b) > f(a)$. En estas condiciones,

$$M = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Consideramos $g(s) := f(s) - M(s - a)$. Con esta definición, g es también continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, por lo que alcanza su mínimo en algún punto $c \in [a, b]$. Tenemos tres casos posibles:

- Si $c = a$, tendríamos que, para todo s con $a < s \leq b$,

$$\begin{aligned} g(s) \geq g(a) &\Rightarrow f(s) - M(s - a) \geq f(a) &\Rightarrow \frac{f(s) - f(a)}{s - a} \geq M \\ &\Rightarrow \frac{f(s) - f(a)}{s - a} > \frac{M}{2}. \end{aligned}$$

No obstante, f también verifica la propiedad (3.6) que, tomando $t = a$ y $\varepsilon = M/2 > 0$, es equivalente a que existe cierto $\delta = \delta(a, M/2)$ para el cual

$$\frac{f(s) - f(a)}{s - a} \leq \frac{M}{2}, \quad a < s \leq a + \delta \leq b,$$

llegando a una contradicción con lo anterior.

- Si $c = b$, para cualquier s tal que $a < s \leq b$, se tiene

$$\begin{aligned} g(s) \geq g(b) &\Rightarrow f(s) - M(s - a) \geq f(b) - M(b - a) = f(a) \\ &\Rightarrow \frac{f(s) - f(a)}{s - a} \geq M > \frac{M}{2}, \end{aligned}$$

donde se ha usado la definición de M . Vemos entonces que esto lleva a la misma contradicción usando los mismos valores en la comparación con la propiedad (3.6) del caso anterior.

- Si $a < c < b$, particularmente se cumple que para todo s tal que $c < s \leq b$,

$$\begin{aligned} g(s) \geq g(c) &\Rightarrow f(s) - M(s - a) \geq f(c) - M(c - a) &\Rightarrow \frac{f(s) - f(c)}{s - c} \geq M \\ &\Rightarrow \frac{f(s) - f(c)}{s - c} > \frac{M}{2}. \end{aligned}$$

que contradice también (3.6) para los valores $t = c$ y $\varepsilon = M/2$.

En todos los casos llegamos a una contradicción. ■

Un ejemplo de funciones que verificarían la propiedad (3.6) son las funciones continuas en $[a, b]$ y decrecientes en ese intervalo. Es evidente que también verificarían $f(b) \leq f(a)$. Ahora veremos la propiedad análoga que verificarían como caso particular las funciones crecientes.

Teorema 3.7 *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que, dado $t \in (a, b]$ y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(t, \varepsilon) > 0$ de manera que*

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \geq -\varepsilon \quad \text{para } t - \delta \leq s < t. \quad (3.7)$$

Entonces, $f(b) \geq f(a)$.

Demostración:

La prueba es análoga a la del teorema anterior salvo pequeños cambios. Procedemos por reducción al absurdo y suponemos que existe f que verifica (3.7) y tal que $f(b) < f(a)$. Definimos M de la misma forma que antes con la salvedad de que ahora $M < 0$. Por otro lado, definimos la función $g(s)$ ahora como $g(s) := f(s) - M(s - b)$. Por la continuidad de g en $[a, b]$ sabemos que alcanza su mínimo en algún punto $c \in [a, b]$. Tenemos tres casos:

- Si $c = b$, para todo s con $a \leq s < b$,

$$\begin{aligned} g(s) \geq g(b) &\Rightarrow f(s) - M(s - b) \geq f(b) \Rightarrow f(s) - f(b) \geq M(s - b) \\ &\Rightarrow \frac{f(s) - f(b)}{s - b} \leq M < \frac{M}{2}, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $(s - b)$ y M son menores que cero. Como f verifica la propiedad (3.7), tomando $t = b$ y $\varepsilon = -M/2 > 0$, existe δ tal que

$$\frac{f(s) - f(b)}{s - b} \geq -\left(-\frac{M}{2}\right) = \frac{M}{2}, \quad b - \delta \leq s < b,$$

llegando así a una contradicción con la desigualdad estricta previa.

- Si $c = a$, para cualquier s tal que $a \leq s < b$, se tiene

$$g(s) \geq g(a) \Rightarrow g(s) \geq f(a) - M(a - b) = f(b) \Rightarrow \frac{f(s) - f(b)}{s - b} \leq M < \frac{M}{2},$$

donde se ha usado la definición de M y que tanto $(s - b)$ como M son menores que cero. Esto lleva a la contradicción, al igual que en el caso anterior, de la propiedad (3.7) para valores $t = b$ y $\varepsilon = -M/2 > 0$.

- Si $a < c < b$, se cumple para todo s tal que $a \leq s < c$,

$$g(s) \geq g(c) \Rightarrow f(s) - M(s - b) \geq f(c) - M(c - b) \Rightarrow \frac{f(s) - f(c)}{s - c} \leq M < \frac{M}{2},$$

que también es contradictorio con (3.7) para $t = c$ y $\varepsilon = -M/2$ en valores de s dentro de cierto intervalo $[c - \delta, c)$. ■

Para el siguiente resultado conviene recordar tres resultados ya conocidos de las asignaturas de análisis matemático. El primero es el teorema de Bolzano-Weierstrass que nos asegura que una sucesión infinita, real y acotada, tiene siempre una subsucesión convergente. El segundo es el resultado que afirma que cualquier conjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^n es compacto. Por último, debemos recordar que cualquier función real y continua en un conjunto compacto de \mathbb{R}^n alcanza su máximo para un punto de ese conjunto.

Teorema 3.8 *Sea $u^*(t)$ el control óptimo que lleva al sistema del estado \mathbf{x}^0 en $t = t_0$ a otro estado conocido \mathbf{x}^1 en cierto tiempo t_1 . Sean $\mathbf{x}^*(t)$, $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ los correspondientes vectores de variables de estado y co-estado. El conjunto de controles admisibles, denotado por A , estará formado por aquellos controles u que lleven \mathbf{x}^0 a \mathbf{x}^1 y sean funciones continuas a trozos en $[t_0, t_1]$ tales que sus imágenes estén comprendidas en el intervalo cerrado $[k_1, k_2]$. Asumimos la existencia del control óptimo $u^* \in A$.*

Definimos la función

$$h(t) := \sup_{k_1 \leq z \leq k_2} H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), z).$$

Entonces, $h(t)$ es continua en todo el intervalo $[t_0, t_1]$.

Demostración:

Por la definición dada en (2.3), sabemos que $H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, z)$ es una función continua respecto a todas sus variables. Además, $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ y $\mathbf{x}^*(t)$ son también continuas en $[t_0, t_1]$, por lo que $H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), z)$ está bien definida en el conjunto compacto $C = [t_0, t_1] \times [k_1, k_2]$. De hecho, si se fija un $t \in [t_0, t_1]$ la función de z resultante es continua en el compacto $[k_1, k_2]$ por lo que tenemos asegurada la existencia de

$$h(t) = \sup_{k_1 \leq z \leq k_2} H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), z), \quad (3.8)$$

para cada $t \in [t_0, t_1]$ fijo. Denotaremos por z_t al valor de $z \in [k_0, k_1]$ para el que se alcanza ese supremo. Consideramos

$$F(t, z) = H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), z),$$

de la que sabemos que es continua en C y que, para cada $t \in [t_0, t_1]$, existe $z_t \in [k_0, k_1]$ tal que $h(t) = F(t, z_t)$.

Para probar que $h(t)$ es continua, fijemos un $t \in [t_0, t_1]$ y veamos que

- Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|s - t| < \delta \Rightarrow h(t) - h(s) \leq \varepsilon. \quad (3.9)$$

Para ello, consideramos un $\varepsilon > 0$ y, por la continuidad de F en el punto (t, z_t) , existe $\delta > 0$ tal que si $\|(s, z) - (t, z_t)\| < \delta$,

$$|F(s, z) - F(t, z_t)| \leq \varepsilon.$$

En particular, para $z = z_t$ y cuando $|s - t| < \delta$, se tiene

$$|F(s, z_t) - h(t)| \leq \varepsilon. \quad (3.10)$$

Si $F(s, z_t) \geq h(t)$, es evidente que

$$F(s, z_t) \geq h(t) - \varepsilon. \quad (3.11)$$

Si $F(s, z_t) \leq h(t)$, la inecuación (3.10) implica

$$h(t) - F(s, z_t) \leq \varepsilon$$

Es decir, en cualquier caso, la desigualdad (3.11) está asegurada. Ahora bien,

$$h(s) = \sup_{k_1 \leq z \leq k_2} F(s, z) \geq F(s, z_t) \geq h(t) - \varepsilon,$$

quedando probado (3.9).

- Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|s - t| < \delta \Rightarrow h(s) - h(t) \leq \varepsilon. \quad (3.12)$$

Conviene mencionar que, para un mismo ε , el δ de este apartado no tiene por qué tener nada que ver con el del anterior. Para probarlo, supongamos que es falso, es decir, para algún $\varepsilon > 0$ no existe ningún $\delta > 0$ para el que se cumpla (3.12). Esto implica que, para cada intervalo $|s - t| < \delta$, podremos encontrar un s tal que $h(s) > h(t) + \varepsilon$. Tomando la sucesión de intervalos con $\delta_n = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$, podemos construir otra sucesión $\{s_n\}$ tal que $|s_n - t| < \delta_n$ y $h(s_n) > h(t) + \varepsilon$ para todo n . Como

$$h(s_n) = \sup_{k_1 \leq z \leq k_2} F(s_n, z) = F(s_n, z_n) > h(t) + \varepsilon,$$

para cierto $z_n \in [k_1, k_2]$, podemos construir la sucesión $\{z_n\}$ que será real y acotada. Aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass, sabemos que existe una subsucesión $\{z_{n_r}\}$ convergente a cierto $z_0 \in [k_1, k_2]$. Por la construcción de $\{s_n\}$ necesariamente su subsucesión $\{s_{n_r}\}$ converge a t .

Al ser F continua en C ,

$$F(s_{n_r}, z_{n_r}) \longrightarrow F(t, z_0).$$

Existe entonces un z_0 tal que $F(t, z_0) \geq h(t) + \varepsilon > h(t)$. Pero esto es absurdo por la propia definición de $h(t)$ como el supremo de F sobre $z \in [k_1, k_2]$. Queda así probado que (3.12) se cumple.

De los dos puntos anteriores resulta que, dado un $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |h(t) - h(s)| \leq \varepsilon,$$

quedando probada la continuidad de $h(t)$. ■

Nota 3.9:

De ahora en adelante denotaremos por W al conjunto finito de puntos $t \in [t_0, t_1]$ en los que el control óptimo, $u^*(t)$, es discontinuo. Una vez que se haya probado la parte (i) del principio del máximo de Pontryaguin para $t \notin W$, se tendrá que

$$h(t) = H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) \text{ para todo } t \notin W.$$

Una consecuencia directa del teorema 3.8 es que $H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(t))$ presentará solamente discontinuidades de tipo evitable en $[t_0, t_1]$.

3.4. Demostración del teorema

Con todo lo anterior, podemos finalmente afrontar la demostración del principio del máximo. Asumiremos la existencia de un control óptimo y veremos que las condiciones enunciadas en el teorema 2.1 constituyen efectivamente los requisitos necesarios para la optimalidad de un control. Toda esta sección es fundamentalmente la demostración aunque algunos resultados auxiliares para la misma se presentarán también como proposiciones dentro de esta sección cuando sean necesarios.

En realidad, se probará que, para que ciertos controles admisibles cercanos no conduzcan al estado final deseado con menor valor de la función de coste que el que da el óptimo, se deben dar las condiciones del teorema 2.1. El concepto de cercanía se verá más en detalle a continuación, con las posibles variaciones que podemos aplicar al control óptimo. Lo importante es ser conscientes de que el resultado es local. Supondremos que los controles admisibles son las funciones continuas a trozos y que toman sus valores en el intervalo $[k_1, k_2]$. Las condiciones y notación son las mismas en las que se enunció el teorema mencionado.

Las desviaciones que consideramos respecto del control óptimo harán que las tres componentes (x_0, x_1, x_2) del sistema en el estado final cambien con respecto a sus valores óptimos. Si la perturbación es pequeña se espera que la variación final respecto del punto final óptimo sea también pequeña en el espacio aumentado. Para estudiar esto, consideramos primero variaciones de dos posibles tipos:

El primer tipo, que llamaremos (a) , está formado por aquellos controles en los que se altera el valor de $u^*(t)$ en cierto subintervalo de $[t_0, t_1]$. En concreto, elegimos un punto τ en el que $u^*(t)$ sea continua, $\tau \notin W$, y considerando $\Delta\sigma > 0$ y pequeña, la perturbación $u_{(a)}(t)$ será de la forma

$$u_{(a)}(t) = \begin{cases} u^*(t), & t_0 \leq t < \tau - \Delta\sigma \\ v, & \tau - \Delta\sigma \leq t < \tau \\ u^*(t), & \tau \leq t < t_1 \end{cases}, \quad (3.13)$$

siendo v un valor fijo y arbitrario tal que $k_1 \leq v \leq k_2$. Nótese que la restricción de que el valor sea pequeño es sobre la acción temporal, es decir, $\Delta\sigma$ y no sobre el valor del control, v , en esos instantes. A modo de ejemplo, podemos suponer un control continuo entre $[t_0, t_1]$ en el que una perturbación de este tipo tendría el efecto ilustrado en la figura 3.7.

Otra posible forma de perturbación del control óptimo, que también llevará a otro estado final en el espacio de estados aumentado, es el cambio de la longitud del intervalo $[t_0, t_1]$. Para ello consideraremos el control $u^*(t)$ y variaremos t_1 .

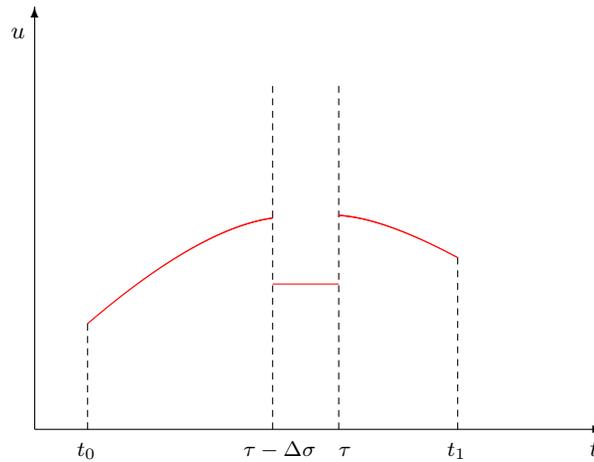


Figura 3.7: Perturbación de tipo (a)

Para acortar o alargar t_1 , consideramos una cantidad pequeña Δt , de tal forma que si $\Delta t > 0$, la variación $u_{(b)}(t)$ del control óptimo será de la forma

$$u_{(b)}(t) = \begin{cases} u^*(t), & t_0 \leq t \leq t_1 \\ u^*(t_1), & t_1 < t \leq t_1 + \Delta t. \end{cases} \quad (3.14)$$

Si $\Delta t < 0$, será

$$u_{(b)}(t) = u^*(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 - \Delta t. \quad (3.15)$$

Un ejemplo de este último tipo sobre el mismo control continuo que consideramos en el ejemplo anterior y para $\Delta t > 0$, es el que se muestra en la figura 3.8.

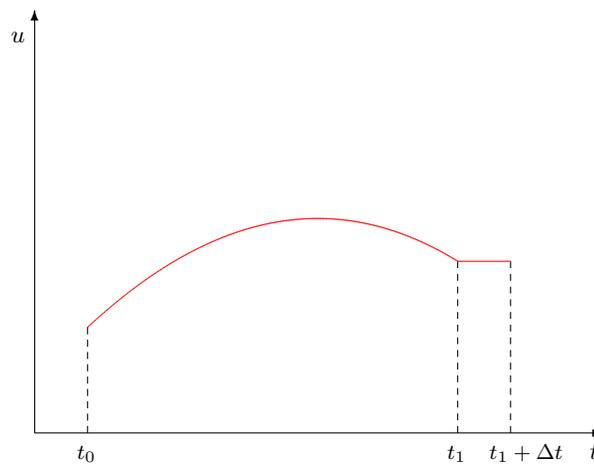


Figura 3.8: Perturbación de tipo (b)

Una perturbación más general es la que está formada por un número finito de variaciones del tipo (a). Consideramos distintos $\tau_i \notin W$ y los correspondientes intervalos $I_i = [\tau_i - \Delta\sigma_i, \tau_i) \subset [t_0, t_1]$, con $\Delta\sigma_i > 0$ y pequeño para $i = 1, \dots, n$. Para que esté bien definida es necesario que los intervalos no se superpongan,

$$t_0 < \tau_1 - \Delta\sigma_1 < \tau_1 < \tau_2 - \Delta\sigma_2 < \dots < t_1.$$

Si tomamos ahora un conjunto de valores $v_i \in [k_0, k_1]$, podemos entonces definir la perturbación como

$$u(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \notin I_i \\ v_i, & t \in I_i. \end{cases} \quad (3.16)$$

Este control será admisible por estar acotado entre los valores extremos que puede tomar un control de este tipo y por ser continuo a trozos. A partir de esta perturbación, podemos generar otras cambiando la longitud de los intervalos por $\lambda\Delta\sigma_i$, asegurándonos de que el valor de λ conserva la no superposición de los I_i .

A la anterior, le podemos aplicar también otra de tipo (b) procurando que, si $\Delta t < 0$, esté bien definida y no haya solapamiento en los intervalos perturbados. En cualquier caso, encontraremos cambios en las coordenadas (x_0, x_1, x_2) del estado final con respecto al estado final del camino óptimo. Los nuevos puntos finales dependerán de nuestra elección de τ_i, σ_i, v_i y Δt . Serán, en primera aproximación, de la forma

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}^*(t_1) + \Delta\mathbf{x}. \quad (3.17)$$

Por la naturaleza del tipo de perturbaciones que consideramos, $\Delta\mathbf{x}$ será pequeño. En su estudio nos interesarán únicamente los términos de primer orden, luego, $\Delta\mathbf{x}$ será lineal en $\Delta\sigma$ y Δt . Como se adelantó en la sección 3.1, nuestra intención es probar que este conjunto de puntos finales variados es convexo en \mathbb{R}^3 . Para ello veremos primero el comportamiento del sistema debido a las perturbaciones.

- Comenzamos el análisis por una única perturbación de tipo (a) como la que se muestra en (3.13). El control difiere del óptimo a partir de $t = \tau - \Delta\sigma$, por lo que en ese instante el sistema se encuentra en $\mathbf{x}(\tau - \Delta\sigma) = \mathbf{x}^*(\tau - \Delta\sigma)$. Será la condición inicial para las ecuaciones de estado que rigen su evolución durante el tiempo en que se aplica la variación,

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x_1(t), x_2(t), v), \quad \tau - \Delta\sigma \leq t < \tau. \quad (3.18)$$

Para ver los efectos que esta perturbación considerada tiene sobre el sistema, el siguiente resultado será de gran ayuda. Denotamos por $\delta\mathbf{x}(\tau)$ a la perturbación de primer orden en $\Delta\sigma$ que sufre \mathbf{x} con respecto a su trayectoria óptima en $t = \tau$.

Proposición 3.10 *En los términos y condiciones anteriores, se tiene*

$$\delta \mathbf{x}(\tau) = [\mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), v) - \mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), u^*(\tau))] \Delta \sigma.$$

Demostración:

Integrando las ecuaciones de estado aumentadas (3.18) durante el tiempo en el que se aplica la perturbación, tenemos

$$\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(\tau - \Delta \sigma) = \int_{\tau - \Delta \sigma}^{\tau} \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \int_{\tau - \Delta \sigma}^{\tau} \mathbf{f}(x_1(t), x_2(t), v) dt. \quad (3.19)$$

Por otro lado, el término de la izquierda lo podemos poner también como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(\tau - \Delta \sigma) &= \mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}^*(\tau - \Delta \sigma) = \mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}^*(\tau) + \dot{\mathbf{x}}^*(\tau) \Delta \sigma + O(\Delta \sigma^2) \\ &= \mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}^*(\tau) + \mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), u^*(\tau)) \Delta \sigma + O(\Delta \sigma^2), \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta la condición inicial, las ecuaciones de estado y el desarrollo de Taylor de \mathbf{x}^* en $t = \tau \notin W$ ya que $\Delta \sigma$ es pequeño.

Para manipular el término de la derecha en (3.19), recordamos que cuando $\Delta \sigma \rightarrow 0$, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*(t)$. Más concretamente, debido a la continuidad y derivabilidad de \mathbf{f} y de \mathbf{x} y \mathbf{x}^* en $t = \tau$, podemos aproximar el integrando para valores muy pequeños de $\Delta \sigma$ como los que consideramos. De esa forma, tenemos la aproximación

$$\mathbf{f}(x_1(t), x_2(t), v) = \mathbf{f}(x_1(\tau), x_2(\tau), v) + O(\Delta \sigma) = \mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), v) + O(\Delta \sigma),$$

por lo que (3.19) sería

$$\int_{\tau - \Delta \sigma}^{\tau} \mathbf{f}(x_1(t), x_2(t), v) dt = \mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), v) \Delta \sigma + O(\Delta \sigma^2).$$

Con todo lo anterior, se puede reescribir (3.19) como

$$\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}^*(\tau) = \mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), v) \Delta \sigma - \mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), u^*(\tau)) \Delta \sigma + O(\Delta \sigma^2).$$

Por definición, $\delta \mathbf{x}(\tau)$ es la suma de los términos lineales en $\Delta \sigma$, quedando así probada la proposición. ■

Recordamos ahora lo visto en la sección 3.2. En particular, si conociáramos el valor de una perturbación de primer orden α en un instante τ , podíamos conocer la variación que sufría el camino óptimo para $t > \tau$ resolviendo (3.4) con la condición inicial para α en $t = \tau$. Este resultado era posible gracias a que se habían linealizado las ecuaciones de estado.

Sabemos, por la teoría de ecuaciones diferenciales, que podemos escribirlo en términos de la matriz fundamental de soluciones, $\Phi(t)$. En nuestro caso se trata de una matriz 3×3 cuyas columnas son tres soluciones linealmente independientes de (3.4). Una vez que se calcula $\Phi(t)$, la solución del sistema se puede poner como

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \Phi(t)\mathbf{K},$$

siendo \mathbf{K} un vector columna de constantes que depende de la condición inicial. Por lo tanto, si $\boldsymbol{\alpha}(\tau) = \mathbf{c}$, para $t > \tau$,

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\mathbf{c}. \quad (3.20)$$

Volvemos al caso que nos ocupaba, la perturbación simple de tipo (a). Sabemos que no ocurren más perturbaciones para $t > \tau$. El estado del sistema, para tiempos mayores que τ , se obtiene resolviendo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(x_1(t), x_2(t), u^*(t)),$$

con la condición inicial $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\tau) + \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(\tau)$. Como estamos interesados en los cambios de primer orden del vector en el espacio aumentado, tendríamos que linealizar estas ecuaciones de estado aumentadas para obtener unas ecuaciones lineales homogéneas de $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t)$. Pero eso es precisamente lo que hicimos en la sección 3.2, por lo que podemos utilizar lo mencionado en el anterior párrafo. Tenemos entonces que la variación de primer orden en la trayectoria viene descrita para valores de $t > \tau$ por

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(\tau). \quad (3.21)$$

- Acabamos de ver la variación del vector de posición en el espacio de estados aumentado para una única perturbación de tipo (a). Ahora veremos cómo se comporta cuando tenemos una perturbación formada por varias de tipo (a), como ocurre con la perturbación descrita en (3.16). Estudiaremos, en primer lugar, por simplicidad, el caso en que $i = 2$, es decir, un control de la forma

$$u(t) = \begin{cases} u^*(t), & t_0 \leq t \leq \tau_1 - \Delta\sigma_1 \\ v_1, & \tau_1 - \sigma_1 \leq t < \tau_1 \\ u^*(t), & \tau_1 \leq t \leq \tau_2 - \Delta\sigma_2 \\ v_2, & \tau_2 - \sigma_2 \leq t < \tau_2 \\ u^*(t), & t \geq \tau_2. \end{cases}$$

Sabemos, por la proposición 3.10, que

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(\tau_1) = [\mathbf{f}(x_1^*(\tau_1), x_2^*(\tau_1), v_1) - \mathbf{f}(x_1^*(\tau_1), x_2^*(\tau_1), u^*(\tau_1))] \Delta\sigma_1.$$

Además, como el control aplicado entre τ_1 y $\tau_2 - \Delta\sigma_2$ es el óptimo, por (3.21) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\tau_2 - \Delta\sigma_2) &= \mathbf{x}^*(\tau_2 - \Delta\sigma_2) + \delta\mathbf{x}(\tau_2 - \Delta\sigma_2) \\ &= \mathbf{x}^*(\tau_2 - \Delta\sigma_2) + \Phi(\tau_2 - \Delta\sigma_2)\Phi^{-1}(\tau_1)\delta\mathbf{x}(\tau_1).\end{aligned}\quad (3.22)$$

Para deducir el cambio que produce la segunda perturbación en la trayectoria óptima, actuamos de la misma forma que antes. En este caso tenemos que notar que $\mathbf{x}(\tau_2 - \Delta\sigma_2) \neq \mathbf{x}^*(\tau_2 - \Delta\sigma_2)$ como sí pasaba al iniciar la primera perturbación. Ahora, en la condición inicial habrá un término extra debido a la primera perturbación tal y como se puede ver en (3.22). Integrando las ecuaciones de estado ampliadas entre $\tau_2 - \Delta\sigma_2$ y τ_2 , como hicimos en la demostración de la proposición 3.10, y quedándonos con los términos de primer orden para $\Delta\sigma_1$ y $\Delta\sigma_2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\tau_2) - \mathbf{x}^*(\tau_2) &\approx [\mathbf{f}(x_1^*(\tau_2), x_2^*(\tau_2), v_2) - \mathbf{f}(x_2^*(\tau_2), x_2^*(\tau_2), u^*(\tau_2))] \Delta\sigma_2 \\ &\quad + \Phi(\tau_2 - \Delta\sigma_2)\Phi^{-1}(\tau_1)\delta\mathbf{x}(\tau_1).\end{aligned}$$

De ahora en adelante, denotaremos

$$\delta\mathbf{x}(\tau_i) = [\mathbf{f}(x_1^*(\tau_i), x_2^*(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(x_1^*(\tau_i), x_2^*(\tau_i), u^*(\tau_i))] \Delta\sigma_i.$$

Esta notación es coherente con lo anterior puesto que se trata de la variación de primer orden que sufre \mathbf{x} en $t = \tau_i$ por la perturbación de tipo (a) que ocurre en $\tau_i - \Delta\sigma_i \leq t < \tau_i$. Nótese que este efecto inmediato, de una perturbación particular sobre el control óptimo, no tiene en cuenta el efecto de otras posibles perturbaciones previas sobre el mismo. Podemos así reescribir lo anterior como

$$\mathbf{x}(\tau_2) - \mathbf{x}^*(\tau_2) \approx \delta\mathbf{x}(\tau_2) + \Phi(\tau_2 - \Delta\sigma_2)\Phi^{-1}(\tau_1)\delta\mathbf{x}(\tau_1).$$

El segundo sumando puede simplificarse como $\Phi(\tau_2 - \Delta\sigma_2) = \Phi(\tau_2) + O(\Delta\sigma_2)$ teniendo en cuenta que $\Delta\sigma_2$ es pequeño y que las componentes de Φ son continuamente derivables. Despreciando los términos con potencias de $\Delta\sigma_1$ o $\Delta\sigma_2$ mayores o iguales que dos,

$$\mathbf{x}(\tau_2) - \mathbf{x}^*(\tau_2) \approx \Delta\mathbf{x}(\tau_2) = \delta\mathbf{x}(\tau_2) + \Phi(\tau_2)\Phi^{-1}(\tau_1)\delta\mathbf{x}(\tau_1).\quad (3.23)$$

Recordemos que $\delta\mathbf{x}(\tau_1)$ es lineal en $\Delta\sigma_1$ y $\delta\mathbf{x}(\tau_2)$ en $\Delta\sigma_2$.

Por último, como ya no se aplican más perturbaciones, calculamos la variación de primer orden que sufre \mathbf{x} en el instante final $t = t_1$ con respecto al óptimo utilizando (3.21) con la condición inicial (3.23). Esto es

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{x}(t_1) &= \Phi(t_1)\Phi^{-1}(\tau_2)\Delta\mathbf{x}(\tau_2) \\ &= \Phi(t_1)\Phi^{-1}(\tau_2)\delta\mathbf{x}(\tau_2) + \Phi(t_1)\Phi^{-1}(\tau_2)\Phi(\tau_2)\Phi^{-1}(\tau_1)\delta\mathbf{x}(\tau_1) \\ &= \Phi(t_1)\Phi^{-1}(\tau_2)\delta\mathbf{x}(\tau_2) + \Phi(t_1)\Phi^{-1}(\tau_1)\delta\mathbf{x}(\tau_1).\end{aligned}$$

Examinando los sumandos, podemos concluir que el primero hace referencia a una única perturbación de tipo (a) en $\tau_2 - \Delta\sigma_2 \leq t < \tau_2$, mientras que el segundo se refiere a otra del mismo tipo pero en $\tau_1 - \Delta\sigma_1 \leq t < \tau_1$. La conclusión importante es que, en la aproximación de primer orden, la segunda perturbación no se ve afectada por la primera. Su acción es independiente.

Una vez que se ha demostrado para dos perturbaciones, resultaría sencillo (repetiendo simplemente los pasos seguidos) generalizarlo para el caso de un número finito n de sucesivas perturbaciones de este tipo. Obtendríamos como resultado clave que el estudio de los efectos de primer orden de estas perturbaciones puede hacerse de forma aditiva. Para una perturbación como (3.16), la variación del estado final respecto del óptimo se podría escribir como

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}(t_1) &= \Phi(t_1) \sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(\tau_i) \delta \mathbf{x}(\tau_i) \\ &= \Phi(t_1) \sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(\tau_i) [\mathbf{f}(x_1^*(\tau_i), x_2^*(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(x_1^*(\tau_i), x_2^*(\tau_i), u^*(\tau_i))] \Delta \sigma_i. \end{aligned} \tag{3.24}$$

- Examinamos ahora el caso de las perturbaciones de tipo (b). En esta ocasión el tiempo final es $t'_1 = t_1 + \Delta t$ donde Δt es una cantidad pequeña que puede ser positiva o negativa. La siguiente proposición nos ayuda a entender cómo afectan estas perturbaciones a la diferencia entre los estados finales que se alcanzarían, es decir, $\mathbf{x}(t'_1) - \mathbf{x}^*(t_1)$.

Proposición 3.11 *Para una perturbación de tipo (b), la variación de primer orden del vector de posición en el estado final del sistema con respecto al óptimo, viene dada por*

$$\delta' \mathbf{x} = \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1)) \Delta t.$$

Demostración:

Supongamos primero que $\Delta t > 0$. Esto implica que $\mathbf{x}^*(t_1) = \mathbf{x}(t_1)$, luego

$$\mathbf{x}(t'_1) - \mathbf{x}^*(t_1) = \int_{t_1}^{t'_1} \mathbf{f}(x_1(t), x_2(t), u^*(t_1)) dt \approx \mathbf{f}(x_1(t_1), x_2(t_1), u^*(t_1)) \Delta t,$$

donde nos hemos quedado con los términos de primer orden para Δt del desarrollo de Taylor del integrando en el punto $t = t_1$, ya que $t'_1 = t_1 + \Delta t$ es muy cercano a t_1 . Esta variación de primer orden en el estado final se puede denotar como

$$\delta' \mathbf{x} = \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1)) \Delta t.$$

Supongamos ahora que $\Delta t < 0$. Entonces $\Delta t = -|\Delta t|$. Para que no haya problemas de regularidad, procuramos que en el intervalo $[t_1 - |\Delta t|, t_1]$ no se alcancen puntos de discontinuidad de $u^*(t)$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t'_1) - \mathbf{x}^*(t_1) &= \mathbf{x}^*(t'_1) - \mathbf{x}^*(t_1) \\ &= \dot{\mathbf{x}}^*(t_1)(-|\Delta t|) + O(|\Delta t|^2) \\ &= \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1)) \Delta t + O(|\Delta t|^2). \end{aligned}$$

Fijándonos en los términos de primer orden en Δt , tenemos también el resultado enunciado en la proposición para $\Delta t < 0$. \blacksquare

• Hemos visto el efecto de ambos tipos de perturbaciones. Combinando ambas, se tiene que

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t'_1) - \mathbf{x}^*(t_1) = [\mathbf{x}(t'_1) - \tilde{\mathbf{x}}(t_1)] + [\tilde{\mathbf{x}}(t_1) - \mathbf{x}^*(t_1)],$$

siendo $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$ la solución de las ecuaciones de estado con solo la perturbación de tipo (a). De esta manera, el segundo término de esta fórmula se corresponde con (3.24) mientras que el primero, por un razonamiento análogo al de la proposición 3.11 es, en primera aproximación, $\mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1))\Delta t$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x} &= \Phi(t_1) \left[\sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(\tau_i) [\mathbf{f}(x_1^*(\tau_i), x_2^*(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(x_1^*(\tau_i), x_2^*(\tau_i), u^*(\tau_i))] \Delta \sigma_i \right] \\ &+ \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1))\Delta t. \end{aligned}$$

Esta expresión da cuenta del cambio de primer orden debido a una perturbación general compuesta de un número finito de las de tipo (a) y una de tipo (b). Trabajaremos con este tipo de perturbaciones que denominaremos *perturbaciones permitidas* de $u^*(t)$. Definiendo

$$\Omega_i := \Phi(t_1)\Phi^{-1}(\tau_i) [\mathbf{f}(x_1^*(\tau_i), x_2^*(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(x_1^*(\tau_i), x_2^*(\tau_i), u^*(\tau_i))],$$

podemos escribir la variación de forma más compacta,

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1))\Delta t + \sum_{i=1}^n \Omega_i \Delta \sigma_i. \quad (3.25)$$

Todo lo visto de perturbaciones será suficiente para nuestro propósito. El siguiente paso será probar que el conjunto de puntos finales variados en primera aproximación, E , generado por las perturbaciones permitidas (3.25), es convexo en \mathbb{R}^3 . Consideraremos temporalmente un origen centrado en el punto $D = \mathbf{x}^*(t_1)$ para que los vectores de posición de puntos típicos de E , con la forma de (3.17), se correspondan con el vector $\Delta \mathbf{x}$ característico de cada perturbación permitida.

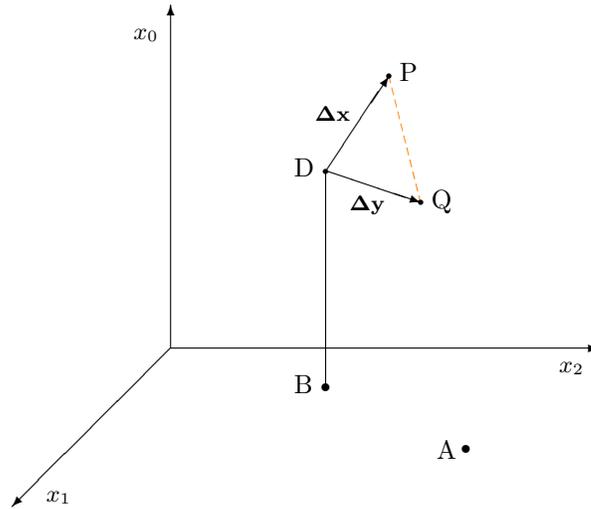


Figura 3.9: Esquema de la situación planteada con P, Q pertenecientes a E

Proposición 3.12 Sean $\Delta \mathbf{x}$ y $\Delta \mathbf{y}$ los vectores generados por dos perturbaciones permitidas distintas X e Y . Entonces, todos los puntos de la forma $\lambda \Delta \mathbf{x} + (1 - \lambda) \Delta \mathbf{y}$, con $0 \leq \lambda \leq 1$, pueden ser generados también por una perturbación permitida.

Siguiendo la notación de la figura 3.9, esto implica que, además de P y Q , todos los puntos interiores del segmento que los une (color naranja discontinuo en la figura) pertenecen a E . Por tanto, E es convexo.

Demostración:

Sea X una variación de la forma

$$u(t) = \begin{cases} v_i, & t \in I_i \\ u^*(t), & t \notin \cup_{i=1}^m I_i, \end{cases}$$

a la que también se le aplica una perturbación de tipo (b) con la variación Δt en el tiempo de llegada. El intervalo I_i está definido por $\tau_i - \Delta \sigma_i \leq t < \tau_i$ y se tiene $k_1 \leq v_i \leq k_2$. De la misma forma, se puede definir Y a partir de una perturbación

$$u(t) = \begin{cases} v_{n+j}, & t \in I_{n+j} \\ u^*(t), & t \notin \cup_{j=1}^m I_{n+j}, \end{cases}$$

a la que se le aplica otra de tipo (b) con una variación de $\Delta t'$ en el tiempo de llegada. Los intervalos están definidos de manera análoga a la anterior y las condiciones sobre v_{n+j} son las mismas.

La notación elegida no hace referencia al orden temporal en el que estos intervalos aparecen. Simplemente nos permite denotarlos convenientemente para uso. Los puntos τ_i y τ_{n+j} son distintos puntos de continuidad de $u^*(t)$. Se tendrá en cuenta que todos los $\Delta\sigma_i$ y $\Delta\sigma_{n+j}$ son lo suficientemente pequeños para que ninguno de los intervalos de perturbación se superponga con otro. En el caso de que Δt o $\Delta t'$ fueran negativos, también serían lo suficientemente pequeños para evitar problemas con los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$. Con esta notación y (3.25),

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x} &= \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1))\Delta t + \sum_{i=1}^n \Omega_i \Delta\sigma_i, \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1))\Delta t' + \sum_{j=1}^m \Omega_{n+j} \Delta\sigma_{n+j}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Cualquier punto de la forma $\Delta \mathbf{z} = \lambda \Delta \mathbf{x} + (1 - \lambda) \Delta \mathbf{y}$, con $0 \leq \lambda \leq 1$, podrá escribirse como

$$\Delta \mathbf{z} = (\lambda \Delta t + (1 - \lambda) \Delta t') \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1)) + \sum_{i=1}^n \Omega_i \lambda \Delta\sigma_i + \sum_{j=1}^m \Omega_{n+j} (1 - \lambda) \Delta\sigma_{n+j}.$$

Esta última variación puede efectivamente generarse por una perturbación permitida. En particular, la que se obtiene al aplicar una perturbación de tipo (b) con variación de tiempo de llegada $\lambda \Delta t + (1 - \lambda) \Delta t'$ a otra perturbación del tipo

$$u(t) = \begin{cases} v_i, & t \in J_i = [\tau_i - \lambda \Delta\sigma_i, \tau_i] \\ v_{n+j}, & t \in J_{n+j} = [\tau_{n+j} - (1 - \lambda) \Delta\sigma_{n+j}, \tau_{n+j}] \\ u^*(t), & t \notin \bigcup_{i,j} J_i \cup J_{n+j}. \end{cases}$$

Para los valores de i y j establecidos antes. Además, como λ estará entre cero y uno, las restricciones que se impusieron para que los intervalos no se superpusieran o dieran problemas de definición en la perturbación, se siguen cumpliendo. Se confirma así que el conjunto E de puntos finales variados producido por las perturbaciones permitidas es convexo. \blacksquare

Una vez probado esto, recordamos que nuestro interés es llevar el sistema del punto $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ a $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$, en cierto instante sin fijar t_1 y de tal forma que $x_0(t_1)$ sea el mínimo posible. En el espacio aumentado, los puntos A y B representan los correspondientes estados inicial y final en el plano $x_0 = 0$. Recordamos que D es el punto que representa en el espacio aumentado al estado final en $t = t_1$ debido al control óptimo. Ningún otro punto de la semirrecta que comienza en D y pasa por B pertenecerá al conjunto E . Por tanto, las condiciones del teorema 3.4 se satisfacen y podemos afirmar que existe un plano de soporte, Π , para E que pasa por D y tal que todos los puntos de E se encuentran por encima de él.

Tomamos un punto cualquiera de E al que denotaremos por P y cuyo vector de posición respecto de un origen en D será $\Delta \mathbf{x}$. Consideramos el vector \mathbf{a} , normal al plano Π y tal que su primera componente es menor o igual que cero. Este vector apunta en la dirección contraria a donde se encuentra E , tal y como se puede observar de forma esquemática en la figura 3.10.

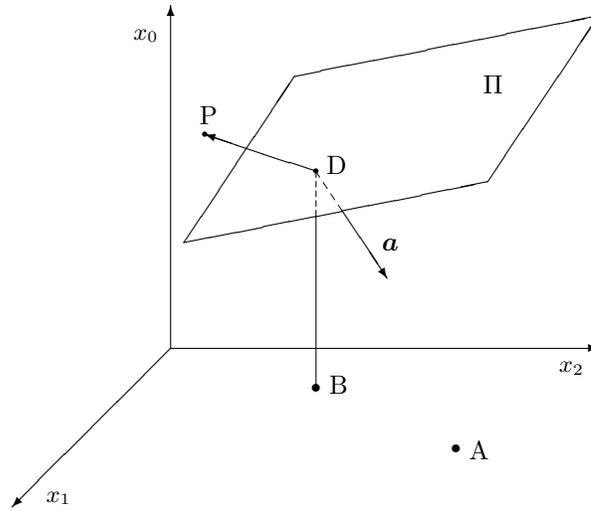


Figura 3.10: Plano de soporte que pasa por D en el espacio aumentado

Como el ángulo que forman los vectores \mathbf{a} y $\Delta \mathbf{x}$ está en el intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$ para todo $P \in E$,

$$\mathbf{a}^T \Delta \mathbf{x} \leq 0. \quad (3.27)$$

Nos fijamos en el caso particular de una sola perturbación sobre $u^*(t)$ de tipo (a). Ésta difiere del control óptimo en que se aplica el control constante $v \in [k_1, k_2]$ para valores de t tales que $\tau - \Delta\sigma \leq t < \tau$, con $\tau \notin W$. Ya se ha probado que

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1)\Phi^{-1}(\tau)\delta \mathbf{x}(\tau).$$

Es decir, la variación en el espacio de estados es el valor en $t = t_1$ de la solución de las ecuaciones linealizadas para la perturbación y con condición inicial $\boldsymbol{\alpha}(\tau) = \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(\tau)$. Escogiendo la solución de las ecuaciones de co-estado que satisfagan la condición final $\boldsymbol{\psi}(t_1) = \mathbf{a}$. Podemos reescribir (3.27) como

$$\boldsymbol{\psi}^T(t_1) \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}(t_1) \leq 0.$$

Se satisfacen las condiciones que motivaron el teorema 3.5. Aplicándolo, el término de la izquierda de la desigualdad será constante en la trayectoria en la que se aplica el control óptimo para $t \geq \tau$. Por tanto,

$$\boldsymbol{\psi}^T(t) \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}(t) \leq 0, \quad \tau \leq t \leq t_1.$$

En particular, para $t = \tau$,

$$\boldsymbol{\psi}^T(\tau) \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}(\tau) \leq 0.$$

Recordando el resultado de la proposición 3.10, y al estar únicamente interesados en las variaciones de primer orden, lo anterior se reescribe como

$$\boldsymbol{\psi}^T(\tau) [\mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), v) - \mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), u^*(\tau))] \Delta\sigma \leq 0.$$

Como $\Delta\sigma > 0$, esto es equivalente a

$$\boldsymbol{\psi}^T(\tau) \mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), v) \leq \boldsymbol{\psi}^T(\tau) \mathbf{f}(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), u^*(\tau)).$$

Por la definición del hamiltoniano en (2.3), se deduce que, para cualquier $\tau \notin W$,

$$\boxed{H(\boldsymbol{\psi}^*(\tau), \mathbf{x}^*(\tau), v) \leq H(\boldsymbol{\psi}^*(\tau), \mathbf{x}^*(\tau), u^*(\tau))}. \quad (3.28)$$

Este resultado nos dice que es precisamente el control óptimo el que nos da el mayor valor posible de H entre cualquier otro valor admisible del control. Es decir, u^* maximiza H a lo largo de la trayectoria óptima. Esto es precisamente lo que enuncia la parte (i) del principio del máximo, enunciado en los términos del teorema 2.1. Con una salvedad, este resultado lo habríamos probado para los puntos de continuidad $\tau \notin W$ del control, por lo que faltaría completarlo para los puntos en los que no es continuo. Lo veremos más adelante.

Pasamos ahora a probar la parte (ii) del teorema 2.1. Veamos primero que $\psi_0 \leq 0$ y $H = 0$ en el instante $t = t_1$ a lo largo de la trayectoria óptima. Por definición, hemos elegido $\boldsymbol{\psi}(t_1) = \mathbf{a}$. Además se escogió \mathbf{a} de tal forma que su primera componente fuera no positiva. Esto implica que $\psi_0(t_1) \leq 0$.

Para ver que $H = 0$ en $t = t_1$, consideramos una perturbación permitida que consista en un cambio Δt en el tiempo de llegada. Entonces, por la proposición 3.11 tenemos que

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1)) \Delta t,$$

con lo que (3.27) se reescribe como

$$\boldsymbol{\psi}^T(t_1) \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1)) \Delta t \leq 0.$$

Como esto tiene que ser cierto para valores de Δt tanto negativos como positivos, se deduce que

$$\boldsymbol{\psi}^T(t_1) \mathbf{f}(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1), u^*(t_1)) = 0,$$

que, con la definición del hamiltoniano, queda como

$$H(\boldsymbol{\psi}^*(t_1), \mathbf{x}^*(t_1), u^*(t_1)) = 0, \quad (3.29)$$

tal y como queríamos probar.

La parte (ii) termina concluyendo que tanto H como ψ_0 son constantes a lo largo del camino óptimo por lo que, combinándolo con lo anterior, se tiene que $H = 0$ y $\psi_0(t) = \psi_0 \leq 0$ en toda la trayectoria óptima. Como ya se razonó en la nota 2.2, como el hamiltoniano no depende explícitamente de x_0 , la ecuación de co-estado para ψ_0 es

$$\dot{\psi}_0 = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0,$$

con lo que ψ_0 es constante en todo $t \in [t_0, t_1]$. De hecho, es menor o igual que cero por serlo para t_1 .

Ahora veamos que H es constante en una trayectoria óptima. Consideramos primero el comportamiento de H en un subintervalo $[a, b] \subset [t_0, t_1]$ en el que el control u^* es continuo. En ese caso, cualquier punto $\tau \in [a, b]$ no pertenece a W . Definimos la función

$$m(\tau) := H(\boldsymbol{\psi}^*(\tau), \mathbf{x}^*(\tau), u^*(\tau)),$$

de la que tenemos la certeza de que está bien definida para $\tau \notin W$ y que es continua en $[a, b]$. Tomamos ahora $s, t \in [a, b]$ y consideramos

$$m(s) - m(t) = H(\boldsymbol{\psi}^*(s), \mathbf{x}^*(s), u^*(s)) - H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(t)).$$

Haciendo uso de (3.28), obtenemos la desigualdad

$$m(s) - m(t) \leq H(\boldsymbol{\psi}^*(s), \mathbf{x}^*(s), u^*(s)) - H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(s)). \quad (3.30)$$

Sabemos que \dot{x}_i y $\dot{\psi}_i$ son continuas en $[a, b]$. También, que las derivadas parciales del hamiltoniano respecto a x_i o ψ_i son continuas para todos los puntos de la forma $(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(s))$ con $t, s \in [a, b]$. Esto implica que $H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(s))$ es una función continua de t y s cuya derivada respecto a t ,

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial x_i}(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(s)) \dot{x}_i^*(t) + \frac{\partial H}{\partial \psi_i}(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(s)) \dot{\psi}_i^*(t) \right],$$

es también una función continua de t y s . De hecho, por las ecuaciones de estado y co-estado, sabemos que

$$\dot{x}_i^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) \quad \text{y} \quad \dot{\psi}_i^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(t)).$$

Luego, si $s = t$, la derivada considerada será nula.

A partir de ahora simplificaremos la notación escribiendo

$$G(t, s) := H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(s)).$$

Nótese que $G(s, s)$ es precisamente el valor de H en la trayectoria óptima e instante s . Considerando $G(t, s)$ como una función continua de t , acabamos de ver que

$$G_t(s, t)|_{s=t} = 0. \quad (3.31)$$

Por el teorema del valor medio, aplicado a $G(t, s)$ como una función de t , sabemos que, para cualquier valor de t y s , existe un c entre ambos tal que

$$G(s, s) - G(t, s) = G_t(c, s)(s - t). \quad (3.32)$$

La función derivada con respecto a t , $G_t(t, s)$, puede verse no solo como una función continua en t sino también como una función continua en s . Esto asegura que, dado un $t \in [a, b]$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(t, \varepsilon) > 0$ tal que si $|s - t| \leq \delta$,

$$|G_t(s, s) - G_t(t, s)| \leq \varepsilon.$$

En particular, consideramos el caso en que $t = c$ y teniendo en cuenta que, por (3.31), $G_t(s, s) = 0$, se tiene que

$$-\varepsilon \leq G_t(c, s) \leq \varepsilon.$$

Por tanto, aplicando estas desigualdades a (3.32), para cada $t \in [a, b]$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(t, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} G(s, s) - G(t, s) &\leq \varepsilon(s - t) \quad \text{si } t < s \leq t + \delta, \\ G(s, s) - G(t, s) &\leq -\varepsilon(s - t) \quad \text{si } t - \delta \leq s < t. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Sin embargo, de (3.30) sabíamos que

$$m(s) - m(t) \leq G(s, s) - G(t, s),$$

por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{m(s) - m(t)}{s - t} &\leq \varepsilon \quad \text{si } t < s \leq t + \delta, \\ \frac{m(s) - m(t)}{s - t} &\geq -\varepsilon; \quad \text{si } t - \delta \leq s < t. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Podemos entonces aplicar el teorema 3.6 que vimos en la sección 3.3 a la función m para deducir que

$$m(b) \leq m(a).$$

Pero también podemos aplicar el teorema 3.7 obteniendo

$$m(b) \geq m(a).$$

Por tanto, $m(b) = m(a)$ sea cual sea el intervalo $[a, b]$ de $[t_0, t_1]$ en el que el control u^* sea continuo.

El conjunto finito, W , de discontinuidades de u^* podemos escribirlo como $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, de tal forma que $t_0 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_k \leq t_1$. El intervalo abierto (d_i, d_{i+1}) es la unión de una sucesión de intervalos cerrados $[d_i + 1/n, d_{i+1} - 1/n]$, donde n va tomando valores enteros mayores que $n_0 = 2/(d_{i+1} - d_i)$ para asegurar que están bien definidos. La función m es constante en cada uno de ellos, luego lo es también en (d_i, d_{i+1}) , con $i = 1, \dots, k - 1$. Por tanto,

$$m(t) \equiv c_i \quad \text{en } (d_i, d_{i+1}).$$

Con un razonamiento análogo se ve que también tendrá que ser constante en los intervalos $[t_0, d_1]$ y $(d_k, t_1]$, en caso de que $d_1 \neq t_0$ y $d_k \neq t_1$.

Veamos ahora que es la misma constante para todos los intervalos. A priori, nuestro problema es que $m(t) = H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(t))$ en principio no es continua en los puntos d_i . Para resolver este problema consideramos la función $h(t)$ del teorema 3.8. Es inmediato por (3.28) que, tal y como se adelantó en la nota 3.9,

$$h(t) = H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(t)) \text{ para todo } t \notin W.$$

Esto nos asegura que $m(t) = h(t)$ salvo en un conjunto finito de puntos $W = \{d_1, \dots, d_k\}$. Ahora bien, en el teorema 3.8 vimos que la función $h(t)$ así definida es continua en todo $[t_0, t_1]$. Esto nos permite concluir que el valor de las posibles constantes que podía tomar $m(t)$ en los intervalos $[t_0, d_1)$, $(d_k, t_1]$ y los de la forma (d_i, d_{i+1}) , es el mismo para todas. Es decir,

$$h(t) = m(t) \equiv c, \quad t \notin W.$$

Como $h(t)$ es continua en todo $[t_0, t_1]$, se deduce que también toma el valor c en los puntos de W . Faltaría ver que m es también esa constante en ese número finito de puntos. Esto no presenta problemas ya que m se puede extender por continuidad a h . Lo que le ocurra a $m(t) = H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(t))$ en los puntos finitos de discontinuidad de control no es tan importante a efectos prácticos como el que los límites laterales de m en ese punto valgan esa misma constante. Los puntos de W presentan a priori discontinuidades de tipo evitable para $m(t)$, pero es algo que se puede solucionar fácilmente con la extensión continua mencionada y que es admisible a efectos prácticos. Teniendo esto en cuenta, podemos considerar $m(t) \equiv c$ en $[t_0, t_1]$ y, por tanto, H es constante a lo largo de la trayectoria óptima. Además, como sabemos por (3.29) que su valor en $t = t_1$ es cero, también lo será en el resto del intervalo $[t_0, t_1]$ para el control óptimo. Quedaría así probada la parte (ii) del principio del máximo.

Lo único que falta por probar es que se verifica la parte (i) para los instantes en los que el control no es continuo. Por lo dicho en el anterior párrafo, consideramos que H está definido para todo $[t_0, t_1]$ en una trayectoria óptima ya que hemos extendido $m(t)$ por $h(t)$ en los instantes $t \in W$. De la continuidad y la propia definición de h , deducimos que también en esos puntos de $t \in W$, H alcanza el máximo con respecto a u cuando el control es el óptimo u^* . En conclusión, la parte (i) es cierta para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Concluimos así la demostración del principio del máximo de Pontryaguin, enunciado en los términos del teorema 2.1, que constituye la parte fundamental de este trabajo. \square

3.5. Otras versiones del principio del máximo

El teorema 2.1 proporciona las condiciones necesarias que un control óptimo, en caso de existir, tendría que cumplir para dar solución al problema planteado en la sección 2.1. Recordamos que teníamos un sistema que evolucionaba mediante las ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u).$$

Nuestro propósito era controlarlo mediante la función $u(t)$ para trasladarlo del estado $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ en el instante $t = t_0$ a otro estado $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ en $t = t_1$, siendo t_1 un instante no especificado. Se pretendía que el traslado se efectuara de tal forma que una función de coste,

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, u) dt,$$

se minimizase. Aquel camino y control que, de existir, lo cumplieran, se denominaban *óptimos*.

Parece razonable pensar que hay problemas en los que nos interesa que el instante en el que se llega al estado final, t_1 , sea un valor concreto conocido. De igual forma, podemos estar interesados en que el estado final del sistema no sea exactamente \mathbf{x}^1 sino cualquier punto en el espacio de estados que pertenezca a una curva o variedad, \mathcal{C} , dada. Las variedades donde están contenidos los puntos finales que nos interesan se denominan *curvas o variedades diana*. Estos son los dos problemas que abordaremos en esta sección y veremos que se pueden afrontar haciendo pequeñas modificaciones al teorema 2.1. Obtendremos, así, otras versiones del principio del máximo de Pontryaguin que nos darán condiciones necesarias para los controles óptimos que sean solución de estas variantes del problema original.

Comenzamos por el caso en que el instante de llegada al estado final está fijado. Los controles admisibles que consideramos son, al igual que antes, aquellas funciones continuas a trozos y que toman valores en un conjunto acotado de \mathbb{R} . Veremos que la versión del principio del máximo es prácticamente la misma pero, en esta ocasión, no podemos deducir ninguna condición sobre el comportamiento de H en el instante $t = t_1$. Esto se debe a que, al fijar el tiempo de llegada, estamos añadiendo una restricción al problema y nos reduce el tipo de perturbaciones que podemos considerar respecto del control óptimo. Lo veremos en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 3.14 (Principio del máximo para tiempo final fijo) Sea $u^*(t)$ un control admisible, con su camino correspondiente \mathbf{x}^* , que transfiere el sistema de \mathbf{x}^0 en el instante $t = t_0$ al estado \mathbf{x}^1 en $t = t_1$ fijo. Para que u^* y \mathbf{x}^* sean óptimos es necesario que existan $\boldsymbol{\psi} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y una función escalar H , de tal forma que $\boldsymbol{\psi} \neq \mathbf{0}$ para todo t en $[t_0, t_1]$ y satisface las ecuaciones de co-estado,

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (3.35)$$

y la función escalar H está definida como

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \psi_0 f_0(\mathbf{x}, u) + \psi_1 f_1(\mathbf{x}, u) + \psi_2 f_2(\mathbf{x}, u). \quad (3.36)$$

Además, deberán cumplir que

(i) Para cada t con $t_0 \leq t \leq t_1$, H alcanza su máximo con respecto a u en $u = u^*(t)$.

(ii) $\psi_0 \leq 0$ en $t = t_1$. Además, $H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(t))$ y $\psi_0(t)$ son constantes a lo largo de la trayectoria óptima.

Demostración:

La única diferencia en las condiciones con respecto al teorema 2.1 es que t_1 está fijado. La demostración utilizada en la sección anterior es válida con la salvedad de que ahora no podemos considerar perturbaciones de tipo (b) ya que alterarían el valor de t_1 . Esto implica que en (3.26) tanto Δt como $\Delta t'$ son cero. La demostración de que el nuevo conjunto E es convexo sería la misma pero sin las perturbaciones de tipo (b) y la desigualdad (3.27) también se conservaría.

De esta manera, podríamos deducir la parte (i) del teorema igual que hicimos en la demostración del teorema 2.1. Para demostrar (ii), se puede probar que ψ_0 y H son constantes en una trayectoria óptima de la misma forma que se hizo. También, se tiene que $\psi_0(t_1) \leq 0$, al ser en ese instante igual a la primera coordenada del vector \mathbf{a} que por definición se eligió no positiva. ■

Nótese que, en este caso, sabemos que el hamiltoniano será constante en la trayectoria óptima, pero no tiene por qué ser necesariamente nulo como ocurría en el caso en que no teníamos t_1 fijado. Esto se debe a que no podemos afirmar que $H(\boldsymbol{\psi}^*(t_1), \mathbf{x}^*(t_1), u^*(t_1)) = 0$ como hicimos en la demostración del teorema 2.1. Los argumentos que nos llevaron a (3.29) utilizaban valores positivos y negativos de Δt que, en el caso que nos ocupa ahora, es cero.

Ahora pasamos al caso en que no tendremos fijado el instante final, t_1 , pero tampoco el punto al que llega, \mathbf{x}^1 , como sí ocurría en el teorema 2.1. Simplemente nos interesa que el punto final pertenezca a una variedad \mathcal{C} . Veremos que, además de las condiciones necesarias ya vistas, aparece una condición adicional que nos permitirá identificar el control óptimo y el punto final en \mathcal{C} que minimizan al funcional J . Esta condición extra se denominará *condición de transversalidad*.

Teorema 3.15 (Principio del máximo para variedades diana) *Sea $u^*(t)$ un control admisible, con su camino correspondiente \mathbf{x}^* , que transfiere el sistema de \mathbf{x}^0 en el instante $t = t_0$ a un punto de una curva \mathcal{C} , caracterizada implícitamente por $g(x_1, x_2) = 0$, en cierto instante no especificado $t = t_1$. Suponemos que $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ y $\nabla g \neq (0, 0)$ en \mathbb{R}^2 . Para que u^* y \mathbf{x}^* sean óptimos es necesario que existan $\boldsymbol{\psi} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y una función escalar H , de tal forma que $\boldsymbol{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$ verifica que $\boldsymbol{\psi} \neq \mathbf{0}$ para todo t en $[t_0, t_1]$ y satisface las ecuaciones de co-estado,*

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (3.37)$$

donde la función escalar H está definida como

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \psi_0 f_0(\mathbf{x}, u) + \psi_1 f_1(\mathbf{x}, u) + \psi_2 f_2(\mathbf{x}, u). \quad (3.38)$$

Además, deberán cumplir que

- (i) Para cada t con $t_0 \leq t \leq t_1$, H alcanza su máximo con respecto a u en $u = u^*(t)$.
- (ii) $H(\boldsymbol{\psi}^*(t_1), \mathbf{x}^*(t_1), u^*(t_1)) = 0$ y $\psi_0(t_1) \leq 0$. De hecho, tanto $H(\boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{x}^*(t), u^*(t))$ como $\psi_0(t)$ son constantes a lo largo de la trayectoria óptima.
- (iii) El vector $(\psi_1^*, \psi_2^*)(t_1)$ es ortogonal al espacio tangente a \mathcal{C} en el punto final $(x_1^*, x_2^*)(t_1)$, es decir,

$$\langle (\psi_1^*(t_1), \psi_2^*(t_1)), \mathbf{v} \rangle \text{ para todo } \mathbf{v} \in T_{(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1))} \mathcal{C}.$$

Demostración:

La única parte que quedaría por demostrar en este teorema es la (iii), ya que las demás se probarían como se ha hecho anteriormente teniendo en cuenta que el control óptimo $u^*(t)$ bajo estas hipótesis también debe ser óptimo si el estado final lo hubiéramos fijado en $(x_1, x_2)^*(t_1)$. Veamos que $(\psi_1^*(t_1), \psi_2^*(t_1))$ es un vector perpendicular a cualquiera que sea tangente a la curva \mathcal{C} en el punto $(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1))$. Comenzamos con el siguiente resultado que nos será de ayuda en la demostración.

Sea un conjunto convexo K de \mathbb{R}^3 y D un punto frontera de K . Cuando exista un semiplano abierto T disjunto con K y con frontera una recta r que pase por D , existe un plano Π que contiene a r y tal que divide a \mathbb{R}^3 de forma que K yace a un lado de dicho plano y T al otro. Un esquema de esta situación podría ser el ejemplo mostrado en la figura 3.11.

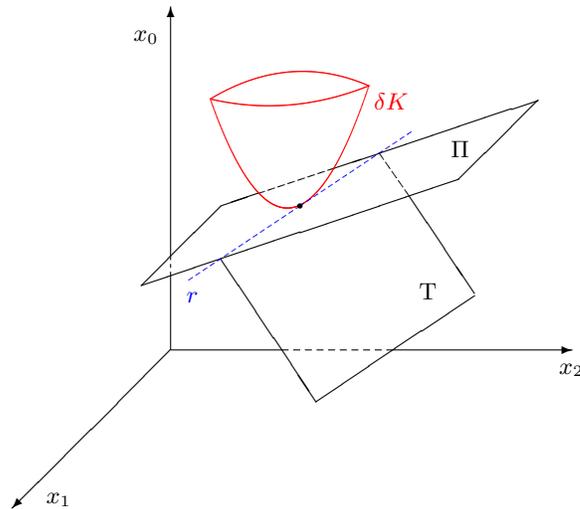


Figura 3.11: Ejemplo de un plano de separación, Π , entre el conjunto convexo K con frontera δK y el semiplano abierto T

Se puede probar directamente con argumentos geométricos, de forma muy similar a como se hizo la primera parte del teorema 3.4, o aplicando también directamente uno de los teoremas de separación para conjuntos convexos en \mathbb{R}^n . En particular, el teorema del hiperplano separador (véase [4]) enuncia que dado dos conjuntos convexos disjuntos contenidos en \mathbb{R}^n , existe un hiperplano tal que separa a \mathbb{R}^n en dos partes de tal forma que cada uno de los conjuntos convexos yace en una parte distinta.

En nuestro caso, K es convexo por hipótesis y el semiplano T se puede comprobar que también. Aplicando este resultado, tenemos asegurada la existencia de un plano, Π , que los separa. Ahora bien, D se trata de un punto frontera de K y a la vez es un punto adherente a T , por lo que el plano separador ha de contener necesariamente a D . Además, de todos los planos que pasan por D , el plano Π será uno de los que contengan a la recta r , ya que si no fuera así, el plano Π cortaría en alguna parte al semiplano abierto T y ya no sería un plano de separación por haber elementos de T a ambos lados del mismo. Tenemos, entonces, asegurada la existencia del plano Π conteniendo a r tal y como queríamos probar. Usaremos este resultado más adelante.

Sea $u^*(t)$ el control óptimo con su correspondiente camino $(x_1^*(t), x_2^*(t))$ y un coste $J = x_0^*$. Sea D el punto final en el espacio aumentado de estados, es decir, con coordenadas $(x_0^*, x_1^*(t_1), x_2^*(t_1))$. Este punto pertenece a la curva $\mathcal{C}' := \{g(x_1, x_2) = 0, x_0 = x_0^*\}$ del espacio aumentado. Cualquier vector tangente a esta curva será de la forma $(x_0, x_1, x_2) = (0, \lambda, \mu)$. Sea $\Omega := \{g(x_1, x_2) = 0, x_0 < x_0^*\}$. A esta superficie no puede llegar ninguna solución de las ecuaciones de estado correspondiente a una variación del control óptimo u^* , pues iría en contra de su condición de óptimo.

Aplicamos el resultado enunciado al principio de la demostración para el conjunto convexo E , formado por los puntos finales asociados a perturbaciones del control óptimo (misma notación usada en la demostración del teorema 2.1), y al semiplano abierto T tangente a Ω en el punto D y con recta frontera la tangente a \mathcal{C}' en ese punto. Se puede observar un esquema de algunos de los elementos considerados en la figura 3.12. Los conjuntos E y T son disjuntos porque, si intersecaran, existiría un control admisible con el que se llegaría, en primera aproximación, a Ω y sería contradictorio con el carácter óptimo de u^* y el estado final en D .

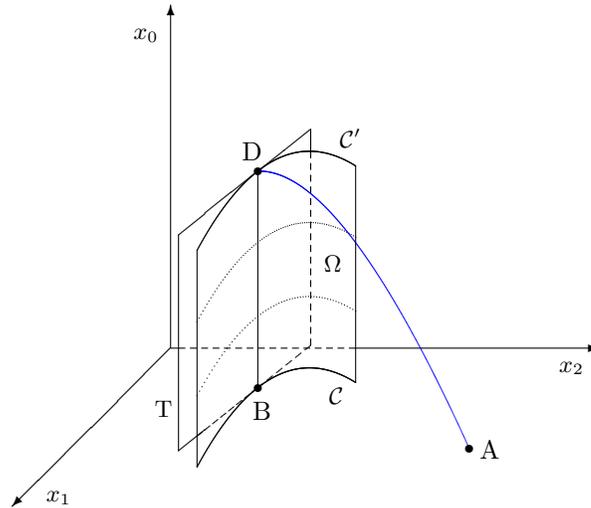


Figura 3.12: Representación del camino óptimo (azul) hasta el punto final D , junto con la superficie Ω y el semiplano abierto T

Tenemos, así, asegurada la existencia de un plano Π que pasa por la recta tangente a \mathcal{C}' en D y que divide al espacio en dos partes tales que una contiene completamente a E y la otra a T . Al igual que se hizo en la demostración del teorema 2.1, aunque ahora con algo menos de libertad en la elección del plano,

podemos tomar el vector $\boldsymbol{\psi}^*(t_1) = (\psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*)(t_1)$ como el normal a Π con la componente ψ_0^* , correspondiente a la coordenada x_0 , negativa. Como $\boldsymbol{\psi}(t_1)$ es necesariamente normal a la recta tangente a \mathcal{C}' en D , se tiene que

$$\psi_1^*(t_1)\lambda + \psi_2^*(t_1)\mu = 0,$$

donde (λ, μ) es cualquier vector tangente a la curva \mathcal{C} en $(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1))$. Obteniéndose, por tanto, la condición de transversalidad buscada. ■

Corolario 3.16 *Si el estado en $t = t_1$ es totalmente libre, es decir, puede ser cualquier punto del espacio de estados, entonces la condición de transversalidad es simplemente $(\psi_1^*, \psi_2^*)(t_1) = \mathbf{0}$.*

Demostración:

En caso de existir un control óptimo para este problema, por el estado final asociado al mismo pueden pasar infinitas curvas diana, \mathcal{C} , para cada una de las cuales se verificarían las hipótesis del teorema 3.15 ya que el control también sería óptimo suponiendo, en particular, que la llegada es cada una de las curvas. El vector $(\psi_1^*(t_1), \psi_2^*(t_1))$ debe ser, por tanto, perpendicular al vector tangente a cada curva \mathcal{C} en $(x_1^*(t_1), x_2^*(t_1))$. Sin embargo, el vector tangente puede apuntar en cualquier dirección, según la elección de la curva diana \mathcal{C} entre las infinitas posibles, por lo que se deduce que $(\psi_1^*(t_1), \psi_2^*(t_1))$ ha de ser el vector nulo.

En el espacio de estados aumentado, se puede interpretar como que el plano de separación, mencionado en la demostración del anterior teorema, ha de ser el horizontal y, entonces, su vector normal es vertical. Esto está de acuerdo con que las coordenadas ψ_1^* y ψ_2^* del vector $\boldsymbol{\psi}$ del espacio aumentado son nulas en el instante final t_1 . ■

Capítulo 4

Aplicaciones del teorema

El principio del máximo de Pontryaguin tiene numerosas aplicaciones. Además, en algunos casos, debido a la convexidad de los funcionales con los que se trata, no solo proporciona condiciones necesarias sino también suficientes para encontrar el control óptimo. Los teoremas tratados en este trabajo proporcionan una herramienta muy útil para la optimización de transiciones entre dos estados de un sistema bajo la premisa de la minimización de algún funcional.

En la práctica, se podría utilizar en numerosas situaciones, la repoblación de un bosque de un estado inicial a otro final optimizando el tiempo o el gasto en árboles, la puesta en marcha de un cohete para que logre alcanzar la velocidad de escape de la Tierra con un consumo óptimo de combustible, etc. La problemática, en muchos casos, surge de la modelización de estos problemas. Modelos muy complicados, y que se ajusten más a la realidad, dan lugar a sistemas de ecuaciones diferenciales cuya resolución analítica puede resultar prohibitiva. De hecho, en algunos casos con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, la resolución puede ser también inabordable desde el punto de vista analítico por la forma de las soluciones. Se requiere, entonces, conjugar este principio con técnicas numéricas que nos ayuden a obtener la solución buscada para el control óptimo.

En este trabajo se presentan, a modo ilustrativo, algunos ejemplos que sí tienen una solución analítica definida para poder observar la utilidad del principio del máximo. Se observará que, a pesar de la sencillez de las ecuaciones de estado y el funcional a minimizar, las soluciones no poseen una forma tan simple. Los dos ejemplos siguientes responden a situaciones reales en la vida cotidiana y están relacionados con el tratamiento de una persona con diabetes en un hospital.

4.1. Ejemplo 1: Estabilización óptima de un paciente con diabetes

Un paciente con diabetes se encuentra ingresado en el hospital. Sea $x(t)$ su nivel de glucosa en sangre, medido en mg/cm^3 , en el instante t . Se sabe que un aumento en el nivel de glucosa estimula de forma proporcional la captación de la misma por parte de las células para su uso o almacenamiento en forma de glucógeno. Al tener diabetes, el páncreas del paciente no es capaz de generar suficientes niveles de insulina, por lo que la regulación del nivel de glucosa en sangre puede sufrir alteraciones importantes. Así, es necesario un aporte externo de estas sustancias para el adecuado estado de salud del paciente.

El control en este problema será una vía de tres llaves. Esto es un dispositivo que conecta tres vías, la primera va conectada a una vena del paciente mientras que de las otras dos, una va conectada a una bolsa de suero con glucosa diluida y la otra a otra bolsa de una disolución de suero con insulina. La llave de paso se puede regular de tal forma que siempre se conecte la vena del paciente o bien con la vía que conecta la disolución de glucosa o bien con la vía que comunica con la disolución de insulina. En cada instante, la vena del paciente está comunicada únicamente con una de las dos, no será posible que le entre contenido de las dos vías a la vez. Además, se supone que se puede regular perfectamente, según la apertura de la llave, el flujo de la disolución (ya sea de glucosa o de insulina) que se le administra al paciente vía intravenosa.

Es conveniente remarcar que la acción de la insulina es antagónica a la de la glucosa. Por tanto, inyectar la disolución de glucosa, evidentemente supondrá un aumento del nivel de glucosa en sangre, $x(t)$, mientras que administrarle la disolución de insulina supondrá una disminución de $x(t)$. Esto se debe a que la glucosa presente en la sangre se degrada al combinarse con la insulina dando lugar a otros compuestos que no interesan en este problema. Asumimos que la cantidad de glucosa degradada por un determinado flujo de insulina, sería la misma que se incrementaría si ese mismo flujo fuera de glucosa. Con todo lo anterior, podemos establecer la ecuación de estado del sistema como

$$\dot{x} = -\alpha x + u. \quad (4.1)$$

Se tiene que α es la tasa de captación de glucosa por unidad de tiempo, la supondremos constante y de valor $\alpha = 1/\sqrt{2}$. La función $u(t)$ da cuenta de la densidad del flujo, medida en mg/cm^3 , que se inyecta al paciente en el instante t . En este control están incluidas las situaciones mencionadas. Si $u(t) > 0$, se estaría inyectando la disolución de glucosa ya que sería un término favorable al aumento de $x(t)$. Por el contrario, si $u(t) < 0$, se estaría inyectando la disolución de insulina ya que sería un término que contribuye al descenso de glucosa en sangre. Es decir, el signo de $u(t)$ únicamente nos va a indicar la vía a la que está

conectada (glucosa o insulina). El que el signo sea negativo no hace referencia a que se inyecte un flujo de densidad negativa, sino a que el flujo que se inyecta, con densidad igual al valor absoluto de u , es de insulina y no de glucosa. Como se ha mencionado, el poder modelizar la acción de ambas vías mediante un solo control se debe al efecto opuesto que ambas sustancias tienen en el organismo y al dispositivo formado por la vía de tres llaves.

El paciente ha sufrido una hipoglucemia y se le pretende estabilizar desde su estado inicial, $x(0) = 0,5 \text{ mg/cm}^3$, a un estado final en el que la concentración de glucosa en sangre sea $x(t_f) = 1,5 \text{ mg/cm}^3$, siendo t_f un instante no especificado. Se pretende, además, que la transición sea de tal forma que se minimice en la medida de lo posible el metabolismo (relacionado con el nivel de glucosa) que va teniendo el paciente y la cantidad de sustancias, ya sea glucosa o insulina, que se le administran. Esto es, minimizando

$$J = \int_0^{t_f} (x^2 + u^2) dt. \quad (4.2)$$

En la resolución del problema supondremos lógicamente que el valor de $x(t)$ tiene que ser siempre positivo y la unidad temporal será la hora. Suponiendo que existe un control óptimo para el problema, veremos qué forma tiene imponiendo las condiciones necesarias que ha de cumplir según el teorema 2.1. En este caso, hay solamente una variable de estado y una ecuación de estado, por lo que el hamiltoniano con la definición de (2.3) sería

$$H = \psi_0(x^2 + u^2) + \psi \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + u \right).$$

Como sabemos por el propio teorema y la nota 2.2, podemos elegir $\psi_0 = -1$, de tal forma que el hamiltoniano que usaremos es

$$H = -x^2 - u^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi x + \psi u. \quad (4.3)$$

Observamos que tiene una forma cuadrática en u . Sabemos que el control óptimo maximiza H como función de u en cada instante, por lo que ese control cumplirá las condiciones necesarias de máximo local, esto es, hará nula la derivada de H respecto de u ,

$$\frac{dH}{du} = -2u + \psi.$$

Se comprueba que la segunda derivada es siempre negativa, por lo que efectivamente es un máximo. Tenemos, por tanto, que el control óptimo será de la forma

$$u^*(t) = \frac{\psi(t)}{2}. \quad (4.4)$$

Se puede ver qué forma tiene la variable de co-estado, $\psi(t)$, recurriendo a la ecuación de coestado,

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi, \quad (4.5)$$

que, junto con la ecuación de estado (4.1), forman el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + u, \\ \dot{\psi} = 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi. \end{cases}$$

Estas ecuaciones rigen la evolución del sistema. Teniendo en cuenta que el control que nos interesa es el óptimo, se puede dejar como una ecuación diferencial de segundo orden para la variable de co-estado ψ , de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= 2\dot{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\psi} = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + u^*\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\psi} = -\frac{2}{\sqrt{2}}x + 2u^* + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\psi} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\dot{\psi} - \psi/\sqrt{2}}{2}\right) + 2\frac{\psi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\psi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\psi} + \frac{1}{2}\psi + \psi + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\psi} = \\ &= \frac{3}{2}\psi. \end{aligned}$$

Es decir, ψ verifica la ecuación diferencial

$$\ddot{\psi} - \frac{3}{2}\psi = 0,$$

por lo que su expresión es

$$\psi(t) = Ae^{\sqrt{3/2}t} + Be^{-\sqrt{3/2}t}. \quad (4.6)$$

Esto implica, por (4.4), que el control óptimo (denotado por un asterisco) es

$$u^*(t) = \frac{A}{2}e^{\sqrt{3/2}t} + \frac{B}{2}e^{-\sqrt{3/2}t}. \quad (4.7)$$

Mediante la ecuación de co-estado (4.5), obtenemos también la expresión del nivel de glucosa óptimo en sangre para cada instante,

$$x^*(t) = A \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right) e^{\sqrt{3/2}t} - B \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right) e^{-\sqrt{3/2}t}. \quad (4.8)$$

Ahora, para obtener los valores de las constantes A y B , utilizamos la condición inicial del estado del paciente, $x(0) = 0,5 \text{ mg/cm}^3$, y la de su estado final, $x(t_f) = 1,5 \text{ mg/cm}^3$. De esta forma,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = A \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right) - B \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right), \\ \frac{3}{2} = A \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right) e^{\sqrt{3/2}t_f} - B \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right) e^{-\sqrt{3/2}t_f}. \end{cases}$$

Para resolver este sistema, multiplicamos la primera ecuación por $e^{\sqrt{3/2}t_f}$ y se la restamos a la segunda para despejar B . Después, sustituimos en la primera ecuación el valor de B y despejamos A . Se obtienen así los valores

$$\begin{cases} A = \frac{3 - e^{-\sqrt{3/2}t_f}}{e^{\sqrt{3/2}t_f} - e^{-\sqrt{3/2}t_f}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \right), \\ B = \frac{3 - e^{\sqrt{3/2}t_f}}{e^{\sqrt{3/2}t_f} - e^{-\sqrt{3/2}t_f}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \right). \end{cases} \quad (4.9)$$

Nos centramos ahora en la expresión del hamiltoniano. Como el control óptimo es de la forma $u^* = \psi/2$, podemos simplificar la expresión (4.3), para el caso del control y el camino óptimos, como

$$H = -(x^*)^2 - \frac{\psi x^*}{\sqrt{2}} + \frac{\psi^2}{4}. \quad (4.10)$$

Calculamos el valor de H para un instante $t \in [0, t_f]$ cualquiera. Sustituimos en (4.10) las expresiones de ψ y x^* obtenidas en (4.6) y (4.8), respectivamente. Tras unos cálculos, agrupando en términos de A y B , obtenemos que

$$H = e^{2\sqrt{3/2}t} A^2 \left(\frac{\sqrt{3}-2}{4} - \frac{\sqrt{3}-2}{4} \right) + B^2 e^{-2\sqrt{3/2}t} \left(-\frac{\sqrt{3}+2}{4} + \frac{\sqrt{3}+2}{4} \right) + \frac{3}{2} AB.$$

Se observa que los términos que dependen del instante t se cancelan. Esto nos indica que el hamiltoniano va a ser constante. De hecho, al no tener el tiempo final t_f fijado, sabemos, por el teorema 2.1, que el valor del hamiltoniano es cero para cualquier instante de la transición entre el estado inicial y final. Por tanto,

$$H = \frac{3}{2}AB = 0.$$

Esto implica, excluyendo a la solución trivial por no tener sentido para este problema, que o bien $A = 0$ o $B = 0$. Comprobemos con sus expresiones, vistas en (4.9), cuál es la situación para nuestro caso. Si $A = 0$, se tendría que $3 = e^{-\sqrt{3/2}t_f}$, lo cual es absurdo porque requeriría de un valor de t_f negativo que no se corresponde con la realidad por ser una escala temporal. Tenemos entonces que la solución es $B = 0$. En este caso, se despeja el valor de t_f como

$$t_f = \frac{\ln(3)}{\sqrt{3/2}}.$$

Podemos sustituir este valor en (4.9) para obtener A . Tras unos cálculos se obtienen los valores

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}, \quad B = 0.$$

Llevando los términos anteriores a (4.8), obtenemos la expresión del nivel de glucosa en sangre en el paciente durante el intervalo de tiempo desde que se le empieza a administrar la disolución, $t = 0$, hasta que se estabiliza en $t = t_f$. Para cierto instante t en ese intervalo,

$$x^*(t) = \frac{e^{\sqrt{(3/2)}t}}{2}. \quad (4.11)$$

De la misma manera con (4.7), podemos obtener la expresión del control óptimo,

$$u^*(t) = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3} - 1)} e^{\sqrt{(3/2)}t}. \quad (4.12)$$

Nótese que el control es siempre positivo por lo que se le deberá administrar durante todo el proceso glucosa, y no insulina, tal y como nos dictaba la intuición. Además, puede ser interesante a nivel práctico, para facilitar la automatización del proceso de inyección de glucosa, ponerlo en función del nivel de glucosa en sangre. Esto es,

$$u^*(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} x^*(t).$$

En la figura 4.1 se representa, en verde, el nivel de glucosa del paciente en función del tiempo y, en rojo, la cantidad de glucosa que se le inyecta en cada instante. La única diferencia entre ambas es un factor de escala numérico. También, se observa que se consigue estabilizar al paciente desde el estado inicial al final en un tiempo $t = t_f$ inferior a una hora (alrededor de 54 minutos). Concluimos también que este control sería válido en la práctica ya que tanto el flujo de glucosa inyectado como el nivel de glucosa en sangre son valores clínicamente aceptables.

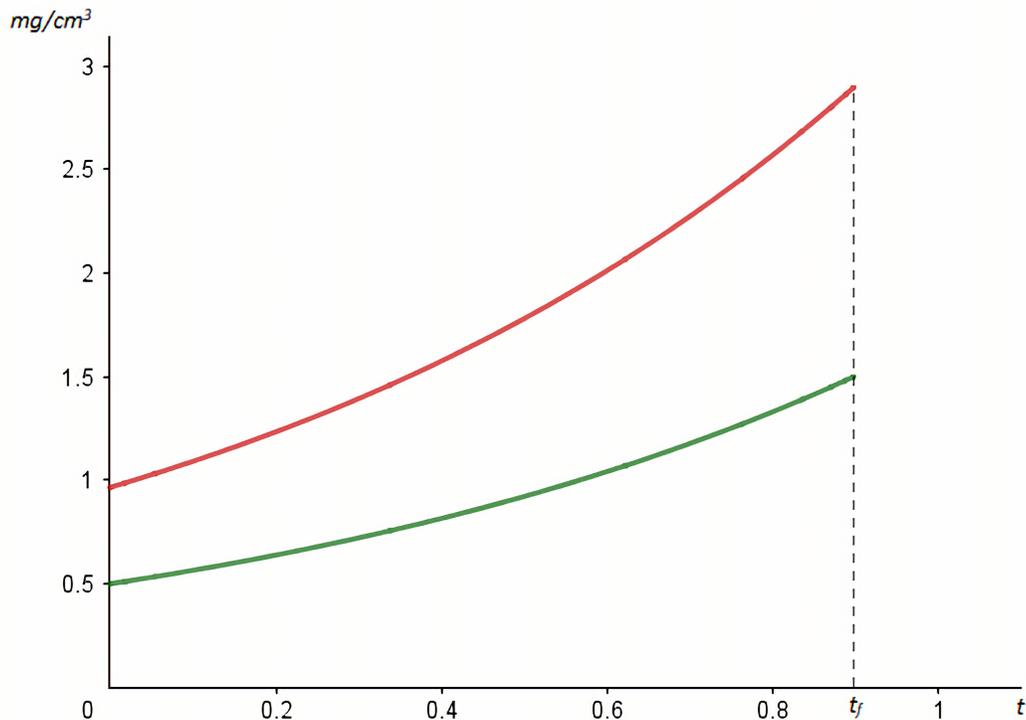


Figura 4.1: Evolución temporal del nivel de glucosa en el paciente (verde) y de la cantidad de glucosa aplicada (rojo)

Una vez que se ha estabilizado al paciente podríamos preguntarnos si hay alguna manera de mantenerlo en el estado final, con una concentración de $1,5 \text{ mg/cm}^3$, durante más tiempo. Esto sí será posible, haciendo cero el valor de \dot{x} en la ecuación (4.1) para el valor de x mencionado, se obtiene un control igual a

$$u = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Aplicando esa cantidad de glucosa por unidad de tiempo, una vez que se haya alcanzado el estado final, el paciente se mantendrá estable en ese nivel de glucosa de forma indefinida.

4.2. Ejemplo 2: Control óptimo del paciente con diabetes antes de una operación

El mismo paciente del ejemplo anterior lleva ya un tiempo estabilizado con un nivel de glucosa en el cuerpo igual a $1,5 \text{ mg/cm}^3$. El personal sanitario informa de que un quirófano ha quedado libre y el paciente podrá ser operado de urgencias del páncreas en $t = 1$ hora. Se desea que el paciente entre a la operación con un metabolismo reducido, en la medida de la posible, para que el choque de la anestesia sea también lo menor posible. La forma de controlarlo será la misma vía de tres llaves conectada a las dos bolsas de suero con insulina y glucosa, respectivamente. También, se pretende reducir en lo posible la cantidad administrada de estas sustancias.

Tenemos, por tanto, un problema similar al anterior. La ecuación de estado será la misma que en el ejemplo anterior, (4.1), y el funcional a minimizar será también (4.2). Lo que cambia en este caso es que la condición inicial es $x(0) = 1,5 \text{ mg/cm}^3$ y para el estado final solo sabemos que ocurre en $t = 1$. Al ser un estado final libre, usaremos el corolario 3.16 que nos da la condición de transversalidad

$$\psi(1) = 0. \quad (4.13)$$

Además, al tener el instante final fijado sabemos, por el teorema 3.14, que el hamiltoniano será constante pero no tiene por qué ser cero como sí ocurría en el ejemplo de antes. Se comprobará más adelante.

Al tener la misma ecuación de estado y funcional a minimizar que en el anterior ejemplo, el hamiltoniano y la ecuación de co-estado serán también las mismas. Por tanto, la solución general es exactamente la que se obtuvo en (4.6), (4.7) y (4.8). Lo que será distinto en este ejemplo es el valor de las constantes A y B . Para calcular esos valores, hacemos uso de la condición inicial y la de transversalidad, de tal forma que

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = A \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right) - B \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right), \\ 0 = A e^{\sqrt{3}/2} + B e^{-\sqrt{3}/2}. \end{cases}$$

Para resolverlo, se multiplica la primera ecuación por $2\sqrt{2}e^{-\sqrt{3}/2}$ y se suma a la segunda multiplicada por $(\sqrt{3}+1)$ para así despejar A . Se usa la definición de las funciones hiperbólicas para simplificar la notación en A y, posteriormente, se sustituye en la segunda ecuación para obtener la expresión de B . El resultado es

$$\begin{cases} A = \frac{3e^{-\sqrt{3/2}}}{\sqrt{6} \cosh(\sqrt{3/2}) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{3/2})}, \\ B = -\frac{3e^{\sqrt{3/2}}}{\sqrt{6} \cosh(\sqrt{3/2}) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{3/2})}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Sustituyendo estos valores en (4.8) y agrupando algunos términos, obtenemos que el nivel de glucosa en sangre, para cada instante t , durante la hora en la que se le prepara para la operación, es

$$x^*(t) = \frac{3(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3/2}(t-1)}}{4(\sqrt{3} \cosh(\sqrt{3/2}) + \sinh(\sqrt{3/2}))} + \frac{3(\sqrt{3}+1)e^{\sqrt{3/2}(1-t)}}{4(\sqrt{3} \cosh(\sqrt{3/2}) + \sinh(\sqrt{3/2}))}.$$

De igual manera, operando, se llega a que el control que se debe aplicar es

$$u^*(t) = \frac{3 \left(e^{\sqrt{3/2}(t-1)} - e^{\sqrt{3/2}(1-t)} \right)}{2(\sqrt{6} \cosh(\sqrt{3/2}) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{3/2}))}.$$

Se observa que el término negativo de la expresión del control es el dominante en el intervalo $t \in [0, 1]$ que consideramos. Por tanto, en todo ese intervalo temporal el signo de u será negativo. Esto, como ya se indicó, únicamente ha de interpretarse como que la sustancia que se le introduce al paciente es insulina, y no glucosa, en cantidad igual al valor absoluto de u . Se puede también reescribir el control de forma más compacta como

$$u^*(t) = \frac{3 \sinh(\sqrt{3/2}(t-1))}{\sqrt{6} \cosh(\sqrt{3/2}) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{3/2})}.$$

Se puede calcular que el estado final de glucosa en sangre del paciente, $x^*(1)$, está en torno a los $0,55 \text{ mg/cm}^3$, que es un valor aceptable, aunque ligeramente bajo, para un paciente en ayunas. Es común que este tipo de pacientes estén conectados a una vía durante intervenciones quirúrgicas, por lo que se le podría administrar más glucosa para mantenerlo estable o variar su nivel de glucosa durante la intervención. Se observa también que, debido a la dependencia directa entre u y ψ , $u(1) = 0$. En la figura 4.2 se muestra, en color verde, el nivel de glucosa en sangre del paciente como función del tiempo y, en color rosa, la cantidad de insulina que se le administra en cada instante al paciente.

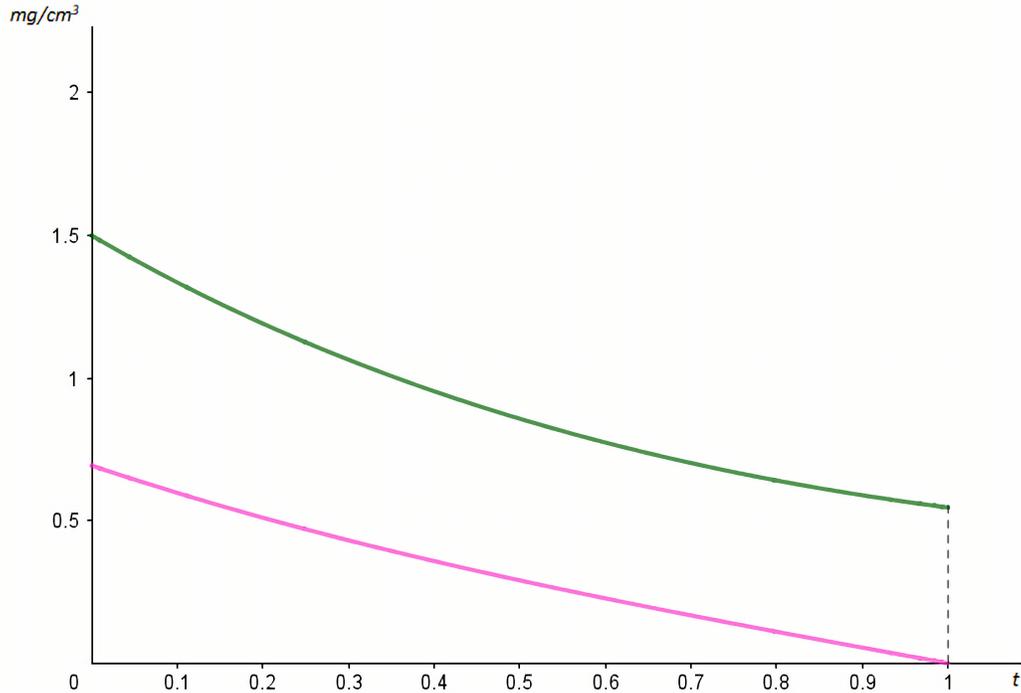


Figura 4.2: Representación del nivel de glucosa en sangre del paciente (verde) y la cantidad de insulina aplicada (rosa) en cada instante

Se puede calcular ahora la expresión del hamiltoniano. Del desarrollo que hicimos en el ejemplo anterior, sabemos que

$$H = \frac{3}{2}AB,$$

por lo que, operando, se tiene

$$H = \frac{-27}{2 \left(\sqrt{6} \cosh(\sqrt{3/2}) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{3/2}) \right)^2}.$$

Teniendo en cuenta que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ y $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$, podemos operar y reescribir el hamiltoniano de este problema de forma más compacta como

$$H = \frac{-27}{12 + 4\sqrt{3} \sinh(\sqrt{6}) + 16 \sinh^2(\sqrt{3/2})}.$$

Se trata de una cantidad no nula tal y como cabía esperar por los teoremas vistos. Se ha visto que, a partir de una ecuación de estado tan sencilla, hemos obtenido una expresión del control ciertamente más complicada. Esto nos da una idea de lo arduos que pueden resultar algunos problemas de control óptimo. Podríamos haber pensado al inicio de este ejemplo que la forma de minimizar, tanto el metabolismo como la cantidad de sustancia aplicada, fuera no inyectando nada al paciente y dejando que el nivel de glucosa descendiera por sí mismo obedeciendo la ecuación de estado. Vemos que esto no es así ya que el control u no es la función nula.

Concluimos así este capítulo que pretende haber ilustrado la forma de abordar un problema de control óptimo mediante la aplicación del principio del máximo de Pontryaguin. Existen más aplicaciones en el campo de la economía o la ingeniería que, como ya se mencionó, se pueden encontrar en [3] y [7]. En general, es común usar estos teoremas para controlar de forma óptima cualquier transición entre dos estados de un sistema que se haya modelizado previamente mediante unas ecuaciones de estado.

5.- Conclusiones del trabajo

El principio del máximo de Pontryaguin visto en este trabajo es una herramienta muy útil en el tratamiento de sistemas dinámicos. La optimización de recursos o tiempo es algo que siempre ha interesado al ser humano y que tiene grandes proyecciones de futuro debido a la cantidad de casos en los que se puede aplicar. Es precisamente el principio del máximo, recogido en los teoremas del trabajo para distintas situaciones, el que nos indica una camino para abordar estos problemas de optimización. La importancia práctica del resultado reside en la mayor facilidad que reporta el tener que maximizar una función escalar, el hamiltoniano, en vez de minimizar un funcional de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales con ciertas restricciones. Es preciso mencionar que, aunque en todo momento nos hemos referido a la minimización de un funcional, el caso de la maximización sería análogo ya que se corresponde con la minimización del funcional opuesto al que se pretende maximizar.

Es conveniente remarcar que este principio aporta condiciones necesarias para el control óptimo. Esto supone asumir su existencia. Algo que, en ocasiones, puede no ser cierto. Entre otras cosas, sería necesario que, al menos, existiera un control capaz de llevar el sistema desde el estado inicial al final. El estudio de la existencia de controles óptimos es una tema que ha sido tratado durante los últimos años y en el que se han desarrollado diversos resultados. Éstos, en su mayoría, se centran en la topología del conjunto de controles admisibles y también en la forma del funcional que se pretende minimizar durante la transición entre estados. Un ejemplo de sistemas en los que se tiene asegurada la existencia de un control óptimo es en aquellos gobernados por ecuaciones de estado lineales y que se pretenden controlar en un tiempo óptimo.

Además, las condiciones que nos da el principio del máximo son necesarias. Se trata de una situación análoga a la ecuación de Euler-Lagrange que se obtiene en cálculo variacional. En algunos casos, la expresión del control obtenida imponiendo que éste verifique esas condiciones es la del control óptimo. Sin embargo, no se puede asegurar que esto sea siempre así. En otros casos, será necesario hacer un estudio más exhaustivo de los posibles controles ya que, el hecho de que un control verifique las condiciones dadas por el principio del máximo, no implica que sea el óptimo. El tema de la búsqueda de condiciones suficientes, para asegurar

el carácter óptimo de un control, ha generado también bastante bibliografía. El estudio de la convexidad de los funcionales a minimizar o el uso de técnicas de análisis funcional, entre otras cosas, son claves a la hora de encontrar este tipo de condiciones. En el ejemplo de sistemas lineales controlables en tiempo óptimo, se podría ver que las condiciones necesarias para el control son también suficientes.

Es importante hacer hincapié en que el resultado obtenido es local. En ningún momento se ha dado una condición global para el carácter óptimo del control. En la propia demostración se puede observar que se parte de un control óptimo y se suponen pequeñas variaciones respecto del mismo. También, se han realizado aproximaciones de primer orden a lo largo de la demostración como, por ejemplo, para el conjunto de puntos finales correspondientes a controles perturbados. Estas aproximaciones utilizadas se ven avaladas por la validez del resultado y su observación en la vida real.

El enunciado del teorema clave del trabajo se ha hecho para la situación en la que hay dos ecuaciones de estado y una única función real de control. Esta situación es la más común e incluye a sistemas con una sola ecuación de estado, tal y como se ha visto en las aplicaciones. No obstante, se podría generalizar para más dimensiones, tanto de ecuaciones de estado como de funciones de control. Se observa que determinados argumentos geométricos que se han utilizado durante la demostración serían algo menos intuitivos para el caso de más dimensiones. No obstante, sería posible su generalización.

A lo largo de este trabajo he podido familiarizarme con la teoría de control, una rama de las matemáticas relativamente nueva y con enorme potencial. Esta teoría se puede ver como un paso más allá de la optimización de funciones en una o varias variables y el cálculo variacional, temas que ya se han tratado en otras asignaturas del grado. En este trabajo se pretende haber dado una demostración completa y asequible al lector de uno de los resultados más importantes de esta teoría.

Por último, me gustaría indicar que en los ejemplos mostrados se ha pretendido que las cifras relativas a los niveles de glucosa de pacientes con diabetes y los tiempos utilizados fueran fidedignos con la realidad. Es común utilizar otras unidades, como el mg/dL , y otros modelos más complejos para estudiar en detalle la evolución de los niveles de glucosa e insulina en pacientes con diabetes. Se ha pretendido que los modelos utilizados ilustraran situaciones reales en las que aplicar el principio del máximo de Pontryaguin.

6.- Bibliografía

- [1] Alonso Cisneros, I. & Fernández Fernández, L.A., *Modelos matemáticos para la diabetes*, Trabajo fin de grado de la Universidad de Cantabria, 2014.
- [2] Cano Urdiales, B., *Apuntes de la asignatura Métodos Variacionales en Matemática Aplicada*, Universidad de Valladolid, 2020.
- [3] Leonard, D. & Van Long, N., *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press, 1992.
- [4] Liberzon, D., *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Princeton University Press, 2011.
- [5] Muscat, J., *Lectures on Calculus of Variations*, University of Malta, 2010.
- [6] Pinch, E.R., *Optimal Control and the Calculus of Variations*, Oxford University Press, New York, 1993.
- [7] Sethi, S.P., *Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics*, Springer, 3rd Edition, 2019.