

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

FACULTAD DE CIENCIAS

**Trabajo de Fin de Grado**

GRADO EN FÍSICA

**Aproximación a los grupos de Lie en  
física a través de un hamiltoniano de  
tipo Pöschl-Teller**

**Autor: Rodrigo San José Rubio**

**Tutor: Javier Negro Vadillo**



## Abstract

The aim of this project is to make an introduction to Lie groups in physics via a specific example: a Pöschl-Teller Hamiltonian. We introduce the definitions and mathematical concepts necessary to deal with the classical Lie groups, and we carry out a detailed study of the rotation groups  $SO(2)$ ,  $SO(3)$ , and  $SO(4)$ , as well as of their Lie algebras and their relation to the Lie algebra  $\mathfrak{su}(2)$ . We also present different representations of these groups and algebras. Subsequently, we analyze the Pöschl-Teller Hamiltonian and find two standard factorizations, which we relate to the representations obtained previously. Finally, we include illustrative point graphs of the representations that we are considering for the Pöschl-Teller Hamiltonian. The result found is that a representation of  $\mathfrak{so}(4)$  is obtained as a direct sum  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$  from the factorization of the Pöschl-Teller Hamiltonian, and this representation is not the standard representation of  $\mathfrak{so}(4)$ , but can be identified with a representation of  $\mathfrak{so}(4)$  on the sphere  $S^3$  via Hopf coordinates.

## Resumen

El objetivo de este trabajo es hacer una introducción a los grupos de Lie en física a través de un ejemplo concreto: un hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller. Introducimos las definiciones y conceptos matemáticos necesarios para tratar con los grupos de Lie clásicos, y realizamos un estudio detallado de los grupos de rotaciones  $SO(2)$ ,  $SO(3)$ , y  $SO(4)$ , así como de sus álgebras de Lie y la relación de estas con el álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ . También presentamos distintas representaciones de estos grupos y álgebras. Posteriormente, analizamos el hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller y encontramos dos factorizaciones estándar, que relacionamos con las representaciones obtenidas anteriormente. Finalmente, incluimos gráficos de puntos ilustrativos de las representaciones que estamos considerando para el hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller. El resultado que se encuentra es que se obtiene una representación de  $\mathfrak{so}(4)$  como suma directa  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$  a partir de la factorización del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller, y esta representación no es la estándar de  $\mathfrak{so}(4)$ , pero se puede identificar con una representación de  $\mathfrak{so}(4)$  sobre la esfera  $S^3$  a través de las coordenadas de Hopf.



# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grupos de Lie</b>	<b>5</b>
2.1	Introducción . . . . .	5
2.2	Álgebras de Lie y matriz exponencial . . . . .	6
2.3	Representaciones . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Grupos de rotaciones</b>	<b>11</b>
3.1	El grupo de rotaciones $SO(2)$ . . . . .	11
3.2	El grupo de rotaciones $SO(3)$ . . . . .	13
3.2.1	Relación entre $SO(3)$ y $SU(2)$ . . . . .	16
3.2.2	Representaciones habituales de $\mathfrak{su}(2)$ . . . . .	17
3.2.3	Representaciones de $\mathfrak{su}(2)$ sobre la esfera $S^3$ . . . . .	18
3.3	El grupo de rotaciones $SO(4)$ . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Factorizaciones estándar del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller en 1D</b>	<b>30</b>
4.1	Primer conjunto de “shift operators”, $M^\pm$ . . . . .	30
4.2	El segundo conjunto de “shift operators”, $N^\pm$ . . . . .	34
4.3	Estados fundamentales “highest weights” . . . . .	37
4.4	Relación con las representaciones de $\mathfrak{so}(4)$ . . . . .	40
4.5	Relación entre las dos representaciones de $\mathfrak{so}(4)$ que hemos obtenido . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>El grupo de rotaciones <math>SO(3)</math></b>	<b>44</b>
A.1	Cambio de coordenadas en la representación diferencial sobre $S^3$ . . . . .	44
A.2	Cálculo de la métrica y el elemento de volumen en las coordenadas $\theta, \zeta$ y $\eta$ de $S^3$ . . . . .	45
A.3	Comprobación de antihermiticidad del operador $\hat{X}_1$ . . . . .	46
<b>B</b>	<b>El grupo de rotaciones <math>SO(4)</math></b>	<b>47</b>
B.1	Cálculo de operadores conjugados hermíticos. . . . .	47
B.2	Soluciones de la ecuación (3.91) . . . . .	48
<b>C</b>	<b>Factorizaciones estándar del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller en 1D</b>	<b>50</b>
C.1	Cálculo de conmutadores de las factorizaciones . . . . .	50
C.2	Relación de las representaciones de $\mathfrak{so}(4)$ con el hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller . . . . .	51
C.3	Relación entre los operadores $\hat{X}, \hat{Y}$ y $\tilde{M}, \tilde{N}$ . . . . .	53



## Índice de figuras

1	Coordenadas polares. . . . .	13
2	Coordenadas esféricas. . . . .	15
3	Gráficas del potencial de tipo Pöschl-Teller para distintos valores de los parámetros $\alpha$ y $\beta$ . . . . .	30
4	Gráficas de las autofunciones para distintos valores de los parámetros $n$ , $\alpha$ y $\beta$ . . . . .	33
5	Gráfica de la acción de los operadores $\tilde{M}^\pm \equiv M^\pm$ y $\tilde{N}^\pm \equiv N^\pm$ en el plano $\alpha - \beta$ . . . . .	37
6	Diagramas de las bases de estados independientes con energía $E_n = (n+1)^2$ de representaciones impares. . . . .	38
7	Diagramas de las bases de estados independientes con energía $E_n = (n+1)^2$ de representaciones pares. . . . .	39
8	Diagramas tridimensionales de las bases de estados independientes de representaciones pares y de la serie completa, respectivamente. . . . .	39



# 1 Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar los grupos de Lie en física. Para ello utilizamos un hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller. Veremos que obtenemos de manera natural representaciones del álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  y  $\mathfrak{so}(4)$  a través de ciertos operadores relacionados con este hamiltoniano y hallaremos la relación que tienen con las representaciones que mostraremos al realizar el estudio de los grupos de rotaciones. Las referencias que utilizaremos serán, principalmente, [1], [4] y [7] para el estudio de los grupos de Lie, y [2] para el estudio del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller.

Muchos sistemas estudiados en física muestran alguna forma de simetría. En física, esto significa lo siguiente: podemos considerar una regla de transformación, como una rotación, un desplazamiento o una reflexión, y comparar el sistema original con el transformado. Si se mantiene alguna similitud, entonces hablamos de una simetría. Por ejemplo, podemos tener geometrías que no varíen al realizar una determinada transformación, o sistemas que bajo el intercambio de partículas tampoco cambien (por ejemplo, si son indistinguibles). Por otro lado, es claro que si un sistema es similar, en cierto sentido, a otro, y este último a su vez es similar a un tercero, en el mismo sentido, entonces también serán similares el primero con el tercero, en el sentido que se esté hablando. Con esto lo que estamos observando es que el producto de dos transformaciones de simetría es, de nuevo, una transformación de simetría. Por tanto, tenemos que las transformaciones de simetría forman un grupo. Esto ya es conocido en ejemplos como las rotaciones en 3 dimensiones o las reflexiones respecto a un plano. A los grupos con un número finito de elementos los llamamos grupos *discretos*, y los que dependen de manera continua de un conjunto de parámetros los llamamos grupos *continuos*.

Las simetrías de un sistema implican ciertas relaciones entre las cantidades observables, que se pueden obedecer con gran precisión, como la degeneración de la energía en el átomo de hidrógeno debido a la invariancia rotacional del sistema. Pero en muchos otros sistemas en la naturaleza la simetría se cumple solo de manera aproximada. Por ejemplo, un cristal infinito es invariante bajo traslaciones cuyo desplazamiento sea un múltiplo entero de la distancia entre átomos adyacentes. Sin embargo, un cristal real tiene un tamaño limitado, por lo que las superficies que lo delimitan perturban la simetría traslacional. A pesar de lo anterior, si el cristal contiene una cantidad suficientemente grande de átomos, la perturbación debida a la superficie tendrá pocos efectos en las propiedades en el interior.

Es por estos, y muchos otros motivos, que el estudio de la teoría de grupos en física cobra sentido y es de interés.

Por otro lado, un tema que suele ir ligado al estudio de los grupos en física es el de las representaciones. Una representación se puede ver como la acción de un grupo en un espacio vectorial. Estas acciones (representaciones) surgen de manera natural en muchas ramas de la física y las matemáticas, y ahí reside su interés.

Un ejemplo típico sería una ecuación diferencial en el espacio tridimensional que tenga simetría de rotación. En este caso, el espacio de soluciones será invariante bajo rotaciones. Por tanto, el espacio de soluciones constituirá una representación del grupo de rotaciones  $SO(3)$ . Si uno conoce cuáles son las representaciones de este grupo, entonces eso puede ayu-

dar notablemente a reducir el número de posibilidades que hay para el espacio de soluciones.

En la sección 2 nos centraremos precisamente en introducir los conceptos relacionados con teoría de grupos y representaciones que vamos a necesitar posteriormente. Damos las definiciones de los conceptos que necesitaremos más adelante, pero sin entrar en demasiados detalles matemáticos.

La sección 3 está dedicada al estudio de los grupos de rotaciones en física, en concreto  $SO(2)$ ,  $SO(3)$  y  $SO(4)$ , pues son los que aparecerán explícitamente en el desarrollo posterior. En este estudio se encontrarán muchos de los aspectos introducidos previamente sobre grupos y álgebras de Lie y representaciones de manera explícita, de modo que también sirven a modo de ejemplo. En este recorrido por los grupos  $SO(n)$  presentamos algunas aspectos que no se han visto antes, como es la representación de  $\mathfrak{so}(4)$  a través de  $\mathfrak{su}(2)$  en la esfera  $S^3$  utilizando las llamadas coordenadas de Hopf y su relación con los sistemas de tipo Pöschl-Teller (que se ve en la siguiente sección). Además, esto se puede extender a  $\mathfrak{so}(2n)$  y  $\mathfrak{su}(n)$ .

En la sección 4 estudiamos dos factorizaciones del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller. Obtenemos dos representaciones del álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  a partir de los operadores definidos en esas factorizaciones, y también una representación del álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(4)$  como suma directa de las anteriores. Estudiamos la relación de la representación obtenida con las calculadas anteriormente en el estudio del grupo  $SO(4)$ . También aprovechamos para introducir un tipo de diagrama de puntos para las representaciones obtenidas que es habitual en este contexto y sirve para visualizar mejor la construcción de estas representaciones.

Finalmente, incluimos al final una serie de apéndices, destinados a facilitar la lectura de la memoria, ya que incluyen aspectos, generalmente cálculos, que pueden resultar largos y no aportan demasiado desde el punto de vista conceptual.

## 2 Grupos de Lie

### 2.1 Introducción

En esta introducción hablaremos sobre los conceptos básicos necesarios sobre grupos para el resto del trabajo, pero no entraremos en demasiados detalles matemáticos ya que no es ese el objetivo. Como referencias utilizaremos [4] para los resultados matemáticos y definiciones de esta sección introductoria, la de álgebras de Lie y matriz exponencial, y la de representaciones, y ocasionalmente utilizaremos también [6] y [7].

**Definición 2.1.** Un conjunto  $G$  se dice que es un *grupo* si tiene una operación  $\cdot$  que asocia a un par (ordenado) de elementos  $a, b \in G$  su *producto*  $a \cdot b$ , que también es un elemento de  $G$ , y de manera que se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) La operación  $\cdot$  es *asociativa*:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ , para todo  $a, b, c \in G$ ;
- (ii) Existe un elemento  $e \in G$ , llamado elemento *identidad*, que tiene la propiedad de que  $a \cdot e = a$  para todo  $a \in G$ ;
- (iii) Para cada  $a \in G$ , existe un elemento  $a^{-1} \in G$ , llamado el *inverso* de  $a$ , que tiene la propiedad de que  $a \cdot a^{-1} = e$ .

En particular, estamos interesados en los grupos de Lie. La definición general involucra variedades diferenciables, pero los grupos de Lie clásicos se pueden ver como grupos de matrices. Esto es una simplificación apreciable, pero va a ser suficiente para nuestros propósitos considerar únicamente los grupos de Lie matriciales.

Denotamos por  $GL(n, \mathbb{R})$  al grupo de las matrices  $n \times n$  invertibles con entradas en  $\mathbb{R}$ . De igual manera, denotamos  $GL(n, \mathbb{C})$  al grupo de las matrices invertibles con entradas en  $\mathbb{C}$ . El espacio completo de las matrices  $n \times n$  con entradas en  $\mathbb{C}$  se denota  $M_n(\mathbb{C})$ .

**Definición 2.2.** Diremos que una sucesión de matrices  $A_m \in M_n(\mathbb{C})$  *converge* a una matriz  $A$  si cada entrada de  $A_m$  converge a la entrada correspondiente de  $A$ .

**Definición 2.3.** Un *grupo de Lie matricial* es un subgrupo cerrado de  $GL(n, \mathbb{C})$ .

La propiedad de ser cerrado viene definida a partir del criterio secuencial con la convergencia definida en 2.2: un subgrupo  $G$  de  $GL(n, \mathbb{C})$  es cerrado si para cualquier sucesión  $A_m \in G$  que converge a una matriz  $A$ , se tiene que  $A \in G$ , o  $A$  no es invertible.

**Ejemplo 2.4.** Como ejemplos, los propios  $GL(n, \mathbb{R})$  y  $GL(n, \mathbb{C})$  son grupos de Lie matriciales. También lo son  $SL(n, \mathbb{R})$  y  $SL(n, \mathbb{C})$ , que son los subgrupos de matrices de los grupos anteriores con determinante uno. Más adelante veremos varios más, en concreto los grupos  $SO(n)$ , que tienen bastante interés en física.

El conjunto  $M_n(\mathbb{C})$  de todas las matrices  $n \times n$  complejas se puede ver como  $\mathbb{C}^{n^2}$ , identificando las entradas de las matrices con las coordenadas de los puntos.

**Definición 2.5.** Un grupo de Lie matricial  $G$  se dice que es *compacto* si lo es en  $\mathbb{C}^{n^2}$ , lo cual es equivalente a que sea cerrado y acotado en  $\mathbb{C}^{n^2}$ .

La definición es equivalente a que cualquier sucesión  $A_m \in G$  convergente converge a una matriz  $A$  que está en  $G$  y que existe una constante  $C$  tal que para todo  $A \in G$ ,  $|A_{ij}| \leq C$  para todo  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Ejemplo 2.6.** Los grupos  $O(n)$  (matrices ortogonales  $n \times n$ ) y  $SO(n)$  (subgrupo de matrices de  $O(n)$  con determinante 1) son compactos, ya que las propiedades de ortogonalidad y de tener determinante 1 se conservan en el límite, y además tienen columnas de norma 1, por lo que  $|A_{ij}| \leq 1$  para todo  $1 \leq i, j \leq n$ .

Los grupos  $GL(n, \mathbb{R})$  y  $GL(n, \mathbb{C})$  no son compactos, porque el límite de matrices invertibles puede no ser invertible. Los grupos  $SL(n, \mathbb{R})$  y  $SL(n, \mathbb{C})$  tampoco son compactos, ya que la matriz diagonal  $A_m$  con diagonal  $(m, 1/m, 1, \dots, 1)$  tiene determinante 1 pero tiene una entrada arbitrariamente grande.

**Definición 2.7.** Un grupo de Lie matricial  $G$  se dice que es *conexo* si dadas dos matrices  $A, B \in G$ , existe un camino continuo  $A(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , en  $G$  con  $A(a) = A$  y  $A(b) = B$ .

En realidad esta es la propiedad de *conexo por caminos*, pero se puede ver (en [4], página 12) que un grupo de Lie matricial es conexo si y solo si es conexo por caminos.

**Ejemplo 2.8.** Tenemos que  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $SO(n)$ ,  $U(n)$  (matrices  $n \times n$  unitarias) y  $SU(n)$  (subgrupo del anterior de matrices unitarias con determinante 1) son conexos para todo  $n \geq 1$ . El grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  no es conexo, ya que cualquier camino que conecte dos matrices con determinante de distinto signo ha de pasar por una de determinante 0, que no está en el grupo. De hecho, tiene dos componentes conexas, las matrices  $n \times n$  con determinante positivo y las matrices  $n \times n$  con determinante negativo.

**Definición 2.9.** Un grupo de Lie matricial se dice que es *simplemente conexo* si es conexo y, además, cualquier lazo en  $G$  (un camino que empieza y acaba en la misma matriz) se puede contraer continuamente a un punto de  $G$  (una matriz).

Como veremos más adelante, esta es una de las propiedades más importantes.

**Ejemplo 2.10.** Tenemos que  $SL(n, \mathbb{C})$  y  $SU(n)$  son simplemente conexos. Por otro lado, aunque  $SO(n)$  es conexo, no es simplemente conexo.

**Definición 2.11.** Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie matriciales. Una aplicación  $\Phi$  de  $G$  en  $H$  se llama un *homomorfismo de grupos de Lie*, o simplemente homomorfismo si no hay lugar a confusión, si (1)  $\Phi$  es un homomorfismo de grupos (preserva las operaciones de grupo) y (2)  $\Phi$  es continua. Si, además,  $\Phi$  es inyectiva, sobreyectiva y la aplicación inversa  $\Phi^{-1}$  es continua, entonces  $\Phi$  es un isomorfismo de grupos de Lie.

## 2.2 Álgebras de Lie y matriz exponencial

Sea  $X$  una matriz  $n \times n$  real o compleja, denotamos a la matriz exponencial por  $e^X$  o  $\exp(X)$ , y la definimos de la manera habitual:

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}. \quad (2.1)$$

Esta serie converge para cualquier matriz  $n \times n$  real o compleja, y de hecho la matriz exponencial  $e^X$  es una función continua de  $X$ . La exponencial así definida cumple una serie de propiedades que iremos mencionando cuando las necesitemos. De momento, mencionamos que se tiene que (ver [4, Prop. 2.4])

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX} = e^{tX}X, \quad \left. \frac{d}{dt}e^{tX} \right|_{t=0} = X. \quad (2.2)$$

**Definición 2.12.** Una función  $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$  se llama un *subgrupo uniparamétrico* de  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  si

- (i)  $A$  es continua,
- (ii)  $A(0) = I$ ,
- (iii)  $A(t + s) = A(t)A(s)$  para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.13** ([4, Thm. 2.13]). *Si  $A$  es un subgrupo uniparamétrico de  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ , entonces existe una única matriz compleja  $X$   $n \times n$  tal que*

$$A(t) = e^{tX}. \quad (2.3)$$

**Ejemplo 2.14.** Veremos que  $\text{SO}(2)$  se puede generar de esta manera, y que en  $\text{SO}(n)$  para  $n > 2$  podemos encontrar subgrupos uniparamétricos que son esencialmente como  $\text{SO}(2)$ .

Ahora procedemos a definir lo que es un álgebra de Lie, que será una herramienta indispensable en el estudio de los grupos de Lie matriciales. Por un lado, las álgebras de Lie son más sencillas que los grupos de Lie matriciales porque van a ser espacios vectoriales (podremos utilizar álgebra lineal). Por otro lado, el álgebra de Lie contiene bastante información sobre el grupo de Lie matricial, así que muchas cuestiones sobre grupos de Lie matriciales se pueden responder considerando problemas similares, pero más sencillos, sobre las álgebras de Lie.

**Definición 2.15.** Sea  $G$  un grupo de Lie matricial. El *álgebra de Lie* de  $G$ , denotada por  $\mathfrak{g}$ , es el conjunto de todas las matrices  $X$  tales que  $e^{tX}$  está en  $G$  para cualquier número real  $t$ .

Esto significa que  $X$  está en  $\mathfrak{g}$  si y solo si el subgrupo uniparamétrico generado por  $X$  está en  $G$ . Por otro lado, es habitual considerar  $e^{-itX}$  o  $e^{itX}$  en vez de  $e^{tX}$ , pero vemos que esto solo nos cambia  $X$  en un factor  $i$  o  $-i$ .

**Ejemplo 2.16.** Si  $X$  es cualquier matriz compleja  $n \times n$ ,  $e^{tX}$  es invertible. Por tanto, el álgebra de Lie de  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  es el espacio de todas las matrices complejas  $n \times n$ . Este álgebra de Lie se denota  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Por otro lado, se puede ver (en [4], página 39) que el álgebra de Lie de  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  es el espacio de todas las matrices reales  $n \times n$  y lo denotamos por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ .

La definición que hemos dado es para álgebras de Lie asociadas a grupos de Lie matriciales, pero existe una definición general, no necesariamente asociada a un grupo de Lie, que también satisfacen las álgebras de Lie definidas de la manera anterior (siendo  $[X, Y] = XY - YX$  el conmutador con el producto matricial):

**Definición 2.17.** Un álgebra de Lie finito-dimensional real o compleja es un espacio vectorial finito-dimensional real o complejo  $\mathfrak{g}$ , junto con una aplicación  $[\cdot, \cdot]$  de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{g}$  con las siguientes propiedades:

- (i)  $[\cdot, \cdot]$  es bilineal,
- (ii)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- (iii)  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

La condición (ii) es la condición de antisimetría, y la condición (iii) se llama *identidad de Jacobi*.

**Definición 2.18.** Si  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  son álgebras de Lie, entonces una aplicación lineal  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  se llama un *homomorfismo de álgebras de Lie* si  $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Si además se tiene que  $\phi$  es inyectiva y sobreyectiva, entonces  $\phi$  se llama un *isomorfismo de álgebras de Lie*.

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie finito-dimensional, y sea  $X_1, \dots, X_n$  una base de  $\mathfrak{g}$  (como espacio vectorial). Entonces, para cada  $i$  y  $j$ ,  $[X_i, X_j]$  se puede escribir de manera única de la forma

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ijk} X_k. \quad (2.4)$$

Las constantes  $c_{ijk}$  se llaman *constantes de estructura* de  $\mathfrak{g}$  (respecto a la base elegida). Puesto que estas constantes determinan la operación del corchete en  $\mathfrak{g}$ , será de gran interés calcularlas en los casos concretos que veremos más adelante. Debido a la condición de antisimetría y a la identidad de Jacobi, las constantes de estructura satisfacen automáticamente las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} c_{ijk} + c_{jik} &= 0, \\ \sum_m (c_{ijm} c_{mkl} + c_{jkm} c_{mil} + c_{kim} c_{mjl}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

para todo  $i, j, k, l$ .

Vamos a definir un tipo especial de base de un álgebra de Lie que resulta especialmente útil:

**Definición 2.19.** Llamaremos a un conjunto de generadores  $\{M_1, \dots, M_t; M_1^+, M_1^-, \dots, M_t^+, M_t^-\}$  de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  una *base de Cartan-Weyl* si se cumplen las siguientes condiciones para cada  $i, j = 1, \dots, t$ :

- (i)  $[M_i, M_j] = 0$ ,
- (ii)  $[M_i, M_i^\pm] = \pm M_i^\pm$ ,
- (iii)  $[M_i^-, M_i^+] = \alpha^i M_i$  donde  $\alpha^i \neq 0$ ,
- (iv)  $[M_i^\pm, M_j^\pm] = 0$ .

La definición se puede hacer con mayor generalidad (por ejemplo, ver [1, Ecuación (5.129)]), pero para nuestros propósitos bastará con enunciarla en estos términos. Vemos que  $M_i^\pm$  son operadores de subida y bajada respectivamente, y son, en cierto sentido, “autovectores” de  $M_i$ , ya que considerando el corchete como un producto tenemos que

$$M_i * M_i^\pm = [M_i, M_i^\pm] = \pm M_i^\pm. \quad (2.6)$$

Al número máximo de operadores diagonales en la base de Cartan-Weyl lo llamamos *rango* del álgebra de Lie en cuestión.

En su momento destacamos que la propiedad de ser simplemente conexo tenía bastante importancia en este contexto, y ahora veremos el porqué. Damos la siguiente definición sin entrar en demasiados detalles para evitar desviarnos demasiado:

**Definición 2.20.** Sea  $G$  un grupo de Lie conexo. Llamamos *recubridor universal* de  $G$  al único grupo simplemente conexo  $\tilde{G}$  tal que el álgebra de Lie de  $\tilde{G}$  es igual al álgebra de Lie de  $G$ .

En este caso, la unicidad e igualdad se entienden salvo isomorfismo. Aunque está implícito en la definición, recalcamos que el recubridor universal es único, y además dado un grupo de Lie conexo siempre existe un recubridor universal. En los casos particulares de grupos de Lie que veremos más adelante encontraremos ejemplos de recubridores universales, en concreto, el ejemplo más habitual es  $SU(2)$ , que es el recubridor universal de  $SO(3)$ .

## 2.3 Representaciones

**Definición 2.21.** Sea  $G$  un grupo de Lie matricial. Una *representación* es un morfismo de grupos de Lie

$$\Pi : G \rightarrow GL(V), \quad (2.7)$$

donde  $V$  es un espacio vectorial finito-dimensional complejo o real. Si  $\Pi$  es inyectiva, decimos que la representación es *fiel*.

$GL(V)$  es el grupo de los automorfismos del espacio vectorial  $V$ . Como nos restringimos a espacios de dimensión finita, consideraremos habitualmente representaciones matriciales que van a  $GL(n, \mathbb{C})$  en vez de a  $GL(V)$ . La dimensión de la representación será la dimensión de  $V$ . Se puede definir también de manera análoga lo que es la representación de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  como un morfismo de álgebras de Lie de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{gl}(V)$ , siendo  $V$  un espacio vectorial complejo o real (también se puede considerar que va a  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ).

**Definición 2.22.** Dos representaciones  $(\Pi, V)$  y  $(\Pi', V')$  son *equivalentes* si existe un isomorfismo  $\phi : V' \rightarrow V$  tal que  $\Pi'(g) = \phi^{-1}\Pi(g)\phi$  para todo  $g \in G$ .

En general consideraremos dos representaciones equivalentes como si fueran la misma.

**Definición 2.23.** Sea  $\Pi$  una representación de un grupo de Lie matricial  $G$ . Un subespacio  $W$  de  $V$  se dice que es *invariante* si  $\Pi(g)w \in W$  para todo  $w \in W$  y todo  $g \in G$ . Un subespacio invariante  $W$  se dice que es *no trivial* si  $W \neq \{0\}$  y  $W \neq V$ . Una representación sin subespacios invariantes no triviales se llama *irreducible*.

En muchas situaciones en física solo nos interesan representaciones de un tipo especial, en particular suele ser habitual buscar representaciones unitarias (por ejemplo, son las que conservan la probabilidad en física cuántica).

**Definición 2.24.** Sea  $V$  un espacio de Hilbert (ahora tenemos producto interno). Una representación  $\Pi$  es *unitaria* si  $\Pi$  es un homomorfismo de  $G$  en  $\mathcal{U}(V)$ , el grupo de todos los operadores unitarios de  $V$ .

En el caso de representaciones matriciales,  $\Pi$  va de  $G$  en  $U(n)$ , el grupo de matrices unitarias  $n \times n$  con coeficientes complejos.

**Ejemplo 2.25.** Un grupo de Lie matricial  $G$  es, por definición, un subconjunto de  $GL(n, \mathbb{C})$ . La aplicación inclusión de  $G$  en  $GL(n, \mathbb{C})$  es una representación de  $G$ , que es la que llamamos *representación estándar*.

Por otro lado, bajo el título de *momento angular* se encuentra en cualquier libro de física cuántica (por ejemplo [3]) el computo de las representaciones irreducibles de  $\mathfrak{su}(2)$  (el álgebra de Lie de  $SU(2)$  y  $SO(3)$ ), que resulta en la habitual clasificación en términos de los números cuánticos  $l$  y  $m$ .

Una manera de generar representaciones es combinando representaciones que sean conocidas de alguna manera. La primera de ellas es mediante la suma directa:

**Definición 2.26.** Sea  $G$  un grupo de Lie matricial y sean  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$  representaciones de  $G$  actuando sobre los espacios vectoriales  $V_1, V_2, \dots, V_m$ . Entonces la *suma directa* de  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$  es una representación  $\Pi_1 \oplus \dots \oplus \Pi_m$  de  $G$  actuando sobre el espacio  $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  definida por

$$[\Pi_1 \oplus \dots \oplus \Pi_m(g)](v_1, \dots, v_m) = (\Pi_1(g)v_1, \dots, \Pi_m(g)v_m) \quad (2.8)$$

para todo  $g \in G$ .

Otra posibilidad es mediante el producto tensorial:

**Definición 2.27.** Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie matriciales. Sea  $\Pi_1$  una representación de  $G$  actuando en un espacio vectorial  $U$  y sea  $\Pi_2$  una representación de  $H$  actuando en un espacio vectorial  $V$ . Entonces, el *producto tensorial* de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  es una representación  $\Pi_1 \otimes \Pi_2$  de  $G \times H$  actuando sobre  $U \otimes V$  definida por

$$\Pi_1 \otimes \Pi_2(g, h) = \Pi_1(g) \otimes \Pi_2(h) \quad (2.9)$$

para todo  $g \in G$  y  $h \in H$ .

Ambos procesos se pueden hacer también para representaciones de álgebras de Lie. Para la suma es completamente análogo, pero para el producto hay que definirlo de la manera siguiente:

$$\pi_1 \otimes \pi_2(X, Y) = \pi_1(X) \otimes I + I \otimes \pi_2(Y) \quad (2.10)$$

para  $X \in \mathfrak{g}$  (álgebra cuya representación es  $\pi_1$ ) e  $Y \in \mathfrak{h}$  (el otro álgebra).

### 3 Grupos de rotaciones

En esta sección vamos a realizar un estudio de las propiedades y características de los grupos  $SO(2)$ ,  $SO(3)$ ,  $SO(4)$  y  $SU(2)$ , ya que son los grupos de interés para la parte siguiente sobre el hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller. Como referencias utilizaremos principalmente [1], [6] y [7].

#### 3.1 El grupo de rotaciones $SO(2)$

La notación  $SO(n)$  viene de Special Orthogonal, significando lo primero que tratamos con matrices de determinante 1, y lo segundo que son, además, ortogonales ( $MM^t = I$ ). La condición de ortogonalidad hace que el producto euclídeo se conserve: dados  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  y  $M$  ortogonal, se tiene que  $M\vec{x} \cdot M\vec{y} = (M\vec{x})^t(M\vec{y}) = \vec{x}^t\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$ . Por otro lado, la condición de ortogonalidad  $M^tM = I$  implica que  $|M|^2 = 1$ , por lo que  $|M| = \pm 1$ . Al imponer la condición de que el determinante sea 1, nos estamos quedando con un subgrupo del grupo  $O(n)$ , las matrices ortogonales.

Ahora nos restringimos al grupo  $SO(2)$ . Si imponemos las condiciones de determinante igual a 1 y ortogonalidad a una matriz genérica  $2 \times 2$ , se llega a que se pueden parametrizar todas las matrices de  $SO(2)$  de la siguiente manera:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

También se puede llegar a esta parametrización simplemente analizando las rotaciones en dos dimensiones y hallando la matriz del cambio de base. En este caso, y en las discusiones posteriores, la parametrización no es única, pero diremos que una parametrización es *natural* si cumple que  $R(\phi_1)R(\phi_2) = R(\phi_1 + \phi_2)$  y  $R(0) = I$  (conviene recordar la definición de subgrupo uniparamétrico 2.12). Para la parametrización anterior es inmediato comprobar que se verifica dicha igualdad.

A partir de la parametrización podemos definir los generadores infinitesimales. Para ello, consideramos una rotación infinitesimal, lo que se traduce en este caso en considerar el desarrollo de Taylor hasta primer orden:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{pmatrix} + O(\phi^2) = I + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi + O(\phi^2). \quad (3.2)$$

Hacemos el desarrollo en torno a  $\phi = 0$  ya que  $R(0) = I$  es el elemento neutro del grupo. Denotamos al generador infinitesimal

$$L = \left. \frac{dR(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Por otro lado, podemos recuperar la rotación a partir del generador mediante la exponen-

ciación:

$$e^{\phi L} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} L^n = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Aprovechamos ahora para definir algunas notaciones que nos serán útiles más adelante. Llamaremos  $E_{ij}$  a la matriz con un 1 en la posición  $(i, j)$  y ceros en el resto (la dimensión se entiende por el contexto). Por otro lado, denotamos por  $L_{ij}$  al generador de las rotaciones en el plano formado por  $x_i, x_j$ . Para ver el signo, establecemos que  $L_{ij} = -E_{ij} + E_{ji}$ . Por ejemplo, en el caso que estamos tratando ahora solo tenemos rotaciones en el plano formado por  $x_1, x_2$ , por lo que  $L = L_{12} = -E_{12} + E_{21}$ .

Hasta ahora hemos considerado la representación matricial del grupo. Pero la acción del grupo la podemos ver también sobre el dual de  $\mathbb{R}^2$ , es decir, sobre las funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ . La manera razonable de definir esta acción es que la función rotada en el punto rotado tome el mismo valor que la función original en el punto original, es decir  $\psi_\phi(R(\phi)\vec{x}) = \psi(\vec{x})$ . Por tanto, podemos definir el operador  $U_\phi$  de la siguiente manera:

$$U_\phi \psi(\vec{x}) \equiv \psi_\phi(\vec{x}) = \psi(R^{-1}(\phi)\vec{x}). \quad (3.5)$$

En este caso tenemos una representación formada por operadores en el espacio de funciones que estamos considerando. Podemos hallar el generador en esta representación de manera similar al caso anterior. Para ello primeramente observamos que (haciendo el desarrollo de Taylor hasta orden 1 en torno a  $\phi = 0$ )

$$R^{-1}(\phi)\vec{x} = \vec{x}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \simeq \vec{x} + \phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = (I - \phi L)\vec{x}. \quad (3.6)$$

Por tanto, vemos que  $\left. \frac{\partial \vec{x}(\phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = -L\vec{x}$ . Si ahora desarrollamos  $\psi_\phi(x) = \psi(R^{-1}(\phi)\vec{x}) = \psi(\vec{x}(\phi))$  en torno a  $\phi = 0$  hasta primer orden:

$$\psi(\vec{x}(\phi)) \simeq \psi(\vec{x}(\phi))|_{\phi=0} + \left. \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(\phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} \phi = \psi(\vec{x}) + \phi(-L\vec{x})_i \partial_i \psi(\vec{x}). \quad (3.7)$$

En este caso,  $\partial_i$  denota la derivada parcial respecto a  $x_i$ . El segundo término que se obtiene en la parte derecha de la igualdad se puede reescribir como  $\phi(-\vec{x}^t L^t) \cdot \nabla \psi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}^t L) \cdot \nabla \psi(\vec{x})$ . Por tanto, el generador infinitesimal en esta representación es

$$\hat{L}_{12} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = -x_1 \partial_2 + x_2 \partial_1 = -(x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1). \quad (3.8)$$

Se suele escribir con el signo menos fuera del paréntesis, como en la última expresión de la igualdad anterior, para indicar que la rotación va en sentido contrario.

De manera similar al caso anterior, podemos obtener la transformación a partir del generador mediante la exponencial:

$$U(\phi)\psi(x) = e^{\phi \hat{L}_{12}} \psi(x) = \psi(R^{-1}(\phi)\vec{x}) \quad (3.9)$$

donde la última igualdad se obtiene realizando el desarrollo en serie de potencias de la exponencial y el desarrollo de Taylor del lado derecho de la igualdad.

Lo que vamos a ver ahora es que existen unas ciertas coordenadas que están asociadas a este grupo (y veremos que también las hay para  $SO(3)$ ,  $SO(4)$ , etc). Si actuamos con el grupo sobre un punto  $(x_1, x_2) = (r, 0) = \vec{x}_r$  obtenemos una órbita  $R(\phi)\vec{x}_r$ . Podemos parametrizar cada órbita mediante un punto inicial  $\vec{x}_r$  y la acción del grupo:

$$\begin{pmatrix} x_1(\phi) \\ x_2(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Vemos que las coordenadas que hemos obtenido son las coordenadas polares en  $\mathbb{R}^2$ .

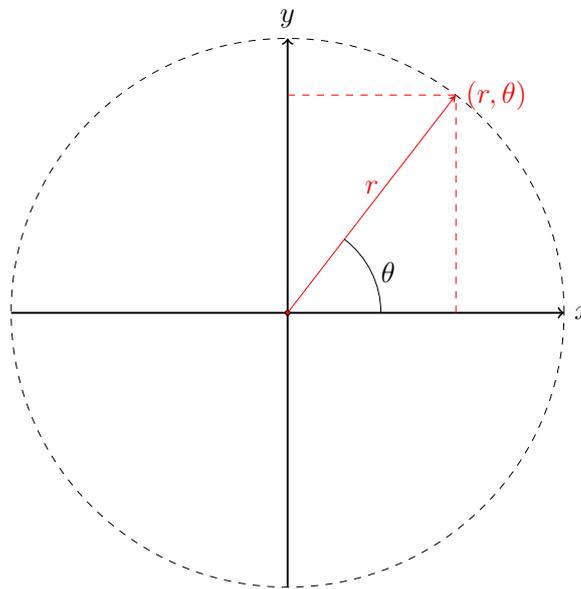


Figura 1: Coordenadas polares.

Si realizamos el cambio a coordenadas polares en (3.8) se obtiene

$$\hat{L}_{12} = -(x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1) = -\partial_\theta. \quad (3.11)$$

### 3.2 El grupo de rotaciones $SO(3)$

Análogamente a la sección anterior, en este caso estamos interesados de nuevo por las matrices que cumplan  $M^t M = I$  y  $|M| = 1$ , pero de dimensión  $3 \times 3$ . Estas condiciones nos dejan 3 parámetros libres. La notación habitual en este caso para las rotaciones es  $R_{\vec{n}}(\phi)$ , donde  $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$  es el vector unitario en la dirección del eje de rotación y  $\phi$  es el ángulo girado. Se puede ver, por ejemplo en [7], que basta con considerar las rotaciones en torno a los 3 ejes cartesianos para generar todas las rotaciones. Podemos utilizar la notación análoga al caso anterior  $R_{ij}(\phi)$  para denotar una rotación de ángulo  $\phi$  en el plano generado por  $x_i, x_j$ . No obstante, en el caso de  $SO(3)$  existe una notación más compacta que resulta de

identificar  $R_{ij}(\phi) = R_k(\phi)$ , con  $\epsilon_{ijk} = 1$  ( $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo antisimétrico), es decir, que  $i, j, k$  son cíclicos. El sentido de giro es el que viene dado por la regla de la mano derecha para cada eje de giro, por lo que obtenemos las siguientes matrices de rotación:

$$\begin{aligned} R_1(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \\ R_2(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}, \\ R_3(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De nuevo, de manera completamente análoga a la sección anterior, podemos obtener los generadores infinitesimales, que en este caso serán 3:

$$\begin{aligned} L_{23} = L_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_{31} = L_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_{12} = L_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Vemos que estos generadores son suficientes, ya que han de ser antisimétricos y solo nos quedan 3 parámetros libres. En efecto, como  $M = e^{\phi L}$  pedimos que sea ortogonal, tenemos que

$$(e^{\phi L})^t e^{\phi L} = I = (I + \phi L)^t (I + \phi L) = I + \phi L^t + \phi L \tag{3.14}$$

donde hemos impuesto que se cumpla la igualdad a primer orden del desarrollo en serie de potencias. Por tanto, se deduce que  $L^t + L = 0$ , por lo que deben ser antisimétricas. Por otro lado, si  $(e^{\phi L})^t = e^{-\phi L}$  se cumple para todo  $\phi$ , entonces derivando en  $\phi = 0$  según (2.2) obtenemos que la condición de ser antisimétricas también es suficiente. Es evidente que cualquier matriz antisimétrica  $3 \times 3$  se puede poner como combinación lineal de  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ , así que forman una base del espacio vectorial de las matrices antisimétricas de dimensión  $3 \times 3$ .

Los generadores forman un álgebra de Lie, y los conmutadores se pueden deducir fácilmente de la descomposición  $L_{ij} = -E_{ij} + E_{ji}$  y la relación  $E_{ij}E_{ke} = \delta_{jk}E_{ie}$ . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] &= [L_{23}, L_{31}] = (-E_{23} + E_{32})(-E_{31} + E_{13}) - (-E_{31} + E_{13})(-E_{23} + E_{32}) \\ &= E_{21} - E_{12} = L_{12} = L_3. \end{aligned} \tag{3.15}$$

De manera análoga se calculan el resto de conmutadores, y el resultado final es:

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

También de manera análoga a la sección anterior se puede obtener la representación diferencial, obteniéndose el siguiente resultado

$$\hat{L}_{ij} = -x_i \partial_j + x_j \partial_i. \quad (3.17)$$

En este caso también podemos obtener unas coordenadas asociadas a este grupo (recordamos que  $e^{\phi L_i} = R_i(\phi)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = e^{\phi_2 L_1} e^{\phi_1 L_3} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\phi_2 L_23} e^{\phi_1 L_{12}} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\phi_2 L_{23}} \begin{pmatrix} r \cos \phi_1 \\ r \sin \phi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi_1 \\ r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Si identificamos  $x_1 = z$ ,  $x_2 = x$ ,  $x_3 = y$ ,  $\phi_1 = \theta$  y  $\phi_2 = \varphi$ , con  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , obtenemos las coordenadas esféricas habituales en  $\mathbb{R}^3$ .

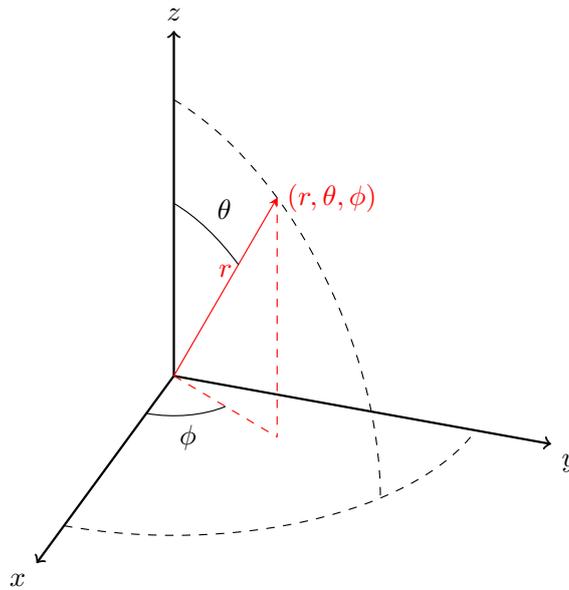


Figura 2: Coordenadas esféricas.

Vemos que al actuar con el grupo de esta manera nos movemos por la esfera de radio  $r$ . Podemos expresar la representación diferencial en estas variables mediante la técnica del cambio de variable. Suponiendo la identificación de las coordenadas que acabamos de hacer, se obtienen los siguientes resultados (ver [3], capítulo 6, sección D):

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \sin \varphi \partial_\theta + \frac{\cos \varphi}{\tan \theta} \partial_\varphi, \\ \hat{L}_y &= -\cos \varphi \partial_\theta + \frac{\sin \varphi}{\tan \theta} \partial_\varphi, \\ \hat{L}_z &= -\partial_\varphi. \end{aligned} \quad (3.19)$$

También incluimos de la misma referencia la siguiente expresión para  $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ , que será lo que llamaremos más adelante el elemento de Casimir de  $\mathfrak{so}(3)$ :

$$\hat{L}^2 = \partial_\theta^2 + \cot \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2. \quad (3.20)$$

### 3.2.1 Relación entre SO(3) y SU(2)

En esta sección nos basamos principalmente en [6]. Si observamos  $L_{ij}$ , vemos que no son hermíticos, solo antisimétricos. Pero si consideramos  $J_{ij} = iL_{ij}$  sí obtenemos generadores hermíticos. En este caso, la manera de recuperar las rotaciones sería con  $e^{-i\phi J_k}$ . Las relaciones de conmutación pasarían a ser:

$$[J_l, J_k] = \epsilon_{lkr} i J_r, \quad l, k, r = 1, 2, 3. \quad (3.21)$$

Estas relaciones de conmutación también se pueden cumplir con matrices  $2 \times 2$ . Basta con tomar  $X_j = \frac{1}{2} \sigma_j$ , donde las  $\sigma_j$  son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Los generadores son matrices  $2 \times 2$  hermíticas y con traza nula. De hecho forman una base para esas matrices, cuya forma general sería:

$$H = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix} = a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3 \quad (3.23)$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Mediante la exponenciación, los tres generadores  $X_j$  generan el grupo completo de las matrices unitarias  $2 \times 2$  con determinante unidad, que es el grupo SU(2). Esto es, una matriz general de SU(2) se puede escribir como

$$U = \exp\left(-\frac{1}{2} i \vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}\right) \quad (3.24)$$

siendo  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  y  $\vec{\alpha} = \vec{n}\theta$ , con  $\vec{n}$  un vector unitario y  $\theta \in [0, 4\pi)$  un ángulo. Teniendo en cuenta que  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 = I$ , podemos expandir (3.24) en serie de potencias y sumar por separado los términos pares e impares, obteniendo:

$$U = I \cos \frac{\theta}{2} - i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (3.25)$$

Cualquier matriz de SO(3) se puede parametrizar con  $\vec{n}$  (eje de rotación) y  $\theta$  (ángulo), así que podemos considerar un homomorfismo  $M: \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  que asocie matrices con los mismos parámetros. Este homomorfismo no es inyectivo, ya que el parámetro  $\theta$  en SO(3) va de 0 a  $2\pi$ , mientras que en el caso de SU(2) vemos en (3.25) que la periodicidad es de  $4\pi$ . Tenemos que el homomorfismo tiene un núcleo no trivial

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.26)$$

Este es el centro de SU(2), que forma un subgrupo normal  $\mathbb{Z}_2$ . La relación precisa entre SU(2) y SO(3) es

$$\text{SO}(3) \cong \text{SU}(2)/\mathbb{Z}_2. \quad (3.27)$$

Los grupos difieren en propiedades globales (como la periodicidad de los parámetros), pero tienen el mismo comportamiento en la proximidad del elemento unidad (comparten el mismo álgebra de Lie). De ambos grupos, SU(2) es el que es simplemente conexo, por lo que es el recubridor universal de SO(3). Esto se puede obtener fácilmente con una parametrización adecuada del grupo. Por ejemplo, en [7], sección 8.1, se obtiene la siguiente parametrización de las matrices del grupo SU(2):

$$A(\theta, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\zeta} & -\sin \theta e^{i\eta} \\ \sin \theta e^{-i\eta} & \cos \theta e^{-i\zeta} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

con  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \eta, \zeta < 2\pi$ . Una parametrización equivalente es la siguiente

$$A(r_0, r_1, r_2, r_3) = \begin{pmatrix} r_0 - ir_3 & -r_2 - ir_1 \\ r_2 - ir_1 & r_0 + ir_3 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

sujeta a la condición

$$\det A = r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \quad (3.30)$$

donde los  $r_i$  son números reales. Si vemos los  $r_i$  como las coordenadas cartesianas del espacio euclídeo de 4 dimensiones, el espacio de parámetros coincide con la superficie de la esfera unidad  $S^3$ . Por tanto, es compacto y simplemente conexo.

### 3.2.2 Representaciones habituales de $\mathfrak{su}(2)$

Partimos de la base  $\{J_1, J_2, J_3\}$  definida en la sección anterior. Primero vamos a buscar la base de Cartan-Weyl a partir de estos generadores. Fijamos  $J_3 = J$  como operador diagonal. Escribimos  $J^\pm = \alpha_\pm J_1 + \beta_\pm J_2$  y planteamos

$$[J, J^\pm] = \pm J^\pm. \quad (3.31)$$

De las ecuaciones que se obtienen se ve que existen  $\alpha_\pm, \beta_\pm$  no nulos que hacen que se cumplan esas relaciones de conmutación. Podemos tomar  $\alpha_+ = 1$ ,  $\beta_+ = i$ ,  $\alpha_- = 1$  y  $\beta_- = -i$  y entonces tenemos que

$$J^\pm = J_1 \pm iJ_2. \quad (3.32)$$

Esta es la expresión que nos encontramos habitualmente como operadores escalera en el tratamiento del momento angular en mecánica cuántica (por ejemplo, en [3]). Se puede comprobar además que

$$[J^+, J^-] = 2J \quad (3.33)$$

y que  $J^\pm$  efectivamente suben y bajan, respectivamente, el autovalor de un autovector de  $J$  en una unidad ( $J\psi = m\psi$ ):

$$J(J^\pm\psi) = (m \pm 1)J^\pm\psi. \quad (3.34)$$

Vemos entonces que  $\{J, J^\pm\}$  es una base de Cartan-Weyl de este álgebra de Lie. En cuanto a las representaciones, simplemente recordamos los conocidos resultados sobre el momento angular. Introducimos el operador  $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ . Este tipo de operador, sin entrar en demasiados detalles, se llama *operador de Casimir* (cuadrático). Es un operador cuadrático que conmuta con  $J_1, J_2$  y  $J_3$ , por lo que conmuta con la base anterior. Si denotamos por  $j(j+1)$  y  $m$  a los autovalores de  $J^2$  y  $J$ , entonces se tiene que:

- Los únicos posibles valores de  $j$  son enteros positivos, semienteros positivos o cero. No tienen por qué darse todos.
- Para cada valor fijo de  $j$ , los únicos posibles valores de  $m$  son los  $(2j+1)$  valores  $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ . Por tanto,  $m$  es entero si  $j$  lo es, y es semientero si  $j$  lo es. Si se da uno de estos valores de  $m$ , entonces se dan todos.

El resultado final es que podemos descomponer el espacio en suma directa de espacios invariantes  $\mathcal{E}(j)$ , cada uno de ellos de dimensión  $(2j+1)$ . La acción de los operadores  $J^\pm$  solo depende de  $m$  y  $j$ , por lo que se puede calcular su matriz (de dimensión  $(2j+1) \times (2j+1)$ ) en cada uno de los espacios  $\mathcal{E}(j)$ . La de  $J^2$  es diagonal y proporcional a la matriz identidad  $(2j+1) \times (2j+1)$ , con elementos diagonales iguales a  $j(j+1)$  (todo esto en una base de estados propios comunes de  $J^2$  y  $J$ ). El desarrollo completo y ejemplos concretos se pueden encontrar en referencias como [3].

### 3.2.3 Representaciones de $\mathfrak{su}(2)$ sobre la esfera $S^3$

En esta sección vamos a obtener una representación de  $\mathfrak{su}(2)$  que nos resultará útil más adelante. Consideramos los generadores  $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle = \mathfrak{su}(2)$ , con  $A_j = -\frac{i}{2}\sigma_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , que cumplen las reglas de conmutación  $[A_i, A_k] = \epsilon_{ikr}A_r$ . Para ver la acción sobre  $S^3$ , primero pasamos por  $\mathbb{C}^2$  y  $\mathbb{R}^4$ , utilizando las coordenadas de Hopf. Si consideramos un punto

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 \\ b_1 + ib_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad (3.35)$$

podemos identificarlo con un punto de  $\mathbb{R}^4$  de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 \\ b_1 + ib_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \quad (3.36)$$

Además, si consideramos las parametrizaciones de  $SU(2)$  (3.28) y (3.29), podemos identificar los elementos del grupo  $SU(2)$  con los de la esfera  $S^3$

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\zeta} & -\sin \theta e^{i\eta} \\ \sin \theta e^{-i\eta} & \cos \theta e^{-i\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & -b_1 + ib_2 \\ b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in S^3, \quad (3.37)$$

ya que la condición de que el punto esté en  $S^3$  es precisamente la misma que la condición de que la matriz tenga determinante 1

$$1 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2. \quad (3.38)$$

A través de estas identificaciones podemos obtener la acción del grupo sobre  $S^3$  mediante los generadores  $A_j$  y la aplicación exponencial. Para obtener la representación del álgebra de Lie correspondiente, consideramos los generadores infinitesimales. Por ejemplo, vamos a llevar a cabo el procedimiento para  $A_1$ , siendo análogo para el resto. Tenemos que

$$g_1(\epsilon) = e^{A_1\epsilon} = I + \epsilon A_1 + \dots. \quad (3.39)$$

Consideramos la acción por la izquierda sobre otro elemento del grupo (o un punto de  $S^3$ )

$$g_1(\epsilon) \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & -b_1 + ib_2 \\ b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} = \left( I - \epsilon \frac{i}{2} \sigma_1 \right) \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & -b_1 + ib_2 \\ b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

donde nos hemos quedado con los términos de orden menor o igual que 1 en  $\epsilon$ . Si calculamos el producto matricial obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & -b_1 + ib_2 \\ b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 - ib_1 & -a_2 - ia_1 \\ a_2 - ia_1 & b_2 + ib_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \in S^3. \quad (3.41)$$

Por tanto, obtenemos que la acción sobre  $S^3$  es

$$g_1(\epsilon) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

hasta el primer orden en  $\epsilon$ . De esta manera hemos obtenido un primer generador del álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  (el generador infinitesimal asociado a la acción anterior)

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

en esta nueva representación. Haciendo los cálculos de manera análoga para  $g_2(\epsilon)$  y  $g_3(\epsilon)$  se obtienen  $X_2$  y  $X_3$ :

$$X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

En el razonamiento anterior, hemos utilizado la acción por la izquierda, en el sentido de que al final actuamos sobre un elemento del grupo multiplicando matricialmente por otro a la

izquierda, es decir  $g \mapsto g(\epsilon) \cdot g$ . Sin embargo, también podemos actuar por la derecha  $g \mapsto g \cdot g(\epsilon)^\dagger$ , y esta acción nos va a dar otra representación matricial de SU(2) actuando sobre  $S^3$  (y, consecuentemente, otra representación de  $\mathfrak{su}(2)$ ). Para encontrar esta representación, basta tener en cuenta que, como las matrices  $A_j$  son antihermíticas, entonces  $A_j^\dagger = -A_j$ , y entonces

$$g_j(\epsilon)^\dagger = e^{A_j^\dagger \epsilon} = I - \epsilon A_j + \dots \quad (3.45)$$

Repitiendo el procedimiento anterior, multiplicando a la derecha por la expresión de  $g_j(\epsilon)^\dagger$  hasta primer orden en  $\epsilon$ , obtenemos los siguientes generadores de  $\mathfrak{su}(2)$ :

$$Y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Las dos representaciones que hemos obtenido cumplen las relaciones de conmutación

$$[Z_l, Z_k] = \epsilon_{lkr} Z_r, \quad (3.47)$$

y además las dos representaciones conmutan entre sí.

A partir de estas representaciones matriciales, podemos obtener representaciones diferenciales asociadas siguiendo el razonamiento de (3.7). Por ejemplo, en el caso de  $X_1$ :

$$\hat{X}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{a_1} \\ \partial_{a_2} \\ \partial_{b_1} \\ \partial_{b_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (-b_2 \partial_{a_1} + b_1 \partial_{a_2} - a_2 \partial_{b_1} + a_1 \partial_{b_2}). \quad (3.48)$$

Para  $X_2$  y  $X_3$  se procedería de la misma manera. Entonces obtendríamos los siguientes generadores:

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = \frac{1}{2} (-b_2 \partial_{a_1} + b_1 \partial_{a_2} - a_2 \partial_{b_1} + a_1 \partial_{b_2}), \\ \hat{X}_2 = \frac{1}{2} (b_1 \partial_{a_1} + b_2 \partial_{a_2} - a_1 \partial_{b_1} - a_2 \partial_{b_2}), \\ \hat{X}_3 = \frac{1}{2} (-a_2 \partial_{a_1} + a_1 \partial_{a_2} + b_2 \partial_{b_1} - b_1 \partial_{b_2}). \end{cases} \quad (3.49)$$

Por otro lado, puesto que los  $Y_j$  son antihermíticos, al hacer el razonamiento de (3.7), el resultado para calcular los generadores de la representación diferencial es el mismo, ya que  $(-x^t M^\dagger)_i \partial_i \psi = x M \cdot \nabla \psi$ . Así que podemos hacer el cálculo como en el caso anterior, y se obtienen los siguientes generadores:

$$\begin{cases} \hat{Y}_1 = \frac{1}{2} (b_2 \partial_{a_1} + b_1 \partial_{a_2} - a_2 \partial_{b_1} - a_1 \partial_{b_2}), \\ \hat{Y}_2 = \frac{1}{2} (-b_1 \partial_{a_1} + b_2 \partial_{a_2} + a_1 \partial_{b_1} - a_2 \partial_{b_2}), \\ \hat{Y}_3 = \frac{1}{2} (a_2 \partial_{a_1} - a_1 \partial_{a_2} + b_2 \partial_{b_1} - b_1 \partial_{b_2}). \end{cases} \quad (3.50)$$

Tenemos ambas representaciones diferenciales en las variables  $a_1, a_2, b_1$  y  $b_2$ , pero realmente la parametrización habitual de la esfera  $S^3$  (radio 1) es en términos de las 3 variables

angulares  $\theta$ ,  $\zeta$  y  $\eta$ . Si tenemos en cuenta la identificación de (3.37), entonces se deduce que

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos \theta \cos \zeta, \\ a_2 &= \cos \theta \sin \zeta, \\ b_1 &= \sin \theta \cos \eta, \\ b_2 &= -\sin \theta \sin \eta, \end{aligned} \tag{3.51}$$

y también

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \\ \zeta &= \arctan \frac{a_2}{a_1}, \\ \eta &= -\arctan \frac{b_2}{b_1}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Expresando los generadores diferenciales en estas coordenadas (los cálculos se encuentran en el apéndice A.1) obtenemos lo siguiente para  $\hat{X}_j$

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = \frac{1}{2}(-\cos(\zeta + \eta) \cot \theta \partial_\eta + \cos(\zeta + \eta) \tan \theta \partial_\zeta - \sin(\zeta + \eta) \partial_\theta), \\ \hat{X}_2 = \frac{1}{2}(\sin(\zeta + \eta) \cot \theta \partial_\eta - \sin(\zeta + \eta) \tan \theta \partial_\zeta - \cos(\zeta + \eta) \partial_\theta), \\ \hat{X}_3 = \frac{1}{2}(\partial_\eta + \partial_\zeta), \end{cases} \tag{3.53}$$

mientras que para la representación  $\hat{Y}_j$  se obtiene

$$\begin{cases} \hat{Y}_1 = \frac{1}{2}(\cos(\zeta - \eta) \cot \theta \partial_\eta + \cos(\zeta - \eta) \tan \theta \partial_\zeta - \sin(\zeta - \eta) \partial_\theta), \\ \hat{Y}_2 = \frac{1}{2}(\sin(\zeta - \eta) \cot \theta \partial_\eta + \sin(\zeta - \eta) \tan \theta \partial_\zeta + \cos(\zeta - \eta) \partial_\theta), \\ \hat{Y}_3 = \frac{1}{2}(\partial_\eta - \partial_\zeta). \end{cases} \tag{3.54}$$

También podemos calcular la métrica en estas coordenadas (los cálculos están en el apéndice A.2), obteniendo

$$dl^2 = \sin^2 \theta d\eta^2 + \cos^2 \theta d\zeta^2 + d\theta^2. \tag{3.55}$$

El elemento de volumen también se puede obtener fácilmente y es

$$dV = \cos \theta \sin \theta d\eta d\zeta d\theta. \tag{3.56}$$

Los operadores que hemos hallado se puede comprobar que son antihermíticos respecto a este elemento de volumen (si los multiplicamos por  $i$ , serían hermíticos). Para comprobarlo, basta integrar por partes y tener en cuenta las condiciones de contorno, que nos imponen las siguientes condiciones sobre las funciones  $\psi(\eta, \zeta, \theta)$  en estas coordenadas:  $\psi(0, \zeta, \theta) = \psi(2\pi, \zeta, \theta)$ ,  $\psi(\eta, 0, \theta) = \psi(\eta, 2\pi, \theta)$  y  $\psi(\theta)$  finita para todo  $\theta$  (en particular, en  $\theta = 0, \pi/2$ , donde la representación se hace singular). Un ejemplo de este tipo de cálculo lo tenemos en el apéndice A.3.

Por otro lado, también podemos hallar la expresión del elemento de Casimir en estas representaciones como  $\hat{X}^2 = \hat{X}_1^2 + \hat{X}_2^2 + \hat{X}_3^2$  e  $\hat{Y}^2 = \hat{Y}_1^2 + \hat{Y}_2^2 + \hat{Y}_3^2$  (el elemento de Casimir de

$\mathfrak{su}(2)$ ). El resultado es

$$\hat{X}^2 = \hat{Y}^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\eta^2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \partial_\zeta^2 + 2 \cot 2\theta \partial_\theta + \partial_\theta^2 \right). \quad (3.57)$$

Finalmente podemos, como es habitual en  $\mathfrak{su}(2)$ , fijar un generador, por ejemplo el tercero en las dos representaciones, y definir los operadores de subida y bajada  $\hat{X}^\pm = \hat{X}_1 \pm i\hat{X}_2$  e  $\hat{Y}^\pm = \hat{Y}_1 \pm i\hat{Y}_2$ . De esta manera obtenemos los siguientes conjuntos de operadores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{X}^+ = \frac{1}{2} e^{-i(\zeta+\eta)} (-\cot \theta \partial_\eta + \tan \theta \partial_\zeta - i\partial_\theta), \\ \hat{X}^- = \frac{1}{2} e^{i(\zeta+\eta)} (-\cot \theta \partial_\eta + \tan \theta \partial_\zeta + i\partial_\theta), \\ \hat{X}_3 = \frac{1}{2} (\partial_\eta + \partial_\zeta), \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \hat{Y}^+ = \frac{1}{2} e^{i(\zeta-\eta)} (\cot \theta \partial_\eta + \tan \theta \partial_\zeta + i\partial_\theta), \\ \hat{Y}^- = \frac{1}{2} e^{-i(\zeta-\eta)} (\cot \theta \partial_\eta + \tan \theta \partial_\zeta - i\partial_\theta), \\ \hat{Y}_3 = \frac{1}{2} (\partial_\eta - \partial_\zeta). \end{array} \right. \quad (3.58)$$

### 3.3 El grupo de rotaciones SO(4)

El último grupo que vamos a analizar en esta sección es el grupo SO(4). En este caso vamos a utilizar la notación que hemos ido introduciendo en los casos anteriores, en concreto la notación con 2 índices para denotar rotaciones en el plano de los dos vectores de la base correspondientes a ese plano. Tenemos, por tanto, las siguientes rotaciones que generan todo el grupo:

$$\begin{aligned} R_{12}(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & R_{23}(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_{34}(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, & R_{41}(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}, \\ R_{13}(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & R_{24}(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Podemos obtener los generadores infinitesimales como en los casos anteriores, obteniéndose

$L_{ij} = -E_{ij} + E_{ji}$  (en este caso con 4 índices):

$$\begin{aligned}
 L_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L_{34} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & L_{41} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_{24} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Vemos que, de nuevo, podemos generar todas las matrices antisimétricas (esta vez  $4 \times 4$ ) con estos generadores. Utilizando la relación  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$  podemos calcular los conmutadores (los índices van de 1 a 4)

$$\begin{aligned}
 [L_{\mu\nu}, L_{\rho\lambda}] &= (-E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu})(-E_{\rho\lambda} + E_{\lambda\rho}) - (-E_{\rho\lambda} + E_{\lambda\rho})(-E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu}) \\
 &= \delta_{\nu\rho}(E_{\mu\lambda} - E_{\lambda\mu}) + \delta_{\nu\lambda}(-E_{\mu\rho} + E_{\rho\mu}) + \delta_{\mu\rho}(-E_{\nu\lambda} + E_{\lambda\nu}) + \delta_{\lambda\mu}(-E_{\rho\nu} + E_{\nu\rho}) \\
 &= -\delta_{\nu\rho}L_{\mu\lambda} - \delta_{\lambda\mu}L_{\nu\rho} + \delta_{\nu\lambda}L_{\mu\rho} + \delta_{\mu\rho}L_{\nu\lambda}
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

que nos definen la estructura de álgebra de Lie que cierran los  $L_{ij}$ . Si ahora definimos (con los índices de 1 a 3)

$$M_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}L_{jk}, \quad N_i = L_{4i}, \tag{3.62}$$

obtenemos lo que llamaremos vector  $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$  y  $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3)$ . Por aclarar, escribimos directamente la expresión de las componentes:

$$\begin{cases} M_1 = L_{23}, & N_1 = L_{41}, \\ M_2 = -L_{13}, & N_2 = L_{42}, \\ M_3 = L_{12}, & N_3 = L_{43}. \end{cases} \tag{3.63}$$

Las reglas de conmutación se pueden escribir ahora de esta manera (de nuevo, con los índices de 1 a 3):

$$\begin{aligned}
 [M_i, M_j] &= \epsilon_{ijk}M_k, \\
 [M_i, N_j] &= \epsilon_{ijk}N_k, \\
 [N_i, N_j] &= \epsilon_{ijk}M_k.
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Vemos que los generadores  $\vec{M}$  generan un subgrupo isomorfo a SO(3), el que deja la cuarta dirección del espacio euclídeo de 4 dimensiones invariante. Los conmutadores anteriores se pueden expresar de manera más compacta diciendo

$$\begin{aligned}
 [\vec{M}, \vec{M}] &= \vec{M}, \\
 [\vec{M}, \vec{N}] &= \vec{N}, \\
 [\vec{N}, \vec{N}] &= \vec{M},
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

que significa precisamente que las relaciones de conmutación para las componentes son las que teníamos anteriormente. Si ahora definimos dos nuevos vectores

$$\vec{X} = \frac{\vec{M} + \vec{N}}{2}, \quad \vec{Y} = \frac{\vec{M} - \vec{N}}{2}, \quad (3.66)$$

entonces tenemos que  $[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$ , ya que

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2}(M_i + N_i), \frac{1}{2}(M_j - N_j) \right] &= \frac{1}{4}([M_i, M_j] - [M_i, N_j] + [N_i, M_j] - [N_i, N_j]) \\ &= \frac{1}{4}(\epsilon_{ijk}M_k - \epsilon_{ijk}N_k - \epsilon_{jik}N_k - \epsilon_{ijk}M_k) = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Además, las componentes de  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  satisfacen las reglas de conmutación de  $\mathfrak{su}(2)$  que vimos en (3.16):

$$\begin{aligned} [V_i^\pm, V_j^\pm] &= \frac{1}{4}[M_i \pm N_i, M_j \pm N_j] = \frac{1}{4}([M_i, M_j] \pm [M_i, N_j] \pm [N_i, M_j] + [N_i, N_j]) \\ &= \frac{1}{4}(\epsilon_{ijk}M_k \pm \epsilon_{ijk}N_k \mp \epsilon_{jik}N_k + \epsilon_{ijk}M_k) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(M_k \pm N_k) = \epsilon_{ijk}V_k^\pm \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde  $V_k^+ = X_k$  y  $V_k^- = Y_k$ . Tenemos, por tanto, dos subálgebras que conmutan y cumplen las relaciones de conmutación de  $\mathfrak{su}(2)$ . Podemos deducir que

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3). \quad (3.69)$$

Deducimos también que  $SU(2) \otimes SU(2)$  es el recubridor universal de  $SO(4)$ , y como es doblemente conexo, la relación exacta entre ambos grupos se puede ver que es

$$SO(4) \cong SU(2) \otimes SU(2) / \mathbb{Z}_2. \quad (3.70)$$

Las representaciones irreducibles  $D_{j_1 j_2}$  del álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(4)$  se pueden conseguir como producto tensorial de representaciones  $D_{j_i}$  de  $\mathfrak{su}(2)$ :

$$D_{j_1 j_2} = D_{j_1} \otimes D_{j_2}. \quad (3.71)$$

La dimensión de  $D_{j_1 j_2}$  es, por tanto,  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ . Se puede ver (este y los anteriores resultados se encuentran en referencias como [1]) que en las representaciones en las que  $\vec{M} \cdot \vec{N} = 0$  se tiene que  $j_1 = j_2 = j$  y entonces la dimensión de  $D_{j_1 j_2}$  será  $(2j + 1)^2$ .

De nuevo, como en los casos de  $SO(2)$  y  $SO(3)$ , podemos considerar la representación diferencial y obtenemos que

$$\hat{L}_{ij} = -(x_i \partial_j - x_j \partial_i). \quad (3.72)$$

En la representación diferencial resulta fácil probar que  $\hat{M} \cdot \hat{N} = 0$ , por lo que estamos en la situación que hemos mencionado antes:

$$\begin{aligned} \hat{M} \cdot \hat{N} &= \hat{M}_1 \hat{N}_1 + \hat{M}_2 \hat{N}_2 + \hat{M}_3 \hat{N}_3 = \frac{1}{2}(\hat{L}_{23} \hat{L}_{41} - \hat{L}_{13} \hat{L}_{42} + \hat{L}_{12} \hat{L}_{43}) = \frac{1}{2}((x_2 \partial_3 - x_3 \partial_2) \\ &\quad (x_4 \partial_1 - x_1 \partial_4) - (x_1 \partial_3 - x_3 \partial_1)(x_4 \partial_2 - x_2 \partial_4) + (x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1)(x_4 \partial_3 - x_3 \partial_4)) = 0, \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde la última igualdad se obtiene desarrollando y viendo que los términos se cancelan por pares si suponemos que podemos permutar el orden de derivación. Esto se cumple también para la representación matricial si recordamos que  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ :

$$\begin{aligned} \vec{M} \cdot \vec{N} &= \frac{1}{2}(L_{23}L_{41} - L_{13}L_{42} + L_{12}L_{43}) = \frac{1}{2}((-E_{23} + E_{32})(-E_{41} + E_{14}) \\ &\quad - (-E_{13} + E_{31})(-E_{42} + E_{24}) + (-E_{12} + E_{21})(-E_{43} + E_{34})) = 0, \end{aligned} \quad (3.74)$$

donde todos los productos se anulan por la regla de multiplicación que hemos mencionado.

Por otro lado, podemos obtener las coordenadas asociadas al grupo de manera análoga a los casos anteriores:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= e^{\phi_3 L_{34}} e^{\phi_2 L_{23}} e^{\phi_1 L_{12}} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\phi_3 L_{34}} e^{\phi_2 L_{23}} \begin{pmatrix} r \cos \phi_1 \\ r \sin \phi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\phi_3 L_{34}} \begin{pmatrix} r \cos \phi_1 \\ r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \cos \phi_1 \\ r \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3 \\ r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Vemos que el resultado son las coordenadas hiperesféricas en 4 dimensiones. De manera similar a los casos anteriores, al actuar de esta manera nos estamos moviendo por una 3-esfera de radio  $r$ . Por simplificar, en lo que sigue vamos a tomar el radio  $r = 1$ . La métrica del espacio ambiente,  $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ , cuando se sustituye por (3.75) con  $r = 1$  pasa a ser (ecuación (2.12) de [5], con  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ )

$$dl^2 = d\phi_1^2 + \sin^2 \phi_1 d\phi_2^2 + \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 d\phi_3^2. \quad (3.76)$$

El elemento de volumen es (con  $r = 1$ ):

$$dV = \sin^2 \phi_1 \sin \phi_2 d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3. \quad (3.77)$$

Los generadores de la representación diferencial los podemos encontrar en la tabla 2 de [5] (en nuestro caso hacemos la sustitución  $p_\mu = -i\partial_\mu$  para el caso cuántico):

$$\begin{aligned} \hat{L}_{12} &= -i \cos \phi_2 \partial_{\phi_1} + i \frac{\sin \phi_2}{\tan \phi_1} \partial_{\phi_2}, & \hat{L}_{23} &= -i \cos \phi_3 \partial_{\phi_2} + i \frac{\sin \phi_3}{\tan \phi_2} \partial_{\phi_3}, \\ \hat{L}_{24} &= -i \sin \phi_3 \partial_{\phi_2} - i \frac{\cos \phi_3}{\tan \phi_2} \partial_{\phi_3}, & \hat{L}_{34} &= -i \partial_{\phi_3}, \\ \hat{L}_{13} &= -i \sin \phi_2 \cos \phi_3 \partial_{\phi_1} - i \frac{\cos \phi_2 \cos \phi_3}{\tan \phi_1} \partial_{\phi_2} + i \frac{\sin \phi_3}{\tan \phi_1 \sin \phi_2} \partial_{\phi_3}, \\ \hat{L}_{14} &= -i \sin \phi_2 \sin \phi_3 \partial_{\phi_1} - i \frac{\cos \phi_2 \sin \phi_3}{\tan \phi_1} \partial_{\phi_2} - i \frac{\cos \phi_3}{\tan \phi_1 \sin \phi_2} \partial_{\phi_3}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Para que la representación de los generadores no sea singular, el rango de los parámetros es  $0 \leq \phi_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi_2 \leq \pi$  y  $0 \leq \phi_3 < 2\pi$ . Para las condiciones sobre las funciones sobre las que actúan estos operadores, vemos en la ecuación (3.4) de [5] el término cinético o hamiltoniano libre en estas coordenadas (en el caso clásico):

$$\mathcal{T} = H = \frac{1}{2} \left( p_{\phi_1}^2 + \frac{p_{\phi_2}^2}{\sin^2 \phi_1} + \frac{p_{\phi_3}^2}{\sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2} \right). \quad (3.79)$$

Por tanto, para que  $\psi$  sea una solución aceptable del problema de autovalores en el caso cuántico, tiene que ser finita en todo punto, en particular en  $\phi_1 = 0, \pi$  y  $\phi_2 = 0, \pi$ , donde el hamiltoniano presenta singularidades. La condición para la variable  $\phi_3$  es análoga a lo que pasa en la esfera  $S^2$  con la variable  $\phi$ : la función  $\psi$  debe ser periódica, es decir,  $\psi(\phi_3) = \psi(\phi_3 + 2\pi)$  (en particular, dentro del intervalo que hemos puesto para los parámetros,  $\psi(0) = \psi(2\pi)$ ).

Con las condiciones anteriores sobre los parámetros y las funciones aceptables, podemos comprobar la hermiticidad de los generadores de (3.78) con el elemento de volumen de (3.77) respecto al producto habitual mediante integración por partes. En el apéndice B.1 se muestra un ejemplo de cómo comprobar la hermiticidad de esta manera.

La comprobación de que los  $\hat{L}_{ij}$  son hermíticos con este  $dV$  en cierto modo nos sirve de comprobación de que este elemento de volumen es el correcto, ya que es invariante en esta representación diferencial.

Por otro lado, para hallar el hamiltoniano cuántico a partir del clásico (3.79) tenemos que calcular  $p_{\phi_j}^\dagger = (-i\partial_{\phi_j})^\dagger$  para  $j = 1, 2, 3$ . El cálculo se realiza mediante integración por partes de manera similar al caso anterior, y se encuentra en el apéndice B.1 de nuevo. El resultado final es:

$$\begin{cases} p_{\phi_1}^\dagger = (-i\partial_{\phi_1})^\dagger = -i\partial_{\phi_1} - 2i \cot \phi_1, \\ p_{\phi_2}^\dagger = (-i\partial_{\phi_2})^\dagger = -i\partial_{\phi_2} - i \cot \phi_2, \\ p_{\phi_3}^\dagger = (-i\partial_{\phi_3})^\dagger = -i\partial_{\phi_3}. \end{cases} \quad (3.80)$$

Vemos que el operador  $-i\partial_{\phi_3}$  es hermítico, lo cual ya sabíamos porque hemos dicho que todos los  $\hat{L}_{ij}$  lo son, en particular  $\hat{L}_{34} = -i\partial_{\phi_3}$ .

Ahora procedemos a hacer la sustitución  $p_{\phi_i}^2 \rightarrow p_{\phi_i}^\dagger p_{\phi_i}$  en (3.79) para obtener el hamiltoniano correspondiente el caso cuántico:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= p_{\phi_1}^\dagger p_{\phi_1} + \frac{1}{\sin^2 \phi_1} p_{\phi_2}^\dagger p_{\phi_2} + \frac{1}{\sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2} p_{\phi_3}^\dagger p_{\phi_3} \\ &= -\partial_{\phi_1}^2 - 2 \cot \phi_1 \partial_{\phi_1} + \frac{1}{\sin^2 \phi_1} (-\partial_{\phi_2}^2 - \cot \phi_2 \partial_{\phi_2}) + \frac{1}{\sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2} (-\partial_{\phi_3}^2). \end{aligned} \quad (3.81)$$

El hamiltoniano debe conmutar con  $\mathfrak{so}(4)$  y ser cuadrático en las derivadas, por lo que debe ser proporcional a uno de los dos operadores de Casimir de  $\mathfrak{so}(4)$  (hay 2 porque es de rango 2). En este caso, uno se anula y el otro es  $M^2 + N^2$ . Se puede comprobar, por ejemplo con un programa de cálculo simbólico, que efectivamente el hamiltoniano anterior

es igual a  $M^2 + N^2$  y que conmuta con los generadores (3.78). Esto significa que tenemos  $H = M^2 + N^2 = 2(X^2 + Y^2)$ , siendo  $X^2$  e  $Y^2$  los elementos de Casimir de  $\mathfrak{su}(2)$  (recordar la definición (3.66)), que tienen como autovalores  $\frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1)$ , con  $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ . Por tanto, los autovalores de  $\hat{H}$  son de la forma

$$E_n = n(n + 2), \quad n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}. \quad (3.82)$$

Por otro lado, el hamiltoniano de (3.81) lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\hat{H} = -\partial_{\phi_1}^2 - 2 \cot \phi_1 \partial_{\phi_1} + \frac{1}{\sin^2 \phi_1} \left( -\partial_{\phi_2}^2 - \cot \phi_2 \partial_{\phi_2} + \frac{1}{\sin^2 \phi_2} (-\partial_{\phi_3}^2) \right). \quad (3.83)$$

Si denotamos

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(3)} &= -\partial_{\phi_2}^2 - \cot \phi_2 \partial_{\phi_2} + \frac{1}{\sin^2 \phi_2} (-\partial_{\phi_3}^2), \\ \hat{H}_{(2)} &= -\partial_{\phi_3}^2, \end{aligned} \quad (3.84)$$

entonces tenemos la siguiente estructura “anidada”:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\partial_{\phi_1}^2 - 2 \cot \phi_1 \partial_{\phi_1} + \frac{1}{\sin^2 \phi_1} \hat{H}_{(3)}, \\ \hat{H}_{(3)} &= -\partial_{\phi_2}^2 - \cot \phi_2 \partial_{\phi_2} + \frac{1}{\sin^2 \phi_2} \hat{H}_{(2)}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Puesto que  $\hat{H}_{(3)}$  solo involucra las variables  $\phi_2$  y  $\phi_3$ , y  $\hat{H}_{(2)}$  solo involucra la variable  $\phi_3$ , por la estructura anidada anterior es directo que el conjunto de operadores  $\{\hat{H}, \hat{H}_{(3)}, \hat{H}_{(2)}\}$  conmuta. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{H}_{(3)}] &= [-\partial_{\phi_1}^2 - 2 \cot \phi_1 \partial_{\phi_1}, \hat{H}_{(3)}] + \left[ \frac{1}{\sin^2 \phi_1} \hat{H}_{(3)}, \hat{H}_{(3)} \right] \\ &= \left[ \frac{1}{\sin^2 \phi_1}, \hat{H}_{(3)} \right] \hat{H}_{(3)} + \frac{1}{\sin^2 \phi_1} [\hat{H}_{(3)}, \hat{H}_{(3)}] = 0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Por otro lado, si nos fijamos en la forma de  $\hat{H}_{(3)}$ , vemos que se trata del elemento de Casimir de  $\mathfrak{so}(3)$  (3.20) (salvo el signo). Obviamente,  $\hat{H}_{(2)}$  es, a su vez, el elemento de Casimir de  $\mathfrak{so}(2)$ . Por tanto, los operadores del conjunto  $\{\hat{H}, \hat{H}_{(3)}, \hat{H}_{(2)}\}$  son proporcionales al elemento de casimir de  $\mathfrak{so}(4)$ ,  $\mathfrak{so}(3)$  y  $\mathfrak{so}(2)$ , respectivamente. De hecho, por la estructura anidada, en cierto modo cada uno es una extensión del anterior. Si nos fijamos en los generadores (3.11), (3.19) y (3.78), nos damos cuenta de que cada conjunto de generadores extiende el anterior a más variables. Por ello, vemos que tenemos la cadena  $\mathfrak{so}(4) \supset \mathfrak{so}(3) \supset \mathfrak{so}(2)$ . De hecho, podemos dar generadores de estas álgebras a partir de los de  $\mathfrak{so}(4)$  que tenemos en (3.78):  $\mathfrak{so}(2) = \langle L_{34} \rangle$  y  $\mathfrak{so}(3) = \langle L_{34}, L_{23}, L_{24} \rangle$ . Si tenemos en cuenta la identificación (3.66) obtenemos:

$$\begin{aligned} L_{43} &= X_3 - Y_3, \\ L_{42} &= X_2 - Y_2, \\ L_{23} &= X_1 + Y_1. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Por la elección de las coordenadas esféricas que hemos hecho, no hemos obtenido una suma en todas las expresiones anteriores. Pero por un isomorfismo de álgebras de Lie

$\langle Y_1, Y_2, Y_3 \rangle \cong \langle Y'_1 = Y_1, Y'_2 = -Y_2, Y'_3 = -Y_3 \rangle$  (es directo comprobar que  $Y'_1, Y'_2, Y'_3$  cumplen las reglas de conmutación de  $\mathfrak{so}(3)$ ). De esta manera obtenemos la base de  $\mathfrak{so}(3)$  formada por  $\langle X_1 + Y'_1, X_2 + Y'_2, X_3 + Y'_3 \rangle$ , que es como la descomposición del producto tensorial de representaciones en suma directa en la teoría del momento angular. Esta relación entre ambas bases da lugar a una relación entre los polinomios de Gegenbauer y Jacobi que estudiaremos más adelante.

Volviendo sobre los operadores  $\hat{H}$ ,  $\hat{H}_{(2)}$  y  $\hat{H}_{(3)}$ , como hemos encontrado 3 operadores que conmutan, vamos a buscar autofunciones del hamiltoniano  $\hat{H}$  que sean también propias de  $\hat{H}_{(2)}$  y  $\hat{H}_{(3)}$ . Para ello suponemos una solución con variables separadas  $\psi = \psi_1(\phi_1)\psi_2(\phi_2)\psi_3(\phi_3)$ , e imponemos la condición de que sea propia de  $\hat{H}_{(2)}$ :

$$\hat{H}_{(2)}\psi_3(\phi_3) = -\partial_{\phi_3}^2\psi_3(\phi_3) = m^2\psi_3(\phi_3) \Rightarrow \psi_3(\phi_3) = e^{im\phi_3}, \quad (3.88)$$

con  $m$  un número entero (por la periodicidad de  $2\pi$ ).

Por otro lado, la solución al problema de autovalores de  $\hat{H}_{(3)}$  es conocida de la teoría del momento angular y es la siguiente

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(3)}\psi_2(\phi_2)\psi_3(\phi_3) = l(l+1)\psi_2(\phi_2)\psi_3(\phi_3) &\Rightarrow \psi_2(\phi_2)\psi_3(\phi_3) = Y_l^m(\phi_2, \phi_3) \\ &= Ne^{im\phi_3}P_l^m(\cos\phi_2), \end{aligned} \quad (3.89)$$

donde  $Y_l^m$  son los armónicos esféricos,  $N$  es una constante de normalización,  $P_l^m$  son los polinomios asociados de Legendre (cuando  $m = 0$ , son los polinomios de Legendre),  $l$  es un entero positivo y  $m$ , de nuevo, debe ser entero y además cumplir que  $-l \leq m \leq l$ .

Finalmente, si planteamos la ecuación de autovalores para  $\hat{H}$ :

$$\hat{H}\psi_1(\phi_1)\psi_2(\phi_2)\psi_3(\phi_3) = n(n+2)\psi_1(\phi_1)\psi_2(\phi_2)\psi_3(\phi_3), \quad (3.90)$$

teniendo en cuenta lo anterior, obtenemos la siguiente ecuación para  $\psi_1$ :

$$\left( -\partial_{\phi_1}^2 - 2\cot\phi_1\partial_{\phi_1} + \frac{l(l+1)}{\sin^2\phi_1} \right) \psi_1 = n(n+2)\psi_1. \quad (3.91)$$

El cálculo de las soluciones de esta ecuación se encuentra en el apéndice B.2 y el resultado es que  $E_n = n(n+2)$ , con  $n = l + \nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ , y

$$\psi_1(\phi_1) = (\sin\phi_1)^l P_{n-l}^{(l+1/2, l+1/2)}(\cos\phi_1), \quad (3.92)$$

siendo  $P_\nu^{(\alpha, \beta)}$  los polinomios de Jacobi. De hecho, se trata de un tipo particular de polinomios de Jacobi, los polinomios de Gegenbauer, que salvo constante son  $C_\nu^{(\alpha)}(x) = P_\nu^{(\alpha-1/2, \alpha-1/2)}(x)$ , así que podemos escribir la solución de la siguiente manera:

$$\psi_1(\phi_1) = (\sin\phi_1)^l C_{n-l}^{(l+1)}(\cos\phi_1). \quad (3.93)$$

En el apéndice B.2 vemos también la relación de algunos polinomios de Gegenbauer con los polinomios asociados de Legendre (B.22):

$$P_l^m(\cos\phi) = (\sin\phi)^m C_{l-m}^{(m+1/2)}(\cos\phi), \quad (3.94)$$

por lo que podemos expresar la solución completa con variables separadas (salvo constantes) de la siguiente manera:

$$\psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (\sin \phi_1)^l (\sin \phi_2)^m C_{n-l}^{(l+1)}(\cos \phi_1) C_{l-m}^{(m+1/2)}(\cos \phi_2) e^{im\phi_3}, \quad (3.95)$$

con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $l \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $-l \leq m \leq l$  y  $l \leq n$ .

## 4 Factorizaciones estándar del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller en 1D

En esta sección vamos a considerar un hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller en una dimensión y vamos a obtener dos factorizaciones estándar del mismo. Posteriormente veremos la relación de estas factorizaciones con las representaciones que hemos visto de las álgebras de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  y  $\mathfrak{so}(4)$ . En estas primeras secciones nos basaremos sobre todo en la referencia [2]. El hamiltoniano con el que trabajaremos es el siguiente:

$$H_{\alpha,\beta} = -\partial_\phi^2 + \frac{\alpha^2 - 1/4}{\cos^2 \phi} + \frac{\beta^2 - 1/4}{\sin^2 \phi}, \quad 0 < \phi < \pi/2, \quad (4.1)$$

donde  $\alpha, \beta$  son constantes reales. Podemos representar el potencial

$$V_{\alpha,\beta}(\phi) = \frac{\alpha^2 - 1/4}{\cos^2 \phi} + \frac{\beta^2 - 1/4}{\sin^2 \phi}, \quad 0 < \phi < \pi/2, \quad (4.2)$$

para distintos parámetros:

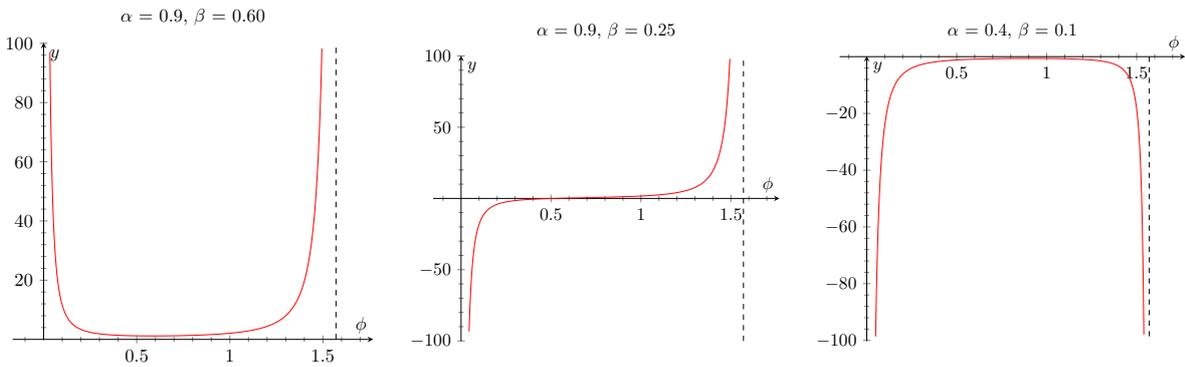


Figura 3: Gráficas del potencial de tipo Pöschl-Teller para distintos valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

Este tipo de potencial (o su versión modificada con funciones hiperbólicas en vez de trigonométricas) ha sido utilizado para describir vibraciones moleculares utilizando distintos modelos. También se ha utilizado recientemente para calcular diferentes medidas de la entropía de información (las referencias exactas se encuentran en [2]).

El hamiltoniano se trata de un operador hermítico respecto al producto interno estándar

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_0^{\pi/2} \psi_1(\phi)^* \psi_2(\phi) d\phi. \quad (4.3)$$

### 4.1 Primer conjunto de “shift operators”, $M^\pm$

En esta sección buscaremos operadores de entrelazamiento (“intertwining operators”) entre hamiltonianos de tipo Pöschl-Teller y que mantengan el valor de la energía. Estos operadores se suelen conocer como “shift operators”.

El hamiltoniano (4.1) es parte de una “jerarquía de hamiltonianos”  $\{H_{\alpha+n,\beta+n}\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , que tiene la siguiente propiedad de factorización (ver [2])

$$H_{\alpha,\beta} = M_{\alpha,\beta}^+ M_{\alpha,\beta}^- + \mu_{\alpha,\beta} = M_{\alpha-1,\beta-1}^- M_{\alpha-1,\beta-1}^+ + \mu_{\alpha-1,\beta-1}, \quad (4.4)$$

donde

$$M_{\alpha,\beta}^\pm = \pm \partial_\phi - (\alpha + 1/2) \tan \phi + (\beta + 1/2) \cot \phi \quad (4.5)$$

y

$$\mu_{\alpha,\beta} = (\alpha + \beta + 1)^2. \quad (4.6)$$

Esta factorización se puede comprobar directamente realizando el producto de los operadores teniendo en cuenta que (como operadores)  $\partial_\phi f(\phi) = f'(\phi) + f(\phi)\partial_\phi$ . Por otro lado, teniendo en cuenta (4.3) e integrando por partes obtenemos que  $\partial_\phi^\dagger = -\partial_\phi$  (luego  $(\partial_\phi^2)^\dagger = \partial_\phi^2$ , por eso dijimos que el hamiltoniano es hermítico para ese producto), así que  $(M_{\alpha,\beta}^+)^\dagger = M_{\alpha,\beta}^-$ , es decir, los operadores  $M_{\alpha,\beta}^\pm$  son hermítico conjugados uno del otro.

Por otro lado, podemos ver la acción de estos operadores sobre soluciones del hamiltoniano. Para ello, primero vamos a calcular unas expresiones análogas al conmutador de los operadores con el hamiltoniano, pero para hamiltonianos distintos:

$$M_{\alpha,\beta}^- H_{\alpha,\beta} = M_{\alpha,\beta}^- M_{\alpha,\beta}^+ M_{\alpha,\beta}^- + M_{\alpha,\beta}^- \mu_{\alpha,\beta}, \quad (4.7)$$

$$H_{\alpha+1,\beta+1} M_{\alpha,\beta}^- = M_{\alpha,\beta}^- M_{\alpha,\beta}^+ M_{\alpha,\beta}^- + \mu_{\alpha,\beta} M_{\alpha,\beta}^-, \quad (4.8)$$

donde hemos usado en cada caso una de las dos factorizaciones de (4.4). Por tanto, tenemos que  $M_{\alpha,\beta}^- H_{\alpha,\beta} = H_{\alpha+1,\beta+1} M_{\alpha,\beta}^-$ . Tomando hermíticos conjugados en esta expresión, teniendo en cuenta que el hamiltoniano es hermítico y que el conjugado de  $M_{\alpha,\beta}^-$  es  $M_{\alpha,\beta}^+$ , obtenemos que  $H_{\alpha,\beta} M_{\alpha,\beta}^+ = M_{\alpha,\beta}^+ H_{\alpha+1,\beta+1}$ .

Por tanto, si tenemos una solución  $H_{\alpha,\beta} \psi_{(\alpha,\beta)}^n = E_{(\alpha,\beta)}^n \psi_{(\alpha,\beta)}^n$  ( $n$  indica el nivel de energía del hamiltoniano correspondiente), entonces:

$$H_{\alpha+1,\beta+1} M_{\alpha,\beta}^- \psi_{(\alpha,\beta)}^n = M_{\alpha,\beta}^- H_{\alpha,\beta} \psi_{(\alpha,\beta)}^n = E_{(\alpha,\beta)}^n M_{\alpha,\beta}^- \psi_{(\alpha,\beta)}^n. \quad (4.9)$$

Así que  $M_{\alpha,\beta}^- \psi_{(\alpha,\beta)}^n$  es autofunción de  $H_{\alpha+1,\beta+1}$  con el mismo autovalor que  $\psi_{(\alpha,\beta)}^n$ , es decir,  $E_{(\alpha,\beta)}^n$ .

De manera análoga, si  $H_{\alpha+1,\beta+1} \psi_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1} = E_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1} \psi_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1}$ :

$$H_{\alpha,\beta} M_{\alpha,\beta}^+ \psi_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1} = M_{\alpha,\beta}^+ H_{\alpha+1,\beta+1} \psi_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1} = E_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1} M_{\alpha,\beta}^+ \psi_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1}. \quad (4.10)$$

Luego  $M_{\alpha,\beta}^+ \psi_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1}$  es autofunción de  $H_{\alpha,\beta}$  con autovalor  $E_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1}$ . Con estos resultados, podemos obtener la acción de estos operadores sobre las autofunciones de los hamiltonianos. Además, como no hay degeneración (problema regular de Sturm-Liouville), si conocemos una autofunción, podemos calcular, mediante la aplicación de estos operadores, las autofunciones asociadas al mismo valor de la energía de distintos hamiltonianos de la jerarquía (solo de aquellos que se alcancen aumentando o disminuyendo en 1 ambos parámetros a

partir del hamiltoniano inicial).

Mediante la factorización (4.4) podemos obtener el estado y la energía fundamental de la jerarquía  $\{H_{\alpha+n, \beta+n}\}$ . Para ello, consideramos los estados aniquilados por el operador  $M_{\alpha, \beta}^-$ , resolviendo la ecuación diferencial  $M_{\alpha, \beta}^- \psi_{(\alpha, \beta)}^0 = 0$ :

$$\psi_{(\alpha, \beta)}^0 = K_{(\alpha, \beta)}^0 \cos^{\alpha+1/2} \phi \sin^{\beta+1/2} \phi, \quad (4.11)$$

donde  $K_{(\alpha, \beta)}^0$  es una constante de normalización para el módulo al cuadrado de la función de onda en  $(0, \pi/2)$ :

$$K_{(\alpha, \beta)}^0 = \sqrt{\frac{2\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}}. \quad (4.12)$$

Las condiciones sobre los parámetros para que la función sea de cuadrado integrable son  $\alpha > -1$  y  $\beta > -1$ . En este caso, puesto que el operador  $M_{\alpha, \beta}^-$  aniquila estas funciones, su correspondiente autovalor de la energía, en virtud de la factorización (4.4) es:

$$E_{(\alpha, \beta)}^0 = \mu_{\alpha, \beta} = (\alpha + \beta + 1)^2. \quad (4.13)$$

Por tanto tenemos que, salvo constantes de normalización:

$$\begin{aligned} M_{\alpha, \beta}^- &: \psi_{(\alpha, \beta)}^n \rightarrow \psi_{(\alpha+1, \beta+1)}^{n-1} \\ M_{\alpha, \beta}^+ &: \psi_{(\alpha+1, \beta+1)}^{n-1} \rightarrow \psi_{(\alpha, \beta)}^n. \end{aligned} \quad (4.14)$$

La razón por la que ponemos que  $n$  aumenta o disminuye en 1 es porque al aplicar estos operadores, obtenemos una autofunción de un hamiltoniano con el mismo autovalor de la energía. Este hamiltoniano tiene parámetros  $(\alpha \pm 1, \beta \pm 1)$ , luego vemos que su estado fundamental tendrá energía  $(\alpha + \beta + 1 \pm 2)^2$ , por lo que será mayor o menor (dependiendo del operador utilizado) que el estado fundamental de  $H_{\alpha, \beta}$ , de manera que el valor de la energía del que partimos estará en un nivel de energía inferior del nuevo hamiltoniano si aumentamos los parámetros  $\alpha, \beta$ , y superior en caso contrario. Esto lo denotamos con un aumento o disminución de  $n$  en una unidad. Siguiendo esta notación, tendremos entonces que:

$$E_{(\alpha, \beta)}^n = E_{(\alpha+1, \beta+1)}^{n-1} = \dots = E_{(\alpha+n, \beta+n)}^0 = (\alpha + \beta + 2n + 1)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Por otro lado, las autofunciones correspondientes a cada hamiltoniano las podemos obtener mediante la aplicación reiterada de los operadores, según (4.14). En [2] se obtiene la siguiente expresión, válida salvo constantes de normalización:

$$\psi_{(\alpha, \beta)}^n = \cos^{\alpha+1/2} \phi \sin^{\beta+1/2} \phi P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2\phi), \quad (4.16)$$

donde  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  son los polinomios de Jacobi. A continuación presentamos las gráficas de algunas autofunciones (salvo constante de normalización):

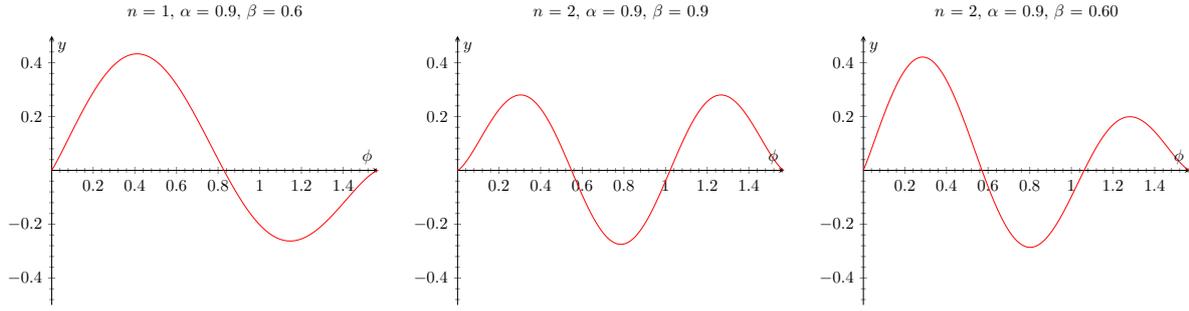


Figura 4: Gráficas de las autofunciones para distintos valores de los parámetros  $n$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ .

A partir de la factorización (4.4) podemos obtener los coeficientes de normalización de la acción de los operadores  $M_{\alpha,\beta}^\pm$  sobre las autofunciones del hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \langle M_{\alpha-1,\beta-1}^+ \psi_{(\alpha,\beta)}^n, M_{\alpha-1,\beta-1}^+ \psi_{(\alpha,\beta)}^n \rangle &= \langle \psi_{(\alpha,\beta)}^n, M_{\alpha-1,\beta-1}^- M_{\alpha-1,\beta-1}^+ \psi_{(\alpha,\beta)}^n \rangle = E_{(\alpha,\beta)}^n - \mu_{\alpha-1,\beta-1} \\ &= (\alpha + \beta + 2n + 1)^2 - (\alpha + \beta - 1)^2 \\ &= 4(n + 1)(\alpha + \beta + n), \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde hemos tenido en cuenta que los operadores  $M_{\alpha,\beta}^\pm$  son hermíticos conjugados. Por tanto tenemos que

$$M_{\alpha-1,\beta-1}^+ \psi_{(\alpha,\beta)}^n = 2\sqrt{(n+1)(\alpha+\beta+n)} \psi_{(\alpha-1,\beta-1)}^{n+1}. \quad (4.18)$$

De manera análoga, podemos obtener el coeficiente de la acción de  $M_{\alpha,\beta}^-$ :

$$\langle M_{\alpha,\beta}^- \psi_{(\alpha,\beta)}^n, M_{\alpha,\beta}^- \psi_{(\alpha,\beta)}^n \rangle = E_{(\alpha,\beta)}^n - \mu_{\alpha,\beta} = 4n(\alpha + \beta + n + 1). \quad (4.19)$$

Así que obtenemos:

$$M_{\alpha,\beta}^- \psi_{(\alpha,\beta)}^n = 2\sqrt{n(\alpha + \beta + n + 1)} \psi_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1}. \quad (4.20)$$

Ahora podemos definir los operadores sin índices  $\tilde{M}^\pm = \frac{1}{2}M^\pm$  actuando sobre las autofunciones de hamiltonianos consecutivos de esta jerarquía como en (4.14). Por ejemplo,  $\tilde{M}^+ \psi_{(\alpha,\beta)}^n = \frac{1}{2}M_{\alpha-1,\beta-1}^+ \psi_{(\alpha,\beta)}^n$  y  $\tilde{M}^- \psi_{(\alpha,\beta)}^n = \frac{1}{2}M_{\alpha,\beta}^- \psi_{(\alpha,\beta)}^n$ . Además, por conveniencia en lo siguiente, definimos también el operador diagonal  $\tilde{M} \psi_{(\alpha,\beta)}^n = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \psi_{(\alpha,\beta)}^n$ .

Los conmutadores de estos operadores se pueden obtener a partir de los coeficientes de la acción de  $M^\pm$  (4.14) o con la factorización del hamiltoniano (4.4). Estos cálculos se encuentran en el apéndice C.1, y el resultado que se obtiene es que el conjunto de operadores  $\{\tilde{M}, \tilde{M}^+, \tilde{M}^-\}$  satisface las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\tilde{M}^-, \tilde{M}^+] = -2\tilde{M}, \quad [\tilde{M}, \tilde{M}^\pm] = \pm\tilde{M}^\pm. \quad (4.21)$$

Esto nos dice que estos operadores forman un álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ . Siguiendo la terminología que hemos introducido en la sección 2, tenemos además que esta es una base de Cartan-Weyl del álgebra de Lie que estamos considerando. Las representaciones unitarias

$\mathcal{U}_j, j = 0, 1/2, 1, \dots$  se basan en las funciones del estado fundamental (4.11) tales que  $\tilde{M}\psi_{(\alpha,\beta)}^0 = -j\psi_{(\alpha,\beta)}^0 = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\psi_{(\alpha,\beta)}^0$  (las representaciones unitarias son de dimensión  $2j + 1$ ). Por tanto, los parámetros correspondientes a los estados fundamentales de tales representaciones satisfacen  $\alpha + \beta = 2j = k, k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ .

Finalmente, podemos introducir una notación de 3 índices, de manera que tengamos

$$\begin{aligned} H_{\alpha,\beta}\psi_{(\alpha,\beta,\epsilon)} &= E_\epsilon\psi_{(\alpha,\beta,\epsilon)}, \\ E_\epsilon &= \epsilon^2, \quad \psi_{(\alpha,\beta,\epsilon)} \equiv \psi_{(\alpha,\beta)}^n, \quad \epsilon = \alpha + \beta + 2n + 1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A partir de los coeficientes que hemos calculado antes podemos obtener los correspondientes a esta nueva notación haciendo la sustitución  $n = \frac{1}{2}(\epsilon - \alpha - \beta - 1)$

$$\begin{cases} \tilde{M}^-\psi_{(\alpha,\beta,\epsilon)} = \frac{1}{2}\sqrt{(\epsilon + \alpha + \beta + 1)(\epsilon - \alpha - \beta - 1)}\psi_{(\alpha+1,\beta+1,\epsilon)}, \\ \tilde{M}^+\psi_{(\alpha+1,\beta+1,\epsilon)} = \frac{1}{2}\sqrt{(\epsilon + \alpha + \beta + 1)(\epsilon - \alpha - \beta - 1)}\psi_{(\alpha,\beta,\epsilon)}, \\ \tilde{M}\psi_{(\alpha,\beta,\epsilon)} = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\psi_{(\alpha,\beta,\epsilon)}. \end{cases} \quad (4.23)$$

## 4.2 El segundo conjunto de “shift operators”, $N^\pm$

En esta sección vamos a encontrar otra factorización distinta a la que hemos visto en la sección anterior y que conmuta con ella. De la definición del hamiltoniano (4.1) es evidente que es invariante bajo reflexiones de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$I_\alpha : (\alpha, \beta) \rightarrow (-\alpha, \beta), \quad I_\beta : (\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, -\beta). \quad (4.24)$$

Estas simetrías nos dan otra factorización del hamiltoniano y una nueva jerarquía. Para ello, definimos unos nuevos operadores  $N$  de la siguiente manera:

$$N_{\alpha,\beta}^\pm := I_\alpha M_{\alpha,\beta}^\pm I_\alpha. \quad (4.25)$$

En esta nueva notación, tenemos que  $I_\alpha H_{\alpha,\beta} I_\alpha = H_{\alpha,\beta}$ ,  $I_\alpha^2 = 1$  y  $I_\alpha \mu_{\alpha,\beta} I_\alpha = \mu_{-\alpha,\beta}$ . Las dos primeras igualdades son consecuencia de la invariancia bajo reflexiones del hamiltoniano y por la definición de  $I_\alpha$ . Para la última (denominamos  $\tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m$  a las nuevas autofunciones que vamos a obtener a partir de esta factorización):

$$I_\alpha \mu_{\alpha,\beta} I_\alpha \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m = I_\alpha (\mu_{\alpha,\beta} \tilde{\psi}_{(-\alpha,\beta)}^m) = \mu_{-\alpha,\beta} \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m. \quad (4.26)$$

Por tanto, si definimos  $\nu_{\alpha,\beta} = \mu_{-\alpha,\beta}$ , multiplicamos a ambos lados de las factorizaciones (4.4) por  $I_\alpha$  y tenemos en cuenta lo anterior, obtenemos las siguientes factorizaciones:

$$H_{\alpha,\beta} = N_{\alpha,\beta}^+ N_{\alpha,\beta}^- + \nu_{\alpha,\beta} = N_{\alpha+1,\beta-1}^- N_{\alpha+1,\beta-1}^+ + \nu_{\alpha+1,\beta-1}. \quad (4.27)$$

Además, podemos obtener la expresión explícita de  $N_{\alpha,\beta}^\pm$  a partir de la de  $M_{\alpha,\beta}^\pm$  (4.5)

$$\begin{aligned} I_\alpha M_{\alpha,\beta}^\pm I_\alpha \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m &= I_\alpha (\pm \partial_\phi - (\alpha + 1/2) \tan \phi + (\beta + 1/2) \cot \phi) \tilde{\psi}_{(-\alpha,\beta)}^m \\ &= (\pm \partial_\phi - (-\alpha + 1/2) \tan \phi + (\beta + 1/2) \cot \phi) \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Por tanto tenemos

$$N_{\alpha,\beta}^\pm = \pm \partial_\phi + (\alpha - 1/2) \tan \phi + (\beta + 1/2) \cot \phi \quad (4.29)$$

y

$$\nu_{\alpha,\beta} = (-\alpha + \beta + 1)^2. \quad (4.30)$$

De manera análoga a la sección anterior, este nuevo conjunto de operadores nos lleva a la jerarquía  $\{H_{\alpha-m,\beta+m}\}$  con autovalores

$$E_{(\alpha,\beta)}^m = E_{\alpha-1,\beta+1}^{m-1} = \dots = E_{\alpha-m,\beta+m}^0 = (-\alpha + \beta + 2m + 1)^2. \quad (4.31)$$

Las autofunciones fundamentales aniquiladas por  $N_{\alpha,\beta}^-$  son, salvo un factor de normalización,

$$\tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^0 = \cos \phi^{-\alpha+1/2} \sin \phi^{\beta+1/2}, \quad (4.32)$$

donde la condición de que la solución sea de cuadrado integrable se traduce en que  $\alpha < 1$  y  $\beta > -1$ .

De manera similar a la sección anterior, se tiene que el hermítico conjugado de  $N_{\alpha,\beta}^+$  es  $N_{\alpha,\beta}^-$ . Además, utilizando la factorización (4.27) obtenemos que

$$\begin{aligned} N_{\alpha,\beta}^- H_{\alpha,\beta} &= H_{\alpha-1,\beta+1} N_{\alpha,\beta}^-, \\ H_{\alpha,\beta} N_{\alpha,\beta}^+ &= N_{\alpha,\beta}^+ H_{\alpha-1,\beta+1}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Esto significa que  $N_{\alpha,\beta}^- \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m$  es autofunción de  $H_{\alpha-1,\beta+1}$  con autovalor  $E_{(\alpha,\beta)}^m = E_{\alpha-1,\beta+1}^{m-1}$  y  $N_{\alpha,\beta}^+ \tilde{\psi}_{(\alpha-1,\beta+1)}^{m-1}$  es autofunción de  $H_{\alpha,\beta}$  con autovalor  $E_{\alpha-1,\beta+1}^{m-1} = E_{(\alpha,\beta)}^m$ . Esto nos da la acción de los operadores en las autofunciones de esta jerarquía

$$\begin{aligned} N_{\alpha,\beta}^- : \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m &\rightarrow \tilde{\psi}_{(\alpha-1,\beta+1)}^{m-1} \\ N_{\alpha,\beta}^+ : \tilde{\psi}_{(\alpha-1,\beta+1)}^{m-1} &\rightarrow \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Como vemos, son de nuevo “shift operators” que cambian los parámetros pero mantienen el valor de la energía.

Podemos obtener los coeficientes de la acción de estos operadores utilizando la factorización (4.27):

$$\begin{aligned} \langle N_{\alpha+1,\beta-1}^+ \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m, N_{\alpha+1,\beta-1}^+ \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m \rangle &= E_{(\alpha,\beta)}^m - \nu_{\alpha+1,\beta-1} = (-\alpha + \beta + 2m + 1)^2 \\ &\quad - (-\alpha + \beta - 1)^2 = 4(m+1)(-\alpha + \beta + m). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por tanto, tenemos que

$$N_{\alpha+1,\beta-1}^+ \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m = 2\sqrt{(m+1)(-\alpha + \beta + m)} \tilde{\psi}_{(\alpha+1,\beta-1)}^{m+1}. \quad (4.36)$$

Para el otro operador:

$$\begin{aligned} \langle N_{\alpha,\beta}^- \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m, N_{\alpha,\beta}^- \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m \rangle &= E_{(\alpha,\beta)}^m - \nu_{\alpha,\beta} = (-\alpha + \beta + 2m + 1)^2 - (-\alpha + \beta + 1)^2 \\ &= 4m(-\alpha + \beta + m + 1). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Así que finalmente obtenemos

$$N_{\alpha,\beta}^- \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m = 2\sqrt{m(-\alpha + \beta + m + 1)} \tilde{\psi}_{(\alpha-1,\beta+1)}^{m-1}. \quad (4.38)$$

Vemos que los coeficientes son como los del apartado anterior, pero cambiando  $\alpha$  por  $-\alpha$ . Esto se podía ver directamente mediante los coeficientes que hemos calculado para los operadores  $M^\pm$  y utilizando la definición de los operadores  $N^\pm$  (4.29).

De nuevo, podemos obtener los operadores sin índices a partir de los resultados anteriores. Para ello, definimos  $\tilde{N}^\pm = \frac{1}{2}N^\pm$  y  $\tilde{N}\tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m = -\frac{1}{2}(-\alpha + \beta)\tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^m$ . A continuación, podemos calcular los conmutadores como en el caso anterior, o utilizar los que hemos calculado y aplicar la reflexión:

$$\begin{aligned} [\tilde{N}^-, \tilde{N}^+] &= I_\alpha[\tilde{M}^-, \tilde{M}^+]I_\alpha = I_\alpha(-2\tilde{M})I_\alpha = -2\tilde{N}, \\ [\tilde{N}, \tilde{N}^\pm] &= I_\alpha[\tilde{M}, \tilde{M}^\pm]I_\alpha = I_\alpha(\pm\tilde{M}^\pm)I_\alpha = \pm\tilde{N}^\pm. \end{aligned} \quad (4.39)$$

De nuevo, nos encontramos con que  $\{\tilde{N}, \tilde{N}^+, \tilde{N}^-\}$  cumplen las relaciones de conmutación del álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  y forman una base de Cartan-Weyl. Podemos expresar la acción de estos operadores sobre las autofunciones  $\tilde{\psi}_{(\alpha,\beta,\epsilon)}$  en la notación de 3 índices que hemos introducido anteriormente (basta introducir  $m = \frac{1}{2}(\epsilon + \alpha - \beta - 1)$  en los coeficientes que hemos hallado)

$$\begin{cases} \tilde{N}^- \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta,\epsilon)} = \frac{1}{2}\sqrt{(\epsilon - \alpha + \beta + 1)(\epsilon + \alpha - \beta - 1)} \tilde{\psi}_{(\alpha-1,\beta+1,\epsilon)}, \\ \tilde{N}^+ \tilde{\psi}_{(\alpha-1,\beta+1,\epsilon)} = \frac{1}{2}\sqrt{(\epsilon - \alpha + \beta + 1)(\epsilon + \alpha - \beta - 1)} \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta,\epsilon)}, \\ \tilde{N} \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta,\epsilon)} = -\frac{1}{2}(-\alpha + \beta) \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta,\epsilon)}. \end{cases} \quad (4.40)$$

En este caso, las representaciones unitarias  $\mathcal{U}_{j'}, j' = 0, 1/2, 1, \dots$  están basadas en funciones del estado fundamental tales que

$$\tilde{N}^- \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^0 = 0, \quad \tilde{N} \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^0 = -j' \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^0 = -\frac{1}{2}(-\alpha + \beta) \tilde{\psi}_{(\alpha,\beta)}^0. \quad (4.41)$$

Por tanto, los parámetros que corresponden a una representación con tales estados fundamentales debe satisfacer  $-\alpha + \beta = 2j' = k', k' \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ .

Por otro lado, podemos comprobar que los dos conjuntos de operadores que hemos encontrado,  $\{\tilde{N}, \tilde{N}^\pm\}$  y  $\{\tilde{M}, \tilde{M}^\pm\}$ , conmutan entre sí, lo que nos lleva a una suma directa  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . Estos cálculos se encuentran en el apéndice C.1. A continuación incluimos un diagrama en el plano  $\alpha - \beta$  de la acción de estos conjuntos de operadores.

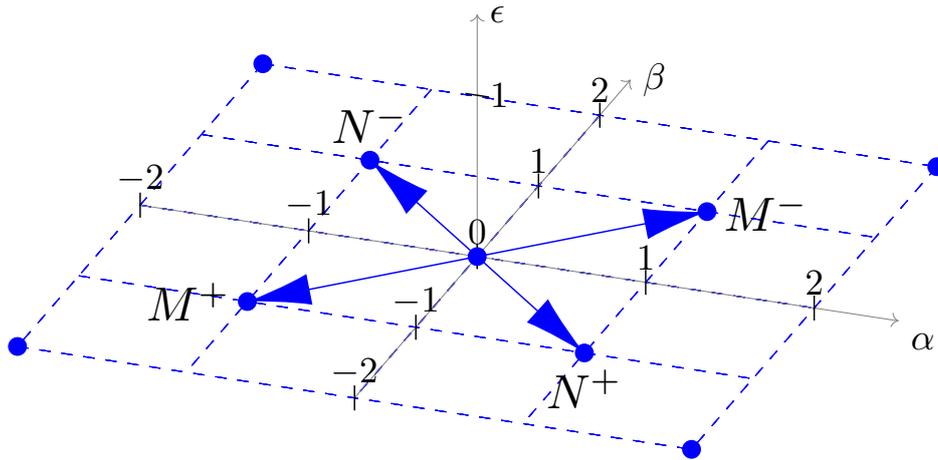


Figura 5: Gráfica de la acción de los operadores  $\tilde{M}^{\pm} \equiv M^{\pm}$  y  $\tilde{N}^{\pm} \equiv N^{\pm}$  en el plano  $\alpha - \beta$ .

Las representaciones unitarias compatibles con las condiciones en los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son simplemente “representaciones cuadradas”,  $j \otimes j$ , con  $2j = n \in \mathbb{Z}^+$ , y dimensión  $(n+1)^2 = (2j+1)^2$ , como vamos a ver en la siguiente sección.

### 4.3 Estados fundamentales “highest weights”

Los “highest weights” son los estados fundamentales que son aniquilados simultáneamente por un operador  $\tilde{M}^{\pm}$  y un operador  $\tilde{N}^{\pm}$  (que llamaremos simplemente  $M^{\pm}$  y  $N^{\pm}$ , quitando la tilde). Las representaciones finitas de los grupos semisimples (suma directa de simples) se obtienen a partir del estado fundamental aniquilado por los operadores subida o bajada, que son precisamente los estados fundamentales de peso máximo (“highest weights”). Este estado determina la representación, que va a ser también unitaria en este caso. Comenzamos tomando la expresión de los estados aniquilados por el operador  $M^{-}$  de (4.11)

$$\psi_{(\alpha,\beta)}^0 = K_{(\alpha,\beta)}^0 \cos^{\alpha+1/2} \phi \sin^{\beta+1/2} \phi. \quad (4.42)$$

Ahora imponemos que también sea aniquilado por  $N^{-}$

$$N_{\alpha,\beta}^{-} \psi_{(\alpha,\beta)}^0 = 2\alpha \cos^{\alpha-1/2} \phi \sin^{\beta+3/2} \phi = 0, \quad (4.43)$$

lo que nos lleva a la condición  $\alpha = 0$ . Por tanto, los estados fundamentales comunes serán

$$\psi_{(0,\beta)}^0 = K_{(0,\beta)}^0 \cos^{1/2} \phi \sin^{\beta+1/2} \phi, \quad (4.44)$$

que tienen energía

$$E_{(0,\beta)}^0 = (\beta+1)^2. \quad (4.45)$$

Los autovalores de los operadores diagonales en estos estados son

$$M\psi_{(0,\beta)}^0 = N\psi_{(0,\beta)}^0 = -\frac{\beta}{2}\psi_{(0,\beta)}^0 = -j\psi_{(0,\beta)}^0 = -j'\psi_{(0,\beta)}^0, \quad (4.46)$$

por lo que para que la representación sea unitaria debe ser  $\beta = n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$  y  $j = j' = \frac{n}{2}$ . Con esta notación, cada representación está caracterizada por un valor de la energía  $E_n = (n+1)^2$ . Estos estados también se pueden caracterizar con el valor propio de los operadores de Casimir (de cada  $\mathfrak{su}(2)$ ):

$$j(j+1) = j'(j'+1) = \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} + 1 \right). \quad (4.47)$$

Es habitual en este contexto hacer diagramas de las bases de estados independientes de las representaciones de este tipo mediante puntos. Para ello, distinguimos dos sucesiones de representaciones: las de  $n$  par y las de  $n$  impar. En ambos casos se trata de un diagrama “cuadrado”, formado por  $(n+1)^2 = (2j+1)^2$  puntos (dimensión de la representación), en el que cada punto representa los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de los estados. A continuación presentamos estos diagramas para algunos casos particulares, donde hemos representado, además, el estado de peso máximo que hemos considerado en color rojo y la acción de los operadores  $M^+$  y  $N^+$  que utilizamos para construir la representación a partir de ese estado:

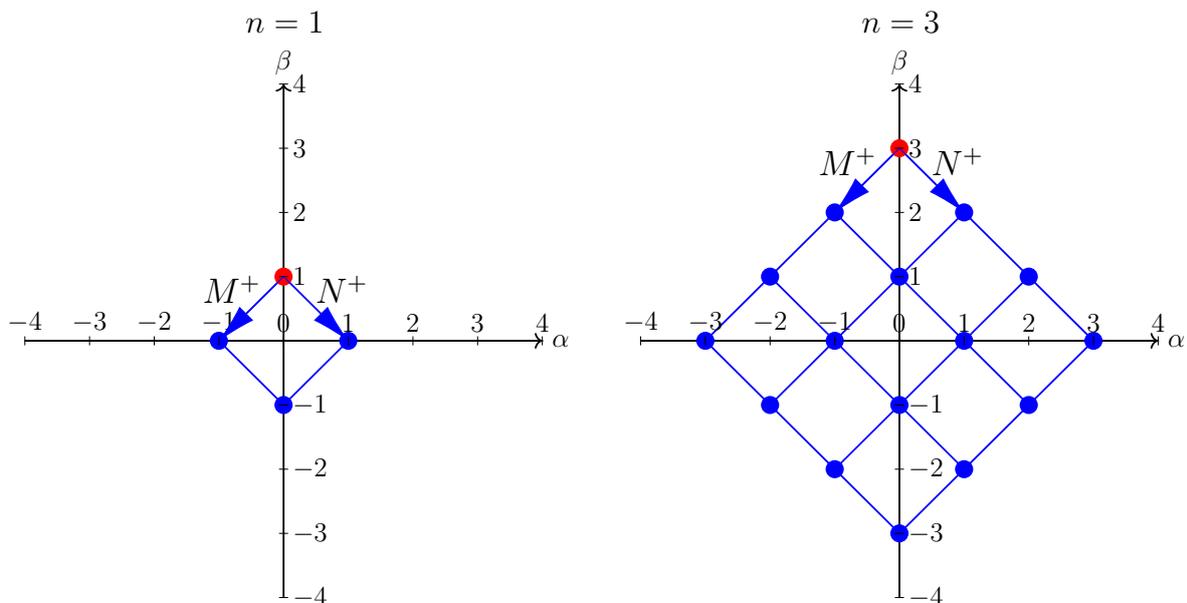


Figura 6: Diagramas de las bases de estados independientes con energía  $E_n = (n+1)^2$  de representaciones impares.

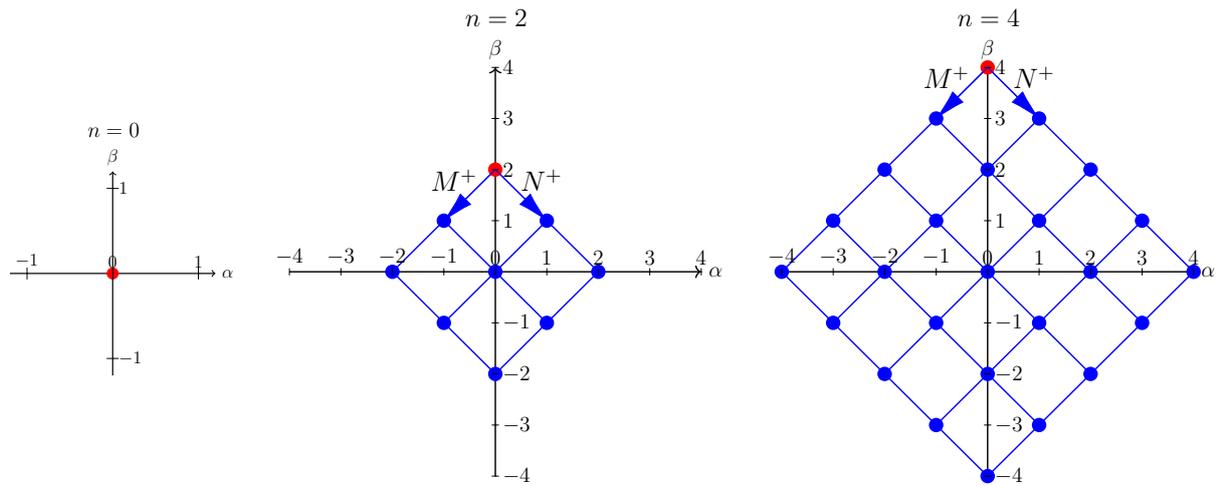


Figura 7: Diagramas de las bases de estados independientes con energía  $E_n = (n + 1)^2$  de representaciones pares.

Estas series de diagramas las podemos representar en un diagrama tridimensional, tomando el eje vertical como  $n$ .

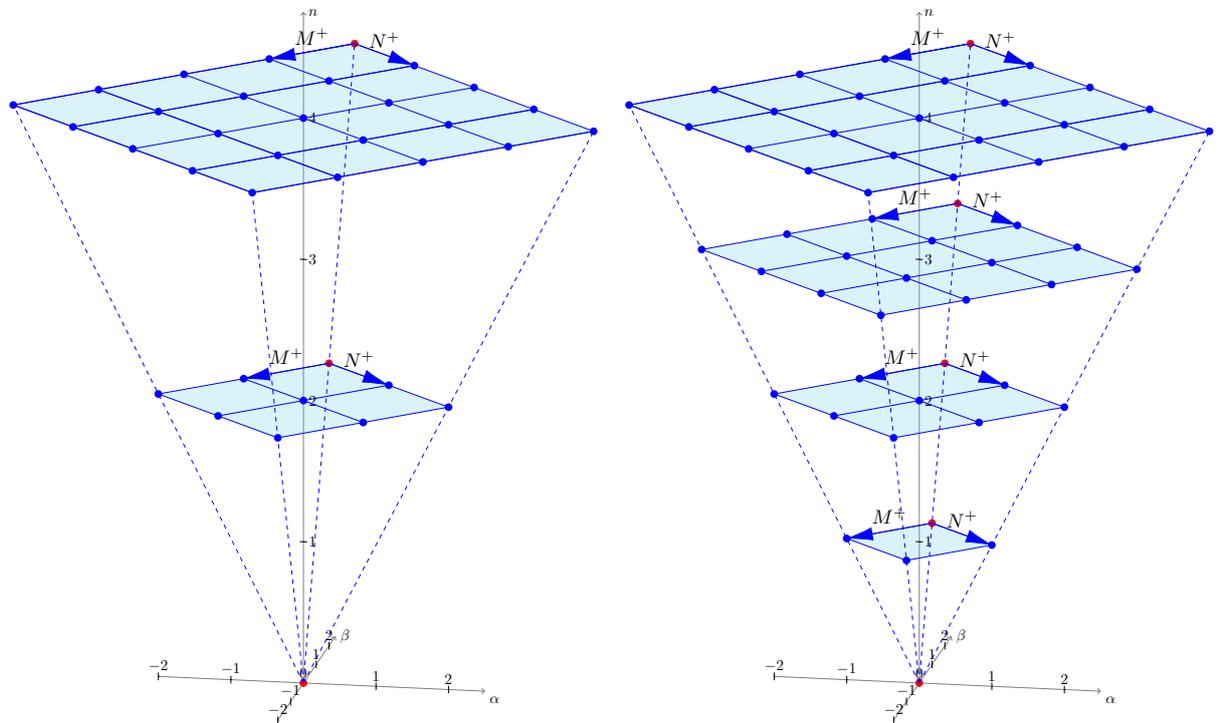


Figura 8: Diagramas tridimensionales de las bases de estados independientes de representaciones pares y de la serie completa, respectivamente.

#### 4.4 Relación con las representaciones de $\mathfrak{so}(4)$

Comenzamos considerando la representación obtenida en la sección 3.2.3. Se trata de una representación de  $\mathfrak{so}(4)$  como suma directa  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ , por lo que es posible que coincida con las que hemos obtenido en la factorización del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller. Para comprobar esto, lo primero que vamos a hacer es considerar una transformación del operador de Casimir (3.57)  $\psi(\eta, \zeta, \theta) = f(\theta)\tilde{\psi}(\eta, \zeta, \theta)$  que elimine el término en  $\partial_\theta$  (para obtener una expresión solo en derivadas segundas y términos sin derivadas). Este proceso, y el resto de procedimientos de esta sección que no aparezcan de manera explícita, se llevan a cabo en el apéndice C.2, y se obtiene en este caso que  $f(\theta) = \frac{c}{\sqrt{\sin 2\theta}}$  para que se anule el término en  $\partial_\theta$ .

Considerando esta transformación pasamos al operador transformado siguiente:

$$A' = \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\eta^2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \partial_\zeta^2 + \partial_\theta^2 + \frac{1/4}{\sin^2 \theta} + \frac{1/4}{\cos^2 \theta} + 1. \quad (4.48)$$

Si ahora buscamos soluciones en variables separadas  $\psi(\eta, \zeta, \theta) = H(\eta)Z(\zeta)\Theta(\theta)$ , se deducen las siguientes ecuaciones para  $H$ ,  $Z$  y  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} &= -m^2 H \Rightarrow H_m(\eta) = e^{im\eta}, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial \zeta^2} &= -n^2 Z \Rightarrow Z_n(\zeta) = e^{in\zeta}, \\ \left( \partial_\theta^2 + \frac{1/4 - m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1/4 - n^2}{\cos^2 \theta} \right) \Theta(\theta) &= E' \Theta(\theta), \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde  $E' = E - 1$ , siendo  $E$  el autovalor de  $\psi$ ,  $A'\psi = E\psi$ . Por otro lado, como mencionamos en el apéndice C.2, si hubiéramos considerado la versión hermítica de los operadores (3.53) y (3.54) (multiplicando por  $i$  a los que tenemos), obtendríamos un signo menos global en el elemento de Casimir, que al final se traduciría en un signo menos en esta última ecuación, que entonces coincidiría directamente con la ecuación de autovalores del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller (4.1). Con ese signo menos (de hecho, a partir de ahora entenderemos que tenemos siempre este signo menos global), la relación entre los autovalores de  $A'$  y del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller pasaría a ser  $E' = E + 1$ , que podemos denotar  $E_{PT} = E_{\mathfrak{so}(4)} + 1$ . Vemos que esto cuadra perfectamente con los resultados que ya hemos obtenido, puesto que de (4.45) tenemos que  $E_{PT} = (n + 1)^2$ , y de (3.82) obtenemos que  $E_{\mathfrak{so}(4)} = n(n + 2)$ , así que la expresión que hemos escrito antes se convierte en la identidad  $(n + 1)^2 = n(n + 2) + 1$ .

Por comparación directa con (4.1) obtenemos que  $\alpha = n$  y  $\beta = m$  para los parámetros. También tenemos la siguiente relación entre las autofunciones: dada una autofunción  $\psi$  del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller (4.1) con autovalor  $E + 1$ ,  $e^{im\eta}e^{in\zeta}\psi$  es autofunción de  $A'$  con autovalor  $E$ ; y al revés, dada una autofunción  $e^{im\eta}e^{in\zeta}\psi$  de  $A'$  con autovalor  $E$ ,  $\psi$  es autofunción del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller con autovalor  $E + 1$ .

Para ver la relación entre los operadores  $\hat{X}^\pm, \hat{X}_3, \hat{Y}^\pm$  e  $\hat{Y}_3$  de (3.58) con los operadores  $\tilde{M}^\pm, \tilde{M}, \tilde{N}^\pm$  y  $\tilde{N}$  de (4.5), (4.23) y (4.29), (4.40) lo primero que tenemos que hacer es aplicar la transformación con  $f = \frac{c}{\sqrt{\sin 2\theta}}$  a los operadores de (3.58) (y los multiplicamos por  $i$ , para tener la versión hermítica):

$$\begin{cases} \frac{1}{f}i\hat{X}^+f = \frac{1}{2}e^{-i(\zeta+\eta)}(-i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta - \cot 2\theta + \partial_\theta), \\ \frac{1}{f}i\hat{X}^-f = \frac{1}{2}e^{i(\zeta+\eta)}(-i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta + \cot 2\theta - \partial_\theta), \\ \frac{1}{f}i\hat{X}_3f = \frac{i}{2}(\partial_\eta + \partial_\zeta), \end{cases} \quad (4.50)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{f}i\hat{Y}^+f = \frac{1}{2}e^{i(\zeta-\eta)}(i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta + \cot 2\theta - \partial_\theta), \\ \frac{1}{f}i\hat{Y}^-f = \frac{1}{2}e^{-i(\zeta-\eta)}(i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta - \cot 2\theta + \partial_\theta), \\ \frac{1}{f}i\hat{Y}_3f = \frac{i}{2}(\partial_\eta - \partial_\zeta). \end{cases} \quad (4.51)$$

A partir de estas expresiones, realizando la sustitución  $\partial_\eta \rightarrow im, \partial_\zeta \rightarrow in$  debido a la forma de las autofunciones (a los operadores tras realizar esta sustitución los denotaremos por  $\tilde{X}^\pm, \tilde{X}_3, \tilde{Y}^\pm$  y  $\tilde{Y}_3$ ), cambiando de lado la exponencial y teniendo en cuenta que  $\cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta$ , podemos llegar finalmente a las siguientes relaciones entre operadores (ver apéndice C.3):

$$\begin{cases} \tilde{X}^+ = \tilde{M}^+e^{-i(\zeta+\eta)}, \\ \tilde{X}^- = e^{i(\zeta+\eta)}\tilde{M}^-, \\ \tilde{X}_3 = \tilde{M}, \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{Y}^+ = -\tilde{N}^+e^{i(\zeta-\eta)}, \\ \tilde{Y}^- = -e^{-i(\zeta-\eta)}\tilde{N}^-, \\ \tilde{Y}_3 = \tilde{N}. \end{cases} \quad (4.52)$$

Vemos que la relación entre ambos conjuntos de operadores es muy cercana, solo se diferencian en la exponencial y el signo. También vemos fácilmente que  $(\tilde{X}^+)^\dagger = \tilde{X}^-$  y  $(\tilde{Y}^+)^\dagger = \tilde{Y}^-$ .

## 4.5 Relación entre las dos representaciones de $\mathfrak{so}(4)$ que hemos obtenido

Ahora que ya hemos estudiado en profundidad las representaciones de  $\mathfrak{so}(4)$  obtenidas mediante las coordenadas hipersféricas y las coordenadas de Hopf, vamos a estudiar brevemente la relación que hay entre ambas. Si el valor propio del Casimir es el mismo  $n(n+2)$  entonces son equivalentes.

En el caso de la representación obtenida con las coordenadas de Hopf (y el del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller), la base de funciones propias está formada por funciones que son propias de  $\hat{X}_3$  e  $\hat{Y}_3$  ( $\tilde{M}$  y  $\tilde{N}$ ). Si identificamos estos autovalores  $j = j_1 = j_2 = \frac{n}{2}$  (como hemos hecho en la sección 4.3), tenemos que estas funciones forman la base producto tensorial  $|j, j; m_1, m_2\rangle$  (en la notación del hamiltoniano Pöschl-Teller  $m_1$  y  $m_2$  corresponderían a  $\alpha$  y  $\beta$ ), con  $-j \leq m_1, m_2 \leq j$ . La dimensión de esta representación es  $(2j+1)^2 = (n+1)^2$ .

Por otro lado, en el caso de la representación obtenida con las coordenadas hipersféricas, las base de funciones propias viene dada por funciones que son propias de  $\hat{H}_{(2)} = -\partial_{\phi_3}^2$  (el equivalente a  $L_3$  en teoría del momento angular) con autovalor  $m^2$  y del elemento

de Casimir de  $\mathfrak{so}(3)$  con autovalor  $l(l+1)$ . Por tanto, obtenemos una descomposición de  $j \otimes j = 0 \oplus 1 \oplus \cdots \oplus 2j$ , con  $2j = n$  y  $0 \leq l \leq n$ . Vemos que la dimensión sería

$$\sum_{l=0}^n (2l+1) = 2 \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \quad (4.53)$$

que obviamente coincide con la de la otra representación.

## 5 Conclusiones

El objetivo de este trabajo era estudiar el uso de los grupos de Lie clásicos en física a través de un hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller. Para ello, hemos introducido de manera sucinta varios conceptos e ideas que estaban implícitos en varias asignaturas del grado, como puede ser la relación entre grupos y álgebras de Lie a través de la función exponencial.

Hemos utilizado dos sistemas de coordenadas distintos para la esfera  $S^3$ , unas coordenadas análogas a las coordenadas esféricas en  $S^2$  y otras menos conocidas que se denominan de Hopf. Hemos visto que las primeras coordenadas están relacionadas con los grupos ortogonales  $SO(2)$ ,  $SO(3)$  y  $SO(4)$ , y las segundas con  $SU(2)$ , que actúa sobre un espacio complejo  $\mathbb{C}^2$  del que podemos pasar a otro real  $\mathbb{R}^4$ . Los dos sistemas de coordenadas dan lugar a dos representaciones distintas de  $\mathfrak{so}(4)$ , la primera que es la que podríamos denominar estándar y viene de las coordenadas hiperesféricas, y la segunda que la obtenemos a partir de dos representaciones de  $\mathfrak{su}(2)$  en  $S^3$  que conmutan y se obtienen de la acción de  $SU(2)$  sobre  $S^3$  por la izquierda y por la derecha. Al estudiar las factorizaciones estándar del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller aparece una representación de  $\mathfrak{so}(4)$  que resulta no ser la estándar, y que está estrechamente ligada a la que obtenemos a partir de las coordenadas de Hopf.

El trabajo incluye aplicaciones de algunos grupos que son nuevas para el grado, como es el grupo  $SO(4)$ , su álgebra de Lie y sus representaciones, todo ello dentro de un nivel accesible desde los conocimientos del grado. Algunos de los métodos utilizados son una generalización natural de lo visto en algunas asignaturas del grado, como puede ser la factorización del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller mediante “shift operators” en vez de operadores escalera, que son los que se utilizan por ejemplo en el oscilador armónico o en teoría del momento angular. También vemos una descomposición de una representación producto tensorial como suma directa, de manera que recuerda bastante a la teoría del momento angular.

En consecuencia, vemos que, generalizando un poco los conocimientos del grado podemos estudiar problemas más complicados con métodos análogos a los ya conocidos.

## Apéndices

En estos apéndices se incluyen cálculos que se han omitido en la exposición de las distintas secciones, ya sea debido a la longitud de los mismos o por favorecer la facilidad de lectura de la memoria.

### A El grupo de rotaciones $SO(3)$

#### A.1 Cambio de coordenadas en la representación diferencial sobre $S^3$

En esta sección veremos como llegar a los operadores diferenciales en las coordenadas  $\eta$ ,  $\zeta$  y  $\theta$  (3.53) y (3.54)

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = \frac{1}{2}(-\cos(\zeta + \eta) \cot \theta \partial_\eta + \cos(\zeta + \eta) \tan \theta \partial_\zeta - \sin(\zeta + \eta) \partial_\theta), \\ \hat{X}_2 = \frac{1}{2}(\sin(\zeta + \eta) \cot \theta \partial_\eta - \sin(\zeta + \eta) \tan \theta \partial_\zeta - \cos(\zeta + \eta) \partial_\theta), \\ \hat{X}_3 = \frac{1}{2}(\partial_\eta + \partial_\zeta), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{cases} \hat{Y}_1 = \frac{1}{2}(\cos(\zeta - \eta) \cot \theta \partial_\eta + \cos(\zeta - \eta) \tan \theta \partial_\zeta - \sin(\zeta - \eta) \partial_\theta), \\ \hat{Y}_2 = \frac{1}{2}(\sin(\zeta - \eta) \cot \theta \partial_\eta + \sin(\zeta - \eta) \tan \theta \partial_\zeta + \cos(\zeta - \eta) \partial_\theta), \\ \hat{Y}_3 = \frac{1}{2}(\partial_\eta - \partial_\zeta), \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

a partir de los operadores en las coordenadas  $a_1, a_2, b_1, b_2$  (3.49) y (3.50)

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = \frac{1}{2}(-b_2 \partial_{a_1} + b_1 \partial_{a_2} - a_2 \partial_{b_1} + a_1 \partial_{b_2}), \\ \hat{X}_2 = \frac{1}{2}(b_1 \partial_{a_1} + b_2 \partial_{a_2} - a_1 \partial_{b_1} - a_2 \partial_{b_2}), \\ \hat{X}_3 = \frac{1}{2}(-a_2 \partial_{a_1} + a_1 \partial_{a_2} + b_2 \partial_{b_1} - b_1 \partial_{b_2}), \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{cases} \hat{Y}_1 = \frac{1}{2}(b_2 \partial_{a_1} + b_1 \partial_{a_2} - a_2 \partial_{b_1} - a_1 \partial_{b_2}), \\ \hat{Y}_2 = \frac{1}{2}(-b_1 \partial_{a_1} + b_2 \partial_{a_2} + a_1 \partial_{b_1} - a_2 \partial_{b_2}), \\ \hat{Y}_3 = \frac{1}{2}(a_2 \partial_{a_1} - a_1 \partial_{a_2} + b_2 \partial_{b_1} - b_1 \partial_{b_2}). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Antes de empezar, es importante mencionar que este tipo de cálculos se suelen realizar con programas de cálculo simbólico, ya que los cálculos, aunque no necesariamente complicados, pueden ser bastante tediosos. En cualquier caso, a modo de ejemplo, podemos hacerlo para el generador:

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(-b_2 \partial_{a_1} + b_1 \partial_{a_2} - a_2 \partial_{b_1} + a_1 \partial_{b_2}). \quad (\text{A.5})$$

Lo primero que hay que hacer es expresar las derivadas respecto a las nuevas variables, es decir (para  $a_1$ ):

$$\partial_{a_1} = \frac{\partial \eta}{\partial a_1} \partial_\eta + \frac{\partial \zeta}{\partial a_1} \partial_\zeta + \frac{\partial \theta}{\partial a_1} \partial_\theta. \quad (\text{A.6})$$

Las derivadas las calculamos a partir de las expresiones (3.52):

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \\ \zeta &= \arctan \frac{a_2}{a_1}, \\ \eta &= -\arctan \frac{b_2}{b_1}.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Para nuestro caso obtenemos:

$$\frac{\partial \eta}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial a_1} = \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial a_1} = \frac{-a_1 \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2)}.\tag{A.8}$$

Si expresamos todo en las nuevas variables, utilizando (3.51)

$$\begin{aligned}a_1 &= \cos \theta \cos \zeta, \\ a_2 &= \cos \theta \sin \zeta, \\ b_1 &= \sin \theta \cos \eta, \\ b_2 &= -\sin \theta \sin \eta,\end{aligned}\tag{A.9}$$

obtenemos:

$$\frac{\partial \eta}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial a_1} = -\sec \theta \sin \zeta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial a_1} = -\sin \theta \cos \zeta.\tag{A.10}$$

Por tanto, ahora tenemos:

$$\partial_{a_1} = -\sec \theta \sin \zeta \partial_\zeta - \sin \theta \cos \zeta \partial_\theta.\tag{A.11}$$

De manera análoga se calculan el resto de derivadas:

$$\begin{aligned}\partial_{a_2} &= \sec \theta \cos \zeta \partial_\zeta - \sin \theta \sin \zeta \partial_\theta, \\ \partial_{b_1} &= -\csc \theta \sin \eta \partial_\eta + \cos \theta \cos \eta \partial_\theta, \\ \partial_{b_2} &= -\csc \theta \cos \eta \partial_\eta - \cos \theta \sin \eta \partial_\theta.\end{aligned}\tag{A.12}$$

Si introducimos estas expresiones en (A.5), y utilizamos las identidades trigonométricas del seno y el coseno de la suma, entonces obtenemos

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(-\cos(\zeta + \eta) \cot \theta \partial_\eta + \cos(\zeta + \eta) \tan \theta \partial_\zeta - \sin(\zeta + \eta) \partial_\theta),\tag{A.13}$$

que es la expresión que se expuso en (3.53).

## A.2 Cálculo de la métrica y el elemento de volumen en las coordenadas $\theta$ , $\zeta$ y $\eta$ de $S^3$ .

La métrica y el elemento de volumen que se presentan en las ecuaciones (3.55) y (3.56), respectivamente, son los siguientes:

$$\begin{aligned}dl^2 &= \sin^2 \theta d\eta^2 + \cos^2 \theta d\zeta^2 + d\theta^2, \\ dV &= \cos \theta \sin \theta d\eta d\zeta d\theta.\end{aligned}\tag{A.14}$$

Para realizar este cálculo, basta considerar el vector

$$\vec{a} = (\cos \theta \cos \zeta, \cos \theta \sin \zeta, \sin \theta \cos \eta, -\sin \theta \sin \eta) = (a_1, a_2, b_1, b_2) \quad (\text{A.15})$$

y calcular sus derivadas respecto a las variables  $\theta$ ,  $\zeta$  y  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{a}}{\partial \eta} &= (0, 0, -\sin \theta \sin \eta, -\sin \theta \cos \eta), \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial \theta} &= (-\sin \theta \cos \zeta, -\sin \theta \sin \zeta, \cos \theta \cos \eta, -\cos \theta \sin \eta), \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial \zeta} &= (-\cos \theta \sin \zeta, \cos \theta \cos \zeta, 0, 0), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Vemos que los vectores  $d\vec{a}_\eta = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \eta} d\eta$ ,  $d\vec{a}_\zeta = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \zeta} d\zeta$  y  $d\vec{a}_\theta = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \theta} d\theta$  son ortogonales. Por tanto, podemos calcular el elemento de longitud

$$dl^2 = d\vec{a}_\eta^2 + d\vec{a}_\zeta^2 + d\vec{a}_\theta^2 \quad (\text{A.17})$$

utilizando las expresiones

$$d\vec{a}_\eta^2 = \sin^2 \theta d\eta^2, \quad d\vec{a}_\zeta^2 = \cos^2 \theta d\zeta^2, \quad d\vec{a}_\theta^2 = d\theta^2, \quad (\text{A.18})$$

calculadas a partir de (A.16). De esta manera, obtenemos la expresión que buscábamos:

$$dl^2 = \sin^2 \theta d\eta^2 + \cos^2 \theta d\zeta^2 + d\theta^2. \quad (\text{A.19})$$

Por otro lado, el elemento de volumen es:

$$dV = |d\vec{a}_\eta| |d\vec{a}_\zeta| |d\vec{a}_\theta| = \cos \theta \sin \theta d\eta d\zeta d\theta. \quad (\text{A.20})$$

### A.3 Comprobación de antihermiticidad del operador $\hat{X}_1$

Vamos a comprobar que el operador

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2} (-\cos(\zeta + \eta) \cot \theta \partial_\eta + \cos(\zeta + \eta) \tan \theta \partial_\zeta - \sin(\zeta + \eta) \partial_\theta) \quad (\text{A.21})$$

es antihermítico respecto al producto escalar habitual con  $dV = \cos \theta \sin \theta d\eta d\zeta d\theta$  (el resto se hacen de manera análoga). Lo que queremos obtener es

$$\begin{aligned} \langle \psi, \hat{X}_1 \psi \rangle &= \int \psi^* \frac{1}{2} (-\cos(\zeta + \eta) \cot \theta \partial_\eta + \cos(\zeta + \eta) \tan \theta \partial_\zeta - \sin(\zeta + \eta) \partial_\theta) \psi dV \\ &= -\langle \hat{X}_1 \psi, \psi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Para ello, separamos la integral en 3 sumandos  $\langle \psi, \hat{X}_1 \psi \rangle = \int \psi^* (S_1 + S_2 + S_3) \psi dV$  (que son los 3 sumandos que vemos en (A.22)), y en cada uno utilizamos integración por partes. En el primer sumando integramos por partes en la variable  $\eta$  y aplicamos la condición de periodicidad de  $2\pi$  para la variable  $\eta$  en el término de evaluación (se anula):

$$\begin{aligned} \int \psi^* S_1 \psi &= -\frac{1}{2} \iiint \psi^* \cos(\zeta + \eta) \cot \theta \partial_\eta \psi \cos \theta \sin \theta d\eta d\zeta d\theta = -\int S_1 \psi^* \psi dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \iiint \psi^* \sin(\zeta + \eta) \cos^2 \theta \psi d\eta d\zeta d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Operando de manera análoga para  $S_2$  y  $S_3$ , teniendo en cuenta también la periodicidad de  $2\pi$  para la variable  $\zeta$  y que  $\psi(\theta)$  es finita (para los términos de evaluación) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int \psi^* S_2 \psi &= \frac{1}{2} \iiint \psi^* \cos(\zeta + \eta) \tan \theta \partial_\zeta \psi \cos \theta \sin \theta \, d\eta \, d\zeta \, d\theta = - \int S_2 \psi^* \psi \, dV \\ &+ \frac{1}{2} \iiint \psi^* \sin(\zeta + \eta) \sin^2 \theta \psi \, d\eta \, d\zeta \, d\theta, \\ \int \psi^* S_3 \psi &= -\frac{1}{2} \iiint \psi^* \sin(\zeta + \eta) \partial_\theta \psi \cos \theta \sin \theta \, d\eta \, d\zeta \, d\theta = - \int S_3 \psi^* \psi \, dV \\ &+ \frac{1}{2} \iiint \psi^* \sin(\zeta + \eta) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \psi \, d\eta \, d\zeta \, d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Si sumamos los 3 resultados, se cancelan los segundos términos de cada expresión y se obtiene el resultado de (A.22).

## B El grupo de rotaciones SO(4)

### B.1 Cálculo de operadores conjugados hermíticos.

Vamos a calcular el conjugado hermítico del generador  $\hat{L}_{12}$  de (3.78), el resto se hacen de manera completamente análoga:

$$\langle \psi, \hat{L}_{12} \psi \rangle = \int \psi^* \left( -i \cos \phi_2 \partial_{\phi_1} + i \frac{\sin \phi_2}{\tan \phi_1} \partial_{\phi_2} \right) \psi \, dV. \quad (\text{B.1})$$

Separando en los dos sumandos e integrando por partes:

$$\begin{aligned} -i \iiint \psi^* \cos \phi_2 \partial_{\phi_1} \psi \sin^2 \phi_1 \sin \phi_2 \, d\phi_1 \, d\phi_2 \, d\phi_3 &= i \iiint \partial_{\phi_1} \psi^* \cos \phi_2 \psi \sin^2 \phi_1 \sin \phi_2 \\ &+ \psi^* \cos \phi_2 \psi 2 \sin \phi_1 \cos \phi_1 \sin \phi_2 \, d\phi_1 \, d\phi_2 \, d\phi_3, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} i \iiint \psi^* \frac{\sin \phi_2}{\tan \phi_1} \partial_{\phi_2} \psi \sin^2 \phi_1 \sin \phi_2 \, d\phi_1 \, d\phi_2 \, d\phi_3 &= -i \iiint \partial_{\phi_2} \psi^* \frac{\sin \phi_2}{\tan \phi_1} \psi \sin^2 \phi_1 \sin \phi_2 \\ &+ \psi^* \frac{2 \sin \phi_2 \cos \phi_2}{\tan \phi_1} \psi \sin^2 \phi_1 \, d\phi_1 \, d\phi_2 \, d\phi_3. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En el primer caso se integra por partes en la variable  $\phi_1$  y en el segundo en la variable  $\phi_2$  (el correspondiente a la derivada del operador). En ambos casos, el término de evaluación de la integración por partes se anula porque  $\sin \phi$  se anula en los extremos del rango de los parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Si sumamos los dos términos de nuevo, vemos que el segundo sumando de cada término es el mismo pero con distinto signo, luego solo nos queda la suma del primer sumando de cada término:

$$\langle \psi, \hat{L}_{12} \psi \rangle = \int \left( i \cos \phi_2 \partial_{\phi_1} \psi^* - i \frac{\sin \phi_2}{\tan \phi_1} \partial_{\phi_2} \psi^* \right) \psi \, dV = \langle \hat{L}_{12} \psi, \psi \rangle. \quad (\text{B.4})$$

Deducimos, por tanto, que  $\hat{L}_{12}$  es hermítico.

Ahora comprobaremos los resultados de (3.80):

$$\begin{cases} p_{\phi_1}^\dagger = (-i\partial_{\phi_1})^\dagger = -i\partial_{\phi_1} - 2i \cot \phi_1, \\ p_{\phi_2}^\dagger = (-i\partial_{\phi_2})^\dagger = -i\partial_{\phi_2} - i \cot \phi_2, \\ p_{\phi_3}^\dagger = (-i\partial_{\phi_3})^\dagger = -i\partial_{\phi_3}. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Para ello, utilizaremos integración por partes de manera análoga al cálculo anterior. Para  $p_{\phi_1}^\dagger$  tenemos

$$\begin{aligned} \langle \psi, -i\partial_{\phi_1}\psi \rangle &= -i \int \psi^* \partial_{\phi_1} \psi \, dV = i \int \partial_{\phi_1} \psi^* \psi \, dV + i \int \psi^* \psi (2 \cot \phi_1) \, dV \\ &= \langle (-i\partial_{\phi_1} - 2i \cot \phi_1)\psi, \psi \rangle = \langle p_{\phi_1}^\dagger \psi, \psi \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

donde el término de evaluación se cancela porque se anula el seno en los extremos del rango de la variable  $\phi_1$ . El caso de  $\phi_2$  es completamente análogo. Para  $\phi_3$  hace falta tener en cuenta las condiciones sobre las funciones:

$$\begin{aligned} \langle \psi, -i\partial_{\phi_3}\psi \rangle &= -i \int \psi^* \partial_{\phi_3} \psi \, dV = -i \iint \psi^* \psi \sin^2 \phi_1 \sin \phi_2 \Big|_{\phi_3=0}^{\phi_3=2\pi} d\phi_1 d\phi_2 + i \int \partial_{\phi_3} \psi^* \psi \, dV \\ &= \langle (-i\partial_{\phi_3})\psi, \psi \rangle = \langle p_{\phi_3}^\dagger \psi, \psi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

El término de evaluación se anula por la periodicidad de  $2\pi$  de las funciones  $\psi$ .

## B.2 Soluciones de la ecuación (3.91)

Partimos de la ecuación (3.91):

$$\left( -\partial_{\phi_1}^2 - 2 \cot \phi_1 \partial_{\phi_1} + \frac{l(l+1)}{\sin^2 \phi_1} \right) \psi_1 = n(n+2)\psi_1. \quad (\text{B.8})$$

Lo primero que vamos a hacer es el cambio de variable  $t = \cos \phi_1$ , por lo que tenemos que  $\partial_{\phi_1} = -\sin \phi_1 \partial_t$  y

$$\partial_{\phi_1}^2 = \partial_{\phi_1}(-\sin \phi_1 \partial_t) = -\sin \phi_1 \partial_{\phi_1} \partial_t - \cos \phi_1 \partial_t = \sin^2 \phi_1 \partial_t^2 - \cos \phi_1 \partial_t. \quad (\text{B.9})$$

Si tenemos en cuenta el cambio de variable en esta expresión, obtenemos  $\partial_{\phi_1}^2 = (1-t^2)\partial_t^2 - t\partial_t$ . Sustituyendo estos resultados en la ecuación (B.8) y cambiando de signo resulta:

$$\left( (1-t^2)\partial_t^2 - 3t\partial_t - \frac{l(l+1)}{1-t^2} + n(n+2) \right) \psi_1 = 0. \quad (\text{B.10})$$

Ahora consideramos la transformación  $\psi_1(t) = (1-t^2)^\mu u(t)$ . Calculando las derivadas obtenemos:

$$\begin{aligned} \psi_1' &= (1-t^2)^\mu u' - 2\mu t(1-t^2)^{\mu-1} u, \\ \psi_1'' &= (1-t^2)^\mu u'' - 4\mu t(1-t^2)^{\mu-1} u' + [-2\mu(1-t^2)^{\mu-1} + \mu(\mu-1)(4t^2)(1-t^2)^{\mu-2}] u. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Sustituyendo las expresiones anteriores y dividiendo por  $(1 - t^2)^\mu$ :

$$(1 - t^2)u'' - (4\mu + 3)tu' + [-2\mu + n(n + 2)]u + \frac{1}{1 - t^2}[\mu(\mu - 1)4t^2 + 6t^2\mu - l(l + 1)]u = 0. \quad (\text{B.12})$$

La última expresión entre corchetes se puede escribir como  $t^2(2\mu(2\mu + 1)) - l(l + 1)$ , por lo que si tomamos  $2\mu = l$ , entonces la expresión (B.12) se reduce a

$$(1 - t^2)u'' - (2l + 3)tu' + [n(n + 2) - l(l + 2)]u = 0. \quad (\text{B.13})$$

Ahora comparamos esta ecuación con la ecuación diferencial de los polinomios de Jacobi  $P_\nu^{(\alpha, \beta)}$

$$(1 - t^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)t)y' + \nu(\nu + \alpha + \beta + 1)y = 0 \quad (\text{B.14})$$

y vemos que obtenemos las siguientes ecuaciones para los parámetros:

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= 0 \Rightarrow \alpha = \beta, \\ \alpha + \beta + 2 &= 2l + 3 \Rightarrow \alpha = \beta = l + 1/2, \\ \nu(\nu + \alpha + \beta + 1) &= n(n + 2) - l(l + 2). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Para la última ecuación, podemos considerar el cambio  $n = l + p$ , y entonces pasa a ser  $\nu(\nu + \alpha + \beta + 1) = \nu(\nu + 2l + 2) = p(p + 2l + 2)$ , por lo que obtenemos que  $\nu = p$ . En consecuencia, tenemos que  $u(t) = P_\nu^{(l+1/2, l+1/2)}(t)$ . Recordamos que teníamos que  $t = \cos \phi_1$  y  $\psi_1(t) = (1 - t^2)^\mu u(t)$ , por lo que el resultado final es

$$\begin{aligned} n &= l + \nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \\ \psi_1(\phi_1) &= (\sin \phi_1)^l P_\nu^{(l+1/2, l+1/2)}(\cos \phi_1). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Los polinomios de Jacobi que aparecen en la solución se conocen como polinomios de Gegenbauer, que salvo constante son  $C_\nu^{(\alpha)}(x) = P_\nu^{(\alpha-1/2, \alpha-1/2)}(x)$ . Los polinomios de Gegenbauer que hemos obtenido de esta manera se pueden relacionar también con los polinomios asociados de Legendre. Para ello, partimos de la ecuación de los polinomios asociados de Legendre  $P_l^m(\phi)$  ( $0 < \phi < \pi$ ):

$$(\sin^2 \phi \partial_\phi^2 + \sin \phi \cos \phi \partial_\phi + (l(l + 1) \sin^2 \phi - m^2)) P_l^m = 0, \quad (\text{B.17})$$

donde  $l \in \mathbb{Z}^+$  y  $-l \leq m \leq l$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ . Hacemos el cambio de variable  $t = \cos \phi$  y obtenemos:

$$((1 - t^2)^2 \partial_t^2 - 2t(1 - t^2) \partial_t + ((1 - t^2)l(l + 1) - m^2)) P_l^m = 0. \quad (\text{B.18})$$

Como en el caso de la ecuación de los polinomios de Gegenbauer, vamos a realizar una transformación  $P_l^m(t) = (1 - t^2)^{m/2} y(t)$ , de manera que la ecuación que se obtiene tras sustituir este tipo de funciones y dividir por  $(1 - t^2)^{m/2+1}$  es

$$((1 - t^2) \partial_t^2 - 2(1 + m)t \partial_t - (l(l + 1) - m(m + 1))) y = 0. \quad (\text{B.19})$$

Si comparamos esta ecuación con la de los polinomios de Gegenbauer  $C_\nu^{(\lambda)}$  (que podemos obtener de (B.14) con  $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ ):

$$((1 - t^2) \partial_t^2 - (2\lambda + 1)t \partial_t + \nu(\nu + 2\lambda)) C_\nu^{(\lambda)} = 0, \quad (\text{B.20})$$

vemos que ambas ecuaciones coinciden si tomamos  $m = \lambda - 1/2$  y  $l = (\lambda + \nu) - 1/2$ . Si ahora observamos que  $l = m + \nu$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ,  $\nu = 0, 1, \dots$ , entonces podemos escribir que

$$y(t) = C_{l-m}^{(m+1/2)}(t). \quad (\text{B.21})$$

Juntando todo lo que hemos ido comentando, tenemos que

$$P_l^m(\cos \phi) = (\sin \phi)^m C_{l-m}^{(m+1/2)}(\cos \phi) = (\sin \phi)^m P_{l-m}^{(m,m)}(\cos \phi), \quad (\text{B.22})$$

donde  $P_l^m$  son los polinomios asociados de Legendre,  $P_\nu^{(\alpha,\beta)}$  los polinomios de Jacobi y  $C_\nu^{(\alpha)}$  los polinomios de Gegenbauer.

## C Factorizaciones estándar del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller en 1D

### C.1 Cálculo de conmutadores de las factorizaciones

Comenzamos calculando los conmutadores de los operadores sin índices  $\{\tilde{M}, \tilde{M}^+, \tilde{M}^-\}$ :

$$\begin{aligned} [\tilde{M}^-, \tilde{M}^+] \psi_{(\alpha,\beta)}^n &= \frac{1}{4} (M_{\alpha-1,\beta-1}^- M_{\alpha-1,\beta-1}^+ - M_{\alpha,\beta}^+ M_{\alpha,\beta}^-) \psi_{(\alpha,\beta)}^n \\ &= \frac{1}{4} (E_{(\alpha,\beta)}^n - \mu_{\alpha-1,\beta-1} - E_{(\alpha,\beta)}^n + \mu_{\alpha,\beta}) \psi_{(\alpha,\beta)}^n \\ &= \frac{1}{4} ((\alpha + \beta + 1)^2 - (\alpha + \beta - 1)^2) \psi_{(\alpha,\beta)}^n = (\alpha + \beta) \psi_{(\alpha,\beta)}^n = -2\tilde{M} \psi_{(\alpha,\beta)}^n, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

donde hemos utilizado las factorizaciones del hamiltoniano (4.4). Para los siguientes conmutadores, utilizamos la expresión de la acción de los operadores (4.14):

$$\begin{aligned} [\tilde{M}, \tilde{M}^+] \psi_{(\alpha,\beta)}^n &= \frac{1}{2} (\tilde{M} M_{\alpha-1,\beta-1}^+ - M_{\alpha-1,\beta-1}^+ \tilde{M}) \psi_{(\alpha,\beta)}^n \\ &= \frac{1}{2} (2\sqrt{(n+1)(\alpha+\beta+n)} \tilde{M} \psi_{(\alpha-1,\beta-1)}^{n+1} + \frac{1}{2} (\alpha + \beta) M_{\alpha-1,\beta-1}^+ \psi_{(\alpha,\beta)}^n) \\ &= \frac{1}{2} (-\sqrt{(n+1)(\alpha+\beta+n)} (\alpha + \beta - 2) \\ &\quad + (\alpha + \beta) \sqrt{(n+1)(\alpha+\beta+n)}) \psi_{(\alpha-1,\beta-1)}^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} (2\sqrt{(n+1)(\alpha+\beta+n)}) \psi_{(\alpha-1,\beta-1)}^{n+1} = \frac{1}{2} M_{\alpha-1,\beta-1}^+ \psi_{(\alpha,\beta)}^n = \tilde{M}^+ \psi_{(\alpha,\beta)}^n. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

De manera completamente análoga se obtiene el conmutador restante:

$$\begin{aligned} [\tilde{M}, \tilde{M}^-] \psi_{(\alpha,\beta)}^n &= \frac{1}{2} (\tilde{M} M_{\alpha,\beta}^- - M_{\alpha,\beta}^- \tilde{M}) \psi_{(\alpha,\beta)}^n \\ &= \frac{1}{2} (-2\sqrt{n(\alpha+\beta+n+1)}) \psi_{(\alpha+1,\beta+1)}^{n-1} = -\frac{1}{2} M_{\alpha,\beta}^- \psi_{(\alpha,\beta)}^n = -\tilde{M}^- \psi_{(\alpha,\beta)}^n. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Juntando los resultados anteriores, hemos obtenido que el conjunto de operadores  $\{\tilde{M}, \tilde{M}^+, \tilde{M}^-\}$  satisface las relaciones de conmutación

$$[\tilde{M}^-, \tilde{M}^+] = -2\tilde{M}, \quad [\tilde{M}, \tilde{M}^\pm] = \pm\tilde{M}^\pm. \quad (\text{C.4})$$

Ahora vamos a ver que los dos conjuntos de operadores sin índices,  $\{\tilde{M}, \tilde{M}^\pm, \}$  y  $\{\tilde{N}, \tilde{N}^\pm, \}$ , conmutan entre sí. Para comprobarlo, calculamos directamente los conmutadores sobre una autofunción del hamiltoniano:

$$[\tilde{M}, \tilde{N}]\psi_{(\alpha, \beta, \epsilon)} = \frac{1}{4}((-\alpha + \beta)(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)(-\alpha + \beta))\psi_{(\alpha, \beta, \epsilon)} = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} [\tilde{M}^+, \tilde{N}^+]\psi_{(\alpha+1, \beta+1, \epsilon)} &= \tilde{M}^+ \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon - \alpha + \beta - 1)(\epsilon + \alpha - \beta + 1)} \psi_{(\alpha+2, \beta, \epsilon)} \\ &\quad - \tilde{N}^+ \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon + \alpha + \beta + 1)(\epsilon - \alpha - \beta - 1)} \psi_{(\alpha, \beta, \epsilon)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

donde la última igualdad se da porque al aplicar los operadores sobre las autofunciones con esos parámetros, se obtienen como coeficientes precisamente los que tenía el otro sumando.

De similar manera, podemos calcular

$$\begin{aligned} [\tilde{M}^+, \tilde{N}^-]\psi_{(\alpha+1, \beta+1, \epsilon)} &= \tilde{M}^+ \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon - \alpha + \beta + 1)(\epsilon + \alpha - \beta - 1)} \psi_{(\alpha, \beta+2, \epsilon)} \\ &\quad - \tilde{N}^- \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon + \alpha + \beta + 1)(\epsilon - \alpha - \beta - 1)} \psi_{(\alpha, \beta, \epsilon)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

donde la última igualdad se da manera análoga al conmutador anterior.

Por otro lado, los conmutadores  $[\tilde{M}^\pm, \tilde{N}]$  y  $[\tilde{N}^\pm, \tilde{M}]$  son 0 directamente porque  $\tilde{M}$  y  $\tilde{N}$  son diagonales (sería similar al conmutador  $[\tilde{M}, \tilde{N}]$  que hemos calculado antes).

Para los conmutadores restantes, basta darse cuenta de que los podemos obtener conjugando, ya que  $([\tilde{M}^+, \tilde{N}^+])^\dagger = -[\tilde{M}^-, \tilde{N}^-] = 0$  y  $([\tilde{M}^+, \tilde{N}^-])^\dagger = -[\tilde{M}^-, \tilde{N}^+] = 0$ .

## C.2 Relación de las representaciones de $\mathfrak{so}(4)$ con el hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller

Consideramos el operador de Casimir que hemos obtenido en (3.57):

$$A = \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\eta^2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \partial_\zeta^2 + 2 \cot 2\theta \partial_\theta + \partial_\theta^2. \quad (\text{C.8})$$

Vamos a realizar una transformación  $\psi(\eta, \zeta, \theta) = f(\theta) \tilde{\psi}(\eta, \zeta, \theta)$  para eliminar el término en  $\partial_\theta$ . De esta manera vamos a obtener un operador  $A' = f^{-1} A f$  que tenga solo derivadas segundas y términos sin derivadas. Para ello, tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \partial_{x_i}(f\tilde{\psi}) &= \partial_{x_i} f \tilde{\psi} + f \partial_{x_i} \tilde{\psi}, \\ \partial_{x_i}^2(f\tilde{\psi}) &= \partial_{x_i}^2 f \tilde{\psi} + 2\partial_{x_i} f \partial_{x_i} \tilde{\psi} + f \partial_{x_i}^2 \tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Aplicando  $A$  a  $\psi(\eta, \zeta, \theta) = f(\theta)\tilde{\psi}(\eta, \zeta, \theta)$  obtenemos:

$$A\psi = \frac{f}{\sin^2\theta}\partial_\eta^2\tilde{\psi} + \frac{f}{\cos^2\theta}\partial_\zeta^2\tilde{\psi} + f\partial_\theta^2\tilde{\psi} + (2\partial_\theta f + 2f\cot 2\theta)\partial_\theta\tilde{\psi} + 2\cot 2\theta\partial_\theta f\tilde{\psi} + \partial_\theta^2 f\tilde{\psi}. \quad (\text{C.10})$$

La condición de que se anule el coeficiente de  $\partial_\theta\tilde{\psi}$  nos da la siguiente ecuación diferencial para  $f$ :

$$2\partial_\theta f + 2f\cot 2\theta = 0, \quad (\text{C.11})$$

cuya solución es  $f(\theta) = \frac{c}{\sqrt{\sin 2\theta}}$ . Por tanto, si consideramos  $f$  con esa forma obtenemos

$$A' = f^{-1}Af = \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\eta^2 + \frac{1}{\cos^2\theta}\partial_\zeta^2 + \partial_\theta^2 + f^{-1}(2\cot 2\theta\partial_\theta f + \partial_\theta^2 f). \quad (\text{C.12})$$

Sustituyendo  $f$  y sus derivadas obtenemos finalmente

$$A' = \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\eta^2 + \frac{1}{\cos^2\theta}\partial_\zeta^2 + \partial_\theta^2 + \frac{1/4}{\sin^2\theta} + \frac{1/4}{\cos^2\theta} + 1. \quad (\text{C.13})$$

Vemos que la parte final del operador recuerda a la forma del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller (4.1). Para llegar hasta esa expresión, vamos a considerar soluciones en variables separadas  $\psi(\eta, \zeta, \theta) = H(\eta)Z(\zeta)\Theta(\theta)$  (olvidándonos ya de la tilde en  $\psi$ ). Sustituyendo en la ecuación de autovalores  $A'\psi = E\psi$  la expresión anterior y dividiendo por  $\psi$  obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 H}{\partial\eta^2}\frac{1}{H} + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2 Z}{\partial\zeta^2}\frac{1}{Z} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\frac{1}{\Theta} + \frac{1/4}{\sin^2\theta} + \frac{1/4}{\cos^2\theta} = E - 1 = E'. \quad (\text{C.14})$$

Reorganizando obtenemos

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\eta^2}\frac{1}{H} = \sin^2\theta \left( E' - \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2 Z}{\partial\zeta^2}\frac{1}{Z} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\frac{1}{\Theta} - \frac{1/4}{\sin^2\theta} - \frac{1/4}{\cos^2\theta} \right). \quad (\text{C.15})$$

Puesto que la expresión del lado izquierdo de la igualdad depende solo de  $\eta$  y la de la derecha de  $\zeta$  y  $\theta$ , ambas expresiones deben ser iguales a una constante  $-m^2$ . Para la variable  $\eta$  tenemos:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\eta^2} = -m^2 H \Rightarrow H_m(\eta) = e^{im\eta}. \quad (\text{C.16})$$

De nuevo, reorganizando (C.15) y teniendo en cuenta lo anterior obtenemos:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\zeta^2}\frac{1}{Z} = \cos^2\theta \left( E' - \frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\frac{1}{\Theta} - \frac{1/4}{\sin^2\theta} - \frac{1/4}{\cos^2\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right). \quad (\text{C.17})$$

Razonando de manera análoga al caso anterior tenemos que

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\zeta^2} = -n^2 Z \Rightarrow Z_n(\zeta) = e^{in\zeta}. \quad (\text{C.18})$$

Si ahora sustituimos  $H_m$  y  $Z_n$  en (C.14), obtenemos la ecuación de autovalores que debe satisfacer  $\Theta(\theta)$

$$\left( \partial_\theta^2 + \frac{1/4 - m^2}{\sin^2\theta} + \frac{1/4 - n^2}{\cos^2\theta} \right) \Theta(\theta) = E'\Theta(\theta), \quad (\text{C.19})$$

que es la ecuación de autovalores del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller (4.1) (salvo el signo). De hecho, si consideramos los operadores (3.53) y (3.54) multiplicados por  $i$  ya mencionamos que obtenemos operadores hermíticos, y al calcular el operador de casimir con estos operadores, se obtiene un signo menos global, que entonces nos daría directamente la ecuación del hamiltoniano de tipo Pöschl-Teller. En ese caso, obtendríamos los mismos resultados anteriores pero la relación de los autovalores sería  $E' = E + 1$ , que por claridad denotaremos  $E_{PT} = E_{s_0(4)} + 1$ .

### C.3 Relación entre los operadores $\hat{X}$ , $\hat{Y}$ y $\tilde{M}$ , $\tilde{N}$

Partimos de las expresiones de (4.50) y (4.51):

$$\begin{cases} \frac{1}{f}i\hat{X}^+f = \frac{1}{2}e^{-i(\zeta+\eta)}(-i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta - \cot 2\theta + \partial_\theta), \\ \frac{1}{f}i\hat{X}^-f = \frac{1}{2}e^{i(\zeta+\eta)}(-i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta + \cot 2\theta - \partial_\theta), \\ \frac{1}{f}i\hat{X}_3f = \frac{i}{2}(\partial_\eta + \partial_\zeta), \end{cases} \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{cases} \frac{1}{f}i\hat{Y}^+f = \frac{1}{2}e^{i(\zeta-\eta)}(i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta + \cot 2\theta - \partial_\theta), \\ \frac{1}{f}i\hat{Y}^-f = \frac{1}{2}e^{-i(\zeta-\eta)}(i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta - \cot 2\theta + \partial_\theta), \\ \frac{1}{f}i\hat{Y}_3f = \frac{i}{2}(\partial_\eta - \partial_\zeta). \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

Para los operadores transformados de  $\hat{X}_3$  y  $\hat{Y}_3$  basta considerar directamente la sustitución  $\partial_\eta \rightarrow im$ ,  $\partial_\zeta \rightarrow in$  para obtener:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= -\frac{1}{2}(m+n) = \tilde{M}, \\ \tilde{Y} &= -\frac{1}{2}(m-n) = \tilde{N}. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Para los operadores transformados de  $\hat{X}^-$  y  $\hat{Y}^-$ , basta con tener en cuenta que  $\cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta$  tras realizar la sustitución que hemos mencionado anteriormente. Por ejemplo para  $\tilde{X}^-$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}^- &= \frac{1}{2}e^{i(\zeta+\eta)}(m\cot\theta - n\tan\theta + \cot 2\theta - \partial_\theta) \\ &= \frac{1}{2}e^{i(\zeta+\eta)}((m+1/2)\cot\theta - (n+1/2)\tan\theta - \partial_\theta) = e^{i(\zeta+\eta)}\tilde{M}^-. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Para  $\tilde{Y}^-$  se obtiene que  $\tilde{Y}^- = -e^{-i(\zeta-\eta)}\tilde{N}^-$ . Finalmente, para los operadores transformados de  $\hat{X}^+$  y  $\hat{Y}^+$ , hay que cambiar de lado la exponencial antes de realizar las operaciones anteriores. Para ello tenemos en cuenta que

$$\partial_\phi e^{-i\phi} = -ie^{-i\phi} + e^{-i\phi}\partial_\phi \Rightarrow ie^{-i\phi}\partial_\phi = (i\partial_\phi - 1)e^{-i\phi} \quad (\text{C.24})$$

y análogamente  $ie^{i\phi}\partial_\phi = (i\partial_\phi + 1)e^{i\phi}$ . Considerando por ejemplo el operador transformado

de  $\hat{X}^+$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f}i\hat{X}^+f &= \frac{1}{2}e^{-i(\zeta+\eta)}(-i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta - \cot 2\theta + \partial_\theta) \\
&= \frac{1}{2}(-\cot\theta(i\partial_\eta - 1) + \tan\theta(i\partial_\zeta - 1) - \cot 2\theta + \partial_\theta)e^{-i(\zeta+\eta)} \\
&= \frac{1}{2}(-i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta + \cot 2\theta + \partial_\theta)e^{-i(\zeta+\eta)}.
\end{aligned} \tag{C.25}$$

Para el operador transformado de  $\hat{Y}^+$  se obtiene análogamente:

$$\frac{1}{f}i\hat{Y}^+f = \frac{1}{2}(i\cot\theta\partial_\eta + i\tan\theta\partial_\zeta - \cot 2\theta - \partial_\theta)e^{i(\zeta-\eta)}. \tag{C.26}$$

Vemos que en ambos casos hemos obtenido en la parte que está entre paréntesis la misma expresión que teníamos para los operadores  $\hat{X}^-$  y  $\hat{Y}^-$  en (C.20) y (C.21) (exceptuando el signo de  $\partial_\theta$ ), por lo que realizando el mismo procedimiento que en los casos anteriores obtenemos que  $\tilde{X}^+ = \tilde{M}^+e^{-i(\zeta+\eta)}$  y  $\tilde{Y}^+ = -\tilde{N}^+e^{i(\zeta-\eta)}$ .

---

## Bibliografía

- [1] H. Bacry. Lectures on Group Theory and Particle Theory. Gordon & Breach, 1977.
- [2] J.A. Calzada, S. Kuru, J. Negro, M.A. del Olmo. Dynamical algebras of general two-parametric Pöschl-Teller Hamiltonians. *Annals of Physics* 327 (2012) 808-822.
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe. Quantum Mechanics, Volume 1. Wiley VCH, 2019.
- [4] B. C. Hall. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An elementary Introduction. Springer, 2004.
- [5] F.J. Herranz, Á. Ballesteros. Superintegrability on Three-Dimensional Riemannian and Relativistic Spaces of Constant Curvature. *Sigma* 2 (2006), Paper 010.
- [6] H.F. Jones. Groups, Representations and Physics. CRC Press, 1998.
- [7] Wu-Ki Tung. Group theory in physics. World Scientific, 1985.